

**Centro de Investigación Científica y de Educación  
Superior de Ensenada, Baja California**



---

**Maestría en Ciencias  
en Ciencias de la Tierra  
con orientación en Geofísica Aplicada**

---

**Determinación estable del rumbo magnetotelúrico utilizando  
los criterios de fórmulas analíticas**

Tesis  
para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

**Nestor Fernando Delgadillo Jauregui**

Ensenada, Baja California, México  
2019

Tesis defendida por  
**Nestor Fernando Delgadillo Jauregui**

y aprobada por el siguiente Comité

---

Dr. Enrique Gómez Treviño  
Director de tesis

Miembros del comité

Dr. Carlos Francisco Flores Luna

Dr. Jorge Adrián Rosales Casián



---

**Dr. Jonas De Dios De Basabe Delgado**  
Coordinador del Posgrado en Ciencias de la Tierra

---

**Dra. Rufina Hernández Martínez**  
Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Nestor Fernando Delgadillo Jauregui como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Ciencias de la Tierra con orientación en Geofísica Aplicada.

### **Determinación estable del rumbo magnetoteléurico utilizando los criterios de fórmulas analíticas**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Enrique Gómez Treviño  
Director de Tesis

La determinación del rumbo de estructuras bidimensionales (2D) mediante mediciones magnetoteléuricas por lo general se realiza utilizando fórmulas analíticas. Los elementos del tensor de impedancias simplemente se sustituyen en las fórmulas periodo por periodo y se obtiene el rumbo para los periodos disponibles. En principio, si se trata de una estructura 2D el rumbo para todos los periodos debería de ser más o menos uniforme. Sin embargo, en la presencia de ruido las fórmulas tienden a ser muy inestables y los valores del rumbo no son confiables. En esta tesis se analizan las fórmulas tradicionales de Swift, Bahr, Tensor de fase y WAL, como se les conoce comúnmente. Se describe cómo estabilizarlas mediante dos técnicas. La primera se basa en un trabajo reciente en relación con el tensor de fase. La técnica se extiende a las demás fórmulas con resultados razonablemente buenos. Sin embargo, la contribución principal de la tesis consiste en desenfocar la atención en las fórmulas, y enfocarse en su lugar en los criterios utilizados para desarrollar las fórmulas. Con esto se supera la limitación de estimar el rumbo periodo por periodo. Los criterios, a diferencia de las fórmulas, se pueden aplicar a cualquier número de periodos incluyendo un sondeo completo. En el caso de datos que no estén distorsionados por efectos electro-galvánicos, pero sí por errores aleatorios, el criterio más efectivo resultó el de Swift y el peor el de WAL. Por otro lado, para datos distorsionados el peor es el de Swift y el mejor el del tensor de fase. Las pruebas realizadas indican que pueden utilizarse como una alternativa viable al algoritmo estándar STRIKE, con el cual se hacen las comparaciones finales.

**Palabras clave:** Swift, Bahr, tensor de fase, WAL, strike

Abstract of the thesis presented by Nestor Fernando Delgadillo Jauregui as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Earth Sciences with orientation in Applied Geophysics.

### **Stable determination of magnetotelluric strike using the criteria of analytical formulas**

Abstract approved by:

---

Dr. Enrique Gómez Treviño  
Thesis Director

The determination of the direction of two-dimensional (2D) structures by magnetotelluric measurements is usually done using analytical formulas. The elements of the impedance tensor are simply replaced in the formulas period by period and the strike is obtained for the available periods. In principle, if it is a 2D structure, the strike for all periods should be more or less uniform. However, in the presence of noise the formulas tend to be very unstable and the values of the strike are not reliable. In this thesis the traditional formulas of Swift, Bahr, Phase Tensor and WAL, as they are commonly known, are analyzed. It describes how to stabilize them using two techniques. The first is based on recent work in relation to the phase tensor. The technique extends to the other formulas with reasonably good results. However, the main contribution of the thesis is to blur the attention in the formulas, and focus instead on the criteria used to develop the formulas. This exceeds the limitation of estimating the course period by period. The criteria, unlike the formulas, can be applied to any number of periods including a full survey. In the case of data that are not distorted by electro-galvanic effects, but by random errors, the most effective criterion was that of Swift and the worst was that of WAL. On the other hand, for distorted data the worst is the Swift and the best the phase tensor. The tests performed indicate that they can be used as a viable alternative to the STRIKE standard algorithm, with which the final comparisons are made.

**Key words:** Swift, Bahr, phase tensor, WAL, strike

## **Dedicatoria**

A mis padres, Lucila y Pablo Antonio. Esta meta es toda suya, sin ustedes nada de esto fuera posible.

A mi abuelo David Jauregui. Siempre estuviste presente.

A mis hermanos y familia. Que siempre me alentaron para realizar este posgrado.

## Agradcimientos

Al CICESE por permitirme realizar mis estudios de Maestría.

Al CONACYT por apoyarme por medio de beca, con número de becario 16283981.

A mi director, Dr. Enrique Gómez Treviño por su infinita paciencia en el desarrollo de este trabajo. Eternamente agradecido por la humildad al compartir sus conocimientos y experiencias.

A mis sinodales, los Dres. Carlos F. Flores Luna y Jorge Adrián Rosales Casián, por sus consejos, observaciones y enorme paciencia.

A mis grandes amigos en el posgrado: Paul, Adrián, Félix, Emmanuel, Gaby, el equipo de basquetbol de cicese por mencionar algunos, gracias a todos por las palabras de aliento y experiencias vividas.

A Joselyne Sánchez por siempre apoyarme y estar conmigo en todo momento de mi estancia en el posgrado.

A Mayra Cuellar por permitirme utilizar su cuenta del clúster. A Roció Arellano por su ayuda en la parte final del trabajo.

A todo el personal de la División de Ciencias de la Tierra que hizo posible realizar este trabajo.

## Tabla de contenido

	Página
Resumen en español.....	ii
Resumen en inglés.....	iii
Dedicatoria.....	iv
Agradcimientos.....	v
Lista de figuras.....	viii
<b>Capítulo 1. Introducción</b>	
1.1 El método magnetotelégrafo.....	1
1.2 Tensor de impedancias.....	2
1.3 Rotación de coordenadas.....	6
1.4 Distorsiones electro-galvánicas.....	8
1.5 Formulas analíticas para la determinación del rumbo magnetotelégrafo.....	9
1.6 Objetivos.....	10
<b>Capítulo 2. Inestabilidad y estabilización de las fórmulas analíticas</b>	
2.1 Introducción.....	11
2.2 El conjunto de datos far-hi.....	11
2.3 Tensor de fase.....	14
2.4 Swift.....	17
2.5 Bahr.....	20
2.6 WAL.....	23
2.7 Conclusión.....	26
<b>Capítulo 3. Los criterios detrás de las formulas analíticas: extensión para todos los periodos</b>	
3.1 Introducción.....	27
3.2 Criterio de Swift.....	27
3.3 Criterio de Bahr.....	30
3.4 Criterio del tensor de fase.....	32
3.5 Criterio de WAL.....	34
3.6 Comparación de los cuatro criterios con datos con ruido pero sin distorsiones.....	36
3.7 Análisis de cada criterio agregando distorsiones y ruido simultáneamente.....	37
3.8 Conclusión.....	40

**Capítulo 4. Comparación con el algoritmo STRIKE**

4.1 Introducción..... 42

4.2 Las fórmulas estabilizadas vs. el algoritmo STRIKE ..... 42

4.3 Los criterios de las fórmulas vs. el algoritmo STRIKE ..... 46

4.4 Conclusión ..... 48

**Capítulo 5. Conclusiones ..... 50**

**Literatura citada ..... 51**

## Lista de figuras

Figura	Página
1 Arreglo del método magnetotelúrico. Por lo general se miden solo las componentes horizontales del campo magnético, aunque ocasionalmente se mide también la vertical como se muestra en la figura. Se utilizan para ello magnetómetros direccionales o bobinas de inducción. Para los campos eléctricos se utilizan cables puestos a tierra mediante electrodos impolarizables.....	1
2 Rotación del marco $(x,y)$ al marco $(x',y')$ a través de un ángulo $\theta$ .....	7
3 Direcciones del rumbo (strike) para el conjunto de datos far-hi obtenidas aplicando las fórmulas analíticas existentes según Jones (2012).....	10
4 a) Resistividad aparente para el conjunto de datos <i>far-hi</i> . b) Fases para el conjunto de datos far-hi. Valores tomados de las gráficas de Jones (2012).....	12
5 Geometría regional del modelo de una falla y vista en planta de una anomalía semi-esférica (no a escala). La figura se tomó de Jones (2012). La flecha que indica 22.5 grados debería apuntar al punto del sitio del sondeo que está localizado a esos grados del rumbo. El rumbo regional es de 30 grados.....	13
6 Ángulos de pre-rotación utilizando la fórmula del Tensor de fase.....	15
7 Cálculo del rumbo utilizando el ángulo de pre-rotación positivo, para el caso del tensor de fase.....	16
8 Ángulos de pre-rotación utilizando la fórmula de Swift (1967).....	19
9 Cálculo del rumbo utilizando el ángulo de pre-rotación positivo, para el caso de Swift..	20
10 Ángulos de pre-rotación utilizando la fórmula de Bahr.....	22
11 Cálculo del rumbo utilizando el ángulo de pre-rotación positivo, para el caso de Bahr.....	23
12 Ángulos de pre-rotación utilizando la fórmula de WAL.....	25
13 Cálculo del rumbo utilizando el ángulo de pre-rotación positivo, para el caso de WAL.....	26
14 Rumbo calculado para el criterio de Swift. Sin distorsiones y sin error.....	29
15 Rumbo calculado para el criterio de Swift agregando error Gaussiano de 5%. Sin distorsiones.....	29
16 Rumbo calculado para el criterio de Bahr. Sin distorsiones y sin error.....	31
17 Rumbo calculado para el criterio de Bahr agregando error Gaussiano de 5%. Sin distorsiones.....	31

18	Rumbo calculado para el criterio de tensor de fase. Sin distorsiones y sin error.....	33
19	Rumbo calculado para el criterio de tensor de fase agregando error Gaussiano de 5%. Sin distorsiones.....	33
20	Rumbo calculado para el criterio de WAL. Sin distorsiones y sin error.....	35
21	Rumbo calculado para el criterio de WAL agregando ruido Gaussiano de 5%. Sin distorsiones.....	35
22	Rumbo para cada uno de los criterios utilizando los datos COPROD2S1. Sin distorsión y sin error. La línea a 45 grados indica el rumbo verdadero o supuesto.....	36
23	Rumbo para cada uno de los criterios. Error de 5%, sin distorsiones. La línea a 45 grados indica el rumbo verdadero o supuesto.....	37
24	Rumbo calculado para el criterio de Swift agregando twist y shear de 20° respectivamente. Error de 5%.....	38
25	Rumbo calculado para el criterio de Bahr agregando twist y shear de 20° respectivamente. Error de 5%.....	38
26	Rumbo calculado para el criterio de Tensor de Fase agregando twist y shear de 20° respectivamente. Error de 5%.....	39
27	Rumbo calculado para el criterio de WAL agregando twist y shear de 20° respectivamente. Error de 5%.....	39
28	Rumbo y barras de error calculado para cada uno de los criterios, agregando twist y shear de 20° respectivamente. Error de 5%. La línea a 45 grados indica el rumbo verdadero o supuesto.....	40
29	Resistividad aparente del sondeo 15 en el conjunto de datos COPROD2S1.....	43
30	Resistividad aparente del sondeo 30 en el conjunto de datos COPROD2S1.....	43
31	Resistividad aparente del sondeo 15, agregando distorsiones.....	44
32	Resistividad aparente del sondeo 30, agregando distorsiones.....	44
33	Rumbo con sus respectivas barras de error para el sondeo 15, utilizando datos distorsionados.....	45
34	Rumbo con sus respectivas barras de error para el sondeo 30, utilizando datos distorsionados.....	46
35	Rumbo con sus respectivas barras de error para el sondeo 15, utilizando datos distorsionados.....	47

36 Rumbo con sus respectivas barras de error para el sondeo 30, utilizando datos distorsionados.....

48

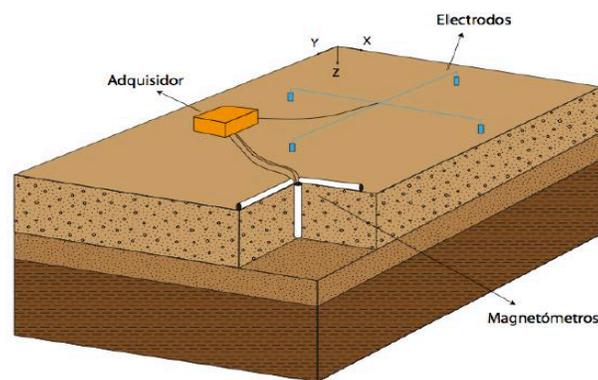
## Capítulo 1. Introducción

---

### 1.1 El método magnetotelúrico

El método magnetotelúrico (MT) de exploración geofísica es un método electromagnético (EM) propuesto por Cagniard (1953), que permite obtener información sobre la variación de resistividad eléctrica del subsuelo (Figura 1). Este método mide la intensidad de los campos eléctricos y magnéticos en la superficie de la Tierra, los cuales son inducidos por corrientes eléctricas naturales que oscilan a diferentes frecuencias y diferentes direcciones en la ionósfera.

Para el caso de una tierra estratificada horizontalmente, la relación de las componentes horizontales de los campos eléctrico y magnético, las cuales se representan como  $E$  y  $H$  respectivamente, proporciona una impedancia  $Z=E/H$ , la cual es una cantidad escalar compleja que depende del periodo de la oscilación de los campos. Para el caso general en el que la resistividad varía tanto vertical como horizontalmente, la impedancia se convierte en un tensor de orden 2, es decir cuatro números complejos. Generalmente las mediciones se realizan a lo largo de perfiles con diferentes ubicaciones distantes unas de otras, en donde se obtienen tensores para diferentes periodos, desde fracciones de segundo hasta más de 1,000 segundos.



**Figura 1.** Arreglo del método magnetotelúrico. Por lo general se miden solo las componentes horizontales del campo magnético, aunque ocasionalmente se mide también la vertical como se muestra en la figura. Se utilizan para ello magnetómetros direccionales o bobinas de inducción. Para los campos eléctricos se utilizan cables puestos a tierra mediante electrodos impolarizables.

## 1.2 Tensor de impedancias

En su concepción original del método magnetoteléurico, Cagniard (1953) supuso una onda electromagnética incidiendo verticalmente sobre la superficie de una tierra estratificada horizontalmente. En este modelo no hay dirección preferencial para el flujo de corriente inducida en la tierra, excepto la dirección que imprime el propio campo eléctrico incidente. El campo incidente no tiene que tener una dirección determinada en el sentido de estar linealmente polarizada. De hecho, el campo incidente podría estar elípticamente polarizado, o sea con amplitudes y fases diferentes en dos direcciones cualquiera. Debido a que no hay variaciones laterales el campo eléctrico resultante de la interacción con la tierra será una versión escalada del incidente, con la misma elipse de polarización pero de dimensiones diferentes. Las dimensiones dependerán de dos factores: 1) la intensidad del campo incidente para el periodo y 2) el efecto de la tierra para ese periodo. Obviamente el primer factor no es de interés. Para neutralizarlo se normaliza el campo eléctrico por el campo magnético para el mismo periodo. El resultado es una impedancia que no depende de la intensidad del campo incidente ni de su polarización, y que depende solo del efecto de la tierra. Suponiendo un sistema coordenado x-y sobre la superficie de la tierra y un campo eléctrico  $E_x$  y uno magnético  $H_y$ , la impedancia  $Z_{xy}$  se expresa como

$$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y} \quad (1)$$

Las unidades de la impedancia son  $\frac{V/m}{A/m} = \Omega [Ohm]$ . Como no hay dirección preferencial, no importa en que dirección se consideren los campos, por lo que  $Z_{xy} = Z_{yx}$ .

Las cosas se complican un poco cuando existen variaciones laterales de resistividad. Esto se debe a que dos polarizaciones diferentes del campo incidente producirán dos valores diferentes de  $Z_{xy}$ . Imaginemos un campo incidente polarizado linealmente en una dirección, y otro polarizado en la dirección perpendicular. Ahora pensemos que medimos en la superficie el campo eléctrico resultante en cada uno de los casos. En general, las dos mediciones serán diferentes porque una será más afectada que la otra por las variaciones laterales de resistividad. Por otro lado, no se puede hacer nada para controlar o conocer la polarización del campo incidente, por lo que se deberá eliminar esta dependencia, porque de otra manera las impedancias tendrán el efecto caprichoso de la fuente, la cual se sabe que cambia constantemente de polarización. La solución a este problema de la polarización de la fuente es el tensor de impedancias. En lo que sigue se presentan los pasos para llegar al tensor a partir de consideraciones

básicas según se describe en Cantwell (1960) y Gómez Treviño et al. (2013). Supongamos un campo eléctrico incidente  $E_{xi}$  en la dirección  $x$ . Asociado con este campo, en la tierra existirá otro campo en la misma dirección  $x$ . Llamemos a este campo  $E_{xx}$ . La cuestión es relacionar  $E_{xx}$  con  $E_{xi}$ . Para ello vamos a identificar a  $E_{xi}$  como la entrada a un sistema lineal (la tierra) y a  $E_{xx}$  como la salida correspondiente. Esto es, que ambas señales conservan el mismo periodo y que la salida se ve modificada tanto en su amplitud como en su fase. En otras palabras, que

$$E_{xx} = k_{xx}^E E_{xi}, \quad (2)$$

donde la constante de proporcionalidad es compleja. A este campo debemos agregarle otra contribución que vendría del campo incidente  $E_{yi}$  en la dirección  $y$ . Es necesario considerar que este campo en la dirección  $y$  podría generar corrientes eléctricas en la dirección  $x$ . Esto es porque las variaciones laterales de resistividad hacen precisamente eso, desviar las corrientes. Llamaremos a este campo  $E_{xy}$  el cual tendría asociada una constante  $k_{xy}^E$ . Procediendo de igual manera para  $E_{yi}$  se pueden establecer las siguientes relaciones.

$$\begin{aligned} E_{xy} &= k_{xy}^E E_{yi} \\ E_{yx} &= k_{yx}^E E_{xi} \\ E_{yy} &= k_{yy}^E E_{yi} \end{aligned} \quad (3)$$

Considerando que el campo total que se mediría en la dirección  $x$  es  $E_x = E_{xx} + E_{xy}$  y en la dirección  $y$  es  $E_y = E_{yx} + E_{yy}$ , el resultado se puede expresar de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{xx}^E & k_{xy}^E \\ k_{yx}^E & k_{yy}^E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{xi} \\ E_{yi} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

De la expresión 4 las únicas cantidades que conocemos son las mediciones  $E_x$  y  $E_y$ . Los campos incidentes no se pueden conocer y por ende tampoco las constantes de proporcionalidad. Para completar el análisis se consideran ahora los correspondientes campos magnéticos. Entonces de la misma manera que para los campos eléctricos tenemos,

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{xx}^H & k_{xy}^H \\ k_{yx}^H & k_{yy}^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{xi} \\ H_{yi} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Al igual que en el caso de los campos eléctricos, las únicas cantidades conocidas son  $H_x$  y  $H_y$ , ya que son las cantidades que medimos. Nótese que no se ha supuesto nada particular con respecto a los campos incidentes. Estos pueden tener cualquier tipo de polarización así como diferentes intensidades o amplitudes. La única suposición ha sido que la tierra se comporta como un sistema lineal. Además, es importante recalcar que las constantes de proporcionalidad dependen de la distribución de resistividad y no de la polarización de los campos ni de sus intensidades.

Las ecuaciones 4 y 5 no son útiles en la practica, sin embargo si las combinamos se puede eliminar los campos incidentes  $E_{xi}$ ,  $E_{yi}$ ,  $H_{xi}$  y  $H_{yi}$  si los consideramos para una onda plana tal que,  $E_{xi} = Z_i H_{yi}$  y  $E_{yi} = Z_i H_{xi}$ , donde  $Z_i$  es la impedancia en el espacio libre (377 Ohms). Sustituyendo estas igualdades en la expresión 4, los campos eléctricos incidentes se sustituyen por los campos magnéticos incidentes. Resolviendo para los campos magnéticos incidentes en la ecuación 5, la ecuación puede ser reescrita como,

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = Z_i \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix}. \quad (6)$$

La ecuación 6 es una relación de campos eléctricos y magnéticos que se miden en la superficie de la tierra, y por lo tanto son cantidades conocidas. Por otro lado, las constantes  $a_{ij}$  dependen sólo de la

distribución de resistividades dado que son combinaciones de las originales constantes de proporcionalidad. La forma tradicional de representar la expresión anterior es,

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix}. \quad (7)$$

De manera compacta podemos escribir la ecuación 7 como  $\mathbf{E}=\mathbf{ZH}$ , donde  $\mathbf{Z}$  es el tensor de impedancias.

Queda la cuestión de cómo obtener las cuatro impedancias a partir de las mediciones. Podemos observar que la ecuación 7 se reduce a dos ecuaciones con cuatro incógnitas dadas las mediciones de los campos para un periodo determinado. Necesitamos al menos otras dos ecuaciones independientes para poder encontrar la solución para las impedancias. ¿De dónde salen más ecuaciones independientes? Como se mencionó anteriormente, los campos incidentes tienen la característica de estar cambiando constantemente de polarización. Esto a la vez hace que los campos medidos estén cambiando también constantemente de polarización, lo cual implica que los coeficientes del sistema de ecuaciones para las impedancias cambian constantemente, lo que genera con el tiempo ecuaciones independientes. Nótese que la ecuación 7 no tiene la forma estándar de incógnitas y coeficientes  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ , donde  $\mathbf{x}$  es el vector de incógnitas. En el caso que nos ocupa las incógnitas están en la matriz  $\mathbf{A}$ , por lo que hay que reescribir el sistema para expresar explícitamente cuáles son los coeficientes.

En el caso bidimensional (2D), con la resistividad constante a lo largo de alguna dirección, el rumbo es el ángulo que hace esa dirección con el eje  $x$  del sistema de coordenadas. Si el rumbo es cero se tiene que

$$\mathbf{Z}_{2D} = \begin{pmatrix} 0 & Z_{xy} \\ Z_{yx} & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Si los ejes no están alineados con el rumbo, el tensor de impedancia puede ser reducido a la ecuación 8 en un sistema coordenado apropiado.

### 1.3 Rotación de coordenadas

En esta sección se desarrolla la forma que toma el tensor de impedancias cuando el sistema de coordenadas se rota un ángulo  $\theta$ . Para ello se rotan las componentes de los campos utilizando la matriz de rotación

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (9)$$

En las nuevas coordenadas los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  se transforman a  $\mathbf{E}'$  y  $\mathbf{H}'$  aplicando la matriz  $\mathbf{R}$  a los primeros. Esto es

$$\mathbf{E}' = \mathbf{R}\mathbf{E}$$

$$\mathbf{H}' = \mathbf{R}\mathbf{H}.$$

De aquí se sigue que

$$\mathbf{E} = \mathbf{R}^T\mathbf{E}'$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}^T\mathbf{H}'.$$

La matriz  $\mathbf{R}^T$  es la inversa de  $\mathbf{R}$  la cual en este caso es simplemente su transpuesta. Esto es

$$\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (10)$$

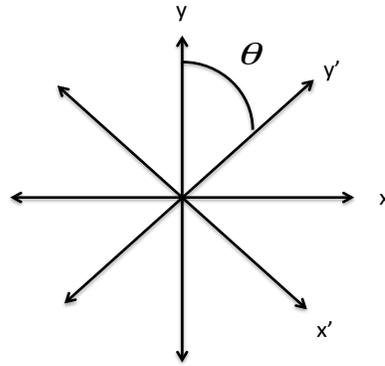
Sustituyendo los campos originales en  $\mathbf{E} = \mathbf{Z}\mathbf{H}$  por los rotados se tiene  $\mathbf{R}^T\mathbf{E}' = \mathbf{Z}\mathbf{R}^T\mathbf{H}'$ . Despejando se llega a  $\mathbf{E}' = \mathbf{R}\mathbf{Z}\mathbf{R}^T\mathbf{H}'$ . Esto significa que en las nuevas coordenadas

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{RZR}^T \quad (11)$$

De esta manera la dependencia del tensor de impedancias con el rumbo o azimut viene dado como

$$\mathbf{Z}' = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (12)$$

En esta tesis se revisan y se amplían varios métodos existentes para recuperar el ángulo  $\theta$  a partir del tensor de impedancias. A primera vista se trata de un problema muy sencillo. Sin embargo, el problema se complica porque el tensor de impedancias puede estar distorsionado según se explica en la siguiente sección.



**Figura 2.** Rotación del marco  $(x,y)$  al marco  $(x',y')$  a través de un ángulo  $\theta$ .

## 1.4 Distorsiones electro-galvánicas

Como recién se mencionó, el problema de estimar el ángulo  $\theta$  a partir del tensor de impedancias se complica porque los campos eléctricos suelen estar distorsionados por pequeñas anomalías superficiales en el subsuelo. Estas anomalías suelen ser tridimensionales (3D) y las distorsiones son conocidas como distorsiones electro-galvánicas o simplemente galvánicas. Su efecto es a menudo de mayor magnitud que el producido por inducción electromagnética por lo que es de extrema importancia neutralizarlos de alguna manera. Su efecto se puede simular o modelar aplicando al tensor de impedancias  $\mathbf{Z}_{2D}$  una matriz real 2x2 tal que  $\mathbf{Z}_m = \mathbf{C}\mathbf{Z}_{2D}$ , donde  $\mathbf{Z}_m$  es la impedancia medida con distorsiones,  $\mathbf{C}$  es la matriz real de distorsiones y  $\mathbf{Z}_{2D}$  es el tensor de impedancias con el rumbo alineado al sistema de coordenadas. Como en general el rumbo no se conoce las impedancias medidas se expresan en el sistema rotado como

$$\mathbf{Z}_m = \mathbf{R}\mathbf{C}\mathbf{Z}_{2D}\mathbf{R}^T. \quad (13)$$

En esta ecuación lo único que se conoce es  $\mathbf{Z}_m$ , las impedancias medidas para un periodo dado. Si deseamos conocer el rumbo a través de la matriz de rotación, necesitaríamos primero conocer la matriz de distorsión  $\mathbf{C}$  y también el tensor de impedancias  $\mathbf{Z}_{2D}$ . Una de las formas de abordar el problema es tratar de estimar todas las incógnitas al mismo tiempo, incluyendo el rumbo. Para ello Groom y Bailey (1989) expresan la matriz  $\mathbf{C}$  como el siguiente producto

$$\mathbf{C} = g\mathbf{T}\mathbf{S}\mathbf{A} \quad (14)$$

La variable  $g$  es un escalar y  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{A}$  son matrices. La matriz  $\mathbf{T}$  se define en términos del parámetro twist ( $t$ ) tal que

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Por lo general el twist se expresa como un ángulo  $\varphi$  tal que  $t = \tan\varphi$ . Por otro lado, la matriz  $\mathbf{S}$  se define en términos del parámetro shear ( $e$ ) tal que

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} \begin{pmatrix} 1 & e \\ e & 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

El parámetro shear por lo general también se expresa como un ángulo  $\varphi$  tal que  $e = \tan\varphi$ . Por último, el escalar  $g$  que es un parámetro indeterminado se absorbe en  $\mathbf{A}$  de tal forma que

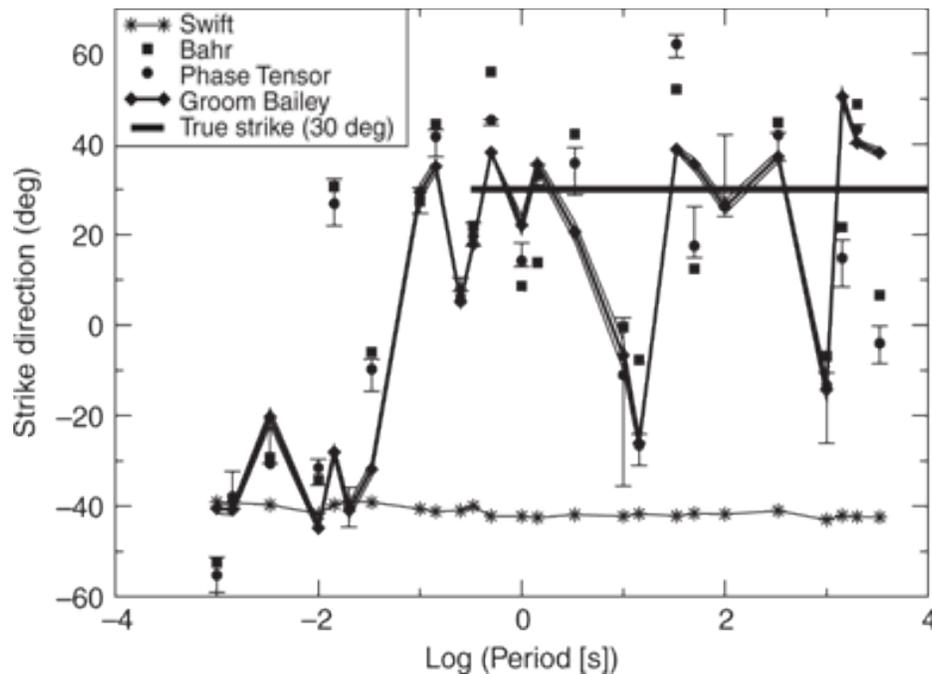
$$g\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-s & 0 \\ 0 & 1+s \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Este modelo de distorsión de Groom y Bailey (1988,1989) se utiliza en el algoritmo STRIKE de McNiece y Jones (2001), el cual se abordará en el capítulo 4 para comparar con los resultados de esta tesis. Este algoritmo es muy versátil, maneja las estimaciones periodo por periodo y puede hacerlo para muchos periodos a la vez. Además, proporciona impedancias e incertidumbres para todas las cantidades incluyendo los parámetros de distorsión. El parámetro de interés en esta tesis es el ángulo del rumbo, para el cual existen alternativas como se describe a continuación.

## 1.5 Formulas analíticas para la determinación del rumbo magnetotelúrico

El modelo de distorsión de Groom y Bailey descrito en la sección anterior requiere, para estimar el ángulo del rumbo, determinar simultáneamente todos los demás parámetros, incluyendo las impedancias y la matriz de distorsión. Por otro lado, en el desarrollo del método magnetotelúrico se han ideado técnicas para estimar el rumbo sin la necesidad de conocer las demás cantidades. Uno de los primeros trabajos al respecto es el descrito por Swift (1967), quien minimiza los elementos de la diagonal del tensor de impedancias, pero sin considerar posibles distorsiones que en su tiempo eran desconocidas. Desarrollos posteriores por Bahr (1988), WAL (Weaver et al. 2000) y Cantwell et al. (2004) ponen particular importancia en neutralizar las distorsiones galvánicas.

Los desarrollos mencionados culminan en fórmulas analíticas en las que simplemente se sustituyen los elementos del tensor de impedancias y se recupera el rumbo. Estas metodologías tienen en común el hecho de trabajar periodo por periodo y el resultado son rumbos aislados, los cuales deberían oscilar alrededor del rumbo verdadero. Jones (2012) muestra que con datos ruidosos, los valores de rumbo tienden a ser bastante dispersos según se muestra en la Figura 3, lo cual limita su aplicación en la práctica. Muñiz et al (2017) desarrolló un método para estabilizar las estimaciones del rumbo aplicándolo a la fórmula de Cantwell et al. (2004). Esta metodología se extiende en el siguiente capítulo al resto de las fórmulas.



**Figura 3.** Direcciones del rumbo (strike) para el conjunto de datos far-hi obtenidas aplicando las fórmulas analíticas existentes según Jones (2012).

## 1.6 Objetivos

Extender a las formulas analíticas de Swift (1967), Bahr (1988) y Weaver et al. (2000) el método de estabilización de Muñiz et al. (2017). Mostrar que otro posible método de estabilización es tomar en cuenta solo el criterio que los autores proponen para la solución del rumbo, pero sin llegar a una fórmula analítica, la cual necesariamente está limitada a aplicarse periodo por periodo. Dando un paso atrás hacia el criterio permitirá estimar el rumbo utilizando todos los periodos a la vez. Comparar los

resultados obtenidos con estos métodos con los del algoritmo de referencia STRIKE de McNeice y Jones (2001).

## Capítulo 2. Inestabilidad y estabilización de las fórmulas analíticas

---

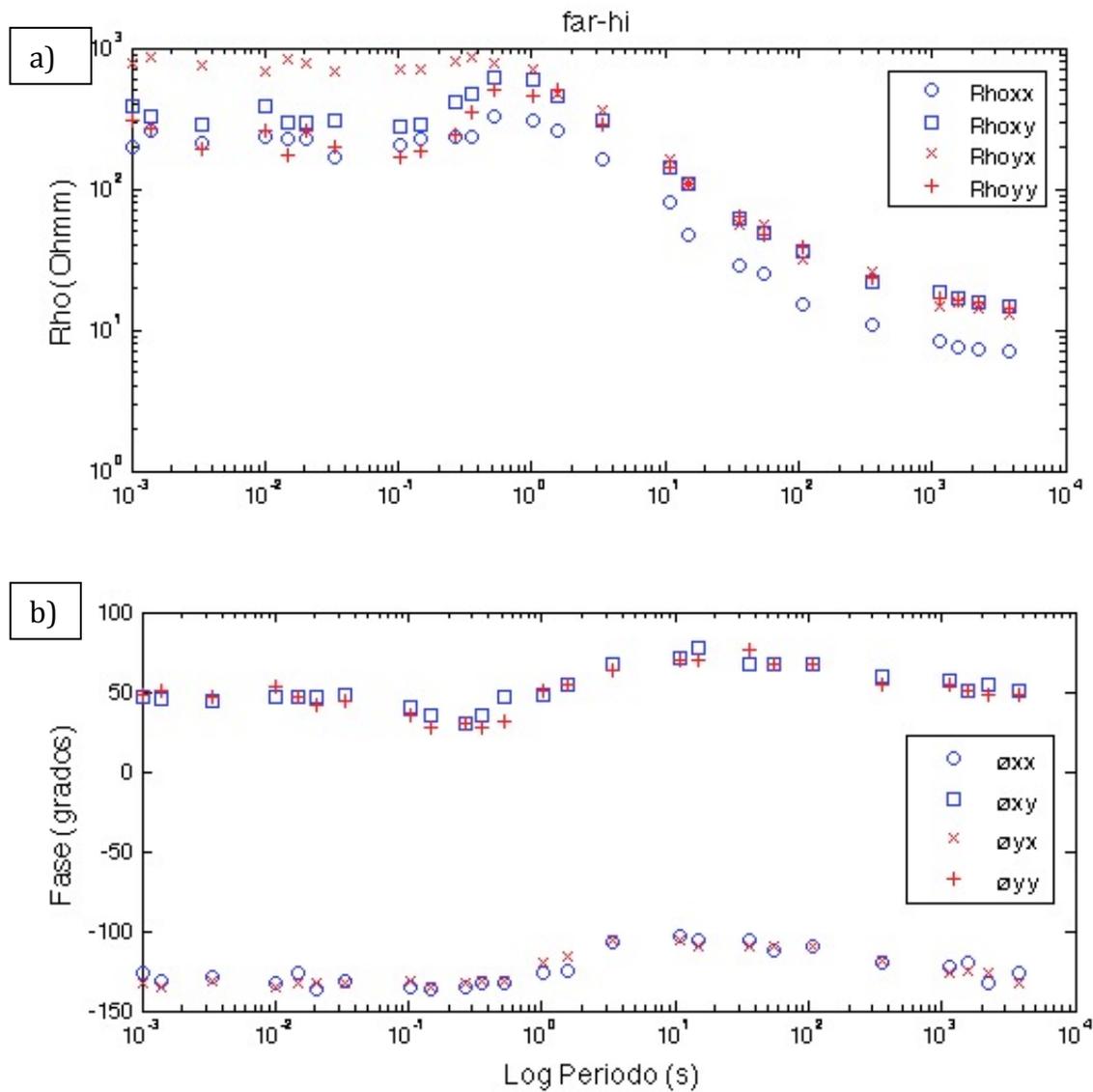
### 2.1 Introducción

Como se mencionó en el capítulo anterior, las formulas analíticas para el rumbo son bastante inestables cuando se aplican a datos con ruido (Jones, 2012). Sin embargo, es posible estabilizarlas según lo muestran Muñiz et al. (2017). Básicamente lo que se hace para estabilizarlas es seleccionar el rumbo con menor variancia y tomarlo como semilla, proceder hacia el periodo contiguo escogiendo el valor probable más parecido, hacer de este valor la nueva semilla y así sucesivamente hasta cubrir todos los periodos. Se requiere como paso preliminar hacer una pre-rotación del tensor a un valor óptimo para todos los periodos. Sobre esta pre-rotación global se aplica la fórmula periodo por periodo. El algoritmo se desarrolló para la fórmula del tensor de fase de Caldwell et al., (2004). En este capítulo aplicamos el mismo método tanto para el tensor de fase como para las demás fórmulas analíticas desarrolladas por Swift (1967), Bahr (1988), y Weaver et al. (2000). Se revisan los criterios utilizados para derivar cada una de las fórmulas así como las formas explícitas de las mismas. Se utiliza el mismo conjunto de datos que utilizó Jones (2012) en la preparación de la Figura 3 que muestra la inestabilidad de las fórmulas.

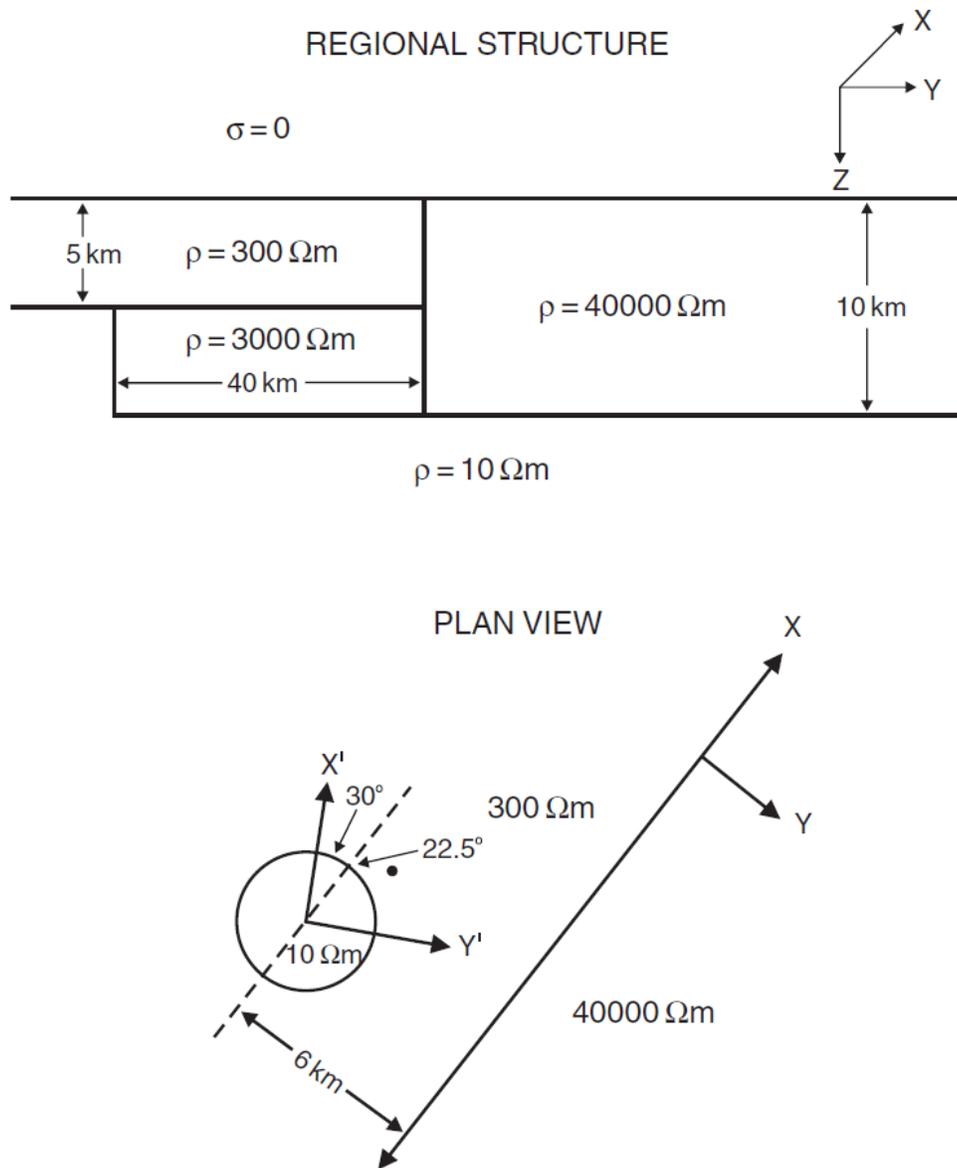
### 2.2 El conjunto de datos far-hi

Para ilustrar el comportamiento de las fórmulas analíticas se utilizó el conjunto de datos *far-hi*, el cual fue introducido por Groom et al. (1991). El termino *far* se refiere a que el sitio está situado lejos de un contacto vertical, por otro lado, el termino *hi* se refiere al nivel de ruido, el cual es de 2% en las impedancias principales (equivalente a 4% en la resistividad aparente y 1 grado en la fase).

Las curvas para la resistividad aparente y la fase se muestran en la Figura 4 (digitalizados de Jones (2012)). El modelo físico se muestra en la Figura 5. Se trata de un contacto vertical donde una parte es homogénea y la otra no. En la parte heterogénea hay una pequeña anomalía 3D superficial que distorsiona la respuesta regional o 2D. Por esto es que al tipo de análisis de Groom-Bailey se le conoce como 3D/2D, en el sentido que la estructura de interés es 2D pero existen distorsiones locales 3D. Estas distorsiones incluyen los parámetros de twist, shear, anisotropy y la ganancia de sitio.



**Figura 4.** a) Resistividad aparente para el conjunto de datos *far-hi*. b) Fases para el conjunto de datos *far-hi*. Valores tomados de las gráficas de Jones (2012).



**Figura 5.** Geometría regional del modelo de una falla y vista en planta de una anomalía semi-esférica (no a escala). La figura se tomó de Jones (2012). La flecha que indica 22.5 grados debería apuntar al punto del sitio del sondeo que está localizado a esos grados del rumbo. El rumbo regional es de 30 grados.

Para las pruebas de las fórmulas analíticas se trabajó con las mismas condiciones para todas. No se les añadió distorsiones extra porque ya las tienen. El intervalo de búsqueda de los ángulos de pre-rotación utilizado fue de  $-90^\circ$  a  $90^\circ$ . Se presentan sólo dos figuras para cada caso. Una para el rumbo óptimo de pre-rotación y la otra para los valores de rumbo periodo por periodo.

### 2.3 Tensor de fase

El tensor de fase fue propuesto por Caldwell et al. (2004). Separando el tensor de impedancias en sus partes real  $\mathbf{X}$  e imaginaria  $\mathbf{Y}$  tal que  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$ . El tensor de fase se define como

$$\Phi = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

La característica más importante del tensor de fase es su inmunidad a las distorsiones galvánicas. Consideremos un tensor distorsionado  $\mathbf{Z}' = \mathbf{CZ}$  y separando en sus partes real e imaginaria  $\mathbf{Z}' = \mathbf{CX} + i\mathbf{CY}$ , el tensor distorsionado  $\Phi' = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{CY} = \Phi$ . Esto es, que las distorsiones galvánicas que tan severamente afectan al tensor de impedancias, tanto a su parte real como imaginaria, no tienen ningún efecto sobre el tensor de fase. Esta prueba tan simple es responsable de la popularidad del tensor de fase en diversas aplicaciones del método magnetotelúrico. Una de esas aplicaciones es la determinación del rumbo. Para esto Caldwell et al. (2004) desarrollaron una fórmula analítica siguiendo estos pasos. Primero se considera un tensor de impedancias rotado  $\mathbf{Z}' = \mathbf{RZR}^T$ , luego se obtiene el tensor de fase correspondiente, el cual después de un poco de álgebra se expresa como

$$\Phi' = \mathbf{R}\Phi\mathbf{R}^T. \quad (19)$$

Por otro lado, se tiene que cuando los ejes coordenados están en línea con el rumbo de una estructura 2D, los elementos de la diagonal de  $\Phi$  son ceros y por lo tanto también los de  $\Phi'$ . Cuando los ejes y el rumbo hacen un ángulo  $\theta$  los elementos diagonales  $\Phi'_{12}$  y  $\Phi'_{21}$  no son ceros pero habrá un ángulo para el que lo sean. El negativo de ese ángulo es el rumbo de la estructura. Para encontrarlo, se igualan estos elementos a cero en la ecuación (19) y se resuelve para  $\theta$ . Después de algo de álgebra la solución es  $\theta = \alpha - \beta$ , donde

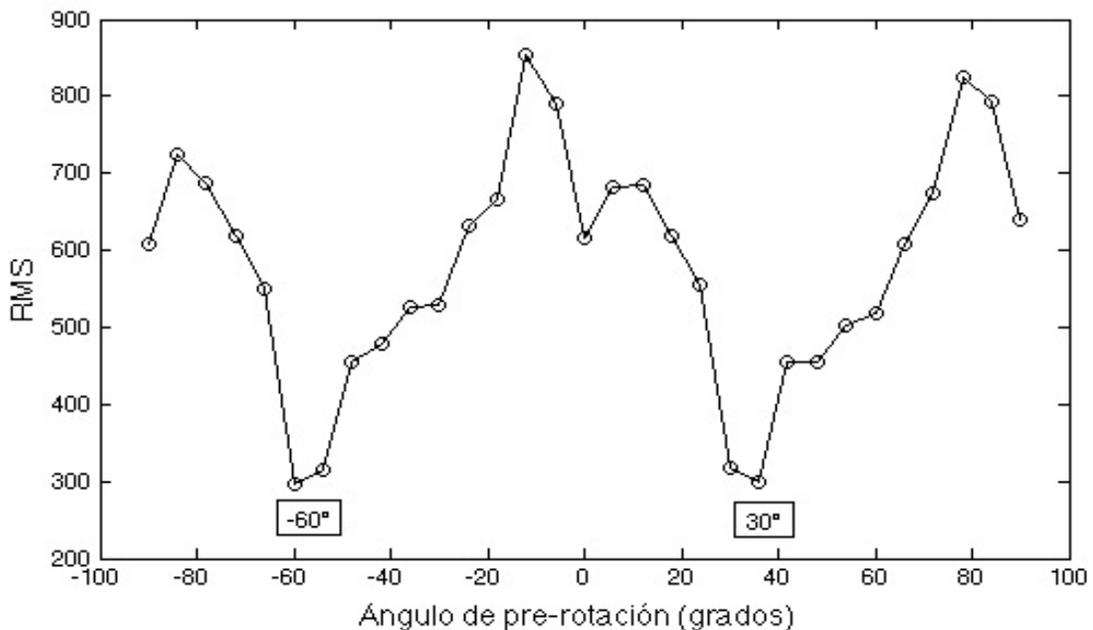
$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\Phi_{12} + \Phi_{21}}{\Phi_{11} - \Phi_{22}} \right), \quad (20)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\Phi_{12} - \Phi_{21}}{\Phi_{11} + \Phi_{22}} \right). \quad (21)$$

Como se mencionó anteriormente, se hace una búsqueda preliminar para optimizar los resultados. La idea es hacer que la fórmula arroje valores entre -90 y 90 grados, lo cual no sucede si el rumbo real está lejos de ser cero. Dependiendo de su valor se presentan dispersiones por los cambios de cuadrante. Para obtener el ángulo de pre-rotación óptimo se minimiza

$$RMS(\theta) = \sqrt{\frac{1}{nT} \sum_{j=1}^{nT} [\hat{\theta}_j(\theta) - \theta]^2}$$

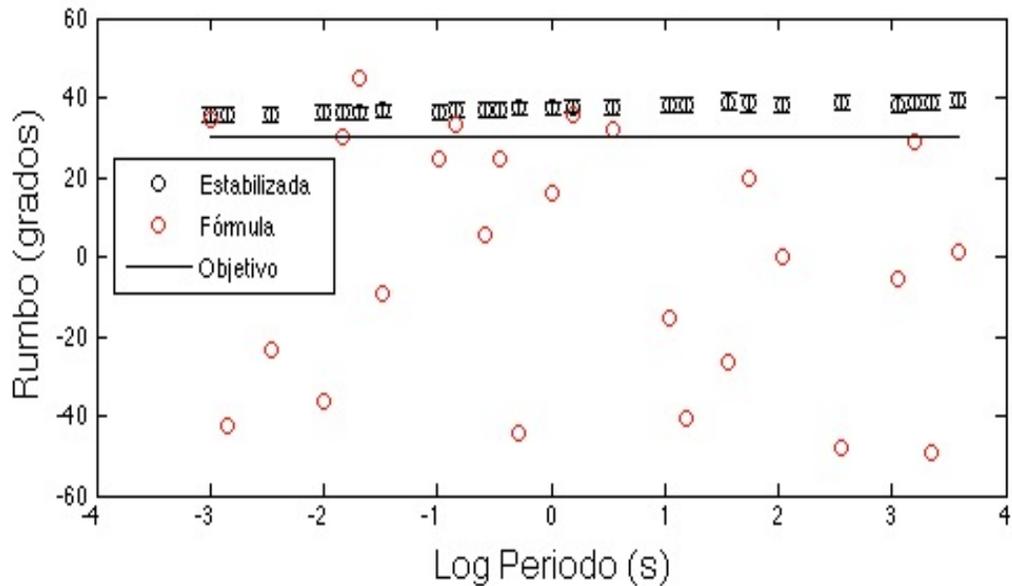
donde  $nT$  es el número de periodos y  $\hat{\theta}_j(\theta)$  es el resultado de aplicar la fórmula para el  $j$ -ésimo periodo habiendo rotado los ejes un ángulo  $\theta$ . El mínimo de  $RMS(\theta)$  corresponderá al ángulo para el cual la fórmula tiene menos dispersión. Los ejes se rotan a ese ángulo y se aplica la fórmula periodo por periodo. Al final, a cada estimación se le compensa por la pre-rotación.



**Figura 6.** Ángulos de pre-rotación utilizando la fórmula del Tensor de fase.

Se puede observar en la Figura 6 que los mínimos caen en  $+30^\circ$  y en su complementario de  $-60^\circ$ . Aunque este no es el resultado final que se pretende, este ángulo es precisamente el del modelo de la Figura 6. El ángulo de  $+30^\circ$  que hace el sistema de coordenadas con el rumbo del contacto vertical.

Una vez realizada la pre-rotación con el valor positivo de  $30^\circ$ , se calculan los rumbos periodo por periodo, los cuales se muestran en la Figura 7. Se puede observar que todos los valores se encuentran por encima del valor verdadero de  $30^\circ$  (línea continua). Estas diferencias se pueden explicar considerando que para el ángulo de pre-rotación se utilizan todos los periodos a la vez. En caso de la fórmula periodo por periodo el resultado final depende mucho de un solo valor, del de mínima variancia como semilla. Si a pesar de tener poca incertidumbre este valor está sobre o subestimado, esto influirá en el sondeo completo para todos los periodos. Aún con estos inconvenientes Muñiz et al. (2017) considera que estos rumbos periodo por periodo son la versión estable de la fórmula. El promedio de las estimaciones es de  $37^\circ \pm 3^\circ$ . Los círculos rojos son los valores utilizando la fórmula original del tensor de fase.



**Figura 7.** Cálculo del rumbo utilizando el ángulo de pre-rotación positivo, para el caso del tensor de fase.

## 2.4 Swift

Tanto para el presente caso como para el resto de las fórmulas se utilizará la siguiente nomenclatura para las diferentes variables según las define Swift (1986). Explícitamente, al aplicar la matriz de rotación al tensor de impedancias (ecuación 12) tendremos las componentes de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 Z'_{xx} &= Z_{xx} \cos^2 \theta + (Z_{xy} + Z_{yx}) \sin \theta \cos \theta + Z_{yy} \sin^2 \theta \\
 Z'_{xy} &= Z_{xy} \cos^2 \theta + (Z_{xx} + Z_{yy}) \sin \theta \cos \theta - Z_{yx} \sin^2 \theta \\
 Z'_{yx} &= Z_{yx} \cos^2 \theta + (Z_{yy} - Z_{xx}) \sin \theta \cos \theta - Z_{xy} \sin^2 \theta \\
 Z'_{yy} &= Z_{yy} \cos^2 \theta + (Z_{yx} - Z_{xy}) \sin \theta \cos \theta - Z_{xx} \sin^2 \theta
 \end{aligned} \tag{22}$$

Reescribiendo de manera más elegante tenemos

$$\begin{aligned}
 Z'_{xx} &= S_1 + S_2 \sin \theta \cos \theta \\
 Z'_{xy} &= D_2 + S_1 \sin \theta \cos \theta \\
 Z'_{yx} &= D_2 - D_1 \sin \theta \cos \theta \\
 Z'_{yy} &= -D_1 - D_2 \sin \theta \cos \theta
 \end{aligned} \tag{23}$$

donde  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $D_1$  y  $D_2$  son las *impedancias modificadas* (Vozoff, 1972):

$$\begin{aligned}
 S_1 &= Z_{xx} + Z_{yy} \\
 S_2 &= Z_{xy} + Z_{yx} \\
 D_1 &= Z_{xx} - Z_{yy} \\
 D_2 &= Z_{xy} - Z_{yx}
 \end{aligned} \tag{24}$$

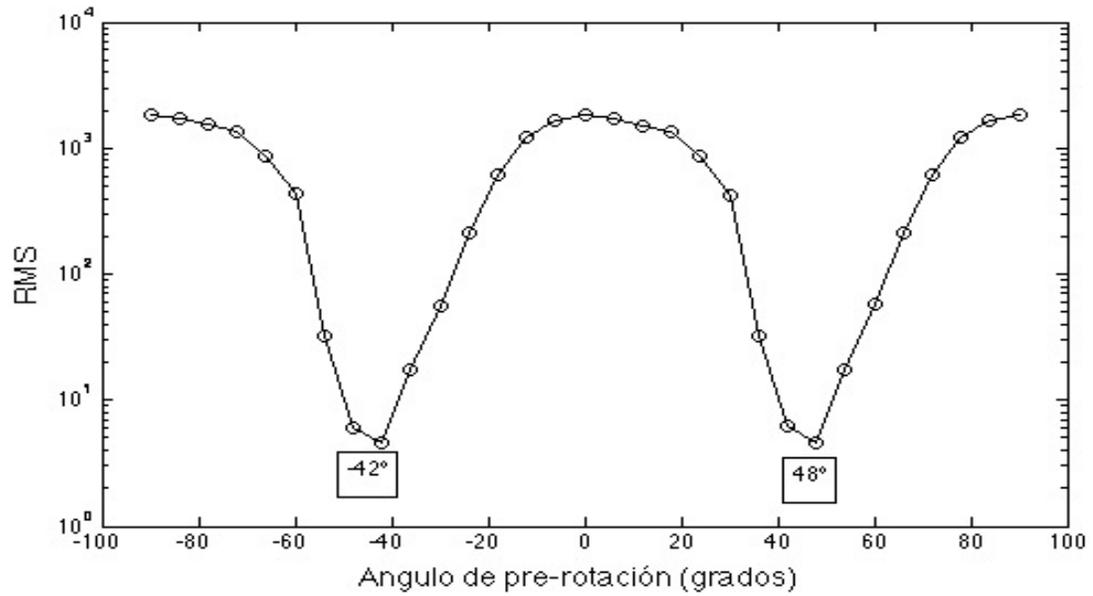
En uno de los primeros trabajos sobre la dirección del rumbo Swift (1967) estableció el objetivo de rotar el tensor de impedancias para determinar el ángulo en el cual se adopta la forma de la anti diagonal 2D de la ecuación (8). Como no se puede garantizar un ángulo de rotación que anule completamente los elementos diagonales del tensor, debido a ruido, entonces se puede calcular un rumbo electromagnético con el ángulo que minimiza los elementos de la diagonal (Swift (1967, reimpreso 1986, Simpson y Bahr, 2005).

Minimizando la magnitud de los elementos de la diagonal se llega a una expresión para el cálculo del rumbo. Esta expresión es

$$\tan 4\theta = \frac{2\operatorname{Re}(S_2 D_1)}{|D_1|^2 - |S_2|^2} \quad (25)$$

Al ángulo determinado a partir de la ecuación (25) se le denomina "strike de Swift". Se usó mucho en la década de 1970 (Sims y Bostick, 1969; Vozoff, 1972; Kurtz y Garland, 1976) y aún se sigue usando, pero en mucha menor medida. Es de esperarse que el strike de Swift sea incorrecto en presencia de distorsiones 3D/2D, como en el presente caso con los datos far-hi.

La Figura 8 muestra la grafica para determinar el ángulo óptimo de pre-rotación para este caso. El ángulo positivo en este caso es de 48 grados, muy por arriba del verdadero de 30 grados. Como se mencionó anteriormente esta fórmula no se derivó pensando en las distorsiones galvánicas como la anterior, la del tensor de fase, por lo que este resultado era de esperarse. Al igual que en el caso del tensor de fase se encuentran dos valores mínimos para el rango de ángulos de pre-rotación: un ángulo positivo de +48° y su ángulo complementario de -42°.



**Figura 8.** Ángulos de pre-rotación utilizando la fórmula de Swift (1967).

Para obtener los valores del rumbo periodo por periodo se consideró el ángulo positivo de  $+48^\circ$ . Los resultados se muestran en la Figura 9. Se observa que los valores obtenidos para el rumbo (círculos negros) están alejados del valor verdadero el cual se muestra como línea continua. El promedio de las estimaciones es de  $42^\circ \pm 1^\circ$ . Los valores del rumbo obtenidos directamente de la fórmula de Swift se muestran mediante los círculos en color rojo. Nótese que las estimaciones de la fórmula son mucho más estables que para el tensor de fase

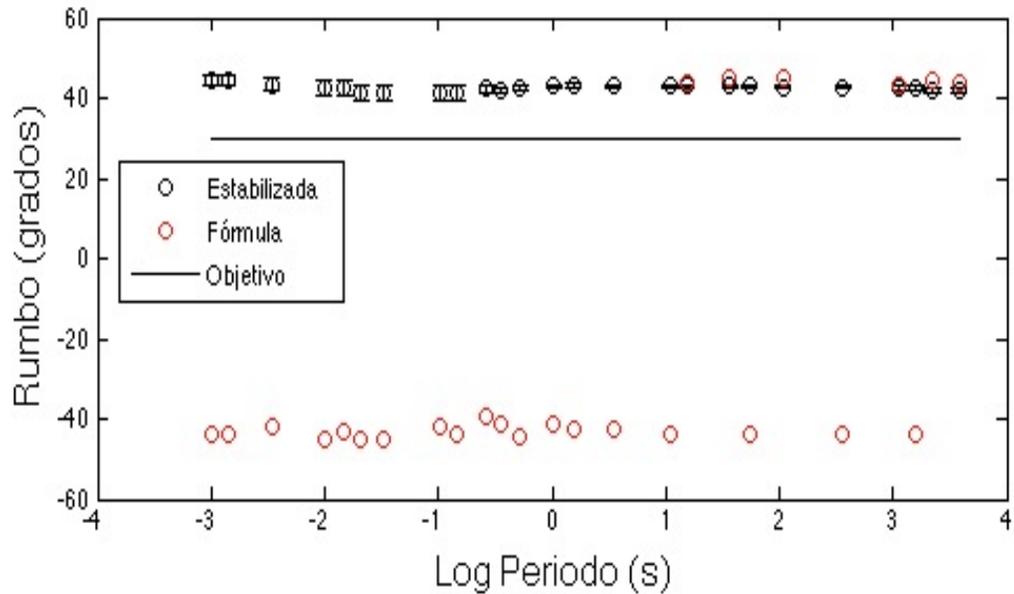


Figura 9. Cálculo del rumbo utilizando el ángulo de pre-rotación positivo, para el caso de Swift.

## 2.5 Bahr

Bahr (1988) fue el primero en proponer un estimador del rumbo basado en las fases del tensor de impedancias. Como lo demuestra Ranganayaki (1984), las fases MT pueden depender en gran medida de la dirección en la que se mide el campo eléctrico, y de la existencia de impedancias medidas que tienen componentes diagonales que no desaparecen y dos fases diferentes, de manera que no concuerdan con el modelo de Swift. Bahr (1988) propuso un modelo de superposición (descomposición) más completo. En este modelo, las heterogeneidades multidimensionales con dimensiones significativamente menores que la longitud de la escala inductiva de los datos, se superponen en una estructura 2D regional, y los datos se descomponen en una respuesta "local", no inductiva (galvánica), y una respuesta inductiva 'regional', (Simpson y Bahr, 2005).

Cuando el sistema de coordenadas está alineado con el rumbo de una estructura bidimensional regional, el tensor de impedancias distorsionado se puede expandir como  $\mathbf{Z} = \mathbf{C}\mathbf{Z}_{2D}$ . En forma explícita

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Z_{xy} \\ Z_{yx} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{12}Z_{yx} & C_{11}Z_{xy} \\ C_{22}Z_{yx} & C_{21}Z_{xy} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Se puede observar que las columnas del tensor distorsionado deben tener las mismas fases, dado que los elementos de la matriz de distorsión son números reales. Si el sistema de coordenada no está alineado con la estructura y forman un ángulo  $\theta$  el tensor de impedancias se expresa como  $\mathbf{Z}' = \mathbf{RCZ}_D\mathbf{R}^T$ . En este caso las columnas del tensor rotado no tendrán esta propiedad. Sin embargo, esto significa que encontrando el ángulo para el cual se cumpla esta propiedad se tendrá el rumbo de la estructura.

La condición en donde las fases de las columnas del tensor de impedancias son iguales se expresa de la forma, (Bahr, 1988),

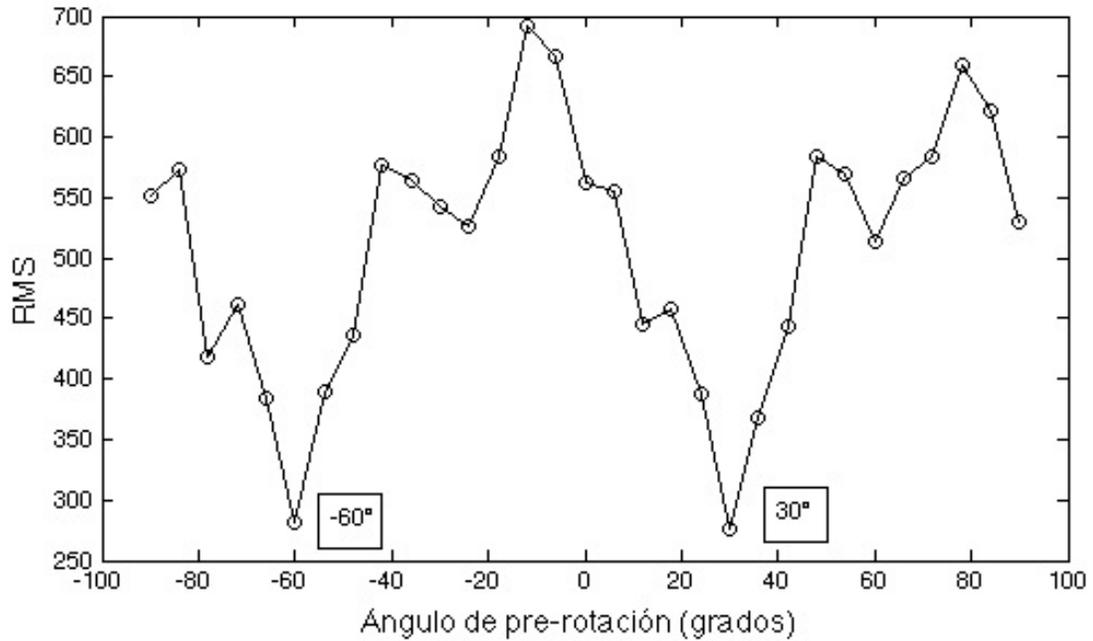
$$\frac{\operatorname{Re}(Z_{xx})}{\operatorname{Im}(Z_{xx})} = \frac{\operatorname{Re}(Z_{yy})}{\operatorname{Im}(Z_{yy})} \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}(Z_{xx})}{\operatorname{Re}(Z_{yx})} = \frac{\operatorname{Im}(Z_{xx})}{\operatorname{Im}(Z_{yx})} \quad (27)$$

Después de algo de álgebra el ángulo  $\theta$  se encuentra a partir de:

$$\tan(2\theta) = \frac{[S_1, S_2] - [D_1, D_2]}{[S_1, D_1] + [S_2, D_2]} \quad (28)$$

Donde S y D están dadas por la expresión (24). El strike electromagnético que se obtiene utilizando el modelo de Bahr se conoce como "strike sensible a la fase".

Al igual que en los casos anteriores, se realizó la estimación de los mínimos del rango de los ángulos de pre-rotación. Los mínimos encontrados se muestran en la Figura 10. Los dos ángulos para este caso son: uno positivo de  $+30^\circ$  y el complementario de  $-60^\circ$  son los mismos que en el caso del tensor de fase.



**Figura 10.** Ángulos de pre-rotación utilizando la fórmula de Bahr.

Es de esperar que el resultado de pre-rotar al ángulo positivo de  $30^\circ$ , sea parecido al ejemplo anterior del tensor de fase. En la Figura 11 se muestran los resultados cuyo promedio para este caso es de  $36^\circ \pm 2^\circ$ . Aunque el ángulo de pre-rotación sea igual al caso del tensor de fase, el resultado difiere. Sin embargo, la aproximación es muy parecida, arrojando un valor promedio más cercano al valor objetivo. La dispersión que muestran los círculos rojos son los valores obtenidos para el rumbo directamente de la fórmula original de Bahr.

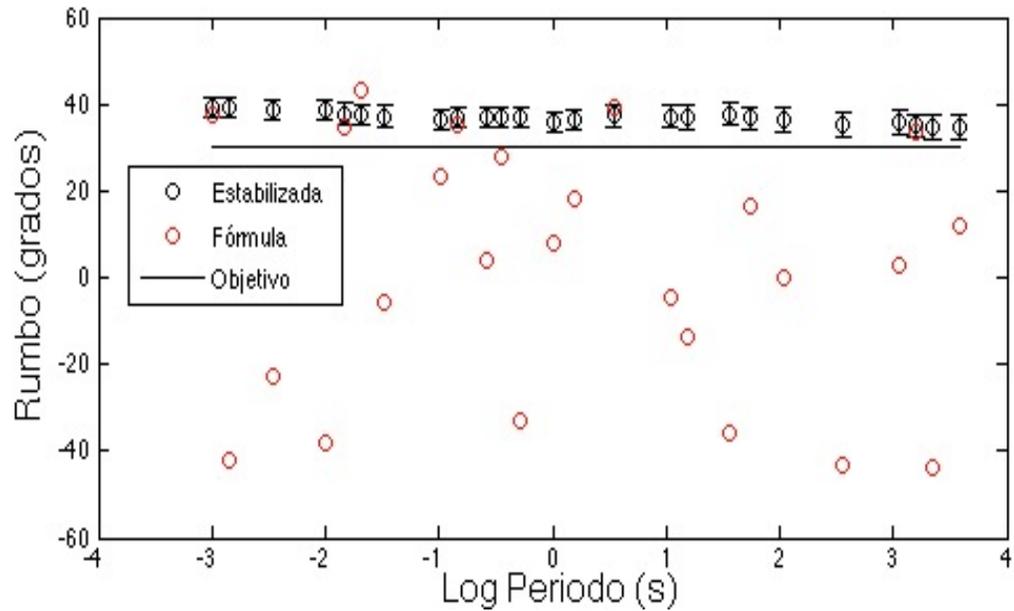


Figura 11. Calculo del rumbo utilizando el ángulo de pre-rotación positivo, para el caso de Bahr.

## 2.6 WAL

Weaver et. al. (2000) crearon un modelo basado en una serie de invariantes, relacionados con los invariantes derivadas por Fisher y Masero (1994) y Szarka y Menvielle (1997). Estos son invariantes bajo una rotación de los ejes horizontales en la superficie de la Tierra, mas un ángulo que define la orientación de los ejes de referencia (Weaver et al., 2000).

Sean  $x$  y  $y$  los ejes coordenados sobre la superficie ( $z=0$ ) de la Tierra que definen las direcciones Norte y Este respectivamente, y siendo  $z$  positivo hacia abajo dentro de la Tierra. Entonces en notación de algebra lineal tenemos una matriz  $\mathbf{M}$  de dimensión  $2 \times 2$  de valores complejos, y dos vectores columna representando los campos eléctrico y magnético por  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{b}$  respectivamente (Weaver et al., 2000),

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Una matriz de rotación de los ejes  $(x,y)$ , de la forma de la ecuación (9), aplicada a la expresión (29), nos arroja nuevos vectores  $\mathbf{e}'$  y  $\mathbf{b}'$  donde,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}' &= R_\theta \mathbf{e} = R_\theta M R_\theta^T R_\theta \mathbf{b} = M' \mathbf{b}' \\ M' &= R_\theta M R_\theta^T \end{aligned} \quad (30)$$

En notación de Weaver (1994), las componentes de  $M'$  son

$$\begin{aligned} M'_{11} &= \zeta_1 + \zeta_2 \sin 2\theta + \zeta_3 \cos 2\theta, \\ M'_{12} &= \zeta_4 - \zeta_3 \sin 2\theta + \zeta_2 \cos 2\theta, \\ M'_{21} &= -\zeta_4 - \zeta_3 \sin 2\theta + \zeta_2 \cos 2\theta, \\ M'_{22} &= \zeta_1 - \zeta_2 \sin 2\theta - \zeta_3 \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (31)$$

donde define los componentes reales como

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \xi_1 + i\eta_1 = \frac{1}{2}(M_{11} + M_{22}), \\ \zeta_2 &= \xi_2 + i\eta_2 = \frac{1}{2}(M_{12} + M_{21}), \\ \zeta_3 &= \xi_3 + i\eta_3 = \frac{1}{2}(M_{11} - M_{22}), \\ \zeta_4 &= \xi_4 + i\eta_4 = \frac{1}{2}(M_{12} - M_{21}). \end{aligned} \quad (32)$$

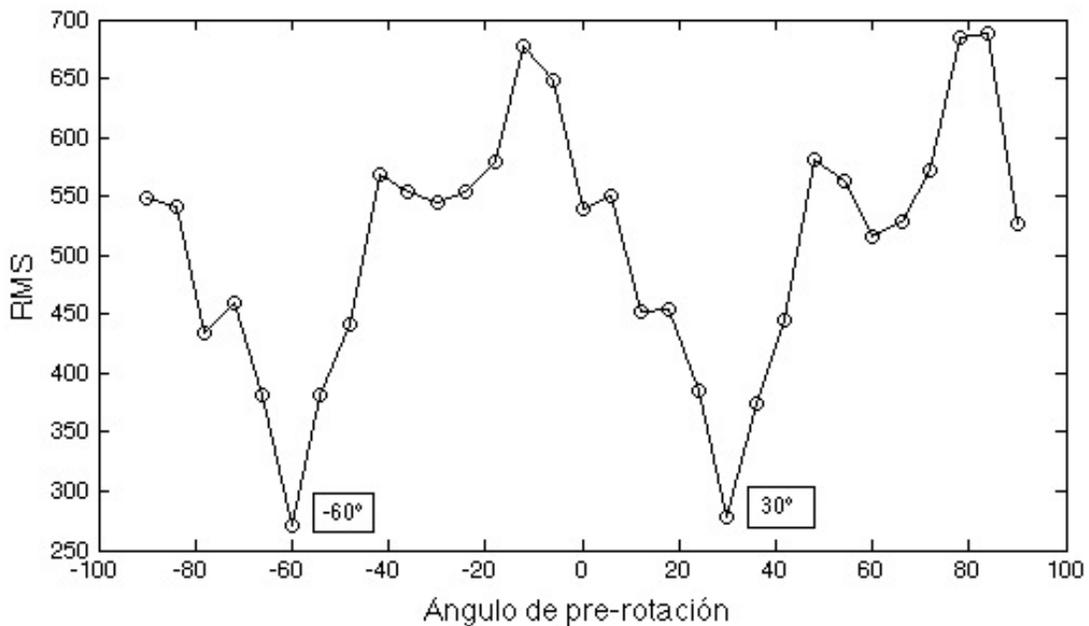
También define la variable

$$d_{ij} = \frac{\xi_j \eta_i - \xi_i \eta_j}{(\xi_4^2 + \xi_1^2)^{1/2} (\eta_4^2 + \eta_1^2)^{1/2}}. \quad (33)$$

Con la definición de las expresiones anteriores Weaver et al. (2000) llega a la expresión para el cálculo del rumbo, la cual tiene la forma

$$\tan 2\theta = \frac{d_{12} - d_{34}}{d_{13} + d_{24}} \quad (34)$$

Utilizando la expresión (34) encontramos de nueva cuenta, como en el caso del tensor de fase y de Bahr, los valores mínimos de los ángulos de pre-rotación de  $30^\circ$  y su complementario de  $-60^\circ$  (Figura 12). A estas alturas dada la experiencia con los casos anteriores, no se espera que el resultado de aplicar dichos ángulos de pre-rotación sea igual, sino solo similar.



**Figura 12.** Ángulos de pre-rotación utilizando la fórmula de WAL.

Aplicando el ángulo de pre-rotación positivo de igual manera que en los casos anteriores, observamos en la Figura 13 que las estimaciones periodo por periodo se encuentran muy cercanas al valor objetivo. El valor promedio adquirido es de  $35^\circ \pm 1^\circ$ . Efectivamente nos percatamos que el valor obtenido en los tres casos del tensor de fase, Bahr WAL son muy similares.

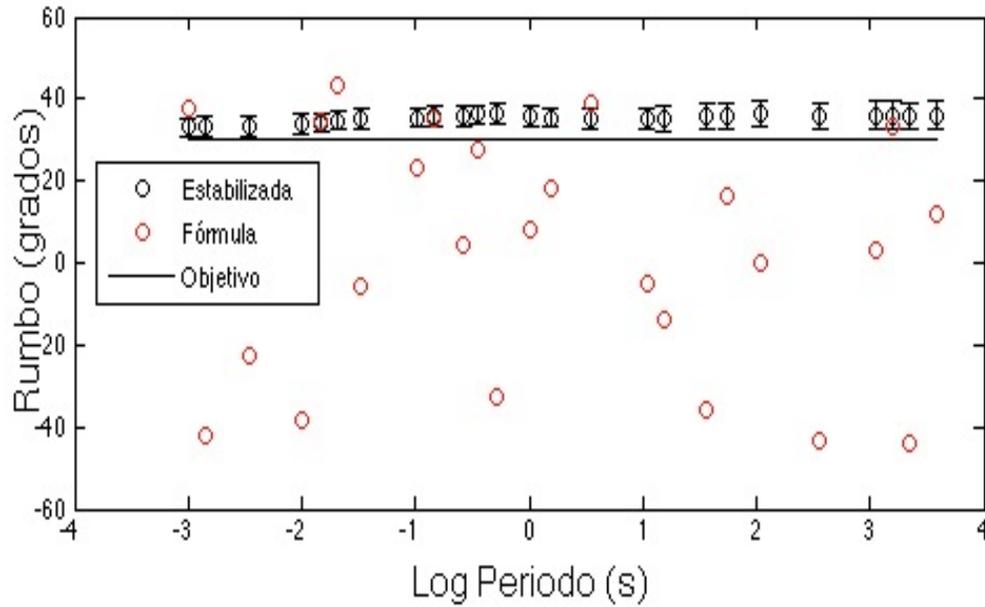


Figura 13. Calculo del rumbo utilizando el ángulo de pre-rotación positivo, para el caso de WAL.

## 2.7 Conclusión

Los casos del tensor de fase, Bhar y WAL, los resultados son muy similares, tanto en los ángulos de pre-rotación como en los de aplicar la fórmula periodo por periodo. Para el caso de Swift el resultado obtenido difiere bastante del valor objetivo, ya que como se mencionó, la fórmula no fue pensada para eludir los efectos galvánicos. Sin embargo, se debe mencionar que los resultados de la fórmula directa sin estabilizar, son las más estables. Por otro lado, se encontró que el ángulo de pre-rotación es mejor indicador del rumbo que el obtenido periodo por periodo con las fórmulas analíticas, aún en su versión estabilizada. Esto nos lleva a explorar otras medidas globales para todos los periodos según se discute en el siguiente capítulo.

## Capítulo 3. Los criterios detrás de las formulas analíticas: extensión para todos los periodos

---

### 3.1 Introducción

En el capítulo anterior se mostró que una forma de estabilizar el rumbo utilizando las fórmulas analíticas es seleccionar el periodo para el cual se tiene variancia mínima, y regularizar a partir de allí las estimaciones para los demás periodos. Básicamente, el algoritmo de Muñiz et al. (2017) que fue desarrollado para el tensor de fase se aplicó a las demás fórmulas. En este capítulo se propone otra forma de estabilizar la determinación del rumbo. Se tomará en cuenta solo el criterio que cada uno de los autores utiliza en el desarrollo de sus fórmulas. Esta tarea se abordará extendiendo los criterios de igualdad, válidos para un periodo dado, a todos los periodos simultáneamente. Esta extensión a todos los periodos necesariamente se tiene que hacer numéricamente, reemplazando el criterio de igualdad por un compromiso entre los diferentes periodos. Este compromiso se realiza maximizando en cada caso el cumplimiento del criterio correspondiente, lo cual se traduce en una minimización según se expone en las siguientes secciones.

Para ilustrar los resultados se trabajó con el conjunto de datos sintéticos sin ruido ni distorsiones COPROD2S1, publicado por Varentsov (1998), el cual cuenta con 61 sondeos esparcidos a lo largo de 160 kilómetros. A este conjunto de datos en algunos experimentos se le agrego ruido Gaussiano, así como diferentes valores de distorsión, tanto de twist como de shear, con el fin de observar el comportamiento de cada criterio en diferentes condiciones. En todos los criterios se utilizó el sondeo 15, suponiendo un rumbo fijo de 45°.

### 3.2 Criterio de Swift

Como se describió en el capítulo anterior, la fórmula de Swift se obtiene minimizando la magnitud de los elementos de la diagonal del tensor de impedancias. El planteamiento se lleva a cabo como un problema clásico de máximos y mínimos. Para esto se resuelve la ecuación que resulta de derivar la función objetivo con respecto al rumbo e igualar a cero. Esto es  $\frac{\partial}{\partial \theta} \left( |Z_{xx}(\theta)|^2 + |Z_{yy}(\theta)|^2 \right) = 0$  y resolver para el ángulo  $\theta$  para un periodo determinado. El resultado es una fórmula en que se sustituyen los elementos del tensor y se obtiene el ángulo para ese periodo. Alternativamente, se podría muestrear la función

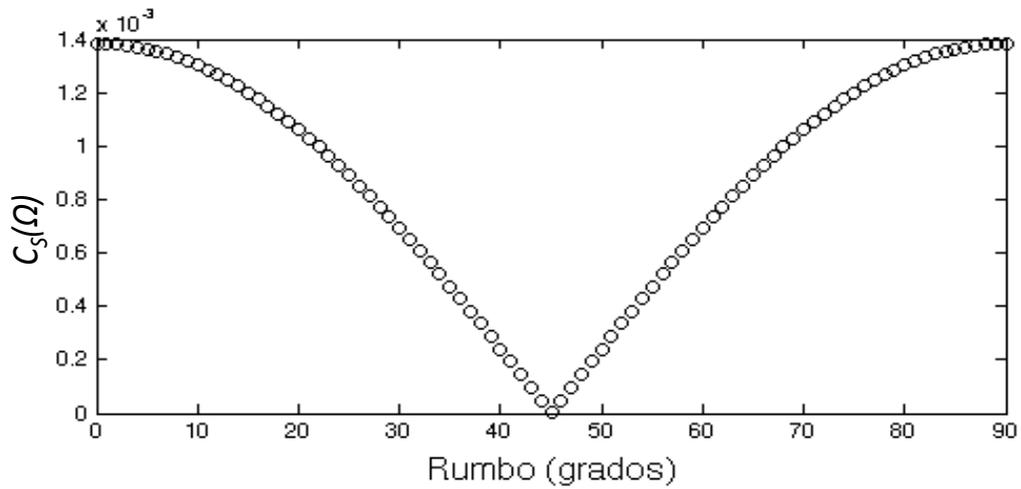
objetivo  $|Z_{xx}(\theta)|^2 + |Z_{yy}(\theta)|^2$  para diferentes ángulos y seleccionar el correspondiente mínimo. La función objetivo podría incluso ser  $|Z_{xx}(\theta)| + |Z_{yy}(\theta)|$ , sin los cuadrados. En el caso de datos exactos el resultado sería el mismo independientemente de cómo se calcule. Sin embargo, si los datos tienen ruido los resultados no necesariamente son los mismos. Es bien conocida la propiedad de la norma  $L_1$ , la que utiliza valores absolutos, de ser menos afectada por datos atípicos que la norma  $L_2$  que utiliza los cuadrados. Por esta razón en todos los casos que se presentan en este capítulo se utilizará la norma  $L_1$ .

Con el fin de incluir todos los periodos en el proceso de cálculo se muestrea la función objetivo

$$C_S(\theta) = \sum_{i=1}^{nT} (|Z'_{xx}(T_i, \theta)| + |Z'_{yy}(T_i, \theta)|). \quad (35)$$

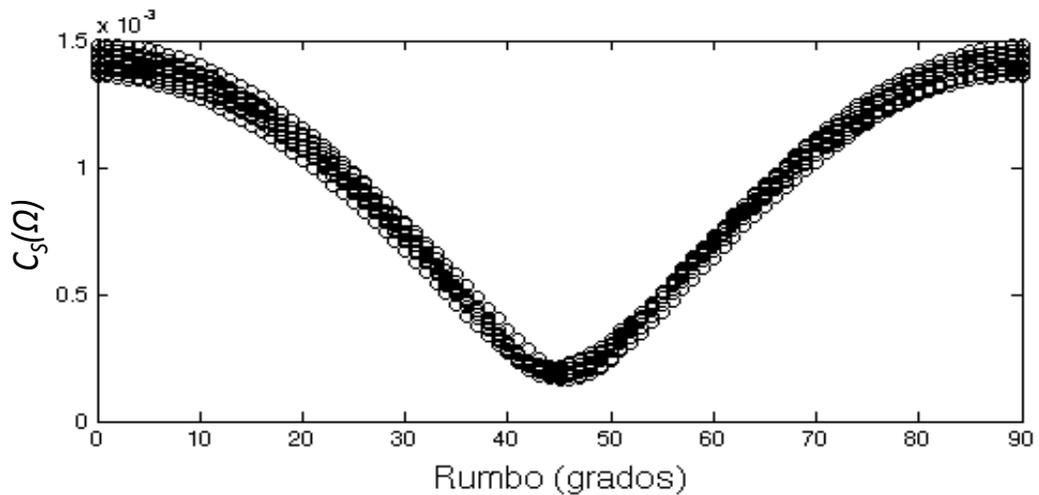
El número de periodos es  $nT$ , y  $Z'_{xx}$  y  $Z'_{yy}$  son componentes del tensor rotado  $\mathbf{Z}' = \mathbf{RZR}^T$ . Para encontrar el mínimo se muestrea grado por grado  $C_S(\theta)$  en el rango  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ .

En primera instancia se experimentó utilizando los datos libres de distorsiones y ruido, y en segunda agregando un error Gaussiano de 5% en las impedancias lo cual equivale a 10% en las resistividades aparentes y  $2.5^\circ$  en las fases. En la Figura 14 se muestra la función objetivo  $C_S(\theta)$  para 10 realizaciones. Al no tener ruido, el resultado de cada una de las realizaciones será el mismo, por ende solo se obtiene una curva en el rango de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , donde el mínimo se encuentra en  $45^\circ$ , indicando que se recupera exactamente el rumbo supuesto.



**Figura 14.** Rumbo calculado para el criterio de Swift. Sin distorsiones y sin error.

En la Figura 15 se ilustra el resultado para el caso de los datos con ruido. Uno de los efectos del ruido es que la función objetivo no puede ser exactamente cero como en el caso de datos sin ruido. Otro efecto es la dispersión de los mínimos para las diferentes realizaciones. Esto es, cada realización produce un rumbo que oscila alrededor de los 45°. Esta dispersión se utilizará más adelante para determinar las incertidumbres en el rumbo para los diferentes criterios.



**Figura 15.** Rumbo calculado para el criterio de Swift agregando error Gaussiano de 5%. Sin distorsiones.

### 3.3 Criterio de Bahr

En su trabajo Bahr (1988) propuso una condición basada en las fases de las columnas del tensor de impedancias. La condición a seguir es suponer para una estructura 2D, la mezcla de las impedancias regionales, y que el tensor de impedancias es una combinación lineal de estas. Para este caso las fases de las columnas del tensor en un sistema coordenado son iguales (ecuación 27).

$$\frac{Im(Z_{xx})}{Re(Z_{xx})} = \frac{Im(Z_{yx})}{Re(Z_{yx})} \quad \text{y} \quad \frac{Im(Z_{yy})}{Re(Z_{yy})} = \frac{Im(Z_{xy})}{Re(Z_{xy})}$$

Estas igualdades se cumplen cuando el sistema de coordenadas está alineado con la estructura 2D. Y lo que es más importante, las mismas igualdades se cumplen aún cuando existan distorsiones galvánicas. La fórmula analítica de Bahr para un periodo dado se obtiene imponiendo estas igualdades a componentes rotadas a un ángulo arbitrario. Despejando, esto es equivalente a encontrar el ángulo para el cual las dos siguientes variables se hagan cero. Las dos variables son

$$a_1 = Im(Z'_{yx})Re(Z'_{xx}) - Im(Z'_{xx})Re(Z'_{yx})$$

$$\text{Y } a_2 = Im(Z'_{xy})Re(Z'_{yy}) - Im(Z'_{yy})Re(Z'_{xy}). \quad (36)$$

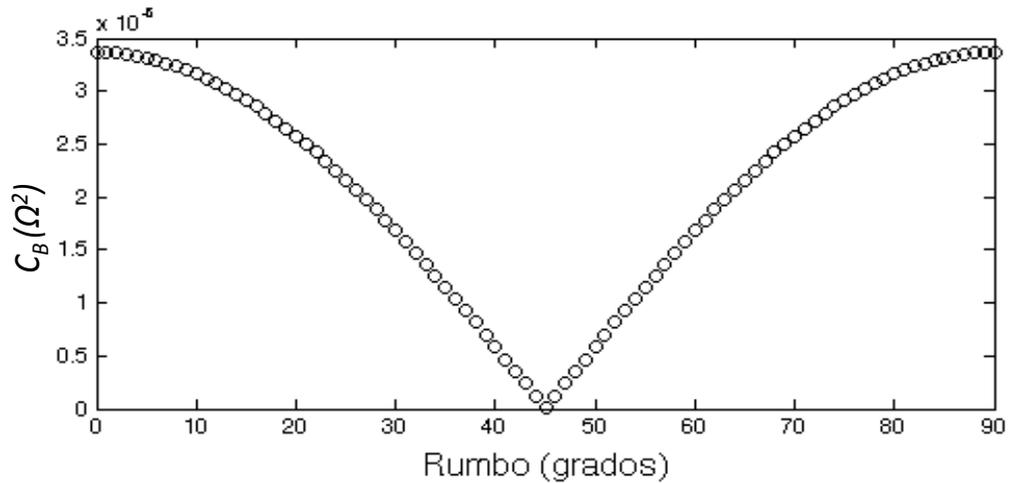
Las impedancias primadas son componentes del tensor rotado  $\mathbf{Z}' = \mathbf{RZR}^T$ . La fórmula analítica de Bahr para un periodo dado se obtiene haciendo  $a_1 = a_2 = 0$ . En nuestro caso, para aplicar este criterio a todos los periodos simultáneamente consideramos la siguiente función objetivo

$$C_B(\theta) = \sum_{i=1}^{nT} (|a_1(T_i, \theta)| + |a_2(T_i, \theta)|) \quad (37)$$

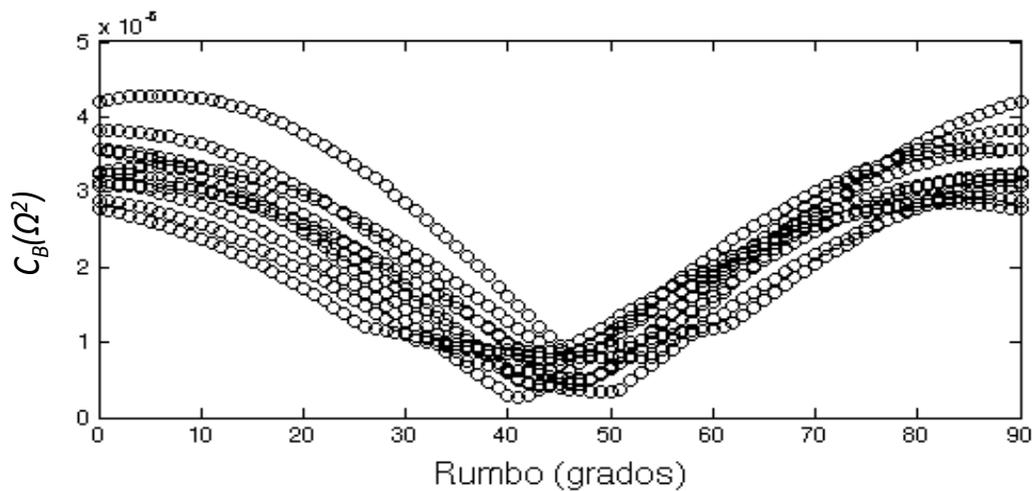
Al igual que en el caso de Swift para encontrar el mínimo se muestrea grado por grado  $C_B(\theta)$  en el rango  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ .

En la Figura 16 se muestra la estimación del rumbo utilizando el criterio de Bahr para el caso sin distorsiones ni error para 10 realizaciones. Igualmente que en el caso de Swift, se observa el

comportamiento esperado en el rango de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , el mínimo se encuentra en  $45^\circ$  y es exactamente cero. En la Figura 17 se observa el rumbo para 10 realizaciones, utilizando como en el ejemplo de Swift un error de 5%. Para cada una de las realizaciones la curva tiene valores diferentes debido al ruido, sin embargo el mínimo de cada una oscila alrededor de los  $45^\circ$ . Nótese que la dispersión de los mínimos es mayor que en el caso de Swift lo que significa que la incertidumbre en este caso será mayor según se constatará más adelante en este mismo capítulo.



**Figura 16.** Rumbo calculado para el criterio de Bahr. Sin distorsiones y sin error.



**Figura 17.** Rumbo calculado para el criterio de Bahr agregando error Gaussiano de 5%. Sin distorsiones.

### 3.4 Criterio del tensor de fase

Según se discutió en el capítulo anterior, el criterio de Caldwell et al. (2004) para encontrar el rumbo es hacer que los elementos de la anti-diagonal del tensor de fase se hagan ceros. Esto es porque estos elementos son ceros cuando el sistema de coordenadas coincide con el rumbo de una estructura 2D.

Esto es

$$\Phi_{2D} = \begin{pmatrix} \frac{\text{Im}(Z_{xy})}{\text{Re}(Z_{xy})} & 0 \\ 0 & \frac{\text{Im}(Z_{yx})}{\text{Re}(Z_{yx})} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

En general, si el sistema de coordenadas no está apropiadamente alineado el tensor de fase tiene una dependencia con el rumbo. Esto se puede representar como

$$\Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(\theta) & \Phi_{12}(\theta) \\ \Phi_{21}(\theta) & \Phi_{22}(\theta) \end{pmatrix} \quad (39)$$

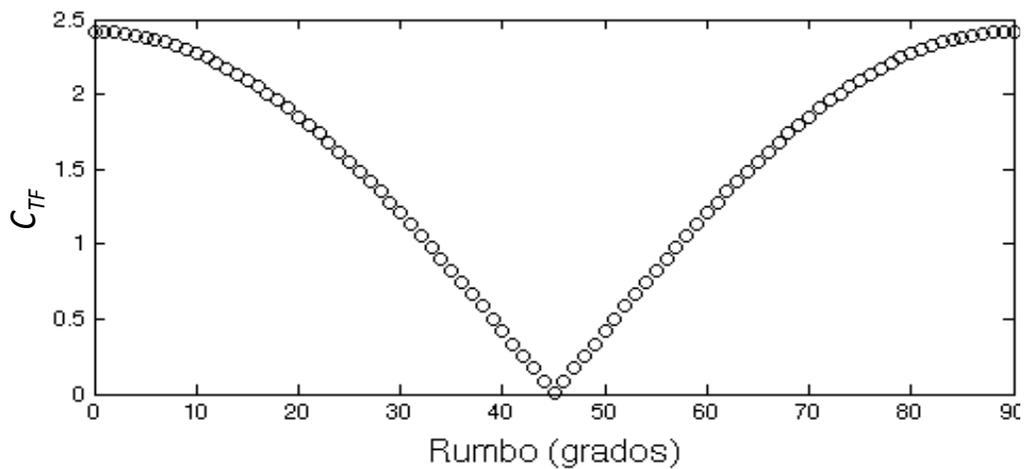
La fórmula analítica para el rumbo que se discutió en el capítulo anterior impone la condición  $\Phi_{12} = \Phi_{21} = 0$ . Esto se hace en la expresión general considerando, como en los casos anteriores, las impedancias del tensor rotado  $\mathbf{Z}' = \mathbf{RZR}^T$  para un periodo dado, con el rumbo  $\theta$  como variable. Con el fin de hacer una estimación tomando en cuenta todos los periodos simultáneamente, en este trabajo se propone la función objetivo

$$C_{TF}(\theta) = \sum_{i=1}^{nT} (|\Phi_{12}(T_i, \theta)| + |\Phi_{21}(T_i, \theta)|). \quad (40)$$

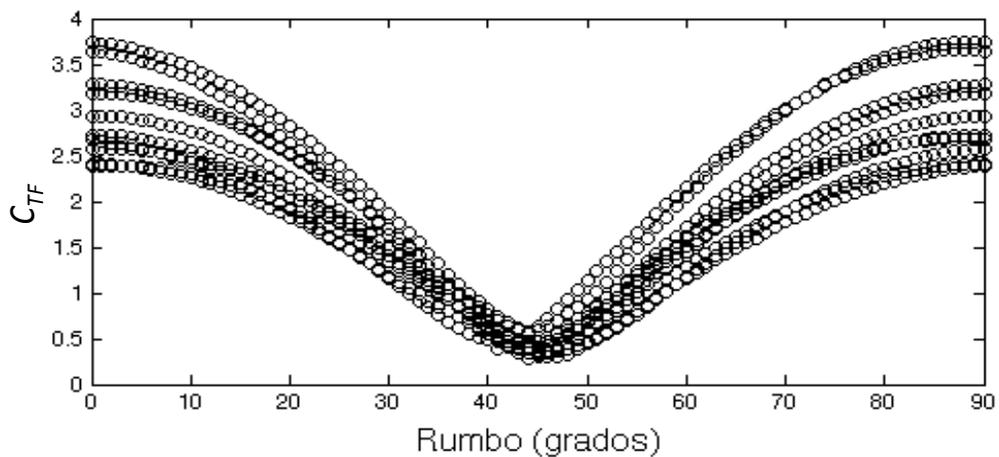
Se procede como en los casos anteriores muestreando la función objetivo cada grado en el rango  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ , y seleccionando el valor mínimo que corresponde al sitio en cuestión. Aunque este

criterio es diferente del de Bahr, ambos están diseñados para ser inmunes a las distorsiones galvánicas de los campos eléctricos.

Las gráficas que muestran el comportamiento de este criterio para 10 realizaciones se pueden observar en la Figura 18 y Figura 19. El comportamiento en ambas figuras es parecido a los casos anteriores. Se observa, como era de esperarse, un sólo un mínimo tocando el cero en  $45^\circ$  para el caso sin ruido, y con los mínimos cercanos a  $45^\circ$  para el caso de datos con ruido. Nótese que la dispersión en este caso es menor que para el criterio de Bahr, lo cual indicaría una menor incertidumbre.



**Figura 18.** Rumbo calculado para el criterio de tensor de fase. Sin distorsiones y sin error.



**Figura 19.** Rumbo calculado para el criterio de tensor de fase agregando error Gaussiano de 5%. Sin distorsiones.

### 3.5 Criterio de WAL

La formulación de Weaver et al. (2000) para estimar el rumbo se basa en representar el tensor de impedancias en términos de invariantes y separar explícitamente la dependencia angular. Siguiendo con la notación del capítulo anterior, la fórmula analítica para un periodo dado se obtiene imponiendo la condición

$$(d_{12} - d_{34})\cos 2\theta = (d_{13} - d_{24})\sen 2\theta. \quad (41)$$

Definiendo

$$w_1(\theta) = (d_{12} - d_{34})\cos 2\theta$$

y

$$w_2(\theta) = (d_{13} - d_{24})\sen 2\theta ,$$

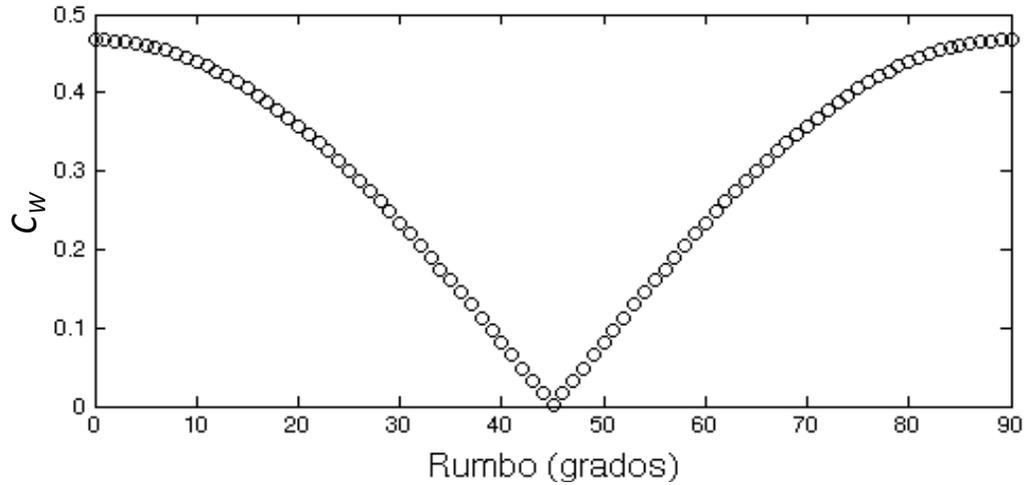
la condición equivale a hacer  $w_1(\theta) - w_2(\theta) = 0$ . Para nuestro problema de incorporar todos los periodos a la vez proponemos la función objetivo

$$C_W(\theta) = \sum_{i=1}^{nT} |w_1(\theta) - w_2(\theta)|. \quad (42)$$

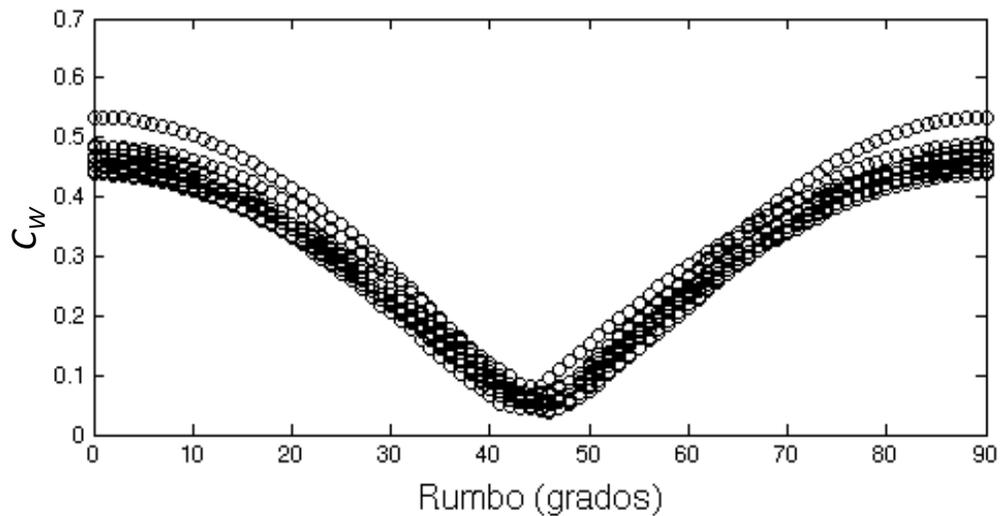
Una vez más, se procede como en los casos anteriores muestreando la función objetivo cada grado en el rango  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ , y seleccionando el valor mínimo que corresponde al sitio en cuestión. Aunque este criterio es diferente del de Bahr, ambos están diseñados para ser inmunes a las distorsiones galvánicas de los campos eléctricos. Por otro lado, al igual que  $C_{TF}$ , la función objetivo  $C_W$  no tiene dimensiones.

La Figura 20 muestra el resultado de utilizar el criterio de WAL para el caso sin distorsiones ni ruido, para 10 realizaciones. Se observa el mismo mínimo de  $45^\circ$  para todas las realizaciones, como era de esperarse. En la Figura 21 tenemos el caso donde se agrega ruido Gaussiano de 5% sin distorsiones. Las curvas para las 10 realizaciones centran su mínimo alrededor de  $45^\circ$  de igual forma que en los criterios

anteriores. Es difícil juzgar en este caso cómo la dispersión de los mínimos se compara con el caso anterior, por lo que lo mejor es hacer la comparación directamente comparando las incertidumbres para los cuatro criterios. Esto se presenta en la siguiente sección.



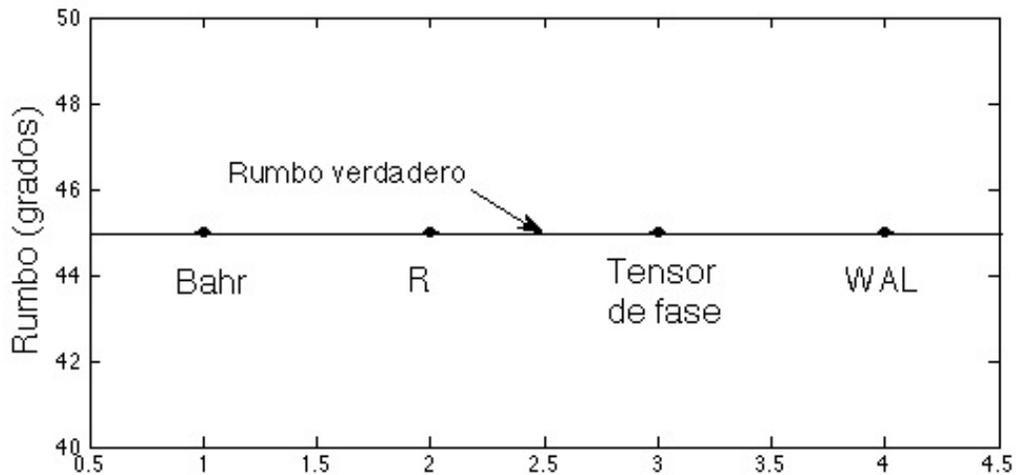
**Figura 20.** Rumbo calculado para el criterio de WAL. Sin distorsiones y sin error.



**Figura 21.** Rumbo calculado para el criterio de WAL agregando ruido Gaussiano de 5%. Sin distorsiones.

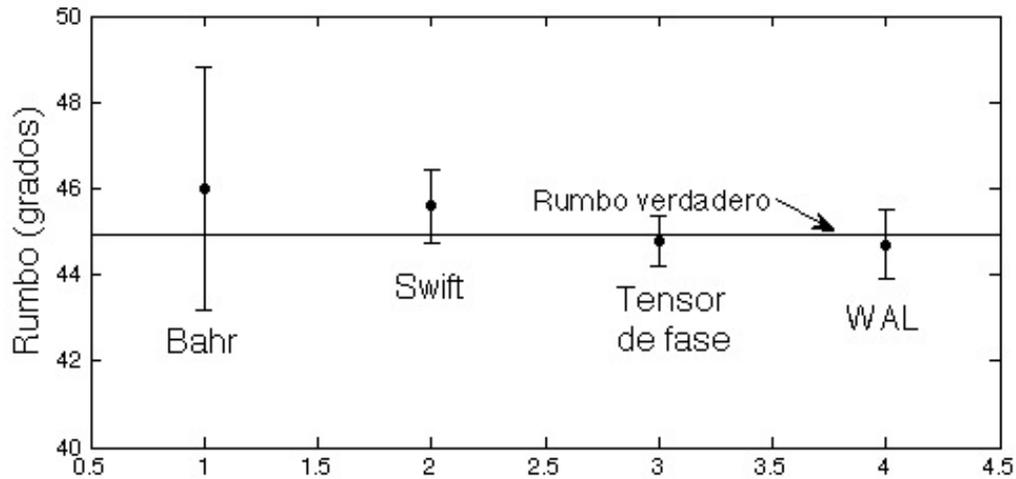
### 3.6 Comparación de los cuatro criterios con datos con ruido pero sin distorsiones.

En la Figura 22 se muestra el valor del rumbo para cada uno de los criterios antes mencionados, para el caso sin distorsión y sin error según los mínimos correspondientes. Como se puede observar, todos los criterios recuperan el valor verdadero o supuesto de  $45^\circ$ , lo cual demuestra que los cuatro algoritmos en principio son correctos como lo son las fórmulas analíticas. Queda por determinar cómo los diferentes criterios responden al ruido aleatorio.



**Figura 22.** Rumbo para cada uno de los criterios utilizando los datos COPROD2S1. Sin distorsión y sin error. La línea a 45 grados indica el rumbo verdadero o supuesto.

En la Figura 23 se muestra el valor promedio del rumbo para cada uno de los criterios antes mencionados, con 10 realizaciones, sin distorsiones y con un error del 5%. Se puede observar que en todos los casos los valores obtenidos caen dentro de los niveles de incertidumbre de una desviación estándar. Como se anticipó, los criterios de Swift y del tensor de fase son los que presentan menores incertidumbres mientras que el de Bahr es el más incierto. El de WAL sobre el que había duda presenta una incertidumbre intermedia. Queda por mostrar cómo se desempeñan los diferentes criterios cuando los datos tienen distorsiones galvánicas. Esto se explora en la siguiente sección.

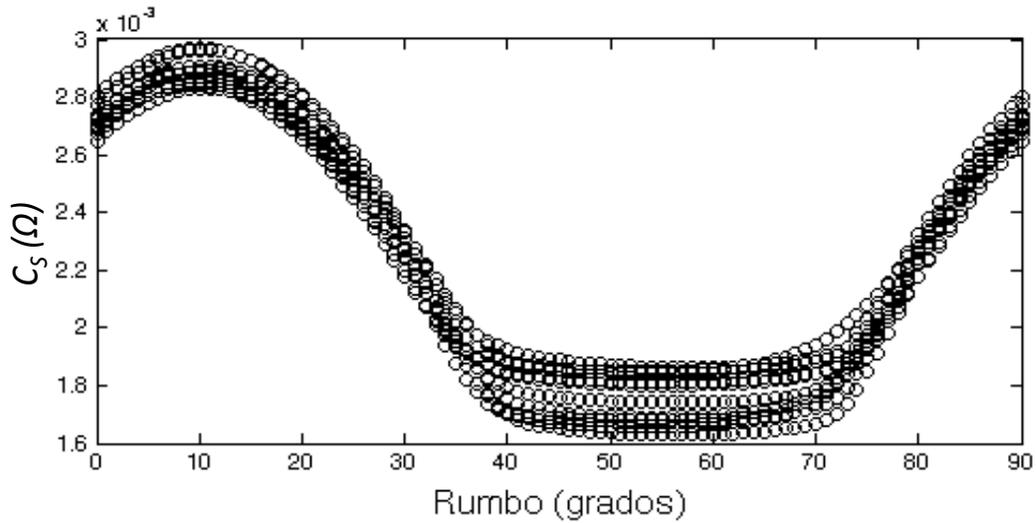


**Figura 23.** Rumbo para cada uno de los criterios. Error de 5%, sin distorsiones. La línea a 45 grados indica el rumbo verdadero o supuesto.

### 3.7 Análisis de cada criterio agregando distorsiones y ruido simultáneamente

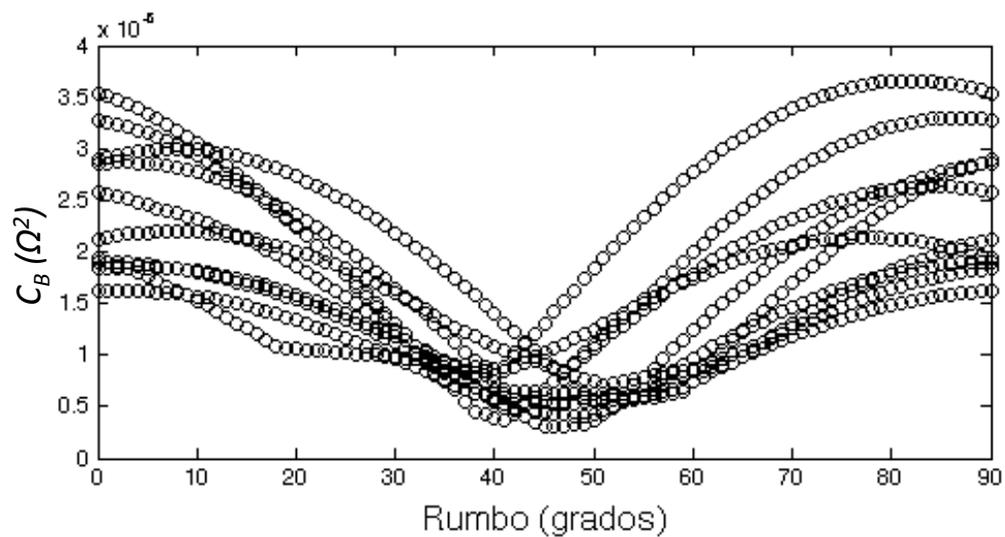
Hasta el momento hemos visto la respuesta de cada uno de los criterios en la estimación del rumbo magnetoteléurico en datos sin distorsión o error alguno y para el caso agregando solo error. Ahora analizaremos que pasa si se agregan distorsiones y ruido simultáneamente. En los ejemplos siguientes, para 10 realizaciones, el valor del ruido utilizado para el caso de cada criterio fue de 5%, el valor de las distorsiones de 20° para twist y 20° para el shear, a menos que se indique lo contrario.

Siguiendo el orden anterior, primero estudiaremos la reacción del criterio de Swift. La Figura 24 ilustra las curvas de la función objetivo obtenidas para las diferentes realizaciones. Para este criterio la diferencia en el comportamiento de las curvas en presencia de distorsiones es demasiado marcada en comparación con el caso donde solo hay error Gaussiano. Ahora el mínimo de cada una de las curvas no se encuentra cerca de 45°, sino que va desde 40° hasta los 70°. El valor promedio del rumbo después de 10 realizaciones para el criterio de Swift es de  $54.9 \pm 1.0^\circ$ .

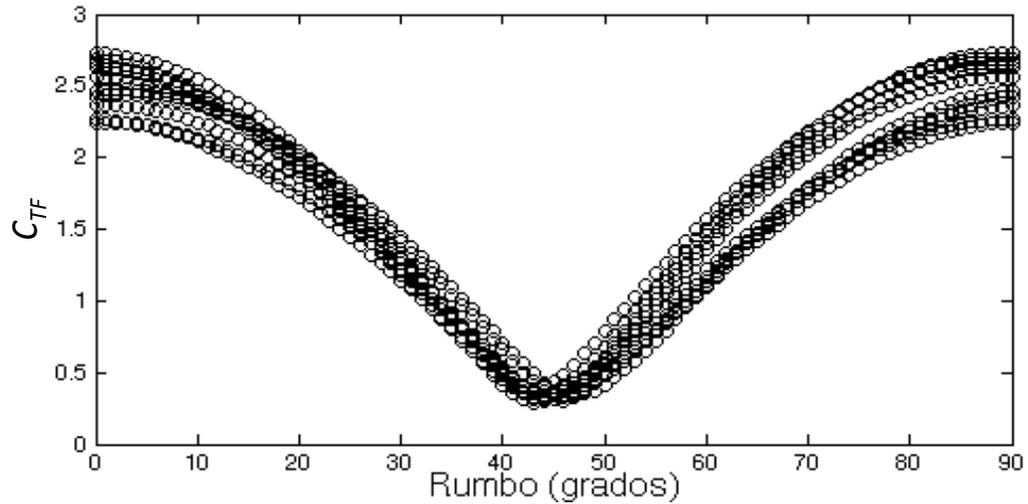


**Figura 24.** Rumbo calculado para el criterio de Swift agregando twist y shear de  $20^\circ$  respectivamente. Error de 5%.

La Figura 25 se muestra el efecto de las distorsiones junto con error Gaussiano para el criterio de Bahr. A comparación del criterio de Swift, las curvas de obtenidas con el criterio de Bahr presentan un comportamiento similar ya sea con distorsiones o sin distorsiones. El resultado promedio del rumbo para este criterio es de  $45.7^\circ \pm 2.9^\circ$ .



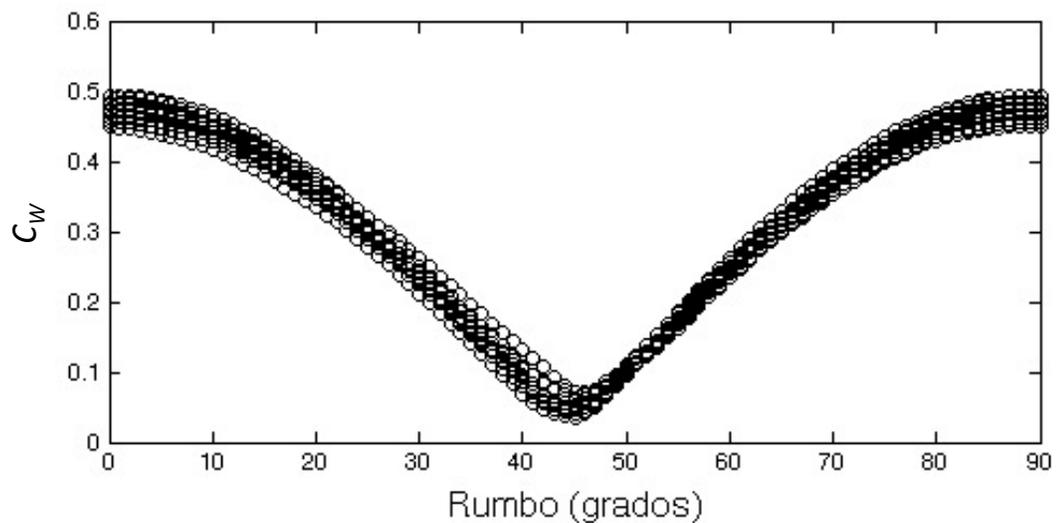
**Figura 25.** Rumbo calculado para el criterio de Bahr agregando twist y shear de  $20^\circ$  respectivamente. Error de 5%.



**Figura 26.** Rumbo calculado para el criterio de Tensor de Fase agregando twist y shear de  $20^\circ$  respectivamente. Error de 5%.

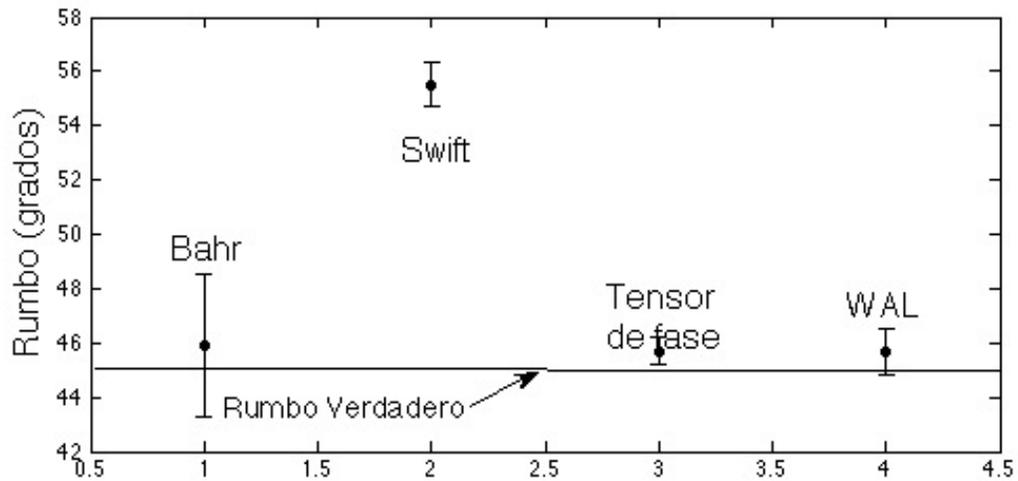
Las curvas obtenidas para el criterio del tensor de fase mostradas en la Figura 26, tienen un comportamiento más uniforme que en el caso para los criterios de Swift o Bahr, además los mínimos de cada una de las realizaciones se encuentran cerca de los  $45^\circ$ . El valor promedio para el rumbo es de  $44.6^\circ \pm 0.6^\circ$ .

Finalmente para el criterio de WAL, las curvas de la Figura 27 muestran un comportamiento similar al caso sin distorsiones. El valor promedio del rumbo después de 10 realizaciones para el criterio de WAL es de  $44.7^\circ \pm 1.9^\circ$ .



**Figura 27.** Rumbo calculado para el criterio de WAL agregando twist y shear de  $20^\circ$  respectivamente. Error de 5%.

La Figura 28 muestra los valores promedio del rumbo para cada uno de los criterios agregando distorsiones y ruido simultáneamente. Claramente se observa que el criterio de Swift padece un mayor efecto debido a las distorsiones. Los criterios de Bahr, tensor de fase y WAL se acercan al valor esperado de  $45^\circ$ . Sin embargo las barras de error difieren claramente con respecto al tensor de fase, el cual resulta ser el de mejor desempeño en la presencia tanto de ruido como de distorsiones.



**Figura 28.** Rumbo y barras de error calculado para cada uno de los criterios, agregando twist y shear de  $20^\circ$  respectivamente. Error de 5%. La línea a  $45^\circ$  indica el rumbo verdadero o supuesto.

### 3.8 Conclusión

En este capítulo se mostró que la estimación de rumbo magnetotelúrico se estabiliza cuando se incluyen todos los periodos disponibles de un sitio dado. Para incluir todos los periodos se definieron funciones objetivo tomando como base los mismos criterios que se utilizan en el desarrollo de las fórmulas analíticas, las cuales proporcionan estimaciones para un solo periodo. Los experimentos con y sin distorsiones y ruido muestran que el criterio de Swift se ve severamente afectado por las distorsiones, por lo que la estimación del rumbo en este caso no es confiable. Este criterio solo busca minimizar los elementos de la diagonal del tensor sin considerar posibles distorsiones. De hecho los resultados no sorprenden dado que el criterio fue desarrollado muchos años antes de que se sospechara la existencia de las distorsiones galvánicas. El criterio que recupera de una manera más efectiva el valor del rumbo es el del tensor de fase, ya que se acerca más al valor esperado y muestra menores incertidumbres. El criterio de Bahr y el de WAL pueden ser tomados como una opción válida para la determinación del

rumbo. Los resultados indican que siempre están cercas del valor verdadero aun en presencia de distorsiones.

## Capítulo 4. Comparación con el algoritmo STRIKE

---

### 4.1 Introducción

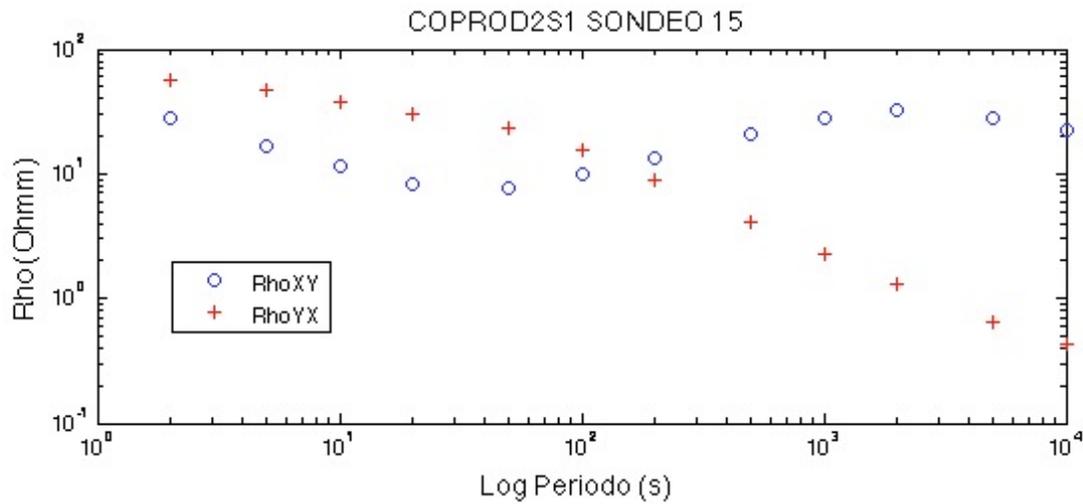
En esta parte final del trabajo se comparan las metodologías propuestas en los capítulos anteriores con los obtenidos utilizando el algoritmo STRIKE de McNice y Jones (2001). Este algoritmo se basa en ajustar el modelo de distorsión de Groom y Bailey a las impedancias medidas. En este caso se busca que el modelo reproduzca los datos minimizando

$$\chi^2 = \frac{1}{4nT} \sum_{i=1}^{nT} \left\{ \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{|Z_{jk}^m(T_i) - Z_{jk}^c(T_i)|^2}{\sigma_{jk}^2(T_i)} \right\}.$$

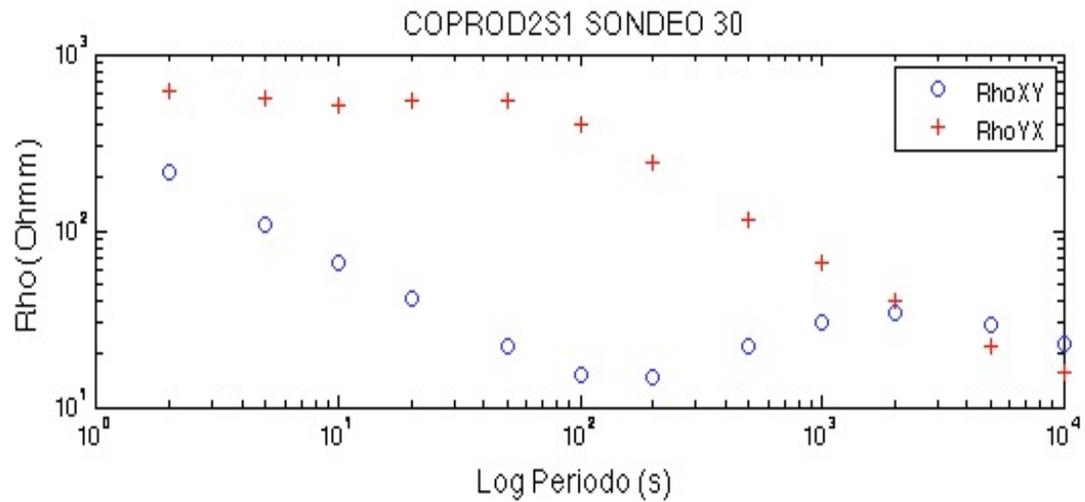
Como en el capítulo anterior,  $nT$  es el número de periodos disponibles para un sitio dado. Como se puede observar en la expresión para  $\chi^2$  se busca que  $Z_{jk}^c(T_i)$ , los valores calculados según el modelo de distorsión, reproduzcan las impedancias medidas  $Z_{jk}^m(T_i)$  para todos los periodos de del sitio. Las diferencias entre los valores medidos y calculados se normalizan como es costumbre por las incertidumbres para el periodo correspondiente por lo que se busca  $\chi^2 \cong 1$ . Actualmente STRIKE es la referencia en la estimación de los parámetros de distorsión, así como de la dirección del rumbo y también de las impedancias 2D. En contraste, las fórmulas y sus criterios proveen el rumbo sin tener que resolver para los parámetros de distorsión ni para las impedancias.

### 4.2 Las fórmulas estabilizadas vs. el algoritmo STRIKE

En esta sección se muestran las diferencias entre las fórmulas estabilizadas del Capítulo II y el algoritmo STRIKE cuando se aplican al mismo conjunto de datos. Para mostrar el funcionamiento del algoritmo STRIKE y realizar la comparación se trabajó al igual que en el capítulo III, con el conjunto de datos sintéticos COPROD2S1. De este conjunto se tomaron para su análisis dos sondeos, los sondeos 15 y 30. La Figura 29 muestra las curvas de resistividad aparente del sondeo 15 y la Figura 30 los del sondeo 30.



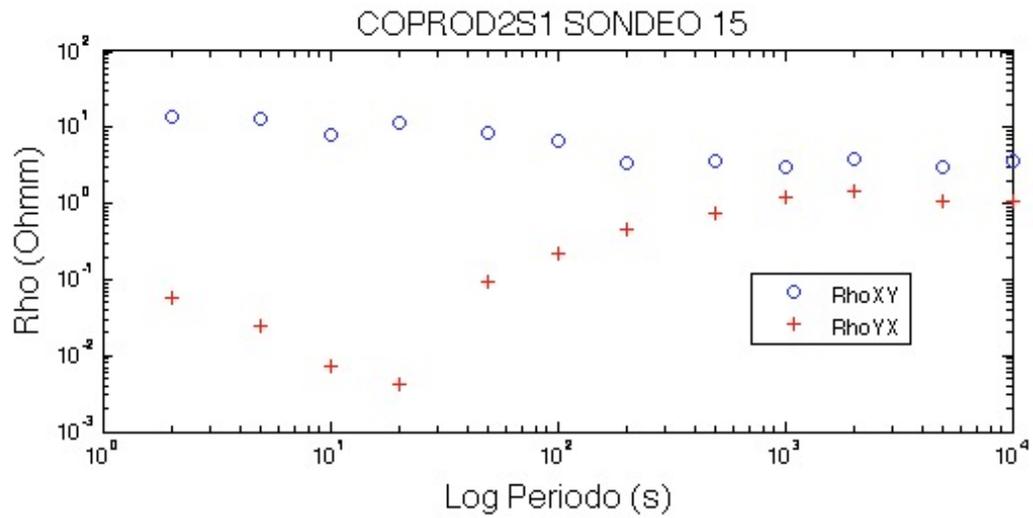
**Figura 29.** Resistividad aparente del sondeo 15 en el conjunto de datos COPROD2S1.



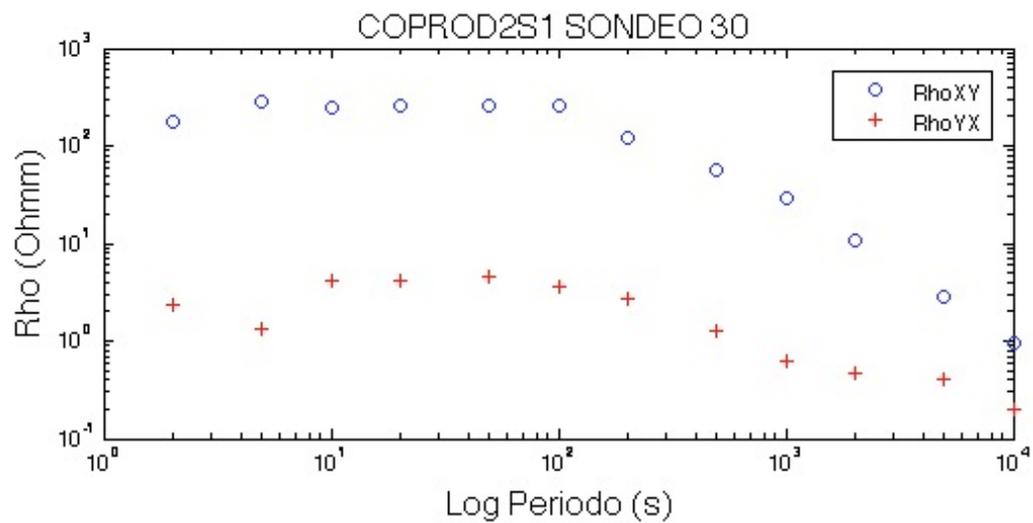
**Figura 30.** Resistividad aparente del sondeo 30 en el conjunto de datos COPROD2S1.

Para el correspondiente análisis se agregaron distorsiones a los datos de cada uno. Las distorsiones agregadas fueron: twist de  $15^\circ$ , shear de  $30^\circ$  y un error Gaussiano del 5%.

Las Figuras 31 y 32 muestran las versiones distorsionadas de las curvas de resistividades aparente (sólo las principales) para los sondeos 15 y 30, respectivamente.



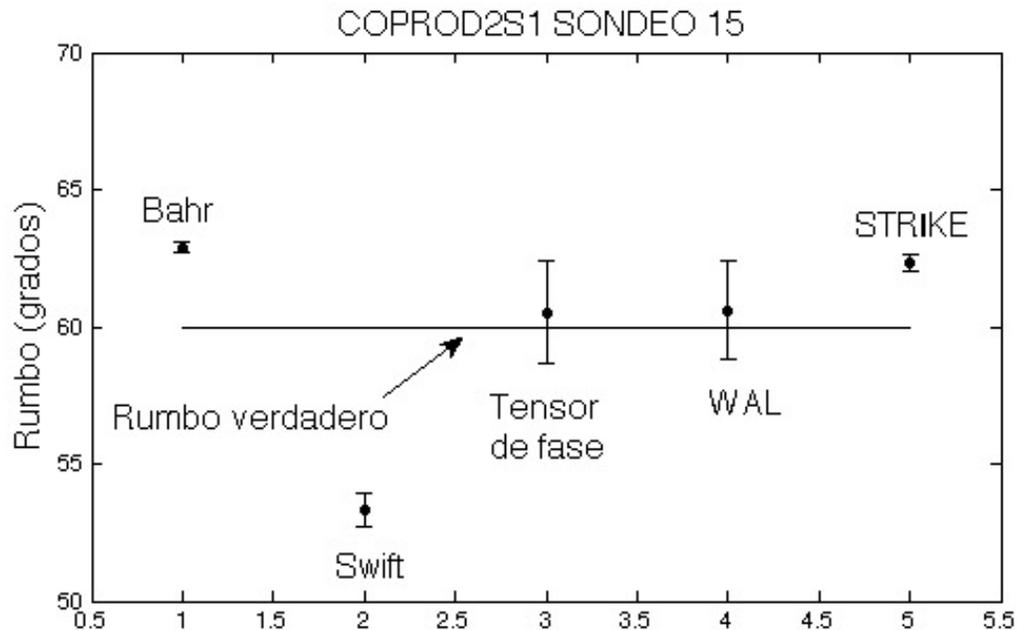
**Figura 31.** Resistividad aparente del sondeo 15, agregando distorsiones.



**Figura 32.** Resistividad aparente del sondeo 30, agregando distorsiones.

Los datos se rotaron un ángulo de  $-60^\circ$  grados para que el rumbo a obtener fuera de  $60^\circ$ . Una vez que se distorsionaron los datos, se buscó estimar el rumbo utilizando las fórmulas analíticas abordadas en el

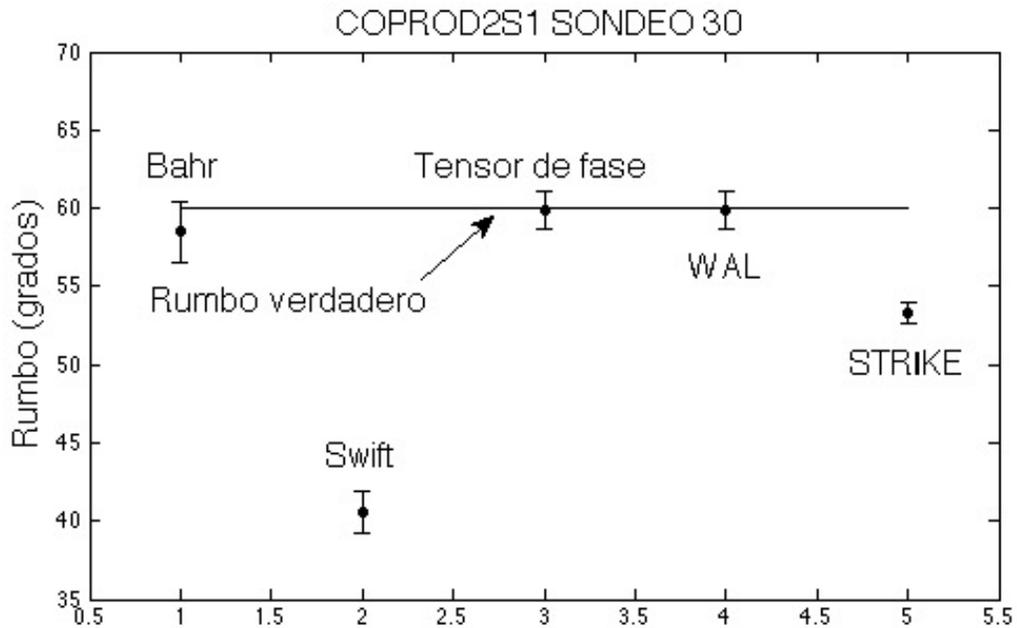
Capítulo II y el algoritmo STRIKE. En la Figura 33 se presentan los rumbos obtenidos para el sondeo 15 con sus respectivas incertidumbres.



**Figura 33.** Rumbo con sus respectivas barras de error para el sondeo 15, utilizando datos distorsionados.

Los valores del rumbo que se ilustran en la Figura 33 son para el caso del tensor de fase,  $60.50^\circ \pm 1.86^\circ$ ; para Bahr,  $62.90^\circ \pm 0.20^\circ$ ; Swift,  $53.30^\circ \pm 0.60^\circ$  y para WAL  $60.60^\circ \pm 1.79^\circ$ . En el caso del algoritmo STRIKE el rumbo es de  $62.35 \pm 0.30^\circ$ . Las mejores estimaciones en esta comparación son las del tensor de fase y de WAL. El mal desempeño de la fórmula de Swift se debe sin duda a que no tiene ninguna previsión para neutralizar las distorsiones galvánicas. Minimizar la magnitud de las diagonales en el caso de distorsiones simplemente no es efectivo. En el caso del algoritmo STRIKE el relativo mal desempeño probablemente se debe a la correlación que existe entre el rumbo y todos los demás parámetros que se determinan, incluyendo los parámetros de distorsión y las impedancias. El mal desempeño de la fórmula de Bahr es más difícil de explicar, a no sea que su criterio implícito sea menos efectivo que el de los demás.

Ahora analicemos los resultados obtenidos para el sondeo 30, los cuales se muestra en la Figura 34.

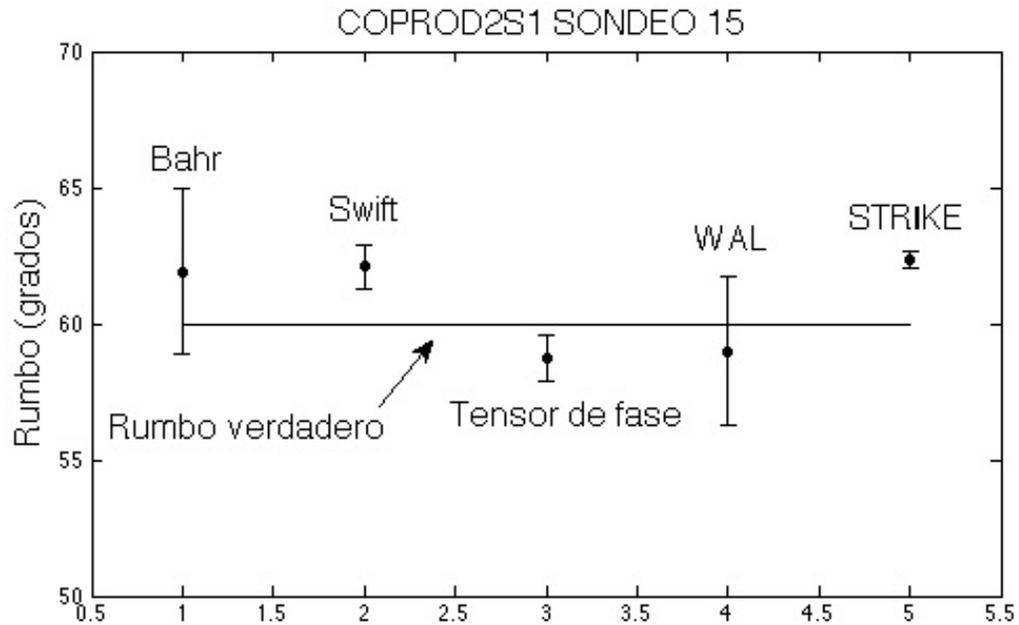


**Figura 34.** Rumbo con sus respectivas barras de error para el sondeo 30, utilizando datos distorsionados.

Para este caso los valores obtenidos fueron, para el tensor de fase,  $59.90^\circ \pm 1.17^\circ$ ; Bahr,  $58.50^\circ \pm 1.96^\circ$ ; Swift,  $40.60^\circ \pm 1.34^\circ$  y WAL,  $59.90^\circ \pm 1.17^\circ$ . El promedio para el caso del STRIKE es de  $53.28^\circ \pm 0.64^\circ$ . Para este sondeo la estimación del tensor de fase y la de WAL siguen siendo las mejores, y la de Bahr mejoró bastante. Al igual que para el sondeo 15, la de Swift es la peor por las mismas razones, y también el caso del algoritmo STRIKE en que muy probablemente hay correlación con las demás incógnitas.

### 4.3 Los criterios de las fórmulas vs. el algoritmo STRIKE

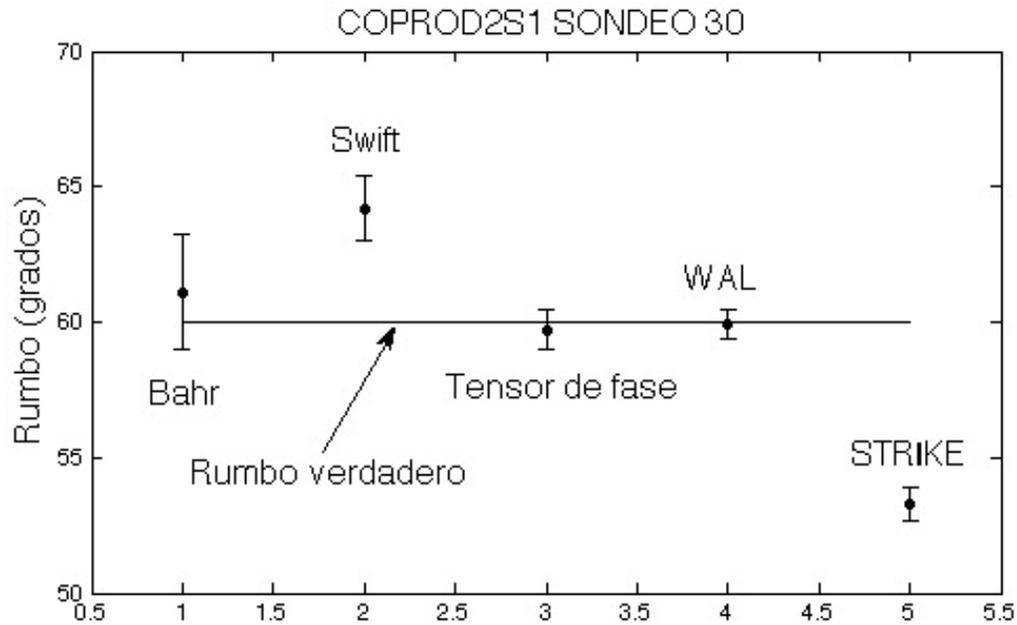
Las figuras anteriores mostraron la comparación del ángulo del rumbo obtenido mediante las fórmulas analíticas estabilizadas con el algoritmo STRIKE. Las siguientes figuras muestran la comparativa utilizando solamente la minimización de los criterios y el algoritmo STRIKE. La Figura 35 muestra los resultados para el sondeo 15 del conjunto de datos COPROD2S1.



**Figura 35.** Rumbo con sus respectivas barras de error para el sondeo 15, utilizando datos distorsionados.

Para este caso, en donde se utilizaron los criterios, los valores de rumbo obtenidos para cada uno de ellos son: tensor de fase,  $58.70^\circ \pm 0.84^\circ$ ; Bahr,  $61.90^\circ \pm 3.04^\circ$ ; Swift,  $62.10^\circ \pm 0.81^\circ$  y WAL,  $59.0^\circ \pm 2.76^\circ$ . El resultado para el STRIKE es el mismo que en la grafica 33. Los resultados para este ejemplo son similares a los anteriores, todos están alrededor del rumbo verdadero con algunas diferencias. Tomando en cuenta los valores obtenidos, la mejor estimación es la realizada por el criterio de WAL. Sin embargo, los errores en esta estimación son mayores a los mostrados en las figuras 33 y 34.

Por ultimo en la Figura 36 se muestra el rumbo para el sondeo 30 utilizando los criterios y el algoritmo STRIKE.



**Figura 36.** Rumbo con sus respectivas barras de error para el sondeo 30, utilizando datos distorsionados.

Los valores obtenidos para este sondeo son muy cercanos uno a otro. Tensor de fase,  $59.90^\circ \pm 0.55^\circ$ ; Bahr,  $61.10^\circ \pm 2.13^\circ$ ; Swift,  $64.20^\circ \pm 1.18^\circ$  y WAL,  $59.90^\circ \pm 0.55^\circ$ . Para el caso del STRIKE el valor del rumbo es igual que en la Figura 34. Sorprendentemente para este sondeo y tomando en cuenta los valores obtenidos, la estimación mas lejana del valor esperado es la realizada por el algoritmo STRIKE. Las mejores son las realizadas por el criterio del tensor de fase y WAL.

#### 4.4 Conclusión

Fue una sorpresa que el desempeño del algoritmo de referencia STRIKE fue uno de los peores. La explicación es que teniendo que estimar al mismo tiempo los parámetros de distorsión, las impedancias y el rumbo, necesariamente hay correlaciones entre tantas variables. Por otro lado, tanto las fórmulas estabilizadas como la minimización de los criterios correspondientes no dan lugar a estas correlaciones. El problema se plantea ingeniosamente en términos de una sola variable: el rumbo. De esta manera se evitan las correlaciones con las demás variables. Por otro lado, el mal desempeño de la fórmula de Swift y de su criterio se debe a que no considera ninguna previsión para neutralizar las distorsiones galvánicas.

El desempeño en los demás casos era más o menos previsible dado que consideran medidas para neutralizar dichas distorsiones.

## Capítulo 5. Conclusiones

---

La principal conclusión de esta tesis es que las fórmulas analíticas que existen para determinar el rumbo magnetotelúrico no son inestables como comúnmente se cree. La creencia de que son inestables se origina en la comparación de su desempeño con el algoritmo estándar STRIKE en Jones (2012). Sin embargo, esta comparación no es exhaustiva e invita a idear nuevas formas de utilizar las fórmulas y a realizar más comparaciones en diversas circunstancias. En el Capítulo II se revisa un método desarrollado recientemente para estabilizar las estimaciones del rumbo cuando se utiliza la fórmula del tensor de fase. Este método se extiende con buenos resultados a las fórmulas de Swift, Bahr y WAL. Se encontró que un paso preliminar que utiliza todos los periodos al mismo tiempo tiene mejor desempeño que las estimaciones periodo por periodo incluso ya estabilizadas. El paso preliminar busca rotar los datos originales a un ángulo óptimo para desde allí aplicar las fórmulas. En sí mismo este ángulo de pre-rotación es una estimación global del rumbo que utiliza todos los periodos a la vez, aunque su función es secundaria en la estabilización de las fórmulas periodo por periodo. El mejor desempeño del ángulo de pre-rotación motivó la búsqueda de otras formas de utilizar todos los periodos a la vez. En el capítulo III se propone utilizar, en lugar de las fórmulas analíticas, los criterios que dan lugar a las fórmulas. Para cada caso se definió una función objetivo dependiendo del criterio de igualdad utilizado para desarrollar las fórmulas. La función objetivo, en contraste con el criterio de igualdad para cada periodo, sólo busca minimizar la suma de diferencias para todos los periodos. Las estimaciones son exactas al igual que las de las fórmulas analíticas cuando se aplican a datos sin ruido. Sin embargo, en contraste con las fórmulas las funciones objetivo proveen estimaciones estables en casos de datos con ruido. De hecho, como se muestra en el Capítulo IV, los resultados de varias fórmulas pueden ser mejores que los del algoritmo estándar STRIKE. Esto se explica porque las fórmulas exitosas evitan tanto la estimación de distorsiones como el cálculo de impedancias, mientras que el algoritmo STRIKE las calcula todas, lo cual necesariamente conlleva a correlaciones entre las diferentes variables. En contraste, los criterios de las fórmulas sólo tienen una variable que es el rumbo

## Literatura citada

---

- Bahr, K.: Magnetotellurische Messung des elektrischen Widerstandes der Erdkruste und des oberen Mantels in Gebieten mit lokalen und regionalen Leitfähigkeitsanomalien. Diss. Math.- Nat. Fachb. Univ. Göttingen, 1985.
- Bahr, K., 1988. Interpretation of the magnetotelluric impedance tensor: regional induction and local telluric distortion. *Geophysics*, 62, 119-127.
- Cagniard, L., 1953. Basic theory of the magneto-telluric method of geophysical prospecting. *Geophysics*, 18, 605-635.
- Caldwell, T.G., H.M. Bibby, C. Brown, 2004. The magnetotelluric phase tensor. *Geophysics*, 158, 457-469.
- Cantwell, T. (1960). *Detection and analysis of low frequency magnetotelluric signals*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Chave, A. , Jones, A.G., (Eds.), 2012. The magnetotelluric method: Theory and practice. Cambridge University Press, New York.
- Fischer, G. & Masero, W., 1994. Rotational properties of the magnetotelluric impedance tensor: the example of the Araguinha impact crater, Brazil, *Geophys. J. Int.*, 119, 548-560.
- Gómez-Treviño, E., F.J. Esparza, J.M. Romo-Jones, 2013. Effect of galvanic distortions on the series and parallel magnetotelluric impedances and comparison with other responses. *Geofísica Internacional*, 52, 135-152.
- Groom, R., Bailey R.C., 1989, Decomposition of magnetotelluric impedance tensors in the presence of local three-dimensional galvanic distortions. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 93, 1913-1925.
- Groom, R., Kurtz R.D., Jones A.G., Boerner D.E., 1993. A quantitative methodology to extract regional magnetotelluric impedances and determine the dimension of the conductivity structure. *Geophysical J. Int.*, 115, 1095-1118.
- Groom, R. W. & R. C. Bailey, 1991. Analytical investigations of the effects of near surface three dimensional galvanic scatterers on MT tensor decomposition. *Geophysics*, 56(4), 496-518.
- Jones, A. G., 2012. Distortion of magnetotelluric data: its identification and removal. En: Chave, A., Jones, A. G., (Eds.), *The Magnetotelluric Method : Theory and practice*. Cambridge University Press, New York.
- Kurtz, R. D. & G. D. Garland (1976). Magnetotelluric measurements in eastern Canada. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 45(2), 321–347.

- Muñiz, Y., E. Gómez-Treviño, F.J. Esparza, M. Cuellar, 2017. Stable 2D magnetotelluric strikes and impedances via the phase tensor and the quadratic equation. *Geophysics*, 82, E169-E186.
- McNeice, G.W., Jones A.G., 2001. Multisite, multifrequency tensor decomposition of magnetotelluric data. *Geophysics*, 66, 158-173.
- Ranganayaki, R.P., 1984. An interpretive analysis of magnetotelluric data, *Geophysics*, 49, 1730-1748.
- Simpson, F. y Bahr, K. (2005). *Practical Magnetotellurics*. Cambridge University Press, primera edición. Cambridge, UK, p. 254.
- Sims, W. E. & F. X. Bostick (1969). Methods of magnetotelluric analysis. Tech. Rep. 58, Electr. Geophys. Res. Lab., University of Texas at Austin.
- Szarka, L., Menvielle M., 1997. Analysis of rotational invariants of the magnetotelluric tensor. *Geophysical J. Int.*, 129, 133-142.
- Swift, C.M., 1967. Magnetotelluric investigation of an electrical conductivity anomaly in the southwestern United States, PhD thesis, Department of Geology and Geophysics, MIT, Cambridge, MA (reprinted in *Magnetotelluric Methods*, pp. 156-166, ed. Vozoff, K., *Geophys. Reprint Ser. No. 5*, 1988, SEG, Tulsa, OK).
- Swift, C. M. (1986). A magnetotelluric investigation of an electrical conductivity anomaly in the southwestern United States. In *Magnetotelluric Methods*, ed. K. Vozoff. Tulsa: Society of Exploration Geophysicists, pp. 156-166.
- Varentsov, I.M., 1998. 2D synthetic data sets COPROD-2S to study MT inversion techniques. En: the 14th Workshop on Electromagnetic Induction in the Earth, Sinaia, Romania.
- Vozoff, K. (1972). The magnetotelluric method in the exploration of sedimentary basins. *Geophysics*, 37(1), 98-141.
- Weaver, J.T., 1994. *Mathematical Methods for Geo-electromagnetic Induction*, Research Studies Press, Baldock.
- Weaver, J. T., A. K. Agarwal, et al. (2000). Characterization of the magnetotelluric tensor in terms of its invariants. *Geophys. J. Int.*, 141(2), 321-336.
- Wwaver, J. T., A. K. Agarwal, et al. (2006). The relationship between the magnetotelluric tensor invariants and phase tensor of Caldwell, Bibby and Brown. *Exploration Geophysics*, 37, 261-267.