

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE  
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA

METODO TOPOLOGICO PARA OBTENER LAS ECUA-  
CIONES DE UNA RED DE CAPACITORES  
CONMUTADOS MULTIFASICA

T E S I S  
MAESTRIA EN CIENCIAS

Armando Reyes Serrato

RESUMEN de la tesis que presenta Armando Reyes Serrato como requisito parcial para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS en FISICA APLICADA con opción en ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES. Ensenada, B.C., México. Febrero de 1987.

**Método Topológico para Obtener las Ecuaciones  
de una Red de Capacitores Conmutados Multifásica**

Resumen aprobado por: Hugo H. Hidalgo S.  
M. en C. Hugo Homero Hidalgo Silva  
Director

Los avances tecnológicos de las últimas décadas en el campo de los circuitos integrados, han permitido que la simulación y sustitución de un resistor por capacitores y conmutadores sea útil y económicamente costeable. Por tal motivo en la década de los 70's se inicia la popularización de lo que ahora se conocen como redes de capacitores conmutados.

La construcción de un resistor en circuito integrado, tiene la desventaja de que ocupa mucho espacio, de que no se puede obtener con un valor muy preciso y de que es muy variable con la temperatura. Todas las desventajas anteriores se eliminan cuando en lugar de integrar el resistor se integran capacitores y conmutadores que sustituyen al resistor.

El objetivo del presente trabajo de tesis es: desarrollar un método topológico para obtener las ecuaciones necesarias, para el análisis de redes de capacitores conmutados, en una forma fácil, desarrollo que ayuda a simplificar el análisis de tales redes.

Se propone primero un procedimiento sistemático para obtener la ecuación nodal, la de secciones de corte y la de lazos, de una red de capacitores conmutados multifásica, que no contiene elementos activos como parte de la red.

Posteriormente se establece el procedimiento sistemático para obtener la ecuación nodal y la de lazos, de una red de capacitores conmutados multifásica que contiene elementos activos. Para esto último, se hace uso de las equivalencias nulator-norator del transistor y del amplificador operacional.

El método propuesto en este trabajo de tesis tiene la ventaja, con respecto a los ya existentes, de que no requiere circuitos equivalentes en el dominio  $Z$ , tampoco son necesarias operaciones matriciales complicadas para obtener las ecuaciones que caracterizan a las redes de capacitores conmutados en el dominio  $Z$ .

Mediante los ejemplos realizados para ilustrar el método aquí propuesto se hace ver que éste es muy simple comparado

con los métodos desarrollados en las referencias mencionadas en el ejemplo correspondiente.

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA  
Y  
DE EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA

DIVISION DE FISICA APLICADA

DEPARTAMENTO DE ELECTRONICA  
Y TELECOMUNICACIONES

**"Método Topológico para Obtener las Ecuaciones  
de una Red de Capacitores Conmutados Multifásica"**

**TESIS**

Que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para  
obtener el grado de Maestro en Ciencias presenta:

Armando Reyes Serrato

Ensenada, B. C.

Febrero de 1987

TESIS APROBADA PARA SU DEFENSA POR:

*Hugo H. Hidalgo*

M.C. Hugo Homero Hidalgo Silva, Director del Comité

*Jaime Sánchez García*

M.C. Jaime Sánchez García, Miembro del Comité

*José Luis Medina Monroy*

M.C. José Luis Medina Monroy, Miembro del Comité

*José Luis Briseño Cervantes*

M.C. José Luis Briseño Cervantes, Miembro del Comité

*David Covarrubias Rosales*

M.C. David Covarrubias Rosales, Jefe del Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones

*Martín Luis Celaya Barragán*

M.C. Martín Luis Celaya Barragán, Director de la División de Física Aplicada

*C. Nava B.*

M.C. Cuauhtémoc Nava Button, Director Académico Interino

Tesis presentada en Febrero 27, 1987.

**Para:**

José de León  
María Esthela  
Gerardo  
Gloria Esther  
Martín  
José León

**Y**

Miguel Ángel  
Gloria Elena

## AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Rogelio Palomera García, quien fué mi guía en el desarrollo del presente trabajo de tesis.

A los miembros de mi comité de tesis:

M.C. Hugo H. Hidalgo S.

M.C. Jaime Sánchez G.

M.C. José Luis Medina.

M.C. José Luis Briseño.

Durante los estudios de maestría el autor fué financiado por el CoNaCyT y el CICESE.

Agradezco también el apoyo recibido en el Instituto de Física de la UNAM en su Laboratorio de Ensenada, en donde actualmente trabajo y en donde terminé de escribir este trabajo de tesis.



## CONTENIDO

	página	
<b>I</b>	<b>Presentación</b>	<b>1</b>
<b>I.1</b>	Presentación del problema	1
<b>I.2</b>	Solución dada y su justificación	2
<b>I.3</b>	Resumen del resto del escrito	4
<b>II</b>	<b>Método topológico para obtener las ecuaciones de una red de capacitores conmutados (red cc)</b>	<b>5</b>
<b>II.1</b>	Introducción	5
<b>II.2</b>	Análisis de redes invariantes	6
<b>II.3</b>	Análisis de redes cc sin elementos activos	9
<b>II.4</b>	Método topológico para obtener la ecuación nodal de una red cc multifásica	18
<b>II.4.1</b>	Justificación del método	20
<b>II.4.2</b>	Ejemplo	21
<b>II.5</b>	Método topológico para obtener la ecuación de secciones de corte de un red cc multifásica	27
<b>II.5.1</b>	Justificación del método	29
<b>II.5.2</b>	Ejemplo	30
<b>II.6</b>	Método topológico para obtener la ecuación de lazos de una red cc multifásica	34
<b>II.6.1</b>	Justificación del método	36
<b>II.6.2</b>	Ejemplo	37

Continuación de contenido	página	
<b>III</b>	<b>Método topológico para obtener las ecuaciones de una red de capacitores conmutados que contiene nulores</b>	42
III.1	Introducción	42
III.2	Redes con nulores	42
III.2.1	Análisis nodal	47
III.2.2	Análisis de lazos	50
III.3	Procedimiento para obtener la ecuación nodal	53
III.3.1	Ejemplo	55
III.4	Procedimiento para obtener la ecuación de lazos	59
III.4.1	Ejemplo	61
<b>IV</b>	<b>Conclusiones y recomendaciones</b>	64
IV.1	Conclusiones	64
IV.2	Recomendaciones	65
	<b>Literatura citada</b>	67
	<b>APENDICE I. Redes de capacitores conmutados</b>	72
	<b>APENDICE II. Trabajos publicados</b>	78
AII.1	"Deducción topológica para el análisis nodal de redes de capacitores conmutados"	79
AII.2	"On the loop equation formulation for switched capacitor networks"	90

## LISTA DE FIGURAS

figura		página
1	m señales de reloj que no se traslapan.	10
2(a)	Red cc y las fases que activan sus conmutadores	12
2(b)	Conjunto de grafos que definen la red cc.	12
3	Red cc trifásica.	22
4	Conjunto de grafos de la red cc trifásica.	23
5	Red cc bifásica.	31
6	Conjunto de grafos de la red cc bifásica.	32
7	Red cc bifásica.	38
8	Conjunto de grafos de la red cc bifásica.	39
9	Símbolo y ecuación del nulor.	44
10 a,b	Equivalencias: (a) Transistor-nulor. (b) Amplificador_Operacional-nulor.	46
11 a,b	Red eléctrica con un par nulator-norator.	49
12 a,b	Red eléctrica con un par nulator-norator.	52
13	Red cc bifásica con un elemento activo.	56
14	Red cc bifásica con un par nulator-norator.	56
15	Grafos de la red cc de la Fig. 14.	57
16	Red cc bifásica con un elemento activo.	62
17	Equivalente nulor de la red de la Fig. 16.	62
18	Grafos de la red de la Fig. 17.	63
19	Capacitor en una red cc multifásica.	76

# METODO TOPOLOGICO PARA OBTENER LAS ECUACIONES DE UNA RED DE CAPACITORES CONMUTADOS MULTIFASICA

## PRESENTACION

### 1.1 Presentación del problema

Aun cuando la utilización de un capacitor y conmutadores para la simulación de una resistencia se reconoció hace ya mucho tiempo [Maxwell, 1892], no fue sino hasta hace relativamente poco que los capacitores conmutados recibieron atención por parte de los diseñadores de circuitos [Fried, 1972; Fettweis, 1981]; el progreso de la tecnología MOS (Metal Oxido Semiconductor) con la cual la integración de capacitores y conmutadores es práctica y costeable, dió el impulso definitivo a los circuitos de capacitores conmutados [Caves, et al., 1977; Hosticka, et al., 1977].

Se originó entonces una serie de métodos de análisis para este tipo de circuitos: algunos numéricos, diseñados especialmente para computadoras [Brglez, 1978; Liou y Kuo, 1979; Tsividis, 1979; etcétera]; otros algebraicos para el establecimiento de las ecuaciones [Kurth y Moschytz, 1979; Hokenek y Moschytz, 1980; Lin, 1981; Bruton y Battacharjee, 1982; Tsividis y Fang, 1982; Bruton, et al., 1983] a partir de las cuales es posible deducir los parámetros que caracterizan la red. Otros métodos son el desarrollo de

circuitos equivalentes [Laker, 1979; Moschytz, 1981], o la extensión de métodos de señales de flujo [Mulawka, 1980; Brugger, et al., 1983].

De toda esta gran cantidad de trabajos queda la sensación de que para los circuitos de capacitores conmutados los métodos de análisis nodal [Kurth y Moschytz, 1979; Hokenek y Moschytz, 1980; Bruton y Battacharjee, 1982], de lazos [Bruton, et al., 1983] o de secciones de corte, son diferentes a los que se utilizan en el análisis de los circuitos lineales sin conmutadores y que son los métodos comunes o normalmente usados.

El objetivo del presente trabajo, es proponer un método que facilite el análisis de redes de capacitores conmutados, basándose en la topología de la red.

## **1.2 Solución dada y su justificación**

En el presente trabajo se muestra que con la parte del método de análisis desarrollado, que es el objetivo de esta tesis, la diferencia mencionada en el punto anterior no existe al plantear las ecuaciones en el dominio  $Z$ . Esto es, el esquema general para el análisis de redes lineales invariantes en el tiempo y para el análisis de redes de capacitores conmutados es exactamente el mismo, hecho que se

manifiesta en las ecuaciones que caracterizan a ambos tipos de redes.

Las redes de capacitores conmutados que aquí se estudiarán, tienen las siguientes características:

(a) Están constituidas por capacitores, conmutadores ideales y elementos activos; los conmutadores se abren y se cierran mediante señales periódicas (o de reloj) que no se traslapan.

(b) La topología de la red cambia en el tiempo en forma periódica.

(c) Las señales que maneja la red son discretas.

La solución aquí presentada consiste en implementar parte de un método de análisis conocido como: **análisis topológico**.

El trabajo consiste en presentar y justificar el método topológico para la obtención de las ecuaciones (nodal, de secciones de corte y de lazos) que caracterizan a la red.

Los principales métodos existentes para el análisis de redes de capacitores conmutados (red cc) requieren obtener primero el circuito equivalente en el dominio  $Z$  y/o efectuar gran cantidad de productos matriciales para obtener la ecuación que caracteriza a dichas redes.

### 1.3 Resumen del resto del escrito

En el **Capítulo 2**, se describe el método topológico para escribir la ecuación de la red cc, sin elementos activos, en el análisis nodal, de secciones de corte y de lazos, proporcionándose los procedimientos correspondientes en cada caso.

En el **Capítulo 3** se analizan redes cc que contienen elementos activos, presentándose el método topológico para obtener las ecuaciones necesarias para el análisis nodal y el de lazos, de dichas redes. Los elementos activos se han sustituido por su equivalente nulo para aprovechar la comodidad del análisis de redes con nulores, aunado en este caso, a la simplicidad del análisis topológico.

En el **Capítulo 4** se dan las conclusiones del trabajo y se hacen algunas recomendaciones para quien desee continuar en esta línea de trabajo.

En los **apéndices I y II** se presentan algunos temas para complementar y facilitar el entendimiento de algunos conceptos utilizados en el texto; así como también copias de algunos artículos relacionados con el tema de este trabajo de tesis derivados de la misma.

## CAPITULO II

### METODO TOPOLOGICO PARA OBTENER LAS ECUACIONES DE UNA RED DE CAPACITORES CONMUTADOS (RED CC)

#### II.1 Introducción

En este capítulo se describe un método topológico para obtener las ecuaciones de una red con capacitores conmutados (red cc). Se obtienen las ecuaciones nodal, de secciones de corte y de lazos, concretándose a redes cc sin elementos activos. El método para redes con elementos activos se describe en el capítulo III.

Se presenta primero un breve resumen del análisis de redes lineales invariantes en el tiempo. Tal análisis está planteado en el dominio  $S$ . En seguida se efectúa el análisis en el dominio  $Z$  de las redes cc. Finalmente se muestra el método topológico para obtener las ecuaciones requeridas en la descripción del estado de la red.



## 11.2 Análisis de redes invariantes

A continuación se presenta un breve resumen del análisis nodal, de secciones de corte y de lazos, para redes lineales en el dominio  $S$ . Un desarrollo completo puede verse en la referencia Balabanian, et al., 1972.

Dada una red eléctrica de  $b$  elementos y  $n+1$  nodos, las relaciones voltaje-corriente de dichos elementos pueden escribirse como:

$$I_r = Y_r V_r \quad (1)$$

$$V_r = Z_r I_r \quad (2)$$

en donde:

$$I_r = [i_1 \ i_2 \ \dots \ i_b]^T \quad V_r = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_b]^T$$

$$Y_r = \text{Diag}[y_1 \ y_2 \ \dots \ y_b] \quad Z_r = \text{Diag}[z_1 \ z_2 \ \dots \ z_b]$$

siendo  $i_i$ ,  $v_i$ ,  $y_i$  y  $z_i$  la corriente, el voltaje, la admitancia y la impedancia del  $i$ -ésimo elemento, respectivamente.

Por otro lado, si  $A$ ,  $B$  y  $F$  son, respectivamente, las matrices de incidencia, lazos y secciones de corte, del grafo dirigido del circuito, las Leyes de Kirchhoff se expresan como:

$$A I_r = I_n \quad (3)$$

$$F I_r = I_c \quad (4)$$

$$B V_r = V_l \quad (5)$$

Donde las ecuaciones (3) y (4) se llaman ley de corrientes y la ecuación (5) ley de voltajes;  $I_n$ ,  $I_c$  y  $V_l$  se dan por:

$$I_n = [J_{n1} \ J_{n2} \ \dots \ J_{nn}]^T$$

$$I_c = [J_{c1} \ J_{c2} \ \dots \ J_{cn}]^T$$

$$V_l = [E_{l1} \ E_{l2} \ \dots \ E_{l(b-n)}]^T$$

con  $J_{ni}$  ( $J_{ci}$ ) [ $E_{li}$ ] igual a la suma algebraica de las fuentes de corriente [voltaje] independientes que están conectadas al nodo (corte) [lazo]  $i$ -ésimo.

Las matrices  $A$ ,  $B$  y  $F$  satisfacen las relaciones de ortogonalidad, siendo éstas:

$$A B^T = 0 \quad \text{y} \quad F B^T = 0 \quad (6)$$

De (6) es posible obtener las siguientes transformaciones de voltaje y de corriente:

$$V_r = A^T V_n \quad (7)$$

$$V_r = F^T V_c \quad (8)$$

$$I_r = B^T I_l \quad (9)$$

en donde  $V_n$ ,  $V_c$  e  $I_l$  son las matrices columna de voltajes nodales, voltajes de corte y corrientes de lazo, respectivamente.

De (1), (3) y (7) se obtiene la ecuación nodal:

$$I_n = Y_n V_n \quad \text{con} \quad Y_n = A Y_r A^T \quad (10)$$

De (1), (4) y (8) se obtiene la ecuación de secciones de corte:

$$I_C = Y_C V_C \quad \text{con} \quad Y_C = F Y_r F^T \quad (11)$$

De (2) (5) y (9) se obtiene la ecuación de lazos:

$$V_l = Z_l I_l \quad \text{con} \quad Z_l = B Z_r B^T \quad (12)$$

$Y_n$ ,  $Y_C$  y  $Z_l$  se conocen como matriz de admitancias nodales, matriz de admitancias de secciones de corte y matriz de impedancias de lazo, respectivamente. Por la forma en la que se obtienen ( $MNM^T$ ), tales matrices pueden interpretarse topológicamente y obtenerse directamente del grafo de la red por métodos ya conocidos, los cuales son los siguientes (para redes sin inductancias mutuas):

#### Matriz de admitancias nodales

Sea  $Y_n = [ y_{ij} ]$ , entonces:

si  $i=j$ ,  $y_{ii}$  es la suma de las admitancias que están conectadas al nodo  $i$ .

si  $i \neq j$ ,  $y_{ij}$  es el negativo de la suma de las admitancias comunes a los nodos  $i$  y  $j$ .

#### Matriz de admitancias de secciones de corte

Sea  $Y_C = [ y_{ij} ]$ , entonces:

si  $i=j$ ,  $y_{ii}$  es la suma de las admitancias que pertenecen al corte  $i$ .

si  $i \neq j$ ,  $y_{ij}$  es la suma algebraica de las admitancias comunes a los cortes  $i$  y  $j$ . La admitancia tendrá signo positivo si su orientación es la misma respecto a los cortes en cuestión y negativo si esto no sucede.

### Matriz de impedancias de lazo

Sea  $Z_l = [ z_{ij} ]$ , entonces:

si  $i=j$ ,  $z_{ii}$  es la suma de las impedancias que se encuentran en el lazo  $i$ .

si  $i \neq j$ ,  $z_{ij}$  es la suma algebraica de las impedancias comunes a los lazos  $i$  y  $j$ . La impedancia tendrá signo positivo si su orientación es la misma respecto a los lazos en cuestión y negativo si esto no sucede.

### 11.3 Análisis de redes cc sin elementos activos

Una red de capacitores conmutados pasiva, es un arreglo de capacitores y conmutadores, interconectados de alguna manera.

En este trabajo se considera que las señales de reloj (fases) que activan a los conmutadores no se traslapan (ver Fig. 1). Los conmutadores no tienen asociado segmento alguno

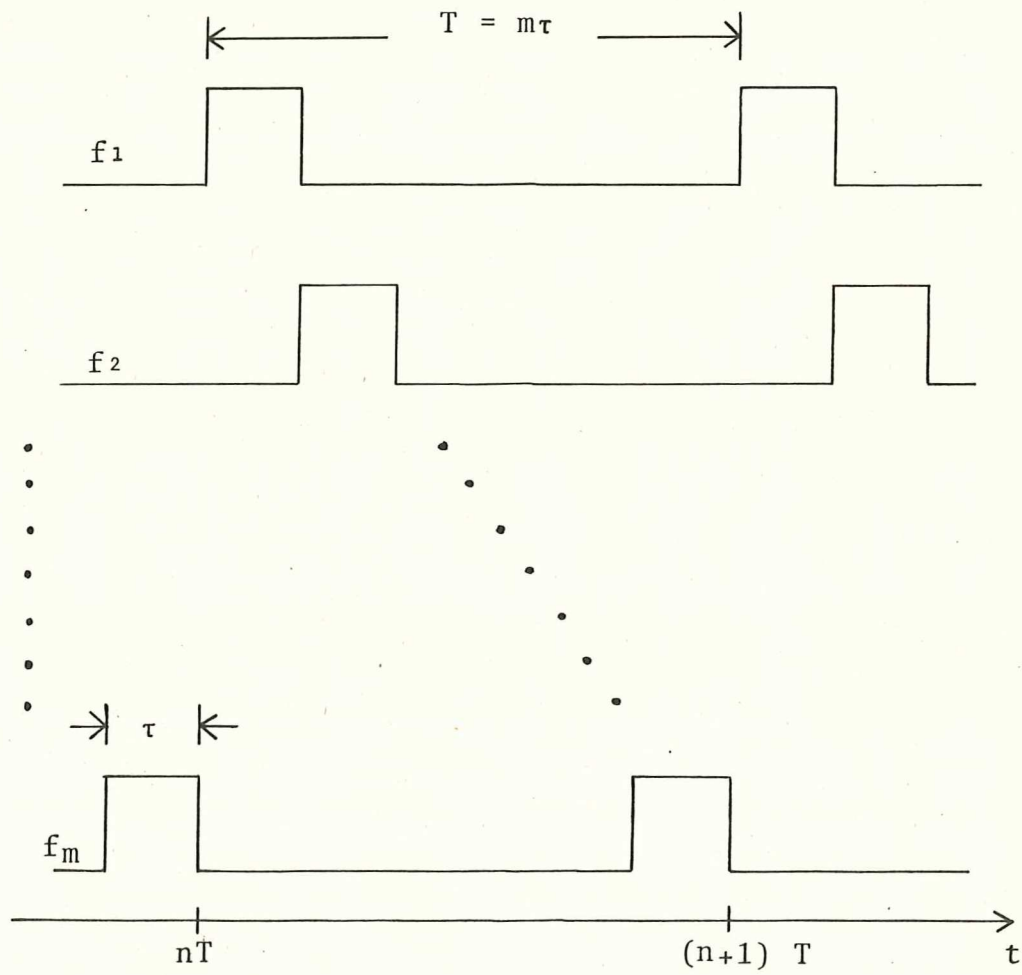


Fig. 1.  $m$  señales de reloj que no se traslapan.

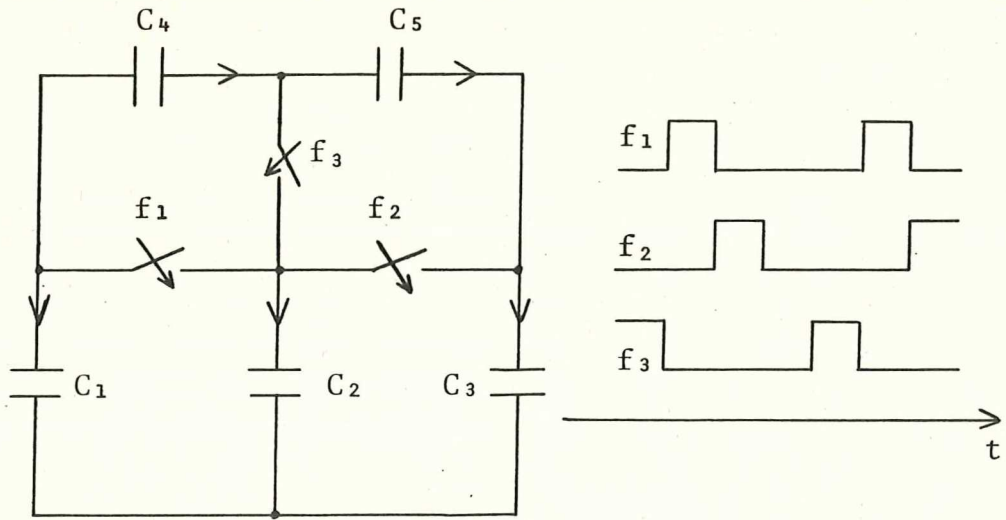
del grafo; cuando uno de ellos se cierra los nodos conectados a él se superponen. De esta manera, a toda red cc de  $m$  fases se le asocia una sucesión periódica de  $m$  grafos (por ejemplo la Fig. 2). Las Leyes de Kirchhoff se aplican al circuito en cada una de las fases.

Las matrices de incidencia, lazos y cortes, del  $i$ -ésimo grafo se representan por  $A_i$ ,  $B_i$  y  $F_i$ , respectivamente. A diferencia de los grafos de las redes invariantes, los de las redes cc pueden tener nodos aislados y/o bucles (autolazos); en este trabajo los nodos aislados no se toman en cuenta, pero si es indispensable considerar todos los elementos, por lo que si alguno forma un autolazo, su columna correspondiente en  $A_i$  o  $F_i$  está constituida únicamente por ceros. En forma dual, una rama terminal tiene su columna en  $B_i$  igual a cero.

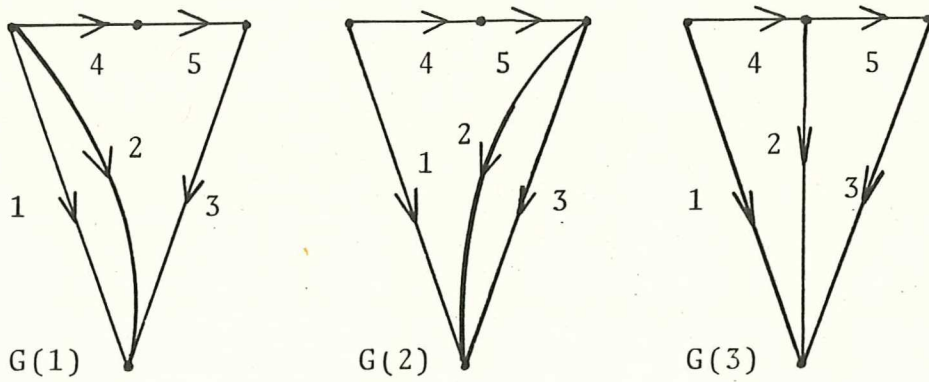
Como las redes cc están formadas por puros capacitores, es conveniente trabajar con la relación voltaje-carga y no con la voltaje-corriente, además, la red trabaja con señales discretas y por lo tanto se trabaja en el dominio  $Z$ .

Ahora bien, tomando como referencia el diagrama de tiempo que se muestra en la Fig. 1, se tiene que en el  $n$ -ésimo periodo, en la  $k$ -ésima fase y para el  $i$ -ésimo capacitor de una red cc  $m$ -fásica, la relación voltaje-carga es:

$$q_i^k(nT+(k-1)\mathcal{T}) = c_i [v_i^k(nT+(k-1)\mathcal{T}) - v_i^{k-1}(nT+(k-2)\mathcal{T})] \quad (13)$$



(a)



(b)

Fig. 2. (a) Red cc y las fases que activan sus conmutadores.  
 (b) Conjunto de grafos que definen la red cc.

La transformada Z de (13) es (Apéndice I):

$$q_l^k(z) = c_l [v_l^k(z) - z^{-1} v_l^{k-1}(z)] \quad (14)$$

Si la red está formada por  $b$  elementos y es de  $m$  fases entonces, se tienen  $m$  conjuntos de  $b$  ecuaciones (14).

Agrupándose en una ecuación matricial, resulta:

$$\begin{array}{ccccccc} |Q_r^1| & | & C_r & 0 & \dots & -z^{-1} C_r & |V_r^1| \\ |Q_r^2| & | & -z^{-1} C_r & C_r & \dots & 0 & |V_r^2| \\ | : & | & : & : & & : & | : \\ |Q_r^m| & | & 0 & 0 & \dots & C_r & |V_r^m| \end{array} = \quad (15a)$$

o en forma compacta:

$$Q_r = C_r V_r \quad (15b)$$

De (15a) es posible despejar la matriz columna de los voltajes de los elementos, quedando:

$$\begin{array}{ccccccc} |V_r^1| & | & D_r & z^{-(m-1)} D_r & \dots & z^{-1} D_r & |Q_r^1| \\ |V_r^2| & | & z^{-1} D_r & D_r & \dots & z^{-2} D_r & |Q_r^2| \\ | : & | & : & : & & : & | : \\ |V_r^m| & | & z^{-(m-1)} D_r & z^{-(m-2)} D_r & \dots & D_r & |Q_r^m| \end{array} = \frac{1}{1-z^{-m}} \quad (16a)$$

o en forma compacta:



$$V_r = D_r Q_r \quad (16b)$$

En las ecuaciones anteriores:

$$C_r = \text{Diag}[c_1 \ c_2 \ \dots \ c_b] \quad D_r = \text{Diag}[d_1 \ d_2 \ \dots \ d_b]$$

$$Q_r^k = [q_1^k \ q_2^k \ \dots \ q_b^k]^T \quad V_r^k = [v_1^k \ v_2^k \ \dots \ v_b^k]^T$$

siendo  $c_i$  ( $d_i$ ) la capacitancia (elastancia) del  $i$ -ésimo capacitor y  $q_i^k$  y  $v_i^k$  la carga y el voltaje del  $i$ -ésimo capacitor en la  $k$ -ésima fase.

Las ecuaciones (15) y (16) son las relaciones voltaje-carga de los capacitores para una red cc multifásica de  $b$  elementos.

Ahora bien, como ya se señaló anteriormente, las Leyes de Kirchhoff son aplicables en cada uno de los grafos de la red cc. Agrupando en notación matricial las ecuaciones de cada grafo (para cada fase), se tiene:

$$\begin{array}{ccc|ccc} |A_1 & & | & |Q_r^1| & |Q_n^1| \\ | & & | & | & | \\ | & A_2 & | & |Q_r^2| & |Q_n^2| \\ | & & | & | \cdot | & | \cdot | \\ | & & | & | \cdot | & | \cdot | \\ | & & | & | & | \\ | & & A_m & |Q_r^m| & |Q_n^m| \end{array} = \quad (17)$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} |F_1 & & | & |Q_r^1| & |Q_c^1| \\ | & & | & | & | \\ | & F_2 & | & |Q_r^2| & |Q_c^2| \\ | & & | & | \cdot | & | \cdot | \\ | & & | & | \cdot | & | \cdot | \\ | & & | & | & | \\ | & & F_m & |Q_r^m| & |Q_c^m| \end{array} = \quad (18)$$

$$\begin{array}{ccc}
 |B_1| & | & |V_r^1| & |V_l^1| \\
 | & | & | & | & | \\
 | & B_2 & | & |V_r^2| & |V_l^2| \\
 | & | & | & | & | \\
 | & | & | & | & | \\
 | & | & | & | & | \\
 | & | & | & | & | \\
 | & | & | & | & | \\
 | & & | & | & | \\
 | & & B_m & |V_r^m| & |V_l^m|
 \end{array} = \begin{array}{ccc}
 | & | & | \\
 | & | & | \\
 | & | & | \\
 | & | & | \\
 | & | & | \\
 | & | & | \\
 | & | & | \\
 | & | & | \\
 | & | & | \\
 | & | & | \\
 | & | & |
 \end{array} \quad (19)$$

en donde:

$$Q_n^k = [ J_{n1}^k \quad J_{n2}^k \quad \dots \quad J_{nn}^k ]^T$$

$$Q_c^k = [ J_{c1}^k \quad J_{c2}^k \quad \dots \quad J_{cn}^k ]^T$$

$$V_l^k = [ E_{l1}^k \quad E_{l2}^k \quad \dots \quad E_{l(b-n)}^k ]^T$$

con  $J_{n1}^k$  ( $J_{c1}^k$ ) [ $E_{l1}^k$ ] igual a la suma algebraica de las fuentes de carga [voltaje] independientes que están conectadas al nodo (corte) [lazo]  $i$ -ésimo, en la  $k$ -ésima fase.

Las ecuaciones (17), (18) y (19) se representan en notación compacta, respectivamente como:

$$A Q_r = Q_n \quad (20a)$$

$$F Q_r = Q_c \quad (20b)$$

$$B V_r = V_l \quad (20c)$$

Por las relaciones de ortogonalidad (6), válidas para cada grafo, se pueden escribir en forma compacta las transformaciones de voltaje y de carga de una red cc multifásica, como:

$$V_r = A^T V_n \quad (21a)$$

$$V_r = F^T V_c \quad (21b)$$

$$Q_r = B^T Q_l \quad (21c)$$

en donde:

$$\begin{aligned} V_n &= [ V_n^1 \quad V_n^2 \quad \dots \quad V_n^m ]^T \\ V_C &= [ V_C^1 \quad V_C^2 \quad \dots \quad V_C^m ]^T \\ Q_I &= [ Q_I^1 \quad Q_I^2 \quad \dots \quad Q_I^m ]^T \end{aligned}$$

De las ecuaciones (15), (20a) y (21a) se obtiene la ecuación nodal de una red cc multifásica:

$$\begin{array}{cccccc} |Q_n^1| & |C_{n11}| & 0 & \dots & C_{n1m}| & |V_n^1| \\ |Q_n^2| & |C_{n21}| & C_{n22} & \dots & 0 & |V_n^2| \\ | \cdot | & | \cdot | & \cdot & \cdot & \cdot & | \cdot | \\ | \cdot | & | \cdot | & \cdot & \cdot & \cdot & | \cdot | \\ |Q_n^m| & |0| & 0 & \dots & C_{nmm}| & |V_n^m| \end{array} = \quad (22)$$

en donde  $C_{n|j}$  es:

$$C_{n|j} = \begin{cases} A_j C_r A_j^T & \text{si } i=j \text{ con } j=1,2,\dots,m. \\ -z^{-1} A_j C_r A_j^T & \text{si } i=j-1 \text{ con } j=2,\dots,m. \\ -z^{-1} A_1 C_r A_m^T & \text{si } i=1 \text{ y } j=m. \\ 0 & \text{para el resto de las } i \text{ y } j. \end{cases} \quad (23)$$

La ecuación (22) puede escribirse en notación compacta como:

$$Q_n = C_n V_n \quad (24)$$

con

$$C_n = A C_r A^T$$

De las ecuaciones (15), (20b) y (21b) se obtiene la ecuación de secciones de corte de una red cc multifásica, que en notación compacta es:

$$Q_C = C_C V_C \quad (25)$$

con

$$C_C = F C_r F^T$$

La forma de (25) es similar a (22) sustituyendo los subíndices "n" por "c", y los elementos de  $C_C$  están dados en forma análoga a (23) al sustituir A por F.

De las ecuaciones (16), (20c) y (21c) se obtiene la ecuación de lazos de una red cc multifásica, que en notación compacta es:

$$V_l = D_l Q_l \quad (26)$$

con

$$D_l = B D_r B^T$$

Si tomamos a  $D_l = (1-z^{-m})^{-1} [ D_{l|j} ]$ , entonces, la submatriz  $D_{l|j}$  es:

$$D_{l|j} = z^{-x} B_l D_r B_j^T \quad (27)$$

con

$$x = \begin{cases} m+i-j & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i = j \\ i-j & \text{si } i > j \end{cases}$$

Por la forma en que las ecuaciones nodal, de secciones de corte y de lazos, fueron deducidas, puede llamárseles a las matrices  $C_n$ ,  $C_C$  y  $D_l$ , respectivamente, matriz de admitancias nodales, matriz de admitancias de corte y matriz de impedancias de lazo, para una red cc multifásica. Así mismo, como  $Y_n$ ,  $Y_C$  y  $Z_l$  pueden escribirse directamente del grafo gracias a la interpretación topológica que se hace para los

productos  $AY_rA^T$ ,  $FY_rF^T$  y  $BZ_rB^T$ , de igual manera  $C_n$ ,  $C_c$  y  $D_l$  pueden obtenerse directamente del conjunto de grafos de la red cc. Esta forma se manifiesta en (23) y (25) en donde las submatrices respectivas se expresan en función de las matrices topológicas. El método se proporciona en los puntos siguientes.

Es importante hacer notar que el método topológico para obtener cualquiera de las tres ecuaciones es exactamente el mismo, basta con sustituir las palabras admitancia por impedancia, y nodo por corte o lazo, para pasar de la obtención de una ecuación a la otra. Pero para hacer más explícito el procedimiento, se dan de uno en uno.

#### **11.4 Método topológico para obtener la ecuación nodal de una red cc multifásica**

Observando (23) se ve que, ignorando el factor  $-z^{-1}$ , la forma general de las submatrices es:  $A_l C_r A_j^T$ . Este producto tiene una interpretación topológica sencilla, como se verá a continuación.

El método topológico para obtener la ecuación nodal de una red cc multifásica (ecuación (22)) es el siguiente:

**Primero.** Las submatrices de las matrices columna de (22), se obtienen directamente de los  $m$  grafos de la red sin complicación alguna y, significan lo siguiente:

(a)  $Q_n^k$  es una matriz columna de  $n_k$  filas, en donde la fila  $i$ -ésima es la suma algebraica de las fuentes de carga independientes conectadas al nodo  $i$ , en el grafo de la red cc correspondiente a la fase  $k$ .

(b)  $V_n^k$  es una matriz columna de  $n_k$  filas, en donde la fila  $i$ -ésima es la variable correspondiente al voltaje del nodo  $i$ , en el grafo de la red cc correspondiente a la fase  $k$ .

$n_k$  es el número de nodos del grafo correspondiente a la fase  $k$ , sin tomar en cuenta los nodos aislados ni el de referencia.

Segundo. Las submatrices  $C_{n|j}$  de la matriz de admitancias nodales de (22), se obtienen de la siguiente forma:

Sea  $A|C_r A_j^T = [y_{k|l}]_{ij}$ , con  $k=1,2,\dots,n_j$ ;  $l=1,2,\dots,n_j$ ;  $i=j=1,2,\dots,m$ . Entonces:

$$[y_{k|l}]_{ij} = \sum [ \{y(k) \in G(i)\} \cap \{y(l) \in G(j)\} ]$$

en donde  $\{y(k) \in G(i)\}$  es el conjunto de las admitancias conectadas al nodo  $k$ , en el grafo  $i$  de la red cc.

$y_{k|l}$  es el elemento correspondiente la fila  $k$  y columna  $l$  de la submatriz  $ij$ .

La suma es algebraica; la admitancia tendrá signo positivo si tiene la misma orientación con respecto a los nodos en cuestión y, signo negativo si esto no sucede.

Cuando  $i$  es diferente de  $j$ , la submatriz tiene de factor a  $-z^{-1}$ .

Cuando  $i$  es igual a  $j$ , la submatriz se refiere exclusivamente al grafo  $i$ . Por lo tanto, el método para escribirla es exactamente el mismo que para una red lineal invariante en el tiempo, cuyo grafo sería el grafo  $i$  de la red cc. Esto es, para obtener las submatrices de la diagonal principal, se procede como en las redes invariantes.

#### II.4.1 Justificación del método

La matriz de incidencia  $A_i (A_j)$ , contiene la información relativa a los segmentos y su orientación, con respecto a los nodos del grafo correspondiente a la fase  $i (j)$ . La matriz  $C_r$ , es una matriz diagonal formada por todos los elementos de la red cc. Así, el producto  $A_i C_r$  es una matriz que contiene la información de qué elementos y con qué orientación están conectados a los nodos del grafo de la red cc, en la fase  $i$ .

Esto es:

$$\begin{array}{rcccl}
 \text{nodos} & \downarrow & 1 & 2 & \dots & b & \leftarrow \text{elementos} \\
 & & | & . & . & . & | \\
 & & 1 & | & . & . & . & | \\
 & & 2 & | & . & . & . & | \\
 A_i C_r = & & . & | & . & . & . & | \\
 & & . & | & . & . & . & | \\
 & & n & | & . & . & . & |
 \end{array}$$

Además:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \text{segmentos} & \leftarrow & 1 & 2 & \dots & n_j & \leftarrow & \text{nodos} \\
 A_j^T = & & 1 & | & \dots & | & & \\
 & & 2 & | & \dots & | & & \\
 & & \dots & | & \dots & | & & \\
 & & b & | & \dots & | & & 
 \end{array}$$

Por lo tanto, de la operación de multiplicación entre matrices, multiplicando  $A_I C_r$  con  $A_j^T$ , queda demostrado el método topológico dado. En forma simbólica resulta:

$$A_I C_r A_j^T = \begin{array}{cccc|cccc|cccc}
 & 1 & 2 & \dots & b & 1 & 2 & \dots & n_j & 1 & 2 & \dots & n_j \\
 1 & | & \dots & \dots & \dots & | & 1 & | & x & \dots & \dots & | & 1 & | & \dots & \dots & \dots & | \\
 2 & | & x & x & x & x & | & 2 & | & x & \dots & \dots & | & 2 & | & x & \dots & \dots & | \\
 \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & | & x & \dots & \dots & | & \dots & | & \dots & \dots & \dots & | \\
 n_1 & | & \dots & \dots & \dots & \dots & | & b & | & x & \dots & \dots & | & n_1 & | & \dots & \dots & \dots & | 
 \end{array} = \begin{array}{cccc|cccc}
 & 1 & 2 & \dots & n_j \\
 1 & | & \dots & \dots & \dots & | \\
 2 & | & x & \dots & \dots & | \\
 \dots & | & \dots & \dots & \dots & | \\
 n_1 & | & \dots & \dots & \dots & | 
 \end{array}$$

#### 11.4.2 Ejemplo

Para ilustrar el uso del método topológico, descrito en el punto anterior, considérese la red cc 3-fases que se muestra en la figura 3. El conjunto de grafos necesarios para definir el estado de la red, es el contenido de la figura 4. La forma general de la ecuación nodal para esta red, es:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 |Q_n^1| & & | & C_{n11} & 0 & C_{n13} & | & |V_n^1| \\
 | & & | & | & | & | & | & | \\
 |Q_n^2| & = & | & C_{n21} & C_{n22} & 0 & | & |V_n^2| \\
 | & & | & | & | & | & | & | \\
 |Q_n^3| & & | & 0 & C_{n32} & C_{n33} & | & |V_n^3|
 \end{array}$$



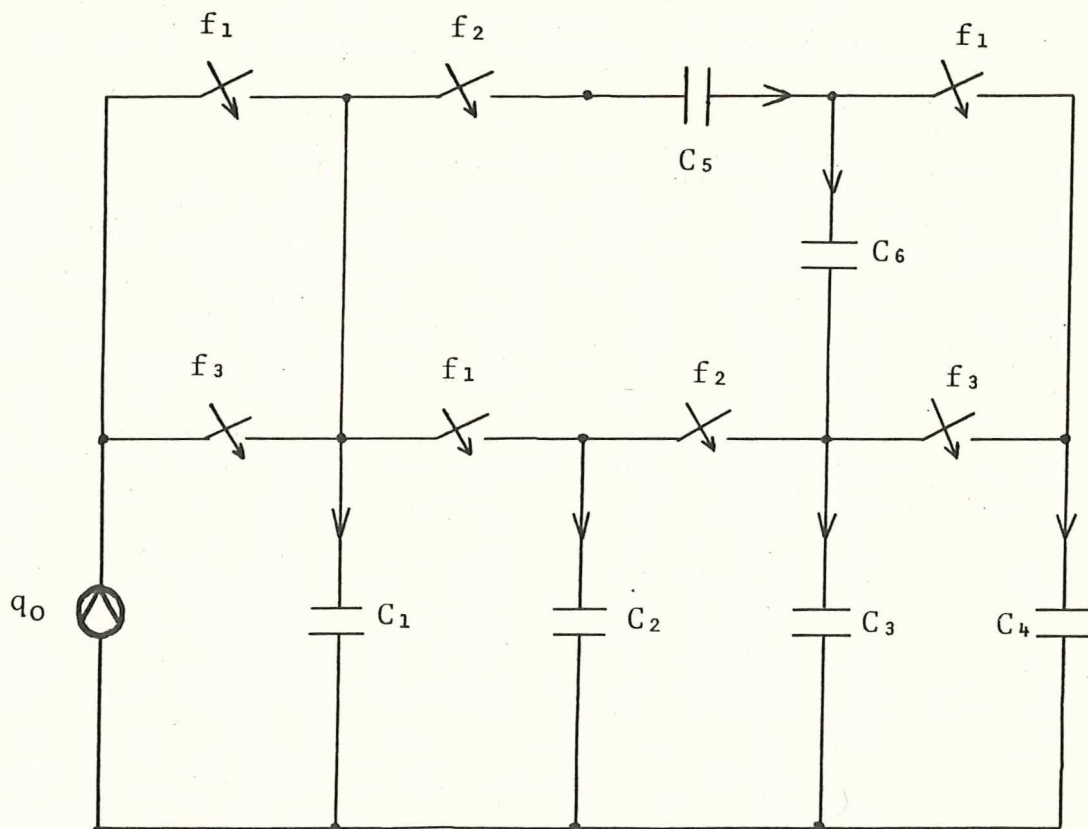


Fig. 3. Red cc trifásica.

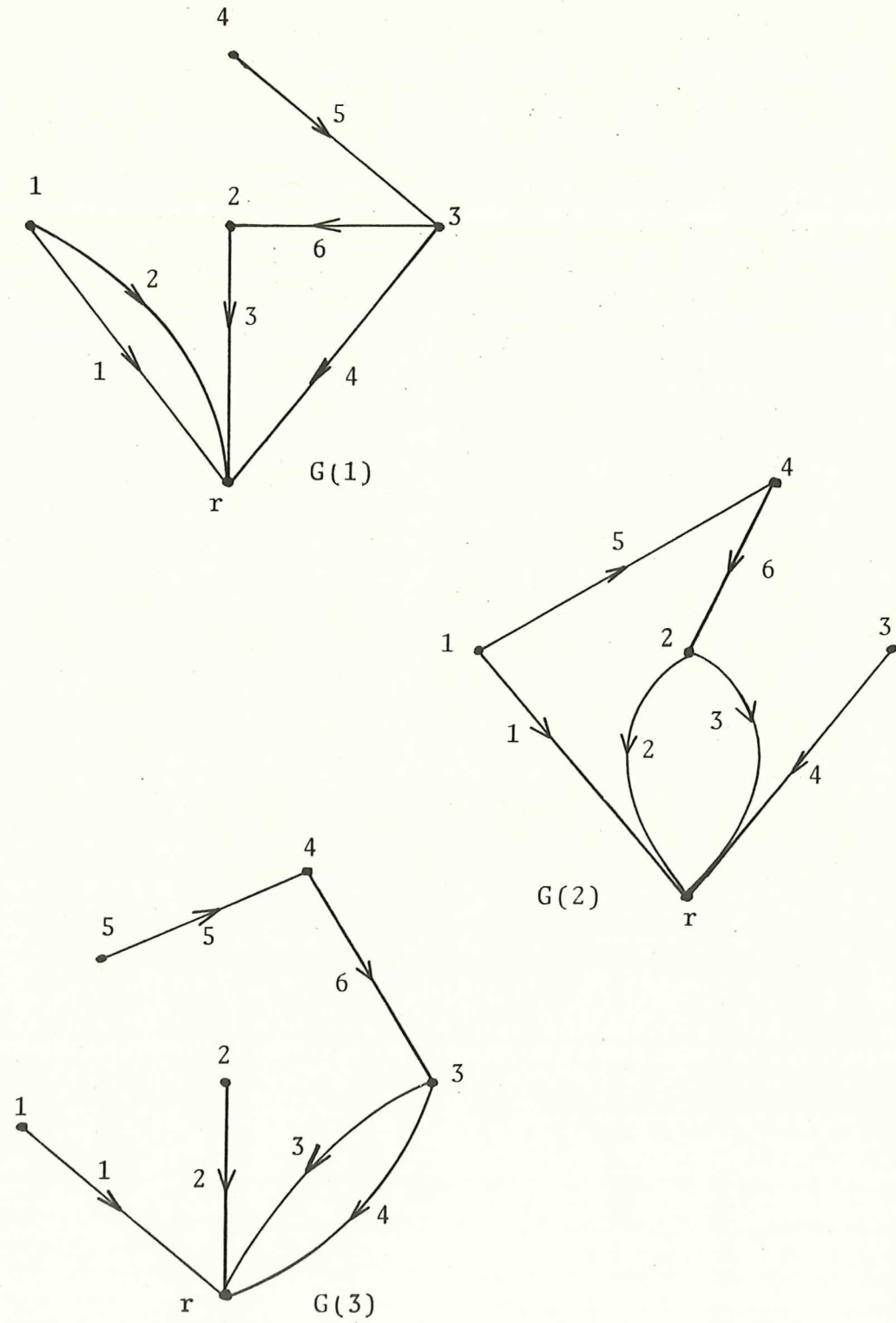


Fig. 4. Conjunto de grafos de la red cc trifásica

Tomando como nodo de referencia el que se indica en los grafos con la letra "r", resulta que, las submatrices columna de las fuentes de carga independientes y de los voltajes nodales, son:

$$\begin{aligned} Q_n^1 &= [q_0 \ 0 \ 0 \ 0]^T & V_n^1 &= [v_{n1}^1 \ v_{n2}^1 \ v_{n3}^1 \ v_{n4}^1]^T \\ Q_n^2 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T & V_n^2 &= [v_{n1}^2 \ v_{n2}^2 \ v_{n3}^2 \ v_{n4}^2]^T \\ Q_n^3 &= [q_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T & V_n^3 &= [v_{n1}^3 \ v_{n2}^3 \ v_{n3}^3 \ v_{n4}^3 \ v_{n5}^3]^T \end{aligned}$$

La obtención de las submatrices  $C_{n1j}$  se ilustra con dos de ellas. La submatriz  $C_{n22}$  se obtiene de la siguiente forma:

El grafo  $G(2)$  tiene 4 nodos al eliminarle el de referencia, por lo tanto,  $C_{n22}$  es de orden 4. Así, los elementos de la diagonal principal son:

$$\begin{aligned} [Y_{11}]_{22} &= C_1 + C_5 && \text{(elementos conectados al nodo 1 en } G(2)) \\ [Y_{22}]_{22} &= C_2 + C_3 + C_6 && \text{(elementos conectados al nodo 2 en } G(2)) \\ [Y_{33}]_{22} &= C_4 & \text{ y } & [Y_{44}]_{22} = C_5 + C_6. \end{aligned}$$

Algunos elementos fuera de la diagonal principal, son:

$$\begin{aligned} [Y_{12}]_{22} &= 0 && \text{(porque no existe elemento común entre los} \\ &&& \text{ nodos 1 y 2 en } G(2)). \\ [Y_{14}]_{22} &= -C_5 && \text{(es el elemento común conectado a lo nodos} \\ &&& \text{ 1 y 4 en } G(2)). \end{aligned}$$

La submatriz completa es:

$$C_{n22} = \begin{vmatrix} |c_1+c_5 & 0 & 0 & -c_5| \\ | & 0 & c_2+c_3+c_6 & 0 & -c_6| \\ | & 0 & 0 & c_4 & 0| \\ | & -c_5 & -c_6 & 0 & c_5+c_6| \end{vmatrix}$$

La submatriz  $C_{n13}$  se obtiene de la siguiente forma:

Se requieren los grafos 1 y 3 [ $G(1)$  y  $G(3)$ ]. Sin contar el nodo de referencia en cada grafo, el número de nodos es, respectivamente, 4 y 5. Por lo tanto,  $C_{n13}$  es de  $4 \times 5$ . Algunos elementos de esta submatriz son:

$[Y_{11}]_{13} = +c_1$  (esto es porque en el nodo 1 de  $G(1)$  están conectados  $c_1$  y  $c_2$ , pero en el nodo 1 de  $G(3)$  sólo está conectado  $c_1$ . Tiene signo positivo, porque tiene la misma orientación respecto a los dos nodos).

$[Y_{15}]_{13} = 0$  (porque no existe elemento común conectado a los nodos 1 en  $G(1)$  y 5 en  $G(3)$ ).

$[Y_{33}]_{13} = +c_4 - c_6$  (porque los elementos comunes conectados a los nodos 3 en  $G(1)$  y 3 en  $G(3)$ , son  $c_4$  y  $c_6$ ; pero  $c_4$  tiene la misma orientación respecto a los dos nodos mas no así  $c_6$ , por eso tienen signo positivo y negativo, respectivamente).

$[Y_{35}]_{13} = -c_5$  (porque el elemento común conectado a los nodos 3 en  $G(1)$  y 5 en  $G(3)$  es  $c_5$ ; pero tiene orientación diferente con respecto a dichos nodos, por lo cual es negativo).

Como  $i$  es diferente de  $j$  ( $i=1$  y  $j=3$ ), la submatriz tiene de factor a  $-z^{-1}$ . La submatriz completa es:

$$C_{n13} = -z^{-1} \begin{vmatrix} |c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0| \\ |0 & 0 & c_3+c_6 & -c_6 & 0| \\ |0 & 0 & c_4-c_6 & c_5+c_6 & -c_5| \\ |0 & 0 & 0 & -c_5 & c_5| \end{vmatrix}$$

Finalmente la matriz  $C_n$  completa, en la cual se realizan las submatrices y, por comodidad se escriben los números que representan a los elementos, es:

$$\begin{vmatrix} | 1+2 & 0 & 0 & 0 | & | & | & | & | & | & | & | & | \\ | 0 & 3+6 & -6 & 0 | & | 0 & | & -z^{-1} & | 1 & 2 & 0 & 0 & 0 | \\ | 0 & -6 & 4+5+6 & -5 | & | & | & | & | 0 & 0 & 3+6 & -6 & 0 | \\ | 0 & 0 & -5 & 4 | & | & | & | & | 0 & 0 & 4-6 & 5+6 & -5 | \\ | & & & & | & | & | & | 0 & 0 & 0 & -5 & 5 | \\ | & & & & | & & & & & & & & | \\ | -z^{-1} & | 1 & 0 & -5 & 5 | & | 1+5 & 0 & 0 & -5 | & | & & & | \\ | & | 2 & 3+6 & -6 & 0 | & | 0 & 2+3+6 & 0 & -6 | & | & 0 & & | \\ | & | 0 & 0 & -4 & 4 | & | 0 & 0 & 4 & 0 | & | & & & | \\ | & | 0 & -6 & 5+6 & -5 | & | -5 & -6 & 0 & 5+6 | & | & & & | \\ | & & & & & | & & & & & & & & | \\ | & | & & & | & | 1 & 0 & 0 & 0 | & | 1 & 0 & 0 & 0 & 0 | \\ | & | & & & | & | 0 & 2 & 0 & 0 | & | 0 & 2 & 0 & 0 & 0 | \\ | & | 0 & | & -z^{-1} & | 0 & 0 & 4 & 0 | & | 0 & 0 & 3+4+6 & -6 & 0 | \\ | & | & | & | 0 & -5 & -6 & 0 | & | 0 & 0 & -6 & 5+6 & -5 | \\ | & | & | & | 1 & 5 & 0 & 0 & -5 | & | 0 & 0 & 0 & -5 & 5 | \end{vmatrix}$$

### 11.5 Método topológico para obtener la ecuación de secciones de corte de una red cc multifásica

La ecuación de secciones de corte para una red cc multifásica, tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 |Q_C^1| & |C_{C11} & 0 & \dots & C_{C1m}| & |V_C^1| \\
 | & | & & & | & | \\
 |Q_C^2| & |C_{C21} & C_{C22} & \dots & 0 & |V_C^2| \\
 | & | & & & | & | \\
 | : & | : & : & & : & | : \\
 | & | & & & | & | \\
 |Q_C^m| & |0 & 0 & & C_{Cmm}| & |V_C^m|
 \end{array} \quad (28a)$$

en donde  $C_{C|J}$  es:

$$C_{C|J} = \begin{cases} F_I C_r F_J^T & \text{si } i=j, \text{ con } j=1,2,\dots,m. \\ -z^{-1} F_I C_r F_J^T & \text{si } i=j-1 \text{ con } j=2,3,\dots,m. \\ -z^{-1} F_I C_r F_m^T & \text{si } i=1 \text{ y } j=m. \\ 0 & \text{para el resto de las } i \text{ y } j. \end{cases} \quad (28b)$$

De (28b) se observa que, ignorando el factor  $-z^{-1}$ , la forma general de las submatrices  $C_{C|J}$  es:  $F_I C_r F_J^T$ . Este producto tiene una interpretación topológica sencilla, como se verá a continuación.

El método topológico para obtener la ecuación de secciones de corte de una red cc m-fásica, es el siguiente:

Primero. Las submatrices de las matrices columna de (28a), se obtienen directamente de los  $m$  grafos de la red cc, sin complicación alguna y, significan lo siguiente:

(a)  $Q_C^k$  es una matriz columna de  $n_k$  filas, en donde la fila  $i$ -ésima, es la suma algebraica de las fuentes de carga independientes que cruzan el corte  $i$ , en el grafo de la red cc correspondiente a la fase  $k$ .

(b)  $V_C^k$  es una matriz columna de  $n_k$  filas, en donde la fila  $i$ -ésima, es la variable correspondiente al voltaje del corte  $i$ , en el grafo de la red cc en la fase  $k$ .

$n_k$  es el número de nodos del grafo correspondiente a la fase  $k$ , sin tomar en cuenta los nodos aislados ni el de referencia.

Segundo. Las submatrices  $C_{C|J}$  de la matriz de admitancias de corte, se obtienen de la siguiente forma:

Sea  $F|C_r F_J^T = [y_{st}]_{IJ}$ , con  $s=1,2,\dots,n$ ;  $t=1,2,\dots,n$ ;  
 $i=j=1,2,\dots,m$ . Entonces:

$$[y_{st}]_{IJ} = \sum [\{y(s) \in G(i)\} \cap \{y(t) \in G(j)\}]$$

en donde  $\{y(s) \in G(i)\}$  representa el conjunto de las admitancias de corte, pertenecientes al corte  $s$ , en el grafo  $i$  de la red cc.

$y_{st}$  es el elemento correspondiente a la fila  $s$  y columna  $t$  de la submatriz  $ij$ .

La suma es algebraica; la admitancia tendrá signo positivo si tiene la misma orientación con respecto a los cortes en cuestión y, signo negativo si esto no sucede.

Cuando  $i$  es diferente de  $j$ , la submatriz tiene como factor a  $-z^{-1}$ .

Cuando  $i$  es igual a  $j$ , la submatriz se refiere exclusivamente al grafo  $i$ . Por lo tanto, el método para escribirla es exactamente el mismo que para una red lineal invariante en el tiempo, cuyo grafo sería el grafo  $i$  de la red cc. Esto es, para obtener las submatrices de la diagonal principal, se procede como en las redes invariantes.

### 11.5.1 Justificación del método

La matriz de cortes  $F_i$  ( $F_j$ ), contiene la información relativa a los segmentos y su orientación, con respecto a los cortes del grafo correspondiente a la fase  $i$  ( $j$ ). La matriz  $C_r$ , es una matriz diagonal formada por todos los elementos de la red cc. Así el producto  $F_i C_r$  es una matriz que contiene la información de qué elementos y con qué orientación están en los cortes del grafo de la red cc, en



la fase I. Por lo tanto, de la operación de multiplicación entre matrices, se demuestra el método topológico dado.

### 11.5.2 Ejemplo

Para ilustrar el uso del método topológico, descrito en el punto anterior, considérese la red cc que se muestra en la figura 5. El conjunto de grafos necesarios para definir el estado de la red, se muestra en la figura 6.

Tomando como referencia las ramas del árbol que se indica en cada grafo mediante segmentos con línea gruesa, las submatrices columna de las fuentes de carga independientes y los voltajes de corte, son:

$$\begin{aligned} Q_C^1 &= [ 0 \ 0 \ 0 ]^T \\ V_C^1 &= [ v_{C1}^1 \ v_{C2}^1 \ v_{C3}^1 ]^T \\ Q_C^2 &= [ q_0 \ 0 ]^T \\ V_C^2 &= [ v_{C1}^2 \ v_{C2}^2 ]^T \end{aligned}$$

La submatriz  $C_{C22}$  se obtiene de la siguiente forma:

El grafo  $G(2)$  tiene 2 nodos al eliminarle el de referencia, por lo tanto,  $C_{C22}$  es de orden 2. Algunos elementos son los siguientes:

$$[Y_{11}]_{22} = c_1 + c_4 \quad (\text{elementos del corte 1 de } G(2)).$$

$$[Y_{12}]_{22} = -C_4$$

(elemento común a los cortes 1 y 2 en  $G(2)$ ; tiene signo negativo puesto que su orientación es diferente respecto a los cortes en cuestión).

La submatriz completa es:

$$C_{C22} = \begin{vmatrix} C_1+C_4 & -C_4 \\ -C_4 & C_2+C_3+C_4 \end{vmatrix}$$

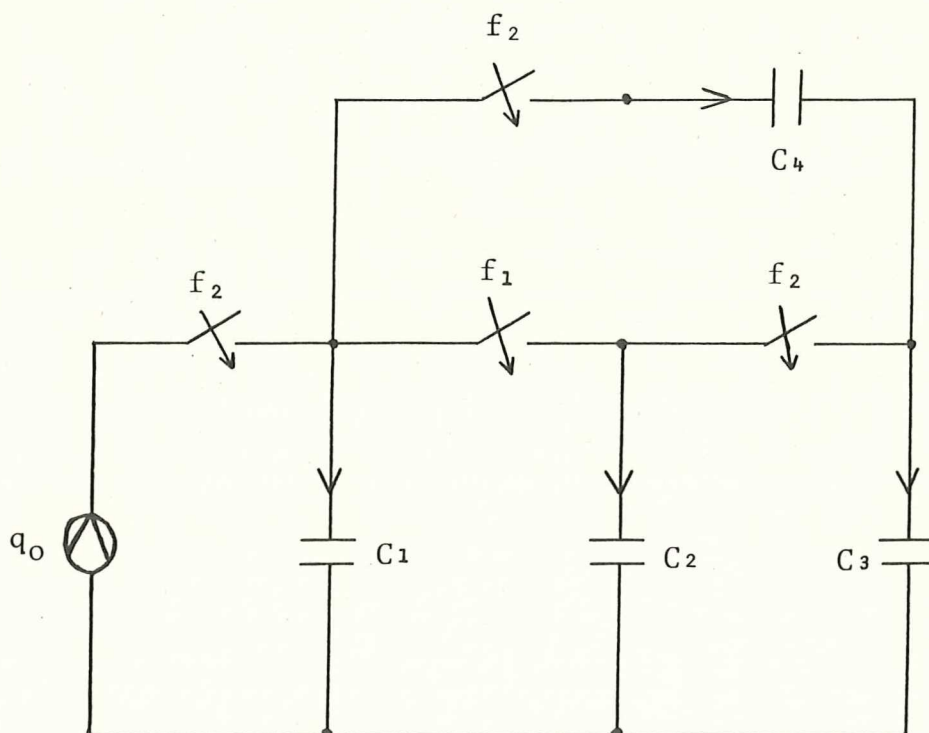


Fig. 5. Red cc bifásica.

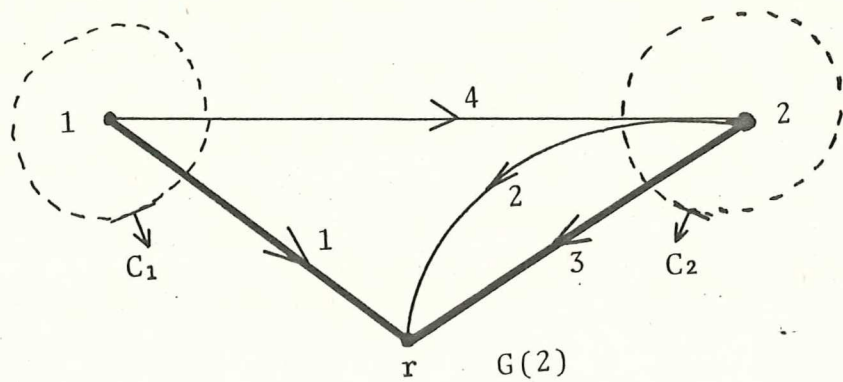
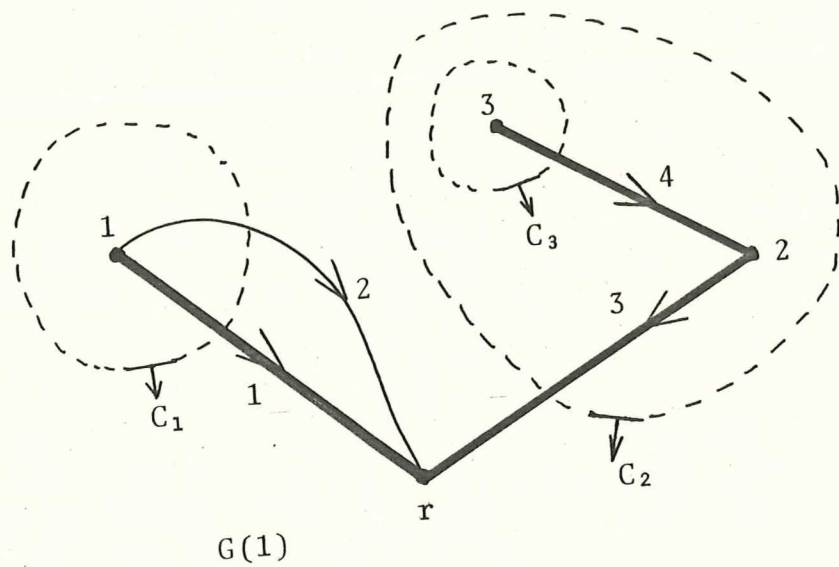


Fig. 6. Conjunto de grafos de la red cc bifásica

La submatriz  $C_{C12}$  se obtiene de la siguiente forma:

Se requieren los grafos  $G(1)$  y  $G(2)$ . Sin contar el nodo de referencia en cada grafo, el número de nodos es 3 y 2, respectivamente. Por lo tanto,  $C_{C12}$  es de  $3 \times 2$ . Algunos elementos de esta submatriz son:

$[Y_{11}]_{12} = c_1$  (esto es porque en el corte 1 de  $G(1)$  están  $c_1$  y  $c_2$ , pero en el corte 1 de  $G(2)$  están  $c_1$  y  $c_4$ . Por lo tanto, la intersección es  $c_1$ . Tiene signo positivo porque tiene la misma orientación respecto a los cortes mencionados).

$[Y_{32}]_{12} = -c_4$  (porque el elemento común en los cortes 3 en  $G(1)$  y 2 en  $G(2)$  es  $c_4$ . Tiene signo negativo, puesto que su orientación es diferente respecto a los cortes en cuestión).

Como  $i$  es diferente de  $j$ , la submatriz tiene de factor a  $-z^{-1}$ . La submatriz completa es:

$$C_{C12} = -z^{-1} \begin{vmatrix} | & c_1 & & c_2 & | \\ | & & & & | \\ | & 0 & & c_3 & | \\ | & & & & | \\ | & c_4 & & -c_4 & | \end{vmatrix}$$

Finalmente, la matriz  $C_C$  completa, es:

$$C_C = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & |c_1+c_2 & 0 & 0 & & |c_1 & c_2 & | & \\ \hline & & | & 0 & c_3 & 0 & & -z^{-1} & |0 & c_3 & | & \\ \hline & & | & 0 & 0 & c_4 & & & |c_4 & -c_4 & | & \\ \hline & & & & & & & & & & & \\ \hline & -z^{-1} & |c_1 & 0 & c_4 & & |c_1+c_4 & -c_4 & | & & & \\ \hline & & |c_2 & c_3 & -c_4 & & | -c_4 & c_2+c_3+c_4 & | & & & \\ \hline \end{array}$$

**II.6 Método topológico para obtener la ecuación de lazos de una red cc multifásica**

La ecuación de lazos para una red cc multifásica, tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} |V_1^1| \\ | \\ |V_1^2| \\ | \\ | : | \\ | \\ |V_1^m| \end{array} = (1-z^{-m})^{-1} \begin{array}{c} |D_{11} \\ | \\ |D_{21} \\ | \\ | : \\ | \\ |D_{m1} \end{array} \begin{array}{c} D_{12} \\ \\ D_{22} \\ \\ : \\ \\ D_{m2} \end{array} \dots \begin{array}{c} D_{1m} \\ \\ D_{2m} \\ \\ : \\ \\ D_{mm} \end{array} \begin{array}{c} |Q_1^1| \\ | \\ |Q_1^2| \\ | \\ | : \\ | \\ |Q_1^m| \end{array} \quad (29a)$$

en donde  $D_{ij}$  es:

$$D_{ij} = z^{-x} B_i D_r B_j^T \quad \text{con} \quad x = \begin{cases} m+i-j & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i = j \\ i-j & \text{si } i > j \end{cases} \quad (29b)$$

De (29b) se observa que, ignorando el factor  $z^{-x}$ , la forma general de las submatrices  $D_{ij}$  es:  $B_i D_r B_j^T$ . Este producto

tiene una interpretación topológica sencilla como se verá a continuación.

El método topológico para obtener la ecuación de lazos de una red cc multifásica, es el siguiente:

**Primero.** Las submatrices de las matrices columna de la ecuación (17a), se obtienen directamente de los  $m$  grafos de la red cc, sin complicación alguna y, significan lo siguiente:

(a)  $V_i^k$  es una matriz columna de  $l_k$  filas, en donde la fila  $i$ -ésima, es la suma algebraica de las fuentes de voltaje independientes que pertenecen al lazo  $i$ , en el grafo de la red cc correspondiente a la fase  $k$ .

(b)  $Q_i^k$  es una matriz columna de  $l_k$  filas, en donde la fila  $i$ -ésima es la variable correspondiente a la carga circulante del lazo  $i$ , en el grafo de la red cc en la fase  $k$ .

$l_k$  es el número de lazos linealmente independientes del grafo correspondiente a la fase  $k$ .

**Segundo.** Las submatrices  $D_{i|j}$  de la matriz de impedancias de lazos, se obtienen de la siguiente forma:

Sea  $B_i D_r B_j^T = [z_{uv}]_{i,j}$  con  $u=1,2,\dots,l_i$ ;  
 $v=1,2,\dots,l_j$  ;  $i,j=1,2,\dots,m$ . Entonces:

$$[z_{uv}]_{i,j} = \sum [\{z(u) \in G(i)\} \cap \{z(v) \in G(j)\}]$$

en donde  $\{z(u) \in G(i)\}$  es el conjunto de las impedancias de lazo, pertenecientes al lazo  $u$ , en el grafo  $i$  de la red cc.

$z_{uv}$  es el elemento correspondiente a la fila  $u$  y columna  $v$  de la submatriz  $ij$ .

La suma es algebraica; la impedancia tendrá signo positivo si tiene la misma orientación con respecto a los lazos en cuestión, y signo negativo si esto no sucede.

Cuando  $i$  es diferente de  $j$ , la submatriz tiene como factor a  $z^{-X}$  (recuérdese la ecuación (29b)).

Cuando  $i$  es igual a  $j$ , la submatriz se refiere exclusivamente al grafo  $i$ . Por lo tanto, el método para escribirla es exactamente el mismo que para una red lineal invariante en el tiempo, cuyo grafo sería el grafo  $i$  de la red cc. Esto es, para obtener las submatrices de la diagonal principal, se procede como en las redes lineales invariantes.

### 11.6.1 Justificación del método

La matriz de lazos  $B_i$  ( $B_j$ ), contiene la información relativa a los segmentos y su orientación, con respecto a los lazos del grafo correspondiente a la fase  $i$  ( $j$ ). La matriz  $D_r$ , es una matriz diagonal formada por todos los elementos de la

red cc. Así, el producto  $B_l D_r$  es una matriz que contiene la información de qué elementos y con qué orientación están en los lazos del grafo de la red cc, en la fase i. Por lo tanto, de la operación de multiplicación entre matrices, multiplicando  $B_l D_r$  con  $B_j$ , se demuestra el método topológico dado.

### 11.6.2 Ejemplo

Para ilustrar el uso del método topológico, descrito en el punto anterior, considérese la red cc bifásica que se muestra en la figura 7. El conjunto de grafos necesarios para definir el estado de la red, se muestra en la figura 8.

Tomando como referencia los lazos indicados en los grafos (Fig. 8), las submatrices columna de las fuentes de voltaje independientes y las cargas de lazos, son:

$$\begin{aligned} V_l^1 &= [ E_0 ] & Q_l^1 &= [ q_{l1}^1 ] \\ V_l^2 &= [ 0 ] & Q_l^2 &= [ q_{l1}^2 ] \end{aligned}$$

La submatriz  $D_{l11}$  se obtiene de la siguiente forma:



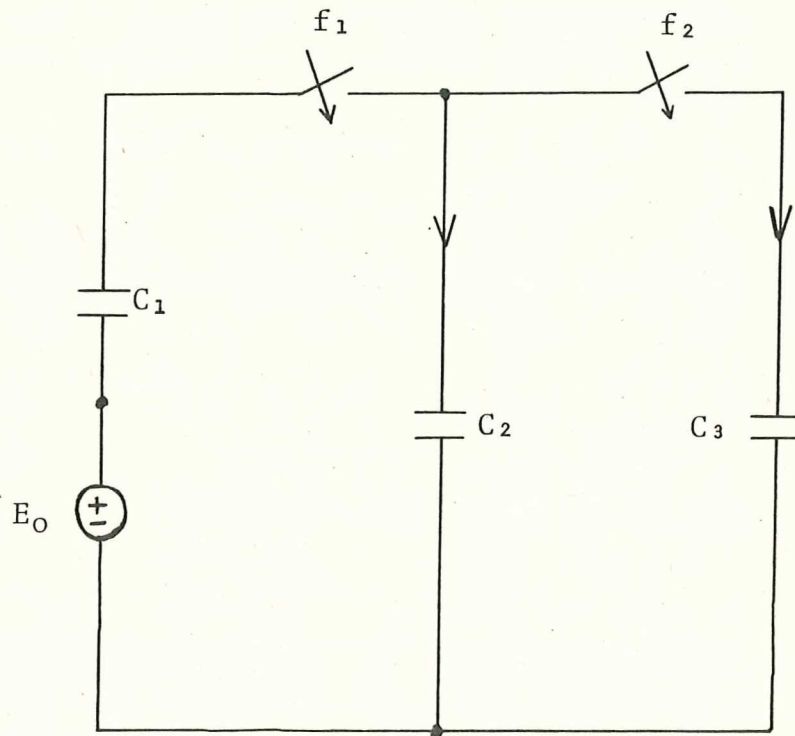


Fig. 7. Red cc bifásica.

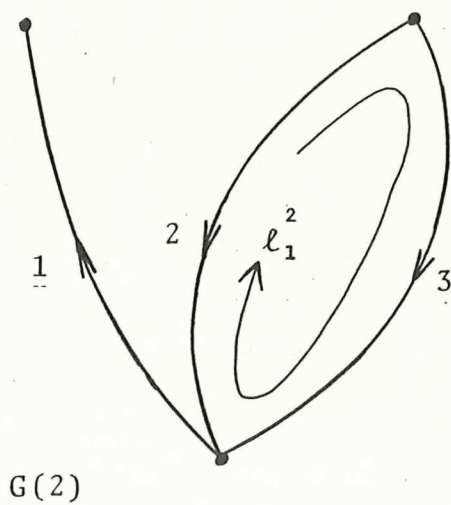
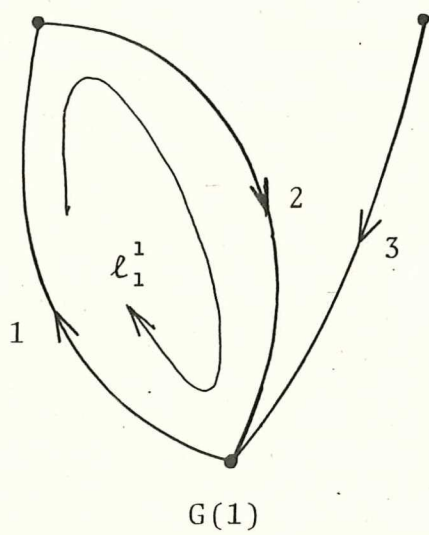


Fig. 8. Conjunto de grafos de la red cc bifásica.

El grafo  $G(1)$  tiene sólo un lazo linealmente independiente, por lo tanto,  $D_{111}$  es de  $1 \times 1$ . El elemento que la constituye es el siguiente:

$$[z_{11}]_{11} = d_1 + d_2 \quad (\text{son los elementos que pertenecen al lazo 1 en } G(1)).$$

La submatriz  $D_{112}$  se obtiene de la siguiente forma:

se requieren los grafos  $G(1)$  y  $G(2)$ . En cada uno sólo existe un lazo linealmente independiente. Por lo tanto,  $D_{112}$  es de  $1 \times 1$ . El elemento que la constituye es el siguiente:

$$[z_{11}]_{12} = -d_2 \quad (\text{esto es porque en el lazo 1 de } G(1) \text{ existen } d_1 \text{ y } d_2, \text{ pero en el lazo 1 de } G(2) \text{ existen } d_2 \text{ y } d_3; \text{ por lo tanto, el elemento común es } d_2. \text{ Con signo negativo puesto que su orientación es diferente respecto a los lazos en cuestión}).$$

Como  $i$  es diferente de  $j$ , la submatriz tiene a  $z^{-x}$  de factor, con  $x$  igual a  $+1$  en este caso ( $m+i-j=2+1-2$ ).

La matriz  $D_1$  completa es:

$$D_1 = (1-z^{-2})^{-1} \begin{vmatrix} | d_1 + d_2 | & z^{-1} | -d_2 | | \\ | & & | \\ | z^{-1} | -d_2 | & & | d_2 + d_3 | | \end{vmatrix}$$

En este capítulo se presentó y justificó un método topológico para obtener las ecuaciones de una red de capacitores conmutados que no contiene elementos activos.

Se proporcionaron los procedimientos sistemáticos para obtener las ecuaciones nodal, de secciones de corte y la de lazos de una red cc, ilustrándose cada procedimiento con un ejemplo.

Si se hace una comparación entre este método y el que se describe en cada una de las referencias mencionadas en el capítulo 1 sección 1, se encontrará que el que aquí se presentó es más simple y mucho más general, y además, hace ver que los métodos para analizar redes de capacitores conmutados son los mismos que los métodos para analizar redes lineales, hecho que no se observa en los procedimientos presentados en las referencias antes mencionadas.

## CAPITULO III

### METODO TOPOLOGICO PARA OBTENER LAS ECUACIONES DE UNA RED DE CAPACITORES CONMUTADOS QUE CONTIENE NULORES

#### III.1 Introducción

Se describe un método topológico, para obtener las ecuaciones nodal y de lazos, de una red de capacitores conmutados activa (red cc con nulores).

Se inicia presentando el nulor y conceptos relacionados, así como su influencia sobre las ecuaciones de una red, cuando tal elemento está presente.

Se concluye el capítulo con los procedimientos para obtener directamente, de la topología de la red, las ecuaciones nodal y de lazos, de una red de capacitores conmutados que contiene nulores.

#### III.2 Redes con nulores





El nulor es un elemento no muy conocido en nuestro medio, pues es relativamente reciente [Carlin, 1964], aunque ya

existen textos que lo mencionan [Balabanian, 1981; Bruton, 1980] y se han hecho algunos intentos por darlo a conocer en nuestro país [Palomera, 1981; Reyes, 1983], aún continúa siendo un elemento extraño.

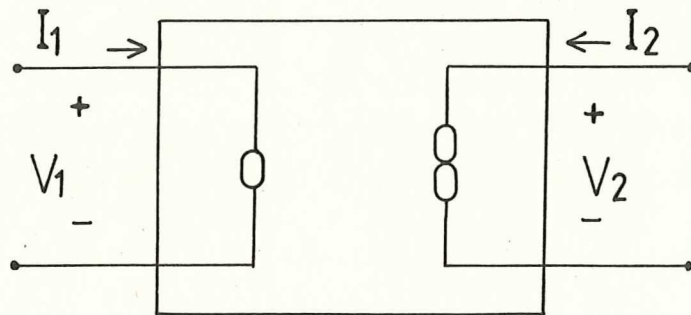
El nulor es un bipuerto cuyo símbolo y ecuación se muestra en la figura 9.

Los antecesores inmediatos del nulor son los elementos conocidos como nulator y norator [Carlin y Youla, 1961] cuyos símbolos y ecuaciones se muestran en la Tabla 1, junto con el símbolo y ecuación de un corto circuito y un circuito abierto, para resaltar la diferencia entre tales elementos ya que es frecuente confundirlos.

Tabla 1

BIPOLO	SIMBOLO	VOLTAJE	CORRIENTE
Nulator		cero	cero
Norator		arbitrario	arbitraria
Corto circuito		cero	arbitraria
Circuito abierto		arbitrario	cero

El nulator y el norator son conceptos matemáticos sin significado físico [Tellegen, 1966], pero asociados a los puertos del nulor y existiendo por lo tanto, como pareja



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

Fig. 9. Símbolo y ecuación del nulor.

nulador-norador en alguna red eléctrica, si tienen significado físico [Martinelli, 1965; Tellegen, 1966].

Posteriormente surgieron las equivalencias nulador-norador (nulor) para los elementos activos como el transistor [Braun, 1965] y para las fuentes controladas [Davies, 1967], resultando lo que se muestra en la figura 10, para los casos de idealización extrema del transistor y del amplificador operacional.

También existieron intentos por construir al nulor como elemento independiente en circuito integrado [Huijsing, et al., 1977; Haslett, et al., 1980], pero hasta la fecha no parece haberse industrializado.

Para analizar las redes activas ideales, normalmente se obtienen primero las ecuaciones de la parte pasiva y posteriormente, se toman en cuenta las restricciones impuestas por los elementos activos presentes en la red, para así obtener finalmente la ecuación que caracterice a dicha red.

Un método simple para encontrar la ecuación de una red activa, es sustituir los elementos activos por su equivalente nulor. Lo anterior permite obtener la ecuación final, mediante simples operaciones con filas y columnas de la matriz de las ecuaciones de la parte pasiva de la red.



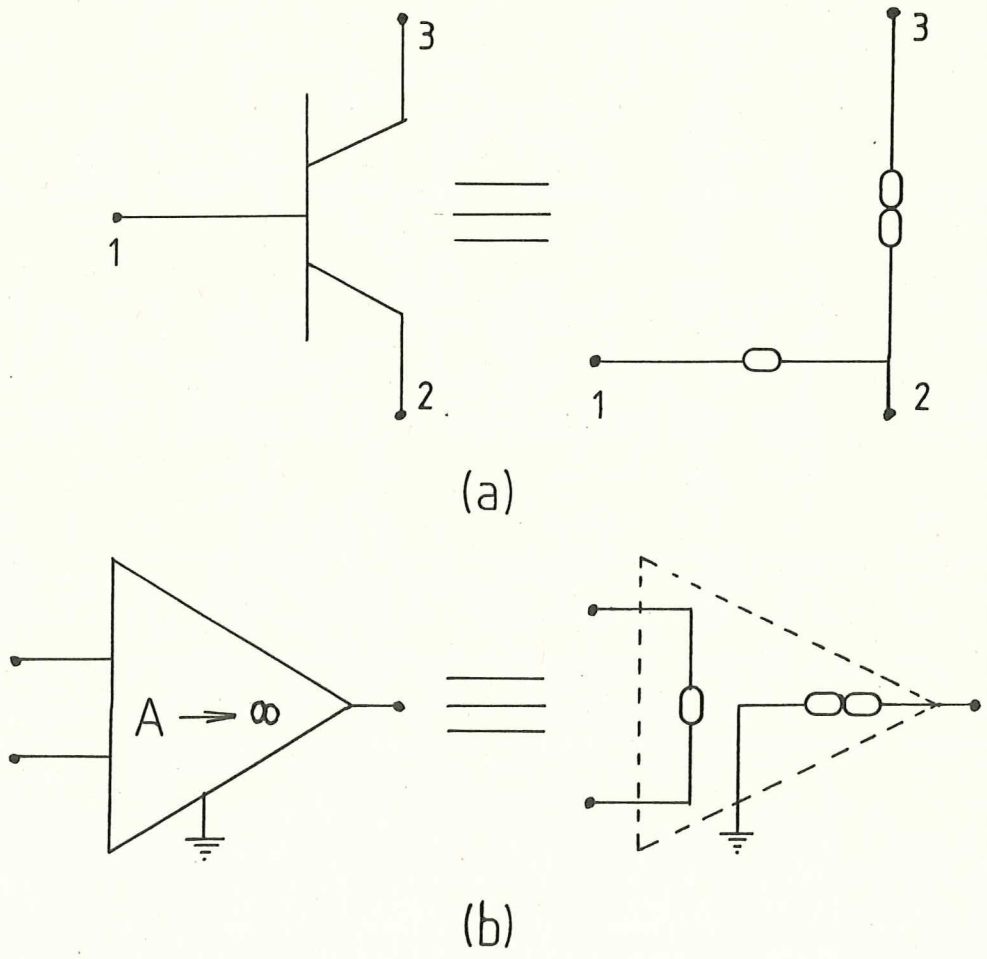


Fig.10. Equivalencias: (a) Transistor-nulor.  
 (b) Amplificador-Operacional-nulor.

### III.2.1 Análisis nodal

Al analizar una red eléctrica, constituida por  $r$  ramas y  $n+1$  nodos, está demostrado que es suficiente conocer  $r-n$  corrientes o  $n$  voltajes para caracterizar completamente el estado de la red.

Cuando las variables por conocer son los  $n$  voltajes, medidos en  $n$  de los  $n+1$  nodos, con respecto al nodo restante, se está realizando lo que se llama análisis nodal de una red eléctrica.

Supongamos por el momento, que tenemos una red con un sólo elemento activo y sin conmutadores, la cual nos interesa estudiar mediante el análisis nodal. Por tal motivo se le ha sustituido el elemento activo por su equivalente nulo y, finalmente se ha dejado la parte pasiva desconectándole las fuentes de corriente, el nulador y el norator.

El sistema de ecuaciones para la red descrita anteriormente, escrita en forma matricial, es:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l} |I_1| \\ |I_2| \\ |I_3| \\ |I_4| \\ |I_n| \end{array} = \begin{array}{l} | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{cccc} Y_{11} & Y_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & Y_{2n} \\ : & : & & & & : \\ : & : & & & & : \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & Y_{nn} \end{array} \begin{array}{l} | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{l} |V_{n1}| \\ |V_{n2}| \\ | \\ | \\ |V_{nn}| \end{array}
 \end{array} \quad (30)$$

Si el nulador y el norador están conectados como se indica en la figura 11(a), el sistema de ecuaciones (30), se modificará de la siguiente forma:

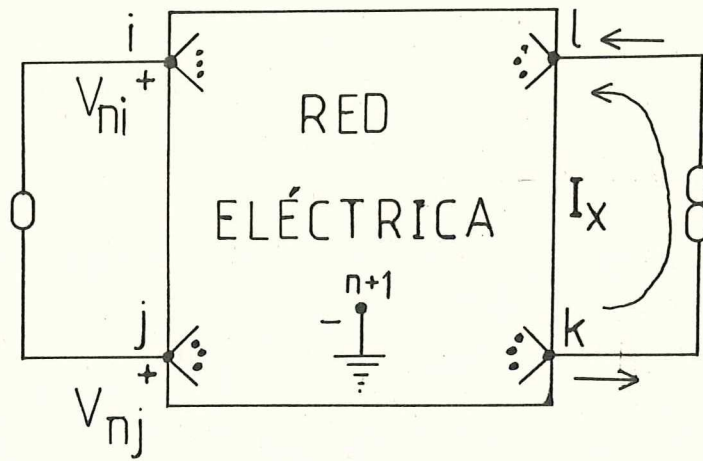
(a) Por la definición de nulador (Tabla 1), los voltajes nodales  $V_{nI}$  y  $V_{nJ}$  (Fig.11(a)) deben ser iguales. Para eliminar la variable redundante, por ejemplo la  $V_{nJ}$ , sumamos, en la matriz del sistema de ecuaciones, la columna  $J$  a la  $I$  y cancelamos la  $J$ .

Si uno de los nodos es el de referencia (Fig.11(b)), la operación se reduce a cancelar la columna correspondiente al otro nodo.

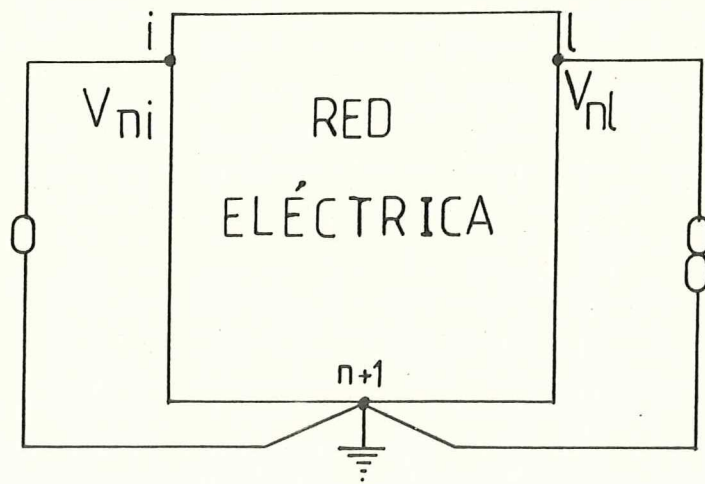
Nótese que se tiene por el momento, un sistema de más ecuaciones que incógnitas.

(b) Por la definición de norador (Tabla 1), existirá una corriente  $I_x$  en tal elemento que, de acuerdo con la figura 11(a), saldrá del nodo  $k$  y entrará al nodo  $l$ . Para cancelar dicha corriente, se realiza la siguiente operación con las filas de la matriz del sistema de ecuaciones: se suma la fila  $l$  a la  $k$  y cancelamos la  $l$  (o viceversa).

Si uno de los nodos es el de referencia (Fig.11(b)), la operación se reduce a cancelar la fila correspondiente al otro nodo.



(a)



(b)

Fig.11. Red eléctrica con un par nulador-norator.

El sistema de ecuaciones resultante, después de los dos pasos anteriores, es uno con igual número de ecuaciones que de incógnitas. De donde se puede observar que, una red con diferente número de nuladores que de noradores, no tendría un sistema de ecuaciones compatible.

En resumen, la obtención de la ecuación nodal de una red con nulores, se reduce a sumar y cancelar filas y columnas de la matriz de la ecuación nodal de la parte pasiva de la red.

Mas adelante se extenderá al caso de una red con capacitores conmutados multifásica.

### III.2.2 Análisis de lazos

Consideremos de nuevo que tenemos una red eléctrica sin conmutadores y con un sólo elemento activo. Ahora nos interesa estudiarla mediante el análisis de lazos, esto es, las variables por determinar son las  $m=r-n$  corrientes circulantes en los lazos de la red, para lo cual se ha sustituido el elemento activo por su equivalente nulor y, finalmente se separa la parte pasiva cortocircuitando las fuentes independientes, el nulador y el norador.

El sistema de ecuaciones para el análisis de lazos, en forma matricial, es el siguiente:

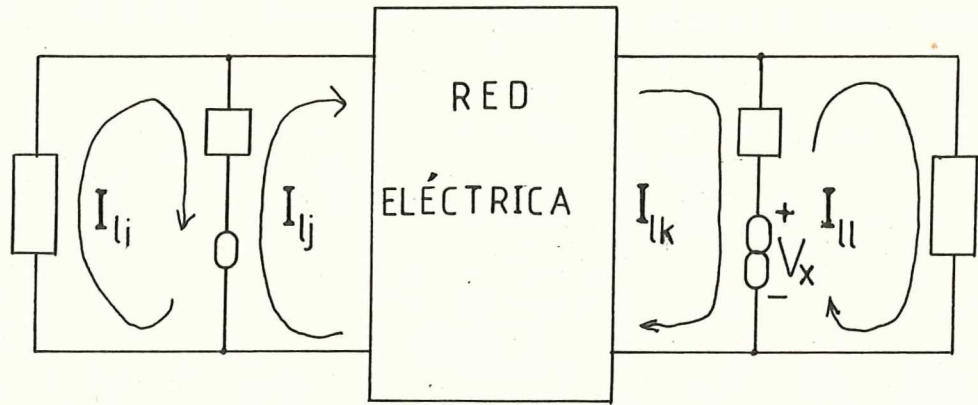
$$\begin{array}{ccccccc}
 |E_1| & | & z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1m} & | & | & | & | & | \\
 | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \\
 |E_2| & | & z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2m} & | & | & | & | & | \\
 | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \\
 | : & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \\
 | : & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \\
 | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \\
 |E_m| & | & z_{m1} & z_{m2} & \dots & z_{mm} & | & | & | & | & |
 \end{array} \quad (31)$$

Al considerar las restricciones impuestas por el par nulador-norator, el sistema de ecuaciones (31) se altera de la siguiente forma:

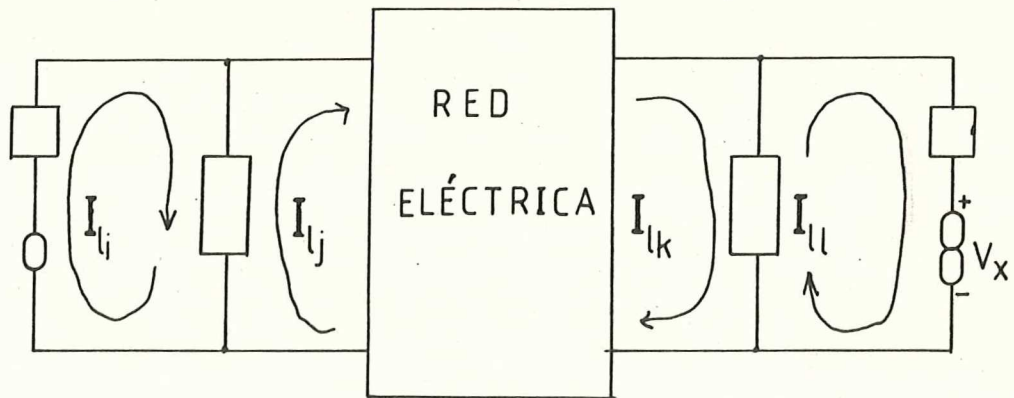
(a) Como el nulador está compartido por los lazos  $i$  y  $j$  (Fig.12(a)), las corrientes de lazo correspondientes,  $I_{ij}$  e  $I_{ji}$  deben ser iguales. Para eliminar la variable redundante, por ejemplo  $I_{ji}$ , sumamos en la matriz del sistema de ecuaciones, la columna  $j$  a la  $i$  y cancelamos la  $j$ . Si el nulador pertenece a un sólo lazo (Fig.12(b)), la corriente de dicho lazo debe ser cero y por lo tanto, se procede a cancelar la columna correspondiente a dicha corriente (o lazo) en la matriz del sistema de ecuaciones.

(b) Como el norator está compartido por los lazos  $k$  y  $l$  (Fig.12(a)), la ecuación de cada uno de dichos lazos se verá afectada por el voltaje  $V_x$  del norator. Para eliminar la incógnita  $V_x$ , sumamos las ecuaciones de los lazos mencionados, lo cual es equivalente a sumar, en la matriz del sistema, la fila  $k$  a la  $l$  y eliminar la  $k$  (o viceversa).

Si el norator pertenece a un sólo lazo (Fig.12(b)), se procede a eliminar la ecuación de dicho lazo, o lo que es lo



(a)



(b)

Fig.12. Red eléctrica con un par nulador-norator.

mismo a eliminar la fila correspondiente en la matriz del sistema.

Podemos observar, que obtener la ecuación de lazos de una red con nulores, es semejante a obtener la ecuación nodal, esto es, realizar sumas y cancelaciones de filas y columnas de la matriz de la ecuación de lazos de la parte pasiva de la red.

### III.3 Procedimiento para obtener la ecuación nodal

En el punto anterior encontramos la ecuación nodal y de lazos de una red sin conmutadores y con un nulor, es fácil observar que si la red tuviese más de un nulor, la obtención de dichas ecuaciones se haría realizando las operaciones indicadas para cada par nulador-nulador (nulor), hasta terminar con todos los que contenga la red.

En la sección 3 del capítulo 2, se presentó el método para obtener la ecuación nodal de una red cc multifásica sin elementos activos, en este punto lo extenderemos a redes cc multifásicas con nulores.

La ecuación nodal de una red cc sin elementos activos de  $m$  fases, tiene la siguiente forma:



$$\begin{array}{ccccccc}
 |Q_n^1| & |C_{n11} & 0 & \dots & C_{n1m}| & |V_n^1| \\
 |Q_n^2| & |C_{n21} & C_{n22} & \dots & 0 & |V_n^2| \\
 | : | & | : & : & & : & | : | \\
 | : | & | : & : & & : & | : | \\
 |Q_n^m| & |0 & 0 & & C_{nmm}| & |V_n^m|
 \end{array} = \quad (32)$$

en la que cada submatriz  $C_{n|j}$  se obtiene de los grafos  $i$  y  $j$  de la red cc, como se describió en el capítulo 2 sección 4.

Consideremos por el momento que la ecuación anterior, es la ecuación de la parte pasiva de una red cc con nulores que ha sido preparada para el análisis nodal (III.2.1), entonces, sólo falta tomar en cuenta las restricciones impuestas por los pares nulador-norator para obtener finalmente la ecuación nodal de una red cc con nulores.

De acuerdo con la forma de obtener la ecuación (32), analizando la matriz de admitancias nodales  $C_n$ , podemos observar que la  $k$ -ésima columna de submatrices, está relacionada con los voltajes nodales de la red en la  $k$ -ésima fase y que la  $k$ -ésima fila de submatrices, está relacionada con las fuentes de carga de la red en la  $k$ -ésima fase. Por lo tanto, las restricciones impuestas por los pares nulador-norator, en el  $k$ -ésimo estado de la red, implican sumar y cancelar columnas y filas en la  $k$ -ésima columna y fila de submatrices, respectivamente.

De acuerdo a lo anterior, el procedimiento para obtener la ecuación nodal de una red cc con nulores, puede resumirse de la siguiente forma:

(a) Se desconectan los nuladores y noradores de la red cc.

(b) Se obtiene la ecuación nodal para la red resultante del paso anterior, siguiendo el procedimiento dado en el capítulo 2 sección 4.

(c) Conectamos los nuladores y noradores en cada uno de los grafos de la red correspondientes a cada una de las fases.

(d) Procedemos a modificar la fila y columna de submatrices correspondiente a cada una de las fases, aplicando las restricciones impuestas por la presencia de los nuladores y noradores, de acuerdo al procedimiento dado en el capítulo 3 sección 2.1.

### III.3.1 Ejemplo

Para ilustrar el procedimiento descrito en el punto anterior, considérese la red bifásica que se muestra en la figura 13 y su equivalente nulor en la figura 14. Tal red puede encontrarse en la referencia Mulawka y Moschytz, 1985, en donde se analiza utilizando otro método diferente al aquí propuesto.

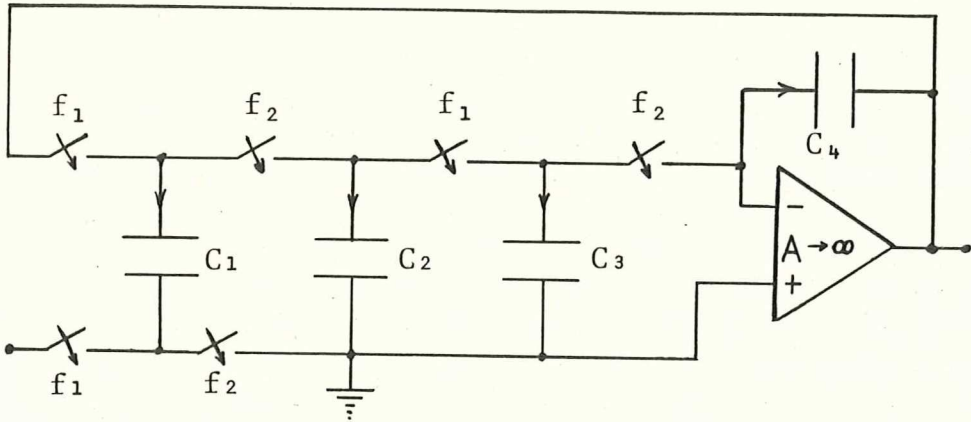


Fig.13. Red cc bifásica con un elemento activo.

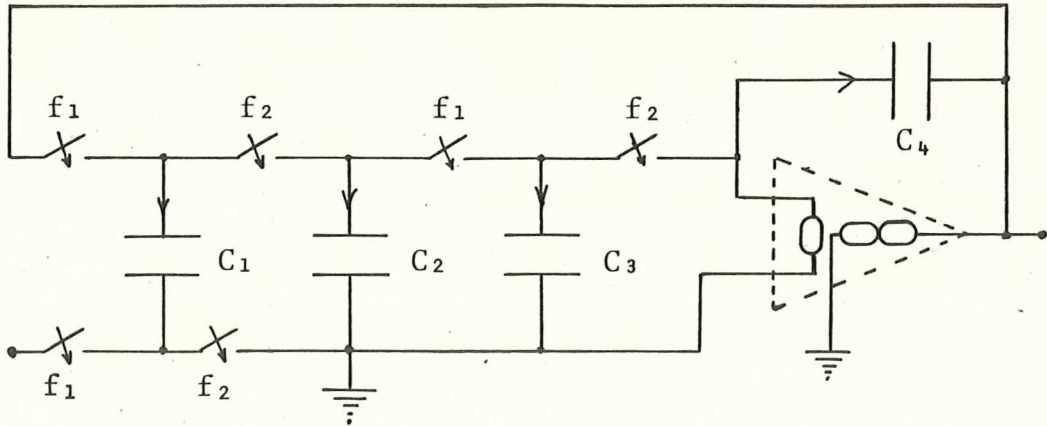


Fig.14. Red cc bifásica con un par nulador-norator

La matriz de admitancias nodales  $C_n$  de la parte pasiva de la red es, de acuerdo a los grafos de la fig.15:

..... fase 1 .....				----- fase 2 -----				
$c_1$	0	$-c_1$	0	$z^{-1}c_1$	0	0	f	
0	$c_2+c_3$	0	0	$-z^{-1}c_2$	$-z^{-1}c_3$	0	s	
$c_1$	0	$c_1+c_4$	$-c_4$	$-z^{-1}c_1$	$z^{-1}c_4$	$-z^{-1}c_4$	e	
0	0	$-c_4$	$c_4$	0	$-z^{-1}c_4$	$z^{-1}c_4$	l	
$z^{-1}c_1$	$-z^{-1}c_2$	$-z^{-1}c_1$	0	$c_1+c_2$	0	0	f	
0	$-z^{-1}c_3$	$z^{-1}c_4$	$-z^{-1}c_4$	0	$c_3+c_4$	$-c_4$	s	
0	0	$-z^{-1}c_4$	$z^{-1}c_4$	0	$-c_4$	$c_4$	e	
							2	

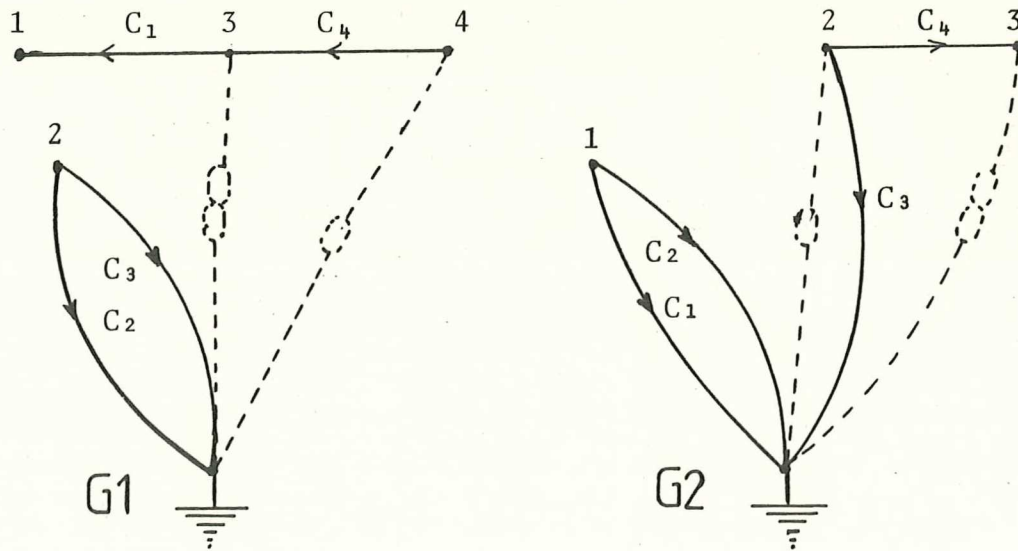


Fig.15. Grafos de la red cc de la Fig. 14

En este ejemplo el nulador y el norador están conectados entre un nodo y el de referencia, por lo tanto se procederá a cancelar las columnas y filas correspondientes. En G1 el nulador está conectado al nodo 4 y el norador al nodo 3, por lo tanto eliminamos la columna 4 y la fila 3 de la matriz en su parte correspondiente a la fase 1; en G2 el nulador está conectado al nodo 2 y el norador al nodo 3, por lo tanto eliminamos la columna 2 y la fila 3 de la matriz en su parte correspondiente a la fase 2.

De lo anterior obtenemos que la matriz  $C_n$  para nuestra red cc con un elemento activo es:

$$\begin{array}{c|ccccc|} | & c_1 & 0 & -c_1 & z^{-1}c_1 & 0 & | \\ | & 0 & c_2+c_3 & 0 & -z^{-1}c_2 & 0 & | \\ | & 0 & 0 & -c_4 & 0 & z^{-1}c_4 & | \\ | & z^{-1}c_1 & -z^{-1}c_2 & -z^{-1}c_1 & c_1+c_2 & 0 & | \\ | & 0 & -z^{-1}c_3 & z^{-1}c_4 & 0 & -c_4 & | \end{array}$$

### III.4 Procedimiento para obtener la ecuación de lazos

La ecuación de lazos de una red cc multifásica sin elementos activos, tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} |V_1^1| \\ | \\ |V_1^2| \\ | \\ | : | \\ | : | \\ | \\ |V_1^m| \end{array} = (1-z^{-m})^{-1} \begin{array}{c} |D_{11} \quad D_{12} \quad \dots \quad D_{1m}| \\ | \\ |D_{21} \quad D_{22} \quad \dots \quad D_{2m}| \\ | \\ | : \quad : \quad : \quad : | \\ | \\ | \\ |D_{m1} \quad D_{m2} \quad \dots \quad D_{mm}| \end{array} \begin{array}{c} |Q_1^1| \\ | \\ |Q_1^2| \\ | \\ | : | \\ | : | \\ | \\ |Q_1^m| \end{array} \quad (33)$$

El procedimiento para obtener cada uno de los elementos de la ecuación anterior se presentó en la sección 6 del capítulo 2.

Consideremos por el momento que la ecuación anterior, es la ecuación de la parte pasiva de una red con nulores que ha sido preparada para el análisis de lazos (III.2.2), por lo tanto, para obtener la ecuación de lazos de una red cc con nulores, sólo nos falta realizar las operaciones en las filas y columnas de la matriz, indicadas éstas por la presencia de los nulatores y noratores en cada uno de los grafos de la red.

Por el nulador debe circular cero corriente, entonces, si dos lazos comparten un nulador en una red cc, las cargas de lazo circulantes en cada lazo deben ser iguales, esto se refleja en el sistema de ecuaciones sumando la columna de un lazo a la del otro y cancelando la primera.

Si el nulador pertenece a un sólo lazo, la carga circulante por dicho lazo es cero, por lo tanto se debe cancelar la columna correspondiente a dicho lazo, en la matriz del sistema de ecuaciones.

La presencia del norator en la red se refleja con la aparición de una nueva variable ( $V_x$ ), que la eliminamos sumando la ecuación de un lazo a la del otro y cancelando la del primero, cuando los lazos comparten el norator; o simplemente se elimina la ecuación cuando el norator pertenece a un sólo lazo.

De acuerdo a lo anterior, se puede resumir el procedimiento para obtener la ecuación de lazos de una red cc con nulores, de la siguiente forma:

- (a) Se cortocircuitan los nuladores y noradores de la red.
- (b) Se obtiene la ecuación de lazos de la red resultante del paso anterior, de acuerdo al procedimiento descrito en la sección 6 del capítulo 2.
- (c) Se identifican los nuladores y noradores cortocircuitados en cada uno de los grafos de la red.
- (d) Se procede a modificar la fila y columna de submatrices correspondiente a cada una de las fases, aplicando las restricciones impuestas por la presencia de los nuladores y noradores, de acuerdo al procedimiento dado en el capítulo 3 sección 2.2.

### III.4.1 Ejemplo

Para ilustrar el procedimiento anterior, considérese la red que se muestra en la figura 16 y, su equivalente nulo en la figura 17. Tal red puede encontrarse en la referencia L.T. Bruton, et al, 1983, en donde se analiza por otro método.

La matriz de impedancias de lazo  $D_1$  de la parte pasiva de la red es, de acuerdo a los grafos que se muestran en la fig.18

$$\begin{array}{cccc|c}
 & \text{fase 1} & & \text{fase 2} & \\
 | & d_1 & 0 & z^{-1}d_1 & 0 & |f \\
 | & & & & & | : \\
 | & 0 & d_2 & 0 & z^{-1}d_2 & |1 \\
 | & & & & & | \\
 | & z^{-1}d_1 & 0 & d_1 & 0 & |f \\
 | & & & & & | : \\
 | & 0 & z^{-1}d_2 & 0 & d_2 & |2
 \end{array}$$

De acuerdo con la figura 18, el nulador está compartido por los lazos 1 y 2 mientras que el norador pertenece al lazo 2, todo esto en ambos grafos. Por lo tanto, se suma la columna 2 a la 1 de la matriz en su parte correspondiente a la fase 1 y también en la correspondiente a la fase 2; finalmente se cancela la fila 2 de la matriz en su parte correspondiente a las fases 1 y 2.



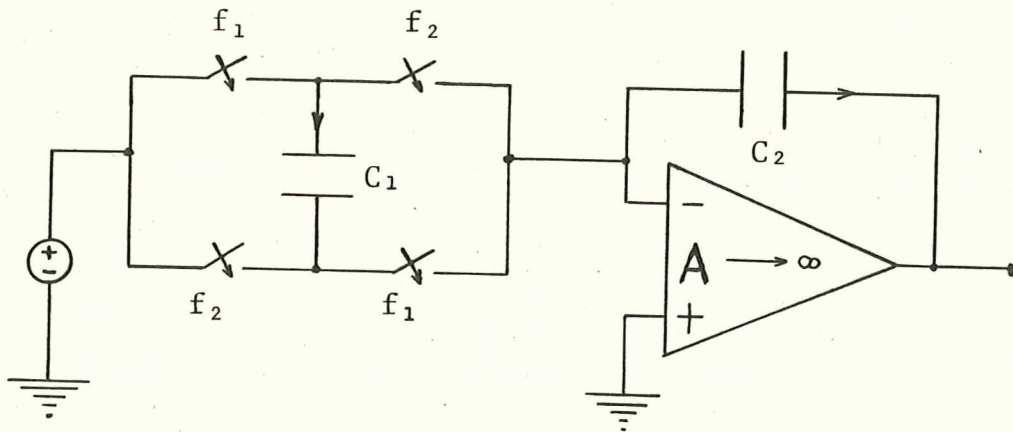


Fig.16. Red cc bifásica con un elemento activo.

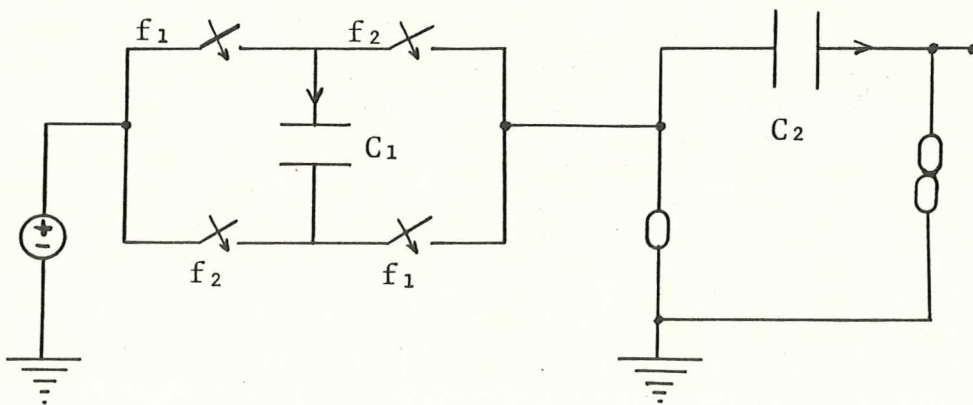


Fig.17. Equivalente nulo de la red de la Fig.16.

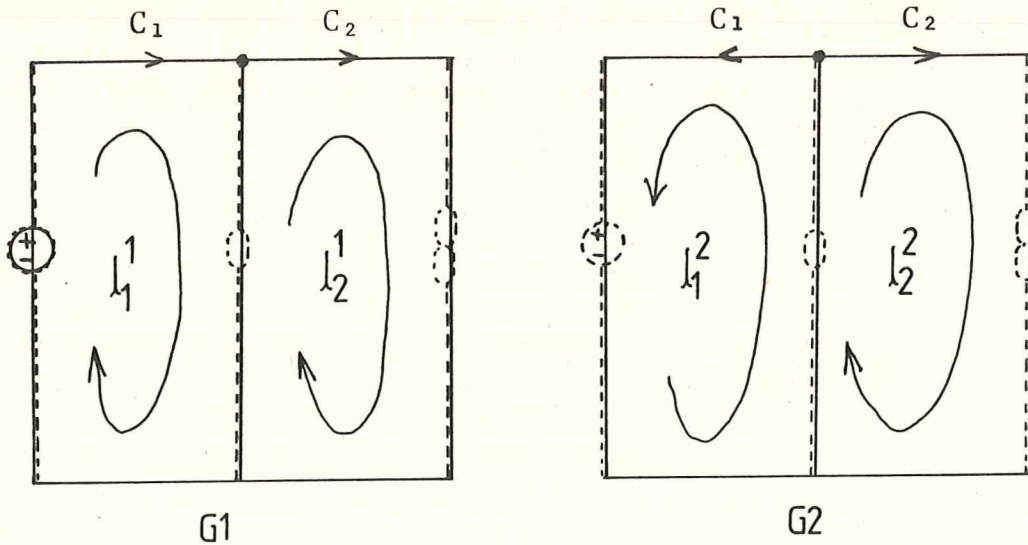


Fig.18. Grafos de la red de la Fig.17

De las operaciones anteriores se obtiene que la matriz  $D_1$  de la red cc que se muestra en la figura 16, es:

$$(1-z^{-2})^{-1} \begin{vmatrix} d_1 & z^{-1}d_1 \\ z^{-1}d_1 & d_1 \end{vmatrix}$$

En este capítulo se presentó un método para analizar redes cc que contienen elementos activos lineales ideales.

Se presentaron los métodos sistemáticos para obtener las ecuaciones nodal y de lazos de dichas redes, ilustrándose cada uno de ellos con un ejemplo, indicándose la referencia en la que se encuentra y en la que es analizado por otro método diferente al que aquí se propone. Podrá comprobarse, haciendo uso de tales referencias, que el método propuesto simplifica y unifica los criterios para efectuar el análisis de redes de capacitores conmutados.

## CAPITULO IV

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

#### IV.1 Conclusiones

En este trabajo se presentó un método topológico para obtener las ecuaciones nodal, de secciones de corte y de lazos de una red de capacitores conmutados multifásica. Esto es, un método que permite obtener las ecuaciones directamente de la topología (grafo) de la red, de una manera sencilla.

Se analizaron primero las redes cc sin elementos activos, dándose para éstas los procedimientos sistemáticos que permiten obtener la ecuación nodal, la de secciones de corte y la de lazos, directamente de la topología de la red, que en este caso, resultó un conjunto de  $m$  grafos, puesto que la red es de  $m$  fases.

Finalmente se analizaron las redes cc con elementos activos, dándose los procedimientos sistemáticos para obtener las ecuaciones nodal y de lazos, directamente de la topología de la red de una manera rápida y eficiente.

Las redes con elementos activos se analizaron mediante el uso de las equivalencias nulador-norador de los elementos

activos, hecho que simplificó la obtención de las ecuaciones que caracterizan la red.

De las secciones 2 y 3 del capítulo 2, puede observarse que las ecuaciones (nodal, de secciones de corte y de lazos) necesarias para el análisis de redes lineales invariantes y las ecuaciones correspondientes para el análisis de redes de capacitores conmutados son completamente similares, cuando las primeras se escriben en el dominio  $S$  y las segundas en el dominio  $Z$ .

Debido a la gran similitud que existe en la forma de las ecuaciones para redes cc y redes lineales invariantes, es posible construir un programa para el análisis de redes cc, basándose en los programas existentes diseñados para el análisis de redes lineales invariantes en su topología, como por ejemplo, el programa SPICE.

#### **IV.2 Recomendaciones**

Para obtener las funciones de transferencia o cualquier parámetro que caracterice a una red cc dada, es necesario evaluar los determinantes y menores de la matriz correspondiente al sistema de ecuaciones planteado. Para obtener el procedimiento sistemático necesario para evaluar los determinantes y menores directamente de la topología de la red, se recomienda:

(a) Trabajar con un sistema de cómputo que sea capaz de hacer cálculos matemáticos en forma simbólica;

(b) Trabajar la matriz de admitancias como la matriz de una red que contiene además de inductancias mutuas, "inductancias unilaterales".

## LITERATURA CITADA

Allen P.E. and Sanchez-Sinencio E., 1984. Switched Capacitor Circuits. Van Nostrand Reinhold.

Balabanian N., Bickart T. y Seshu S., 1972. Teoría de Redes Eléctricas. Editorial Reverté, S. A.

Balabanian N. and Bickart T., 1981. Linear Network Theory. Matrix Publisher, Inc.

Braun J., 1965. Equivalent NLC Networks with Nullators and Norators. IEEE Trans. on Circ. Th., CT-12: 441.

Brglez F., 1978. Exact Nodal Analysis of Switched Capacitor Networks and Arbitrary Switching Sequences and General Input -Part I. IEEE Proc. 12th. Ann. Conf. on Circ., System and Comp., Asilomar CA, p 679.

Brugger U. W., Moschytz G. S. and Hokenek E., 1983. SFG Analysis of SC Networks comprising Integrators. IEEE Proc. ISCAS 83, p 68.

Bruton L. T., 1980. RC-Active Circuits. Prentice-Hall, Inc.

Bruton L. T. and Battacharjee C., 1982. Formulation of the Nodal Charge Equations of Switched Capacitor Network Containing Nullors. Canadian Elec. Eng. J. 7: 21.

Bruton L. T., Bailey G. R. and Battacharjee C., 1983. Loop Equation Formulation for Switched Capacitor Networks Containing Nullors. *Int. J. of Circuit Theory and Applications*, 11: 57.

CarlIn H.J., 1964. Singular Network Elements. *IEEE Trans. on Circ. Th.*, CT-11: 67.

CarlIn H.J. and Youla D.C., 1961. Network Synthesis with Negative Resistors. *Proceeding of the IRE*, 49: 907.

Caves J.T., Copeland M.A., Rahim C.F. and Rosenbaun S.D., 1977. Sampled Analog Filtering using Switched Capacitor as Resistor Equivalents. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, SC-12(6): 592.

Davies A.C., 1967. Nullator-Norator Equivalent Networks for Control Sources. *IEEE Proc.*, 55: 722.

Fettweis A., 1981. Switched Capacitor Filters: from early ideas to present possibilities. *IEEE Proc. ISCAS 81*.

Fried D.L., 1972. Analog Sample Data Filters. *IEEE J. of Solid-State Circuits*, SC-7: 302.

Haslett J.W., Rao M.K.N. and Bruton L.T., 1980. Monolithic VCCS for High-Frequency RC Active Filters. Electronics Letters, 16(5): 175.

Hokenek E. and Moschytz G.S., 1980. Analysis of Multiphase Switched Capacitor Networks using the Indefinite Admittance Matrix. IEE Proc., 127(5): 226, pt. G.

Hosticka B.J., Brodersen R.W. and Gray P.R., 1977. MOS Sample-Data Recursive Filters using Switched Capacitor Integrators. IEEE J. of Solid-State Circ., SC-12:600.

Huigsing J.H. and Korte de J., 1977. Monolithic Nullor-A Universal Active Network Element. IEEE J. of Solid State Circuits, SC-12(1): 59.

Kurth C.F. and Moschytz G.S., 1979. Nodal Analysis of Switched Capacitor Networks. IEEE Trans. on Circuits and Syst., CAS-26(2): 93.

Laker K.R., 1979. Equivalent Circuits for the Analysis and Synthesis of Switched Capacitor Networks. The B.S.T.J., 58(3): 729.

Lin P.M., 1981. A Hybrid Matrix Approach to Switched Capacitor Circuit Analysis. IEEE Proc. ISCAS 81.



Liou M.L. and Kuo Y.L. 1979. Exact Analysis of Switched Capacitor Circuits with Arbitrary Inputs. IEEE Trans. on Circuits and Syst., CAS-26(4): 213.

Martinelli G., 1965. On the Nullor. IEEE Proc., 53: 332.

Maxwell J.C., 1892. A Treatise on Electricity and Magnetism. Oxford, 3rd. Ed., Tomo II, p 420.

Moschytz G. S., 1981. Simplified Analysis of Switched Capacitor Networks. Electronics Letters, 17(25): 975.

Mulawka J.J., 1980. By Inspection Analysis of Switched Capacitor Networks. Int. J. Electronics, 49(5): 359.

Mulawka J.J. and Moschytz G.S., 1985. Method of Simplified Analysis of Switched Capacitor Networks. Electronics Letters, 21(4): 138.

Palomera G.R., 1981. Los Nulores en el Diseño Electrónico. Memorias IEEE, Mexicon'81, Tomo I, p 139.

Reyes S.A., 1983. Algunas Aplicaciones de los Elementos Nulator, Norator y Nulor en la Electrónica Lineal. Tesis de Licenciatura, Fac. de C. Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León.

Tellegen B.D.H., 1966. On Nullators and Norators. IEEE Transactions on Circuit theory, CT-13: 466.

Tsividis Y.P., 1979. Analysis of Switched Capacitor Networks. IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS -26(11): 935.

Tsividis Y.P. and Fang S. C., 1982. Simple Method for Obtaining the Equations of Switched Capacitor Circuits. Electronics Letters, 18(17): 728.

## APENDICE I

### REDES DE CAPACITORES CONMUTADOS

Una red de capacitores conmutados es aquella en la cual, de los tres elementos clásicos, resistores, inductores y capacitores (R L C), sólo contiene: los capacitores, que son acompañados por conmutadores.

Los resistores pueden simularse mediante capacitores y conmutadores, los inductores mediante capacitores, conmutadores y amplificadores operacionales.

Una red de capacitores conmutados puede obtenerse de una red clásica sustituyéndole los elementos que no son capacitores, por capacitores y conmutadores. También es posible obtener la red cc, sintetizando la función deseada, mediante bloques básicos constituidos por capacitores, conmutadores y amplificadores operacionales.

En las redes cc, los conmutadores se construyen con transistores de efecto de campo (FET's) activados mediante señales de reloj (fases); a estos transistores no se les considera como elementos activos dentro de la red cc.

Si la red cc contiene amplificadores operacionales y/o transistores (que no estén operando como conmutadores),

éstos si son considerados como elementos activos dentro de la red de capacitores conmutados.

.....

El análisis de la equivalencia resistor-capacitor conmutado, puede encontrarse en muchos artículos o el análisis de todas las equivalencias, en el libro "Switched Capacitor Circuits" [Allen P.E. and Sanchez-Sinencio E., 1984], pero tuve la fortuna de descubrir la referencia más insólita en "A Treatise on Electricity and Magnetism" de James Clerk Maxwell [IEEE Circuits and Devices magazine, Vol.1, num.6, Nov. 1985, p.33]; dejemos que sea el mismo Maxwell quien nos describa tal equivalencia:

#### " Corriente Intermitente

775.] Si el alambre del circuito de una batería se corta en cualquier punto y las dos puntas se conectan a las terminales de un condensador, la corriente fluirá hacia el condensador con una intensidad que disminuye conforme la diferencia de potencial de las terminales del condensador se incrementa, de tal forma que cuando el condensador ha recibido la carga completa correspondiente a la fuerza electromotriz que actúa sobre el alambre la corriente cesa completamente.

Si las terminales del condensador ahora se desconectan de las terminales del alambre y se conectan de nuevo en ellas pero ahora en orden inverso, el condensador se descargará por sí mismo a través del alambre y se recargará en la forma opuesta, de tal forma que una corriente transitoria fluirá por el alambre, en una cantidad total que es igual a dos cargas del condensador.

Mediante una pieza mecánica (comunmente denominada conmutador o contacto deslizante) la operación de invertir las conexiones del condensador puede repetirse a intervalos regulares de tiempo, cada intervalo siendo igual a  $T$ . Si este intervalo es suficientemente largo tal que permita la descarga completa del condensador, la cantidad de electricidad transmitida por el alambre en cada intervalo será  $2EC$ , donde  $E$  es la fuerza electromotriz y  $C$  la capacitancia del condensador.

Si el magneto de un galvanómetro incluido en el circuito se carga, de tal forma que oscile tan lentamente, que una gran cantidad de descargas del condensador ocurran en el tiempo de una oscilación libre del magneto, la sucesión de descargas actúa sobre el magneto manteniendo una corriente estacionaria cuya medida es  $2EC/T$ .

Si ahora el condensador se elimina y un carrete de resistencia se substituye por él, y se ajusta hasta que la corriente estacionaria que pasa por el galvanómetro produzca la misma deflexión como con las descargas sucesivas y si  $R$  es la resistencia del circuito completo cuando esto es el caso,

$$E/R = 2EC/T \quad (1)$$

$$o \quad R = T/2C \quad (2)$$

Podemos entonces comparar el condensador junto con el conmutador en movimiento con un alambre de cierta resistencia eléctrica y podemos hacer uso de los diferentes métodos para medir resistencias descritos en los artículos 345 a 347 para poder determinar esta resistencia. "

James Clerk Maxwell  
"A Treatise on Electricity and Magnetism"  
Volumen II, Capítulo XIX

.....

En la referencia [ Hokenek E., and Moschytz G.S., 1980] se obtiene el conjunto de ecuaciones que describen la relación voltaje-corriente de un capacitor conmutado en una red cc de  $m$  fases, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio  $Z$ . Aquí se transcribe dicho análisis haciéndole una ligera modificación para trabajar con la relación voltaje-carga y no con la de voltaje-corriente.

La relación voltaje-corriente de un capacitor en un sistema continuo es:

$$i(t) = c [dv/dt] \quad (34)$$

si el capacitor está en una red cc ideal multifásica, la relación voltaje-corriente se basa en la carga instantánea del capacitor, en este caso el voltaje en el capacitor permanece constante durante el intervalo de tiempo  $\tau$ . Por lo tanto, la relación (34) para el instante de tiempo  $t=nT$  puede reemplazarse por la de diferencias finitas:

$$i(t) \Big|_{t=nT} = c \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (35)$$

en donde  $\Delta v = v(nT) - v(nT-\tau)$

y  $\Delta t = \tau$ .

De donde podemos obtener

$$i(nT) = c [v(nT) - v(nT-\tau)]/\tau$$

o por comodidad

$$q(nT) = c [v(nT) - v(nT-\tau)] \quad (36)$$

Consideremos ahora que el capacitor está en una red cc multifásica como se muestra en la figura 19. Suponiendo que el periodo de muestreo  $T$  de la red cc multifásica tiene  $m$  fases que no se traslapan de duración  $\tau$ , esto es  $T=m\tau$ , entonces suceden  $m$  estados de la topología de la red en un periodo  $T$ . Si denotamos el voltaje y la carga del capacitor en el estado  $j$  (fase  $j$ ), por  $v^j$  y  $q^j$  respectivamente y utilizando la ecuación (36) para las  $m$  fases en un periodo  $T$ , obtenemos

$$\begin{aligned} q^1(nT) &= c [v^1(nT) - v^m(nT-\tau)] \\ q^2(nT+\tau) &= c [v^2(nT+\tau) - v^1(nT)] \end{aligned}$$

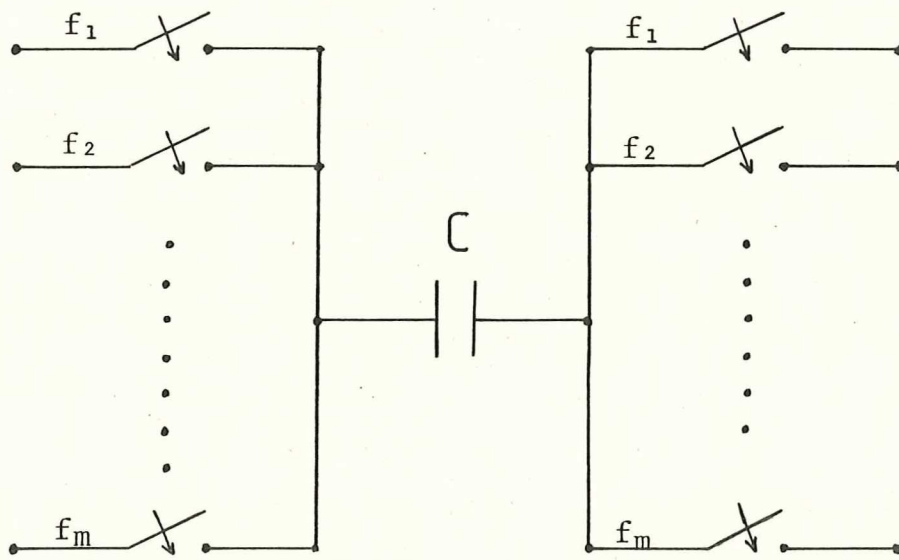


Fig.19. Capacitor en una red cc multifásica.

$$q^3(nT+2\mathcal{T}) = c [v^3(nT+2\mathcal{T}) - v^2(nT+\mathcal{T})]$$

$$\vdots$$

$$q^m(nT+(m-1)\mathcal{T}) = c [v^m(nT+(m-1)\mathcal{T}) - v^{m-1}(nT+(m-2)\mathcal{T})]$$

La transformada Z de por ejemplo  $q^3(nT+2\mathcal{T})$  es:

$$Q^3(z) e^{2s\mathcal{T}} = c [V^3(z) e^{2s\mathcal{T}} - V^2(z) e^{s\mathcal{T}}]$$

que puede escribirse como:

$$Q^3(z) = c [V^3(z) - z^{-1} V^2(z)]$$

en donde  $z^{-1} = e^{-s\mathcal{T}}$ .

Por lo tanto, la transformada Z del conjunto de ecuaciones anterior, puede escribirse como:

$$Q^1 = c [V^1 - z^{-1} V^m]$$

$$Q^2 = c [V^2 - z^{-1} V^1]$$

$$Q^3 = c [V^3 - z^{-1} V^2]$$

$$\vdots$$

$$Q^m = c [V^m - z^{-1} V^{m-1}]$$

que son las ecuaciones en el dominio Z que describen la relación voltaje-carga de solamente un capacitor en una red cc multifásica.



**APENDICE II****Trabajos publicados**

**All.1 Deducción topológica para el análisis nodal de redes con capacitores conmutados. Memoria ELECTRO '83, V Reunión Académica de Ingeniería Electrónica, Centro de Graduados e Investigación ITCH, Sep. 1983, p.235.**

**All.2 On the loop equation formulation for switched capacitor networks. Int. J. Circuit Theory and Appl. (GB), 13(4): 362. Oct. 1985.**

DEDUCCION TOPOLOGICA PARA EL ANALISIS NODAL  
DE REDES CON CAPACITORES CONMUTADOS

Armando Reyes Serrato y Rogelio Palomera García  
CICESE/División de Física Aplicada  
Apdo. Postal 2732, Ensenada, B.C., 22800

RESUMEN

En el presente trabajo se describe un método topológico simple para obtener la matriz de admitancias de una red con capacitores conmutados, tanto para redes pasivas como activas, utilizando en las redes activas las equivalencias nulador-norador (nutor) para sus elementos activos.

1. INTRODUCCION

A principios de los 70's aparece en la literatura la realización de filtros que requieren únicamente capacitores, transistores MOS y generadores de pulsos. Inicialmente se les llamó filtros analógicos de muestreo [1] y, actualmente se conocen como filtros de capacitores conmutados (cc). La importancia de éstos es que pueden integrarse completamente, que sus constantes de tiempo están en función de razones de capacitancias y que el valor del resistor simulado puede alterarse modificando la frecuencia de conmutación.

Este tipo de circuitos se originaron al sustituir los resistores por capacitores y conmutadores en una red RC. En las Figs.1 y 2 se muestra un ejemplo. Cabe aclarar que Maxwell ya había analizado la equivalencia entre un capacitor conmutado y un resistor [2], mas es probable que por cuestiones tecnológicas no se le haya dado la importancia que actualmente tiene.

Una red cc pasiva está compuesta por capacitores y conmutadores; si además tiene elementos activos, se le llama activa.

A mediados de los 70's fue posible integrar completamente un filtro de cc [3,4], creándose así la necesidad de métodos de análisis para este tipo de redes. A finales de esa década surgieron varios métodos, no publicándose algunos sino hasta hace poco [5,6,7,8,9,10]. Estos se caracterizan por tener muchos productos matriciales y/o analizar la red de cc mediante circuitos equivalentes. En particular el método de Hokenek y Moschytz se basa en la matriz de admitancias nodales indefinida y utiliza los procesos de contracción de polos [9,10].



Fig. 1.- (a) Red original. (b) Red con cc.

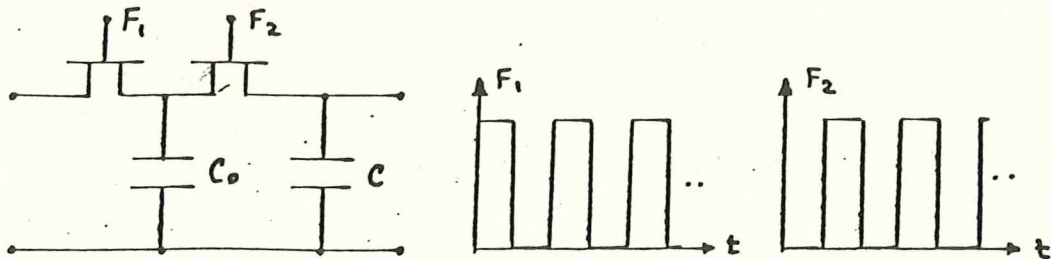


Fig. 2.- Red implementada con transistores MOS.

En este trabajo se describe un método topológico simple para obtener la matriz de admitancias de una red con capacitores conmutados. Consiste éste en obtener las submatrices que componen a la matriz de admitancias, directamente de la topología de la red en cada una de las fases, tanto para redes pasivas como activas.

En el caso de redes activas, se limita a redes cc con nulores, ya que todo elemento activo puede ser modelado mediante nulores [11] y capacitores.

## 2. ANTECEDENTES

En la Referencia [12] se encuentra un desarrollo completo para el análisis nodal de redes lineales, así como la interpretación topológica de la ecuación nodal; aquí se da un breve resumen.

A toda red eléctrica se le puede asociar un grafo direccionado. En este grafo, las direcciones de los segmentos pueden asociarse a las de las corrientes de los elementos de la red. Un ejemplo se muestra en la Fig. 3.

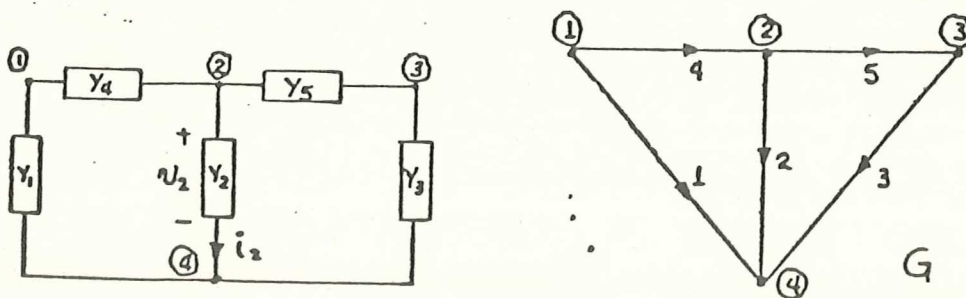


Fig. 3.- Red eléctrica y su grafo direccionado.

Dada una red eléctrica con  $b$  elementos y  $n+1$  nodos, las relaciones voltaje-corriente de dichos elementos pueden escribirse como:

$$I_V = Y_V V_V \quad (1)$$

en donde:

$$I_V = [i_1, i_2 \dots i_b]^T \quad V_V = [v_1, v_2 \dots v_b]^T \quad Y_V = \text{Diag}[y_1, y_2 \dots y_b]$$

Aquí,  $i_i$ ,  $v_i$  e  $y_i$  son, respectivamente, la corriente, el voltaje y la admitancia del  $i$ -ésimo elemento.  $I_V$  y  $V_V$  se conocen como vectores de corrientes y voltajes de rama, respectivamente.

La Ley de corrientes de Kirchhoff puede expresarse como:

$$A_t I_V = I_{nt} \quad (2)$$

en donde:  $I_{nt} = [I_{n1}, I_{n2} \dots I_{n(n+1)}]$ , con  $I_{nk}$  igual a la suma algebraica de las fuentes de corriente independientes que están conectadas al nodo  $k$  (+ si entra y - si sale), y  $A_t$  es la matriz de incidencia de los segmentos en los nodos del grafo, abreviadamente matriz de incidencia, definida como:

$$A_t = [a_{ij}] = \begin{cases} +1 & \text{Si el segmento } j \text{ sale del nodo } i. \\ -1 & \text{Si el segmento } j \text{ entra al nodo } i. \\ 0 & \text{Si el segmento } j \text{ no toca al nodo } i. \end{cases}$$

$A_t$  tiene la particularidad de que cada columna contiene únicamente un +1 y un -1 y el resto son ceros por lo que, las  $n+1$  ecuaciones son linealmente dependientes; sólo  $n$  son linealmente independientes.

Si se define  $A$  ( $I_n$ ) como la matriz que se obtiene de  $A_t$  ( $I_{nt}$ ) al eliminar una fila, entonces:

$$A I_V = I_n \quad (3)$$

representa un sistema de  $n$  ecuaciones con  $b$  incógnitas.

Por otro lado, se sabe [12] que los voltajes de los elementos pueden expresarse en función de los voltajes nodales, de la siguiente forma:

$$V_V = A^T V_n \quad (4)$$

en donde

$V_n = [v_{n1}, v_{n2} \dots v_{nn}]$ , con  $v_{nk}$  igual al voltaje del nodo  $k$  con respecto al nodo de referencia.

Sustituyendo la Ec.(4) en la (1) y el resultado en la (3), se obtiene:

$$I_n = Y_n V_n \quad (5)$$

en donde

$$Y_n = A Y_V A^T \quad (6)$$

El producto  $A Y_V A^T$  se define como la matriz de admitancias nodales y

se representa por  $Y_n$ . La forma en la que  $Y_n$  está relacionada con  $A$ , permite darle una interpretación topológica y poder obtenerla directamente del grafo de la red, el procedimiento es el siguiente (para redes sin acoplo mutuo): Si  $Y_n = [y_{ij}]$  entonces,  $y_{ii}$  es la suma de las admitancias conectadas al nodo  $i$ ;  $y_{ij}$  es el negativo de la suma de las admitancias comunes a los nodos  $i$  y  $j$ .

La Ec.(5) se llama ecuación nodal y se utiliza para efectuar el análisis nodal de una red eléctrica.

A manera de ejemplo, supóngase que la red de la Fig.3 tiene conectada una fuente de corriente independiente de valor  $I_0$  en paralelo con el elemento 1 (entrando al nodo 1 y saliendo del 4), y que el nodo 4 se toma como referencia, entonces la ecuación nodal de dicha red es:

$$\begin{bmatrix} |I_0| & |y_1+y_4 & -y_4 & 0 \\ |0| & -y_4 & y_2+y_4+y_5 & -y_5 \\ |0| & 0 & -y_5 & y_3+y_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |v_{n1}| \\ |v_{n2}| \\ |v_{n3}| \end{bmatrix}$$

### 3. ANALISIS NODAL DE REDES CON CC

#### 3.1 Generalidades.

Se considera para este análisis que los conmutadores están activados por señales de reloj (fases) que no se traslapan (Fig.4). En cada una de ellas, ciertos conmutadores se cierran y otros permanecen abiertos. A los conmutadores no se les asocia ninguna rama; cuando un conmutador se cierra los nodos conectados por él se superponen. De esta manera, a toda red cc de  $m$  fases se le asocia una sucesión periódica de  $m$  grafos (por ejemplo, la Fig.5). Las leyes de Kirchhoff son válidas para cada uno de ellos en particular. Para analizar topológicamente una red cc, toda la información se obtiene de estos grafos.

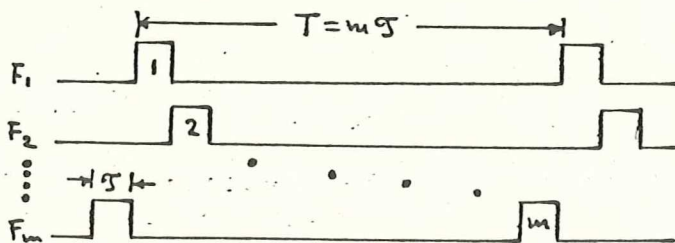


Fig.4.- M señales de reloj que no se traslapan.

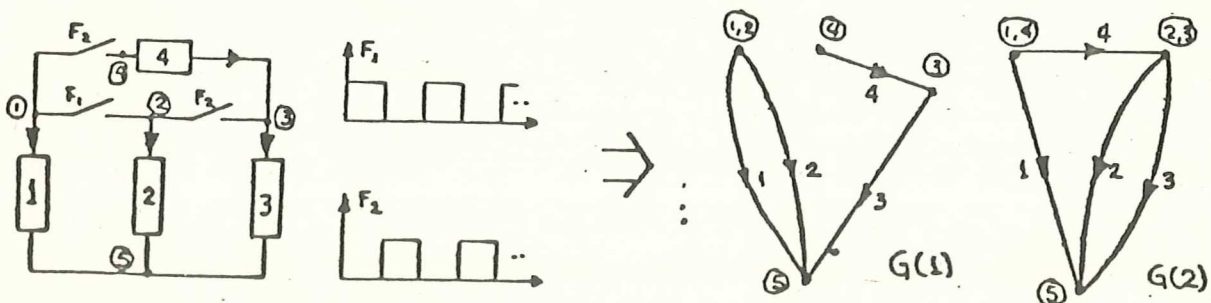


Fig.5.- Red bifásica y sus grafos.

La matriz de incidencia del  $i$ -ésimo grafo se denota por  $A_i$ . Sin embargo, a diferencia de las redes lineales invariantes en el tiempo un grafo en particular puede tener un bucle y/o nodos aislados, en este trabajo se ignoran los nodos aislados pero la columna correspondiente a un bucle contiene únicamente ceros. Esto se hace con el objeto de mantener compatibilidad en las multiplicaciones matriciales que se desarrollan más adelante.

En el caso de redes cc es conveniente trabajar con la relación voltaje-carga (la equivalente a la relación voltaje-corriente) ya que la red está constituida exclusivamente por capacitores.

### 3.2 Redes pasivas.

Dada una red con  $b$  capacitores conmutados multifásica y considerándose la conexión general para los capacitores, como la que se muestra en la Fig.6 [10].

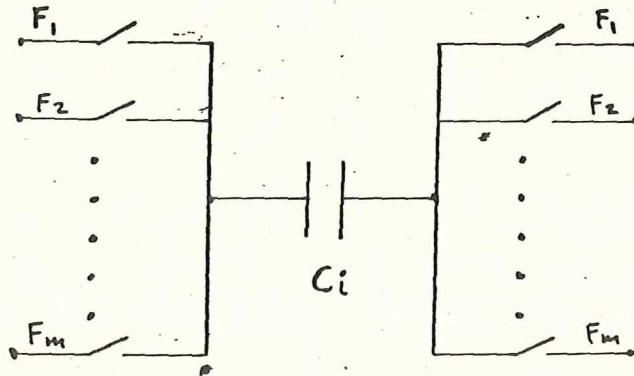


Fig.6.- Capacitor conmutado multifásico.

La relación voltaje-carga para el  $i$ -ésimo elemento en la  $k$ -ésima fase es:

$$q_i^k(nT+(k-1)T) = c_i [v_i^k(nT+(k-1)T) - v_i^{k-1}(nT+(k-2)T)] \quad (7)$$

La Transformada Z de esta ecuación es:

$$q_i^k(z) = c_i [v_i^k(z) - z^{-1}v_i^{k-1}(z)]. \quad (8)$$

Como la red tiene  $b$  elementos y es de  $m$  fases, existen por lo tanto,  $m$  conjuntos de  $b$  ecuaciones que indican la relación voltaje-carga de la red en un período completo. Agrupando estas ecuaciones en notación matricial, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} |Q_V^1| \\ |Q_V^2| \\ | \cdot | \\ | \cdot | \\ |Q_V^m| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_V & 0 & \cdot & \cdot & -z^{-1}C_V \\ -z^{-1}C_V & C_V & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & C_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |V_V^1| \\ |V_V^2| \\ | \cdot | \\ | \cdot | \\ |V_V^m| \end{bmatrix} \quad (9)$$

en donde cada fila representa el conjunto de ecuaciones para la fase correspondiente.  $C_V$  es la matriz diagonal de capacitancias.

La ecuación (9) puede abreviarse como:

$$Q_Y = C_Z V_Y. \quad (10)$$

Puesto que en cada una de las fases se cumplen las Leyes de Kirchhoff, se tiene:

$$A_k Q_Y^k = Q_N^k \quad k=1,2, \dots, m. \quad (11)$$

Agrupando las  $m$  ecuaciones en notación matricial, queda:

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \\ & & & & A_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |Q_Y^1| \\ |Q_Y^2| \\ | \cdot | \\ | \cdot | \\ |Q_Y^m| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |Q_N^1| \\ |Q_N^2| \\ | \cdot | \\ | \cdot | \\ |Q_N^m| \end{bmatrix}. \quad (12)$$

La ecuación (12) puede abreviarse como:

$$A Q_Y = Q_N. \quad (13)$$

En el  $k$ -ésimo grafo, la relación que existe entre los voltajes de los elementos y los voltajes nodales, es:

$$V_Y^k = A_k^T V_N^k \quad k=1,2, \dots, m. \quad (14)$$

Agrupando las  $m$  ecuaciones, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} |V_Y^1| \\ |V_Y^2| \\ | \cdot | \\ | \cdot | \\ |V_Y^m| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A_1^T| & & & & \\ & |A_2^T| & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \\ & & & & |A_m^T| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |V_N^1| \\ |V_N^2| \\ | \cdot | \\ | \cdot | \\ |V_N^m| \end{bmatrix}. \quad (15)$$

La Ec. (15) puede abreviarse como:

$$V_Y = A^T V_N. \quad (16)$$

De las ecuaciones (10), (13) y (16), se obtiene la que caracteriza a la red en el análisis nodal. Para lo anterior, se sustituye la Ec.(16) en la (10) y el resultado en la (13) obteniéndose:

$$Q_N = C_N V_N \quad (17)$$

en donde

$$C_N = A C_Z A^T. \quad (18)$$

La matriz  $C_N$  conocida como matriz de admitancias nodales de la red cc, está constituida por submatrices perfectamente definidas. En efecto, al realizar las operaciones indicadas la Ec.(17) es:

$$\begin{bmatrix} |Q_N^1| \\ |Q_N^2| \\ | \cdot | \\ | \cdot | \\ |Q_N^m| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |C_{N11}| & 0 & \cdot & \cdot & C_{N1m}| \\ |C_{N21}| & C_{N22} & \cdot & \cdot & 0 \\ | \cdot | & | \cdot | & \cdot & \cdot & | \cdot | \\ | \cdot | & | \cdot | & \cdot & \cdot & | \cdot | \\ |0| & |0| & \cdot & \cdot & |C_{Nm m}| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |V_N^1| \\ |V_N^2| \\ | \cdot | \\ | \cdot | \\ |V_N^m| \end{bmatrix}. \quad (19)$$

en donde

$$C_{nij} = \begin{cases} A_i C_v A_j^T & \text{si } i=j, \text{ con } j=1,2,\dots,m. \\ -z^{-1} A_i C_v A_j^T & \text{si } i=j-1, \text{ con } j=2,3,\dots,m. \\ -z^{-1} A_i C_v A_m^T & \text{si } i=1 \text{ y } j=m. \\ 0 & \text{para el resto de las } i \text{ y } j. \end{cases} \quad (20)$$

### 3.2.1 Comentario.

En este punto es importante hacer notar la similitud que existe entre el par de Ecs. (5) y (6) con (17) y (18). Por una parte ésto justifica el nombre dado a  $C_m$  ya que, formalmente, se tienen las mismas ecuaciones. Por otro lado la matriz  $Y_m$  en (5) se puede escribir directamente del grafo, y esto es posible gracias a la interpretación topológica de (6). La similitud de (18) con (6), expresada más en detalle en (20), permite proceder de una manera similar para  $C_n$ .

Es importante hacer notar que las similitudes formales expuestas en este comentario fueron pasadas por alto en los trabajos anteriores [3-10].

### 3.2.2 Método topológico para escribir la ecuación nodal.

(I) Las submatrices de las matrices columna de la Ec. (19), se obtienen directamente de los  $m$  grafos sin ninguna complicación. Significan lo siguiente:

(a)  $Q_n^k$  = Matriz columna de  $n_k$  filas, en donde la  $i$ -ésima fila es la suma algebraica de las fuentes de carga independientes conectadas al nodo  $i$ , en el grafo correspondiente a la fase  $k$ .

(b)  $V_n^k$  = Matriz columna de  $n_k$  filas, en donde la  $i$ -ésima fila es la variable correspondiente al voltaje nodal del nodo  $i$ , en el grafo de la fase  $k$ .

$n_k$  = Número de nodos del grafo correspondiente a la fase  $k$ , sin tomar en cuenta los nodos aislados ni el de referencia.

(II) Las submatrices  $C_{nij}$  de la matriz de admitancias nodales, se obtienen de la siguiente forma:

Sea  $A_i C_v A_j^T = [y_{kl}]_{ij}$ , con  $k=1,2,\dots,n_i$  y  $l=1,2,\dots,n_j$ ; entonces:

$$[y_{kl}]_{ij} = \sum_l \{ \{y_{N(k)} \in G(i)\} \cap \{y_{N(l)} \in G(j)\} \}$$

en donde  $\{y_{N(k)} \in G(i)\}$  es el conjunto formado por las admitancias conectadas al nodo  $k$  que pertenece al grafo correspondiente a la fase  $i$ . La sumatoria es algebraica; la admitancia tendrá signo positivo si tiene la misma orientación con respecto a los nodos en cuestión y signo negativo en caso contrario. Si  $i \neq j$ , la submatriz tiene como factor a:  $-z^{-1}$ .

Obsérvese, que para  $i=j$ ,  $C_{nij}$  se escribe exactamente igual que la



matriz  $Y_n$  de la Ec.(6) para redes lineales. En otras palabras  $C_{ni}$  es, simple y llanamente, la matriz de admitancias nodales del  $i$ -ésimo grafo. Así mismo, para redes bifásicas  $C_n$  es simétrica. Por ejemplo, para la Fig.(5) se tiene:

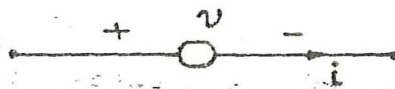
$$C_n = \begin{array}{c|ccc|cc} & |c_1+c_2 & 0 & 0 & |c_1 & c_2 \\ & | 0 & c_3+c_4 & -c_4 & -z^{-1}|-c_4 & c_3+c_4 \\ & | 0 & -c_4 & c_4 & |c_4 & -c_4 \\ & | -z^{-1}|c_1 & -c_4 & c_4 & |c_1+c_4 & -c_4 \\ & |c_2 & c_3+c_4 & -c_4 & | -c_4 & c_2+c_3+c_4 \end{array}$$

### 3.3 Redes activas.

Una forma de analizar redes activas es obtener primero la ecuación de la parte pasiva y posteriormente agregarle las restricciones impuestas por los elementos activos. Un método simple para encontrar la ecuación de tales redes, es sustituir los elementos activos por su equivalente nulo. Lo anterior permite obtener la ecuación final, mediante simples operaciones con las filas y columnas, de las matrices de las ecuaciones de la parte pasiva de la red [11]. En la Referencia [13] se encuentra un desarrollo detallado de esto; a continuación se presenta lo necesario.

El nulor [14] es un bipuerto constituido por un par nulador-norator [15] [13]. El símbolo y la característica de estos últimos se muestra a continuación:

El símbolo y las dos ecuaciones que definen al nulador son:



$$v = 0, i = 0.$$

El símbolo y la característica del norator son (cero ecuaciones):



$$v \text{ e } i \text{ arbitrarios.}$$

De las definiciones anteriores se obtiene lo siguiente: si un nulador (norator) se encuentra conectado entre los nodos  $j$  y  $k$ , una de las columnas (filas) de la matriz de admitancias de la parte pasiva de la red, correspondientes a dichos nodos, se sustituye por la suma de las dos y la otra se elimina. Si uno de los nodos es el de referencia, la columna, (fila) correspondiente al otro nodo simplemente se elimina [13].

Para obtener la ecuación de una red con nulores [16], se procede de la siguiente forma: (1) se desconectan los nuladores y noradores de la red; (2) se obtiene la matriz de admitancias de la red resultante de acuerdo al método ya descrito; (3) se conectan los nuladores y noradores y se aplican las operaciones indicadas arriba.

3.3.1 Ejemplo.

Dada la siguiente red y su equivalente nulo [13]:

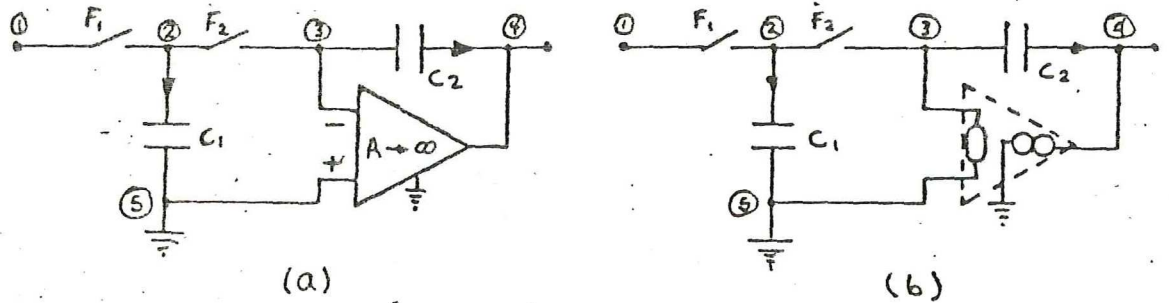


Fig. 7.- Integrador cc y su equivalente nulo.

Los grafos de la parte pasiva de la red son:

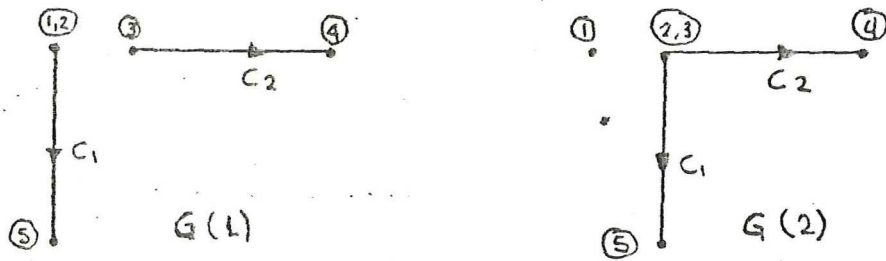


Fig. 8.- Grafos de la red sin nultores y noratores.

De acuerdo con el procedimiento dado y tomando al nodo 5 como referencia,  $C_N$  es:

$$C_N = \begin{array}{c|ccc|ccc} & 1,2 & 3 & 4 & & & & \\ \hline 1,2 & |c1 & 0 & 0 & & & & \\ 3 & |0 & c2 & -c2 & & & & \\ 4 & |0 & -c2 & c2 & & & & \\ \hline & 2,3 & -z^{-1} & |c1 & c2 & -c2 & & \\ & 4 & |0 & -c2 & c2 & & & \end{array} \quad \begin{array}{c|cc|cc} & 2,3 & 4 & & & \\ \hline & |c1 & 0 & & & \\ -z^{-1} & |c2 & -c2 & & & \\ & |-c2 & c2 & & & \\ \hline & |c1+c2 & -c2 & & & \\ & |-c2 & c2 & & & \end{array}$$

De la Fig. 7(b) se obtiene:

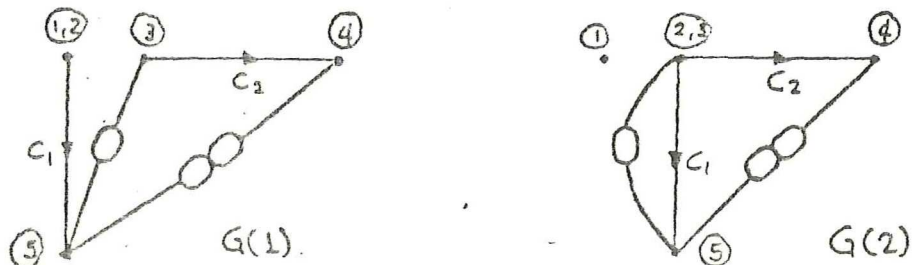


Fig. 9.- Grafos del integrador cc con nultores.

Efectuando las operaciones necesarias en cada una de las fases, resulta:

$$C_n = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & z^{-1}c_2 \\ -z^{-1}c_1 & z^{-1}c_2 & -c_2 \end{vmatrix}$$

que es la matriz de admitancias nodales de la red de la Fig.7.

#### 4. CONCLUSIONES

Se ha descrito un método topológico simple que permite obtener la ecuación nodal de una red con capacitores conmutados pasiva o activa. Tal método es extremadamente simple comparado con los presentados hasta ahora en la literatura y lo que es más importante, muestra que para analizar redes con capacitores conmutados los métodos ya existentes para circuitos lineales son aplicables.

#### 5. BIBLIOGRAFIA

- [1] D.L. Fried, "Analog sample-data filters," IEEE J. Solid-State Circuits, Vol. SC-7, Aug. 1972, pp. 302 - 304.
- [2] J.C. Maxwell, "A treatise on electricity and magnetism", (primera Ed.1873) Oxford, tercera Ed., Tomo II, p 420, 1892.
- [3] J.T. Caves et al., "Sampled analog filtering using switched capacitor as resistor equivalents," *ibid.*, Vol. SC-12, Dec. 1977, pp. 592 - 599.
- [4] B.J. Hosticka et al., "MOS sampled-data recursive filters using switched capacitor integrators," *ibid.*, Vol. SC-12, Dec. 1977, pp. 600 - 608.
- [5] K.R. Laker, "Equivalent circuits for the analysis and synthesis of switched capacitor networks," The Bell System Technical Journal, Vol.58, No.3, Mar. 1979, pp. 729-769.
- [6] C.F. Kurth, "Two-port analysis of SC networks with continuous input signals," *ibid.*, Vol.59, No.8, Oct.1980, pp.1297-1316.
- [7] C.F. Kurth and G.S. Moschytz, "Nodal analysis of sitched-capacitor networks," IEEE Trans. CAS-26, No. 2, Feb. 1979, pp. 93 - 105.
- [8] Y. Tividis, "Analysis of switched-capacitor networks," *ibid.*, No. 11, Nov. 1979, pp. 935 - 946.
- [9] E. Hokenek and G.S. Moschytz, "Analysis of general switched-capacitor networks using indefinite admittance matrix," IEE Proc., Vol. 127, Pt. G, No. 1, 1980.
- [10] \_\_\_\_\_, "Analysis of multiphase switched-capacitor networks using the indefinite admittance matrix," *ibid.*, No. 5, 1980.

- [11] A.C. Davies, "The significance of nullators, norators and nullors in active network theory", *The Radio and Elec. Eng.*, Vol-34, pp.259-267, 1967.
- [12] N. Balabanian, T.A. Bickart, S. Seshu, "Teoría de redes eléctricas", Ed. Reverté, S.A., 1972.
- [13] A. Reyes Serrato, "Algunas aplicaciones de los elementos nulador, norador y nulor en la electrónica lineal", Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León, 1983.
- [14] H.J. Carlin, "Singular network elements", *IEEE Trans. on Circ. Th.*, Vol. CT-11, pp. 67-72, 1964.
- [15] H.J. Carlin, D.C. Youla, "Network synthesis with negative resistors", *Proc. of the IRE*, Vol. 49, pp. 907-920, 1961.
- [16] J.I. Sewell, "Analysis of active switched capacitor networks", *IEEE Proc.*, Vol.68, No.2, p 292, 1980.

ON THE LOOP EQUATION FORMULATION FOR SWITCHED CAPACITOR NETWORKS

ROGELIO PALOMERA-GARCIA AND ARMANDO REYLS-SERRATO†

División de Física Aplicada Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE), Espinoza 843, Ensenada, B.C. 22800 México‡

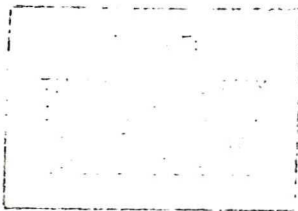
INTRODUCTION

The loop analysis method for switched capacitor networks (SCN) was introduced recently.<sup>1</sup> The algorithm given in this reference, however, applies only to meshes and planar networks. In this letter another approach is given, which is general and simpler than the one in Reference 1, yielding an extension for any network or any set of loops and a topological description for the loop impedance matrix.

The approach follows the same derivation as the loop analysis for linear time invariant networks, giving rise to similar formal expressions, deriving from them a relationship with the nodal admittance matrix of SCN (this one can be derived in a similar way).

DERIVATION: PASSIVE CASE

Let the SC network be a  $p$ -phase network with  $m$  capacitors  $C_1, C_2, \dots, C_m$ . For each capacitor  $C_j$ , during the  $k$ th phase, the voltage-charge equation in the  $z$ -domain is  $q_j^k(z) = C_j(v_j^k(z) - z^{-1}v_j^{k-1}(z))$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ , where the super-indices ( $k$ ) standing for the phases are integers module  $p$ . If  $C = \text{diag}(C_1, \dots, C_m)$ , then the  $p \times m$  capacitor relations can be expressed in matrix form as



$$\begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \\ \vdots \\ q^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & \dots & -z^{-1}C \\ -z^{-1}C & C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -z^{-1}C & C & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ \vdots \\ v^p \end{bmatrix} \quad (1)$$

or

$$Q = C_r V \quad (2)$$

Here,  $q^k = [q_1^k(z), q_2^k(z), \dots, q_m^k(z)]^T$  for  $k = 1, 2, \dots, p$ ,  $Q = [q^{1T}, q^{2T}, \dots, q^{pT}]^T$ , and similarly for  $v^k$  and  $V$ . Equation (2) can be rewritten as

$$V = C_r^{-1} Q = D_r Q \quad (3)$$

† Now with the Instituto de Física de la UNAM, División Ensenada B.C., Ensenada Baja California, Mexico.

‡ Postal Address: CICESE-Física Aplicada, P.O. Box 4944, San Ysidro, CA 92073, U.S.A.

with

$$D_r = \frac{1}{1-z^{-r}} \begin{bmatrix} D & z^{-(r-1)}D & z^{-(r-2)}D & \dots & z^{-1}D \\ z^{-1}D & D & z^{-(r-1)}D & \dots & z^{-2}D \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ z^{-(r-1)}D & \cdot & \cdot & \dots & D \end{bmatrix} \quad (4)$$

Here  $D = C^{-1} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_m)$  is the matrix of elastances of the capacitors ( $d_j = 1/C_j$ ).

Now, for each phase  $k$ ,  $B_k v^k = e^k$ ,  $q^k = B_k^T Q_l^k$  where  $B_k$  is the loop matrix of the  $k$ -graph, obtained by short circuiting the switches closed during the  $k$ th phase,  $e^k$  is the vector of the loop voltage sources for that phase, and  $Q_l^k$  is the vector of 'loop-charges'. Hence we obtain from (3), using  $B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_r)$ ,

$$BV = E_l = (BD, B^T)Q_l = ZQ_l \quad (5)$$

where

$$Z = BD, B^T = \frac{1}{(1-z^{-p})} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1p} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{p1} & D_{p2} & \dots & D_{pp} \end{bmatrix} \quad (6)$$

is the loop impedance matrix of the switched capacitor network. Each block in (6) is given by

$$D_{ij} = z^{-X} B_i D B_j^T \quad (7)$$

with

$$X = \begin{cases} 0, & \text{if } i=j \\ i-j, & \text{if } i>j \\ p-(j-i), & \text{if } j>i \end{cases} \quad (8)$$

Notice that for  $i=j$ ,  $D_{ii}$  is simply the usual loop impedance matrix for the circuit during the  $i$ th phase. For  $i \neq j$ , in  $B_i D B_j^T$ , the elastance  $d$  appears in the row corresponding to the  $k$ th loop of the  $i$ th graph and the column corresponding to  $l$ th loop of the  $j$ th graph iff the capacitor is in both loops; it has a sign '+' if the relative direction is the same in both graphs, and '-' if it is different.

Thus (7) gives a topological description for each of the blocks that constitute the loop impedance matrix and it yields a simple algorithm to write the matrix, as shown in the example below. Notice that the  $(1-z^{-p})^{-1}$  factor appearing in (6) comes from the 'branch' equations (3) and (4).

#### Example

Consider the 3-phase circuit of Figure 1, with the 1st, 2nd and 3rd graphs given in Figure 2. For this circuit, the loop impedance matrix is

$$(1-z^{-3})^{-1} \begin{bmatrix} d_1+d_2 & +d_2 & -z^{-2}d_2 & z^{-1}d_1 \\ +d_2 & d_2+d_3+d_4 & -z^{-2}(d_2+d_4) & -z^{-1}(d_3+d_4) \\ -z^{-1}d_2 & -z^{-1}(d_2+d_4) & d_2+d_4 & +z^{-2}d_4 \\ z^{-2}d_1 & -z^{-2}(d_3+d_4) & +z^{-1}d_4 & d_1+d_3+d_4 \end{bmatrix}$$

The matrix in this example has been partitioned for easy identification of the blocks (7) in it.

From (7) and (8), it is seen that the loop impedance matrix for SCN is symmetrical in the case of two phases, and symmetrical for  $z=1$  in any case.

It is also worth noting that the form  $Z = BD, B^T$  is formally similar to that of the loop impedance matrix for linear time invariant networks.<sup>3</sup> This similarity was not evident in Reference 1. Also, the loops can be chosen independently in each phase; this can help in the analysis, since it yields more freedom when setting up the equations.

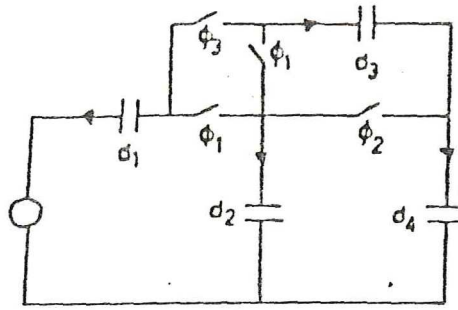


Figure 1

### NETWORKS CONTAINING NULLORS

Since active SC networks may always be modelled with the use of nullors, only this type of circuit is considered. The nullors are taken into consideration using Davies' rules,<sup>4</sup> as has been done in either the loop or nodal analysis.<sup>1,5</sup>

Owing to the topological description that follows from (7), the constrained matrix can usually be obtained directly from the network.

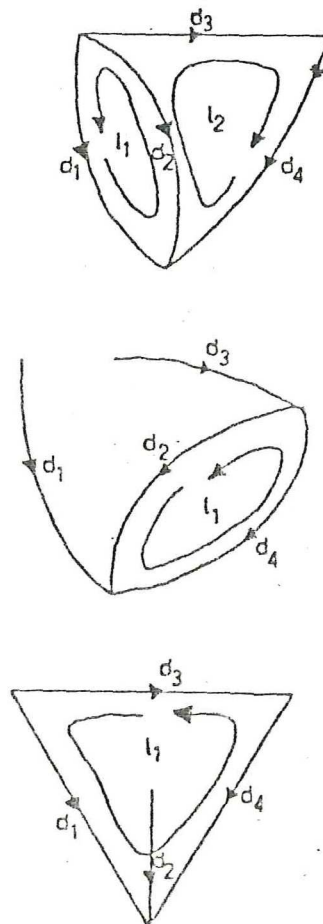


Figure 2

### Example

The filter in Figure 3 was analysed with the nodal method in Reference 6. The first and second graphs are shown in Figure 4; the loop impedance matrix after operations, is

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & -z^{-1}d_1 & -z^{-1}d_1 \\ 0 & -d_4 & z^{-1}d_2 & 0 \\ -z^{-1}d_1 & 0 & d_1+d_2 & d_1 \\ -z^{-1}d_1 & z^{-1}(d_4+d_5) & d_1 & d_1+d_3 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

The transfer function can be obtained requiring the computation of a third and a fourth order determinant, against three sixth order determinants required in nodal analysis. Moreover, owing to the generality of the algorithm derived, meshes were not chosen as the set of independent loops, simplifying the analysis.

### A RELATION BETWEEN DETERMINANTS $|Z|$ AND $|Y_n|$

The form (6)

$$Z = BD, B^T \quad (9)$$

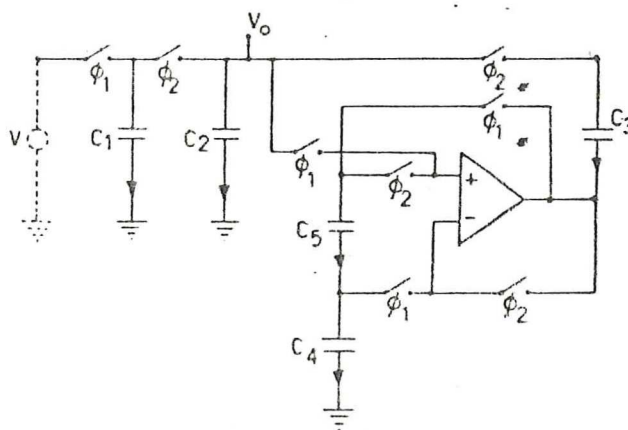


Figure 3

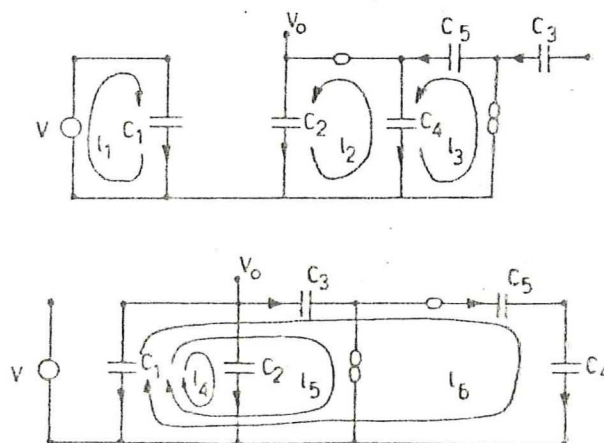


Figure 4



of the loop impedance matrix is formally similar to the loop impedance matrix of linear time invariant networks.<sup>3</sup> Similarly, the nodal admittance matrix for SCN can be shown to be of the form<sup>2</sup>

$$Y_n = ACrA^T \quad (10)$$

where

$$A = \text{diag} (A_1, \dots, A_p)$$

$A_j$  being the node to branch incidence matrix of the  $j$ th graph. Hence, from known results in graph theory,<sup>3</sup> one has

$$|Z||C_r| = |Y_n| \quad (11)$$

or, after operations,

$$|Y_n| = (1 - z^{-p})^m (c_1 c_2 \dots c_m)^p |Z| \quad (12)$$

### CONCLUSIONS

The loop impedance matrix for switched capacitor networks was derived from topological considerations, yielding a simple algorithm for writing the equations and putting in evidence the formal similarity between the loop analysis for SCN and linear time invariant networks. Also, the derivation was general, extending the applicability of loop analysis beyond the limitations of the algorithm derived previously.

Following the form of the equations, a relation between the determinants of the nodal admittance and the loop impedance matrices was derived.

### REFERENCES

1. L. T. Bruton, G. R. Barley and G. Battacharjee, 'Loop equation formulation for switched capacitor networks containing nullors', *Int. J. Cir. Theor. Appl.*, 11, 57-72 (1983).
2. R. Palomera and A. Reyes, Nodal, cut-set and loop analysis of switched capacitor networks: a unified point of view', *Proc. MEXICON-83*, 24.3.1-24.3.5 (1983) (in Spanish).
3. S. Seshu and M. B. Reed, *Linear Graphs and Electrical Networks*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1961, Chaps 6 and 7.
4. A. C. Davies, 'Matrix analysis of networks containing nullators and norators', *Electron. Lett.* 2, (2), 45 (1966).
5. J. I. Sewell 'Analysis of active switched capacitor networks', *Proc. IEEE*, 68, 292-293 (1980).
6. E. Holenek and G. S. Moschytz, 'Analysis of general switched-capacitor networks using indefinite admittance matrix', *IEE Proc., Pt. G.*, 127, 21-33 (1980).

