

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Doctorado en Ciencias
en Electrónica y Telecomunicaciones
con orientación en Instrumentación y Control**

**Generación de oscilaciones en sistemas de baja
dimensión mediante retardos**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Doctor en Ciencias

Presenta:

Abimael Eliaquim Salcedo García

Ensenada, Baja California, México

2019

Tesis defendida por

Abimael Eliaquim Salcedo García

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos
Director de tesis

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez

Dr. Yury Orlov

Dr. Jonatan Peña Ramírez

Dr. Fernando Verduzco González



Dr. Daniel Saucedo Carvajal
Coordinador del Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dra. Rufina Hernández Martínez
Directora de Estudios de Posgrado

Abimael Eliaquim Salcedo García © 2019

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis

Resumen de la tesis que presenta Abimael Eliaquim Salcedo García como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

Generación de oscilaciones en sistemas de baja dimensión mediante retardos

Resumen aprobado por:

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos
Director de tesis

En este trabajo de tesis se presentan algunas técnicas para inducir oscilaciones periódicas o caóticas en sistemas de bajo orden. El primer método que se presenta consiste en inducir oscilaciones caóticas en sistemas de segundo orden, tipo Lienard, mediante un control retroalimentado lineal que depende del estado actual y del estado retardado. Con las series de Taylor se obtiene un sistema aproximado, del sistema con retardo, al truncar la serie del retardo al tercer orden. Después, el sistema aproximado es igualado a un sistema caótico existente al ajustar los parámetros introducidos en el control. Así, el sistema con retardo presenta órbitas caóticas. Otro método propuesto utiliza la estructura de perturbaciones singulares para inducir órbitas periódicas o caóticas en sistemas de cualquier orden. En este procedimiento, primero se lleva al sistema a la estructura de perturbaciones singulares, para después acoplarlo a un sistema de retardo puro ("pure shift") con la misma estructura que un sistema discreto (mapeo); así, el sistema en lazo cerrado produce dinámicas similares a las del mapa utilizado en el algoritmo de control. Se propone una tercera técnica para generar oscilaciones periódicas o caóticas en sistemas de primer y segundo orden. Esta técnica consiste en elegir una función no lineal del estado retardado con algunas propiedades de pasividad, y ajustar una ganancia para asegurar la inestabilidad de todos los puntos de equilibrio del sistema en lazo cerrado, para después imponer condiciones de semipasividad. Al cumplirse estas condiciones, el sistema en lazo cerrado produce oscilaciones periódicas o caóticas. En cada una de estas técnicas se incluyen ejemplos que ilustran la efectividad de los métodos propuestos.

Palabras clave: anticontrol de caos, series de Taylor, perturbaciones singulares, semipasividad.

Abstract of the thesis presented by Abimael Eliaquim Salcedo García as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Electronic and Telecommunications with orientation in Instrumentation and Control.

Generation of oscillations in low dimensional systems by means delays

Abstract approved by:

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos
Thesis Director

This thesis presents some strategies to produce periodic or chaotic oscillations in small order systems. The first method presented consists in inducing chaotic oscillations in second-order systems, Lienard type, by linear feedback control that depends on the current state and the delayed state. With the Taylor series we get an approximation of the delayed system when truncating the delay series to the third order. Then, the approximate system is matched to an existing chaotic system when adjusting the parameters of the control. Thus, the delayed system exhibits chaotic oscillations. A second method is presented using the singular perturbation technique to produce periodic or chaotic behavior in systems of any order. This technique consists on representing the system in a singular perturbation form, then it is coupled to a pure shift system with the same structure as a discrete-time system. Thus, the closed-loop system displays similar behavior to that of the pure shift. A third technique to generate periodic or chaotic oscillations in first and second-order systems is proposed. This method consists on choosing a nonlinear function of the delayed state, with some properties, tuning a gain parameter to ensure that all the equilibrium points of the closed-loop system be unstable, then imposing conditions on the closed-loop system to be semipassive. when these conditions are satisfied, the closed-loop system exhibits periodic or chaotic oscillations. We included examples that illustrate the effectiveness of each technique presented.

Keywords: anticontrol of chaos, Taylor series, singular perturbations, semipassivity

Dedicatoria

A mi familia

Agradecimientos

A mi director de tesis el Dr. Joaquín Álvarez por haberme guiado en este trabajo, por su tiempo, paciencia, conocimientos y por sus tan valiosos comentarios.

A los miembros del comité: Dr. Alejandro Márquez, Dr. Jonatan Peña, Dr. Yury Orlov y Dr. Fernando Verduzco por el tiempo dedicado a esta tesis y por las sugerencias y aportaciones que me permitieron realizar este trabajo. También quiero agradecer al Dr. Ricardo Cuesta por el apoyo brindado.

A mi familia por el cariño y apoyo incondicional que siempre me han brindado.

A los investigadores, estudiantes y personal del posgrado en electrónica y telecomunicaciones por sus atenciones.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por brindarme la oportunidad de estudiar un doctorado en electrónica y telecomunicaciones.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría/doctorado. No. de becario: 221180.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	viii
Lista de notaciones	xi
 Capítulo 1. Introducción	
1.1. Justificación y planteamiento del problema	3
1.2. Objetivo	3
1.2.1. Objetivos particulares	3
1.3. Organización de la tesis	4
 Capítulo 2. Preliminares	
2.1. Series de Taylor	7
2.2. Ecuaciones tipo Liénard	8
2.3. Mapa logístico	10
2.4. Puntos de equilibrio de sistemas con retardo	12
2.5. Perturbaciones singulares	16
2.6. Semipasividad de sistemas dinámicos	25
2.7. Diagramas de Feigenbaum	28
2.8. Exponentes de Lyapunov	29
2.9. Sistemas caóticos	31
 Capítulo 3. Aproximación por series de Taylor	
3.1. Método	34
3.2. Comportamiento caótico de un sistema tipo Van der Pol con retardo ..	36
3.3. Conclusiones	41
 Capítulo 4. Método de perturbaciones singulares	
4.1. Generación de oscilaciones mediante el método de perturbaciones singulares	43
4.2. Ejemplos	46
4.3. Conclusiones	59
 Capítulo 5. Generación de oscilaciones en sistemas de primer orden	
5.1. Sistema controlado de primer orden	60
5.2. Existencia y estabilidad de puntos de equilibrio	61

Tabla de contenido (continuación)

5.3.	Condición de semipasividad	64
5.4.	Ejemplos	67
5.4.1.	Mapa logístico	68
5.4.2.	Mapa seno	71
5.4.3.	Mapa triangular	78
5.5.	Circuito caótico	82
5.6.	Conclusiones	86
 Capítulo 6. Sistemas de segundo orden		
6.1.	Estabilidad de los puntos de equilibrio	87
6.2.	Condición de semipasividad	89
6.3.	Ejemplo	90
6.4.	Conclusiones	95
 Capítulo 7. Conclusiones		
7.1.	Trabajo a futuro	97
Literatura citada		99

Lista de figuras

Figura	Página
1. Ciclo límite estable de la ecuación de van der Pol.	10
2. Órbitas del mapa logístico para diferentes valores de μ	11
3. Curvas de la región de estabilidad para el sistema $\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - \tau)$	17
4. Diagrama de Feigenbaum del mapa logístico.	29
5. Sensibilidad a las condiciones iniciales. Sistema de Rössler para condiciones iniciales ligeramente diferentes.	32
6. Dinámica del sistema (61).	37
7. Dinámica del sistema (60).	38
8. Dinámica del sistema (59).	38
9. Señal de control para el sistema (59).	39
10. Diagramas de Feigenbaum.	39
11. Espectros de frecuencias.	40
12. Respuestas del sistema (80) y (81) para diferentes valores de μ	47
13. Señal de control del sistema (80) y (81) para diferentes valores de μ	48
14. Diagrama de Feigenbaum del sistema retroalimentado (80)-(81).	49
15. Distintas respuestas del sistema (87) y (88) para varios valores de μ	51
16. Señal de control del sistema (87) y (88) para varios valores de μ	52
17. Diagramas de Feigenbaum del sistema (87) y (88).	53
18. Respuestas del sistema (90) y (91) para distintos valores de μ	54
19. Dinámica caótica del sistema de Lorenz (92).	55
20. Respuesta sistema (94) para diferentes valores de μ	57
21. Señal de control para el sistema (94) con diferentes valores de μ	58
22. Diagramas de Feigenbaum del sistema (94).	58
23. Conexión en retroalimentación negativa.	64
24. Respuesta del sistema (113) con el mapa logístico (114), para $\mu = 4$ y diferentes valores de K	69
25. Señal de control para el sistema (113)-(114), con $\mu = 4$ y diferentes valores de K	70
26. Comportamiento del sistema (113) con el mapa logístico (114) en el espacio paramétrico- (K, μ) . Puntos de equilibrio (azul), órbitas periódicas (verde), órbitas no periódicas y caóticas (rojo).	71

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
27. Máximo exponente de Lyapunov del sistema (113) con el mapa logístico (114) como una función del parámetro K	72
28. Diagrama de bifurcación y ubicación del punto de equilibrio inestable del sistema (113) con el mapa logístico (114).	72
29. Respuesta del sistema (113) con el mapa seno, $A = 3$, $J = (-\pi, \pi)$, y varios valores de K	74
30. Señal de control para el sistema (113) con el mapa seno, $A = 3$, $J = (-\pi, \pi)$, y varios valores de K	75
31. Comportamiento del sistema (113) con el mapa seno en el espacio paramétrico- (A, K) . Puntos de equilibrio (Azul), órbitas periódicas (verde), órbitas no periódicas y caóticas (rojo).	76
32. Diagrama de bifurcaciones y ubicación de un punto de equilibrio inestable del sistema (113) con el mapa seno.	76
33. Máximo exponente de Lyapunov del sistema (113) con el mapa seno. . . .	77
34. Atractores del sistema (113) con el mapa seno: (a) $A = 5$, $K = 10$, $x_\tau \in [-2\pi, 2\pi]$, (b) $A = -5$, $K = 10$, $x_\tau \in [-2\pi, 2\pi]$	77
35. Respuesta del sistema (113) con el mapa triangular (116), para $\alpha = 2$	79
36. Señal de control para el sistema (113) con el mapa triangular (116), con $\alpha = 2$	80
37. Comportamiento del sistema (113) con el mapa triangular (116). Puntos de equilibrio estables (azul), órbitas periódicas (verde), órbitas no periódicas y caóticas (rojo).	81
38. Máximo exponente de Lyapunov del sistema (113) con el mapa triangular (116).	81
39. Diagrama de bifurcación y ubicación del punto de equilibrio inestable del sistema (113) con el mapa triangular (116).	82
40. Circuito RC.	83
41. Diferentes comportamientos del circuito (117) con $\tau = 0.1s$, $\mu = 4$	84
42. Señal de control para diferentes valores de K del circuito.	85
43. Respuesta del sistema (127) con el mapa logístico (128), para $\mu = 4$ y diferentes valores de K	92
44. Señal de control del sistema (127) con el mapa logístico (128), para $\mu = 4$ y diferentes valores de K	93

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
45. Comportamiento del sistema (127) con el mapa logístico (128). Puntos de equilibrio (azul), órbitas periódicas (verde), órbitas no periódicas y caóticas (amarillo).	94
46. Diagrama de Feigenbaum del sistema (127) con el mapa logístico (128). .	94
47. Máximo exponente de Lyapunov del sistema (127) con el mapa logístico (128) como una función del parámetro K	95

Notación

$\approx$	Aproximadamente igual
$\triangleq$	Se define como
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$\mathbb{R}_+$	Conjunto de los números reales no negativos
$\mathbb{Z}$	Conjunto de los números enteros
$\mathbb{Z}_+$	Conjunto de los números enteros no negativos
$\mathbb{R}^n$	Espacio euclídeo de dimensión n
$\mathcal{C}^k$	Espacio de funciones k veces diferenciables
$\mathcal{C}^\infty$	Espacio de funciones suaves
$\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$	Espacio de funciones continuas $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$
$\phi : S_1 \rightarrow S_2$	Función que mapea de un conjunto S_1 a un conjunto S_2
$ \cdot $	Valor absoluto de un escalar
$\ \cdot\ $	Norma euclídea
$\max$	Máximo
A^T (x^T)	Transpuesta de una matriz (vector)
$\mathcal{O}(\varepsilon)$	Notación de orden de magnitud

Capítulo 1. Introducción

La palabra *caos* generalmente se refiere a un fenómeno que es desordenado e irregular. En sistemas dinámicos, el término *caos* se utiliza para referirse a sistemas determinísticos que no presentan respuestas regulares, ordenadas, predecibles a largo plazo; sino al contrario, su comportamiento parece aleatorio. El primer trabajo de investigación matemática sobre caos se remonta al menos a 1890, cuando el matemático francés, Henri Poincaré, estudió la estabilidad del sistema solar (Peitgen *et al.*, 2006) y descubrió que aun en el caso de tres masas moviéndose bajo las leyes de atracción de Newton, y considerando que estos emergían de un conjunto de puntos iniciales, estos podrían exhibir órbitas con comportamiento complicado, conocido ahora como caos. Este trabajo revolucionó el estudio de sistemas de este tipo introduciendo técnicas geométricas y topológicas.

Después al trabajo realizado por Henri Poincaré surgieron otros trabajos importantes que tuvieron gran aportación en el conocimiento y entendimiento de la dinámica caótica. Uno de ellos es el de G. Birkhoff, en los años veinte, propuso el proceso iterativo como una manera más simple de entender el comportamiento dinámico. También en la década de los 60's, el matemático Stephen Smale formuló un plan para calificar todos los comportamientos dinámicos típicos (Smale, 1967). Aquí el comportamiento caótico se consideró como un fenómeno normal dentro del comportamiento dinámico. Al mismo tiempo, el matemático y meteorólogo estadounidense Edward N. Lorenz, tratando de simular el movimiento turbulento de la atmósfera, observó que pequeños cambios en las condiciones iniciales conducen a resultados muy diferentes en un tiempo relativamente corto; a esta propiedad se le conoce como sensibilidad a las condiciones iniciales.

Gracias a estos resultados, el control y sincronización del comportamiento caótico se ha convertido en un campo intensamente estudiado desde hace varios años. Algunas publicaciones señalan el impacto que este campo puede tener en varias áreas de ciencia y tecnología (Kuang, 1993),(Basso *et al.*, 1997),(Ogorzalek, 1999),(Celka, 1999),(Yu *et al.*, 2000),(Milton y Jung, 2003),(Pecora y Carroll, 2015),(Snaselova y Zboril, 2015). El anticontrol de caos, es decir, producir caos de una forma controlada en un sistema no caótico, también ha atraído la atención debido a las posibles aplicaciones en sistemas mecánicos, electrónicos, telecomunicaciones, ópticos, químicos,

biológicos, entre otros (Yang y Chua, 1997),(Chen, 1999),(Ge *et al.*, 2006),(Liu *et al.*, 2008),(Curry, 2012),(Luo *et al.*, 2013b),(Luo *et al.*, 2013a).

Algunas técnicas para generar caos en sistemas de tiempo discreto han sido propuestas en (Chen y Lai, 1998), (Wang y Chen, 1999),(Wang y Chen, 2000). En estos artículos, la idea fundamental es diseñar un controlador para un sistema lineal de tal forma que el sistema retroalimentado despliegue un comportamiento caótico en el sentido de Li y Yorke (Li y Yorke, 1975). Su contraparte, en tiempo continuo, es un problema más complicado.

Por otra parte, en (Pyragas, 1992) se muestra que el comportamiento de un sistema oscilatorio puede modificarse utilizando una señal de control retardada en el tiempo. En la teoría tradicional, las estrategias están diseñadas de tal forma que los efectos negativos de los términos con retardo en el tiempo, en el funcionamiento del sistema, sean atenuados e incluso suprimidos. Por el contrario, los controladores con retardo en el tiempo hacen uso del retardo para alcanzar algunos objetivos de control; por ejemplo, estabilizar órbitas periódicas inestables incrustadas en un atractor caótico, entre otros (Basso *et al.*, 1997),(Celka, 1999),(Yu *et al.*, 2000),(Pyragas y Tamaševičius, 1993),(Tian y Gao, 1998). Uno de los primeros y principales trabajos sobre esta línea de investigación es el presentado por PyragasPyragas (1992).

Por otro lado, el control con retardo en el tiempo se ha propuesto para generar oscilaciones. Una ventaja importante de utilizar retardos es que el sistema en lazo abierto puede ser de bajo orden, incluso de primer orden. En (Hale y Huang, 1994), (Chow *et al.*, 1992), (Artstein y Slemrod, 2001) se utiliza la técnica de perturbaciones singulares con retardo para establecer algunas condiciones bajo las cuales un sistema de tiempo continuo reproduce bifurcaciones de duplicación de período semejantes a la de un mapa discreto. Sin embargo, establecer condiciones bajo las cuales un sistema de tiempo continuo, con una entrada que dependa de una función del estado retardado, despliegue un comportamiento caótico, es una tarea mucho más difícil y uno debe confiar en resultados numéricos o experimentales para apoyar la investigación. Un ejemplo numérico muy conocido se presenta en (Lu y He, 1996), donde se describe cómo un sistema de tiempo continuo de primer orden, controlado con una función del estado retardado lineal a trozos, despliega un comportamiento caótico. Algunos otros resultados que siguen la misma idea se presentan en (Wang *et al.*, 2000), (Alvarez,

2000), (Wang, 2003), (Zhou *et al.*, 2004) y utilizando la técnica de control difuso en (Kim *et al.*, 2005), (Q. Y. *et al.*, 2010). También, en (Yalçın y Özoguz, 2007) se propone un modelo para generar cualquier cantidad de "scrolls" de un sistema de primer orden retardado en el tiempo. Finalmente, en un estudio reciente y detallado de este problema se presenta en (Luo, 2016), en donde se utiliza las series de Fourier para analizar la generación de oscilaciones mediante el estado retardado en el tiempo.

1.1. Justificación y planteamiento del problema

La generación de órbitas caóticas, como se mencionó anteriormente, es un tema de amplio interés, por lo que se han desarrollado numerosas técnicas para inducir esta dinámica en sistemas que no la presentan. Los resultados citados previamente fueron obtenidos por medio de aproximación u orientados a sistemas particulares, y en general están sustentados sobre resultados numéricos o experimentales. Además, estos resultados han contribuido a establecer que es posible caotificar a un sistema regular con funciones muy simples, las cuales dependen del estado retardado en el tiempo. Sin embargo, desarrollar herramientas formales o procedimientos sistemáticos para producir comportamiento caótico es un problema mucho más complicado.

En esta tesis se propone utilizar algunas técnicas y metodologías para generar oscilaciones periódicas o caóticas en sistemas de bajo orden, específicamente de primer y segundo orden. Para lograr esto, se utiliza la aproximación del estado retardado por series de Taylor, el método de perturbaciones singulares y el concepto de semipasividad, con el cual se asegura que las trayectorias de un sistema estén acotadas, aún cuando sus puntos de equilibrio sean inestables.

1.2. Objetivo

Contribuir al estudio de sistemas con dinámica caótica y proponer un procedimiento sistemático para producir oscilaciones periódicas y no periódicas en sistemas de bajo orden.

1.2.1. Objetivos particulares

Se consideran los siguientes objetivos particulares

- (i) Caracterizar a ciertas clases de sistemas de primer orden y las funciones de control con retardo que puedan generar oscilaciones periódicas y no periódicas. En particular, se estudiarán sistemas de la forma:

$$\dot{x}(t) + f(x(t)) = g(x(t), x(t - \tau), \theta).$$

- (ii) Caracterizar a ciertas clases de sistemas de segundo orden y las funciones de control con retardo que puedan generar oscilaciones periódicas y no periódicas. Específicamente, se considerarían sistemas de la forma:

$$\ddot{x}(t) + f(x(t), \dot{x}(t)) = g(x(t), x(t - \tau), \theta).$$

1.3. Organización de la tesis

Este trabajo de tesis está organizado como sigue. En el Capítulo 2 se presentan las definiciones y conceptos que se utilizan en este trabajo, como el de estabilidad de puntos de equilibrio en sistemas dinámicos con retardos y el de semipasividad, los cuales son importantes para el resultado principal. También, se da una definición de sistemas caóticos y se presentan algunas herramientas con las cuales se puede hacer un análisis de estos sistemas.

En el Capítulo 3 se presenta un método para producir oscilaciones caóticas en sistemas tipo Lienard con una señal de control que depende del estado actual y del retardado. Para evitar las dificultades de análisis de sistemas con retardos se hace una aproximación del estado retardado por medio de las series de Taylor. En el Capítulo 4 se utiliza el método de perturbaciones singulares para inducir comportamiento caótico en sistemas dinámicos de primer, segundo y tercer orden.

En el Capítulo 5 se presenta una técnica para generar oscilaciones periódicas y no periódicas en sistemas continuos de primer orden. En esta técnica se diseña una señal retroalimentada definida por una función no lineal que depende del estado retardado, asegurándose que todos los puntos de equilibrio del sistema en lazo cerrado sean inestables y con el concepto de semipasividad se garantiza que las trayectorias permanecerán acotadas. En el Capítulo 6 se adapta la señal de control presentada en el Capítulo 5 a un sistema de segundo orden. Por último, en el Capítulo 7 se presentan

las conclusiones y se discuten posibles extensiones de este trabajo.

Capítulo 2. Preliminares

En este capítulo se presentan algunas definiciones y conceptos que se emplean en este trabajo de tesis. En la Sección 2.1 se describe la representación de funciones mediante series de Taylor. Al truncar esta serie hasta cierto orden se puede obtener una aproximación de la función. Esta técnica se utilizará para la aproximación de funciones con retardos de tiempo.

Una clase importante de sistemas con los cuales es posible modelar una gran cantidad de fenómenos físicos y que son objeto de estudio en esta tesis son los sistemas tipo Liénard, que se describen en la Sección 2.2, donde se presentan también algunas condiciones bajo las cuales se genera un ciclo límite.

Un sistema discreto que ha sido importante en el estudio de dinámicas caóticas y que es incluido en esta tesis es el mapa logístico, éste se describe en la Sección 2.3, donde se presentan las diversas órbitas que puede presentar el sistema.

En la Sección 2.4 se describen algunas condiciones de estabilidad de puntos de equilibrio de sistemas dinámicos retardados en el tiempo. También, se presenta un procedimiento para analizar la estabilidad local de equilibrios mediante una aproximación lineal de este tipo de sistemas.

Un método ampliamente utilizado para analizar sistemas de dimensión baja con retardos es la técnica de perturbaciones singulares, que se describe en la Sección 2.5. Esta técnica permite analizar respuestas a diferentes escalas de tiempo y aproximar el comportamiento del sistema a partir de este análisis.

Un concepto muy útil en este trabajo es el de semipasividad, que se describe en la Sección 2.6. Utilizando este concepto es posible encontrar algunas condiciones que aseguran un comportamiento oscilatorio diverso, las cuales serán aplicadas a sistemas con retardos en tiempo.

En la Sección 2.7 se presentan los llamados diagramas de Feigenbaum, que ilustran la aparición de bifurcaciones de duplicación de periodo y la aparición de comportamiento caótico. Constituyen una herramienta numérica con la que se pueden visualizar los estados estacionarios de un sistema dinámico y determinar su natura-

leza. Entre otras, esta herramienta será utilizada para verificar los resultados teóricos obtenidos mediante el análisis.

Por último, aunque el objetivo de este trabajo es la generación de oscilaciones de diversa índole, la generación de oscilaciones caóticas constituye un objetivo importante, por lo que en la Sección 2.9 se presenta una definición de sistemas caóticos.

2.1. Series de Taylor

Una serie de Taylor es una representación en serie de potencias de funciones que, entre otras propiedades, tienen derivadas de todos los órdenes en un elemento de su dominio. Considere $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función cuya derivada $f^{(i)}(x)$ está definida en $x = c \in I$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$. Se tiene la siguiente definición de serie de Taylor de esta función.

Definición 2.1 (Larson R., 1999) Si una función f tiene derivadas de todos los órdenes en $x = c$, se llama serie de Taylor de f (centrada) en c a la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(c)}{i!} (x - c)^i = f(c) + f'(c)(x - c) + \cdots + \frac{f^{(i)}(c)}{i!} (x - c)^i + \cdots \quad (1)$$

El siguiente teorema ofrece una condición para la representación de una función en su serie de Taylor.

Teorema 2.1 (Larson R., 1999) Si f admite una representación en una serie de potencias convergente $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - c)^i$ para todo x en un intervalo abierto I que contiene a c , entonces $a_i = f^{(i)}(c)/i!$ y

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!} (x - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(i)}(c)}{i!} (x - c)^i + \cdots \quad (2)$$

Con estos resultados se puede afirmar que si una serie de potencias converge a $f(x)$, esta serie es una serie de Taylor. Pero no se puede afirmar que toda serie de Taylor converge a $f(x)$, ya que podría converger a una función distinta de $f(x)$. Por ejemplo, considere un intervalo abierto I , un valor $c \in I$, dos funciones distintas $f_1(x)$, $f_2(x) \in \mathcal{C}^\infty$ en I , que satisfacen: $f_1^{(i)}(x) = f_2^{(i)}(x)$ para $x = c$ y $f_1^{(i)}(x) \neq f_2^{(i)}(x)$ para $x \neq c \in I$.

Entonces ambas funciones tienen la misma serie de Taylor centrada en c . Como se sabe, esta serie converge para toda $x \in I$, pero en este caso no se puede determinar a que función converge y con ello no se puede saber a que función representa. Para resolver este problema se estableció el siguiente teorema, que proporciona un criterio para determinar si una función está representada por su serie de Taylor.

Teorema 2.2 (Larson R., 1999) *Si una función $f(x)$ tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto I centrado en c , entonces la igualdad*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(c)}{i!} (x - c)^i \quad (3)$$

es válida si y sólo si existe algún z entre x y c tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} R_i(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f^{(i+1)}(z)}{(i+1)!} (x - c)^{i+1} = 0 \quad (4)$$

para todo $x \in I$.

En particular, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una señal continua en tiempo y suave, que admite una representación en su serie de Taylor, la señal retardada un tiempo τ que satisface el Teorema 2.2, truncada al orden k , puede aproximarse por la función

$$f(t - \tau) \approx f(t) - f'(t)\tau + \cdots + (-1)^k \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \tau^k.$$

2.2. Ecuaciones tipo Liénard

Una gran cantidad de sistemas físicos, donde el oscilador de van der Pol es el ejemplo más famoso (Van der Pol, 1926), pueden ser modelados por ecuaciones diferenciales del tipo

$$\ddot{x}(t) + f(x)\dot{x}(t) + g(x) = 0, \quad (5)$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones reales polinomiales. Al tipo de ecuaciones como (5), que serán motivo de estudio en capítulos posteriores, se les conoce como ecuaciones de Liénard, nombradas así por el físico Frances A. Liénard quien en 1928 realizó un estudio de este tipo de sistemas. Este tipo de ecuaciones también aparecen en campos

como la química, biología, astrofísica e ingeniería (Strogatz, 1994), (Poland, 1994), (FitzHugh, 1961), (Salasnich, 1996). Bajo ciertas condiciones sobre las funciones $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$ se muestra que la ecuación de Liénard (5) tiene un ciclo límite. A este resultado se le conoce como *Teorema de Liénard*, que se presenta a continuación.

Teorema 2.3 (Teorema de Liénard) (Perko, 1996) *Suponga que $f, g \in \mathcal{C}^\infty$ y que satisfacen las siguientes condiciones*

- (i) $g(x)$ es una función impar y $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$;
- (ii) $f(x)$ es una función par;
- (iii) existe una función $F(x)$ definida como

$$F(x) = \int_0^x f(s)ds,$$

tal que $F(x)$ es una función impar, $F(0) = 0$, $F'(0) < 0$, F tiene un cero positivo en $x = a$ y F aumenta de forma monótona a infinito para $x \geq a$ conforme $x \rightarrow \infty$.

Entonces la ecuación del tipo Liénard (5) tiene un ciclo límite estable.

En el siguiente ejemplo se muestra cómo el oscilador de van der Pol, ejemplo típico de las ecuaciones tipo Liénard, satisface las condiciones del teorema anterior.

Ejemplo 2.1 *Considere la siguiente ecuación tipo Liénard, conocida como ecuación de van der Pol (Van der Pol, 1926),*

$$\ddot{x}(t) - \mu[1 - x^2(t)]\dot{x}(t) + x(t) = 0,$$

*donde $\mu > 0$. Defínase $f(x) = \mu(x^2 - 1)$ y $g(x) = x$. Note que $f, g \in \mathcal{C}^\infty$. Revisando las condiciones del Teorema 2.3 se observa que, $g(x) = x$ es una función impar y que $xg(x) = x^2 > 0$ para $x \neq 0$, por lo que se satisface la condición **(i)**. La condición **(ii)** también se satisface ya que $f(x)$ es una función par. Para la condición **(iii)** se tiene que*

$$F(x) = \int_0^x f(s)ds = \mu \int_0^x (s^2 - 1)ds = \mu \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right).$$

Observe que $F(x)$ es una función impar, con $F(0) = 0$ y $F'(0) < 0$. Además, $F(x)$ tiene un cero positivo en $x = \sqrt{3}$ y crece de forma monótona conforme $x \rightarrow \infty$. De esta manera se satisface la condición **(iii)**. En consecuencia, al satisfacerse las condiciones **(i)-(iii)** del Teorema 2.3 en la ecuación de van der Pol, como es bien sabido, existe un ciclo límite estable. En la Figura 1 se muestra este ciclo límite para $\mu = 0.8$.

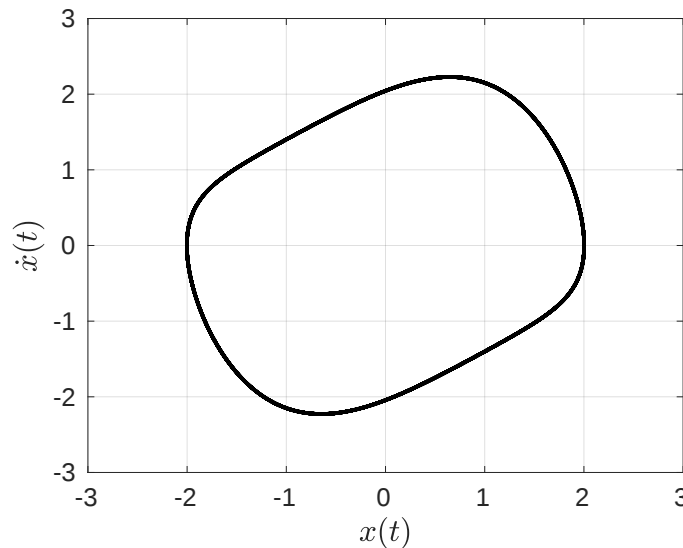


Figura 1. Ciclo límite estable de la ecuación de van der Pol.

□

2.3. Mapa logístico

El mapa logístico es un sistema de tiempo discreto de dimensión uno que, a pesar de su simplicidad, exhibe una dinámica compleja. Históricamente ha sido uno de los sistemas más importantes en el estudio del caos determinístico. Este sistema modela, de manera muy simplificada, el crecimiento poblacional de una especie.

El mapa logístico está definido por la siguiente ecuación (Devaney, 1992)

$$x(k+1) = \mu x(k)[1 - x(k)], \text{ con } k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (6)$$

donde $x(k)$ representa a la población al tiempo k y $\mu \in (0, 4)$ es un parámetro relacionado con la velocidad de crecimiento. Dada una condición inicial $x(0) \in [0, 1]$, se

define a la órbita de $x(0)$ bajo la iteración del sistema (6) como la secuencia de puntos

$$\begin{aligned} x(0), \\ x(1) &= \mu x(0)[1 - x(0)], \\ x(2) &= \mu x(1)[1 - x(1)], \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dependiendo del valor del parámetro μ esta órbita puede tener diferentes comportamientos, como estabilizarse en un punto fijo, en una órbita periódica o caótica. En la Figura 2 se muestran algunas órbitas del mapa logístico (gráfica tomada de (Álvarez, 2003)), ecuación (6), para diferentes valores de μ .

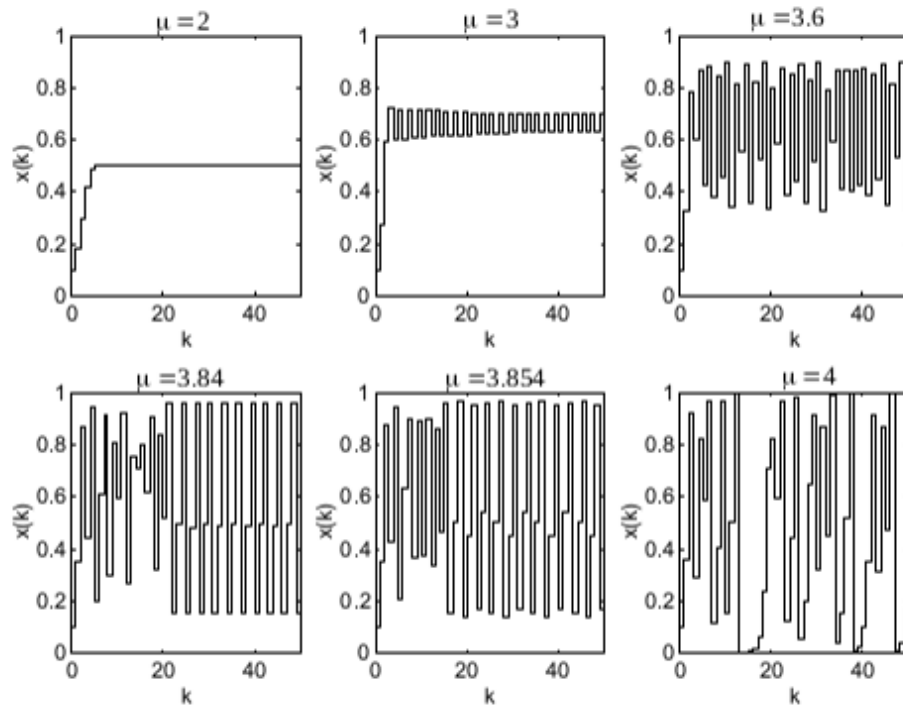


Figura 2. Órbitas del mapa logístico para diferentes valores de μ .

Obsérvese que, para $\mu = 2$, la órbita se estabiliza en un punto fijo. Con $\mu = 3$ la órbita es periódica de periodo 2 porque el estado x vuelve al mismo valor después de dos iteraciones. Para $\mu = 3.6$ se observa una órbita con comportamiento errático en estado estacionario; este movimiento no corresponde a una oscilación periódica, sino a una órbita caótica. Una ligera modificación del parámetro μ a 3.84 hace que el comportamiento en estado estacionario vuelva a ser regular, ahora se trata de una

órbita periódica de periodo 3. Una modificación aun más pequeña de μ a 3.854 cambia el comportamiento dinámico regular de periodo 3 a periodo 9. Finalmente, otra variación del parámetro μ a 4 vuelve nuevamente caótica a la órbita. Para cada una de las órbitas el sistema fue inicializado en el valor $x(0) = 0.1$.

2.4. Puntos de equilibrio de sistemas con retardo

Considere el sistema

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau)), \quad (7)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continuamente diferenciable y $\tau > 0$ es el tiempo de retardo, con condiciones iniciales

$$x_0(t) = \phi(t) \quad \forall t \in [-\tau, 0) \quad (8)$$

y $\phi \in \mathcal{C} \triangleq \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$. La solución de (7) para una condición inicial $\phi \in \mathcal{C}$ es denotada por $x(t, \phi)$. Un punto de equilibrio del sistema (7) es un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ que satisface $f(\bar{x}, \bar{x}) = 0$. La estabilidad de un punto de equilibrio se define a continuación.

Definición 2.2 (Arino O., 2006) *El punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ de (7)-(8) es*

- estable si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $\phi \in \mathcal{C}$ con $\|\phi\|_{\mathcal{C}} < \delta$ implica que $\|x(t, \phi)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq -\tau$,
- asintóticamente estable si es estable y existe un $\delta_a > 0$ tal que $\|\phi\|_{\mathcal{C}} < \delta_a$ implica que $\|x(t, \phi)\| \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$,

donde $\|\phi\|_{\mathcal{C}} = \max_{t \in [-\tau, 0]} \|\phi(t)\|$ y $\|\cdot\|$ es la norma euclídea.

Por conveniencia, la Definición 2.2 fue expresada para el caso cuando el punto de equilibrio es el origen, $\bar{x} = 0$. No existe pérdida de generalidad ya que cualquier punto de equilibrio puede ser llevado al origen con un cambio de variable. El comportamiento cualitativo de un sistema no lineal alrededor de cualquier punto de equilibrio puede determinarse por medio del sistema linealizado con respecto a ese punto (Arino O., 2006).

Sea $\bar{x}$ un punto de equilibrio de (7)-(8) y se desea conocer el comportamiento de las trayectorias de este sistema alrededor de $\bar{x}$. Considere el cambio de variable

$$y(t) = x(t) - \bar{x}. \quad (9)$$

Utilizando (9), (7) puede expresarse como

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) = f(y(t) + \bar{x}, y(t - \tau) + \bar{x}). \quad (10)$$

Expandiendo en series de Taylor el lado derecho de (10) alrededor de $\bar{x}$ y truncando los términos de segundo y mayor orden, se obtiene

$$f(y(t) + \bar{x}, y(t - \tau) + \bar{x}) \cong f(\bar{x}, \bar{x}) + D_{x(t)}f(\cdot)|_{\bar{x}}y(t) + D_{x(t-\tau)}f(\cdot)|_{\bar{x}}y(t - \tau), \quad (11)$$

donde D_x es la matriz jacobiana de $f(\cdot)$. En (11) se ha considerado que los términos de segundo y mayor orden pueden ser despreciados y no se tomen en cuenta. Por ello, el sistema lineal aproximado se puede definir como

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + A_1y(t - \tau), \quad (12)$$

donde las matrices están definidas por

$$A = D_{x(t)}f(\cdot)|_{\bar{x}}, \quad A_1 = D_{x(t-\tau)}f(\cdot)|_{\bar{x}} \quad (13)$$

y las condiciones iniciales están dadas por

$$y_0(t) = x_0(t) - \bar{x}, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (14)$$

El sistema (12) es el más común para estudiar las propiedades y el comportamiento de sistemas no lineales y términos del retardo en la vecindad de un punto de equilibrio (Malek-Zavarei y Jamshidi, 1987).

La estabilidad de un sistema lineal, como (12), puede determinarse a partir de las raíces de la ecuación característica. La ecuación característica está determinada por

la ecuación cuasipolinomial

$$\det |\lambda I - A - A_1 e^{-\lambda \tau}| = 0,$$

o también se puede representar como

$$\det |(\lambda I - A) e^{\lambda \tau} - A_1| = 0.$$

Una condición necesaria y suficiente para la estabilidad asintótica de un sistema como (12), es que toda las raíces de la ecuación característica tengan parte real negativa.

Pontryagin en (Pontryagin, 1955) proporciona condiciones necesarias y suficientes para que todas las raíces de la ecuación característica tengan parte real negativa. El resultado es el siguiente: Sea $P(\lambda, e^\lambda) = 0$ la ecuación característica, la cual es una ecuación polinomial. Suponga que $P(\lambda, z)$ es una ecuación polinomial en λ, z

$$P(\lambda, z) = \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^s a_{mn} \lambda^m z^n, \quad (15)$$

donde al término $a_{rs} \lambda^r z^s$ se le conoce como *término principal* de la ecuación si $a_{rs} \neq 0$. Si $z = e^\lambda$, entonces $P(\lambda, z)$ corresponde a la ecuación característica de un sistema lineal retardado como

$$\sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^s \frac{d^m}{dt^m} x(t+n) = 0. \quad (16)$$

La ecuación (16) puede llevarse a la forma matricial como la ecuación (12). El resultado principal de Pontryagin se basa en los siguientes teoremas.

Teorema 2.4 Sea $\Delta(\lambda) = P(\lambda, e^\lambda)$ y suponga que $P(\lambda, z)$ es una ecuación polinomial con el término principal $a_{rs} \lambda^r z^s$. Todos los ceros de $\Delta(\lambda)$ tienen parte real negativa si y sólo si

- (i) El vector $\Delta(iw)$ gira en dirección positiva con velocidad positiva para w en el rango $(-\infty, \infty)$.
- (ii) Para $w \in [-2k\pi, 2k\pi]$, $k \geq 0$ entero, existe un $\varepsilon_k \rightarrow 0$ conforme $k \rightarrow \infty$ tal que $\Delta(iw)$ subtiende a un ángulo $4k\pi s + \pi r + \varepsilon_k$.

Teorema 2.5 Sea $\Delta(\lambda) = P(\lambda, e^\lambda)$ donde $P(\lambda, z)$ es una ecuación polinomial con término principal. Suponga que $\Delta(iw)$, $w \in \mathbb{R}$, es separada en su parte real e imaginaria, $\Delta(iw) = F(w) + iG(w)$. Si todos los ceros de la ecuación característica tienen parte real negativa, entonces los ceros de $F(w)$ y $G(w)$ son reales, simples, alternos y

$$G'(w)F(w) - G(w)F'(w) > 0, \quad (17)$$

para $w \in \mathbb{R}$. A la inversa, todos los ceros de $\Delta(\lambda)$ tendrán parte real negativa siempre que se satisfaga cualquiera de las siguientes condiciones:

- (i) Todos los ceros de $F(w)$ y $G(w)$ son reales, simples, alternos y la desigualdad (17) se satisface para al menos una w .
- (ii) Todos los ceros de $F(w)$ son reales y para cada cero, se satisface la desigualdad (17).
- (iii) Todos los ceros de $G(w)$ son reales y para cada cero, se satisface la desigualdad (17).

Otro resultado importante dado por Pontryagin, para asegurar que se tendrán raíces reales en la ecuación característica, es el que se expresa a continuación. Suponga que $f(\lambda, u, v)$ es una ecuación polinomial en λ, u, v con coeficientes reales, que tiene la forma

$$f(\lambda, u, v) = \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^s \lambda^m \phi_m^{(n)}(u, v), \quad (18)$$

donde $\lambda^m \phi_m^{(n)}(u, v)$ es una ecuación polinomial homogénea de grado n en u, v . El término principal en $f(\lambda, u, v)$ es el término $\lambda^r \phi_r^{(s)}(u, v)$, y $\phi_*^{(s)}(u, v)$ denota a los coeficientes de λ^r en $f(\lambda, u, v)$,

$$\phi_*^{(s)}(u, v) = \sum_{n=0}^s \phi_r^{(n)}(u, v),$$

y

$$\Phi_*^{(s)}(\lambda) = \phi_*^{(s)}(\cos(\lambda), \sin(\lambda)).$$

Teorema 2.6 Sea $f(\lambda, u, v)$ una ecuación polinomial con el término principal $\lambda^r \phi_r^{(s)}(u, v)$. Si ε es tal que $\Phi_*^{(s)}(\varepsilon + iw) \neq 0$, $w \in \mathbb{R}$; entonces, para un k entero suficientemente grande, la función $F(\lambda) = (\lambda, \cos(\lambda), \sin(\lambda))$ tendrá exactamente $4ks + r$ ceros en la franja $-2k\pi + \varepsilon \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2k\pi + \varepsilon$. A la inversa, la función $F(\lambda)$ tendrá únicamente raíces reales si y sólo si, existe un k entero suficientemente grande, la función tiene exactamente $4ks + r$ raíces en la franja $-2k\pi + \varepsilon \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2k\pi + \varepsilon$.

A partir de los resultados de Pontryagin, Hale en (Hale y Lunel, 2013) establece condiciones de estabilidad para sistemas de primer orden con retardos.

Teorema 2.7 (Hale y Lunel, 2013) Todas las raíces de la ecuación característica $(\lambda + a)e^\lambda + b = 0$, donde a y b son reales, tienen parte real negativa sí y sólo si

$$\begin{aligned} a &> -1, \\ a + b &> 0, \\ b &< \zeta \sin(\zeta) - a \cos(\zeta), \end{aligned} \tag{19}$$

donde ζ es la raíz de $\zeta = -a \cdot \tan(\zeta)$, $0 < \zeta < \pi$ si $a \neq 0$ y $\zeta = \pi/2$ si $a = 0$.

En (Insperger y Stépán, 2011) también se realiza un estudio sobre la estabilidad de sistemas de primer orden con retardos y presentan curvas de la región de estabilidad en el plano- (a, b) . En la Figura 3 se presentan estas curvas (esta gráfica se tomó de (Insperger y Stépán, 2011)).

2.5. Perturbaciones singulares

En esta sección se presenta la teoría de perturbaciones singulares en sistemas sin retardos, para después utilizarla en sistemas dinámicos con retardos, bajo ciertas suposiciones, en capítulos posteriores.

El modelo estandar de los sistemas dinámicos perturbados singularmente es el siguiente:

$$\dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon), \quad x(t_0) = \xi(\varepsilon), \tag{20}$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon), \quad z(t_0) = \eta(\varepsilon), \tag{21}$$

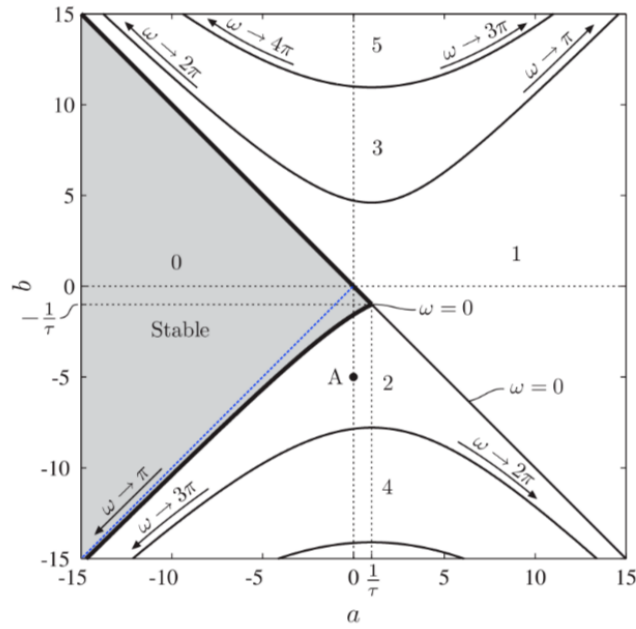


Figura 3. Curvas de la región de estabilidad para el sistema $\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - \tau)$.

donde las funciones f y g son continuamente diferenciables con respecto a sus argumentos $(t, x, z, \varepsilon) \in [0, t_1] \times D_x \times D_z \times [0, \varepsilon_0]$, con $D_x \subset \mathbb{R}^n$ y $D_z \subset \mathbb{R}^m$ son conjuntos conectados abiertos, $\xi(\varepsilon)$ y $\eta(\varepsilon)$ dependen suavemente de ε . Cuando $\varepsilon = 0$, la ecuación diferencial (21) se transforma en la ecuación algebraica

$$0 = g(t, x, z, 0). \quad (22)$$

Se dice que el modelo (20)-(21) está en la *forma estándar* si (22) tiene $k \geq 1$ raíces reales aisladas

$$z = h_i(t, x), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (23)$$

para cada $(t, x) \in [0, t_1] \times D_x$. Esta suposición asegura que cada modelo reducido, de dimensión n , corresponde a una raíz de (23). Para obtener el i -ésimo modelo reducido, se sustituye (23) en (20), cuando $\varepsilon = 0$, para obtener

$$\dot{x} = f(t, x, h_i(t, x), 0), \quad x(t_0) = \xi_0 \triangleq \xi(0). \quad (24)$$

Los sistemas dinámicos modelados en la forma de perturbación singular, tienen la característica que el comportamiento de su respuesta se despliega en diferentes escalas de tiempo, lo que origina un transitorio lento y uno rápido. El transitorio len-

to es aproximado por el modelo reducido (24), mientras que la diferencia entre las respuestas del sistema (20)-(21) y del sistema reducido es el transitorio rápido.

Para observar lo expresado en el párrafo anterior, considere el sistema (20)-(21). Sea $(x(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$ la solución del sistema (20)-(21) y $\bar{x}(t)$ la solución del sistema reducido (24). Se puede observar que en el sistema reducido se ha cambiado a la variable z por el estado *cuasi-estacionario* $h(t, x)$, por lo que la solución de z puede conocerse al resolver la ecuación

$$\bar{z}(t) \triangleq h(t, \bar{x}(t)),$$

la cual describe el comportamiento del estado cuasi-estacionario de z cuando $x(t) = \bar{x}(t)$. A diferencia de la variable original $z(t)$, para la cual se puede elegir una condición inicial $\eta(\varepsilon)$, en el estado cuasi-estacionario $\bar{z}(t)$ esto no es posible, por lo que puede existir una gran diferencia entre $\eta(\varepsilon)$ y $\bar{z}(t_0) = h(t_0, \xi_0)$.

En consecuencia, es posible que $\bar{z}(t)$ no tenga una convergencia uniforme a $z(t, \varepsilon)$. Lo mejor que se puede esperar es que

$$z(t, \varepsilon) - \bar{z}(t) = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

se satisfaga sobre un intervalo que no contenga a t_0 ; es decir, para $t \in [t_b, t_1]$, donde $t_b > t_0$. Por otra parte, es razonable esperar que

$$x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t) = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

se satisfaga uniformemente para todo $t \in [t_0, t_1]$, ya que

$$x(t_0, \varepsilon) - \bar{x}(t_0) = \xi(\varepsilon) - \xi(0) = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Si el error $z(t, \varepsilon) - \bar{z}(t)$ es $\mathcal{O}(\varepsilon)$ en el intervalo $[t_b, t_1]$; entonces, deberá ser cierto que durante el intervalo $[t_0, t_b]$ la variable z converge a $\bar{z}$.

Nota 2.1 Se dice que el error de aproximación es de orden $\mathcal{O}(\varepsilon)$ si existe k y ε_1 ,

constantes positivas, tal que

$$\|x(t, \varepsilon) - x(t)\| \leq k|\varepsilon|, \quad \forall |\varepsilon| < \varepsilon_1, \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

y esto se expresa como

$$x(t, \varepsilon) - x(t) = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Para probar la convergencia de $z(t, \varepsilon)$ a $\bar{z}(t)$ es necesario realizar un análisis de estabilidad. Antes de ello, es conveniente realizar el cambio de variable

$$y = z - h(t, x) \quad (25)$$

que recorre el estado cuasi-estacionario al origen. En las nuevas variables (x, y) , el sistema se expresa como

$$\dot{x} = f(t, x, y + h(t, x), \varepsilon), \quad x(t_0) = \xi(\varepsilon), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{y} = & g(t, x, y + h(t, x), \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} \\ & - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} f(t, x, y + h(t, x), \varepsilon), \quad y(t_0) = \eta(\varepsilon) - h(t_0, \xi(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (27)$$

Para el análisis de (27), se debe observar que $\varepsilon \dot{y}$ puede permanecer finito aún cuando ε tiende a cero y $\dot{y}$ tiende a infinito. Fijando

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau}; \quad \text{entonces,} \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}$$

y usando $\tau = 0$ como el valor inicial en $t = t_0$. La nueva variable del tiempo $\tau = (t - t_0)/\varepsilon$ tiende a infinito si ε tiende a cero, aún para t ligeramente mayor que t_0 . En la escala de tiempo τ , la ecuación (27) es representada por

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} = & g(t, x, y + h(t, x), \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} \\ & - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} f(t, x, y + h(t, x), \varepsilon), \quad y(0) = \eta(\varepsilon) - h(t_0, \xi(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (28)$$

Las variables t y x en la ecuación anterior variarán lentamente ya que, en la escala de

tiempo τ , estas están definidos como

$$t = t_0 + \varepsilon\tau, \quad x = x(t_0 + \varepsilon\tau, \varepsilon).$$

Ajustando $\varepsilon = 0$ las variables se congelan en $t = t_0$ y $x = \xi_0$, reduciéndose (28) al sistema autónomo

$$\frac{dy}{d\tau} = g(t_0, \xi_0, y + h(t_0, \xi_0), 0), \quad y(0) = \eta(0) - h(t_0, \xi_0) \triangleq \eta_0 - h(t_0, \xi_0), \quad (29)$$

el cual tiene un equilibrio en $y = 0$. Este punto de equilibrio es asintóticamente estable y $y(0)$ pertenece a su región de atracción, por lo que es razonable esperar que la solución de (29) alcanzará la vecindad $\mathcal{O}(\varepsilon)$ del origen durante el intervalo $[t_0, t_b]$. Más allá de este intervalo se necesita que se cumpla una propiedad de estabilidad que garantice que $y(\tau)$ permanecerá cercano a cero, mientras varían lentamente los parámetros (t, x) alejándose de sus valores iniciales (t_0, ξ_0) . Para realizar el análisis de este caso, se considera que los parámetros congelados toman valores en la región donde los parámetros varían lentamente (t, x) . Suponga que la solución $\bar{x}(t)$ del sistema reducido es definida para $t \in [0, t_1]$ y $\bar{x}(t) \in D_x \subset \mathbb{R}^n$, para algún dominio D_x . Se puede expresar a la ecuación (29) como

$$\frac{dy}{d\tau} = g(t, x, y + h(t, x), 0), \quad (30)$$

donde $(t, x) \in [0, t_1] \times D_x$ son considerados como parámetros fijos. La propiedad de estabilidad que debe satisfacer el sistema (30) es la estabilidad exponencial del origen, como se expresa en la siguiente definición.

Definición 2.3 (Khalil y Grizzle, 1996) *El punto de equilibrio $y = 0$ del sistema (30), llamado “sistema capa límite”, es uniformemente estable en $(t, x) \in [0, t_1] \times D_x$, si existen constantes positivas k , γ y ρ_0 tal que la solución de (30) satisface*

$$\|y(\tau)\| \leq k\|y(0)\|\exp(-\gamma\tau), \quad \forall \|y(0)\| < \rho_0, \quad \forall (t, x) \in [0, t_1] \times D_x, \quad \forall \tau \geq 0. \quad (31)$$

Se tiene entonces el siguiente teorema de aproximación para los sistemas perturbados singularmente.

Teorema 2.8 (Khalil y Grizzle, 1996) *Considere el sistema en la forma estándar de perturbación singular (20)-(21) y sea $z = h(t, x)$ una raíz aislada de (22). Suponga que las siguientes condiciones se satisfacen para todo*

$$[t, x, z - h(t, x), \varepsilon] \in [0, t_1] \times D_x \times D_y \times [0, \varepsilon],$$

para algún dominio $D_x \subset \mathbb{R}^n$ y $D_y \subset \mathbb{R}^m$, en el cual D_x es convexo y D_y contiene al origen:

- *Las funciones f , g , sus primeras derivadas parciales con respecto a (x, z, ε) y la primera derivada parcial de g con respecto a t son continuas; son continuas las primeras derivadas parciales con respecto a sus argumentos de la función $h(t, x)$ y del jacobiano $[\partial g(t, x, z, 0)/\partial z]$; las condiciones iniciales $\xi(\varepsilon)$ y $\eta(\varepsilon)$ son funciones continuas de ε .*
- *El sistema reducido (24) tiene una solución única $\bar{x}(t) \in S$, para $t \in [t_0, t_1]$, donde S es un subconjunto compacto de D_x .*
- *El origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema capa límite (30), uniformemente en (t, x) ; sea $\mathcal{R}_y \subset D_y$ la región de atracción de (29) y sea Ω_y un subconjunto compacto de $\mathcal{R}_y$.*

Entonces, existe una constante positiva ε^ tal que para todo $\eta_0 - h(t_0, \xi_0) \in \Omega_y$ y $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ el sistema (20)-(21) tiene una solución única $x(t, \varepsilon)$, $z(t, \varepsilon)$ sobre $[t_0, t_1]$, y*

$$x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t) = \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{32}$$

$$z(t, \varepsilon) - h(t, \bar{x}(t)) - \hat{y}(t/\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{33}$$

*se satisfacen uniformemente para $t \in [t_0, t_1]$, donde $\hat{y}(\tau)$ es la solución del sistema capa límite (30). Además, dado cualquier $t_b > t_0$ existe ε^{**} tal que*

$$z(t, \varepsilon) - h(t, \bar{x}(t)) = \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{34}$$

*se satisface uniformemente para $t \in [t_b, t_1]$ siempre que $\varepsilon < \varepsilon^{**}$.*

Hale en (Hale y Lunel, 2013) presenta un resultado importante cuando se aplica la

técnica de perturbaciones singulares en sistemas con retardos de primer orden. Este resultado se expone a continuación.

Considere la ecuación

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t-1)), \quad (35)$$

donde $\varepsilon > 0$ es un parámetro y $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si se considera que $\varepsilon \rightarrow 0$, la ecuación (35) se transforma en una ecuación de desplazamiento puro

$$x(t) = f(x(t-1)), \quad (36)$$

la cual se puede considerar como un sistema dinámico discreto definido por el mapa

$$x \mapsto f(x). \quad (37)$$

Mediante las siguientes proposiciones y teoremas se muestra como la dinámica de la ecuación (35) puede reflejar la dinámica de la ecuación en diferencia (36) o la del sistema dinámico discreto (37) cuando ε es muy pequeño. Considere lo siguiente.

Para cualquier intervalo $I \subset \mathbb{R}$, abierto o cerrado, existe $X_I \triangleq \mathcal{C}([-1, 0], I)$ y $T_\varepsilon(t)$ denota a un semigrupo en $\mathcal{C}$.

Proposición 2.1 (Invarianza positiva) *Si I es un intervalo tal que $f(I) \subset I$; entonces, $T_\varepsilon(t)X_I \subset X_I$ para $t \geq 0$.*

Si $\bar{x}$ es un punto fijo de f , entonces la función constante $\bar{x} \in \mathcal{C}$ es un punto de equilibrio de la ecuación (35), y lo mismo sucede de forma inversa. Si $\bar{x}$ es un punto fijo atractivo de f , se dice que un intervalo J es el *intervalo máximo de atracción* de $\bar{x}$ si $\bar{x} \in J$, $f(J) \subset J$, $f^n(x) \rightarrow \bar{x}$ conforme $n \rightarrow \infty$ para cada $x \in J$ y no existe un intervalo $J' \supset J$ con esta propiedad.

Proposición 2.2 (Estabilidad) *Si $\bar{x}$ es un punto fijo atractivo de f con J como intervalo máximo de atracción; entonces, la solución equilibrio $\bar{x}$ de la ecuación (35) es*

asintóticamente estable y, para cada $\phi \in X_I$ con $\varepsilon > 0$, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_\varepsilon(t)\phi = \bar{x}.$$

Con las proposiciones anteriores, se expone cómo los puntos de equilibrio de (35) corresponden a los puntos fijos de (36) o (37); además, éstos cuentan con las mismas propiedades de estabilidad. Para soluciones periódicas de este tipo de ecuaciones, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.9 (Hale y Lunel, 2013) *Suponga que existe un intervalo I tal que $0 \in I$, $f(I) \subset I$, f tiene retroalimentación negativa en I y $f'(0) < -1$. Entonces, existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, existe una solución periódica, x^ε , que oscila lentamente correspondiente a la ecuación (35) que es continua en ε .*

Además, si $f'(x) < 0$ para $x \in I$ y si (a, b) es un punto dos-periódico de f en I , asintóticamente estable, entonces $x^\varepsilon(t)$ tiene exactamente un máximo y un mínimo en un periodo y se aproxima uniformemente a una onda cuadrada en todos los conjuntos compactos de $\mathbb{R} \setminus \{n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ con los valores (a, b) de la onda cuadrada correspondiente al punto dos-periódico del mapa f .

Cuando f no es monótona en el intervalo I , la función $x^\varepsilon(t)$ se aproxima a una onda cuadrada uniformemente en el conjunto compacto $\mathbb{R} \setminus \{n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ con los valores (a, b) de la onda cuadrada dos-periódica correspondiente al mapa f . Sin embargo, en los puntos de transición cerca de los enteros, la función $x^\varepsilon(t)$ empieza a oscilar con la cantidad de oscilaciones incrementando a infinito conforme $\varepsilon \rightarrow 0$. La amplitud de estas oscilaciones al rededor del punto a (resp. b) son acotadas, pero no se aproximan a cero conforme $\varepsilon \rightarrow 0$. Por lo tanto, en el límite de este proceso se exhibe un fenómeno de tipo Gibbs en los valores enteros. El fenómeno de Gibbs tiene una simple interpretación dinámica y geométrica. Si la función f es monótona, entonces el valor propio dominante cerca de a (resp. b) es real y la transición de curva será monótona (Teorema 2.9). Por otro lado, si f no es monótona, entonces el valor propio dominante es complejo y la transición de la curva oscilará.

Si el mapa f está en función de un parámetro θ , los puntos 2-periódicos frecuentemente aparecerán a través de una bifurcación de duplicación de periodo de un punto

fijo. Por lo tanto, es de interés entender las implicaciones de una bifurcación de duplicación de periodo del mapa sobre la dinámica de la ecuación (35) para ε cerca de cero. Esto se describe a continuación.

Para $\varepsilon > 0$ y pequeño, con $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $k \geq 3$, considere soluciones periódicas de la ecuación

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t-1), \theta), \quad (38)$$

bajo la suposición que el punto $\theta = 0$ corresponde a un punto de duplicación de periodo genérico para el mapa $x \mapsto f(x, 0)$. Además, suponga que

$$f(x, \theta) = -(1 + \lambda)x + ax^2 + bx^3 + \mathcal{O}(x^3), \quad \text{conforme } x \rightarrow 0, \quad (39)$$

donde a, b son constantes tal que $\beta = a^2 + b \neq 0$. Bajo esta suposición sobre f , para cada valor pequeño de θ para la cual $\theta\beta > 0$, existen constantes no ceros $d_{1\theta}, d_{2\theta}$, $d_{1\theta} \neq d_{2\theta}$, tal que $f(d_{1\theta}, \theta) = d_{2\theta}$, $f(d_{2\theta}, \theta) = d_{1\theta}$. Además, $d_{1\theta}, d_{2\theta} \rightarrow 0$ conforme $\theta \rightarrow 0$. Los puntos $d_{1\theta}, d_{2\theta}$ son puntos periódicos de periodo dos del mapa $f(\cdot, \theta)$. Si $\beta > 0$, se dice que la bifurcación es *supercrítica* y si $\beta < 0$, se dice que es *subcrítica*.

El siguiente teorema enuncia cómo la bifurcación de duplicación de periodo del mapa es reflejada en la bifurcación con la que aparecen soluciones periódicas de la ecuación (35) de periodo aproximadamente dos.

Teorema 2.10 (Hale y Lunel, 2013) *Suponga que $f(x, \theta)$ satisface (39). Entonces, existe una vecindad U de $(0, 0)$ en el plano- (θ, ε) y una región sectorial S en U tal que si $(\theta, \varepsilon) \in U$, entonces hay una solución periódica $\tilde{x}_{\theta, \varepsilon}$ de la ecuación (38) con periodo $2\tau(\theta, \varepsilon) = 2 + 2\varepsilon + \mathcal{O}(|\varepsilon|(|\theta| + |\varepsilon|))$ conforme $(\theta, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)$ si y sólo si $(\theta, \varepsilon) \in S$. Además, esta solución es única. Si, además, $f(x, \theta) = -f(-x, \theta)$, entonces $\tilde{x}_{\theta, \varepsilon}(t + \tau(\theta, \varepsilon)) = -\tilde{x}_{\theta, \varepsilon}(t)$.*

Es posible extender el resultado del Teorema 2.10 para el caso de un sistema de mayor orden. En el Capítulo 4 se presenta este resultado.

2.6. Semipasividad de sistemas dinámicos

En esta sección se describe una propiedad importante que se usará en esta tesis para asegurar que las trayectorias de un sistema permanezcan acotadas, tal que se presentan oscilaciones sostenidas periódicas o no periódicas. Esta propiedad es la llamada semipasividad, que proviene del concepto de pasividad, que se define a continuación.

Definición 2.4 (Khalil y Grizzle, 1996) Considere un sistema sin memoria, variante en el tiempo, modelado por

$$y = h(t, u), \quad (40)$$

donde $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua a trozos en t y localmente Lipschitz en u . Supóngase que existe una función $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que la siguiente desigualdad se cumple,

$$u^T y \geq u^T \phi(u) \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^m, \quad (41)$$

para cualquier u acotada. Se dice que el sistema es

- (i) sin pérdida si $\phi(u) \equiv 0$ y (41) tiene la forma $u^T y = 0$;
- (ii) pasivo si se satisface (41) con $\phi(u) \geq 0$.

Ahora considere un sistema dinámico con la forma

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x, u), \quad (42)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz, $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua, $f(0, 0) = 0$ y $h(0, 0) = 0$.

Definición 2.5 (Khalil y Grizzle, 1996) Considere el sistema (42) y suponga que existe una función continua no negativa $S(x)$, con $S(0) = 0$, llamada función de almacenamiento. Suponga que también existe una función H tal que

$$u^T y \geq \dot{S} + H(x) = \frac{\partial S}{\partial x} f(x, u) + H(x) \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad (43)$$

para cualquier entrada u acotada. Se dice que el sistema es

- (i) sin pérdida si $H(x) \equiv 0$ y (43) tiene la forma $u^T y = (\partial S / \partial x) f(x, u)$;
- (ii) pasivo si (43) se satisface con $H(x) \geq 0$.

Se dice que el sistema es estrictamente pasivo si las desigualdades son estrictas.

Nota 2.2 Observe que para un sistema dinámico estrictamente pasivo $\dot{x} = f(x, u)$, $y = h(x)$, tal que $f(0, 0) = 0$ y con una función de almacenamiento definida positiva S , el origen $x = 0$ es asintóticamente estable. En efecto, en este caso $u^T y > \dot{S} + H(x)$, por lo que si $u = 0$, $\dot{S} = (\partial S / \partial x) f(x, 0) < -H(x) < 0$ para $x \neq 0$.

La siguiente definición describe el concepto de semipasividad de sistemas dinámicos.

Definición 2.6 (Pogromsky y Nijmeijer, 2001) Considere el sistema (42) y suponga que existe una función continua no negativa $S(x)$, con $S(0) = 0$, llamada función de almacenamiento. Este sistema es semipasivo si existe una función $H(x)$ tal que

$$u^T y \geq \dot{S} + H(x) = \frac{\partial S}{\partial x} f(x, u) + H(x) \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (44)$$

con $H(x) \geq \varrho(\|x\|)$ para $x \notin \mathcal{B}_r$, donde $\mathcal{B}_r$ es una bola de radio $r > 0$ que contiene al origen, es decir, $0 \in \mathcal{B}_r$, y ϱ es una función no negativa para $\|x\| \geq r$, donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea.

El término estrictamente (semi)pasivo es usado si las desigualdades son estrictas.

Nota 2.3 Para un sistema dinámico semipasivo $\dot{x} = f(x, u)$ tal que $f(0, 0) = 0$ y con una función de almacenamiento definida positiva S , la bola $\mathcal{B}_r$ es atractora. Observe que, en este caso, $u^T y \geq \dot{S} + H(x)$ para $\|x\| > r$. Por lo tanto, si $u = 0$, $\dot{S} = (\partial S / \partial x) f(x, 0) \leq -H(x) \leq -\varrho(\|x\|) < 0$ para $\|x\| > r$.

Los siguientes ejemplos muestran las propiedades de pasividad y semipasividad en sistemas dinámicos.

Ejemplo 2.2 (Pasividad) (Slotine et al., 1991)

Considere el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -ax_1^7 - bx_1^2x_2^3 + u, \\ y &= x_2,\end{aligned}$$

donde a y b son constantes positivas. También, considere la función de almacenamiento

$$S(x) = \frac{a}{8}x_1^8 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Derivando a $S(x)$ con respecto al tiempo se tiene

$$\dot{S}(x) = ax_1^7x_2 + x_2(-ax_1^7 - bx_1^2x_2^3 + u) = -bx_1^2x_2^4 + uy.$$

Entonces, $uy \geq \dot{S}(x) + H(x)$, con $H(x) = bx_1^2x_2^4$. Por lo tanto, el sistema es pasivo.

□

Ejemplo 2.3 (Semipasividad)

Considere a la ecuación de Rayleigh, representada en las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -w^2x_1 - a(x_2^2 - 1)x_2 + u, \\ y &= x_2,\end{aligned}$$

donde a es una constante positiva y $w \in \mathbb{R}$. Sea $S(x)$ la función de almacenamiento definida como

$$S(x) = \frac{w^2}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Derivando a $S(x)$ con respecto al tiempo

$$\dot{S}(x) = w^2x_1x_2 + x_2[-w^2x_1 - a(x_2^2 - 1)x_2 + u] = -a(x_2^2 - 1)x_2^2 + uy.$$

Entonces, $uy \geq \dot{S}(x) + H(x)$ con $H(x) = \alpha(x_2^2 - 1)x_2^2$, para $x_1 \neq 0$, y $H(x) \geq 0 \forall |x_2| \geq 1$. Por lo tanto, se tiene que la ecuación de Rayleigh cumple con la condición de semipasividad.

□

Ejemplo 2.4 (Semipasividad) (Steuer et al., 2009)

Considere al modelo de FitzHugh-Nagumo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - \frac{x_1^3}{3} - x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= \phi(x_1 + a - bx_2), \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

donde α , b y ϕ son constantes positivas e I es un parámetro acotado constante. La función de almacenamiento $S(x)$ es

$$S(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2\phi}x_2^2.$$

Aplicando la derivada con respecto al tiempo a $S(x)$ se tiene

$$\dot{S}(x) = x_1 \left(x_1 - \frac{x_1^3}{3} - x_2 + u \right) + x_2 (x_1 + a - bx_2) = -\frac{x_1^4}{3} + x_1^2 + Ix_1 - bx_2^2 + ax_2 + uy.$$

Este sistema, también es semipasivo ya que cumple con la condición $uy \geq \dot{S}(x) + H(x)$ con $H(x) = x_1^4/3 - x_1^2 - Ix_1 + bx_2^2 - ax_2$ y $H(x) \geq 0$ para $\|x\|$ suficientemente grande.

□

2.7. Diagramas de Feigenbaum

Un diagrama de Feigenbaum es una herramienta gráfica que muestra los posibles estados estacionarios estables de un sistema dinámico, en función de un parámetro del sistema, llamado parámetro de bifurcación (Heinz-Otto et al., 2004). La posible solución a la que converge el sistema dependerá de las condiciones iniciales.

Por ejemplo, considere el mapeo logístico

$$x_{k+1} = \mu x_k (1 - x_k), \quad x_k \in [0, 1],$$

donde μ se escoge como el parámetro de bifurcación. En la Figura 4 se muestra un ejemplo del diagrama de Feigenbaum de este sistema, cuando el parámetro μ varía entre 2.4 y 4. El parámetro de bifurcación μ se muestra sobre el eje horizontal de la

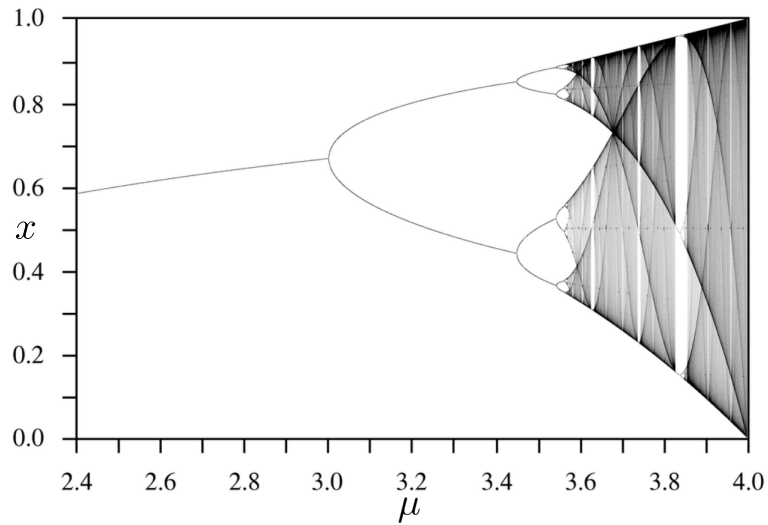


Figura 4. Diagrama de Feigenbaum del mapa logístico.

gráfica, y el eje vertical muestra los posibles valores de la amplitud en estado estacionario que puede tomar el estado x .

El despliegue de los estados estacionarios mediante este tipo de diagramas muestra la variedad y riqueza que puede desplegar un sistema dinámico, por lo que ésta es una herramienta frecuentemente utilizada para mostrar las condiciones para las cuales puede exhibir un comportamiento complejo, eventualmente caótico.

2.8. Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov son una generalización de los valores propios en un punto de equilibrio y de los multiplicadores de Floquet en las órbitas periódicas.

Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (45)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $\phi_t(x_0, t_0)$ como la solución; es decir,

$$\dot{\phi}_t(x_0, t_0) = f(\phi_t(x_0, t_0), t), \quad \phi_{t_0}(x_0, t_0) = x_0. \quad (46)$$

Diferenciando a (46) con respecto a x_0 se obtiene

$$D_{x_0} \dot{\phi}_t(x_0, t_0) = D_x f(\phi_t(x_0, t_0), t) D_{x_0} \phi_t(x_0, t_0), \quad D_{x_0} \phi_{t_0}(x_0, t_0) = I \quad (47)$$

Si $\Phi_t(x_0, t_0) \triangleq D_{x_0} \phi_t(x_0, t_0)$, entonces (47) se convierte en

$$\dot{\Phi}_t(x_0, t_0) = D_x f(\phi_t(x_0, t_0), t) \Phi_t(x_0, t_0), \quad \Phi_{t_0}(x_0, t_0) = I, \quad (48)$$

la cual es la *ecuación variacional*. A partir de la ecuación variacional se pueden definir los exponentes de Lyapunov.

Definición 2.7 (Parker y Chua, 2012) Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ una condición inicial y sea $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$ los valores propios de $\Phi_t(x_0)$. Los exponentes de Lyapunov de x_0 son

$$\delta_i \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\lambda_i(t)|, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (49)$$

siempre que el límite exista.

□

Entonces, se puede decir que los exponentes de Lyapunov ofrecen la siguiente información sobre las trayectorias de los sistemas dinámicos.

Los exponentes de Lyapunov son una cantidad que describe la convergencia o divergencia exponencial de las trayectorias que inician muy cercanas una de la otra. El número de los exponentes de Lyapunov dependerá de la dimensión del sistema. Si la suma del valor de todos los exponentes de Lyapunov es negativa, entonces el sistema tiene un atractor. Si el exponente de Lyapunov más grande es positivo, quiere decir que el sistema no lineal presenta sensibilidad a las condiciones iniciales, una condición necesaria para caos. Si el exponente de Lyapunov más grande es cero indica una dinámica periódica o cuasi-periódica. Si todos los exponentes de Lyapunov son

negativos, indica que el punto crítico estable es un atractor. Entonces, los exponentes de Lyapunov indican el comportamiento dinámico del sistema.

2.9. Sistemas caóticos

El término *caos* es utilizado habitualmente para referirse a lo impredecible o para acontecimientos aparentemente aleatorios. Este término también se utiliza en sistemas dinámicos para referirse a sistemas cuyo comportamiento parece impredecible e irregular.

Aunque no existe una definición estándar de comportamiento o dinámica caótica, se puede describir como el comportamiento de un sistema dinámico en el cual los estados estacionarios no corresponden a puntos de equilibrio, órbitas periódicas u órbita cuasi-periódicas. Cuando las trayectorias de estado están acotadas, el estado estacionario permanece entonces en una bola (de volumen finito) en el espacio de estado. El estado estacionario de estos sistemas forman figuras geométricas muy complejas en el espacio de estado, conocidas como atractores extraños o atractores caóticos.

Se han propuesto tres propiedades fundamentales que deben exhibir los sistemas dinámicos, que se utilizan frecuentemente para definir el comportamiento caótico (Devaney, 1989): sensibilidad a condiciones iniciales, mezclado o transitividad topológica e infinitud de órbitas periódicas tipo silla. Estas propiedades se describen a continuación.

Sensibilidad a las condiciones iniciales

Considere un sistema dinámico de tiempo continuo con dos condiciones iniciales ligeramente diferentes, $x_1(0) = x_0$ y $x_2(0) = x_0 + \varepsilon_0$, donde ε_0 es un valor muy pequeño. A partir de estas dos condiciones iniciales el sistema produce una trayectoria para cada condición inicial, $x_1(t)$ y $x_2(t)$, respectivamente. Considere también una función de medición $\varepsilon(t) = x_2(t) - x_1(t)$, con $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$. Si $\|\varepsilon(0)\| \rightarrow 0$ y si la función de medición $\|\varepsilon(t)\|$ crece en promedio conforme t aumenta y las trayectorias permanecen acotadas, se dice que el sistema dinámico presenta sensibilidad a las condiciones iniciales. En la Figura 5, se muestra la sensibilidad a las condiciones iniciales en un sistema caótico de Rössler. Se puede apreciar cómo dos condiciones iniciales ligeramente diferentes ($x_0 = 0$ y $x_0 + \varepsilon_0 = 0.1$) divergen entre sí conforme aumenta el tiempo.

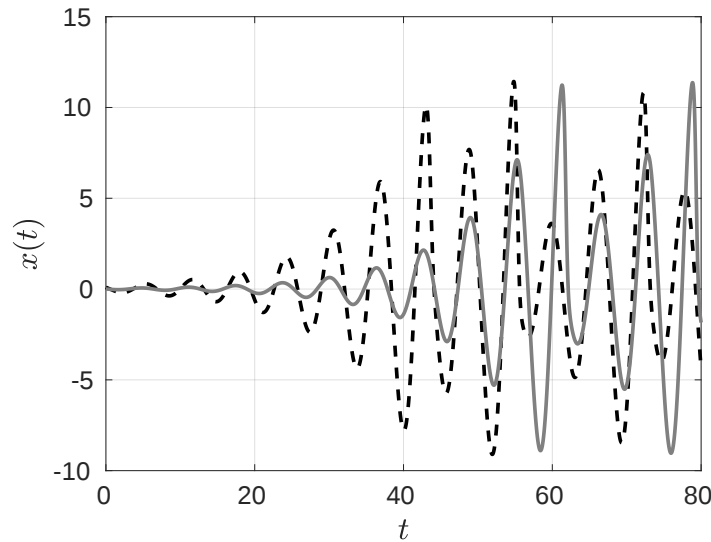


Figura 5. Sensibilidad a las condiciones iniciales. Sistema de Rössler para condiciones iniciales ligeramente diferentes.

Transitividad

La propiedad de transitividad se refiere a la capacidad del sistema de generar todo su atractor a partir de cualquier región arbitrariamente pequeña dentro de éste. O lo que es equivalente, seleccionando dos regiones dentro del atractor (o dos puntos) y tomando a uno de ellos como las condiciones iniciales del sistema, entonces, después de un tiempo, la trayectoria del sistema intersectará la otra región seleccionada (o la distancia de la trayectoria al segundo punto será arbitrariamente pequeña).

Una definición formal puede encontrarse en (Devaney, 1989), para un mapeo $x_{k+1} = f(x_k)$:

Definición 2.8 Se dice que $f : J \rightarrow J$ es transitivo en J si para cualquier par de conjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset J$, existe un entero $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Densidad de órbitas periódicas

Otra característica importante que presentan los sistemas caóticos es la presencia de un número infinito de órbitas periódicas. Esta característica se refiere a que, dado cualquier punto dentro del atractor siempre existe una órbita periódica arbitrariamente cercana a ese punto (Devaney, 1989). Formalmente se expresa diciendo que

el conjunto de órbitas periódicas en un atractor caótico es denso, donde la densidad de un conjunto se define como sigue (Devaney, 1989):

Definición 2.9 (*Densidad*) Sea S un espacio topológico, $U \subset S$ y $\bar{U}$ la cerradura de U . Entonces U es denso en S si $\bar{U} = S$.

En los siguientes capítulos se expondrán diferentes métodos para la generación de oscilaciones en alguna clase de sistemas dinámicos.

Capítulo 3. Generación de oscilaciones caóticas en sistemas tipo Liénard

En este capítulo se propone un método para producir oscilaciones caóticas en sistemas no lineales de segundo orden, tipo Liénard, por medio de un control retroalimentado que depende tanto del estado actual así como del estado retardado en el tiempo. Debido a la dificultad del análisis de sistemas que contienen retardos, aquí se propone el método siguiente:

1. Utilizar una señal de control correspondiente a una combinación lineal del estado y del estado retardado en tiempo.
2. Expandir el retardo en su serie de Taylor y considerar su truncamiento al tercer orden, obteniendo una aproximación del sistema con retardo.
3. Reescribir el sistema aproximado en forma de variables de estado tipo “jerk” (Schot, 1978).
4. De un catálogo de sistemas caóticos del tipo anterior, por ejemplo de los propuestos por Sprott (Sprott y Clinton, 2010), seleccionar uno con una estructura similar al sistema aproximado.
5. Calcular los parámetros introducidos en el control (retardo, ganancias) para igualar el sistema caótico seleccionado y el aproximado.
6. Comparar el comportamiento del sistema aproximado resultante con el sistema con retardo original mediante algún criterio de comparación.

Enseguida se presenta una descripción detallada de este método.

3.1. Método

El método propuesto podría aplicarse, de manera general, a un sistema no lineal. Sin embargo, conviene que el sistema en lazo abierto presente oscilaciones de manera natural. Por ello ilustramos la idea general considerando que el sistema en lazo abierto sea un sistema tipo Liénard, que asegura la existencia de una oscilación periódica como un estado estacionario del sistema original. Considere entonces un sistema

modelado por la ecuación

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = u, \quad (50)$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen las condiciones del Teorema 2.3. Considere también una señal de control de la forma

$$u = k_1 x(t) + k_2 \dot{x}(t) + k_3 x(t - \tau), \quad (51)$$

donde $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ y $\tau > 0$ es el tiempo de retardo. Aplicando la señal de control (51) en (50) se tiene

$$\ddot{x}(t) + f(x)\dot{x}(t) + g(x) = k_1 x(t) + k_2 \dot{x}(t) + k_3 x(t - \tau). \quad (52)$$

El método propuesto consiste en expresar el término retardado $x(t - \tau)$ por su serie de Taylor

$$x(t - \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (-\tau)^i x^{(i)}(t), \quad (53)$$

por lo que el retardo convierte al sistema (52) en un sistema de orden infinito. Se propone entonces utilizar una aproximación del retardo mediante un truncamiento de (53). Puesto que el comportamiento caótico puede obtenerse con un sistema no lineal autónomo de tercer orden, es suficiente truncar esta serie al 3^{er} orden. Se utilizará entonces la aproximación

$$x(t - \tau) \approx x(t) - \tau \dot{x}(t) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{x}(t) - \frac{\tau^3}{6} \dddot{x}(t), \quad (54)$$

y se propone analizar la diferencia en el comportamiento cualitativo del sistema (52) con respecto al sistema con el retardo aproximado (54). El sistema con retardo aproximado se describe por la ecuación

$$\ddot{x}(t) + f(x)\dot{x}(t) + g(x) = k_1 x(t) + k_2 \dot{x}(t) + k_3 \left[x(t) - \tau \dot{x}(t) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{x}(t) - \frac{\tau^3}{6} \dddot{x}(t) \right], \quad (55)$$

de donde se obtiene una representación en ecuaciones de estado tipo “jerk” (x_1, x_2, x_3) =

$(x, \dot{x}, \ddot{x})$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= ax_1 + bx_2 + cx_3 - d[g(x_1) + f(x_1)x_2],\end{aligned}\tag{56}$$

con $a = \frac{6(k_1+k_3)}{k_3\tau^3}$, $b = \frac{6(k_2-k_3\tau)}{k_3\tau^3}$, $c = \frac{\frac{k_3\tau^2}{2}-1}{k_3\tau^3}$ y $d = \frac{6}{k_3\tau^3}$. Una forma simple de asignar valores a los parámetros a , b , c y d , del sistema (56), es empatarlo a un sistema caótico ya existente, como se menciona al inicio de este capítulo.

3.2. Comportamiento caótico de un sistema tipo Van der Pol con retardo

Un caso particular de un sistema de Liénard es el oscilador de van der Pol controlado (Perko, 1996)

$$\ddot{x}(t) + \mu[x^2(t) - 1]\dot{x}(t) + x(t) = u,\tag{57}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y u es la entrada de control. Aplicando la señal de control (51) al sistema (57), como se estableció anteriormente, se llega a la siguiente ecuación diferencial de segundo orden retardada

$$\ddot{x}(t) + \mu[x^2(t) - 1]\dot{x}(t) + x(t) = k_1x(t) + k_2\dot{x}(t) + k_3x(t - \tau).\tag{58}$$

Por comodidad, el sistema (58) se representa en ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),\tag{59}$$

$$\dot{x}_2(t) = -(1 - k_1)x_1(t) + (\mu + k_2)x_2(t) - \mu x_1^2(t)x_2(t) + k_3x_1(t - \tau).$$

Siguiendo con el método, se obtiene el sistema aproximado de (59) al aplicar (54)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -a'x_1 + b'x_2 - c'x_3 - d'x_1^2x_2,\end{aligned}\tag{60}$$

con $a' = \frac{6(1-k_1-k_3)}{k_3\tau^3}$, $b' = \frac{6(\mu+k_2-k_3\tau)}{k_3\tau^3}$, $c' = \frac{6\left(1-\frac{k_3\tau^2}{2}\right)}{k_3\tau^3}$, $d' = \frac{6\mu}{k_3\tau^3}$. En (Sprott y Clinton, 2010) Sprott presenta una familia muy amplia de sistemas caóticos. Entre ellos se encuentra uno el cual se puede empatar al sistema de referencia, (60), ya que ambos tienen la misma estructura. El sistema de Sprott (sistema de referencia) es representado por las siguientes ecuaciones de estado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -5x_1 + 9x_2 - x_3 - x_1^2x_2.\end{aligned}\tag{61}$$

En la Figura 6 se presenta la dinámica del sistema de referencia, (61), mientras que en la Figura 7 se muestra el comportamiento del sistema aproximado, (60), cuando $a' = 5$, $b' = 9$, $c' = d' = 1$. Con $k_1 = -19932.5714$, $k_2 = 199.3621$, $k_3 = 19933.5548$, $\mu = 3.3322 \times 10^{-3}$ y $\tau = 0.01$ se obtienen los valores deseados de a' , b' , c' y d' . Dado que ambos sistemas son idénticos, la diferencia que puede observarse en los atractores mostrados en las figuras 6 y 7 se debe a la diferencia en las condiciones iniciales.

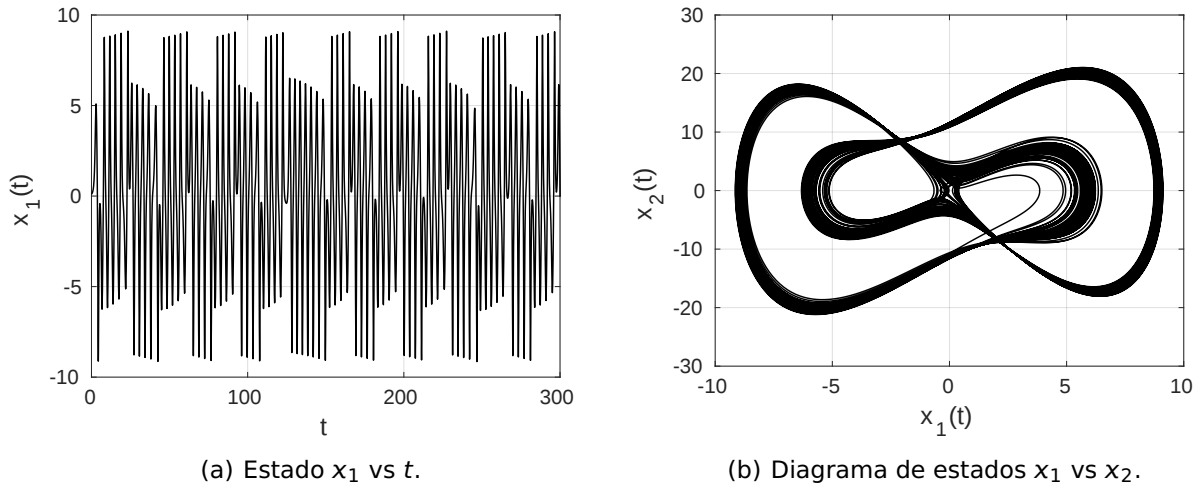


Figura 6. Dinámica del sistema (61).

El comportamiento del sistema con retardo (59), con los valores de parámetros k_1 , k_2 , k_3 , μ y τ calculados para el sistema aproximado (60), es comparado con el comportamiento del sistema de referencia (61). De las figuras 7 y 8 se puede observar

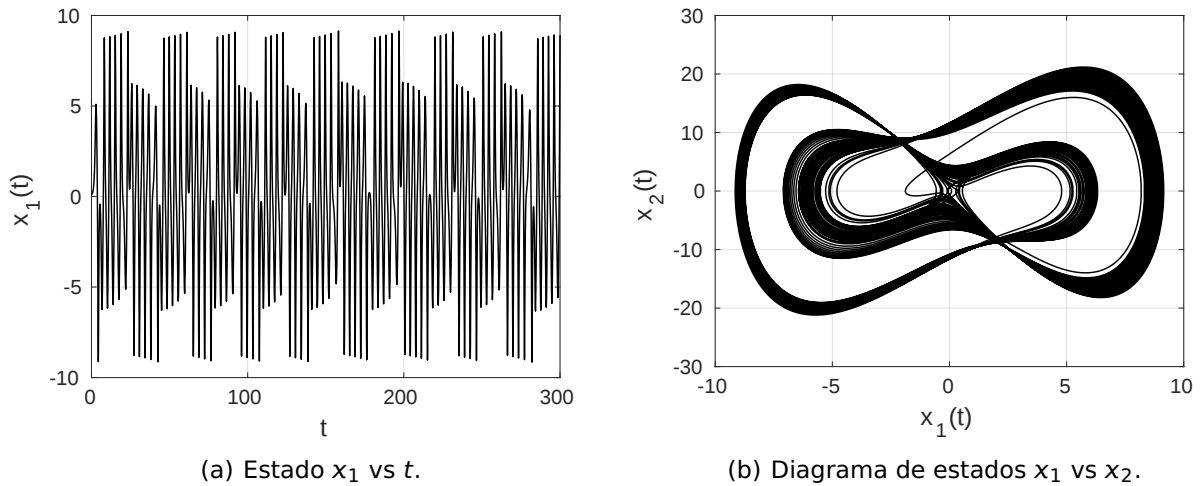


Figura 7. Dinámica del sistema (60).

claramente que ambos sistemas presentan un comportamiento similar.

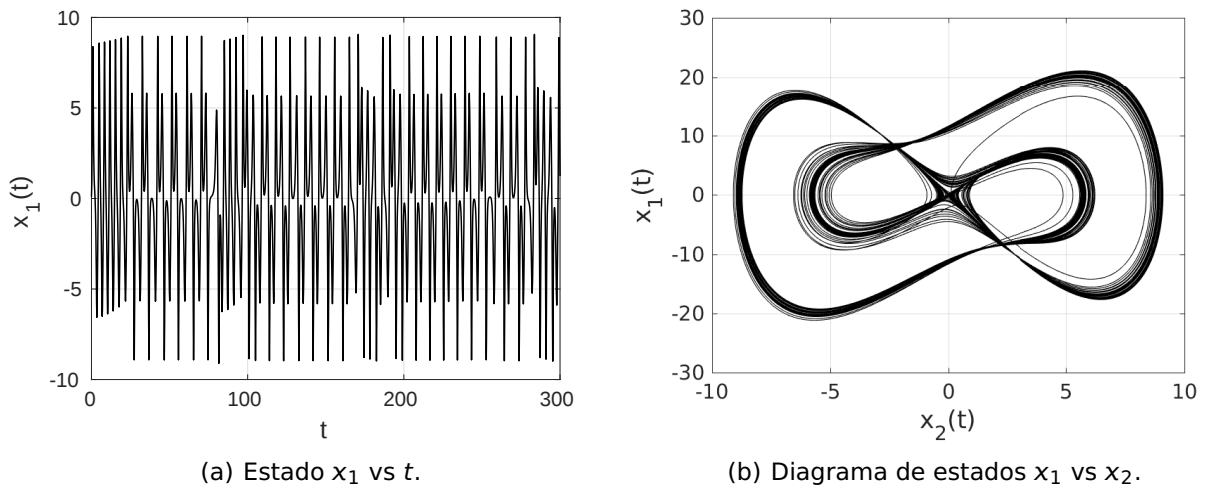


Figura 8. Dinámica del sistema (59).

También, en la Figura 9 se muestra la señal de control para el sistema con retardo (59). Se puede observar que el esfuerzo de control es muy alto debido los valores de las ganancias K_1 , K_2 y K_3 .

Una herramienta eficiente con la se puede comparar el comportamiento del sistema aproximado (60) con el del sistema con retardo original (59) es por medio de los diagramas de Feigenbaum, ya que se pueden visualizar los posibles estados estacionarios al variar algún parámetro del sistema. Para el diagrama de Feigenbaum del sistema (60), ver Figura 10(a), se varía el parámetro α' en el intervalo $[1, 5]$. Como se mencio-

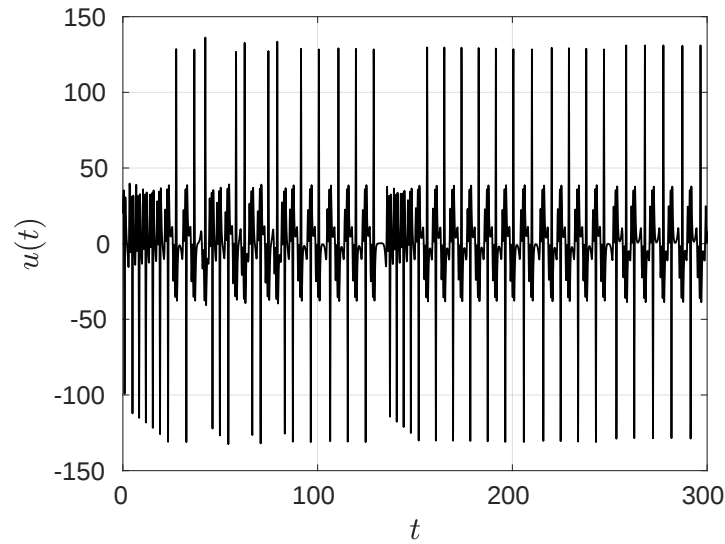
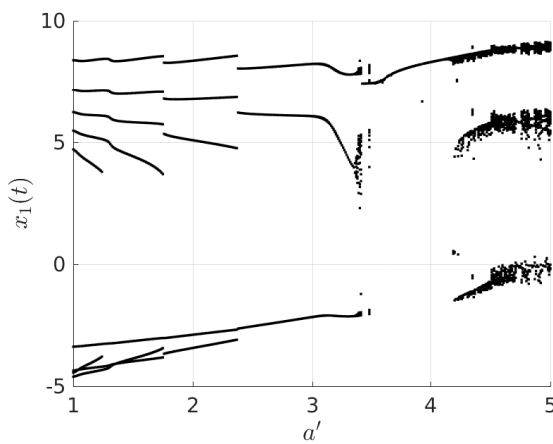
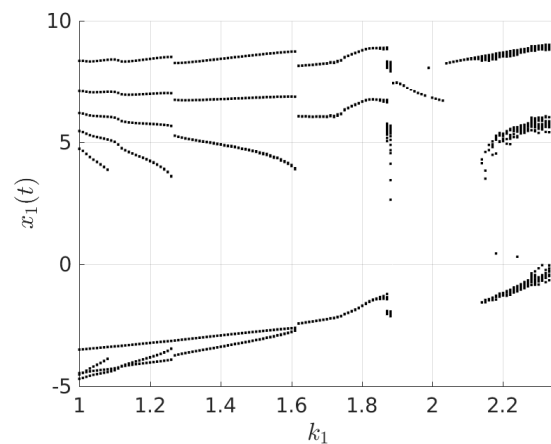


Figura 9. Señal de control para el sistema (59).

nó anteriormente, el parámetro α' depende de k_1 , k_3 y τ ; por lo que, para generar el intervalo de α' se varía a k_1 en el intervalo $[-19932.5714, -19932.5581]$, mientras que el resto de los parámetros permanecen fijos con los valores antes mencionados. En la Figura 10(b) se muestra el diagrama para el sistema (59), donde también se varía el parámetro k_1 . La escala utilizada en el eje horizontal de la figura no corresponde a los valores asignados a k_1 . Aquí, el valor de 1 corresponde a $k_1 = -19932.5581$ y 2.33 representa a $k_1 = -19932.5714$. De estos diagramas puede observarse que, al variar el parámetro k_1 , ambos sistemas presentan dinámicas cualitativamente iguales.



(a) Diagrama de Feigenbaum del sistema (60).



(b) Diagrama de Feigenbaum del sistema (59).

Figura 10. Diagramas de Feigenbaum.

Otra herramienta con la cual se puede comparar el comportamiento entre estos dos sistemas es el espectro de frecuencias. En la Figura 11 se puede observar las componentes frecuenciales de la señal del estado $x_1(t)$ tanto del sistema (60), Figura 11(a), como del sistema (59), Figura 11(b). Estas figuras muestran un continuo y amplio espectro de frecuencias, que es característico de los sistemas caóticos. Aunque el espectro de frecuencias del sistema con retardo original (59) no es idéntico al espectro de frecuencias del sistema aproximado (60), se puede apreciar que las componentes frecuenciales dominantes se encuentran dentro de un mismo rango de frecuencias y la diferencia entre ellas es pequeña.

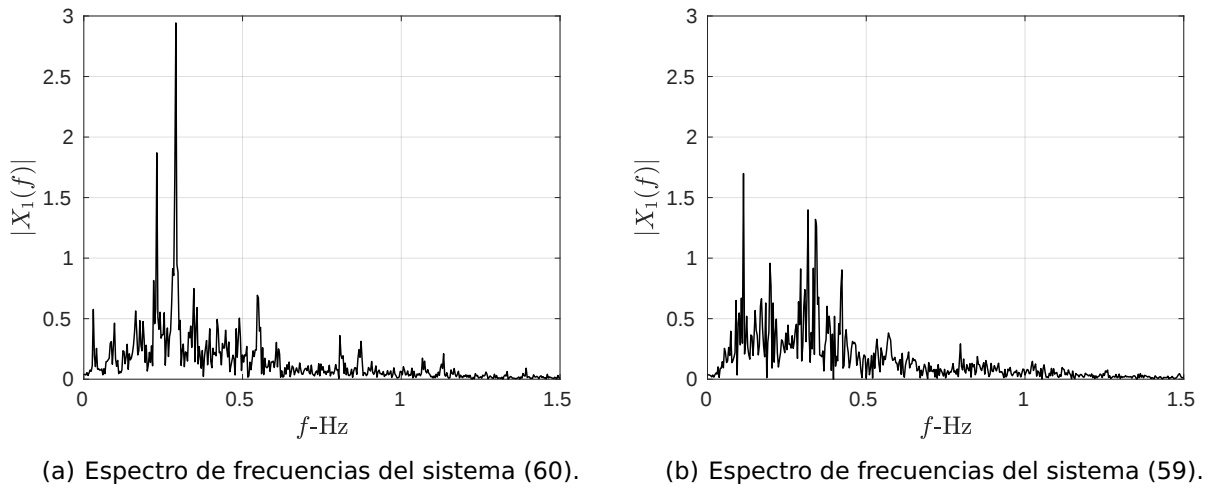


Figura 11. Espectros de frecuencias.

Es importante considerar, al aplicar este método, que se debe prestar especial atención al realizar una aproximación por series de Taylor del retardo, ya que se pueden obtener conclusiones erróneas al analizar el sistema aproximado. Como ejemplo de tal situación, consideremos el sistema

$$\dot{x}(t) + ax(t - \tau) = 0, \quad (62)$$

con $a > 0$, y su aproximación por series de Taylor hasta el tercer orden

$$(\tau^3 a/6) \ddot{x}(t) - (\tau^2 a/2) \ddot{x}(t) - (1 - \tau a) \dot{x}(t) - ax(t) = 0. \quad (63)$$

El origen del sistema de primer orden retardado en tiempo (62) es estable, mientras que su aproximación, sistema (63), mediante la aplicación del criterio de estabilidad

de Hurwitz, resulta siempre inestable para $\tau > 0$, por lo que la diferencia entre ambos estados crece exponencialmente para una condición inicial diferente a cero. De aquí se puede ver que se llega a un resultado erróneo al analizar el sistema aproximado para toda $a \neq 0$.

Lo anterior es un caso particular de un caso general descrito en (García-Ramírez *et al.*, 2017). Considérese el sistema de orden n

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \left[a_i \frac{d^i}{dt^i}x(t) + k_i \frac{d^i}{dt^i}x(t - \tau) \right] = 0. \quad (64)$$

Si k_i es diferente de cero $\forall i = 0, 1, 2, \dots$, cualquier truncamiento de orden m de (64) es inestable si

$$m \geq \max \left\{ n + 2, \frac{k_{n+1}\tau}{k_{n+2}} \right\}. \quad (65)$$

Este resultado permite descartar aproximaciones de orden mayor o igual que $\{n + 2, k_{n+1}\tau/k_{n+2}\}$. Otro factor importante a considerar, para que la dinámica del sistema aproximado se asemeje a la del sistema original, es la elección del parámetro τ . Como ejemplo, considere la aproximación de segundo orden del estado retardado del sistema (62)

$$(\tau^2 a/2) \ddot{x}(t) + (1 - \tau a) \dot{x}(t) + ax(t) = 0, \quad (66)$$

donde la aproximación no satisface (65). La estabilidad del sistema aproximado (66) depende del valor de τ y se puede observar que este sistema es estable cuando $\tau < 1/a$. De aquí se puede decir, que τ debe ser lo suficientemente pequeño para tener una buena aproximación.

Por ello, al considerar la desigualdad (65) y un retardo τ suficientemente pequeño, se consiguió que la dinámica del sistema aproximado (60) y la del sistema (59) fueran cualitativamente iguales.

3.3. Conclusiones

En este capítulo se propuso un método para generar oscilaciones caóticas en sistemas de segundo orden tipo Liénard mediante un control retroalimentado que depende del estado actual y del estado retardado en el tiempo. También, se mostró que utilizando las series de Taylor, para aproximar al estado retardado, se puede obtener un sistema aproximado sin retardos el cual puede ser comparado con algún sistema caótico existente, y así fijar los parámetros del control para producir oscilaciones caóticas. Mediante el oscilador de van der Pol se ilustró la aplicación de este procedimiento. El éxito de este método para obtener oscilaciones caóticas dependerá en gran medida de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ del sistema tipo Liénard elegido, lo cual se puede ver como una desventaja. Sin embargo, debido a la sencillez del método, éste puede ser una alternativa para producir oscilaciones caóticas en cierta clase de sistemas de segundo orden, tipo Liénard.

Capítulo 4. Método de perturbaciones singulares

El método de perturbaciones singulares ha sido utilizado para analizar sistemas dinámicos con retardos. Mediante este método se han establecido condiciones de estabilidad para cierto tipo de sistemas (Fridman, 2002; Xu y Jin, 2014; Bliman y Iwasaki, 2006; Hu y Wang, 2009). Igualmente, cuando un sistema con cierta estructura es acoplado a un sistema de retardo puro (“pure shift”) con la misma estructura que un sistema discreto (mapeo), la aplicación de esta metodología ha conducido a establecer condiciones de existencia de comportamientos dinámicos (oscilaciones periódicas y bifurcaciones de duplicación de período) similares a los exhibidos por el mapeo (Hale y Huang, 1994; Artstein y Slemrod, 2001; Chow *et al.*, 1992; Hale y Lunel, 2013). Inclusive, en (Alvarez, 2000) se propone un procedimiento para generar oscilaciones periódicas y caóticas llevando al sistema a la forma de perturbaciones singulares.

En este capítulo se propone utilizar el método de perturbaciones singulares para inducir órbitas caóticas en sistemas que no las presentan, de manera similar a lo descrito anteriormente. En la primera sección se plantea la idea general y en la siguiente se muestran ejemplos para ilustrar el procedimiento propuesto.

4.1. Generación de oscilaciones mediante el método de perturbaciones singulares

Considere un sistema continuo de primer orden

$$\dot{x} = f(x) + u, \quad (67)$$

donde $x \in \mathbb{R}$ es el estado, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave. Suponga que se aplica la siguiente entrada de control,

$$u(x(t)) = \gamma(x(t), x(t-1)), \quad (68)$$

donde $\gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que la ecuación diferencial retardada

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \gamma(x(t), x(t-1)), \quad t \geq 0, \quad x(t) = x_0(t) \text{ para } t \in [-1, 0), \quad (69)$$

tiene una solución. Observe que, sin perder generalidad, se ha supuesto que el retardo es unitario, ya que si $\tau \neq 1$, utilizando el escalamiento en el tiempo $T = t/\tau$ el retardo

se puede llevar a la unidad.

Ahora considere el sistema siguiente conocido como “desplazamiento puro” (“pure-shift”) (Moog C. y A., 2000):

$$y(t) = \varphi(y(t-1), \theta), \quad t \geq 0, \quad y(t) = y_0(t) \text{ for } t \in [-1, 0), \quad (70)$$

donde $\varphi : \mathcal{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ es un subintervalo de $\mathbb{R}$ y θ es un parámetro cuyo valor determina el comportamiento de este sistema. Si la condición inicial es una constante, $y_0(t) = c \in \mathcal{R}$ para $t \in [-1, 0)$, entonces la solución de este sistema será

$$y(t) = \varphi^k(c, \theta), \quad k-1 \leq t < k, \quad (71)$$

donde φ^k es la k -ésima composición de φ y $k \geq 0$ es un entero. Entonces, este sistema está relacionado con el sistema en tiempo discreto (mapeo)

$$z(k+1) = \varphi(z(k), \theta), \quad z(0) = c, \quad (72)$$

de tal manera que $y(t) = z(k)$ en cada instante de tiempo $t = k$. Por lo tanto, las soluciones de los sistemas (70) y (72) coinciden en $t = k$. Esto significa que cualquier comportamiento dinámico desplegado por el sistema discreto en el tiempo (72) también será exhibido por el sistema continuo en el tiempo (70).

Un problema interesante es investigar cómo un comportamiento dinámico, similar al del sistema (70), puede ser inducido al sistema retroalimentado (69). Para ello, considere que γ tiene la forma

$$\gamma(x, x_\tau) = -K[x - \varphi(x_\tau, \theta)], \quad (73)$$

donde $K > 0$ y x_τ es el estado retardado, es decir, $x_\tau(t) = x(t - \tau)$, conduciendo al sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x) - K[x - \varphi(x_\tau, \theta)]. \quad (74)$$

Si se define $\epsilon = 1/K$, entonces se puede describir al sistema (74) como

$$\epsilon \dot{x} = \epsilon f(x) - [x - \varphi(x_\tau, \theta)]. \quad (75)$$

Como se mencionó al inicio del capítulo, desde hace tiempo se han realizado varias aportaciones en el análisis de sistemas con esta estructura. Un resultado interesante es el teorema propuesto en (Hale y Huang, 1994), el cual se describe a continuación.

Consideremos el sistema

$$\varepsilon \dot{x}(t) + Ax(t) = Af(x(t-1), \theta), \quad (76)$$

$$\dot{\eta}(t) = \chi(x(t), \eta(t)), \quad (77)$$

$$y(t) = x_1(t),$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^r$, $\eta(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$, $\varepsilon > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{r-1} & -\lambda_{r-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r \end{bmatrix}, \quad (78)$$

$$f(\cdot, \cdot) = (1, \dots, 1)^T g(x_1(t-1), \theta), \quad (79)$$

con $\lambda_i = \varepsilon/\varepsilon_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, $\varepsilon_i > 0$ y $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se tiene entonces el resultado siguiente.

Teorema 4.1 (Bifurcación de duplicación de período (Hale y Huang, 1994))

Suponga que el mapa escalar $y \rightarrow g(y, \theta)$ presenta una bifurcación de duplicación de período en $(y, \theta) = (0, 0)$. Entonces el mapeo $x \rightarrow f(x, \theta)$ (ec. (79)) presenta una bifurcación de este tipo en $(x, \theta) = (0, 0)$. Además, existe una vecindad $\mathbf{U}$ de $(0, 0)$ en el plano (θ, ε) y un sector $\mathbf{S} \subset \mathbf{U}$ tal que existe una solución periódica única $\tilde{x}$ del sistema (76) con período $2\tau = 2 + 2\varepsilon/\lambda_1 + \mathcal{O}(|\varepsilon|(|\theta| + |\varepsilon|))$ conforme $(\theta, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)$ sí, y sólo si, $(\theta, \varepsilon) \in \mathbf{S}$.

A partir de este resultado se puede pensar que, si se puede llevar el sistema (67) a la forma (75) con un control como (73), y si el mapa φ presenta una ruta al caos a través de bifurcaciones de duplicación de período, entonces (67) puede llegar a presentar una dinámica similar a ésta.

4.2. Ejemplos

En esta sección se muestran tres ejemplos para ilustrar lo propuesto en la sección anterior. El primer ejemplo es un sistema de primer orden estable, el segundo de ellos es el oscilador de van der Pol modificado, reportado en (Roup y Bernstein, 2001), (Orlov, 2008) y por último, se presenta el sistema de Lorenz. En todos los casos se utiliza un control retroalimentado como (73), donde el mapa φ tiene la forma del mapa logístico.

Sistema de primer orden

Considere el sistema continuo de primer orden

$$\dot{x} = -\alpha x + u, \quad (80)$$

con

$$u = -K(x - \mu x_\tau(1 - x_\tau)), \quad (81)$$

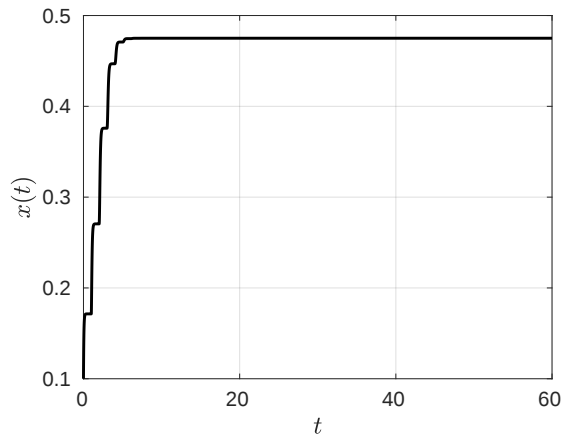
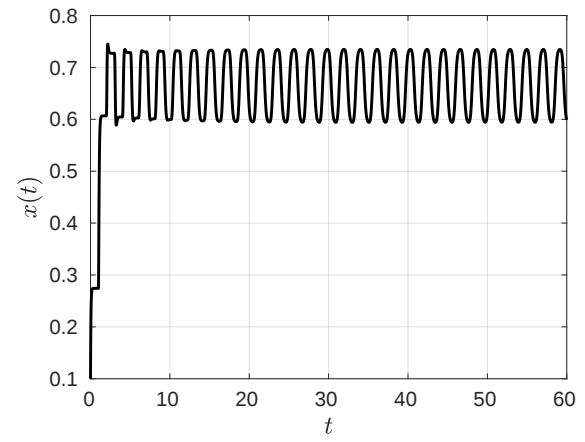
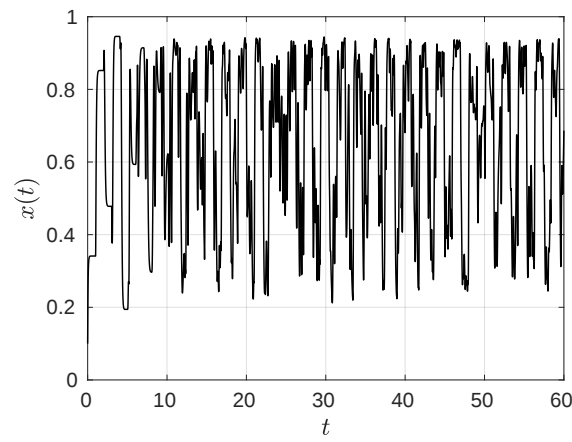
donde $\alpha > 0$ es el parámetro del sistema en lazo abierto, $K > 0$ es la ganancia de la señal de control, $\mu \in [0, 4]$ es el parámetro del mapa y $\tau = 1$ es el tiempo de retardo. Definiendo $\epsilon = 1/K$ se puede expresar al sistema (80) y (81) en la forma normal de perturbaciones singulares

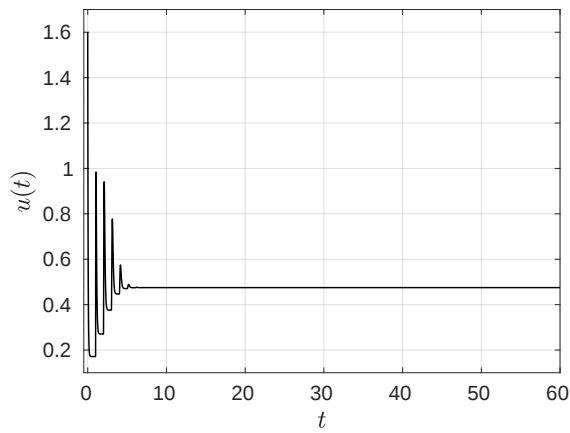
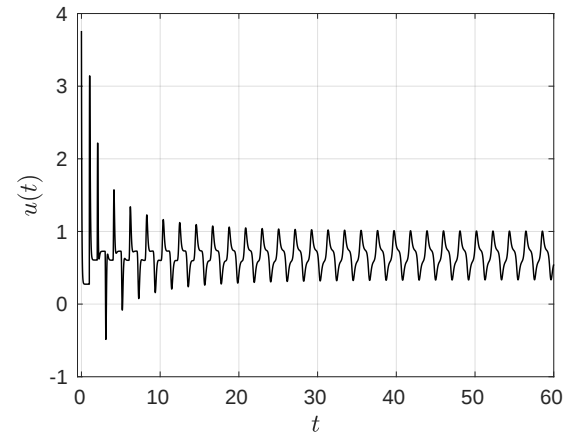
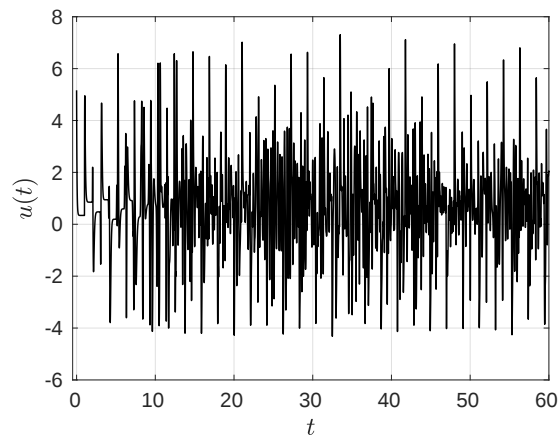
$$\epsilon \dot{x} = -\epsilon \alpha x - x + \mu x_\tau(1 - x_\tau). \quad (82)$$

De acuerdo a la teoría de perturbaciones singulares, si $\epsilon \rightarrow 0$ entonces

$$x = \mu x_\tau(1 - x_\tau). \quad (83)$$

En la Figura 12 se muestran varias órbitas para diferentes valores del parámetro μ , con $K = 20$ y $\alpha = 1$. El sistema converge a un punto de equilibrio cuando $\mu = 2$ (Figura 12(a)), si $\mu = 3.2$ exhibe una órbita periódica (Figura 12(b)) y presenta oscilaciones caóticas para $\mu = 3.98$ (Figura 12(c)). Las correspondientes señales de control para las órbitas mostradas en la figura anterior se pueden ver en la Figura 13. Se puede observar que en cada una de estas señales, en algún instante de tiempo, tiene una amplitud superior al promedio.

(a) $\mu = 2$.(b) $\mu = 3.2$.(c) $\mu = 3.98$.**Figura 12.** Respuestas del sistema (80) y (81) para diferentes valores de μ .

(a) $\mu = 2$.(b) $\mu = 3.2$.(c) $\mu = 3.98$.**Figura 13.** Señal de control del sistema (80) y (81) para diferentes valores de μ .

En la Figura 14 se presenta el diagrama de Feigenbaum del sistema retroalimentado (80)-(81) cuando el parámetro μ se varía en el intervalo $[2, 4]$, con $\alpha = 1$ y $K = 20$. El conjunto de valores mostrados sobre el eje vertical corresponden a los máximos de $x(t)$. Como puede apreciarse en el diagrama, el sistema presenta diversas órbitas para diferentes valores de μ . En este caso, se incluye la ubicación de un punto de equilibrio estable del sistema, puntos azules, éste aparece cuando $\mu \in [2, 3.12]$. También, para cuando $\mu > 3.12$, puede verse la aparición de órbitas periódicas y caóticas. Observe que para este valor en la ganancia el diagrama, con respecto a μ , del sistema continuo (80)-(81) se asemeja al diagrama del mapa logístico (ver Figura 4), por lo que la dinámica del sistema continuo se asemeja a la dinámica del mapa logístico. Entonces, se puede esperar que conforme la ganancia K crezca mayor similitud habrá entre estas dinámicas. Un diagrama de Feigenbaum, de este mismo sistema, se presenta en la Figura 28 del Capítulo 5 para cuando se varía el parámetro K .

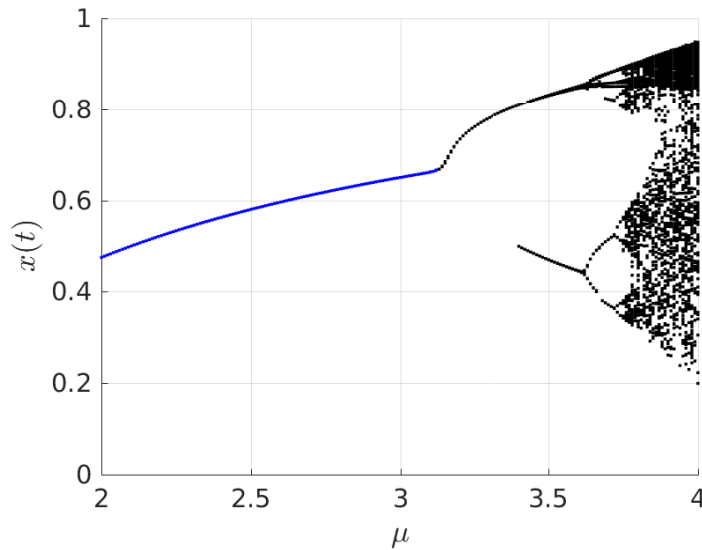


Figura 14. Diagrama de Feigenbaum del sistema retroalimentado (80)-(81).

Sistema de segundo orden

Considere el oscilador de van der Pol modificado (Roup y Bernstein, 2001; Orlov, 2008)

$$\ddot{z} + \delta \left[z^2 + \frac{1}{\sigma^2} \dot{z}^2 - \rho^2 \right] \dot{z} + \sigma^2 z = \delta u, \quad (84)$$

donde $\sigma, \rho, \delta \in \mathbb{R}$ y δu es la entrada de control. Considere el siguiente cambio de coordenadas $x = \frac{\xi}{\rho} z$, donde $\xi > 0$. Entonces el oscilador de van der Pol es descrito por

$$\xi^2 \ddot{x} + \delta \rho^2 \left[x^2 + \frac{1}{\sigma^2} \dot{x}^2 - \xi^2 \right] \dot{x} + \sigma^2 \xi^2 x = u, \quad (85)$$

con $u = (\xi^3/\rho) \delta u$. De esta forma, con el parámetro ξ se podrá modificar la amplitud de las órbitas periódicas del oscilador de van der Pol. Si $\xi \ll 1$, las órbitas periódicas serán lo suficientemente pequeñas de tal manera que domine la dinámica inducida por la entrada de control. Explotando este hecho, se propone que u sea como el propuesto en la ecuación (81); es decir,

$$u = -K [x - \mu x_\tau (1 - x_\tau)] \quad (86)$$

Por conveniencia se representa en ecuaciones de estado al sistema (85) - (86)

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (87)$$

$$\xi^2 \dot{x}_2 = -\xi^2 \sigma^2 x_1 - \delta \rho^2 \left(x_1^2 + \frac{1}{\sigma^2} x_2^2 - \xi^2 \right) x_2 - K [x_1 - \mu x_{1\tau} (1 - x_{1\tau})] \quad (88)$$

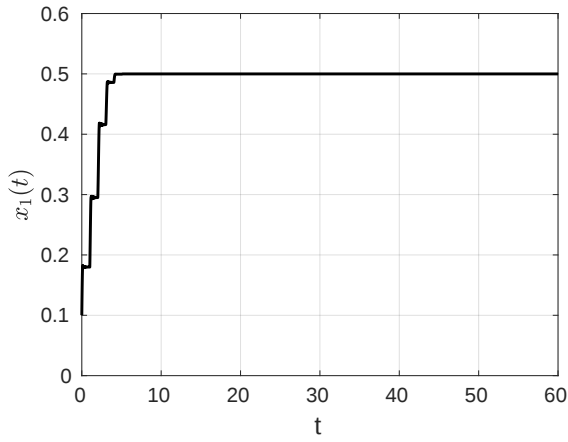
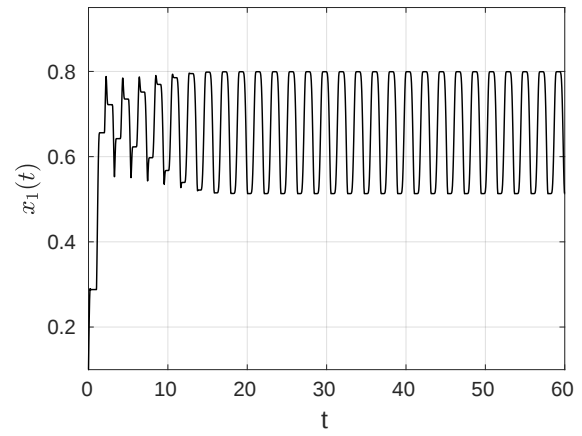
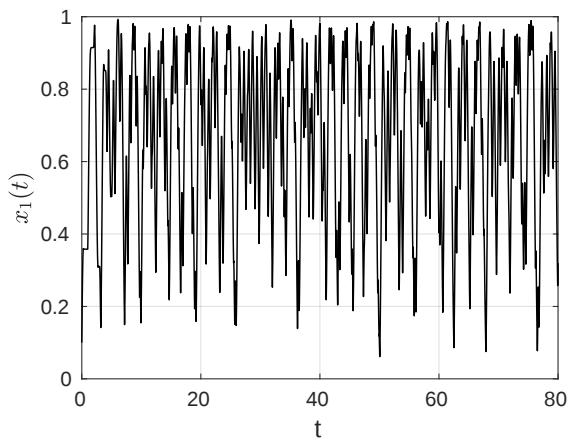
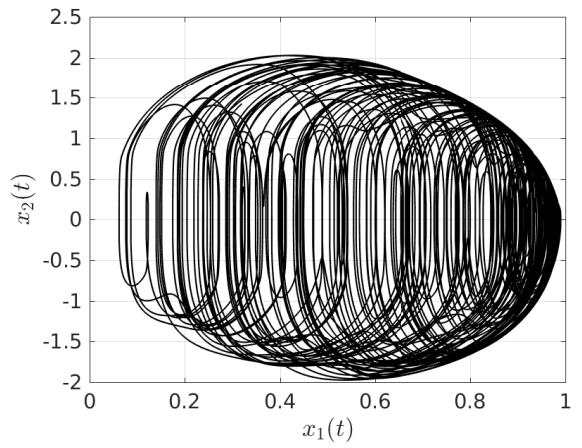
Considere que $K = 1/\xi$ y que $\xi \rightarrow 0$, se tiene que el sistema (87) - (88) se reduce a

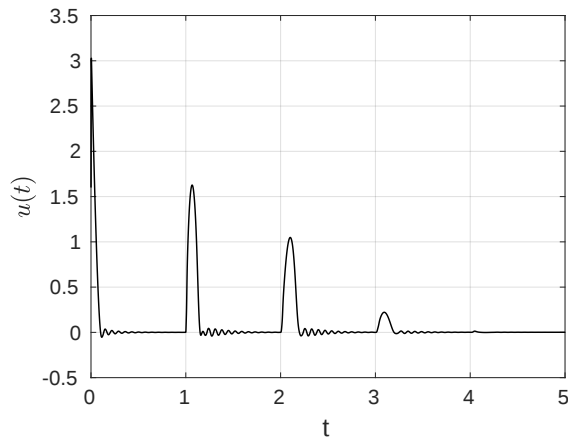
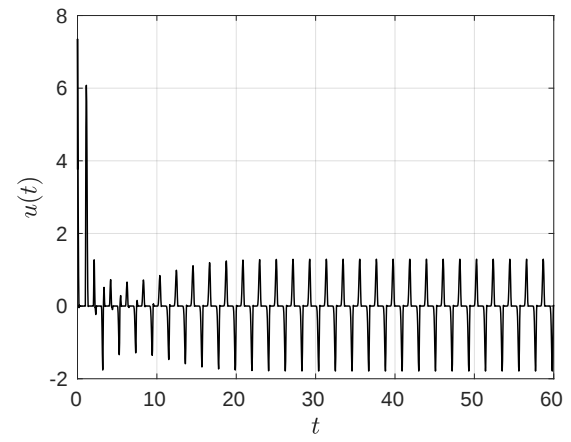
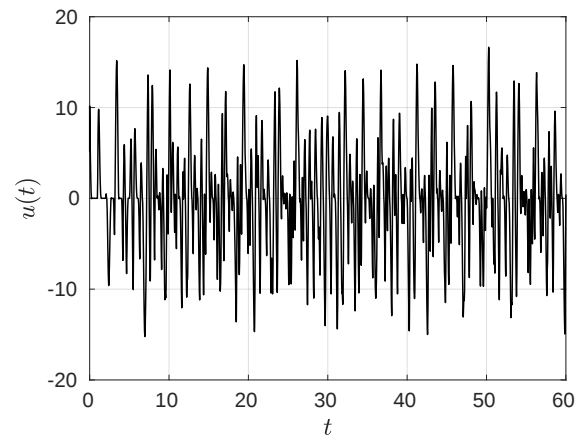
$$x_1 = \mu x_{1\tau} (1 - x_{1\tau}). \quad (89)$$

Con base en el resultado obtenido en el ejemplo anterior, se espera que este sistema presente dinámicas cualitativamente iguales a las del mapa logístico.

En la Figura 15 se muestran distintas dinámicas del sistema (87) - (88) para algunos valores de μ , con $\sigma = \delta = \rho = 1$ y $K = 20$ ($\xi = 1/K$). En las figuras 15 (a)-(c) se presentan trayectorias del estado x_1 , mientras que en la Figura 15(d) se muestra el diagrama de estado cuando $\mu = 3.98$. La forma de la señal de control para cada una de las respuestas del sistema (87) - (88) son mostradas en la Figura 16. Como en el sistema (80)-(81) se tienen algunas amplitudes más altas al resto de la señal de control.

Dos diagramas de Feigenbaum correspondientes al sistema (87) y (88) se muestran en la Figura 17. En la Figura 17(a), se presenta el diagrama de Feigenbaum con respecto al parámetro μ , con $K = 20$. En este diagrama se muestra tanto la ubicación

(a) Para $\mu = 2$.(b) Para $\mu = 3.2$.(c) Para $\mu = 3.98$.(d) $x_1(t)$ vs $x_2(t)$ para $\mu = 3.98$.**Figura 15.** Distintas respuestas del sistema (87) y (88) para varios valores de μ .

(a) Para $\mu = 2$.(b) Para $\mu = 3.2$.(c) Para $\mu = 3.98$.**Figura 16.** Señal de control del sistema (87) y (88) para varios valores de μ .

de los puntos de equilibrio estables como las órbitas periódicas y caóticas. Por ejemplo, cuando $\mu \in [2, 2.97]$ se tiene puntos de equilibrio estables, línea azul, y conforme μ crece, hasta el valor de 4, van apareciendo las órbitas periódicas y caóticas. Este diagrama también presenta una similitud al del mapa logístico. También, en la Figura 17(b), se puede ver el diagrama de Feigenbaum cuando se varía el parámetro K en el intervalo $[1, 5]$, con $\mu = 4$. En este diagrama se puede observar que cuando $K = 1$ se tiene una órbita periódica y que conforme se aumenta el valor de este parámetro van apareciendo órbitas de diferentes períodos hasta llegar a tener órbitas caóticas. En el diagrama no se presentan las órbitas cuando $K \in (5, 20]$, pero continúan siendo caóticas.

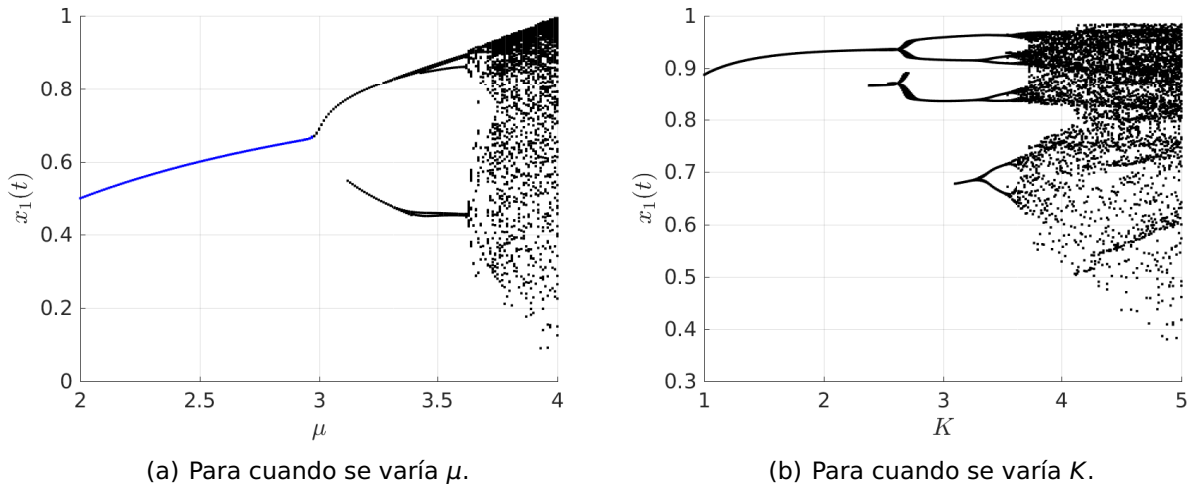
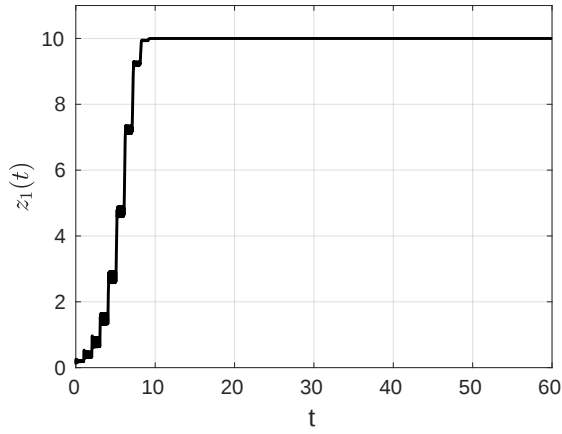
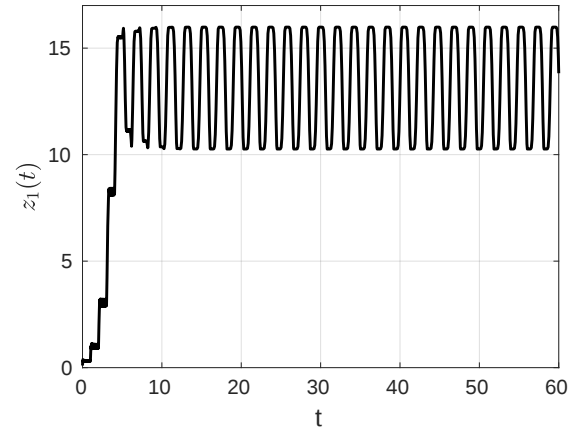
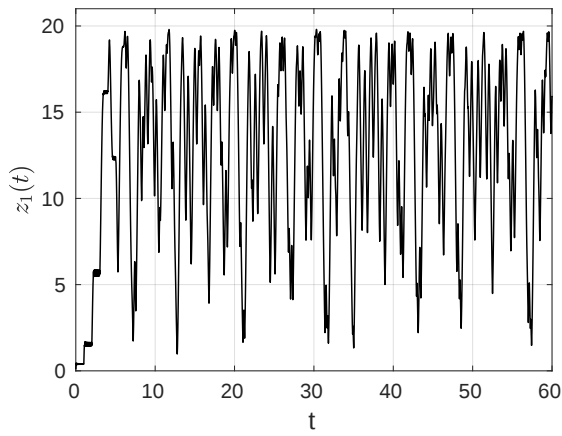
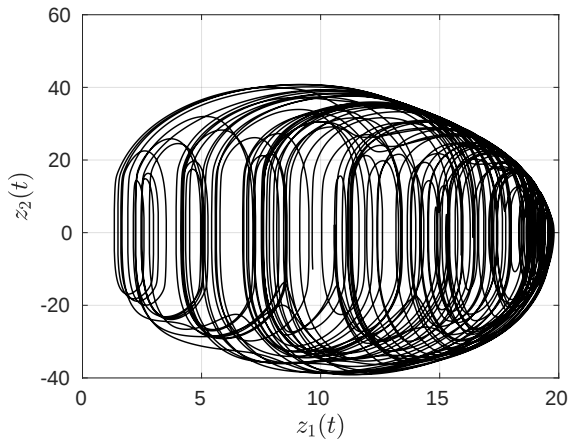


Figura 17. Diagramas de Feigenbaum del sistema (87) y (88).

En la Figura 18 se presentan las dinámicas del sistema al volver a expresar al sistema en su variable z , con los mismos valores paramétricos antes mencionados. Las ecuaciones de estado que modelan estas dinámicas son

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad (90)$$

$$\dot{z}_2 = -\sigma^2 z_1 - \delta \left(z_1^2 + \frac{1}{\sigma^2} z_2^2 - \rho^2 \right) z_2 - \frac{K}{\xi^2} \left[z_1 - \mu z_{1\tau} \left(1 - \frac{\xi}{\rho} z_{1\tau} \right) \right]. \quad (91)$$

(a) Para $\mu = 2$.(b) Para $\mu = 3.2$.(c) Para $\mu = 3.98$.(d) $x_1(t)$ vs $x_2(t)$ para $\mu = 3.98$.**Figura 18.** Respuestas del sistema (90) y (91) para distintos valores de μ .

Sistema de tercer orden (Alvarez, 2000)

Ahora considere el sistema de Lorenz

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \sigma(-z_1 + z_2), \\ \dot{z}_2 &= \rho z_1 - z_2 - z_1 z_3 + u, \\ \dot{z}_3 &= -\beta z_3 + z_1 z_2,\end{aligned}\tag{92}$$

donde $\sigma, \beta, \rho \in \mathbb{R}$ y u es la entrada de control, la cual tiene la siguiente forma

$$u = -\left(\sigma + \rho + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\varepsilon^2 \sigma} - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\varepsilon}\right) z_1 + \left(1 + \sigma - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\varepsilon}\right) z_2 + z_1 z_3 + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\varepsilon^2 \sigma} v, \tag{93}$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \varepsilon \ll 1 \in \mathbb{R}$ positivos, $v = \mu z_{1\tau}(1 - z_{1\tau})$ para $\mu \in [0, 4]$ y $\tau = 1$. Cuando $u = 0$ y $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y $\rho = 28$, el sistema de Lorenz (92) presenta un comportamiento caótico, como se muestra en la Figura 19.

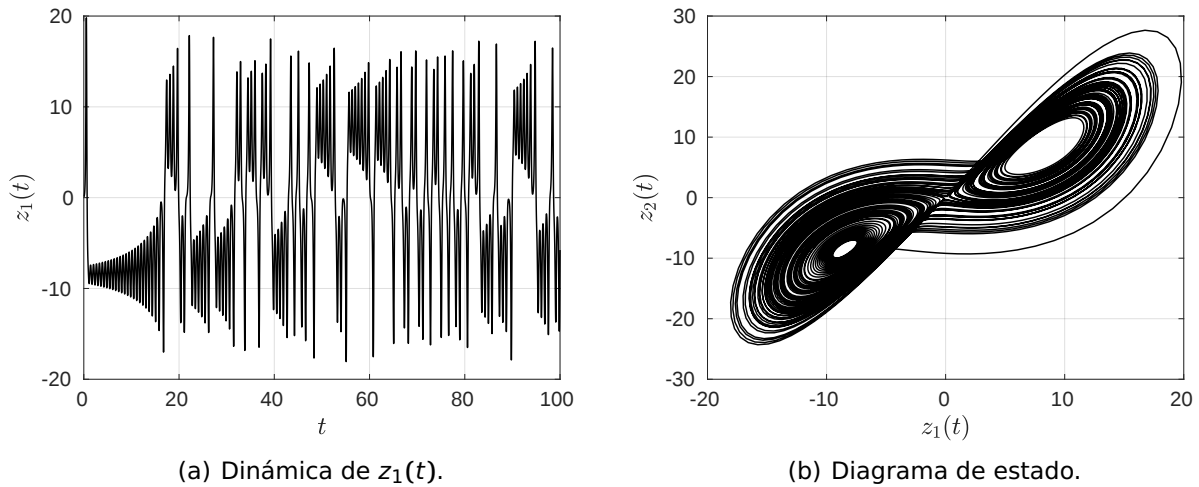


Figura 19. Dinámica caótica del sistema de Lorenz (92).

Con el control (93) se realizan dos acciones sobre el sistema (77). La primera de ellas es producir una dinámica rápida. Esto se logra utilizando un control de linealización por retroalimentación de estados, de tal manera que el sistema pueda ser llevado a la estructura de perturbaciones singulares. La segunda acción, consiste en introducir una función no lineal que dependa del estado retardado, tal que el sistema en lazo cerrado despliegue las dinámicas de la función no lineal. Como se mencionó en el párrafo anterior, esta función es el mapa logístico.

Aplicando el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}x_1 &= z_1, \\x_2 &= \left(1 - \frac{\varepsilon\sigma}{\lambda_1}\right)z_1 + \frac{\varepsilon\sigma}{\lambda_1}z_2, \\ \eta &= z_3,\end{aligned}$$

en el sistema retroalimentado (92)-(93), éste puede expresarse como

$$\begin{aligned}\varepsilon\dot{x}_1 &= -\lambda_1(x_1 - x_2), \\ \varepsilon\dot{x}_2 &= -\lambda_1(x_1 - x_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)(x_1 - x_2) - \lambda_2x_1 + \lambda_2v, \\ \dot{\eta} &= -\beta\eta + \left(1 - \frac{\lambda_1}{\varepsilon\sigma}\right)x_1^2 + \frac{\lambda_1}{\varepsilon\sigma}x_1x_2.\end{aligned}\tag{94}$$

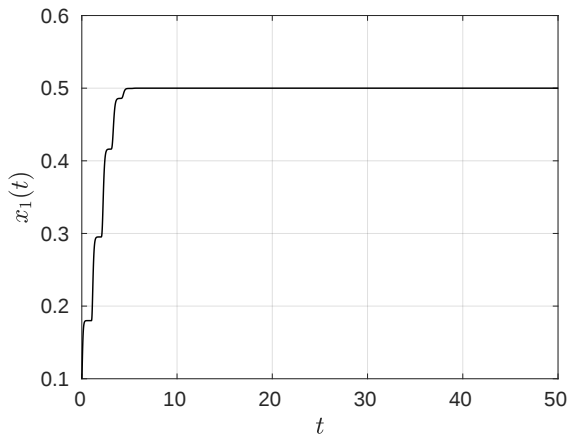
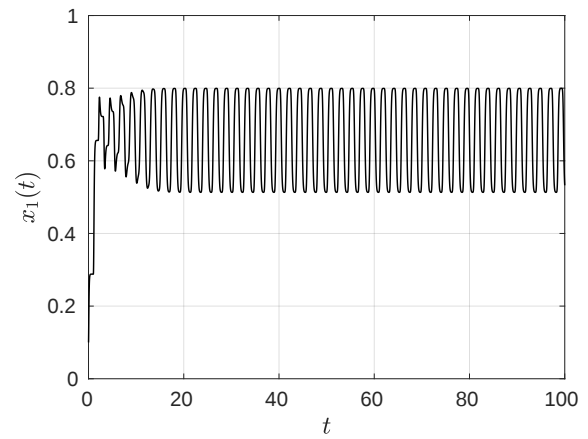
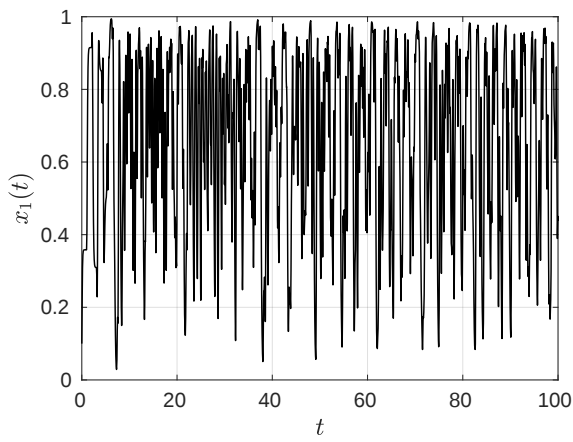
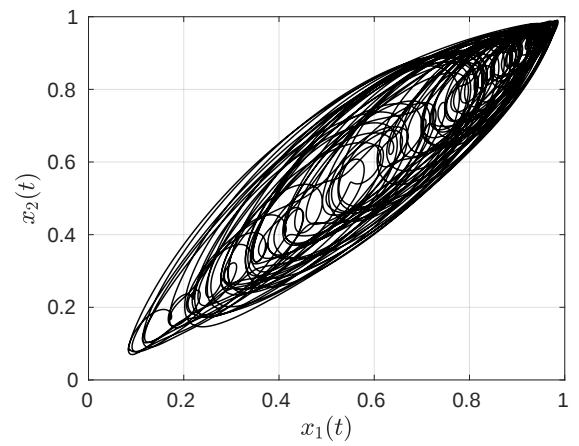
Si $\varepsilon \rightarrow 0$, entonces

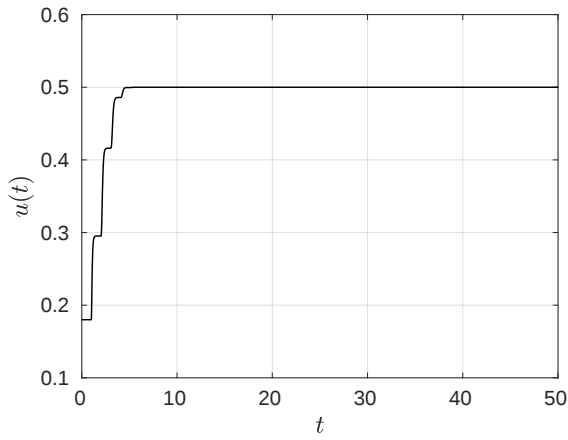
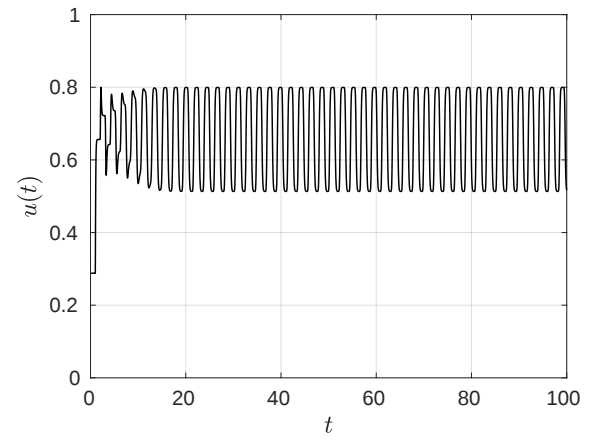
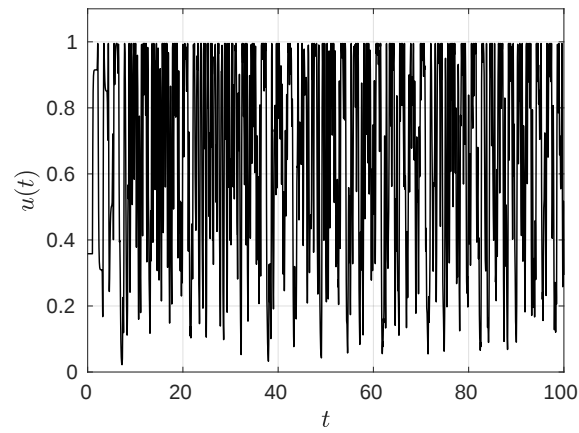
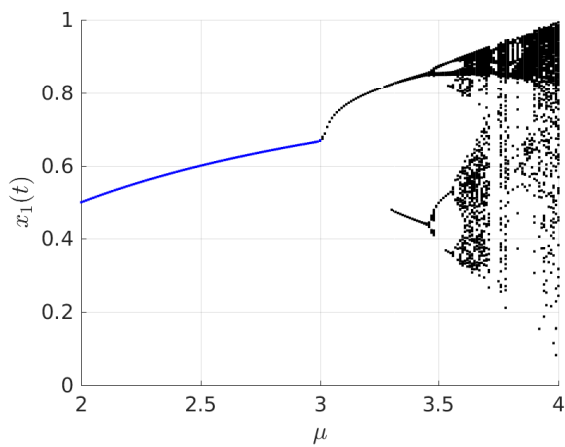
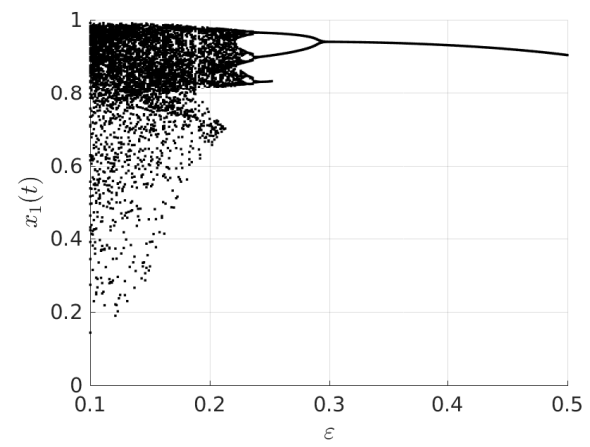
$$x_1 = \mu x_{1\tau}(1 - x_{1\tau}),$$

y η estará acotada si x_1 y x_2 también lo están. En la Figura 20 se muestran distintas dinámicas del sistema (94) para diferentes valores de μ , con $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\varepsilon = 0.05$ y σ , ρ , β toman los valores antes mencionados. En la Figura 21 se muestran las correspondientes señales de control para cada una de estas dinámicas.

Por último, en la Figura 22 se presentan dos diagramas de Feigenbaum correspondientes al sistema (94). En la Figura 22(a), se ilustra la dinámica del sistema para cuando se varía el parámetro μ en el intervalo $[2, 4]$, con $\varepsilon = 0.05$. En este diagrama se muestra la ubicación del punto de equilibrio estable, línea azul, para cuando $\mu \in [2, 3]$. En el caso para $\mu > 3$, se tienen órbitas periódicas y caóticas. Como en el caso de los diagramas de las figuras 14 y 17(a), éste también presenta cierta similitud con el diagrama del mapa logístico. En la Figura 22(b) se presenta el diagrama de Feigenbaum con respecto al parámetro ε , con $\mu = 4$. Aquí pueden observarse órbitas periódicas y caóticas.

Como ilustra este ejemplo, aun cuando el objetivo de control es inducir dinámicas caóticas en sistemas que no las presentan, se puede ver que es posible inducir otras

(a) Para $\mu = 2$.(b) Para $\mu = 3.2$.(c) Para $\mu = 3.98$.(d) x_1 vs x_2 para $\mu = 3.98$.**Figura 20.** Respuesta sistema (94) para diferentes valores de μ .

(a) Para $\mu = 2$.(b) Para $\mu = 3.2$.(c) Para $\mu = 3.98$.**Figura 21.** Señal de control para el sistema (94) con diferentes valores de μ .(a) Para cuando se varía μ .(b) Para cuando se varía ϵ .**Figura 22.** Diagramas de Feigenbaum del sistema (94).

dinámicas a sistemas caóticos e inclusive introducir dinámicas caóticas distintas a las propias del sistema.

4.3. Conclusiones

En este capítulo se propuso utilizar el método de perturbaciones singulares para inducir oscilaciones caóticas en sistemas dinámicos que no las presentan. Se mostró que realizando un cambio de variable y aplicando un control, es posible llevar a un sistema a la estructura de perturbaciones singulares; y así, al acoplarlo a una función no lineal, con la misma estructura de un mapa discreto, que dependa del estado retardado, el sistema retroalimentado presenta dinámicas similares a las que exhibe el mapa. Por lo tanto, el sistema retroalimentado presenta órbitas periódicas o caóticas dependiendo del mapa discreto seleccionado para acoplar al sistema dinámico. Esto se ilustra mediante los ejemplos. Al aplicar este procedimiento a los sistemas, sin importar el orden, estos fueron capaces de producir dinámicas similares a las del mapa logístico, como lo muestran las trayectorias y los diagramas de Feigenbaum de los sistemas. Por lo que, con este procedimiento se pueden inducir órbitas caóticas en sistemas que no las presentan e inclusive, en caso que el sistema sea caótico, es posible inducir órbitas caóticas no propias del sistema original.

Capítulo 5. Generación de oscilaciones en sistemas de primer orden

En este capítulo se propone una técnica para generar, de manera sistemática, oscilaciones periódicas y no periódicas en sistemas continuos de primer orden, por medio de una función no lineal del estado retardado por un tiempo τ . Dado un sistema pasivo de primer orden, esta técnica consiste en diseñar una señal retroalimentada definida por una función no lineal del estado retardado, para después ajustar su ganancia de tal manera que se asegure la inestabilidad de todos los puntos de equilibrio del sistema en lazo cerrado. La propiedad principal de este procedimiento es que se puede inducir en el sistema en lazo cerrado un comportamiento dinámico similar al comportamiento desplegado por el mapa definido por la función no lineal del estado retardado. Si el mapa muestra comportamiento caótico, entonces el sistema en lazo cerrado también puede exhibir esta dinámica variando algún parámetro.

En la primera sección de este capítulo, se describe la clase de sistemas de primer orden considerada en esta tesis y se propone la forma general de la señal de control. En la siguiente sección, se examinan condiciones de existencia y estabilidad asintótica local de los puntos de equilibrio del sistema en lazo cerrado, en función de un parámetro incluido en el control. Dado que estas condiciones de estabilidad asintótica son necesarias y suficientes, el no cumplimiento de alguna de dichas condiciones implica la inestabilidad del equilibrio del sistema original. Esto asegura que el sistema en lazo cerrado no converge a ninguno de sus equilibrios. Posteriormente, mediante el concepto de semipasividad, se establecen condiciones bajo las cuales se asegura que las trayectorias del sistema en lazo cerrado permanezcan acotadas, produciendo órbitas periódicas o no periódicas. Finalmente, se incluyen varios ejemplos que ilustran la efectividad del método propuesto. Uno de estos ejemplos corresponde a un circuito electrónico que, después de aplicar esta técnica, despliega un comportamiento similar al mapa logístico.

5.1. Sistema controlado de primer orden

La clase de sistemas de primer orden analizada en esta tesis está descrita por la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x) + u, \quad (95)$$

donde $x \in \mathbb{R}$ es el estado, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{C}^1$ y $f(0) = 0$. Suponga que la señal de control está dada por

$$u = -K[x(t) - \varphi(x(t - \tau), \theta)], \quad (96)$$

donde $\varphi : \mathcal{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R}$ es una función no lineal, $\mathcal{R}$ es un subintervalo de $\mathbb{R}$, θ es un parámetro cuyo valor determina el comportamiento de la función no lineal, $K > 0$ es la ganancia y $\tau > 0$ es el tiempo de retardo. Excepto en el ejemplo del circuito electrónico incluido en este capítulo, se considera que el retardo es unitario, es decir, $\tau = 1$.

El sistema controlado, o en lazo cerrado, queda entonces descrito por la ecuación

$$\dot{x} = f(x) - K[x - \varphi(x_\tau, \theta)] \quad (97)$$

donde $x_\tau(t) = x(t - \tau)$.

5.2. Existencia y estabilidad de puntos de equilibrio

Como se mencionó anteriormente, la primera etapa del método propuesto consiste en asegurar la inestabilidad de los puntos de equilibrio del sistema en lazo cerrado, dado por la ecuación (97). En esta sección se analiza primero la existencia de puntos de equilibrio de (97). Además, partiendo de las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad para sistemas lineales de primer orden y con retardo, descritas en el Capítulo 2, se obtienen a su vez las condiciones para asegurar la estabilidad de todos los puntos de equilibrio de este sistema en función de la ganancia K que interviene en la señal de control.

Considere el sistema (97) y defina $\varepsilon = 1/K$, por lo que adquiere la forma siguiente,

$$\varepsilon \dot{x} = \varepsilon f(x) - [x - \varphi(x_\tau, \theta)]. \quad (98)$$

Los puntos de equilibrio de este sistema son los valores del estado $x \in \mathbb{R}$, que denotaremos por $\bar{x}$, que satisfacen $0 = \varepsilon f(\bar{x}) - [\bar{x} - \varphi(\bar{x}, \theta)]$, de donde

$$\bar{x} = \varphi(\bar{x}, \theta) + \varepsilon f(\bar{x}). \quad (99)$$

Note que si $K \rightarrow \infty$ entonces $\varepsilon \rightarrow 0$ y se satisface $\bar{x} = \varphi(\bar{x}, \theta)$. Esto significa que los

puntos de equilibrio del sistema controlado (97) corresponden a los puntos fijos del mapeo $\varphi(x, \theta)$. De hecho, dado que la función f es $\mathcal{C}^1$, es posible mostrar que los equilibrios del sistema controlado (97) convergen de manera uniforme a los puntos fijos de este mapeo cuando el parámetro ε converge a cero, es decir, cuando $K \rightarrow \infty$.

Proposición 5.1 *Supóngase que la función f del sistema (97) es diferenciable. Supóngase también que para un valor dado del parámetro θ , $\bar{x}_0$ es un punto fijo del mapeo $\varphi(x, \theta)$ y la derivada con respecto a x , $\varphi'(x, \theta)$, existe en $x = \bar{x}_0$. Si $\varphi'(\bar{x}_0, \theta) \neq 1$ entonces existe un punto de equilibrio, denotado $\bar{x}_\varepsilon$, del sistema en lazo cerrado (97), arbitrariamente cercano al punto fijo $\bar{x}_0$ del mapeo $\varphi(\cdot)$, para un valor del parámetro K suficientemente grande.*

Prueba. Nótese, de la ecuación (99), que un punto de equilibrio del sistema (97) debe satisfacer la siguiente ecuación,

$$0 = \varepsilon f(\bar{x}_\varepsilon) - \bar{x}_\varepsilon + \varphi(\bar{x}_\varepsilon, \theta) := \psi(\bar{x}_\varepsilon, \varepsilon, \theta). \quad (100)$$

Es decir, dados ε y θ , los puntos de equilibrio de (97) son las raíces de $\psi(\cdot, \varepsilon, \theta)$. Puesto que $\bar{x}_0$ es un punto fijo de φ , entonces $\psi(\bar{x}_0, 0, \theta) = 0$. Dado que φ' está definida en $\bar{x}_0$, existe una vecindad V de $\bar{x}_0$ donde φ es diferenciable. También, dado que $\varphi'(\bar{x}_0, \theta) \neq 1$, entonces $\partial\psi/\partial\bar{x}_\varepsilon(\bar{x}_0, 0, \theta) \neq 0$. En consecuencia, el teorema estándar de la función implícita establece la existencia de una función $g : U \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$, donde U es una vecindad del origen, con $U \subset V$, tal que $g(0) = \bar{x}_0$ y $\psi(g(\varepsilon), \varepsilon, \theta) = 0$ para toda $\varepsilon \in U$, por lo que $g(\varepsilon)$ es un punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado (97). De hecho, la convergencia del equilibrio $\bar{x}_\varepsilon$ de este último sistema al punto fijo del mapeo φ , cuando ε converge a cero (o sea, cuando K tiende a infinito) es uniforme, dada la suavidad de la función g . ■

Mostrada la existencia de puntos de equilibrio del sistema en lazo cerrado, la aplicación del teorema de Hale (Teorema 2.7) conduce al resultado siguiente.

Lema 5.1 . *Sea $\bar{x}$ un punto de equilibrio del sistema (95)-(96). Suponga que la función f es diferenciable y que la derivada de $\varphi(x, \theta)$ está definida en $(\bar{x}, \theta)$. Entonces, el punto de equilibrio $\bar{x}$ será local y asintóticamente estable si, y sólo si, se satisfacen las siguientes tres condiciones*

$$(LS1) \ K > f'(\bar{x}) - 1,$$

$$(LS2) \ K[1 - \phi'(\bar{x}, \theta)] > f'(\bar{x}), \text{ y}$$

$$(LS3) \ (a) \text{ Si } K \neq f'(\bar{x}), \text{ existe } \omega \in (0, \pi), \omega \neq \pi/2, \text{ que satisface } \omega + K\phi'(\bar{x}, \theta)\text{sen}(\omega) > 0,$$

o

$$(b) \text{ Si } K = f'(\bar{x}, \theta) \text{ entonces } \pi/2 + K\phi'(\bar{x}, \theta) > 0.$$

Prueba. Dado que la función f es diferenciable y la derivada de ϕ está definida en $\bar{x}$, la aproximación lineal del sistema en lazo cerrado alrededor de este equilibrio, considerando el cambio de variable $v = x - \bar{x}$, tiene la forma

$$\dot{v} = av + bv_d, \quad (101)$$

donde $a = f'(\bar{x}) - K$, $b = K\phi'(\bar{x}, \theta)$ y $v_d(t) = v(t-1)$. La aplicación del teorema de Hale descrito en el Capítulo 2, que establece condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de equilibrios de sistema como (101) conduce directamente a las condiciones (LS1-3) del lema. ■

Nota 5.1 . Observe que, dada la necesidad y suficiencia del teorema de Hale para la estabilidad de un punto de equilibrio, basta que al menos una de las condiciones (LS1-3) no se satisfaga para asegurar la inestabilidad del mismo.

Ejemplo 5.1 . Considere el sistema lineal $f(x) = -\alpha x$ y el mapa logístico $\phi(x, \theta) = \theta x(1 - x)$,

$$\dot{x} = f(x) - K[x - \phi(x_\tau, \theta)] = -\alpha x - K[x - \theta x_\tau(1 - x_\tau)], \quad (102)$$

donde $\alpha > 0$, $K > 0$ y $\theta > 1$. Este sistema tiene dos puntos de equilibrio, $\bar{x}_1 = 0$ y $\bar{x}_2 = 1 - (1 + \alpha/K)/\theta$. Las condiciones para la estabilidad local son

(1) Para $\bar{x}_1$: (a) $K > -\alpha - 1$, (b) $K < \alpha/(\theta - 1)$, y (c) si $K + \alpha = 0$ entonces $K\theta > -\pi/2$, o $K\theta > -\omega/\text{sen}(\omega)$ si $K + \alpha \neq 0$ para algún $\omega \in (0, \pi)$, $\omega \neq \pi/2$.

(2) Para $\bar{x}_2$: (a) $K > -\alpha - 1$, (b) $K > \alpha/(\theta - 1)$, y (c) si $K + \alpha = 0$ entonces $K(2 - \theta) > -2\alpha - \pi/2$, o $K(2 - \theta) > -\omega/\text{sen}(\omega) - 2\alpha$ si $K + \alpha \neq 0$ para algún $\omega \in (0, \pi)$, $\omega \neq \pi/2$.

□

5.3. Condición de semipasividad

En esta sección, utilizando el concepto de semipasividad (Capítulo 2), se determinan condiciones bajo las cuales las trayectorias del sistema retroalimentado (95)-(96) permanecerán acotadas, teniendo por resultado que estas trayectorias sean periódicas, no periódicas o caóticas.

Considere una conexión en retroalimentación negativa de un sistema pasivo Σ_1 y de un sistema semipasivo Σ_2 en el lazo de retroalimentación, ver Figura 23. Suponga que u_i , x_i e y_i son la entrada, estado y salida del sistema Σ_i , respectivamente $i = 1, 2$. Ya que Σ_1 es pasivo, existe una función de almacenamiento $S_1(x_1)$ y una función $H_1(x_1) \geq 0$ tal que $u_1^T y_1 \geq \dot{S}_1(x_1) + H_1(x_1)$, y debido a que Σ_2 es semipasivo, existe una función de almacenamiento $S_2(x_2)$, un número positivo r y una función $H_2(x_2)$ que es no negativa para $\|x_2\| \geq r$, tal que $u_2^T y_2 \geq \dot{S}_2(x_2) + H_2(x_2)$ para $\|x_2\| \geq r$. Si u es la entrada del sistema interconectado e y la salida; entonces $u = u_1 + y_2$, $u_2 = y_1$ e $y = y_1$. Por lo tanto

$$u^T y \geq \dot{S}_1 + H_1(x_1) + \dot{S}_2 + H_2(x_2) = \dot{S} + H(x), \quad (103)$$

donde $x = (x_1^T, x_2^T)^T$, $S = S_1 + S_2$, $H(x) = H_1(x_1) + H_2(x_2)$ y $H(x) \geq 0$ si $\|x\| \geq \delta$ para alguna $0 < \delta \leq r$.

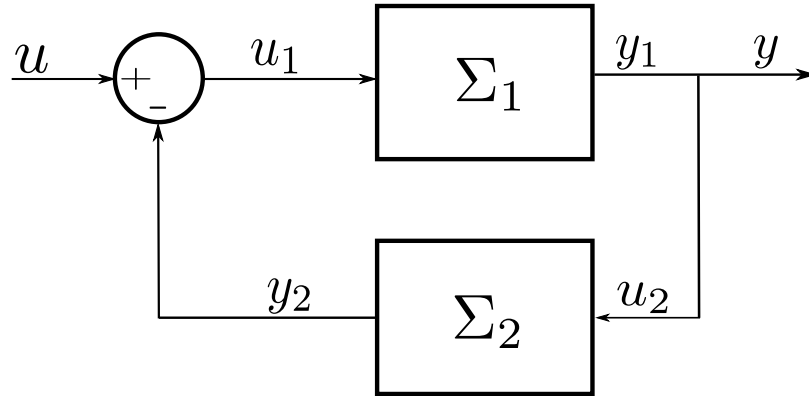


Figura 23. Conexión en retroalimentación negativa.

En resumen, una conexión retroalimentada de un sistema pasivo con uno semipasivo es semipasivo. Observe que, las trayectorias están acotadas ya que la conexión es semipasiva. Con esto se puede expresar el siguiente resultado.

Teorema 5.1 . Considere el sistema de primer orden

$$\Sigma_1 : \dot{x} = f(x) + u, \quad y = x, \quad (104)$$

donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{C}^1$ y $f(0) = 0$, con la señal de entrada

$$u(x) = -K[x - \varphi(x(t - \tau), \theta)], \quad (105)$$

con $K > 0$ y suponga que se satisfacen las siguientes condiciones:

(AS1) Para cualquier $x \neq 0$, $xf(x) < 0$.

(AS2) Para un valor de θ dado, el mapa $\varphi(x, \theta)$ está acotado, $\varphi(0, \theta) = 0$, y satisface que

(a) Su derivada $\varphi'(\cdot, \theta)$ está definida en cualquier punto de equilibrio $\bar{x}$ del sistema en lazo cerrado (104)-(105) y $|\varphi'(\bar{x}, \theta)| > 1$;

(b) Existen dos intervalos, $J = (a, d)$ e $I = (b, c)$, con $a \leq b < 0 < c \leq d$ tal que $x\varphi(x, \theta) > x^2$ para $x \in I \setminus \{0\}$, $x\varphi(x, \theta) \leq x^2$ para $x \notin I$, y $\varphi(x, \theta) = 0$ para $x \notin J$.

(AS3) En cualquier punto de equilibrio $\bar{x}$ del sistema en lazo cerrado (104)-(105), se satisface la siguiente desigualdad,

(a) Si $\varphi'(\bar{x}, \theta) > 1$, entonces

$$K > \frac{f'(\bar{x})}{1 - \varphi'(\bar{x}, \theta)}; \quad (106)$$

(b) Si $\varphi'(\bar{x}, \theta) < -1$, entonces existe una $\omega \in (0, \pi)$ tal que

$$K > \frac{-\omega}{\varphi'(\bar{x}, \theta)\sin(\omega)}. \quad (107)$$

Entonces, existe un número positivo $K_{\min}$ tal que el sistema retroalimentado (104)-(105) exhibe soluciones oscilatorias acotadas para todo $K > K_{\min}$. Dependiendo de los valores de la ganancia K y del comportamiento dinámico definido por el mapa $\varphi(z, \theta)$, estas soluciones pueden ser periódicas o no periódicas.

Prueba. Primero se probará la inestabilidad de los puntos de equilibrio del sistema en lazo cerrado (104)-(105). Si $\varphi'(\bar{x}, \theta) > 1$, de la condición **(AS3a)** se observa que

la desigualdad (106) es lo opuesto a la condición **(LS2)** del Lema 5.1 (observe que $1 - \varphi'(\bar{x}, \theta) < 0$), por lo que el equilibrio $\bar{x}$ será inestable. Si $\varphi'(\bar{x}, \theta) < -1$, observe que (107) de la condición **(AS3b)** es lo opuesto de la desigualdad dada en la condición **(LS3)** del Lema 5.1. Por lo tanto, las condiciones **(AS3a,b)** garantizan la inestabilidad de los puntos de equilibrio del sistema en lazo cerrado, evitando que el estado x converja a una constante.

Ahora defina al sistema

$$\Sigma_2 : v(y) = K[y - \varphi(y_\tau, \theta)] \quad (108)$$

el cual tiene como entrada a y y como salida a v . El sistema en lazo cerrado (104)-(105) está compuesto por la conexión retroalimentada negativa ($u = -v$) de los sistemas Σ_1 y Σ_2 . Por lo tanto, esta conexión será semipasiva si uno es pasivo y el otro es semipasivo.

Considere ahora el sistema Σ_1 (104) y la función de almacenamiento $S(x) = x^2/2$. Entonces, $uy = (\dot{x} - f(x))x = \dot{S} - xf(x) = \dot{S} + H(x)$, donde $H(x) = -xf(x) > 0$ para $x \neq 0$ por la condición **(AS1)**. Entonces, de la Definición 2.5 se concluye que el sistema Σ_1 es estrictamente pasivo.

Ahora se probará la semipasividad de Σ_2 . Para esto, considere el sistema

$$\hat{v}(y) = K[y - \varphi(y, \theta)]. \quad (109)$$

Por la condición **(AS2b)** se tiene

$$y\hat{v} = Ky[y - \varphi(y, \theta)] \begin{cases} < 0, & \forall y \in I \setminus \{0\}; \\ > 0, & \forall y \notin J. \end{cases} \quad (110)$$

Observe que $\varphi(y_\tau) = \varphi(y + \delta y)$ es un desplazamiento del mapa φ a lo largo del eje horizontal. También, observe que $\varphi(y, \theta) = 0$ para $y \notin J$ (condición **(AS2b)**). De esta manera, para cualquier $y_\tau = y + \delta y \notin J$ se tiene que $yv = Ky^2 > 0$, llevando eventualmente a $y \notin J$, asegurando la semipasividad del bloque. Ya que y e y_τ no necesariamente están fuera de J al mismo tiempo, el intervalo donde $Ky[y - \varphi(y_\tau, \theta)] > 0$ puede ser

variante en el tiempo, pero la desigualdad

$$y^v = Ky[y - \varphi(y_\tau, \theta)] > 0, \quad (111)$$

se satisface para y e y_τ fuera de algún intervalo $\tilde{J}$, y el sistema (108) será semipasivo.

En consecuencia, ya que el sistema en lazo cerrado no puede converger a los puntos de equilibrio (porque son inestables) y las trayectorias del sistema están acotadas (debido a la condición de semipasividad), entonces deberán ser oscilatorias.

Para conocer el valor de K mínimo que asegure lo expresado en el párrafo anterior, se hace el siguiente análisis. Si $\varphi'(\bar{x}) > 1$, entonces $1 - \varphi'(\bar{x}, \theta) < 0$ y (106) tiene la forma $K > f'(\bar{x})/[1 - \varphi'(\bar{x}, \theta)] = K_1$. En este caso, si K_1 es positivo, se elige $K > K_1$, de lo contrario se toma a $K > 0$. Por otro lado, observe que, si $\varphi'(\bar{x}) < -1$, (107) tiene la forma $K > -\omega/[\varphi'(\bar{x})\text{sen}(\omega)] = K_2 > 0$. Suponga que hay m puntos de equilibrio del sistema en lazo cerrado (104)-(105). Por lo tanto, para cada punto de equilibrio $\bar{x}_i$, $i = 1, \dots, m$, habrá un valor mínimo de K , denotado por K_i , que hace inestable a este punto de equilibrio. En consecuencia, para que todos los puntos de equilibrio sean inestables, se elige

$$K > K_{\min} = \max \{K_i, i = 1, \dots, m\}. \quad (112)$$

■

Nota 5.2 . Observe que cuando $x_\tau \notin J$, entonces $\varphi(x_\tau, \theta) = 0$ y el sistema en lazo cerrado queda como $\dot{x} = f(x) - Kx$. Ya que $\dot{x} = f(x)$ es estrictamente pasivo y $K > 0$, el sistema es atraído hacia $x = 0$ mientras $x_\tau \notin J$; sin embargo, no converge al origen porque éste es inestable. Si en cierto momento el estado está cerca del origen, éste será repelido, eventualmente alcanzando la región donde será atraído de nuevo. Este cambio de energía es el que genera el comportamiento oscilatorio del sistema en lazo cerrado.

5.4. Ejemplos

En esta sección, se ilustra la técnica propuesta mediante algunos ejemplos numéricos que muestran la relativa facilidad de generar oscilaciones en sistemas de primer orden. En particular, se considera que el sistema en lazo abierto es lineal, donde

$f(x) = -x$, y el mapa ϕ está descrito por el mapeo logístico, la función seno y la función triangular, definidos en el intervalo $J = (a, d)$, de acuerdo al Teorema 5.1, con un valor cero fuera de este intervalo. Por lo tanto, el sistema en lazo cerrado tiene la forma

$$\dot{x} = -x - K[x - \phi(x_\tau)], \quad y = x, \quad (113)$$

donde $K > 0$ y $x_\tau(t) = x(t - \tau)$. Observe que $xf(x) = -x^2 < 0$ para $x \neq 0$; en consecuencia, se satisface la condición **(AS1)** del Teorema 5.1.

5.4.1. Mapa logístico

Para este ejemplo, el mapa logístico es modelado por

$$\phi(x_\tau) = \begin{cases} \mu x_\tau(1 - x_\tau), & x_\tau \in J = (0_-, 1); \\ 0, & x_\tau \notin J; \end{cases} \quad (114)$$

donde $\mu > 1$ y 0_- es un número negativo arbitrariamente pequeño. Se denota al parámetro θ por μ , la cual es una notación estándar para el sistema logístico.

Como se vió en el Ejemplo 5.1 de la Sección 5.2, el sistema en lazo cerrado tiene dos puntos de equilibrio, $\bar{x}_1 = 0$ y $\bar{x}_2 = 1 - (1 + 1/K)/\mu$. Por otra parte, $\phi(x)$ está acotada, $\phi'(\bar{x}_1) = \mu$, $\phi'(\bar{x}_2) = \mu[-1 + 2(1 + 1/K)/\mu]$ están bien definidas, $\phi'(x) > 1$ si $\mu > 1$ para $\bar{x}_1$ y $\phi'(x) < -1$ si $\mu > 3 + 2/K$ para $\bar{x}_2$, satisfaciendo la condición **(AS2a)**. Para este caso, $J = (0_-, 1)$, $I = (0, \bar{x}_2)$, y es fácil demostrar que se satisface la condición **(AS2b)**.

Se sabe que el mapa logístico presenta un comportamiento oscilatorio a partir de $\mu = 3$, por lo que se considerará a $\mu > 3$. La condición **(AS3a)** se satisface para $\bar{x}_1$ si $K > 1/(\mu - 1) = K_1$, y **(AS3b)** se cumple para $\bar{x}_2$ si $K > 2 + w/\sin(w) = K_2$, para alguna $w \in (0, \pi)$. De hecho, el valor mínimo que satisface esta última desigualdad es para $w = 0^+$, donde 0^+ es un número positivo arbitrariamente pequeño, tal que $K_2 = 3$. Por lo tanto, $K_{\min} = \max\{1/(\mu - 1), 3\} = 3$, porque $\mu > 3$; entonces, K deberá ser mayor que 3. Esto significa que el comportamiento oscilatorio del sistema (113)-(114), con $\mu > 3$, inicia con $K = 3$.

En la Figura 24 se muestran varias órbitas para diferentes valores del parámetro K , con $\mu = 4$. Observe que el comportamiento oscilatorio inicia en $K = 3$ (Figura 24(a)), y el sistema exhibe comportamiento periódico para $K = 5$ (Figura 24(b)), órbita 2-

periódica para $K = 8$ (Figura 24(c)), y un comportamiento irregular para $K = 20$ (Figura 24(d)). La señal de la ley de control para cada una de las órbitas del sistema (113)-(114) se muestra en la Figura 25.

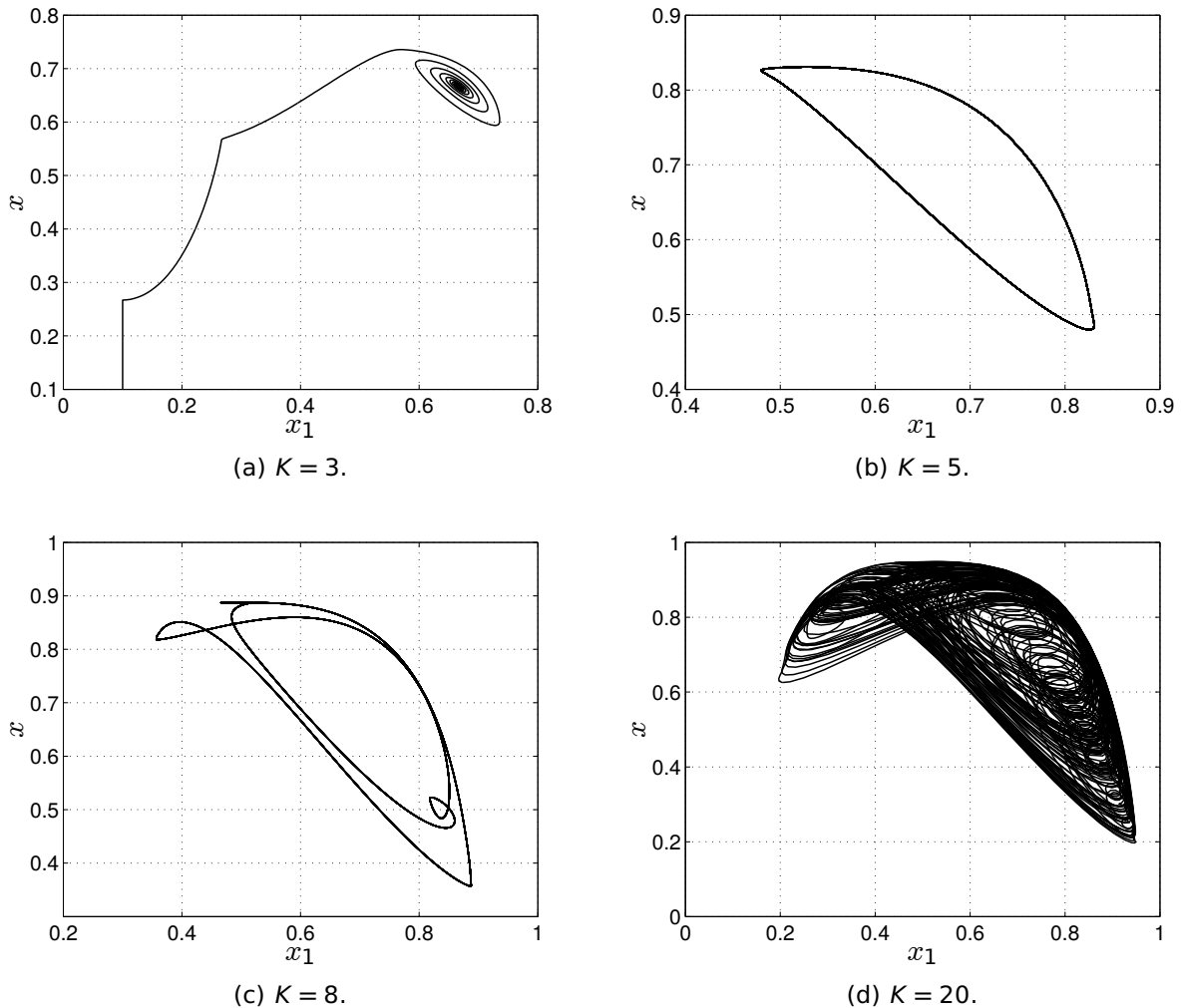


Figura 24. Respuesta del sistema (113) con el mapa logístico (114), para $\mu = 4$ y diferentes valores de K .

En la Figura 26 se resume el comportamiento de este sistema en función de K y μ en alguna región del plano (K, μ) . La zona azul corresponde a los puntos de equilibrio estables, la zona verde al comportamiento periódico y la zona roja a las dinámicas no periódicas y caóticas. Observe que el comportamiento caótico inicia para valores de μ menores a 4, si K es lo suficientemente grande.

En la Figura 27 se muestra el máximo exponente de Lyapunov como una función del parámetro K y $\mu = 4$. Observe que, para este valor del parámetro μ , el máximo

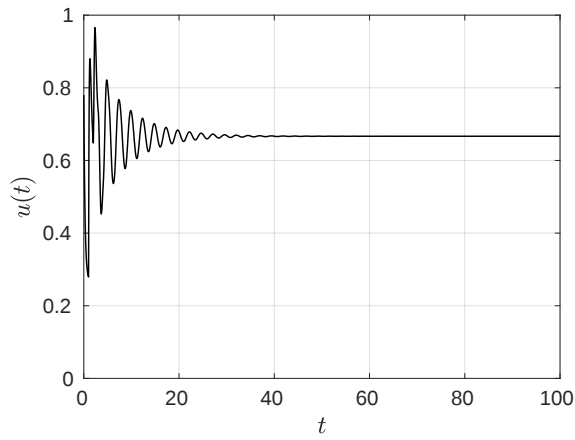
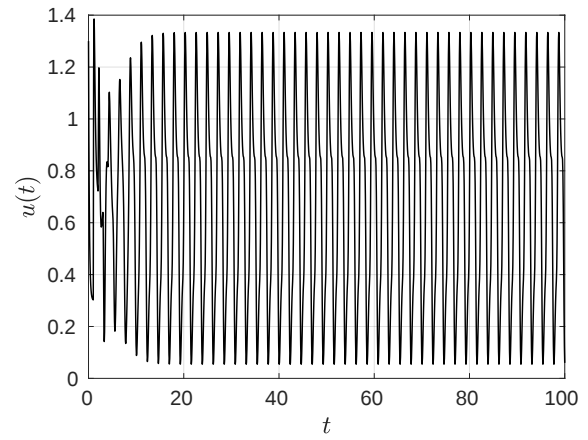
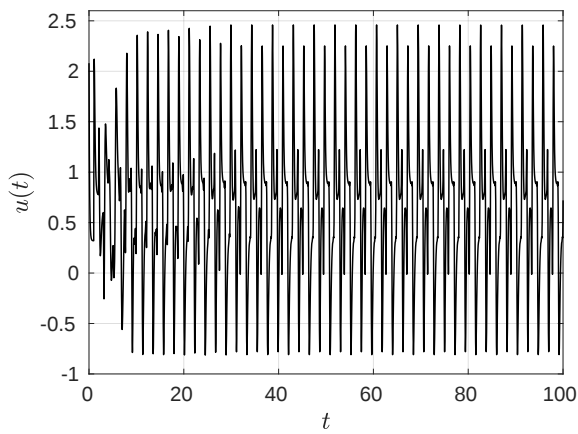
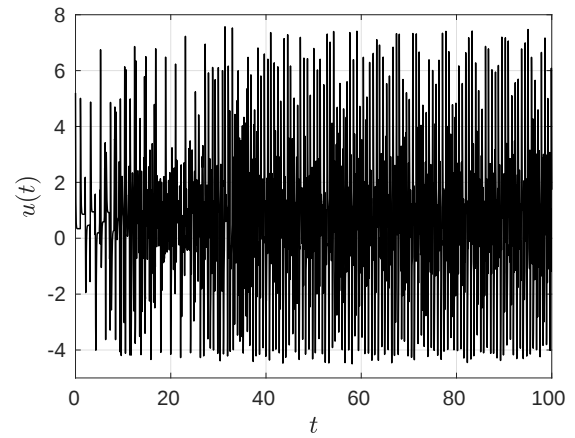
(a) $K = 3$.(b) $K = 5$.(c) $K = 8$.(d) $K = 20$.

Figura 25. Señal de control para el sistema (113)-(114), con $\mu = 4$ y diferentes valores de K .

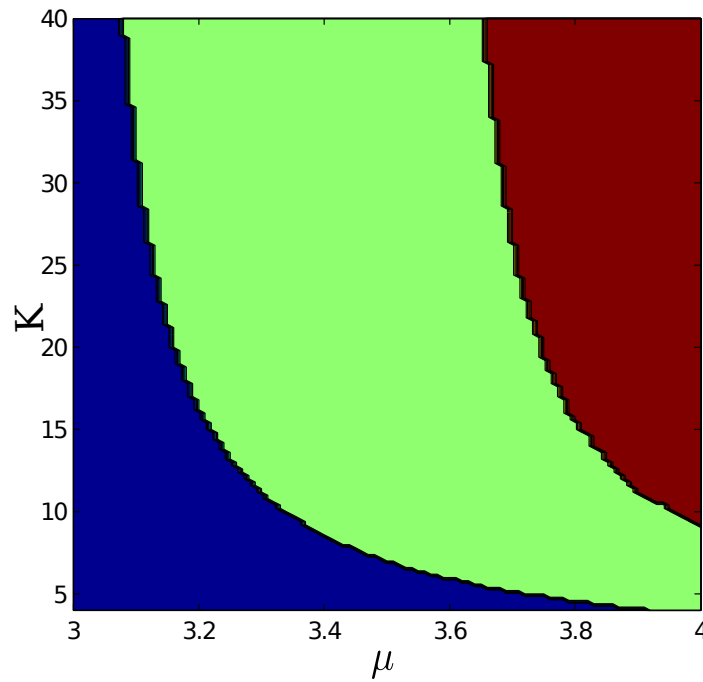


Figura 26. Comportamiento del sistema (113) con el mapa logístico (114) en el espacio paramétrico- (K, μ) . Puntos de equilibrio (azul), órbitas periódicas (verde), órbitas no periódicas y caóticas (rojo).

exponente de Lyapunov es positivo para $K > 9$, el cual corresponde bien a los valores (K, μ) mostrados en la Figura 26.

Finalmente, en la Figura 28 se muestra el diagrama de bifurcación y la ubicación de uno de los puntos de equilibrio inestable cuando el parámetro K varía en el intervalo $[4, 20]$. Observe que el punto de equilibrio inestable ($\bar{x} = 1 - (\alpha/K + 1)/\mu = 0.72$ si $K = 30$) se acerca a $1 - 1/\mu = 0.75$ para K suficientemente grande. Se puede observar una amplia gama de comportamientos dinámicos de este sistema. También, observe que los valores para el comportamiento periódico y caótico corresponden a los mostrados en la Figura 27.

5.4.2. Mapa seno

Ahora considere al sistema lineal estrictamente pasivo (113), con la función seno $\varphi(x_\tau) = A \sin(x_\tau)$, para $x_\tau \in (-\pi, \pi)$, y cero en otra parte. Entonces, $f'(x) = -1$ y $\varphi'(x) = A \cos(x)$.

El origen $\bar{x}_1 = 0$ es un punto de equilibrio. Debido a que $\varphi'(0) = A$, entonces se puede hacer mayor que uno si $A > 1$. Por lo tanto, de (106), $K > 1/(A - 1)$ hace al origen inestable. Bajo esta condición ($A > 1 + 1/K$) el sistema en lazo cerrado tendrá

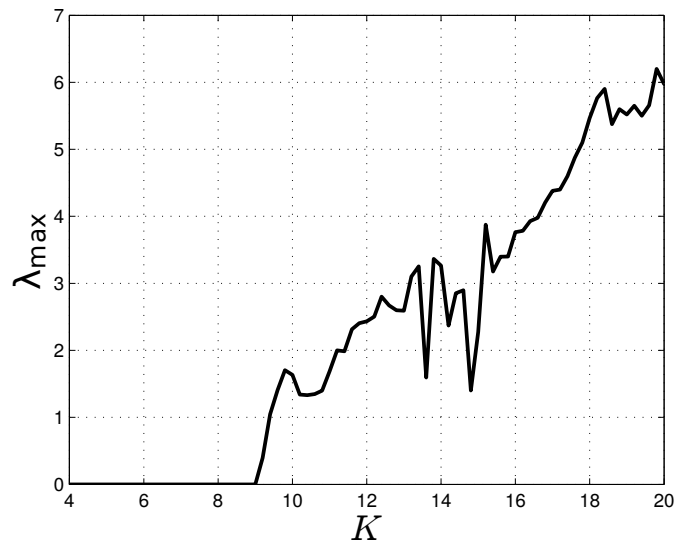


Figura 27. Máximo exponente de Lyapunov del sistema (113) con el mapa logístico (114) como una función del parámetro K .

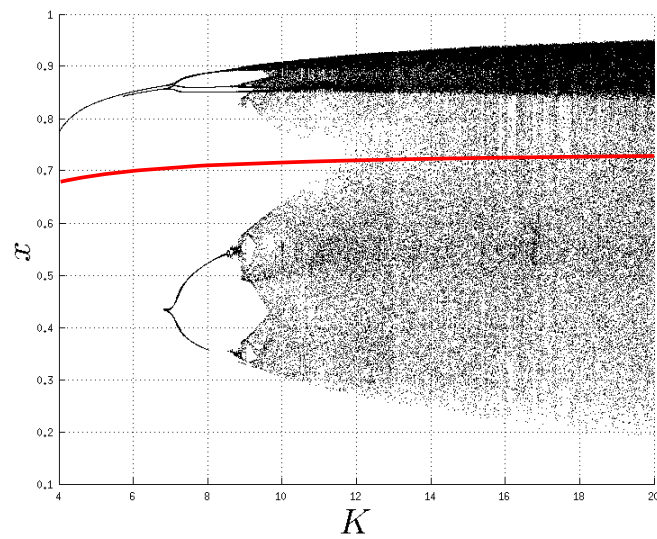


Figura 28. Diagrama de bifurcación y ubicación del punto de equilibrio inestable del sistema (113) con el mapa logístico (114).

otros dos puntos de equilibrio $\bar{x}_2 \in (\pi/2, \pi)$ y $\bar{x}_3 = -\bar{x}_2$, soluciones de la ecuación $A \sin(\bar{x})/\bar{x} = 1 + 1/K$. Para estos dos últimos puntos, $\phi'(\bar{x}) = A \cos(\bar{x})$; entonces, $\phi'(\bar{x})$ puede hacerse menor que -1 con A bastante grande, lo cual fijará a $\bar{x}_2$ en el intervalo $(\pi/2, \pi)$ haciendo negativo a $\cos(\bar{x}_2)$. Por lo tanto, (107), se reescribe como $KA \cos(\bar{x}_2) = -w/\sin(w)$, que puede satisfacerse para alguna $w \in (0, \pi)$. De hecho, se puede satisfacer esta condición si $KA > -1/\cos(\bar{x}_2)$. Un análisis similar puede hacerse para $\bar{x}_3$, llegando a la misma condición.

Por otro lado

$$y_v = Kx(x - A \sin(x_\tau)) > 0 \quad \text{si } x_\tau \notin (-\pi, \pi), \quad (115)$$

y todas las condiciones establecidas en el Teorema 5.1 se satisfacen.

La Figura 29 muestra algunos atractores para diferentes valores de la ganancia K . Cuando se satisfacen las condiciones dadas en el Teorema 5.1, entonces el sistema exhibe órbitas periódicas y caóticas, tal y como se muestran en las figuras 29(a)-29(d). En la Figura 30 se puede observar la señal correspondiente al control para cada órbita mostrada en la Figura 29.

El espacio paramétrico (A, K) muestra la región donde el sistema exhibe puntos de equilibrio estables, órbitas periódicas y caóticas; ver Figura 31. La Figura 32 muestra el diagrama de bifurcaciones y la ubicación de un punto de equilibrio inestable del sistema con respecto al parámetro K , con $A = 3$, y la Figura 33 muestra el máximo exponente de Lyapunov como una función del parámetro K . El punto de equilibrio inestable del sistema en lazo cerrado converge al punto fijo del mapa $\phi(x, A)$ para una K suficientemente grande.

Se pueden obtener otros atractores cambiando el intervalo donde el mapa $\phi(x_\tau)$ es diferente a cero. Por ejemplo, con $A = 5$, $K = 10$, $x_\tau \in [-2\pi, 2\pi]$, el sistema despliega la órbita mostrada en la Figura 34(a), y si $A = -5$, $K = 10$ y $x_\tau = [-2\pi, 2\pi]$, el sistema despliega la órbita mostrada en la Figura 34(b).

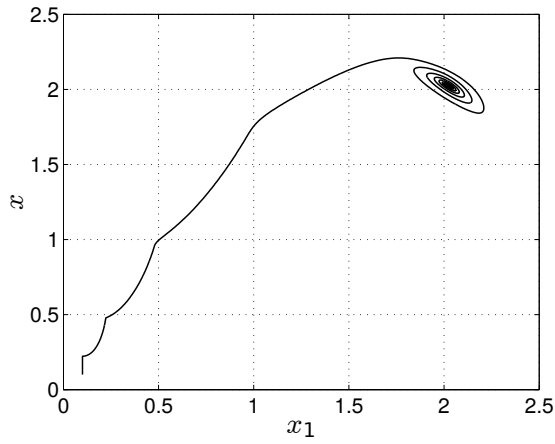
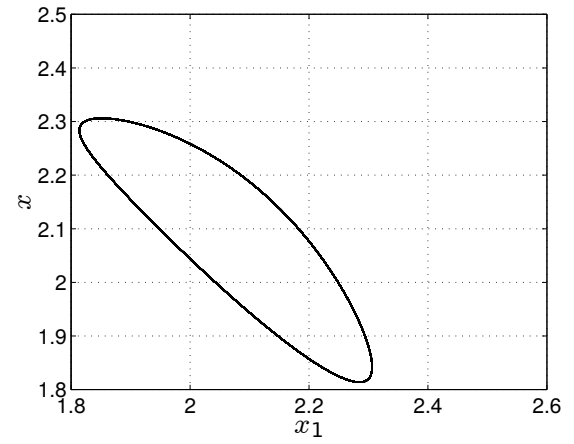
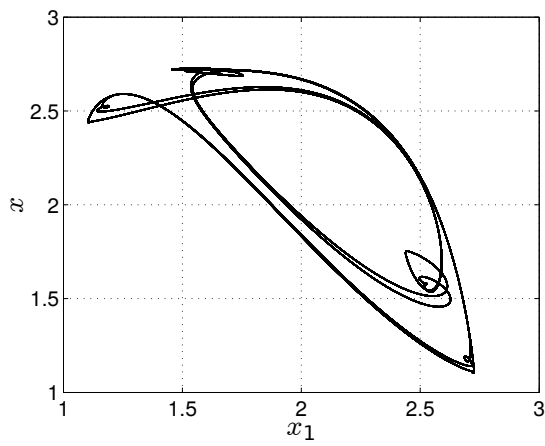
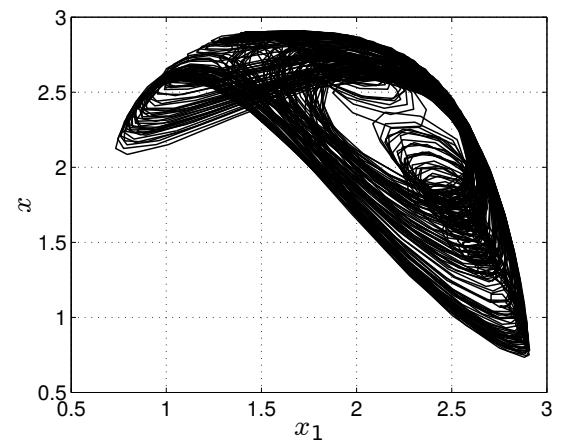
(a) $K = 3$.(b) $K = 4$.(c) $K = 10$.(d) $K = 40$.

Figura 29. Respuesta del sistema (113) con el mapa seno, $A = 3$, $J = (-\pi, \pi)$, y varios valores de K .

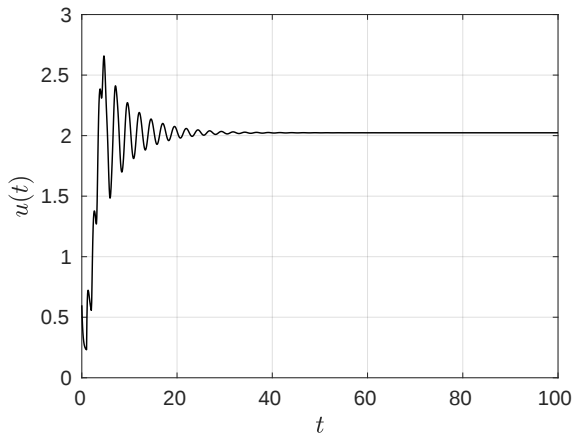
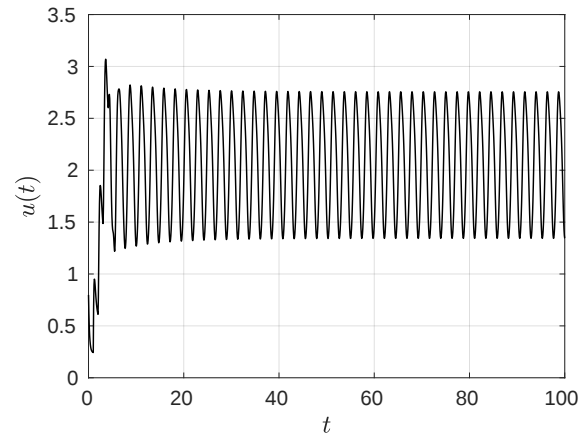
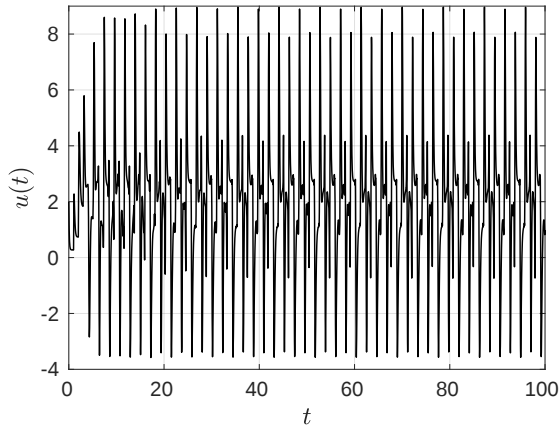
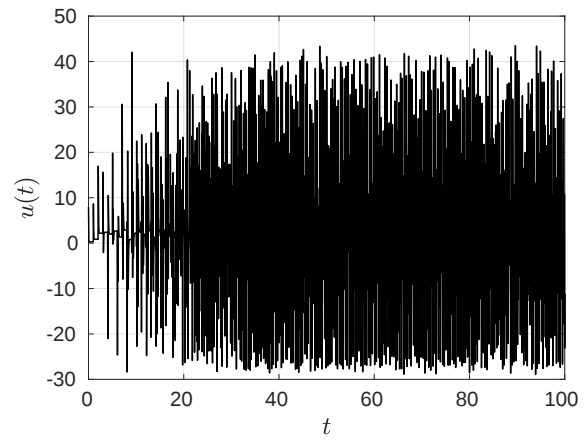
(a) $K = 3$.(b) $K = 4$.(c) $K = 10$.(d) $K = 40$.

Figura 30. Señal de control para el sistema (113) con el mapa seno, $A = 3$, $J = (-\pi, \pi)$, y varios valores de K .

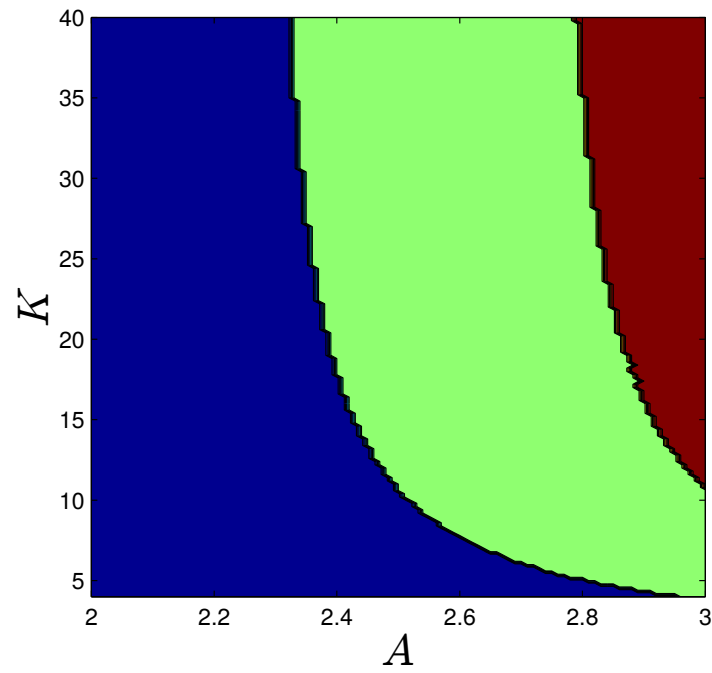


Figura 31. Comportamiento del sistema (113) con el mapa seno en el espacio paramétrico- (A, K) . Puntos de equilibrio (Azul), órbitas periódicas (verde), órbitas no periódicas y caóticas (rojo).

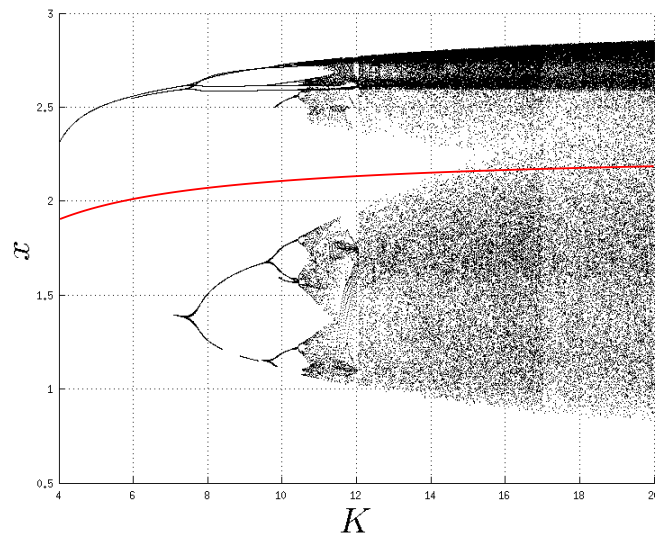


Figura 32. Diagrama de bifurcaciones y ubicación de un punto de equilibrio inestable del sistema (113) con el mapa seno.

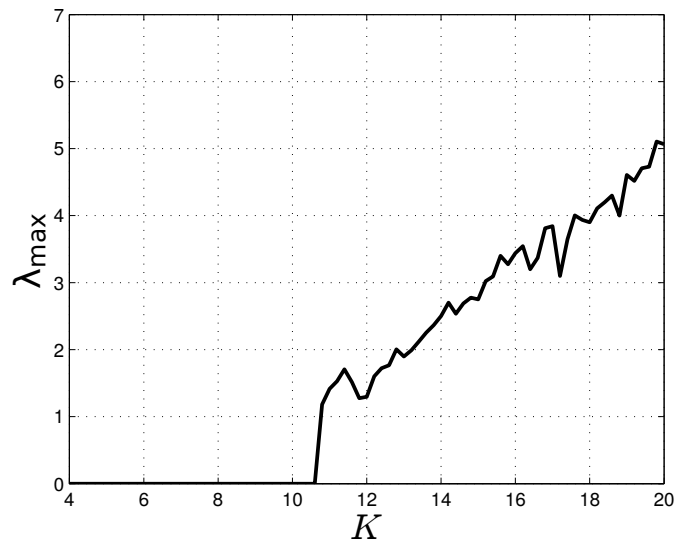


Figura 33. Máximo exponente de Lyapunov del sistema (113) con el mapa seno.

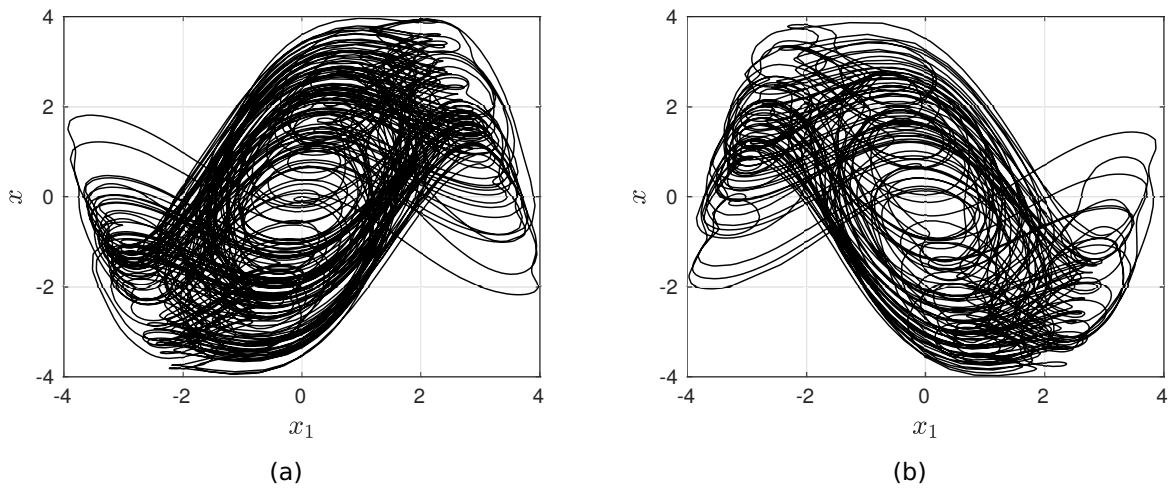


Figura 34. Atractores del sistema (113) con el mapa seno: (a) $A = 5$, $K = 10$, $x_\tau \in [-2\pi, 2\pi]$, (b) $A = -5$, $K = 10$, $x_\tau \in [-2\pi, 2\pi]$.

5.4.3. Mapa triangular

Finalmente, considere al sistema (113), donde

$$\varphi(x_\tau) = \begin{cases} ax_\tau, & x_\tau \in (0_-, 0.5); \\ a(1 - x_\tau), & x_\tau \in [0.5, 1); \\ 0, & x_\tau \notin (0_-, 1); \end{cases} \quad (116)$$

con $1 < a \leq 2$. Este sistema es lineal por partes y tiene dos puntos de equilibrio, $\bar{x}_1 = 0$ y $\bar{x}_2 = 1/(1 + \frac{K+1}{Ka})$. Para ambos puntos de equilibrio $f'(\bar{x}) = -1$.

Ya que $\varphi(\bar{x}_1) = a > 1$, se satisface la condición **(AS2)** y con **(AS3a)** se tiene que $K > 1/(a - 1)$. Además, se tiene que $\varphi(\bar{x}_2) = -a < -1$; entonces, se cumple **(AS2)** y **(AS3b)** se satisface si $K > 1/a$ (para $w = 0_+$). Dado que $a > 1$, entonces $K_{\min} = 1/(a - 1)$.

La Figura 35 muestra diferentes respuestas del sistema (113)-(116) para distintos valores de la ganancia K . También, en la Figura ? se puede apreciar las señales de $u(t)$ para cada órbita presentada en la figura anterior.

Este sistema puede desplegar una variedad de comportamientos dinámicos como puntos de equilibrio estables, órbitas periódicas y caóticas. Estas dinámicas pueden observarse en el plano (a, K) , como se muestran en la Figura 37. La Figura 38 muestra al máximo exponente de Lyapunov como una función del parámetro K , con $a = 2$. El diagrama de bifurcación, mostrado en la Figura 39, ha sido generado con los mismos valores paramétricos que el diagrama del máximo exponente de Lyapunov. En el diagrama de bifurcación también se muestra un punto de equilibrio inestable, el cual converge al punto fijo correspondiente del mapa, para valores de K suficientemente grandes.

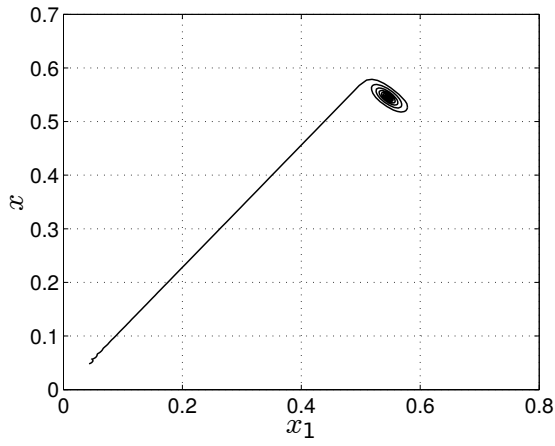
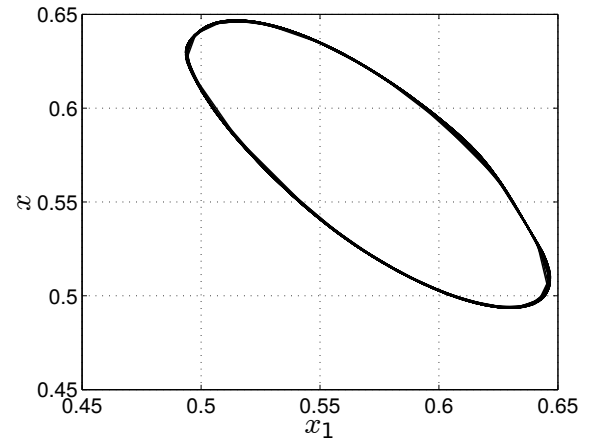
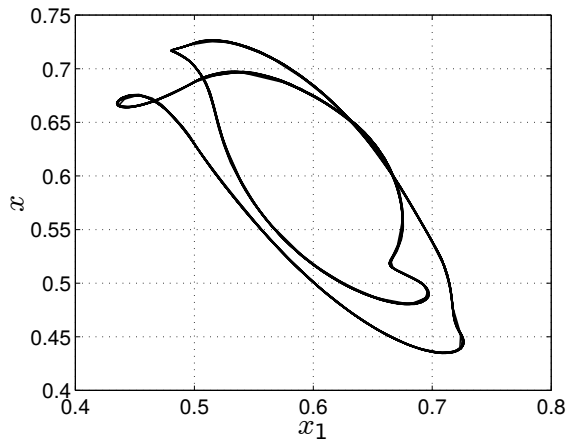
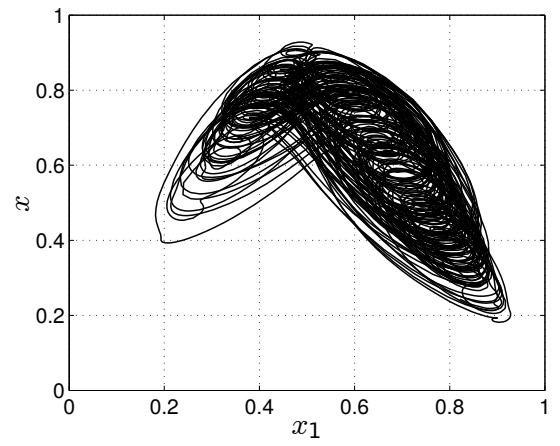
(a) $K = 1.5$.(b) $K = 2$.(c) $K = 3$.(d) $K = 20$.

Figura 35. Respuesta del sistema (113) con el mapa triangular (116), para $\alpha = 2$.

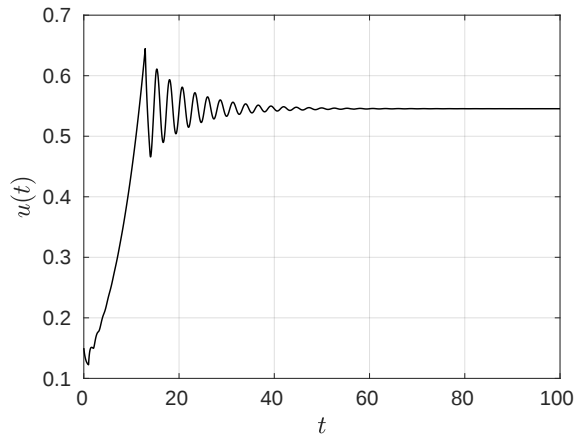
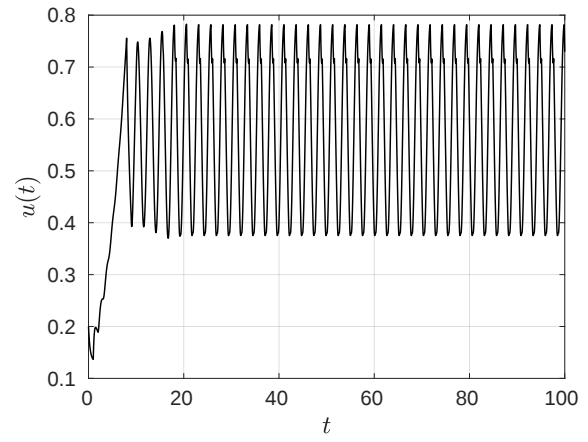
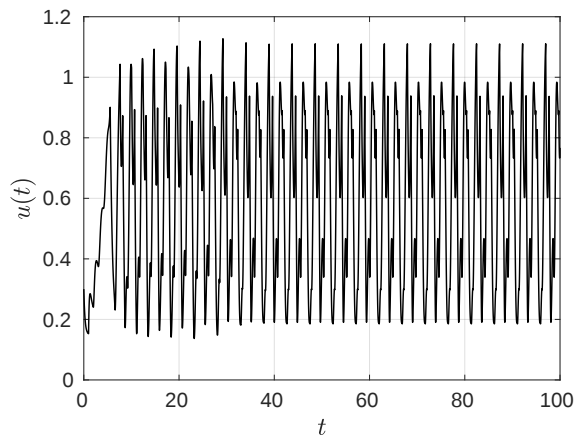
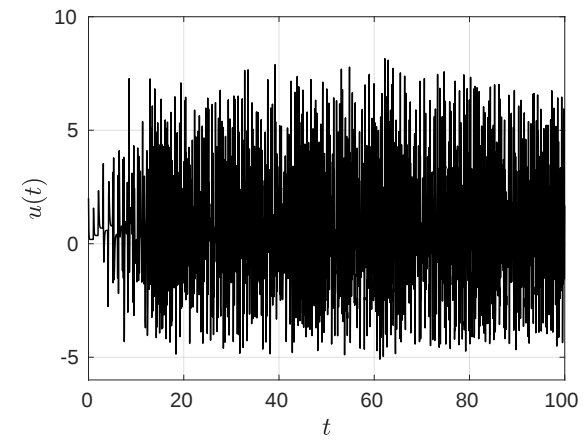
(a) $K = 1.5$.(b) $K = 2$.(c) $K = 3$.(d) $K = 20$.

Figura 36. Señal de control para el sistema (113) con el mapa triangular (116), con $\alpha = 2$.

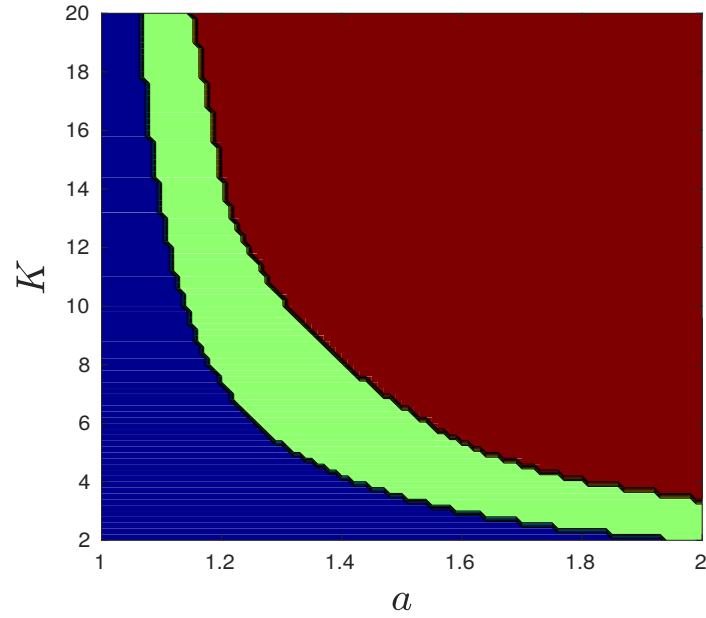


Figura 37. Comportamiento del sistema (113) con el mapa triangular (116). Puntos de equilibrio estables (azul), órbitas periódicas (verde), órbitas no periódicas y caóticas (rojo).

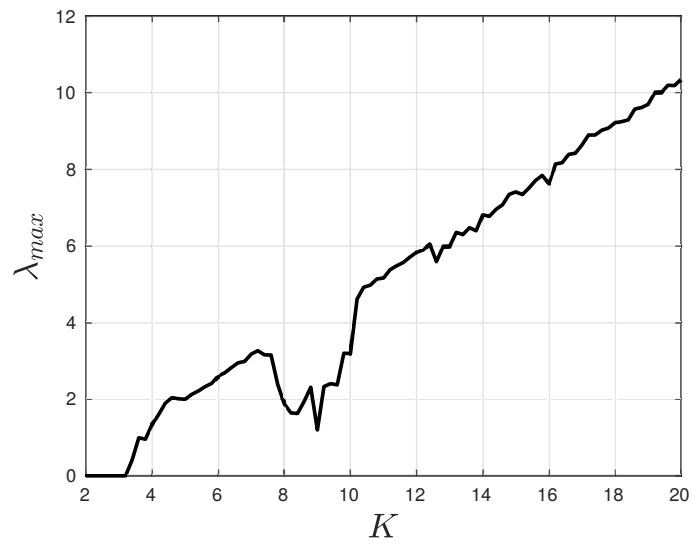


Figura 38. Máximo exponente de Lyapunov del sistema (113) con el mapa triangular (116).

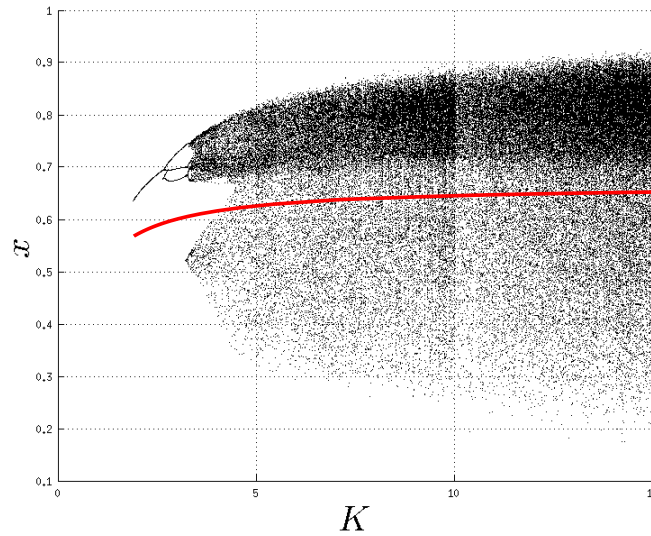


Figura 39. Diagrama de bifurcación y ubicación del punto de equilibrio inestable del sistema (113) con el mapa triangular (116).

5.5. Circuito caótico

Los comportamientos dinámicos mostrados en la sección previa también se pueden observar en un sistema físico simple. En esta sección se muestra la implementación de un circuito pasivo lineal con una señal de entrada que depende del estado retardado, el cual es procesado por una función no lineal, y esta función es el mapa logístico. La dinámica del circuito, mostrado en la Figura 40, es modelada por la ecuación

$$RC\dot{x} = -x + u, \quad (117)$$

donde x es el voltaje a través del capacitor C , y la entrada está dada por

$$u = \begin{cases} -K(x - \mu x_\tau(1 - x_\tau)), & x_\tau \in (0, 1), \\ -Kx, & x_\tau \notin (0, 1). \end{cases} \quad (118)$$

La señal de entrada u es generada utilizando Simulink®, y la interfaz usada entre la computadora y el circuito es la tarjeta de adquisición de datos CLP1104 de dSPACE®.

Eligiendo el valor de los componentes $R = 1k\Omega$ y $C = 1\mu F$, se obtiene la constante de tiempo $RC = 1ms$, la cual hace un escalamiento a la dinámica del circuito (117) por

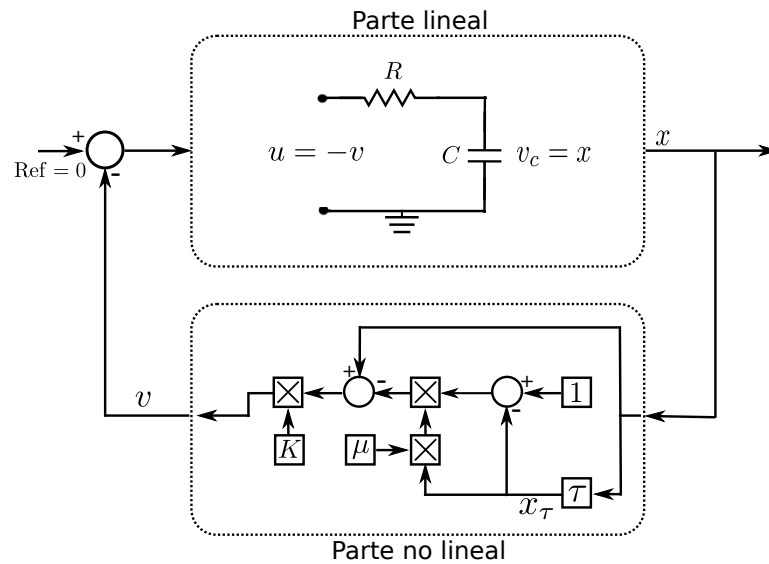


Figura 40. Circuito RC.

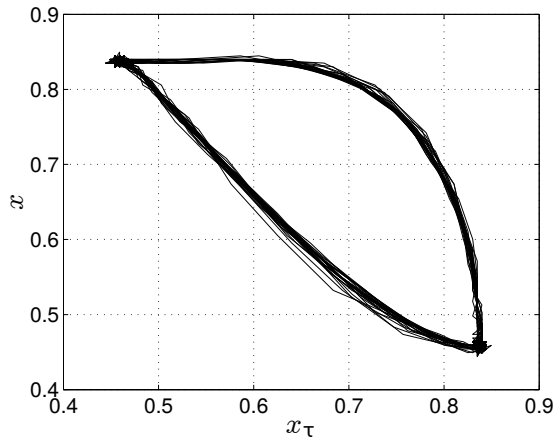
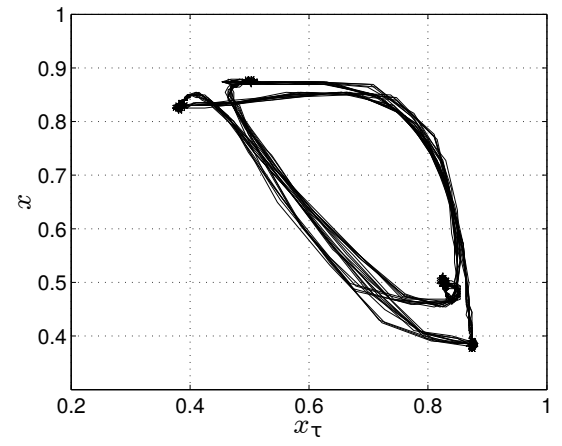
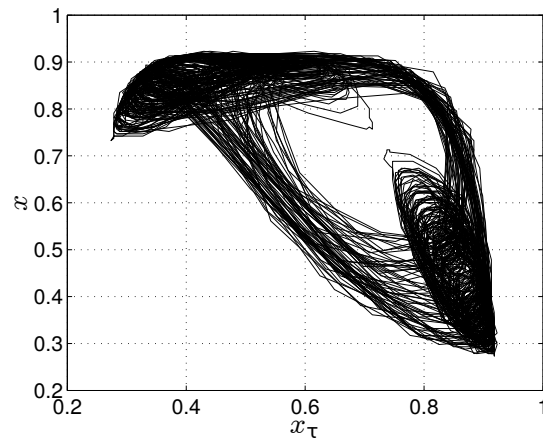
un factor de $K_p = 1/RC = 10^3$; es decir,

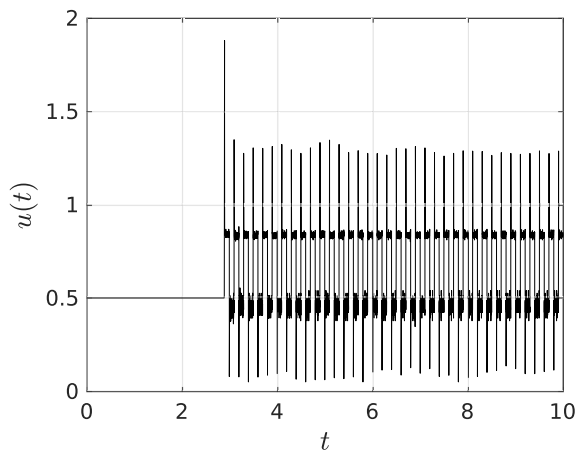
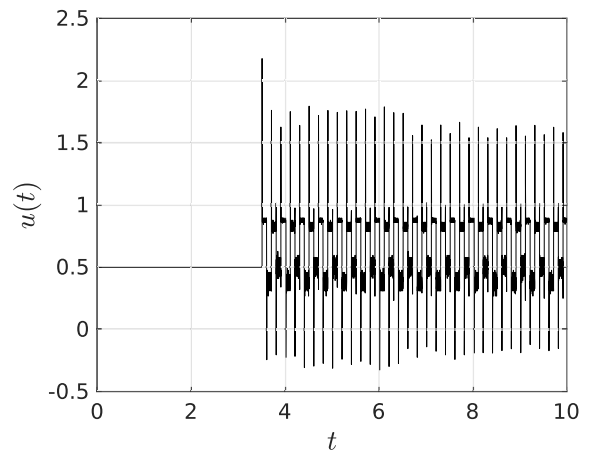
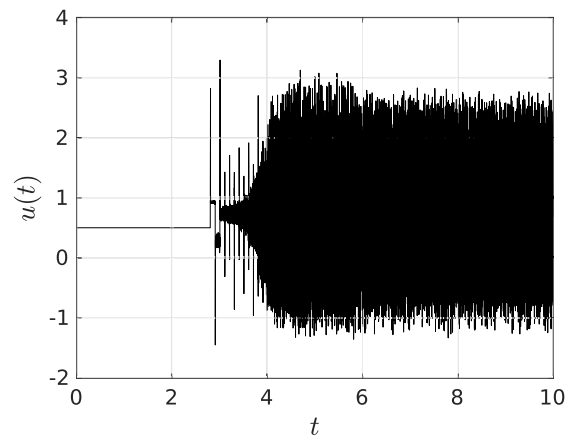
$$\dot{x} = K_p(-x + u). \quad (119)$$

El circuito tiene la misma estructura que el ejemplo de la Sección 5.4.1 (mapa logístico). El análisis y aplicación del Teorema 5.1 son similares y es posible calcular todos los parámetros tal que se satisfagan las condiciones **(AS1-3)**. Observe que, en casos reales como éste, es necesario un escalamiento en el tiempo para poder aplicar los resultados aquí descritos.

En lo que sigue, los resultados descritos a continuación, se obtuvieron utilizando $\mu = 4$ y $\tau = 0.1s$. La ganancia K toma diferentes valores para mostrar los diversos comportamientos del circuito. La Figura 41 muestra la respuesta para cada valor del parámetro K (3, 3.5 y 4.5). Observe que, para $k = 3$, el circuito exhibe un comportamiento periódico. Cuando $K = 3.5$ se tiene una órbita 2-periódica y con $K = 4.5$ se observa un comportamiento irregular. La Figura 42 muestra la señal de entrada aplicada al circuito, las cuales corresponden a las dinámicas mostradas en la figura anterior. Observe que la magnitud de esta señal está contenida dentro del rango de voltaje que maneja la interfaz D/A ($\pm 5V$).

Debido a las limitaciones que tienen las tarjetas de adquisición de datos en el tiempo de muestro y en la cantidad de datos que se pueden enviar, fue necesario realizar

(a) $K = 3$.(b) $K = 3.5$.(c) $K = 4.5$.**Figura 41.** Diferentes comportamientos del circuito (117) con $\tau = 0.1s$, $\mu = 4$.

(a) $K = 3$.(b) $K = 3.5$.(c) $K = 4.5$.**Figura 42.** Señal de control para diferentes valores de K del circuito.

un escalamiento en el tiempo para la implementación del circuito. Esto tuvo como consecuencia un reajuste en los valores de los parámetros τ y K de la señal de control. Como pudo observarse τ se reajustó en 0.1s y los cambios en la dinámica del circuito ocurrieron para valores de K distintos a los del ejemplo mostrado en la Sección 5.4.1.

5.6. Conclusiones

En este capítulo se propuso un procedimiento sistemático para inducir oscilaciones periódicas y caóticas en sistemas continuos de primer orden, por medio de una función no lineal del estado retardado por un tiempo τ . Se mostró que se puede producir un comportamiento oscilatorio imponiendo una condición de pasividad sobre el sistema en lazo abierto, ajustando la ganancia del controlador para forzar al punto de equilibrio que sea inestable y así garantizar la semipasividad del sistema en lazo cerrado. Mediante algunos ejemplos, se ilustró la técnica propuesta, con lo que se pudo observar una gran variedad de comportamientos oscilatorios. También, se incluyó un ejemplo físico, un circuito electrónico en el que se indujo un comportamiento similar al mapa logístico.

Capítulo 6. Sistemas de segundo orden

En este capítulo, se aborda el problema de inducir oscilaciones, ya sean periódicas, no periódicas o caóticas, en sistemas continuos de segundo orden por medio de una función no lineal que depende de la salida del sistema retardada un tiempo τ . Cabe señalar que se sigue la misma metodología que en el capítulo anterior. En este caso, se parte de un sistema de segundo orden, pasivo o semipasivo, y se propone un control retroalimentado dado por una función no lineal que depende de la salida retardada, para después fijar una ganancia con la cual se asegura que todos los puntos de equilibrio del sistema en lazo cerrado son inestables. Con este control se desea imponer condiciones de semipasividad. El sistema en lazo cerrado puede presentar dinámicas similares a la del mapa definido por la función no lineal. Es importante mencionar que las oscilaciones que presente el sistema en lazo cerrado serán distintas a las oscilaciones del sistema en lazo abierto, en caso de que existan.

Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x) + Bu, \quad y = h(x), \quad (120)$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$ es el estado, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $y \in \mathbb{R}$ es la salida, $B = [0, 1]^T$ es un vector constante, $f(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es al menos $\mathcal{C}^1$ (localmente Lipschitz), $h(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, con $f(0) = 0$ y $h(0) = 0$. Como en los capítulos anteriores, se propone que la señal de entrada esté dada por

$$u(y) = -K[y - \varphi(y(t - \tau), \theta)], \quad (121)$$

donde $\varphi : \mathcal{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R}$ es una función no lineal, $\mathcal{R}$ es un subintervalo de $\mathbb{R}$, θ es un parámetro cuyo valor determina el comportamiento de φ , $K > 0$ es la ganancia y $\tau > 0$ es el tiempo de retardo. En este capítulo se considera que el retardo es unitario, $\tau = 1$.

6.1. Estabilidad de los puntos de equilibrio

En esta sección se discuten algunas condiciones sobre la estabilidad de los puntos de equilibrio. Al igual que en el capítulo anterior, se parte del hecho de que la estabilidad local de un punto de equilibrio de un sistema no lineal se puede determinar analizando su aproximación lineal alrededor de ese punto.

Sea el sistema (120)-(121) con $x = (x_1, x_2)^T$ y $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$. Aplicando el método de linealización, visto en el Capítulo 2, alrededor del punto de equilibrio $\bar{x}$, se tiene

$$\dot{x} = Ax + A_1x_\tau, \quad (122)$$

donde $x_\tau = x(t-1)$ y

$$A = \begin{bmatrix} -a_{01} & -a_{02} \\ -a_{03} & -a_{04} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a_{11} & -a_{12} \end{bmatrix},$$

con

$$a_{01} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}}, \quad a_{02} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_{\bar{x}}, \quad a_{03} = K \frac{\partial h}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}}, \quad a_{04} = K \frac{\partial h}{\partial x_2} \Big|_{\bar{x}} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Big|_{\bar{x}},$$

$$a_{11} = -K \frac{\partial \varphi(h(x_\tau), \theta)}{\partial x_{1\tau}} \Big|_{\bar{x}} = -K \frac{\partial \varphi}{\partial h} \Big|_{h(\bar{x})} \frac{\partial h}{\partial x_{1\tau}} \Big|_{\bar{x}},$$

$$a_{12} = -K \frac{\partial \varphi(h(x_\tau), \theta)}{\partial x_{2\tau}} \Big|_{\bar{x}} = -K \frac{\partial \varphi}{\partial h} \Big|_{h(\bar{x})} \frac{\partial h}{\partial x_{2\tau}} \Big|_{\bar{x}}.$$

La ecuación característica correspondiente al sistema (122) está dada por

$$\lambda^2 + (a_{01} + a_{04})\lambda + (a_{01}a_{04} - a_{02}a_{03}) + a_{12}e^{-\lambda\tau}\lambda + (a_{01}a_{12} - a_{02}a_{11})e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (123)$$

Las soluciones de esta ecuación característica determinan la estabilidad del sistema lineal y con ello la estabilidad local del punto de equilibrio. En el Capítulo 2, se mencionan las condiciones necesarias y suficientes, establecida por Pontryagin Pontryagin (1955), para que las raíces de una ecuación característica tengan parte real negativa. Partiendo de este resultado, (Márquez y Cuesta, 2019) establecen regiones de estabilidad para sistemas lineales con retardo de segundo orden, desarrollando también un software que permite visualizar las regiones de estabilidad a partir de los valores paramétricos del sistema.

En este trabajo se utiliza el software desarrollado en (Márquez y Cuesta, 2019) para determinar la estabilidad de los sistemas lineales relacionados con los puntos de equilibrio del sistema no lineal.

6.2. Condición de semipasividad

Al igual que en la Sección 5.3 del Capítulo 5, en esta sección se determinan condiciones bajo las cuales las trayectorias del sistema retroalimentado (120)-(121) permanecen acotadas.

La demostración de este teorema se omite ya que es similar a la del Teorema 5.1.

Teorema 6.1 . *Considere el sistema de segundo orden*

$$\Sigma_1 : \dot{x} = f(x) + Bu, \quad (124)$$

$$y = h(x),$$

donde $B = [0, 1]^T$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es $\mathcal{C}^1$, $h(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, con $f(0) = 0$ y $h(0) = 0$, con una señal de entrada

$$u(y) = -K[y - \varphi(y(t - \tau), \theta)] \quad (125)$$

con $K > 0$, y suponga que se satisfacen las siguientes condiciones

- (i) El sistema (124) satisface la condición de pasividad o de semipasividad.
- (ii) Para un valor de θ dado, el mapa $\varphi(y, \theta)$ está acotado, $\varphi(0, \theta) = 0$, y satisface que
 - a) Las derivada $\partial\varphi/\partial y$ está definida en cualquier punto de equilibrio $\bar{x}$ del sistema en lazo cerrado (124)-(125), y $|\partial\varphi(h(\bar{x}), \theta)/\partial y| > 1$;
 - b) Existen dos intervalos, $J = (a, d)$ e $I = (b, c)$, con $a \leq b < 0 < c \leq d$ tal que $y\varphi(y, \theta) > y^2$ para $y \in I \setminus \{0\}$, $y\varphi(y, \theta) \leq y^2$ para $y \notin I$, y $\varphi(y, \theta) = 0$ para $y \notin J$.
- (iii) Todos los puntos de equilibrio $\bar{x}$ del sistema retroalimentado (124)-(125) son inestables para una $K > K_{min}$.

Entonces el sistema retroalimentado (124)-(125) exhibe soluciones oscilatorias acotadas para todo $K > K_{min}$. Dependiendo de los valores de K y del comportamiento dinámico definido por el mapa $\varphi(z, \theta)$, estas soluciones pueden ser periódicas o no periódicas.

6.3. Ejemplo

En esta sección se muestra la aplicación de la técnica propuesta mediante un ejemplo. En particular, se considera al sistema de van der Pol controlado

$$\ddot{x}(t) + \sigma[x^2(t) - 1]\dot{x}(t) + x(t) = u, \quad (126)$$

donde $\sigma \in \mathbb{R}_+$ es un parámetro del sistema. Representando a este sistema en la forma de (124) se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \sigma(x_1^2 - 1)x_2 + u, \\ y &= h(x), \end{aligned} \quad (127)$$

donde u es la entrada de control y tiene la forma de (125) mientras que $y = h(x)$ es la salida del sistema. Observe que eligiendo a la función de almacenamiento $S(x) = \frac{\sigma}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2$ con $h(x) = x_1 + x_2$, el sistema (127) cumple con la condición de semipasividad

$$uy \geq \dot{S}(x) + H(x),$$

con $H(x) = x_1^2 - \sigma x_1 x_2 + (x_1^2 - \sigma - 1)x_2^2 > 0$ para $|x_1| > \frac{\sigma+2}{2\sqrt{\sigma}}$, satisfaciéndose así la condición (i) del Teorema 6.1.

El mapa φ de la entrada de control es descrito por el mapa logístico, el cual es modelado por

$$\varphi(y_\tau) = \begin{cases} \mu y_\tau(1 - y_\tau), & y_\tau \in J = (0_-, 1), \\ 0, & y_\tau \notin J, \end{cases} \quad (128)$$

donde $\mu > 1$, 0_- es un número negativo arbitrariamente pequeño y $y_\tau = y(t - \tau)$, con $\tau = 1$.

El sistema en lazo cerrado tiene dos puntos de equilibrio $\bar{x}^{(1)} = (0, 0)$ y $\bar{x}^{(2)} = (1 - (1 + 1/K)/\mu, 0)$. Además, $\varphi(y)$ está acotada, $\varphi(\bar{x}^{(1)}) = \mu$, $\varphi(\bar{x}^{(2)}) = \mu[-1 + 2(1 + 1/K)/\mu]$ están bien definidas, $\varphi'(y) > 1$ si $\mu > 1$ para $\bar{x}^{(1)}$ y $\varphi'(y) < -1$ si $\mu > 3 + 2/K$ para $\bar{x}^{(2)}$, con lo que se satisface la condición (iia). En este caso, $J = (0_-, 1)$, $I = (0, \bar{x}^{(2)})$ y se

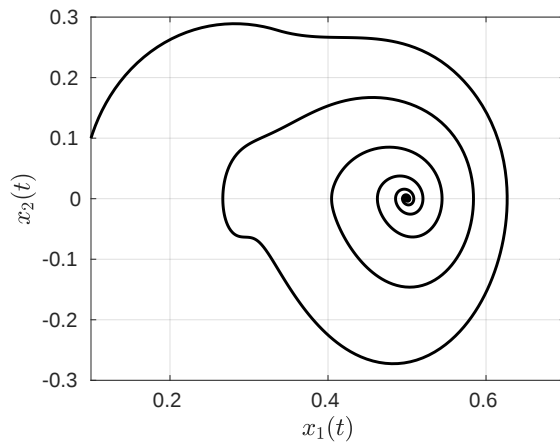
puede demostrar que la condición (iib) se satisface.

Para determinar la ganancia K_{min} con la cual los puntos de equilibrio $\bar{x}^{(1)}$ y $\bar{x}^{(2)}$ del sistema retroalimentado (127)-(128) sean inestables, condición (iii) del Teorema 6.1, se hace uso del software mencionado en la Sección 6.1.

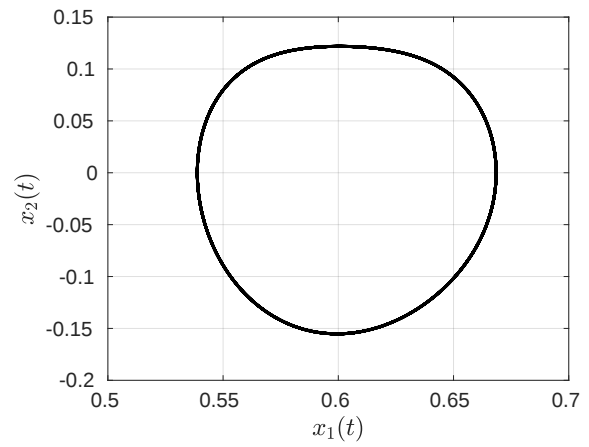
En la Figura 43 se pueden observar diversas órbitas para diferentes valores del parámetro K , con $\mu = 4$. Para $K = 1$, la órbita presenta un comportamiento oscilatorio que se apaga hasta converger al punto de equilibrio $\bar{x} = (0.5, 0)$ (Figura 43(a)). También, exhibe un comportamiento periódico para $K = 2$ (Figura 43(b)), órbita 2-periódica para $K = 2.8$ (Figura 43(c)), y comportamiento no periódico, que es caótico, para $K = 5$ (Figura 43(d)). En la Figura 44 se presenta la señal de control correspondiente a cada órbita mostrada en la Figura 43.

Este sistema puede exhibir una variedad de comportamientos dinámicos como puntos de equilibrio estables, órbitas periódicas y caóticas. Estas dinámicas pueden observarse en el espacio paramétrico- (μ, K) ; mostrado en la Figura 45. La zona azul corresponde a los puntos de equilibrio estables, la zona verde al comportamiento periódico y la zona amarilla corresponde a las dinámicas no periódicas y caóticas. Se puede observar que en la zona que corresponde a las dinámicas no periódicas y caóticas, para ciertos valores de K y μ , existen comportamientos periódicos.

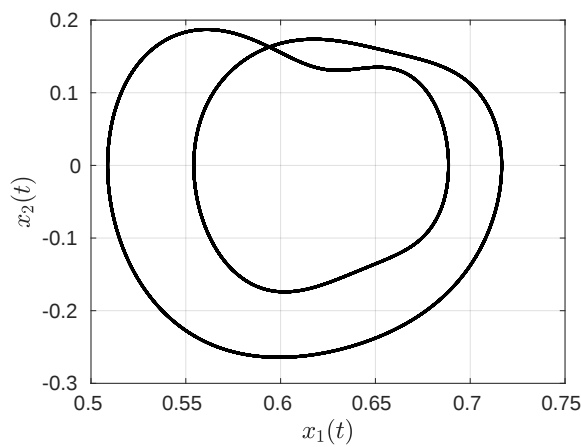
La Figura 46 muestra el diagrama de Feigenbaum cuando el parámetro K varía en el intervalo $[1, 5]$, con $\mu = 4$. Se puede observar una amplia gama de comportamientos dinámicos del sistema. Cuando $1 \leq K \leq 1.6$ se tiene un punto de equilibrio estable, y conforme se continúa aumentando el valor de la ganancia K aparecen las órbitas periódicas y caóticas. Por último, en la Figura 47 se muestra el máximo exponente de Lyapunov como una función del parámetro K y $\mu = 4$. Debido a que la dinámica del sistema está contenida en un atractor y como el máximo exponente de Lyapunov es positivo, entonces el sistema es caótico.



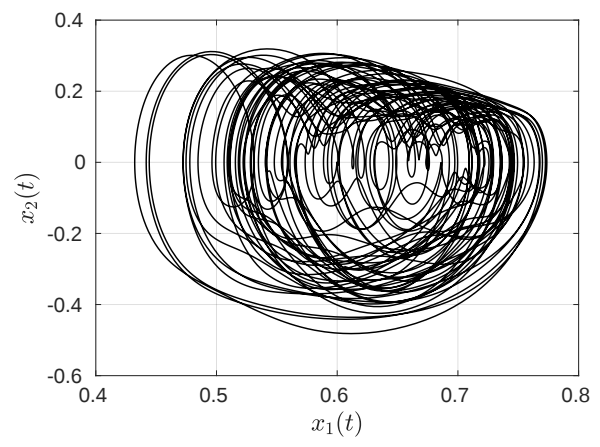
(a) $K = 1$. Punto de equilibrio.



(b) $K = 2$. Órbita periódica.

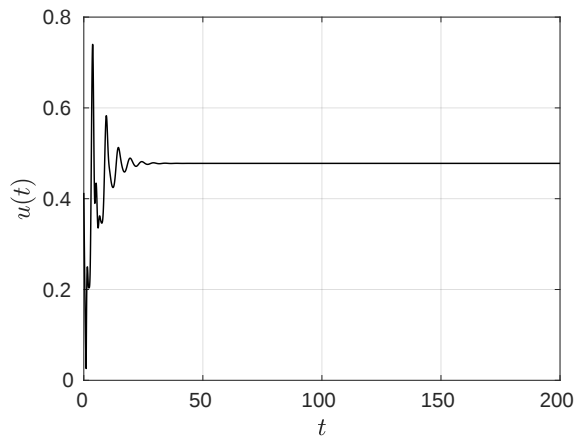


(c) $K = 2.8$. Órbita dos periódica.

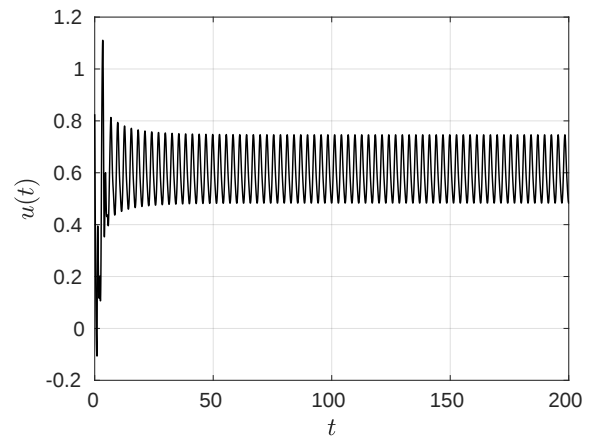


(d) $K = 5$. Caos.

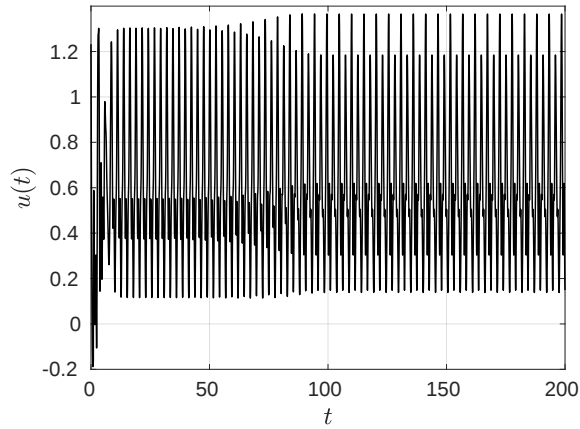
Figura 43. Respuesta del sistema (127) con el mapa logístico (128), para $\mu = 4$ y diferentes valores de K .



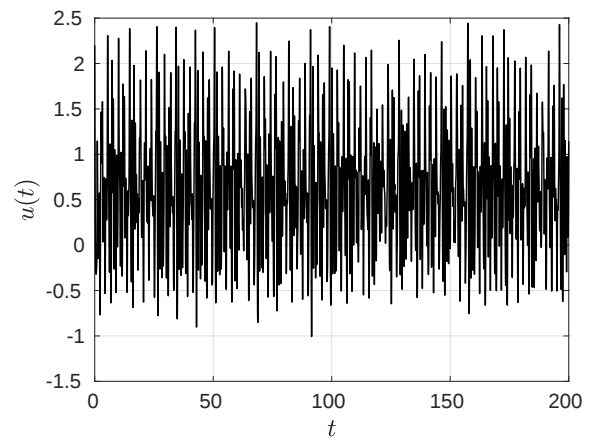
(a) $K = 1$. Punto de equilibrio.



(b) $K = 2$. Órbita periódica.



(c) $K = 2.8$. Órbita dos periódica.



(d) $K = 5$. Caos.

Figura 44. Señal de control del sistema (127) con el mapa logístico (128), para $\mu = 4$ y diferentes valores de K .

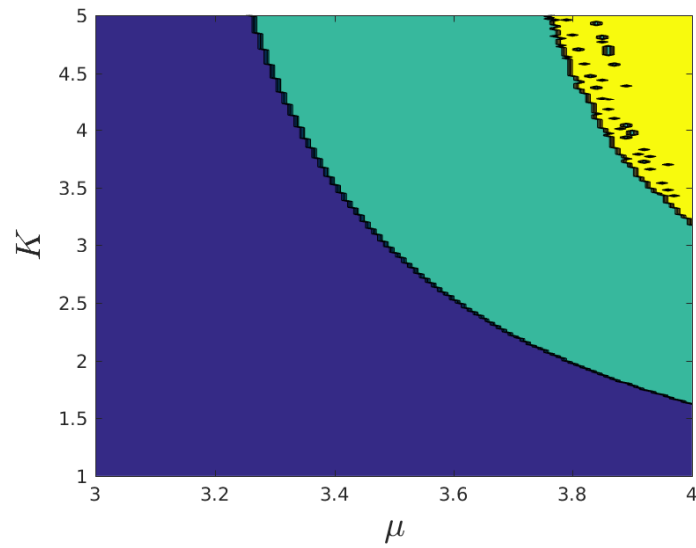


Figura 45. Comportamiento del sistema (127) con el mapa logístico (128). Puntos de equilibrio (azul), órbitas periódicas (verde), órbitas no periódicas y caóticas (amarillo).

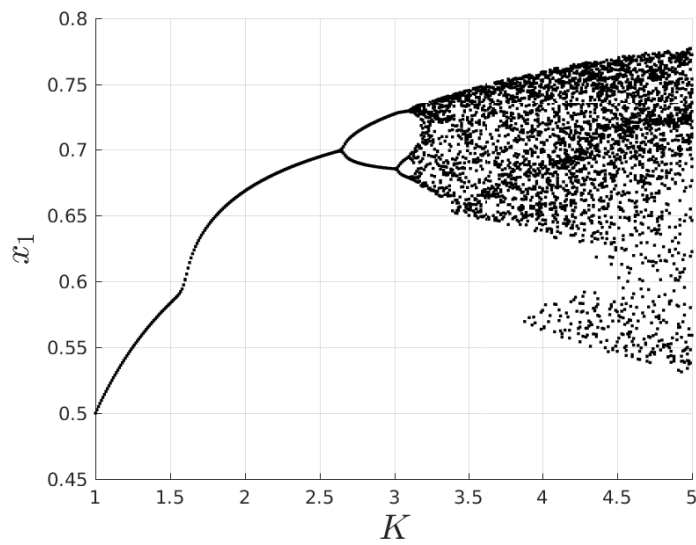


Figura 46. Diagrama de Feigenbaum del sistema (127) con el mapa logístico (128).

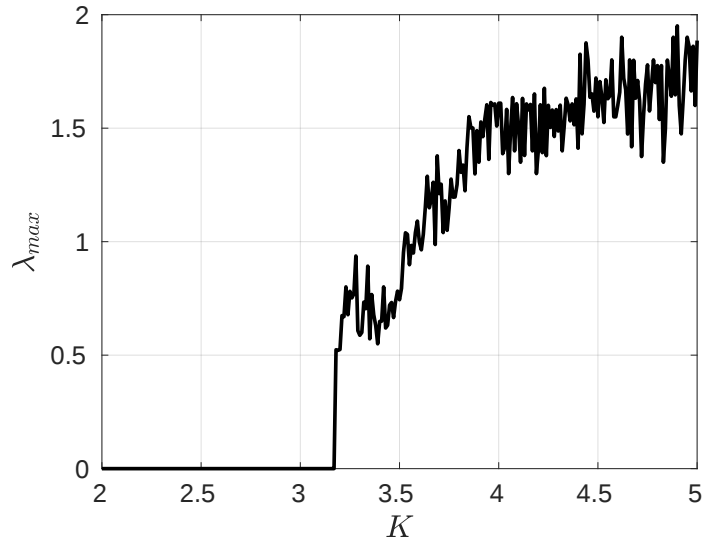


Figura 47. Máximo exponente de Lyapunov del sistema (127) con el mapa logístico (128) como una función del parámetro K .

6.4. Conclusiones

En este capítulo se adaptó el procedimiento utilizado para inducir oscilaciones periódicas y caóticas en sistemas de primer orden a sistemas de segundo orden. Al forzar a que los puntos de equilibrio sean inestables mediante la variación de un parámetro, e imponer condiciones de semipasividad en el sistema en lazo cerrado, se produce un comportamiento oscilatorio de éste. También se observó que este comportamiento oscilatorio depende de la ganancia de la entrada de control y de la dinámica del mapa φ propuesto como la función no lineal. Esto se ilustró mediante un ejemplo.

Capítulo 7. Conclusiones

En esta tesis se propusieron procedimientos sistemáticos para inducir oscilaciones periódicas y caóticas en sistemas de bajo orden, particularmente en sistemas de primer y segundo orden. Se planteron tres procedimientos, en los cuales se utilizó un control retroalimentado que depende del estado actual y del estado retardado un tiempo τ , y mediante algunos ejemplos se ilustró la efectividad que tiene cada uno de ellos.

En el primero de estos procedimientos se partió de un sistema de segundo orden tipo Lienard, en el cual se utilizó una señal de control que depende de una combinación lineal del estado actual y del estado retardado. Con la finalidad de evitar la dificultad del análisis de un sistema con retardos se utilizó las series de Taylor para expandir el retardo hasta el tercer orden y obtener una aproximación del sistema, para después igualarlo con algún sistema caótico existente. Para seleccionar el sistema caótico con el cual se iguala al sistema aproximado se utilizó un catálogo de sistemas caóticos propuesto por Sprott Sprott y Clinton (2010). Como se vió, este método es fácil de aplicar. Una vez que se tiene el sistema al que se va a igualar el sistema aproximado, basta con fijar las ganancias y el retardo del controlador para tener la igualdad de sistemas. Una limitante de este método es que sólo es aplicable a sistemas de segundo orden tipo Lienard y que depende de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ del sistema, con lo cual se podría tener dificultades para encontrar un sistema caótico al cual igualar al sistema aproximado. Sin embargo, a pesar de estas limitantes este método es una buena alternativa para producir órbitas caóticas en cierta clase de sistemas de segundo orden debido a la sencillez de aplicación.

Otro método propuesto en esta tesis para inducir órbitas periódicas o caóticas en sistemas dinámicos se basa en perturbaciones singulares. Este procedimiento, a diferencia del anterior, es aplicable a sistemas de cualquier orden. El procedimiento consiste, como primer paso, en llevar al sistema a la estructura de perturbaciones singulares, ya sea con una ley de control o mediante un cambio de variables, para después acoplarlo a un sistema de retardo puro ("pure shift") con la misma estructura que un sistema discreto (mapeo). Como resultado se tiene que el sistema en lazo cerrado es capaz de producir dinámicas similares a las del mapa utilizado; esto pudo observarse al aplicar este procedimiento en sistemas de primero, segundo y tercer orden, teniéndose como resultado que cada uno de ellos presentaron dinámicas similares a

las del mapa utilizado, en estos ejemplos se utiliza el mapa logístico. Estos resultados muestran que el método es aplicable a una amplia gama de sistemas dinámicos, a diferencia del procedimiento donde se aplica la aproximación por series de Taylor, que es aplicable sólo a sistemas de segundo orden tipo Lienard. Un inconveniente de este método es que, en la mayoría de los casos, se debe de eliminar la dinámica del sistema original y podría llevar a tener un esfuerzo de control muy grande. A pesar de ello, el método es confiable y cumple con el objetivo de inducir dinámicas periódicas o caóticas en sistemas dinámicos.

Por último, se propuso una técnica para generar oscilaciones periódicas y caóticas en sistemas continuos de primero y segundo orden. En esta técnica se planteó diseñar un control retroalimentado definido por una función no lineal del estado retardado y ajustando la ganancia del control se asegura la inestabilidad de todos los puntos de equilibrio del sistema en lazo cerrado. Una vez que se cumple con la inestabilidad de los puntos de equilibrio, mediante el concepto de semipasividad, se establecieron condiciones bajo las cuales se aseguró que las trayectorias del sistema en lazo cerrado permanecen acotadas, teniendo como resultado órbitas periódicas o caóticas. Esto pudo observarse en los ejemplos presentados en los capítulos 5 y 6. En el Capítulo 5 se aplicó esta técnica en un sistema pasivo de primer orden, utilizando como función no lineal a los mapas logístico, seno y triangular, y en el capítulo 6 se utilizó esta metodología en el oscilador de van der Pol, con el mapa logístico como la función no lineal. En todos estos ejemplos fue posible producir órbitas periódicas o caóticas, el tener una órbita u otra se logró ajustando tanto la ganancia del controlador como del parámetro correspondiente de los mapas utilizados. También pudo verse que no es necesario aplicar una ganancia grande para lograr inducir este tipo de órbitas sobre estos sistemas, a diferencia de lo que se establece en la técnica de perturbaciones singulares, por lo que puede verse como una ventaja utilizar esta técnica.

7.1. Trabajo a futuro

Este trabajo de tesis se enfocó en generar oscilaciones periódicas y caóticas en sistemas dinámicos de bajo orden, para ello se propusieron tres procedimientos, por lo que se propone como trabajo a futuro lo siguiente.

Para el método de aproximación por series de Taylor se parte de un sistema tipo

Lienard, con $f(x)$ y $g(x)$ definidas, para después igualar el sistema aproximado con un sistema caótico existente. Sería de interés poder establecer un procedimiento para realizar el proceso de forma inversa, partir de un sistema caótico sin retardos y obtener un sistema de segundo orden con retardos. También, es de interés estudiar las propiedades con las que deben de contar las funciones $f(x)$ y $g(x)$, para cuando se aplique el control propuesto y al fijar las ganancias y el retardo de éste, tener un sistema con órbitas caóticas.

Para la técnica en la que se aplica el concepto de semipasividad, un trabajo que puede desarrollarse es establecer condiciones bajo las cuales se pueda asegurar la inestabilidad de las órbitas periódicas y se tenga únicamente órbitas caóticas; así como las que se establecieron para la inestabilidad de los puntos de equilibrio y con las que se aseguraron, junto con la condición de semipasividad, la existencia de órbitas periódicas y caóticas. Otro trabajo que puede hacerse es establecer un rango para el retardo con el cual se siga conservando la propiedad de semipasividad del sistema.

Literatura citada

(????).

- Alvarez, J. (2000). Inducing periodic oscillations and chaos in continuous systems via time-delay controllers. En: *Control of Oscillations and Chaos, 2000. Proceedings. 2000 2nd International Conference*. IEEE, Vol. Vol. 2, pp. pp. 217–220.
- Álvarez, J. (2003). Notas del curso sistemas caóticos. Reporte técnico, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.
- Arino O., Hbid M. L., A. D. E. (2006). *Delay Differential Equations and Applications*, Vol. 205. Springer.
- Artstein, Z. y Slemrod, M. (2001). On singularly perturbed retarded functional differential equations. *Journal of Differential Equations*, **Vol. 171**: pp. 88–109.
- Aycock, B., Roe, A., Silverberg, J., y Widom, A. (2008). Classical hamiltonian dynamics and lie group algebras. *arXiv preprint arXiv:0807.4725*.
- Banks, S. P. y McCaffrey, D. (1998). Lie algebras, structure of nonlinear systems and chaotic motion. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **8**(07): 1437–1462.
- Basso, M., Genesio, R., y Tesi, A. (1997). Controlling chaos in a co_2 laser. En: *Control Conference (ECC), 1997 European*. IEEE, pp. 2094–2099.
- Bliman, P.-A. y Iwasaki, T. (2006). LMI characterisation of robust stability for time-delay systems: singular perturbation approach. En: *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*. IEEE, pp. 205–210.
- Califano, C., Marquez-Martinez, L. A., y Moog, C. H. (2011). Extended lie brackets for nonlinear time-delay systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, **56**(9): 2213–2218.
- Celka, P. (1999). Theory and experiments on nonlinear time-delayed feedback systems with application to chaos control. *Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems*, p. 233.
- Chen, G. (1999). *Controlling chaos and bifurcations in engineering systems*. CRC press.
- Chen, G. y Dong, X. (1993). From chaos to order perspectives and methodologies in controlling chaotic nonlinear dynamical systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **3**: 1363–1409.
- Chen, G. y Lai, D. (1998). Feedback anticontrol of discrete chaos. *Int. J. of Bif. and Chaos*, **Vol. 8**(07): 1585–1590.
- Chopra, N. (2008). Passivity results for interconnected systems with time delay. En: *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*. IEEE, pp. 4620–4625.
- Chopra, N. y Spong, M. W. (2007a). Adaptive synchronization of bilateral teleoperators with time delay. En: *Advances in telerobotics*. Springer, pp. 257–270.
- Chopra, N. y Spong, M. W. (2007b). Delay-independent stability for interconnected nonlinear systems with finite L_2 gain. En: *Decision and Control, 2007 46th IEEE Conference on*. IEEE, pp. 3847–3852.

- Chow, S., Hale, J., y Huang, W. (1992). From sine waves to square waves in delay equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, **Vol. 120**: pp. 223–229.
- Curry, D. M. (2012). Practical application of chaos theory to systems engineering. *Procedia Computer Science*, **8**: 39–44.
- Devaney, R. L. (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison–Wesley Publishing Company.
- Devaney, R. L. (1992). *A first course in chaotic dynamical systems*. Westview Press.
- Devaney, R. L. (2018). *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment*. CRC Press.
- FitzHugh, R. (1961). Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical journal*, **1**(6): 445–466.
- Fridman, E. (2002). Effects of small delays on stability of singularly perturbed systems. *Automatica*, **38**(5): 897–902.
- García-Ramírez, E., Peñaloza-Mejía, O., y Moog, C. H. (2017). Further comments on taylor series expansion of the delay/advance operator. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, **12**(3): 034501.
- Ge, Z.-M., Chang, C.-M., y Chen, Y.-S. (2006). Anti-control of chaos of single time scale brushless dc motors and chaos synchronization of different order systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, **27**(5): 1298–1315.
- Gonorovsky, I. y Grdian, A. (1972). *Señales y circuitos radiotécnicos*. Mir.
- Hale, J. K. y Huang, W. (1994). Period doubling in singularly perturbed delay equations. *Journal of Differential Equations*, **Vol. 114**: pp. 1–23.
- Hale, J. K. y Lunel, S. M. V. (2013). *Introduction to functional differential equations*, Vol. 99. Springer Science & Business Media.
- Heinz-Otto, P., Hartmut, J., y Dietmar, S. (2004). Chaos and fractals: new frontiers of science. *Unit State, Springer-Verlag*, pp. 475–479.
- Hu, H. y Wang, Z. (2009). Singular perturbation methods for nonlinear dynamic systems with time delays. *Chaos, Solitons & Fractals*, **40**(1): 13–27.
- Inspurger, T. y Stépán, G. (2011). *Semi-discretization for time-delay systems: stability and engineering applications*, Vol. 178. Springer Science & Business Media.
- J.R., F. G. (2018). *Análisis de estabilidad de sistemas lineales con retardo*. Tesis para obtener el grado de maestro en ciencias en electrónica y telecomunicaciones con orientación en control e instrumentación, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California.
- Khalil, H. K. (2002). Nonlinear systems. *Upper Saddle River*.
- Khalil, H. K. y Grizzle, J. (1996). *Nonlinear systems*, Vol. 3. Prentice hall New Jersey.

- Kim, T. R., Joo, Y. H., Park, J. B., y Chen, G. (2005). Anticontrol of chaos for a continuous-time takagi–sugeno fuzzy system via local time-delay feedback. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **Vol. 15**: pp. 3883–3894.
- Kuang, Y. (1993). *Delay differential equations: with applications in population dynamics*, Vol. 191. Academic Press.
- Lai, Y.-C. y Grebogi, C. (1996). Complexity in hamiltonian-driven dissipative chaotic dynamical systems. *Physical Review E*, **54**(5): 4667.
- Lakshmanan, M. y Senthilkumar, D. V. (2011). *Dynamics of nonlinear time-delay systems*. Springer Science & Business Media.
- Larson R., H. R. (1999). *Cálculo y geometría analítica*, Vol. 1. México. Mc Graw hill.
- Lawrence, P. (1991). Differential equations and dynamical systems. *Springer, Berlin, Heidelberg, New York*.
- Li, T. y Yorke, J. A. (1975). Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, **82**(10): 985–992.
- Liu, S.-Y., Yu, X., y Zhu, S.-J. (2008). Study on the chaos anti-control technology in nonlinear vibration isolation system. *Journal of Sound and Vibration*, **310**(4): 855–864.
- Lu, H. y He, Z. (1996). Chaotic behavior in first-order autonomous continuous-time systems with delay. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, **Vol. 43**: pp. 700–702.
- Lü, J., Zhou, T., Chen, G., y Yang, X. (2002). Generating chaos with a switching piecewise-linear controller. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **12**(2): 344–349.
- Luo, A. C. (2016). *Periodic Flows to Chaos in Time-delay Systems*, Vol. 16. Springer.
- Luo, Y., Liu, Q., y Che, X. (2013a). Mathematical programming method based on chaos anti-control for the solution of forward displacement of parallel robot mechanisms. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, **Vol. 10**: 32.
- Luo, Y., Liu, Q., Che, X., y Li, L. (2013b). Damped least-square method based on chaos anti-control for solving forward displacement of general 6-6-type parallel mechanism. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, **Vol. 10**: 186.
- Ma, W.-X. y Chen, M. (2006). Hamiltonian and quasi-hamiltonian structures associated with semi-direct sums of lie algebras. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **39**(34): 10787.
- Malek-Zavarei, M. y Jamshidi, M. (1987). *Time-delay systems: analysis, optimization and applications*. Elsevier Science Inc.
- Márquez, L. y Cuesta, R. (2019). Región de estabilidad de sistemas lineales de segundo orden con retardos. En proceso de publicación.
- Maschke, B. y Van der Schaft, A. (1992). Port-controlled hamiltonian systems: modeling origins and system theoretics properties. *Proc. of the IFAC symposium on NOLCOS*.

- Milton, J. y Jung, P. (2003). *Epilepsy as a dynamic disease*. Springer.
- Moog C., Castro R., V. M. y A., M. (2000). The disturbance decoupling problem for time-delay nonlinear systems. *IEEE Tr. on Aut. Ctrl.*, **45**(2): pp. 305–309.
- Nambu, Y. (1973). Generalized hamiltonian dynamics. *Physical Review D*, **7**(8): 2405.
- Nayfeh, A. H. y Balachandran, B. (2008). *Applied nonlinear dynamics: analytical, computational, and experimental methods*. John Wiley & Sons.
- Ogorzalek, M. J. (1999). Design and implementation of chaos control systems. *Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems*, p. 45.
- Orlov, Y. V. (2008). *Discontinuous systems: Lyapunov analysis and robust synthesis under uncertainty conditions*. Springer Science & Business Media.
- Parker, T. S. y Chua, L. (2012). *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. Springer Science & Business Media.
- Pasumathy, R. y Kao, C.-Y. (2009). On stability of time delay hamiltonian systems. En: *American Control Conference, 2009. ACC'09.*. IEEE, pp. 4909–4914.
- Pecora, L. y Carroll, T. L. (2015). "synchronization of chaotic systems". *Chaos*, **Vol. 25**(9): 097611.
- Peitgen, H.-O., Jürgens, H., y Saupe, D. (2006). *Chaos and fractals: new frontiers of science*. Springer Science & Business Media.
- Perko, L. (1996). *Differential equations and dynamical systems*, Vol. 2. Springer.
- Perko, L. (2001). *Differential equations and dynamical systems*, Vol. 7. Springer Science & Business Media.
- Pogromsky, A. y Nijmeijer, H. (2001). Cooperative oscillatory behavior of mutually coupled dynamical systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, **48**(2): 152–162.
- Poland, D. (1994). Loci of limit cycles. *Physical Review E*, **49**(1): 157.
- Pontryagin, L. S. (1955). On the zeros of some elementary transcendental functions. *Amer. Math. Soc. Transl*, **2**(1): 95–110.
- Pyragas, K. (1992). Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A*, **Vol. 170**(6): pp 421 – 428.
- Pyragas, K. y Tamaševičius, A. (1993). Experimental control of chaos by delayed self-controlling feedback. *Physics Letters A*, **Vol. 180**: pp. 99–102.
- Q. Y., S., H. G., Z., y Y., Z. (2010). Generating li–yorke chaos in a stable continuous-time t–s fuzzy model via time-delay feedback control. *Chinese Physics B*, **Vol. 19**: pp. 070512.
- Roup, A. V. y Bernstein, D. S. (2001). Adaptive stabilization of a class of nonlinear systems with nonparametric uncertainty. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, **46**(11): 1821–1825.

- Salasnich, L. (1996). On the limit cycle of an inflationary universe. *arXiv preprint gr-qc/9612045*.
- Schot, S. H. (1978). Jerk: the time rate of change of acceleration. *American Journal of Physics*, **46**(11): 1090–1094.
- Shivamoggi, B. K. (2014). *Nonlinear dynamics and chaotic phenomena*. Springer.
- Sira-Ramirez, H. y Cruz-Hernández, C. (2001). Synchronization of chaotic systems: a generalized hamiltonian systems approach. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **11**(05): 1381–1395.
- Slotine, J.-J. E., Li, W., et al. (1991). *Applied nonlinear control*, Vol. 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ.
- Smale, S. (1967). Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American mathematical Society*, **73**(6): 747–817.
- Snaselova, P. y Zboril, F. (2015). Genetic algorithm using theory of chaos. *Procedia Computer Science*, **Vol. 51**: 316–325.
- Soto, O. y Álvarez, J. (2013). Generación de una ruta al caos en una clase de sistemas de tercer orden. *Congreso Nacional de Control Automático*.
- Sprott, J. C. y Clinton, S. J. (2010). *Elegant chaos: algebraically simple chaotic flows*. World Scientific.
- Stefanski, A. et al. (2000). Using chaos synchronization to estimate the largest lyapunov exponent of nonsmooth systems. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **4**(3): 207–215.
- Stefanski, A., Dabrowski, A., y Kapitaniak, T. (2005). Evaluation of the largest lyapunov exponent in dynamical systems with time delay. *Chaos, Solitons & Fractals*, **23**(5): 1651–1659.
- Stefañski, A., Kapitaniak, T., y Dąbrowski, A. (2005). The largest lyapunov exponent of dynamical systems with time delay. En: *IUTAM Symposium on Chaotic Dynamics and Control of Systems and Processes in Mechanics*. Springer, pp. 493–500.
- Steuer, E. y Nijmeijer, H. (2011). Synchronization in networks of diffusively time-delay coupled (semi-) passive systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, **58**(6): 1358–1371.
- Steuer, E., Tyukin, I., y Nijmeijer, H. (2009). Semi-passivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **238**(21): 2119–2128.
- Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics. Biology, Chemistry, and Engineering (Studies in Nonlinearity)*, Perseus, Cambridge, UK.
- Sun, W., Wang, Y., y Feng, G. (2006). Stability analysis for time-delay hamiltonian systems. En: *Control, Automation, Robotics and Vision, 2006. ICARCV 06. 9th International Conference on*. IEEE, pp. 1–6.

- Sun, W., Wang, Y., y Yang, R. (2011). $\mathcal{L}_2$ disturbance attenuation for a class of time-delay hamiltonian systems. *Journal of Systems Science and Complexity*, **24**(4): 672–682.
- Tang, K.-S., Man, K. F., Zhong, G.-Q., y Chen, G. (2001). Generating chaos via $x|x|$. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, **48**(5): 636–641.
- Tian, Y. y Gao, F. (1998). Adaptive control of chaotic continuous-time systems with delay. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **Vol. 117**: pp. 1–12.
- Van der Pol, B. (1926). Lxxxviii. on relaxation-oscillations. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **2**(11): 978–992.
- van der Schaft, A. (2000). Port controlled hamiltonian systems: towards a theory for control and design of nonlinear physical systems. *Journal of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE)*, **39**(2): 91–98.
- Wang, X. F. (2003). Generating chaos in continuous-time systems via feedback control. En: *Chaos control*. Springer, pp. pp.179–204.
- Wang, X. F. y Chen, G. (1999). On feedback anticontrol of discrete chaos. *Int. J. of Bif. and chaos*, **Vol. 9**(07): 1435–1441.
- Wang, X. F. y Chen, G. (2000). Chaotifying a stable lti system by tiny feedback control. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, **47**(3): 410–415.
- Wang, X. F., Chen, G., y Yu, X. (2000). Anticontrol of chaos in continuous-time systems via time-delay feedback. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **Vol. 10**: pp. 771–779.
- Wiggins, S. (2003). *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Vol. 2. Springer Science & Business Media.
- Xu, H. y Jin, Y. (2014). The asymptotic solutions for a class of nonlinear singular perturbed differential systems with time delays. *The Scientific World Journal*, **2014**.
- Yalçın, M. E. y Özoguz, S. (2007). N-scroll chaotic attractors from a first-order time-delay differential equation. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **Vol. 17**: pp. 033112.
- Yang, L., Liu, Z., y Chen, G. (2002). Chaotifying a continuous-time system via impulsive input. *International Journal of Bifurcation and chaos*, **12**(05): 1121–1128.
- Yang, R. y Wang, Y. (2013). Finite-time stability analysis and H_∞ control for a class of nonlinear time-delay hamiltonian systems. *Automatica*, **49**(2): 390–401.
- Yang, T. y Chua, L. O. (1997). Chaotic digital code-division multiple access (cdma) communication systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **7**(12): 2789–2805.
- Yu, X., Tian, Y., y Chen, G. (2000). Time delayed feedback control of chaos. *Controlling chaos and bifurcations in engineering systems*, pp. 255–274.

- Zhong, G.-Q., Man, K. F., y Chen, G. (2001). Generating chaos via a dynamical controller. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **11**(03): 865–869.
- Zhou, T., Chen, G., y Yang, Q. (2004). A simple time-delay feedback anticontrol method made rigorous. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **Vol. 14**: pp. 662–668.