

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**

**ANÁLISIS TEÓRICO DE UN ACOPLADOR
DIRECCIONAL MICROÓPTICO**

**TESIS
MAESTRO EN CIENCIAS**

JUAN CRISÓSTOMO TAPIA MERCADO

Ensenada, Baja California, México, noviembre de 1993

RESUMEN de la tesis de Juan Crisóstomo Tapia Mercado presentada como requisito parcial para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS EN FISICA APLICADA con opción en OPTICA. Ensenada, Baja California, México. Noviembre de 1993.

ANALISIS TEORICO DE UN ACOPLADOR DIRECCIONAL MICROOPTICO

Resumen aprobado por:



Dr. Martín Celaya Barragán
Director de Tesis

En este trabajo se presenta un estudio de un acoplador direccional basado en un sistema óptico compuesto de lentes cilíndricas de índice de refracción con variación radial, analizando su eficiencia principalmente a las aberraciones de la lente.

Se realiza una revisión de la teoría de gradiente con el fin de obtener expresiones analíticas de las aberraciones de Seidel para determinar la influencia de estas en el acoplador direccional. Además se encuentran las condiciones para determinar que rayos pueden transmitirse a través de una lente cilíndrica de índice de refracción con variación gradual.

TESIS DEFENDIDA POR: JUAN CRISOSTOMO TAPIA MERCADO

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITE:



DR. MARTIN CELAYA BARRAGAN.- Director del Comité



M.C. JOSUE ALVAREZ BORREGO.- Miembro del Comité



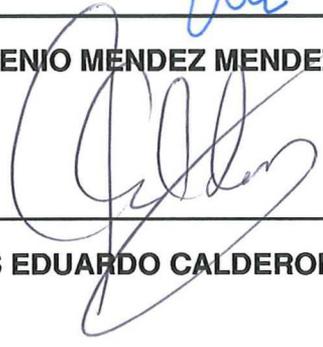
DR. ENRIQUE GOMEZ TREVIÑO.- Miembro del Comité



DR. JAVIER MENDIETA JIMENEZ.- Miembro del Comité



DR. EUGENIO MENDEZ MENDEZ.- Jefe Depto. Optica



DR. LUIS EDUARDO CALDERON AGUILERA.- Director de Estudios de Posgrado

1o. DE DICIEMBRE DE 1993

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA.

DIVISION DE FISICA APLICADA
DEPARTAMENTO DE OPTICA

ANALISIS TEORICO DE UN ACOPLADOR DIRECCIONAL
MICROOPTICO.

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de MAESTRO
EN CIENCIAS presenta:

JUAN CRISOSTOMO TAPIA MERCADO

Ensenada, Baja California. Noviembre de 1993

DEDICATORIA

al más pequeño de la familia

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Martín Celaya Barragan por la dirección de esta tesis.

A todos los miembros del comité de Tesis por su colaboración y observaciones.

Al Centro de Investigación Científica y Educación de Ensenada.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

A mis compañeros de generación Francisco, Jesús y Pedro.

A Javier Camacho por las recomendaciones hechas a este trabajo.

A Felix Aguilar por su valiosa ayuda.

Al Dr. Héctor Escamilla Taylor por la revisión de la tesis.

Y a todos los amigos que de una u otra manera contribuyeron para que este trabajo saliera adelante.

CONTENIDO

	<u>Página</u>
I. INTRODUCCION.	
I.1 Objetivo.	1
I.2 Antecedentes.	3
I.2.1 La Optica de índice de gradiente.	3
I.2.2 Diseño de lentes de índice de gradiente.	4
II. TEORIA DE GRADIENTE	
II.1. Ecuación diferencial de los rayos.	6
II.2 Ecuación diferencial general de los rayos en un medio de índice de refracción con variación gradual.	10
II.3 Solución de la ecuación diferencial de los rayos a primer orden.	13
II.4 Análisis del trazo de rayos a tercer orden.	17
II.5 Trazo de rayos meridionales a tercer orden.	18
II.6 Trazo de rayos oblicuos a tercer orden.	20
II.7 Análisis del trazo de rayos a quinto orden.	21
II.8 Trazo de rayos meridionales a quinto orden.	22
II.9 Formulación de la solución para rayos meridionales en series de potencia.	25
II.10 Trazo de rayos oblicuos a quinto orden.	27
II.11 Programa de trazo de rayos.	28
III. TEORIA DE ABERRACIONES.	
III.1 Aberración esférica.	35
III.2 Aberración de coma.	37
III.3 Aberración de distorsión.	39
IV. ANALISIS DEL HAZ DE LUZ ACEPTADO EN LENTES GRIN.	
IV.1 Rayos aceptados y ángulo del cono de luz aceptado por una lente grin.	52

V. ACOPLADOR DIRECCIONAL MICROOPTICO.	
V.1 Descripción básica del acoplador.	58
V.2 Pérdidas de acoplamiento debidas al desplazamiento lateral	67
V.3 Pérdidas debido a la inclinación entre las lentes.	70
V.4 Pérdidas debido a una interface entre las lentes grin.	72
V.5 Diámetro de la lente receptora.	77
V.6 Eficiencia de acoplamiento debida a la aberración esférica.	78
VI. CONCLUSIONES.	86
LITERATURA CITADA.	89
APENDICE A. PROGRAMAS DE TRAZO DE RAYOS.	91
APENDICE B. CALCULO DE LA DISTANCIA FOCAL PARAXIAL Y POSTERIOR.	94
APENDICE C. CALCULO DEL RADIO Y POSICION DE LA PUPILA DE ENTRADA.	96
APENDICE D. AMPLIFICACION PARAXIAL Y RELACION ENTRE LAS DISTANCIAS OBJETO E IMAGEN.	100
APENDICE E. CALCULO DE LAS ALTURAS DE LOS RAYOS MERIDIONALES QUE PASAN A TRAVES DE UNA LENTE GRIN.	103
APENDICE F. ABERTURA DE CAMPO.	106

LISTA DE FIGURAS

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
1	Ilustración del significado de S y de $d\vec{r}/ds = \hat{s}$	7
2	Perfil del índice de refracción de lentes de gradiente radial.	10
3	Lente con simetría cilíndrica.	11
4	Período PL de los rayos en lentes con gradiente radial	16
5	Diagrama de flujo para calcular las coordenadas de los rayos.	29
6	Trazo paraxial. La gráfica muestra la trayectoria de rayos meridionales bajo la aproximación paraxial para el plano zy . El rayo está incidiendo a una altura inicial $y = 0.1$ con un coseno director $q = 0.12$. En la superficie de salida se obtiene el resultado esperado, es decir, $y = 0.1$.	30
7	Trazo a tercer orden. La gráfica muestra la trayectoria de un rayo meridional bajo la aproximación a tercer orden. Bajo esta aproximación y considerando los mismos datos de entrada para las coordenadas del rayo que en el caso anterior, se obtiene que la altura de éste al salir de la lente es $y = 0.098722$.	31
8	Trazo a quinto orden. Para la aproximación a quinto orden y bajo las mismas condiciones de entrada se obtiene que la altura al final de la lente es $y = 0.095324$	32
9	Altura del rayo meridional en el plano focal.	34
10	Relación entre la aberración esférica longitudinal y la transversal.	36
11	Definición de coma meridional.	37
12	Definición de curvatura meridional.	40
13	Definición de curvatura sagital.	41
14	Altura de un rayo meridional en el plano imagen de una lente con gradiente radial.	44
15	Gráfica de la aberración lateral contra el ángulo de incidencia del rayo para una lente GRIN con las siguientes condiciones: longitud igual a medio período, índice de refracción en el eje óptico igual a 1.608, constante g igual a 0.339.	50
16	Lugar geométrico de los rayos aceptados por la lente GRIN.	56

17	La figura muestra los diagramas de manchas para varios conos de rayos de luz. Diagrama obtenido en el plano $ZI=9.3$, donde el trazo de rayos se realizó para una lente GRIN que tiene las siguientes características: Diámetro: 1.8mm; longitud: $ZI=9.3$ mm; índice de refracción: 1.608; abertura numérica: 0.46; y parámetro g de la lente: 0.339.	57
18	Fibras acopladas por medio de lentes GRIN.	59
19	Trayectoria del rayo dentro de la lente GRIN.	60
20	Coordenadas del rayo en la lente transmisora.	62
21	Coordenadas del rayo en la lente receptora.	63
22	Trayectoria típica de un rayo en una lente GRIN.	64
23	Trayectoria de los rayos en una lente trnasmisora.	65
24	Desplazamiento lateral entre lentes GRIN. Vista de la sección transversal.	68
25	Vista del área de traslape de las lentes GRIN.	69
26	Pérdidas de acoplamiento debidas al desplazamiento lateral.	70
27	Inclinación entre las lentes.	71
28	Pérdidas de acoplamiento debidas a la inclinación entre las lentes	72
29	Efectos del espacio de aire entre las lentes. Trazo de los rayos axiales del cono de luz emitido cuando: a) no existe espacio de aire b) existe espacio de aire.	73
30	Trayectoria de los rayos cuando esta presente un espacio de aire.	75
31	Pérdida de acoplamiento causada por la separación entre las lentes.	77
32	Distribución de luz a la salida de la fibra.	80
33	Definición del elemento de área dA .	81
34	Eficiencia de acoplamiento para un acoplador direccional.	85

ANALISIS TEORICO DE UN ACOPLADOR DIRECCIONAL MICROOPTICO

I. INTRODUCCION

I.1 Objetivo

La mayoría de los dispositivos que se utilizan para manipular y procesar señales mediante fibras ópticas, incluyen un sistema de lentes que se utilizan para convertir el haz de luz divergente de la fibra de entrada, en un haz convergente que puede ser acoplado a otra fibra óptica. Las lentes utilizadas hoy en día son de un material inhomogéneo, en el cual el índice de refracción varía de un punto a otro de una manera continua. Este tipo de lentes inhomogéneas son conocidas como lentes GRIN (Gradient Index).

El campo de la óptica GRIN ha ido en aumento constante después de su nacimiento alrededor de 1969 con el descubrimiento de la tecnología de difusión iónica. El progreso ha sido lento pero sostenido, al mismo tiempo que se ha desarrollado una intensa actividad de investigación en diversas direcciones [Marchand, 1982].

Las dificultades inmediatas que se presentaron fueron [Moore, 1980]:

- 1) La fabricación de elementos con grandes dimensiones y grandes cambios en el índice en el índice de refracción.
- 2) El control del perfil en el índice de refracción.
- 3) La medida aproximada del perfil del índice de refracción.
- 4) Las medidas y el control de las propiedades cromáticas de los elementos GRIN.

Hoy en día, varias aplicaciones de los elementos GRIN son comercialmente importantes; por mencionar algunas se tiene: arreglos GRIN para máquinas de fotocopiado [M. Kawazu et al, 1980], lentes para endoscopios, lentes para sistemas de discos ópticos, conectores para comunicaciones por fibra óptica [A. K. Agarwal, 1985], entre otras.

Las lentes de índice de refracción con variación gradual se utilizan como dispositivos para diferentes aplicaciones tanto en óptica como en telecomunicaciones [W. J. Tomlinson, 1980]. Una de estas aplicaciones es el acoplador direccional microóptico, propuesto por K. Thyagarajan et al. (1980), que es básicamente un divisor de haz. La finalidad de este trabajo es la de realizar un estudio teórico de la eficiencia de un acoplador direccional microóptico.

En el presente capítulo se establece el objetivo de la tesis, se presentan los antecedentes y las principales líneas de investigación de la óptica GRIN, así como una descripción de las diferentes distribuciones espaciales del índice de refracción de los elementos GRIN.

En el segundo capítulo se presenta un estudio de la teoría de índice de gradiente, analizando el problema del trazo de rayos con aproximaciones a primero, tercero y quinto orden, y un programa de cómputo, con el propósito de tener las herramientas básicas para diseñar componentes o dispositivos que utilicen lentes de índice de gradiente radial.

En el tercer capítulo se analizan los conceptos fundamentales de la teoría de aberraciones para un sistema con simetría rotacional y se presentan expresiones analíticas de las aberraciones de Seidel para lentes de índice de gradiente radial.

En el cuarto capítulo se presenta un análisis de las características de acoplamiento de las lentes de índice de gradiente cuando éstas se utilizan como dispositivos para acoplar una fuente de luz a una fibra óptica.

En el capítulo cinco se analiza la eficiencia de un acoplador direccional microóptico en relación con las pérdidas causadas por el desplazamiento lateral, desplazamiento angular, aberraciones y el espacio entre las lentes GRIN.

En el capítulo seis se presentan las conclusiones de este estudio, y se proponen futuras actividades de investigación en esta línea de trabajo.

I.2 Antecedentes

I.2.1 La óptica de índice de gradiente

En un sistema óptico convencional el índice de refracción de cada componente es uniforme, es decir, es homogéneo para cada material. En el diseño de tales sistemas se pueden variar, en forma independiente; las curvaturas, los espesores y el índice de refracción de cada componente, para tratar de optimizar el funcionamiento del sistema óptico.

En el caso de los componentes GRIN, la variación en el índice de refracción es un factor más que se toma en cuenta en el diseño de sistemas ópticos.

El campo de la óptica de índice de gradiente está subdividida principalmente en dos tipos de aplicaciones [Iga et al, 1984]; la primera es el uso de componentes de índice de gradiente para las telecomunicaciones y la segunda para la formación y transmisión de imágenes. En el primer caso, el material utilizado consta de fibras ópticas de kilómetros de longitud con un diámetro de 20 a 100 micras. El índice de refracción varía desde el centro de la fibra, de tal manera que el índice es más grande a lo largo del centro de la fibra que en sus orillas. Si el perfil del índice se selecciona apropiadamente, la altura de los rayos varía senoidalmente a lo largo de la fibra, sin tocar las paredes de la misma. Esto difiere dramáticamente con las fibras de índice de escalón. En éstas la propagación de la luz se basa en la reflexión interna total en las paredes y la velocidad de propagación de los distintos modos es diferente.

La segunda aplicación, para formación y transmisión de imágenes, puede dividirse en dos secciones de estudio; la primera es el diseño y análisis óptico de sistemas, que implica el problema del cálculo de aberraciones, ya sea por medio de la teoría de aberraciones [Sands, 1971] o por los algoritmos del trazo de rayos [Marchand, 1976]. La segunda área de importancia es la fabricación de tales materiales que fué la principal limitación en la implementación de la óptica de índice de gradiente. En la actualidad existen muchos materiales con los que se pueden hacer lentes GRIN. Estos incluyen vidrio óptico, plásticos, germanio, zinc, y selenio [Iga et al, 1977]. Dentro de esta obra es importante el control y medición del perfil del índice de refracción.

I.2.2 Diseño de lentes de índice de gradiente

Existen tres tipos de gradientes de índice de refracción. El primero es el gradiente axial. En este, el índice de refracción varía a lo largo del eje óptico. Las superficies de índice de refracción constante son planos perpendiculares al eje óptico. Estos gradientes son usados particularmente para reemplazar superficies esféricas.

El segundo tipo de gradiente es el radial o gradiente cilíndrico [Rawson et al, 1970]. El perfil del índice de refracción varía continuamente desde el eje óptico hacia los extremos de tal manera que las superficies de índice constante son cilindros cuyo eje corresponde al eje óptico del sistema de lentes. Existen dos ejemplos notables de estos; primero está la fibra de índice de gradiente, y el segundo es la lente Wood, propuesta en 1905 [Marchand, 1978].

El tercer tipo de gradiente es el esférico, el cual tiene el índice de refracción simétrico alrededor de un punto, y por tanto, las superficies de índice constante son esferas. En este tipo, no coinciden necesariamente el centro de simetría del gradiente y el centro de curvatura de la

superficie física. De cualquier manera, si esto sucede, existen dos diseños de ellos; el primero es el ojo de pescado de Maxwell, desarrollado en 1854, y la lente de Luneburg usada en la región del espectro de las microndas para imágenes acústicas [Born y Wolf, 1975].

En la construcción de componentes o sistemas basados en índice de gradiente debe considerarse dos aspectos distintos. Primero, el diseño de la componente o sistema óptico y segundo, las técnicas analíticas para evaluar su calidad.

El diseño de lentes que emplean componentes de índice de gradiente está limitado solamente por el tiempo. Se puede pensar en un número ilimitado de sistemas de lentes que podrían ser diseñados usando componentes de índice de gradiente. Entre éstos se incluyen lentes colimadoras, lentes Wood fotográficas, arreglos de fibras ópticas usadas en equipo de fotocopiado y objetivos de microscopio. Es importante señalar que éstos representan solamente un pequeño porcentaje de todos los sistemas de lentes que podrían ser diseñados.

Las técnicas analíticas son básicamente extensiones de los métodos usados para medios homogéneos. El efecto que causa un índice de gradiente radial en la trayectoria del rayo es que ésta no es rectilínea [Paxton et al, 1971], como ocurre en el caso de las lentes convencionales.

II. TEORIA OPTICA CON GRADIENTE EN EL INDICE DE REFRACCION

El propósito de este capítulo es el de presentar las herramientas básicas para diseñar componentes o dispositivos, tanto en instrumentación óptica como en telecomunicaciones, que utilicen lentes de índice con gradiente radial.

La variación en el índice de refracción puede ser axial, radial o una combinación de las dos. Las lentes tratadas en este trabajo son del tipo SELFOC, las cuales son lentes de índice de refracción con variación gradual que presenta simetría axial.

Este tipo de lentes son fáciles de usar y además son confiables para el acoplamiento de luz de un láser a una fibra óptica [Nishizawa et al, 1984] y en otras muchas aplicaciones, de las cuales se analizará una en particular: un acoplador direccional que está basado en el uso de lentes GRIN.

Por tal motivo, en este capítulo se analiza el problema del trazo de rayos en un medio de gradiente con aproximaciones a primero, tercero y quinto orden, con la finalidad de estudiar posteriormente la teoría de aberraciones y los rayos aceptados por este tipo de lentes, para hacer un análisis de las características de acoplamiento entre dos fibras ópticas cuando se utilizan lentes GRIN como medio acoplador.

II.1 Ecuación diferencial de los rayos

Como se mencionó anteriormente, si el sistema óptico acoplador está formado por lentes con variación gradual en el índice de refracción, entonces es necesario estudiar el problema del trazo de rayos en un medio inhomogéneo, con la finalidad de encontrar expresiones analíticas que permitan conocer la trayectoria de los rayos de luz a través de este medio. A partir de la ecuación de la eikonal, la cual representa los frentes geométricos de las ondas, se puede deducir la ecuación diferencial de los rayos en su forma general.

Utilizando las ecuaciones de Maxwell se demuestra [Born y Wolf, 1975] que el frente de onda geométrico para una superficie \vec{r} se describe por:

$$S(\vec{r}) = \text{constante}, \quad (1)$$

donde \vec{r} es el vector posición de un punto sobre el rayo (frente de onda) y S es un campo escalar que satisface la siguiente ecuación:

$$(\nabla S)^2 = n^2, \quad (2)$$

donde $n = n(\vec{r})$ representa la distribución del índice de refracción.

La ecuación (2), llamada ecuación de la eikonal, se conoce como la ecuación básica de la óptica geométrica; de donde se obtiene la ecuación diferencial de los rayos (vector normal al frente de onda).

De la ecuación (1), el rayo está en la dirección del gradiente de la eikonal S . Utilizando la ecuación (2), se tiene que este gradiente está dado por

$$\nabla S = n\hat{s}, \quad (3)$$

donde \hat{s} es un vector unitario en la dirección de propagación del frente de onda.

Si s es la distancia a lo largo del rayo, entonces la ecuación del rayo está dada por

$$\hat{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}. \quad (4)$$

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{n} (\nabla S) \cdot \nabla, \quad (7)$$

y utilizando este resultado en la ecuación (5), se obtiene

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \frac{1}{n} (\nabla S) \cdot \nabla (\nabla S). \quad (8)$$

La ecuación (8) puede escribirse como

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \frac{1}{2n} \nabla (\nabla S)^2, \quad (9)$$

utilizando la ecuación de la eikonal. La ecuación (9) queda de la siguiente forma:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \nabla n. \quad (10)$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación diferencial para el rayo.

Las cantidades n , ∇n y \vec{r} son funciones de las coordenadas de posición (x, y, z) , y la ecuación (10) tiene derivadas con respecto a s y no con respecto a las coordenadas de posición, por lo tanto, dicha ecuación no es una forma estándar para una ecuación diferencial.

La ecuación (10) puede expresarse como

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x}, \quad \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial y}, \quad \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial z}, \quad (11)$$

Si se considera a z como una variable independiente, entonces utilizando la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dz} \frac{dz}{ds}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{ds}, \quad \frac{dz}{ds} \frac{ds}{dz} = 1, \quad (12)$$

Para tal caso, se demuestra [Marchand, 1978] que la ecuación (10) puede expresarse como

$$n \frac{d^2 x}{dz^2} = \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{dx}{dz} \frac{\partial n}{\partial z} \right] \quad (13a)$$

y

$$n \frac{d^2 y}{dz^2} = \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{dy}{dz} \frac{\partial n}{\partial z} \right], \quad (13b)$$

las cuales representan las ecuaciones diferenciales generales para el trazo de rayos.

II.2 Ecuación diferencial general de los rayos en un medio de índice de refracción con variación radial.

El término gradiente radial se utiliza para distribuciones del índice de refracción que tienen simetría cilíndrica. La figura 2 muestra el perfil del índice de refracción típico en lentes de gradiente radial.

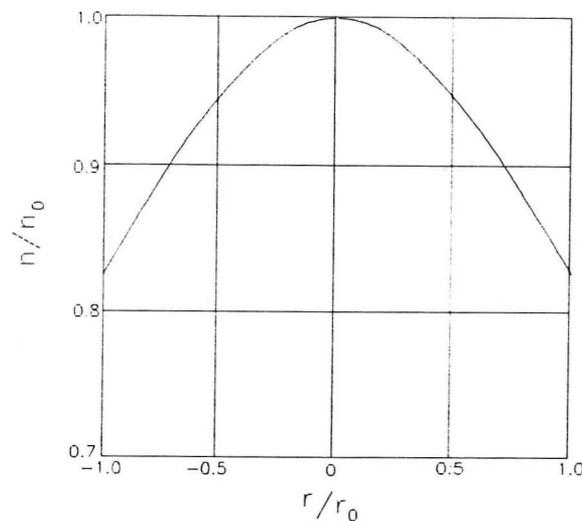


Figura 2. Perfil del índice de refracción de lentes de gradiente radial.

En este caso, $n(r)$ depende de la distancia radial r a una línea fija, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

(figura 3).

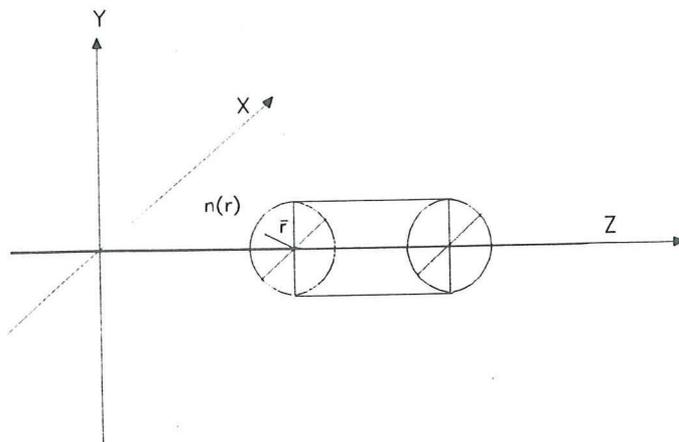


Figura 3. Lente con simetría cilíndrica.

Considerando que el eje de simetría coincide con el eje z , se tiene que

$$\frac{dn}{dz} = 0, \quad (14)$$

y la tercera componente de la ecuación (10) queda de la siguiente forma:

$$n \frac{dz}{ds} = l = l_0 = \text{constante}; \quad (15)$$

lo que muestra que l es invariante a lo largo de cualquier rayo para cualquier plano de la lente.

Los cosenos directores se definen como

$$p = n \frac{dx}{ds} = n \cos(\alpha), \quad (16)$$

$$q = n \frac{dy}{ds} = n \cos(\beta), \quad (17)$$

$$l = n \frac{dz}{ds} = n \cos(\gamma). \quad (18)$$

Utilizando las ecuaciones (13) y (14) se tiene que las ecuaciones para cualquier gradiente radial pueden expresarse en forma vectorial como:

$$n \frac{d^2 \vec{r}}{dz^2} = \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right] \nabla n. \quad (19)$$

Esta ecuación puede expresarse utilizando las ecuaciones (16), (17) y (18) como

$$n \frac{d^2 \vec{r}}{dz^2} = \left(\frac{ds}{dz} \right)^2 \nabla n = \frac{n^2}{l^2} \nabla n, \quad (20)$$

por tanto, las ecuaciones diferenciales en su forma vectorial, para cualquier gradiente radial se representan de la siguiente forma

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dz^2} = \frac{n}{l_0^2} \nabla n. \quad (21)$$

La ecuación (21) puede resolverse por diferentes métodos dependiendo de la variación del índice de refracción n con el radio del cilindro [Streifer et al,1970], [Brown, 1980], [Southweill, 1982], [Marchand, 1988], cuyo eje representa el eje óptico de la lente.

A la fecha parece ser que no existe una distribución radial que dé una imagen nítida o exacta. Sin embargo, se ha demostrado [Streifer et al, 1971] que todos los rayos meridionales se enfocan periódicamente si obedece la ecuación

$$N_m^2(r) = n_0^2 \operatorname{sech}^2(\delta^{1/2} r/r_0), \quad (22)$$

donde n_0 es el índice de refracción en el centro del cilindro; r_0 el radio y δ es un parámetro adimensional que da una medida de la inhomogeneidad. También se ha demostrado que, todos los rayos helicoidales tienen una misma velocidad axial y por lo tanto una forma óptima de ser guiados si la variación del índice está dada por [Streifer et al, 1971]

$$N_h^2 = n_0^2 [1 + \delta(r/r_0)^2]^{-1}. \quad (23)$$

De aquí la importancia de determinar las trayectorias de los rayos para diferentes tipos de variación en el índice de refracción. Se han realizado cálculos numéricos para combinaciones de las ecuaciones (22) y (23) con diferentes pesos para N_h y N_m de la siguiente forma:

$$N(r) = (1 - c)N_m + cN_h; \quad (24)$$

la cual, desarrollada en serie de Taylor puede expresarse como

$$N^2(r) = n_0^2[1 - \delta(r/r_0)^2 + \alpha_2\delta^2(r/r_0)^4 + \dots], \quad (25)$$

o bien como [Iga, 1980]

$$n^2 = n_0^2[1 - R^2 + h_4R^4 + h_6R^6 + \dots], \quad (26)$$

con $R = gr$, $r^2 = x^2 + y^2$, $g = \frac{\sqrt{\delta}}{r_0}$, y donde n_0 , g , h_4 , h_6 son constantes y r_0

es el radio del cilindro.

En la siguiente sección se resuelve la ecuación diferencial de los rayos (21) para variaciones del índice de refracción de la forma dada por la ecuación (26).

II.3 Solución de la ecuación diferencial de los rayos a primer orden

Los rayos paraxiales son aproximaciones a los rayos reales en un sistema óptico. Las trayectorias de estos rayos se obtienen despreciando potencias de segundo y más alto orden en las alturas e inclinaciones del rayo en las fórmulas del trazo de rayos. Estos rayos ficticios sirven como una buena aproximación a los rayos reales, cuando los rayos están cerca del eje óptico y dan predicciones aproximadas en forma simple de las propiedades de formación de imágenes de un sistema óptico.

Una forma simple de derivar las fórmulas paraxiales es considerar el índice de gradiente de la forma descrita en la ecuación (26) y utilizar la ecuación diferencial de los rayos.

Dado que

$$1/2 \nabla n^2 = n \nabla n = n (\nabla r) \frac{dn}{dr} = n \frac{\vec{r}}{r} \frac{dn}{dr} = 1/2 \frac{\vec{r}}{r} \frac{dn^2}{dr}, \quad (28)$$

entonces de la ecuación (26), se tiene que

$$n \nabla n = n_0^2 (-R + 2h_4 R^3 + 3h_6 R^5 + \dots) \frac{\vec{g}r}{r}. \quad (29)$$

Dividiendo la ecuación (29) entre l^2 y sustituyendo en la ecuación diferencial para un gradiente radial (21), se tiene que

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dz^2} = \frac{n_0^2}{l_0^2} (-R + 2h_4 R^3 + 3h_6 R^5 + \dots) \frac{\vec{g}r}{r}, \quad (30)$$

donde $X = gx$, $Y = gy$, y $R^2 = X^2 + Y^2$

Además, es conveniente introducir la variable independiente

$$t = \frac{n_0 g z}{l_0}, \quad (31)$$

donde $l = n \cos(\gamma) = l_0 = n_0 \cos(\gamma_0)$.

Utilizando esta notación, se tiene que

$$p = n \frac{dx}{ds} = n \left(\frac{dx}{dz} \frac{dz}{ds} \right) = l_0 \frac{dx}{dz} = n_0 \frac{dX}{dt}, \quad (32)$$

$$U = X' = \frac{dX}{dt} = p/n_0, \quad (33a)$$

$$V = Y' = \frac{dY}{dt} = q/n_0, \quad (33b)$$

y la ecuación diferencial de los rayos (30) toma la siguiente forma, un poco más simple

$$X'' + X = X(2h_4 R^2 + 3h_6 R^4 + \dots), \quad (34a)$$

$$Y'' + Y = Y(2h_4 R^2 + 3h_6 R^4 + \dots), \quad (34b)$$

con las condiciones iniciales

$$X(0) = X_0, \quad Y(0) = Y_0, \quad V(0) = V_0, \quad U(0) = U_0 \quad \text{en } t = 0.$$

La solución a primer orden se encuentra despreciando los términos de alto orden; con esto, las ecuaciones diferenciales quedan de la siguiente manera:

$$X'' + X = 0, \tag{35a}$$

$$Y'' + Y = 0, \tag{35b}$$

las cuales son ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes, y su ecuación característica está dada por

$$m^2 + 1 = 0, \tag{36}$$

de donde las raíces son

$$m = \pm i, \tag{37}$$

es decir, tienen dos raíces distintas que son complejas y su solución general está dada por

$$Y = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}, \tag{38}$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$Y(0) = Y_0, \tag{39a}$$

$$Y'(0) = V_0. \tag{39b}$$

Entonces, las soluciones a estas ecuaciones diferenciales son

$$X = X_0 \cos(t) + U_0 \sin(t), \tag{40a}$$

$$Y = Y_0 \cos(t) + V_0 \sin(t), \tag{40b}$$

y sus respectivos cosenos directores están dados por X' y Y' , es decir, por

$$X' = U_1 = U_0 \cos(t) - X_0 \sin(t), \tag{41a}$$

$$Y' = V_1 = V_0 \cos(t) - Y_0 \sin(t), \tag{41b}$$

Como se puede ver, de las ecuaciones (40) y (41), todos los rayos paraxiales, meridionales oblicuos son periódicos (figura 4)

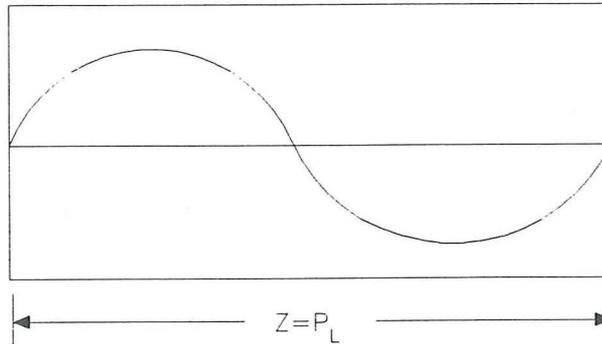


Figura 4. Período PL de los rayos en lentes con gradiente radial

De la figura 4 y de las ecuaciones (40) y (31), se tiene que el período PL está dado por

$$PL = 2\pi \frac{l_0}{n_0 g} = 2\pi \frac{l_0}{b}, \quad (42)$$

donde $b = n_0 g$.

Dado que $l_0 = n_0 \cos(\gamma_0)$, donde n_0 es el índice de refracción para $z = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$, entonces el período va a cambiar para diferentes valores iniciales de $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Además, para un mismo punto r , rayos con diferente inclinación γ_0 respecto al eje z tendrán también diferente período.

Sólo en el caso paraxial, en el cual $\cos(\gamma_0) \approx 1$, se puede considerar que $l_0 \approx n_0$, entonces se puede decir que los rayos tendrán el mismo período. De la ecuación(42) se tiene que

$$PL_p = \frac{2\pi l_0}{b} = \frac{2\pi}{g}. \quad (43)$$

Como

$$X = gx, \quad Y = gy, \quad Z = gz,$$

$$U = X' = \frac{dX}{dt} = \frac{p}{n_0},$$

$$V = Y' = \frac{dY}{dt} = \frac{q}{n_0},$$

las ecuaciones para las coordenadas (x, y) y los cosenos directores (p, q) toman la forma

$$x = x_0 \cos(t) + \frac{p_0}{b} \operatorname{sen}(t), \quad (44a)$$

$$y = y_0 \cos(t) + \frac{q_0}{b} \operatorname{sen}(t), \quad (44b)$$

$$p = p_1 \cos(t) - bx_0 \operatorname{sen}(t), \quad (45a)$$

$$q = q_0 \cos(t) - by_0 \operatorname{sen}(t) \quad (45b)$$

II.4 Análisis del trazo de rayos a tercer orden

El siguiente nivel de aproximación es derivar las fórmulas de trazo de rayos en las cuales sólo se retienen los órdenes cuadráticos o menores.

La solución a tercer orden se encuentra utilizando el método de aproximaciones sucesivas [Simmons, 1977]. Esta solución es importante ya que la mayoría de las teorías de aberraciones están basadas en las desviaciones de los rayos reales de los paraxiales, dado que la formación de la imagen paraxial es la ideal en muchos aspectos.

La solución a primer orden para las ecuaciones (34) se obtiene resolviendo las siguientes ecuaciones homogéneas:

$$X'' + X = 0 \quad Y'' + Y = 0 \quad (46)$$

La solución está sujeta a las condiciones iniciales X_0 , Y_0 , U_0 , y V_0 en $z = 0$.

Esto es, la solución se puede escribir de la siguiente forma

$$X_1 = X_0 c + U_0 s, \quad U_1 = U_0 c - X_0 s, \quad (47a)$$

$$Y_1 = Y_0 c + V_0 s, \quad V_1 = V_0 c - Y_0 s, \quad (47b)$$

donde

$$c = \cos t, \quad s = \sin t, \quad (48)$$

$$t = \frac{n_0 g z}{l_0} = \frac{n_0 Z}{l_0}, \quad (49)$$

$$X_0 = g x_0, \quad Y_0 = g y_0, \quad Z = g z_0, \quad (50)$$

$$U_0 = \frac{p_0}{n_0}, \quad V_0 = \frac{q_0}{n_0}. \quad (51)$$

Cuando X es pequeña, en las ecuaciones (34), la solución a tercer orden se obtiene resolviendo las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$X'' + X = 2h_4 X R^2, \quad (52)$$

$$Y'' + Y = 2h_4 Y R^2. \quad (53)$$

Utilizando la solución a primer orden, dada por la ecuación (47), se tiene que

$$X'' + X = 2h_4 X_1 (X_1^2 + Y_1^2), \quad Y'' + Y = 2h_4 Y_1 (X_1^2 + Y_1^2) \quad (54)$$

II.5 Trazo de rayos meridionales a tercer orden

Para el caso del trazo de rayos meridionales, se tiene que $X_1 = 0$, entonces se debe resolver la siguiente ecuación diferencial

$$Y'' + Y = 2h_4 Y_1^3 = 2h_4 (Y_0 c + V_0 s)^3 \quad (55)$$

Esta ecuación tiene la forma:

$$Y'' + Y = f(t) \quad (56)$$

Utilizando el método de transformada de Laplace [Simmons, 1977], se encuentra que cualquier ecuación de esta forma tiene por solución

$$Y = Y_1 + s \int_0^t c f dt - c \int_t^1 s f dt \quad (57)$$

y calculando estas integrales, la solución a tercer orden para rayos meridionales es la siguiente:

$$Y = Y_1 + 2h_4 Y_3 \quad , \quad V = Y'_1 + 2h_4 Y'_3 \quad (58)$$

donde

$$Y_3 = Y_0^3 M_1 + 3Y_0^2 V_0 M_2 + 3Y_0 V_0^2 M_3 + V_0^3 \quad (59)$$

con

$$M_1 = s \frac{(3A_0 - cs)}{4} \quad ,$$

$$M_2 = \frac{(s - cA_0)}{4} \quad ,$$

$$M_3 = \frac{sB_0}{4} \quad (60)$$

$$M_4 = \frac{(s^3 - 3cB_0)}{4} \quad ,$$

$$A_0 = \frac{(t + cs)}{2} \quad ,$$

y

$$B_0 = \frac{(t - cs)}{2}$$

II.6 Trazo de rayos oblicuos a tercer orden

Para el trazo de rayos oblicuos se considera que $X_1 \neq 0$ y $Y_1 \neq 0$, y para este caso

$$f_x(x) = 2h_4X_1^3 + 2h_4X_1Y_1^2, \quad f_y(y) = 2h_4Y_1^3 + 2h_4X_1^2Y_1 \quad (61)$$

Con esta consideración, la solución para el trazo de rayos oblicuos a tercer orden queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} X &= X_1 + 2h_4(X_0W_1 + U_0W_2), \\ Y &= Y_1 + 2h_4(Y_0W_1 + V_0W_2), \end{aligned} \quad (62)$$

con

$$R^2 = X^2 + Y^2,$$

donde

$$\begin{aligned} W_1 &= M_1u + M_2v + M_3w, \\ W_2 &= M_2u + M_3v + M_4w, \end{aligned} \quad (63)$$

con

$$u = X_0^2 + Y_0^2, \quad v = 2(X_0U_0 + Y_0V_0), \quad w = U_0^2 + V_0^2,$$

y donde

$$M_i = sA_i - cA_{i+1} \quad (i = 1 - 5). \quad (64)$$

Es necesario aclarar que se toma el $i = 5$ porque M_5 sirve para evaluar la aproximación a quinto orden.

Las A_i se obtienen por una serie de integraciones dadas por

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^t c^4 dt = \frac{(c^3 s + 3A_0)}{4}, \\
A_2 &= \int_0^t c^3 s dt = \frac{(1 - c^4)}{4}, \\
A_3 &= \int_0^t s^2 s^2 dt = (A_0 - A_1), \\
A_4 &= \int_0^t c s^4 dt = \frac{s^4}{4}, \\
A_5 &= \int_0^t s^4 dt = (3B_0 - c s^3),
\end{aligned} \tag{65}$$

donde

$$\begin{aligned}
A_0 &= \int_0^t c^2 dt = \frac{(t + cs)}{2}, \\
B_0 &= \int_0^t s^2 dt = \frac{(t - cs)}{2}
\end{aligned} \tag{66}$$

II.7 Análisis del trazo de rayos a quinto orden

En la sección anterior se encontraron las soluciones a la ecuación diferencial del rayo a tercer orden utilizando el método de aproximaciones sucesivas, en esta sección se sigue utilizando el mismo método para encontrar las soluciones a quinto orden.

Las ecuaciones (34) quedan ahora de la siguiente forma

$$X'' + X = 2h_4 X_c (X_c^2 + Y_c^2) + 3h_6 X_c (X_c^2 + Y_c^2)^2, \tag{67}$$

$$Y'' + Y = 2h_4 Y_c (X_c^2 + Y_c^2) + 3h_6 Y_c (X_c^2 + Y_c^2)^2,$$

donde X_c y Y_c son las soluciones a tercer orden dadas por (62), las cuales se pueden expresar como

$$X_{subc} = X_1 + 2h_4X_3,$$

$$Y_{subc} = Y_1 + 2h_4Y_3 \quad (68).$$

Con el fin de simplificar la solución a quinto orden se desprecian los términos que no contribuyen substancialmente. Esto es, se desprecian los términos mayores al primer orden en X_3 y Y_3 en el primer término del lado derecho de la ecuación (67), y en el segundo término sólo se considerará X_1^5 y Y_1^5 .

II.8 Trazo de rayos meridionales a quinto orden

Para el caso del trazo de rayos meridionales se toma $X = 0$, entonces la ecuación diferencial para rayos meridionales queda de la siguiente forma:

$$Y'' + Y = 2h_4Y_c^3 + 3h_6Y_c^5, \quad (69)$$

y de acuerdo a las consideraciones antes mencionadas se tiene, de la ecuación (68), que

$$Y_c^3 \sim Y_1^3 + 6h_4Y_1^2Y_3,$$

$$Y_c^5 \sim Y_1^5. \quad (70)$$

en este caso $f(t)$ está dada de la siguiente forma:

$$f(t) = 2h_4Y_1^3 + 12h_4^2Y_1^2Y_3 + 3h_6Y_1^5. \quad (71)$$

Utilizando el mismo procedimiento aplicado anteriormente, se tiene que desarrollar una serie de integrales básicas; hecho esto, la solución para el trazo de rayos meridionales a quinto orden queda de la siguiente forma:

$$Y = Y_1 + 2h_4Y_3 + 12h_4^2F_1 + 3h_6F_2,$$

$$V = Y_1' + 2h_4Y_3' + 12h_4^2F_1' + 3h_6F_2', \quad (71)$$

donde F_2 está dada por

$$F_2 = Y_0^5 N_1 + 5Y_0^4 V_0 N_2 + 10Y_0^3 V_0^2 N_3 + 20Y_0^2 V_0^3 N_4 + 5Y_0 V_0^4 N_5 + V_0^5 N_6, \quad (72)$$

y donde

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(c^5 - c + 5sA_1)}{6}, \\ N_2 &= \frac{(s - cA_1)}{6}, \\ N_3 &= M_1 - N_1, \\ N_4 &= M_2 - N_2, \\ N_5 &= M_3 - N_3, \\ N_6 &= M_4 - N_4, \end{aligned} \quad (73)$$

A_1 está dada por la ecuación (65) y F_1 está dada por

$$F_1 = Y_0^5 L_1 + Y_0^4 V_0 L_2 + Y_0^3 V_0^2 L_3 + Y_0^2 V_0^3 L_4 + Y_0 V_0^4 L_5 + V_0^5 L_6, \quad (74)$$

donde

$$\begin{aligned} L_1 &= sM_{11} - cM_{12}, \\ L_2 &= 2(sM_{12} - cM_{13}) + 3(sM_{21} - cM_{22}), \\ L_3 &= (sM_{13} - cM_{14}) + 6(sM_{22} - cM_{23}) + 3(sM_{31} - cM_{32}), \\ L_4 &= 3(sM_{23} - cM_{24}) + 6(sM_{32} - cM_{33}) + (sM_{41} - cM_{42}), \\ L_5 &= 3(sM_{33} - cM_{34}) + 2(sM_{42} - cM_{43}), \\ L_6 &= sM_{43} - cM_{44}, \end{aligned} \quad (74)$$

donde

$$M_{11} = \int_0^t c^3 M_1 dt, \quad M_{12} = \int_0^t c^2 s M_1 dt, \quad M_{13} = \int_0^t c s^2 M_1 dt, \quad (75)$$

etc.. Los cálculos de estas integrales dan los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
 M_{1i} &= \frac{(3D_{i+1} + C_{i+2})}{8}, \\
 M_{2i} &= \frac{(A_{i+1} + C_{i+3} - D_i)}{8}, \\
 M_{3i} &= \frac{(D_{i+1} - C_{i+2})}{8}, \\
 M_{4i} &= \frac{(2A_{i+1} + C_{i+1} - 3D_i)}{8},
 \end{aligned} \tag{76}$$

donde

$$\begin{aligned}
 D_i &= A_i t - E_i, \\
 E_1 &= \frac{(3E_0 - A_2)}{4}, \\
 E_2 &= \frac{(t - A_1)}{4}, \\
 E_3 &= E_0 - E_1, \\
 E_4 &= \frac{A_5}{4}, \\
 E_0 &= \frac{(t^2 + s^2)}{4}, \\
 F_0 &= \frac{(t^2 - s^2)}{4},
 \end{aligned} \tag{77}$$

y los valores de C_i están dados por

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{(c^5 s + s A_1)}{6}, \\
 C_2 &= \frac{(1 - c^6)}{6},
 \end{aligned}$$

$$C_3 = A_1 - C_1, \quad (78)$$

$$C_4 = A_2 - C_2,$$

$$C_5 = A_3 - C_3,$$

$$C_6 = A_4 - C_4,$$

$$C_7 = A_5 - C_5.$$

Los valores de E_i y C_i se calculan a partir de las siguientes integrales:

$$C_1 = \int_0^t c^6 dt, \quad C_2 = \int_0^t c^5 dt, \dots \text{ etc.},$$

$$E_1 = \int_0^t A_1 dt, \quad E_2 = \int_0^t A_2 dt, \dots \text{ etc.} \quad (79)$$

II.9 Formulación de la solución para rayos meridionales en series de potencia

En las ecuaciones (47), Y_1 y V_1 aparentan ser de primer orden en Y_0 y V_0 , sin embargo, éstas dependen de t , c y s de acuerdo a sus definiciones dadas por las ecuaciones (48) y (49), y por supuesto también del tercer coseno director l , de donde

$$l = l_0 = (n^2 - q_0^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (80)$$

y sustituyendo el índice de refracción dado por la ecuación (26), se obtiene

$$l_0 = n_0 [1 - (Y_0^2 + V_0^2) + h_4 Y_0^4 + h_6 Y_0^6]^{\frac{1}{2}}. \quad (81)$$

Esto lleva a un desarrollo en series para t , c y s dadas por

$$t = \frac{n_0 g z}{l_0} = Z \{1 - (Y_0^2 + V_0^2) + h_4 Y_0^4 + h_6 Y_0^6\}^{-\frac{1}{2}} \cong Z + Z_2 + Z_4,$$

$$c \cong C_0 \left(1 - \frac{Z_2^2}{2} \right) - S_0(Z_2 + Z_4), \quad (82)$$

$$s \cong S_0 \left(1 - \frac{Z_2^2}{2} \right) + C_0(Z_2 + Z_4),$$

donde

$$Z = zg,$$

$$C_0 = \cos Z,$$

$$S_0 = \sin Z,$$

$$Z_2 = a_2 Z,$$

$$Z_4 = a_4 Z, \quad (83)$$

$$a_2 = \frac{(Y_0^2 + V_0^2)}{2},$$

$$a_4 = \frac{(3a_2^2 - h_4 Y_0^4)}{2},$$

entonces Y_1 y V_1 contienen componentes paraxiales, de tercer y quinto orden. Si se introducen los desarrollos de t , c y s en las ecuaciones (59) y (60), se tiene que Y_3 contiene también contribuciones de tercer y quinto orden.

Utilizando los desarrollos anteriores, las ecuaciones de trazo de rayos pueden expresarse en función de los términos de diferente orden, quedando la siguiente expresión:

$$Y = Y_1 \left(1 - \frac{Z_2^2}{2} \right) + V_1(Z_2 + Z_4) + 2h_4(Y_3 + Z_2 V_3) + 12h_4^2 F_1 + 3h_6 F_2, \quad (84)$$

y

$$V = V_1(1 - Z_2^2/2) - Y_1(Z_2 + Z_4) + 2h_4(V_3 + Z_2 W_3 + 12h_4 G_1 + 3h_6 G_2), \quad (85)$$

donde Y_3 está dada por la ecuación (59) y los valores de M_i están dados por la ecuación (64).

V_3 y W_3 están definidas por

$$V_3 = P_1 Y_0^3 + 3P_2 Y_0^2 V_0 + 3P_3 Y_0 V_0^2 + P_4 V_3, \quad (86)$$

$$W_3 = R_1 Y_0^3 + 3R_2 Y_0^2 V_0 + 3R_3 Y_0 V_0^2 + R_4 V_0^3,$$

donde

$$R_i = -M_i + \delta_i, \quad P_i = cA_i + sA_{i+1}, \quad (87)$$

con las δ_i dadas por

$$\delta_1 = c^3,$$

$$\delta_2 = c^2 s, \quad (88)$$

$$\delta_3 = c s^3,$$

$$\delta_4 = s^3.$$

II.10 Trazo de rayos oblicuos a quinto orden

Utilizando de nuevo el método de aproximaciones sucesivas, el resultado para un gradiente positivo que incluye términos de quinto orden está dado por

$$\begin{aligned} X &= X_0 A + V_0 B, & U &= X_0 A' + U_0 B', \\ Y &= Y_0 A + V_0 B, & V &= Y_0 A' + V_0 B' \end{aligned} \quad (89)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= C + h_1 W_1 + h_2 (u S_{11} v S_{12} + w S_{13}) \\ &+ h_3 [u S_{11} + v_3 (S_{12} + S_{21}) + w S_{22}] \\ &+ h_5 (H_1 + 2K_1) \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned}
B = & S + h_1 W_2 + h_2 (u S_{21} + v S_{22} + w S_{23}) \\
& + h_3 [u S_{12} + v (S_{13} + S_{22} + w S_{23})] \\
& + h_5 (H_2 + 2K_2)
\end{aligned} \tag{91}$$

En esta ecuación $v_3 = \frac{v}{2}$.

Para evaluar A' y B' en la ecuación (89) solamente se reemplaza S por C y C por $-S$ en las ecuaciones (90) y (91). Los valores de h_i están dados, para valores de h_4 y h_6 conocidos, de la siguiente forma:

$$h_1 = 2h_4, \quad h_2 = h_1^2, \quad h_3 = 2h_2, \quad h_5 = 3h_6 \tag{92}$$

Los otros valores están dados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
W_i &= uM_i + vM_{i+1} + wM_{i+2} \quad (i = 1 - 2), \\
H_i &= N_i u^2 + N_{i+2} v^2 + N_{i+3} u w w \quad (i = 1 - 2), \\
K_i &= N_{i+1} u v + N_{i+2} u w + N_{i+3} u w \quad (i = 1 - 2), \\
q_{ij} &= S M_{ij} - C M_{ij+1} \quad (i + 1 - 4, \quad j = 1 - 3), \\
S_{ij} &= u q_i + v q_{i+1j} + w q_{i+2j} \quad (i = 1 - 2, \quad j = 1 - 3)
\end{aligned} \tag{93}$$

Los valores de M_i están dados por la ecuación (64). Los valores de M_{ij} por la ecuación (76). Los valores de u , v y w se definen en la ecuación (63) al igual que W_1 y W_2 .

II.11 Programa de trazo de rayos

Con las ecuaciones anteriores se calcula la trayectoria de los rayos en una lente de índice de variación gradual con simetría cilíndrica. La solución analítica de la ecuación diferencial de los rayos, para un cierto índice de refracción, permite mediante la realización de programas

de cómputo [Apéndice A] conocer la trayectoria de los rayos dentro de la lente, partiendo sólo de las coordenadas del rayo en la primer superficie de la lente. El siguiente diagrama de flujo muestra el procedimiento que se utiliza para calcular la trayectoria de los rayos.

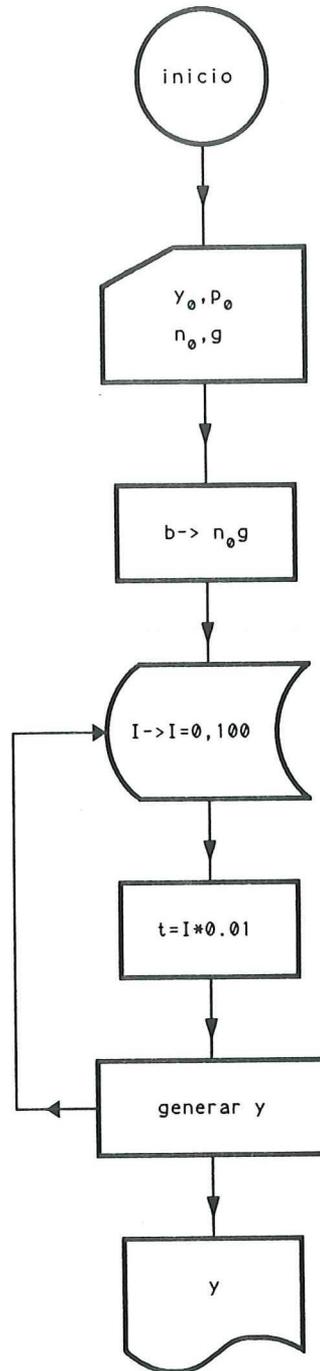


Figura 5. Diagrama de flujo para calcular las coordenadas de los rayos.

La trayectoria de los rayos bajo la aproximación paraxial se ilustra en el diagrama de flujo anterior, en el cual se indica que los datos de entrada al programa son las coordenadas iniciales del rayo en la primer superficie de la lente, la constante g y el índice de refracción en el eje de la lente. Con estos datos se calculan las coordenadas del rayo en cualquier posición dentro de la lente. Es necesario aclarar que la longitud de la lente está normalizada con respecto al período del rayo, además con el coseno director l se puede verificar el grado de precisión de los programas de trazo de rayos ya, que l es invariante a lo largo de cualquier rayo para cualquier plano de la lente, es decir $l = l_0$.

A continuación se presentan las trayectorias de los rayos dentro de una lente GRIN con un error del orden 10^{-10} .

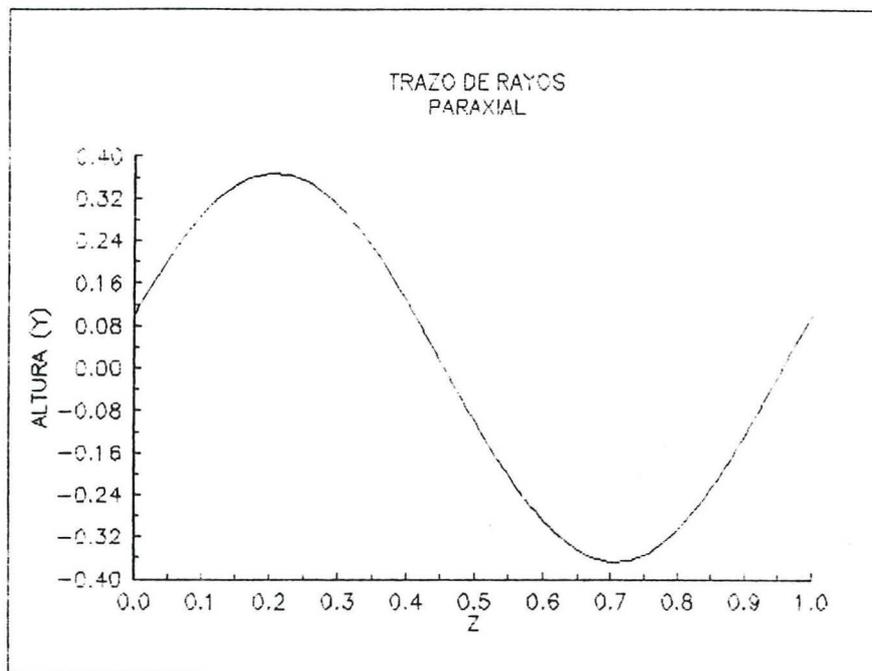


Figura 6. Trazo paraxial. La gráfica muestra la trayectoria de rayos meridionales bajo la aproximación paraxial para el plano zy . El rayo está incidiendo a una altura inicial $y = 0.1$ con un coseno director $q = 0.12$. En la superficie de salida se obtiene el resultado esperado, es decir, $y = 0.1$.

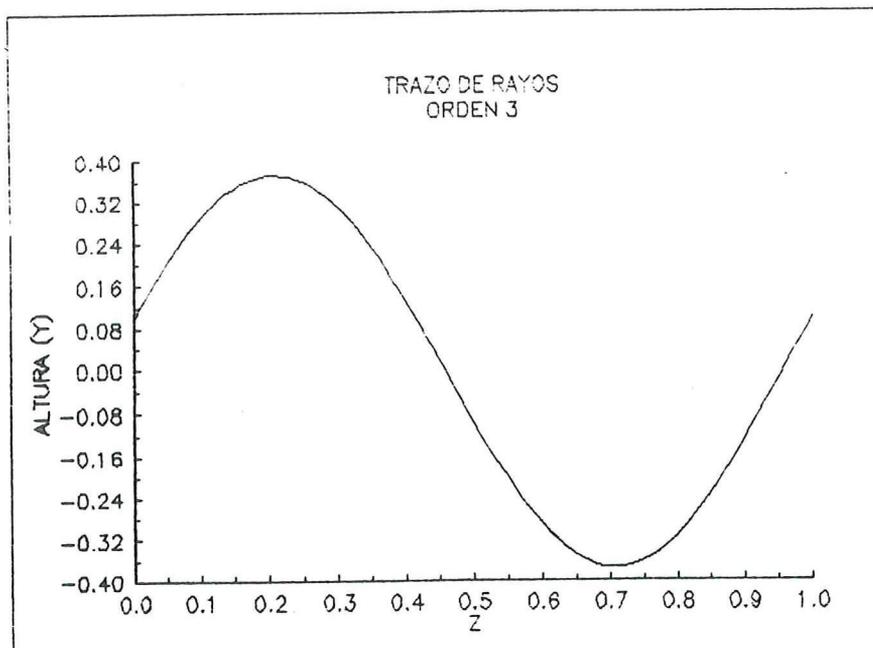


Figura 7. Trazo a tercer orden. La gráfica muestra la trayectoria de un rayo meridional bajo la aproximación a tercer orden. Bajo esta aproximación y considerando los mismos datos de entrada para las coordenadas del rayo que en el caso anterior, se obtiene que la altura de éste al salir de la lente es $y = 0.098722$.

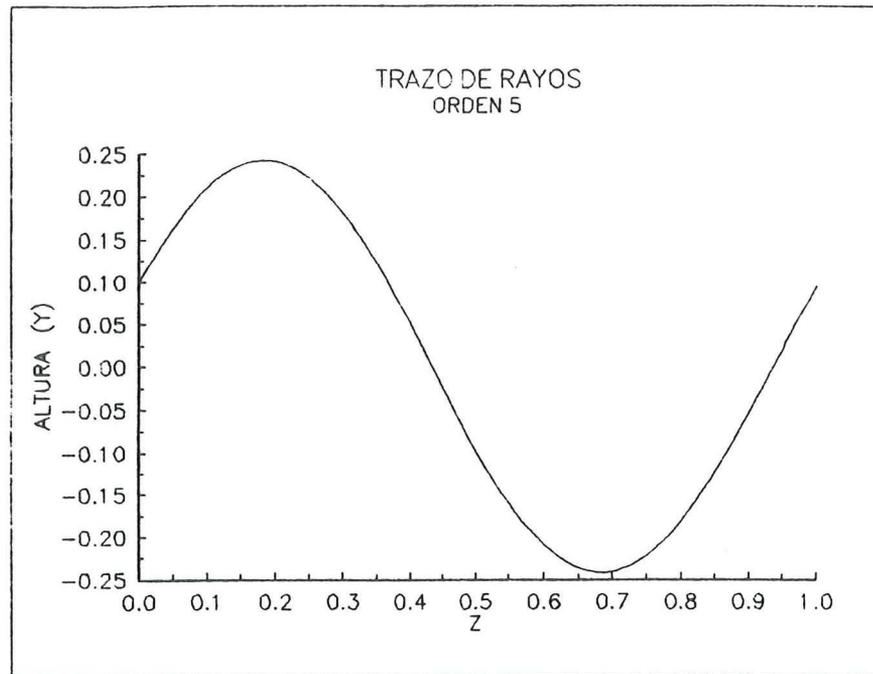


Figura 8. Trazo a quinto orden. Para la aproximación a quinto orden y bajo las mismas condiciones de entrada se obtiene que la altura al final de la lente es $y = 0.095324$.

Los resultados obtenidos muestran que existe muy poca diferencia en el trazado de rayos bajo las aproximaciones a tercer y quinto orden con respecto al caso paraxial; para saber la importancia de esa pequeña diferencia en el trazado de rayos se analizará en el siguiente capítulo la teoría de aberraciones.

Este capítulo presenta los conceptos básicos de la teoría de índice de refracción con variación radial utilizada en este trabajo. La aportación en esta sección es pequeña, y consiste en la programación realizada para el trazo de rayos a través de una lente GRIN.

III. TEORIA DE ABERRACIONES PARA GRADIENTES CON SIMETRIA ROTACIONAL

En este capítulo se analizan los conceptos fundamentales de la teoría de aberraciones, para un sistema óptico con simetría rotacional alrededor del eje z . Se sabe que si los rayos de luz obedecen las fórmulas para el trazo paraxial, entonces las imágenes del sistema óptico deberán ser ideales para cualquier trazado de rayos. La óptica Gaussiana da una descripción aproximada de la evolución del haz en el sistema y además sirve como referencia para comparar la evolución de los rayos reales y los paraxiales.

En la teoría clásica de aberraciones se considera que si un rayo de luz sale de un objeto puntual P_0 y, además, éste pasa cerca de la imagen puntual Gaussiana P_1 ; esta desviación del rayo en el plano imagen Gaussiano da una medida de las aberraciones del sistema óptico.

Generalmente las fórmulas de las aberraciones dependen de los parámetros de los rayos y de los parámetros de construcción de las lentes, por esta razón se acostumbra desarrollar estas fórmulas en series de potencia [Sakamoto, 1983].

Cada grupo en el desarrollo en serie consiste de una suma de términos y cada término tiene un tipo de influencia especial en la calidad de las imágenes del sistema. Los efectos generales de los distintos tipos de aberraciones son conocidos, y esto es de gran ayuda en el diseño de sistemas ópticos. Aún más, cada una de las aberraciones puede expresarse como la suma de las contribuciones de las distintas superficies y sistemas, y con esto es posible determinar cuáles parámetros deberán ajustarse para optimizar el sistema óptico.

Si el sistema está relativamente optimizado para las aberraciones de tercer orden, entonces se deben considerar los efectos de las aberraciones de quinto orden.

Tomlinson (1980) realizó una serie de estudios cualitativos sobre las aberraciones presentes en las lentes GRIN, en este capítulo se calculan expresiones analíticas de las aberraciones considerando primero que el objeto se encuentra localizado al infinito y después a una distancia finita de la primer superficie de la lente.

Las aberraciones meridionales, para un objeto al infinito, se obtienen bajo la consideración de que se conocen las alturas y las inclinaciones de los rayos meridionales en el plano objeto focal. Con esta consideración se traza un rayo en el plano de entrada de la lente, y se calcula la altura del rayo en el plano focal. Esta altura está dada por (figura 9)

$$Y_2 = Y_1 + g Dfp \tan \theta', \quad (94)$$

donde Y_1 es la altura del rayo en el plano de salida de la lente.

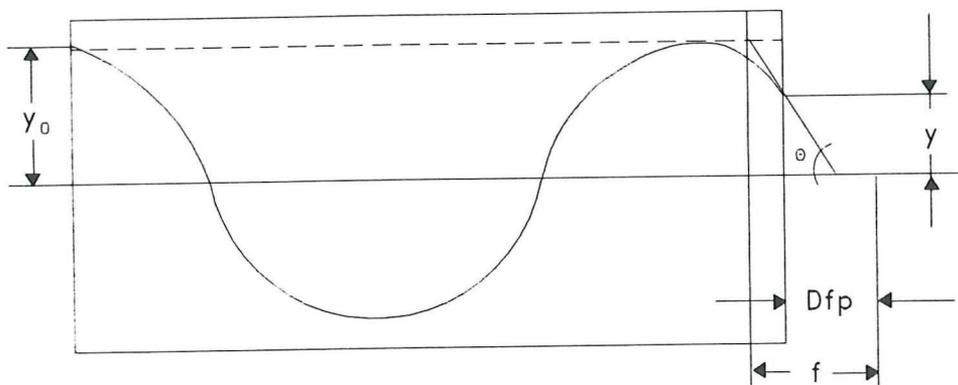


Figura 9. Altura del rayo meridional en el plano focal

De la ley de Snell se tiene

$$\text{sen } \theta' = q, \quad (95)$$

$$\tan \theta' = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}} \quad (96)$$

y sustituyendo éstas en la ecuación (94), se tiene

$$Y_2 = Y_1 + g Ddp \left(q_1 + \frac{1}{2} q_1^3 \right), \quad (97)$$

donde $q = n_0 Y'_1$ con la aproximación a tercer orden y q_1 es la inclinación en el plano de salida.

La altura del rayo a tercer orden se encuentra sustituyendo Y_1 de la ecuación (59). Bajo esta consideración, la altura del rayo en el plano focal tiene la forma

$$\begin{aligned} & n_0 g V_0 f + \\ & 2h_4(Y_0^3 M_1 + 3Y_0^2 V_0 M_2 + 3Y_0 V_0^2 + V_0^3) + \\ & g Dfp \left\{ n_0 g V_0 f' + 2h_4(Y_0^3 P_1 + Y_0^2 V_0^1 P_2 + Y_0 V_0^2 P^3 + V_0^3 P_4) + \frac{1}{2} (n_0 g V_0 f')^3 \right\}, \quad (98) \end{aligned}$$

donde $P_i = CA_i + SA_{i+1}$ y $n_0 g V_0 f'$ es la altura paraxial.

Si ahora se sustrae el término paraxial, la expresión resultante representa el polinomio de aberraciones meridionales a tercer orden.

A continuación se definen las aberraciones monocromáticas de acuerdo a las cinco aberraciones clásicas de tercer orden [Marchand, 1976] utilizando el trazo de rayos.

III.1 Aberración esférica

La aberración esférica se define como sigue: Si se traza un rayo de luz desde un punto axial en el plano objeto y éste interseca al plano imagen, la distancia de esta intersección al eje de la lente es la aberración esférica transversal o lateral (S_t).

La aberración esférica transversal S_t , para un objeto situado al infinito, se encuentra haciendo $y_0 = h$ y $q_0 = 0$, es decir, se considera un rayo paralelo al eje óptico incidiendo sobre la lente a una altura h . Bajo estas consideraciones, de la ecuación (98), la aberración esférica transversal toma la siguiente forma:

$$S_t = h^3 T_1, \quad (99)$$

donde $T_1 = 2h_4(M_1 + gDfpP_1)$.

Si se traza un rayo de luz desde un punto axial, la distancia entre la intersección de éste rayo con el eje de la lente y el plano imagen, se conoce como la aberración esférica longitudinal y, evidentemente, puede ser positiva o negativa. La aberración transversal y la longitudinal están relacionadas de la siguiente manera (figura 10):

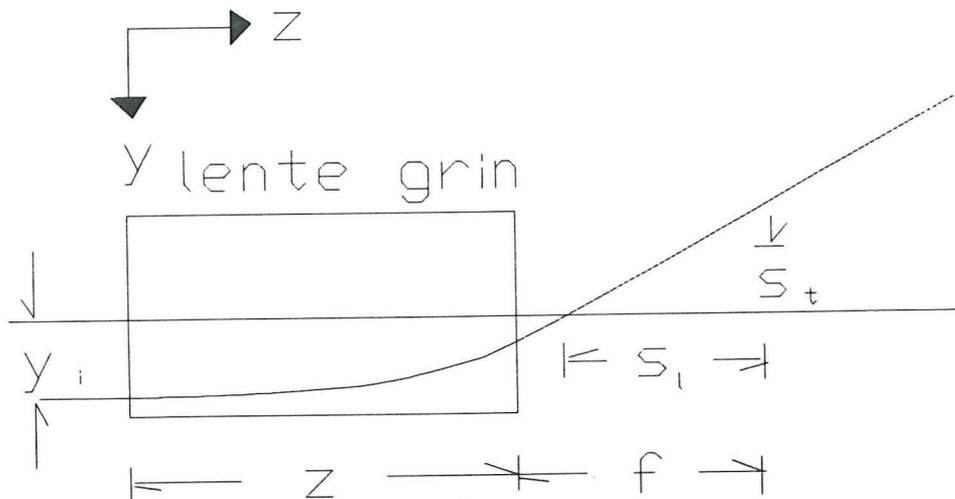


Figura 10. Relación entre la aberración esférica longitudinal y la transversal

$$S_t = S_l \tan \theta', \quad (100)$$

donde S_l es la aberración esférica longitudinal.

De la relación anterior, se tiene que la aberración esférica longitudinal esta dada por

$$S_l = h^2 g f T_1 \quad (101)$$

III.2 Aberración de coma

Para definir la aberración de coma meridional se considera el radio y la posición de la pupila de entrada del sistema óptico.

La aberración de coma meridional se define de la siguiente manera:

Se trazan tres rayos desde el objeto puntual, pasando a través de los extremos y por el centro de la pupila de entrada (figura 11). Se supone que el objeto se encuentra al infinito, de tal manera que los rayos son paralelos en el espacio imagen. Con el plano objeto al infinito, el plano imagen coincide con el plano focal.

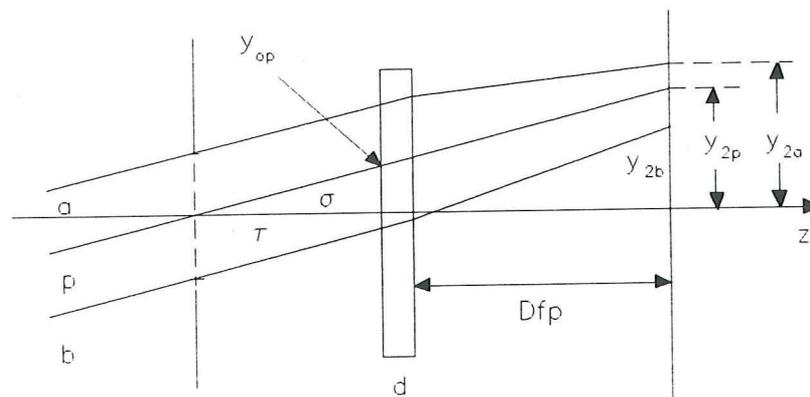


Figura 11. Definición de coma meridional

Las alturas de estos rayos meridionales en el plano imagen se representan por Y_{2a} , Y_{2b} , y Y_{2p} (figura 7). Entonces la coma meridional se define como [Marchand 1976]

$$C = \frac{1}{2}(Y_{2a} + Y_{2b}) - Y_{2p} \quad (102)$$

El rayo p pasa a través del centro de la pupila de entrada, la cual se localiza a una distancia τ de la primera superficie.

Debido a la refracción, se tiene que el segundo coseno director justo después de la primer superficie de la lente está dado por

$$q_0 = -\text{sen } \sigma, \quad (103)$$

el cual es igual para cada uno de los tres rayos.

Debido a lo anterior, las alturas de los rayos en la primera superficie de la lente están dadas por

$$Y_{op} = g \tau \tan \sigma \cong g \tau q_0 \left(1 + \frac{1}{2} q_0^2 \right),$$

$$Y_{oa} = Y_{op} + g R p e, \quad (104)$$

$$Y_{ob} = Y_{op} - g R p e,$$

donde Rpe representa el radio de la pupila de entrada.

Utilizando la ecuación (98) para cada uno de los rayos y, después, sustituyéndola en la ecuación (102), se tiene que la aberración de coma meridional está dada por

$$C_m = n_0 g^2 R p e^2 V_0 (-3g \tau T_1 + T_2), \quad (105)$$

donde $T_2 = 2h_4(M_2 + g D f p P_2)$.

III.3 Aberración de distorsión

La distorsión se define con la ayuda del rayo principal p , mostrado en la figura (11), comparando su altura a tercer orden con la altura paraxial en el plano focal. La distorsión relativa se define como

$$D = \frac{(Y_{2p} - Y_0)}{Y_0}. \quad (107)$$

Sustituyendo las ecuaciones (98) y (104) en la formula de la distorsión relativa se tiene

$$D = \frac{n_0^2 V_0^2}{gf} \left\{ -(g\tau)^3 T_1 + (g\tau)^2 T_2 - g\tau T_3 + T_4 + \frac{1}{2} g D f p (n_0 g f')^3 \right\}, \quad (108)$$

donde $T_i = 2h_4(M_i + g D f p P_i)$.

Si la aberración esférica está corregida, es decir $T_1 = 0$, la distorsión es una función cuadrática de la posición de la pupila de entrada.

Para definir el astigmatismo y la curvatura de Petzval se necesita conocer la curvatura de campo meridional y sagital.

Para definir la curvatura de campo meridional, Z_m , se necesita el rayo principal p y un rayo paralelo a éste, pero situado a una altura h arriba de éste (figura 12), es decir,

$$Y_0 = Y_{0p} + gh. \quad (109)$$

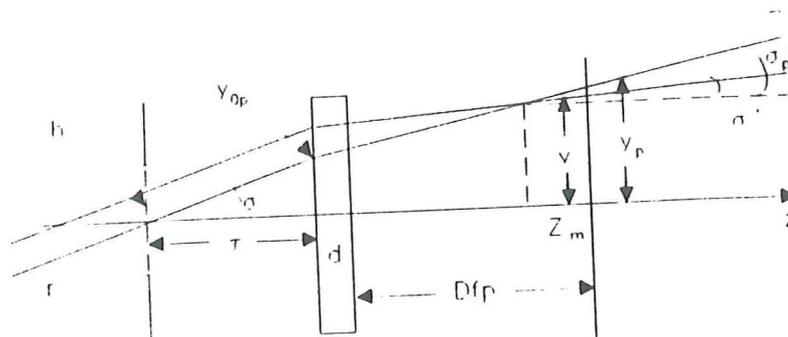


Figura 12. Definición de curvatura meridional

La curvatura meridional se define como

$$Z_m = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{Y - Y_p}{u - u_p} \right), \quad (110)$$

donde Y , Y_p y u, u_p representan las alturas y las inclinaciones de los rayos en el plano focal, respectivamente.

Para una lente GRIN de caras planas, las inclinaciones de los rayos paraxiales en el plano imagen están dadas por la ecuación (45b), esto es

$$u - u_p \cong q_1 - q_{1p} \cong -n_0 g s h = -\frac{h}{f}. \quad (111)$$

Con esto, la curvatura meridional se puede escribir como

$$Z_m = -f \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(Y - Y_p)}{h}. \quad (112)$$

Calculando las alturas de los rayos a través de la ecuación (98) y usando la relación paraxial $Y_{0p} = -g\tau q_0$ (ecuación (104)), se obtiene el siguiente resultado para la curvatura meridional

$$Z_m = -2h_4fn_0^2V_0^2(3g^2\tau^2T_1 - 2g\tau T_2 + T_3). \quad (113)$$

Para definir la curvatura sagital Z_s , se utiliza un rayo oblicuo paralelo al rayo principal p , pero desplazado una distancia h' en la dirección x (figura 13).

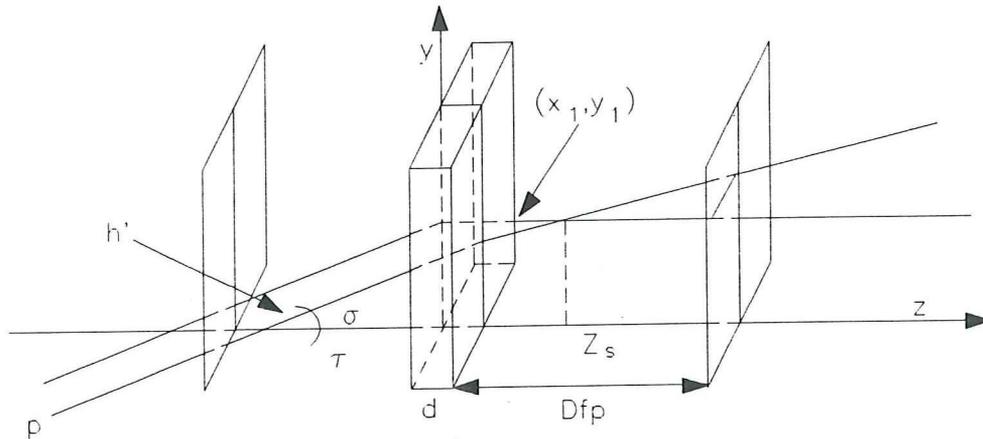


Figura 13. Definición de curvatura sagital

Para dicho rayo, se tiene que su altura en el eje x es

$$X_0 = gh', \quad (114)$$

y su coseno director

$$p_0 = 0, \quad (115)$$

y

$$Y_0 = -g\tau q_0(1 - q_0^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (116)$$

La curvatura sagital se define como:

$$Z_s = gDfp + \lim_{h' \rightarrow 0} \left(\frac{X_1 l'}{p_1} \right), \quad (117)$$

donde X_1 , y p_1 son las coordenadas del rayo oblicuo cuando éste emerge de la segunda superficie y

$$l' = (1 - p_1^2 - q_1^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (118)$$

Las coordenadas del rayo oblicuo se encuentran usando las ecuaciones (62), esto es

$$X_1 = X_0 c + 2h_4 X_0 (Y_0^2 M_1 + 2Y_0 V_0 M_2 + V_0^3) \quad (119)$$

y

$$p_1 = n_0 U_1 = n_0 [-sX_0 + 2h_4 X_0 (Y_0^2 P_1 + 2Y_0 V_0 P_2 + V_0^3 P_3)],$$

de donde se obtiene

$$\frac{X_1}{p_1} = -Dfp \left[1 + \frac{2h_4}{cs} (Y_0^2 A_1 + 2Y_0 V_0 A_2 + V_0^3 A_3) \right], \quad (120)$$

donde las A_i estan dadas por las ecuaciones (65).

Además, l' se puede escribir como

$$l' \cong 1 - \frac{1}{2} (p_1^2 + q_1^2), \quad (121)$$

sustituyendo los términos paraxiales de p_1 y q_1 se tiene

$$l' = 1 - \frac{1}{2} \left[(n_0 X_0 s)^2 + \left(V_0 - \frac{Y_0}{f} \right)^2 \right]. \quad (122)$$

De las ecuaciones (117), (119), (120) y (122) se tiene que la curvatura sagital esta dada por

$$Z_s = -Dfp \left[-\frac{1}{2} \left(n_0 V_0 c - \frac{Y_0}{f} \right)^2 + \frac{2h_4}{cs} (Y_0^2 A_1 + 2Y_0 V_0 A_2 + V_0^3 A_3) \right]. \quad (123)$$

Sustituyendo el término Y_0 por $-n_0 g \tau V_0$, se obtiene lo siguiente

$$Z_s = -Dfp V_0^2 \left[-\frac{n_0^2}{2} \left(n_0 c + \frac{g \tau}{f} \right)^2 + \frac{2h_4}{s} (g^2 \tau^2 A_1 - 2g \tau A_2 + A_3) \right]. \quad (124)$$

El astigmatismo se define como:

$$A = \frac{1}{2} (Z_m - Z_s), \quad (125)$$

esto es, sumando las ecuaciones (113) y (124) se obtiene la expresión para el astigmatismo.

La curvatura de Petzval se define como:

$$P = Z_m - 3Z_s, \quad (126)$$

es decir, la curvatura de Petzval es una función de las curvaturas meridional y sagital, y por tanto su expresión analítica está determinada.

Hasta aquí se han encontrado las expresiones analíticas de las aberraciones meridionales bajo la consideración de que el objeto se encuentra al infinito. A continuación se supondrá que el objeto se encuentra localizado a una distancia finita A de la primer superficie de entrada de la lente y se buscará conocer las aberraciones meridionales para este tipo de lentes.

Para un rayo meridional refractado en una superficie plana se conoce que el coseno director está dado por $q = n \cos \gamma$ (figura 10) y, para una lente grin con superficies planas se tiene que la altura del rayo en el plano imagen está dada por

$$Y_2 = Y_1 + gC \tan \gamma, \quad (127)$$

donde:

C es la distancia del plano imagen paraxial.
superficie de la lente.

Y_1 es la altura en la segunda

q' da la dirección del rayo después de la segunda superficie,

la cual es

$$q' = n \operatorname{sen} \gamma' = q = n_0 V,$$

de donde

$$\tan \gamma' = q(1 - q^2)^{-\frac{1}{2}} \cong q + \left(\frac{1}{2}\right)q^3 + \left(\frac{3}{8}\right)q^5 \quad . \quad (128)$$

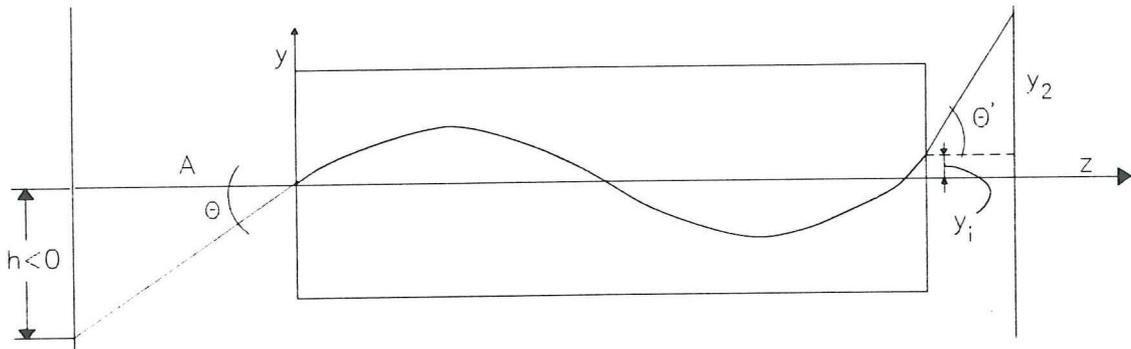


Figura 14. Altura de un rayo meridional en el plano imagen de una lente con gradiente radial

La altura en el plano imagen se encuentra sustituyendo las ecuaciones (84) y (85) en la ecuación (D6). El resultado a quinto orden es el siguiente

$$\begin{aligned} Y_2 = & (Y_1 + k'V_1) \left(1 - \frac{Z_2^2}{2}\right) + (V_1 - k'Y_1)(Z_2 + Z_4) \\ & + 2h_4[Y_3 + k'V_1 + Z_2(V_3 + k'W_3)] \\ & + 12h_4^2(F_1 + k'G_1) + 3h_6(F_2 + k'G_2) \\ & + \left(\frac{1}{2}\right)k'n_0^2V_1^2(V_1 + 6h_4V_3 - 3Y_1Z_2) \end{aligned} \quad (129)$$

$$+\left(\frac{3}{8}\right)k'n_0^4V_1^5 \quad ,$$

donde $b = n_0g$, $k' = bC$.

Como una consecuencia de las ecuaciones (D4) y (D6) los términos lineales en Y_1 y V_1 que aparecen en la ecuación (129) pueden escribirse de la siguiente forma

$$\begin{aligned} Y_1 + k'V_1 &= m(Y_0 - kV_0) \\ V_1 - k'Y_1 &= m(Y_0 + kY_0) \quad , \end{aligned} \quad (130)$$

Como resultado de lo anterior, la altura del rayo en el plano imagen se escribe de la manera siguiente

$$\begin{aligned} Y_2 &= m(Y_0 - kV_0) \\ &+ m(V_0 + kY_0)Z_2 + 2h_4(Y_3 + k'V_3) + \left(\frac{1}{2}\right)k'n_0^2V_1^3 \\ &+ m(kV_0 - Y_0)\frac{Z_2^2}{2} + m(V_0 + kY_0)Z_4 \\ &2h_4Z_2(V_3 + k'W_3) + 12h_4^2(F_1 + k'G_1) \\ &3h_6(F_2 + k'G_2) + \left(\frac{3}{8}\right)k'n_0^4V_1^5 \\ &+ \left(\frac{3}{2}\right)k'n_0^2V_1^2(2h_4V_3 - Y_1Z_2) \quad . \end{aligned} \quad (131)$$

Las fórmulas analíticas para las aberraciones a tercer y quinto orden se derivan con la ayuda de la ecuación (131).

La aberración esférica lateral está representada por la altura del rayo en el plano imagen para un punto objeto axial [I. Kitano, 1983]. Para este caso se tiene la altura del rayo en la primera superficie está dada por

$$\begin{aligned}
 Y_0 &= Ag \tan \gamma = Ag(1 - q^2)^{-\frac{1}{2}}, \\
 &= Agq \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)q^2 + \left(\frac{3}{8}\right)q^4 \right].
 \end{aligned} \tag{132}$$

Se sabe que para una superficie plana $q = q_0 = n_0 V_0$, entonces la altura del rayo en la primera superficie es

$$Y_0 = kV_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)n_0^2 V_0^2 + \left(\frac{3}{8}\right)n_0^4 V_0^4 \right], \tag{133}$$

y sustituyendo el término Y_0 , en la ecuación (131) se encuentra la aberración esférica lateral escalada por el término g .

Si solo se retienen los términos de la tercera potencia en V_0 , entonces se encuentra la aberración esférica lateral a tercer orden, la cual está dada por

$$S_T = \frac{mV_0^3}{2} \left[n_0^2 \left(k + \frac{k'}{m^4} \right) + (1 + k^2)^2 Z - 4h_4(k^3 T_1 + 3k^2 T_2 + 3k T_3 + T_4) \right], \tag{134}$$

donde

$$T_i = kA_i + A_{i+1}. \tag{135}$$

La aberración esférica longitudinal se encuentra de la relación $S_L = \frac{S_T}{\tan \gamma}$ y del desarrollo de $\tan \gamma$ hasta tercer orden.

De la ecuación (85) se tiene que el coseno director V a tercer orden es

$$V = V_1 - Y_1 Z_2 + 2h_4 V_3. \tag{136}$$

Usando las ecuaciones (47) y (68) se tiene que

$$V_1 = \frac{V_0}{m} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)m s k n_0^2 V_0^2 \right] \tag{137}$$

y

$$Y_1 = V_0(s + ck) = -\frac{V_0 k'}{m} .$$

De las ecuaciones anteriores se tiene que el coseno director V está dado por

$$V = \frac{V_0}{m} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right) \beta' V_0 \right] , \quad (138)$$

donde

$$\beta' = mskn_0^2 - Z \left(\frac{k'}{m} \right) (1 + k^2) - 4h_4(k^3 P_1 + 3k^2 P_2 + 3k P_3 + P_4) . \quad (139)$$

De las ecuaciones (137) y (138) se tiene que la aberración esférica longitudinal es

$$S = S_T \left(\frac{m}{n_0 V_0} \right) \left[1 + \frac{1}{2} V_0^2 \left(\beta' - \frac{n_0^2}{m^2} \right) \right] . \quad (140)$$

La coma meridional está definida por la ecuación $C_m = \frac{1}{2}(y_{2a} + y_{2b}) - y_{2p}$, donde

y_{2a} , y_{2b} , y y_{2p} representan las alturas de las imágenes y éstas pueden ser evaluadas por la ecuación (131) para conocer la coma meridional.

Ahora, si se sustituyen las expresiones de la altura y coseno director, de la superficie de entrada, en la ecuación (131) y utilizando ésta para conocer las alturas de los rayos en el plano imagen, se tiene que la aberración de coma meridional a tercer orden está dada por

$$\begin{aligned} C_m = & \frac{\left(\frac{3}{2} \right) h (gRpe)^2}{(k_1 - k)^3} \left\{ n_0^2 \left(k + \frac{k'}{m^3 m_1} \right) + \right. \\ & Z(1 + k^2)(1 + kk_1) + \\ & -4h_4[k^2(T_1 k_1 + T_2) + \\ & + 2k(T_2 k_1 + T_3) + \\ & \left. + (T_3 k_1 + T_4) \right\} , \quad (141) \end{aligned}$$

donde

$$k_1 = -b\lambda \quad m_1 = \frac{1}{c-k_1s} \quad . \quad (142)$$

La distorsión está definida por la ecuación (115), donde la altura del rayo principal en el plano imagen se encuentra sustituyendo las ecuaciones (E5), (E6) y (E7) en (129) con $E = 0$. Después de sustituir éstas en (185) se tiene que la distorsión a tercer orden está dada por

$$D = \frac{(hg)^2}{2(k_1 - k)^3} \left\{ n_0^2 \left(k + \frac{k'}{mm_1^3} \right) + Z(1 + k^2)(1 + kk_1) - 4h_4(T_1k_1^3 + 3T_2k^2 + 3T_3k_1 + T_4) \right\}$$

La curvatura de campo meridional está definida por

$$Z_m = -\left(\frac{1}{g} \right) \lim_{E \rightarrow 0} \left(\frac{Y - Y_p}{u - u_p} \right) \quad , \quad (143)$$

o bien

$$Z_m = -m \lim_{E \rightarrow 0} \left(\frac{Y - Y_p}{E} \right)$$

donde Y, Y_p son las alturas del rayo superior y rayo principal en el plano imagen; u, u_p son las inclinaciones de los rayos, respectivamente.

Sustituyendo las ecuaciones (E5), (E6), (E7) en (129) se tiene que la curvatura meridional a tercer orden es

$$Z_m = -\frac{3}{2h} \left(\frac{mgh}{k - k_1} \right)^2 \left\{ n_0 \left(k + \frac{k'}{m^2 m_1^2} \right) + Z \left[(1 + kk_1^2) + \frac{(k - k_1)^2}{3} + \frac{2k_1}{3} \right] - 4h_4(k_1^2 E_1 + k_1 E_2 + E_3) \right\} \quad , \quad (144)$$

donde $E_i = kT_i + T_{i+1}$.

La curvatura sagital se encuentra análogamente trazando un rayo oblicuo, pero como el astigmatismo está definido por $A = \frac{1}{2}(Z_s - Z_m)$ se tiene que el astigmatismo es proporcional al término $\left(\frac{mgh}{k - k_1} \right)^2$ con lo cual se está satisfecho.

En este capítulo se han encontrado las expresiones analíticas de las aberraciones de Seidel presentes en la lente grin bajo dos consideraciones, la primera supone que el objeto esta localizado al infinito y la segunda que el objeto se encuentra a una distancia finita A de la primer superficie de la lente. Esta última consideración es de gran importancia para este trabajo ya que el diseño del acoplador direccional micro-óptico requiere que el objeto se encuentre situado sobre la primer superficie de la lente, es decir a una distancia $A = 0$ de la lente. Bajo esta argumentación las aberraciones meridionales de tercer orden, para este tipo de lentes, cuando el objeto esta situado a una distancia finita de la primer superficie de la lente estan dadas por:

a) Aberración esférica lateral

$$S_T = \frac{mV_0^3}{2} \left[n_0^2 \left(k + \frac{k'}{m^4} \right) + (1+k^2)Z - 4h_4(k^3T_1 + 3k^2T_2 + 3kT_3 + T_4) \right] .$$

b) Aberración de coma meridional

$$C_m = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)h(gRpe)^2}{(k_1 - k)^3} \left\{ n_0^2 \left(k + \frac{k'}{m^3 m_1} \right) + \right. \\ Z(1+k^2)(1+kk_1) + \\ -4h_4[k^2(T_1 k_1 + T_2) + \\ +2k(T_2 k_1 + T_3) + \\ \left. +(T_3 k_1 + T_4)] \right\} ,$$

c) Distorsión

$$D = \frac{(hg)^2}{2(k_1 - k)^3} \left\{ n_0^2 \left(k + \frac{k'}{m m_1^3} \right) + Z(1+k^2)(1+kk_1) - 4h_4(T_1 k_1^3 + 3T_2 k^2 + 3T_3 k_1 + T_4) \right\}$$

d) Curvatura de campo meridional

$$Z_m = -\frac{3}{2h} \left(\frac{mgh}{k - k_1} \right)^2 \left\{ n_0 \left(k + \frac{k'}{m^2 m_1^2} \right) + Z \left[(1+kk_1^2) + \frac{(k - k_1)^2}{3} + \frac{2k_1}{3} \right] \right\}$$

$$-4h_4(k_1^2 E_1 + k_1 E_2 + E_3)\}$$

e) Astigmatismo es proporcional al término $\left(\frac{mgh}{k-k_1}\right)^2$

De las expresiones anteriores se tiene que las aberraciones de coma, distorsión y astigmatismo son proporcionales al término $\left(\frac{1}{k_1-k}\right)$ y este es igual a $-\left(\frac{Ab}{1+Ab}\right)$ ya que $k = Ab$ y $k_1 = -b\lambda$.

De estas ecuaciones se tiene que cuando el objeto se encuentra en la primera superficie de la lente, la coma, distorsión y astigmatismo se anulan, es decir, solo la aberración esférica contribuye a las pérdidas del sistema [Claine et al, 1982].

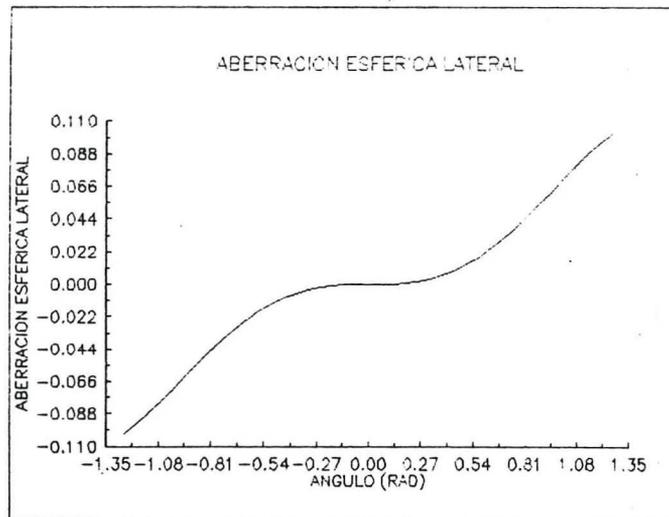


Figura 15. Gráfica de la aberración esférica lateral contra el ángulo de incidencia del rayo para una lente grin con las siguientes condiciones: longitud igual a medio período, índice de refracción en el eje óptico igual a 1.608, constante g igual a 0.339 .

En este capítulo se han utilizado los conceptos de teoría de aberraciones para expresar las aberraciones de Seidel en términos de los parámetros utilizados en la teoría de índice de refracción con variación radial. Estas expresiones han permitido conocer que cuando el objeto se encuentra en la primera superficie de la lente GRIN todas las aberraciones se anulan, excepto la aberración esférica.

IV. ANALISIS DEL HAZ DE LUZ ACEPTADO EN LENTES GRIN

IV.1 Rayos aceptados y ángulo del cono de luz aceptado por una lente GRIN

En este capítulo se analizan las lentes GRIN como elementos para acoplar dos fibras ópticas.

Una de las posibles causas de pérdida de energía en el acoplamiento de dos fibras ópticas se debe principalmente a las condiciones que deterioran la calidad de la imagen que produce la lente GRIN al actuar como un acoplador. Las pérdidas en el acoplamiento lógicamente tienden a reducir la eficiencia de tales dispositivos ópticos. Debido a lo anterior, es necesario conocer las características del haz aceptado por la lente GRIN y su evolución dentro de ésta para encontrar las mejores condiciones de acoplamiento.

En el apéndice E se demuestra que la altura meridional está dada por (ecuación E4)

$$y_{m0} = y_{p0} \pm r \frac{Ab}{\sqrt{1 + (Ab)^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{h}{h_{\max}}\right)^2}, \quad (145)$$

donde h_{\max} representa la altura máxima del objeto que permite la lente cuando se encuentra a una distancia A de la primer superficie. La altura máxima está dada por $h_{\max} = r_0 \sqrt{1 + (Ab)^2}$ (apéndice F).

De la ecuación (142) se tiene que la altura meridional está dada por

$$y_{m0} = y_{p0} \pm y_0 \sqrt{1 - \left(\frac{h}{h_{\max}}\right)^2}, \quad (146)$$

donde y_0 es la altura del rayo axial sobre la superficie. Esta expresión indica el límite de aceptación de los rayos en el plano meridional que salen de un objeto puntual localizado a una altura H sobre el eje óptico y a una distancia A de la superficie de entrada. Esto significa que solo un cono de luz que sale de la fuente puntual pasará a través de la lente GRIN.

El siguiente análisis se lleva a cabo con el fin de conocer el lugar geométrico del cono de rayos aceptado por la lente GRIN cuando el objeto puntual está sobre la primera superficie y fuera del eje óptico. Para hacer esto, se considera un rayo marginal que incide en la lente GRIN con coordenadas espaciales dadas por:

$$(X, Y) = (0, Y_0), \quad (147)$$

y con sus respectivos cosenos directores

$$(P, Q) = (P_0, Q_0),$$

El análisis se hace bajo las siguientes consideraciones, que se obtienen de la teoría paraxial para el trazo de rayos a través de la lente GRIN:

a) La expresión matemática

$$XQ - YP = X_0Q_0 - Y_0P_0, \quad (148)$$

es un invariante en las lentes de índice de gradiente con simetría rotacional.

b) Para cualquier rayo oblicuo externo, se tiene que en todo momento el vector de posición transversal $\vec{r} = x_i + y_j$ cumple la siguiente desigualdad:

$$r = x^2 + y^2 < r_0, \quad (149)$$

donde r_0 es el radio de la lente GRIN.

c) El vector que representa los cosenos directores a través de la lente se describe como:

$$\vec{T} = P_i + Q_j, \quad (150)$$

y en el punto en que se cumple la igualdad $x^2 + y^2 = r_0^2$ para que el rayo pueda continuar a través de la lente, se tiene que este vector deberá ser perpendicular al vector de posición transversal \vec{r} , esto es

$$\vec{r} \cdot \vec{T} = 0 \quad (151)$$

Para el caso de interés se considera que la fuente puntual está sobre la primera superficie, y en particular se considera localizada en el punto $(0, Y_0)$. En este caso el invariante GRIN toma la forma

$$XQ - YP = -Y_0 P_0. \quad (152)$$

De la ecuación (151) se tiene que

$$PX + QY = 0, \quad (153)$$

de las ecuaciones (150) y (153) se tiene que

$$T^2 = P^2 + Q^2 = \frac{Q^2 r_0^2}{X^2} = \frac{P^2 r_0^2}{Y^2}. \quad (154)$$

Multiplicando el invariante por XY , se tiene que

$$XY[XQ - YP] = X^2 QY - Y^2 PX = -PX r_0^2. \quad (155)$$

De las ecuaciones (152) y (155) se tiene que

$$-PX r_0^2 = XY[-Y_0 P_0],$$

o bien

$$\frac{P r_0}{Y} = \frac{Y_0 P_0}{r_0}. \quad (156)$$

De la ecuación (154) se tiene que

$$T^2 = \frac{Y_0^2 P_0^2}{r_0^2}, \quad (157)$$

y de las ecuaciones (44) y (45) se tiene que

$$r_0^2 = y_0^2 \cos(\Delta t') + \sin(\Delta t') \left[\frac{P_0^2 + Q_0^2}{b^2} \right] - 2 \left[\frac{y_0 Q_0 + x_0 P_0}{b} \right] \cos(\Delta t') \sin(\Delta t'),$$

$$\frac{T^2}{b^2} = y_0^2 \sin(\Delta t') + \cos(\Delta t') \left[\frac{P_0^2 + Q_0^2}{b^2} \right] - 2 \left[\frac{y_0 Q_0 + x_0 P_0}{b} \right] \cos(\Delta t') \sin(\Delta t'), \quad (158)$$

Con las ecuaciones anteriores se puede encontrar el lugar geométrico del cono de rayos aceptados por la lente grin en la superficie de entrada.

Sumando ambas ecuaciones en (158), se tiene

$$r_0^2 + \frac{T^2}{b^2} = y_0^2 + \frac{P_0^2 + Q_0^2}{b^2} .$$

Sustituyendo la ecuacion (157) se tiene que

$$r_0^2 + \frac{y_0^2 P_0^2}{b^2 r_0^2} = y_0^2 + \frac{P_0^2 + Q_0^2}{b^2} .$$

Reacomodando esta ecuación

$$\frac{Q_0^2}{b^2} + \frac{P_0^2}{b^2} \left[1 - \frac{y_0^2}{r_0^2} \right] = r_0^2 - y_0^2,$$

o bien

$$\frac{Q_0^2}{b^2} + \frac{P_0^2}{r_0^2 b^2} [r_0^2 - y_0^2] = r_0^2 - y_0^2, \quad (159)$$

dividiendo ambos lados de la ecuación por $r_0^2 - y_0^2$, se tiene

$$\frac{P_0^2}{r_0^2 b^2} + \frac{Q_0^2}{b^2 [r_0^2 - y_0^2]} = 1, \quad (160)$$

la cual se puede reescribir como:

$$\frac{P_0^2}{(r_0 b)^2} + \frac{Q_0^2}{(r_0 b)^2 \left[1 - \left(\frac{y_0}{r_0} \right)^2 \right]} = 1 \quad (161)$$

Esta ecuación representa el cono de rayos aceptados por la lente GRIN, para una fuente puntual localizada en el punto $(0, Y_0)$ sobre la primera superficie (figura 16).

Es importante hacer notar que estos resultados que se obtienen, utilizando otra metodología, son compatibles con los obtenidos por Gómez Reino et al, 1992.

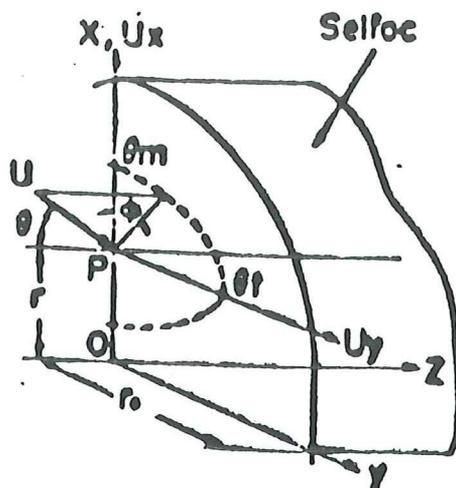


Figura 16. Lugar geométrico de los rayos aceptados por la lente GRIN.

Cuando la fuente puntual se localiza sobre el eje $(X_0, Y_0) = (0, 0)$ el término $r_0 b$ representa el máximo ángulo del cono aceptado por la lente, el cual está definido por el radio y la distribución del índice de refracción de la lente GRIN. Este término se conoce como la apertura numérica de la lente .

$$\text{El término } r_0 b \sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{r_0}\right)^2} ,$$

es el máximo ángulo aceptado por la lente para un rayo meridional.

La figura (16) muestra el lugar geométrico de los rayos aceptados por la lente Grin para diferentes alturas y_0 .

La excentricidad de está dada por

$$e = \frac{y_0}{R_0}, \quad (162)$$

es decir, depende del radio de la lente y de la altura de incidencia del cono de rayos.

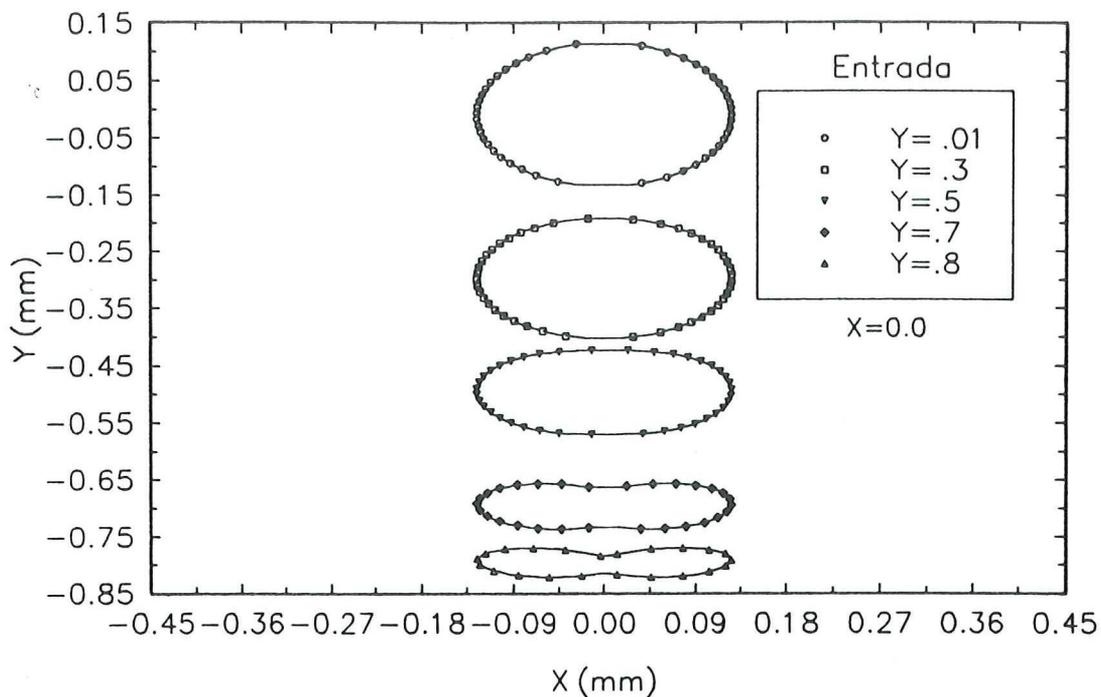


Figura 17. La figura muestra los diagramas de manchas para varios conos de rayos de luz , diagrama obtenido en el plano $ZI = 9.3$, donde el trazo de rayos se realizó para una lente GRIN que tiene las siguientes características: Diámetro: 1.8mm; longitud: $ZI= 9.3$ mm; índice de refracción: 1.608; abertura Numérica: 0.46; y parámetro g de la lente: 0.339.

El material presentado en este capítulo demuestra en una forma clara y sencilla que la base del cono de luz que alcanza a transmitirse a través de la lente cilíndrica tiene como lugar geométrico una elipse.

V. ACOPLADOR DIRECCIONAL MICROOPTICO

Las lentes cilíndricas de índice de gradiente empezaron a usarse en un gran número de dispositivos de fibras ópticas, como conectores, switches, multiplexadores y acopladores direccionales [Agarwal, 1985]. En este capítulo se describe primeramente el funcionamiento básico de un acoplador direccional microóptico, y se analizan las pérdidas del acoplamiento entre dos fibras ópticas debido al desplazamiento lateral, inclinación, influencia de la interface y la suma de las aberraciones de las dos lentes, obteniéndose en cada caso expresiones analíticas de las pérdidas y eficiencia del acoplador.

V.1 Descripción básica del acoplador

Las lentes de índice de refracción con variación gradual se utilizan como dispositivos para diferentes aplicaciones tanto en óptica como en telecomunicaciones. Una de estas aplicaciones es el acoplador direccional microóptico, el cual es básicamente un divisor de haz [Thyagarajan et al, 1980]. Este divisor de haz consiste principalmente de dos lentes grin y dos pares de fibras ópticas colocadas en las caras de la lente como se muestra en la figura 18. En esta figura E representa la capa antirrefleтора donde están unidas las lentes grin. Si la fibra actúa como conductor del haz primario, AE1 representa la abertura de entrada de la lente L1. Si la fibra 4 actúa como conductor del haz primario, entonces AE2 representa la abertura de la lente L2.

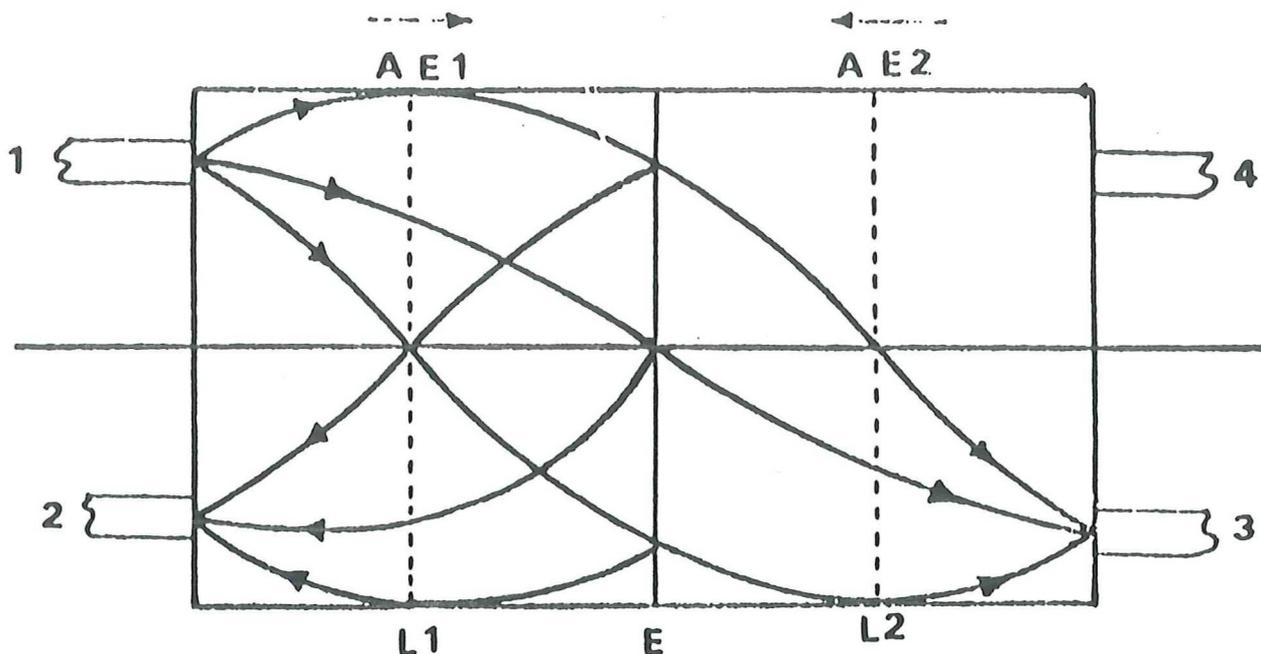


Figura 18. Fibras acopladas por medio de lentes grín

El objetivo de las lentes grín es, por un lado, colimar la luz divergente proveniente de una fibra óptica y con una segunda lente coleccionar la luz y enfocarla en otra fibra, con una amplificación unitaria.

En esta aplicación se considera que el objeto consiste de un solo punto colocado sobre la primera superficie de la lente. Para la posición de los rayos marginales como se muestra en la figura 18, los cosenos directores que definen el ángulo de aceptación de la lente para un valor y_0 dado, de acuerdo a la ecuación (161) están dados por $q_1 = -q_2 = b\sqrt{r_0^2 - y_0^2}$, y de tal expresión se tiene que el ángulo de aceptación está dado por $\theta = \arcsen(b\sqrt{r_0^2 - y_0^2})$.

Cuando $y_0 = r_0$ entonces $\theta = 0$, esto implica que es necesario tener las fibras lo más cercano que se pueda al eje óptico.

Para diseñar el acoplador se necesitan conocer ciertas características tales como la colimación, la amplificación, tamaño y diámetro de las lentes [Sakamoto, 1992]. Estas características se analizan mediante el trazo de rayos. Las ecuaciones (44) y (45) describen el camino de los rayos en las lentes grin y se reescriben como

$$y_{li} = y_{oi} \cos(gz) + \frac{y'_{oi}}{g} \operatorname{sen}(gz) \quad (163)$$

y

$$y'_{li} = -gy_{oi} \operatorname{sen}(gz) + y'_{oi} \cos(gz),$$

donde las coordenadas y_{oi} y y'_{oi} son, respectivamente, la posición y el ángulo de entrada del rayo medido justo dentro de la lente. Similarmente, y_{li} y y'_{li} son la posición y el ángulo del rayo, dentro de la lente, cuando éste sale. La figura 19 muestra las coordenadas de los rayos en la superficie de entrada y salida de las lentes grin.

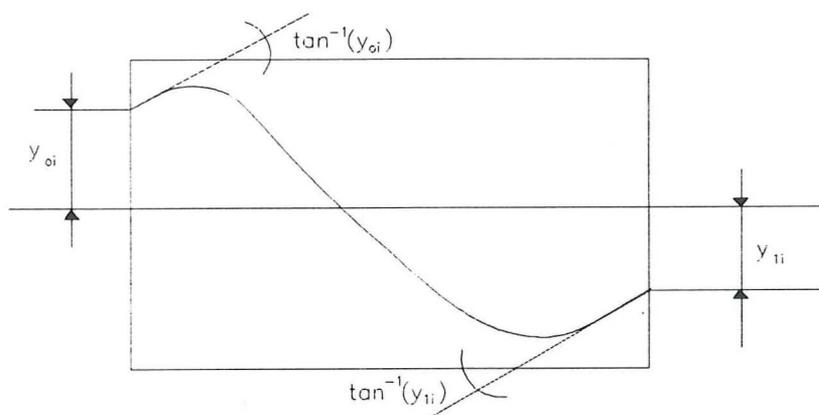


Figura 19. Trayectoria del rayo dentro de la lente grin.

Considerando una lente grin con la cara de entrada situada en $z = 0$, se quiere colimar la luz proveniente de una fuente puntual localizada en el plano de entrada. Se sabe que lo anterior ocurre si el rayo incide a cualquier ángulo en $(x, y) = (0, 0)$ para un valor de z que cumpla con

$$\cos(gz) = 0, \quad (164)$$

donde z es la longitud de la lente.

Esta ecuación se satisface para un número infinito de longitudes de la lente, pero la más pequeña de estas es

$$z = \frac{\pi}{2g}. \quad (165)$$

Este valor de z permite que los rayos salgan con pendiente cero.

De las ecuaciones (163) se tiene que las coordenadas en la cara de salida son ahora

$$y_{li} = \frac{y_{0i}'}{g}$$

y

$$y'_{li} = -gy_{0i}. \quad (166)$$

Además, la lente transmisora y la fibra de entrada están sin ningún espacio de aire entre ellas. Para simplificar los resultados, se supone que el índice de refracción del núcleo de la fibra y el del eje de la lente grin son aproximadamente iguales. Esto es, la posición y pendiente de los rayos que entran a la lente son iguales a aquellos que están en la cara final de la fibra.

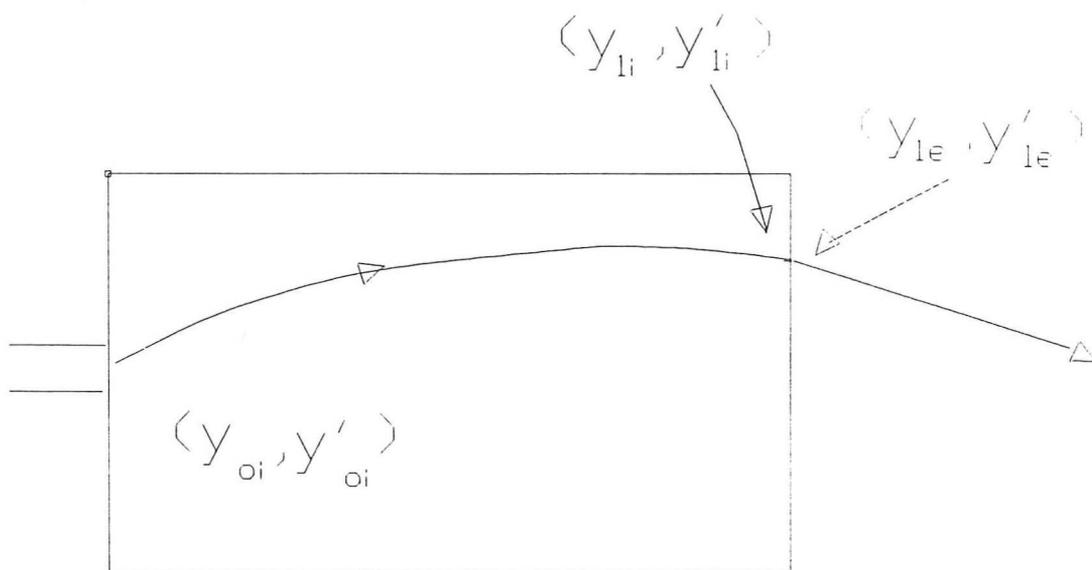


Figura 20. Coordenadas del rayo en la lente transmisora.

Las coordenadas de los rayos fuera de la lente (y_{le}, y'_{le}) están relacionadas con aquellas que están justo adentro (y_{li}, y'_{li}) de la siguiente forma (figura 20)

$$y_{le} = y_{li}$$

y

$$y'_{le} = n_0 y'_{li} \quad (167)$$

debido a la ley de Snell. Combinando estas ecuaciones con (166) se obtienen las coordenadas de salida

$$y_{le} = \frac{y'_{oi}}{g}$$

y

$$y'_{le} = -n_0 g y_{oi} \quad (168)$$

Estos resultados prueban que todos los rayos que emanan desde cualquier punto y_{oi} , sobre la cara de entrada de la lente grin, van a salir con la misma inclinación. Esta es la propiedad de colimación deseada de las lentes grin.

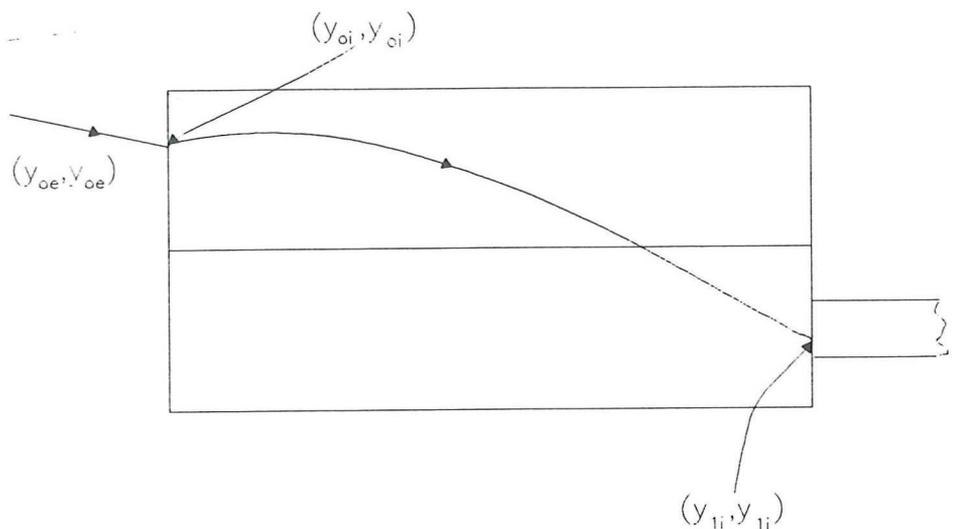


Figura 21. Coordenadas del rayo en la lente receptora.

Para la lente receptora, figura 21, las coordenadas (y_{oe}, y'_{oe}) de los rayos externos y aquellos rayos internos (y_{oi}, y'_{oi}) en la entrada de la lente están relacionados de la siguiente forma

$$y_{oi} = y_{oe} \quad (169)$$

y

$$y'_{oi} = \frac{y'_{oe}}{n_0}.$$

Para la lente receptora, las ecuaciones (166) se escriben como

$$y_{li} = \frac{y'_{oe}}{n_0 g}, \quad (170)$$

$$y'_{1i} = -gy_{0i} = -gy_{0e} \quad .$$

Estos resultados muestran que todos los rayos incidentes en la lente con la misma inclinación y'_{0e} deberán converger en un solo punto. En este punto se coloca la fibra de salida.

Bajo esta consideración se puede trazar cualquier rayo a través del sistema como se muestra en la figura 22. El espacio d está presente, pero no existe ningún otro desplazamiento.

Las coordenadas de los rayos en la fibra transmisora son

$$(y_3, y'_3) = (y'_1 - n_0 g y_1). \quad (171)$$

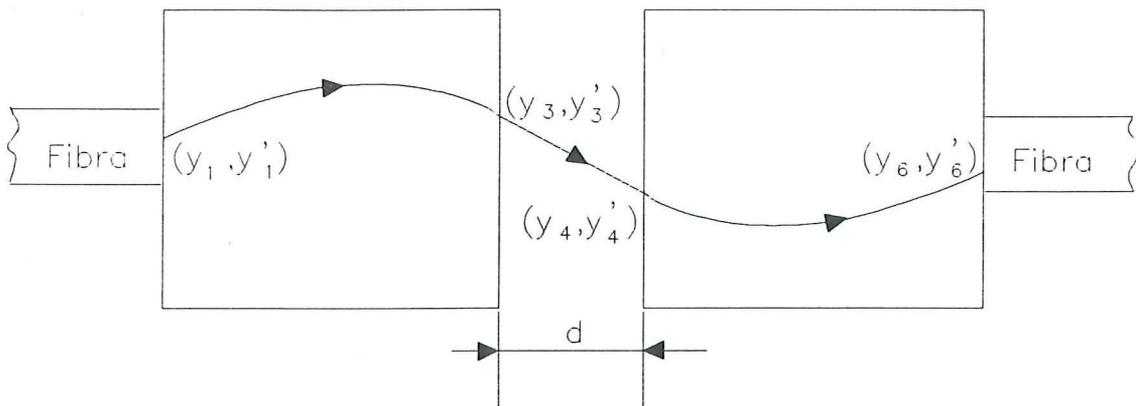


Figura 22. Trayectoria típica de un rayo en una lente grin.

Los rayos viajan en línea recta con una inclinación y'_3 así que en la entrada de la lente receptora, las coordenadas son

$$(y_4, y'_4) = \left(\frac{y'_1}{g} - n_0 d g y_1, -n_0 g y_1 \right), \quad (172)$$

donde d es el espacio entre las lentes. Usando las ecuaciones (170), las coordenadas del rayo incidente sobre la fibra receptora están dadas por

$$(y_6, y'_6) = (-y_1, n_0 d g y_1 - y'_1) \quad (173)$$

Esto demuestra que el sistema tiene amplificación unitaria, con inversión, a pesar de la separación entre las lentes. Si no existe separación ($d = 0$), la inclinación de los rayos incidentes en la fibra receptora son iguales en magnitud a aquellos en la fibra transmisora. En tal caso, todos los rayos podrían ser aceptados por la fibra receptora.

En la figura 23 se muestra la parte transmisora del acoplador, donde la fibra de entrada tiene un diámetro diferente de cero. El camino de los rayos se muestra en la figura 23.

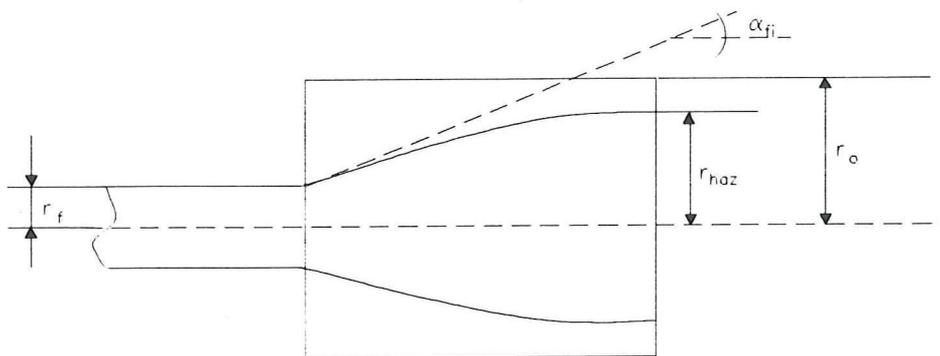


Figura 23. Trayectoria de los rayos en la lente transmisora.

El diámetro de la lente grin deberá ser lo suficientemente grande para poder contener los rayos emitidos por la fibra. Si el diámetro del núcleo de la fibra es mucho más pequeño que el diámetro de la lente, la máxima desviación desde el eje, para todos los rayos, ocurre muy cerca de la cara final de la lente. Haciendo esta máxima desviación igual al radio de la lente r , en la ecuación (175) el ángulo de aceptación producido para la lente es

$$\alpha_{fi} = \tan^{-1}\left(\frac{r}{g}\right), \quad (174)$$

donde α_{fi} es el ángulo medido dentro de la lente grin.

Generalmente, el cono de rayos emitido por una fibra óptica se da en términos de la abertura numérica, $AN. = \sin(\alpha_{fe})$. El ángulo α_{fe} , es el semiángulo del cono medido en el aire fuera de la fibra óptica. Se requiere conocer el semiángulo interno correspondiente, por si existe ahí un espacio de aire entre la fibra óptica y la lente grin.

La ley de Snell provee el ángulo interno

$$\alpha_{fi} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{AN.}{n_1}\right), \quad (175)$$

donde n_1 es el índice de refracción del núcleo de la fibra óptica. Ya que $n_1 \cong n_0$, el ángulo interno se puede escribir como

$$\alpha_{fi} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{AN.}{n_0}\right). \quad (176)$$

Entonces, α_{fi} deberá de ser el semiángulo del cono de los rayos emitidos dentro de la lente grin. La condición de aceptación de todos los rayos es ahora

$$\alpha_{fi} \leq \alpha_l. \quad (177)$$

De las ecuaciones (174) y (176) se tiene que la condición de aceptación es

$$\text{sen}^{-1}\left(\frac{AN.}{n_0}\right) \leq \tan^{-1}(rg) \quad (178)$$

Para ángulos pequeños, el radio de la lente grin transmisora tiene la siguiente condición

$$r \geq \frac{AN.}{n_0g} \quad (179)$$

r deberá ser más grande que lo indicado por el signo igual para tener un cierto margen de seguridad.

El término del lado derecho de la ecuación (179) corresponde al radio del haz que emerge de la cara final de la lente grin transmisora (figura 23).

La abertura numérica de la lente grin generalmente se representa como el seno del ángulo de aceptación externo, suponiendo una interface aire-lente. La abertura numérica de la lente grin es entonces

$$(A.N.)_l = n_0 \sin \theta. \quad (180)$$

V.2 Perdidas de acoplamiento debidas al desplazamiento lateral

Ahora se supone que existe un desplazamiento lateral entre las lentes grin, como se muestra en la figura 24. El diámetro de la lente grin es d_l , el desplazamiento lateral es L y a $\frac{L}{d_l}$ el desplazamiento fraccional.

Para simplificar el análisis, se supone que la fibra óptica tiene una distribución de potencia aproximadamente uniforme en la cara final del núcleo de la fibra óptica. Con esta suposición la potencia acoplada es proporcional a la cantidad del área de traslape entre las dos lentes grin que empiezan a juntarse. Este traslape se muestra en la figura (24).

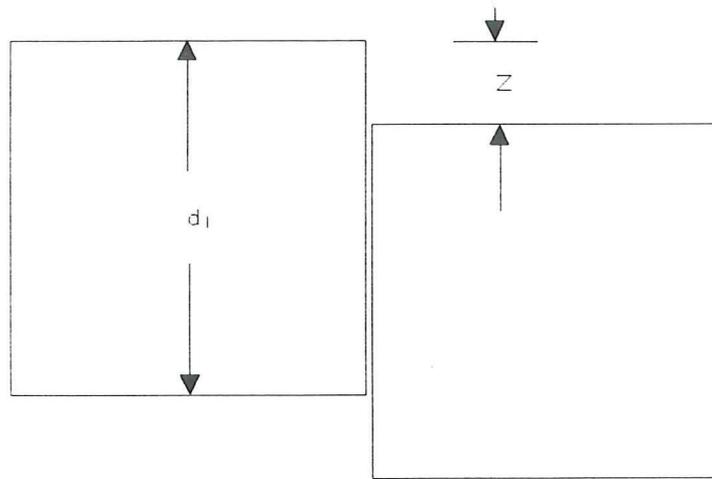


Figura 24. Desplazamiento lateral entre lentes grin. Vista de la sección transversal.

La potencia fraccional acoplada se define como la razón del área de traslape y el área de la lente grin. El área de traslape fraccional se encuentra de la siguiente manera. Se suponen dos círculos de radio d_l centrados en las coordenadas $(x, y) = (0, 0)$ y $(x, y) = (0, L)$, respectivamente. Los círculos tienen los centros desplazados una distancia L , que es el desplazamiento lateral, como se muestra en la figura (25).

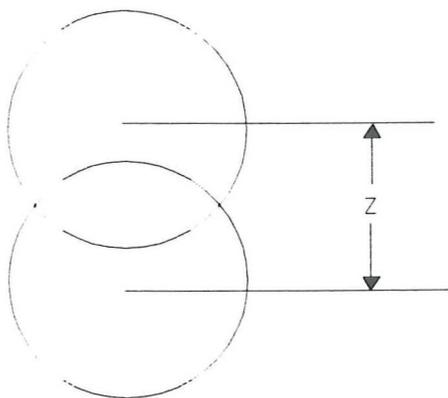


Figura 25. Vista del área de traslape de las lentes grin.

El área de traslape fraccional se encuentra calculando la siguiente integral

$$\frac{8}{\pi d_l} \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{d_l^2 - L^2}} (\sqrt{d_l^2 - 4x^2} - L) dx, \quad (181)$$

cuyo resultado es

$$\left(\frac{2}{\pi}\right) \sin^{-1} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{d_l}\right)^2} - \left(\frac{2}{\pi}\right) \left(\frac{L}{d_l}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{L}{d_l}\right)^2}. \quad (182)$$

entonces, la pérdida de acoplamiento, expresada en decibeles es

$$-10 \log_{10} \left\{ \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{d_l}\right)^2} - \frac{2L}{\pi d_l} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{d_l}\right)^2} \right\} \quad L \leq d_l, \quad (183)$$

por supuesto, la pérdida es infinita para $L \geq d_l$. Esta relación se grafica en la figura (26).

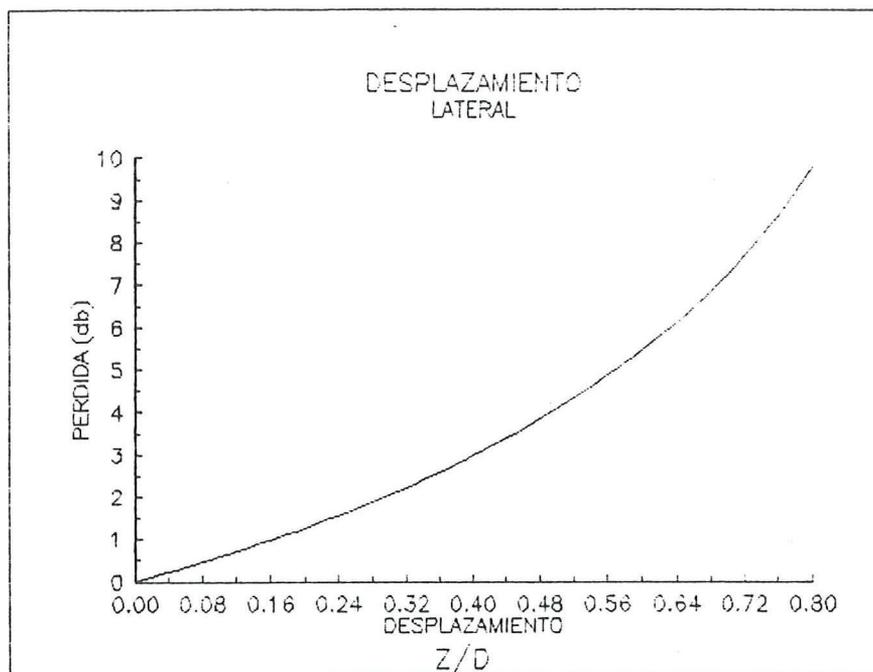


Figura 26. Perdidas de acoplamiento debidas al desplazamiento lateral.

V.3 Perdidas debido a la inclinación entre las lentes

Ahora se supone una pequeña inclinación entre las lentes, como se ilustra en la figura 27. Debido a esta inclinación la imagen está desplazada con respecto al eje de la lente receptora. La fibra óptica receptora se ilumina por una mancha que tiene la misma área de su núcleo, pero está desplazada con respecto al centro del núcleo.

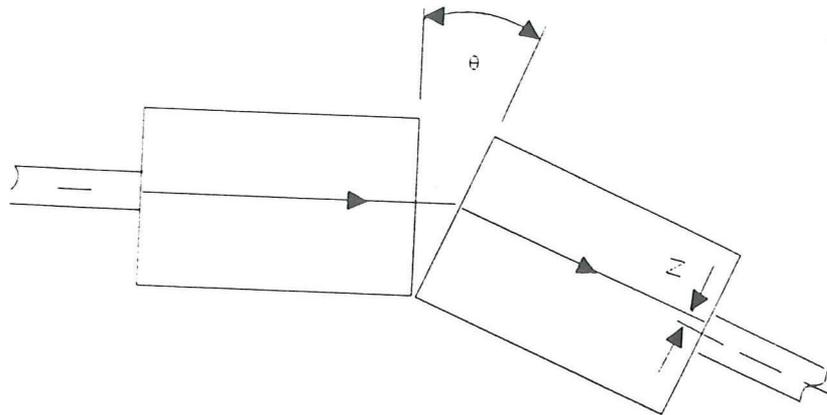


Figura 27. Inclinación entre las lentes.

La pérdida de acoplamiento fraccional está dada por la razón del área de traslape y el área del núcleo de la fibra óptica.

El ángulo θ tiene un rango de variación desde cero hasta unos cuantos grados. Por esta razón, el ángulo del rayo incidente, sobre la fibra receptora, puede cambiarse debido a la inclinación de la fibra óptica.

El desplazamiento de la mancha puede determinarse trazando el camino del rayo central desde la fibra transmisora a la fibra receptora, como se muestra en la figura 27. Este rayo entra a la lente transmisora en una posición dada con coordenadas ($y_i = 0, y'_i = \tan \theta$).

La ecuación (170) da el desplazamiento de este rayo en la cara final de la lente receptora relativo al eje de la lente, el cual es

$$L = \frac{\tan \theta}{n_0 g}. \quad (184)$$

La pérdida de acoplamiento está dada por la ecuación (183), usando el valor dado de L y con d_i reemplazada por el diámetro del núcleo de la fibra $2r_f$, esto es

$$-10 \log_{10} \left\{ \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \sqrt{1 - \left(\frac{\tan \theta}{2n_0 g r_f} \right)^2} - \frac{\tan \theta}{\pi n_0 g r_f} \sqrt{1 - \left(\frac{\tan \theta}{2n_0 g r_f} \right)^2} \right\}. \quad (185)$$

Las curvas de pérdida se muestran en la figura (28). Las curvas indican que las pérdidas pueden ser considerables para pequeños errores angulares.

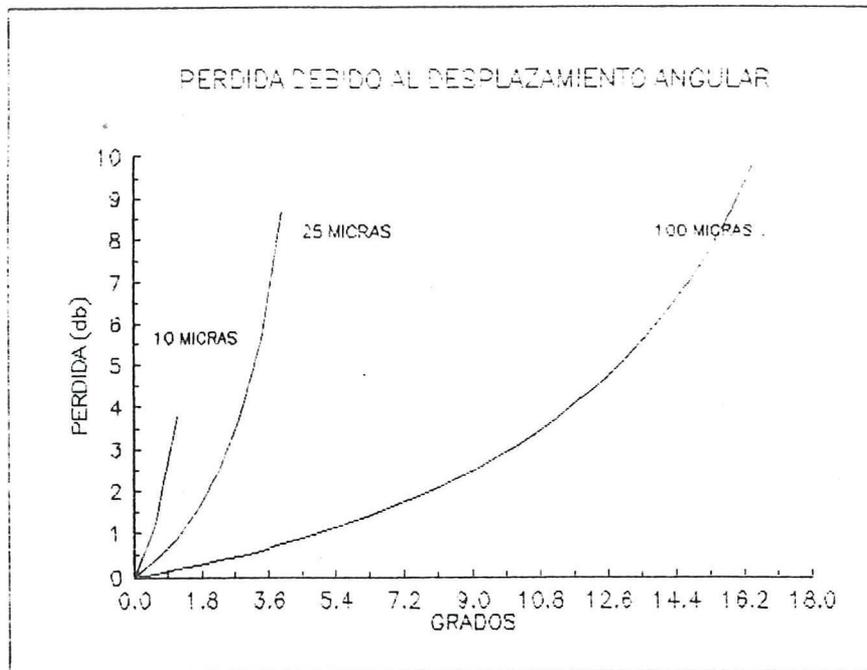


Figura 28. Pérdidas de acoplamiento debidas a la inclinación entre las lentes GRIN.

V.4 Pérdidas debido a una interface entre las lentes grin.

Si existe un espacio de aire entre las dos lentes, ocurrirá pérdida debido a la reflexión de Fresnel, pero esta puede reducirse si las lentes tienen películas antirreflectoras. A continuación se analizan las pérdidas debido al espacio entre las lentes grin.

A pesar del espacio, el sistema mostrado en la figura 29 mantiene una amplificación unitaria con inversión. Los rayos que emanan del centro de la fibra óptica viajan horizontalmente a través del espacio de aire. Los otros rayos no lo hacen, así que el haz que emerge de la lente transmisora es ligeramente divergente.

Cada punto sobre la cara de la fibra transmisora radía luz hacia la lente. El máximo ángulo hacia la lente transmisora α_{fi} se ilustra en la figura 23 y está dado por la ecuación (183).

Cuando no existe espacio de aire, la luz transmitida converge sobre la fibra receptora con el mismo ángulo α_{ϕ} y con el eje del cono de luz horizontal, como se muestra en la figura (29a). Con esta condición toda la luz se acopla a la fibra receptora. El espacio de aire causa una pequeña inclinación en el eje del cono que incide en la fibra receptora, como se muestra en la figura (29b), pero el cambio es despreciable comparado con el ángulo de divergencia del cono de luz. La inclinación es cero para una fuente puntual colocada en el centro de la lente transmisora, pero incrementa según se mueva hacia la orilla de la fibra.

La inclinación causa que algunos rayos caigan fuera del ángulo de aceptación de la fibra de salida. Para espacios de aire grandes y para fuentes puntuales fuera del eje, el cono de luz transmitido puede caer fuera del cono de aceptación de la fibra receptora.

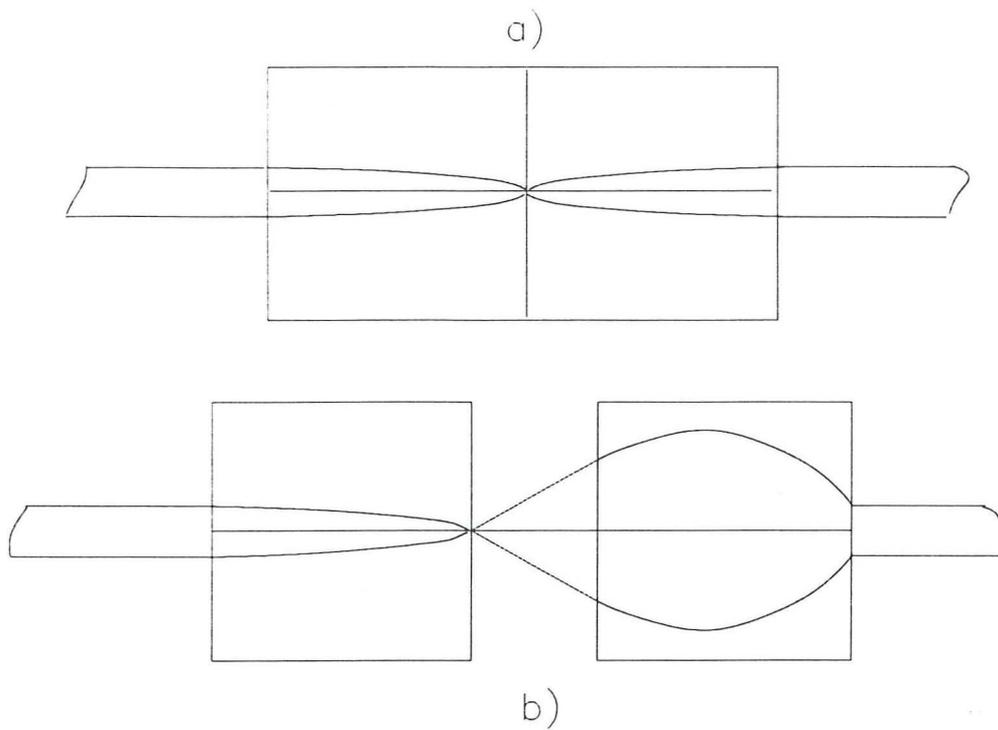


Figura 29. Efectos del espacio de aire entre las lentes. Trazo de los rayos axiales del cono de luz emitido cuando: a) no existe espacio de aire b) existe espacio de aire.

Para encontrar dicho ángulo de inclinación, se considera que una fuente puntual emite un cono de luz desde una distancia y_1 medida desde el centro del núcleo de la fibra. La figura 30 muestra el camino del eje del cono de luz hasta la fibra receptora. El ángulo α representa la inclinación del cono de luz.

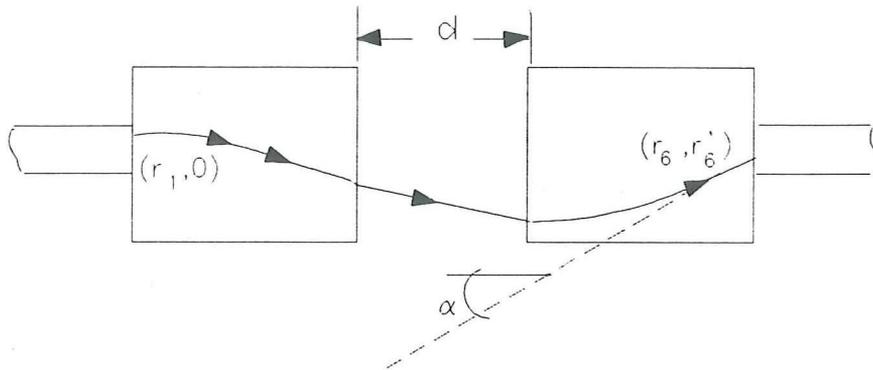


Figura 30. Trayectoria de los rayos cuando esta presente un espacio de aire

De la ecuación (183) se tiene que un rayo, tal como el rayo axial, con pendiente inicial $y'_1 = 0$ llega a la fibra receptora con pendiente $y'_6 = n_0 g dy_1$, es decir $\tan \alpha = n_0 g dy_1$.

Para ángulos pequeños se puede usar la aproximación

$$\alpha \cong n_0 g dy_1 \quad . \quad (186)$$

Como se supuso, si el espacio d es cero o si la fuente puntual está en el centro de la fibra, entonces no existe inclinación.

En la ecuación (183), el término entre corchetes representa la potencia fraccional acoplada para desplazamiento lateral. Este resultado puede aplicarse a la situación actual con las siguientes modificaciones:

El término $\left(\frac{z}{d_i}\right)$ se reemplaza por el desplazamiento fraccional angular del cono de rayos.

Este desplazamiento está dado por $\frac{\alpha}{2\alpha_f}$, donde α_ϕ es el máximo ángulo de aceptación del medio cono de la fibra, como se describe en la ecuación (183).

Si $\alpha \geq 2\alpha_{fi}$, todos los rayos están fuera del ángulo de aceptación de la fibra de salida y por lo tanto no ocurre acoplamiento. Con estas modificaciones, la ecuación (183) tiene la siguiente forma

$$P(y_i) = \frac{2}{\pi} \text{sen}^{-1} \sqrt{1 - \left(\frac{n_0 g d y_1}{2\alpha_{fi}}\right)^2} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{n_0 g d y_1}{2\alpha_{fi}}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{n_0 g d y_1}{2\alpha_{fi}}\right)^2}, \quad (187)$$

para el acoplamiento fraccional de un círculo de luz situado en y_1 sobre la cara de la fibra transmisora, como se muestra en la figura 30. La luz emitida desde el centro de la fibra, $y_1 = 0$, siempre es aceptada a pesar del espacio de aire d .

La eficiencia de acoplamiento disminuye conforme la posición de la fuente se incrementa. El resultado en la ecuación (183) es válido para $\frac{n_0 g d y_1}{2\alpha_{fi}} \leq 1$, y $P(y_1)$ es cero en otros casos.

La eficiencia neta se obtiene promediando la ecuación (187) sobre el área entera que emite la fibra transmisora; esto es válido si la fibra emite uniformemente.

Para una fibra con un núcleo de radio y_f , la eficiencia de acoplamiento esta dada como

$$\eta = \frac{1}{\pi r_f^2} \int_0^{r_f} \int_0^{2\pi} P(y_i) y_i d\gamma dy_1. \quad (188)$$

La integración de la ecuación anterior da la pérdida de acoplamiento, la cual es

$$L = -10 \log\left(\frac{2}{\pi(\gamma r_f)^2} \left\{ \frac{\pi}{4} - \left(\frac{1}{2}(\gamma r_f)^2 \arcsen[1 - (\gamma r_f)^2]\right)^{\frac{1}{2}} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3\gamma r_f}{4} [1 - (\gamma r_f)^2]^{\frac{1}{2}} + \gamma r_f [1 - (\gamma r_f)^2]^{\frac{1}{2}} - \frac{\arcsen(\gamma r_f)}{4} \right\}\right), \quad (189)$$

donde $\gamma r_f = n_0 g d r_f$.

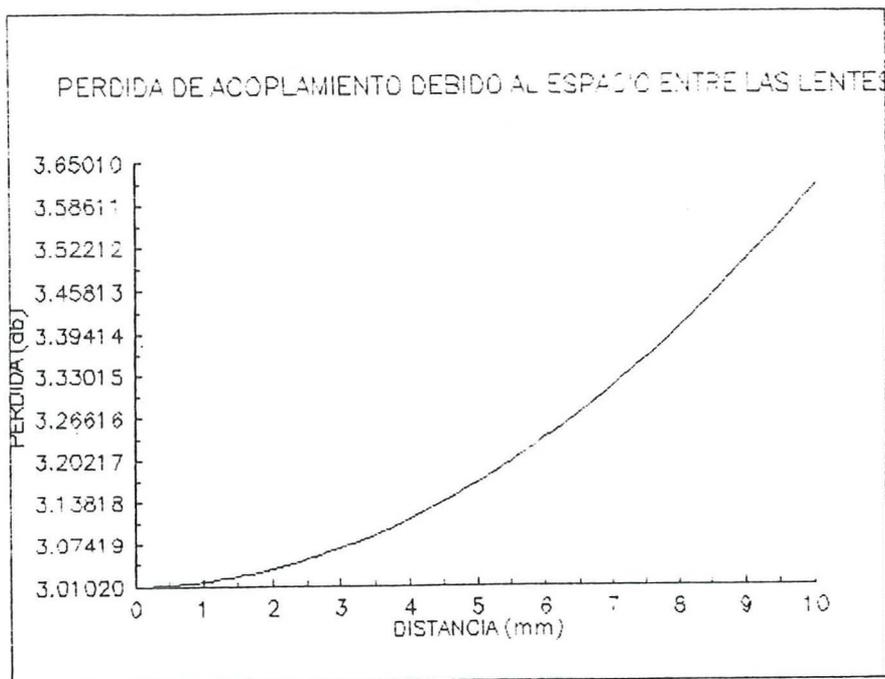


Figura 31. Pérdida de acoplamiento causada por la separación de las lentes

V.5 Diámetro de la lente receptora.

Para espacios de aire grandes, la lente receptora puede no interceptar toda la luz proveniente de la lente transmisora debido a la expansión del haz de luz.

Para describir como afecta esto a las pérdidas, se considera un rayo de luz, emitido desde la fibra transmisora, con coordenadas arbitrarias (y_i, y'_i) , como se muestra en la figura (17). De la ecuación (172) se conoce la posición de este rayo en la lente receptora, y está dada por

$$y_4 = \frac{y'_1}{g} - n_0 g dy_1, \quad (190)$$

y aplicando la ecuación (170), la pendiente de este rayo cuando entra a la fibra receptora es

$$y'_6 = -g y_4. \quad (191)$$

Se conoce por la ecuación (168) que el radio de haz que emerge de la lente receptora es $r_b = \frac{AN}{n_0g}$. Este es el radio de la lente más pequeña que puede usarse en la transmisión para poder atrapar todos los rayos emitidos por la fibra. Ahora, se supone que el rayo incide sobre la lente receptora en la distancia radial

$$y_4 = -\frac{AN}{n_0g} \quad (192)$$

Entonces de la ecuación (191)

$$y'_6 = \frac{AN}{n_0} \quad (193)$$

El lado derecho de esta ecuación es la tangente del ángulo de aceptación encontrado en la ecuación (176). Para ángulos pequeños, la tangente y el seno son aproximadamente iguales, esto es, el rayo incide sobre la fibra justo en la orilla del cono de aceptación.

Cualquier rayo que incida sobre la lente receptora en un radio más allá de r_b tendrá una pendiente más grande en la fibra receptora que la encontrada en la ecuación (191) y no puede ser aceptada por ella. Esto indica que el hacer la lente más grande que r_b , para interceptar más luz, no contribuye a la reducción de pérdidas. Por lo anterior, se propone que las dos lentes grin sean idénticas y con un radio no más grande que, r_b , el radio del haz emergente de la lente transmisora.

V.6 Eficiencia de acoplamiento debido a la aberración esférica

En los capítulos anteriores se encontró que la aberración esférica depende fuertemente del ángulo de salida de los rayos en la fibra de entrada. En este capítulo se determinará la eficiencia de acoplamiento del acoplador suponiendo una distribución uniforme en la fibra de entrada.

Se conoce que el perfil del índice de la fibra óptica está dado por

$$n(r) = n_0 \left[1 - 2\Delta \left(\frac{r}{r_f} \right)^{\alpha} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad r < r_f$$

y

$$n(r) = n_0 [1 - 2\Delta]^{\frac{1}{2}}, \quad r < r_f, \quad (194)$$

donde $\Delta = \frac{\Delta n}{n_0}$, r es la distancia medida desde el eje de la fibra, r_f es el radio del núcleo, n_0

es el índice de refracción en el eje y α es un parámetro que describe el perfil: $\alpha \rightarrow \infty$ representa un índice de escalón, $\alpha \cong 2$ representa una fibra de índice de gradiente. Para tales fibras se tiene que la apertura numérica está dada por

$$AN(r) = AN \left[1 - \left(\frac{r}{r_f} \right)^{\alpha} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad r < r_f$$

$$AN(r) = 0, \quad r \geq r_f, \quad (195)$$

donde $AN = n_0 \sqrt{2\Delta}$.

Cada punto de la fibra emisora causa una mancha de luz en la fibra receptora. Debido a la simetría rotacional solo los puntos que están en el eje causan una simetría rotacional. Cuando la distancia entre los puntos y el eje es muy pequeña, comparada con la distancia focal, se supone que las manchas de luz son circulares para todos los puntos y además que éstas tienen el mismo diámetro.

La potencia guiada por las lentes está dada por

$$P = I \iint \cos \theta dA d\Omega, \quad (196)$$

donde dA es un elemento de superficie con radiancia I y $d\Omega$ es un elemento de ángulo sólido. I es una constante para una distribución uniforme.

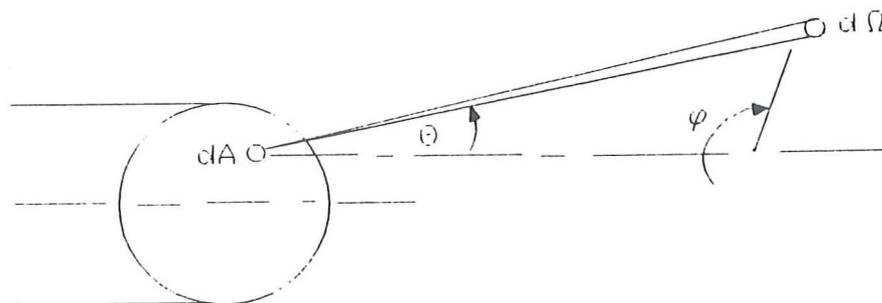


Figura 32. Distribución de luz a la salida de la fibra.

Ahora, se tiene que expresar dA y $d\Omega$ en términos de las coordenadas y de los ángulos de los rayos. De la figura 32 se tiene que el elemento de ángulo sólido está dado por

$$d\Omega = \text{sen } \theta d\theta d\phi, \quad (197)$$

dA puede ser expresada en términos de θ y γ . De la figura 32 se tiene que

$$dA = 2pr_f \cos \gamma d\gamma, \quad (198)$$

$$\frac{p^2}{r_f^2} = \frac{r_1^2}{r_f^2} - \text{sen } \gamma^2, \quad (199)$$

donde r_1 es la máxima distancia desde el eje de la fibra para aquellos rayos que tengan un ángulo θ .

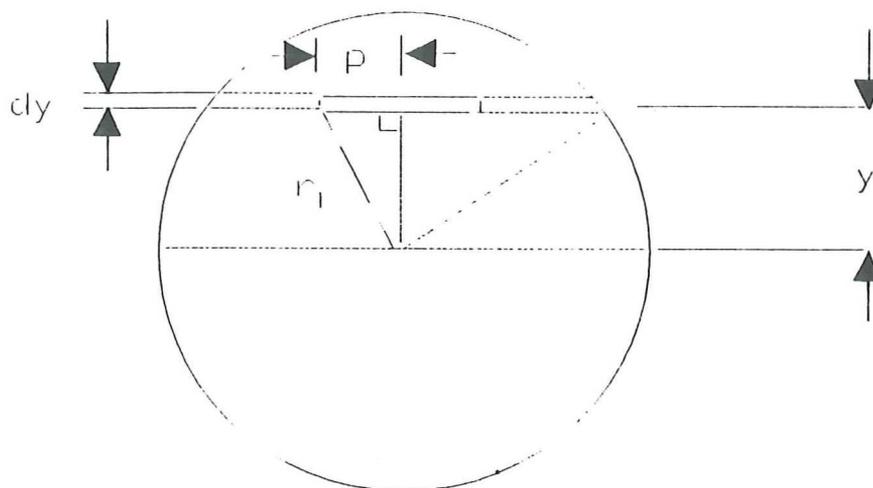


Figura 33. Definición del elemento de área dA

De las ecuaciones (194) y (195) se tiene que

$$\left(\frac{r_1}{r_f}\right)^2 = \left(1 - \frac{\text{sen}^2 \theta}{AN^2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \quad (200)$$

Combinando las ecuaciones (198) y (200) se obtiene el elemento de área

$$dA = 2r_f^2 \cos \gamma \left[\left(1 - \frac{\text{sen}^2 \theta}{AN^2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} - \text{sen}^2 \gamma \right]^{\frac{1}{2}} d\gamma \quad (201)$$

Sustituyendo los resultados de las ecuaciones (197) y (201) en la ecuación (194) se obtiene

$$P = 8\pi r_f^2 \int_{\theta=0}^{\theta_c} \int_{\gamma=0}^{\gamma_1(\theta)} \left[\left(1 - \frac{\text{sen}^2 \theta}{AN^2} \right)^{\frac{2}{\alpha}} - \text{sen}^2 \gamma \right]^{\frac{1}{2}} \cos \gamma \text{sen} \theta \cos \theta d\gamma d\theta, \quad (202)$$

donde

$$\theta_c = \text{arc sen}(AN) \quad (203)$$

y

$$\text{sen} \gamma_1 = \left(1 - \frac{\text{sen}^2 \theta}{AN^2} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (204)$$

La integración sobre ϕ arroja un factor de 2π . El límite superior γ_1 se encuentra haciendo $dA = 0$. La potencia guiada esta dada por

$$P_0 = \frac{\alpha}{\alpha + 2} \pi^2 r_f^2 I AN^2. \quad (205)$$

Si existe un acoplamiento imperfecto solo una fracción del dA contribuye a la cantidad de luz que es aceptada por la fibra receptora. Bajo estas condiciones en lugar de la ecuación (202) se obtiene

$$P = 8\pi^2 I \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{\gamma=0}^{\gamma_2(\theta)} \left\{ \left[\left(1 - \frac{\text{sen}^2 \theta}{AN^2} \right)^{\frac{2}{\alpha}} - \text{sen}^2 \alpha \right]^{\frac{1}{2}} - C(\theta) \right\} \cos \gamma \cos \theta \text{sen} \theta d\gamma d\theta, \quad (206)$$

donde

$$C(\theta) = \frac{S_i(\theta)}{2r_f}. \quad (207)$$

$S_i(\theta)$ está dado por la ecuación (134). Los límites de θ y γ son encontrados por el desvanecimiento de dA . Similar a la ecuación (204) se tiene

$$\text{sen} \gamma_2 = \left(1 - \frac{\text{sen}^2 \theta_1}{AN^2} \right)^{\frac{2}{\alpha} - C^2}. \quad (208)$$

θ_1 se obtiene de

$$C(\theta_1) = \left(1 - \frac{\text{sen}^2 \theta_1}{AN^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (209)$$

La eficiencia de acoplamiento está dada por

$$\eta = \frac{P}{P_0}, \quad (210)$$

donde P y P_0 están dadas por las ecuaciones (206) y (205), respectivamente. Después de integrar sobre γ en la ecuación (206) y con el cambio de variable

$$\text{sen} x = \frac{\text{sen} \theta}{AN}, \quad (211)$$

tal ecuación toma la siguiente forma

$$P = 4\pi r_f^2 AN^2 I \int_0^{x_1} \text{sen} x \cos x \left[\cos^{\frac{4}{\alpha}} x \arcsen \left[\frac{\left(\cos^{\frac{4}{\alpha}} x - C^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\cos^{\frac{2}{\alpha}} x} \right] \right], \quad (212)$$

donde x_1 puede ser encontrada de

$$C(x_1) = \cos^{\frac{2}{\alpha}} x_1. \quad (213)$$

Suponiendo que $C(x) \ll 1$ la eficiencia de acoplamiento puede aproximarse por

$$\eta = 1 - \frac{4}{\pi} \frac{\alpha + 2}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen} x \cos^{1+\frac{2}{\alpha}} x C dx, \quad (214)$$

donde

$$C(x) = S_t \text{sen}^3 x, \quad (215)$$

$$S_t = \frac{mV_0^3}{2} \left[n_0^2 \left(k + \frac{k'}{m^4} \right) + (1+k^2)^2 Z - 4h_4(k^3 T_1 + 3k^2 T_2 + 3k T_3 + T_4) \right].$$

La integración de la ecuación (214) no puede realizarse analíticamente para valores arbitrarios de α , afortunadamente esto es posible para los dos casos de interés.

Para un índice de escalón la ecuación (214) tiende a

$$\eta = 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen} x \cos x S_t \text{sen}^3 x dx \quad . \quad (216)$$

La integración da

$$\eta = 1 - \frac{4S_t}{5\pi} \quad . \quad (217)$$

La eficiencia de acoplamiento es óptima cuando S_t es mínima.

Para un índice de gradiente se tiene

$$\eta = 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} S_t \text{sen}^4 x \cos^2 x dx \quad . \quad (218)$$

La integración da

$$\eta = 1 - \frac{1}{4} S_t \quad . \quad (219)$$

La eficiencia de acoplamiento es óptima cuando $\eta = 1$, esto significa que se debe reducir la aberración esférica para eliminar las pérdidas. La figura 34 muestra la eficiencia de acoplamiento cuando esta presente la aberración esférica.

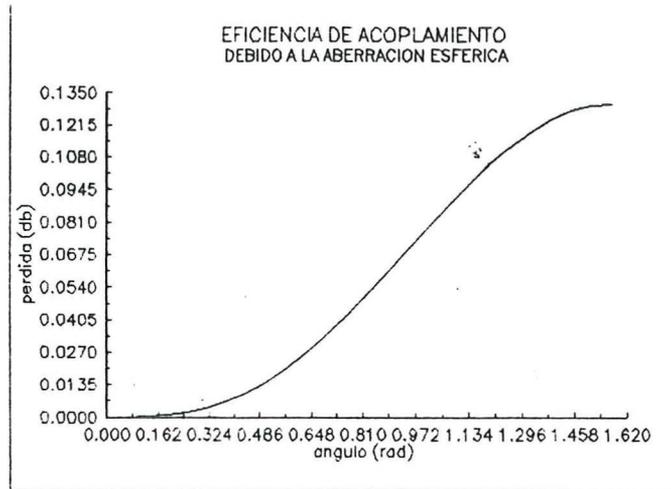


Figura 34. Eficiencia de acoplamiento para un acoplador direccional

VI. CONCLUSIONES

Se presentaron los antecedentes de los avances llevados a cabo en el área de óptica con gradiente en el índice de refracción.

Se llevó a cabo un análisis de la teoría con el fin de presentar herramientas básicas para diseñar componentes o sistemas ópticos que utilicen este tipo de óptica. Se presentó la metodología para realizar trazo de rayos de tercer y quinto orden y se desarrolló un programa de trazo de rayos necesario para la realización de esta tesis, ya que será de gran utilidad para los lectores.

Con el fin de verificar la calidad en los sistemas que utilizan elementos grin, se presentaron los conceptos de teoría de aberraciones para lentes o sistemas ópticos con índice de refracción que tienen simetría rotacional alrededor del eje z . En este trabajo se calcularon expresiones analíticas de las aberraciones considerando primero que el objeto se encuentra localizado a una distancia infinita de la primera superficie de la lente, y posteriormente a una distancia finita. De estas ecuaciones se obtuvo que cuando el objeto (como es el caso en este trabajo) se encuentra en la primera superficie de la lente todas las aberraciones se anulan con excepción de la aberración esférica que es la que contribuye a las pérdidas del sistema.

Se desarrolló una ecuación que indica el lugar geométrico de los rayos que acepta el sistema óptico (en este caso es un cono con base elíptica). La expresión aquí presentada es muy sencilla de analizar y coincide con el trabajo de Gómez Reino et al, 1992.

Mediante el trazo de rayos se estudiaron las características necesarias para el diseño del acoplador direccional microóptico, tales como la colimación, amplificación, tamaño y diámetro de las lentes cilíndricas. A través de este análisis se encontró que

1.- La colimación de los rayos se realiza cuando la longitud de la lente es de un cuarto del período paraxial.

2.- Todos los rayos que inciden en la lente receptora con la misma inclinación convergen en un solo punto.

3.- El sistema óptico propuesto tiene amplificación unitaria, con inversión, a pesar de la separación entre las lentes.

4.- existe un radio mínimo en las lentes que puede usarse en la transmisión para poder atrapar todos los rayos emitidos por la fibra.

Finalmente se describió el funcionamiento básico de un acoplador direccional microóptico y se analizó el acoplamiento entre dos fibras ópticas cuando existe separación, desplazamiento lateral, inclinación y aberraciones en las lentes cilíndricas con índice de refracción gradual que forman el acoplador.

Bajo la suposición de existe un desplazamiento lateral y una inclinación entre las lentes grin, se encontraron expresiones analíticas que dan las pérdidas de acoplamiento y en estas se encontró que la eficiencia de acoplamiento disminuye conforme la posición de la fuente se incrementa.

De lo anterior se obtuvo lo siguiente:

a).- Se mostró que el acoplador direccional es muy sensible a inclinaciones entre las lentes, es decir, una pérdida menor a 1 db requiere un ángulo de inclinación entre las lentes menor que 0.1 grados.

b).- En lo que respecta al desplazamiento lateral, si se requieren pérdidas menores a 0.5 db el desplazamiento lateral fraccional es del orden de 0.08.

c).- Se encontró que las fibras ópticas con núcleos de radios pequeños (del orden de 25 μm) presentan pérdidas muy bajas.

d).- Se encontró que solo la aberración esférica contribuye a las pérdidas del acoplador y para que éste sea óptimo, la aberración esférica se tiene que eliminar.

Con el fin de continuar en esta área de investigación en lo que se refiere al uso de este tipo de componentes, se continuará el trabajo de investigación en los siguientes aspectos:

- 1.- Evaluación experimental de las aberraciones y, por tanto, de la eficiencia de un acoplador direccional microóptico.
- 2.- Evaluación experimental del perfil del índice de refracción utilizando métodos geométricos e interferométricos.
- 3.- Diseño de instrumentación y componentes con índice de variación gradual.
- 4.- Publicación de la ecuación que indica el lugar geométrico de los rayos que acepta el sistema óptico.

LITERATURA CITADA

- Agarwal A. K., *Fiber and Integrated Optics*, Vol. 6, No. 1, 1987 pag. 27.
- Born y Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, 1975.
- Brown S.J., *Appl. Opt.*, Vol. 19, No. 7, Abril 1980 pag. 1056.
- Cline T. W. y R. B. Jander, *Appl. Opt.*, Vol. 21, No. 6, Marzo 1982 pag. 1035.
- Gomez Reino, Acosta y Perez, *Jpn. J. Appl. Phys.*, Vol. 31, No. 5B, Mayo 1992 pag. 1582.
- Iga K., *Appl. Opt.*, Vol. 19, No. 7, Abril 1980 pag. 1039.
- Iga, Kokubun y Okawa, *Fundamentals of Microoptics*, Academic Press, 1984.
- Iga K. y N. Yamamoto, *Appl. Opt.*, Vol. 16, No. 5, Mayo 1977 pag. 1305.
- Kawazu M. e Y. Ogura, *Appl. Opt.*, Vol. 19, No. 7, Abril 1980 pag. 1105.
- Kitano I., Toyama, Nishi, *Appl. Opt.*, Vol. 22, No. 3, Febrero 1983 pag. 396.
- Marchand E. W., *J. Opt. Soc. Am.*, Vol. 66, No. 12, Diciembre 1976 pag. 1326.
- Marchand E. W., *Gradient Index Optics*, Academic Press, 1978.
- Marchand E. W., *Appl. Opt.*, Vol. 21, No. 6, Marzo 1982 pag. 983.
- Marchand E. W., *Appl. Opt.*, Vol. 27, No. 3, Febrero 1988 pag. 465.
- Matsushita K. y M. Toyama., *Appl. Opt.*, Vol. 19, No. 7, Abril 1980 pag. 1070.
- Moore D. T., *Appl. Opt.*, Vol. 19, No. 7, Abril 1980 pag. 1035.
- Nishizawa K. y Nishi, *Appl. Opt.*, Vol. 23, No. 11, Junio 1984 pag. 1711.
- Rawson E. G., *Appl. Opt.*, Vol. 19, No. 3, Marzo 1970 pag. 753.
- Paxton K. B. y W. Streifer, *Appl. Opt.*, Vol. 10, No. 5, Mayo 1971 pag. 1164.
- Paxton K. B. y W. Streifer, *Appl. Opt.*, Vol. 10, No. 9, Septiembre 1971 pag. 2090.
- Rees J. D., *Appl. Opt.*, Vol. 21, No. 6, Marzo 1982 pag. 1009.
- Sakamoto T., *Appl. Opt.*, Vol. 23, No. 11, Junio 1984 pag. 1707.
- Sakamoto T., *Appl. Opt.*, Vol. 25, No. 15, Agosto 1986 pag. 2630.
- Sakamoto T., *Appl. Opt.*, Vol. 31, No. 25, Septiembre 1992 pag. 5184.

Sands P.J., J. Opt. Soc. Am., Vol. 60, No. 11, Noviembre 1970 pag. 1436.

Simmons, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas historicas, McGraw-Hill, 1977.

Southwell W.H., J. Opt. Soc. Am., Vol. 72, No. 7, Julio 1982 pag. 908.

Streifer W. y K. B. Paxton, Appl. Opt., Vol. 10, No. 4, Abril 1971 pag. 769.

Thyagarajan K., Appl. Opt., Vol. 19, No. 7, Abril 1980 pag. 1061.

Tomlinson W. J., Appl. Opt., Vol. 19, No. 7, Abril 1980 pag. 1117.

Tomlinson W. J., Appl. Opt., Vol. 19, No. 7, Abril 1980 pab. 1127.

APENDICE A. PROGRAMAS DE TRAZO DE RAYOS

En esta sección se presentan los programas de cómputo para el trazado de rayos bajo la aproximación paraxial, tercer y quinto orden.

```

c      JUAN C TAPIA MERCADO
C      PROGRAMA PARA CALCULAR EL TRAZO PARAXIAL
      REAL*8 CO,SE,X,Y,Z,A
      CHARACTER*20 ARCHIVO
      WRITE(*,*) 'NOMBRE DEL ARCHIVO DE SALIDA DE DATOS'
      READ(*,'(A20)') ARCHIVO
      OPEN(15,FILE=ARCHIVO,STATUS='NEW')
      WRITE(*,*) 'DAME LOS VALORES INICIALES X,Y P,Q'
      READ(*,*) XO,YO,PO,QO
      NO=1.608
      G=0.339
      B=NO*G
      PI=3.141592653587793
      DO 10 J=0, 100
      Z=J*.01
      A=2*PI*Z
      CO=DCOS(A)
      SE=DSIN(A)
      X=XO*CO+PO*SE/B
      Y=YO*CO+QO*SE/B
10    WRITE(15,'(2F13.9)') Z,Y
      CLOSE(15)
      STOP
      END

```

```

C      PROGRAMA PARA LA APROXIMACION A ORDEN 5
C      JUAN TAPIA MERCADO
      PARAMETER(L=10)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      CHARACTER*20 ARCHIVO
      REAL*8 C(L),M(L),A(L),D(L),N(L),E(L),F(L),MIJ(L,L)
      WRITE(*,*)'NOMBRE DEL ARCHIVO DE SALIDA'
      READ(*,'(A20)') ARCHIVO
      OPEN(15,FILE=ARCHIVO,STATUS='NEW')
      WRITE(*,*)'DAME YI, QI'
      READ(*,*) YI, QI
      HN=1.608
      G=.339
      YO=G*YI
      VO=QI/HN
      H4=2.0/3.0
      H6=- (17/45)
      PI=3.14152653589793
      DO 10 JI=0, 100
      Z=JI*0.01
      T=2*PI*Z
      CO=DCOS(T)
      SE=DSIN(T)
C      VALORES DE Ai y B0
      AO=(T+CO*SE)/2
      BO=(T-CO*SE)/2
      A(1)=(SE*CO**3+3*AO)/4
      A(2)=(1-CO**4)/4
      A(3)=AO-A(1)
      A(4)=SE**4/4
      A(5)=(3*BO-CO*SE**3)/4
C      VALORES DE M
      DO 15 I=1, 4
      M(I)=SE*A(I)-CO*A(I+1)
15     CONTINUE
C      VALORES DE C
      C(1)=(SE*CO**5+5*A(1))/6
      C(2)=(1-CO**6)/6
      DO 2 I=1, 5
      C(I+2)=A(I)-C(I)
2     CONTINUE
C      VALORES DE E Y F
      EO=(T**2+SE**2)/4
      FO=(T**2-SE**2)/4
      E(1)=(3*EO+A(2))/4
      E(2)=(T-A(1))/4
      E(3)=(EO-E(1))
      E(4)=A(5)/4
      E(5)=(3*FO-A(4))/4
C      VALORES PARA D
      DO 3 I=1, 5
      D(I)=T*A(I)-E(I)
3     CONTINUE
C      VALORES DE N
      DO 4 I=1, 7

```

```

      N(I)=SE*C(I)-CO*C(I+1)
4  CONTINUE
C  VALORES DE M(I,J)
   DO 5 J=1, 4
      MIJ(1,J)=(3*D(J+1)+C(J+2))/8
      MIJ(2,J)=(A(J+1)+C(J+3)-D(J))/8
      MIJ(3,J)=(D(J+1)-C(J+2))/8
      MIJ(4,J)=(2*A(J+1)+C(J+1)-3*D(J))/8
5  CONTINUE
   Y1=Y0*CO+V0*SE
   Y3=Y0**3*M(1)+3*Y0**2*V0*M(2)+3*Y0*V0**2*M(3)+V0**3*M(4)
   AF1=Y0**5*N(1)+5*Y0**4*N(2)*V0+10*Y0**3*V0**2*N(3)
   AF2=20*Y0**2*V0**3*N(4)+5*Y0*V0**4*N(5)+V0**5*N(6)
   F2=AF1+AF2
   L1=SE*MIJ(1,1)-CO*MIJ(1,2)
   L2=2*(SE*MIJ(1,2)-CO*MIJ(1,3))+3*(SE*MIJ(2,1)-CO*MIJ(2,2))
   L31=SE*MIJ(1,3)-CO*MIJ(1,4)+6*(SE*MIJ(2,2)-CO*MIJ(2,3))
   L32=3*(SE*MIJ(3,1)-CO*MIJ(3,2))
   L3=L31+L32
   L41=3*(SE*MIJ(2,3)-CO*MIJ(2,4))+6*(SE*MIJ(2,3)-CO*MIJ(3,3))
   L42=SE*MIJ(4,1)-CO*MIJ(4,2)
   L4=L41+L42
   L5=3*(SE*MIJ(3,3)-CO*MIJ(3,4))+2*(SE*MIJ(4,2)-CO*MIJ(4,3))
   L6=SE*MIJ(4,3)-CO*MIJ(4,4)
   F11=Y0**5*L1+Y0**4*V0*L2+Y0**3*V0**2*L3
   F12=Y0**2*V0**3*L4+Y0*V0**4*L5+V0**5*L6
   F1=F11+F12
   Y=Y1+2*H4*Y3+12*H4**2*F1+3*H6*F2
   YY=Y/G
10 WRITE(15,'(2F13.9)') Z,YY
   CLOSE(15)
   STOP
   END

```

APENDICE B. CALCULO DE LA DISTANCIA FOCAL PARAXIAL Y POSTERIOR

Con el fin de calcular la distancia focal paraxial (f) y la distancia focal posterior (D_{fp}) se considera un rayo paralelo al eje óptico $q_0 = 0$ que incide en el plano de entrada de la lente a una altura y_0 . Después de pasar por la lente, el rayo cruza el eje z en el punto focal paraxial haciendo un ángulo θ' con este eje (figura b1).

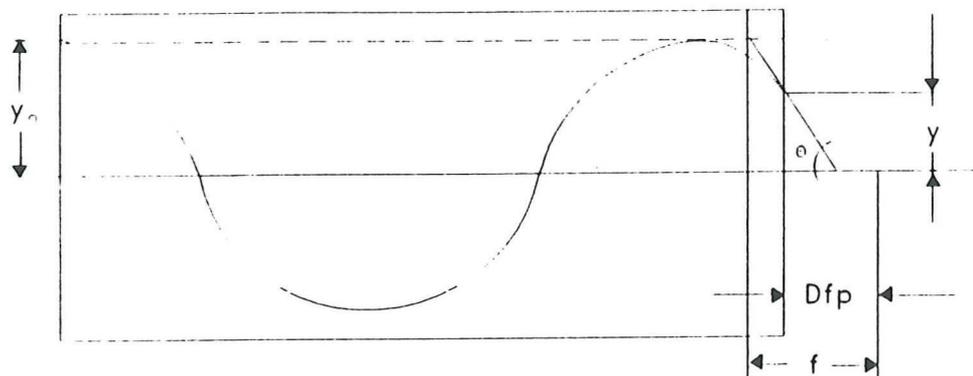


Figura b1. Cálculo de f y D_{fp} paraxial en un cilindro con gradiente radial

El rayo sale en el punto y_1 de la cara posterior haciendo un ángulo γ_1 con respecto al eje z . De acuerdo con la ley de Snell este ángulo está dado por

$$n_1 \sin \gamma_1 = n' \sin \theta' = \sin \theta', \quad (B1)$$

de aquí se tiene que el coseno director con respecto al eje y queda de la siguiente manera

$$q_1 = n_1 \cos \beta_1 = n_1 \cos(90 - \gamma_1) = -n_1 \sin \gamma_1 = -\sin \theta', \quad (B2)$$

de la ecuaciones (44) y (45) se tiene que la altura y la pendiente del rayo en el plano de salida de la lente están dadas por

$$y_1 = y_0 C, \quad (B3)$$

$$q_1 = -by_0 S. \quad (B4)$$

De la figura (b1), la distancia focal paraxial está dada por

$$f = \frac{y_0}{\tan \theta'} \cong \frac{y_0}{\sin \theta'}, \quad (B5)$$

de las ecuaciones anteriores se obtiene que la distancia focal puede escribirse como

$$f = \frac{1}{bS} = \frac{1}{n_0 g \sin Bg}, \quad (B6)$$

donde B es la longitud de la lente.

Similarmente, la distancia focal posterior está dada por:

$$Dfp = \frac{y_1}{\tan \theta'} \cong \frac{y_1}{\sin \theta'} \quad (B7)$$

Utilizando las ecuaciones (B1), (B2) y (B3), la distancia focal posterior queda de la siguiente manera

$$Dfp = f \cos Bg. \quad (B7)$$

APENDICE C. CALCULO DEL RADIO Y POSICION DE LA PUPILA DE ENTRADA

Como algunas aberraciones dependen de la posición y el radio de la pupila de entrada del sistema óptico; a continuación se calculan éstos parámetros para una lente cilíndrica con gradiente radial en la cual la abertura limitadora de la lente es el diámetro de la misma.

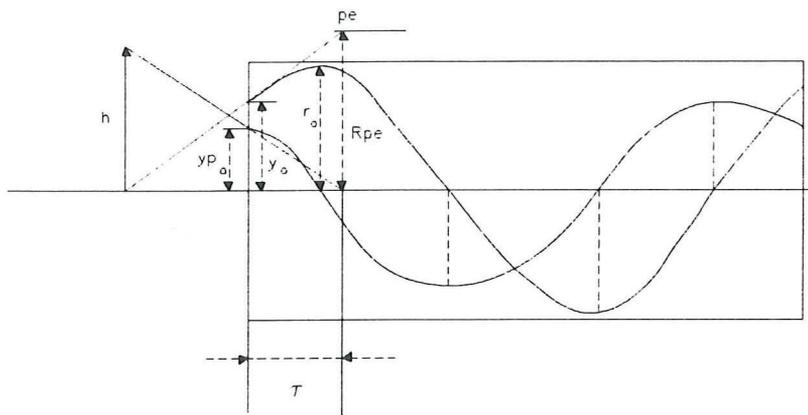


Figura c1. Esquema que representa un rayo axial y un rayo principal en una lente con gradiente radial

Para determinar la posición y el radio de la pupila de entrada se trazan un rayo axial y un rayo principal (figura c1), utilizando los resultados de la teoría paraxial. Si r_0 es el radio de la lente cilíndrica, entonces de la figura (c1) y de las ecuaciones (44) y (45) se tienen las condiciones que definen los parámetros de la pupila entrada [Rees, 1982].

Si se supone que el rayo axial incide en la primera superficie de la lente a una altura y_0 con un coseno director q_0 , se tiene

$$r_0 = y_0 \cos t + \frac{q_0}{b} \sin t, \quad (C1)$$

$$0 = q_0 \cos t - y_0 b \sin t \quad .$$

Si se supone que el rayo principal incide en la primera superficie de la lente a una altura y_{0p} y con un coseno director q_{0p} , se tiene

$$0 = y_{0p} \cos t + \frac{q_{0p}}{b} \sin t, \quad (C2)$$

$$q_p = q_{0p} \cos t - y_{0p} b \sin t,$$

donde $t = gd$, y d es la distancia de la primera cara de la lente cilíndrica al plano que actúa como abertura de entrada o abertura limitadora. Este plano depende de la distancia del objeto a la primera superficie y de la constante b .

De las ecuaciones (C1) se tiene que la altura y el coseno director para el rayo axial son

$$y_0 = r_0 \cos t, \quad (C3)$$

$$q_0 = b r_0 \sin t$$

De la ley de Snell y de la figura (c1) se tiene que el coseno director es aproximadamente igual a la razón de la altura inicial del rayo y de la distancia del objeto a la primera superficie de la lente, es decir

$$q_0 = \sin \gamma_0 \cong \frac{y_0}{A}, \quad (C4)$$

donde A es la distancia del objeto a la primera superficie de la lente. De las ecuaciones (C3) y (C4) se obtiene

$$\frac{y_0}{A} = r_0 b \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{r_0^2}} \quad . \quad (C5)$$

Por último, se tiene que la altura y_0 y el coseno director q_0 , en la superficie de entrada, para el rayo axial limitador está dada por

$$y_0 = r_0 \frac{Ab}{\sqrt{1 + (Ab)^2}} \quad (C6)$$

$$q_0 = r_0 b \frac{1}{\sqrt{1 + (Ab)^2}} .$$

De las ecuaciones (C2) y (C6) se obtienen también expresiones para las funciones $cost$ y $sent$, dadas de la siguiente manera

$$cost = \frac{Ab}{\sqrt{1 + (Ab)^2}} \quad (C7)$$

$$sent = \frac{1}{\sqrt{1 + (Ab)^2}} .$$

De una manera similar se pueden obtener la altura y el coseno director para el rayo principal, los cuales se pueden expresar como

$$q_{0p} = q_p cost, \quad (C8)$$

$$y_{0p} = -\frac{q_p}{b} sent .$$

De la ecuación (C7) se tiene que $\tan(t)$ está dada por

$$\tan(t) = \frac{1}{Ab},$$

y, utilizando los resultados de la ecuación (C8), se tiene que

$$\tan(t) = -\frac{y_{0p} b}{q_{0p}} .$$

De la ley de Snell y de la figura (c1), bajo la consideración de que $\sin \gamma_{0p} \cong \tan \gamma_{0p}$, se tiene que el coseno director para el rayo principal puede escribirse como

$$q_{0p} = -\text{sen } \gamma_{0p} \cong -\frac{h - y_{0p}}{A} \quad (C9)$$

De las últimas tres ecuaciones se tiene

$$\frac{y_{0p}}{h - y_{0p}} \cong \frac{1}{(Ab)^2} \quad (C10)$$

Con lo anterior y de la figura (c1) se tiene que la distancia de la primera cara a la pupila de entrada está dada por

$$\tau = \frac{y_{0p}}{\tan \gamma_{0p}} = \frac{y_{0p}A}{(h - y_{0p})} \cong \frac{1}{Ab^2} \quad (C10)$$

De aquí se tiene que la altura en la primera cara para el rayo principal está dada por

$$y_{0p} \cong \frac{h}{1 + (Ab)^2} \quad (C12)$$

con este resultado y la ecuación (C9) se tiene que el coseno director para el rayo principal es

$$q_{0p} = -h \frac{Ab^2}{(1 + Ab^2)} \quad (C13)$$

De la figura (c1) y de las ecuaciones (C6) y (C11) se tiene que el radio de la pupila de entrada está dado por

la cual puede escribirse como

$$R_{pe} = \frac{r_0^2}{y_0} \quad (C15)$$

APENDICE D. AMPLIFICACION PARAXIAL Y RELACION ENTRE LAS DISTANCIAS OBJETO E IMAGEN

En este apéndice se encuentra una expresión para la amplificación paraxial y además se da la relación que existe entre las distancias objeto e imagen para un sistema óptico de lentes GRIN.

De la figura (d1) se tiene que

$$m = \frac{h'}{h}, \quad (D1)$$

donde h y h' son la altura del objeto y la altura de la imagen, respectivamente, las cuales están dadas por

$$h' = -(C - Dfp) \tan \sigma' \quad (D2)$$

y

$$h = y_0 = f \tan \sigma'$$

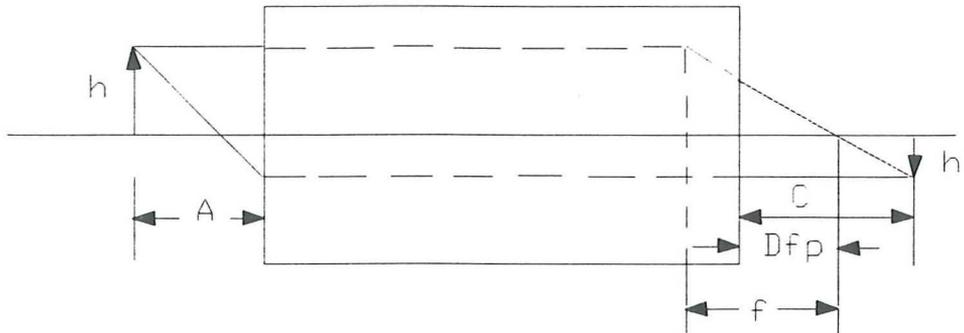


Figura d1. Definición de amplificación paraxial

Por lo tanto, sustituyendo esto en la ecuación (D1) se tiene que la amplificación paraxial puede ser escrita como

$$m = \frac{(Dfp - C)}{f} \quad . \quad (D3)$$

Utilizando la fórmula para la distancia focal, la amplificación paraxial queda de la siguiente manera

$$m = c - k's \quad . \quad (D4)$$

Por simetría se tiene que

$$\frac{h'}{h} = \cos Bg - \frac{A}{f} \quad , \quad (D5)$$

de donde se tiene que la siguiente relación es válida

$$\frac{1}{m} = c - ks \quad , \quad (D6)$$

de las ecuaciones (D4) , (D5) y (D6) se tiene que

$$k = Ab,$$

$$k' = bC, \tag{D7}$$

conociendo la longitud de la lente grin, la distancia focal y la distancia objeto se puede conocer la distancia al plano imagen, la cual está dada por

$$C = -\frac{m - \cos(Bg)}{n_0g \sin(Bg)}, \tag{D8}$$

donde A, B y C están relacionadas de la siguiente manera:

$$(c - Abs)(c - Cbs) = 1 \tag{D9}$$

APENDICE E. CALCULO DE LAS ALTURAS DE LOS RAYOS MERIDIONALES QUE PASAN A TRAVES DE UNALENTE GRIN.

En este apéndice se van a calcular las alturas en la superficie de entrada de los rayos marginales que alcanzan a pasar a través de la lente GRIN. En la figura (e1), se muestran los rayos marginales que pasan a través de la lente de radio r_0 , provenientes de un objeto de altura h medida a partir del eje óptico que indica el campo de visión para el plano objeto localizado a una distancia A de la superficie de entrada de la lente grin.

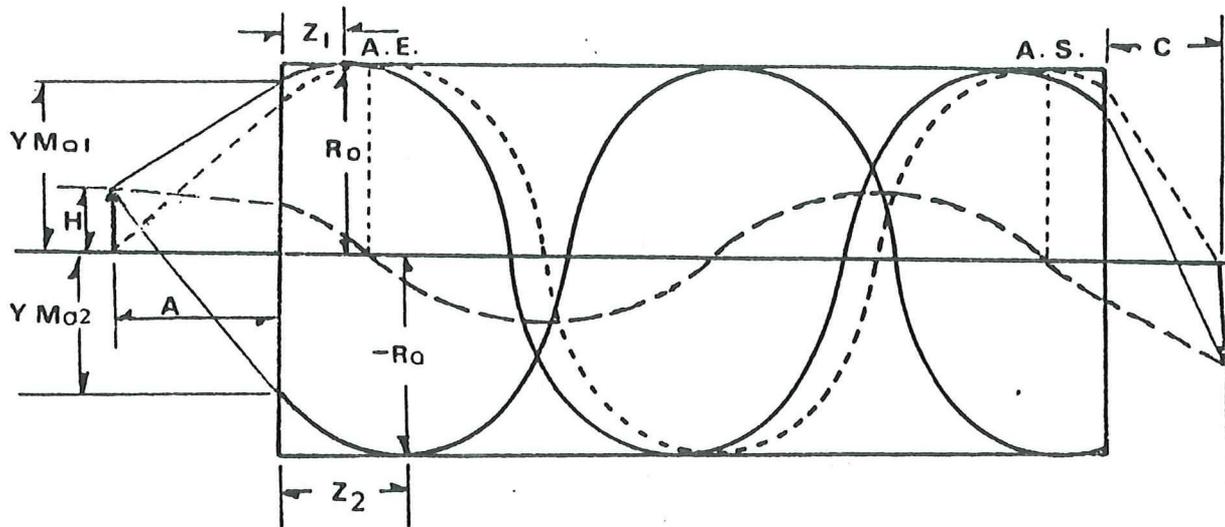


Figura e1. Rayos marginales para un objeto de altura h

En la figura (e1) se observan los rayos marginales que llegan a la altura r_0 , haciendo un ángulo $q = 0$, a una distancia $Z = t_m g$. Esta es la condición para que los rayos marginales que inciden en la primer superficie a una altura y_{m0} pasen a través de la lente grin.

Las ecuaciones de transferencia de la superficie de entrada al plano Z son las siguientes

$$\pm r_0 = y_{m0} \cos t + \frac{q_{m0}}{b} \sin t,$$

$$0 = q_{m0} \cos t - y_{m0} b \sin t \quad . \quad (E1)$$

De estas ecuaciones se tiene que la altura y el coseno director para rayos meridionales en la superficie de entrada de la lente grin pueden escribirse como

$$y_{m0} = \pm r_0 \cos t \quad ,$$

$$q_{m0} = \pm r_0 b \sin t \quad . \quad (E2)$$

De la figura (e1) y de la ecuación (E2) se tiene que

$$\pm \frac{h - y_{m0}}{A} = q_0 = \pm r_0 b \sqrt{1 - \cos^2 t} \quad .$$

Dado que $\cos t = \frac{y_{m0}}{r_0}$, entonces

$$(h - y_{m0})^2 = r_0^2 (Ab)^2 \left(1 - \frac{y_{m0}^2}{r_0^2}\right) \quad ,$$

o bien

$$y_{m0}^2 [1 + (Ab)^2] - 2hy_{m0} + [h^2 - r_0^2 (Ab)^2] = 0 \quad . \quad (E3)$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática se tiene que:

$$y_{m0} = \frac{h}{[1 + (Ab)^2]} \pm \frac{Ab}{[1 + (Ab)^2]} \sqrt{[1 + (Ab)^2] r^2 - h^2} \quad . \quad (E4)$$

De donde se sabe que el primer término de esta ecuación representa la altura del rayo principal.

Rearreglando y sustituyendo estos resultados, la ecuación (E4) puede escribirse en función del radio y de la posición de la pupila de entrada de la siguiente manera

$$Y_{m0} = AE + H\tau \quad , \quad (E5)$$

donde

$$E = \frac{gRpe}{(A + \tau)}, \quad H = \frac{hg}{(A + \tau)}, \quad Y_{m0} = gy_{m0} \quad (E6)$$

Los cosenos directores van a estar dadas por

$$q_{m0} = \frac{y_{m0} - h}{A} = \frac{E - H}{g},$$

o bien

$$V_{m0} = \frac{E - H}{b}. \quad (E7)$$

Como se puede observar, para obtener el rayo meridional inferior solamente se reemplaza E por $-E$ y, para el rayo principal, $E = 0$.

APENDICE F. ABERTURA DE CAMPO

Con el fin de calcular la altura de campo h_{\max} y el ángulo de campo u (figura f1) se traza el rayo que define la abertura de campo la cual está localizada para:

$$\Delta t' = \Delta t + \frac{\pi}{2}, \quad (F1)$$

con las siguientes coordenadas en esa posición:

$$Y_{pc} = -r, \quad q_{pc} = 0$$

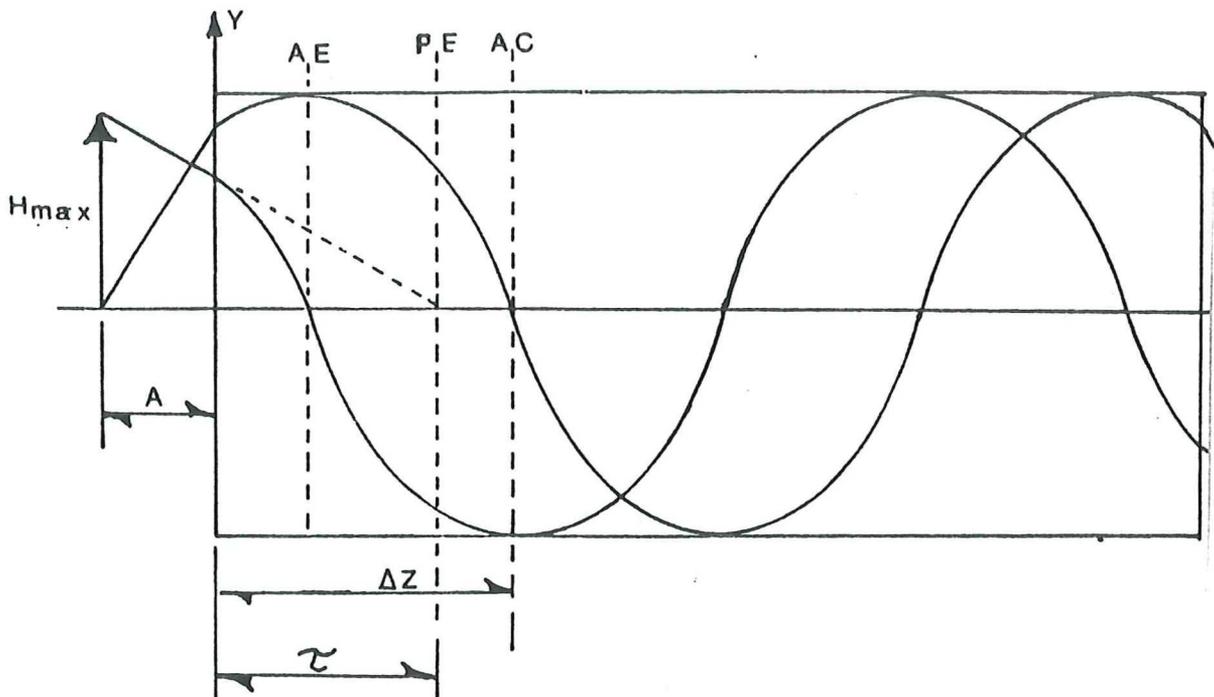


Figura f1. Esquema que muestra el tamaño del campo en una lente GRIN.

Por tanto, las condiciones que definen la abertura de campo están dadas de la siguiente manera

$$-r = \frac{h_{\max}}{[1 + (Ab)^2]} \cos \Delta t' - h_{\max} \frac{Ab}{[1 + (Ab)^2]} \operatorname{sen} \Delta t', \quad (F2)$$

$$0 = -\frac{h_{\max}}{[1 + (Ab)^2]} [Ab \cos \Delta t' + \operatorname{sen} \Delta t'].$$

De estas ecuaciones se obtiene que

$$h_{\max} = -r \sec \Delta t', \quad (F3)$$

y utilizando el valor de $\Delta t'$ dado por la ecuación F3 se obtiene la expresión para la máxima altura de campo

$$h_{\max} = \frac{r}{\operatorname{sen} \Delta t} = \frac{r}{\sqrt{1 + (Ab)^2}}. \quad (F4)$$

Para conocer el máximo ángulo de aceptación se considera u negativo y se utiliza la ley de Snell así como las ecuaciones 45 y F4

$$\operatorname{sen} u = q_{po} = -h_{\max} \frac{Ab^2}{[1 + (Ab)^2]},$$

o bien

$$\operatorname{sen} u = -rb \frac{Ab}{\sqrt{1 + (Ab)^2}} = -rb \operatorname{sen} \Delta t. \quad (F5)$$

Este ángulo se relaciona con el ángulo del rayo axial limitador de la siguiente forma:

$$\operatorname{sen} u = p_{po \max} = -Abq_0 = -Ab \operatorname{sen} \theta. \quad (F6)$$