CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA

CONVECCIÓN GENERADA EN RECIPIENTES HERMÉTICOS CON PAREDES AISLANTES Y CONDUCTORAS

TESIS
MAESTRO EN CIENCIAS

MARCO JULIO ULLOA TORRES

Ensenada, Baja California, México, diciembre de 1993

RESUMEN de la tesis de Marco Julio Ulloa Torres presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en OCEANOGRAFIA con opcíon en OCEANOGRÁFIA FISICA. Ensenada, Baja California, México. Noviembre de 1993.

CONVECCION EN RECIPIENTES HERMETICOS CON
PAREDES AISLANTES Y CONDUCTORAS.

Resumen aprobado por:

José Luis Ochoa de la Torre.

Dr. José Luis Ochoa de la Torre.
Director de Tésis.

Se investiga, numéricamente, un problema físico escasamente estudiado que consiste en la generación de convección en un fluído con estratificación estable. Por simplicidad se analiza el caso cuando el fluído se encuentra confinado dentro de un tubo de longitud infinita con sección transversal cuadrada. Las variaciones de densidad que provocan el movimiento convectivo se inducen a través de una disposición conveniente de paredes aislantes y conductoras.

El algoritmo numérico que se utiliza es un esquema compacto, escrito en diferencias finitas de cuarto orden de precisión, que resuelve la ecuación general de difusión-convección para un fluído viscoso e incompresible en condiciones estacionarias a través de un proceso iterativo de sobrerelajación sobre una celda cuadrada. El algoritmo, diseñado originalmente para densidad homogénea (Gupta et al., 1984), se generaliza en ésta tésis al incluir densidad variable con difusión sobre una celda rectangular.

Los parámetros que determinan las soluciones son el número de Rayleigh y la inclinación del tubo pues el número de Prandtl se mantiene constante. Los cálculos que se efectúan corresponden a números de Rayleigh menores o iguales a 100 000 y a inclinaciones variadas. Las soluciones para una pared horizontal aislante y las otras tres conductoras, y para dos fronteras aislantes vecinas presentan, respectivamente, dos y una celdas de circulación cuando el tubo se encuentra en posición horizontal. En ambos casos la inclinación del mismo induce cambios hacia una o dos celdas. Cuando el tubo tiene dos paredes verticales aislantes opuestas, no se produce convección, y en cuanto se inclina, se forman de una a cuatro celdas convectivas. Soluciones para tres fronteras aislantes sólo muestran una o dos celdas cuando el tubo se inclina. También, se resalta la no unicidad de las soluciones con el caso de un fluído con estratificación inestable contenido en un tubo con dos paredes verticales aislantes y opuestas, donde se pueden provocar una o más celdas simétricas.

Para estimar el error involucrado en las soluciones, se utilizan integrales de contorno sobre circuitos cerrados cuyo resultado debe ser nulo.

TESIS DEFENDIDA POR: MARCO JULIO ULLOA TORRES

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITE:

DR. JOSE LUIS OCHOA DE LA TORRE.- Director del Comité

DR. FEDERICO GRAEF ZIEHL.- Miembro del Comité

DR. JUAN MANUEL LOPEZ MARISCAL.- Miembro del Comité

M.C. JOSE FREZ CARDENAS.- Miembro del Comité

DR. ANTOINE BADAN DANGON.- Jefe Depto. Oceanografía Física

DR. LUIS EDUARDO CALDERON AGUILERA.- Director Estudios de Posgrado

6 DE DICIEMBRE DE 1993

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA.

DIVISION DE OCEANOLOGIA.
DEPARTAMENTO DE OCEANOGRAFIA FISICA.

CONVECCION GENERADA EN RECIPIENTES HERMETICOS CON PAREDES AISLANTES Y CONDUCTORAS.

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS presenta:

MARCO JULIO ULLOA TORRES.

Ensenada, Baja California, México. Diciembre de 1993.

AGRADECIMIENTOS.

A J.L. Ochoa, director de tésis, por el apoyo y las sugerencias dadas durante el desarrollo de la presente investigación. También, a J.M. Robles por su apoyo, pues sin éste no hubiera ingresado al programa de Maestría en Ciencias.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE) y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la contribución financiera otorgada durante la realización de los estudios de maestría. A todas aquellas personas que de alguna manera prestaron asistencia económica externa.

A M.M. Gupta, de la Universidad George Washington, por su amabilidad en proporcionar un código para resolver ecuaciones elípticas y una sarta de sus publicaciones.

A los miembros del Comité de Tésis: J. Frez, F. Graef y M. López por la revisión crítica del manuscrito.

Las consultas o pláticas informales con los investigadores: M.L. Argote, O. Delgado, M. Figueroa, E. Gómez, J. Gómez, J. Sheinbaum y A. Trasviña en diferentes etapas del trabajo de tésis es bien apreciada.

A C. Famozo, M. Gaynor, C. Martínez y E. Torres por la ayuda computacional brindada.

CONTENIDO.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

LISTA DE TABLAS

CONVECCION GENERADA EN RECIPIENTES HERMETICOS CON PAREDES AISLANTES Y CONDUCTORAS.

I. INTRODUCCION.

En la Dinámica de Fluidos Geofísicos es común considerar que los procesos convectivos se generan con forzamientos que, en ausencia de advección y con difusión pura, producirían una distribución de densidad inestable, es decir, densidades menores por debajo de densidades mayores. La convección ocurre porque en tal situación es imposible mantener perturbaciones infinitesimales y el reposo desaparece. No obstante, también es posible impulsar celdas de circulación estacionarias en un tubo hermético de longitud infinita y sección transversal cuadrada con forzamientos que, sin advección, provocarían una estratificación estable. Lo anterior es posible porque la permanencia del estado de reposo en un fluído sin rotación requiere que el gradiente de densidad sea paralelo a la aceleración gravitatoria, esto es, que no existan variaciones laterales de densidad. Para el caso de la presente investigación, se provocan variaciones laterales de densidad mediante combinaciones apropiadas de paredes aislantes y conductoras, aunque el tubo se encuentre o no inclinado respecto a la horizontal. Las paredes aislantes actúan como un forzamiento para las isopícnas, en el sentido de inducir gradientes horizontales de flotabilidad. Las paredes conductoras juegan el papel de fijar la densidad a valores específicos con la existencia de flujos a través de ellas. Ya que el origen de tales variaciones es externo, las celdas de circulación son celdas convectivas libres.

Los trabajos de Phillips (1970) y Wunsch (1970) representan un ejemplo del estudio de la convección en un fluído con una distribución de densidad estable. En tales trabajos se considera una sola frontera de longitud infinita, inclinada, rígida, impermeable y aislante en un medio con estratificación en densidad uniforme y estable. La principal condición en la frontera que se satisface es que no hay flujo de sal o de calor a través de ella. Como el flujo advectivo es nulo a través de la frontera, el flujo difusivo sólo puede ser paralelo a ésta y, por consiguiente, las isopícnas se desvían de la horizontal en el interior del fluído e intersectan la frontera en ángulos rectos. Así, en un marco de referencia rotado respecto a la horizontal, una componente del flujo difusivo de sal o de calor que es hacia arriba (inverso al gradiente de densidad) en el interior se cancela en la frontera. Para ello, la densidad en la capa límite disminuye respecto a posiciones horizontales en el interior del fluído. En conjunción con lo anterior, por flotabilidad, se produce un gradiente de presión que ocasiona un flujo cerca de la frontera con transporte neto de volumen pendiente arriba. La solución de Phillips (1970) y Wunsch (1970) es estacionaria y conecta el interior del fluído, donde el reposo prevalece, con la frontera, en cuya vecindad o capa límite sólo ocurre advección paralela a ésta.

Phillips (1970) también reprodujo experimentalmente el flujo descrito en el párrafo anterior con una sal disuelta provocando la estratificación. En cambio, con dos substancias disueltas no necesariamente se alcanza un estado estacionario pero se forman capas de fluído adyacentes a la frontera inclinada las cuales se extienden hacia el interior (Turner y Chen, 1974). Experimentos de laboratorio para un flujo turbulento en la vecindad de la frontera inclinada fueron realizados por Phillips et al. (1986) y Salmun y Phillips (1992). Un rasgo interesante de sus resultados consiste en la generación de una intrusión de fluído, desde la capa límite hacia el interior del mismo, en presencia de una picnoclina y de estratificación no uniforme.

El estudio de los flujos que se producen cerca de una frontera inclinada cuando la estratificación es estable ha seguido dos direcciones. La primera se concentra en investigar cómo la mezcla que se genera por turbulencia en fronteras no horizontales afecta la región interior, tanto en el océano (Garrett et al., 1993; MacCready y Rhines, 1993) como en lagos (Imberger e Ivey, 1993). La segunda, escasamente analizada, adiciona fronteras, algunas de ellas conductoras, para formar un recipiente cerrado en el cual se estudian celdas convectivas en diferentes ángulos de inclinación. Este trabajo se enfoca en la segunda dirección y generaliza los experimentos numéricos que inició Quon (1976).

Quon (1976) comparó, con resultados favorables, soluciones teóricas y numéricas para un tubo de sección transversal cuadrada, hermético y con fronteras aislantes opuestas. Sus soluciones muestran celdas convectivas y los parámetros que las determinan son el número de Prandtl (Pr), el número de Rayleigh (Ra) y el ángulo de inclinación (α). En particular, estudió soluciones con $Ra = 1.37 \times 10^7$, $Pr = 7.14$ y ángulos de inclinación de 0.1^o, 5.0^o, 45.0^o, 80.0^o y 90.0^o. Para tal valor de Ra, la velocidad de los flujos que se desarrollan en las capas lites es muy intensa.

El objetivo del presente trabajo es investigar la formación de celdas convectivas con forzamientos que, al omitir advección y con sólo difusión, producirían una estratificación estable. Las celdas que se analizan son bidimensionales (o rollos) sin componente de velocidad ni variación de las otras componentes a lo largo del tubo. Se obtienen soluciones, por medio de un modelo numérico, para Ra menores que los usados por Quon (1976) con la misma ordenación de paredes (Caso I) y además con paredes aislantes vecinas (Caso II). Asímismo, se muestran ejemplos que tipifican el comportamiento de los flujos para los otros casos posibles: una pared aislante y tres conductoras (Caso III) y viceversa, una pared conductora y tres aislantes (Caso IV). El modelo numérico fué proporcionado por Murli M. Gupta, investigador de la Universidad

George Washington, y resuelve la ecuación general de difusión-convección para un fluído viscoso e incompresible en condiciones estacionarias a través de un proceso iterativo de sobrerelajación sobre una celda cuadrada. El algoritmo fué originalmente desarrollado para un fluído con densidad homogénea (Gupta et al., 1984), y en el presente trabajo se generaliza al incluir densidad variable con difusión sobre una celda rectangular. Aparentemente, sólo el Caso I ha sido reportado en la literatura. Por último, en los Casos I y II se mapean resultados integrales o globales en el espacio de parámetros (α , Ra).

En el siguiente capítulo se establecen las ecuaciones a resolver y sus expresiones adimensionales. La solución numérica de las ecuaciones se comenta en el Capítulo III. Los cálculos basados en el algoritmo numérico para todos los casos ya descritos y los ejemplos clásicos de convección con estratificación inestable se ubican en el Capítulo IV. En los Capítulos V y VI se tratan las discusiones y conclusiones, respectivamente.

II. ECUACIONES Y CONDICIONES DE FRONTERA.

Las ecuaciones de movimiento en forma convectiva (no conservativa o advectiva) para un flujo prácticamente incompresible y viscoso son,

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho\mathbf{g} + \nabla\cdot(\mu\nabla\mathbf{u}) \qquad (1)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \kappa\nabla^2\rho \qquad (2)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \qquad (3)$$

donde ρ es la densidad del fluído, $\mathbf{u}$ es el vector velocidad, p la presión, $\mathbf{g}$ la aceleración de la gravedad, μ es el coeficiente dinámico de viscosidad, κ es el coeficiente de difusión térmica y t es el tiempo. Al considerar la ecuación de conservación de masa $\left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0\right]$, las ecuaciones (2) y (3) solo tendrían sentido si el campo de densidad fuese armónico, sin embargo, esto no es necesario pues (2) es la aproximación del comportamiento termodinámico y (3) es la aproximación de la ecuación de conservación de masa. El comportamiento termodinámico incluye la validez de la primera (conservación de energía interna) y de la segunda (conducción de calor) ley de la termodinámica, y de una ecuación de estado (linealización de la dependencia entre densidad y temperatura), todas ellas unidas en una aproximación tratada ampliamente en la literatura (v.gr. Pedlosky, 1987, Sec. 1.4; Landau y Lifshitz, 1989, Sec. 49; Gill, 1982, Sec. 4.4). A diferencia de la exhibición clásica de estas ecuaciones, la temperatura se expresa por su equivalente en términos de la densidad. Es importante resaltar que en (2), el término $\kappa\nabla\rho$ no implica un flujo difusivo de masa sino las variaciones de la densidad debidas a la conducción de calor. Por consiguiente, el sistema (1-3) representa una aproximación en donde las variaciones de densidad actúan dinámicamente por el término de flotabilidad en (1) pero su contribución en la ecuación de conservación de masa es insignificante frente al que término que incluye la divergencia del campo de velocidad.

El sistema (1-3) se modifica dividiendo la densidad y la presión en,

$$\rho = \rho_o \left[1 + \frac{\rho'(x,z)}{\rho_o} \right] \quad , \quad \rho_o = \text{cte.} \tag{4}$$

$$p = p_o(z) + p'(x,z) \tag{5}$$

donde ρ_o, y p_o definen un estado básico hidrostático en el cual,

$$\nabla p_o - \rho_o \mathbf{g} = 0 \tag{6}$$

y tanto ρ' como p' definen sus perturbaciones. Nótese que ρ' contiene parte del estado básico, esto es, una variación en la vertical de ρ y una perturbación debida, por ejemplo, a un flujo.

Al substituir (6) en (1) se obtiene,

$$\rho_o \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = - \nabla p' + \rho' \mathbf{g} + \nabla\cdot(\mu \nabla \mathbf{u}) \tag{7}$$

donde, además, se ha hecho la aproximación de Boussinesq pues se elimina el término $\rho' \dfrac{D\mathbf{u}}{Dt}$ frente al término $\rho_o \dfrac{D\mathbf{u}}{Dt}$, válido cuando $\dfrac{\rho'}{\rho_o} \ll 1$. Al evaluar el rotacional de (7), se encuentra que la ecuación de vorticidad es,

$$\rho_o \frac{D\zeta}{Dt} = \zeta\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla\times(\rho'\mathbf{g}) + \nabla\cdot(\mu\nabla\zeta) \tag{8}$$

en donde $\zeta \equiv \nabla\times\mathbf{u}$, μ es constante y en donde se utilizó (3). El término $\zeta\cdot\nabla\mathbf{u}$ representa una contribución debida al alargamiento e inclinación de líneas vorticales y desaparece en un flujo bidimensional pues el vector vorticidad $\zeta = (0,\zeta,0)$ permanece perpendicular a la velocidad, esto es, $\zeta = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}$ y $\mathbf{u} = (u,0,w)$. Es de esperar que el campo de vorticidad presente signo inverso al acostumbrado en Oceanografía porque se emplea $\zeta\,\hat{\mathbf{j}}$ en lugar de $\zeta\,\hat{\mathbf{k}}$, donde $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ son vectores unitarios en las direcciones respectivas a lo largo y a lo alto del tubo. El término $\nabla\times(\rho'\mathbf{g}) = \nabla\rho'\times\mathbf{g}$ es la aproximación del vector baroclínico $\left[\dfrac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho}\right]$ que es consistente con la aproximación de Boussinesq y representa la contribución "baroclínica" a la razón de cambio de vorticidad. Este término hace notar que el reposo sólo puede permanecer cuando el gradiente de ρ' es nulo o paralelo a la gravedad. Si el campo global de densidad es estable (con la densidad aumentando con la profundidad), una variación lateral de densidad provoca que las partículas de fluído al ascender o descender tiendan a una configuración sin variación lateral. Tal movimiento se debe a las fuerzas de flotabilidad y puede considerarse como un par alrededor de un eje horizontal. Entonces, (8) indica que las fuerzas viscosas (no conservativas) y la componente horizontal del gradiente de flotabilidad $\left[\dfrac{\rho'\mathbf{g}}{\rho_o}\right]$ generan vorticidad, en tanto que los términos advectivos expresan que el movimiento del fluído redistribuye la vorticidad de un lugar a otro.

Para un flujo bidimensional, estacionario y con ejes de referencia inclinados (Fig. 1) se tiene que la ecuación vectorial (8) se convierte en la ecuación escalar,

$$\nu\nabla^2\zeta - \left[u\,\frac{\partial\zeta}{\partial x} + w\,\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right] = \frac{g}{\rho_o}\left[\frac{\partial\rho'}{\partial z}\,sen\,\alpha - \frac{\partial\rho'}{\partial x}\cos\alpha\right] \tag{9}$$

donde $\nu = \dfrac{\mu}{\rho_o}$ es la viscosidad cinemática, pues las otras componentes del vector vorticidad son idénticamente nulas.

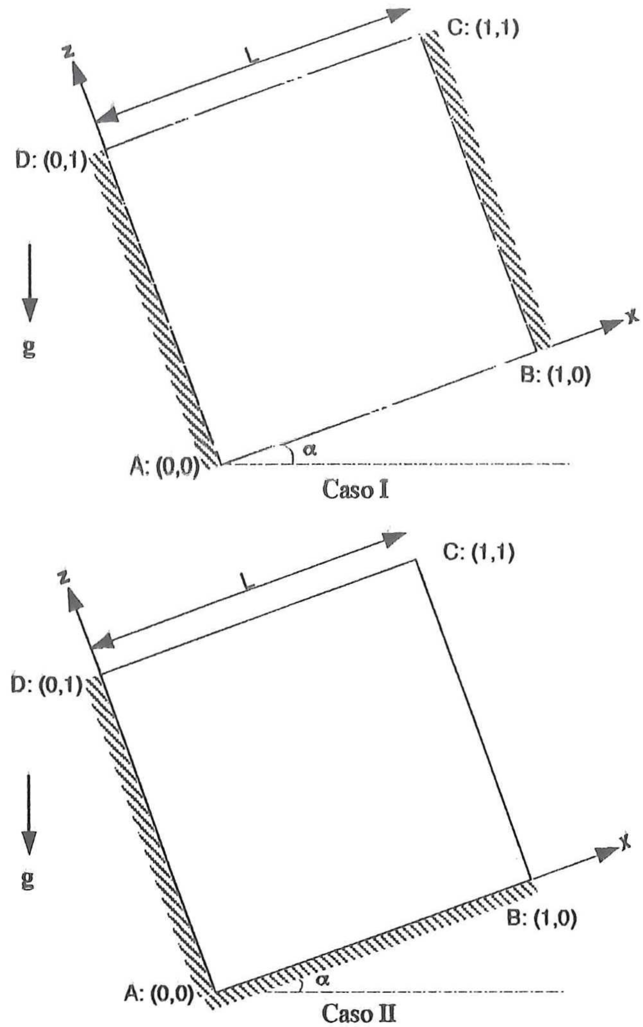


Fig. 1. Sistema de coordenadas y esquema del tubo de sección transversal cuadrada con fronteras aislantes (lados sombreados) y conductoras. La aceleración de la gravedad se indica por el vector g y el ángulo de inclinación por α. En esta figura $\alpha \approx 20.0°$.

Una adimensionalización de (9) se puede efectuar definiendo las nuevas variables: $\mathbf{u} \rightarrow \frac{L}{\kappa}\,\mathbf{u}$, $\zeta \rightarrow \frac{L^2}{\kappa}\,\zeta$, $\rho' \rightarrow \frac{1}{\Delta\rho}\,\rho'$, $x \rightarrow \frac{1}{L}\,x$ y $z \rightarrow \frac{1}{L}\,z$, en las cuales se ha evitado la distinción entre variables adimensionales y variables físicas, y donde L y $\Delta\rho$ son escalas de longitud y de variación de densidad respectivamente. La substitución de tales variables en (9) da,

$$\nabla^2\zeta - \frac{1}{Pr}\,(\mathbf{u}\cdot\nabla\zeta) = Ra\,\left[\frac{\partial\rho'}{\partial z}\, sen\ \alpha - \frac{\partial\rho'}{\partial x}\cos\alpha\right] \tag{10}$$

donde $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ es el número de Prandtl, $Ra = \frac{N^2L^4}{\kappa\nu}$ es el número de Rayleigh y $N^2 = \frac{g\,\Delta\rho}{\rho_o L}$ es el parámetro de estabilidad estática. En la definición de N^2 se utilizan diferencias finitas en vez de gradientes, de modo que $\Delta\rho > 0$ implica estratificación estable y $\Delta\rho < 0$ estratificación inestable. Turner (1981) ha empleado la convención precedente para el número de Richardson. Entonces, Ra es un calificativo global que involucra estratificación, difusión y viscosidad. Dado $Pr = 7.14$, correspondiente al agua, los únicos parámetros libres son Ra y α.

Una ecuación adimensional para la perturbación de la densidad se obtiene al sustituir (4) y las definiciones precedentes en (2). Para un flujo estacionario, ésto es

$$\nabla^2\rho' - \mathbf{u}\cdot\nabla\rho' = 0 \tag{11}$$

la cual indica un equilibrio entre difusión y advección de densidad. Nótese que la adimensionalización de la velocidad implica el equilibrio precedente.

Debido a (3) se puede utilizar la función corriente ψ tal que: $u = -\frac{\partial\psi}{\partial z}$ y $w = \frac{\partial\psi}{\partial x}$. Con lo anterior se puede expresar $\mathbf{u} = \nabla\times(\psi\hat{\mathbf{j}})$, donde $\hat{\mathbf{j}}$ es un vector unitario en la dirección hacia adentro de la sección transversal mostrada en la Fig. 1, y al considerar el rotacional de $\mathbf{u}$ se encuentra

$$\nabla^2\psi = -\,\zeta \tag{12}$$

la cual expresa la definición de vorticidad para un flujo bidimensional.

Definiendo la variable adimensional $\psi \rightarrow \frac{1}{\kappa}\psi$, la versión adimensional de (12) mantiene la misma forma. Notar que para introducir ψ, es requisito que el flujo sea no divergente o solenoidal, y es por ello que se puede reducir el número de variables y de ecuaciones en el sistema (1-3).

Cada una de las ecuaciones del sistema (10-12) es de tipo elíptico y para resolverlas se necesitan ciertas condiciones en la frontera como las del tipo Dirichlet (cuando la función esta prescrita) o del tipo Neumann (cuando sus derivadas normales a la frontera están establecidas) o una combinación de ambas en la frontera ∂D del dominio D de la función solución.

Las condiciones en la frontera surgen directamente, para ψ, de las condiciones físicas de impermeabilidad y no deslizamiento, y para ρ', de la imposición de valores en las fronteras conductoras y de ausencia de flujos a través de las fronteras aislantes. Para la velocidad o función corriente se emplea: $\psi = 0$ y $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ (la derivada de ψ a lo largo de la normal a la frontera), debido a las condiciones de frontera impermeable y de no deslizamiento ($u = w = 0$) sobre las cuatro paredes del recipiente. También se usa la condición del tipo Neumann $\frac{\partial \rho'}{\partial n} = 0$ sobre las paredes aislantes, pues la condición de frontera aislante implica que el flujo por conducción ($-\kappa\nabla\rho'$) no tenga componente en la dirección perpendicular a ésta.

Para ser explícito, se enumeran las condiciones en la frontera sobre la densidad en cada caso. Así, en el Caso I se tienen (Fig. 1),

$$\rho' = 1 - (x \ sen \ \alpha + z \cos \alpha) \qquad \text{sobre AB y CD}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0 \qquad \text{sobre AD y BC} \tag{13}$$

para el caso II (Fig. 1),

$$\rho' = 1 - (x \sin \alpha + z \cos \alpha) \qquad \text{sobre BC y CD}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \mathrm{n}} = 0 \qquad \text{sobre AD y AB} \tag{14}$$

para el Caso III (Fig. 2),

$$\rho' = 1 - (x \ sen \ \alpha + z \cos \alpha) \qquad \text{sobre AB, BC y AD}$$

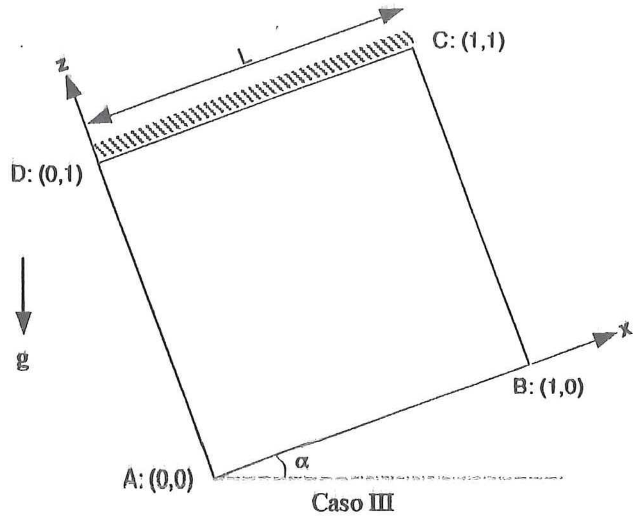
$$\frac{\partial \rho'}{\partial z} = 0 \qquad \text{sobre CD} \tag{15}$$

y, por último, para el Caso IV (Fig. 2) son,

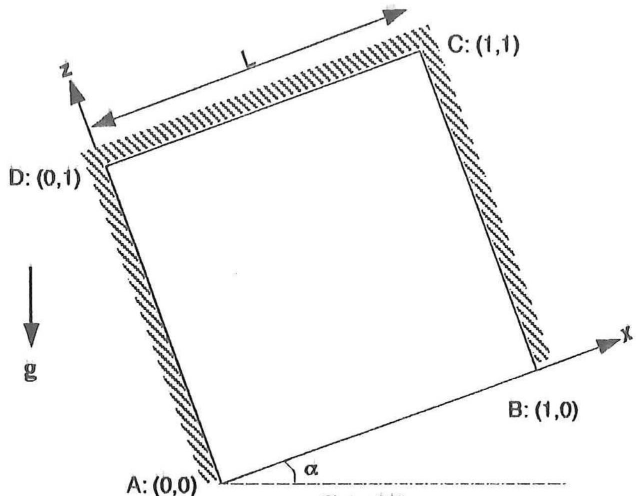
$$\rho' = 1 - (x \sin \alpha + z \cos \alpha) \qquad \text{sobre AB}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \mathrm{n}} = 0 \qquad \text{sobre AD, BC y CD} \tag{16}$$

Se debe hacer notar que, independientemente de la inclinación, sí las cuatro paredes fuesen rígidas, conductoras y se impusiera la condición de una función lineal y creciente en profundidad para la densidad, la única solución posible es el reposo hidrostático para $Ra > 0$ (implica $N^2 > 0$), es decir, el fluído adquiriría las características de la estratificación estable y uniforme. También, podría obtenerse convección con $Ra < 0$ una vez rebasado un valor crítico, en forma análoga al problema de convección de



Caso III



Caso IV

Fig. 2. Idem Fig. 1.

Rayleigh-Benard. En cambio, si el recipiente tuviese cuatro fronteras aislantes la solución correspondiente es la de un fluído homogéneo. Así, la imposición de fronteras aislantes y conductoras es el ingrediente esencial para la existencia de convección con $Ra > 0$. Es interesante mencionar que se ha dado poca atención a la convección en un fluído con estratificación estable ($Ra > 0$) si se incluyen paredes aislantes y conductoras, y por ello éste es el tópico a investigar en el presente trabajo.

III. ALGORITMO NUMERICO.

Consideremos la ecuación diferencial elíptica,

$$n(x,z)\,\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + o(x,z)\,\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + p(x,z)\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + q(x,z)\,\frac{\partial\phi}{\partial z} + r(x,z)\,\phi = f(x,z) \tag{17}$$

donde $\phi = \phi(x,z)$ es el campo a encontrar y $n = n(x,z)$, $o = o(x,z)$, $p = p(x,z)$, $q = q(x,z)$, $r = r(x,z)$ y $f = f(x,z)$ son funciones dadas. Las ecuaciones de Navier-Stokes, la ecuación de difusión-convección, la ecuación de Helmholtz y la ecuación de Poisson son casos particulares de (17). Por ejemplo, si $\phi = \psi$, $n = o = 1$, $p = q = r = 0$ y $f = -\zeta$ se tiene (12), pero, en el problema a resolver, ζ es una función a encontrar.

Gupta (1983) elaboró un algoritmo de cuarto orden de precisión para resolver (17) con $n = o = 1$ por sobrerelajación, mientras que Gupta et al. (1985) lo desarrollaron para la ecuación completa.

La ecuación de difusión-convección se obtiene haciendo $n = o = 1$ y $r = 0$, y dicha expresión es dada por

$$\nabla^2\phi + p(x,z)\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + q(x,z)\,\frac{\partial\phi}{\partial z} = f(x,z) \tag{18}$$

Para resolver el sistema (10-12) se utiliza un esquema compacto en diferencias finitas basado en la solución numérica de (18). Tal algoritmo fue obtenido por Gupta et al. (1984) y su adaptación a las ecuaciones de Navier-Stokes, escritas en el formalismo funcion corriente-vorticidad con el campo ρ totalmente nulo, fue hecha por Gupta (1991). El algoritmo se fundamenta en el desarrollo en series truncadas de potencias de (18), obteniéndose un conjunto de restricciones que dependen de los coeficientes de las series. El Apéndice A muestra la generalización del método de Gupta et al (1984) a una malla rectangular (Fig. 3).

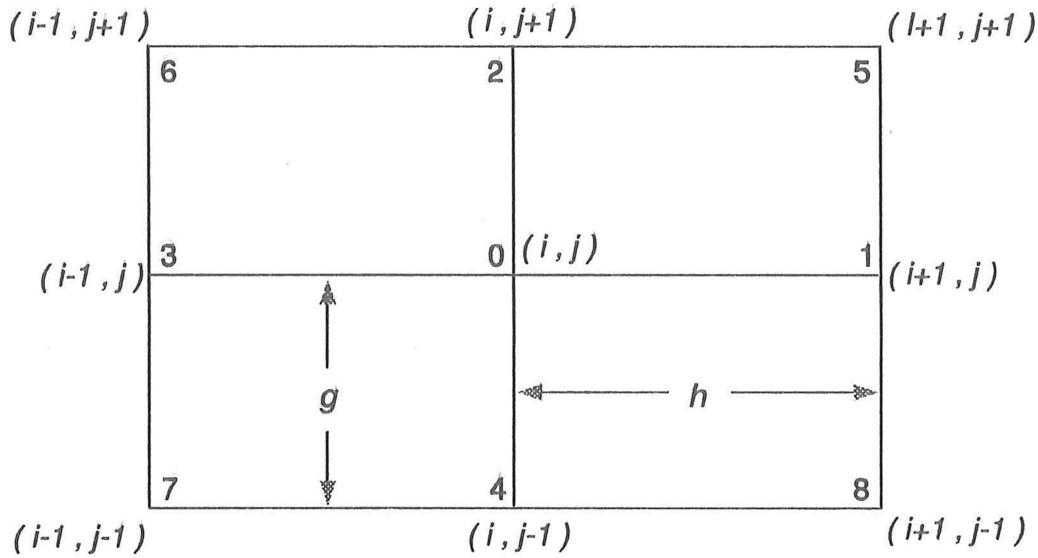


Fig. 3. Celda Computacional. Notar la correspondencia de índices de localización (i,j) con la notación de un solo índice (0-8).

El esquema de diferencias resultante satisface en forma local a (18), y para una celda cuadrada ($g = h$) es dado por,

$$\eta_0\phi_0 = \sum_{k=1}^{8} \eta_k\phi_k - b \tag{19}$$

donde,

$$\eta_0 = -\left[20 + h^2(p_0^2 + q_0^2) + h(p_1 - p_3) + h(q_2 - q_4) \right]$$

$$\eta_1 = 4 + \frac{h}{4}(4p_0 + 3p_1 + p_2 - p_3 + p_4) + \frac{h^2}{8}\left[4p_0^2 + p_0(p_1 - p_3) + q_0(p_2 - p_4) \right]$$

$$\eta_2 = 4 + \frac{h}{4}(4q_0 + q_1 + 3q_2 + q_3 - q_4) + \frac{h^2}{8}\left[4q_0^2 + p_0(q_1 - q_3) + q_0(q_2 - q_4) \right]$$

$$\eta_3 = 4 - \frac{h}{4}\,(4p_0 - p_1 + p_2 + 3p_3 + p_4) + \frac{h^2}{8}\left[\,4p_0^2 - p_0(p_1 - p_3) - q_0(p_2 - p_4)\right]$$

$$\eta_4 = 4 - \frac{h}{4}\,(4q_0 + q_1 - q_2 + q_3 + 3q_4) + \frac{h^2}{8}\left[\,4q_0^2 - p_0(q_1 - q_3) - q_0(q_2 - q_4)\right]$$

$$\eta_5 = 1 + \frac{h}{2}\,(p_0 + q_0) + c \tag{20}$$

$$\eta_6 = 1 - \frac{h}{2}\,(p_0 - q_0) - c$$

$$\eta_7 = 1 - \frac{h}{2}\,(p_0 + q_0) + c$$

$$\eta_8 = 1 + \frac{h}{2}\,(p_0 - q_0) - c$$

$$b = \frac{h^2}{2}\,(8f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4) + \frac{h^3}{4}\left[\,p_0(f_1 - f_3) + q_0(f_2 - f_4)\right]$$

$$c = \frac{h}{8}\,(q_1 + p_2 - q_3 - p_4) + \frac{h^2}{4}\,p_0 q_0$$

El algoritmo (19) junto a los términos (20) pueden interpretarse como una aproximación en diferencias de cuarto orden del método de los coeficientes indeterminados, en donde se utilizó una combinación lineal ponderada a nueve puntos discretos seleccionados "a priori" (Lapidus y Pinder, 1982). En esta forma, (19) indica como reelegir el valor de ϕ_0 en base a sus aledaños y se emplea, una y otra vez, en todos los nodos o vértices (i,j) interiores hasta que el proceso obtenga una buena aproximación numérica de un problema elíptico con condiciones en la frontera de Dirichlet.

Casos particulares del esquema (19) y (20) se usan para (10), (11) y (12). Por ejemplo, para la ecuación de Poisson se tiene

$$\eta_0 \psi_0 = \sum_{k=1}^{8} \eta_k \psi_k - b$$

con los siguientes coeficientes: $\eta_0 = 20$, $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 4$, $\eta_5 = \eta_6 = \eta_7 = \eta_8 = 1$, $b = -\dfrac{h^2}{2}\,(8\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4)$, y $c = 0$.

La solución de (18) se obtiene iterativamente por relajación sucesiva para que los errores en las estimaciones iniciales de ϕ disminuyan, o se relajen, en cada iteración subsiguiente. Para esto p, q y f son funciones ya establecidas.

El procedimiento inicia con alguna solución tentativa o aproximación inicial, la cual puede estar lejos de la solución final, que se mejora paso a paso ya sea con sobre o subrelajación. Tal mejoría depende de la facilidad o dificultad de converger a una "solución" y se efectúa hasta que la diferencia mayor en valor absoluto entre aproximaciones sucesivas sea menor que cierto parámetro de tolerancia. Tal parámetro lo escoge el usuario en base a la precisión deseada, del algoritmo numérico, de la computadora que se use, del tiempo disponible de CPU y de otras limitantes.

Entonces, cada iteración $n = 1,2,...$ se lleva a cabo en todos los puntos interiores i,j de una malla (x_i, z_j). La renovación de cada punto se da mediante (19) y una modificación extra de acuerdo a la siguiente fórmula

$$\phi^{(n)} = \delta\, \phi^{(n)} + (1 - \delta)\, \phi^{(n-1)} \tag{21}$$

donde δ és un parámetro de relajación o sobrerelajación. Un valor apropiado de δ se utiliza para lograr la convergencia del procedimiento iterativo o para acelerar la rapidez de convergencia (Gupta y Manohar, 1980). El campo $\phi^{(n)}$ es una solución sobrerelajada si $\delta > 1$ o relajada si $0 < \delta < 1$. El proceso de relajación (21) indica que, dada la solución tentativa $\phi^{(n-1)}$, se calcula $\delta\phi^{(n)}$ de (19), con lo cual la solución tentativa se reemplaza por $\phi^{(n)}$ en cada iteración n hasta que $\phi^{(n)}$ y $\phi^{(n-1)}$ cumplan el criterio de convergencia $\max_{i,j} \mid \phi^{(n)} - \phi^{(n-1)} \mid < \varepsilon$, obteniéndose la solución numérica aproximada de (18). Aquí el parámetro de tolerancia es $\varepsilon = 10^{-4}$. La falla del proceso o divergencia de las soluciones se considera cuando $\max_{i,j} \mid \phi^{(n)} - \phi^{(n-1)} \mid \geq 10^3$, en cuyo caso se detienen los cálculos.

Una consecuencia del caracter elíptico de (18) es que la solución depende unívocamente de las condiciones en la frontera. Si se establecen condiciones de Dirichlet, éstas permanecen desde la solución tentativa sin cambio alguno durante todo el proceso iterativo. Como los problemas particulares a resolver presentan las condiciones de frontera mixtas (13-16), se requiere renovar en la frontera algunos campos con un algoritmo diferente a (19). Para el Caso I, los valores tentativos de ρ' se cambian continuamente en las paredes AD y BC, en el Caso II sólo se renuevan en las paredes AB y AD, y en el Caso III solamente se modifican en la pared CD. Para el Caso IV, la única pared en donde no ocurren cambios es la AB. En cada iteración los valores tentativos de ζ se renuevan en todas las paredes y en todos los casos estudiados. En cambio, los valores de u, w, y ψ nunca se alteran en ninguna de las paredes del recipiente.

Si el problema fuese una sola ecuación del tipo (18) se podrían permitir iteraciones sucesivas hasta lograr la convergencia; ya que el sistema (10-12) está acoplado, parece apropiado limitar el número de iteraciones y formar lo que se llama el ciclo interior. Este ciclo consta de un máximo de 15 iteraciones y se aplica a cada una de las ecuaciones del sistema (10-12). La aproximación que se obtiene en el ciclo interior se vuelve a amortiguar una sola vez (interpolación lineal) con la solución tentativa por un proceso de relajación como el descrito por (21) en lo que se denomina ciclo exterior. Este procedimiento también se repite en cada uno de los tres campos ρ, ζ y ψ hasta que los tres cumplan con el criterio de convergencia.

Para el ciclo interior se encontró, por prueba y error, adecuado fijar $\delta = 0.9$ para ρ' y ψ, y para ζ un valor de 1.7 (Caso I) y de 1.9 (Caso II) para δ. Posteriormente, el factor de amortiguamiento de ζ para ambos casos se disminuye o se incrementa en función del número de iteraciones sin lograr convergencia y de los parámetros Ra y α. En el ciclo exterior, se fijó $\delta = 0.5$ para ψ y ζ, y $\delta = 0.6$ para ρ' en los casos I y II.

Una esquema simplificado o diagrama de flujo que resume el método iterativo que se emplea en la solución numérica del sistema (10-12) a través de (19) y (20) se muestra en la Fig. 4. Antes de empezar las iteraciones, se fijan los parámetros adimensionales que determinan las soluciones y las mallas en donde se inicializan todos los campos, lo cual implica establecer las condiciones en la frontera (13) y (14) para los Casos I y II, o las correspondientes para los Casos III y IV. Luego, se aproximan los campos u y w en el interior de sus mallas (ver la sección III.1) y los campos ρ' y ζ en las fronteras de las mallas respectivas (ver sección III.2). Hecho lo anterior, se procede a expresar (11) en la forma (18) con $p = -u(x,z)$, $q = -w(x,z)$ y $f = 0$ para resolver ρ' por medio de (19) y (20). Aquí es donde se usa la relajación sucesiva, primero con los ciclos interiores y después con el ciclo exterior. Una vez que se renueva ρ', se estiman sus derivadas en la malla interior (ver sección III.1) y en las fronteras con diferencias hacia adelante y hacia atrás de segundo orden. Al igual que en ρ', para resolver (10) es necesario expresarla en la forma (18). Esto se logra al efectuar las siguientes substituciones:

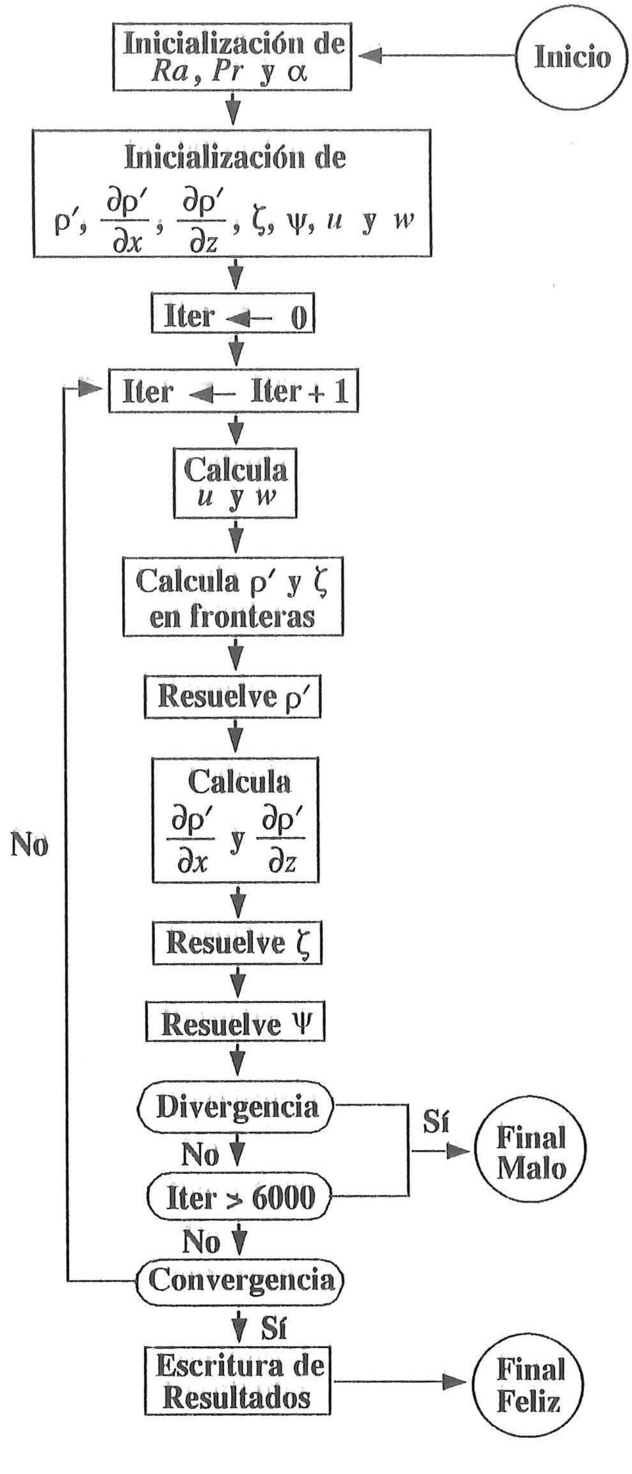


Fig. 4. Diagrama de flujo del método iterativo con que se resuelve el sistema (10-12).

$$p = -\frac{1}{Pr}\, u(x,z),\ q = -\frac{1}{Pr}\, w(x,z),\ \text{y}\ f = Ra\left[\frac{\partial \rho'}{\partial z}\, sen\ \alpha - \frac{\partial \rho'}{\partial x}\cos\alpha\right],$$ mientras

que para (12) sólo se substituye $p = q = 0$ y $f = -\zeta$. En cada uno de estos campos también se emplea relajación o sobrerelajación sucesiva en los ciclos interiores. El procedimiento finaliza sin llegar a resultados, si las soluciones divergen o si se excede cierto número de iteraciones; en caso contrario, se prueba el criterio de convergencia. Si no se cumple tal criterio se repite el proceso precedente hasta alcanzar convergencia, en cuyo caso se escriben resultados y el procedimiento termina.

III.1. Aproximaciones a las Derivadas.

Para calcular la solución numérica de $\phi(x,z)$ por medio de (19) y (20) se necesita conocer el término de forzamiento en (10) y los campos p y q en (10) y (11). En particular, se necesitan las derivadas de ρ' y, para el campo de velocidad, las derivadas de ψ. Ya que el algoritmo (19) es de cuarto orden de precisión, es conveniente estimar tales derivadas al mismo orden de precisión. Las estimaciones de las derivadas son un resultado extra del procedimiento con que se llega al algoritmo (19) y son consistentes, es decir, toman en cuenta la ecuación diferencial que cumple la función a derivar. Para una celda rectangular, las aproximaciones de cuarto orden para las derivadas de ρ' y ψ se muestran en al Apéndice B. En el caso de una celda cuadrada, dichas expresiones se reducen a

$$\left[\frac{\partial \rho'}{\partial x}\right]_0 = \left[\frac{1}{3h} + \frac{(u_3 - u_1)}{24}\right](\rho'_1 - \rho'_3) - \frac{1}{6}\, u_0(\rho'_1 + \rho'_3 - 2\rho'_0)$$
$$+ \frac{1}{24}(w_3 - w_1)(\rho'_2 - \rho'_4) - \frac{1}{24}\, w_0(\rho'_5 - \rho'_6 + \rho'_7 - \rho'_8)$$
$$+ \frac{1}{12h}(\rho'_5 - \rho'_6 - \rho'_7 + \rho'_8) + O(h^4) \tag{22}$$

$$\left[\frac{\partial \rho'}{\partial z}\right]_0 = \left[\frac{1}{3h} + \frac{(w_4 - w_2)}{24}\right](\rho'_2 - \rho'_4) - \frac{1}{6} w_0(\rho'_2 + \rho'_4 - 2\rho'_0)$$

$$+ \frac{1}{24}(u_4 - u_2)(\rho'_1 - \rho'_3) - \frac{1}{24} u_0(\rho'_5 - \rho'_6 + \rho'_7 - \rho'_8)$$

$$+ \frac{1}{12h}(\rho'_5 + \rho'_6 - \rho'_7 - \rho'_8) + O(h^4)$$

y,

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial x}\right]_0 = \frac{1}{3h}(\psi_1 - \psi_3) + \frac{1}{12h}(\psi_5 - \psi_6 - \psi_7 + \psi_8) + \frac{h}{12}(\zeta_1 - \zeta_3) + O(h^4)$$

$$\tag{23}$$

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial z}\right]_0 = \frac{1}{3h}(\psi_2 - \psi_4) + \frac{1}{12h}(\psi_5 + \psi_6 - \psi_7 - \psi_8) + \frac{h}{12}(\zeta_2 - \zeta_4) + O(h^4)$$

donde las expresiones (22) y (23) son casos particulares de las expresiones más generales desarrolladas por Gupta (1983).

III.2. Aplicación de Condiciones en la Frontera.

Una característica de la solución iterativa de sistemas elípticos es que las condiciones en la frontera determinan los flujos en el interior de la malla, así que es conveniente que estén bien especificadas. Un inconveniente que se origina para resolver las ecuaciones acopladas (10-12) es que no se conoce ζ en las fronteras. Por ello, es necesario aproximar ζ en la frontera durante cada paso iterativo mediante alguna fórmula. En el presente trabajo se utiliza una fórmula de segundo orden, conocida como fórmula de Jensen ó fórmula (2,1), que depende de los valores de ψ en la frontera y en dos puntos interiores. La fórmula de Jensen da resultados muy exactos, al menos para la ecuación biarmónica y para el formalismo función corriente-vorticidad con densidad homogénea, pero es costosa en términos del número de iteraciones que se requieren para converger (Gupta y Manohar, 1979). Dicha fórmula es dada por (Apéndice C),

$$\zeta_0 = -\frac{1}{h^2}\,(\,4\psi_1 - \frac{1}{2}\,\psi_2\,) \tag{24}$$

de acuerdo a los índices de localización que se muestran en la Fig. 5. En este sentido (12) determina ζ. Al igual que para ζ, en las fronteras aislantes también se necesita aproximar ρ' para calcular sus gradientes en el interior y en algunas de las fronteras de la malla. La fórmula de segundo orden que se usa es (Apéndice C),

$$\rho'_0 = \frac{2}{11}\,(\,4\rho'_1 - \frac{1}{2}\,\rho'_2 + \rho'_3 + \rho'_4\,) \tag{25}$$

En (24) se ha aplicado las condiciones de no deslizamiento y de frontera rígida e impermeable, y en (25), las condiciones de no deslizamiento y de frontera rígida y aislante.

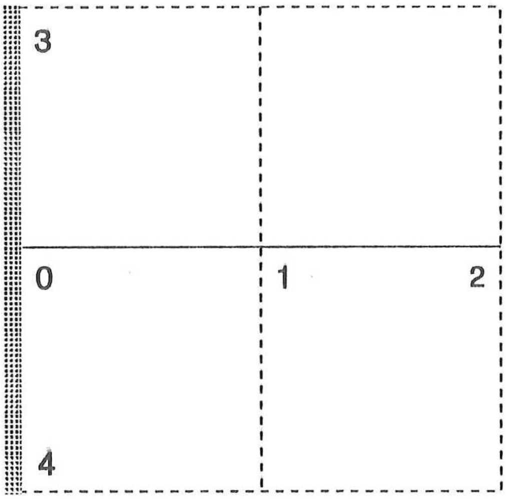


Fig. 5. Notación para cálculos en fronteras

Problemas adicionales surgen cuando se adjudican valores de ζ y ρ' en las esquinas del recipiente pues las expresiones (24) y (25) no se pueden utilizar. Como en los casos que se consideran las fronteras del recipiente son estacionarias o inmóviles, la vorticidad en las esquinas es nula y por ello no es necesario buscar algún tipo de aproximación. Cabe hacer notar que, por ejemplo, si la frontera CD se moviera con cierta velocidad uniforme entonces se tendría una discontinuidad en u, con lo cual $\frac{\partial u}{\partial z}$ quedaría indefinido y la vorticidad sería infinita en las esquinas C y D (puntos singulares). En las fronteras no conductoras de los Casos I y III, los valores de ρ' en las esquinas no se modifican, es decir, se quedan fijos los valores dados que resultan de aplicar la condición en la frontera sobre paredes conductoras. Esto mismo ocurre para los Casos II y IV, excepto en la unión de los dos fronteras aislantes donde se asigna a ρ' el valor del primer punto del interior. Por último, en los Casos I-IV se utilizan diferencias hacia adelante y hacia atrás de segundo orden para aproximar las derivadas de ρ', que no están determinadas como condiciones en la frontera, en todas las fronteras de las mallas respectivas.

IV. RESULTADOS.

Los cálculos numéricos para los Casos I y II que se presentan en este capítulo corresponden a una matriz (n = 42 , m = 42) y números de Rayleigh en el intervalo $5.0 \times 10^3 \leq Ra \leq 1.0 \times 10^5$ con un incremento de 5.0×10^3. Las inclinaciones del recipiente son variables, pues en el Caso I se efectuaron cálculos de 0.0° a 90.0° y en el Caso II entre – 50.0° y 50.0° respectivamente. En ambos casos se presentan contornos de los valores máximo y mínimo de ψ como una forma de caracterizar las soluciones numéricas. En los Casos III y IV se emplean las mismas dimensiones de la matriz precedente pero con $Ra = 1.0 \times 10^4$. Las inclinaciones que se utilizaron para el Caso III son: 0.0°, – 5.0°, – 45.0°, – 135.0°, – 175.0° y – 180.0° pues en $\alpha = -90.0°$ no se forman celdas. En el Caso IV se emplearon los siguientes ángulos: – 5.0°, – 45.0°, – 90.0°, – 135.0°, y – 175.0° porque las soluciones para $\alpha = 0.0°$ y $\alpha = -180.0°$ corresponden a un fluído homogéneo en reposo y por la simetría es innecesario calcular ángulos positivos. En todos los casos se consideró $Pr = 7.14$ para poder comparar con las soluciones obtenidas por Quon (1976). La Fig. 6 muestra un esquema de los casos investigados.

IV.1 Caso I.

En la interpretación de las soluciones hay que tener en mente que el estado básico es hidrostático. Entonces, isopícnas e isóbaras son paralelas en el recipiente hermético para $\alpha = 0.0°$ y por ello el vector $\nabla\times(\rho' g)$ es nulo. Al inclinar el recipiente se forman gradientes de densidad a lo largo de x (Pdenx) que rompen la estructura barotrópica del fluído y se produce movimiento porque un fluído con variaciones laterales de densidad no puede permanecer en reposo. Al considerar fronteras conductoras se están imponiendo

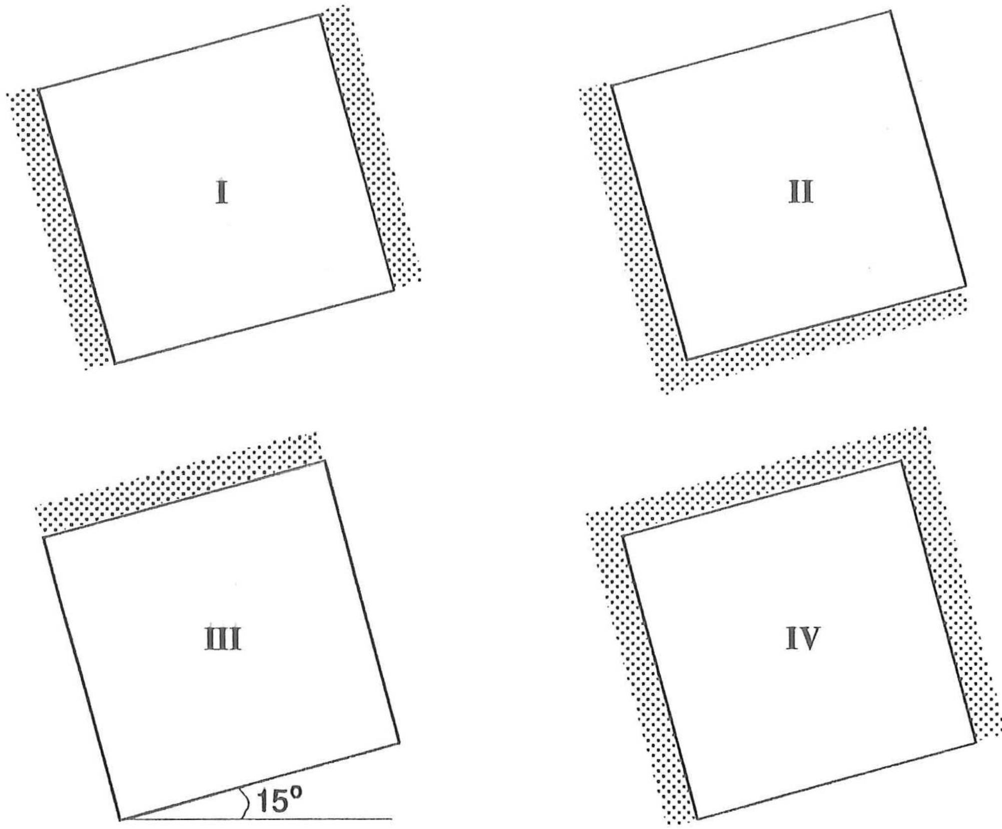


Fig. 6. Esquema de referencia de las cuatro combinaciones de paredes aislantes y conductoras estudiadas en este trabajo.

variaciones de densidad (temperatura) que también inducen cambios en el fluído.

Así por ejemplo en la Fig. 7 se puede apreciar que en $\alpha = 4.5^{o}$, la inclinación de las isopícnas respecto a la configuración horizontal que tendrían en el estado básico, forma zonas de fluído ligero y fluído pesado adyacentes a las fronteras aislantes AD y BC, respectivamente. Tal inclinación es prácticamente nula en el interior y sólo ocurre en la proximidad de las fronteras aislantes como consecuencia de la condición de no flujo a través de éstas. De aquí que las isopícnas deban ser localmente perpendiculares exactamente en las fronteras aislantes, con lo cual el flujo difusivo sólo puede ser paralelo a tales fronteras. En conjunción con la inclinación de isopícnas se tiene una

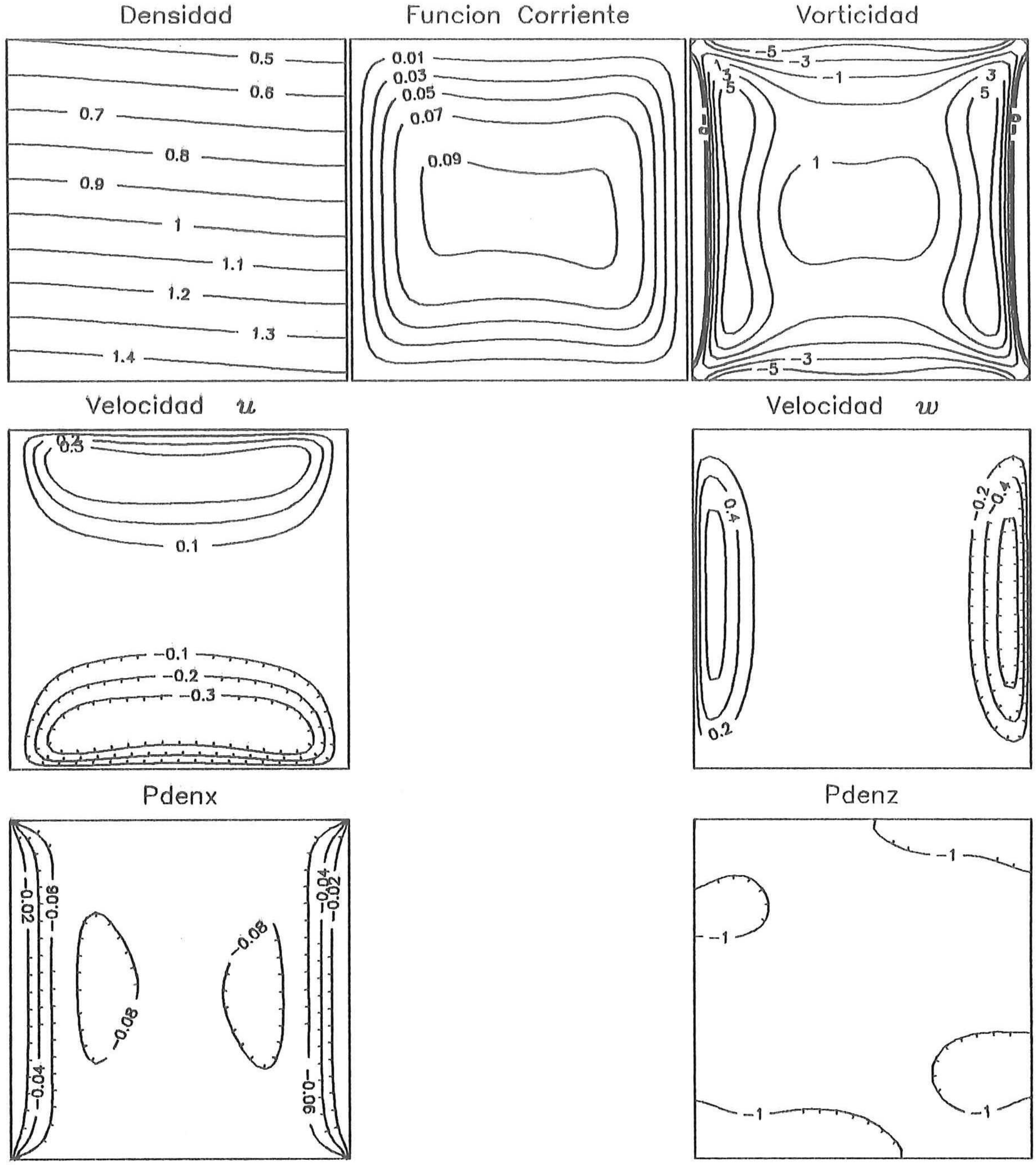


Fig. 7. Soluciones estacionarias para el Caso I con $\alpha = 4.5^{\circ}$ y Ra = 1.0 x 10^5, donde Pdenx = $\dfrac{\partial\rho'}{\partial x}$ y Pdenz = $\dfrac{\partial\rho'}{\partial z}$.

celda de convección que gira en el sentido de las manecillas del reloj (celda positiva) como lo muestran las líneas de corriente. El espaciamiento de éstas indica que el fluído se mueven más rápido a lo largo de las fronteras aislantes que sobre las fronteras conductoras, y que el fluído interior se encuentra prácticamente en reposo.

También, en la Fig. 7 y en las análogas subsecuentes, se ha escogido que la diferencia entre los valores de los contornos graficados de ψ sea constante y con ello el transporte de volumen entre cada contorno resulta constante. Los contornos cerrados de ψ indican que la circulación no es cero, esto es, el flujo no es irrotacional. Sin embargo, por ser soluciones estacionarias la circulación para cualquier contorno no varía en el tiempo. En la capa límite el movimiento de las partículas de fluído es contra el sentido de las manecillas del reloj (vorticidad negativa), mientras que en el interior del recipiente el giro local es en el sentido horario (vorticidad positiva). Nótese que tales signos son inversos respecto a la convención que generalmente se acostumbra en la Física del Océano. Los valores más altos de los contornos de vorticidad se encuentran en la capa límite adyacente a las fronteras aislantes, donde la rotación local de las partículas de fluído es más intensa que en las fronteras conductoras.

En muchas de las figuras se indica el ángulo de inclinación, pero se muestran las gráficas desde el marco de referencia rotado (x,z) como el presentado en las Figs. 2 y 3. En la mayoría de los casos, en particular para los mayores Ra usados, el lector se puede reorientar rápidamente inclinando la figura hasta observar las isopícnas del interior en posición horizontal.

A los 45.0° de inclinación, los gradientes de densidad a lo largo de z (Pdenz) ya no son tan uniformes y se concentran en la vecindad de las esquinas A y C del recipiente (Fig. 8), las cuales se definen en las Figs. 2 y 3. Lo anterior ocasiona que sólo en éstas esquinas el flujo siga las isopícnas y que el fluído interior tienda a separarse en dos

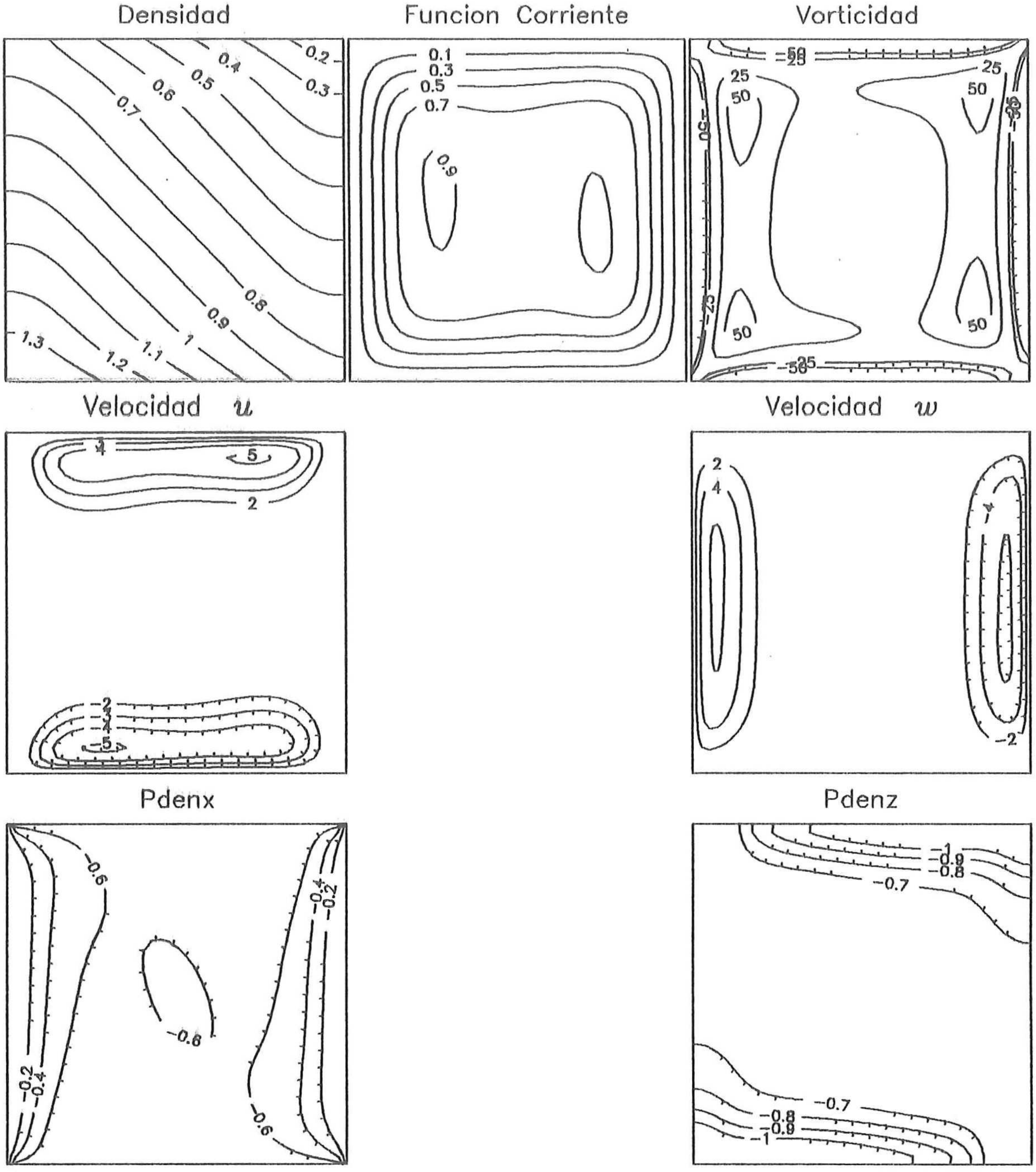


Fig. 8. Idem que Fig. 7, pero con $\alpha = 45.0°$.

dos celdas de circulación con el reloj. Nótese que en la Fig. 7 el flujo sigue aproximadamente las isopícnas a la largo de las fronteras conductoras.

Conforme el recipiente se sigue inclinando, el movimiento de la mayor parte del fluído no continúa en contra de la estratificación sino que tiende a fluir paralelamente a las isopicnas, en el interior y sobre las esquinas A y C. En la Fig. 9 las líneas de corriente delimitan cinco "celdas" de circulación, a saber: dos celdas con vorticidad negativa próximas a las esquinas B y D, y dos celdas interiores con vorticidad positiva inscritas en una celda orientada diagonalmente que se mueve en el sentido de las manecillas del reloj. Es claro que las partículas de fluído siguen trayectorias cerradas y además cambian su orientación en el espacio. Las dos "celdas" interiores están asociadas a la formación de Pdenx negativos a lo largo de las fronteras conductoras. En las esquinas B y D, los movimientos convectivos contra el reloj se deben al cambio de signo de Pdenz ocasionado por el curvamiento, hacia las fronteras conductoras, de las isopícnas interiores. Esto también induce cambios de signo en la vorticidad que se genera en tales esquinas.

A una mayor inclinación del recipiente, las dos celdas interiores (simétricas) se contraen en tamaño y se separan hacia sus esquinas próximas, mientras que las dos celdas con vorticidad negativa (antisimétricas) aumentan de tamaño, hasta que se forman cuatro celdas simétricas en $\alpha = 90.0^{o}$ (Fig. 10). Se puede observar que, en el interior del fluído, los gradientes de vorticidad más intensos coinciden con las esquinas en donde las líneas de corriente siguen el contorno de las isopícnas (Figs. 8-10).

Aunque para $\alpha = 67.5^{o}$ el campo de velocidad es relativamente intenso, el movimiento del fluído puede ser imperceptible. Si el fluído que contiene el recipiente es agua a una temperatura aproximada de 293.1 K (20.0 ^{o}C), entonces $\kappa = 1.41 \times 10^{-7}\ m^2\ s^{-1}$ y $\nu = 1.007 \times 10^{-6}\ m^2\ s^{-1}$. Para un recipiente con $L = 5.0 \times 10^{-2}$ m, las velocidades adimensionales $u = w = 8$ corresponden a

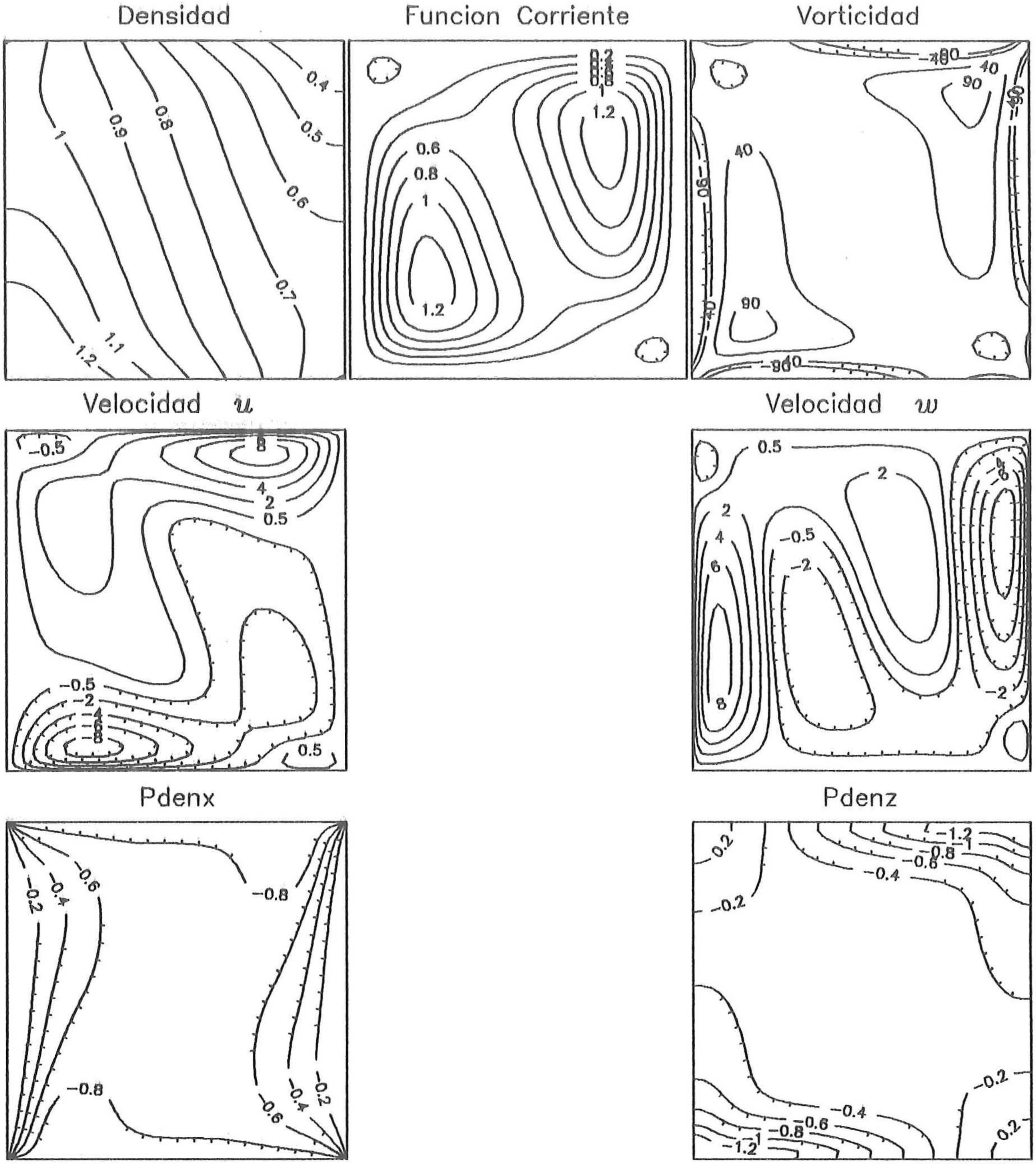


Fig. 9. Idem que Fig. 7, pero con $\alpha = 67.5^{o}$.

2.3×10^{-5} m s^{-1}. En estas condiciones el coeficiente de expansión térmica del agua es de 2.1×10^{-4} K^{-1} y, dado $Ra = 1.0 \times 10^{5}$ y $g = 9.8$ m s^{-2}, el incremento correspondiente de temperatura es de 5.5×10^{-2} K. El parámetro de estratificación

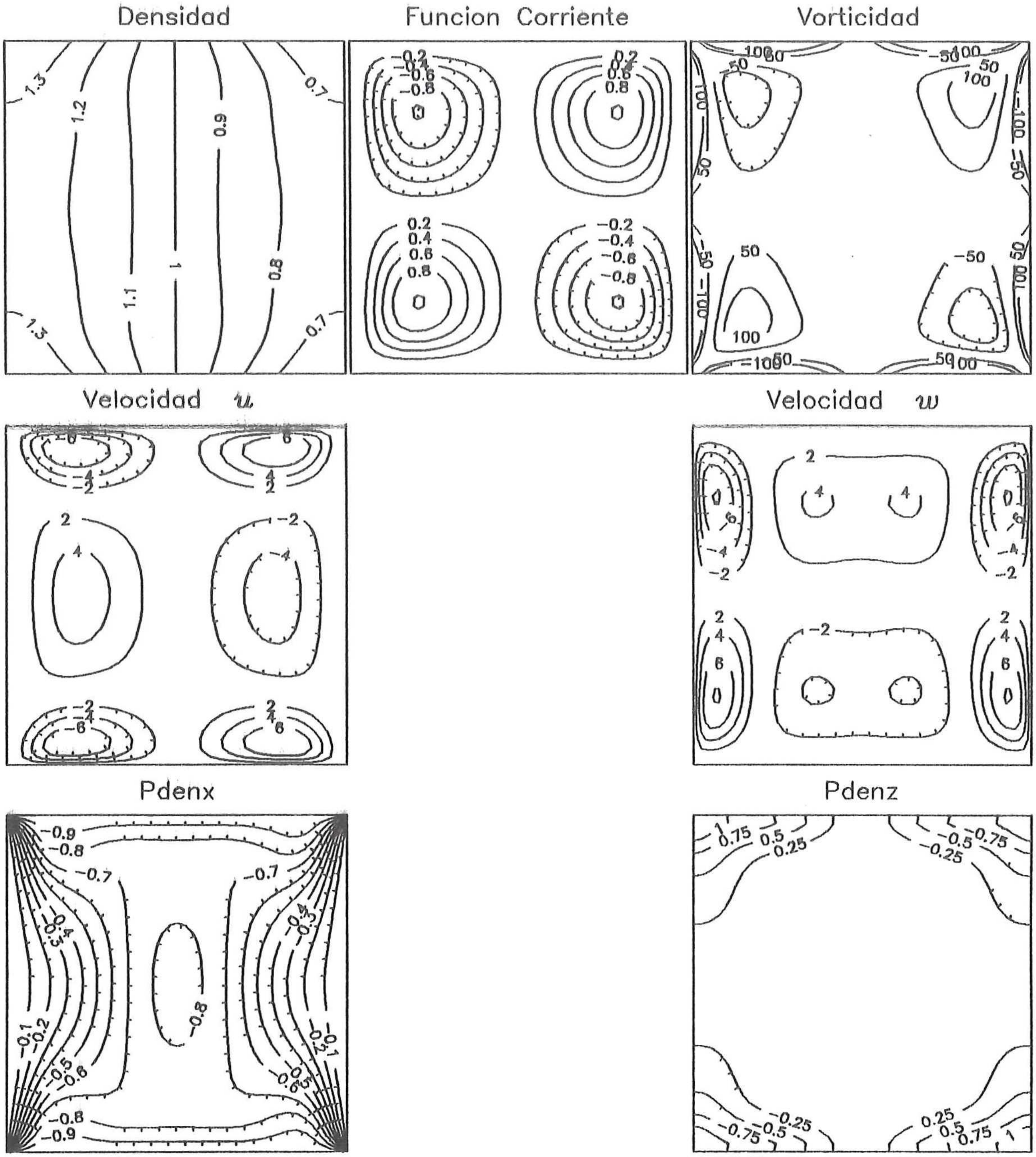


Fig. 10. Idem que Fig. 7, pero con $\alpha = 90.0^{o}$.

correspondiente es 2.3×10^{-3} s^{-2}. Para un incremento de temperatura de 10.0 K es necesario un Ra del orden de 10^{7}, en cuyo caso $N^{2} = 0.2$ s^{-2}. Tal Ra fué el que utilizó Quon (1976) y nótese que, al aumentar L, las velocidades dimensionales disminuyen.

La distribución de los mínimos y máximos de ψ como funciones de Ra y α se muestra en la Fig. 11. En la gráfica para ψ mínimo, se observa poca variación al aumentar Ra y, aproximadamente para $\alpha < 40.0^o$, la zona en blanco indica la inexistencia de celdas de circulación contra el reloj y con vorticidad negativa. En tales ángulos, la variación principal del máximo de ψ ocurre en $Ra < 2.0 \times 10^4$. También, puede notarse que el intervalo de ángulos que cubren los transportes de volumen máximo se estrecha conforme se incrementa Ra. En la Tabla I se muestran los valores del mínimo y máximo de ψ correspondientes a las Figs. 7-10.

A continuación, se evalúan ciertas integrales para mostrar, en el espacio de parámetros (Ra,α), cómo varían las contribuciones advectiva y difusiva del transporte de densidad y también para tener una idea del error involucrado. Ya que el fluído es incompresible, (11) se puede reescribir como:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \tag{26}$$

donde,

$$\mathbf{F} = \rho' \mathbf{u} - \nabla \rho' \tag{27}$$

es el vector flujo de densidad que consta de un término advectivo y de otro difusivo. Por el teorema de la divergencia, de (26) se encuentra que el transporte de densidad a través de una superficie cerrada S es nulo, esto es,

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \tag{28}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal a S y ds es un diferencial de S. Dado que el flujo es bidimensional el resultado anterior se traslada a simples integrales de contorno, y se denomina transporte al resultado de tales integrales. Estimaciones de F que no cumplan con (28) dan una idea del error de las soluciones numéricas. Debido a las condiciones en

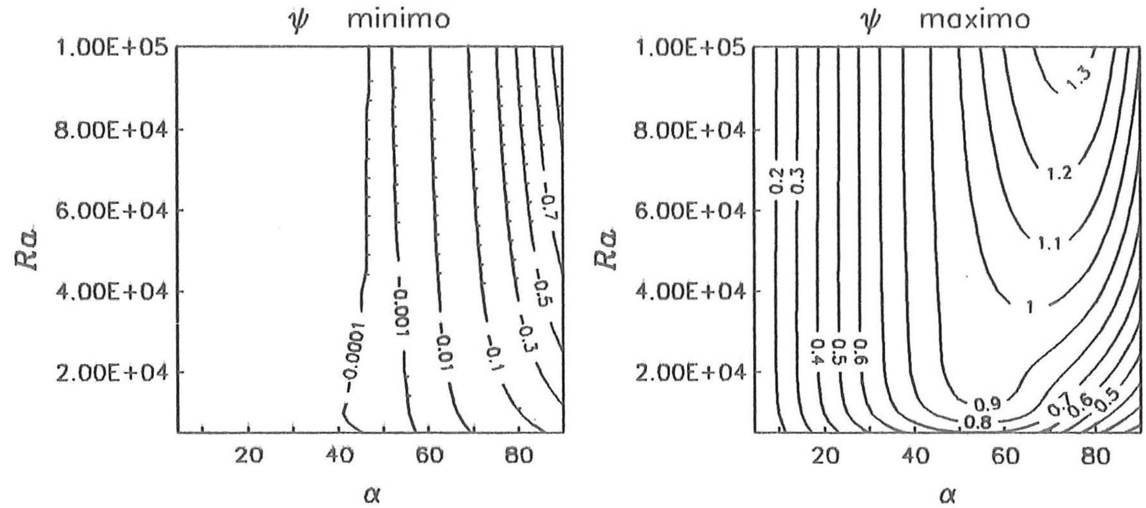


Fig. 11. Contornos de los valores mínimo y máximo de ψ para el Caso I.

la frontera de no deslizamiento y de no flujo, en las fronteras aislantes tanto los transportes de densidad advectivos como los transportes de densidad difusivos son nulos, mientras que en las fronteras conductoras sólo los transportes de densidad difusivos no lo son. Es importante resaltar que para los propósitos del presente trabajo la denominación del transporte de densidad es respecto a la perturbación de la densidad ρ' y no respecto a la densidad total dada por (4).

Consideremos la mitad superior del recipiente hermético definida por las esquinas $\frac{AD}{2}$ y $\frac{BC}{2}$, localizadas a una altura con índice correspondiente de $\frac{m}{2}$, y las esquinas C y D situadas a una altura con índice m. Las contribuciones de (28) se calculan a lo largo del segmento $\frac{AD}{2}\frac{BC}{2}$ y sobre la frontera conductora CD (Fig. 12). De hecho, la integral de contorno, desde un punto cualquiera en una frontera aislante hasta otro punto cualquiera situado en la otra frontera aislante, deber ser la misma independientemente del contorno seleccionado, no siendo así para las contribuciones advectiva y difusiva pues dependen de los puntos y contornos escogidos. A una altura $\frac{m}{2}$, el transporte de

Tabla I. Valores de la inclinación del recipiente, del mínimo y máximo de ψ, y número de celdas correspondientes al Caso I.

α (°)	ψ_{min}	ψ_{max}	No. de Celdas Antihorarias	Horarias
4.5	0.0000	0.0931	-	1
45.0	0.0000	0.9186	-	1
67.5	-0.0704	1.3102	2	2
90.0	-1.0072	1.0072	2	2

densidad es dominantemente difusivo y varía poco al aumentar Ra, pero en el intervalo $Ra < 2.0 \times 10^4$ el transporte se incrementa a medida que Ra tiende a cero. El transporte de densidad advectivo presenta los valores máximos entre $\alpha = 50.0°$ y $\alpha = 70.0°$, aproximadamente. En el segmento $\frac{AD}{2}\frac{BC}{2}$, el transporte de densidad es totalmente difusivo para $\alpha = 4.5°$, es principalmente difusivo en $\alpha = 45.0°$, dominantemente advectivo en $\alpha = 67.5°$ y para $\alpha = 90.0°$, por simetría, ambos transportes son nulos. La integral de contorno es la diferencia entre el transporte de densidad total en $\frac{m}{2}$ y el transporte de densidad total en m, e indica que las mayores diferencias ocurren aproximadamente entre $4.0 \times 10^4 < Ra \leq 1.0 \times 10^5$ y $40.0° \leq \alpha \leq 80.0°$. Una medida del error asociado a los cálculos numéricos es el valor absoluto de la integral de contorno (que debiera ser nula) dividida por el transporte total en $\frac{m}{2}$, y muestra en general, valores menores del 1.0 % para $\alpha \leq 50.0°$.

Para finalizar esta sección sólo resta mencionar el problema de unicidad y resultados anexos al problema clásico de convección, con "calentamiento" en la frontera inferior AB ($N^2 < 0$). Recordemos que las condiciones en la frontera son sobre ψ, $\frac{\partial\psi}{\partial n}$, ρ' y

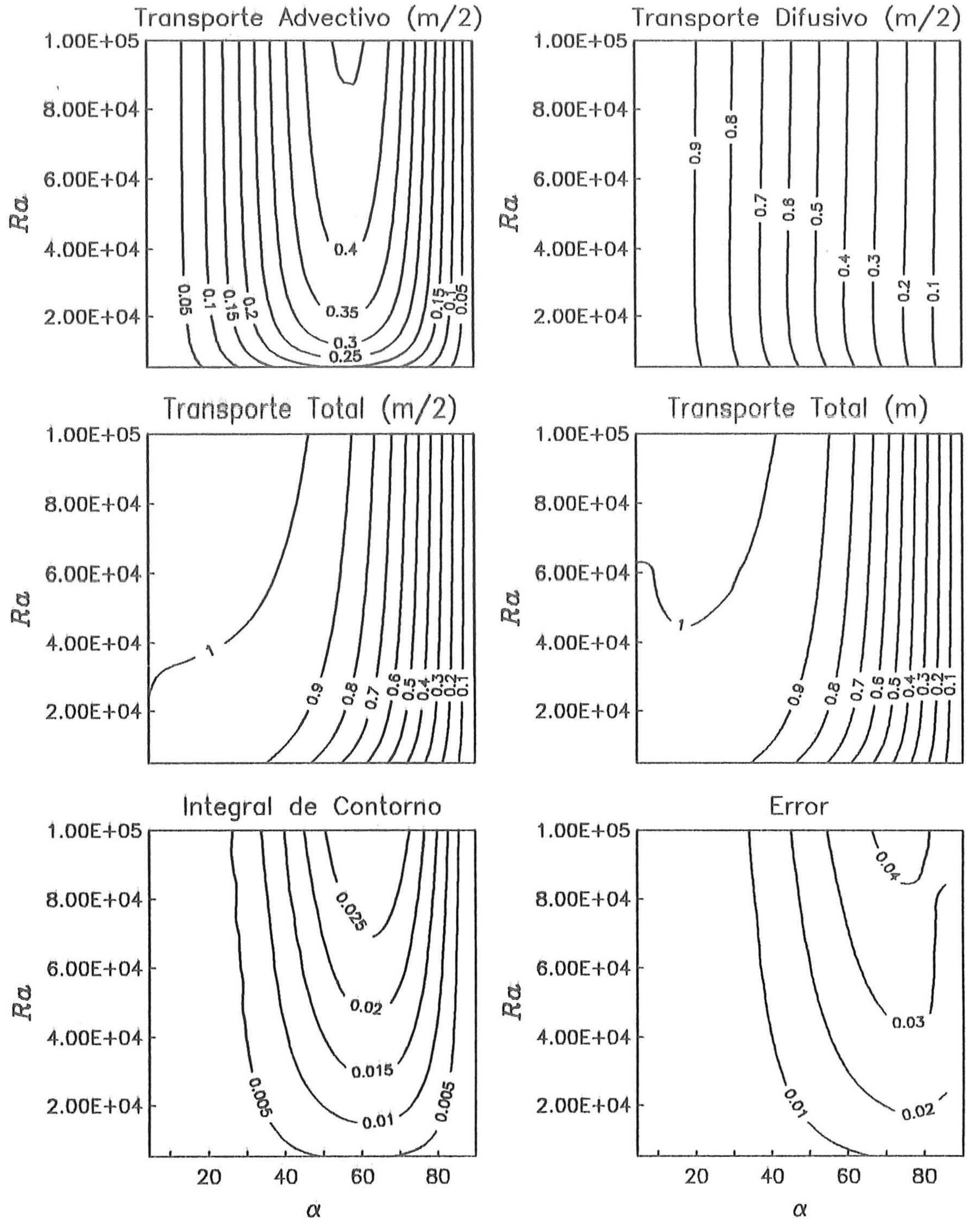


Fig. 12. Transportes de densidad y error asociado a los cálculos numéricos sobre las fronteras de la mitad superior del recipiente hermético para el Caso I.

$\frac{\partial \rho'}{\partial n}$. En el caso homogéneo ($Ra$ = 0 y sólo las ecuaciones 10 y 12), con ζ prescrita y las condiciones en la frontera sobre ∂D: ψ = constante y $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$, donde n indica un vector normal a ∂D, la unicidad de la solución queda determinada (Chorin y Marsden, 1990). Sin embargo, como en el sistema (10-12) no hay condiciones de frontera explícitas para ζ, y el algoritmo numérico requiere de tales, los valores de ζ en la frontera misma se evalúan de (12). Adicionalmente, también se necesita aproximar la densidad en las fronteras aislantes de (11). Lo anterior sugiere la posibilidad de buscar soluciones diferentes que cumplan con las mismas condiciones de frontera enunciadas en (13), esto es, que las aproximaciones numéricas de ζ y ρ' se ajusten a valores diferentes dependiendo de cual sea la aproximación tentativa inicial o que simetrías se impongan a la solución. La Fig. 13 muestra evidencia de la no unicidad de las soluciones, para $|Ra| = 3.0 \times 10^4$ y $\alpha = 0.0^o$ pero con $N^2 < 0$, mediante soluciones con una o más celdas de circulación que cumplen con (13), o sea, las mismas condiciones en la frontera. En la Fig. 13, si la densidad se inicializa con ceros o con un campo correspondiente a la estratificación estable, las soluciones que se obtienen son, respectivamente, dos celdas elongadas a lo largo de las fronteras aislantes y una sola celda de circulación. En cambio, si en cada iteración se obliga al campo de densidad a repetirse, por ejemplo, en la mitad inferior del recipiente (condiciones de simetría), la solución final son cuatro celdas. Si además de lo anterior se establecen condiciones de simetría para la función corriente en cada iteración, se obtienen, dos celdas elongadas a lo largo de las fronteras conductoras. Por prueba y error se encontró que aproximadamente para $|Ra| < 2.0 \times 10^3$ no se forma ninguna celda (no hay convección), para $2.0 \times 10^3 < |Ra| < 6.5 \times 10^3$ sólo se desarrolla una celda y para $6.5 \times 10^3 < |Ra|$ se pueden formar una o dos celdas. En este caso el Ra crítico para convección libre con $N^2 < 0$ y $\alpha = 0.0^o$ (aproximadamente de 2000) es mayor que el teórico sin paredes laterales ($Ra_c = \frac{27\pi^4}{4} \approx 657.5$, v.gr. Stern, 1975) precisamente

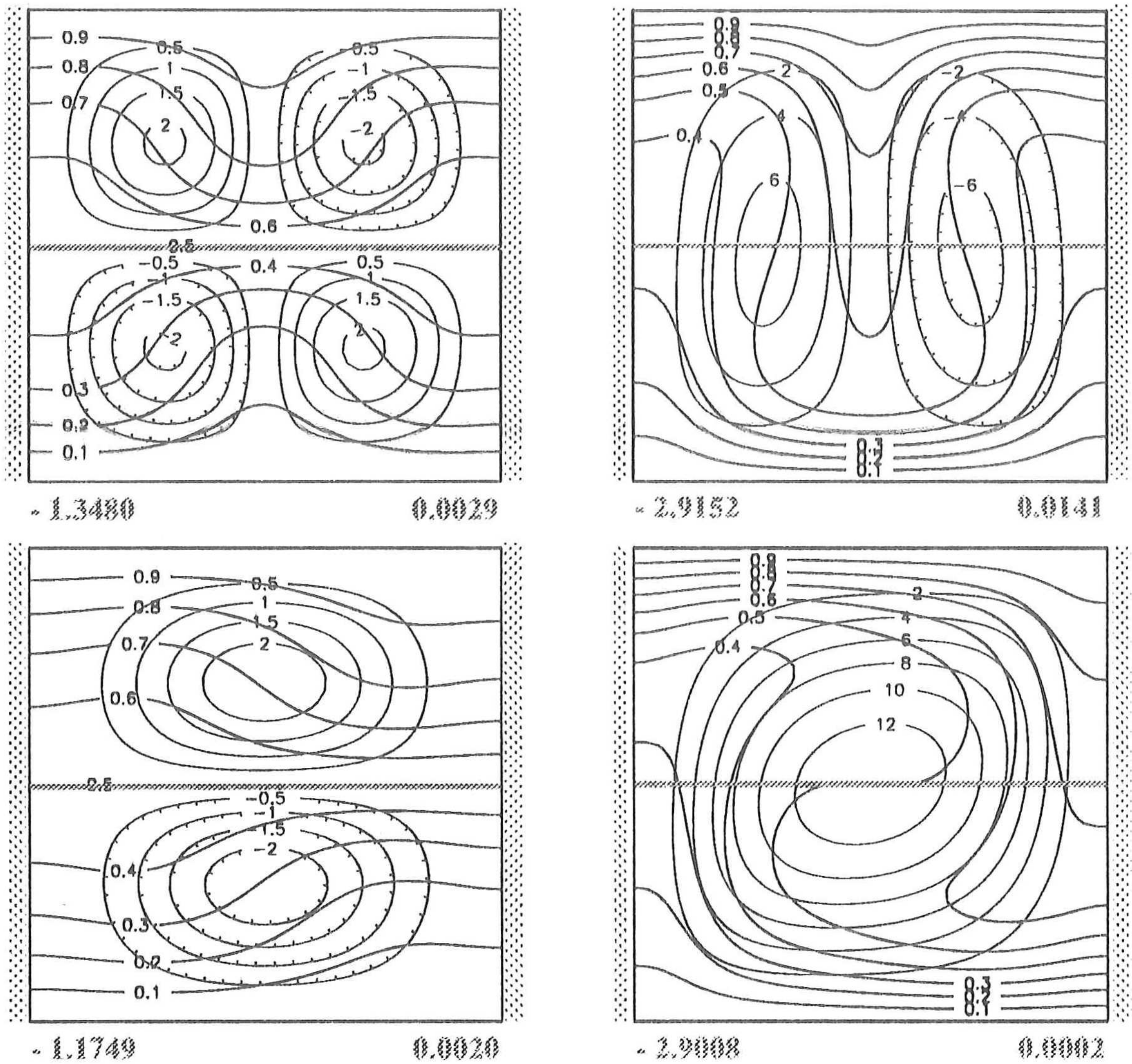


Fig. 13. Soluciones estacionarias que muestran evidencia de la no unicidad de las soluciones para el Caso I con $|Ra| = 3.0 \times 10^4$ y $\alpha = 0.0^o$, pero con $N^2 < 0.0$. Los números en la base del recipiente indican, respectivamente, el transporte de densidad en la mitad del mismo y el error que resulta de estimar (28). Las isopícnas se indican en color azul y las líneas de corriente en color rojo.

porque las paredes laterales inhiben más la advección por la condición de no deslizamiento.

IV.2 Caso II.

A diferencia del Caso I, en $\alpha = 0.0^{o}$ el fluído no puede estar en reposo pues al ajustarse las isopícnas a las condiciones en la frontera (14), se forman Pdenx no nulos (Fig. 14). El curvamiento de las isopícnas adyacentes a la frontera aislante AB da lugar a una zona de fluído más ligero en la proximidad de A que a la misma altura en la proximidad de B. Lo anterior produce movimientos ascendentes y descendentes en las vecindades de A y B, respectivamente, que forman una celda de circulación con el reloj (positiva). La separación de los contornos de corriente indica que el flujo es más rápido a lo largo del trayecto CBA que en el trayecto ADC. Debido a los flujos tangenciales que se desarrollan, la celda de circulación presenta vorticidad negativa (contra el reloj) en la capa límite y vorticidad positiva (con el reloj) en el interior del recipiente. Observar que a lo largo de la frontera conductora CD, el gradiente de densidad se encuentra casi en la misma dirección que la gravedad y el fluído permanece prácticamente estático. La imagen especular de la Fig. 14 ocurre en $\alpha = 90.0^{o}$ y en $\alpha = -90.0^{o}$. En tal situación las soluciones numéricas tienen las mismas características que las soluciones en $\alpha = 0.0^{o}$, sólo que los signos son inversos y por ello la celda de circulación es contra el reloj (negativa). Asimismo, la solución en $\alpha = 180.0^{o}$ es la misma de la Fig. 14.

La continua inclinación del recipiente ocasiona modificaciones notorias en los campos solución. La pendiente de las isopícnas disminuye, la celda de circulación se va elongando diagonalmente hacia la esquina D, las isolíneas de Pdenz, con signo negativo, se van alejando de la frontera conductora AD y el campo de velocidad aumenta su intensidad. Además, el curvamiento de las isopícnas hacia las fronteras conductoras provoca cambios de signo en los gradientes de densidad y el flujo tiende a seguir las

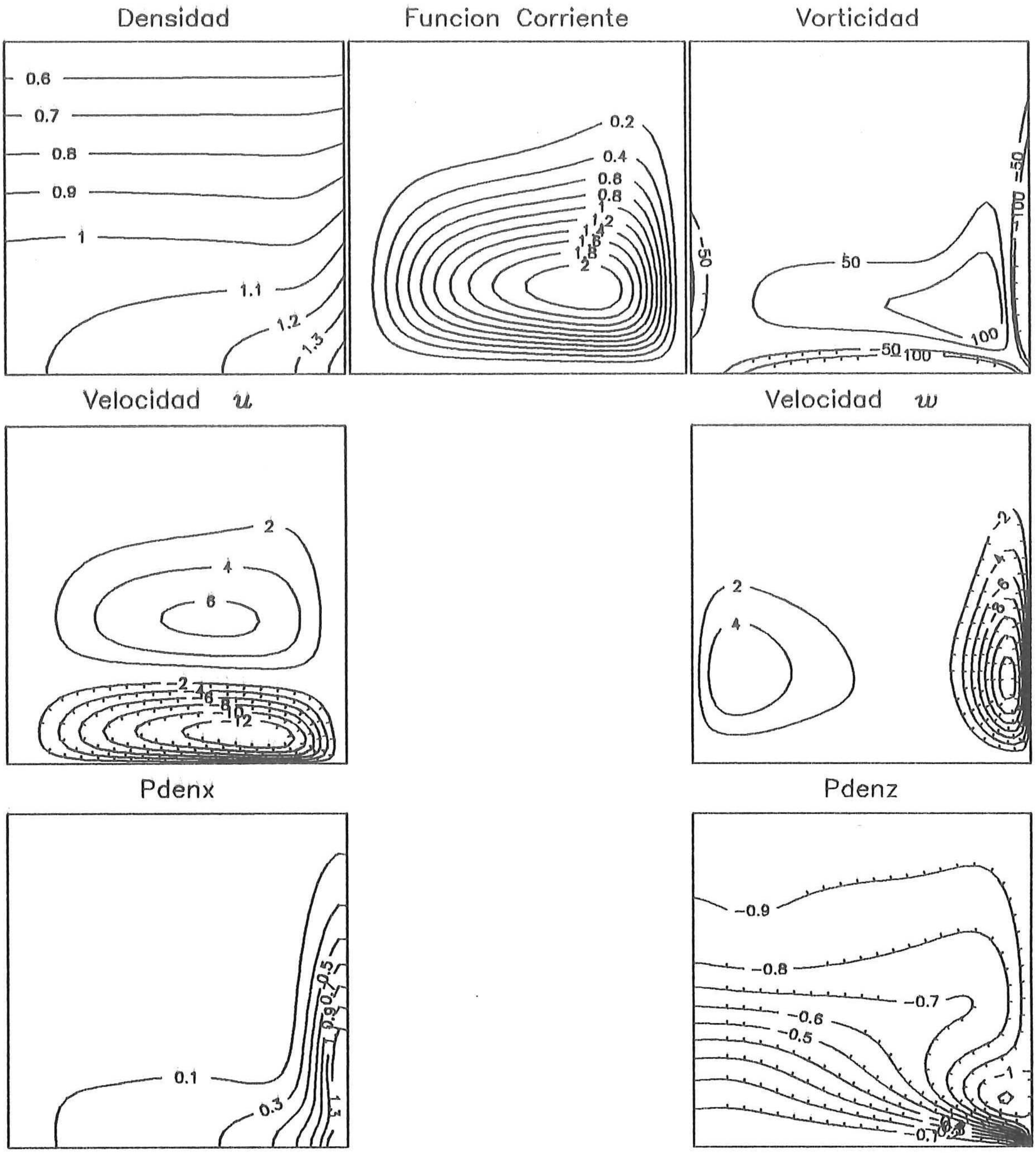


Fig. 14. Soluciones estacionarias para el Caso II con $\alpha = 0.0^o$ y $Ra = 1.0 \times 10^5$, donde Pdenx y Pdenz se definen en la Fig. 7.

isopícnas donde la celda convectiva da vuelta (esquina B). El fluído cuasiestático que en $\alpha = 0.0^o$ se encuentra en la vecindad de CD, deja de serlo al inclinar el recipiente porque el gradiente de densidad ya no es paralelo a la dirección de la gravedad, produciéndose un flujo hacia la esquina D. Así, los gradientes Pdenx < 0 a lo largo de CD y Pdenz > 0 en la esquina D inducen una celda de circulación contra el reloj con vorticidad negativa. Tal celda es muy incipiente en medio de la frontera CD desde $\alpha = 0.0^{o}$, es visible hasta aproximadamente $\alpha = 10.0^{o}$, y luego se traslada hacia la esquina D. El campo de velocidad y el transporte de volumen alcanzan valores máximos en $\alpha = 30.0^{o}$, y en $\alpha = 35.0^{o}$ éste último va disminuyendo (Fig. 15). Para un recipiente lleno de agua a temperatura ambiente con $L = 5.0 \times 10^{-2}$ m, la velocidad del flujo $u = w = 18$ es de 5.1×10^{-5} m s^{-1} para $Ra = 1.0 \times 10^{5}$ y el incremento correspondiente de temperatura es de 5.5×10^{-2} K.

En $\alpha = 45.0^{o}$ la solución es simétrica y las dos celdas convectivas son del mismo tamaño (Fig. 16). Nótese que los flujos tangenciales en la cercanía de la esquina D ocasionan que en la capa límite las partículas de fluído presenten vorticidad positiva. Entonces, las gráficas de las componentes de la velocidad (Fig. 16) indican que las partículas de fluído siguen trayectorias rectas a lo largo de una porción de las fronteras del recipiente, y la gráfica de vorticidad (Fig. 16) muestra que, además, van cambiando su orientación en el espacio en tal trayectoria.

Cuando $\alpha < 0.0^{o}$, las isopícnas incrementan su pendiente respecto a las isopícnas en $\alpha = 0.0^{o}$ (Fig. 14) y el movimiento del fluído es distinto al flujo que describen las soluciones anteriores. En la esquina D, la celda de circulación negativa es visible débilmente desde $\alpha = -5.0^{o}$, posición donde aproximadamente el campo de velocidad y el transporte de volumen presentan valores máximos. Estos son menores a la velocidad y al transporte de volumen para $\alpha > 0.0^{o}$. En $\alpha = -15.0^{o}$ tal celda es bien evidente (Fig. 17). En este caso, la celda con el reloj muestra que el gradiente de vorticidad positivo es intenso en la esquina B, sitio donde ψ y ρ' siguen el mismo trayecto.

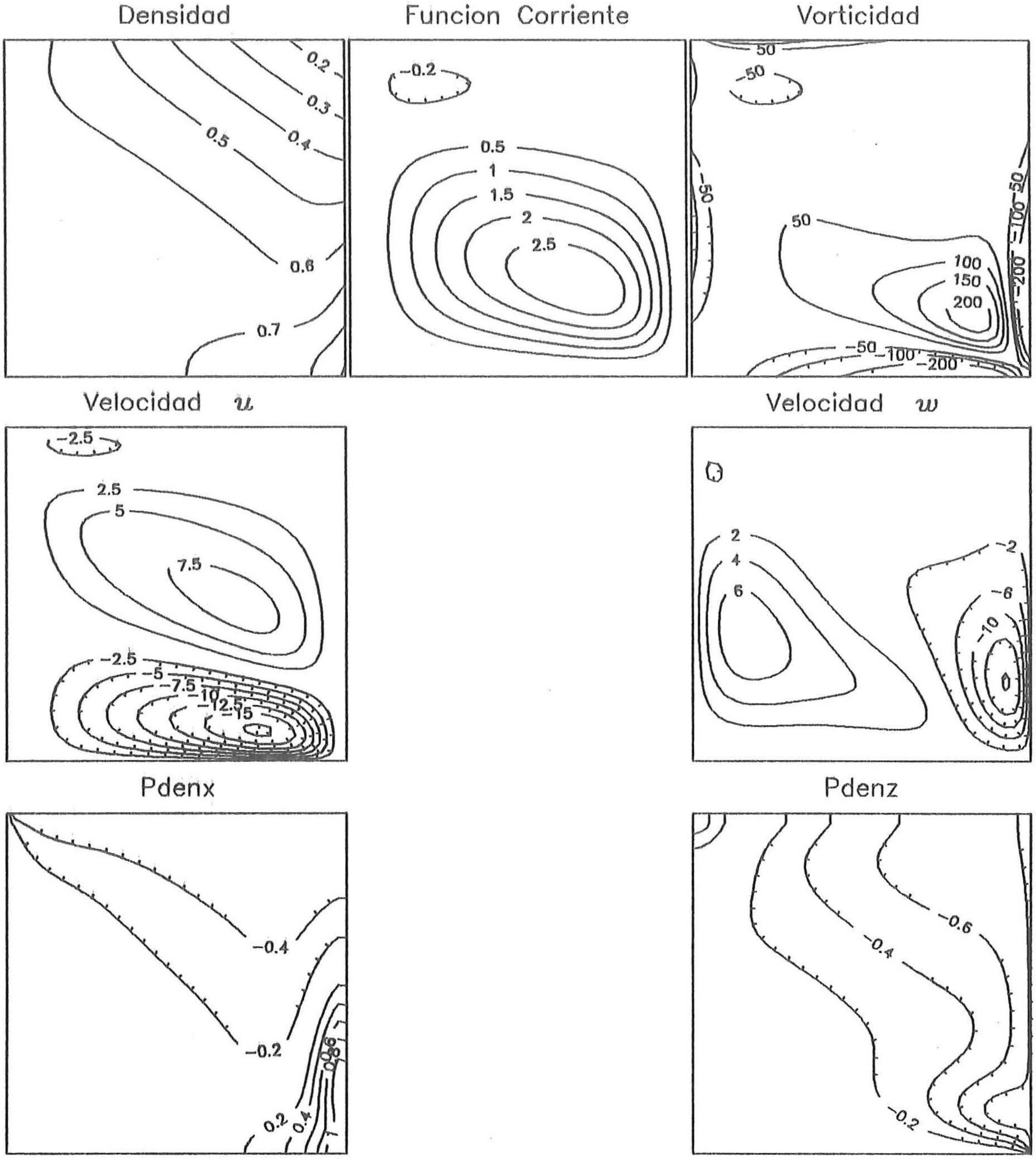


Fig. 15. Idem que Fig. 14, pero con $\alpha = 35.0°$.

Al seguir inclinando el recipiente, los contornos de Pdenz se extienden hacia el interior del recipiente desde la esquina D. También, los transportes de volumen y la velocidad de la celda de circulación positiva (horaria) disminuyen, mientras que la celda

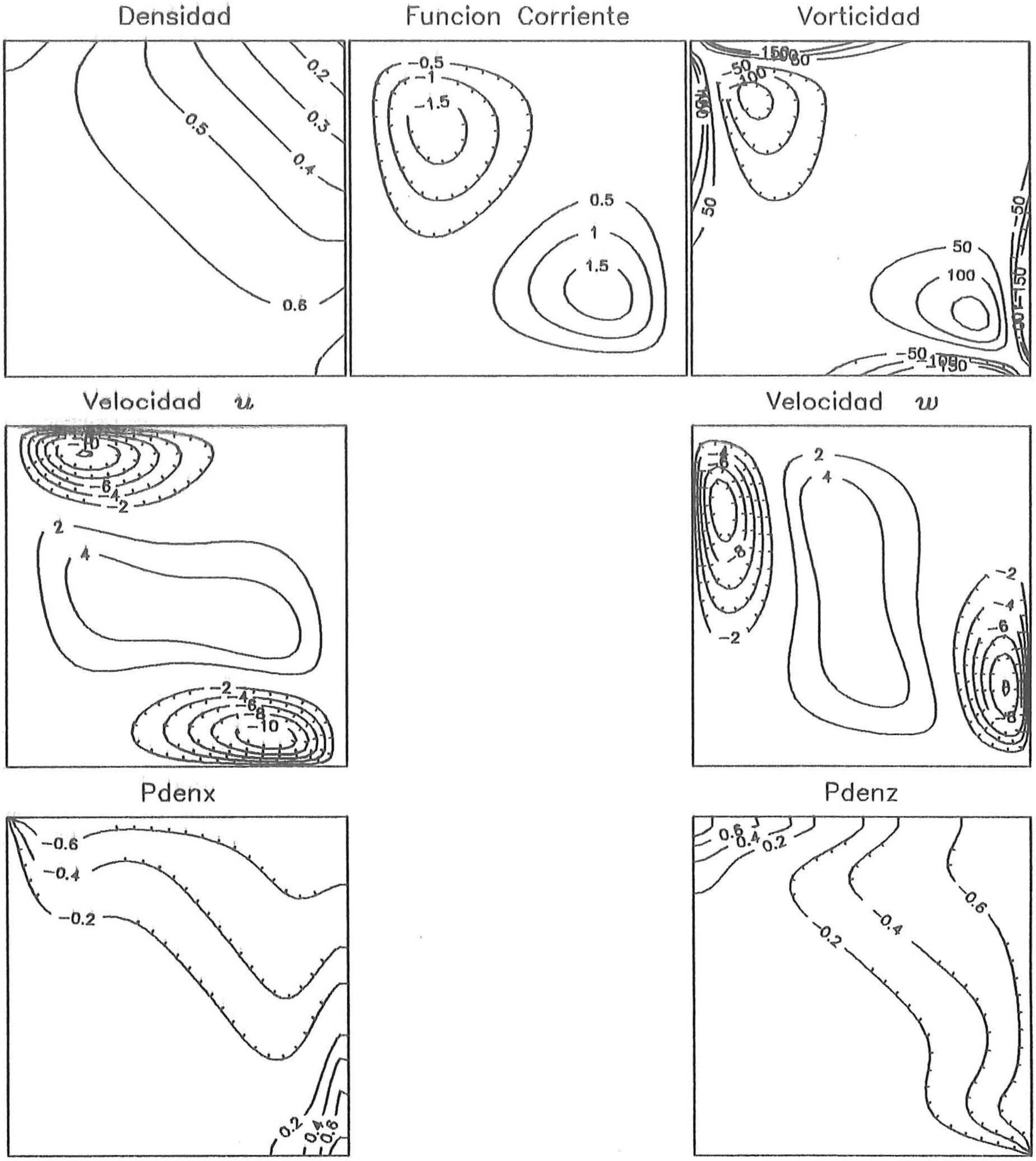


Fig. 16. Idem que Fig. 14, pero con $\alpha = 45.0°$.

negativa (antihoraria) aumenta de tamaño e intensidad. En $\alpha = -45.0°$, ambas celdas son simétricas y el flujo es paralelo a las isopícnas, en el interior y en las esquinas B y D (Fig. 18).

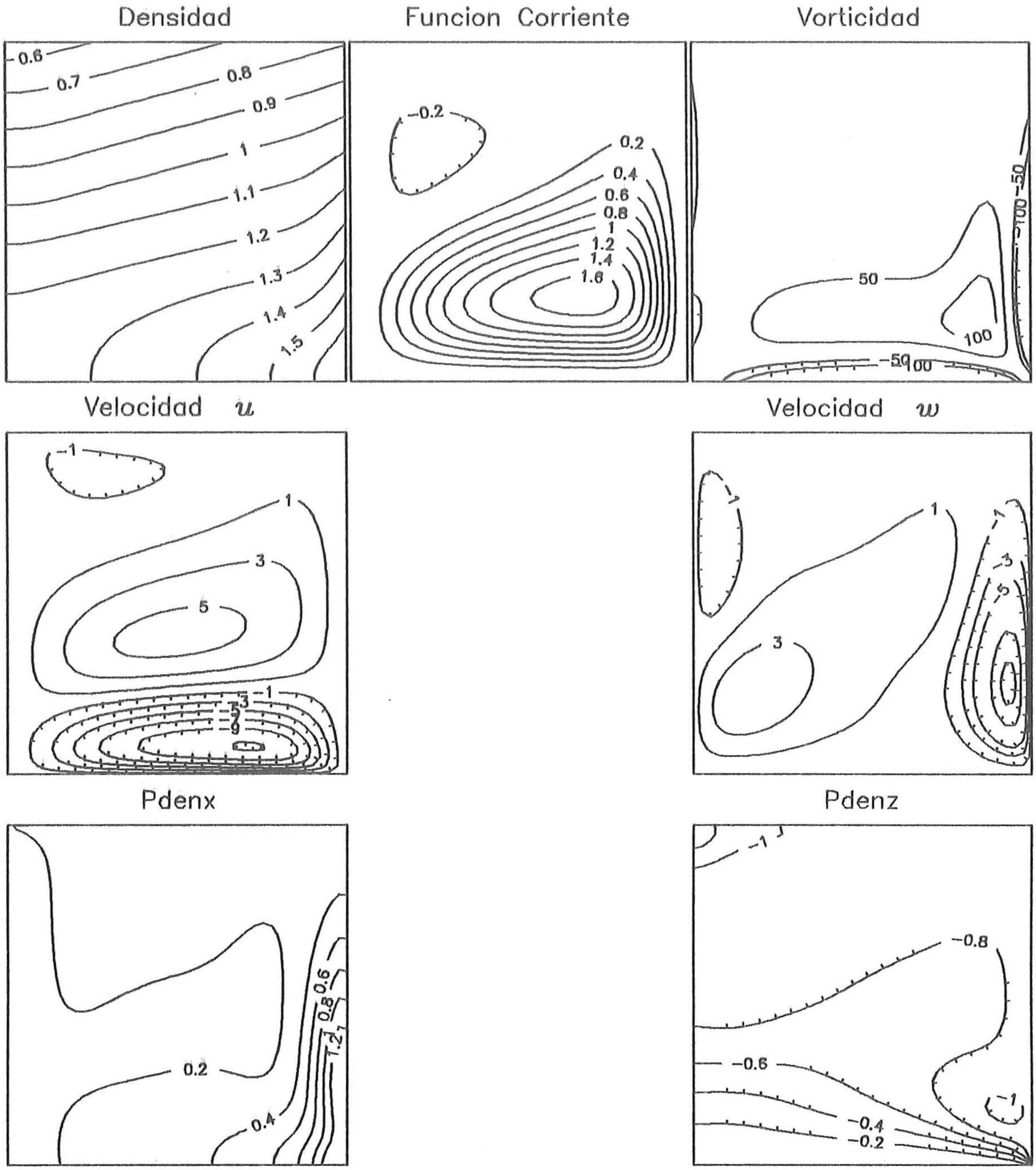


Fig. 17. Idem que Fig. 14, pero con $\alpha = -15.0^{o}$.

La distribución de los mínimos y máximos de ψ (Fig. 19) muestra valores más grandes, gradientes más intensos y una mayor variación respecto a Ra en comparación con la distribución correspondiente para el Caso I (Fig. 11). En valores altos de

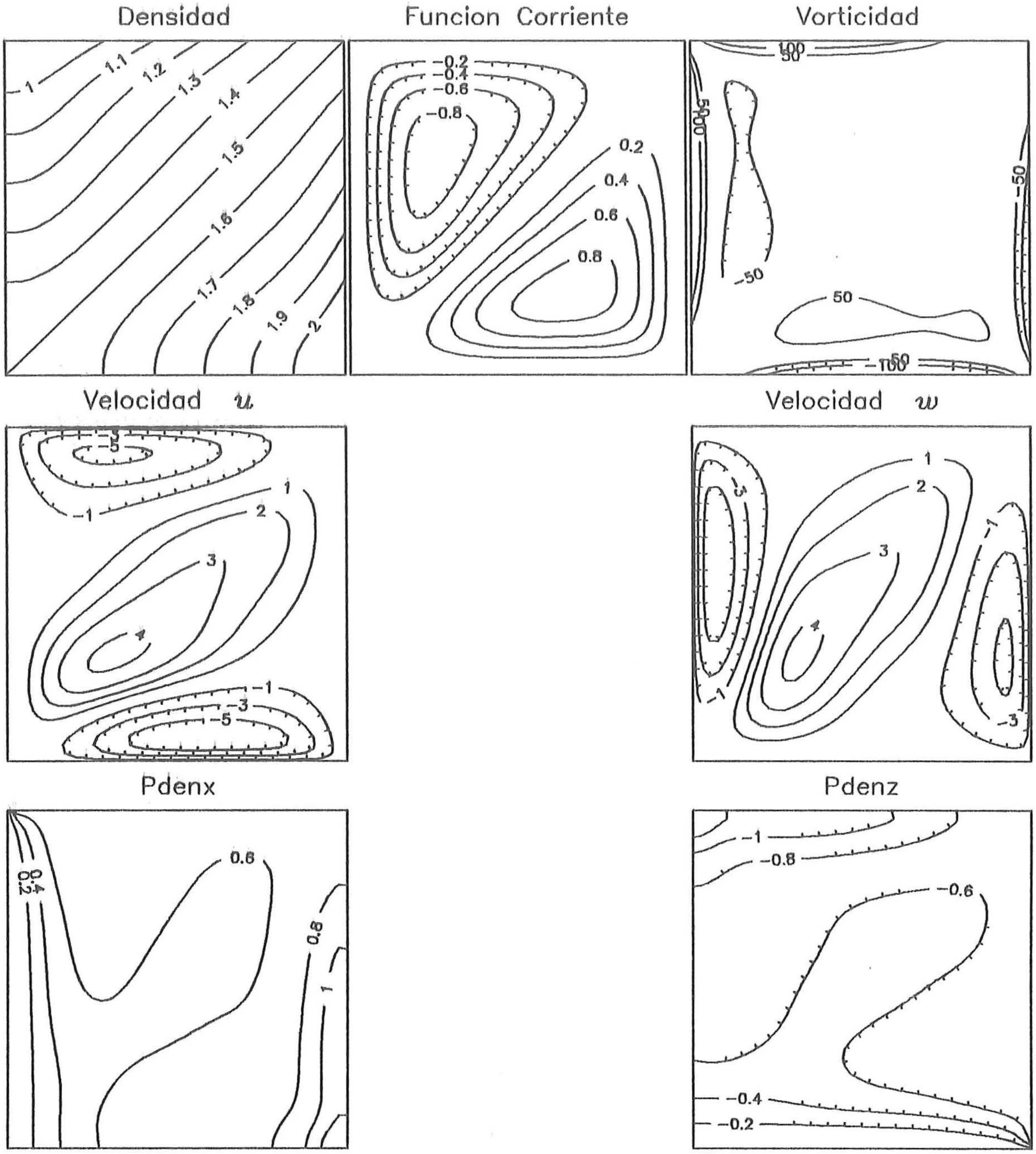


Fig. 18. Idem que Fig. 14, pero con $\alpha = -45.0^o$.

Ra ($Ra > 10^5$), la celda de circulación negativa tiende a estar presente en todo el intervalo de ángulos de inclinación, en tanto, que los máximos transportes de volumen tienden a ubicarse en un intervalo estrecho de α. La Tabla II resume el tipo de celdas

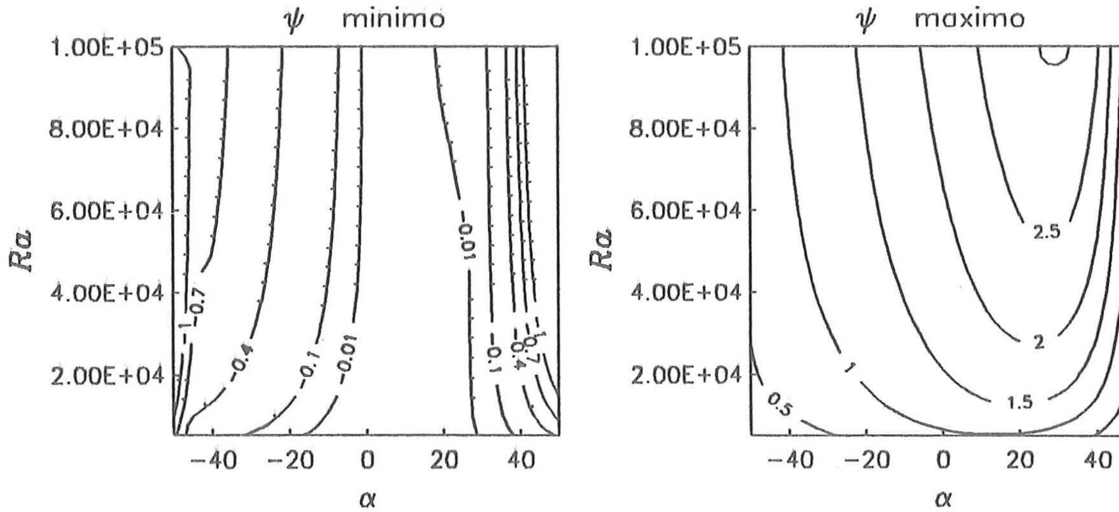


Fig. 19. Contornos de los valores mínimo y máximo de ψ para el Caso II.

que presentan las Figs. 14-18.

Para el Caso I, (28) sólo se calculó con la componente z de $\mathbf{F}_m$ porque su componente x no contribuye a la integral de contorno. Como el Caso II posee dos fronteras conductoras consecutivas, los contornos no son semejantes y las integrales correspondientes incluyen las componentes en x y z de los diferentes flujos (Fig. 20). Por ejemplo, en la frontera CD de la malla (42,42) $w = 0$ y $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{k}} = -\dfrac{\partial \rho'}{\partial z}$ (Transporte Total-z = Transporte Difusivo-z), y en la frontera BC $u = 0$, por lo cual $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{i}} = -\dfrac{\partial \rho'}{\partial x}$ (Transporte Total-x = Transporte Difusivo-x). Lo anterior explica los títulos de las gráficas que aparecen en la Fig. 22. La integración de estos transportes debe sumar cero, de acuerdo a (28), pues el resto del contorno corresponde a las fronteras aislantes AB y AD. En las Figs. 21 y 22 se presentan tales cálculos en los contornos con esquinas en la submalla (21,21) y en la malla (42,42). Para un Ra fijo, los transportes de densidad totales pueden presentar el mismo valor en dos ángulos de inclinación específicos. Por ejemplo, la Fig. 21 revela que en $Ra = 9.1 \times 10^4$ la componente z del transporte total

Tabla II. Valores de la inclinación del recipiente, del mínimo y máximo de ψ, y número de celdas correspondientes al Caso II.

α (°)	ψ_{min}	ψ_{max}	No. de Celdas Antihorarias	Horarias
-45.0	-0.9140	0.9139	1	1
-15.0	-0.2649	1.7133	1	1
0.0	-0.0012	2.1812	-	1
35.0	-0.2659	2.9434	1	1
45.0	-1.7646	1.7646	1	1

presenta el mismo valor de 1.5, aproximadamente, en $\alpha = 10.0°$ y en $\alpha = 30.0°$. El dominio de los transportes de densidad advectivos y difusivos es alternante. En conjunto, el transporte en la Fig. 21 es principalmente advectivo y en la Fig. 22, es totalmente difusivo. En particular, para $\alpha = -45.0°$ (Fig. 18) y $\alpha = 45.0°$ (Fig. 16) el transporte difusivo es dominante en la submalla (21,21), en cambio en $\alpha = -15.0°$ (Fig. 17), $\alpha = 0.0°$ (Fig. 14) y $\alpha = 35.0°$ (Fig. 15) predomina el transporte advectivo. También, la simetría de las soluciones en $\alpha = 45.0°$ (Fig. 16) produce que en la submalla (21,21) tanto los transportes difusivos para las componentes x y z así como los transportes advectivos en ambas componentes sean iguales.

La diferencia entre las componentes x y z de los transportes de densidad totales mostrados en las Figs. 21 y 22 y los errores fraccionales correspondientes se encuentran en la Fig 23. Los errores, en valor absoluto, resultan de dividir el resultado de la integral de contorno entre el valor de la componente z del transporte total de densidad. Errores mayores al 1.0 % en la submalla (21,21) se localizan en el intervalo $-50.0° \leq \alpha \leq -20.0°$ aproximadamente. Ya que sólo en las fronteras de la malla (42,42) se efectúan aproximaciones de segundo orden para ζ, ρ' y sus derivadas, los

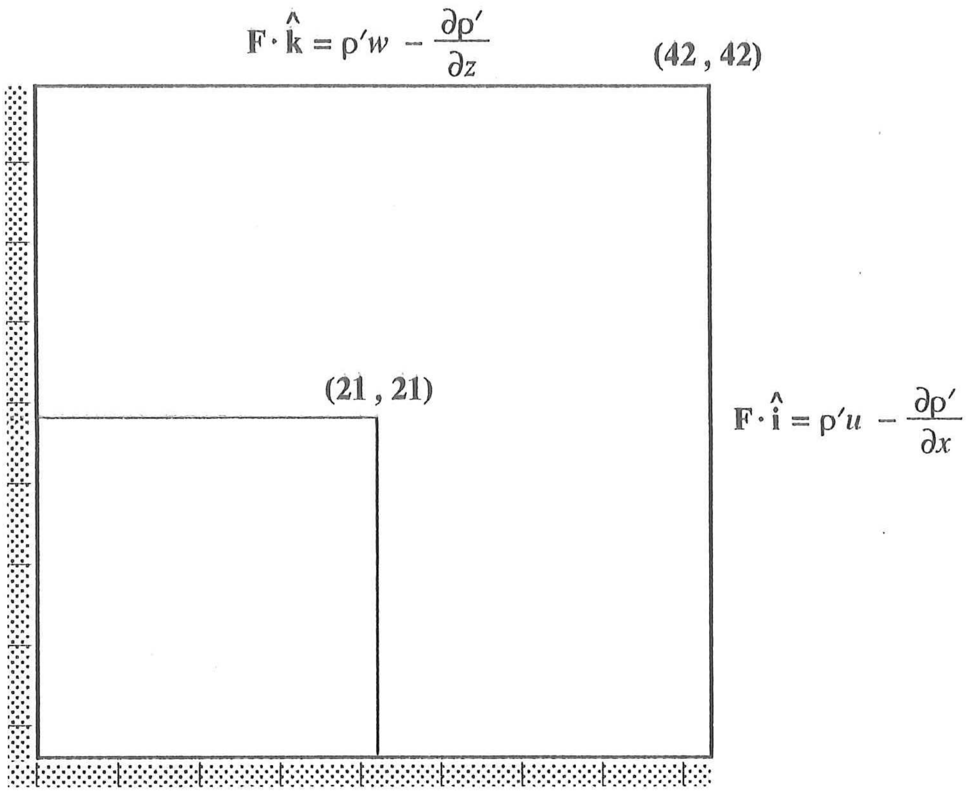


Fig. 20. Esquema que define los contornos que se usan para calcular la integral (28). Estos corresponden a las fronteras de la submalla (21,21) y de la malla (42,42). La componente x de $\mathbb{F}$ es $\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{i}}$ y se denota por Transporte Total-x. La componente z de $\mathbb{F}$ es $\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{k}}$ y se denota por Transporte Total-z.

errores son grandes (Fig. 23). Solamente en el intervalo $-50.0^o \leq \alpha \leq -34.0^o$, los errores son menores del 1.0 % para todos los *Ra* considerados.

IV.3 Casos III y IV.

En las Figs. 24 y 25 se encuentran los campos de ρ' y ψ, con diferentes ángulos de inclinación, para los Casos III y IV.

En $\alpha = 0.0^o$ (Fig. 24a) la presencia de la frontera aislante, en su pared superior,

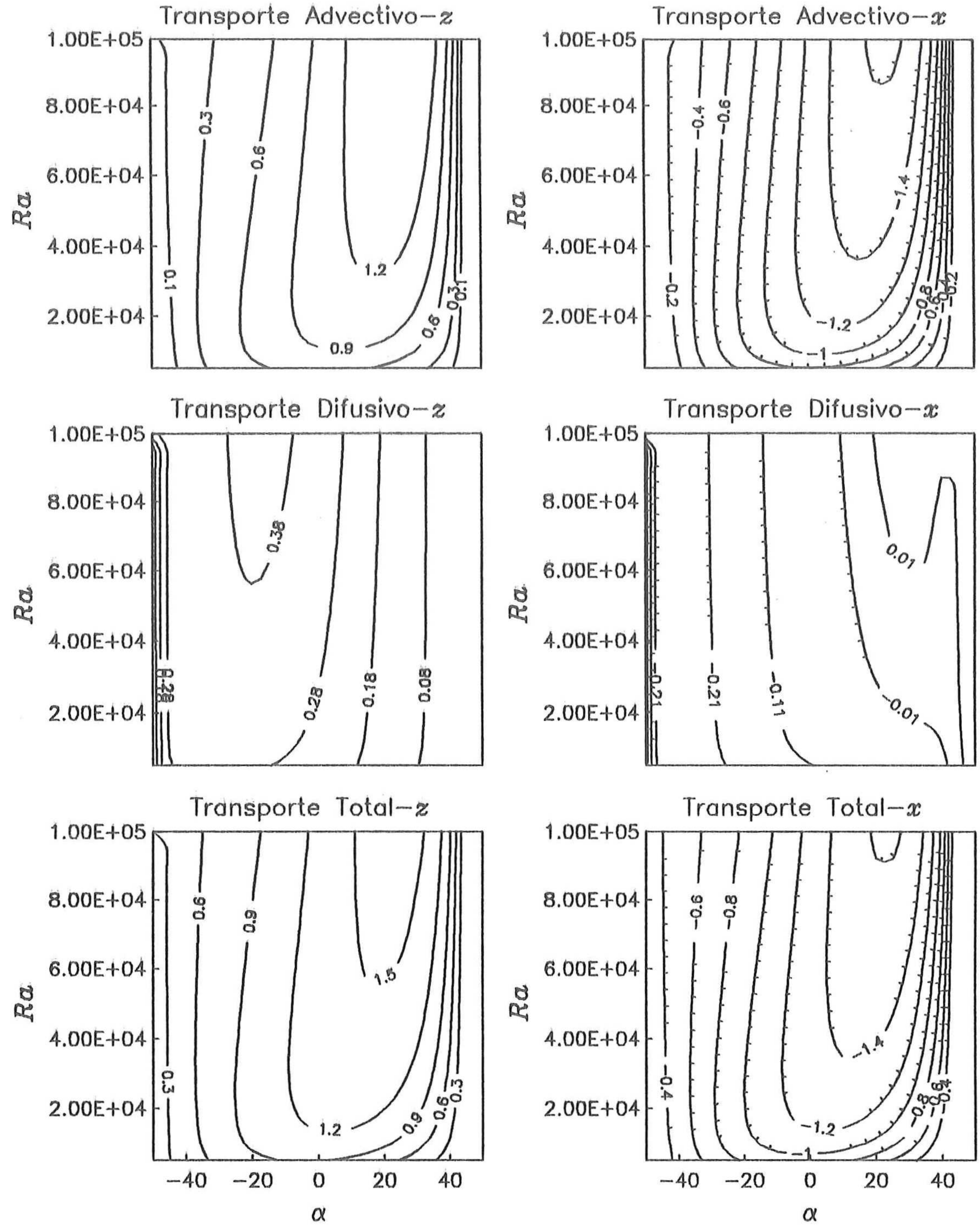


Fig. 21. Transporte de densidad en las fronteras de la submalla (21,21) en donde Transporte Total-x = Transporte Advectivo-x + Transporte Difusivo-x y Transporte Total-z = Transporte Advectivo-z + Transporte Difusivo-z.

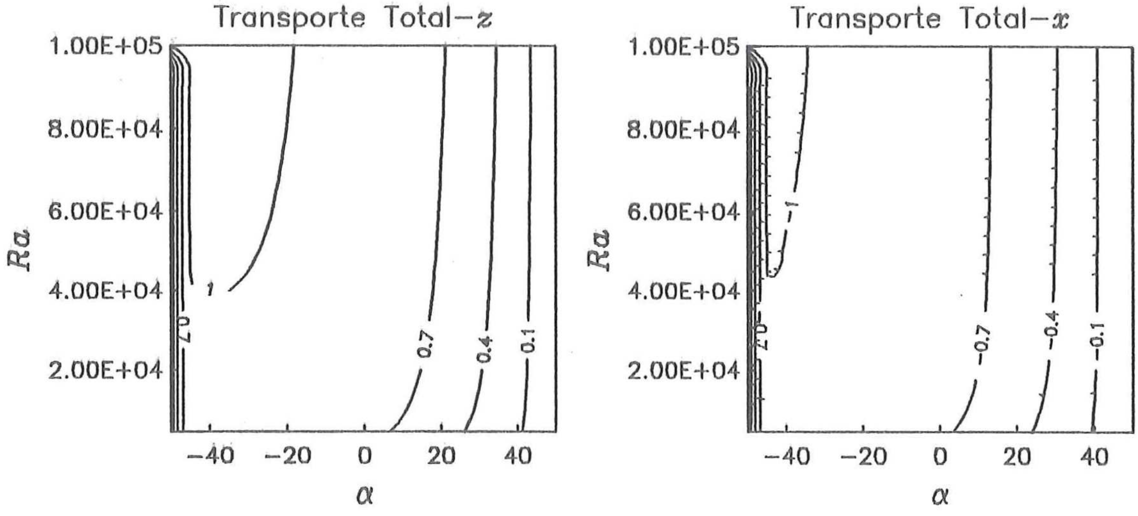


Fig. 22. Transporte de densidad en las fronteras de la malla (42,42).

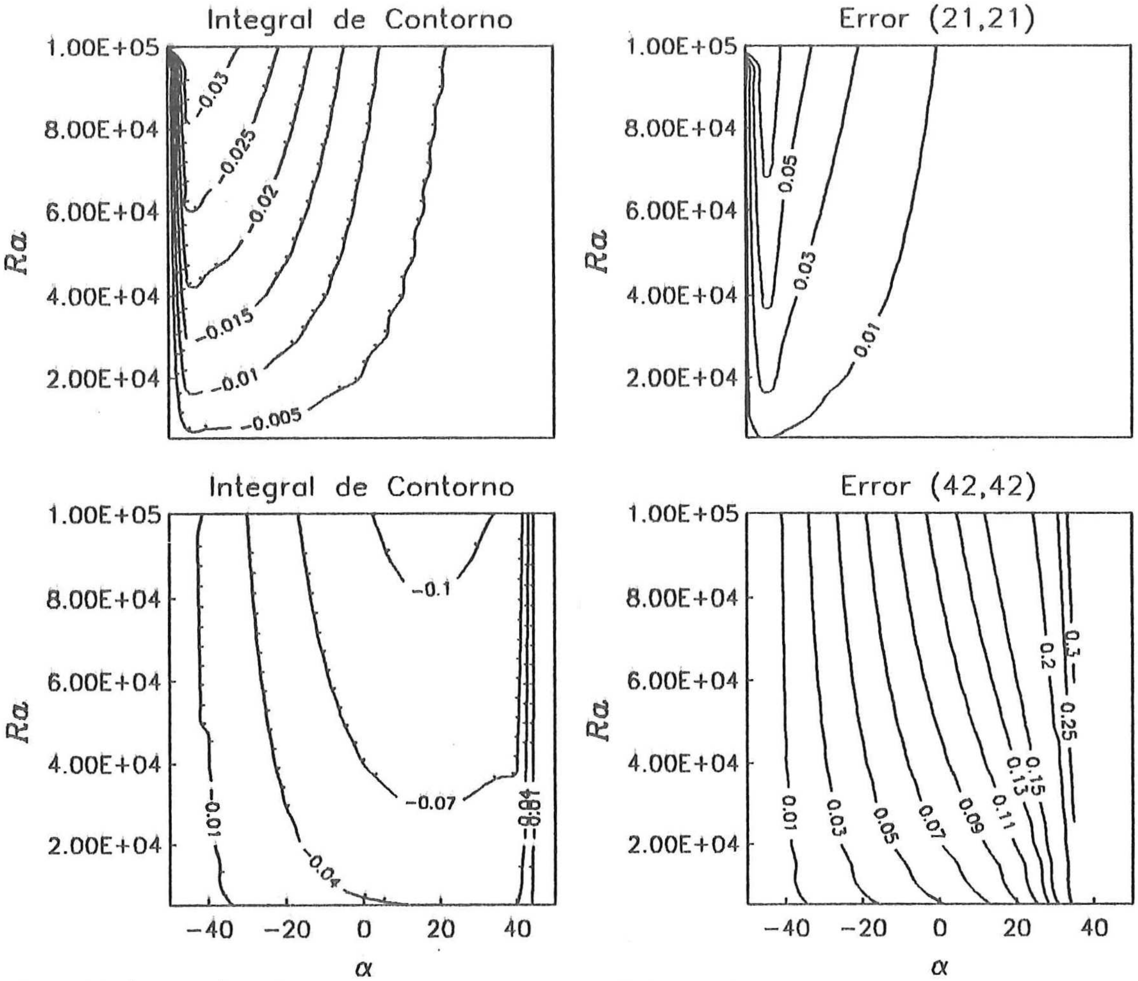


Fig. 23. Integrales de contorno y errores asociados a los transportes de densidad para la submalla (21,21) y la malla (42,42) del Caso II.

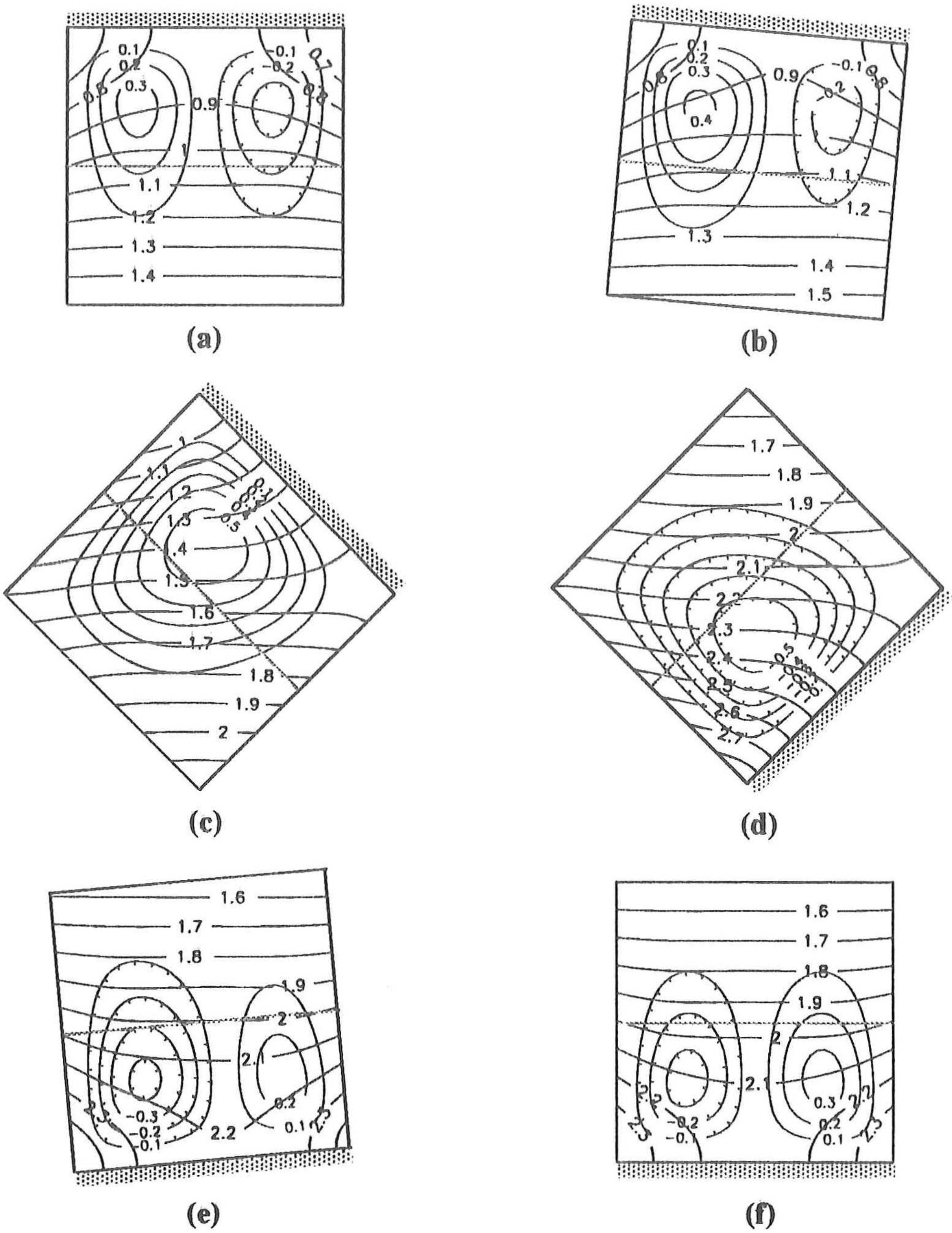


Fig. 24. Contornos de ρ' y ψ para el Caso III con $Ra = 1.0 \times 10^4$. Las isopícnas se muestran en color azul y las líneas de corriente en color rojo. La inclinación de cada gráfica es: (a) 0.0°; (b) −5.0°; (c) −45.0°; (d) −135.0°; (e) −175.0° y (f) −180.0°.

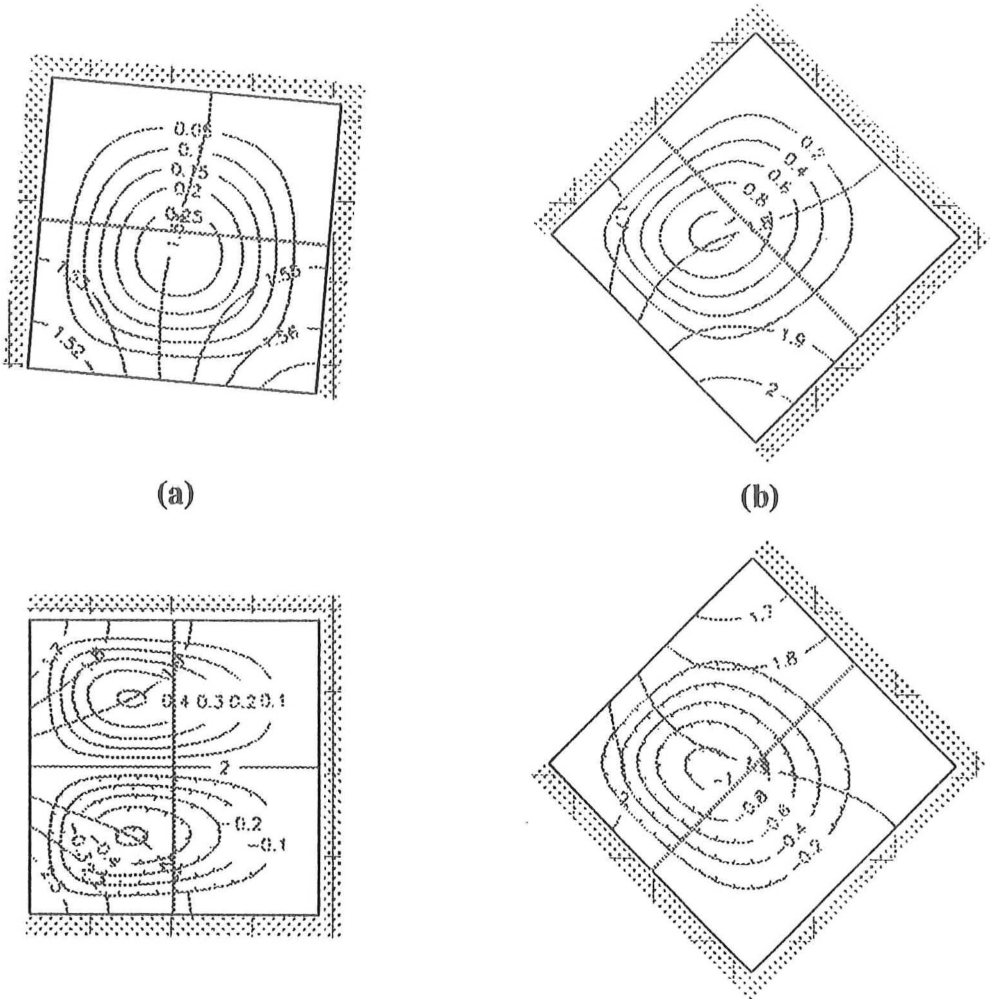
fuerza algunas isopícnas a intersectarse con ésta en ángulos rectos. Como consecuencia, la formación de Pdenx negativos y positivos en las esquinas C y D, respectivamente, produce dos celdas convectivas simétricas. La inclinación subsiguiente del recipiente en el sentido de las manecillas del reloj provoca la disminución del tamaño de la celda negativa (Fig. 24b) y el crecimiento de la celda positiva (Fig. 24c), que a su vez desaparece en $\alpha = -90.0^o$. Tal sucesión se repite con el inicio de una celda negativa (Fig. 24d) y termina con el nuevo surgimiento de las dos celdas simétricas en $\alpha = -180.0^o$ (Fig. 24f). En términos de los gradientes de densidad, la desaparición de la celda negativa al pasar de la Fig. 24b a la Fig. 24c se relaciona al cambio de signo de Pdenx en la esquina C mientras que el crecimiento de la celda positiva (Fig. 24c) se debe a que los contornos positivos de Pdenx en la esquina D se distribuyen a lo largo de la frontera AD. Los contornos de Pdenz, que en $\alpha = 0.0^o$ se localizan a lo largo de CD, sólo se angostan en $\alpha = -45.0^o$. Las isolíneas de Pdenx son positivas y se ubican en la vecindad de la esquina D y a lo largo de la frontera BC para $\alpha = -135.0^o$. La disminución de tamaño que se observa en la celda negativa, al pasar de la Fig. 24d a la Fig. 24e, se asocia al acortamiento de Pdenx hacia la esquina C y, la aparición de la celda positiva (Fig. 24e), a Pdenx < 0 en la esquina D. La distribución de Pdenx y Pdenz para $\alpha = -180.0^o$ es la misma que la correspondiente a $\alpha = 0.0^o$ pero con signos inversos, es decir, Pdenz > 0 y Pdenx positivos en la esquina C y negativos en la esquina D. Para $\alpha = \pm 90.0^o$ la solución es el reposo absoluto porque las isopicnas horizontales cumplen las condiciones en la frontera (15). Por otra parte, cuando el movimiento del fluído es en contra de la estratificación su velocidad es mayor que cuando sigue el contorno de las isopícnas. La velocidad mayor, en valor absoluto, es de aproximadamente $u = w = 2.5$ y se observa en las Figs. 24c y 24d. La Tabla III resume el mínimo y máximo de ψ para cada celda y el transporte de densidad en la mitad del recipiente para el Caso III.

A diferencia del Caso III, en $\alpha = 0.0^o$ y $\alpha = -180.0^o$ no ocurre convección cuando

Tabla III. Valores de la inclinación del recipiente, del mínimo y máximo de ψ, del número de celdas, del transporte de densidad en la mitad del mismo y del error asociado, correspondientes a la Fig. 24.

α (°)	ψ_{min}	ψ_{max}	No. de Celdas Antihorarias	No. de Celdas Horarias	$\int \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{k}}\, ds$	Error
0.0	-0.3430	0.3430	1	1	0.8987	0.0076
-5.0	-0.2590	0.4265	1	1	0.8427	0.0083
-45.0	-0.0006	0.5839	-	1	0.4891	0.0405
-135.0	-0.5844	0.0006	1	-	-0.4961	0.0009
-175.0	-0.4270	0.2595	1	1	-0.8518	0.0028
-180.0	-0.3435	0.3435	1	1	-0.8579	0.0028

el recipiente presenta tres paredes aislantes y una conductora. Esto se debe a las condiciones en la frontera de no deslizamiento y de frontera aislante, pues a lo largo de la pared conductora AB sólo puede entrar un flujo difusivo de calor. Ya que el papel de la difusión es el de disminuir cualquier gradiente, en el estado estacionario el fluído se homogenizará al valor de la densidad impuesto en la frontera conductora. Una ligera inclinación del recipiente producirá convección porque la densidad en la pared conductora ya no será constante (Fig. 25a). Es fácil determinar el sentido de la celda si uno se guía por el resultado de Phillips (1970) y Wunsch (1970). El fluído próximo a la frontera aislante tendrá advección paralela a ésta, y seguirá pendiente arriba cuando se encuentre por "encima" de la celda y pendiente abajo cuando quede por "debajo" de ella. Por ejemplo, en $\alpha = -45.0^{\circ}$ (Fig. 25b) el fluído que está por arriba de la celda se mueve pendiente arriba (a lo largo de AD), y el fluído que se ubica debajo de ella se mueve pendiente abajo (a lo largo de BC), lo cual ocasiona una celda horaria. Para $\alpha = -90.0^{\circ}$ (Fig. 25c), en lugar de una celda convectiva, se tienen dos celdas simétricas. En este caso los contornos de Pdenx son positivos, inician en la esquina A y terminan en la



(a) (b) (c) (d)

Fig. 25. Contornos de ρ' y ψ para el Caso IV con Ra = 1.0 x 10^4. Las isopícnas se indican en color azul y las líneas de corriente en color rojo. La inclinación de cada gráfica es: (a) –5.0°; (b) –45.0°; (c) –90.0° y (d) –135.0°.

esquina B, y se distribuyen en todo el fluído interior. Los contornos de Pdenz son positivos para la celda horaria y negativos para la celda antihoraria, y muestran una distribución similar a las isopícnas (Fig. 25c). La inclinación subsiguiente del recipiente repite las Figs. 25a y 25b pero con signo inverso. Así, en α = – 135.0° (Fig. 25d) se tiene una celda antihoraria y en α = –175.0° se tendría el negativo de la Fig. 25a. Otra característica de las Figs. 25a a 25d es que el movimiento del fluído es más rápido en contra de la estratificación que a favor de ésta. La velocidad máxima, en valor absoluto, es de aproximadamente $u = w = 4.0$ y se observa en $\alpha = -45.0^o$ (Fig. 25b) y en $\alpha = -135.0^o$ (Fig. 25d). En la Tabla IV se resumen los valores del mínimo y máximo de ψ para cada celda así como el transporte de densidad en la mitad del recipiente para el Caso IV.

Los transportes de densidad en la mitad del recipiente son dominantemente difusivos en el Caso III. En el Caso IV, el transporte de densidad es dominantemente difusivo en $\alpha = -5.0^o$ y $\alpha = -135.0^o$, dominantemente advectivo en $\alpha = -45.0^o$ y $\alpha = -175.0^o$, y totalmente advectivo en $\alpha = -90.0^o$. La integral de contorno (28) se evalúa en las fronteras de la mitad inferior del recipiente para los Casos III y IV. Con excepción de la Fig. 24c, en el Caso III los errores involucrados son menores del 1.0 % (Tabla III). En el Caso IV, los transportes de densidad tanto difusivos como advectivos son del orden de 10^{-2} y al obtener el error previamente definido, se tiene que dividir el resultado de la integral de contorno por una cantidad muy pequeña. Es por ello que en la Tabla IV los errores son grandes. La Tabla IV también presenta las estimaciones de la integral de contorno (28), las cuales tienen valores casi nulos. Esto indica que los resultados son favorables pero la definición de error utilizada no es adecuada.

Tabla IV. Valores de la inclinación del recipiente, del mínimo y máximo de ψ, del número de celdas, del transporte de densidad en la mitad del mismo, de la estimación de (28) en su mitad inferior y del error asociado, correspondientes a la Fig. 25.

α (°)	ψ_{min}	ψ_{max}	No. de Celdas Antihorarias	Horarias	$\int F\cdot\hat{k}\, ds$	$\oint_S F\cdot n\, ds$	Error
-5.0	0.0000	0.2964	-	1	0.0019	0.0012	0.6262
-45.0	-0.0217	1.0459	-	1	-0.0049	0.0151	3.1074
-90.0	-0.5114	0.5089	1	1	-0.0110	0.0117	1.0682
-135.0	-1.0515	0.0214	1	-	-0.0056	0.0029	0.5185

V. DISCUSION.

La supresión de las celdas convectivas se logra a través de una disposición conveniente de fronteras aislantes y conductoras que anulen la generación de vorticidad debida a la aproximación del término baroclínico. Por ejemplo, para $\alpha = 0.0^{\circ}$ (ver Figs. 1 y 2) tal término es nulo en los Casos I y IV (no ocurren celdas), pero en el Caso II se forma una celda positiva y en el Caso III dos celdas simétricas están presentes. Es por ello que la inclinación del recipiente no es una condición necesaria para producir celdas de circulación pero sí el hecho de tener fronteras aislantes no verticales. Entonces, las celdas se originan porque las isopícnas se curvan para satisfacer la condición de frontera aislante, formándose principalmente $\frac{\partial \rho'}{\partial x}$. Estos gradientes ocasionan capas flotantes de fluído que al ascender y descender dan vuelta alrrededor del recipiente en el sentido horario o antihorario. De manera adicional la inclinación sucesiva del recipiente genera, fundamentalmente, Pdenz en las esquinas que provocan, por ejemplo, la aparición de celdas antihorarias. El crecimiento de una celda antihoraria es una función de α y en parte se debe al confinamiento de las esquinas y a la difusión de momento por parte de la celda horaria.

Aunque con cuatro fronteras aislantes no se produce convección, ésta puede inducirse mediante una distribución horizontal de fuentes y sumideros (Patterson, 1984), pero en tal situación pueden generarse celdas de circulación independientemente del tipo de fronteras o ángulo de inclinación. También, el Caso I sin inclinación y con una fuente local origina dos celdas simétricas o una celda simétrica con un ligero aumento de *Ra* (Desrayaud y Lauriat, 1993). En general, una característica común en todos los casos estudiados es que el movimiento del fluído es más rápido cuando las isopícnas y las líneas de corriente no son paralelas que cuando sí lo son. Los flujos en la capa límite para el Caso I con $Ra \approx 10^7$ son muy intensos a la largo de las fronteras aislantes, en donde el fluído asciende o desciende (Quon, 1976). El comportamiento del fluído en movimiento en los Casos II-IV, puede ser similar en intensidad al Caso I para $Ra > 10^5$. También, para valores altos de Ra en un medio con una frontera aislante horizontal y ninguna conductora, se genera un flujo tipo chorro adyacente a la frontera y un gradiente de presión adverso que por flotabilidad induce un flujo en dirección contraria al de la capa límite, la cual es estáticamente estable (Daniels y Gargaro, 1993). Este último flujo tiene un efecto dominante, de manera que el flujo chorro no puede mantenerse a menos que exista una corriente externa que lo transporte corriente abajo.

Una característica interesante de los flujos convectivos es su tendencia a no fluir en contra de la estratificación en las esquinas del recipiente donde los gradientes de vorticidad son intensos. Para el Caso I, lo anterior ocurre principalmente en las esquinas A y C, en la esquina B para el Caso II, en las esquinas C o D para el Caso III y en las esquinas A o B para el Caso IV. En éstas esquinas el movimiento del fluído es relativamente más intenso que en el resto de ellas. Para el Caso I, Quon (1983) desarrolló soluciones analíticas para tales flujos con $\alpha = 45.0^o$ y $\alpha = 90.0^o$, $Pr \rightarrow \infty$ y $Ra \rightarrow \infty$ pero sin dar una explicación física al respecto. El hecho que los flujos estacionarios sigan el contorno de las isopícnas puede estar relacionado a un equilibrio entre la velocidad, el gradiente de densidad y al gradiente de la rotación local de las partículas de fluído, de manera similar al equilibrio geostrófico y a la definición de función corriente.

Analogías entre un sistema en rotación y otro estratificado han sido analizadas por Veronis (1970), por ejemplo, a través del "spin-up". Un fluído encerrado entre dos cilindros rectos se ajusta a un equilibrio geostrófico cuando uno de éstos rota a una velocidad ligeramente mayor que el otro. Tal ajuste puede ser similar al que sucede cuando la inclinación del recipiente se incrementa. Incluir rotación con el eje respectivo paralelo a la gravedad implica resolver una modificación al sistema (10-12) e incluir otra ecuación correspondiente a la componente de velocidad a lo largo del tubo. Entonces, si el sistema estratificado se pone en rotación, tal vez se inhiba la convección pues la acción de la gravedad podría equilibrarse con la acción de la rotación.

Experimentos numéricos para el Caso I también fueron efectuados por Quon (1976), pero sólo sus soluciones numéricas con $\alpha = 80.0^o$ y $\alpha = 90.0^o$ son cualitativamente similares a las que se calcularon en el presente trabajo. Las diferencias se deben a que las soluciones de Quon (1976) corresponden a $Ra \approx 10^7$, a la utilización del término $\kappa\, Pr^{0.5}$ como ψ característico y al uso de un algoritmo de segundo orden. El algoritmo empleado en éste trabajo fue incapaz de converger directamente a valores altos de Ra, digamos $Ra > 10^5$, pues para lograrlo se necesitan utilizar soluciones precedentes que implican un gran número de iteraciones. El número de iteraciones que se necesitan para alcanzar convergencia es función del parámetro de relajación y una razón por la cual la rapidez de convergencia fué lenta se asocia a la no estimación de un δ óptimo. En general, un valor óptimo o cuasióptimo de δ depende de la geometría del problema, del tamaño de la malla, de las aproximaciones que se usen en las fronteras y de los parámetros adimensionales que definen el problema (Gupta y Manohar, 1979, 1980), así que encontrar tal valor para el sistema (10-12) puede resultar tan caro como resolver el problema sin conocerlo.

En los Casos I y II, la mayor parte de las estimaciones de los transportes de densidad presentaron errores menores al 30.0 %. Aunque los errores pueden disminuirse con una malla más fina, existen otros factores que influyen en la exactitud de los cálculos numéricos. Algunos de los factores consisten en la manera de escribir las ecuaciones, ya sea en forma convectiva o divergente, y en el tipo de aproximación de los campos solución en las fronteras de la malla.

Para un fluído homogéneo ($Ra = 0.0$), es tema de discusión si la forma convectiva de (10) y (12) es mejor o no a su versión divergente pues hay una dependencia del algoritmo numérico. En esta situación el parámetro importante es el número de Reynolds (Re). En valores grandes de Re, la forma conservativa o divergente obtiene mejores resultados si el algoritmo se discretiza en diferencias centrales de segundo orden (Gupta y Manohar, 1980; Gupta, 1981). Como el sistema (10-12) corresponde a la versión convectiva donde $\mathrm{Re} = \frac{1}{Pr}$ y $Pr = 7.14$ (constante), se tiene un valor pequeño de Re; de aquí que la forma convectiva pudiera ser adecuada. Sin embargo, como se tiene un fluído inhomogéneo es incierto si la versión conservativa de (10-12) obtenga mejores resultados o pueda converger directamente a valores grandes de Ra.

Las aproximaciones para los campos ζ, ρ', $\frac{\partial \rho'}{\partial x}$ y $\frac{\partial \rho'}{\partial z}$ en las fronteras de la malla son de segundo orden, en tanto que las soluciones en el interior de la malla son de cuarto orden. Esto indica que las fronteras introducen, al menos, un error de segundo orden a la malla interior. En particular, se emplean diferencias hacia adelante y hacia atrás para $\frac{\partial \rho'}{\partial x}$ y $\frac{\partial \rho'}{\partial z}$, y una mejor aproximación de segundo orden requiere de más puntos. En tal aproximación pueden utilizarse puntos externos a las fronteras, como por ejemplo en Choo y Schultz (1992). La aplicación de aproximaciones de orden superior también considera más puntos y su ventaja sobre aproximaciones de menor orden sólo es notoria en mallas finas, lo cual implica un mayor costo computacional (Fletcher, 1991).

La rapidez de convergencia puede aumentarse con esquemas alternativos a la fórmula de Jensen, pero son ligeramente menos exactos (Gupta y Manohar, 1979). Otro problema que se presenta es la estimación de ρ' en las esquinas de la malla. El valor de ρ' se mantuvo fijo con la suposición que los errores que se transmiten a las soluciones se suavizan hacia el interior, es decir, que su efecto en la malla interior es pequeño, sin embargo, no se conoce la validez de tal suposición (Gupta et al, 1981). Siguiendo a Ache (1987), una posible estrategia consiste en usar una ρ' bivaluada en las esquinas para calcular gradientes; por ejemplo a lo largo de las fronteras AD y CD. Otra posibilidad es obtener en las esquinas aproximaciones de segundo orden para ρ' que dependan de valores en las fronteras de ρ' por medio de un método similar al descrito en el Apéndice C, pero desde un punto de vista computacional es más práctico asignarle el primer valor de ρ' en el interior pues es una aproximación de cuarto orden. Tal procedimiento solo se siguió en la unión de dos paredes aislantes en los Casos II y IV.

En el sistema (10-12), la no unicidad de las soluciones numéricas involucra satisfacer alguna de las condiciones (13-16) con valores distintos de ζ, ρ', Pdenx y Pdenz en las fronteras. Por ejemplo, si en el Caso I con $N^2 < 0$ se inicializa ρ' en las paredes AD y BC con ceros ó con una función lineal se encuentran dos soluciones diferentes que satisfacen (13). Por otra parte Fromm (1965) presenta soluciones, similares a las que se muestran en la Fig. 13, en donde pueden existir hasta ocho celdas convectivas en un recipiente rectangular con Ra del $O(10^6)$.

VI. CONCLUSIONES.

La investigación efectuada muestra que la disposición conveniente de fronteras aislantes y conductoras en un tubo de longitud infinita con sección transversal cuadrada, en posición horizontal, que se encuentra lleno con un fluído establemente estratificado origina celdas de convección. Las fronteras aislantes, ya sea inclinadas u horizontales, actúan como un forzamiento que obliga a las isopícnas a intersectarse con éstas en ángulos rectos, ocasionando gradientes de densidad que inducen el movimiento convectivo del fluído. Entonces, cuando el fluído permanece en reposo para cierto ordenamiento de fronteras aislantes y conductoras, las celdas de convección se forman girando el tubo. Es del conocimiento del autor que el estudio de la microestructura de mezcla en un fluído con estratificación estable es un problema físico al que se le ha dado poca atención.

Una frontera aislante horizontal o dos fronteras aislantes vecinas generan, respectivamente, dos celdas de circulación simétricas y una celda horaria cuando el recipiente hermético se encuentra en posición horizontal con la distribución de paredes que definen las Figs. 1 y 2. En ambos casos la inclinación del mismo impulsa de una a dos celdas. Dos fronteras aislantes opuestas no producen convección si el recipiente no está inclinado. En cuanto se inclina, por ejemplo, en contra de las manecillas del reloj, se crean desde una celda horaria hasta dos pares de celdas simétricas, siendo un par horario y el otro antihorario. Tres fronteras aislantes causan una o dos celdas, ya sea horarias o antihorarias, cuando el recipiente se halla con cierta inclinación. En todos los casos analizados existen soluciones intermedias con celdas convectivas asimétricas.

El algoritmo numérico para la solución de problemas estacionarios, bidimensionales, viscosos, incompresibles y de densidad homogénea, tratado con el formulismo función corriente-vorticidad, requiere la solución de dos ecuaciones elípticas acopladas (Gupta, 1991). Este algoritmo se ha empleado admitiendo un tercer campo, el de densidad variable gobernado por la ecuación de difusión y una modificación correspondiente en la ecuación de vorticidad. El conjunto de tres ecuaciones elípticas describe problemas bidimensionales y estacionarios de difusión-convección. Aquí se demuestra la efectividad de tal esquema numérico con casos de interés físico escasamente o no tratados en la literatura. Aunque los casos resueltos consideran una celda cuadrada, la ampliación del algoritmo también involucró una generalización a celdas rectangulares (Apéndice A).

El algoritmo numérico empleado es una herramienta útil para obtener soluciones con valores bajos y moderados del número de Rayleigh, pero resulta computacionalmente muy costoso para valores altos porque se requieren soluciones precedentes y gran número de iteraciones para lograr convergencia. No hay una razón que explique la incapacidad del algoritmo para encontrar soluciones con números altos de Rayleigh ($> 10^5$); sin embargo, es evidente que la conexión del flujo interior con las fronteras se produce en una capa cuyo grosor disminuye a medida que Ra aumenta. Es por ello que tal capa límite tiende a presentar toda su estructura en un número menor de celdas, al grado que éstas serán insuficientes para reproducir la curvatura de los campos.

Aún cuando los "errores" en los cálculos de los transportes de densidad son en términos generales altos, las soluciones son favorables pues al considerar mallas más finas para disminuirlos las soluciones no van a cambiar su comportamiento cualitativo.

LITERATURA CITADA.

Ache, G.A., 1987: Numerical treatment of the pressure singularity at a re-entrant corner. *CMS Tech. Sum. Rep.*, 80-11, University of Wisconsin.

Choo, J.Y. y D.H. Schultz, 1992: A stable high-order method for the heated cavity problem. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 15, 1313-1332.

Chorin, A.J. y J.E. Marsden, 1990: *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics.* Springer-Verlag, 168 pp.

Daniels, P.G. y R.J. Gargaro, 1993: Buoyancy effects in stably stratified horizontal boundary-layer flow. *J. Fluid Mech.*, 250, 233-251.

Desrayaud, G. y G. Lauriat, 1993: Unsteady confined buoyant plumes. *J. Fluid Mech.*, 252, 617-646.

Fletcher, C.A.J., 1991: *Computational Techniques for Fluid Dynamics.* Vol. I. Springer-Verlag, 401 pp.

Fromm, J.E., 1965: Numerical solutions of the nonlinear equations for a heated fluid layer. *Phys. Fluids*, 8, 1757-1769.

Garrett, C., P. MacCready y P. Rhines, 1993: Boundary mixing and arrested Ekman layers: rotating stratified flow near a sloping boundary. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 25, 291-323.

Gill, A.E., 1982: *Atmosphere-Ocean Dynamics.* Academic Press, Inc., 662 pp.

Gupta, M.M., 1981: A comparison of numerical solutions of convective and divergence forms of the Navier-Stokes equations for the driven cavity problem. *J. Comput. Phys.*, 43, 260-267.

___________, 1983: A fourth order finite difference scheme for two-dimensional elliptic equations. En: *Scientific Computing.* (R.S. Stepleman et al., Eds.). North-Holland Publishing Company, pp. 147-154.

___________, 1991: High accuracy solutions of incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comp. Phys.*, 93, 343-359.

___________ y R.P. Manohar, 1979: Boundary approximations and accuracy in viscous flow computations. *J. Comp. Phys.*, 31, 265-288.

___________________________, 1980: On the use of central difference scheme for Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 15, 557-573.

___________________________ y B. Noble, 1981: Nature of viscous flows near sharp corners. *Computs. Fluids*, 9, 379-388.

___________________________ y J.W. Stephenson, 1984: A single cell high order scheme for the convection-diffusion equation with variable coefficients. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 4, 641-651.

____, 1985: High-Order difference schemes for two-dimensional elliptic equations. *Num. Methods Partial Diff. Equations*, 1, 71-80.

Imberger, J. y G.N. Ivey, 1993: Boundary mixing in stratified reservois. *J. Fluid Mech.*, 248, 477-491.

Landau, L.P. y E.M. Lifshitz, 1989: *Fluid Mechanics*. Segunda edición con correcciones. Pergamon Press, 539 pp.

Lapidus, L. y G.F. Pinder, 1982: *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering*. John Wiley & Sons, 677 pp.

MacCready, P. y P.B. Rhines, 1993: Slippery bottom boundary layers on a slope. *J. Phys. Oceanogr.*, 23, 5-22.

Patterson, J.C., 1984: Unsteady natural convection in a cavity with internal heating and cooling, *J. Fluid Mech.*, 140, 135-151.

Pedlosky, J., 1987: *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 710 pp.

Phillips, O.M., 1970: On flows induced by diffusion in a stably stratified fluid. *Deep-Sea Res.*, 17, 435-443.

___________, J.-H. Shyu y H. Salmun, 1986: An experiment on boundary mixing: mean circulation and transport rates. *J. Fluid Mech.*, 173, 473-499.

Quon, C., 1976: Diffusively induced boundary layers in a tilted square cavity: a numerical study. *J. Comp. Phys.*, 22, 459-485.

________, 1983: Convection induced by insulated boundaries in a square. *Phys. Fluids*, 26, 632-637.

Salmun, H. y O.M. Phillps, 1992: An experiment on boundary mixing, part 2: the slope dependence at small angles. *J. Fluid Mech.*, 240, 355-377.

Stern, M.E., 1975: *Ocean Circulation Physics*. Academic Press, 246 pp.

Turner, J.S., 1981: Small-Scale mixing processes. En: *Evolution of Physical Oceanography*. (B.A. Warren y C. Wunsch, Eds.). MIT Press, pp. 236-262.

__________, y C.F. Chen, 1974: Two-dimensional effects in double-diffusive convection. *J. Fluid Mech.*, 63, 577-592.

Veronis, G., 1970: The analogy between rotating and stratified fluids. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2, 37-66.

Wunsch, C., 1970: On oceanic boundary mixing. *Deep-Sea Res.*, 17, 293-301.

APENDICE A

SOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION DE DIFUSION-CONVECCION.

A continuación se presenta la extensión del esquema de cuarto orden desarrollado por Gupta et al. (1984) a una celda rectangular. El método consiste en utilizar desarrollos en series de potencias de la solución $\phi(x,z)$ y las funciones $p(x,z)$, $q(x,z)$, y $f(x,z)$, y obligar a que satisfagan (18) en cualquier punto (x,z) de una celda rectangular de nueve puntos (Fig. 3). Considerar como notación,

$$\phi(x,z) = \sum_{i,j}^{\infty} a_{i,j} x^i z^j \qquad q(x,z) = \sum_{i,j}^{\infty} \beta_{i,j} x^i z^j$$

$$p(x,z) = \sum_{i,j}^{\infty} \lambda_{i,j} x^i z^j \qquad f(x,z) = \sum_{i,j}^{\infty} c_{i,j} x^i z^j \tag{A1}$$

Las expresiones (A1) se substituyen en (18), conservando sólo los términos constantes, lineales y cuadráticos. Esto se logra al mantener términos $x^i z^j$ que cumplan con $0 \leq i \ , j \leq 2$, de manera que se obtienen seis restricciones, con subíndices $0 \leq i + j \leq 2$, que garantizan que la solución de (18) sea de cuarto orden. Tales restricciones son (Gupta et al., 1984),

$$c_{0,0} = 2(a_{2,0} + a_{0,2}) + \lambda_{0,0} a_{1,0} + \beta_{0,0} a_{0,1}$$

$$c_{1,0} = 6a_{3,0} + 2a_{1,2} + 2\lambda_{0,0} a_{2,0} + \lambda_{1,0} a_{1,0} + \beta_{0,0} a_{1,1} + \beta_{1,0} a_{0,1}$$

$$c_{0,1} = 2a_{2,1} + 6a_{0,3} + 2\lambda_{0,0} a_{1,1} + \lambda_{0,1} a_{1,0} + 2\beta_{0,0} a_{0,2} + \beta_{0,1} a_{0,1}$$

$$c_{2,0} = 12a_{4,0} + 2a_{2,2} + 3\lambda_{0,0} a_{3,0} + 2\lambda_{1,0} a_{2,0} + \lambda_{2,0} a_{1,0} + \beta_{0,0} a_{2,1} + \beta_{1,0} a_{1,1} + \beta_{2,0} a_{0,1}$$

(A2)

$$c_{0,2} = 2a_{2,2} + 12a_{0,4} + \lambda_{0,0}a_{1,2} + \lambda_{0,1}a_{1,1} + \lambda_{0,2}a_{1,0} + 3\beta_{0,0}a_{0,3} + 2\beta_{0,1}a_{0,2} + \beta_{0,2}a_{0,1}$$

$$c_{1,1} = 6a_{3,1} + 6a_{1,3} + 2\lambda_{0,0}a_{2,1} + \lambda_{1,0}a_{1,1} + \lambda_{1,1}a_{1,0} + 2\beta_{0,0}a_{1,2} + \beta_{0,1}a_{1,1} + \beta_{1,1}a_{0,1}$$

donde las restricciones $c_{0,0}$, $c_{1,0}$, $c_{0,1}$, $c_{2,0}$, $c_{0,2}$, y $c_{1,1}$ están asociadas, respectivamente, a los términos constante, x, y, x^2, y^2 y xy. Notar que el coeficiente $a_{0,0}$ se pierde en los desarrollos para las derivadas de $\phi(x,z)$.

En su forma general, o sea al agregar $\phi(x,z)$ a la ecuación elíptica (18), las restricciones (A2) son un sistema de seis ecuaciones con quince incógnitas $a_{i,j}$ con tal que $0 \leq i + j \leq 4$. Relaciones adicionales se obtienen al evaluar la expansión de $\phi(x,z)$ en los puntos 0 a 8 de la celda rectangular de lados g y h (Fig. 3),

$$\phi_0 = a_{0,0}$$

$$\phi_1 = \phi_0 + a_{1,0}h + a_{2,0}h^2 + a_{3,0}h^3 + a_{4,0}h^4 + \ldots$$

$$\phi_2 = \phi_0 + a_{0,1}g + a_{0,2}g^2 + a_{0,3}g^3 + a_{0,4}g^4 + \ldots$$

$$\phi_3 = \phi_0 - a_{1,0}h + a_{2,0}h^2 - a_{3,0}h^3 + a_{4,0}h^4 + \ldots$$

$$\phi_4 = \phi_0 - a_{0,1}g + a_{0,2}g^2 - a_{0,3}g^3 + a_{0,4}g^4 + \ldots \qquad \text{(A3)}$$

$$\phi_5 = \phi_2 + \phi_1 - \phi_0 + (a_{1,1}g + a_{1,2}g^2 + a_{1,3}g^3)h + (a_{2,1}g + a_{2,2}g^2)h^2 + a_{3,1}gh^3 + \ldots$$

$$\phi_6 = \phi_3 + \phi_2 - \phi_0 - (a_{1,1}g + a_{1,2}g^2 + a_{1,3}g^3)h + (a_{2,1}g + a_{2,2}g^2)h^2 - a_{3,1}gh^3 + \ldots$$

$$\phi_7 = \phi_4 + \phi_3 - \phi_0 + (a_{1,1}g - a_{1,2}g^2 + a_{1,3}g^3)h - (a_{2,1}g - a_{2,2}g^2)h^2 + a_{3,1}gh^3 + \ldots$$

$$\phi_8 = \phi_4 + \phi_1 - \phi_0 - (a_{1,1}g - a_{1,2}g^2 + a_{1,3}g^3)h - (a_{2,1}g - a_{2,2}g^2)h^2 - a_{3,1}gh^3 + \ldots$$

donde por simplicidad se usan las expresiones anteriores ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 y ϕ_4. En forma análoga a Gupta et al (1985), se puede aprovechar la simetría inherente a (A3) para eliminar, en términos de la solución ϕ, algunos de los coeficientes $a_{i,j}$ con las siguientes combinaciones lineales,

$$(\phi_1 - \phi_3) = 2a_{1,0}h + 2a_{3,0}h^3 + O(h^5)$$

$$(\phi_2 - \phi_4) = 2a_{0,1}g + 2a_{0,3}g^3 + O(g^5)$$

$$(\phi_1 + \phi_3 - 2\phi_0) = 2a_{2,0}h^2 + 2a_{4,0}h^4 + O(h^6)$$

$$(\phi_2 + \phi_4 - 2\phi_0) = 2a_{0,2}g^2 + 2a_{0,4}g^4 + O(g^6)$$

(A4)

$$(\phi_5 - \phi_6 + \phi_7 - \phi_8) = 4a_{1,1}gh + O(e^4)$$

$$(\phi_5 - \phi_6 - \phi_7 + \phi_8) - 2(\phi_1 - \phi_3) = 4a_{1,2}g^2h + O(e^5)$$

$$(\phi_5 + \phi_6 - \phi_7 - \phi_8) - 2(\phi_2 - \phi_4) = 4a_{2,1}gh^2 + O(e^5)$$

$$(\phi_5 + \phi_6 + \phi_7 + \phi_8) - 2(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + 4\phi_0 = 4a_{2,2}g^2h^2 + O(e^6)$$

donde e indica productos gh tales que la suma de sus exponentes dan el exponente de e. Por ejemplo, el orden del término $4(a_{1,3}g^3h + a_{3,1}gh^3)$ es $O(e^4)$. El sistema (A4) es equivalente al sistema (A3). Observar que existe una dependencia de los coeficientes conocidos $\beta_{i,j}$, $\lambda_{i,j}$, $c_{i,j}$ del sistema (A2), con los desconocidos $a_{i,j}$ y $\phi_{i,j}$ del sistema (A4).

El propósito central del método es el resolver "localmente", o en una celda, el problema elíptico con condiciones en la frontera de Dirichlet, o sea, escoger una ϕ_0 dadas ϕ_1 a ϕ_8 y las funciones conocidas que definen los coeficientes $\beta_{i,j}$, $\lambda_{i,j}$ y $c_{i,j}$. Para lograr lo anterior y resaltando que sólo el sistema (A2) contiene la información de la ecuación elíptica, la solución de $\phi(x,z)$ se forma de una combinación lineal de (A2), por ejemplo,

$$P_1 ghc_{0,0} + P_2 g^2 hc_{1,0} + P_3 gh^2 c_{0,1} + P_4 g^2 h^2 c_{2,0} + P_5 g^2 h^2 c_{0,2} \tag{A5}$$

donde al imponer los coeficientes, $P_1 = 6$, $P_2 = \dfrac{h^2}{2g}\lambda_{0,0}$, $P_3 = \dfrac{g^2}{2h}\beta_{0,0}$, $P_4 = \dfrac{h}{g}$, y $P_5 = \dfrac{g}{h}$, se eliminan los coeficientes $a_{3,0}$, $a_{0,3}$, $a_{4,0}$ y $a_{0,4}$. Además, permite llegar a una restricción solamente entre los coeficientes $\phi_{i,j}$, $\beta_{i,j}$ y $c_{i,j}$, pues no contiene ningún coeficiente $a_{i,j}$. Notar que en (A5) no se involucra la restricción $c_{1,1}$ pues en tal caso se necesitaría que el coeficiente P_6 asociado a $a_{3,1}$ y $a_{1,3}$ fuese nulo.

Después de la substitución de (A2) y los coeficientes precedentes en (A5), y luego de usar (A4) se encuentra que (A5) puede expresarse como,

$$\sum_{k=0}^{8} \eta_k \phi_k \tag{A6}$$

en la cual,

$$\eta_0 = -\frac{20}{gh} R_0 - ghR_1$$

$$\eta_1 = ghR_3 + \frac{g}{2} R_6 + \left[\frac{1}{h} + \frac{1}{2}\lambda_{0,0} \right] R_7$$

$$\eta_2 = ghR_4 + \frac{h}{2} R_5 + \left[\frac{1}{g} + \frac{1}{2}\beta_{0,0} \right] R_8$$

$$\eta_3 = ghR_3 - \frac{g}{2} R_6 + \left[\frac{1}{h} - \frac{1}{2}\lambda_{0,0} \right] R_7$$

$$\eta_4 = ghR_4 - \frac{h}{2} R_5 + \left[\frac{1}{g} - \frac{1}{2} \beta_{0,0} \right] R_8 \tag{A7}$$

$$\eta_5 = \left[\frac{1}{gh} + \frac{1}{2g} \lambda_{0,0} + \frac{1}{2h} \beta_{0,0} \right] R_0 + \frac{1}{4} R_2$$

$$\eta_6 = \left[\frac{1}{gh} - \frac{1}{2g} \lambda_{0,0} + \frac{1}{2h} \beta_{0,0} \right] R_0 - \frac{1}{4} R_2$$

$$\eta_7 = \left[\frac{1}{gh} - \frac{1}{2g} \lambda_{0,0} - \frac{1}{2h} \beta_{0,0} \right] R_0 + \frac{1}{4} R_2$$

$$\eta_8 = \left[\frac{1}{gh} + \frac{1}{2g} \lambda_{0,0} - \frac{1}{2h} \beta_{0,0} \right] R_0 - \frac{1}{4} R_2$$

donde,

$$R_0 = \frac{g^2 + h^2}{2}$$

$$R_1 = \lambda_{0,0}^2 + \beta_{0,0}^2 + 2\lambda_{1,0} + 2\beta_{0,1}$$

$$R_2 = h^2\beta_{1,0} + g^2\lambda_{0,1} + R_0\lambda_{0,0}\beta_{0,0}$$

$$R_3 = \frac{1}{2} \lambda_{0,0}^2 + \lambda_{1,0}$$

$$R_4 = \frac{1}{2} \beta_{0,0}^2 + \beta_{0,1} \tag{A8}$$

$$R_5 = h^2 \left[\beta_{2,0} + \frac{1}{2} \lambda_{0,0}\beta_{1,0} \right] + g^2 \left[\beta_{0,2} + \frac{1}{2} \beta_{0,0}\beta_{0,1} \right]$$

$$R_6 = h^2 \left[\lambda_{2,0} + \frac{1}{2} \lambda_{0,0}\lambda_{1,0} \right] + g^2 \left[\lambda_{0,2} + \frac{1}{2} \beta_{0,0}\lambda_{0,1} \right]$$

$$R_7 = \frac{5g^2 - h^2}{g}$$

$$R_8 = \frac{5h^2 - g^2}{h}$$

y de manera semejante a (A4), también se puede obtener un esquema adicional a (A6) y (A7). Tal esquema es,

$$\sum_{k=0}^{8} \eta_k \phi_k = \frac{gh}{2} (8f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4) + \frac{gh}{4} \left[hp_0(f_1 - f_3) + gq_0(f_2 - f_4) \right] \quad \text{(A9)}$$

donde,

$$\eta_0 = \frac{20}{gh} R_0 + gh(p_0^2 + q_0^2) + g(p_1 - p_3) + h(q_2 - q_4)$$

$$\eta_1 = \frac{1}{h} R_7 + \frac{g}{4}(R_9 p_0 + 3p_1 + p_2 - p_3 + p_4)$$

$$+ \frac{g}{8}\left[4hp_0^2 + hp_0(p_1 - p_3) + gq_0(p_2 - p_4) \right]$$

$$\eta_2 = \frac{1}{g} R_8 + \frac{h}{4} (R_{10} q_0 + q_1 + 3q_2 + q_3 - q_4)$$

$$+ \frac{h}{8} \left[4gq_0^2 + hp_0(q_1 - q_3) + gq_0(q_2 - q_4) \right]$$

$$\eta_3 = \frac{1}{h} R_7 - \frac{g}{4}(R_9 p_0 - p_1 + p_2 + 3p_3 + p_4)$$

$$+ \frac{g}{8} \left[4hp_0^2 - hp_0(p_1 - p_3) - gq_0(p_2 - p_4) \right]$$

$$\eta_4 = \frac{1}{g} R_8 - \frac{h}{4} (R_{10} q_0 + q_1 - q_2 + q_3 + 3q_4)$$

$$+ \frac{h}{8} \left[4gq_0^2 - hp_0(q_1 - q_3) - gq_0(q_2 - q_4) \right]$$

$$\eta_5 = \frac{1}{2} R_0 \left(\frac{2}{gh} + \frac{1}{g} p_0 + \frac{1}{h} q_0 + \frac{1}{2} p_0 q_0 \right) + R_{11} \qquad \text{(A10)}$$

$$\eta_6 = \frac{1}{2} R_0 \left(\frac{2}{gh} - \frac{1}{g} p_0 + \frac{1}{h} q_0 - \frac{1}{2} p_0 q_0 \right) - R_{11}$$

$$\eta_7 = \frac{1}{2} R_0 \left(\frac{2}{gh} - \frac{1}{g} p_0 - \frac{1}{h} q_0 + \frac{1}{2} p_0 q_0 \right) + R_{11}$$

$$\eta_8 = \frac{1}{2} R_0 \left(\frac{2}{gh} + \frac{1}{g} p_0 - \frac{1}{h} q_0 - \frac{1}{2} p_0 q_0 \right) - R_{11}$$

con,

$$R_9 = 2 \left(3 - \frac{h^2}{g^2} \right)$$

$$R_{10} = 2 \left(3 - \frac{g^2}{h^2} \right)$$

$$R_{11} = \frac{1}{8} \left[h(q_1 - q_3) + g(p_2 - p_4) \right]$$

donde el lado izquierdo de (A9) se encuentra al expresar R_1 a R_6 en términos de los valores de $p(x,z)$ y $q(x,z)$ en los nodos 0-8 de la celda rectangular. De igual forma se procede con $f(x,z)$, pero con el uso de las restricciones $c_{i,j}$, para el lado derecho de (A9).

Así, (A9) representa una restricción que proviene de la ecuación diferencial con la cual, siempre y cuando η_0 no sea "muy pequeño", se puede despejar ϕ_0 en función de ϕ_1 a ϕ_8 y de p, q y f en todos los puntos de la celda. El orden de este esquema es $O(e^4)$, o bien, es el mayor de $O(h^4)$ o $O(g^4)$. Para una celda cuadrada ($g = h$), los esquemas en diferencias (A9) y (A10) se reducen a (19) y (20), respectivamente.

APENDICE B

ESQUEMA DE CUARTO ORDEN A LAS DERIVADAS DE LA ECUACION DE DIFUSION-CONVECCION.

Los desarrollos en series de potencias para las derivadas de $\phi(x,z)$, se obtienen de (A1) como,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \sum_{i,j}^{\infty} i a_{i,j} x^{i-1} z^j$$

(B1)

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \sum_{i,j}^{\infty} j a_{i,j} x^i z^{j-1}$$

y para potencias $x^i z^j$ con $0 \leq i \;, j \leq 2$ se tiene

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = a_{1,0} + 2a_{2,0}x + a_{1,1}z + 3a_{3,0}x^2 + a_{1,2}z^2 + 2a_{2,1}xz$$

(B2)

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = a_{0,1} + 2a_{0,2}z + a_{1,1}x + 3a_{0,3}z^2 + 2a_{1,2}xz + a_{2,1}x^2$$

de donde,

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]_0 = a_{1,0}$$

(B3)

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]_0 = a_{0,1}$$

Una combinación lineal de cuarto orden para (B3) que sólo depende de las restricciones $gh^3c_{1,0}$ y $g^3hc_{0,1}$ es,

$$6gh\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_0 = \left[\frac{(3g^2-h^2)}{g} + \frac{gh}{4}(p_1-p_3)\right](\phi_1-\phi_3) + ghp_o(\phi_1+\phi_3-2\phi_o)$$

$$+\frac{h^2}{4}(q_1-q_3)(\phi_2-\phi_4) + \frac{h^2}{4}q_0(\phi_5-\phi_6+\phi_7-\phi_8)$$

$$+\frac{h^2}{2g}(\phi_5-\phi_6-\phi_7+\phi_8) - \frac{gh^2}{2}(f_1-f_3) + O(e^5)$$

(B4)

$$6gh\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 = \left[\frac{(3h^2-g^2)}{h} + \frac{gh}{4}(q_2-q_4)\right](\phi_2-\phi_4) + ghq_o(\phi_2+\phi_4-2\phi_o)$$

$$+\frac{g^2}{4}(p_2-p_4)(\phi_1-\phi_3) + \frac{g^2}{4}p_0(\phi_5-\phi_6+\phi_7-\phi_8)$$

$$+\frac{g^2}{2h}(\phi_5+\phi_6-\phi_7-\phi_8) - \frac{g^2h}{2}(f_2-f_4) + O(e^5)$$

Estas aproximaciones no solo dependen de ϕ_0 a ϕ_8, es decir, de la función, sino que también de la ecuación diferencial que cumple la solución ϕ. Las derivadas de ρ' se obtienen de (11) y (B4) con, $\phi = \rho'$, $p = -u$, $q = -w$ y $f = 0$. Las ecuaciones que resultan son,

$$6gh\left(\frac{\partial\rho'}{\partial x}\right)_0 = \left[\frac{(3g^2-h^2)}{g} + \frac{gh}{4}(u_3-u_1)\right](\rho'_1-\rho'_3) - ghu_0(\rho'_1+\rho'_3-2\rho'_0)$$

$$+\frac{h^2}{4}(w_3-w_1)(\rho'_2-\rho'_4) - \frac{h^2}{4}w_0(\rho'_5-\rho'_6+\rho'_7-\rho'_8)$$

$$+ \frac{h^2}{2g} (\rho'_5 - \rho'_6 - \rho'_7 + \rho'_8) + O(e^4)$$

(B5)

$$6gh\left(\frac{\partial \rho'}{\partial z}\right)_0 = \left[\frac{(3h^2 - g^2)}{h} + \frac{gh}{4}(w_4 - w_2)\right](\rho'_2 - \rho'_4) - ghw_0(\rho'_2 + \rho'_4 - 2\rho'_0)$$

$$+ \frac{g^2}{4}(u_4 - u_2)(\rho'_1 - \rho'_3) - \frac{g^2}{4} u_0(\rho'_5 - \rho'_6 + \rho'_7 - \rho'_8)$$

$$+ \frac{g^2}{2h} (\rho'_5 + \rho'_6 - \rho'_7 - \rho'_8) + O(e^4)$$

Las derivadas de ϕ se obtienen de (12) y (B4) con, $u = \psi$, $p = q = 0$ y $f = -\zeta$, de donde

$$6gh\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0 = (3g^2 - h^2)\left[\frac{(\psi_1 - \psi_3)}{g}\right] + \frac{h^2}{2g}(\psi_5 - \psi_6 - \psi_7 + \psi_8)$$

$$+ \frac{gh^2}{2}(\zeta_1 - \zeta_3) + O(e^4)$$

(B6)

$$6gh\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)_0 = (3h^2 - g^2)\left[\frac{(\psi_2 - \psi_4)}{h}\right] + \frac{g^2}{2h}(\psi_5 + \psi_6 - \psi_7 - \psi_8)$$

$$+ \frac{g^2 h}{2}(\zeta_2 - \zeta_4) + O(e^4)$$

con las cuales se calculan las componentes de velocidad u y w. Para $g = h$, (B5) y (B6) se reducen a (22) y (23) respectivamente.

APENDICE C

ESQUEMA DE SEGUNDO ORDEN PARA VORTICIDAD Y DENSIDAD EN FRONTERAS.

La ecuación de Poisson expresada en la notación de la Fig. 5

$$\zeta_0 = -\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right]_0 - \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right]_0 \tag{C1}$$

Una representación en diferencias finitas para los dos téminos entre paréntesis resulta en

$$\zeta_0 = -\frac{1}{h^2}\left[-3h\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_0 - \frac{7}{2}\psi_0 + 4\psi_1 - \frac{1}{2}\psi_2 \right] - \frac{1}{g^2}(-2\psi_0 + \psi_3 + \psi_4) \tag{C2}$$

donde

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_0 = \frac{1}{2h}(\psi_2 - \psi_0)$$

y para una celda cuadrada ($g = h$), (C2) cambia a (24) después de aplicar las condiciones de no deslizamiento y de frontera impermeable.

En el caso de ρ', se expresa (11) como

$$\left[u\frac{\partial \rho'}{\partial x} \right]_0 = \left[\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} \right]_0 + \left[\frac{\partial^2 \rho'}{\partial z^2} \right]_0 - \left[w\frac{\partial \rho'}{\partial z} \right]_0 \tag{C3}$$

y en términos de una expansión en series de Taylor similar a (C1) se tiene que,

$$\left[u\frac{\partial \rho'}{\partial x} \right]_0 = \frac{1}{h^2} \left[-3h \left[\frac{\partial \rho'}{\partial x} \right]_0 - \frac{7}{2}\rho'_0 + 4\rho'_1 - \frac{1}{2}\rho'_2 \right]$$

$$+ \frac{1}{g^2}(-2\rho_0' + \rho_3' + \rho_4') - \frac{1}{2g} w_0(\rho_3' - \rho_4') \qquad \text{(C4)}$$

y despejando ρ'_0 resulta

$$\rho'_0 = \frac{2g^2h^2}{(7g^2 + 4h^2)} \left\{ \frac{1}{h^2} \left[-h(3 + hu_0) \left[\frac{\partial \rho'}{\partial x} \right]_0 + 4\rho'_1 - \frac{1}{2}\rho'_2 \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{g^2} \left[\rho'_3 + \rho'_4 - \frac{g}{2} w_0(\rho'_3 - \rho'_4) \right] \right\} \qquad \text{(C5)}$$

Para una celda cuadrada se obtiene (25) después de considerar condiciones en la frontera para paredes aislantes y de no deslizamiento.

En muchos problemas, incluyendo los que aquí se tratan, las fronteras son rígidas e inmóviles y tanto ψ_0, ψ_3 y ψ_4 como u_0 y w_0 son nulos. Por ello, (C4) y (C5) se reducen a relaciones más simples.