

**CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA**

**EL EFECTO DEL FLUJO ADVECTIVO/DIFUSIVO LATERAL
DE CALOR EN UN MODELO DE ESTRATIFICACION**

**T E S I S
MAESTRIA EN CIENCIAS**

Carlos Rodolfo Torres Navarrete

RESUMEN de la Tesis de **CARLOS RODOLFO TORRES NAVARRETE** presentada como requisito parcial para la obtención del grado de **MAESTRO EN CIENCIAS EN OCEANOLOGIA** con opción en **OCEANOGRAFIA FISICA**. Ensenada, Baja California, México. Julio de 1988.

**EL EFECTO DEL FLUJO ADVECTIVO/DIFUSIVO LATERAL
DE CALOR EN UN MODELO DE ESTRATIFICACION**

Resumen aprobado por:



Dr. Miguel F. Lavín Peregrina
Director de Tesis

A partir de principios de conservación de calor y de energía cinética turbulenta, se obtienen dos ecuaciones diferenciales que describen la evolución estacional de la energía potencial, y calor almacenado, de una columna de agua sujeta a mezcla vertical (por viento y marea) y a difusión y advección lateral con corte en la vertical sobre un fondo variable. Estas ecuaciones son más generales que las disponibles hasta ahora, y pueden ser reducidas a casos particulares estudiados por otros autores. Se estudia el efecto de la difusión lateral de calor a través de un frente, mediante la solución de las ecuaciones en diferencias finitas. Las predicciones concuerdan mejor con el comportamiento estacional de la estratificación y calor almacenado observados en el Mar de Irlanda, que las de los modelos sin difusión.

**CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA**

**DIVISION DE OCEANOLOGIA
DEPARTAMENTO DE OCEANOGRAFIA FISICA**

**EL EFECTO DEL FLUJO ADVECTIVO/DIFUSIVO LATERAL
DE CALOR EN UN MODELO DE ESTRATIFICACION**

Tesis

**que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios
para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS presenta:**

CARLOS RODOLFO TORRES NAVARRETE

Ensenada, B. C. Julio de 1988

TESIS APROBADA PARA SU DEFENSA POR:

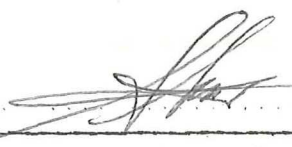


Dr. Miguel Fernando Lavín Peregrina, Director del Comité



Dra. María Luisa Argote Espinoza, Miembro del Comité

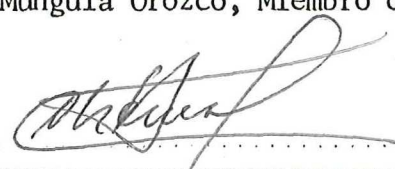
Dr. José Luis Ochoa de la Torre, Miembro del Comité



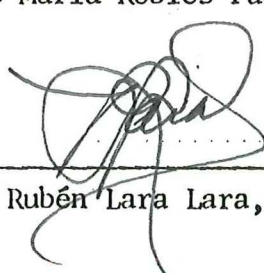
M.C. Alberto Amador Buenrostro, Miembro del Comité



Dr. Luis Munguía Orozco, Miembro del Comité



M.C. José María Robles Pacheco, Jefe del Departamento de Oceanografía Física



Dr. José Rubén Lara Lara, Director de la División de Oceanología



M.C. Cuauhtémoc Nava Button, Director Académico

Tesis presentada en Julio 07, 1988.

DEDICATORIA

A

Rodolfo y Brígida

AGRADECIMIENTOS

A mi director de tesis, Dr. Miguel F. Lavín, por su continuo apoyo e invaluable asesorías.

A los miembros del comité de tesis: Dr. J. Luis Ochoa, Dr. M. Luisa Argote, Dr. Luis Munguía, y M. en C. Alberto Amador, por sus críticas y sugerencias, las cuales ayudaron a mejorar la calidad del escrito.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE) por el apoyo económico otorgado durante las etapas finales de este trabajo.

A las personas de la sección de dibujo de CICESE.

A mis compañeros del grupo de Oceanografía Física del Instituto de Investigaciones Oceanológicas (IIO).

Al M. en C. Luis Galindo por las facilidades otorgadas para la impresión del escrito.

A todas las personas que de una forma u otra colaboraron en este trabajo.

CONTENIDO

	Página
I INTRODUCCION	1
1.1 Estratificación en mares someros	1
1.2 Planteamiento del problema	6
1.3 Objetivos	14
II INCLUSION DE TERMINOS LATERALES ADVECTIVOS Y DIFUSIVOS DE CALOR	16
2.1 Introducción	16
2.2 Anomalia de energía potencial, ϕ	16
2.3 El modelo de energía potencial (MEP)	17
2.4 Adición de términos laterales advectivos y difusivos	20
2.5 Casos particulares	26
2.5.1 Advección con velocidad constante	26
2.5.2 Efecto de la advección en un modelo de 2 capas	28
2.5.3 Advección con corte en la vertical	31
2.6 Resumen	31
III EL EFECTO DE LOS TERMINOS DE DIFUSION LATERAL	34
3.1 Introducción	34
3.2 El modelo	37
3.3 Datos de entrada	40
3.4 Esquema en diferencia finitas	43
3.4.1 Condiciones iniciales y de frontera	45
3.5 Resultados	46
3.5.1 Ciclo estacional de ϕ y (Q/h) en la estación central	46
3.5.2 ϕ sin difusión (sección de estaciones)	49
3.5.3 ϕ con difusión (sección)	51
3.5.4 Los efectos del término de difusión lateral de ϕ	53
3.5.5 Q/h sin difusión (sección)	57

CONTENIDO (CONT.)		Página
3.5.6 Q/h con difusión lateral (sección)		57
3.5.7 Los efectos del término de difusión lateral de calor		59
3.6 Resumen		64
IV DISCUSIONES Y CONCLUSIONES		66
4.1 Introducción		66
4.2 Estratificación		66
4.3 Calor almacenado		67
4.4 Casos Particulares		69
4.5 Conclusiones		70
4.6 Recomendaciones		71
LITERATURA CITADA		74
APENDICE		78

LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
1	Idealización de la formación de estratificación en mares someros. El flujo superficial de calor trata de estratificar la columna, mientras que la energía cinética turbulenta asociada con el viento y las corrientes de marea tienden a homogeneizarla.	2
2	a) corte a través de un frente idealizado; b) frentes observados alrededor de las Islas Británicas, en verano (tomado de Simpson et al. 1977).	3
3	Comparación entre las observaciones (línea gruesa) y las predicciones (línea delgada) para la estación B8: a) energía potencial, b) calor almacenado. (tomada de Lavín, 1984).	7
4	Mecanismo propuesto de difusión de calor a través de un frente.	9
5	Representación en modelo de cajas del mecanismo de difusión lateral de calor.	11
6	Entrada y resultados del modelo de cajas: a) flujo superficial de calor Q_s (entrada), b) densidad de calor almacenado Q/h , c) estratificación σ , d) temperaturas. Línea continua caso sin difusión; punteada, caso con difusión.	13
7	Representación esquemática del modelo obtenido. La energía potencial de la columna depende de la mezcla por viento y corrientes de marea, flujo superficial de calor, y advección con corte de velocidades sobre una topografía variable. El MEP es un caso particular de este modelo.	25
8	El modelo utilizado por Argote (1983). Innovación al MEP: advección y topografía variable (ver texto para detalles).	27
9	El modelo utilizado por Czitrom (1982). Innovación al MEP: advección en dos capas y aporte de agua dulce.	30

LISTA DE FIGURAS (CONT.)

Figura		Página
10	El modelo utilizado por Van Aken (1986): Innovación al MEP: advección con velocidades de corte.	32
11	a) distribución de estratificación en el Mar de Irlanda durante verano, frente asociado y sección de estaciones a través de éste; b) corrientes de marea U ₂ (línea cortada) y perfil de profundidades (línea gruesa) en la sección. (Adaptada de Lavín, 1984).	35
12	Desarrollo estacional de, a) estratificación ϕ ; y, b) densidad de calor almacenado Q/h, observados en la sección durante 1981. (tomada de Lavín, 1984).	36
13	El modelo utilizado. En este caso, la estratificación depende de los flujos superficial y lateral de calor, y la mezcla por viento y corrientes de marea.	39
14	Entradas utilizadas: a) flujo superficial de calor Q _s , b) corrientes de marea U ₂ , y c) perfil de profundidades. Los triángulos negros representan las estaciones hidrográficas mostradas en la Fig.11.	41
15	Malla espacio-tiempo sobre la cual se integran las ecuaciones de difusión 33 y 34. n es el tiempo y j una estación particular.	44
16	Ciclo estacional de, a) calor almacenado Q, y b) estratificación ϕ en la estación central (M ₈) y la más somera (M ₂₅).	47
17	Desarrollo estacional de ϕ (líneas delgadas) en la sección y comparación con las observaciones (línea gruesa); caso sin difusión.	50
18	Desarrollo estacional de ϕ (líneas delgadas) en la sección y comparación con las observaciones (línea gruesa); caso con difusión.	52
19	Desarrollo estacional del término de difusión lateral de ϕ en la sección.	54

LISTA DE FIGURAS (CONT.)

Figura		Página
20	Relación entre ϕ_{air} y ϕ en la sección (ver texto para detalles).	56
21	Desarrollo estacional del Q/h predicho (línea delgada), y comparación con las observaciones (línea gruesa); caso sin difusión.	58
22	Desarrollo estacional del Q/h predicho (línea delgada), y comparación con las observaciones (línea gruesa); caso con difusión.	60
23	Desarrollo estacional del término de difusión lateral de calor en la sección.	61
24	Relación entre Q_{air} y Q en la sección (ver texto para detalles).*	63

EL EFECTO DEL FLUJO ADVECTIVO/DIFUSIVO LATERAL DE CALOR EN UN MODELO DE ESTRATIFICACION

I INTRODUCCION

1.1 Estratificación en mares someros

En regiones del margen continental que experimentan una disipación fuerte de energía de mareas y un intercambio intenso de calor durante el ciclo anual, es posible la formación de frentes térmicos. En estas regiones, la estratificación está regida por una competencia entre el flujo superficial de calor, que fomenta la estratificación, y la mezcla producida por el esfuerzo del viento en la superficie y las corrientes de marea en el fondo (Fig.1). En verano, el flujo de calor a través de la superficie calienta las capas superiores del mar, las cuales se tornan menos densas y tienden a descansar establemente sobre las aguas subsuperficiales frías y más densas. La mezcla por viento sobre éstas forma una capa mezclada forzando hacia abajo y fortaleciendo la termoclina.

En mares someros, la turbulencia asociada con el flujo de la marea sobre el fondo forma una capa mezclada en el fondo, la cual tiende a aumentar, forzando hacia arriba y fortaleciendo también a la termoclina. Si la agitación producida por el viento o la marea es suficientemente vigorosa, se rompe esta estratificación estable y se mezcla la columna de agua a una densidad uniforme desde la superficie hasta el fondo. Como resultado, se presentan regiones mezcladas al lado de regiones estratificadas (Fig.2a); la frontera entre éstas normalmente está delimitada

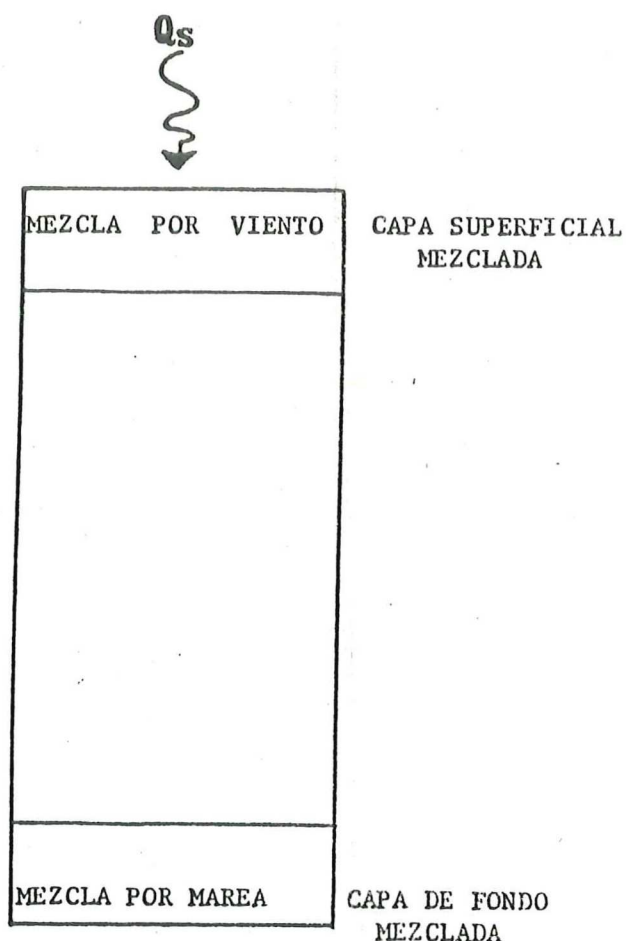


Fig.1. Idealización de la formación de estratificación en mares someros. El flujo superficial de calor trata de estratificar la columna, mientras que la energía cinética turbulenta asociada con el viento y las corrientes de marea tienden a homogeneizarla.

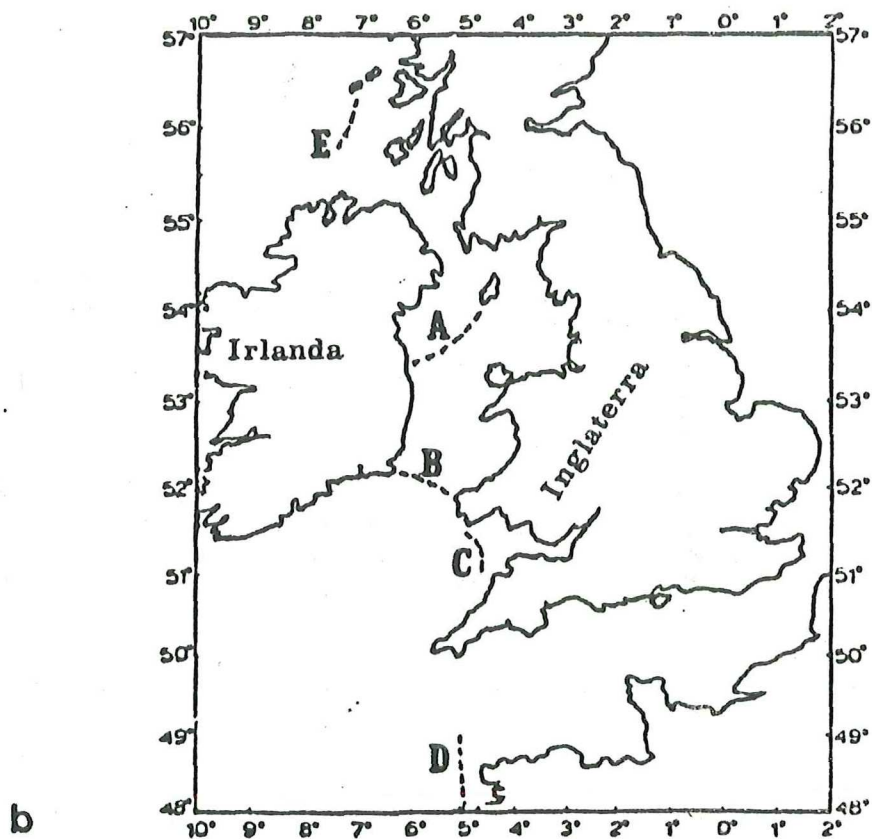
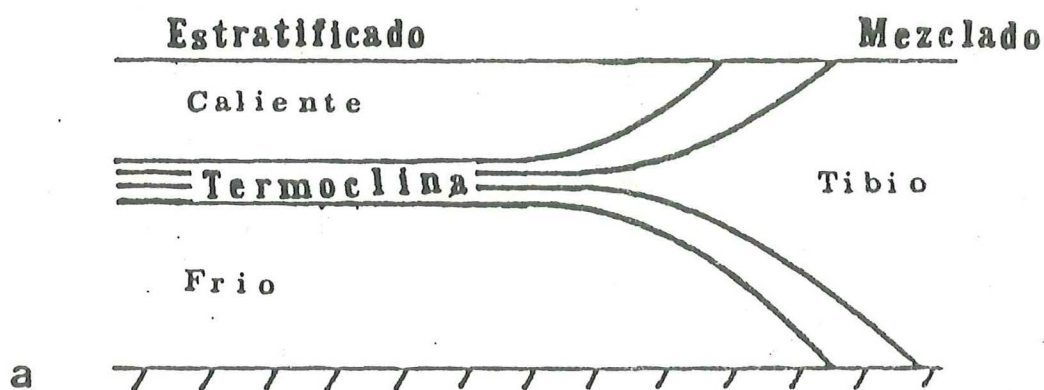


Fig.2. a) corte a través de un frente idealizado; b) frentes observados alrededor de las Islas Británicas, en verano, (tomado de Simpson et al. 1977).

por una franja de pocos kilómetros de ancho donde la termoclina sube a la superficie, referida generalmente como frente térmico (Simpson et al. 1977; Simpson y Bowers, 1981). Tales frentes se han observado alrededor de las Islas Británicas durante los meses de verano y han atraído el interés científico desde la década de los 70's; su importancia como proceso físico ha sido sintetizada por Mooers (1978). La Fig.2b muestra la posición de algunos de estos frentes en el Canal de la Mancha (B), en el Mar Céltico (D), en el Mar de Irlanda (A), y al NE de las costas de Irlanda del Norte (E).

En general, un frente actúa como una frontera física entre masas de agua de diferente estructura salina y termal donde el flujo lateral de propiedades es localmente intenso. Este intercambio de propiedades puede modificar la estructura térmica del agua a cada lado de éste y, además, puede crear condiciones favorables para una variedad de procesos biológicos como se ha observado cerca de frentes (ver p. ej. Bowman y Esaias, 1978; Pingree y Mardell, 1981; Richardson et al. 1985; Van Aken, 1987).

La mayoría de los frentes son persistentes estacionalmente y su posición aproximada puede predecirse cuantitativamente mediante el predictor de estratificación de Simpson y Hunter (1974), el cual considera que la estratificación de la columna depende únicamente del flujo superficial de calor (constante) y mezcla producida por la marea; la utilidad del predictor fué demostrada en estudios posteriores como los de Simpson et al. (1977, 1978), Pingree et al. (1978), Garret et al. (1978), Schumacher et al. (1979), y Bowman et al. (1979).

Para poder comparar los valores del predictor de estratificación con la estratificación presente en la

columna, Simpson et al. (1977) introdujeron la anomalía de energía potencial ϕ , definida por la ec.5, y que representa el trabajo mecánico por unidad de volumen que se gastaría en mezclar completamente dicha columna. Para una columna estratificada ϕ es positiva, mientras que para una completamente mezclada $\phi = 0 \text{ J m}^{-3}$.

La estratificación, y por tanto ϕ , aumenta con los flujos de flotabilidad (inducidos principalmente por el flujo superficial de calor) y disminuye por el mezclado vertical (provocado por el viento y la marea). Tales procesos están representados en el modelo de energía potencial (MEP), dado por la ec. (10), desarrollado por Simpson et al. (1977); este modelo se obtiene detalladamente al inicio del capítulo II. A diferencia del modelo de Simpson y Hunter (1974), el MEP considera que la estratificación depende del flujo superficial de calor y la mezcla producida por el viento y la marea (Fig.1).

El MEP y su uso en predicción de frentes se ha utilizado con éxito en otros lugares del mundo (Simpson, 1981; Bowden, 1983) y ha sido extendido para estudiar el efecto de procesos advectivos en el desarrollo de estratificación (Simpson, 1981; Czitrom, 1982; Argote, 1983; Van Aken, 1986). Sin embargo, las predicciones de ϕ en estudios del ciclo estacional de estratificación en el Mar de Irlanda (Lavín, 1984) y en el Golfo de California (Organista, 1987), sugieren que la existencia de flujos laterales de calor (advectivos o difusivos) a través de un frente puede ser significativa en el desarrollo de estratificación y deberían de considerarse para obtener predicciones más satisfactorias.

La importancia de los flujos laterales en la distribución de la temperatura de la columna fué señalada anteriormente

por Bowden (1955, 1965), Simpson (1971) y, posteriormente, por Pingree et al. (1975) y Garret y Loder (1981) entre otros. Sin embargo, la inclusión de estos procesos en el MEP así como su efecto en el desarrollo de la estratificación aún no ha sido estudiado.

1.2 Planteamiento del problema

Lavín (1984), utilizó el MEP para estudiar el desarrollo estacional de la estratificación en una sección de estaciones del Mar de Irlanda y también calculó el calor almacenado en éstas. Posteriormente comparó las predicciones con las observaciones.

La Fig.3a muestra la comparación de ϕ para una estación en que la profundidad fué de aproximadamente 100 m (B_8). Los valores observados aumentan desde abril hasta verano, seguidos de un período en que se mantienen más o menos estables con $\phi \sim 70 \text{ J m}^{-3}$ y un máximo de aproximadamente 90 J m^{-3} . A principios de septiembre estos valores empiezan a disminuir y para la primera semana de octubre son cero. El MEP predice muy bien el inicio y avance de la estratificación, pero tiende a sobreestimar los valores (en septiembre hasta por un factor de 3) y no finaliza el ciclo de la estratificación ya que predice estratificación cuando las observaciones indican condiciones de mezcla.

La Fig.3b muestra la comparación de los valores de calor almacenado observados y predichos para la misma columna. Durante abril y mayo las dos curvas exhiben un comportamiento similar, sin embargo, conforme transcurre el tiempo, los valores observados se incrementan más rápido que los predichos, o sea, se predice menos calor del que se observa.

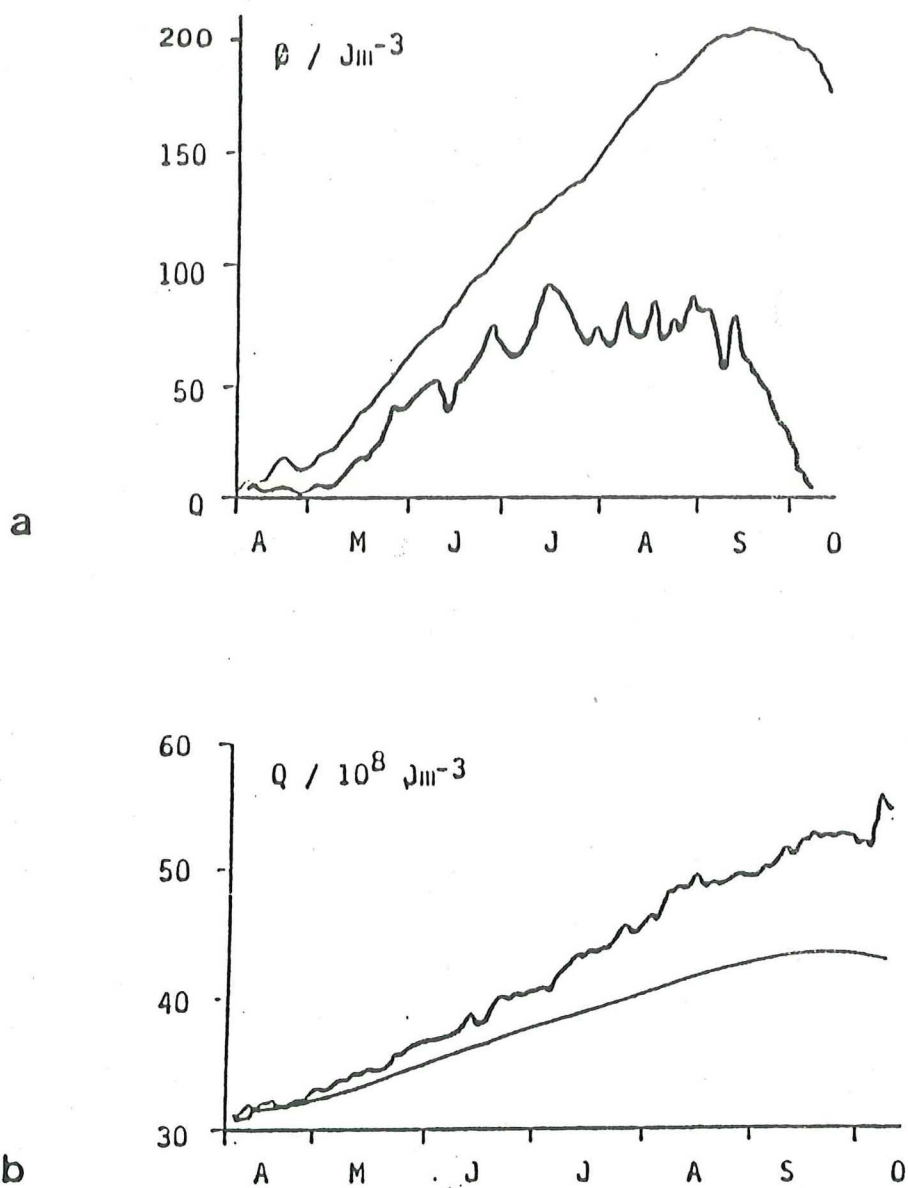


Fig.3. Comparación entre las observaciones (línea gruesa) y las predicciones (línea delgada) para la estación B8: a) energía potencial, b) calor almacenado. (tomada de Lavín, 1984).

El efecto es más notable durante los meses de verano. Las dos curvas alcanzan su valor máximo a principios de octubre (observada, 50 J m^{-3} ; predicha, 40 J m^{-3}).

La discrepancia de las predicciones (calor almacenado y ϕ) respecto de las observaciones se debe a que en ambos casos se considera que la columna de agua está aislada de sus alrededores (únicamente recibe el flujo superficial de calor) y no se permite intercambio de calor con las columnas vecinas. En la realidad, se sabe que el calor almacenado puede cambiar debido a la existencia de flujos laterales de calor (como se mencionó en la sección anterior), los cuales se intensifican durante los meses de verano y de alguna manera son capaces de modificar la estratificación de la columna.

Se postula que la inclusión de los flujos laterales de calor en el MEP y en el cálculo de calor almacenado, puede mejorar cualitativamente las predicciones, de acuerdo con el mecanismo que se representa en la Fig.4 y que se describe a continuación. La figura muestra la situación de un verano típico (en mares someros) en que se presentan dos frentes, uno superficial y otro de fondo separando una región verticalmente mezclada de otra estratificada. Q_s es el flujo de calor por la superficie y Q_l y Q_v son los flujos lateral y vertical de calor respectivamente (todos en W m^{-2}); las flechas indican el sentido de éstos.

La tendencia natural de cualquier Q_l sería dirigirse hacia aguas más frías; es decir, hacia aguas mezcladas en las capas superiores y hacia la zona estratificada en las inferiores. El transporte neto de Q_l va a depender, en parte, de la distribución de temperaturas; Lavín (1984) argumenta que en el Mar de Irlanda el Q_l neto es hacia aguas

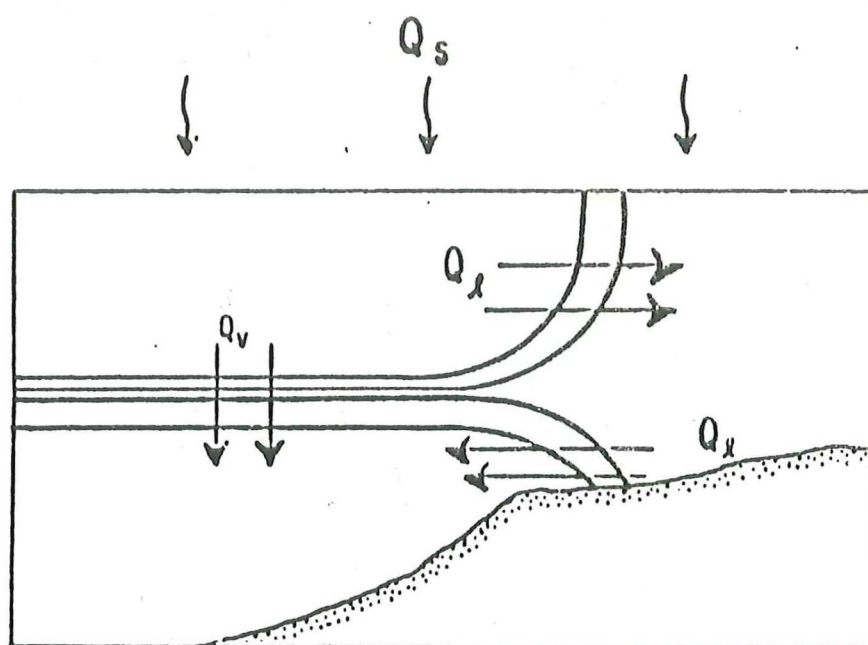


Fig.4. Mecanismo propuesto de difusión de calor a través de un frente.

estratificadas (profundas) en verano y hacia aguas mezcladas (menos profundas) en invierno. Independientemente del transporte Q_1 neto, su existencia reduce la diferencia de temperaturas entre las capas superior e inferior y, por lo tanto, hace que los valores de ϕ disminuyan.

Para aclarar estos argumentos, se simula un mecanismo, de acuerdo a lo anteriormente descrito, mediante un modelo de cajas (Fig.5). Las ecuaciones de conservación de calor de la parte estratificada (cajas 1 y 2) son:

$$\Delta T_1 = \frac{1}{\rho_0 C_p h_1} (Q_s - Q_{11} - Q_v) \Delta t, \quad (1a)$$

$$\Delta T_2 = \frac{1}{\rho_0 C_p h_2} (Q_v + Q_{13}) \Delta t, \quad (1b)$$

donde ρ_0 es una densidad de referencia, C_p el calor específico del agua, h_1 y h_2 (iguales a 20 m) son las profundidades de cada caja, $Q_s = Q_0 \cos(\omega t)$ el flujo superficial de calor ($Q_0 = 120 \text{ W m}^{-2}$ y $\omega = 2 / 365$ días). Los flujos Q_1 y Q_v fueron parametrizados como $Q_1 = K_x (T_i - T_3)$, $i = 1, 2$; $Q_v = K_z (T_2 - T_1)$ donde $K_x = 131 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (Lavín, 1984) y $K_z = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (Krauss, 1973). Las temperaturas iniciales, similares a las del Mar de Irlanda a principios de verano (Bowden 1983), fueron 12, 10 y 11 °C para T_1 , T_2 y T_3 respectivamente, en $t(0) = \text{junio 15}$ (principios de verano); el intervalo de tiempo, Δt , se escogió de un día.

La densidad de calor almacenado, Q/h , en la parte estratificada así como la energía potencial, ϕ , se calcularon, respectivamente, como;

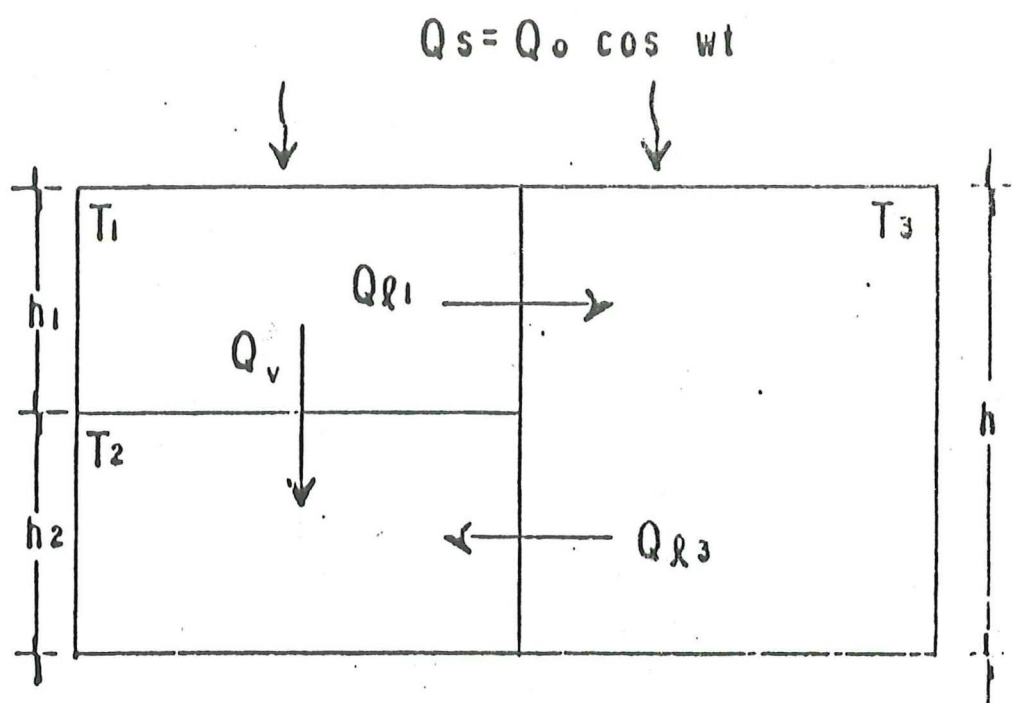


Fig.5. Representación en modelo de cajas del mecanismo de difusión lateral de calor.

$$\frac{Q}{h} = \frac{\rho_0 C_p}{h_1 + h_2} (h_1 T_1 + h_2 T_2), \quad (2)$$

$$\phi = \frac{1}{2} \rho_0 g \alpha (T_2 - T_1) \left(1 - \frac{h_1}{h} \right) h_1, \quad (3)$$

donde α es el coeficiente de expansión térmica del agua de mar. La ecuación (3) indica que la estratificación (para dos capas) es proporcional a la diferencia de temperaturas ($T_2 - T_1$) entre la capa superior y la de fondo. Ya que los procesos difusivos tienden a disminuir esta diferencia, al incluirlos, los valores de ϕ tenderán a disminuir.

En la Fig.6 se muestran los resultados para los casos con y sin difusión lateral de calor. Se observa la dependencia entre ϕ y ($T_2 - T_1$); entre mayor es la diferencia ($T_2 - T_1$) más grandes son los valores de ϕ (Fig.6c, d). Sin embargo, los máximos de ϕ en ambos casos no coinciden, ya que en el caso con difusión ($\phi = 32 \text{ J m}^{-3}$) ocurre a mediados de julio, mientras que en el otro ($\phi = 50 \text{ J m}^{-3}$) a principios de agosto. Algo similar sucede con la homogeneización de la columna: en el caso con difusión, a mediados de octubre la columna está homogénea y, en el otro caso, a mediados de noviembre. En cuanto a Q/h , los valores del caso con difusión son ligeramente menores (aproximadamente en 5 %) que los del caso sin difusión (Fig.6b).

Al incluir difusión, los valores de ϕ disminuyeron, y el tiempo de ocurrencia del máximo, así como el de homogeneización, ocurrieron alrededor de un mes antes que en el caso sin difusión. En el caso de calor almacenado, los valores fueron ligeramente menores que en el otro caso.

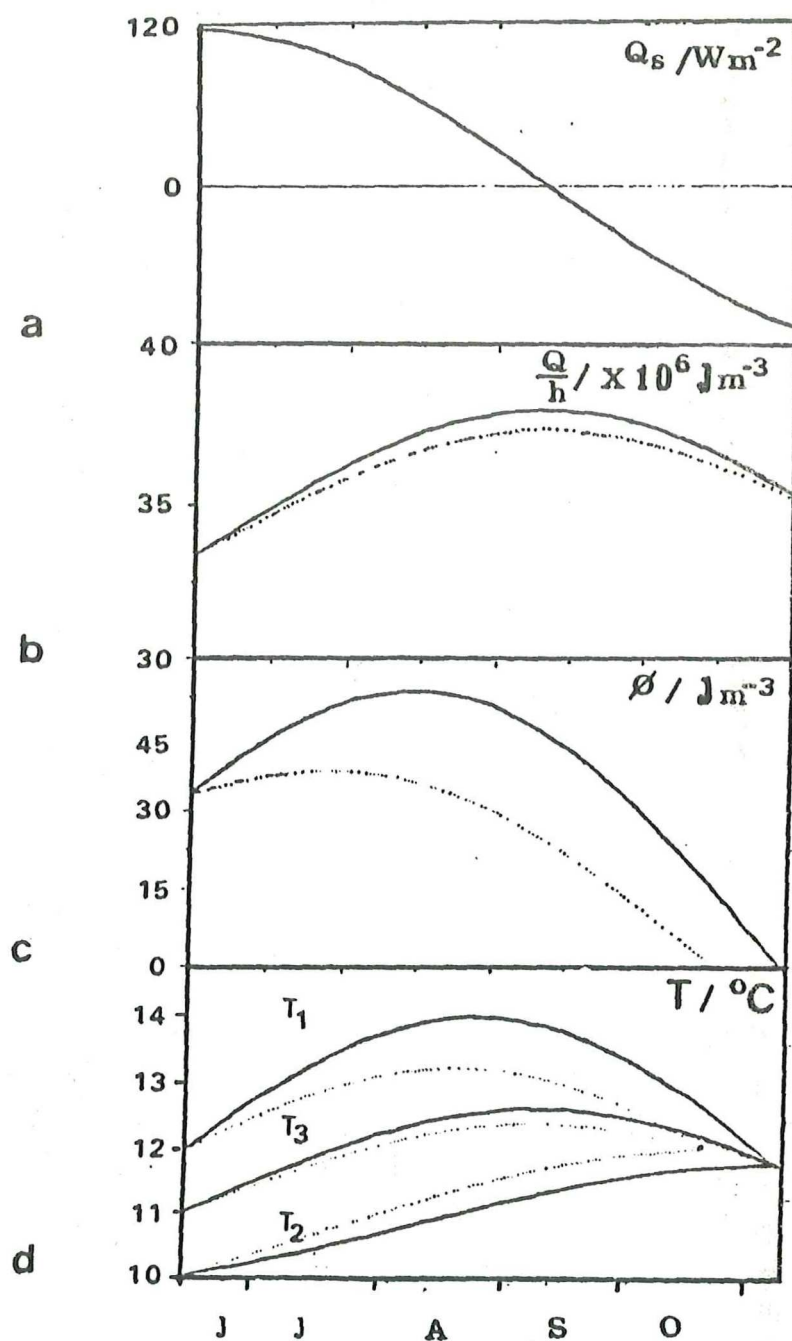


Fig.6. Entrada y resultados del modelo de cajas: a) flujo superficial de calor Q_s (entrada), b) densidad de calor almacenado Q/h , c) estratificación ϕ , d) temperaturas. Línea continua caso sin difusión; punteada, caso con difusión.

1.3 Objetivos

En este trabajo se investiga el efecto de los flujos laterales advectivos y difusivos de calor en el desarrollo de la estratificación, extendiendo el MEP con la inclusión de los términos que representan estos flujos. En este caso, se considera que la estratificación cambia por:

- a) flujo superficial de calor,
- b) mezcla producida por viento y marea, y
- c) flujo lateral advectivo y difusivo de calor

Objetivos particulares:

1.- Obtener una ecuación diferencial general que describa la evolución de la energía potencial (incluyendo advección y difusión) y demostrar que, mediante las suposiciones adecuadas, puede reducirse a casos particulares de advección publicados por otros autores (Czitrom, 1982; Argote, 1983; Van Aken, 1986).

2.- Simplificar la ecuación obtenida a un caso sencillo que incluya difusión lateral de calor; investigar el comportamiento de su solución y compararla con los patrones de estratificación observados en el Mar de Irlanda.

El trabajo está organizado como sigue: el Capítulo II presenta la formulación matemática del modelo que es, en esencia, una ampliación del MEP, e incluye los desarrollos realizados para obtener la expresión general de la tasa de cambio de ϕ . En el Capítulo III esta expresión es simplificada e integrada numéricamente para investigar en detalle el efecto de los flujos laterales de calor en la evolución de la estratificación. Los resultados del modelo

(con y sin términos difusivos) se muestran en el mismo capítulo. En el Capítulo IV se presentan las discusiones y conclusiones.

II INCLUSION DE TERMINOS LATERALES ADVECTIVOS Y DIFUSIVOS DE CALOR

2.1 Introducción

En este capítulo se describen los modelos que se desarrollaron para estimar la contribución de los flujos laterales advectivos y difusivos de calor al desarrollo de la estratificación, y calor almacenado de la columna. Los modelos de estratificación (Simpson et al. 1977) y calor almacenado descritos en la primera parte del capítulo se obtienen a partir de principios de conservación de calor y de energía cinética turbulenta (ECT), de acuerdo con Lavín (1984). En la segunda parte, se añaden los términos laterales y se obtienen expresiones más generales de estos modelos. Finalmente, el modelo obtenido de estratificación es simplificado a casos particulares de advección reportados anteriormente.

2.2 Anomalía de energía potencial, ϕ

El nivel de estratificación de una columna de agua puede estimarse mediante la anomalía de energía potencial, ϕ , que se interpreta como la cantidad de trabajo mecánico por unidad de volumen que se gastaría en mezclar completamente dicha columna. Se expresa, de acuerdo a Simpson et al. (1977), como;

$$\phi = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 (\bar{\rho} - \rho) g z dz; \quad \bar{\rho} = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \rho(z) dz, \quad (4)$$

donde h es la profundidad, $\rho(z)$ es el perfil de densidad, g es la aceleración debida a la gravedad, y z es la coordenada vertical (positiva hacia arriba y con el origen en la superficie).

Si la distribución de densidad está regida solamente por la temperatura, entonces $\rho \sim \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))$ (ρ y T son, respectivamente, una densidad y temperatura de referencia), y la ecuación (4) queda como;

$$\phi = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \rho_0 g \alpha (T - \bar{T}) z dz; \quad \bar{T} = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 T(z) dz, \quad (5)$$

donde $T(z)$ es el perfil de temperaturas. Para una columna verticalmente homogénea $\phi = 0 \text{ J m}^{-3}$, mientras que para una estratificada $\phi > 0$.

2.3 El modelo de energía potencial (MEP)

El MEP (Simpson et al. 1977) puede obtenerse directamente de la ecuación de conservación de calor suponiendo homogeneidad en la horizontal, es decir;

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial z} \langle w' T' \rangle + \frac{1}{\rho_0 C_p} \frac{\partial}{\partial z} I_p(z), \quad (6)$$

donde T es la temperatura, $\langle w' T' \rangle$ es el componente vertical del flujo difusivo, los $\langle \rangle$ denotan un promedio temporal finito y las cantidades primadas son desviaciones de este promedio (para simplificar los desarrollos posteriores, en las ecuaciones siguientes sustituiremos $\langle T \rangle$ por T); C_p es el calor específico del agua de mar. $I_p(z) = I_0 \exp(-\Gamma z)$ representa la fracción penetrativa de la radiación solar, I_0 el flujo de la radiación solar en la superficie. Γ ($\Gamma = \lambda^{-1}$) es

el coeficiente de extinción cuyo valor varía desde 0.3 m^{-1} en lagos y estuarios, a 0.03 m^{-1} en áreas claras del océano (Bowden, 1983).

Para obtener una expresión de la tasa de cambio de energía potencial, $d\phi/dt$, se diferencia (5) y se sustituye (6) en el resultado, lo que queda, es;

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{g\alpha}{2C_p} \left(I_0 - \rho_0 C_p \langle w'T' \rangle_0 + \frac{2\lambda}{h} I_0 \right) + \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \rho_0 g \alpha \langle w'T' \rangle dz, \quad (7)$$

el primer término del lado derecho representa la tasa de calentamiento por la superficie y, suponiendo que $h \gg \lambda$ (o sea, que h es tan grande que excede la ley de absorción exponencial), se reduce a;

$$\frac{g\alpha}{2C_p} (I_0 - \rho_0 C_p \langle w'T' \rangle_0), \quad (8)$$

la cual puede denotarse por $(g\alpha/2C_p)Q_s$, donde Q_s es el flujo de calor en la superficie (DE Ruijter, 1983b; Lavín, 1984). Cuando este término es positivo tiene un efecto estabilizante en la columna de agua ya que fomenta la estratificación.

El segundo término de (7) representa la tasa de trabajo hecho por los flujos verticales turbulentos para romper la estratificación, y se parametriza por medio de las fuentes que producen tal mezcla (Simpson et al. 1977), es decir;

$$\frac{1}{h} \int_{-h}^0 \rho_0 g \alpha \langle w'T' \rangle dz = -\epsilon \rho_0 C_d \frac{\overline{|U|}^3}{h} - \delta \psi \rho_a C_{10} \frac{\overline{|W|}^3}{h}, \quad (9)$$

donde ϵ y δ son las fracciones de ECT de corriente de marea, U , y viento, W , respectivamente utilizadas para el mezclado;

C_d y C_{10} son los coeficientes de arrastre correspondientes, ψ es una constante que representa el cociente de la corriente superficial inducida por el viento a la velocidad del viento (Simpson, 1981), y ρ_a la densidad del aire. Bajo estas consideraciones se llega finalmente al modelo de Simpson et al. (1977);

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{g\alpha}{2C_p} Q_s - \epsilon \rho_0 C_d \frac{|U|^3}{h} - \delta \psi \rho_a C_{10} \frac{|W|^3}{h}. \quad (10)$$

Esta ecuación expresa que la tasa de cambio de la energía potencial de una columna de agua depende de la razón de calentamiento por la superficie y de la mezcla por viento y marea; o sea, representa la competencia entre los flujos de flotabilidad y los agentes mezclantes en cambiar ϕ (Fig.1).

La ecuación (10) puede integrarse en tiempo para predecir la evolución temporal de ϕ en un lugar dado, pero para ello es necesario conocer la entrada (o salida) de calor (Q_s), el viento (W) y la corriente de marea (U). Las eficiencias ϵ y δ se toman como constantes. Repitiendo el proceso para lugares vecinos pueden obtenerse contornos de ϕ usando los valores apropiados de U y h . Se supone que los demás parámetros cambian muy poco con el tiempo (Simpson y Hunter, 1974). De esta manera se pueden separar las zonas estratificadas (donde $\phi > 0$) de las mezcladas (donde $\phi \sim 0$ J m^{-3}) y conocer la posición de la franja frontal, donde ϕ decae de aproximadamente 10 J m^{-3} a casi cero (Simpson et al. 1978).

Ya que el calor almacenado en la columna, $Q = \rho C_p h T$ (donde T es la temperatura media), se relaciona con la energía potencial de ésta (ver ecuación 5), es conveniente obtener una expresión de la tasa de cambio de Q , dQ/dt .

$$\frac{dQ}{dt} = \rho_0 C_p h \frac{dT}{dt}. \quad (11)$$

Promediando la ecuación (6) en la vertical y sustituyendo el resultado en la ecuación (11) resulta;

$$\frac{dQ}{dt} = Q_s, \quad (12)$$

la cual muestra que la tasa de cambio de calor almacenado de una columna es igual al flujo neto de calor en la superficie.

2.4 Adición de términos laterales advectivos y difusivos

Para describir la importancia de los flujos laterales de calor advectivos y difusivos en la distribución de la temperatura de la columna, se incluyen estos términos en la ecuación de conservación de calor (Kim, 1976; DE Ruijter, 1983a), es decir;

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(uT) - \frac{\partial}{\partial x} \langle u'T' \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle w'T' \rangle + \frac{1}{\rho_0 C_p} \frac{\partial}{\partial z} I_p(z), \quad (13)$$

donde se ha ignorado la coordenada en la dirección 'y' dado que el frente está en esa dirección y se supone homogeneidad en la misma. Los dos primeros términos del lado derecho de (13) representan, respectivamente, la contribución de los flujos laterales advectivo y difusivo de calor al balance de temperaturas; u es la componente del vector velocidad en la dirección x , y $\langle u'T' \rangle$ el componente de los flujos difusivos en la misma dirección.

Ya que nos interesa conocer como los nuevos términos pueden afectar la energía potencial de la columna, es útil

para el análisis separar los perfiles u y T en su promedio en la vertical $(\bar{u}, \bar{T})$ y diferencia correspondiente $(\hat{u}, \hat{T})$, dependiente de la profundidad, como sigue;

$$u = \bar{u} + \hat{u}; \quad \bar{u} = \frac{1}{h} \int_{-h(x)}^0 u(z) dz, \quad (14)$$

$$T = \bar{T} + \hat{T}; \quad \bar{T} = \frac{1}{h} \int_{-h(x)}^0 T(z) dz, \quad (15)$$

introduciendo (14) y (15) en (6), e integrando en la vertical, se obtiene;

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}T) + \frac{\bar{u}}{h}(T_{-h} - \bar{T})\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}(h\hat{u}\hat{T}) + K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ & - \frac{2K}{h}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial \hat{T}}{\partial x}\Big|_{-h} - \frac{K}{h}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\hat{T}_{-h} - \frac{1}{h}\left(\langle w'T' \rangle_0 - \frac{I_0}{\rho_0 C_p}\right), \end{aligned} \quad (16a)$$

donde la barra denota este promedio. Los términos laterales turbulentos se han parametrizado como (Neumann y Pierson, 1966; Krauss, 1973; Pond y Pickard, 1982);

$$\langle u'T' \rangle = -K\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}, \quad (16b)$$

donde K es un coeficiente de difusión lateral turbulenta y es del orden de $10^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (Krauss, 1973; Bowden, 1983).

Dado que al considerar los términos de flujos laterales de calor se incluye intercambio de esta propiedad entre columnas, entonces $\phi = \phi(h(x), t)$ y $Q = Q(h(x), t)$, por lo que;

$$\Phi = \frac{1}{h(x)} \int_{-h(x)}^0 \rho_0 g \alpha (T - T) z dz, \quad (17a)$$

$$Q = \rho_0 C_p h(x) T. \quad (17b)$$

Diferenciando (17a) e introduciendo (13) y (16a) en la expresión resultante se obtiene, usando la regla de Leibnitz, la expresión general para la tasa de cambio de energía potencial, $\partial \Phi / \partial t$;

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{g \alpha}{2 C_p} \left(Q_s + \frac{\bar{u}}{h} Q \frac{\partial h}{\partial x} + 2K \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + K T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)$$

I

$$+ \frac{1}{h} \int_{-h(x)}^0 \rho_0 g \alpha \langle w' T' \rangle dz - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} \Phi) - \frac{\rho_0 g \alpha}{2} \bar{u} \frac{\partial h}{\partial x} T_{-h}$$

II

III

IV

$$- \frac{1}{h} \int_{-h(x)}^0 \rho_0 g \alpha \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} T) z dz - \frac{1}{h} \int_{-h(x)}^0 \rho_0 g \alpha \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} \hat{T}) z dz$$

V

VI

$$+ \frac{1}{h^2} \int_{-h(x)}^0 \rho_0 g \alpha \frac{\partial}{\partial x} (h \bar{u} \hat{T}) z dz + \frac{K}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\Phi h) \right)$$

VII

VIII

$$- \rho_0 g \alpha K \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \hat{T}_{-h} - \frac{\rho_0 g \alpha}{2} K \left(2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} - T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{-h}. \quad (18)$$

IX

X

El término IV del lado derecho de la ecuación puede ser ignorado ya que representa el flujo advectivo horizontal de calor en la base, el cual es nulo si suponemos que las velocidades verticales evaluadas en el fondo son despreciables en comparación con los flujos verticales turbulentos. Parametrizando la integral II de la misma manera que en la sección anterior, se obtiene, finalmente;

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{g\alpha}{2C_p} \left(Q_s + \frac{\bar{u}}{h} Q \frac{\partial h}{\partial x} + 2K \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + KT \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)$$

I

$$- \epsilon \rho_0 C_d \frac{\overline{|U|^3}}{h} - \delta \psi \rho_a C_{10} \frac{\overline{|W|^3}}{h} - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} \phi)$$

II

III

IV

$$- \frac{1}{h} \int_{-h(x)}^0 \rho_0 g \alpha \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} T) z dz - \frac{1}{h} \int_{-h(x)}^0 \rho_0 g \alpha \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} \hat{T}) z dz$$

V

VI

$$+ \frac{1}{h^2} \int_{-h(x)}^0 \rho_0 g \alpha \frac{\partial}{\partial x} (h \bar{u} \hat{T}) z dz + \frac{K}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\phi h) \right)$$

VII

VIII

$$- \rho_0 g \alpha K \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \hat{T}_{-h} - \frac{\rho_0 g \alpha}{2} K \left(2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} - T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{-h}. \quad (19)$$

IX

X

I. representa la contribución de los flujos de calor superficial y laterales a los cambios de estratificación.

II y III representan el trabajo de los flujos verticales turbulentos en romper la estratificación.

IV. es la advección de energía potencial por el flujo medio.

V. es la advección de la temperatura media por el corte de velocidades.

VI y VII. representan la advección de las desviaciones de la temperatura media por el corte de velocidades.

VIII. es la difusión lateral de energía potencial.

IX y X. representan la variación de $\bar{T}$ y de los gradientes de temperatura en la base de la columna.

En conjunto, (19) describe cómo evoluciona la energía potencial de una columna de agua en presencia de mezcla vertical por viento y marea, flujo superficial y difusión lateral de calor, y advección con corte en la vertical (Fig.7). Es interesante hacer notar que el K de esta expresión es el mismo que el de la ecuación (16a).

Para obtener una expresión general de la tasa de cambio de calor almacenado, $\partial Q / \partial t$, se introduce (16a) en la derivada respecto al tiempo de (17b); y se obtiene;

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = Q_s - \bar{u} \frac{\partial Q}{\partial x} - \rho_0 C_p \frac{\partial}{\partial x} (h \overline{uT}) + K \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \bar{u} \frac{\partial h}{\partial x} T_h$$

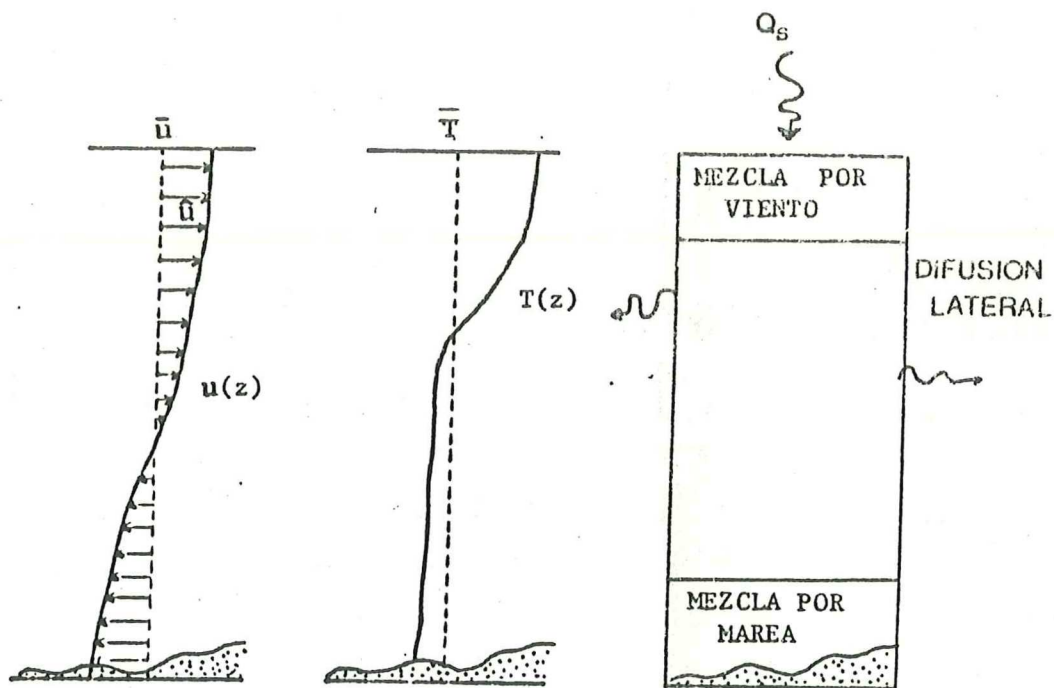


Fig.7 Representación esquemática del modelo obtenido. La energía potencial de la columna depende de la mezcla por viento y corrientes de marea, flujo superficial de calor, y advección con corte de velocidades sobre una topografía variable. El MEP es un caso particular de este modelo.

$$-2\rho_0 C_p K \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{2} T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{-h} \quad (20)$$

donde, al igual que en (18), se ignora el quinto término del lado derecho de la igualdad. Esta expresión establece que la densidad de calor almacenado de la columna depende del calentamiento superficial y de los flujos laterales de calor advectivos y difusivos.

2.5 Casos particulares

Los modelos de estratificación y de calor almacenado, representados por las ecuaciones (19) y (20), constituyen versiones más completas que las disponibles hasta el momento. Los casos de advección de energía potencial en modelos de estratificación (Czitrom, 1982; Argote, 1983; y Van Aken, 1986) así como los de advección y difusión de calor (Pingree et al. 1975, 1978, 1985) son casos particulares de los modelos obtenidos. En la siguiente sección probamos lo anterior, centrando la atención únicamente en modelos de estratificación.

2.5.1 Advección con velocidad constante

Si se supone velocidad uniforme en la columna, topografía variable, y se ignoran los términos de difusión lateral de calor (Fig.8), entonces (19) se reduce a;

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{g\alpha}{2C_p} \left(\underset{\text{I}}{Q_s} + \underset{\text{II}}{\frac{\bar{u}}{h} Q \frac{\partial h}{\partial x}} \right) - \underset{\text{III}}{\epsilon \rho_0 C_d \frac{|\overline{U_2}|^3}{h}} - \underset{\text{IV}}{\delta \psi \rho_a C_{10} \frac{|\overline{W}|^3}{h}} - \underset{\text{V}}{\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} \phi)} \quad (21)$$

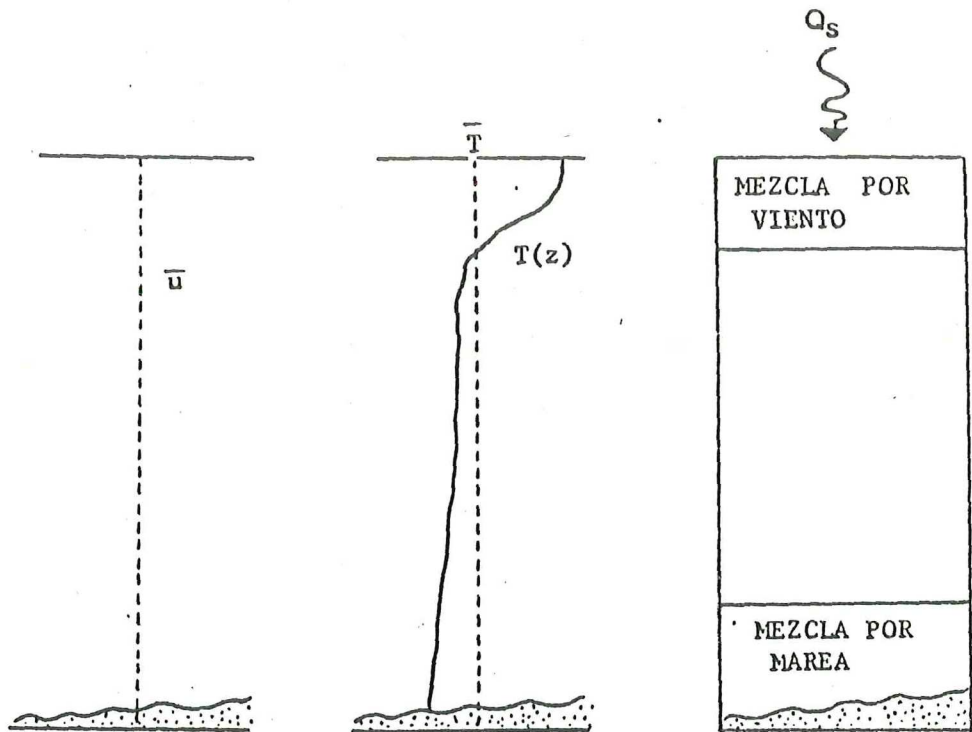


Fig.8. El modelo utilizado por Argote (1983). Innovación al MEP: advección y topografía variable (ver texto para detalles).

que difiere de la ec.(10) en los términos II y V, y representan la contribución de la advección lateral de calor a la energía potencial de la columna.

Esta ecuación fué obtenida por Argote (1984) en un estudio sobre el desarrollo estacional de ϕ , alrededor de islas, tomando en cuenta procesos advectivos. Argote (1984) encontró que la advección provoca un desplazamiento de la estructura térmica en la dirección del flujo, aumentando o disminuyendo los valores de ϕ de acuerdo al gradiente de éste.

2.5.2 Efecto de la advección en un modelo de 2 capas

Para el caso en que se considera advección sobre una topografía constante y se ignora la difusión lateral de calor, (19) se reduce a;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} = & \frac{g\alpha}{2C_p} Q_s - \epsilon \rho_0 C_d \frac{\overline{|U|}^3}{h} - \delta \psi \rho_a C_{10} \frac{\overline{|W|}^3}{h} - \bar{u} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ & - \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \rho_0 g \alpha \bar{u} \frac{\partial T}{\partial x} z dz - \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \rho_0 g \alpha \left(\bar{u} \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} + \hat{u} \frac{\partial T}{\partial x} \right) z dz, \end{aligned} \quad (22)$$

la cual para dos capas queda como;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} = & \frac{g\alpha}{2C_p} Q_s - \epsilon \rho_0 C_d \frac{\overline{|U|}^3}{h} - \delta \psi \rho_a C_{10} \frac{\overline{|W|}^3}{h} \\ & - \frac{\rho_0 g \alpha}{2h} h_1 h_2 \left(u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - u_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

donde h_1 y h_2 son los grosores de cada capa, u_1 y u_2 sus velocidades respectivas, y T_1 y T_2 sus temperaturas correspondientes. El subscripto 1 se refiere a la capa superior, y el 2 a la inferior.

Si se considera que la estratificación es termohalina, entonces (23) se transforma en;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} = & \frac{g\alpha}{2C_p} Q_s - \epsilon \rho_0 C_d \frac{\overline{|U|}^3}{h} - \delta \psi \rho_a C_{10} \frac{\overline{|W|}^3}{h} \\ & - \frac{gh_1 h_2}{2h} \left(u_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} - u_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (24)$$

donde ρ_1 y ρ_2 son las densidades de cada capa.

Al considerar descargas por ríos, aparece un término adicional (Czitrom, 1982) y (24) queda como;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} = & \frac{g\alpha}{2C_p} Q_s - \epsilon \rho_0 C_d \frac{\overline{|U|}^3}{h} - \delta \psi \rho_a C_{10} \frac{\overline{|W|}^3}{h} - \frac{gh_1 h_2}{2h} \left(u_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} - u_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} \right) - \frac{g\rho - \rho_0}{2} \dot{r} \end{aligned} \quad (25)$$

donde $\dot{r}$ representa la tasa de aporte por ríos. Esta expresión describe como evoluciona la ϕ en un sistema de dos capas en presencia de mezcla vertical (por viento y mareas), flujo superficial de calor y aportes de agua dulce (Fig.9); fué obtenida por Czitrom (1982) en un estudio sobre la influencia de aportes de agua dulce en una estructura frontal en la Bahía de Liverpool.

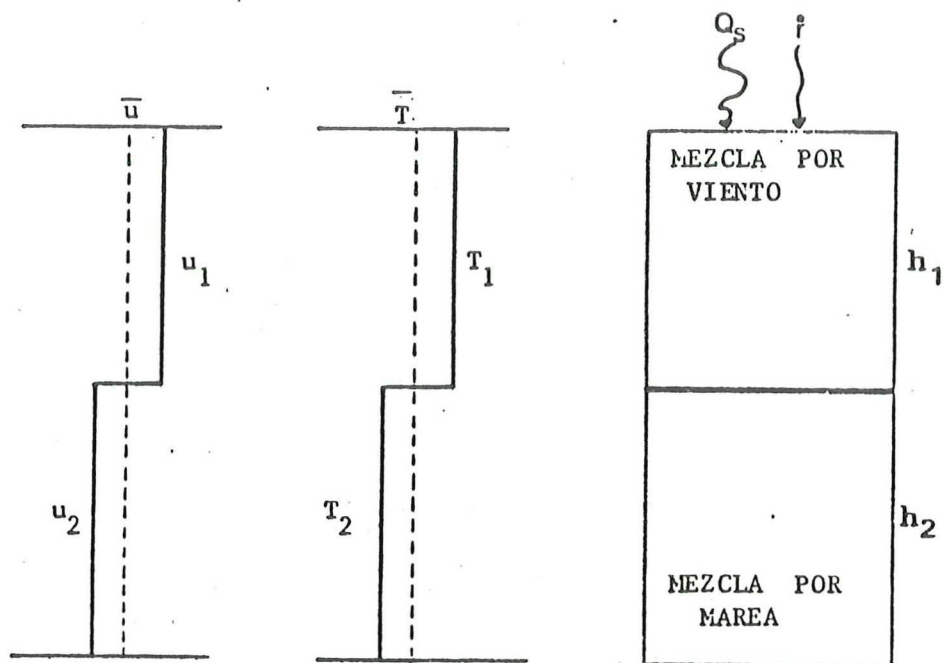


Fig.9. El modelo utilizado por Czitrom (1982). Innovación al MEP: advección en dos capas y aporte de agua dulce.

2.5.3 Advección con corte en la vertical

A diferencia del caso anterior, aquí se supone una columna homogénea advectada por un corte de velocidades sobre un fondo plano, por lo que (19) se reduce a;

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{g\alpha}{2C_p} Q_s - \epsilon \rho_0 C_d \frac{\overline{|U|}^3}{h} - \delta \psi \rho_a C_{10} \frac{\overline{|W|}^3}{h} - \frac{\rho_0 g \alpha}{h} \frac{\partial T}{\partial x} \int_{-h}^0 \hat{u} z dz. \quad (26)$$

Si la estratificación es termohalina (26) queda como;

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{g\alpha}{2C_p} Q_s - \epsilon \rho_0 C_d \frac{\overline{|U|}^3}{h} - \delta \psi \rho_a C_{10} \frac{\overline{|W|}^3}{h} - \frac{\rho_0 g \alpha}{h} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \int_{-h}^0 \hat{u} z dz, \quad (27)$$

que expresa cómo evoluciona la ϕ de una columna de agua sujeta a calentamiento superficial, y mezcla por viento y marea, en presencia de velocidades de corte (Fig.10).

La ecuación (27) fué desarrollada por Van Aken (1986) para investigar los efectos de las velocidades de corte (representados por el último término) sobre la frontogénesis. Cuando $\hat{u}$ tiene un componente en la dirección del gradiente horizontal de densidades cerca de la superficie y un componente opuesto a éste cerca del fondo, este término disminuirá ϕ y fomentará el inicio de una estratificación estable (Van Aken, 1986). Esto es similar a la situación de un estuario donde el flujo del río transporta agua dulce de baja densidad hacia el mar, mientras que hay un reflujo de agua de mar cerca del fondo.

2.6 Resumen

A partir de principios de conservación de calor y ECT, se obtuvieron dos modelos: el primero calcula la energía

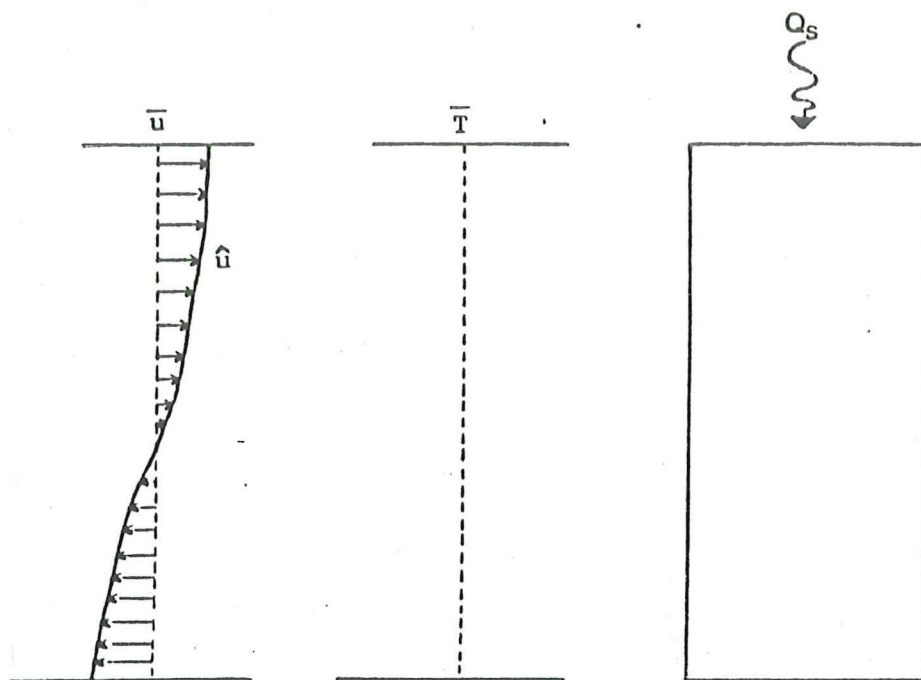


Fig.10. El modelo utilizado por Van Aken (1986). Innovación al MEP: advección con velocidades de corte.

potencial de una columna de agua, y el segundo su calor almacenado. La columna está sujeta a mezcla vertical (por viento y marea), flujo superficial y lateral de calor, en presencia de velocidades de corte sobre una topografía variable. Hasta el momento no se habían hecho modelos de estratificación que incluyeran difusión lateral de energía potencial, el no conocer el valor de la constante de difusividad limitaba su estudio. Sin embargo, se ha encontrado que la constante de difusión lateral de calor funciona para ambos modelos. La generalidad de los modelos se probó obteniendo casos particulares a partir de éstos.

III EL EFECTO DE LOS TERMINOS DE DIFUSION LATERAL

3.1 Introducción

En este capítulo se estudia el efecto del flujo difusivo de calor a través de un frente, resolviendo en diferencias finitas una versión simplificada de las ecuaciones (19) y (20) para una sección transversal del frente observado en el Mar de Irlanda (Fig.11). La evolución estacional de la estratificación y del calor almacenado en esta zona se muestra en la Fig.12 (adaptada de Lavín, 1984); estas observaciones, junto con las presentadas en la Fig.3, serán utilizadas para calificar el éxito del modelo.

Las características más sobresalientes del ciclo estacional de estratificación, ϕ , observado, son las siguientes (Fig.12a): a) hasta finales de invierno (aproximadamente en marzo) todas las estaciones se encuentran completamente mezcladas, b) a principios de mayo las estaciones más profundas comienzan a estratificarse (los valores de ϕ aumentan), c) en verano ϕ alcanza un valor medio, en la parte profunda, de alrededor de 75 J m^{-3} y ya se encuentra fuerte estratificación en todas las estaciones, exceptuando aquellas en donde la mezcla se opone al avance de la estratificación; durante este período del año el frente (isolínea de $\phi \sim 10 \text{ J m}^{-3}$) avanza hacia las partes someras hasta alcanzar la posición que tendrá durante el verano, d) a finales de verano los niveles de estratificación disminuyen y el frente retrocede hasta la posición que tenía a principios de mayo; a principios de otoño todas las estaciones se encontrarán nuevamente mezcladas.

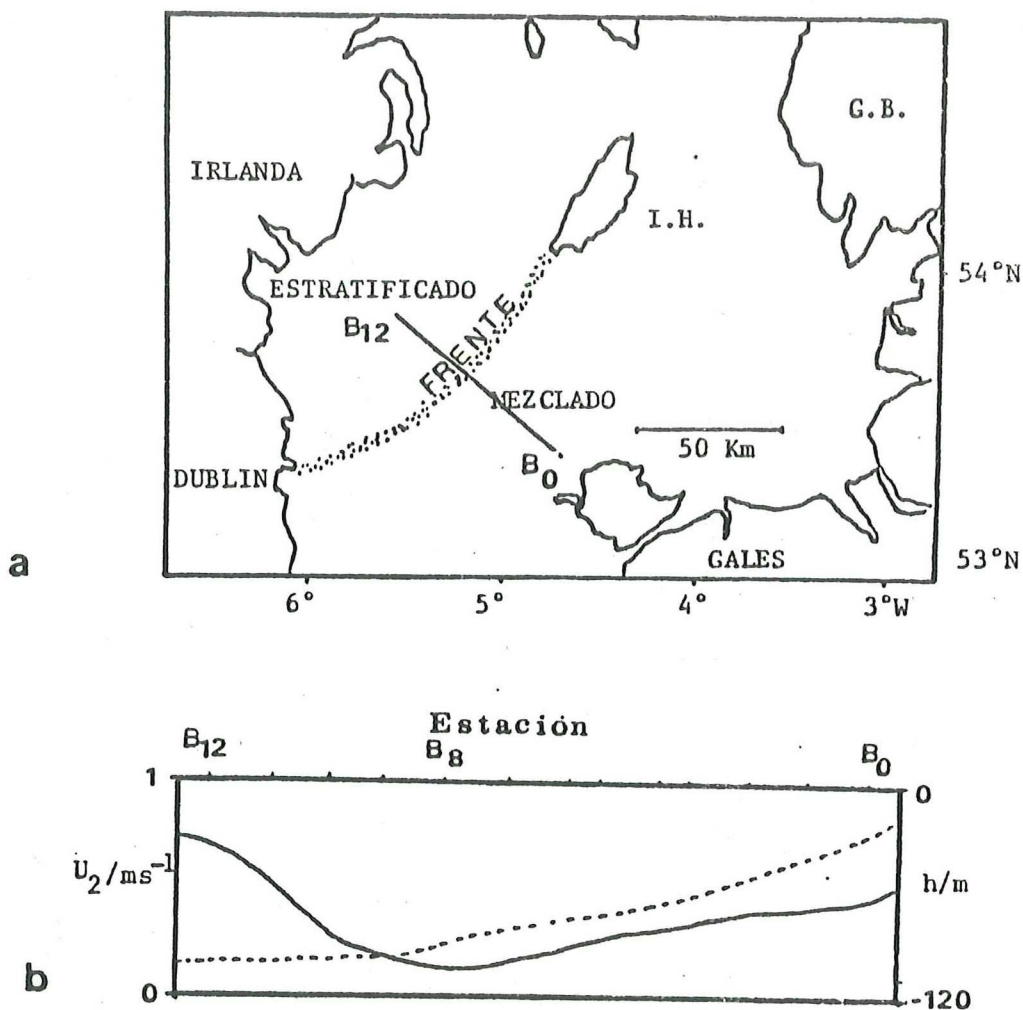


Fig.11. a) distribución de estratificación en el Mar de Irlanda durante verano, frente asociado y sección de estaciones a través de éste; b) corrientes de marea U_2 (línea cortada) y perfil de profundidades (línea gruesa) en la sección. (Adaptada de Lavín, 1984).

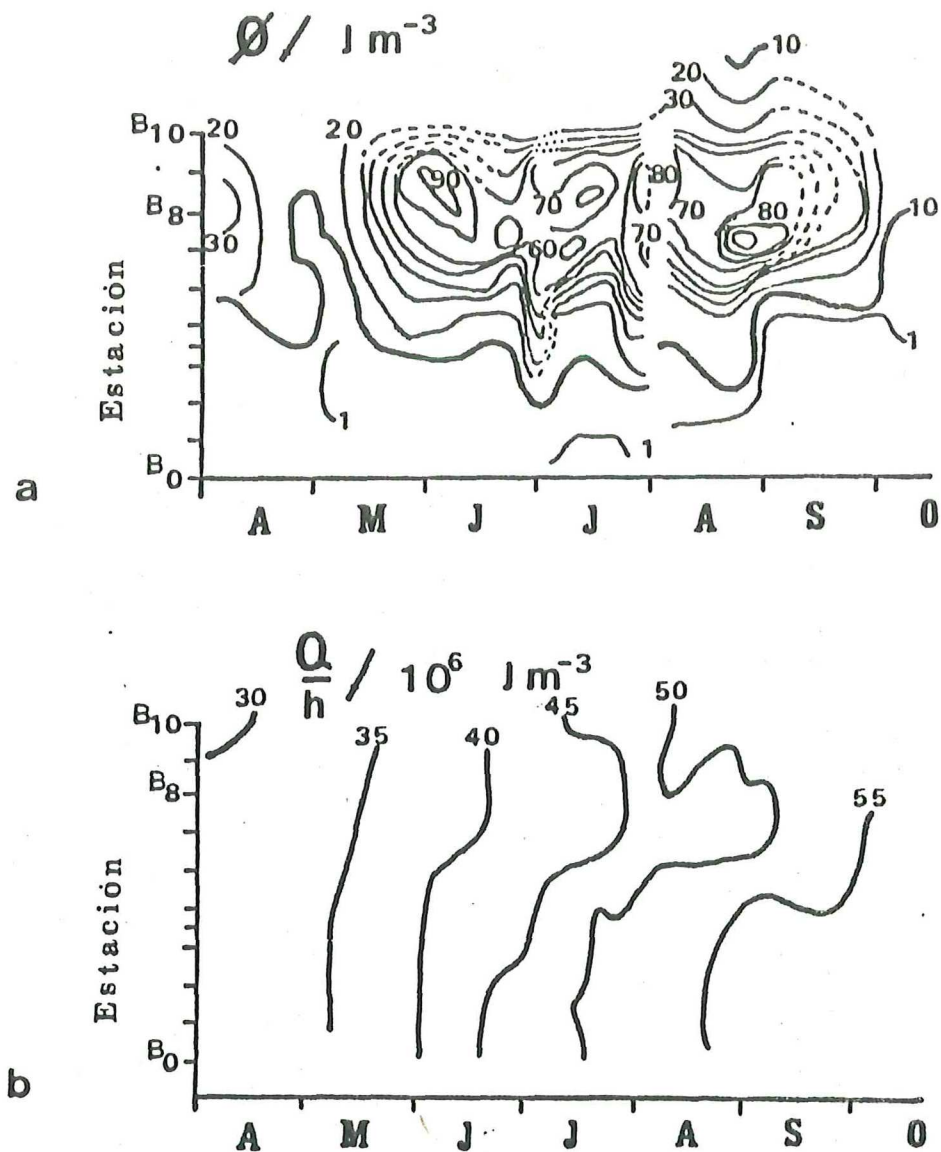


Fig.12. Desarrollo estacional de, a) estratificación ϕ ; y, b) densidad de calor almacenado Q/h , observados en la sección durante 1981. (tomada de Lavín, 1984).

En la Fig.12b se presenta la evolución estacional de la densidad de calor almacenado (Q/h) en la línea de estaciones; a) hasta finales de primavera las estaciones se encuentran homogéneas, b) en verano las isolíneas muestran una curvatura que indica que los máximos de calor almacenado ocurren antes en las estaciones someras y después en las profundas; como consecuencia, se establecen gradientes y flujos laterales de calor entre ellas como se describió en la sección I.2.

3.2 El modelo

En el Mar de Irlanda las corrientes residuales son pequeñas (Simpson, 1971; Lavín, 1984) y los términos advectivos pueden eliminarse. Las ecuaciones (19) y (20) quedan como;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} = & \frac{g\alpha}{2C_p} \left(Q_s + 2K \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + KT \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \\ & - \epsilon \rho_0 C_d \frac{|U|^3}{h} - \delta \psi \rho_a C_{10} \frac{|W|^3}{h} + \frac{K}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\phi h) \right) \\ & - \rho_0 g \alpha K \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \bar{T} - \frac{\rho_0 g \alpha}{2} K \left(2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} - T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{-h}, \end{aligned} \quad (28)$$

y

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = Q_s + K \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - 2\rho_0 C_p K \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{2} T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{-h}. \quad (29)$$

Puede demostrarse (ver Apéndice) que los términos que contienen las variaciones con profundidad, $\partial h / \partial x$, son pequeños en comparación con los restantes y, por lo tanto, pueden eliminarse; por lo que (28) queda como;

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{g\alpha}{2C_p} Q_s - \epsilon \rho_0 C_d \frac{\overline{|U|^3}}{h} - \delta \psi \rho_a C_{10} \frac{\overline{|W|^3}}{h} + K \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}. \quad (30)$$

Si se supone que las corrientes de marea son rectilíneas y dominadas por la M_2 y, se promedia en un ciclo de marea, (30) queda finalmente como;

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{g\alpha}{2C_p} Q_s - \frac{4}{3\pi} \epsilon \rho_0 C_d \frac{U_2^3}{h} - \delta \psi \rho_a C_{10} \frac{\overline{|W|^3}}{h} + K \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (31)$$

donde U_2 es la amplitud de la M_2 .

La ecuación (31) es, en esencia, el modelo de Simpson et al. (1978) con difusión lateral de ϕ , y puede integrarse para predecir la distribución de estratificación y posición del frente en función del calentamiento superficial, mezcla por viento y marea, y difusión lateral de calor (Fig.13).

En la ecuación (29) los términos con $\partial h / \partial x$ son un orden de magnitud más pequeños que los restantes (10^2 contra 10) y pueden eliminarse (apéndice), por lo que (29) se reduce a;

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = Q_s + K \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad (32)$$

que expresa que el calor almacenado depende de la tasa de calentamiento por la superficie y difusión lateral de calor; al igual que (31), también puede integrarse para conocer la evolución del calor almacenado en la columna.

Las ecuaciones (31) y (32) tienen solución analítica pero aquí se resolvieron numéricamente para poder utilizar la topografía y distribución de U_2 mostradas en la Fig.12.

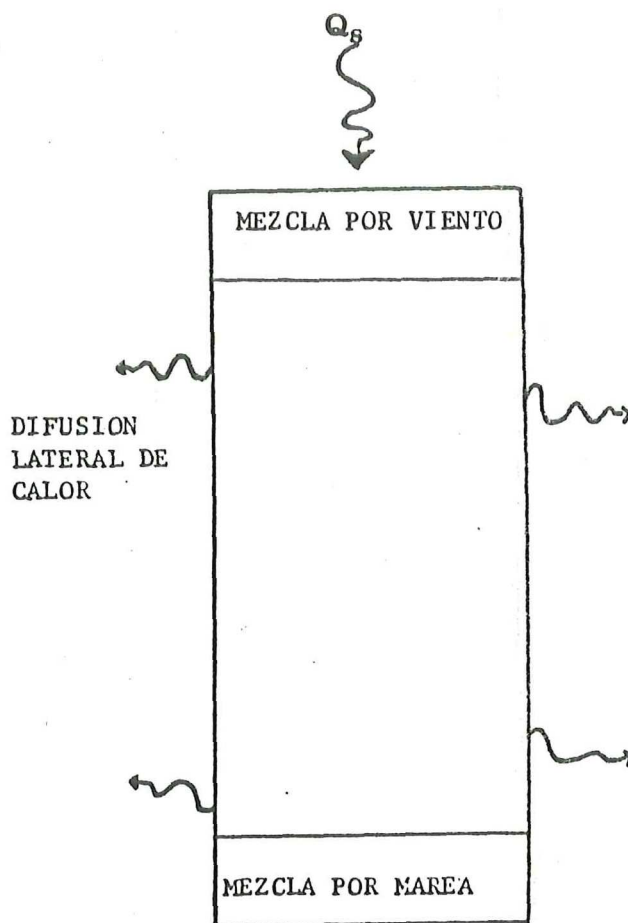


Fig.13. El modelo utilizado. En este caso, la estratificación depende de los flujos superficial y lateral de calor, y la mezcla por viento y corrientes de marea.

3.3 Datos de entrada

A diferencia de Lavín (1984) que utilizó observaciones como entradas y no consideró los términos difusivos de (31), aquí se utiliza una razón de calentamiento teórica mientras que las amplitudes U_2 y topografía son las mismas que utilizó este autor. A continuación se describen;

a) término de calentamiento, Q_s .- para simular el ciclo estacional del flujo de calor por la superficie se utilizó una función de la forma;

$$Q_s = Q_0 \cos(\omega t + \theta),$$

donde

$$\omega = \frac{2\pi}{365} \text{ dias}^{-1}; \quad \theta = 80 \text{ dias}, \text{ y } Q_0 = -120 \text{ W m}^{-2}.$$

Esta curva la obtuvo Pingree (1975), con $Q_0 = -140 \text{ W m}^{-2}$, para un área del Canal Inglés usando datos de temperatura de varios años y ha sido utilizada satisfactoriamente por Simpson (1981) y Argote (1983) entre otros.

En este estudio se seleccionó un valor de $Q_0 = -120 \text{ W m}^{-2}$ para ajustarnos a los valores de Q_s reportados por Lavín (1984) para el Mar de Irlanda. La curva presenta un máximo a mediados de junio y cambia de signo en la tercera semana de marzo y tercera de septiembre, Fig.14a.

b) términos de mezcla por marea y viento.- se utilizaron los valores de U_2 de los semiejes mayores de las elipses de la M_2 mostrados en la Fig.11; estos valores se promediaron en

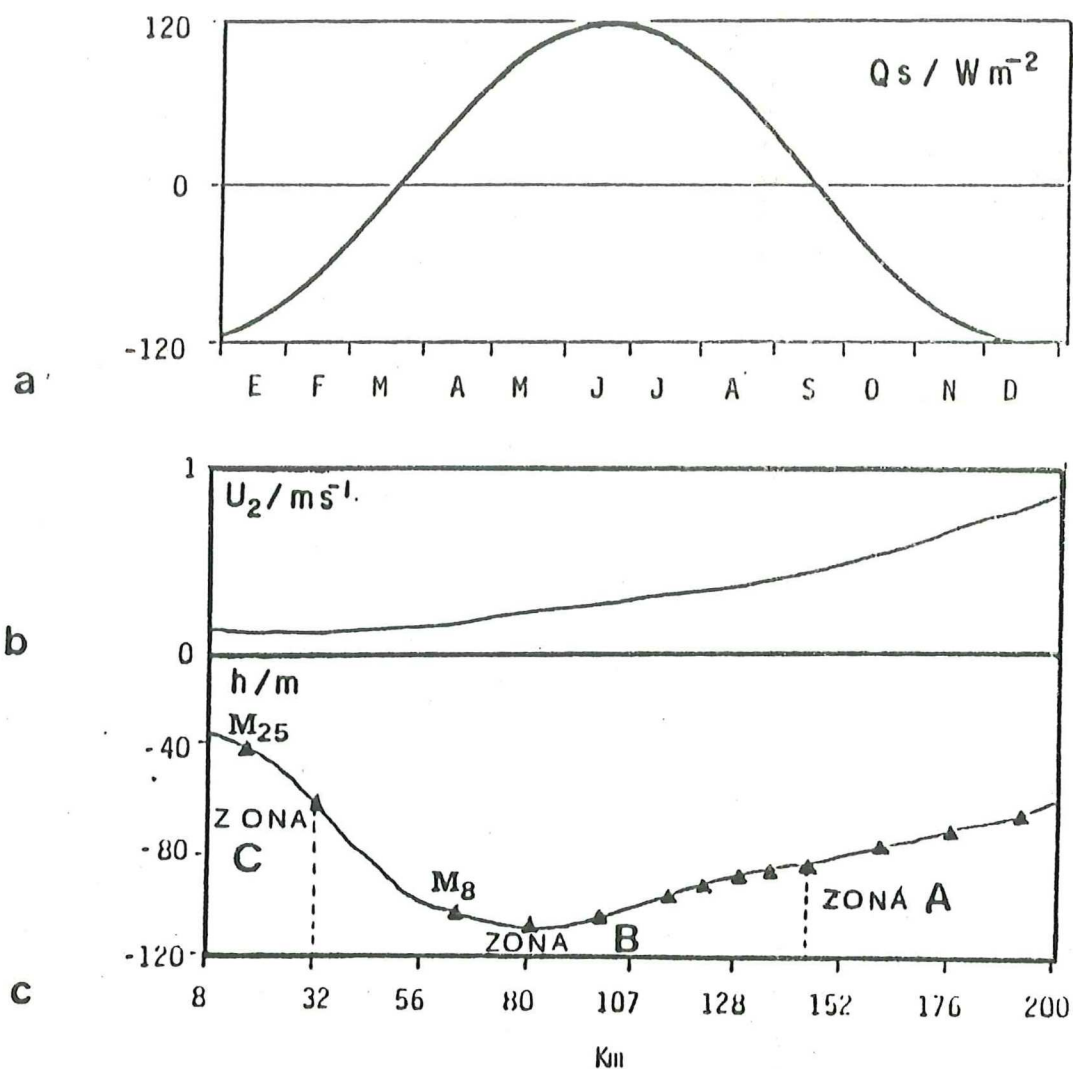


Fig.14. Entradas utilizadas: a) flujo superficial de calor Q_s , b) corrientes de marea U_2 , y c) perfil de profundidades. Los triángulos negros representan las estaciones hidrográficas mostradas en la Fig.11.

un ciclo de marea y posteriormente fueron interpolados en espacio (Fig.14b). Para $\overline{|W|}^3$ se seleccionó un valor constante de $670 \text{ (m s}^{-1}\text{)}^3$ (Lavín, 1984), el cual es ligeramente mayor que el observado pero para propósitos de este estudio, es adecuado.

c) topografía.- se utilizó el perfil de profundidades correspondiente a la línea de estaciones mostradas en la Fig.11. Este fué suavizado y se obtuvieron valores intermedios por interpolación, de forma tal que la distancia entre puntos (Δx) fué de 8 Km. Por conveniencia para el análisis, se dividió el perfil en tres zonas: dos someras (A y C) y una profunda (B), Fig.14c. Las estaciones tomadas por Lavín (1984), triángulos negros, se muestran en la misma figura.

d) constantes.- las constantes utilizadas fueron las siguientes (Simpson, et al. 1981; Simpson, 1982; Lavín, 1984):

i) término de calentamiento

$$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}, \alpha = 1.648 \times 10^{-4} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}, C_p = 3993 \text{ J Kg}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}.$$

ii) término de marea

$$\epsilon = 0.0037, \rho = 1026 \text{ Kg m}^{-3}, C_d = 0.0025.$$

iii) término de viento

$$k_s = \delta\psi = 0.00092, \rho_a = 1.25 \text{ Kg m}^{-3} C_{10} = 0.0016.$$

iv) término de difusión lateral

$$K = 131 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ para el Mar de Irlanda (Lavín, 1984).}$$

3.4 Esquema en diferencia finitas

Las ecuaciones (31) y (32) se resolvieron numéricamente utilizando un esquema de integración explícito de primer orden (Potter, 1977), Fig.15. Según este esquema, (31) queda como;

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n + K \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\phi_{j-1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j+1}^n) + F_j^n, \quad (33)$$

$$F = \frac{g\alpha}{2C_p} (Q_s)^n - \frac{4}{3\pi} \epsilon \rho_0 C_d \left(\frac{U_2^3}{h} \right)_j - k_s \rho_a C_{10} \left(\frac{|\overline{W}|^3}{h} \right)_j,$$

donde;

n es el tiempo

j un punto espacial particular

Δx el espacio entre puntos

Δt incremento en tiempo, y

K el coeficiente de difusión lateral de calor.

Bajo este esquema de integración, (32) queda como;

$$\left(\frac{Q}{h} \right)_j^{n+1} = \left(\frac{Q}{h} \right)_j^n + K \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(\left(\frac{Q}{h} \right)_{j-1}^n - 2 \left(\frac{Q}{h} \right)_j^n + \left(\frac{Q}{h} \right)_{j+1}^n \right) + G_j^n, \quad (34)$$

$$G_j^n = \frac{Q_s^n}{h_j}.$$

Para asegurar estabilidad de la solución tiene que cumplirse que $K \Delta t / \Delta x^2 \leq 1/2$ (Potter, 1977). Con los valores de K y Δx ya mencionados, resulta $\Delta t = 2.83$ días; se seleccionó un Δt de 1 día.

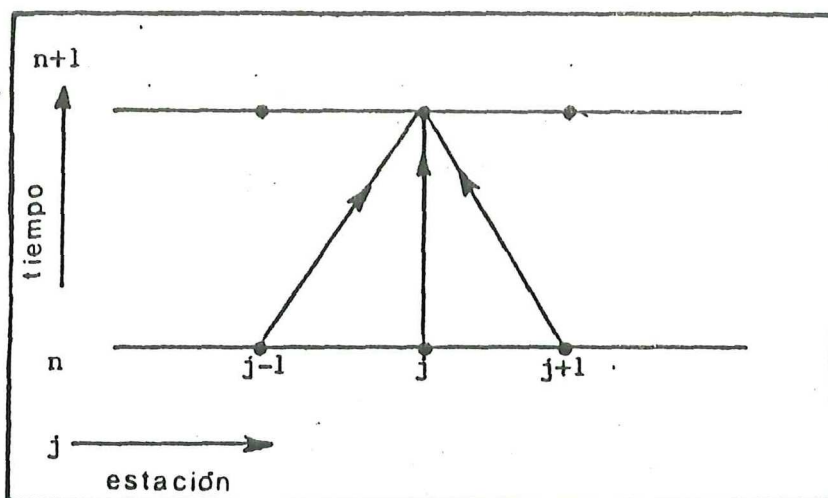


Fig.15. Malla espacio-tiempo sobre la cual se integran las ecuaciones de difusión 33 y 34. n es el tiempo y j una estación particular.

3.4.1 Condiciones iniciales y de frontera

Para ϕ se seleccionó un estado inicial de mezcla vertical completa en la línea de estaciones, es decir;

$$\phi_j^0 = 0 \text{ } Jm^{-3} \quad (j = 2, 25),$$

mientras que para Q/h se escogió;

$$\left(\frac{Q}{h}\right)_j^0 = 32.7 \times 10^6 \text{ } Jm^{-3} \quad (j = 2, 25),$$

lo cual corresponde a una temperatura uniforme de aproximadamente 8 °C típica de principios de año para el Mar de Irlanda (Bowden, 1983).

En las fronteras se seleccionó la condición de flujo nulo, es decir;

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0,$$

$$\frac{\partial (Q/h)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial (Q/h)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0,$$

El modelo toma tres ciclos en estabilizarse. Los resultados se presentan en la siguiente sección.

3.5 Resultados

3.5.1 Ciclo estacional de ϕ y (Q/h) en la estación central

En esta sección, se presentan los resultados para dos estaciones (la central, y la más somera). Por simplicidad, los resultados de los modelos con difusión los denotaremos como $(Q/h)_{dif}$ (en el caso de calor almacenado), y ϕ_{dif} (en el caso de energía potencial).

La Fig.16a muestra las predicciones de calor almacenado en la estación central (M_8 , zona B) y en la estación más somera (M_{25} ; zona C). Las predicciones presentan las siguientes características:

a) de principios de marzo a mediados de agosto $(Q/h)_{dif} < (Q/h)$ en M_8 , mientras que en M_{25} $(Q/h)_{dif} > (Q/h)$ desde mediados de febrero a mediados de julio. El calor almacenado en M_8 durante el verano es cedido lateralmente a las columnas vecinas (más someras, entre ellas M_{25}) debido a que éstas pierden calor más rápidamente que las profundas y los flujos de calor tienden a disminuir los gradientes de temperaturas que se establecen entre las primeras y estas últimas. A principios de abril se presentan los valores mínimos de calor almacenado en M_8 , y a principios de mayo en M_{25} ; en la primera $(Q/h)_{dif} \sim 30 \times 10^6$ y $(Q/h) \sim 32 \times 10^6 \text{ J m}^{-3}$, mientras que en ésta última $(Q/h)_{dif} \sim 18 \times 10^6 \text{ J m}^{-3}$ y $(Q/h) \sim 22 \times 10^6 \text{ J m}^{-3}$.

b) Durante la segunda mitad del año, el comportamiento anterior se invierte. Es decir, las columnas de la zona B reciben calor de las someras y $(Q/h)_{dif} > (Q/h)$ en M_8 , y menor en M_{25} . Los valores máximos ocurren a principios de

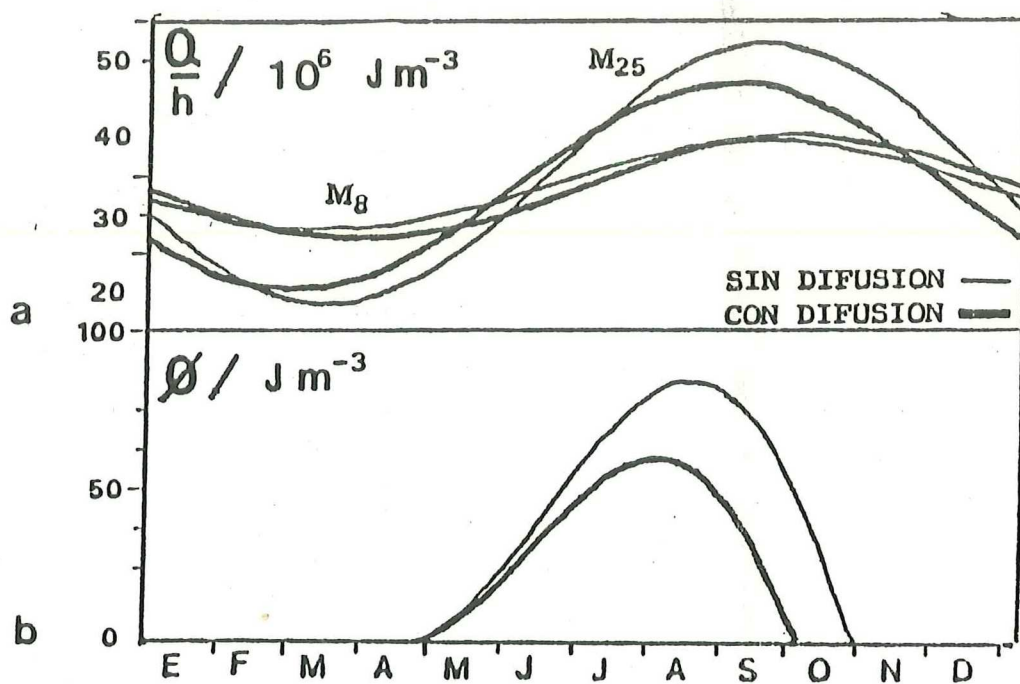


Fig.16. Ciclo estacional de, a) calor almacenado Q , y b) estratificación ϕ en la estación central (M_8) y la más somera (M_{25}).

septiembre en M_{25} , $(Q/h)_{dif} \sim 45 \times 10^6 \text{ J m}^{-3}$ y $(Q/h) \sim 50 \times 10^6 \text{ J m}^{-3}$, y un mes después en M_8 , $(Q/h)_{dif} \sim 40 \times 10^6 \text{ J m}^{-3}$ y $(Q/h) \sim 38 \times 10^6 \text{ J m}^{-3}$.

Por otra parte, la estratificación en M_8 (Fig.16b) se inicia a finales de abril con valores de ϕ (ec. 10) y ϕ_{dif} (ec.31) cercanos a cero (en M_{25} , ϕ siempre es igual a cero). Le sigue una etapa de desarrollo, que abarca desde principios de mayo hasta la primera quincena de julio, y en la cual los valores de ϕ se incrementan más rápidamente que los de ϕ_{dif} . Enseguida hay una etapa que puede llamarse estacionaria caracterizada por valores de ϕ y ϕ_{dif} más o menos constantes; esta etapa dura cuatro semanas en ambos casos, pero en el caso con difusión se inicia en la primera quincena de julio mientras que en el caso sin difusión se inicia en la primera semana de agosto.

El ϕ_{dif} máximo ($\phi_{dif} \sim 50 \text{ J m}^{-3}$) ocurre a principios de agosto, mientras que el ϕ máximo ($\phi \sim 90 \text{ J m}^{-3}$) ocurre dos semanas después. En el caso de ϕ_{dif} , el rompimiento de la estratificación se inicia a finales de agosto y dura aproximadamente cuatro semanas; a principios de septiembre la columna está completamente mezclada. En el caso de ϕ el rompimiento se inicia a principios de septiembre y dura cuatro semanas más que el caso anterior; a principios de noviembre la columna se encuentra completamente mezclada.

Hasta el momento, hemos visto que las predicciones del ciclo estacional de (Q/h) y ϕ difieren al considerar o no los procesos difusivos. La inclusión de éstos trajo como consecuencia en primer lugar, que en la parte estratificada (más profunda) los valores de ϕ disminuyeran y los de (Q/h) aumentaran; en segundo, que el máximo de (Q/h) sucediera

antes en la estación somera (M_{25}), y después en la profunda (M_8); y en tercero, que el tiempo de homogeneización de M_8 se completara un mes antes que en el caso sin difusión.

3.5.2 ϕ sin difusión (sección de estaciones)

En la Fig.17 se muestra el desarrollo estacional de ϕ para el caso sin difusión en la sección de estaciones (nótese que se ha sobrepuesto la franja frontal observada $\phi = 10 \text{ J m}^{-3}$ presentada en la Fig.12). El agua está bien mezclada en invierno; en estas fechas el flujo superficial de calor Q_s es negativo, la columna pierde calor, y es mezclada fácilmente por la agitación provocada por el viento y la marea. A principios de primavera Q_s se hace positivo pero es demasiado bajo como para superar la mezcla, e iniciar la estratificación, de tal forma que las condiciones de mezcla continúan.

A finales de abril se presenta una estratificación débil ($\phi > 0$) en las partes más profundas (zona B) y, días después, en las someras (zonas A y C). A mediados de mayo aparece la franja frontal (isolínea de $\phi \sim 10 \text{ J m}^{-3}$) en la parte central de la zona B, mientras que en las demás zonas la estratificación aún es débil. Durante los días siguientes Q_s sigue aumentando, logra superar la mezcla, y la estratificación avanza hacia las zonas someras (A y C), o sea, se forman dos frentes uno en la zona A y el otro en la C. Durante junio Q_s alcanza su valor máximo, la estratificación deja de avanzar y las franjas frontales se sitúan en una posición cuasiestacionaria (posición de verano) entre las zonas A y B, y en la zona C. Durante estas fechas, ϕ alcanza un valor promedio, en toda la sección, de aproximadamente 30 J m^{-3} . Las franjas frontales duran en esta posición aproximadamente cinco semanas (de finales de junio a principios de agosto).

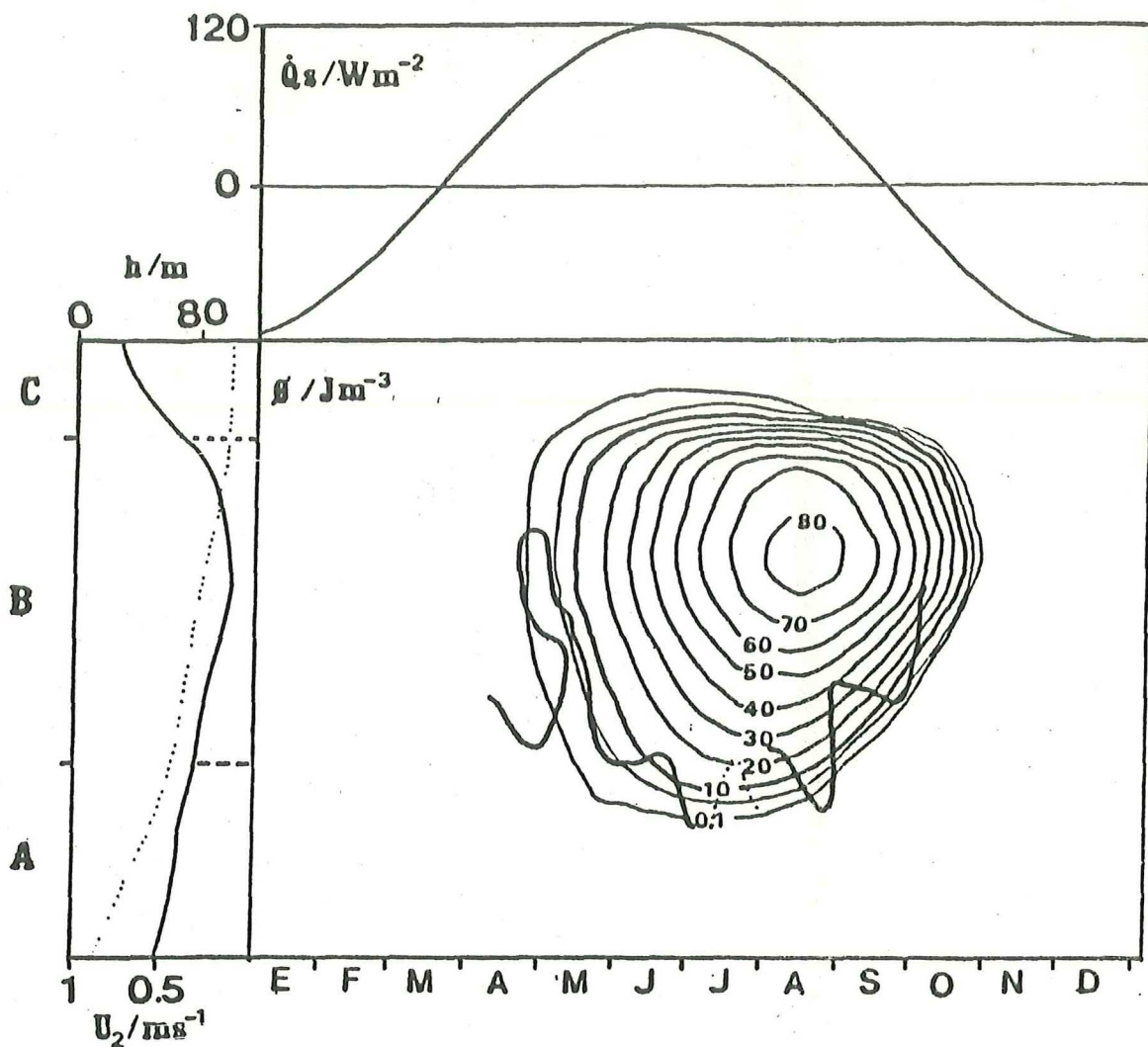


Fig.17. Desarrollo estacional de ϕ (líneas delgadas) en la sección y comparación con las observaciones (línea gruesa); caso sin difusión.

A principios de agosto Q_S empieza a disminuir pero ϕ alcanza su valor máximo ($\phi \sim 80 \text{ J m}^{-3}$), el cual se presenta en la estación más profunda; en las demás toma un valor promedio de alrededor de 40 J m^{-3} . Días después Q_S tiende a valores más bajos, la estratificación se debilita (ϕ disminuye) y las franjas frontales retroceden, la de la zona A a finales de agosto y la de la C a principios de octubre. El retroceso dura aproximadamente diez semanas, y abarca de la segunda quincena de agosto a la tercera semana de octubre; a principios de noviembre, las columnas se encuentran completamente mezcladas.

Los gradientes de ϕ a lo largo de la sección se van incrementando a medida que transcurre el tiempo. En julio y agosto son más pronunciados que de abril a mayo. Sin embargo, de agosto a octubre encontramos que estos gradientes son los mayores de todo el año. Lo anterior sugiere que al incluir difusión lateral de ϕ , el transporte será de la parte estratificada hacia las zonas someras (A y C); siendo más intenso durante agosto, septiembre y octubre. En la siguiente sección entramos en detalle.

3.5.3 ϕ con difusión (sección)

Los resultados de añadir el término difusivo al modelo de estratificación, se muestran en la Fig.18. El inicio y avance de la estratificación (junto con la franja frontal, $\phi \sim 10 \text{ J m}^{-3}$) hacia la posición de verano es similar al caso anterior; sin embargo, los valores de ϕ son menores en aproximadamente 40%. A mediados de julio las estaciones de la zona profunda se encuentran fuertemente estratificadas, con el máximo de ϕ ($\sim 55 \text{ J m}^{-3}$) recorrido ligeramente hacia la zona A y presentándose aproximadamente cuatro semanas antes que en el caso sin difusión. A diferencia del caso anterior,

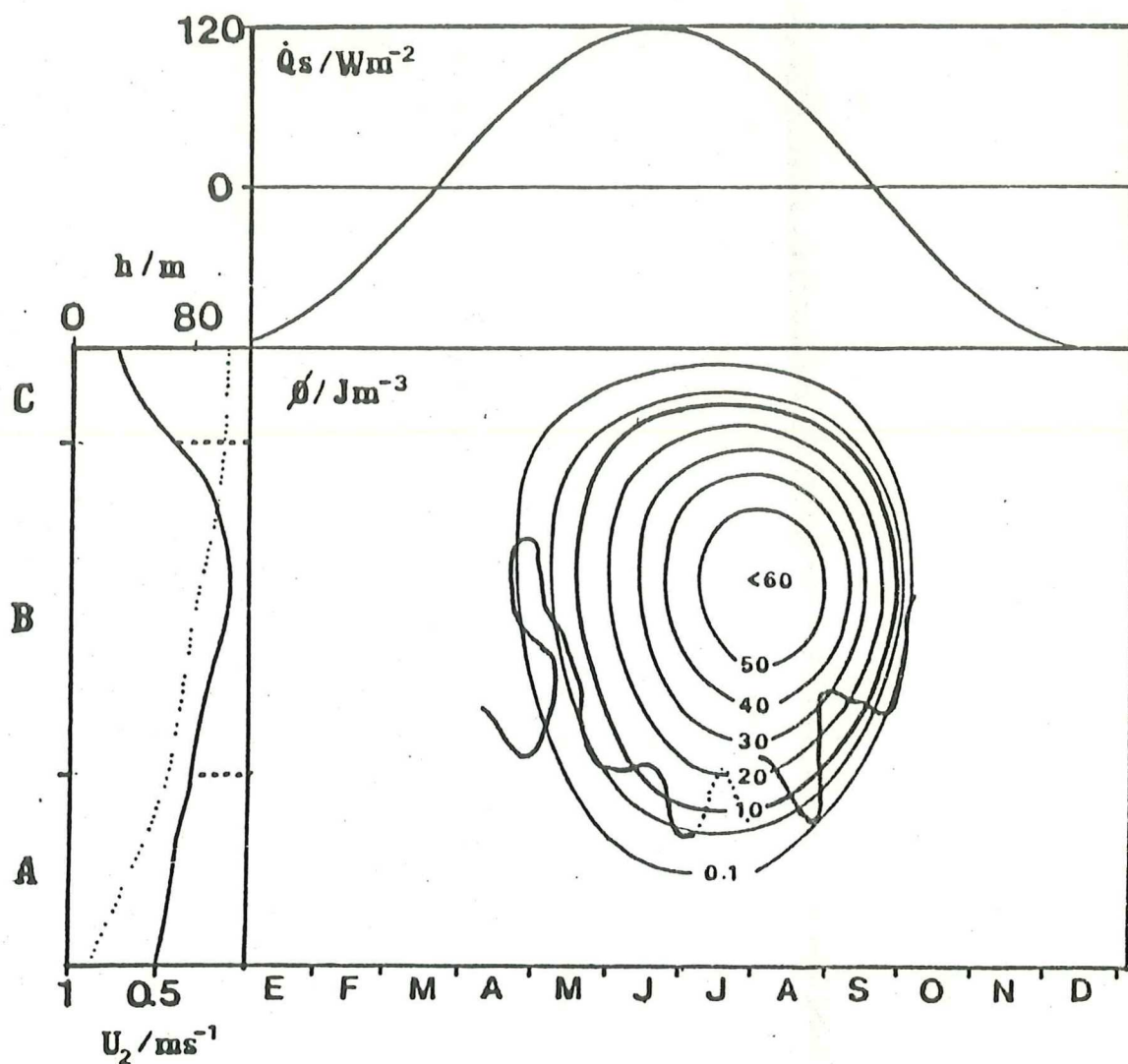


Fig.18. Desarrollo estacional de ϕ (líneas delgadas) en la sección y comparación con las observaciones (línea gruesa); caso con difusión.

la estratificación avanza aún más hacia zonas someras; el avance se estimó en aproximadamente 4 Km. La franja frontal se mantiene estable durante cuatro semanas (mes de julio), o sea, una menos que en el otro caso.

A principios de agosto la estratificación declina a un ritmo acelerado y las franjas frontales inician el retroceso, éste dura alrededor de seis semanas (segunda quincena de agosto a finales de septiembre), cuatro menos que sin difusión. A finales de septiembre ya se encuentran en su posición inicial, y para principios de octubre la estratificación es débil. Durante los meses siguientes todas las estaciones permanecen mezcladas hasta el inicio un nuevo ciclo.

3.5.4 Los efectos del término de difusión lateral de ϕ

En la Fig.19 se muestra el desarrollo estacional del término $K\partial^2\phi/\partial x^2$ en la sección de estaciones. Del análisis de esta figura podemos darnos una idea de cómo los procesos difusivos afectan el desarrollo de la estratificación. La figura se caracteriza por presentar valores nulos desde mediados de abril hasta principios de junio en toda la sección. Por tanto, al incluir este término, el inicio y avance del frente se ven poco afectados. De mediados de junio en adelante, se encuentran valores positivos en la zona C y negativos en la B, separados por valores nulos; la parte central de la zona B también presenta valores nulos. Lo anterior, y el hecho de que en la zona A también ocurran valores positivos sugiere que la difusión es más intensa en la zona frontal, y que la dirección de los flujos difusivos es de las partes profundas a las someras. Como consecuencia:

- a) los valores de estratificación disminuyen en la parte

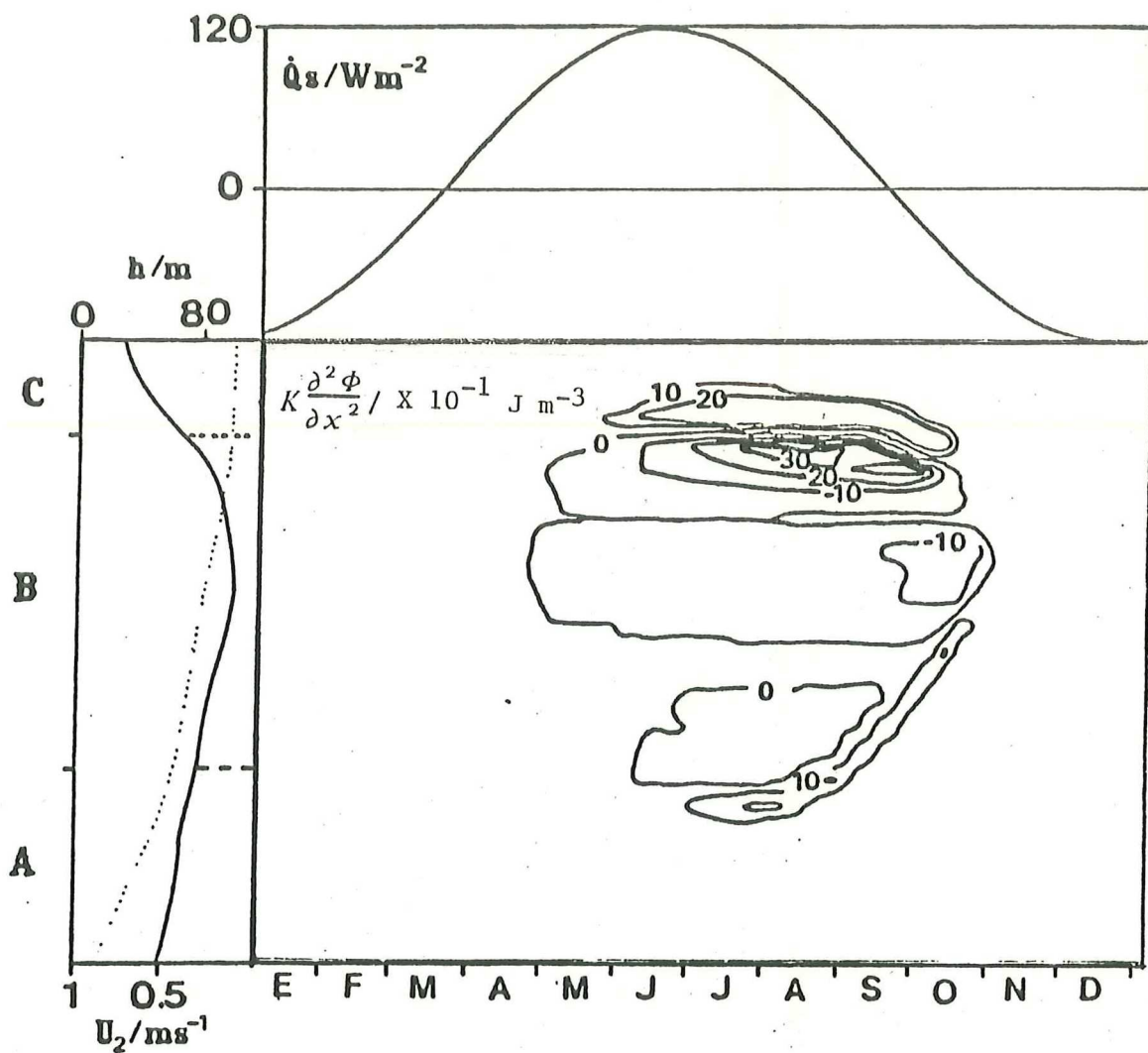


Fig.19. Desarrollo estacional del término de difusión lateral de ϕ en la sección.

central; b) la estratificación avanza aún más en zonas someras, y c) la estratificación se rompe antes que en el caso sin difusión.

Para estimar la importancia relativa de los procesos de difusión lateral de energía potencial, se calculó el cociente ϕ_{dif}/ϕ . Los resultados se muestran en la Fig.20. Entre finales de abril y principios de mayo ϕ supera a ϕ_{dif} en aproximadamente un 90%, lo cual significa que durante estas fechas los procesos difusivos no son intensos (como se mencionó anteriormente). Durante los meses de verano se presentan ciertas características sobresalientes: a) en el frente $\phi_{dif} \sim \phi$; b) a un lado del frente (en dirección hacia B) ϕ_{dif} es mayor que ϕ hasta en un 50%; c) del otro lado del frente (en dirección de las zonas A y C) ϕ_{dif} es menor que ϕ hasta en un 40%; y d) en la zona B ϕ_{dif} es menor que ϕ en alrededor de 20% (en promedio). Esto quiere decir que la difusión va en aumento conforme nos acercamos al verano; y, además, sugiere que los procesos difusivos son más intensos en la zona frontal, y menos intensos en la región estratificada.

Los efectos de la difusión lateral de energía potencial en el desarrollo de la estratificación, y respecto al caso sin difusión, pueden sintetizarse como sigue:

a) disminuye los valores de ϕ en todas las estaciones en aproximadamente un 40%.

b) produce un mayor avance de la zona frontal (aproximadamente 4 Km.) hacia zonas someras, haciendo que la zona de transición entra aguas mezcladas y estratificadas se amplíe.

c) hace que el máximo de ϕ suceda cuatro semanas antes, en relación al caso sin difusión, y se mueva ligeramente

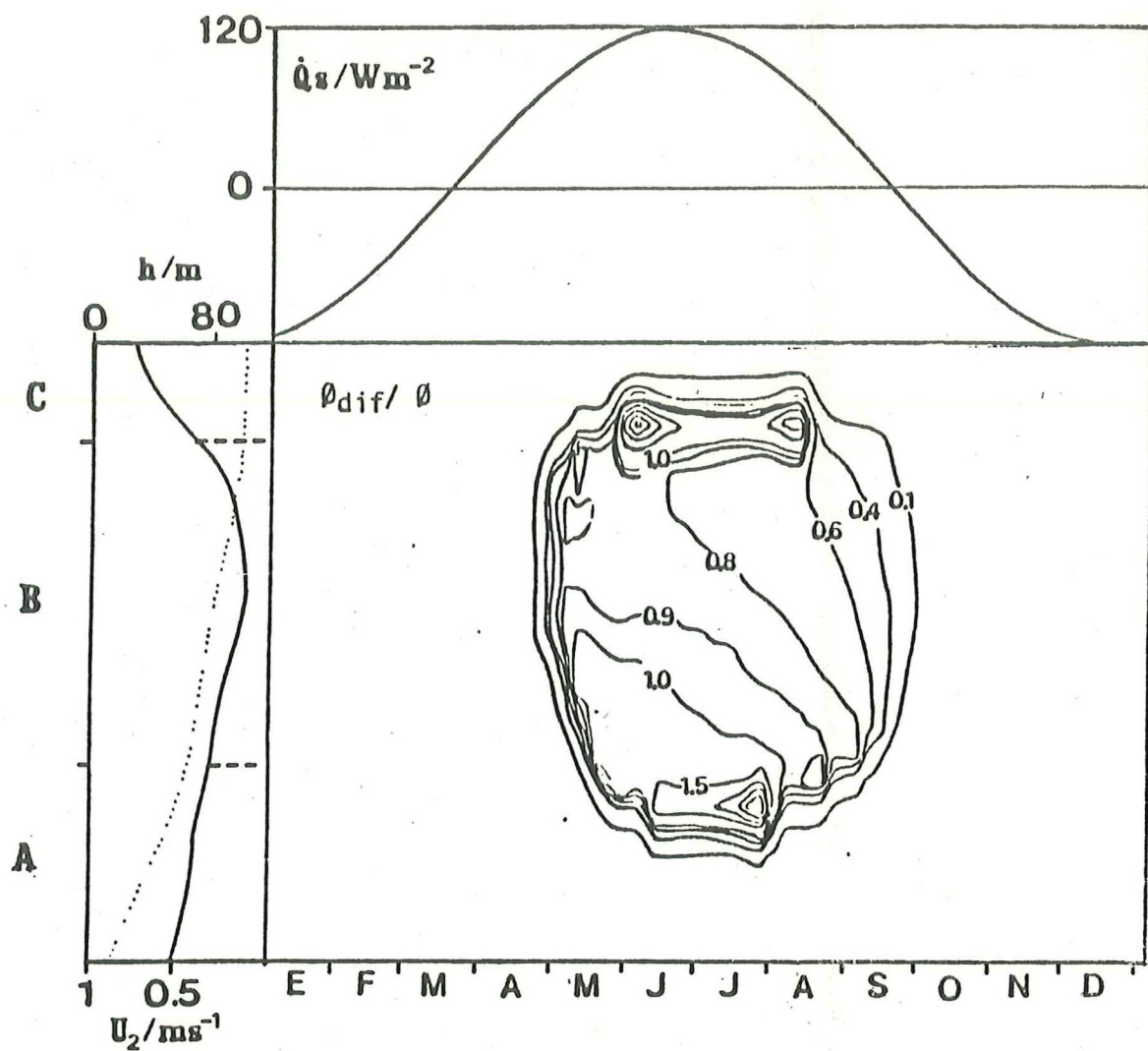


Fig.20. Relación entre ϕ_{dif} y ϕ en la sección (ver texto para detalles).

hacia la zona A.

d) permite que la estratificación se rompa más rápido, ya que el retroceso dura seis semanas, o sea cuatro menos que en el caso sin difusión.

3.5.5 Q/h sin difusión (sección)

En la Fig.21 se muestra el desarrollo estacional de la densidad de calor almacenado, Q/h , en la sección de estaciones. A principios de enero el agua está bien mezclada ($\phi = 0 \text{ J m}^{-3}$) y Q/h ($\sim 30 \times 10^6 \text{ J m}^{-3}$) es el mismo en todas las estaciones. Posteriormente, en marzo, alcanza sus valores mínimos, entre 20 y $28 \times 10^6 \text{ J m}^{-3}$ en las zonas someras, y de 29 a $30 \times 10^6 \text{ J m}^{-3}$ en la profunda. Por estas fechas Q_s se hace positivo y los valores de Q/h se incrementan. El incremento se intensifica durante los meses de verano en que la insolación es mayor (Q_s tiende a su valor máximo), siendo de aproximadamente $20 \times 10^6 \text{ J m}^{-3}$ en las partes someras y de alrededor de $10 \times 10^6 \text{ J m}^{-3}$ en la profunda.

A mediados de septiembre las columnas de agua pierden calor, siendo la pérdida más rápida en las zonas someras que en la profunda; la estación más somera pierde alrededor de $20 \times 10^6 \text{ J m}^{-3}$ en aproximadamente tres meses, y la profunda alrededor de $6 \times 10^6 \text{ J m}^{-3}$ durante el mismo lapso. A finales de diciembre todas las estaciones se encuentran mezcladas ($\phi = 0 \text{ J m}^{-3}$) y presentan el mismo valor de Q/h (aproximadamente de $34 \times 10^6 \text{ J m}^{-3}$).

3.5.6 Q/h con difusión lateral (sección)

Al permitir difusión lateral de calor entre las estaciones el comportamiento es similar al caso sin difusión,

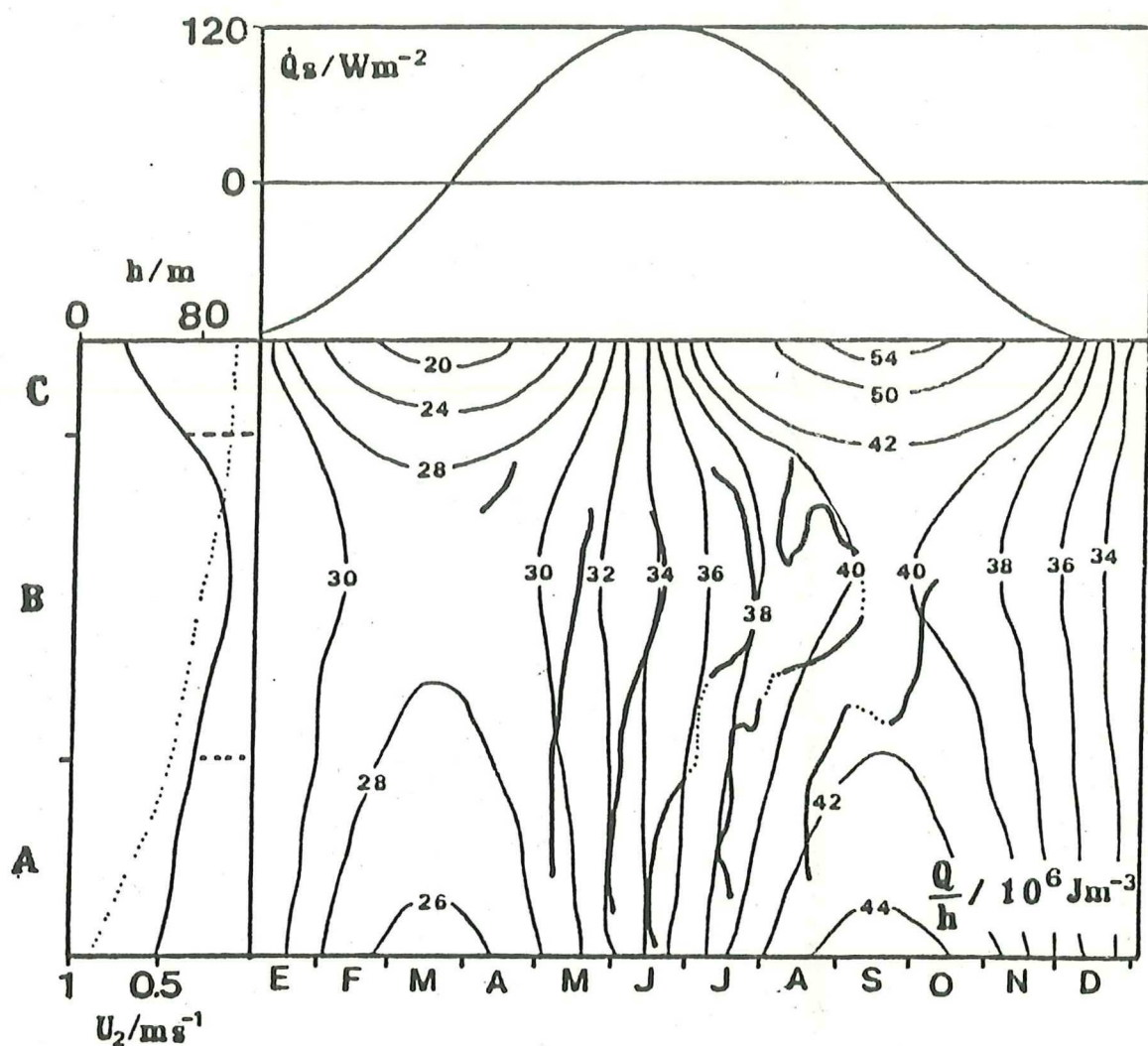


Fig.21. Desarrollo estacional del Q/h predicho (línea delgada), y comparación con las observaciones (línea gruesa); caso sin difusión.

aunque con valores de Q/h ligeramente menores (aproximadamente en un 15%). Sin embargo, se presentan ciertos rasgos de interés, Fig.22.

Hasta la tercera semana de marzo, el comportamiento es similar que en el caso anterior. Cuando Q_s se hace positivo las estaciones empiezan a ganar calor, las partes someras se calientan más rápido que las profundas y el calor fluye de las primeras a estas últimas. La insolación, y consecuentemente el almacenamiento de calor, aumenta durante los meses de verano y, como las partes someras se calientan más rápido que las profundas, los valores de Q/h (para un tiempo particular) se presentarán primero en las primeras y después en las segundas (ver Fig.16); es por esta razón que las isolíneas de Q/h en esta figura se inclinan hacia la derecha. Es durante este período que los flujos difusivos se intensifican.

A mediados de septiembre, cuando Q_s se hace negativo, las zonas someras pierden más calor que las profundas ($\sim 10^6$ J m⁻³ en la parte más somera y aproximadamente 2×10^6 J m⁻³ en la más profunda) y los flujos difusivos se invierten; o sea son de las partes profundas a las someras, de tal forma que para finales de noviembre los valores de Q/h son mayores en la parte profunda.

3.5.7 Los efectos del término de difusión lateral de calor

El desarrollo estacional del término difusivo $K \partial^2(Q/h) / \partial x^2$ (sección) en la sección de estaciones, se muestra en la Fig.23. De enero a junio se presentan valores positivos (entre 10 y 30×10^6 J m⁻³) en la zona C; entre C y B el término es negativo (entre -10 y -30×10^6 J m⁻³), mientras que en la parte central de B el término es nulo. Durante las

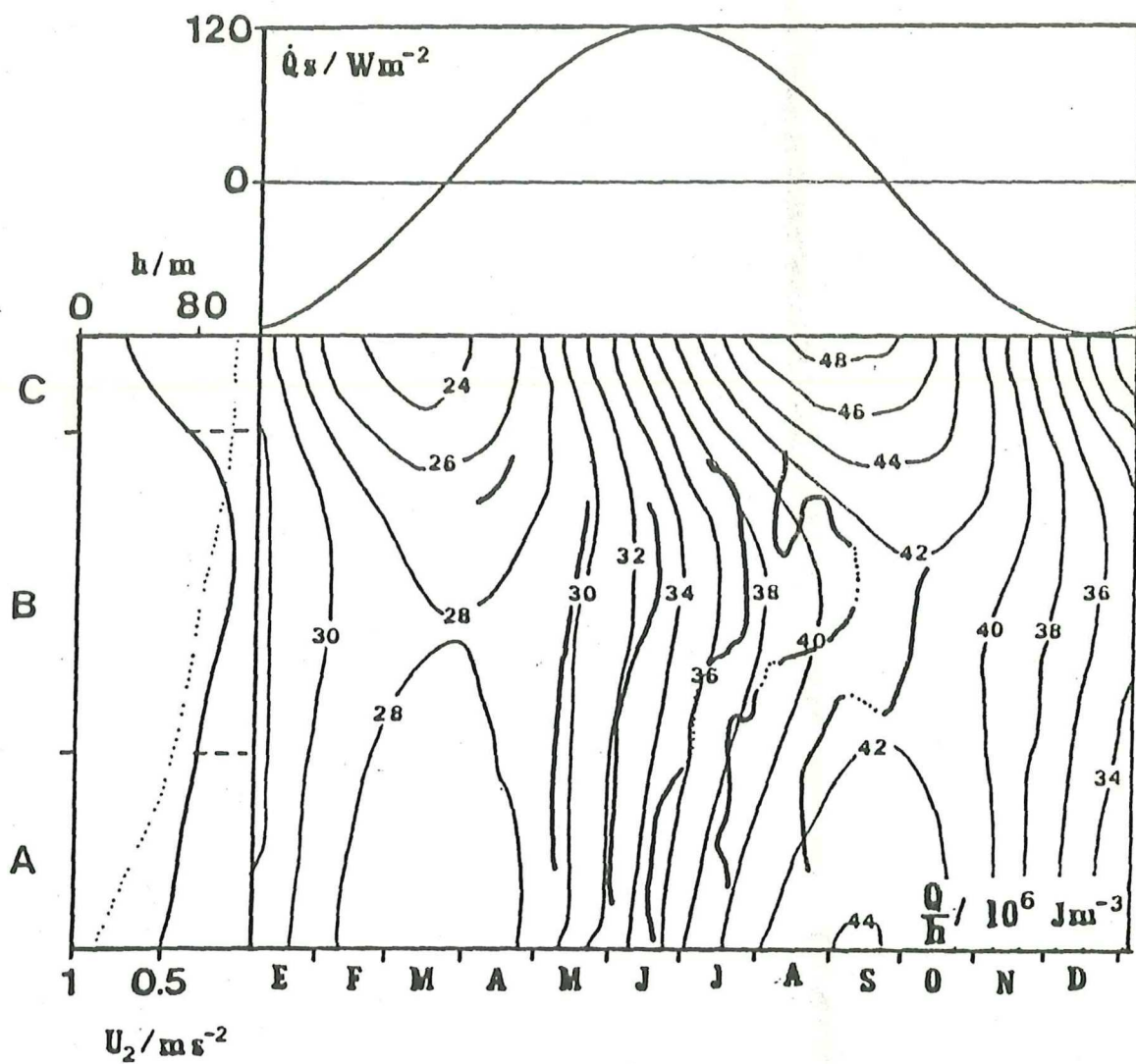


Fig.22. Desarrollo estacional del Q/h predicho (línea delgada), y comparación con las observaciones (línea gruesa); caso con difusión.

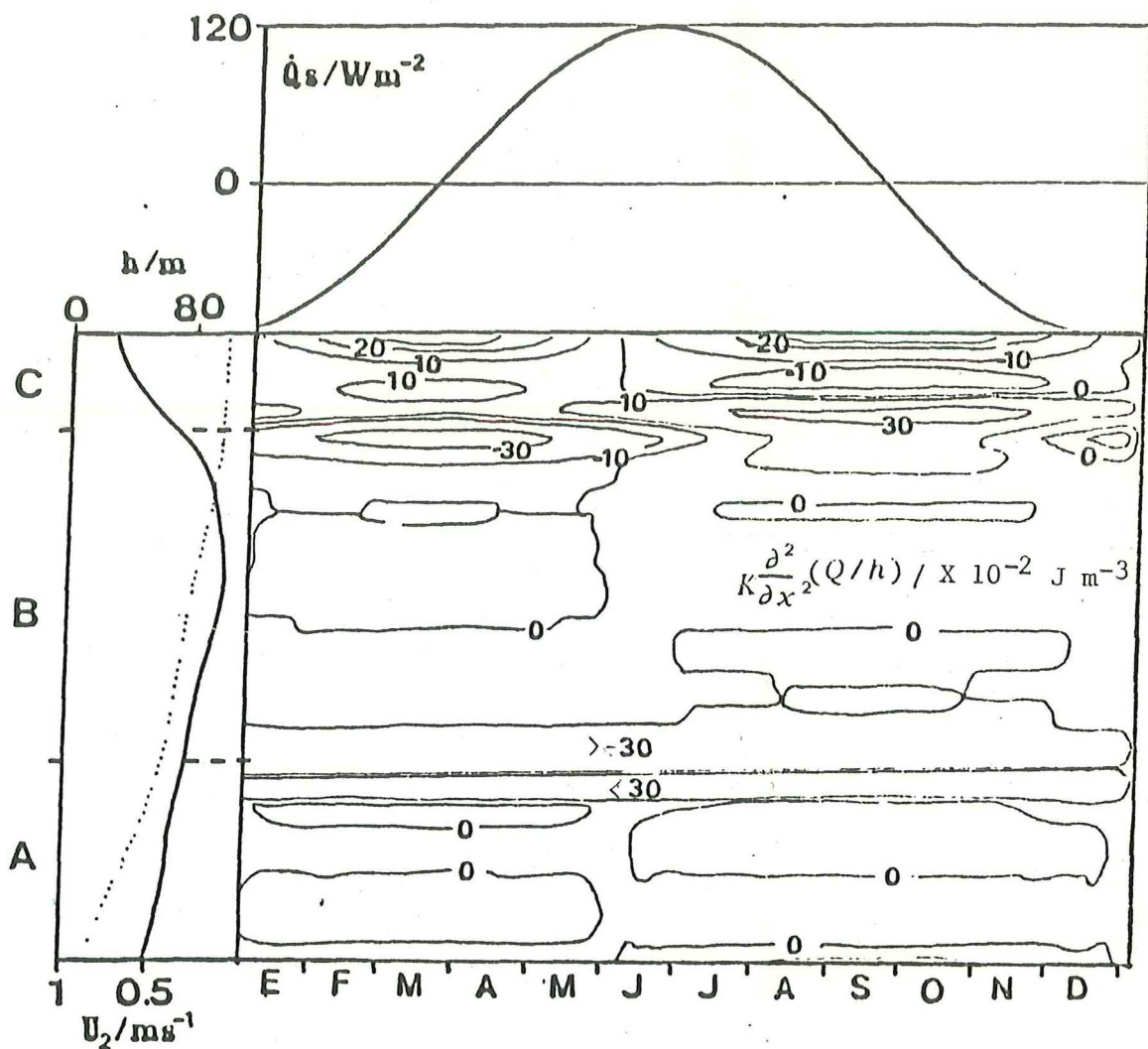


Fig.23. Desarrollo estacional del término de difusión lateral de calor en la sección.

mismas fechas se encuentran valores positivos y negativos entre las zonas A y B. Lo anterior significa que durante estas fechas los flujos laterales de calor son de la zona B hacia las partes someras (zonas A y C), y se intensifican en la zona del frente. Esto sugiere que los valores de Q/h disminuyen en B y aumentan en A y C; en la parte central no hay cambios.

De mediados de junio a principios de enero, el esquema anterior se invierte; es decir, hay una disminución de estos valores en C, y un aumento en B. En las demás zonas no hay variaciones notables.

Una estimación de la importancia de la difusión lateral de calor la da el cociente Q_{dif}/Q presentado en la Fig.24. Son notables ciertos rasgos:

a) en la zona C, desde principios de febrero a mediados de junio los valores de Q_{dif} son mayores que los de Q en aproximadamente 20% (en promedio). En la zona B sucede lo contrario, Q_{dif} es menor que Q en aproximadamente 10%, en el mismo período de tiempo. Una isolínea en que $Q = Q_{dif}$ separa ambas zonas. El modelo con difusión predice, por una parte, valores más altos (zona A) y por la otra, valores más bajos (zona B) que el modelo que no la incluye. Esto significa que el calor fluye de las partes profundas a las someras haciendo que los valores de Q se incrementen en estas últimas y disminuyan en las primeras.

b) de principios de julio a finales de diciembre, el comportamiento se invierte. El modelo con difusión predice valores de Q más bajos que el modelo sin difusión ($\sim 15\%$) en la zona A, y más altos en la zona B. Esto significa que el flujo de calor es de las partes someras a las profundas, lo cual es de esperarse ya que durante estas fechas las columnas

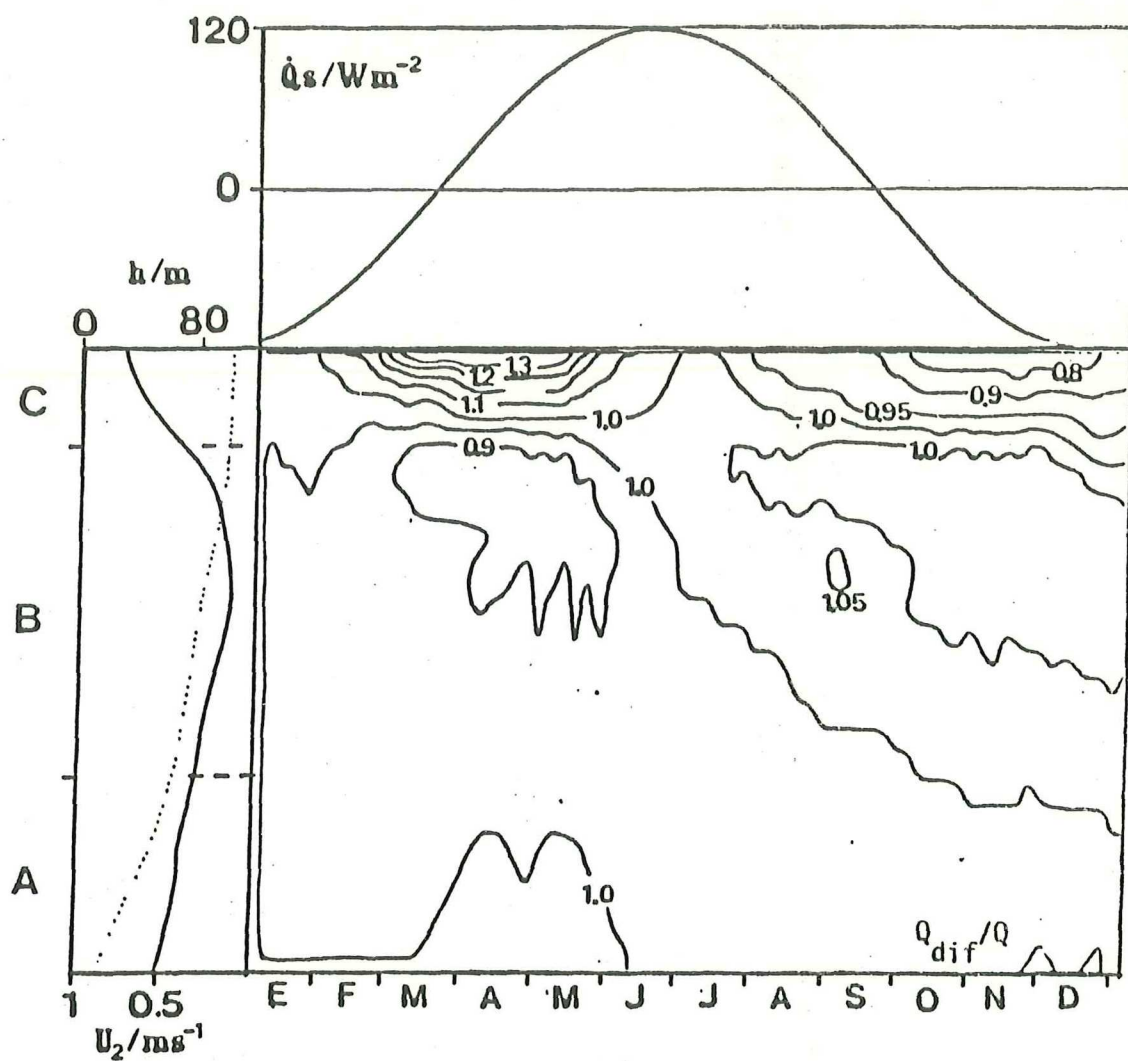


Fig.24. Relación entre Q_{dif} y Q en la sección (ver texto para detalles).

someras se calientan más rápido que las profundas y exportan calor hacia éstas últimas. En la zona B, estas cantidades son similares.

Los efectos principales de incluir difusión lateral son los siguientes:

a) las isolíneas se presentan alargadas durante los meses en que Q_S cambia de signo.

b) durante el verano los valores más altos de Q/h suceden antes en las zonas someras y después en las profundas. Cuando Q_S se hace positivo, las primeras estaciones que aumentan en Q/h son las someras y enseguida las profundas, el calor se distribuye en una profundidad menor (zona somera) y se establecen gradientes entre éstas y las profundas.

c) el tiempo de homogeneización horizontal de las estaciones sucede tres semanas antes que en el caso sin difusión.

3.6 Resumen

Modelos sin difusión lateral

En la parte estratificada, se predicen valores de calor (Q) almacenado y de estratificación (ϕ) menores y mayores, respectivamente, que los observados; esto se debe a que no se permite intercambio difusivo entre las columnas, y cada una es independiente de las otras. Esto, como es de esperarse, afectará al ciclo estacional de estratificación ya que en las partes más profundas los términos de mezcla son más pequeños que el de calentamiento y los valores de ϕ tenderán a incrementarse. Por esta razón, el modelo predice un ciclo estacional de estratificación más largo que el observado.

Modelos que incluyen difusión lateral

Cuando se incluye difusión lateral, los valores de calor almacenado disminuyen globalmente. En invierno, las estaciones más profundas presentan un mayor contenido de calor que las someras, y los flujos difusivos son de las primeras a estas últimas. En verano, el sentido de los flujos se invierte; por esta razón, los valores de calor almacenado en la parte estratificada serán mayores que los que se obtendrían al no considerar difusión.

En cuanto a la estratificación, el efecto de los términos difusivos es más notable durante los meses de verano en que los gradientes entre la parte estratificada y la mezclada son más intensos. Debido a que los procesos difusivos tienden a disminuir tales gradientes y ϕ es proporcional a éstos, los valores de ϕ se ven reducidos. Como consecuencia, el rompimiento de la estratificación (retroceso del frente) será más rápido que en el caso anterior.

IV DISCUSIONES Y CONCLUSIONES

4.1 Introducción

El propósito de este estudio fué determinar cómo la estructura térmica y la energía potencial de una columna son modificadas localmente por la presencia de flujos laterales de calor a través de un frente.

Inicialmente se utilizaron predicciones de modelos sin difusión lateral y observaciones ya existentes; su comparación sugirió la presencia de procesos difusivos a través del frente. La influencia de éstos se investigó desarrollando dos modelos generales: uno de energía potencial (ec.19) y otro de calor almacenado (ec.20) capaces de tratar los casos de intercambio lateral de estas propiedades a través de un frente; en particular, el observado en el Mar de Irlanda.

Los modelos obtenidos fueron simplificados a un caso sencillo de difusión lateral de energía potencial (ec.33) y calor almacenado (ec.34) y se resolvieron numéricamente para predecir el desarrollo estacional de estas propiedades. Las predicciones de los modelos con y sin difusión fueron comparadas posteriormente con las observaciones.

4.2 Estratificación

Las predicciones del modelo sin difusión muestran un buen ajuste con las observaciones en cuanto a inicio y avance de la estratificación a la posición de verano (Fig.17). Sin embargo, se predice su desaparición un mes después que lo observado. Los valores predichos por este modelo se conforman mejor a los observados que los reportados por Lavín (1984),

no obstante que este autor utilizó datos reales como entradas. Esto se atribuye a que los valores de amplitud de ciclo estacional de calor (Q_0) y viento (W) fueron diferentes a los utilizados por el citado autor.

El modelo con difusión (ec.33) puede reproducir, al menos cualitativamente, algunas de las características observadas, no predichas anteriormente (ver Fig.18), y pone de manifiesto que las discrepancias entre las observaciones y las predicciones pueden ser indicativas de la presencia de flujos difusivos a través del frente. El modelo predice notablemente bien el inicio y avance de la estratificación a la posición de verano, así como el retroceso del frente.

Cabe mencionar que el orden de magnitud del término difusivo es comparable con el del término de mezcla por viento (ver apéndice), lo cual pone de manifiesto la importancia del primero en modelos de estratificación.

4.3 Calor almacenado

El modelo con difusión lateral de calor (ec.34) logra, durante el verano, aumentar el contenido de calor en la parte estratificada. Si bien, los valores predichos están ligeramente por abajo de los observados, el acuerdo general es satisfactorio (Fig.21). A diferencia del caso sin difusión, este modelo predice que los valores máximos ocurren primero en las partes someras y días después en las profundas; esto en acuerdo con las observaciones presentadas en la Fig.12 y con los estudios de Bowden (1955, 1983) en la misma zona.

Es probable que los bajos valores obtenidos (comparados con las observaciones) se deban, en parte, a que el Q_0 no fue

el adecuado; por ejemplo, un valor de Q_0 más alto haría que el calor almacenado en la columna aumentara. Es importante hacer notar que, a diferencia de los resultados reportados por Lavín (1984) y Organista (1987) (quienes utilizaron modelos sin difusión), se logra predecir el desarrollo completo del ciclo estacional de calor almacenado en la sección. Los autores mencionados encuentran que los modelos sin difusión predicen un exceso de calor almacenado durante el período de invierno.

Las predicciones mostraron claramente la respuesta de la columna a los procesos difusivos. El término de difusión de ϕ disminuye globalmente los valores de estratificación en la parte central de la zona estratificada, y los aumenta en las partes someras (Fig.18). Es decir, este término difunde continuamente energía potencial desde la parte estratificada hacia las partes más someras; encontrándose que la difusión es más intensa en la zona frontal y durante los meses de verano (Figs.19 y 20).

Por otra parte, la inclusión de difusión lateral en la ecuación de calor almacenado, trae como consecuencia que:

a) en invierno, las partes mezcladas presenten valores de Q/h menores que en la parte estratificada, lo cual implica que durante estas fechas el flujo de calor es de la parte estratificada a la mezclada.

b) en verano, las partes mezcladas presenten valores de Q/h más altos que en la parte estratificada, lo cual significa que en estas fechas los flujos de calor son de las zonas mezcladas hacia la estratificada.

c) que los máximos de Q/h ocurrieran antes en las regiones mezcladas y días después en las estratificadas, esto en acuerdo con las observaciones. Se encontró, además, que

las máximas variaciones espaciales y temporales de estos valores (y también de ϕ) ocurrieron a los lados del frente (Fig.22). Esto significa que en la zona frontal tales procesos son más intensos.

Los resultados anteriores concuerdan con los argumentos de Bowden (1983) y Simpson y Bowers (1984) quienes indican que el mecanismo de difusión lateral de calor actúa como se ha descrito.

4.4 Casos Particulares

La obtención de casos particulares se incluyó en el trabajo para probar la generalidad de los modelos desarrollados. Se comprobó que los casos particulares de advección pueden obtenerse directamente de la ecuación 19 sin tener que recurrir al modelo original (ec.10), cuya obtención queda poco clara. En el caso de calor almacenado, los modelos de distribución de calor estudiados por Pingree et al. (1975, 1978, 1985) son casos particulares de (20).

Una ventaja de los casos generales es que pueden estudiarse, por ejemplo, efectos combinados de advección y difusión lateral de calor (en el caso en que ambos procesos sean reelevantes). O, si se prefiere, efectos advectivos con corte en la vertical sobre una topografía variable, por mencionar algunos.

4.5 Conclusiones

A partir de principios de conservación de calor y de ECT se obtuvieron dos modelos que describen la evolución temporal de la energía potencial y calor almacenado, respectivamente, de una columna de agua sujeta a mezcla vertical (por viento y corrientes de marea) y flujo superficial y lateral de calor, en presencia de velocidades de corte sobre una topografía variable. La generalidad de los modelos se probó mediante la obtención de casos particulares a partir de aquellos

Para estudiar el efecto de los flujos laterales de calor y energía potencial en el desarrollo de la estratificación y calor almacenado de la columna, los modelos generales fueron simplificados a casos sencillos que incluyeron difusión lateral de dichas propiedades. Se encontró que los modelos así obtenidos representaban una extensión más al modelo básico de Simpson et al. (1978).

Se implementaron programas computacionales para resolver las ecuaciones que representan a los modelos mencionados. Se resolvieron cuatro casos: a) estratificación (con y sin difusión lateral de energía potencial) y b) calor almacenado (con y sin difusión lateral de calor). El comportamiento de la solución demostró que los modelos con difusión disminuían globalmente los valores de ϕ y Q/h .

En el caso de estratificación, se encontró que los procesos difusivos producían una difusión continua de ϕ hacia las partes mezcladas, siendo la difusión más intensa durante el verano y en la zona frontal. Como consecuencia, los valores de ϕ disminuyeron en la parte estratificada y el

tiempo de retroceso de estratificación fué más corto que en el caso sin difusión. Las predicciones se ajustaron notablemente bien a las observaciones.

En el caso de calor almacenado, se encontró que, durante invierno, las regiones someras presentaron valores de Q/h menores que las profundas, por lo que los flujos de calor fueron de la región más profunda a las someras. En verano, se presentaron valores mayores en las partes someras y menores en las profundas, por lo que los flujos difusivos fueron de las primeras hacia estas últimas. Lo anterior indica que el mecanismo propuesto de difusión lateral de calor (sección I.2) si logra aumentar los valores de Q y disminuir los de ϕ en la parte estratificada.

El buen acuerdo entre las predicciones y las observaciones, demostró que el ciclo estacional de estratificación y calor almacenado en la región del frente del Mar de Irlanda, puede simularse mejor con la ayuda de las ecuaciones aquí obtenidas que utilizando modelos sin difusión.

4.6 Recomendaciones

El hecho de haber obtenido los modelos generales y de determinar el efecto de los flujos laterales de calor en la estratificación, constituyen un aporte importante al estudio de la predicción de frentes en mares someros. Sin embargo, no hay que olvidar que los casos estudiados son un primer intento para tratar de comprender la respuesta de la estratificación a la tasa local de mezclado y a los flujos laterales difusivos de calor, y que se requieren estudios más extensos que ayuden a clarificar aún más el papel de éstos y los mecanismos mencionados líneas arriba.

Se recomiendan las siguientes líneas de estudio:

a) simplificar la ecuación general a un caso de dos capas como en el modelo de Simpson y Bowers (1984) pero con la inclusión de difusión lateral; o sea, básicamente se propone con el modelo de cajas (sección I.2). Lo anterior permitiría un estudio más detallado de los procesos difusivos a través del frente y del comportamiento de la estructura en la vertical. En este caso, la transferencia vertical estará regida por un criterio energético, pero no hay que olvidar que existen modelos similares (sin difusión lateral), con mecanismos diferentes, como los descritos por Stigebrandt (1981) y Aikman (1983).

b) en este estudio se utilizó un coeficiente constante de difusión lateral turbulenta, K ; pero, se obtendrían predicciones más precisas si este coeficiente fuera variable en tiempo y espacio. En tiempo, porque se observó que los procesos difusivos fueron más importantes en verano; y en espacio, porque se vió que en la zona frontal tales procesos fueron más intensos.

c) dado que el término difusivo es similar en orden de magnitud que el de mezcla por viento, se sugiere utilizar este modelo (con los valores apropiados de K) en lugar del MEP. Con esto, se piensa que las predicciones mejorarán.

d) en el caso de advección, podría utilizarse en el Golfo de California y comparar las predicciones con las observaciones reportadas por Argote (1985) y Organista (1987). Lo anterior no excluye su aplicación en otras regiones del mundo.

e) En este trabajo no se incluyó el fenómeno de retroalimentación (Simpson, 1981), y el efecto combinado de éste con difusión y advección queda abierto a investigación.

LITERATURA CITADA

- Aikman, F., III. (1984): Pycnocline development and its consequences in the Middle Atlantic Bight. *J. Geophys. Res.*, **89**(C1), 685-694.
- Aken, H. M. van (1986): The onset of seasonal stratification in shelf seas due to differential advection in the presence of a salinity gradient. *Cont. Shelf Res.*, **5**, 475-485.
- Aken, H. M. van, G. J. F. van Heijst, y L. R. M. Maas (1987): Observations of fronts in the North Sea. *Jour. Mar. Res.* **45**(3), 579-600.
- Argote-Espinoza, M. L. (1983): Perturbation of the density field by an island in a stratified sea. Tesis Doctoral, University College of North Wales, Bangor. U. K. 111 pp.
- Bowden, K. F. (1955): Physical oceanography of the Irish Sea. *Fisheries Investigations*, **XVIII**, 67 pp.
- (1965): Horizontal mixing in the sea due to a shearing current. *Jour. Fluid Mech.*, **21**, 83-95.
- (1983): Physical oceanography of coastal waters. Ellis Horwood series in marine science. Camelot Press Ltd., Southampton. 299 pp.
- Bowman, M. J. y W. E. Esaias. (1981): Fronts, stratification and mixing in Long Island and Block Island Sounds. *J. Geophys. Res.*, **85**, 2728-2742.
- Czitrom-Baus, S. P. R. (1982): Density stratification and an asociated front in Liverpool Bay. Tesis Doctoral, University College of North Wales, Bangor. U. K. 97 pp.
- DE Ruijter, W. P. M. (1983a): Frontogenesis in an advective mixed-layer model. *J. Phys. Oceanogr.*, **13**, 487-495.
- (1983b): Effects of velocity shear in advective mixed-layer models. *J. Phys. Oceanogr.*, **13**, 1589-1599.
- Garret, C. J. R., J. R. Keeley y D. A. Greenberg (1978): Tidal mixing versus thermal stratification in Bay of Fundy and Gulf of Maine. *Atmosphere-Ocean*, **16**, 403-423.

- Garret, C. J. R. (1979): Mixing in the ocean interior. *Dyn. Atmos. Oceans*, 3, 239-265.
- Garret, C. J. R. y J. W. Loder (1981): Dynamical aspects of shallow sea fronts. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A302, 563-581.
- James, I. D. (1977): A model of the annual cycle of temperature in a frontal region of the Celtic Sea. *Est. Coast. Mar. Sci.*, 5, 339-353.
- Kim, J-W. (1976): A generalized bulk model of the oceanic mixed layer. *J. Phys. Oceanogr.*, 686-695.
- Krauss, W. (1973): Methods and results of the theoretical oceanography, Vol. I. Gebrüder Borntraeger, Berlin, Stuttgart. 450 pp.
- Lavín-Peregrina M. F. (1984): The seasonal cycle and variability of stratification in the Western Irish Sea. Tesis Doctoral, University College of North Wales, Bangor. U. K. 153 pp.
- Mooers, C. N. K. (1978): Oceanic fronts: A summary of Chapman Conference. *Trans. Amer. Geophys. Union*, 5, 484-491.
- Neumann G., y W. J. Pierson Jr. (1966): Principles of Physical Oceanography. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 544 pp.
- Officer, C. B. (1976): Physical Oceanography of Estuaries (and associated coastal waters). John Wiley and Sons., 464 pp.
- Pingree, R. D. (1975): The advance and retreat of the thermocline on the continental shelf. *J. Mar. Biolog. Ass. U. K.*, 55, 965-274.
- (1978): Cyclonic eddies and cross-frontal mixing. *J. Mar. Biolog. Ass. U. K.*, 58, 955-963.
- Pingree, R. D. y D. K. Griffiths (1978): Tidal fronts on the shelf seas around the British Isles. *J. Geophys. Res.*, 83, 4615-4622.

- Pingree, R. D., G. T. Mardell, y L. Maddock (1985): Tidal mixing in Channel Isles region derived from the results of remote sensing and measurements at sea. *Est. Coast. Shelf Sci.*, 20, 1-18.
- Pond, S. y G. L. Pickard (1983): *Introductory Dynamical Oceanography*. Pergamon Press, 328 pp.
- Richardson, K., M. F. Lavín-Peregrina, E. G. Mitchelson, y J. H. Simpson (1985): Seasonal distribution of chlorophyll *a* in relation to physical structure in the western Irish Sea. *Oceanol. Acta*, 8, 1, 77-86.
- Schumacher, J. D., T. H. Kinder, D. J. Pashinski y R. L. Charnell (1979): A structural front over the continental shelf of the eastern Bering Sea. *J. Phys. Oceanogr.*, 9, 79-87.
- Simpson, J. H. (1971): Density stratification and microstructure in the Western Irish Sea. *Deep Sea Res.*, 18, 309-319.
- (1981): The shelf-sea fronts: implications of their existence and behaviour. *Phyl. Trans. Roy. Soc. London*, A302, 531-546.
- y J. R. Hunter (1974): Fronts in the Irish Sea. *Nature*, London, 250, 404-406.
- y D. Bowers (1981): Models of stratification and frontal movement in shelf seas. *Deep-Sea Res.*, 28, 727-738.
- (1984): The role of tidal stirring in controlling the seasonal heat cycle in shelf seas. *Ann. Geophys.*, 2, 4, 411-418.
- , D. G. Hughes y N. C. G. Morris (1977): The relation of seasonal stratification to tidal mixing on the continental shelf. In: *a voyage of discovery*. M. Angel (ed.), *Deep-Sea Res.* (suppl.). pp. 327-340.
- , y R. D. Pingree (1978): Shallow sea fronts produced by tidal stirring. In: *Oceanic fronts and Coastal Processes*. M. J. Bowman and W. E. Esaias (eds.). Springer-Verlag, 29-42.

----- , P. B. Tett, M. L. Argote-Espinoza, A. Edwards, K. J. Jones, y G. Savidge (1982): Mixing and phytoplankton growth around an island in a stratified sea. *Cont. Shelf Res.*, 1, 15-31.

Stigebrandt, A. (1981): Cross-thermocline flow on the continental shelves and the location of shelf sea fronts. In: *Ecohydrodynamics*, J. C. J. Nihoul (ed.), Elsevier, 51-65.

APENDICE

En esta parte del escrito se justifica el ignorar los términos de la ecuación 28 que incluyen las variaciones con profundidad. Se parte de ésta;

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{g\alpha}{2C_p} \left(Q_s + 2K \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + KT \frac{\partial^2}{\partial x^2} (h) \right)$$

$$- \epsilon \rho_0 C_d \frac{|U|^3}{h} - \delta \psi \rho_a C_{10} \frac{|\overline{W'}|^3}{h} + \frac{K}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\phi h) \right)$$

$$- \rho_0 g \alpha K \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \hat{T}_{-h} - \frac{\rho_0 g \alpha}{2} K \left(2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} - T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{-h}, \quad (A_1)$$

con los valores de las constantes, datos de entrada (Cap.III), y mediciones hidrográficas obtenidas en el Mar de Irlanda (Lavín, 1984), resulta:

$$\text{I.- } \frac{g\alpha}{2C_p} Q_s; \quad O(10^1 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3} \cdot 10^2) \Rightarrow O(10^{-3})$$

$$\text{II.- } \frac{g\alpha}{2C_p} \left(2K \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} \right); \quad O(10^{-6} \cdot 10^2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5}) \Rightarrow O(10^{-12})$$

$$\text{III.-} \quad \frac{g\alpha}{2C_p} \left(K T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right); \quad O(10^{-6} \cdot 10^2 \cdot 10^1 \cdot 10^{-8}) \Rightarrow O(10^{-11})$$

$$\text{IV.-} \quad \epsilon \rho_0 C_d \frac{|U_2|^3}{h}; \quad O(10^{-3} \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} \cdot 10^1) \Rightarrow O(10^{-4})$$

$$\text{V.-} \quad \delta \psi \rho_a C_{10} \frac{|W|^3}{h}; \quad O(10^{-4} \cdot 10^1 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} \cdot 10^3) \Rightarrow O(10^{-5})$$

$$\text{VI.-} \quad \frac{\phi}{h} K \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}; \quad O(10^2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 \cdot 10^{-8}) \Rightarrow O(10^{-6}),$$

$$\text{VII.-} \quad \frac{2K}{h} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x}; \quad O(10^2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3}) \Rightarrow O(10^{-6}),$$

$$\text{VIII.-} \quad K \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \quad O(10^2 \cdot 10^{-7}) \Rightarrow O(10^{-5}),$$

$$\text{IX.-} \quad \rho_0 g \alpha K \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 T_{-h}; \quad O(10^3 \cdot 10^1 \cdot 10^{-4} \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-1}) \Rightarrow O(10^{-7})$$

$$\text{X.-} \quad \rho_0 g \alpha K \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad O(10^2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5}) \Rightarrow O(10^{-6}),$$

$$\text{XI.-} \quad \frac{\rho_0 g \alpha}{2} K \left(T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{-h}; \quad O(10^2 \cdot 10^1 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-8}) \Rightarrow O(10^{-6}).$$

Los términos con variaciones de profundidad son dos órdenes de magnitud más pequeños que el difusivo, lo cual justifica el eliminarlos. Por esta razón, A_1 se reduce a:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{g\alpha}{2C_p} Q_s - \epsilon \rho_0 C_d \frac{|U_2|^3}{h} - \delta \psi \rho_a C_{10} \frac{|W|^3}{h} + K \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (A_2)$$

que es el MEP con difusión lateral de energía potencial. En este caso, el término difusivo resultó ser del mismo orden de magnitud que el de mezcla por viento, lo cual demuestra su importancia.

La expresión para la tasa de cambio de calor almacenado, está representada por;

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = Q_s + K \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - 2\rho_0 C_p K \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{2} T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{-h}. \quad (A_3)$$

Procediendo de la misma manera, se obtiene lo siguiente;

$$\text{I.- } Q_s; \quad O(10^2),$$

$$\text{II.- } K \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}; \quad O(10^2 \cdot 10^1) \Rightarrow O(10^3)$$

$$\text{III.- } 2\rho_0 C_p K \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} \right); \quad O(10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-5}) \Rightarrow O(10^0)$$

$$\text{IV.- } 2\rho_0 C_p K \left(T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_{-h}; \quad O(10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^1 \cdot 10^{-8}) \Rightarrow O(10^1)$$

el término difusivo es más importante que los que contienen las variaciones con profundidad, por lo que éstos últimos pueden eliminarse. Por tanto, queda;

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = Q_s + K \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

que expresa que el calor almacenado de una columna depende del flujo superficial y lateral de calor.