

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada



**INVERSION DE SONDEOS ELECTRICOS MEDIANTE
REDES NEURONALES**

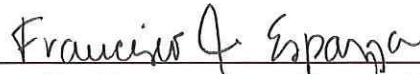
**TESIS
MAESTRIA EN CIENCIAS**

JOEL EDUARDO RODRIGUEZ RAMIREZ

Ensenada, Baja California, Febrero de 1998.

TESIS DEFENDIDA POR
JOEL EDUARDO RODRÍGUEZ RAMÍREZ

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITE



Dr. Francisco Javier Esparza Hernández

Director del Comité



Dr. Enrique Gómez Treviño

Miembro del Comité



M.C. Hugo Homero Hidalgo Silva

Miembro del Comité



Dr. Enrique Gómez Treviño

*Jefe del Departamento de Geofísica
Aplicada*



Dr. Federico Graef Ziehl

Director de Estudios de Posgrado

4 de febrero de 1998

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN
SUPERIOR DE ENSENADA**

**DIVISIÓN CIENCIAS DE LA TIERRA
DEPARTAMENTO DE GEOFÍSICA APLICADA**

**INVERSIÓN DE SONDEOS ELÉCTRICOS MEDIANTE REDES
NEURONALES**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado
de MAESTRO EN CIENCIAS presenta:

JOEL EDUARDO RODRÍGUEZ RAMÍREZ

Ensenada, Baja California, Febrero de 1998.

RESUMEN de la tesis que presenta JOEL EDUARDO RODRÍGUEZ RAMÍREZ como requisito parcial para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS en CIENCIAS DE LA TIERRA. Ensenada, Baja California México, Febrero de 1998.

INVERSIÓN DE SONDEOS ELÉCTRICOS MEDIANTE REDES NEURONALES

Resumen aprobado por: Francisco J. Esparza

Dr. Francisco Javier Esparza Hernández
Director de tesis

En este trabajo se presenta un método de inversión de datos que utiliza redes neuronales artificiales (RNA). Los datos que se consideran son las resistividades aparentes obtenidas mediante el arreglo colineal Schlumberger y una distribución de resistividades del subsuelo representada por capas planas de resistividad constante. Mediante pruebas iniciales se encontró que el algoritmo numérico CASCOR es el más apropiado para que la RNA aprendiera el mapeo inverso. La fase de entrenamiento consistió en presentarle a la RNA como entrada curvas de resistividad aparente y como salida la distribución de resistividad eléctrica del subsuelo. Los modelos que se utilizaron en esta fase, consistieron de tres capas en los que se varió aleatoriamente la resistividad eléctrica de la segunda y tercer capa, así como el espesor de la primera y segunda capa. Para la primer RNA entrenada se consideraron modelos de los cuatro tipos: A, K, H y Q. También se consideraron RNA entrenadas con modelos pertenecientes a cada uno de los cuatro tipos de modelos. Mediante un análisis del aprendizaje de cada red, se concluyó que la RNA aprendió más fácilmente los modelos escalonados ascendentes y descendentes. Los modelos escalonados con un mínimo o con un máximo fueron mejor asimilados por la RNA especializada. La parte de aplicación del algoritmo incluye pruebas con: modelos sintéticos de los cuatro tipos con y sin ruido aleatorio en los datos, un modelo sintético de cuatro capas y un modelo sintético de variación parabólica. Para la aplicación del método a datos reales se utilizaron datos provenientes de la región agrícola de Maneadero, B.C., en este caso el modelo estimado por la RNA concuerda bien con una interpretación de los datos hecha con anterioridad. Los modelos encontrados con el algoritmo de RNA muestran bastante similitud con los calculados mediante el algoritmo iterativo de la navaja de Occam.

Palabras clave: Inversión, Neuronal, Arreglo-Schlumberger.

ABSTRACT of the thesis that present JOEL EDUARDO RODRÍGUEZ RAMÍREZ as a partial requirement to obtain the MASTER OF SCIENCES degree in EARTH SCIENCES. Ensenada, Baja California México, February 1998.

INVERSION OF ELECTRICAL SOUNDINGS BY NEURAL NETWORKS

In this work I present a method of inversion which uses artificial neural networks (ANN). The data under consideration are the apparent resistivity obtained by means of a co-linear Schlumberger array, considering a horizontally stratified model with homogeneous electric resistivities. It was found during initial testing that the numerical algorithm CASCOR is the most appropriate ANN in order for the inverse mapping to be learned. The learning phase consists in presenting to the ANN, pairs of apparent resistivity and electric resistivity of the sub-soil. The models which were used in this phase corresponds to three layer models in which the electric resistivities of the second and third layer were randomly varied, the thickness of the first and second layer were varied randomly as well. In the first ANN trained four models of the kind A, K, H and Q were considered. ANN trained with sets corresponding to every kind of model, were trained as well. It was concluded by means of a learning analysis in each net, that the ANN learned more easily the ascendant and descendent step models. The models with a maximum and a minimum were best assimilated by specialized ANN. The application part of the algorithm includes tests in; synthetic models of the four kinds, with and without random noise in the data, a four layer synthetic model and a parabolic variation synthetic model. In applying the method to real data, an electrical sounding from a farmer region in Maneadero, B.C. was considered, the ANN model is in agreement with a prior interpretation of the data. The models founded with the ANN algorithm shows a remarkable similitude with the ones calculated by means of Occam's razor, an iterative algorithm.

Keywords: Inversion, Neural, Schlumberger-Array.

DEDICATORIA

A mi Padre y Madre:

Antonio Rodríguez y † Leonila Ramírez

A mi Abuelita:
Esperanza Ramírez

A mis Hermanos y Hermana:
Ivan, Yadir y Yamina

A mis Sobrinos:
Abraham, Adela e Ivan

A mi compañera:
Lydia Alvarez

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Fransico Javier Esparza Hernández, por la dirección de esta tesis,

Al Dr. Enrique Gómez Treviño por su confianza y apoyo durante mi estancia en CICESE.

Al M.C. Hugo Hidalgo por sus valiosos comentarios.

A mis maestros, compañeros y personal de Ciencias de la Tierra, por haber hecho de este tiempo como estudiante, un tiempo agradable e inolvidable.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por la beca otorgada para realizar mis estudios.

CONTENIDO

I	INTRODUCCIÓN	1
I.1	Objetivos	2
I.2	Organización	3
II	DETERMINACIÓN DEL POTENCIAL ELÉCTRICO	4
II.1	Introducción	4
II.2	El potencial eléctrico en la superficie	5
II.3	Conclusiones	9
III	METODOLOGÍA Y RESULTADOS	10
III.1	Introducción	10
III.2	Metodología	11
III.3	Resultados	13
III.4	Red General.	14
III.5	Red Especializada.	18

	2
III.6 Respuesta al Efecto de Ruido.	27
III.6.1 Respuesta al Efecto de 5% de Ruido.	27
III.6.2 Respuesta al Efecto de 10% de Ruido.	31
III.7 Respuesta a Modelos Diversos.	36
III.7.1 Modelo de Cuatro Capas	36
III.7.2 Modelo Parabólico Descendente	37
III.8 Aplicación a Datos Reales.	40
III.9 Conclusiones.	43
 IV CONCLUSIONES	 44
 BIBLIOGRAFÍA	 45
 APÉNDICE A CÁLCULO DEL POTENCIAL EN LA SUPERFICIE	 51
 APÉNDICE B TEORÍA DE LAS REDES NEURONALES	 56
B.1 Algoritmo de Retro-Propagación en una Red Neuronal Artificial. . . .	56
B.2 Teoría del algoritmo de Retro-Propagación.	61
B.2.1 Actualización de las conexiones entre las unidades ocultas y de salida.	62
B.2.2 Actualización de las conexiones entre las unidades de entrada y ocultas.	65
B.2.3 Teoría de descenso por gradiente.	66

	3
B.2.4 Valores para α y η	68
B.3 Algoritmo de Correlación en Cascada (CASCOR) en una Red Neuronal Artificial.	69
B.4 Fase de Entrenamiento de Salida.	72
B.5 Fase de Entrenamiento de Entrada.	72

APÉNDICE C APRENDIZAJE DE PATRONES CON CONTRASTES BIEN DEFINIDOS	74
--	----

LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
1	Sistema de coordenadas utilizado en la determinación del potencial eléctrico. La fuente es un electrodo puntual que coincide con el origen del sistema de coordenadas, la resistividad eléctrica para $z > 0$ es infinita y para $z \leq 0$ varía únicamente con la profundidad, pero puede ser cualquier función continua de la profundidad.	5
2	Error de aprendizaje (ecuación 14) como función de las épocas de aprendizaje. El conjunto de entrenamiento consistió de 1000 modelos, 250 de cada uno de los cuatro tipos (A,K,H y Q). Al final del aprendizaje el algoritmo CASCOR ha incluido 8 unidades intermedias u ocultas.	13
3	Topología de la Red Neuronal Artificial utilizada.	15
4	Distribución de RMS en el caso de la red general. El conjunto de entrenamiento consistió de 250 modelos de cada tipo (A,K,H y Q). En la parte superior de la gráfica se ha incluido para cada tipo de modelos, el promedio de RMS, así como su desviación estándar (s).	17
5	Uno de los casos que presentó dificultad durante el aprendizaje. a) Con puntos se muestra la resistividad aparente que se utilizó como entrada a la red neuronal y con línea continua se presenta la respuesta del modelo estimado por la red neuronal. b) Con línea punteada se presenta el modelo sintético que se utilizó y con línea continua el modelo estimado por la red.	18
6	Errores de aprendizaje obtenidos durante el entrenamiento de las redes especializadas.	19
7	Distribución de RMS para el caso de la red especializada. En este caso se entrenaron cuatro redes separadamente, para cada red el conjunto de entrenamiento consistió de 500 modelos del correspondiente tipo. En la parte superior de cada gráfica se ha incluido el promedio de RMS, así como su desviación estándar (s).	21
8	Ejemplo con un modelo sintético tipo A. En a) se muestran los datos de resistividad aparente que se utilizaron como entrada a la red neuronal especializada, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo A, con línea continua el modelo estimado por la red neuronal y con el símbolo ($\bullet$ —) el modelo estimado mediante el algoritmo de Occam.	23

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura		Página
9	Ejemplo con un modelo sintético tipo A. En a) se muestran los datos de resistividad aparente que se utilizaron como entrada a la red neuronal especializada, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo A, con línea continua el modelo estimado por la red neuronal y con el símbolo (• —) el modelo estimado mediante el algoritmo de Occam.	24
10	Ejemplo con un modelo sintético tipo H. En a) se muestran los datos de resistividad aparente que se utilizaron como entrada a la red neuronal especializada, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo H, con línea continua el modelo estimado por la red neuronal y con el símbolo (• —) el modelo estimado mediante el algoritmo de Occam.	25
11	Ejemplo con un modelo sintético tipo Q. En a) se muestran los datos de resistividad aparente que se utilizaron como entrada a la red neuronal especializada, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo Q, con línea continua el modelo estimado por la red neuronal y con el símbolo (• —) el modelo estimado mediante el algoritmo de Occam.	26
12	Ejemplo con un modelo sintético tipo A y con 5% de ruido en los datos. En a) se muestran los datos de resistividad aparente contaminados con 5% de ruido aleatorio, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo A y con línea continua el modelo estimado por la red.	28
13	Ejemplo con un modelo sintético tipo K y con 5% de ruido en los datos. En a) se muestran los datos de resistividad aparente contaminados con 5% de ruido aleatorio, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo K y con línea continua el modelo estimado por la red.	29
14	Ejemplo con un modelo sintético tipo H y con 5% de ruido en los datos. En a) se muestran los datos de resistividad aparente contaminados con 5% de ruido aleatorio, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo H y con línea continua el modelo estimado por la red.	30

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura		Página
15	Ejemplo con un modelo sintético tipo Q y con 5% de ruido en los datos. En a) se muestran los datos de resistividad aparente contaminados con 5% de ruido aleatorio, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo Q y con línea continua el modelo estimado por la red.	31
16	Ejemplo con un modelo sintético tipo A y con 10% de ruido en los datos. En a) se muestran los datos de resistividad aparente contaminados con 10% de ruido aleatorio, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo A y con línea continua el modelo estimado por la red.	32
17	Ejemplo con un modelo sintético tipo K y con 10% de ruido en los datos. En a) se muestran los datos de resistividad aparente contaminados con 10% de ruido aleatorio, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo K y con línea continua el modelo estimado por la red.	33
18	Ejemplo con un modelo sintético tipo H y con 10% de ruido en los datos. En a) se muestran los datos de resistividad aparente contaminados con 10% de ruido aleatorio, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo H y con línea continua el modelo estimado por la red.	34
19	Ejemplo con un modelo sintético tipo Q y con 10% de ruido en los datos. En a) se muestran los datos de resistividad aparente contaminados con 10% de ruido aleatorio, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo Q y con línea continua el modelo estimado por la red.	35
20	Ejemplo con un modelo sintético de cuatro capas. En a) se muestran los datos de resistividad aparente, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético de cuatro capas y con línea continua el modelo estimado por la red.	37
21	Ejemplo con un modelo sintético parabólico. En a) se muestran los datos de resistividad aparente que sirvieron de entrada a la red neuronal, con línea continua se muestra la respuesta de modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético parabólico y con línea continua el modelo estimado por la red.	39

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura		Página
22	Aplicación a datos reales. En a) se muestra con puntos los datos que sirvieron de entrada a la red neuronal general y con línea continua la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea continua el modelo estimado por la red neuronal y con línea punteada el modelo estimado por Esparza & Gómez-Treviño (1997), quienes utilizaron un método iterativo.	41
23	Aplicación a datos reales. En a) se muestra con puntos los datos que sirvieron de entrada a la red neuronal general y con línea continua la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea continua el modelo estimado por la red neuronal y con línea punteada el modelo estimado por Esparza & Gómez-Treviño (1997), quienes utilizaron un método iterativo.	42
24	Representación gráfica de una Red Neuronal Artificial (RNA).	57
25	Representación gráfica de: a) Fase de entrenamiento de entrada y b) Fase de entrenamiento de salida. c) Fase de entrenamiento de entrada e inclusión de una unidad candidata como parte de la topología de la red.	71
26	Representación gráfica de una red neuronal del tipo CASCOR, en este caso la red ha modificado su topología para incluir 4 unidades ocultas, cada una de las cuales representa una capa oculta de una sola unidad.	77
27	Evolución del error SEC, conforme se avanza en el número de épocas de aprendizaje (caso de una señal triangular).	78
28	a) Valor del patrón de entrada en la unidad 1 (para los 1500 patrones); b) Valor del patrón de salida en la unidad 25 (para los 1500 patrones); c) Valor de activación de la unidad 25 una vez entrenada la red (para los 1500 patrones).	80
29	Evolución del error SEC conforme se avanza en el número de épocas de aprendizaje (caso de una señal cuadrada).	81
30	a) Valor del patrón de entrada en la unidad 1 (para los 1500 patrones); b) Valor del patrón de salida en la unidad 25 (para los 1500 patrones); c) Valor de activación de la unidad 25 una vez entrenada la red (para los 1500 patrones).	83
31	Evolución del error SEC conforme se avanza en el número de épocas de aprendizaje (caso de una señal senoidal).	84

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura
32

a) Valor del patrón de entrada en la unidad 1 (para los 1500 patrones); b) Valor del patrón de salida en la unidad 25 (para los 1500 patrones); c) Valor de activación de la unidad 25 una vez entrenada la red (para los 1500 patrones).

Página
85

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

Los sondeos eléctricos verticales constituyen actualmente una herramienta bastante valiosa en la determinación de las propiedades eléctricas del subsuelo. Generalmente, se hacen circular corrientes en el subsuelo mediante electrodos puntuales y se mide la diferencia de potencial en el centro del arreglo. Finalmente se dispone de una curva de resistividad aparente en función de la distancia entre electrodos de corriente. La recuperación de la función de resistividad eléctrica del subsuelo constituye un problema que carece de solución única. Aunque existe un teorema de unicidad al respecto (Langer, 1933), en situaciones prácticas difícilmente se cumplen las condiciones del teorema, esto es, que la resistividad aparente se conozca para todas las separaciones electródicas. De esta manera los métodos existentes aparte de ajustar los datos, deben imponer alguna condición de continuidad en la resistividad del subsuelo. Oldenburg (1978), utilizó expansión espectral y consideró a la resistividad del subsuelo como

una función continua de la profundidad. Constable *et. al.* (1987), utilizaron condiciones de continuidad en las derivadas de la resistividad, suponiendo que el subsuelo podía aproximarse mediante un gran número de capas delgadas. Recientemente Esparza y Gómez-Treviño (1997), propusieron un método en el que se considera un gran número de capas delgadas. La resistividad eléctrica se encuentra resolviendo iterativamente la ecuación integral no lineal de Gómez-Treviño (1987). Gracias al uso de programación lineal en la solución de la ecuación no lineal, el modelo final contiene el mínimo número de capas homogéneas y a la vez satisface los datos de resistividad aparente.

I.1 Objetivos

Ya que la resistividad aparente y la resistividad del subsuelo están relacionadas por un funcional no-lineal, la recuperación de esta última generalmente se hace a través de un proceso iterativo. Por lo tanto es conveniente diseñar métodos no-iterativos para encontrar la resistividad del subsuelo. Por otro lado las Redes Neuronales Artificiales poseen una gran flexibilidad en el aprendizaje de funcionales diversos. Raiche (1991), fué quien propuso por primera vez su aplicación en problemas geofísicos inversos. Recientemente, Hidalgo y Gómez-Treviño (1996), las aplicaron en la interpretación de sondeos magnetotelúricos.

En el presente trabajo se plantea utilizar metodologías de redes neuronales para

encontrar la resistividad del subsuelo a partir de datos de corriente directa.

I.2 Organización

La presente tesis se ha organizado de la siguiente manera. En el capítulo 2 se calcula el potencial eléctrico considerando modelos de capas y modelos con variación continua de la resistividad eléctrica con la profundidad. El capítulo 3 contiene los resultados del aprendizaje de las redes neuronales artificiales. Finalmente en el capítulo 4 se ha incluido la Discusión y Conclusiones del trabajo.

Capítulo II

DETERMINACIÓN DEL POTENCIAL ELÉCTRICO

II.1 Introducción

La determinación de los campos eléctricos en un medio con resistividad variable puede hacerse a través de las ecuaciones de Maxwell aplicadas al caso en que los campos eléctrico y magnético no dependen del tiempo. Cuando se considera un medio en el que la resistividad varía únicamente con la profundidad, el problema general se simplifica enormemente ya que existe simetría respecto del eje vertical, y aunque el campo eléctrico tiene componente vertical y radial, la determinación de éste en cualquier punto del subsuelo es relativamente sencilla.

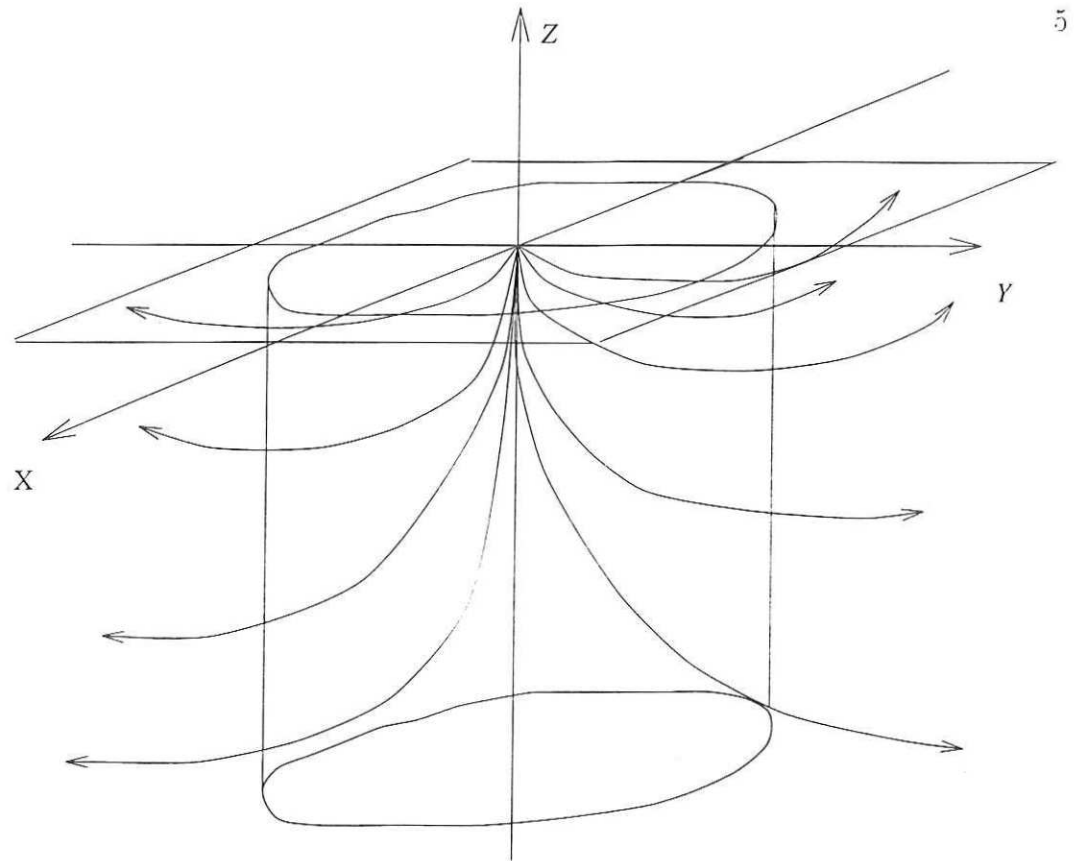


Figura 1. Sistema de coordenadas utilizado en la determinación del potencial eléctrico. La fuente es un electrodo puntual que coincide con el origen del sistema de coordenadas, la resistividad eléctrica para $z > 0$ es infinita y para $z \leq 0$ varía únicamente con la profundidad, pero puede ser cualquier función de la profundidad.

II.2 El potencial eléctrico en la superficie

Se considera que la fuente de corriente es un electrodo puntual localizado en $z = 0$.

Utilizando coordenadas cilíndricas cuyo origen coincide con la ubicación del electrodo

(ver figura 1), la ecuación a resolver fuera de la fuente, es

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi(r, z)}{\rho(z)} \right) = 0 \quad z > 0, \quad r > 0, \quad (1)$$

donde $\phi(r, z)$ es el potencial eléctrico y $\rho(z)$ es la resistividad del subsuelo. La fuente será incluida mas adelante mediante la determinación de constantes asociadas a la solución de la ecuación diferencial (1). En el Apéndice A se encuentra que

$$\phi(r, z) = \int_0^\infty A(\lambda) h(z, \lambda) J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (2)$$

donde $A(\lambda)$ es una función por determinar y la función $h(z, \lambda)$ satisface:

$$h''(z, \lambda) - \frac{\rho'(z)}{\rho(z)} h'(z, \lambda) - \lambda^2 h(z, \lambda) = 0. \quad (3)$$

Las componentes del campo eléctrico son:

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (4)$$

Por lo tanto, una condición a la frontera de la ecuación diferencial (3) es $h' \rightarrow 0$ si $z \rightarrow \infty$. De la ecuación (2) se observa que $\phi(r, z)$ es la transformada de Hankel de orden cero de $\frac{A(\lambda)h(z, \lambda)}{\lambda}$. La condición a la frontera en la interface tierra aire es

$$J_n = -\sigma(0) \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial z} = I \delta(x) \delta(y) \text{ en } z = 0. \quad (5)$$

Utilizando la relación entre $\phi(r, z)$ y $\frac{A(\lambda)h(z, \lambda)}{\lambda}$, la ecuación (5) se transforma en:

$$-\sigma(0) \frac{A(\lambda)}{\lambda} h'(0, \lambda) = \frac{I}{2\pi}. \quad (6)$$

Despejando $A(\lambda)$ de esta ecuación e introduciendola en la ecuación (2), se encuentra que

$$\phi(r, z) = -\frac{I\rho(0)}{2\pi} \int_0^\infty \lambda \frac{h(z, \lambda)}{h'(0, \lambda)} J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (7)$$

Por el principio de superposición, el potencial en el centro de dos electrodos puntuales, será

$$\phi(r, 0) = -\frac{I\rho(0)}{\pi} \int_0^\infty \lambda \frac{h(0, \lambda)}{h'(0, \lambda)} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (8)$$

siendo ahora r la distancia del centro a cualquiera de los electrodos puntuales. La resistividad aparente para el arreglo Schlumberger está dada por

$$\rho_a(r) = \pi r^2 \frac{E_r}{I}. \quad (9)$$

Utilizando la ecuación (4) y la expresión para el potencial dada en la ecuación (8), la resistividad aparente es

$$\rho_a(r) = -\rho(0)r^2 \int_0^\infty \lambda^2 \frac{h(0, \lambda)}{h'(0, \lambda)} J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (10)$$

Esta ecuación da la resistividad aparente para el arreglo Schlumberger, considerando a la resistividad del subsuelo como una función continua de la profundidad. Sin embargo, no puede utilizarse para el caso de modelos de capas homogéneas, ya que la derivada de $\rho(z)$ no está definida en la interfase de dos capas con resistividades diferentes. En este caso (Orellana, 1982) es preferible resolver la ecuación diferencial (3) en cada capa homogénea y aplicar las condiciones a la frontera en cada interface i.e. continuidad del potencial y de la componente vertical de la densidad de corriente. La resistividad aparente para el arreglo de dipolos co-lineal del tipo Schlumberger, está dada finalmente por

$$\rho_a(r) = \rho_1 + r^2 \int_0^\infty [T_1(\lambda) - \rho_1] J_1(\lambda r) \lambda d\lambda. \quad (11)$$

$T_1(\lambda)$ se denomina transformada de la resistividad (Koefoed, 1970) y se puede calcular con la siguiente fórmula recursiva:

$$T_i = \frac{T_{i+1} + \rho_i \tanh(\lambda t_i)}{1 + T_{i+1} \tanh(\lambda t_i) / \rho_i}, \quad (12)$$

siendo t_i el espesor de la i -ésima capa.

Para un medio con N capas, la transformada de la resistividad en la última capa

es $T_N = \rho_N$. De esta manera $T_1(\lambda)$ se puede calcular con la fórmula (12). La transformada de Hankel de orden uno en la ecuación para la resistividad aparente se puede calcular numéricamente mediante filtros digitales (Ghosh, 1971). Yo he preferido utilizar los filtros de Johansen (1975), ya que son filtros relativamente largos y por lo tanto tienen una precisión global mejor.

II.3 Conclusiones

En este capítulo se consideraron dos clases de modelos, aquellos en los que la resistividad es una función continua de la profundidad y modelos de capas en los que la resistividad es constante en cada capa. Para ambos modelos se obtuvo la resistividad aparente para el arreglo colineal Schlumberger. Ya que en general un modelo de unas cuantas capas, cuatro por ejemplo, queda definido por menos parámetros que una función de resistividad que reproduzca los datos de un modelo de capas, he elegido considerar modelos de tres capas en la aplicación de redes neuronales a la reconstrucción de la resistividad del subsuelo. En este aspecto estoy empleando la misma metodología que Hidalgo y Gómez-Treviño (1996) utilizaron para el caso de sondeos magnetotelúricos.

Capítulo III

METODOLOGÍA Y RESULTADOS

III.1 Introducción

El espacio definido por todas las posibles respuestas de resistividad aparente para modelos de tres capas constituye un espacio V . Así mismo, los correspondientes modelos de tres capas también forman un espacio U . Más aun, existe un mapeo no lineal de $U \rightarrow V$ que a cada elemento de U le asocia uno y solo un elemento de V , dado por la ecuación (11). Para poder aplicar redes neuronales artificiales al problema de la determinación de la resistividad eléctrica del subsuelo es necesario que la red neuronal “aprenda” parte del mapeo inverso $V \rightarrow U$. Esto puede hacerse si se consideran modelos de tres capas y su respectiva respuesta de ρ_a y se le presenta

a la red neuronal la ρ_a como entrada y el modelo de tres capas como salida, ambos conocidos.

III.2 Metodología

Siguiendo a Hidalgo y Gómez-Treviño (1996), se consideró que la resistividad de cada capa varía de 1 a 1000 Ωm , excepto para la primera capa, para la cual se fijó su resistividad en 31.6 Ωm . En seguida se varió aleatoriamente el primer y segundo espesores, así como el logaritmo (base 10) de las resistividades de la segunda y tercer capa. Con esto se generaron 1000 modelos de tres capas y se les calculó su respectiva resistividad aparente, utilizando la ecuación (11). En seguida se entrenó a la red, utilizando como entrada $\log \rho_{a_i}$ $i = 1, 2, \dots, 24$. El conjunto de valores para $r = \frac{AB}{2}$ se generó siguiendo una progresión geométrica, empezando en 1 m y finalizando en 1112 m. El correspondiente conjunto de valores para la profundidad z fué el mismo que para $r = \frac{AB}{2}$.

Llamemos $\vec{x} = \log(\vec{\rho}_a)$ al vector de entrada a la red neuronal, $\vec{O}$ el vector de salida con K componentes y $\vec{Q} = \log(\vec{\rho}_z)$ el vector deseado. El vector de salida está relacionado con el vector de entrada (Hertz *et. al.*, 1991), mediante

$$O_i = \frac{1}{1 + e^{-\sum_{l=1}^m \omega_{il} x_l}}, \quad (13)$$

donde m es el número de elementos del vector de entrada, en nuestro caso $m = 24$, W es una matriz con elementos ω_{ij} por determinar. La función de activación que se utilizó (ecuación 13), se denomina función sigmoideal y asemeja a un cambio suave en el spin de un Fermión en un átomo.

La determinación de ω_{ij} puede plantearse como un problema de optimización no lineal. Se define el error E ($E = \frac{SEC}{PK}$, ver Apéndice B), entre el vector deseado y el vector de salida mediante,

$$E = \frac{1}{PK} \sum_{p=1}^P \sum_{k=1}^K [Q_k^{(p)} - O_k^{(p)}]^2, \quad (14)$$

p es el número de par $\vec{\rho}_a, \vec{\rho}_z$ presentado a la red. Los elementos de la matriz W se calculan de tal manera que minimizen E . En el Apéndice B se dan los detalles del algoritmo de optimización. El proceso numérico calcula W considerando los 1000 modelos de 3 capas y sus respectivas respuestas, a éste paso se le denomina “época de aprendizaje”, en seguida calcula el error dado por la ecuación (14), y si éste error es menor que cierto umbral el proceso iterativo se detiene, si no, se consideran nuevamente los 1000 modelos y sus respectivas respuestas y se calcula nuevamente W . Este proceso iterativo se repite hasta que el error sea menor que cierto umbral. En la figura 2 se grafica el error en función de las “épocas de aprendizaje” considerando los 1000 modelos de tres capas.

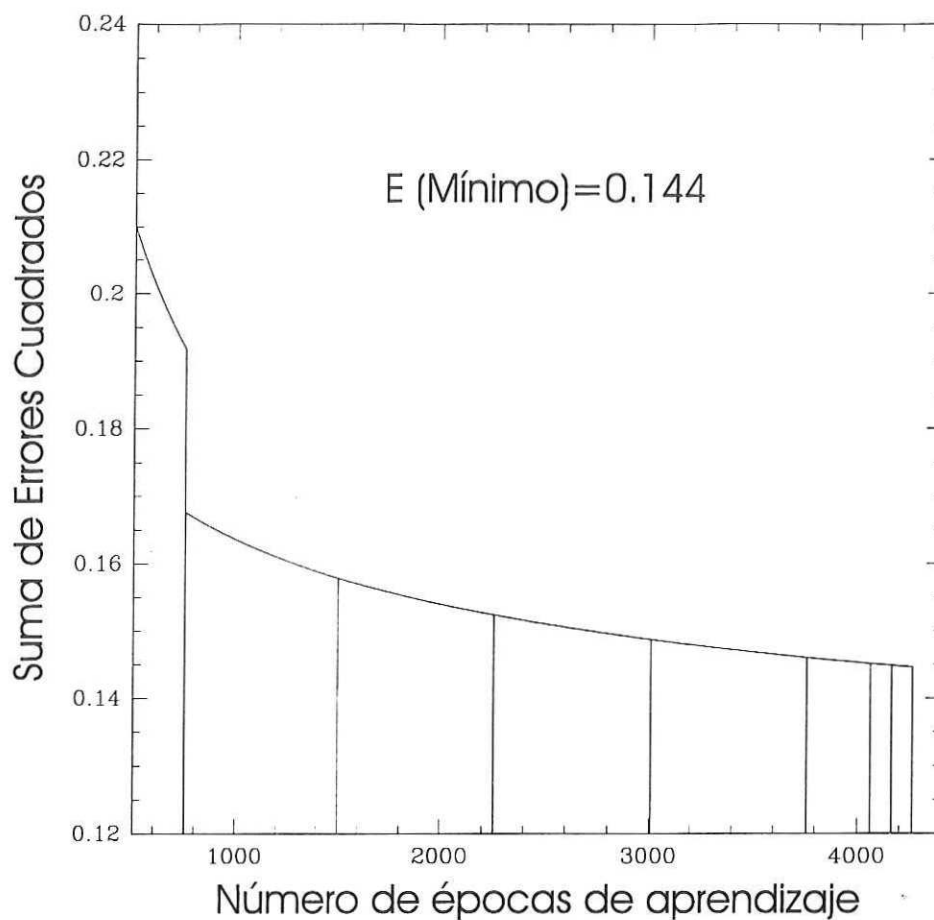


Figura 2. Error de aprendizaje (ecuación 14) como función de las épocas de aprendizaje. El conjunto de entrenamiento consistió de 1000 modelos, 250 de cada uno de los cuatro tipos (A , K , H y Q). Al final del aprendizaje el algoritmo CASCOR ha incluido 8 unidades intermedias u ocultas.

III.3 Resultados

Después de entrenar la red neuronal artificial (ver Apéndice C), con diversas funciones y parámetros, se encontró que la red asimila “bien” los mapeos, y que además

el rango de amplitud de la señal de entrada, para el que mejor funciona, es de 0.2 a 0.8 por lo que la señal de entrada a la red se escaló para que quedara contenida en el dominio $[0.2, 0.8]$.

III.4 Red General.

Para este tipo de red neuronal, se generaron 250 pares de patrones de los tipos A (modelo de escalón ascendente), K (modelo de escalón con un máximo) H (modelo de escalón con un mínimo) y Q (modelo de escalón descendente), por lo que se contó con un total de 1000 patrones.

Se entrenó la red neuronal con los 1000 ejemplos que relacionan los dos dominios (ver Apéndice C), el dominio de la resistividad aparente se presentó en la entrada de la red neuronal y el dominio de la resistividad real en la salida. La figura 3 muestra la topología de la red neuronal, una vez que ésta ha terminado de aprender ó de reducir el residual, se pueden apreciar las 24 unidades de entrada en primer plano (numeradas del 1 al 24), así como las 8 unidades ocultas que han resultado de modificar la topología de la red (ver Apéndice B), de igual forma se pueden apreciar las 24 unidades de salida (numeradas del 25 al 48). En la figura 3 también se muestran los valores de activación de las neuronas, para alguno de los pares de patrones utilizados.

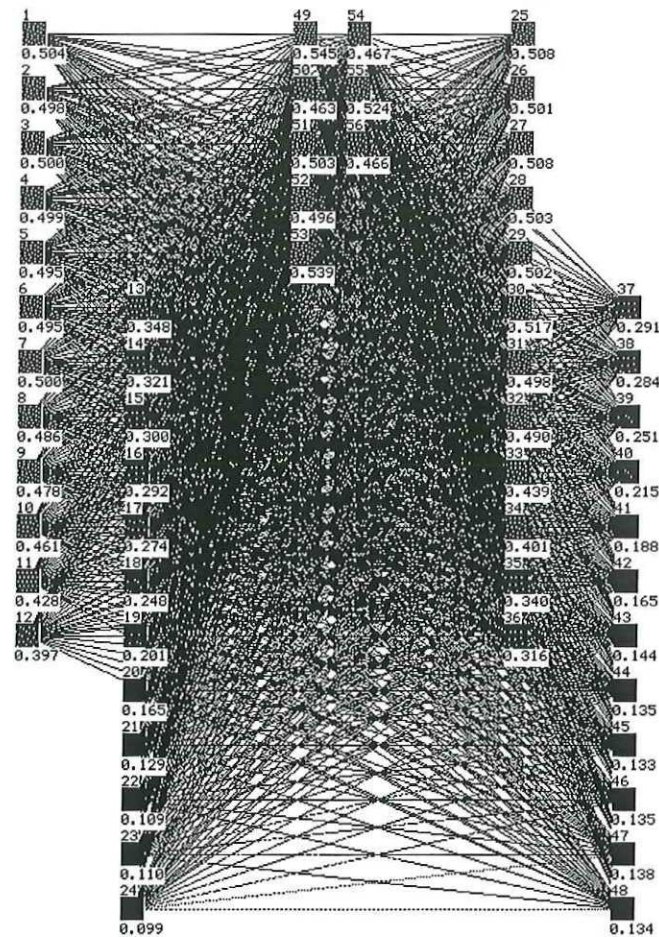


Figura 3. Topología de la Red Neuronal Artificial utilizada.

Una vez que la red neuronal ha disminuido el error de aprendizaje a un nivel aceptable, se procede a verificar la distribución de errores para cada uno de los patrones utilizados durante el aprendizaje. Para hacer ésto se consideran los 1000 modelos que se utilizaron para entrenar a la red neuronal, así como sus respectivas respuestas (ξ_i). En seguida se le presenta a la red cada respuesta de este conjunto y de esta manera se tiene un modelo de resistividad estimado, a éste se le calcula su resistividad aparente

(ψ_i) . Finalmente se calcula una medida del ajuste mediante el valor de RMS , dado por:

$$RMS = \left(\frac{\sum_{i=1}^{24} ((\xi_i - \psi_i)^2 / (\xi_i^2))}{24.0} \right)^{1/2}. \quad (15)$$

En la Figura 4 se ha graficado RMS para cada uno de los 1000 patrones de aprendizaje que se utilizaron, se ha incluido tambien el promedio de RMS para cada clase de modelo (A , K , H y Q), así como su correspondiente desviación estandard. De la Figura se puede apreciar que los patrones Q fueron los mejor asimilados y los mas difíciles de aprender fueron los patrones tipo K (modelos con un máximo). De los 1000 modelos utilizados en la fase de entrenamiento hubo uno tipo H el cual registró uno de los valores mas altos de RMS y fué igual a 104 %. Este modelo se presenta en la Figura 5b con líneas punteadas y con línea continua se presenta el modelo estimado por la red neuronal. En la figura 5a se presenta con puntos, la respuesta del modelo sintético y con línea continua la respuesta del modelo estimado por la red neuronal.

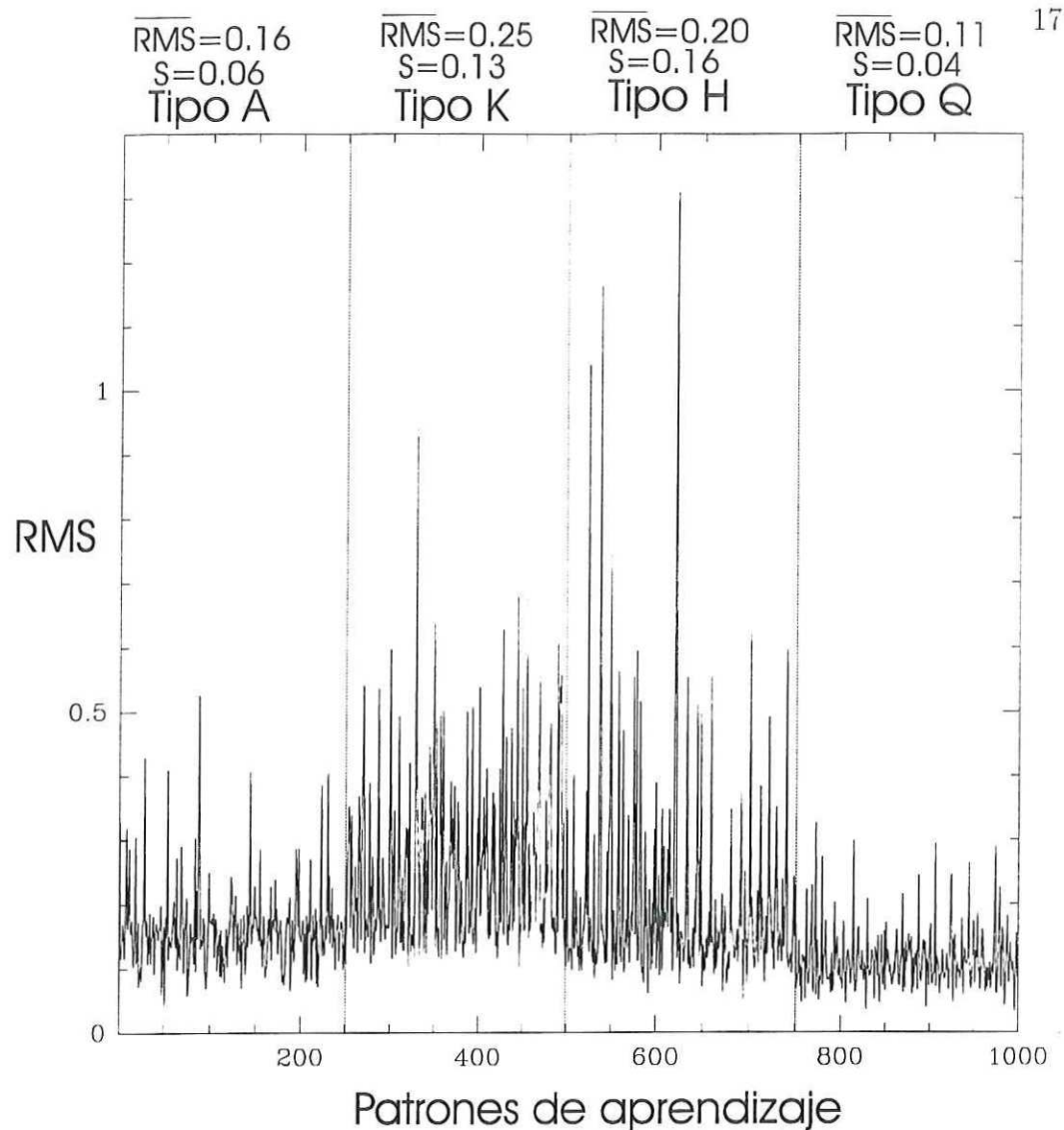


Figura 4. Distribución de RMS en el caso de la red general. El conjunto de entrenamiento consistió de 250 modelos de cada tipo (A , K , H y Q). En la parte superior de la gráfica se ha incluido para cada tipo de modelos, el promedio de RMS , así como su desviación estándar (s).

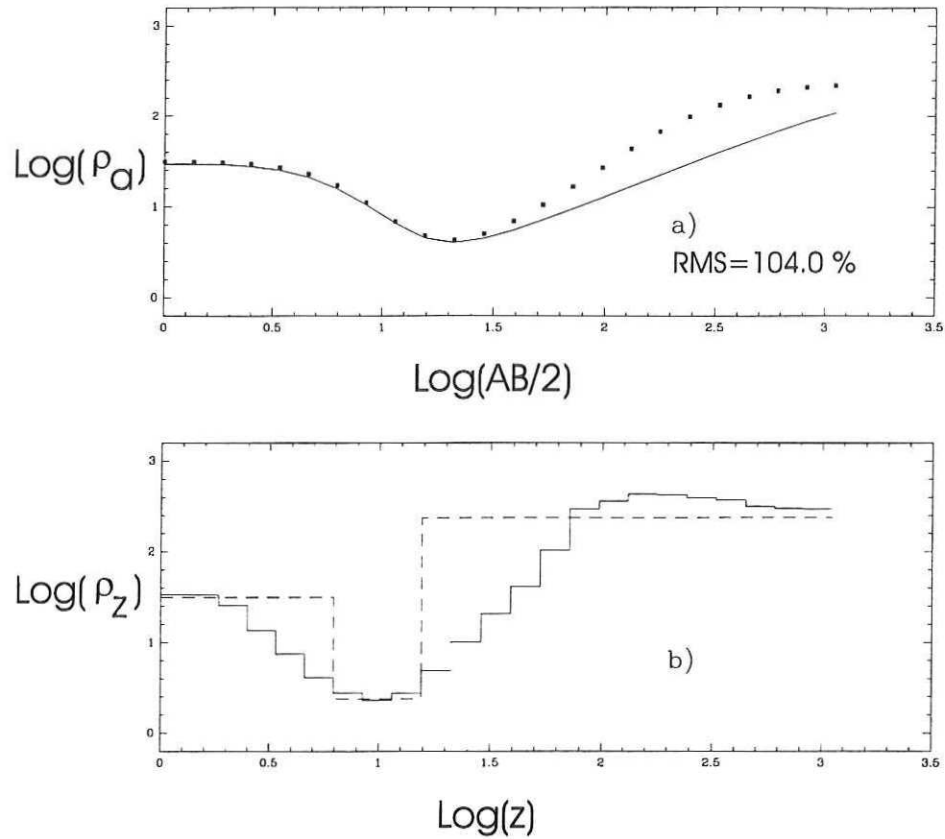


Figura 5. Uno de los casos que presentó dificultad durante el aprendizaje. a) Con puntos se muestra la resistividad aparente que se utilizó como entrada a la red neuronal y con línea continua se presenta la respuesta del modelo estimado por la red neuronal. b) Con línea punteada se presenta el modelo sintético que se utilizó y con línea continua el modelo estimado por la red.

III.5 Red Especializada.

Tomando en cuenta la distribución de *RMS* de la figura 4, se procedió a entrenar redes especializadas, esto es, redes que constaron de patrones de un solo tipo ya sea

A, K, H o Q . En este caso la base de patrones de aprendizaje consistió en modelos de tres capas como los descritos en la sección de la red general, pero ahora se utilizaron 500 patrones de aprendizaje, para cada tipo de red especializada. La figura 6 muestra los errores de aprendizaje E , obtenidos para cada uno de los tipos de red.

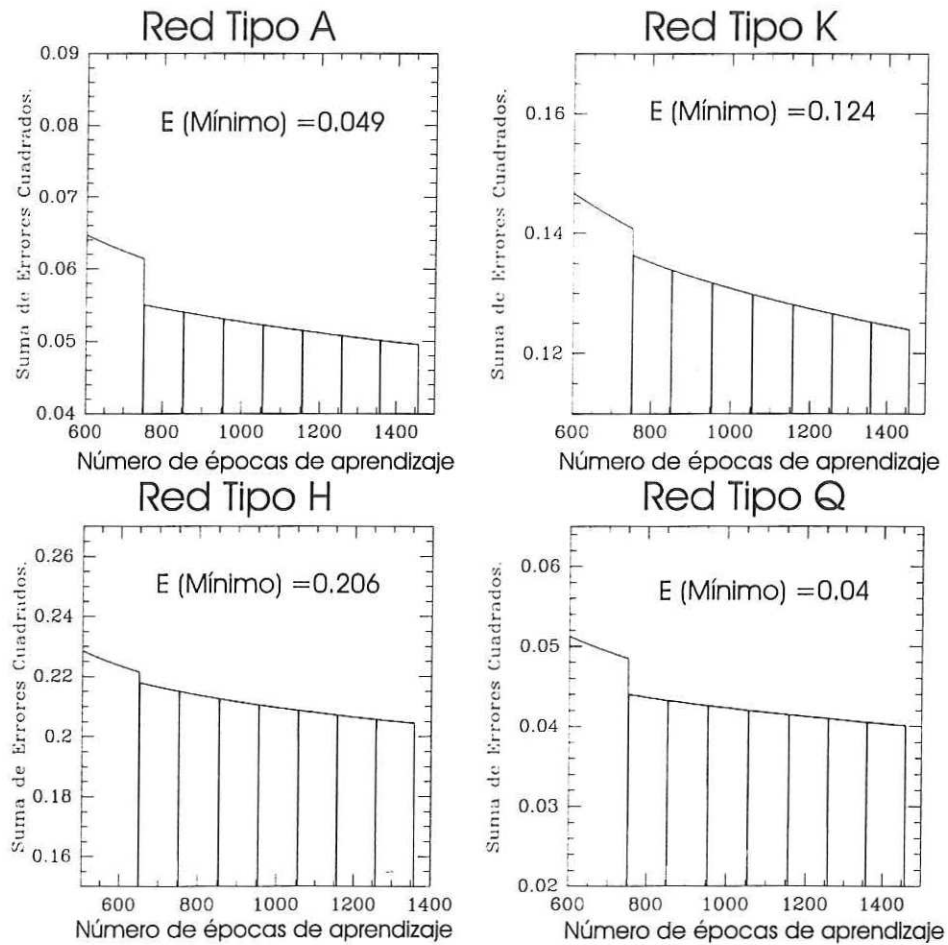


Figura 6. Errores de aprendizaje obtenidos durante el entrenamiento de las redes especializadas.

En seguida se procedió a calcular RMS para cada uno de los 500 patrones de cada

tipo de modelo. En la Figura 7 se encuentra graficado RMS para cada uno de los 500 modelos que se utilizaron en la fase de aprendizaje. De ésta Figura se puede apreciar que las redes especializadas, produjeron menores valores de RMS en comparación con la red general, por lo que se optó por presentar ejemplos de aplicación utilizando solamente las redes especializadas.

En un primer ejemplo de aplicación, se generaron 4 modelos sintéticos tipo A, K, H y Q , con la particularidad de que estos no formaron parte del conjunto de entrenamiento de la red neuronal. La generación de éstos cuatro modelos se hizo para comparar el desempeño de las diferentes redes y considerar su posible utilización con datos reales.

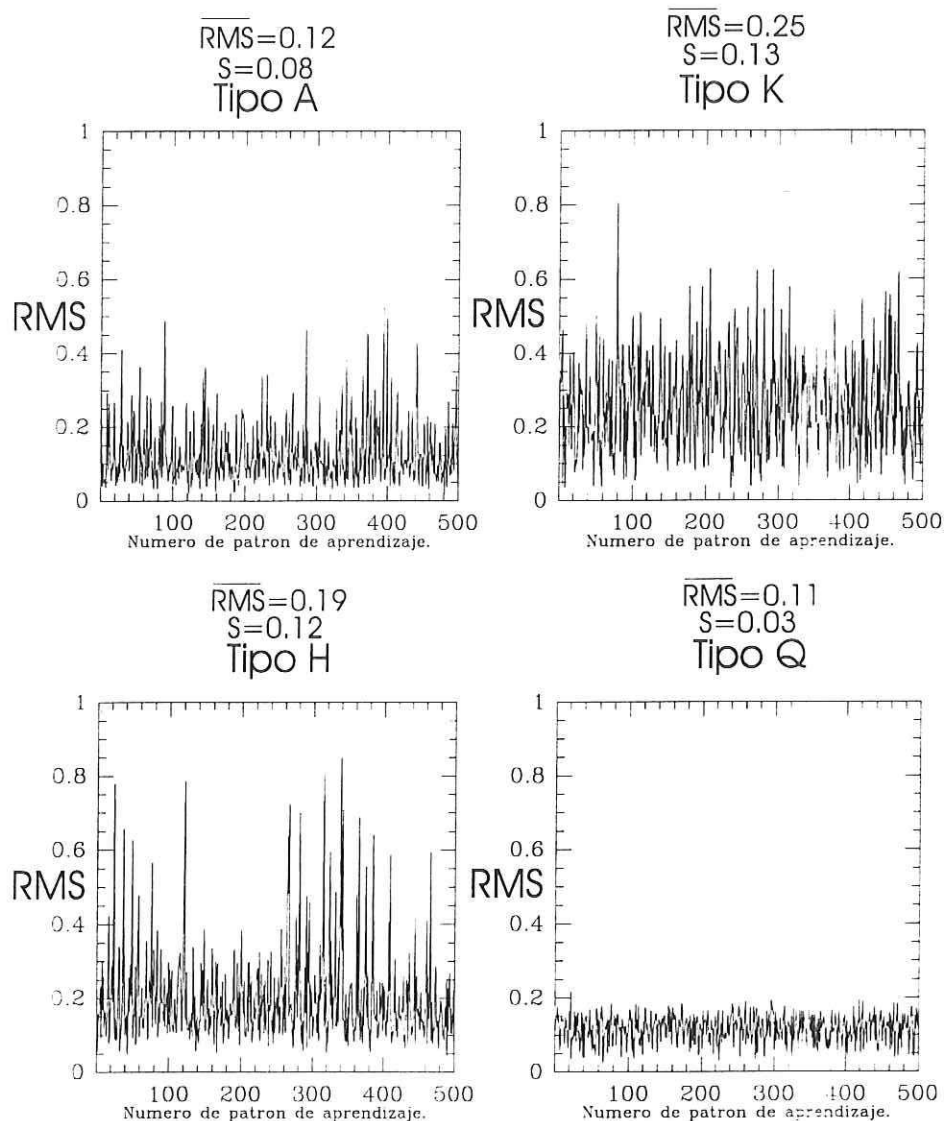


Figura 7. Distribución de RMS para el caso de la red especializada. En este caso se entrenaron cuatro redes separadamente, para cada red el conjunto de entrenamiento consistió de 500 modelos del correspondiente tipo. En la parte superior de cada gráfica se ha incluido el promedio de RMS , así como su desviación estándar (s).

En la Figura 8a se muestra con puntos la resistividad aparente que se utilizó

entrada a la red neuronal. En la Figura 8b se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo A que se utilizó, y con línea continua el modelo estimado por la red neuronal especializada. Para poder comparar el modelo estimado por la red neuronal, se procedió a utilizar un método que resuelve el problema inverso iterativamente. Se decidió utilizar el algoritmo de la navaja de Occam (Constable *et. al.*, 1987), ya que de todos los modelos que cumplen con los datos, el resultante de éste algoritmo es el que tiene menos estructura. El modelo final en éste caso se presenta en la Figura 8b con el símbolo $(\cdot -)$. El modelo ajusta los datos (logaritmo base diez de la resistividad aparente) a un 5%. Los modelos estimados por las redes neuronales especializadas, así como los resultantes del algoritmo de Occam, para el caso de modelos tipo K , H y Q se encuentran en las figuras 9b, 10b y 11b respectivamente.

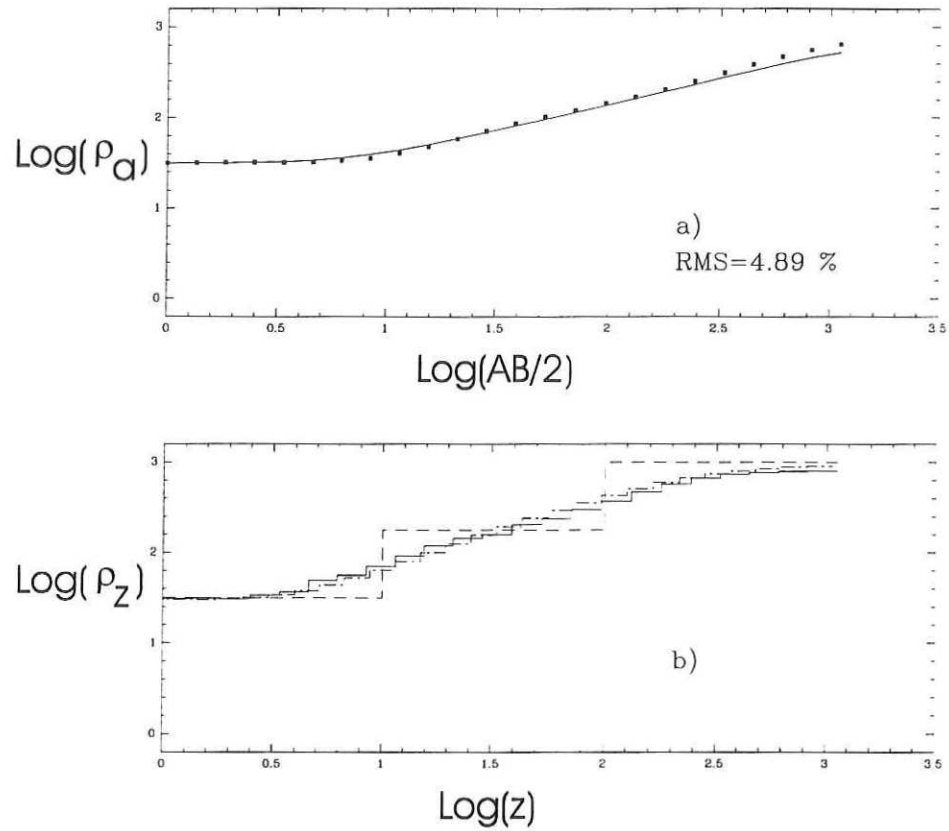


Figura 8. Ejemplo con un modelo sintético tipo A. En a) se muestran los datos de resistividad aparente que se utilizaron como entrada a la red neuronal especializada, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo A, con línea continua el modelo estimado por la red neuronal y con el símbolo (· -) el modelo estimado mediante el algoritmo de Occam.

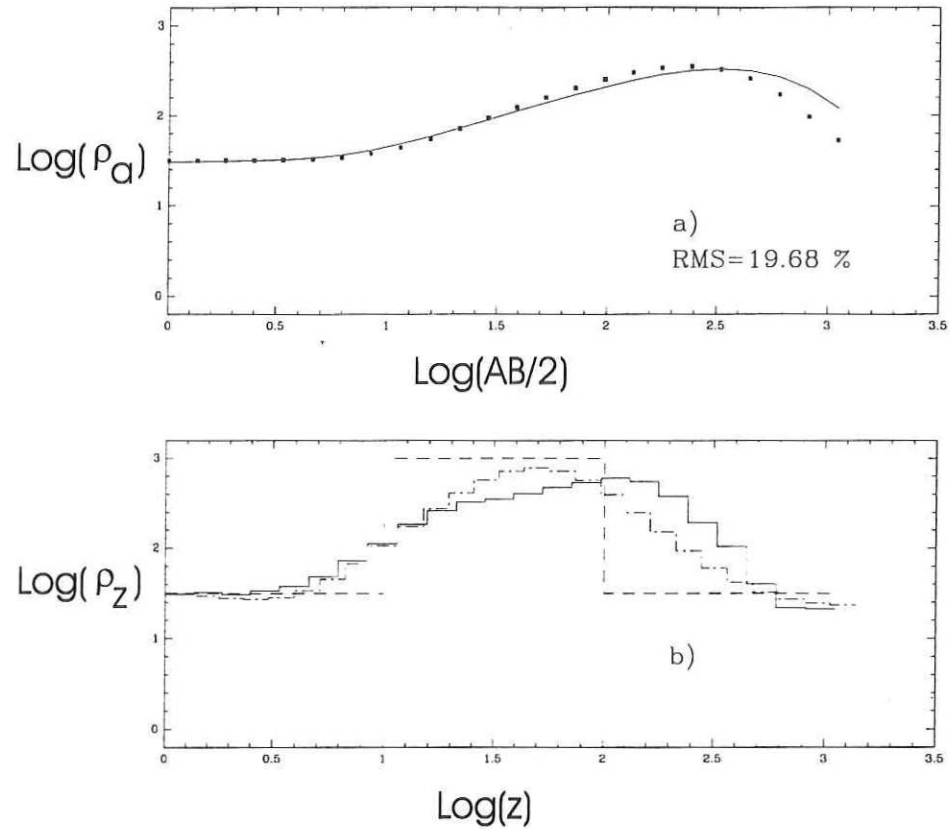


Figura 9. Ejemplo con un modelo sintético tipo K . En a) se muestran los datos de resistividad aparente que se utilizaron como entrada a la red neuronal especializada, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo K , con línea continua el modelo estimado por la red neuronal y con el símbolo $(\cdot -)$ el modelo estimado mediante el algoritmo de Occam.

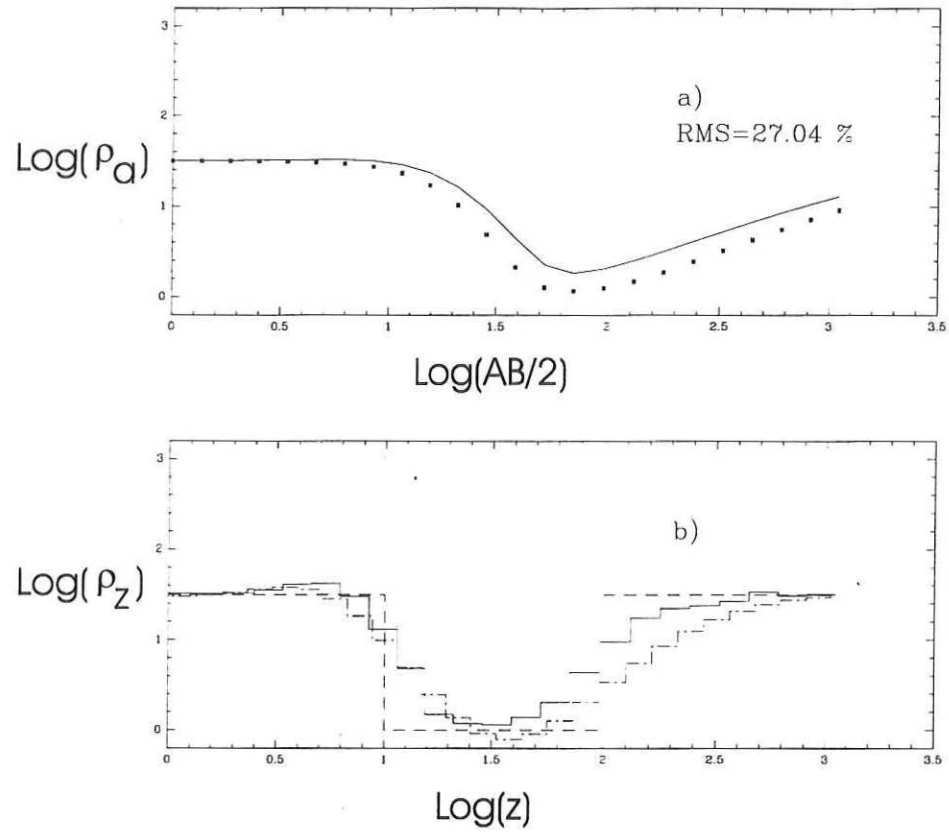


Figura 10. Ejemplo con un modelo sintético tipo H . En a) se muestran los datos de resistividad aparente que se utilizaron como entrada a la red neuronal especializada, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo H , con línea continua el modelo estimado por la red neuronal y con el símbolo $(\cdot -)$ el modelo estimado mediante el algoritmo de Occam.

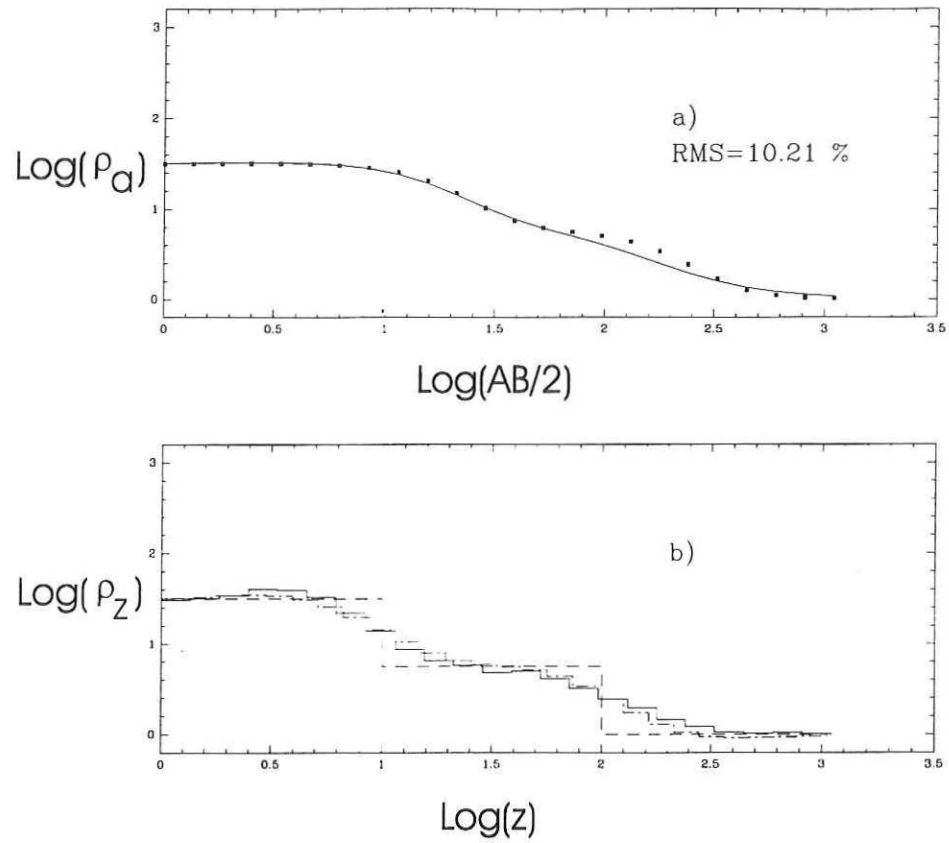


Figura 11. Ejemplo con un modelo sintético tipo Q . En a) se muestran los datos de resistividad aparente que se utilizaron como entrada a la red neuronal especializada, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo Q , con línea continua el modelo estimado por la red neuronal y con el símbolo $(\cdot -)$ el modelo estimado mediante el algoritmo de Occam.

III.6 Respuesta al Efecto de Ruido.

Con el objetivo de estimar el desempeño del método de inversión ante el ruido, se decidió agregar 5% y 10% de ruido aleatorio en los valores de la resistividad aparente ρ_a . Los modelos de prueba en éste caso fueron los mismos modelos sintéticos utilizados en la sección anterior. Los valores de resistividad aparente ρ'_a que se utilizaron como entrada a la red se calcularon mediante:

$$\rho'_a = \rho_a + (0.05 \cdot \eta \cdot \rho_a), \quad (16)$$

en donde η es un número generado aleatoriamente en el dominio $[-1, +1]$ con media 0 y desviación estándar 1. La función de densidad de probabilidad de η es aproximadamente gaussiana.

III.6.1 Respuesta al Efecto de 5% de Ruido.

En la Figura 12b se muestra con línea continua el modelo estimado por la red neuronal, para el caso del modelo sintético tipo A. En la figura 12a se presenta con línea continua la respuesta del modelo estimado por la red y con puntos los datos de resistividad aparente contaminados con 5% de ruido aleatorio. Los resultados para los modelos K , H y Q se encuentran en las Figuras 13, 14 y 15 respectivamente.

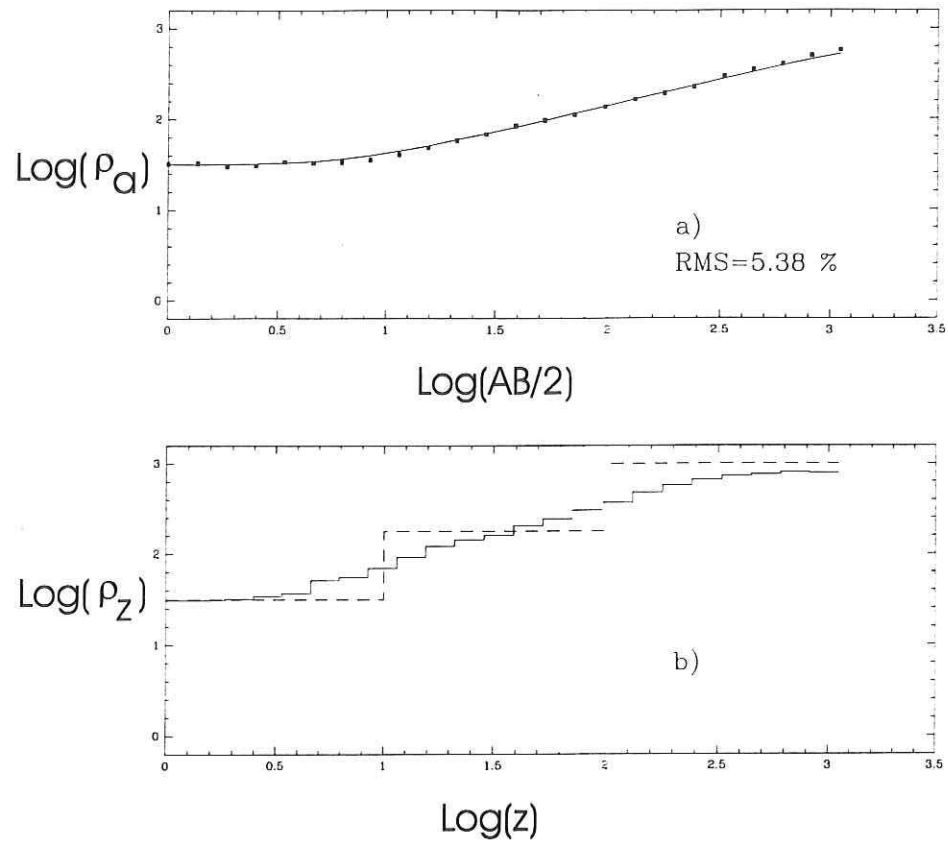


Figura 12. Ejemplo con un modelo sintético tipo *A* y con 5% de ruido en los datos. En a) se muestran los datos de resistividad aparente contaminados con 5% de ruido aleatorio, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo *A* y con línea continua el modelo estimado por la red.

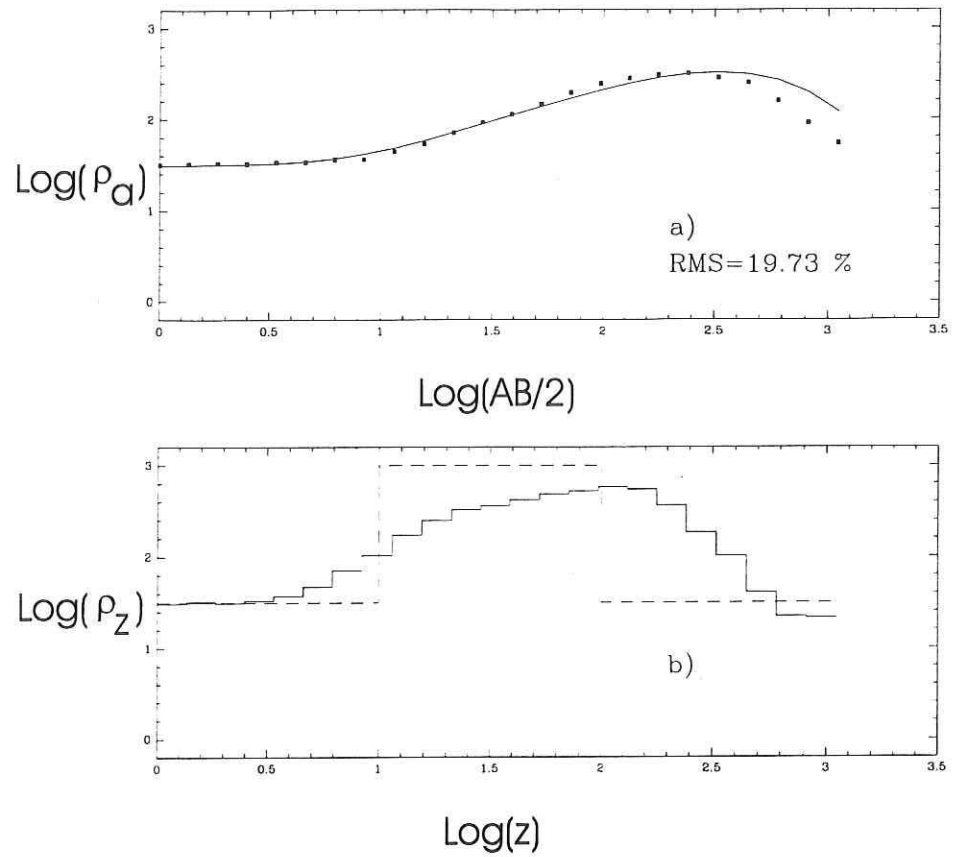


Figura 13. Ejemplo con un modelo sintético tipo K y con 5% de ruido en los datos. En a) se muestran los datos de resistividad aparente contaminados con 5% de ruido aleatorio, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo K y con línea continua el modelo estimado por la red.

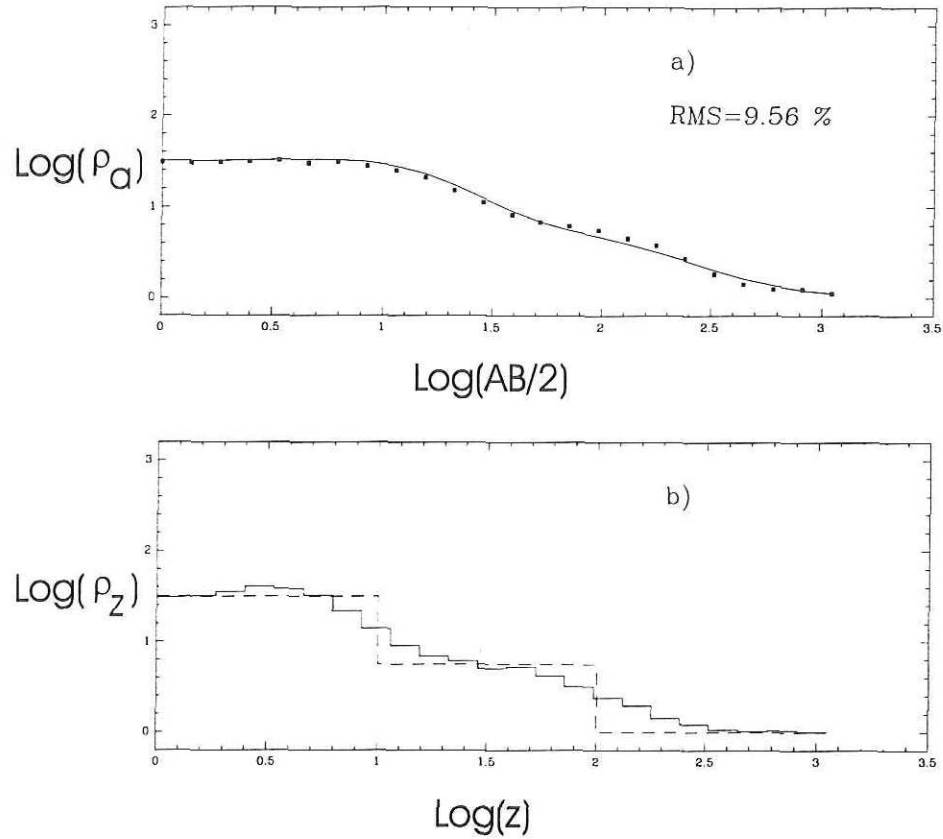


Figura 15. Ejemplo con un modelo sintético tipo Q y con 5% de ruido en los datos. En a) se muestran los datos de resistividad aparente contaminados con 5% de ruido aleatorio, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo Q y con línea continua el modelo estimado por la red.

III.6.2 Respuesta al Efecto de 10% de Ruido.

Con la finalidad de observar la estabilidad del algoritmo numérico de las redes neuronales, se añadió ruido a los valores de resistividad aparente correspondientes

a los modelos A , K , H y Q ya mencionados en la sección anterior. En este caso el porcentaje de ruido utilizado fué de 10%. Los resultados de la aplicación de las redes neuronales a los modelos tipo A , K , H y Q se encuentran en las Figuras 16,17,18 y 19, respectivamente.

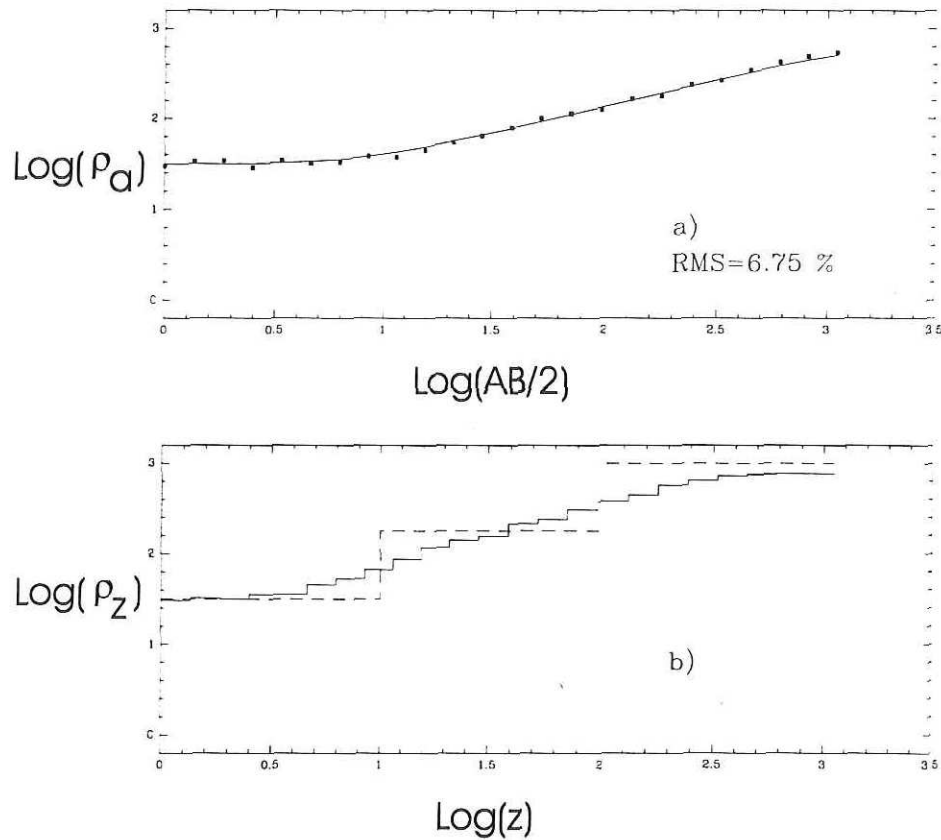


Figura 16. Ejemplo con un modelo sintético tipo A y con 10% de ruido en los datos. En a) se muestran los datos de resistividad aparente contaminados con 10% de ruido aleatorio, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo A y con línea continua el modelo estimado por la red.

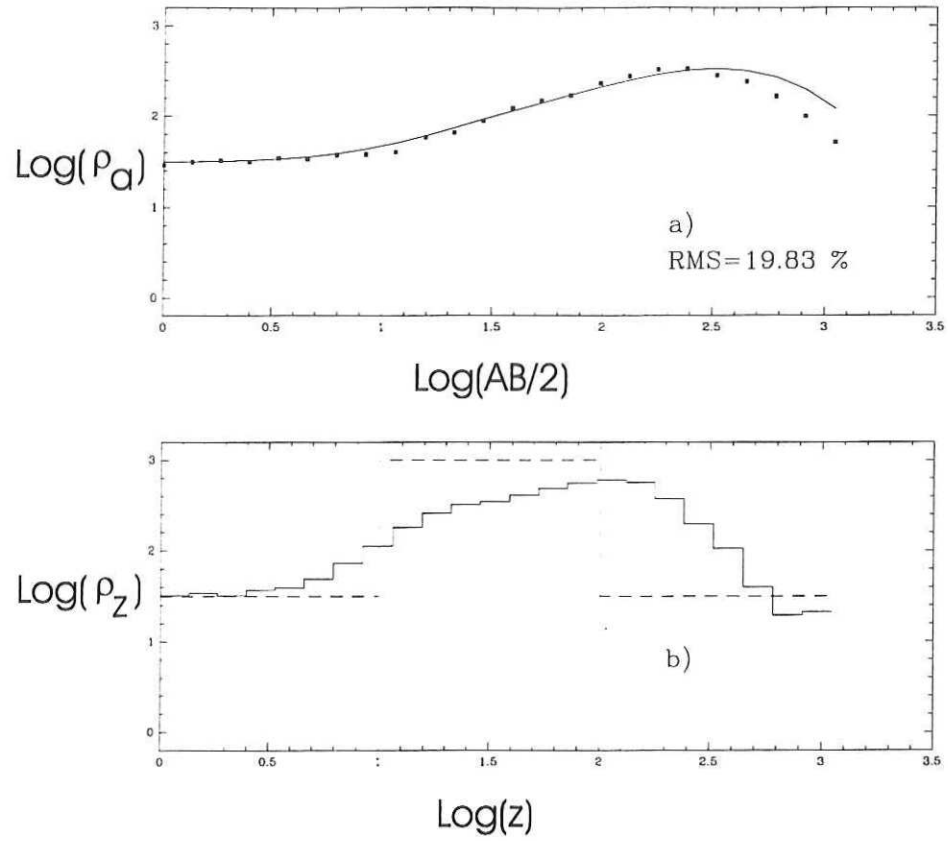


Figura 17. Ejemplo con un modelo sintético tipo K y con 10% de ruido en los datos. En a) se muestran los datos de resistividad aparente contaminados con 10% de ruido aleatorio, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo K y con línea continua el modelo estimado por la red.

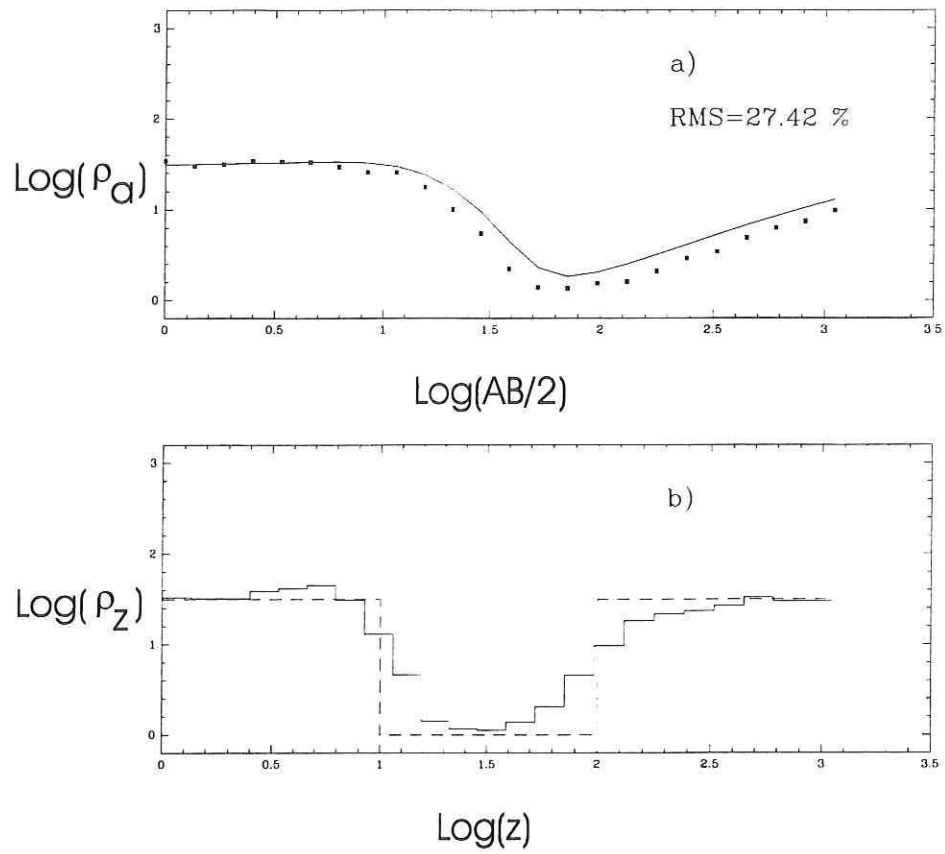


Figura 18. Ejemplo con un modelo sintético tipo H y con 10% de ruido en los datos. En a) se muestran los datos de resistividad aparente contaminados con 10% de ruido aleatorio, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo H y con línea continua el modelo estimado por la red.

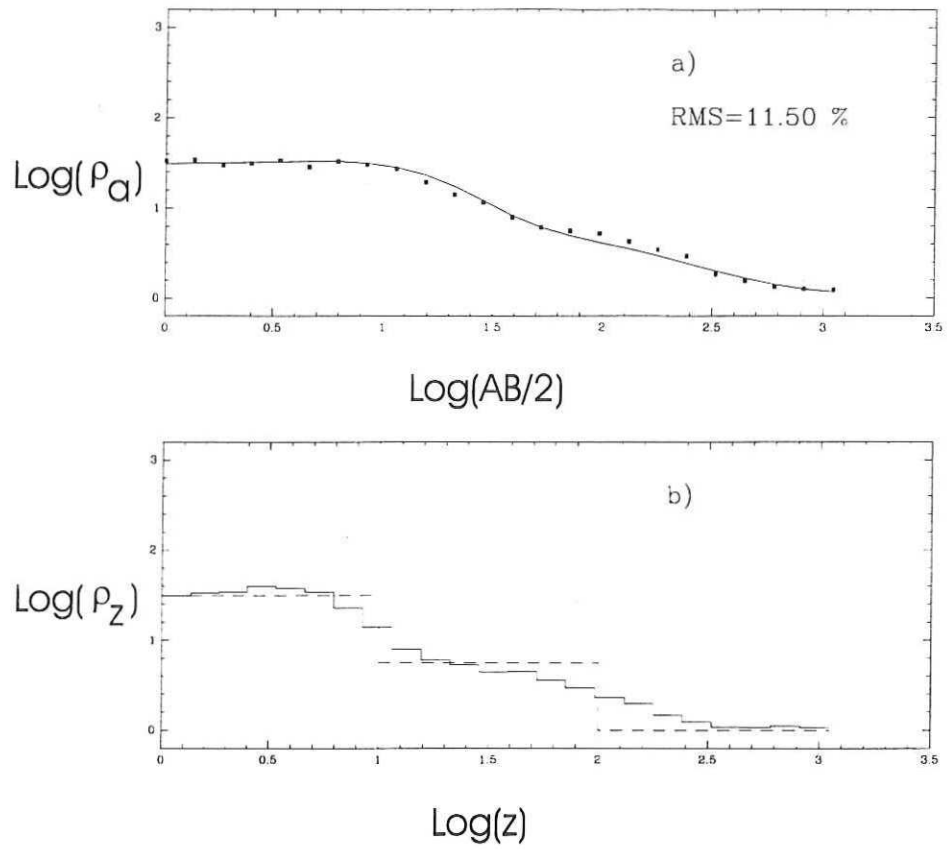


Figura 19. Ejemplo con un modelo sintético tipo Q y con 10% de ruido en los datos. En a) se muestran los datos de resistividad aparente contaminados con 10% de ruido aleatorio, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético tipo Q y con línea continua el modelo estimado por la red.

III.7 Respuesta a Modelos Diversos.

III.7.1 Modelo de Cuatro Capas

Con la finalidad de evaluar la habilidad de la red neuronal general para extrapolar el aprendizaje a modelos de mas capas, se escogió un modelo sintético de cuatro capas y se le calculó su resistividad aparente. Esta fué presentada a la red como entrada y se estimó el modelo que se presenta en la Figura 20b con línea continua. Se observa que el modelo estimado tiene 4 capas, sin embargo la profundidad de la penúltima capa no queda bien determinada.

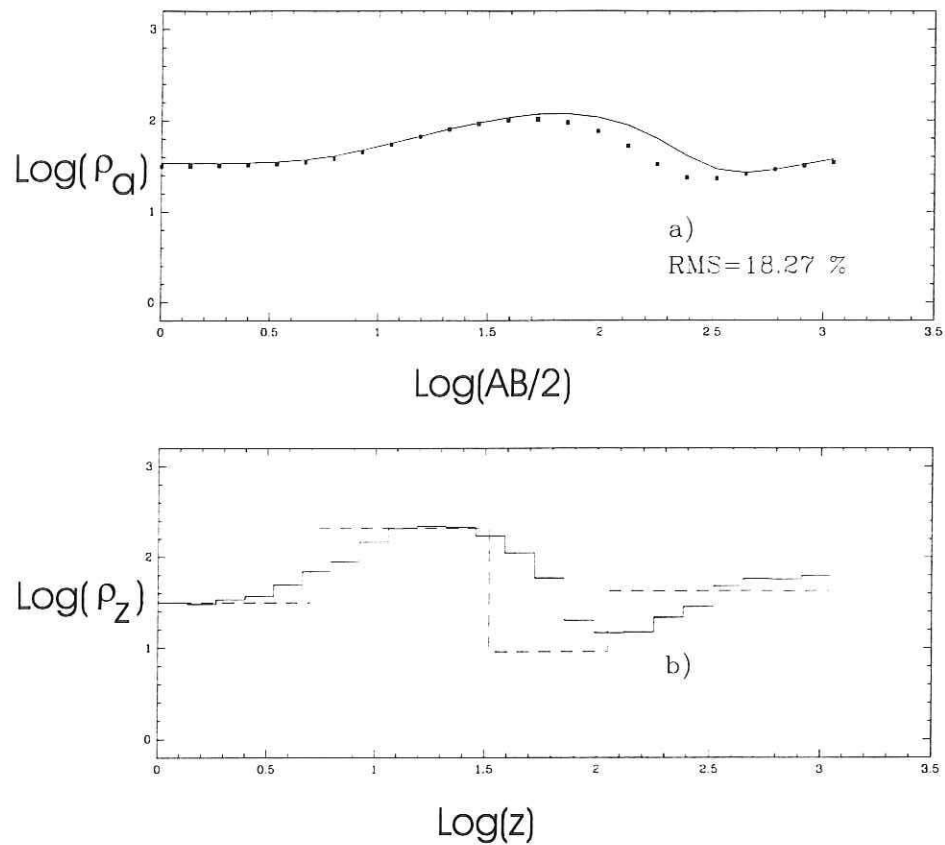


Figura 20. Ejemplo con un modelo sintético de cuatro capas. En a) se muestran los datos de resistividad aparente, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético de cuatro capas y con línea continua el modelo estimado por la red.

III.7.2 Modelo Parabólico Descendente

Existen algunos modelos de resistividad o conductividad eléctrica con variación continua con la profundidad, para los cuales se ha calculado analíticamente el poten-

cial eléctrico en la superficie. Tal es el caso de la función parabólica de conductividad dada por:

$$\sigma(z) = \sigma_0 \left(1 + \frac{z}{z_0}\right)^2. \quad (17)$$

La resistividad aparente para esta función, correspondiente al arreglo Schlumberger, fué encontrada por Coen & Yu (1981), y es:

$$\rho_a(r) = \rho(0) \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{z_0} \right)^2 \left[H_1 \left(\frac{r}{z_0} \right) - Y_1 \left(\frac{r}{z_0} \right) - \frac{2}{\pi} \right] \right\}. \quad (18)$$

H_1 es la función de Struve de orden uno e Y_1 es la función de Bessel de segunda clase de orden uno. La función parabólica de conductividad es muy diferente a el modelo general con el que se entrenó a la red neuronal, es por esto que se escogió la función parabólica para probar el desempeño de la red. En éste ejemplo sintético se escogió $\rho(0) = 31.6 \Omega - m$ y $z_0 = 200 m$, en seguida se calculó la resistividad aparente utilizando la ecuación (18). En la Figura 21b se muestra el modelo estimado utilizando la red neuronal general. El ajuste en este caso es rasonablemente bueno.

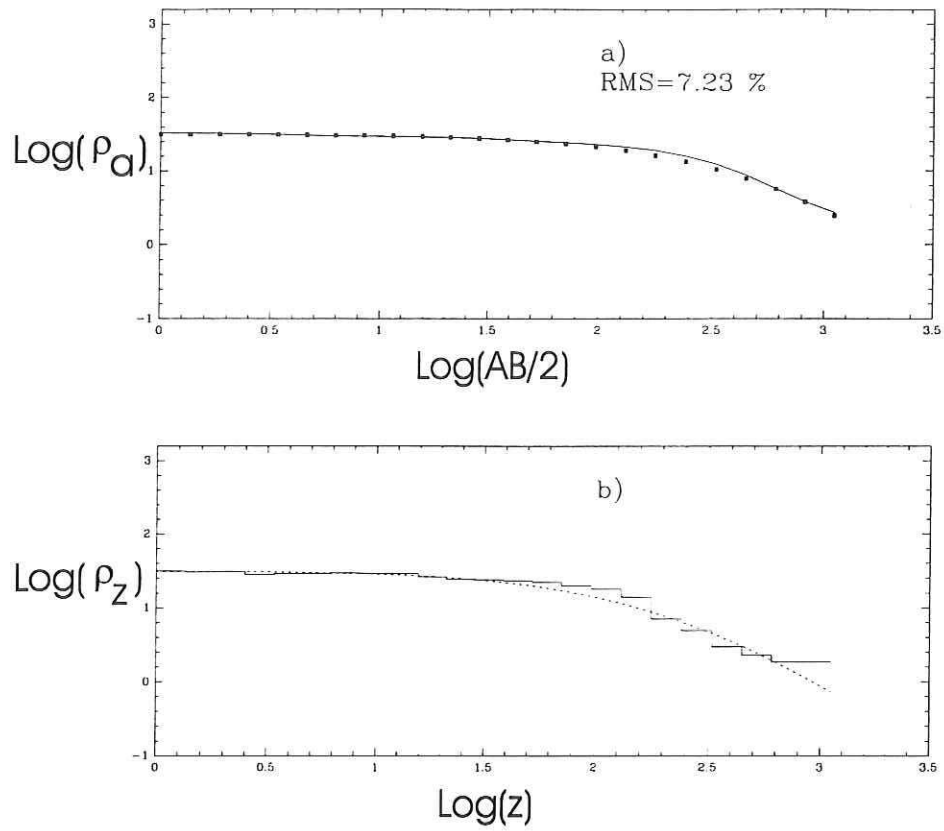


Figura 21. Ejemplo con un modelo sintético parabólico. En a) se muestran los datos de resistividad aparente que sirvieron de entrada a la red neuronal, con línea continua se muestra la respuesta de modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea punteada el modelo sintético parabólico y con línea continua el modelo estimado por la red.

III.8 Aplicación a Datos Reales.

Con el objetivo de estimar el desempeño del algoritmo de inversión fuera del marco de simulación sintética, se procedió a utilizar el método con datos reales obtenidos en el campo (Vega, 1989). Estos datos fueron obtenidos cerca de la ciudad de Ensenada, México. Los valores originales de $r = \frac{AB}{2}$ empiezan en 2 m, finalizan en 500 m y consisten de 18 valores. Con la finalidad de tener un total de 24 valores de resistividad aparente, se generó un nuevo conjunto de $r = \frac{AB}{2}$, siguiendo una progresión geométrica que empieza en 2 m y finaliza en 500 m. Los valores de resistividad aparente para este nuevo conjunto de separaciones se obtuvo mediante interpolación de los valores originales. Los nuevos datos de resistividad aparente se muestran en la Figura 22a. Se observa de ésta Figura que los datos provienen de un modelo aproximadamente tipo K . Por lo que se entrenó una red especializada con 500 patrones tipo K , además para poder comparar los resultados de la red especializada, se entrenó una red general con 250 patrones de cada uno de los tipos A , K , H y Q .

En la Figura 22b se muestra con línea continua el modelo estimado por la red neuronal general, el correspondiente modelo a la red neuronal especializada se encuentra en la Figura 23b. En ambos casos se ha incluido el modelo estimado por Esparza & Gómez-Treviño (1997), quienes utilizaron un método iterativo no-lineal que produce un modelo con el mínimo número de capas homogéneas. Se observa que tanto la red especializada como la general producen resultados “razonablemente” buenos, en

comparación con el método iterativo de Esparza & Gómez-Treviño (1997).

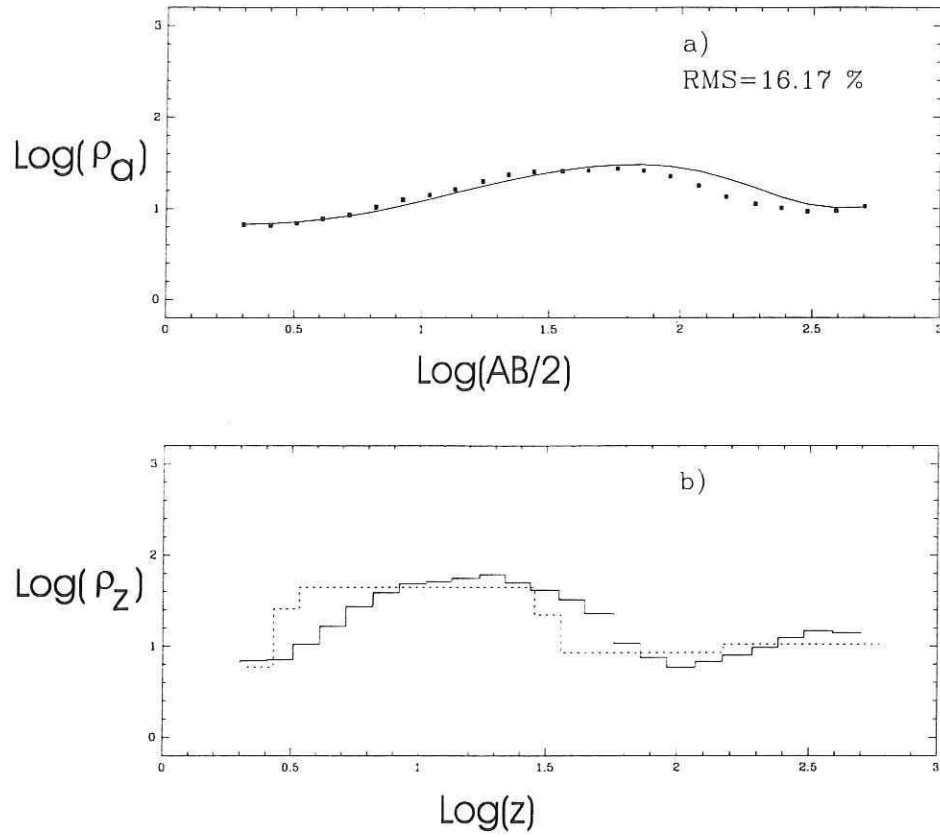


Figura 22. Aplicación a datos reales. En a) se muestra con puntos los datos que sirvieron de entrada a la red neuronal general y con línea continua la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea continua el modelo estimado por la red neuronal y con línea punteada el modelo estimado por Esparza & Gómez-Treviño (1997), quienes utilizaron un método iterativo.

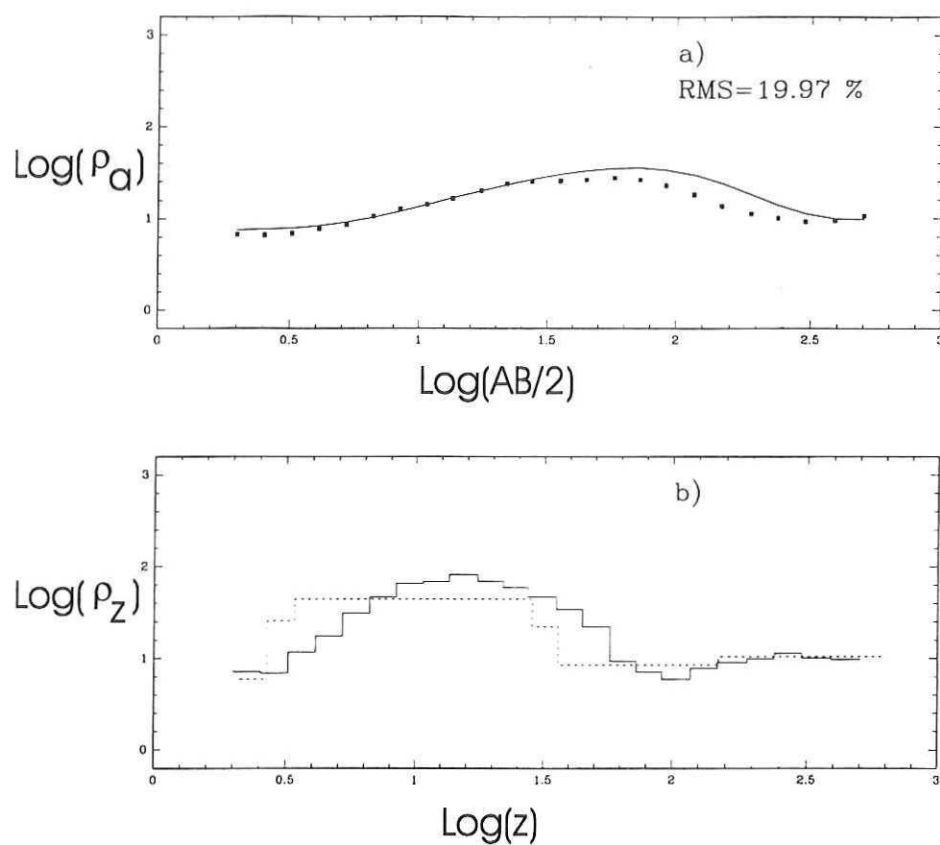


Figura 23. Aplicación a datos reales. En a) se muestra con puntos los datos que sirvieron de entrada a la red neuronal especializada y con línea continua la respuesta del modelo estimado por la red. En b) se muestra con línea continua el modelo estimado por la red neuronal y con línea punteada el modelo estimado por Esparza & Gómez-Treviño (1997), quienes utilizaron un método iterativo.

III.9 Conclusiones.

Ya que los modelos de resistividad eléctrica de tres capas se pueden clasificar en cuatro tipos (A , K , H y Q), es natural considerar redes neuronales entrenadas con cada tipo de modelo, estos es, redes especializadas. Para tener una manera de comparar el desempeño de cada red especializada se entrenó una sola red con los cuatro tipos de modelos y se le denominó red general. El análisis del aprendizaje de cada red indica que las redes especializadas aprenden mejor que la red general, sobre todo para modelos tipo H , para los que existen valores de RMS superiores a 1.0 en la red general. Sin embargo, existen modelos de variación continua con la profundidad, como la función de conductividad parabólica, los que claramente no caen en la clasificación anterior. Es en estos casos que es conveniente utilizar la red general.

Capítulo IV

CONCLUSIONES

En esta tesis he propuesto utilizar un algoritmo numérico para la inversión de datos de corriente directa, particularmente para sondeos eléctricos realizados con el arreglo colineal Schlumberger. El algoritmo numérico que utilicé trata de emular un proceso natural que está relacionado con la respuesta del cerebro a los estímulos externos provenientes de los sentidos. Esta respuesta se puede hacer gracias a las unidades cerebrales de trabajo, llamadas neuronas, y a las conexiones entre ellas, también denominadas dendritas. Visto como un algoritmo que trata de emular un proceso natural, el algoritmo de redes neuronales artificiales es similar al método de *simulación de templado*, que se utiliza para encontrar el máximo global de una función de varias variables, y al método de *algoritmos genéticos*, entre otros.

Después de realizar algunas pruebas iniciales, se encontró que el algoritmo constructivo CASCOR era el más conveniente de utilizar, ya que tiene una capacidad

de aprendizaje rápida. En la parte de la aplicación del algoritmo se encontró que los modelos estimados por el método iterativo de la navaja de Occam se parecen bastante a los estimados por el algoritmo de redes neuronales. Por consiguiente, el método desarrollado se puede utilizar para generar modelos aproximados, que aunque no necesariamente cumplen con los datos disponibles, se tiene cierta certeza que se parecerán bastante a los resultantes de un método iterativo, como el método de la navaja de Occam.

Aunque pude realizar un cálculo de la varianza del modelo estimado por el algoritmo propuesto, esto no se hizo ya que, dicha varianza representaría únicamente un error de propagación, debida al error de los datos. Esto se debe a que el problema inverso de corriente directa, para un número finito de datos, carece de solución única.

Una característica deseable del algoritmo desarrollado, es que hubiese aprendido mejor el mapeo inverso, particularmente para los modelos escalonados con un máximo o con un mínimo. Para lograr esta cualidad, quizás se hubieran tenido que investigar las características detalladas del algoritmo CASCOR, y de esa manera conseguir que el proceso de minimización localizara de mejor manera el mínimo de la función objetivo. O bien, analizar las características de aprendizaje global del algoritmo CASCOR. Esto es tema que forma parte de otra investigación.

BIBLIOGRAFÍA

Coen, S. & M.W.Yu 1981. "The inverse problem of the direct current conductivity profile of a layered earth". *Geophysics*, **46**. 1702-1713.

Constable, S. C., R. L. Parker, C. G. Constable, 1987. "Occam's Inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data". *Geophysics*. **52** , 289-300.

Esparza, F.J. & E. Gómez-Treviño, 1987. Electromagnetic sounding in the resistive limit and the Backus-Gilbert method for estimating averages. *Geoexploration*, 24, 441-454.

Esparza, F.J. & E. Gómez Treviño, 1989. Inversion unidimensional de datos de polarización inducida para medios con contraste pequeño en resistividad.

Geofísica Internacional, 28, 467-479.

Esparza, F.J. & J. Frez, 1992. Regionalización de velocidades de ondas superficiales mediante condiciones de continuidad. *Geofísica Internacional*, 31, 263-277.

Esparza, F.J. & E. Gómez Treviño, 1997. "1-D Inversion of resistivity and induced polarization data for the least number of layers", *Geophysics*, Vol. 62, No. 6, p. 1724-1729.

Falhman, S. E., 1988. "Faster-Learning Variations on BackPropagation: An Empirical Study" in *Proceedings of the 1988 Connectionist Models Summer School*, Morgan Kaufmann.

Falhman, S. E. and C. Lebiere, 1990. "The Cascade-Correlation Learning Architecture" in D.S. Touretzky (ed.), *Advances in Neural Information Processing Systems 2*, Morgan Kaufmann.

Ghosh, D. P., 1971. "Inverse filter coefficients for the computation of apparent resistivity standard curves for a horizontally layered earth.", *Geophys. Prosp.*, **19**, 769-775.

Hertz J. , A. Krogh, R. G. Palmer, 1991. Introduction to the theory of neural computation, (Ed. Addison-Wesley).

Hidalgo, H., E. Gómez Treviño & R. Swiniarski, 1994. "Neural network Approximation of an Inverse Functional" The 1994 IEEE International Conference on Neural Networks **V** 2715-3436.

Hidalgo, H. & Gomez-Treviño, E., 1996. "Application of constructive learning algorithms to the inverse problem", IEEE Transactions on geoscience and remote sensing, Vol. 34, pp. 874-885.

Hornik, K., M. Stinchcombe, H. White, 1989. Multilayer feed-forward networks are universal approximators. *Neural Networks* , **2**, 359-366.

Hornik, K., M. Stinchcombe, H. White, 1990. Universal approximation of an unknown mapping and its derivatives using multilayer feedforward networks. *Neural Networks*, **3**, 551-560.

Johansen, H.K., 1975. "An interactive computer/graphic- display terminal system for interpretation of resistivity soundings:", *Geophysical Prospecting*, Vol. **23**, 449-458.

Koefoed, O. 1970. "A fast method for determining the layer distribution from the raised kernel function:" *Geophys. Prosp.*, **18**, 564-570.

Langer , R. E., 1933. "An inverse problem in differential equations: " *Am. Math. Soc. Bull.*, ser. 2, **29**, 814-820.

Oldenburg, D.W. 1978. "The Interpretation of direct current resistivity measurements", *Geophysics*, Vol. 43, No 3, 610-625.

Orellana, E., 1982. *Prospección Geoelectrica en corriente continua*, Segunda Edición, Biblioteca Técnica Philips, pp. 578.

Raiche A., 1991. "A pattern recognition approach to geophysical inversion using neural networks," *Geophys. J. Int.*, vol. 105, pp.629-648.

Romeo, G., F. Mele & A. Morelli, 1995. *Computers in Geosciences*, **21**, No.2, (1995) 279.

Röth, G. & A. Tarantola, 1994. *Journal of Geophysical Research*, **99** (1994) 6753.

Rumelhart, D.E. and J.L. McClelland, 1986. *Parallel Distributed Processing*, Vol. 1 (MIT Press, Cambridge, 1986) p. 318.

Rumelhart, D.E. , G.E. Hinton, R.J. Williams, 1986. *Nature*, **323**, p. 533.

Zell A. , G. Mamier, M. Vogt, N. Mache, R. Hübner, K.-U. Herrmann, T. Soye, M. Schmalzl, T. Sommer, A. Hatzigeorgiou, S. Döring, D. Posselt, T. Schreiner, 1994. Stuttgart Neural Network Simulator ver. 3.3 (este paquete computacional esta disponible via ftp (anonymous) en (ftp.informatik.uni-stuttgart.de)).

Vega, M. E., 1989. "Combinación de sondeos de resistividad y polarización inducida en el estudio de un acuífero costero:", Tesis de Maestria en Ciencias en Geofísica Aplicada, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.

APÉNDICE A

CÁLCULO DEL POTENCIAL EN LA SUPERFICIE

El enfoque inicial que permite resolver el problema será el de calcular el potencial en la superficie, definida ésta por la interface de un semiespacio formado por la atmosfera y el subsuelo. El potencial es debido a una inyección de corriente en el subsuelo, como se muestra en la Figura 1. De esta figura y bajo el sistema de coordenadas utilizado, se puede inferir que el potencial en un punto cualquiera del subsuelo, como función del radio r y la profundidad z , estará descrito por la ecuación:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi(r, z)}{\rho(z)} \right) = 0, \quad (\text{A.1})$$

en donde se supone que no existen ni fuentes ni sumideros de corriente en el semi-

espacio descrito. Desarrollando el término en parentesis y considerando que el problema es simétrico con respecto al eje z , por lo que se considerarán nulas las variaciones con respecto a ϕ , se obtiene:

$$\frac{\nabla\phi(r,z)}{\rho(z)} = \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial\phi(r,z)}{\partial r} \hat{a}_r + \frac{1}{\rho(z)} \frac{1}{r} \frac{\partial\phi(r,z)}{\partial\phi} \hat{a}_\phi + \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial\phi(r,z)}{\partial z} \hat{a}_z, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\nabla\phi(r,z)}{\rho(z)} = \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial\phi(r,z)}{\partial r} \hat{a}_r + \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial\phi(r,z)}{\partial z} \hat{a}_z, \quad (\text{A.3})$$

Substituyendo este ultimo resultado en la ecuación 1 se obtiene:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla\phi(r,z)}{\rho(z)} \right) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} \hat{a}_r \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\phi} \hat{a}_\phi \right) + \left(\frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_z \right) \right] \cdot \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial\phi(r,z)}{\partial r} \hat{a}_r + \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial\phi(r,z)}{\partial z} \hat{a}_z \right), \quad (\text{A.4})$$

efectuando el producto escalar

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla\phi(r,z)}{\rho(z)} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial\phi(r,z)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial\phi(r,z)}{\partial z} \right) = 0, \quad (\text{A.5})$$

re-escribiendo

$$\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial z} \right) = 0, \quad (\text{A.6})$$

resolviendo por separación de variables y proponiendo $\phi(r, z) = R(r)Z(z)$ se obtiene:

$$\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial^2 R(r)Z(z)}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial R(r)Z(z)}{\partial z} \right) = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{Z(z)}{\rho(z)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + R(r) \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{dZ(z)}{dz} \right) = 0, \quad (\text{A.8})$$

dividiendo todo por $\frac{Z(z)}{\rho(z)}$ y posteriormente dividiendo todo por $R(r)$ se obtiene:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{\rho(z)}{Z(z)} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{dZ(z)}{dz} \right) = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{\rho(z)}{Z(z)} \left[\frac{-\rho'(z)}{\rho(z)^2} \frac{d}{dz} Z(z) + \frac{1}{\rho(z)} \frac{d^2}{dz^2} Z(z) \right] = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} = \frac{\rho'(z)}{\rho(z)Z(z)} \frac{d}{dz} Z(z) - \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2}{dz^2} Z(z). \quad (\text{A.11})$$

Separando ambos lados de la ecuación anterior e igualandolos a λ^2 se obtiene

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} = \lambda^2, \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\rho'(z)}{\rho(z)Z(z)} \frac{d}{dz} Z(z) - \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2}{dz^2} Z(z) = \lambda^2, \quad (\text{A.13})$$

para la ecuación dependiente de r :

$$\frac{d^2}{dr^2} R(r) - \lambda^2 R(r) = 0, \quad (\text{A.14})$$

se sabe que tiene una solución de la forma de función de Bessel de orden cero, mas específicamente:

$$R(r) = J_0(\lambda r), \quad (\text{A.15})$$

para la ecuación dependiente de z se tiene que:

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - \frac{\rho'(z)}{\rho(z)} \frac{dZ(z)}{dz} - \lambda^2 Z(z) = 0, \quad (\text{A.16})$$

en este caso y para estar acordes con la literatura (Oldenburg,1978), nombraremos a $Z(z) = h(z, \lambda)$ re-escribiendo la ecuación anterior se obtiene:

$$h''(z, \lambda) - \frac{\rho'(z)}{\rho(z)}h'(z, \lambda) - \lambda^2 h(z, \lambda) = 0. \quad (\text{A.17})$$

Considerando que cualquier valor real de λ en la ecuación anterior representa una solución de la ecuación diferencial parcial, se tiene que la solución de la ecuación original $\phi(r, z)$ puede expresarse como una integral sobre todos los posibles valores de λ , mas específicamente:

$$\phi(r, z) = \int_0^\infty A(\lambda)h(z, \lambda)J_0(\lambda r)d\lambda. \quad (\text{A.18})$$

APÉNDICE B

TEORÍA DE LAS REDES NEURONALES

B.1 Algoritmo de Retro-Propagación en una Red Neuronal Artificial.

En este apéndice, se presenta la teoría fundamental de las redes neuronales artificiales, principalmente el algoritmo de aprendizaje, referido como retro-propagación de errores. La arquitectura de una red neuronal del tipo perceptrón se muestra en la Figura 24. Una red neuronal como la descrita gráficamente, es capaz (Hornik *et. al.*, 1989) de efectuar una aproximación arbitraria de un mapeo difeomórfico y sus derivadas. En esta tesis se utilizará una variante de este algoritmo para efectuar un mapeo

entre los dominios de la resistividad aparente y la resistividad real en un semiespacio estratificado (véase capítulo I).

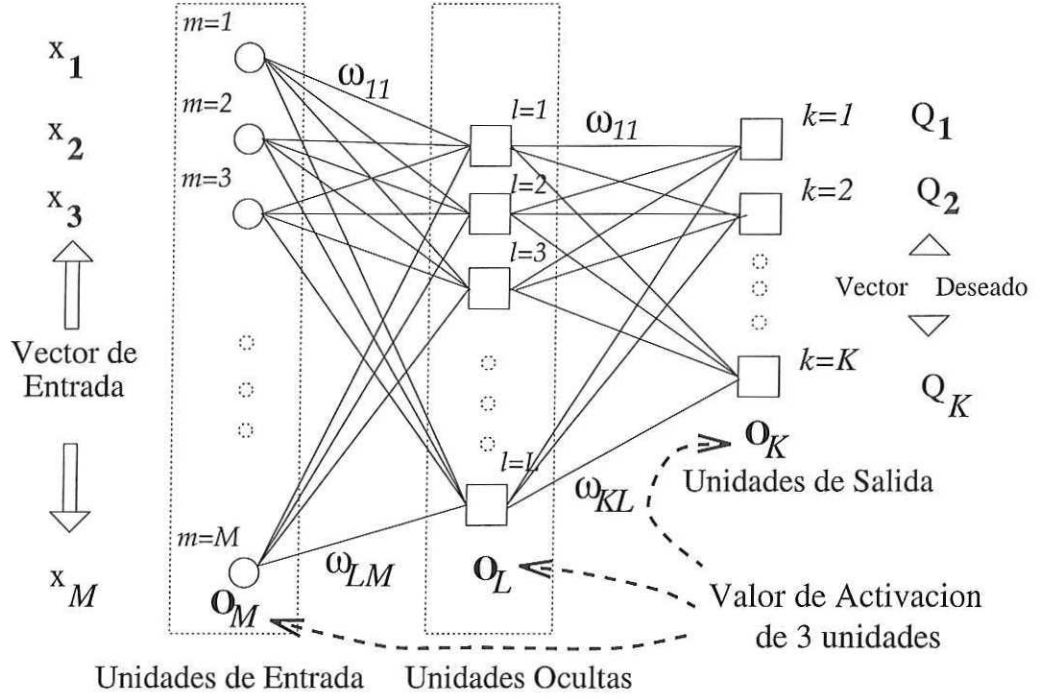


Figura 24. Representación gráfica de una Red Neuronal Artificial (RNA).

La Red Neuronal Artificial (RNA) consta de M unidades de entrada en donde se introduce el vector de entrada de uno de los dominios $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$, además, la red cuenta con una cantidad variable l de unidades ocultas, así como una cantidad K de unidades de salida, en donde se presentan los valores deseados del otro dominio $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_K\}$. Una red neuronal artificial como ésta, puede ser clasificada por el conjunto ordenado (M, L, K) del número de unidades que contiene cada capa, desde la capa de entrada hasta la capa de salida. La arquitectura descrita en la Figura 24,

tambien es conocida como red neuronal de retro-propagación, como fué descrita por Rumelhart (1986). Para que una unidad en la red sea activada, ésta debe de realizar una suma “pesada” ó ponderada de los valores de activación de las salidas de la capa precedente. Como se observa, para la unidad de salida o_k , ésta transformación lineal puede ser representada por:

$$o_k(t) = \sum_{l=1}^L \omega_{kl} o_l(t). \quad (\text{B.1})$$

Algunas unidades, sin embargo, como las unidades en la capa interna, desempeñan una transformación sigmoideal (no-lineal) adicional, tambien conocida como *función de activación*, en este caso denotada por $f_{act}(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$. Esta función será utilizada en las unidades de la capa oculta, de esta forma, se obtendrá el valor de activación de la unidad oculta o_l que puede ser representada por

$$o_l(t) = f_{act}\left(\sum_{m=1}^M \omega_{lm} x_m\right), \quad (\text{B.2})$$

resultando en las activaciones de las unidades ocultas

$$o_l(t) = \frac{1}{1 + e^{-\sum_{m=1}^M \omega_{lm} x_m}}. \quad (\text{B.3})$$

Las unidades de entrada no efectúan ningún computo, con una dinámica impuesta por la topología de una red como la descrita en la Figura 24, se ha demostrado (Rumelhart 1986, Hertz 1991), que una vez que se establecen los valores de activación

de las unidades de salida y ocultas, la red neuronal es capaz de converger hacia alguna salida deseada. Por medio de la reducción del error entre la salida obtenida o_k y la salida deseada Q_k . Más específicamente, cuando un patrón de entrada es presentado a la red en forma de vector de entrada (conjuntamente con la salida deseada o vector de salida), éste se propaga hacia adelante en la arquitectura de la red, hasta que la activación alcanza las unidades de salida. El error o la diferencia δ_k entre la salida ó patrón observado y el valor deseado, es entonces utilizado conjuntamente con el valor de la activación para calcular lo cambios necesarios en los valores de las conexiones $\Delta\omega_{kl}$, que garantizaran la disminución en el error. La forma de calcular el valor de las δ_l 's en las unidades ocultas, para las cuales no existe valor maestro o deseado, es, utilizar los valores de las δ_k 's en la capa sub-secuente, que ya han sido calculadas de forma que se pueda calcular el cambio necesario en el valor de las conexiones $\Delta\omega_{lm}$'s. Esta forma de ir hacia atras en el calculo de las diferencias (δ 's), es llamado *retro-propagación de errores*. El cambio necesario en el valor de las conexiones, es llamado *regla de retro-propagación* de actualización de la conexión.

Los valores de ω_{kl} son entonces actualizados, de acuerdo con $\omega_{kl}^{(2)} = \omega_{kl}^{(1)} + \Delta\omega_{kl}$ y los de ω_{lm} de acuerdo con $\omega_{lm}^{(2)} = \omega_{lm}^{(1)} + \Delta\omega_{lm}$ en donde los superindices (1) y (2) representan los tiempos previo y posterior a la actualización respectivamente. Específicamente, para las conexiones entre la unidad de salida y la unidad oculta tenemos:

$$\Delta\omega_{kl} = \eta \delta_k o_l(t), \quad (\text{B.4})$$

donde

$$\delta_k = (Q_k - o_k(t)), \quad (\text{B.5})$$

para una unidad de salida lineal, de esta forma, para las conexiones entre las unidades ocultas y las unidades de entrada:

$$\Delta\omega_{lm} = \eta \delta_l x_m, \quad (\text{B.6})$$

donde

$$\delta_l = f'_{act}(y_l) \left(\sum_{k=1}^K \omega_{kl} \delta_k \right), \quad (\text{B.7})$$

y

$$y_l = \sum_{m=1}^M \omega_{lm} x_m. \quad (\text{B.8})$$

El método descrito arriba es repetido para todos los patrones P y es comunmente conocido como el algoritmo de aprendizaje estandar o “*vanilla backpropagation*”.

Desde una perspectiva mas general, el algoritmo puede verse como un problema

de optimización que determina el conjunto de parametros ω_{kl} y ω_{lm} , que minimizan la función de error definida como:

$$SEC = \sum_{p=1}^P \sum_{k=1}^K (Q_k - o_k(t))^2. \quad (\text{B.9})$$

SEC es la suma de todas las diferencias al cuadrado entre las salidas pronosticadas por la red $o_k(t)$ y las salidas deseadas Q_k para todos los P patrones de aprendizaje.

El mínimo de la función de error SEC es determinado por medio del proceso de iteración descenso de gradiente. Este proceso es efectuado al agregar a los parámetros un valor de corrección dependiente del valor del gradiente de SEC estimado. El proceso iterativo, puede ser representado por:

$$\omega^{(2)} \leftarrow \omega^{(1)} - \eta \cdot \nabla SEC, \quad (\text{B.10})$$

donde el parámetro η se elige de forma que se asegure convergencia hacia un mínimo de la función de error.

B.2 Teoría del algoritmo de Retro-Propagación.

En esta sección se describirá el algoritmo de retropropagación para el caso de un perceptrón multi-capas. Asimismo, considerando que las funciones de activación de

las unidades ocultas y de salida son de forma sigmoide. Empezaremos por considerar la presentación de un patrón de entrada $\vec{x}$ a la red, que a su vez produce una respuesta $f(\vec{x}, \vec{w})$. Considerese tambien que la salida deseada es $\vec{Q}$.

B.2.1 Actualización de las conexiones entre las unidades ocultas y de salida.

Para conexiones entre la capa final y la capa oculta es necesario calcular

$$\frac{\partial E(\vec{\omega})}{\partial \omega_{kl}^{(2)}} = \frac{\partial E(\vec{\omega})}{\partial o_k^{(o)}} \cdot \frac{\partial o_k^{(o)}}{\partial y_k^{(o)}} \cdot \frac{\partial y_k^{(o)}}{\partial \omega_{kl}^{(2)}}, \quad (\text{B.11})$$

donde $\omega_{kl}^{(2)}$ es el valor de la conexión entre la unidad oculta l y la unidad de salida k (con super-índice o de “output”), $o_k^{(o)}$ representa el valor de activación de la unidad de salida k y $y_k^{(o)}$ representa el valor de la entrada a la unidad de salida k representada por

$$y_k^{(o)} = \sum_{l=1}^H \omega_{kl}^{(2)} o_l^{(h)}, \quad (\text{B.12})$$

donde $o_l^{(h)}$ representa el valor de activación de la unidad oculta l (con super-índice h de “hidden”).

De esta forma es necesario evaluar las tres derivadas parciales que aparecen en el lado derecho de la ecuación (B.11).

1) Evaluación de $\frac{\partial E(\vec{\omega})}{\partial o_k^{(o)}}$:

Recordando que la función de error que se está utilizando es la función de mínimos cuadrados entonces el termino $\frac{\partial E(\vec{\omega})}{\partial o_k^{(o)}}$ puede ser re-escrito como:

$$\frac{\partial E(\vec{\omega})}{\partial o_k^{(o)}} = o_k^{(o)} - Q_k, \quad (\text{B.13})$$

donde Q_k representa el valor deseado para la unidad de salida k .

2) Evaluación de $\frac{\partial o_k^{(o)}}{\partial y_k^{(o)}}$:

el valor de activación para la unidad de salida k (en el caso en que la la función de activación es de forma sigmoide) esta dado por

$$o_k^{(o)} = \frac{1}{1 + e^{-y_k^{(o)}}}, \quad (\text{B.14})$$

de forma tal que la derivada parcial $\frac{\partial o_k^{(o)}}{\partial y_k^{(o)}}$ puede ser escrita como

$$\frac{\partial o_k^{(o)}}{\partial y_k^{(o)}} = o_k^{(o)}(1 - o_k^{(o)}), \quad (\text{B.15})$$

esto es posible tomando en cuenta el hecho de que para funciones del tipo sigmoide,

$$f'(x) = f(x)(1 - f(x)).$$

3) Evaluación de $\frac{\partial y_k^{(o)}}{\partial \omega_{kl}^{(2)}}$:

recordando que la entrada a un nodo de salida es la suma ponderada de las activaciones de la capa oculta

$$y_k^{(o)} = \sum_{l=1}^L \omega_{kl}^{(2)} o_l^{(h)}, \quad (\text{B.16})$$

entonces la derivada parcial requerida es

$$\frac{\partial y_k^{(o)}}{\partial \omega_{kl}^{(2)}} = o_l^{(h)}. \quad (\text{B.17})$$

De esta forma, conjuntando los tres resultados anteriores, se obtiene la expresión completa para las derivadas parciales del error E con respecto a las conexiones entre las unidades ocultas y de salida en la red (*i.e.* ecuación B.11),

$$\frac{\partial E(\vec{\omega})}{\partial \omega_{kl}^{(2)}} = \frac{\partial E(\vec{\omega})}{\partial o_k^{(o)}} \cdot \frac{\partial o_k^{(o)}}{\partial y_k^{(o)}} \cdot \frac{\partial y_k^{(o)}}{\partial \omega_{kl}^{(2)}}, \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial E(\vec{\omega})}{\partial \omega_{kl}^{(2)}} = (o_k^{(o)} - Q_k) \cdot o_k^{(o)} (1 - o_k^{(o)}) \cdot o_l^{(h)}. \quad (\text{B.19})$$

B.2.2 Actualización de las conexiones entre las unidades de entrada y ocultas.

A continuación se calcularán las derivadas parciales del error E con respecto a las conexiones entre las unidades de entrada y ocultas de la red. Esto se efectuará de forma similar a la sección anterior entre las unidades ocultas y las unidades de salida. La diferencia principal estribará, sin embargo, en el problema de determinar la derivada parcial $\frac{\partial E(\vec{\omega})}{\partial o_l^{(h)}}$, ya que no se tiene un valor deseado para las unidades de la capa intermedia $o_l^{(h)}$, por lo que en su lugar, se retro-propagará ésta derivada parcial de su evaluación para la capa de unidades de salida, utilizando la regla de retro-propagación

$$\frac{\partial E(\vec{\omega})}{\partial o_l^{(h)}} = \sum_{k=1}^K \omega_{kl}^{(2)} \frac{\partial E(\vec{\omega})}{\partial o_k^{(o)}}, \quad (\text{B.20})$$

en donde K es el numero de unidades de salida. Consideremos la activación del nodo en la unidad oculta l dada por

$$y_l^{(h)} = \sum_{m=1}^M \omega_{lm}^{(1)} x_m, \quad (\text{B.21})$$

procediendo de igual forma que en la sección anterior obtenemos:

$$\frac{\partial E(\vec{\omega})}{\partial \omega_{lm}^{(1)}} = \frac{\partial E(\vec{\omega})}{\partial o_l^{(h)}} \cdot \frac{\partial o_l^{(h)}}{\partial y_l^{(h)}} \cdot \frac{\partial y_l^{(h)}}{\partial \omega_{lm}^{(1)}}, \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\partial E(\vec{\omega})}{\partial \omega_{lm}^{(1)}} = o_l^{(h)}(1 - o_l^{(h)}) \cdot x_m \sum_{k=1}^K \omega_{kl}^{(2)} \frac{\partial E(\vec{\omega})}{\partial o_k^{(o)}}, \quad (\text{B.23})$$

en donde x_m representa la componente del vector $\vec{x}$ del patrón entrada en la unidad m .

B.2.3 Teoría de descenso por gradiente.

En la sección previa, se mostró un método para encontrar las derivadas parciales del error residual con respecto a cada una de las conexiones entre las tres capas de unidades en la red neuronal. Podemos ahora utilizar este gradiente para minimizar la función de error. Una de las formas mas simples de efectuar esto, específicamente para las conexiones entre la capa de salida y la capa intermedia, es actualizar de acuerdo con la siguiente ecuación

$$\omega_{kl}^{(t+1)} = \omega_{kl}^{(t)} + \Delta_{kl}^{(t)}, \quad (\text{B.24})$$

en donde

$$\Delta_{kl}^{(t)} = -\eta \frac{\partial E(\vec{\omega})}{\partial \omega_{kl}^{(t)}}, \quad (\text{B.25})$$

donde $\omega_{kl}^{(t)}$ es el valor de la conexión al tiempo t y η es un valor que puede caracterizarse como la *razón de aprendizaje* o *tamaño de paso*. De igual forma, para la actualización entre las conexiones entre la capa de entrada y la capa intermedia

$$\omega_{lm}^{(t+1)} = \omega_{lm}^{(t)} + \Delta_{lm}^{(t)}, \quad (\text{B.26})$$

en donde

$$\Delta_{lm}^{(t)} = -\eta \frac{\partial E(\vec{\omega})}{\partial \omega_{lm}^{(t)}}. \quad (\text{B.27})$$

Uno de los problemas que se encuentra con la regla de arriba, es el hecho de que puede requerir del orden de muchos miles de iteraciones de aprendizaje para alcanzar un mínimo en la función de error, aún, en problemas sencillos. Existe sin embargo, una forma de acelerar el aprendizaje y este es por medio de un factor de *momentum* α , esto es, se puede agregar momentum a la regla de aprendizaje, por medio de la

siguiente regla de actualización

$$\omega_{\psi\phi}^{(t+1)} = \omega_{\psi\phi}^{(t)} + \Delta_{\psi\phi}^{(t)}, \quad (\text{B.28})$$

en donde

$$\Delta_{\psi\phi}^{(t)} = \alpha \Delta_{\psi\phi}^{(t-1)} - \eta \frac{\partial E(\vec{\omega})}{\partial \omega_{\psi\phi}^{(t)}}, \quad (\text{B.29})$$

y en donde el subíndice $\psi\phi$ representa kl ó lm , según sea el caso. De ésta forma, en un paso de actualización para la iteración vigente, se incluye una fracción del paso de actualización de un paso previo así como del actual gradiente negativo. Si el valor del gradiente es positivo ó negativo, entonces la razón de cambio ganará momento, incrementando la velocidad a la cual la función de error es minimizada.

B.2.4 Valores para α y η .

Debe de entenderse que no existe una base teórica fuerte que permita determinar cuales son los valores de α y η para un problema dado. Esto es, que los valores de α y η dependerán de la complejidad de la superficie de error sobre la cual se desea encontrar el mínimo y la cual es dependiente del problema. Sin embargo, se ha encontrado que utilizar α en el rango $[1.0, 10.0]$ y η en el rango $[0.80, 0.99]$, pueden

funcionar satisfactoriamente. Es importante señalar que es recomendable un valor de α pequeño, del orden de 0.01 al iniciar la fase de entrenamiento. De esta forma se evita una dinámica que evolucione hacia una posición de estancamiento en un mínimo local.

Una desventaja del presente algoritmo, es que su topología debe ser establecida completamente al inicio.

B.3 Algoritmo de Correlación en Cascada (CASCOR) en una Red Neuronal Artificial.

En esta tesis, utilizaremos el algoritmo de correlación en cascada (CASCOR) inicialmente desarrollado por Fahlman & Lebiere (1990). Este algoritmo, en contraste con el caso de topología estática de red neuronal mostrado en la sección anterior, permite que la arquitectura de la red cambie durante el aprendizaje. La característica principal de este algoritmo, es la de modificar su topología de acuerdo a criterios de minimización del error, mas específicamenete, el algoritmo construye la topología de la red conforme aprende, agregando nuevas unidades ocultas conforme es necesario. Esta técnica generativa proporciona un enfoque mas fundamental a la construcción de la red, de lo que es típico en investigación conexionista, en lugar de simplemente ajustar los pesos entre las unidades de una red con topología fija, el algoritmo CASCOR inicia con una red mínima de unidades de entrada (formando la capa de entrada) y unidades

de salida (formando la capa de salida). Durante el aprendizaje, pueden ser agregadas unidades ocultas una a la vez, instalando cada una en capas separadas. Si la red no está reduciendo el error rápidamente, una nueva unidad candidato (cuya activación de salida va más de acuerdo con todas las salidas deseadas) será elegida como la nueva capa oculta (capa oculta que consta de una sola unidad). De esta forma el algoritmo CASCOR se adapta, modificando no solo el espacio de las conexiones, sino también el espacio de la topología de la red.

El aprendizaje en el algoritmo CASCOR procede por medio de la alternancia sucesiva de dos fases distintas. La primera de estas, llamada la **fase de entrenamiento de salida**, consiste en el ajuste de las conexiones seleccionadas en la red existente. Durante esta fase de entrenamiento de salida, solo las conexiones que van a las unidades de salida, son ajustadas (de aquí, el nombre de fase de entrenamiento de salida). Todas las demás conexiones son congeladas, en el sentido de que no son ajustadas durante esta fase. La segunda fase de aprendizaje, llamada **fase de entrenamiento de entrada**, está relacionada con el entrenamiento e inclusión de las nuevas unidades ocultas en la red. Durante esta fase, las conexiones que van a un conjunto de unidades “candidatas a unidades ocultas” y que están separadas de la topología de la red, son ajustadas (de aquí, el nombre de fase de entrenamiento de entrada). Solamente las conexiones que van hacia estas candidatas a unidades ocultas, son actualizadas durante esta fase de entrenamiento de entrada. Todas las demás conexiones en la red neuronal, son congeledas. Como se explicará mas adelante. Cuando una de estas

unidades candidatas alcanza una medida optima de desempeño, ésta es seleccionada e instalada en la red existente. La estructura de una red neuronal CASCOR simple e hipotética se muestra en la Figura 25, para la fase de entrenamiento de salida y la fase de entrenamiento de entrada.

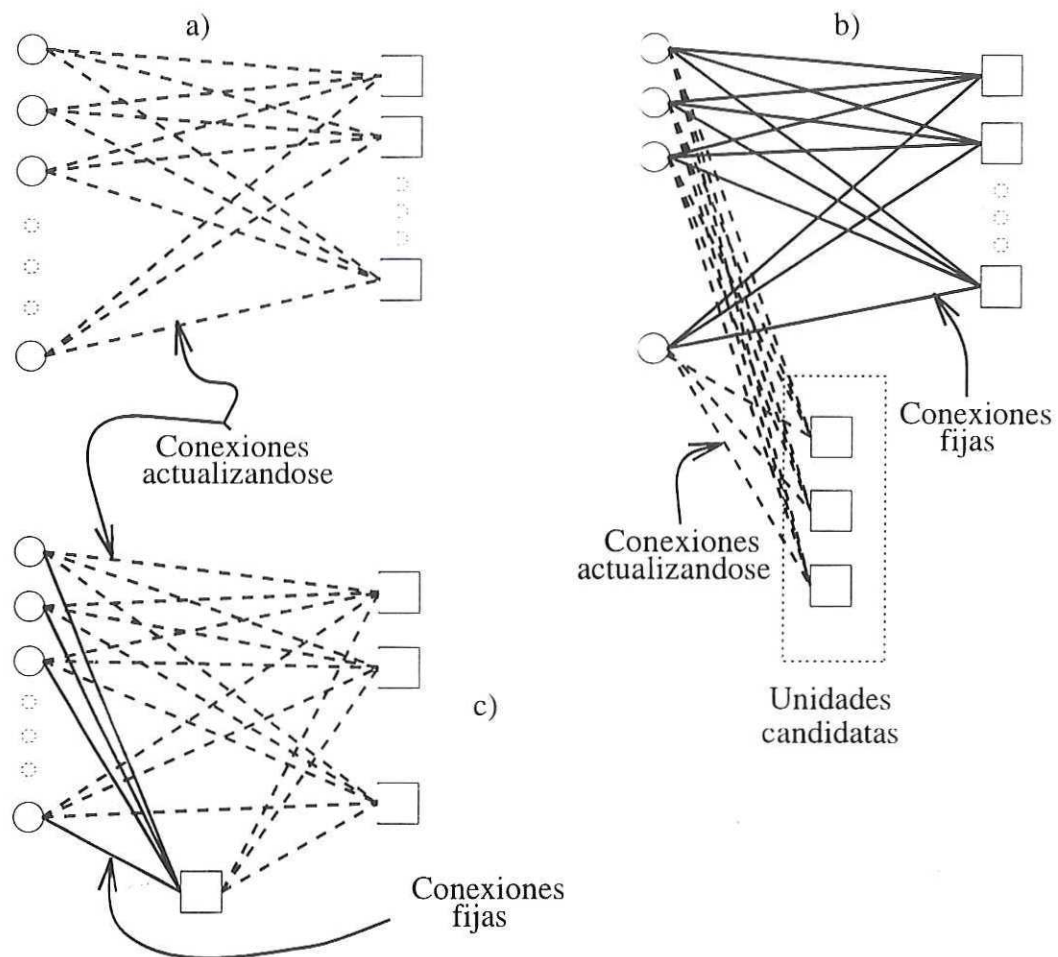


Figura 25. Representación gráfica de: a) Fase de entrenamiento de entrada y b) Fase de entrenamiento de salida. c) Fase de entrenamiento de entrada e inclusión de una unidad candidata como parte de la topología de la red.

En la Figura 25, se muestran la evolución topológica de una red neuronal, del tipo CASCOR, como función de las fases de entrenamiento de entrada y salida. Las conexiones son actualizadas, utilizando el método de rápida retro-propagación ¹ (Fahlman, 1988) . Todo el aprendizaje, ocurrirá en modo “oculto”, que significa que cualquier modificación del valor de la conexión, ocurre después de que todos los pares de patrones entrada/salida han sido presentados. Tal presentación constituye una época de aprendizaje. El aprendizaje continúa hasta que las respuestas en la salida son lo suficientemente pequeñas con respecto a la salida deseada (respuestas constantes) para todos los pares de patrones de entrada y salida. Cuando este punto en el aprendizaje de la red es alcanzado, entonces la red se declara triunfal y suspende el aprendizaje.

B.4 Fase de Entrenamiento de Salida.

Durante la fase de entrenamiento de salida, los valores de las conexiones que se dirigen a las unidades de salida, son modificadas de forma que se minimice la suma de los errores cuadrados (SEC):

¹Este método de rápida retro-propagación, se basa en el método de minimización de Newton y hace uso de las derivadas actual y previa, de alguna función de costo ó de potencial a ser minimizada, de forma que una aproximación de la curvatura del potencial pueda ser construida, este método, además representa una variante del algoritmo de Retro-Propagación explicado en la sección B.2.

$$SEC = \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P (o_k^p - Q_k^p)^2, \quad (\text{B.30})$$

donde k indicia las unidades de salida, p indicia los pares de patrones de entrada-salida, o es la activación actual de una unidad de salida y Q es la activación deseada correspondiente a un patrón de salida. Si por alguna razón SEC cesa de cambiar por más de una cierta cantidad, durante un cierto número de épocas, ó por más de un número máximo especificado de épocas, el algoritmo cambiará a la fase de aprendizaje de entrada.

B.5 Fase de Entrenamiento de Entrada.

Durante la fase de aprendizaje de entrada, los valores de las conexiones que se dirigen hacia las unidades de salida se congelan. Un cierto número de unidades ocultas candidatas son conectadas con conexiones escogidas aleatoriamente provenientes de todas las unidades de entrada y de las unidades ocultas existentes. Los valores de las conexiones que van hacia cada una de las unidades candidatas, son modificadas, de forma que se maximice el valor absoluto de la correlación modificada (C) entre la activación de esa unidad y el error residual de las unidades de salida, para todos los pares de patrones:

$$C = \frac{\sum_{k=1}^K |\sum_{p=1}^P (y^{(h,p)} - \langle y^{(h)} \rangle) (e_k^{(p)} - \langle e_k \rangle)|}{\sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P (e_k^{(p)} - \langle e_k \rangle)^2}, \quad (\text{B.31})$$

donde $y^{(h,p)}$ es la activación de la unidad oculta candidata para el patrón p , $\langle y^{(h)} \rangle$ representa la activación media de la unidad candidata oculta, durante la presentación de todos los patrones, $e_k^{(p)}$ es el error residual en la salida k para el patrón p , y $\langle e_k \rangle$ es el error residual medio en la salida k para todos los patrones.

La fase de entrenamiento de entrada continúa hasta que C ya no cambia, o hasta que un número específico de épocas ha sido alcanzado. En este punto, la unidad candidata con el maximo valor de C es seleccionada, mientras que todas las demás unidades son descartadas. Los valores de las conexiones que provienen de las unidades de entrada hacia la nueva unidad oculta se fijan permanentemente y la nueva unidad oculta es conectada a todos las unidades de salida. Entonces, el algoritmo retorna a la fase de entrenamiento de salida pero esta vez, considerando la potencia de la nueva unidad oculta recién aderida, ésta inclusión será particularmente poderosa en detectar el error residual actual en la red.

APÉNDICE C

APRENDIZAJE DE PATRONES CON CONTRASTES BIEN DEFINIDOS

Con el objetivo de clasificar el desempeño de la red neuronal artificial en su modalidad de arquitectura CASCOR, se entrenarán tres redes diferentes con patrones correspondientes a tres mapeos sencillos de funciones conocidas (función triangular, cuadrada y senoidal). Para cada función se generaron 1500 pares de patrones (entrada/salida). Se utilizó el simulador neuronal “Stuttgart Neural Network Simulator” (SNNS , 1994) en el que se definió una red neuronal del tipo CASCOR, con 24 unidades de entrada y 24 unidades de salida y los siguientes parámetros:

Parametros Globales:

Max. output unit error: 0.010

Learning function: Quickprop

Print covariance and error: on

Prune new hidden unit: off

Minimize: SBC

Parametros de las unidades Candidatas:

Min. covariance change: 0.040

Candidate patience: 25

Max. no. of covariance updates: 200

Max. no. of candidate units: 8

Activation function: Act_Logistic

Parametros de las unidades de Salida:

Error change: 0.010

Output patience: 50

Max. no. of epochs: 750

En la Figura 26 se muestra la topología de la red utilizada para asimilar el mapeo deseado:

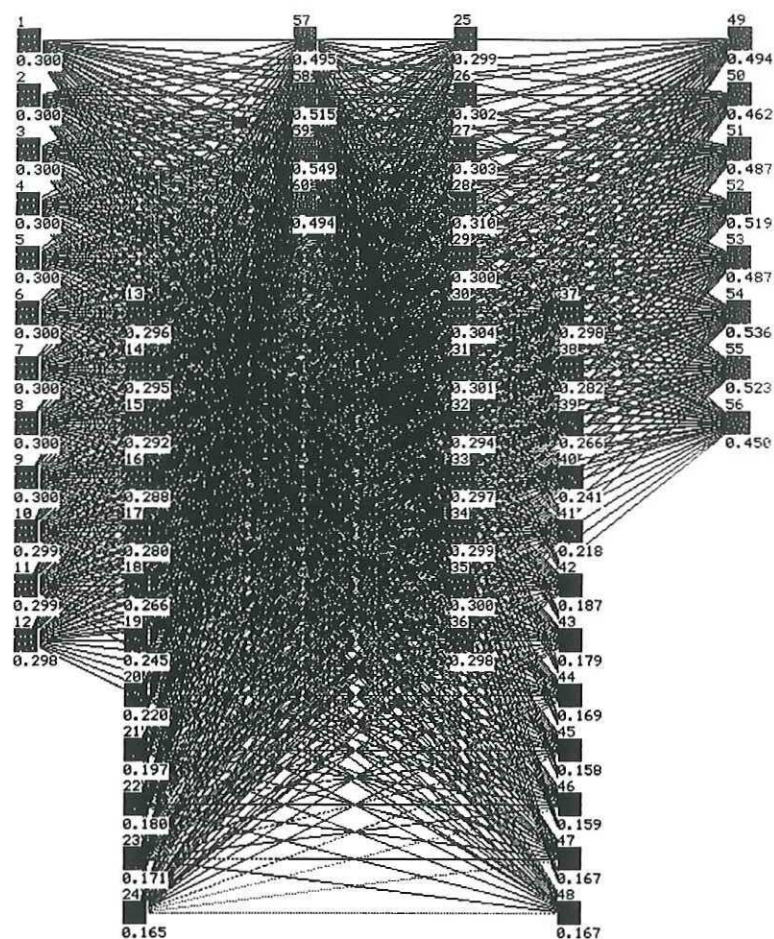


Figura 26. Representación gráfica de una red neuronal del tipo CASCOR. en este caso la red ha modificado su topología para incluir 4 unidades ocultas. cada una de las cuales representa una capa oculta de una sola unidad.

Se pueden apreciar 24 unidades de entrada (numeradas del 1 al 24), cuatro unidades ocultas (numeradas del 57 al 60), 24 unidades de salida (numeradas del 25 al 48) y 8 unidades candidatas (numeradas del 49 al 56). de igual forma se

pueden apreciar las activaciones de cada una de las unidades para un momento dado en la dinámica de la red. En la Figura 27, se muestra la evolución de la suma de errores cuadrados (SEC), para los 1500 patrones y las 24 unidades de salida:

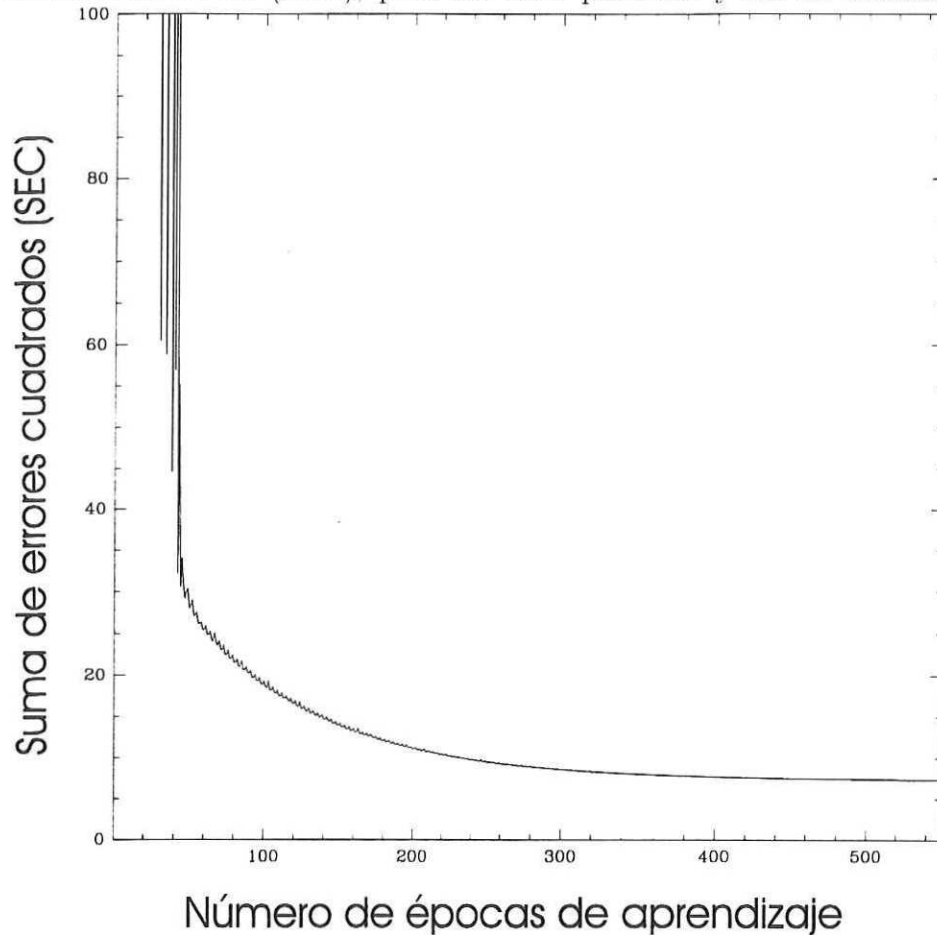


Figura 27. Evolución del error SEC' , conforme se avanza en el número de épocas de aprendizaje (caso de una señal triangular).

Se puede apreciar que los errores disminuyen conforme se avanza en el número de épocas de aprendizaje. En este caso uno de los patrones de entrada está definido por

24 valores de una señal triangular como la que se muestra en la figura 28a. El patrón deseado esta formado por 24 valores de la misma señal de la figura 28a pero desfasado π radianes, la gráfica de la señal requerida se muestra en la figura 28b. Una vez que la red ha disminuido el error hasta un nivel aceptable, entonces la red se declara triunfal y suspende el entrenamiento.

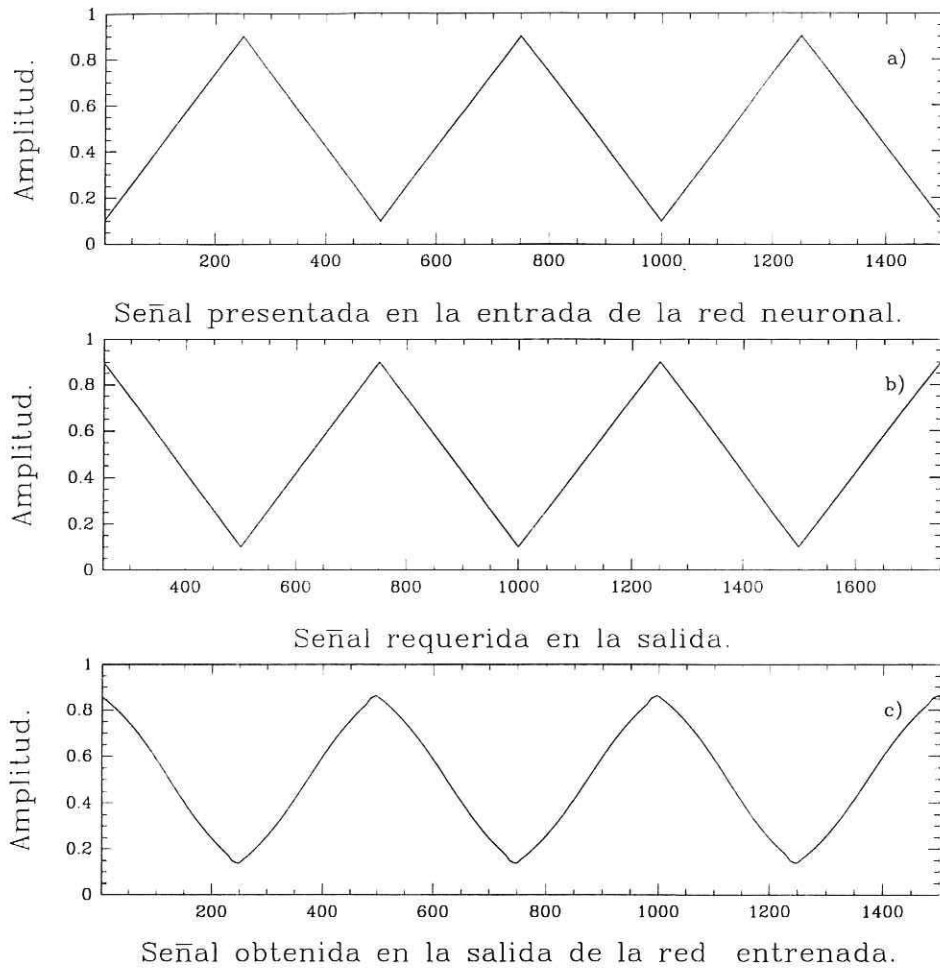


Figura 28. a) Valor del patrón de entrada en la unidad 1 (para los 1500 patrones); b) Valor del patrón de salida en la unidad 25 (para los 1500 patrones); c) Valor de activación de la unidad 25 una vez entrenada la red (para los 1500 patrones).

Para este caso en particular la red neuronal requirió de una sola capa interna para asimilar el mapeo deseado, reduciendo el error a un nivel aceptable. La Figura 28c muestra la señal obtenida (activación) para la unidad de salida 25 (una vez que la red ha sido entrenada). Como resultado, se puede decir que la red efectivamente asimiló

el mapeo deseado, para lo cual requirió de 550 épocas de aprendizaje con las que se obtuvo una suma de errores cuadrados de 7.27.

Para el caso del aprendizaje de una señal cuadrada, la Figura 29 muestra la evolución de la suma de errores cuadrados (SEC), para los 1500 patrones y las 24 unidades de salida:

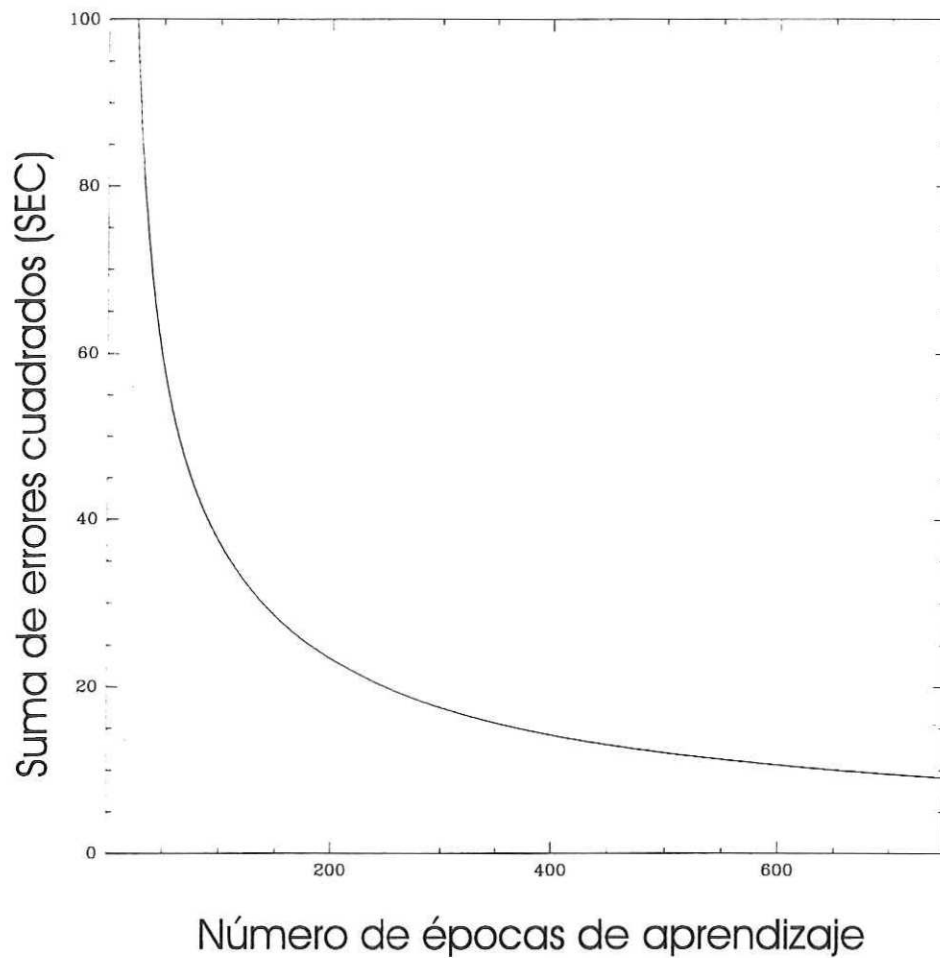


Figura 29. Evolución del error *SEC* conforme se avanza en el número de épocas de aprendizaje (caso de una señal cuadrada).

Se puede apreciar que los errores disminuyen conforme se avanza en el número de épocas de aprendizaje. En este caso uno de los patrones de entrada está definido por 24 valores de una señal cuadrada como la que se muestra en la Figura 30a. El patrón deseado esta formado por 24 valores de la misma señal de la Figura 30a pero desfasado π radianes. La gráfica de la señal requerida se muestra en la Figura 30b.

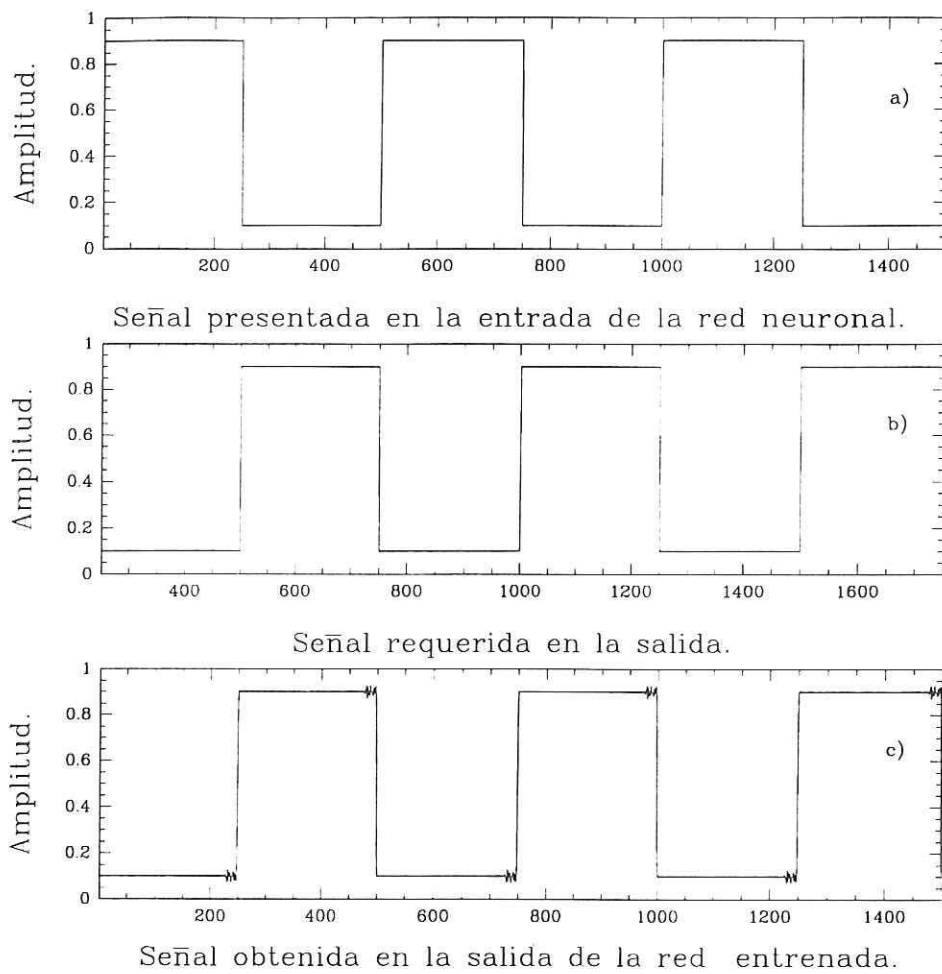


Figura 30. a) Valor del patrón de entrada en la unidad 1 (para los 1500 patrones); b) Valor del patrón de salida en la unidad 25 (para los 1500 patrones); c) Valor de activación de la unidad 25 una vez entrenada la red (para los 1500 patrones).

Para este caso en particular la red neuronal requirió de una sola capa interna para asimilar el mapeo deseado, reduciendo el error a un nivel aceptable. La Figura 30c muestra la señal obtenida (activación) para la unidad de salida 25 (una vez que

la red ha sido entrenada). Como resultado, se puede decir que la red efectivamente asimiló el mapeo deseado, para lo cual requirió de 751 épocas de aprendizaje con las que se obtuvo una suma de errores cuadrados de 5.95. Para el caso del aprendizaje de una señal senoidal, la Figura 31 muestra la evolución de la suma de errores cuadrados (SEC), para los 1500 patrones y las 24 unidades de salida:

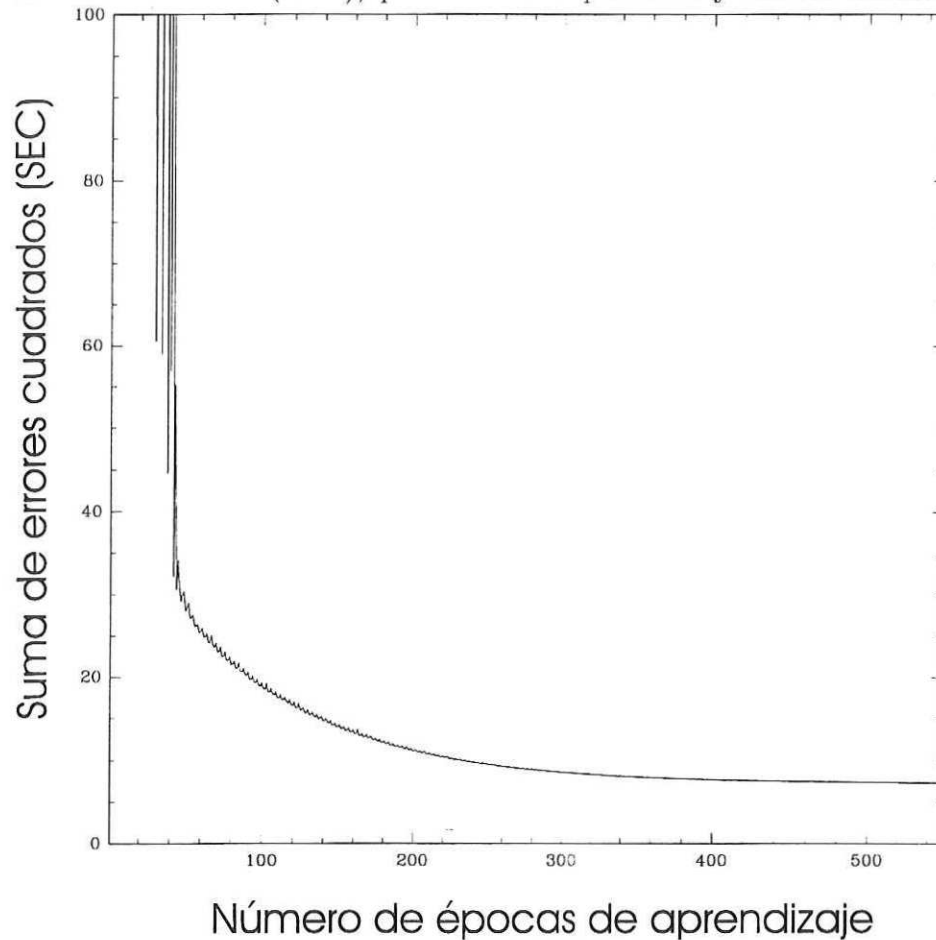
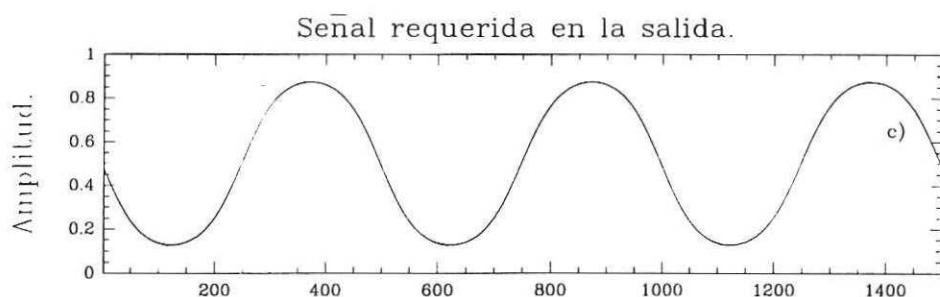
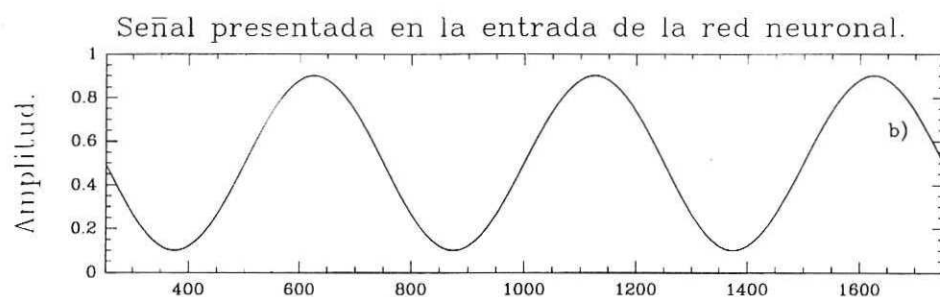
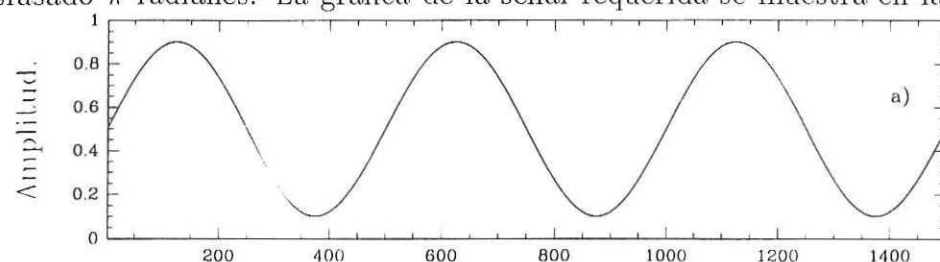


Figura 31. Evolución del error *SEC* conforme se avanza en el número de épocas de aprendizaje (caso de una señal senoidal).

Se puede apreciar que los errores disminuyen conforme se avanza en el número de

épocas de aprendizaje. En este caso uno de los patrones de entrada está definido por 24 valores de una señal senoidal como la que se muestra en la Figura 32a. El patrón deseado esta formado por 24 valores de la misma señal de la Figura 32a pero desfasado π radianes. La gráfica de la señal requerida se muestra en la Figura 32b.



Señal obtenida en la salida de la red entrenada.

Figura 32. a) Valor del patrón de entrada en la unidad 1 (para los 1500 patrones); b) Valor del patrón de salida en la unidad 25 (para los 1500 patrones); c) Valor de activación de la unidad 25 una vez entrenada la red (para los 1500 patrones).

Para este caso en particular la red neuronal requirió de una sola capa interna para asimilar el mapeo deseado, reduciendo el error a un nivel aceptable. La Figura 32c muestra la señal obtenida (activación) para la unidad de salida 25 (una vez que la red ha sido entrenada). Como resultado, se puede decir que la red efectivamente asimiló el mapeo deseado, para lo cual requirió de 551 épocas de aprendizaje con las que se obtuvo una suma de errores cuadrados de 11.59.