

**Centro de Investigación Científica y de
Educación Superior de Ensenada**



**IDENTIFICACION Y CONTROL DE SISTEMAS
CAOTICOS**

**TESIS
MAESTRIA EN CIENCIAS**

JUAN GONZALO BARAJAS RAMIREZ

ENSENADA, BAJA CALIFORNIA, MEXICO.

OCTUBRE DE 1997.

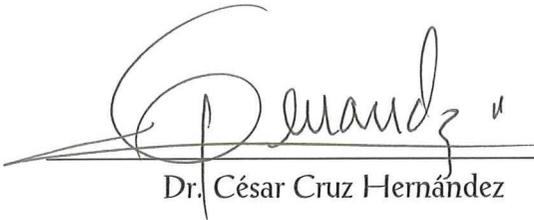
TESIS DEFENDIDA POR
JUAN GONZALO BARAJAS RAMÍREZ

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITE



Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Director del Comité



Dr. César Cruz Hernández

Miembro del Comité



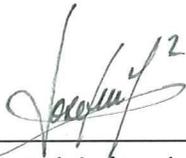
Dr. Francisco Javier Mendieta Jiménez

Miembro del Comité



Dr. Héctor Manuel Escamilla Taylor

Miembro del Comité



Dr. José Luis Medina Monroy

*Jefe del Departamento de Electrónica y
Telecomunicaciones*



Dr. Federico Graef Ziehl

Director de Estudios de Posgrado

24 de octubre de 1997

CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA
Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA



DIVISIÓN DE FÍSICA APLICADA

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA Y
TELECOMUNICACIONES

IDENTIFICACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS
CAÓTICOS

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener
el grado de MAESTRO EN CIENCIAS presenta:

JUAN GONZALO BARAJAS RAMÍREZ

Ensenada, Baja California, México. Octubre de 1997.

RESUMEN de la Tesis de **JUAN GONZALO BARAJAS RAMÍREZ**, presentada como requisito parcial, para la obtención del grado de **MAESTRO EN CIENCIAS EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES CON ESPECIALIDAD EN INSTRUMENTACIÓN Y CONTROL**. Ensenada, Baja California, México. Octubre de 1997.

IDENTIFICACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS

Resumen aprobado por:



Dr. Joaquín Álvarez Gallegos
Director de Tesis

Se presentó un método de análisis de series de tiempo caóticas que permite, mediante vectores d -dimensionales formados por la serie retardada en el tiempo, obtener una representación del atractor del sistema desconocido que dió origen a la serie observada. Se desarrollaron las herramientas necesarias para determinar los parámetros de reconstrucción y se mostró que éstas se pueden utilizar para determinar la naturaleza del sistema original. Se analizaron de esta forma series de tiempo obtenidas de sistemas simulados numéricamente y de datos experimentales.

Se presentó también una metodología para obtener un modelo local del sistema desconocido a partir de la sección de Poincaré del atractor en el espacio de estados reconstruido. Estos modelos locales se obtienen como ajustes, en sentido de mínimos cuadrados, de mapeos lineales a la dinámica del sistema en la vecindad de una de las muchas órbitas periódicas inestables contenidas en el atractor reconstruido. Se presentan los algoritmos necesarios para determinar la localización de las órbitas periódicas inestables contenidas en el atractor y para obtener el modelo de la dinámica alrededor de este punto.

Por último, se presentó el método de control OGY (Ott *et al.*, 1990) con el cual se estabiliza el comportamiento del sistema aplicando pequeños cambios paramétricos, de modo que la misma naturaleza caótica del sistema auxilia en la estabilización del comportamiento del mismo. Se implementó este método de control para el caso de no conocer la dinámica del sistema, así mismo se presentaron las extensiones del método necesarias para el caso particular de sistemas reconstruidos mediante la técnica de coordenadas retardadas.

Palabras clave: Caos, series de tiempo caóticas, reconstrucción del espacio de estados, modelado local, control, estabilización de órbitas periódicas (control OGY).

ABSTRACT of the Thesis of **JUAN GONZALO BARAJAS RAMÍREZ**, presented as partial requirement to obtain the **MASTERS IN SCIENCES** grade in **ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS WITH THE SPECIALTY OF INSTRUMENTATION AND CONTROL**. Ensenada, Baja California, México. October 1997.

IDENTIFICATION AND CONTROL OF CHAOTIC SYSTEMS

ABSTRACT

A method for the analysis of chaotic time series was presented, in which a representation of the unknown system's attractor is obtained using d -dimensional vector composed of time delays of the original time series. The necessary tools to determine the reconstruction parameters were implemented and it was shown that this tools can be used to determine the nature of the system that originated the observed signals. Time series from numerically simulated systems and from experimental data were analyzed this way.

We also present a methodology to obtain a local model of the unknown system from a surface section representation of the reconstructed phase space. This model is obtained as local linear map adjusted to the system dynamics in phase space around one of the many unstable periodic orbits contained within the reconstructed attractor. The necessary algorithms to identify the location of this unstable periodic orbits and then to obtain the local map around this point, are also presented.

Finally, we present the OGY control method (Ott *et al.*, 1990), in which the system's observed behavior is stabilized using small parametric perturbations, so the chaotic nature of the system help to achieve an adequated control. This method is also implemented on systems where the equations are not available, and the necessary extensions for the case of time delay reconstruction are also considered.

Keywords: Chaos, chaotic time series, state space reconstruction, local modeling, control, stabilization of periodic orbits (OGY control method).

DEDICATORIA

A mi familia, porque sin ellos no estaría aquí.

A mi mamá, porque sin ella no sería lo que soy.

A mi hermana, por su orientación.

A mi novia, por caminar conmigo.

A mi amigos y compañeros, por allanar mi camino.

A Dios, porque sin él no tendría nada de lo anterior.

AGRADECIMIENTOS

A mi director de tesis Joaquín Alvarez, por su invaluable ayuda técnica, moral y económica para lograr concluir este trabajo de tesis.

A los miembros del comité de tesis: César Cruz, Javier Mendieta y Héctor Escamilla, por su comentarios y correcciones sobre el trabajo de tesis y el presente documento.

A todos mis profesores, de quienes me llevo el más grato recuerdo. En particular quiero agradecer al profesor Moises Castro por su apoyo durante mis primeros y más difíciles meses en CICESE.

A todos los compañeros y amigos, por su alegría y orientación.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada,
mi casa.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

CONTENIDO

	Página.
I. Introducción.	1
I.1 ¿Qué es el caos?.	1
I.2 Motivación.	2
I.3 Objetivos del trabajo de tesis.	4
I.4 Metodología propuesta.	4
I.5 Organización del trabajo de tesis.	5
II. Reconstrucción del espacio de estados.	7
II.1 Introducción.	7
II.2 Coordenadas retardadas en el tiempo.	7
II.3 Obtención del tiempo de retardo.	10
II.3.1 Promedio de información mutua.	10
II.3.1.1 Implementación del promedio de información mutua.	11
II.3.2 Resultados del promedio de información mutua.	12
II.3.2.1 Consideraciones sobre el tiempo de cálculo.	12
II.3.2.2 Efecto del sobremuestreo.	12
II.3.2.3 Comportamiento del $PIM(T)$ para una serie de tiempo estocástica.	14
II.3.2.4 Comprobación de los resultados del $PIM(T)$.	15
II.4 Obtención de la dimensión de reconstrucción.	16
II.4.1 Promedio de falsos vecinos más cercanos.	18
II.4.1.1 Implementación del promedio de falsos vecinos más cercanos.	20
II.4.2 Resultados del promedio de falsos vecinos más cercanos.	21
II.4.2.1 Consideraciones acerca de los criterios.	21
II.4.2.2 Comportamiento del $PFVMC(d)$ para una serie de tiempo estocástica.	22
II.5 Resultados de la reconstrucción del espacio de estados.	23
II.5.1 Modelo de un Robot subactuado.	23
II.5.2 Robot subactuado implementado físicamente (“pendubot”)	26
II.5.3 Lazo de control integral para una planta de segundo orden con tiempo muerto.	27
II.5.4 Modelo del circuito de Chua.	31
II.5.5 Modelo de Lorenz.	33
II.5.6 Circuito electrónico de Lorenz.	35
II.5.7 Sistema Hénon-continuo.	37
II.6 Observaciones.	39

CONTENIDO (Continuación)

	Página.
III. Modelado de la dinámica reconstruida.	40
III.1 Introducción.	41
III.2 Mapeo de Poincaré para sistemas reconstruidos.	41
III.2.1 Definición del mapeo de Poincaré.	41
III.2.2 Conjuntos límite del mapeo de Poincaré.	42
III.2.3 Obtención del mapeo de Poincaré.	43
III.2.3.1 Implementación del mapeo de Poincaré.	44
III.2.4 Resultados del mapeo de Poincaré.	44
III.2.4.1 Robot subactuado.	44
III.2.4.2 Planta con tiempo muerto.	45
III.2.4.3 Modelo del circuito de Chua.	46
III.2.4.4 Modelo de Lorenz.	47
III.2.4.5 Sistema Hénon-continuo.	47
III.3 Localización de órbitas periódicas.	49
III.3.1 Análisis de puntos de recurrencia.	49
III.3.1.1 Implementación del análisis de puntos de recurrencia.	51
III.4. Identificación de la dinámica local.	51
III.4.1 Linealización de Eckmann-Ruelle.	51
III.4.2. Problemas para estimar la dinámica.	52
III.4.2.1 Asignación del tamaño de la vecindad r .	52
III.4.2.2 Mínimos cuadrados mal condicionados.	53
III.5 Obtención del modelo local.	55
III.5.1 Algoritmo para la obtención del modelo local.	56
III.6. Resultados del modelado local.	56
III.6.1 Sistema de Hénon.	56
III.6.2 Modelo de Lorenz.	59
III.6.3 Sistema Hénon-continuo.	63
III.7 Observaciones.	67
IV. Control de órbitas periódicas.	68
IV.1 Introducción.	68
IV.2 El método de control OGY.	69
IV.2.1 Características del método de control OGY.	69
IV.2.2 Descripción del método de control.	70
IV.2.2.1 Ley de control.	72
IV.2.2.2 Ley de control por asignación de polos.	74
IV.3 Implementación del control OGY con las ecuaciones del sistema.	74

CONTENIDO (Continuación)

	Página.
IV.4 Implementación del control OGY sin las ecuaciones del sistema.	76
IV.4.1 Identificación del efecto de un cambio paramétrico en la dinámica local.	77
IV.4.2 Implementación a partir de los puntos del mapeo de Poincaré.	78
IV.4.3 Implementación a partir de una serie de mediciones.	79
IV.4.3.1 Sistema de Lorenz.	79
IV.4.3.2 Sistema Hénon-continuo.	82
IV.5 El método de control OGY para sistemas reconstruidos con coordenadas retardadas.	84
IV.5.1 Descripción del problema.	84
IV.5.2 Descripción del método de control propuesto.	85
IV.5.2.1 Ley de control por asignación de polos.	86
IV.5.2.2 Leyes de control propuestas por Dressler y Nitsche.	87
IV.5.3 Implementación del algoritmo de control OGY para el caso de coordenadas retardadas.	88
IV.5.3.1 Identificación de los vectores B_j (efecto de cambios paramétricos pasados).	88
IV.5.3.2 Sistema de Lorenz.	89
IV.5.3.3 Sistema Hénon-continuo.	90
IV.6 Desempeño del control.	91
IV.7 Observaciones.	94
V. Discusión y conclusiones.	96
V.1 Discusión de resultados.	96
V.2 Conclusiones.	99
V.3 Recomendaciones.	100
LITERATURA CITADA.	101

LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
1.	<i>P. I. M.</i> para diferentes valores de muestras y clases del sistema de Lorenz.	13
2.	<i>P. I. M.</i> para el robot subactuado, en el que se presenta el efecto del sobremuestreo.	14
3.	<i>P. I. M.</i> para el robot subactuado, en el que se ha resuelto el problema de sobremuestreo.	15
4.	<i>P. I. M.</i> para una serie de números pseudo-aleatorios.	16
5.	<i>P. I. M.</i> para los tres estados del sistema de Lorenz.	17
6.	<i>P. F. V. M. C.</i> de una serie de tiempo del sistema de Lorenz, utilizando diferentes valores para los criterios de decisión.	21
7.	<i>P. F. V. M. C.</i> para una serie de números pseudo-aleatorios.	23
8.	(a) <i>P. I. M.</i> y (b) <i>P. F. V. M. C.</i> para el Robot subactuado, a partir de una serie de mediciones del estado $q_1(t)$ tomadas cada 0.05 segundos.	25
9.	(a) Atractor del robot subactuado obtenido en el espacio de estados original. (b) Atractor reconstruido a partir de la medición de $q_1(t)$.	25
10.	(a) <i>P. I. M.</i> y (b) <i>P. F. V. M. C.</i> para el pendubot, utilizando mediciones experimentales de la posición angular $q(t)$. Se toma una muestra para el cálculo por cada diez, haciendo el muestreo efectivo igual a 0.04 seg.	26
11.	Atractores reconstruidos a partir de las series de tiempo de la posición articular $q(t)$ del pendubot.	28
12.	Diagrama de bloques del sistema planta con tiempo muerto.	29
13.	(a) <i>P. I. M.</i> y (b) <i>P. F. V. M. C.</i> para el sistema planta con tiempo muerto, a partir del estado $x_3(t)$.	30

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura		Página
14.	(a) Atractor del sistema planta con tiempo muerto en el espacio de estados original. (b) Atractor reconstruido a partir de las mediciones de $x_3(t)$.	30
15.	Diagrama del circuito de Chua.	31
16.	(a) <i>P. I. M.</i> y (b) <i>P. F. V. M. C.</i> del circuito de Chua, calculados a partir de una serie de mediciones del $x_3(t)$ cada 0.05 seg.	32
17.	(a) Atractor caótico característico del circuito de Chua. (b) Atractor reconstruido a partir de x_3 .	33
18.	(a) <i>P. I. M.</i> y (b) <i>P. F. V. M. C.</i> para el modelo de Lorenz, calculados a partir de $x(t)$ cada 0.01 segundos.	34
19.	(a) Atractor caótico característico del modelo de Lorenz. (b) Atractor reconstruido a partir del estado $x(t)$.	35
20.	(a) <i>P. I. M.</i> y (b) <i>P. F. V. M. C.</i> para el circuito de Lorenz, a partir de $x(t)$, con una frecuencia de muestreo de 100Hz.	36
21.	(a) Atractor del circuito de Lorenz en el espacio de estados original. (b) Atractor reconstruido a partir del estado x .	37
22.	(a) <i>P. I. M.</i> y (b) <i>P. F. V. M. C.</i> para el sistema Hénon-continuo.	38
23.	Atractor reconstruido del sistema Hénon-continuo.	38
24.	Mapeo de Poincaré unilateral del robot subactuado.	45
25.	Mapeo de Poincaré unilateral de la planta con tiempo muerto.	46
26.	Mapeo de Poincaré unilateral para el sistema del circuito de Chua.	46
27.	Mapeo de Poincaré unilateral del modelo de Lorenz.	47

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura		Página
28.	Mapeo de Poincaré unilateral del sistema Hénon-continuo, utilizando la reconstrucción del espacio de estados.	48
29.	Mapeo de primer retorno para el sistema Hénon-continuo, usando el periodo de excitación (1 seg.) para construir el mapeo.	48
30.	Localización del punto fijo inestable del sistema de Hénon.	58
31.	Comportamiento del modelo local del sistema de Hénon.	59
32.	Localización del punto fijo inestable más representativo del sistema de Lorenz.	60
33.	Comportamiento de la linealización en la vecindad del punto fijo en las coordenadas originales.	61
34.	Comportamiento del modelo local del sistema de Lorenz en las coordenadas transformadas.	62
35.	Localización del punto fijo inestable más representativo del mapeo por intersecciones del sistema Hénon-continuo.	64
36.	Comportamiento de la linealización en la vecindad del punto fijo del mapeo por cruces del sistema Hénon-continuo.	64
37.	Localización del punto fijo inestable más representativo del mapeo de primer retorno del sistema Hénon-continuo.	66
38.	Comportamiento del modelo en la vecindad del punto fijo del mapeo de primer retorno para el sistema Hénon-continuo.	66
39.	Resultados del control del sistema de Hénon, cuando se utilizan las ecuaciones.	76
40.	Resultados del control del sistema Hénon cuando no se tienen las ecuaciones del sistema.	79

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura		Página
41.	Lazo de control utilizado para controlar un sistema a partir de una medición escalar (mapeo de Poincaré).	81
42.	(a) Comportamiento de la primer coordenada del mapeo de Poincaré ξ_x del sistema de Lorenz. (b) Los cambios paramétricos indicados por la ley de control OGY.	81
43.	Lazo de control utilizado para controlar un sistema a partir de una medición escalar (mapeo de primer retorno).	82
44.	(a) Comportamiento de la señal medida $m(t)$ del sistema Hénon-continuo. (b) Los cambios paramétricos necesarios para el control.	83
45.	(a) Comportamiento de la primer coordenada del mapeo de Poincaré ξ_x del sistema de Lorenz. (b) Los cambios paramétricos indicados por la segunda ley de control propuesta por Dressler y Nitsche.	89
46.	(a) Comportamiento de la señal medida $m(t)$ del sistema Hénon-continuo. (b) Los cambios paramétricos necesarios para el control según la segunda ley de control propuesta por Dressler y Nitsche.	91
47.	Comportamiento del lazo de control del sistema Hénon-continuo iniciando el sistema en el punto (a) (1.0,0.3), (b) (0.1,0.0) y (c) (1.01, -1.09).	92
48.	Comportamiento del lazo de control del sistema Hénon-continuo para diferentes valores del cambio paramétrico máximo (a) $p_{\max} = 0.5$, (b) $p_{\max} = 0.1$ y (c) $p_{\max} = 0.051$.	93
49.	Comportamiento del control ante perturbaciones de los parámetros del sistema.	93
50.	Comportamiento del control del sistema Hénon-continuo, cuando se aplica una perturbación superior al control, y luego se retira.	94

LISTA DE TABLAS

Tabla		Página
I.	Comportamiento del <i>P. I. M.</i> para el sistema de Lorenz.	13
II.	<i>PIM</i> (t) para los tres estados del sistema de Lorenz.	17
III.	Comportamiento del <i>PFVMC</i> (t) para el sistema de Lorenz.	22
IV.	Parámetros del robot subactuado.	24
V.	Identificadores de las muestras del pendubot.	27

IDENTIFICACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS.

I. Introducción.

I.1 ¿Qué es el caos?

Uno de los objetivos básicos de la ciencia fue el tener algún día los conocimientos suficientes para, mediante un conjunto de leyes bien establecidas, modelar exactamente los fenómenos de la naturaleza. Estos modelos serían descritos en términos de ecuaciones determinísticas, de modo que conociendo las condiciones iniciales se tendría acceso al pasado y al futuro de algún fenómeno natural.

Ahora se sabe que esto no es posible. A partir del trabajo de Henry Poincaré sobre el problema de los tres cuerpos, en el que se enuncia por primera vez la propiedad de sensibilidad de cierto tipo de ecuaciones diferenciales a pequeños cambios en las condiciones iniciales, la visión de la naturaleza como un mecanismo que obedece las leyes newtonianas y que puede ser descompuesto en relaciones simplificadas entre sus elementos, se ha ido desmoronando.

Las implicaciones de este descubrimiento pasaron desapercibidas por mucho tiempo. Fue hasta la década de los 70's que los razonamientos de Poincaré, junto con los trabajos de otros científicos, fueron cobrando importancia, debido principalmente al uso de computadoras para simular las soluciones de los sistemas dinámicos. Con estas simulaciones se demostró que, aún cuando un sistema sea definido completamente por ecuaciones determinísticas, su comportamiento puede ser complejo y aparentemente estocástico. A este comportamiento se le ha llamado "caos determinístico" o simplemente "caos".

Existen algunas definiciones matemáticas de caos, pero para fines prácticos es más conveniente entender lo que su presencia implica en un sistema dinámico. Por lo tanto, a continuación se presenta una definición basada en las características de un sistema caótico:

“El caos es una propiedad del comportamiento de las trayectorias de un sistema dinámico, que se caracteriza por ser acotado en estado estacionario; en particular, este comportamiento no corresponde a un punto de equilibrio, ni a una órbita periódica, y tampoco a una órbita cuasiperiódica. En el dominio de la frecuencia, el caos cuenta con un espectro continuo y de banda ancha, muy parecido al espectro típico del ruido estocástico, pero con picos en las frecuencias dominantes. Por otro lado, el comportamiento de las trayectorias de un sistema caótico en el espacio de estados definen un conjunto límite, llamado atractor extraño, que es un objeto geométrico de dimensión fractal con un exponente de Lyapunov positivo. Además, las trayectorias caóticas son sensiblemente dependientes de las condiciones iniciales; por tanto, el sistema es prácticamente impredecible.”

I.2 Motivación.

Las señales caóticas tiene un comportamiento que se puede ubicar entre oscilaciones regulares y comportamiento puramente estocástico, de modo que al analizarlas con herramientas de naturaleza lineal, como transformadas de Fourier, estas señales se pueden considerar como efecto del ruido en el sistema. Por este motivo, es necesario desarrollar nuevas herramientas que permitan considerar los aspectos no lineales del sistema bajo estudio.

Desde un punto de vista práctico, la información que se tiene de un sistema proviene de la medición de sus variables dinámicas. Con estas mediciones, se caracteriza y modela el sistema observado. Para un sistema del cual sólo se tiene una serie de tiempo escalar asociada con alguna de sus variables, y que además presenta un comportamiento

irregular, determinar si la naturaleza del sistema es determinística o estocástica, y a partir de ello construir un modelo adecuado con propósitos de control, es un problema no trivial.

A la fecha se cuenta con algunas herramientas para analizar un sistema en estas circunstancias; sin embargo, las herramientas propuestas, además de no ofrecer soluciones completas y formales, no son de fácil interpretación para un ingeniero, pues es necesario un conocimiento conceptual completo del problema y del entorno en que se generan estas herramientas para lograr implementarlas adecuadamente en situaciones prácticas.

Con un uso correcto de estas herramientas se puede distinguir entre señales irregulares que provienen de sistemas caóticos de dimensión baja, y señales ruidosas que proviene de sistemas estocásticos. Una vez que las señales han sido clasificadas como determinísticas, es posible generar un modelo en el espacio de estados de la dinámica que les dió origen.

Debido a la naturaleza de los sistemas caóticos, cuando se aplican algoritmos de control convencional resulta difícil garantizar la estabilidad del lazo de control; además, estos controles son muy sencibles a los errores de identificación en el modelo. Por otro lado, debido a que con estos algoritmos se pretende imponer un comportamiento al sistema, generalmente se requieren leyes de control de gran magnitud que pueden resultar poca prácticas.

Recientemente se ha desarrollado una técnica de control para sistemas caóticos, en la cual se utiliza la naturaleza no lineal de los sistemas caóticos para lograr los objetivos de control. La estrategia propuesta se basa en pequeños cambios paramétricos escogidos apropiadamente, de modo que comportamientos simples, como órbitas periódicas, que están empotrados en el atractor extraño y que son inestables en el espacio de estados original, se estabilicen con las perturbaciones sobre los parámetros del sistema. Por tanto, para aplicar esta estrategia de control es necesario un conocimiento detallado

del espacio de estados del sistema, que en el caso, de contar tan sólo con una serie de tiempo se dificulta, pues todos los valores necesarios para calcular la ley de control deben obtenerse del modelo de la dinámica observada.

Como esta estrategia de control no pretende implantar un nuevo comportamiento al sistema, es posible utilizar leyes de control de magnitudes muy pequeñas. Por otro lado, como la naturaleza no lineal es lo que lleva al sistema a un comportamiento deseado, la estabilización es exponencialmente rápida. Además, basta con cambiar la forma de las perturbaciones para obtener del sistema controlado un comportamiento distinto, con lo que se adquiere gran flexibilidad en los objetivos de control alcanzables.

I.3 Objetivos del trabajo de tesis.

Los objetivos del presente trabajo de tesis son desarrollar e implementar las técnicas de análisis de series de tiempo experimentales que permitan, en primer lugar, determinar la naturaleza del sistema que las generó; una vez determinada ésta, generar una representación o modelo de la dinámica del sistema desconocido, para finalmente implementar un algoritmo de control sobre el sistema identificado que establezca el comportamiento observado.

I.4 Metodología propuesta.

Para lograr los objetivos anteriores, se propone una metodología que consta de tres etapas.

1) Reconstrucción del espacio de estados.

En esta etapa se determinará si la naturaleza del sistema desconocido es determinística o estocástica, calculándose la dimensión del espacio de estados donde se manifiesta el atractor, y reconstruyéndose éste con base en la serie de mediciones.

2) Modelado de la dinámica reconstruida.

En esta parte se hace uso de la propiedad de los atractores caóticos de poder ser representados como un conjunto denso de órbitas periódicas inestables de todos los periodos, para escoger una de dichas órbitas y modelar la dinámica del sistema en su vecindad. Al hacer esto, es conveniente utilizar el mapeo de Poincaré del atractor caótico, que se obtiene de las intersecciones del flujo de la dinámica con un plano transversal a dicho flujo.

3) Control de órbitas periódicas.

Una vez identificada la dinámica asociada con la órbita a estabilizar, se calcula una señal de control que ubique al sistema en la dirección estable de dicha órbita. De esta forma se fuerza al sistema a converger a la órbita seleccionada. Esta estrategia de control, conocida como OGY (por sus autores Edward Ott, Celso Gregobi y James A. Yorke (Ott *et al.*,1990)), se aplica sobre algún parámetro accesible del sistema.

En cada una de las etapas anteriores se presenta una explicación de conceptos y desarrollos necesarios para la implementación de los procedimientos discutidos, así como su aplicación tanto a sistemas simulados numéricamente como a datos reales obtenidos en forma experimental.

I.5 Organización del trabajo de tesis.

En el capítulo II se presenta la técnica de coordenadas retardadas en el tiempo, como un método para reconstruir el espacio de estados de un sistema a partir de una serie de mediciones escalares. También se presentan los algoritmos para obtener los valores más apropiados para el tiempo de retardo y la dimensión del espacio de estados reconstruido.

En el capítulo III se presenta primeramente la técnica del mapeo de Poincaré, con la cual se transforma la dinámica continua reconstruida en un mapeo discreto. Una vez obtenido éste, se analiza para localizar un punto fijo inestable o equivalentemente una

órbita periódica inestable, alrededor del cual se identifica la dinámica local mediante un procedimiento de linealización.

En el capítulo IV se presenta la implementación del método de control OGY, con el cual se estabiliza el sistema identificado en la órbita periódica escogida mediante pequeñas perturbaciones sobre algún parámetro del sistema. Estas perturbaciones son calculadas a partir de la información experimental.

Por último, se presenta en el capítulo V una discusión de los resultados obtenidos, haciendo las observaciones y conclusiones a las que se han llegado durante el desarrollo de este trabajo de tesis, así como las recomendaciones para trabajos futuros de investigación derivados del mismo.

II. Reconstrucción del espacio de estados.

II.1 Introducción.

En la observación práctica de un sistema por lo general no se tiene acceso a todas las variables, de modo que sólo se cuenta con una serie de tiempo para analizar su dinámica. El objetivo de este análisis es identificar patrones de comportamiento, a fin de construir modelos con los cuales predecir los estados futuros del sistema.

Los métodos que se utilizan para generar estos modelos dependen de la naturaleza de la serie de tiempo. En el caso de una serie caótica, es necesario que los métodos utilizados tomen en cuenta los aspectos no lineales de su naturaleza; por esta razón el análisis se realiza en el espacio de estados.

Uno de los resultados más importantes del análisis geométrico del espacio de estados es que el atractor del sistema es un invariante topológico. Esto significa que a partir de un espacio de estados reconstruido se puede obtener la misma información, en sentido geométrico, que se obtendría del espacio de estados original.

En 1981 Takens demostró que se puede obtener una reconstrucción del espacio de estados de un sistema a partir de una serie de tiempo. La idea básica, es generar vectores de dimensión d , utilizando como componentes series de tiempo obtenidas de la serie original retardada. A este método se le llama técnica de reconstrucción por coordenadas retardadas en el tiempo.

II.2 Coordenadas retardadas en el tiempo.

El primero en sugerir el uso de retardos en el tiempo de la misma serie medida como estados del sistema reconstruido fue David Ruelle (Packard *et al.*, 1980). Posteriormente

Takens (1981) y Mañé (1981) formalizaron esta técnica matemáticamente.

Considérese una serie de tiempo obtenida de la medición, a intervalos constantes de tiempo τ_s , de una variable característica de un sistema,

$$\{s(t_0 + k\tau_s)\}_{k=0}^N,$$

y denótese

$$s(n) \stackrel{def}{=} s(t_0 + n\tau_s), \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

El teorema de empotramiento¹ indica que, si es posible observar una cantidad escalar $h(\cdot)$, que depende de alguna función vectorial $g(\cdot)$ de las variables $x(n)$ de un sistema discreto, entonces la estructura geométrica de la dinámica multivariable puede ser reconstruida o desempotrada, por medio del conjunto de mediciones escalares $h(g(x(n)))$, en un espacio de estados construido por vectores compuestos por la función $h(\cdot)$ aplicada a d iteraciones de la función vectorial $g(x(n))$. Estos vectores de reconstrucción tienen la forma:

$$y(n) = [h(x(n)), h(g^1(x(n))), h(g^2(x(n))), \dots, h(g^{d-1}(x(n)))] . \quad (1)$$

Es importante enfatizar que el teorema de empotramiento se puede implementar, en general, con cualquier elección de las funciones suaves $h(\cdot)$ y $g(\cdot)$. Por tanto, cuando sólo se cuenta con un serie de mediciones $s(n)$, se pueden elegir las funciones más simples que utilicen directamente los valores de la serie de tiempo.

Escogiendo las funciones de modo que el resultado de la función escalar $h(\cdot)$ sea la variable escalar observada $s(n)$ y la función vectorial $g(\cdot)$ sea un retardo en el tiempo de x , se tiene que

$$h(x(n)) = s(n),$$

y la k -ésima composición de la función $g(x(n))$ está dada por

$$g^k(x(n)) = x(n - T_k).$$

¹ También conocido como teorema de Takens, o teorema de reconstrucción.

Para una serie de tiempo muestreada en intervalos regulares τ_s , el tiempo de retardo T_k tiene la forma

$$T_k = kT,$$

con T un entero positivo; por lo que las componentes del vector $y(n)$ adquieren la forma

$$h(g^k(x(n))) = h(x(n - T_k)) = h(x(n - kT)) = s(n - kT).$$

Con esta elección particular de las funciones $h(\cdot)$ y $g(\cdot)$, los vectores de reconstrucción $y(n)$ dependen exclusivamente de los valores retardados de la serie de tiempo y están dados por

$$y(n) = [s(n), s(n - T), s(n - 2T), \dots, s(n - (d - 1)T)], \quad (2)$$

donde $s(n)$ es la serie de tiempo observada, T es el tiempo de retardo y d es la dimensión de reconstrucción.

Si las trayectorias del sistema original definen un conjunto límite de dimensión d_A en una variedad \mathbf{M} , será necesario que los vectores $y(n)$ tengan al menos $2d_A + 1$ elementos para que el conjunto límite definido por estos vectores en un espacio euclidiano \mathbf{R}^{2d_A+1} se pueda expresar como producto de un empotramiento² de la dinámica original. Entonces la dinámica reconstruida conservará las propiedades invariantes de la dinámica original.

La calidad de la reconstrucción del espacio de estados depende de la elección que se haga de los parámetros de reconstrucción; por lo tanto es muy importante desarrollar métodos que indiquen, a partir de la serie de tiempo, cuáles son los valores adecuados para el tiempo de retardo T y la dimensión de reconstrucción d .

² Un empotramiento (“embedding”) Φ_s es un difeomorfismo que mapea una variedad \mathbf{M} , de dimensión d_A , a una subvariedad del espacio euclidiano \mathbf{R}^{2d_A+1} .

II.3 Obtención del tiempo de retardo.

En principio, la reconstrucción del espacio de estados funciona casi para cualquier valor de T , siempre que se tenga un valor suficientemente grande para d y se cuente con una cantidad infinita de información exacta y libre de ruido. Esto es irrealizable, por tanto se requiere determinar un valor apropiado para T en cada caso.

En la actualidad no se cuenta con un teorema que indique el valor óptimo para T , por lo que es necesario recurrir a una receta que indique el mejor valor, en algún sentido, a partir de la serie de tiempo. El valor de T obtenido mediante esta receta no debe ser muy pequeño, porque las muestras $s(n)$ y $s(n - T)$ no serían suficientemente independientes entre sí, de modo que prácticamente se estaría construyendo el vector $y(n)$ con la misma muestra. Por otro lado, si el tiempo de retardo es muy grande, la inestabilidad intrínseca del sistema caótico hará que la relación entre las muestras $s(n)$ y $s(n - T)$ no sea significativa.

Resumiendo, el valor para T que se obtenga de esta receta debe ser suficientemente grande para que $s(n)$ y $s(n - T)$ sean relativamente independientes, pero no tan grande como para que no exista una relación entre ellas.

La información mutua producida entre dos series de tiempo se puede utilizar para determinar el tiempo de retardo T para el cual $s(n)$ y $s(n - T)$ son suficientemente independientes para servir como componentes de los vectores de reconstrucción.

II.3.1 Promedio de información mutua.

La información mutua entre la medición a_i tomada del conjunto de posibles mediciones $A = \{a_i\}$ y la medición b_j tomada del conjunto de posibles mediciones $B = \{b_j\}$ se define como la cantidad aprendida por la medición a_i acerca de la medición b_j . En *bits*, la información mutua está dada por (Abarbanel, 1996)

$$\log_2 \left[\frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right],$$

donde $P_{AB}(a, b)$ es la densidad de probabilidad conjunta, $P_A(a)$ y $P_B(b)$ son las densi-

dades de probabilidad individual.

Al promedio sobre todas las muestras de la serie de mediciones se le llama promedio de información mutua y su valor se obtiene mediante la fórmula

$$PIM_{AB} = \sum_{a_i, b_j} P_{AB}(a_i, b_j) \log_2 \left[\frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_j)P_B(b_j)} \right].$$

Definiendo las mediciones $s(n)$ como un conjunto de posibles mediciones y las mediciones $s(n - T)$ como otro, se puede encontrar la relación que hay entre éstas, en el sentido de la teoría de información, calculando el $PIM(T)$, que para este caso está dado por

$$PIM(T) = \sum_{s(n), s(n-T)} P(s(n), s(n-T)) \log_2 \left[\frac{P(s(n), s(n-T))}{P(s(n))P(s(n-T))} \right]. \quad (3)$$

La receta para obtener el tiempo de retardo T es utilizar el valor para el cual se presenta el primer mínimo del $PIM(T)$ (Abarbanel, 1996).

Es importante notar que la elección del primer mínimo del $PIM(T)$ como el tiempo de retardo es una receta que da resultados aceptables, pero de ninguna forma se asegura que sea el mejor valor con el cual se pueda realizar la reconstrucción.

II.3.1.1 Implementación del promedio de información mutua.

Para calcular el promedio de información mutua se utilizó el siguiente algoritmo:

1. Normalizar la serie de tiempo $s(n)$.
2. Obtener la serie de tiempo retardada $s(n - T)$ para el valor actual de T .
3. Construir un histograma bidimensional a partir de los pares ordenados $(s(n), s(n - T))$.
4. Evaluar las probabilidades $P(s(n), s(n - T))$, $P(s(n))$ y $P(s(n - T))$ utilizando las frecuencias registradas en el histograma.
5. Calcular el $PIM(T)$ por medio de la ecuación (3).
6. Incrementar el valor de T y repetir desde el paso 2, hasta un valor máximo de T .
7. Graficar los valores obtenidos para $PIM(T)$.

El algoritmo presentado se realizó utilizando un programa en la paquetería MATLAB (versión 4.2c).

II.3.2 Resultados del promedio de información mutua.

II.3.2.1 Consideraciones sobre el tiempo de cálculo.

En el cálculo del $PIM(T)$ se deben hacer dos consideraciones: la primera es el tamaño de la serie de tiempo $s(n)$ que se va a utilizar; la segunda es el número de clases con las que se construirá el histograma. Estos dos valores afectan en forma directa la magnitud del $PIM(T)$, pero afortunadamente su comportamiento respecto a T es robusto a cambios en estos valores. Entonces, teniendo en cuenta que sólo es necesario localizar el primer mínimo del $PIM(T)$, se pueden buscar combinaciones del número de clases y muestras con los cuales se obtenga el valor apropiado para T utilizando el menor tiempo de cálculo posible.

Para ilustrar lo anterior, con una serie de tiempo obtenida de la simulación numérica del sistema de Lorenz³ con un paso de integración constante $\tau_s = 0.01$, se obtuvo el $PIM(T)$ para los diferentes valores del número de muestras y clases que se enlistan en la tabla I. El comportamiento obtenido se presenta en la figura 1.

Como se puede observar, el primer mínimo del $PIM(T)$ ocurre prácticamente en el mismo lugar para todos los cálculos, de modo que se puede ahorrar tiempo de cálculo⁴ utilizando 200 muestras y 60 clases, y obtener básicamente el mismo resultado que con un cálculo más largo.

II.3.2.2 Efecto del sobremuestreo.

El valor de $PIM(T)$ siempre es mayor o igual a cero, y tiene su máximo en $T = 0$. Conforme el valor de T aumenta, $PIM(T)$ disminuye hasta llegar al primer mínimo, luego aumenta y disminuye en forma oscilante, tendiendo a cero para valores grandes

³ Este sistema, así como los demás utilizados en este capítulo, se describen en la sección II.5.

⁴ El cálculo del $PIM(T)$ se realizó en una computadora personal tipo 486 con una velocidad de 66 MHz.

de T .

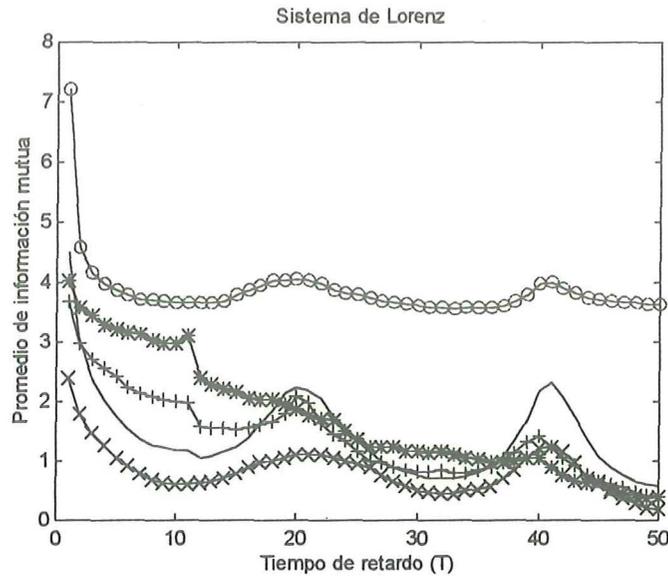


Figura 1. $P.I.M.$ para diferentes valores de muestras y clases del sistema de Lorenz.

Tabla I. Comportamiento del $PIM(T)$ para el sistema de Lorenz			
Identificador	No. de muestras	No. de clases	Tiempo aproximado de cálculo
Círculo (o)	2000	200	45 min.
Asterisco (*)	1000	100	30 min.
Cruz (+)	500	90	25 min.
Equis (x)	300	80	15 min.
Línea (-)	200	60	5 min.

En ocasiones el comportamiento del $PIM(T)$ no presenta esta característica oscilante y no se observa un mínimo durante valores de T relativamente grandes. Este comportamiento se puede atribuir a que el periodo de muestreo τ_s es muy pequeño. En otras palabras, el muestreo es tan rápido con respecto a la dinámica, que prácticamente estamos sensando el mismo punto varias veces. A este efecto se le llama sobremuestreo (Abarbanel, 1996).

Para solucionar este problema se pueden hacer dos cosas: repetir la captura con un periodo de muestreo mayor o eliminar algunos puntos por cada uno que se utiliza en el cálculo. La segunda opción es la más recomendable porque no se sacrifica información al incrementar el periodo de muestreo efectivo.

Para ilustrar lo anterior se utilizó una serie de tiempo del sistema Robot subactuado, integrado numéricamente con un paso de integración $\tau_s = 0.01$, obteniendo el comportamiento que se presenta en la figura 2.

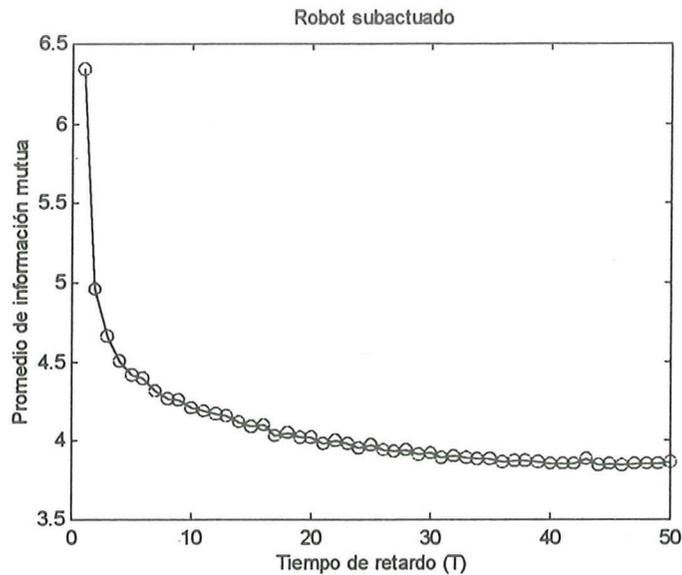


Figura 2. *P.I.M.* para el robot subactuado, en el que se presenta el efecto del sobremuestreo.

Se recalculó el $PIM(T)$ para este mismo sistema, pero ahora con un periodo de muestreo efectivo de $\tau_s = 0.05$, obteniendo el comportamiento que se presenta en la figura 3, en la cual se puede apreciar claramente el primer mínimo.

II.3.2.3 Comportamiento del $PIM(T)$ para una serie de tiempo estocástica.

El $PIM(T)$ se basa en una característica exclusiva de los sistemas no lineales, que es la generación de información, de modo que su comportamiento puede servir para determinar la naturaleza del sistema que generó la serie de tiempo.

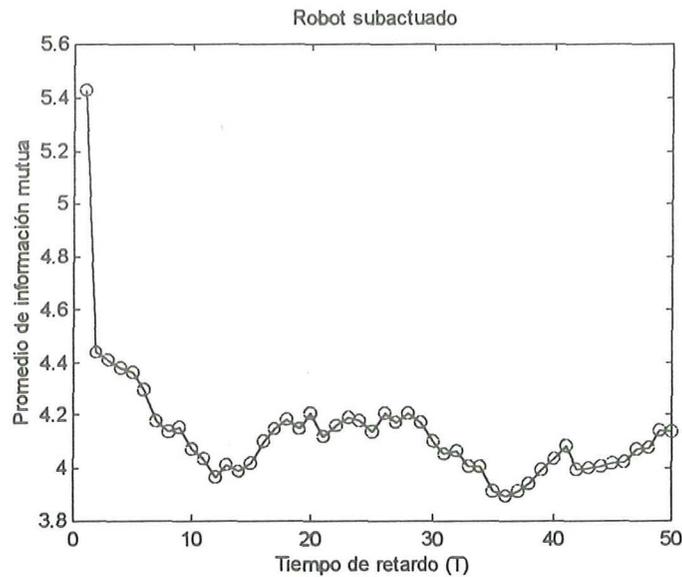


Figura 3. *P.I.M.* para el robot subactuado, en el que se ha resuelto el problema de sobremuestreo.

Para establecer un criterio de comparación entre el comportamiento del $PIM(T)$ para un sistema determinístico y para uno estocástico, se realizó el cálculo del $PIM(T)$ para una serie de 1000 números pseudo-aleatorios⁵. Los resultados obtenidos se presentan en la figura 4.

Como se puede observar, el comportamiento es muy particular, pues la caída del $PIM(T)$ es inmediata y se mantiene básicamente en un sólo valor para el resto de los tiempos de retardo. Este comportamiento se aproxima a un impulso de información en $T = 0$.

II.3.2.4 Comprobación de los resultados del $PIM(T)$.

En ocasiones se tiene acceso a más de una variable del sistema. En este caso, se puede verificar el resultado del $PIM(T)$ calculándolo para todas las variables disponibles. La localización del primer mínimo debe ser básicamente la misma.

⁵ Los números pseudo-aleatorios fueron generados con una distribución uniforme entre cero y uno, mediante el macro $RAND(\cdot)$ de MATLAB.

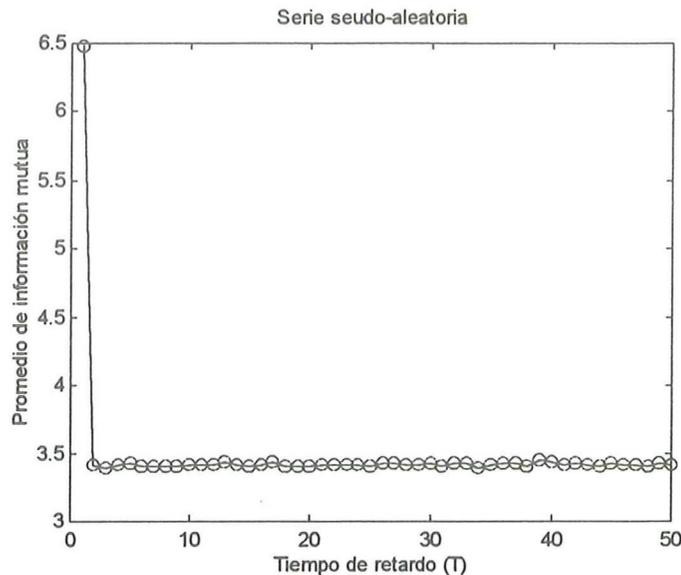


Figura 4. *P.I.M.* para una serie de números pseudo-aleatorios.

Para demostrar lo anterior se realizó el cálculo del $PIM(T)$ para los tres estados del sistema de Lorenz, como se indica en la tabla II. Los resultados obtenidos se presentan en la figura 5.

Como se puede observar, el resultado del $PIM(T)$ es el mismo para las tres series, con lo que se asegura que el tiempo de retardo adecuado para reconstruir el espacio de estados de este sistema es $T = 10$.

II.4 Obtención de la dimensión de reconstrucción.

La reconstrucción se basa en la idea de que una trayectoria del sistema desconocido está proyectada sobre el eje correspondiente a la variable medida. Como la trayectoria original es producto de un sistema de ecuaciones diferenciales no se cruza consigo misma, por lo tanto todos los traslapes que existen en la representación de esta trayectoria son debidos a la proyección desde dimensiones superiores a un espacio de menor dimensión. Entonces se puede recuperar un equivalente topológico del atractor desconocido en un espacio reconstruido mediante los vectores $y(n)$, utilizando suficientes coordenadas

independientes de modo que se deshagan estos traslapes.

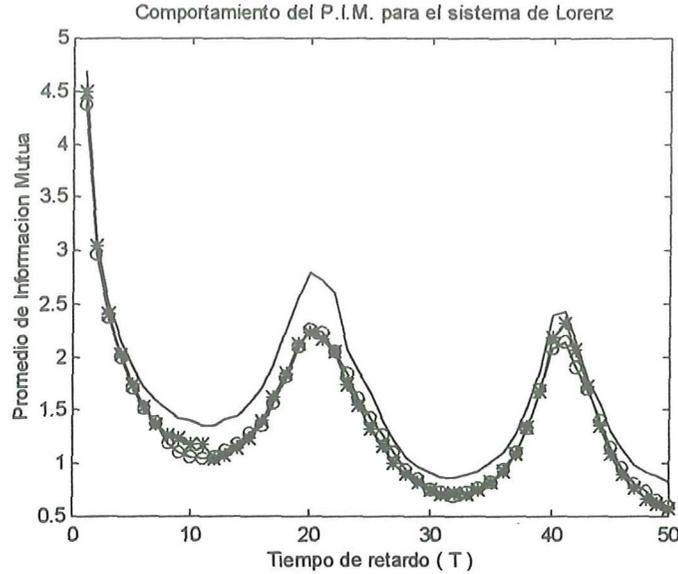


Figura 5. *P.I.M.* para los tres estados del sistema de Lorenz.

Identificador	Estado	No. de muestras	No. de clases
Círculo (o)	$x(t)$	250	50
Asterisco (*)	$y(t)$	250	50
Línea (-)	$z(t)$	250	50

A la dimensión más pequeña en la cual se deshacen todos los traslapes de la trayectoria reconstruida se le llama dimensión de empotramiento d_E . Esta dimensión necesaria es siempre menor o igual a la dimensión suficiente indicada por el teorema de empotramiento ($2d_A + 1$), de modo que si se utiliza esta dimensión para la reconstrucción, se puede facilitar el manejo de los vectores de reconstrucción, conservando las características invariantes de la dinámica original.

Un método para determinar el valor apropiado para d_E , a partir de la serie de tiempo, es el promedio de falsos vecinos más cercanos. Con este método se determina

la dimensión de reconstrucción para la cual se eliminan todos los traslapes del atractor reconstruido.

II.4.1 Promedio de falsos vecinos más cercanos.

El vecino más cercano del vector de reconstrucción

$$y(k) = [s(k), s(k - T), \dots, s(k - (d - 1)T)], \quad (4)$$

en la dimensión d , se denota como⁶

$$y^{NN}(k) = [s^{NN}(k), s^{NN}(k - T), \dots, s^{NN}(k - (d - 1)T)], \quad (5)$$

y corresponde al vector que tiene la menor distancia euclidiana con $y(k)$ de todos los vectores reconstruidos.

Si el vector $y^{NN}(k)$ es un vecino verdadero de $y(k)$, entonces llegó a la vecindad de $y(k)$ debido a la dinámica del sistema. En cambio, si $y^{NN}(k)$ es un vecino falso, llegó a la vecindad de $y(k)$ debido a la proyección desde una dimensión superior.

Para determinar si el vector $y^{NN}(k)$ es un vecino falso de $y(k)$, se incrementa la dimensión de reconstrucción a $d + 1$. Esto significa agregar un elemento a los vectores reconstruidos, que corresponden a $s(k - dT)$ para el vector $y(k)$ y $s^{NN}(k - dT)$ para su vecino más cercano. Entonces el cuadrado de la distancia entre $y(k)$ y $y^{NN}(k)$ en la dimensión d está dada por

$$R_d(k)^2 = \sum_{m=1}^d [s(k - (m - 1)T) - s^{NN}(k - (m - 1)T)]^2,$$

y en la dimensión $d + 1$ por

$$R_{d+1}(k)^2 = \sum_{m=1}^{d+1} [s(k - (m - 1)T) - s^{NN}(k - (m - 1)T)]^2.$$

⁶ Aquí k no significa el orden de generación, sino que el vector $y^{NN}(k)$ es el vecino más cercano del vector $y(k)$.

El incremento de la distancia entre $y(k)$ y $y^{NN}(k)$ al pasar a la dimensión $d + 1$ entre la distancia en la dimensión d es

$$\sqrt{\frac{R_{d+1}(k)^2 - R_d(k)^2}{R_d(k)^2}} = \frac{|s(k - dT) - s^{NN}(k - dT)|}{R_d(k)}, \quad (6)$$

y se puede utilizar como un criterio de decisión para determinar cuándo la pareja de vecinos más cercanos es falsa.

Cuando la distancia que existe entre $y(k)$ y $y^{NN}(k)$ en la dimensión d aumenta considerablemente al pasar a la dimensión $d + 1$, significa que los vecinos más cercanos son falsos, por lo tanto la dimensión de reconstrucción actual no es suficiente para desenvolver adecuadamente el atractor original.

Otro aspecto que debe considerarse es que si la dimensión es alta, los vectores reconstruidos se concentrarán en la periferia del espacio de estados. Entonces el incremento de la distancia al pasar a la dimensión $d + 1$ será pequeño, comparado con la distancia en la dimensión d , aún cuando se trate de vecinos falsos. Para considerar este caso, es necesario requerir además que el incremento de distancia entre los vecinos más cercanos no sea mucho mayor al tamaño nominal del atractor⁷ R_A

$$\frac{|s(k + dT) - s^{NN}(k + dT)|}{R_A}. \quad (7)$$

En la literatura se sugiere que cuando el valor del incremento de la distancia en la dimensión $d + 1$ con respecto a la distancia en la dimensión d (ecuación 6) sea mayor a 15, o con respecto al radio nominal del atractor (ecuación 7) sea mayor a 2, se considere que los vecinos más cercanos son falsos (Abarbanel, 1996).

El promedio de falsos vecinos más cercanos ($PFVMC(d)$) en la dimensión actual

⁷ El tamaño nominal del atractor R_A es el promedio de las distancias entre los puntos medidos y su media aritmética. Se calcula mediante las siguientes ecuaciones (Abarbanel, 1996):

$$R_A = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |s(k) - s_{av}|, \quad \text{con} \quad s_{av} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N s(k).$$

d es igual al número de falsos vecinos entre el número total de vectores reconstruidos

$$PFVMC(d) = \frac{\text{No. de vecinos falsos}}{\text{Total de vectores reconstruidos}}. \quad (8)$$

Cuando la dimensión de reconstrucción d es suficientemente grande para deshacer todos los traslapes de la trayectoria medida, el $PFVMC(d)$ se hace cero, de modo que la dimensión de empotramiento d_E es la dimensión para la cual el $PFVMC(d)$ llega a cero por primera vez.

Al contrario de lo que sucede en el cálculo del $PIM(T)$, el cálculo del $PFVMC(d)$ puede resultar en un valor diferente para d_E cuando se utilizan series de tiempo obtenidas de diferentes variables de un mismo sistema. Esto se debe a que para cada serie de mediciones se tiene un empotramiento diferente. Sin embargo, la dimensión de empotramiento d_E tendrá como máximo el valor $2d_A + 1$, sin importar qué variable del sistema se utilice en el cálculo del $PFVMC(d)$ (Abarbanel, 1996).

II.4.1.1 Implementación del promedio de falsos vecinos más cercanos.

Para obtener el promedio de falsos vecinos más cercanos se implementó el siguiente algoritmo en MATLAB:

1. Reconstruir el atractor en la dimensión de trabajo ($d_W > 2d_A + 1$).
2. Identificar el vecino más cercano de $y(k)$ en la dimensión actual d .
3. Decidir si el vecino identificado es falso o verdadero (ecuaciones 6 y 7).
4. Repetir los pasos 2 y 3 para todos los vectores reconstruidos.
5. Calcular el $PFVMC(d)$ por medio de la ecuación (8).
6. Incrementar la dimensión en uno y repetir del paso 2 al 5, hasta que $d = d_W$.
7. Graficar los valores obtenidos para $PFVMC(d)$.

II.4.2 Resultados del promedio de falsos vecinos más cercanos.

II.4.2.1 Consideraciones acerca de los criterios.

Los valores que se utilizan para determinar si un punto es falso vecino en el cálculo del $PFVMC(d)$ se obtuvieron de la literatura, y no son necesariamente los más adecuados para cada sistema. Afortunadamente, el resultado para la dimensión de empotramiento es insensible al valor exacto de estos criterios, siempre y cuando se tenga suficientemente poblado el espacio de estados reconstruido.

Para ilustrar lo anterior se realizó el cálculo del $PFVMC(d)$ con una serie de tiempo del sistema de Lorenz, utilizando diferentes valores para los criterios del $PFVMC(d)$. Los resultados que se obtuvieron se presentan en la figura 6. Los valores correspondientes de los criterios para las diferentes curvas se enlistan en la tabla III. Como se puede observar, el cambio en los criterios afecta solamente la cantidad de falsos vecinos, pero el resultado para d_E no cambia.

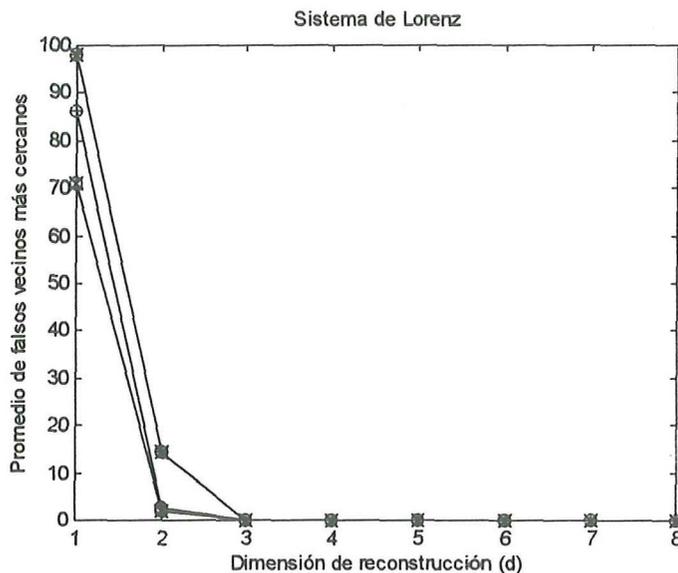


Figura 6. $P.F.V.M.C.$ de una serie de tiempo del sistema de Lorenz, utilizando diferentes valores para los criterios de decisión.

Tabla III. Comportamiento del $PFVMC(d)$ para el sistema de Lorenz.			
Identificador	No. de muestras	Incremento $\frac{R_{d+1}}{R_d}$	Incremento $\frac{R_{d+1}}{R_A}$
Cruz (+)	300	20	2.5
Asterisco (*)	300	15	2
Equis (x)	300	10	1.5

II.4.2.2 Comportamiento del $PFVMC(d)$ para una serie de tiempo estocástica.

El comportamiento típico del $PFVMC(d)$ para una serie de mediciones caóticas y sin ruido es tener un valor casi del 100% para la reconstrucción con $d = 1$, que se reduce conforme d aumenta, llegando estrictamente a cero cuando $d = d_E$ y en adelante.

El comportamiento anterior no se presenta cuando la serie de mediciones esta contaminada por ruido. En este contexto, se entiende por ruido cualquier señal que provenga de un sistema de dimensión diferente a la del sistema de interés. En este caso el comportamiento del $PFVMC(d)$ puede ser de dos formas: si la magnitud del ruido es superior a la magnitud de la señal del sistema, el $PFVMC(d)$ no se hará cero, aún cuando se tengan las dimensiones necesarias para reconstruir el atractor. Por otro lado, si la magnitud de ruido es pequeña, el $PFVMC(d)$ presentará un mínimo en el valor de la dimensión de empotramiento d_E del sistema, luego tenderá hacia la dimensión de empotramiento del sistema contaminador. Por definición, el ruido estocástico es de dimensión infinita; por lo tanto, en el caso de un sistema de naturaleza estocástica, el $PFVMC(d)$ nunca llegará a cero.

Para ilustrar este comportamiento se calculó el $PFVMC(d)$ para la serie de tiempo pseudo-aleatoria utilizada en la sección II.3.2.3, obteniendo el comportamiento que se presenta en la figura 7.

El valor del $PFVMC(d)$ se mantiene entre 15 y 45% para una dimensión de reconstrucción hasta 28, por lo tanto podemos inferir que se trata de una serie de tiempo de

naturaleza estocástica, de la cual no se puede obtener información útil mediante la reconstrucción de su espacio de estados.

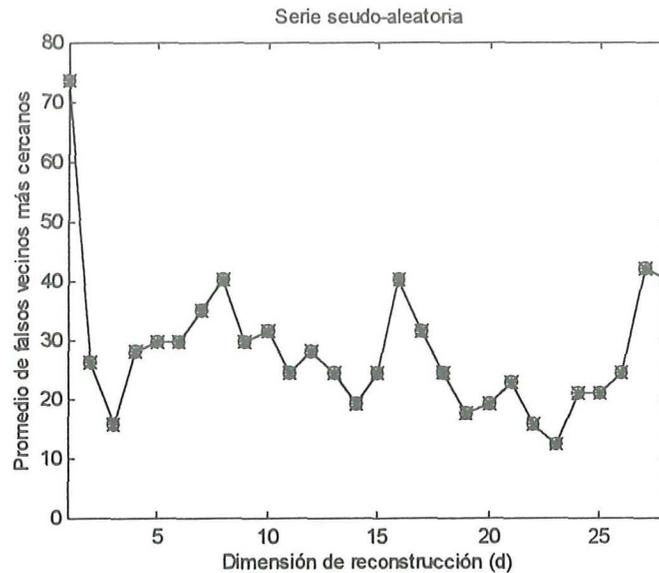


Figura 7. *P.F.V.M.C.* para una serie de números pseudo-aleatorios.

II.5 Resultados de la reconstrucción del espacio de estados.

En lo que sigue se utilizaron series de tiempo obtenidas de sistemas simulados numéricamente, así como sistemas experimentales para obtener reconstrucciones de sus espacios de estados, aplicando los procedimientos desarrollados en este capítulo.

II.5.1 Modelo de un Robot subactuado.

El movimiento de un robot de dos eslabones que sólo tiene un actuador en su segunda articulación se rige por las ecuaciones (Spong, 1994):

$$m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + h_1 + \phi_1 = 0 \quad (9)$$

$$m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + h_2 + \phi_2 = \tau_2$$

donde

$$m_{11} = m_1 \ell_{c1}^2 + m_2 (\ell_1^2 + \ell_{c2}^2 + 2\ell_1 \ell_{c2} \cos(q_2)) + I_1 + I_2,$$

$$m_{22} = m_2 \ell_{c2}^2 + I_2,$$

$$m_{12} = m_{21} = m_2 (\ell_{c2}^2 + \ell_1 \ell_{c2} \cos(q_2)) + I_2,$$

$$h_1 = -m_2 \ell_1 \ell_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 - 2m_2 \ell_1 \ell_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_1,$$

$$h_2 = m_2 \ell_1 \ell_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2,$$

$$\phi_1 = (m_1 \ell_{c1} + m_2 \ell_1) g \cos(q_1) + m_2 \ell_{c2} g \cos(q_1 + q_2),$$

$$\phi_2 = m_2 \ell_{c2} g \cos(q_1 + q_2).$$

Se simuló este modelo por medio del paquete SIMNON/PCW 2.0, fijando el paso de integración en $\tau_s = 0.05$, con la posición angular inicial $q_1 = -1.5$, $q_2 = 0$ y los parámetros que se indican en la tabla IV.

Tabla IV. Parámetros del Robot subactuado									
m_1	m_2	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_{c1}	ℓ_{c2}	I_1	I_2	g	τ_2
1	1	1	1	0.5	0.5	0.5	1.0	9.8	0

Considerando que sólo se tiene acceso a una serie de mediciones de la posición angular $q_1(t)$, se calcularon el $PIM(T)$ y el $PFVMC(d)$, obteniendo los resultados que se presentan en la figura 8.

El espacio de estados se reconstruyó a partir de las mediciones del estado $q_1(t)$ por medio de vectores tridimensionales ($d_E = 3$) formados por las mediciones retardadas 0.45 segundos entre sí ($T = 9$). Debido a que este sistema es simulado numéricamente, se tiene acceso al espacio de estados original, por lo que podemos comparar los atractores original y reconstruido. En la figura 9 se presentan ambos atractores.

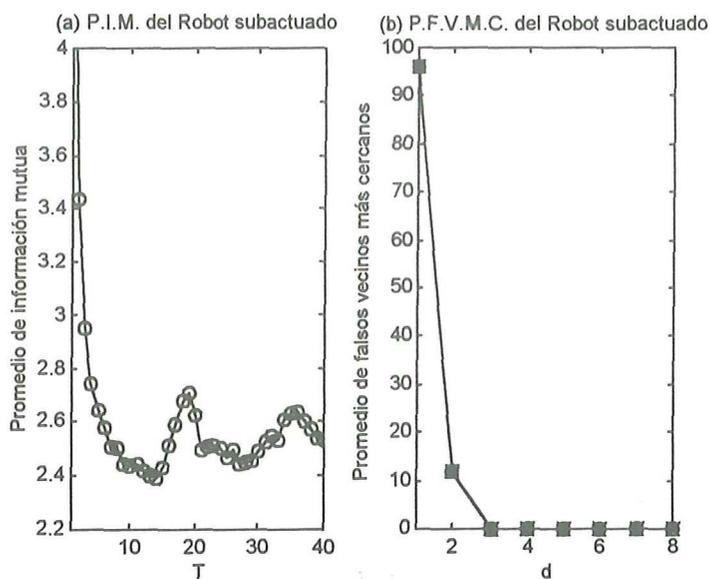


Figura 8. (a) *P.I.M.* y (b) *P.F.V.M.C.* para el robot subactuado, a partir de una serie de mediciones del estado $q_1(t)$ tomadas cada 0.05 segundos.

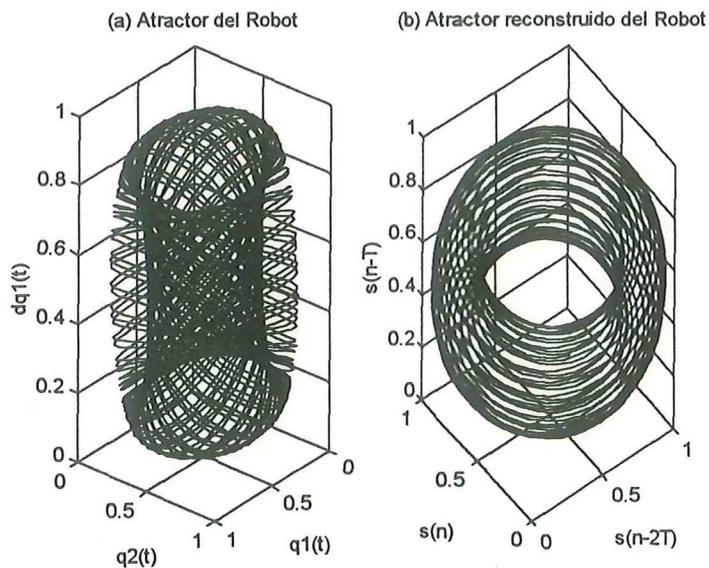


Figura 9. (a) Atractor del robot subactuado obtenido en el espacio de estados original. (b) Atractor reconstruido a partir de la medición de $q_1(t)$.

En esta reconstrucción se puede ver claramente cómo el atractor reconstruido, a partir de las mediciones del estado q_1 , es un equivalente topológico del atractor original.

II.5.2 Robot subactuado implementado físicamente (“pendubot”).

En el laboratorio de procesos de la sección de control automático del CINVESTAV-IPN se encuentra implementado físicamente un robot de dos eslabones con un motor en la primera articulación, a través del cual se aplica una excitación senoidal. En lo que resta de este documento, a este sistema se le llamará “pendubot” para diferenciarlo del robot subactuado simulado numéricamente.

Del pendubot se obtuvieron tres series de mediciones de la posición angular del primer eslabón $q(t)$, correspondientes a tres diferentes intensidades de excitación senoidal. Las mediciones se hicieron con un periodo de muestreo $\tau_s = 0.004$ segundos. Para solucionar el problema de sobremuestreo se considera uno por cada diez muestras en los cálculos del $PIM(T)$ y el $PFVMC(d)$. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 10. La tabla V enlista los valores correspondientes a cada gráfica.

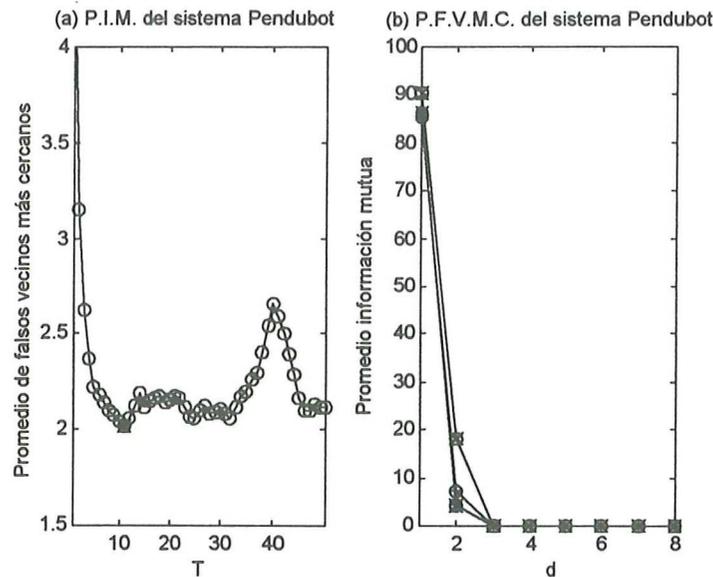


Figura 10. (a) $P.I.M.$ y (b) $P.F.V.M.C.$ para el pendubot, utilizando mediciones experimentales de la posición angular $q(t)$. Se toma una muestra para el cálculo por cada diez mediciones, haciendo el periodo de muestreo efectivo igual a 0.04 seg.

Indicador:	<i>muestras</i>	Estado	Excitación senoidal.
<i>serie1</i> (*)	18500	$q(t)$	$\text{sen}(9t/18)$
<i>serie2</i> (+)	18500	$q(t)$	$\text{sen}(16t/18)$
<i>serie3</i> (X)	18500	$q(t)$	$\text{sen}(21t/18)$

Se reconstruyó el atractor del sistema pendubot para cada una de las series de tiempo, utilizando vectores tridimensionales ($d_E = 3$) con un tiempo de retardo de 0.36 segundos ($T = 9$). Los atractores reconstruidos se presentan en la figura 11.

A partir de estas reconstrucciones se puede observar el comportamiento del sistema ante diferentes grados de excitación. Cuando la excitación es baja (figura 11a) el comportamiento es casi periódico, el movimiento en el espacio de estados se mantiene en un toro. Para una excitación senoidal de mediana intensidad (figura 11b), el toro comienza a deformarse, finalmente cuando la excitación es suficientemente grande (figura 11c), el toro se deforma completamente, transformándose en un objeto más complejo, que podría indicar la presencia de caos en el movimiento de este robot subactuado.

II.5.3 Lazo de control integral para una planta de segundo orden con tiempo muerto.

En Curiel (1996) se demostró que los lazos del control convencional para sistemas simples con no linealidades típicas, pueden generar caos. En esta sección se analiza una de estas configuraciones para ilustrar la capacidad de los algoritmos de reconstrucción para determinar el número de dimensiones necesarias para visualizar el atractor de un sistema de dimensión desconocida.

Uno de los sistemas presentados Curiel (1996) es el lazo de control integral para una planta lineal de segundo orden con una no linealidad cúbica, para la cual se demostró la presencia de caos. Este sistema es claramente tridimensional, con dos estados

correspondientes a la planta de segundo orden y uno al controlador. Si la planta de segundo orden se ve afectada por un tiempo muerto, la dinámica se vuelve de dimensión infinita. El atractor del sistema puede, sin embargo, evolucionar en un espacio de dimensión finita.

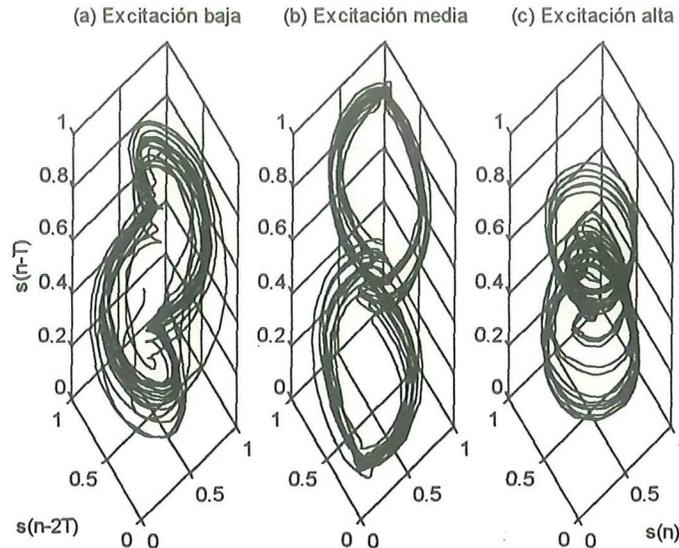


Figura 11. Atractores reconstruidos a partir de las series de tiempo de la posición articular $q(t)$ del pendubot.

El $PFVMC(d)$ indica la dimensión en que el atractor de un sistema se desenvuelve completamente a partir de una medición escalar; es decir, la dimensión necesaria para observar el movimiento en estado estacionario del sistema. Entonces, podemos utilizar este cálculo para determinar cuántas dimensiones ocupa el atractor de un sistema cuando se agrega o retira algún componente.

El diagrama a bloques del lazo de control integral para una planta de segundo orden con un tiempo muerto y una no linealidad cúbica se presenta en la figura 12. En lo que sigue, a este sistema se le llamará “planta con tiempo muerto”.

Diagrama a bloques del sistema planta con tiempo muerto.

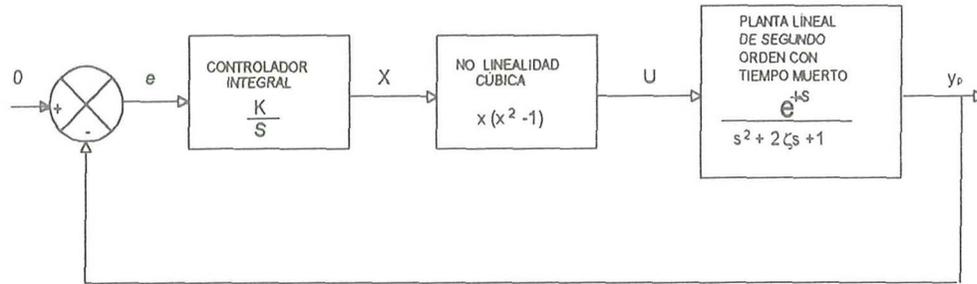


Figura 12. Diagrama a bloques del sistema planta con tiempo muerto.

Al realizar la siguiente asignación de variables:

$$x_1 = y_p, \quad x_2 = \dot{y}_p, \quad x_3 = x,$$

el sistema planta con tiempo muerto queda representado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2\zeta x_2 + U(t - l), \\ \dot{x}_3 &= -kx_1, \end{aligned} \tag{10}$$

donde

$$U(t) = x_3(t)[x_3(t)^2 - 1]. \tag{11}$$

Se integraron numéricamente estas ecuaciones utilizando la paquetería SIMNON/PCW 2.0 con un paso fijo de integración $\tau_s = 0.1$, para los valores paramétricos $k = 0.24$, $\zeta = 0.1$, $l = 6.2$ y la condición inicial $(1, 1, 1)$.

Se calculó el $PIM(T)$ y el $PFVMC(d)$ a partir de la medición del estado $x_3(t)$, obteniendo los resultados que se presentan en la figura 13.

Los resultados para el $PFVMC(d)$ indican que, aún cuando el tiempo muerto es bastante grande, su efecto en la dimensión del atractor del sistema es nulo, de modo que el atractor del sistema planta con tiempo muerto se puede reconstruir con vectores tridimensionales a partir de retardos de las mediciones del estado x_3 . En la figura 14 se presenta el atractor reconstruido y el original para este sistema.

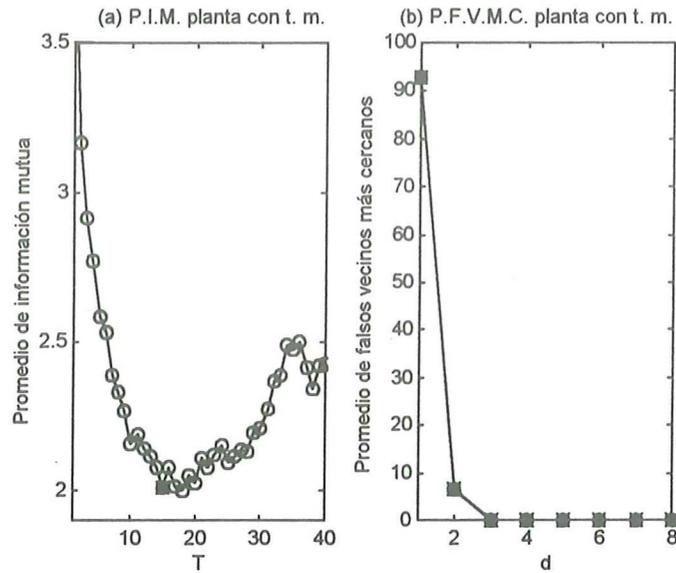


Figura 13. (a) *P.I.M.* y (b) *P.F.V.M.C.* para el sistema planta con tiempo muerto, a partir del estado $x_3(t)$.

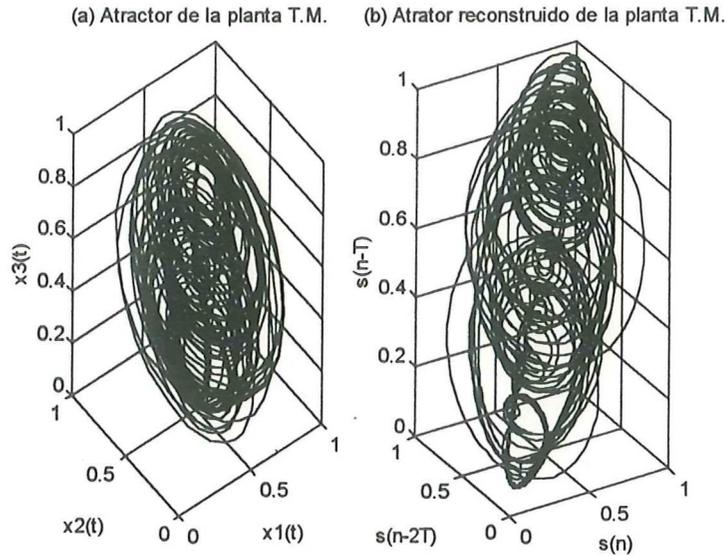


Figura 14. (a) Atractor del sistema planta con tiempo muerto en el espacio de estados original. (b) Atractor reconstruido a partir de las mediciones de $x_3(t)$.

II.5.4 Modelo del circuito de Chua.

Uno de los sistemas caóticos reales más simple y más ampliamente estudiado es el circuito de Chua. Como se muestra en la figura 15, este sistema consiste de un inductor lineal L , una resistencia R , dos capacitores lineales C_1 y C_2 , y una resistencia no lineal controlada por voltaje, conocida como diodo de Chua R_{NL} . En este circuito se ha demostrado la presencia de caos (en el sentido Shilnikov) en forma numérica, probado matemáticamente y comprobado en forma experimental (Kennedy, 1993).

Circuito de Chua

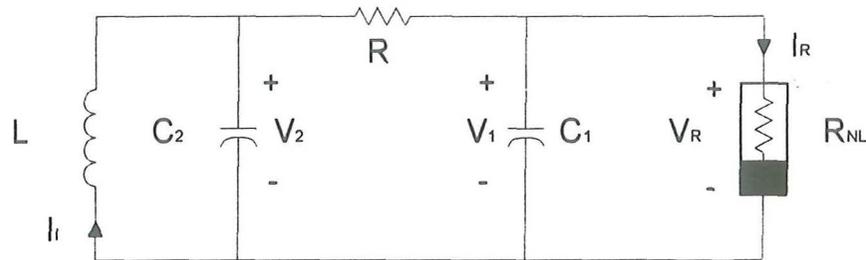


Figura 15. Diagrama del circuito de Chua.

La dinámica del circuito de Chua está descrita por las ecuaciones normalizadas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - h(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y, \end{aligned} \quad (12)$$

donde h es la función lineal por segmentos

$$h(x) = \begin{cases} m_1 x + (m_0 - m_1), & x \geq 1; \\ m_0 x, & |x| \leq 1; \\ m_1 x - (m_0 - m_1), & x \leq -1. \end{cases} \quad (13)$$

Para los valores paramétricos $\alpha = 9.0$, $\beta = 100/7$, $m_0 = -1/7$ y $m_1 = 2/7$, el comportamiento del sistema es caótico.

Se simuló numéricamente las ecuaciones anteriores usando un algoritmo tipo Runge-Kutta de cuarto orden, con paso de integración fijo $\tau_s = 0.05$, para la condición

inicial $(1,0,0)$. En cada paso de integración se almacenó el valor del estado $z(t)$.

A partir de esta medición se obtuvieron los resultados para el $PIM(T)$ y el $PFVMC(d)$ que se presentan en la figura 16.

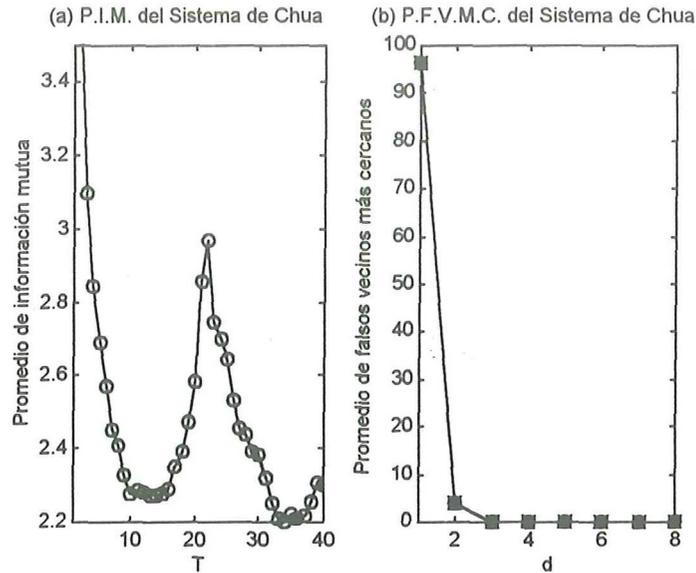


Figura 16. (a) $P.I.M.$ y (b) $P.F.V.M.C.$ del circuito de Chua, calculados a partir de una serie de medición de $x_3(t)$ cada 0.05 seg.

Con un tiempo de retardo de 0.55 segundos ($T = 11$, de acuerdo con la figura 16a) se generaron los vectores de información en tres dimensiones, formando el atractor reconstruido que se presenta en la figura 17b.

En la reconstrucción del atractor para el sistema del circuito de Chua, se observa básicamente la misma forma (“double scroll”) correspondiente al atractor característico del circuito de Chua en el espacio de estados original (figura 17a).

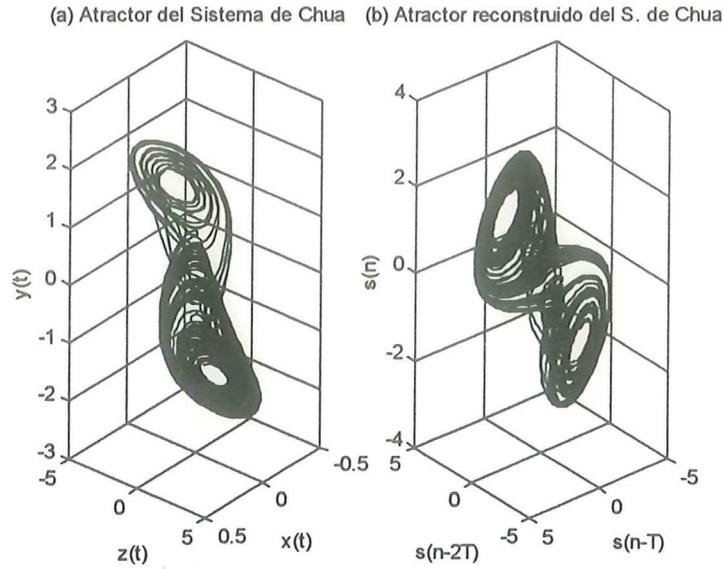


Figura 17. (a) Atractor caótico característico del circuito de Chua. (b) Atractor reconstruido a partir de x_3 .

II.5.5 Modelo de Lorenz.

Edward Lorenz fue el primero en evidenciar la existencia del caos determinístico (Lorenz, 1963). El sistema que utilizó consta de tres ecuaciones diferenciales ordinarias que dedujo como una simplificación de las ecuaciones diferenciales parciales desarrolladas para modelar la convección térmica en la capa atmosférica inferior. A partir de la publicación de este trabajo, el modelo de Lorenz ha sido uno de los más utilizados para probar las ideas relacionadas con la dinámica no lineal. Las ecuaciones del modelo son

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \sigma(y - x), \\
 \dot{y} &= \rho x - y - xz, \quad \sigma, \rho, \beta > 0, \\
 \dot{z} &= -\beta z + xy,
 \end{aligned} \tag{14}$$

donde σ es el número de Prandtl, ρ el de Rayleigh y β un factor geométrico.

Con los valores paramétricos $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y $\rho = 28$, el modelo de Lorenz presenta comportamiento caótico. Para estos valores se simuló numéricamente el sistema (14) mediante un algoritmo de integración de Runge-Kutta de cuarto orden a paso fijo

($\tau_s = 0.01$). En cada paso de integración se almacenó el valor del estado $x(t)$. A partir de esta serie de mediciones se calcularon el $PIM(T)$ y el $PFVMC(d)$, obteniendo los resultados que se presentan en la figura 18.

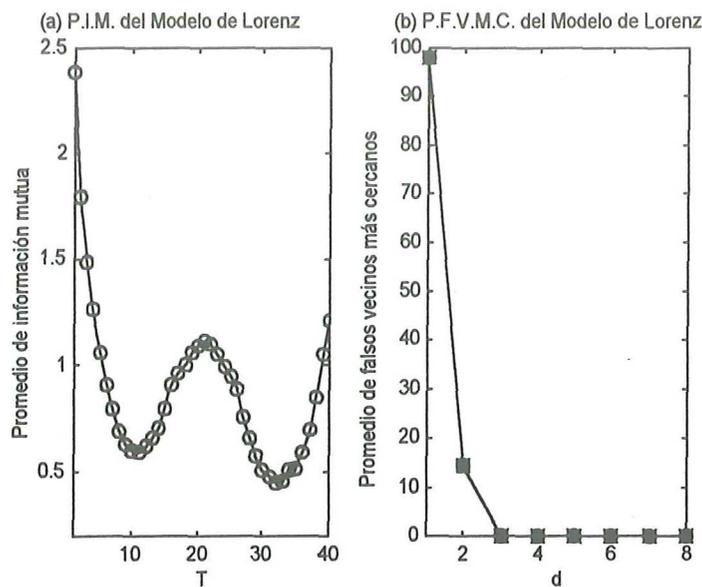


Figura 18. (a) $P.I.M.$ y (b) $P.F.V.M.C.$ para el modelo de Lorenz, calculados a partir de $x(t)$ cada 0.01 segundos.

Los resultados obtenidos indican que la dimensión de empotramiento es tres ($d_E = 3$), con un tiempo de retardo de diez veces el paso de integración ($T = 10$), utilizando estos valores se reconstruyó el atractor a partir de la medición del estado $x(t)$. En la figura 19a se presenta el atractor del modelo de Lorenz en el espacio de estados original, conocido como "mariposa de Lorenz". También se presenta el equivalente topológico reconstruido (figura 19b) utilizando los valores de reconstrucción indicados por los cálculos anteriores.

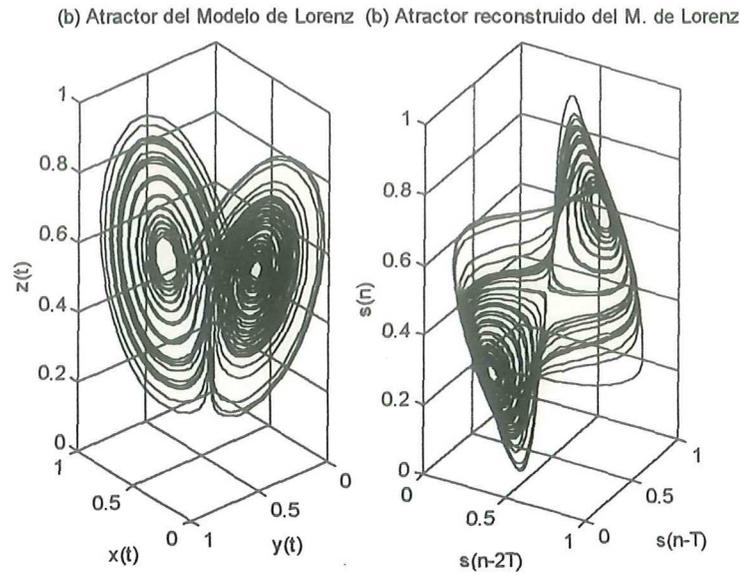


Figura 19. (a) Atractor caótico característico del modelo de Lorenz. (b) Atractor reconstruido a partir del estado x .

II.5.6 Circuito electrónico de Lorenz.

Se implementaron, por medio de amplificadores operacionales, las ecuaciones diferenciales ordinarias que conforman el modelo de Lorenz (Márquez, 1996).

Para evitar la saturación de los amplificadores se escalan las ecuaciones con un factor de 10, de tal forma que las ecuaciones implementadas fueron:

$$\begin{aligned}
 x &= \int_0^t \dot{x} = -\sigma \int_0^t (x - y) d\tau, \\
 y &= \int_0^t \dot{y} = -\left[10 \int_0^t x \left(z - \frac{\rho}{10} \right) d\tau + \int_0^t y d\tau \right], \\
 z &= \int_0^t \dot{z} = -\left[10 \int_0^t y (-x) d\tau + \beta \int_0^t z d\tau \right].
 \end{aligned} \tag{15}$$

En el diseño del circuito se fijaron los parámetros σ y β en 10 y $8/3$ respectivamente, mientras que el valor del parámetro ρ es introducido en forma externa a través de un voltaje, que en este caso es $2.8 V$ ($\rho/10$). Con esta configuración se realizó la captura de una serie de tiempo por medio del sistema de adquisición de datos DAS-16, con una frecuencia de muestreo de 100 Hz.

Igual que en el caso de simulación numérica, consideramos que sólo se tiene acceso al estado x . A partir de esta serie de tiempo se calcularon el $PIM(T)$ y el $PFVMC(d)$, obteniendo los resultados que se muestran en la figura 20.

Una vez determinados los valores de los parámetros de reconstrucción ($T = 15$ y $d_E = 3$), se reconstruyó el atractor con las mediciones experimentales, obteniendo el atractor que se presenta en la figura 21b.

En este circuito se representan las variables del modelo de Lorenz en forma de voltajes que están bien identificados, por lo tanto fue posible hacer una medición simultánea de las tres variables del espacio de estados original, a partir de las cuales se graficó el atractor que se muestra en la figura 21a.

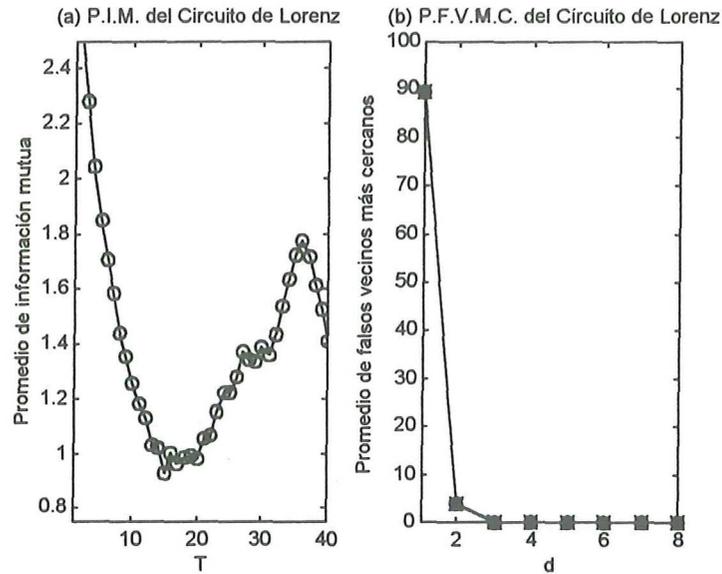


Figura 20. (a) $P.I.M.$ y (b) $P.F.V.M.C.$ para el circuito de Lorenz, a partir de $x(t)$, con una frecuencia de muestreo de 100Hz.

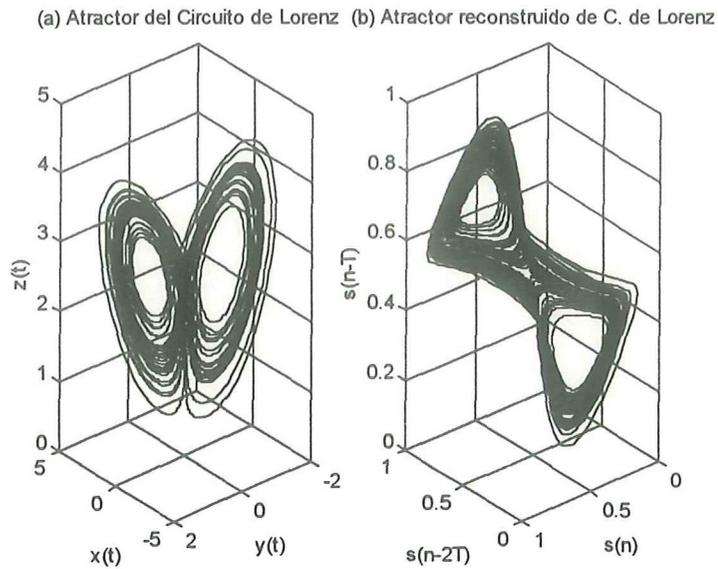


Figura 21. (a) Atractor del circuito de Lorenz en el espacio de estados original. (b) Atractor reconstruido a partir del estado x .

II.5.7 Sistema Hénon-continuo.

A continuación se analiza una serie de tiempo proveniente de un sistema continuo desconocido, del que sólo se conoce el periodo de excitación, y que tiene la particularidad de que si su salida es muestreada con un periodo igual al periodo de excitación y se forma un mapeo de primer retorno, se obtiene un objeto geométrico que coincide con el atractor del sistema de Hénon.

A partir de esta serie de tiempo, se calcularon el $PIM(T)$ y el $PFVMC(d)$. Los resultados obtenidos, que se presentan en la figura 22, indican que es posible obtener un equivalente topológico del atractor del sistema Hénon-continuo, utilizando vectores tridimensionales ($d_E = 3$) formados por coordenadas retardadas un tiempo igual a 3 veces el periodo de muestreo ($T = 3$). Utilizando estos valores se reconstruyó el atractor que se muestra en la figura 23.

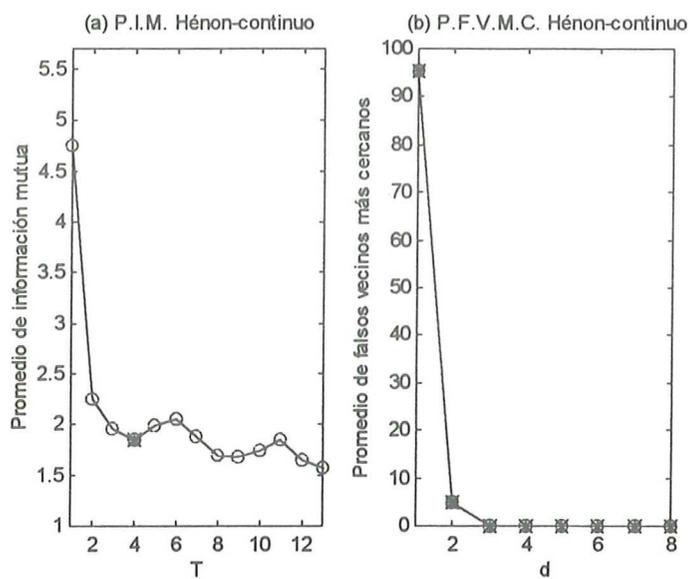


Figura 22. (a) *P.I.M.* y (b) *P.F.V.M.C.* para el sistema Hénon-continuo.

Atractor reconstruido del sistema Hénon-continuo

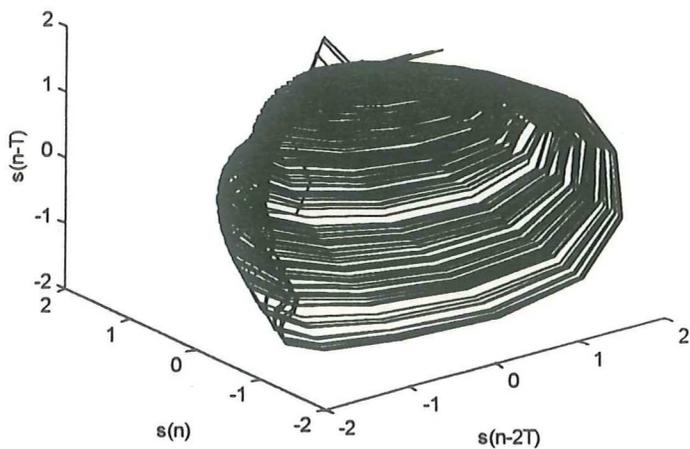


Figura 23. Atractor reconstruido del sistema Hénon-continuo.

II.6 Observaciones.

En este capítulo se presentó la técnica de coordenadas retardadas para reconstruir el espacio de estados de un sistema del que sólo se cuenta con una serie de tiempo. Para su aplicación es necesario determinar el tiempo de retardo T y la dimensión de empostramiento d_E . Para determinar estos parámetros de reconstrucción se desarrollaron los cálculos del promedio de información mutua ($PIM(T)$) y el promedio de falsos vecinos más cercanos ($PFVMC(d)$).

Uno de los principales problemas de implementación para estos cálculos es el tiempo de cómputo. Este llega a ser muy grande cuando se utilizan series de tiempo grandes. Como una solución a este problema se sugiere utilizar series más pequeñas para hacer el cálculo del $PIM(T)$, que como se mostró en la sección II.3.2.1, generan básicamente el mismo resultado para T .

Por otro lado, se mostró que el comportamiento del $PIM(T)$ y del $PFVMC(d)$ se pueden utilizar para determinar si la serie de tiempo es determinística o estocástica, de modo que con base en esta información se puedan escoger los métodos de análisis más adecuados para cada caso.

En el siguiente capítulo, se utilizarán estas reconstrucciones para generar modelos de la dinámica del sistema observado.

III. Modelado de la dinámica reconstruida.

III.1 Introducción.

Para diseñar un algoritmo de control es necesario, en general, tener un modelo del sistema que se desea controlar. Esto se dificulta cuando sólo se cuenta con una serie de tiempo, pues el modelo se basará exclusivamente en las características del espacio de estados reconstruido. En este caso, se puede recurrir a un procedimiento de modelado global, para luego aplicar un método de control convencional. En general, estos controles son muy sensibles al ruido y a los errores en la identificación del modelo. Si el objetivo de control es la regulación alrededor de un punto de equilibrio, es posible utilizar diferentes técnicas de control robusto de sistemas lineales o no lineales [Isidori, 1997; Kristic, 1995; Freeman, 1996; etcetera]. El problema es mucho más complicado cuando el objetivo es el control de órbitas periódicas, pues en este caso, es necesario tomar en cuenta algunos aspectos de la dinámica global o semiglobal del sistema, donde los efectos no lineales no pueden despreciarse.

Una opción atractiva es utilizar el método de control OGY, pues para su aplicación sólo es necesario un modelo local de la dinámica alrededor de una órbita periódica inestable, el cual se puede obtener directamente del espacio de estados reconstruido (Ott *et al.*, 1990).

En este capítulo se presentan las herramientas necesarias para obtener este tipo de modelos.

En primer lugar, debido a que el método de control OGY fue desarrollado para sistemas discretos, es necesario transformar la dinámica reconstruida a un mapeo. Esta transformación se puede lograr mediante el mapeo de Poincaré. Una vez que se tiene la

dinámica representada como un mapeo se debe escoger uno de los puntos fijos inestables contenidos en el atractor reconstruido, para modelar la dinámica alrededor de éste. La localización de estos puntos fijos inestables se realiza mediante el análisis de puntos de recurrencia. Por último, el modelo de la dinámica alrededor del punto fijo inestable se puede obtener mediante un procedimiento de linealización como el propuesto por Eckmann y Ruelle (1985) o alguno similar como el de Sano y Sawada (1985).

III.2 Mapeo de Poincaré para sistemas reconstruidos.

III.2.1 Definición del mapeo de Poincaré.

Existen varias formas de definir formalmente⁸ el mapeo de Poincaré. En la práctica, el mapeo de Poincaré se define mediante la elección de un plano Σ transversal al flujo del sistema continuo. A este plano se le llama sección de Poincaré; divide el espacio \mathbf{R}^{d_E} en dos regiones:

$$\begin{aligned}\Sigma_+ &\stackrel{def}{=} \{x : \langle h, x - x_\Sigma \rangle > 0\}, \\ \Sigma_- &\stackrel{def}{=} \{x : \langle h, x - x_\Sigma \rangle < 0\},\end{aligned}$$

donde x es un punto de la trayectoria del sistema (ϕ_t), h es un vector normal a Σ , x_Σ es un punto que pertenece a Σ y $\langle u, v \rangle = u^T v$ es el producto interno de los vectores v y u .

Con una elección adecuada de h y x_Σ la trayectoria observada intersectará varias veces a Σ , pasando de la región Σ_- a Σ_+ . Entonces el mapeo de Poincaré se define como el mapeo P que lleva el n -ésimo punto de intersección ξ_n de la trayectoria ϕ_t con el plano Σ , al siguiente punto de intersección,

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi_{n+1}.$$

⁸ Ver el capítulo 2 de *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, de T.S. Parker y L.O. Chua, Springer-Verlag, 1989.

Según se defina la sección de Poincaré se pueden generar tres diferentes mapeos:

- *Mapeo unilateral positivo* P_+ . Se define mediante los puntos de la trayectoria que intersectan a Σ en la dirección positiva.
- *Mapeo unilateral negativo* P_- . Se define mediante los puntos de intersección en la dirección negativa.
- *Mapeo bilateral* P_{\pm} . Se define mediante los puntos de intersección en cualquier dirección.

III.2.2 Conjuntos límite del mapeo de Poincaré.

A través del mapeo de Poincaré se reemplaza el flujo $\phi_t(x)$ de dimensión d_E del sistema continuo con un mapeo discreto de dimensión $(d_E - 1)$. En este mapeo se mantienen las características invariantes de la dinámica continua asociada, en particular el conjunto límite de la dinámica asociada corresponde al conjunto límite del mapeo, como se indica a continuación:

- *Punto de equilibrio*. No existe un conjunto límite en el mapeo de Poincaré que corresponda a un punto de equilibrio en la dinámica asociada.
- *Órbita periódica*. Una órbita periódica de periodo uno en la dinámica continua corresponde a un punto fijo del mapeo de Poincaré, y una subarmónica de orden k corresponde a una órbita cerrada de periodo k del mapeo de Poincaré.
- *Órbita cuasiperiódica*. El conjunto límite del mapeo de Poincaré para una órbita cuasiperiódica en la dinámica asociada, se caracteriza por tener una forma geométrica simple en la sección de Poincaré, como círculos, arcos y líneas (cualquier curva simple unidimensional).
- *Atractor caótico*. El mapeo de Poincaré de un atractor caótico continuo también es caótico, por lo tanto en la sección de Poincaré no se presentará un objeto geométrico simple, sino una estructura parecida al conjunto de Cantor.

III.2.3 Obtención del mapeo de Poincaré.

Dependiendo de la información disponible del sistema reconstruido hay dos formas de obtener el mapeo de Poincaré:

Cuando el sistema es forzado con una señal de excitación periódica, es posible contruir un mapeo de primer retorno con base en este periodo. Para hacer esto se define una frecuencia de muestreo con la cual se forman los puntos del mapeo tomando el valor actual de la señal medida y su valor un periodo de excitación después. Con estos puntos se define el mapeo de Poincaré.

En el caso más general no se tiene acceso a esta información, por lo tanto, el mapeo de Poincaré se obtiene a partir de los puntos de cruce de la trayectoria reconstruida con la sección de Poincaré. Para identificar estos cruces se utiliza el siguiente procedimiento.

A partir de la representación de la sección de Poincaré Σ mediante la ecuación del plano

$$H(x) \stackrel{def}{=} \langle h, x - x_\Sigma \rangle = 0 \quad (16)$$

se pueden localizar los puntos de cruce entre la trayectoria $\phi_t(x)$ y el plano Σ , evaluando $H(\phi_t(x))$ en cada paso de integración, hasta que dos puntos consecutivos $x_1 \stackrel{def}{=} \phi_{t_1}(x)$ y $x_2 \stackrel{def}{=} \phi_{t_2}(x)$ estén en diferentes lados de Σ ; es decir, hasta que $H(x_1)$ y $H(x_2)$ sean de signos opuestos. Cuando esto sucede significa que entre x_1 y x_2 existe un punto ξ ,

$$\xi \stackrel{def}{=} \phi_{t_c}(x), \text{ con } t_1 < t_c < t_2,$$

que corresponde a una intersección de la trayectoria ϕ_t con la sección de Poincaré Σ .

Para conocer la localización exacta del punto de intersección ξ , se aplica un método de interpolación de la dinámica entre x_1 y x_2 . Cuando únicamente se cuenta con la trayectoria reconstruida, no se tiene acceso a la dinámica entre los puntos consecutivos x_1 y x_2 . En este caso se utiliza una interpolación lineal, de modo que el punto de intersección está dado por

$$\xi \approx \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} x_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} x_2, \quad (17)$$

donde $\alpha_1 = H(x_1)$ y $\alpha_2 = H(x_2)$.

A partir de estos puntos de intersección ξ se puede definir el mapeo de Poincaré de la siguiente manera:

$$\xi_{n+1} = P(\xi_n; p), \quad (18)$$

donde p es un vector compuesto por los parámetros de los que depende el sistema.

III.2.3.1 Implementación del mapeo de Poincaré.

A continuación se presenta un algoritmo para obtener el mapeo de Poincaré a partir de una series de mediciones $s(n)$:

1. Elegir la sección de Poincaré (h, x_Σ) .
2. Almacenar en memoria $(d_E - 1)T + 1$ mediciones $s(n)$.
3. Generar dos vectores de reconstrucción usando

$$y(k) = [s(n), s(n - T), s(n - 2T), \dots, s(n - (d_E - 1)T)],$$
 donde $k = n - (d_E - 1)T$.
4. Evaluar $H(y(1))$ y $H(y(2))$ (ecuación 16).
5. Actualizar las mediciones en memoria y repetir desde el 3, hasta que se presente un cambio de signo.
6. Interpolar linealmente para obtener ξ (ecuación 17).
7. Graficar los puntos de intersección.

Este algoritmo se implementó mediante un programa en lenguaje C (Borland C++ 3.0).

III.2.4 Resultados del mapeo de Poincaré.

III.2.4.1 Robot subactuado.

El mapeo de Poincaré obtenido mediante el procedimiento anterior para el Robot subactuado⁹, con una sección de Poincaré unilateral positiva definida por el vector

⁹ Para este sistema y los demás considerados en este capítulo se utilizaron los resultados de reconstrucción presentados en las sección II.5.

normal $h = [0, 1, 0]$ y el punto $x_\Sigma = [0, -1.575, 0]$, se presenta en la figura 24.

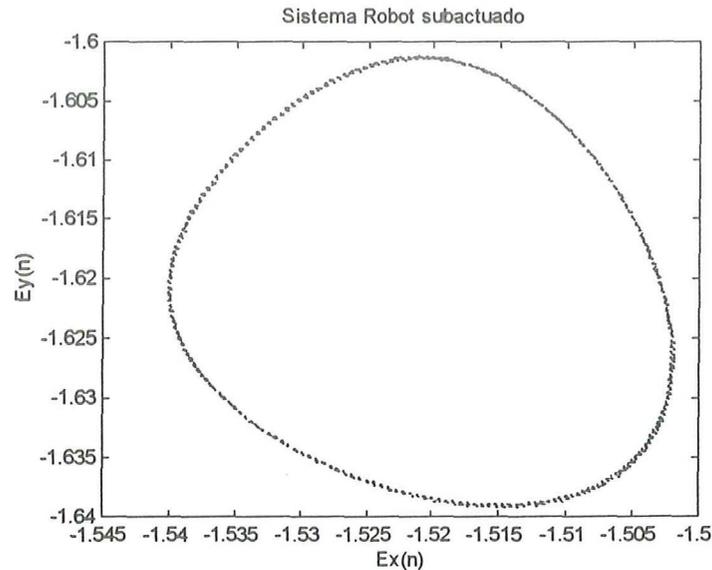


Figura 24. Mapeo de Poincaré unilateral del robot subactuado.

A partir de la forma de este mapeo de Poincaré se puede inferir que el movimiento del Robot subactuado es cuasiperiódico, pues todos los puntos se agrupan en una curva cerrada simple equivalente a una circunferencia.

III.2.4.2 Planta con tiempo muerto.

En la figura 25 se presenta el mapeo de Poincaré del sistema planta con tiempo muerto, obtenido para la sección de Poincaré unilateral positiva ubicada mediante $h = [1, 0, 0]$ y el punto $x_\Sigma = [0.25, 0, 0]$.

Como se puede observar, la forma que se presenta en la sección de Poincaré para este sistema no es regular, es básicamente una nube de puntos. Esto indica que el comportamiento en el atractor es más complejo que el movimiento cuasiperiódico del Robot subactuado; por lo tanto, se puede inferir que se trata de un comportamiento caótico.

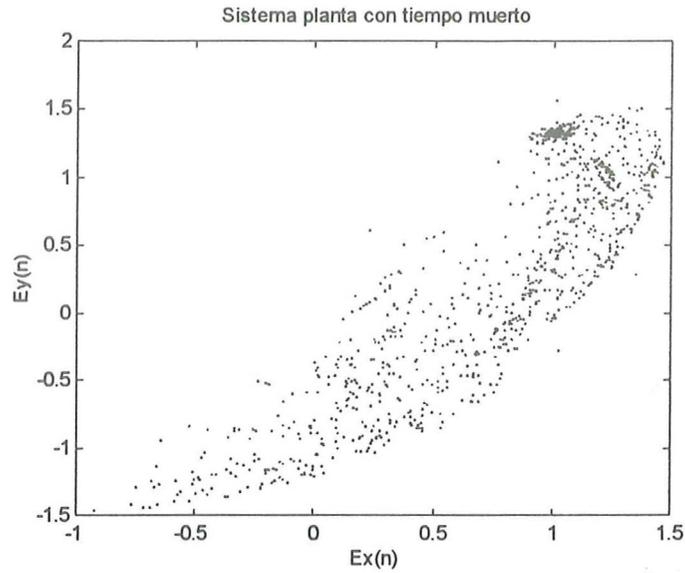


Figura 25. Mapeo de Poincaré unilateral de la planta con tiempo muerto.

III.2.4.3 Modelo del circuito de Chua.

En la figura 26 se presenta el mapeo de Poincaré del modelo del circuito de Chua, obtenido para una sección de Poincaré unilateral localizada en el punto $x_{\Sigma} = [1.75, 0, 0]$ y con el vector normal $h = [1, 0, 0]$.

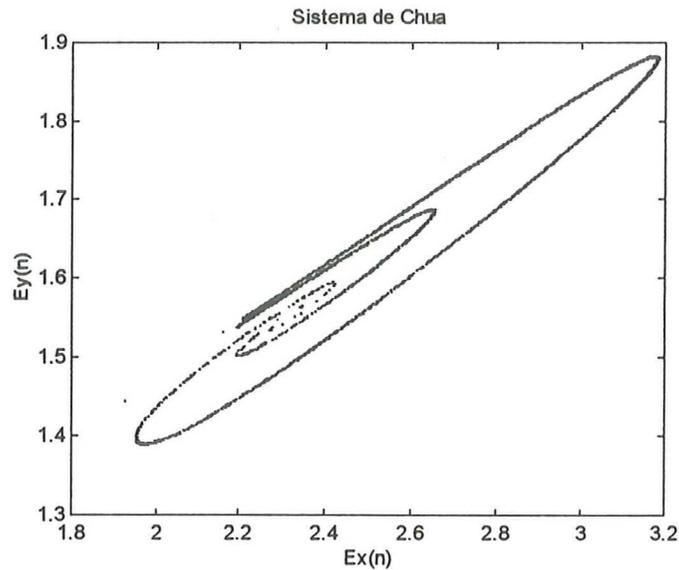


Figura 26. Mapeo de Poincaré unilateral para el sistema del circuito de Chua.

En este mapeo se observa una estructura bien definida, pero por su forma no puede ser producto de un movimiento cuasiperiódico. Por lo tanto, aún cuando no es posible observar claramente la estructura fractal debido a que las curvas son muy delgadas, el movimiento del sistema reconstruido es definitivamente caótico.

III.2.4.4 Modelo de Lorenz.

En la figura 27 se presenta la forma del mapeo de Poincaré del sistema de Lorenz obtenido para la sección de Poincaré unilateral positiva ubicada mediante el vector normal $h = [1, 0, 0]$ y el punto $x_{\Sigma} = [10.75, 0, 0]$. En este mapeo la sección de Poincaré tiene una forma casi lineal; sin embargo, el mapeo de Poincaré es caótico y su apariencia simple es producto de la disipación del sistema.

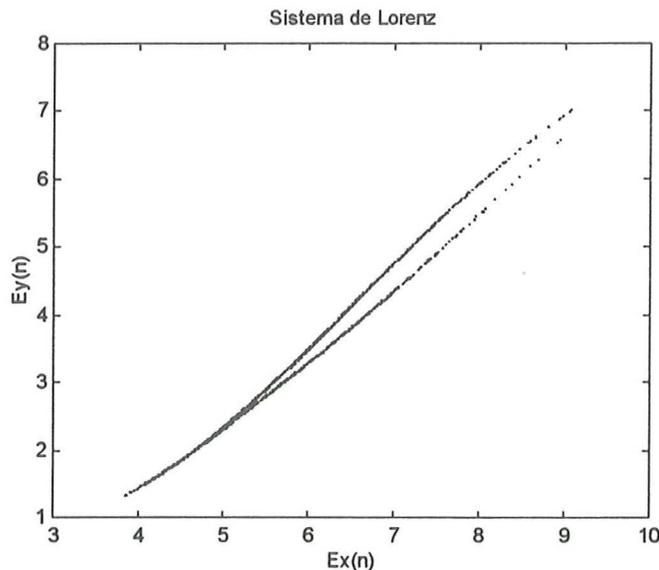


Figura 27. Mapeo de Poincaré unilateral del sistema de Lorenz.

III.2.4.5 Sistema Hénon-continuo.

Para el sistema Hénon-continuo se puede obtener el mapeo de Poincaré de las dos formas discutidas en la sección III.2.3. En la figura 28 se presenta el mapeo de Poincaré que se obtiene al aplicar el procedimiento descrito en la sección anterior, para una sección de Poincaré definida mediante el vector normal $h = [0, 1, 0]$ y el punto

$$x_{\Sigma} = [0, 0.75, 0].$$

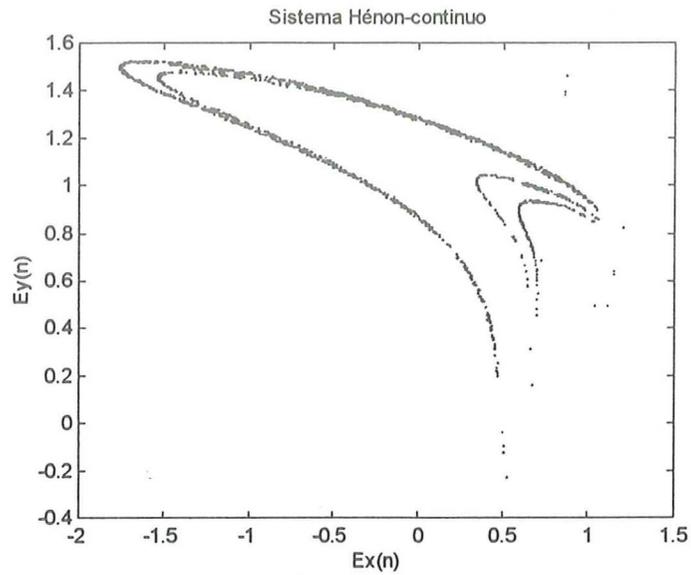


Figura 28. Mapeo de Poincaré unilateral del sistema Hénon-continuo, utilizando la reconstrucción del espacio de estados.

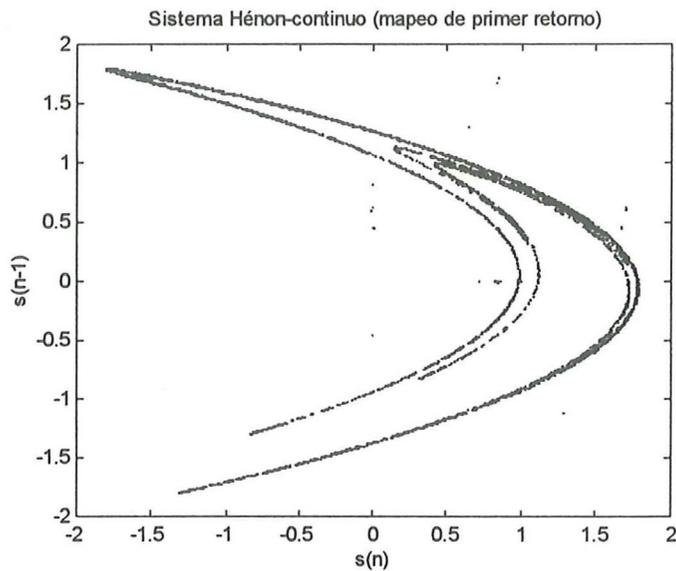


Figura 29. Mapeo de primer retorno del sistema Hénon-continuo, usando el periodo de excitación (1 seg.) para construir el mapeo.

Utilizando el periodo de excitación del sistema Hénon-continuo, que es igual a un segundo, se define una frecuencia de muestreo y se obtiene el mapeo de primer retorno que se presenta en la figura 29.

III.3 Localización de órbitas periódicas.

Se ha demostrado que un atractor reconstruido se puede representar como un conjunto denso de órbitas periódicas inestables, de modo que es posible escoger una de ellas para construir un modelo local de la dinámica [Auerbach *et al.*, 1987 y Cvitanović, 1988]. Para esto es necesario, en primer lugar, determinar su localización en el espacio de estados reconstruido.

Las órbitas periódicas inestables, que son de tipo silla y están empotradas en el atractor reconstruido, tienen una dirección atrayente y una repelente, de modo que la trayectoria reconstruida llegará a la órbita a través de su dirección atrayente, permaneciendo cerca de ésta por un tiempo, para luego alejarse a lo largo de la dirección repelente. Mientras un punto de la trayectoria reconstruida se encuentra en la vecindad de la órbita tipo silla, se moverá aproximadamente a la frecuencia que ésta impone. Entonces se puede localizar una órbita tipo silla empotrada en el atractor caótico identificando los puntos de la trayectoria que regresan a su vecindad, conforme evoluciona la dinámica. A estos puntos se les llama puntos de recurrencia (Lathrop y Kostelick, 1989).

III.3.1 Análisis de puntos de recurrencia.

En la representación de un sistema mediante su mapeo de Poincaré, una órbita tipo silla se transforma en un punto fijo inestable, también de tipo silla, de modo que para encontrar los puntos de recurrencia sólo es necesario analizar los puntos de intersección ξ que se generan dentro de una vecindad.

El punto de recurrencia del punto de intersección ξ_i se localiza analizando los puntos

de intersección siguientes $\xi_{i+1}, \xi_{i+2}, \dots, \xi_N$ del mapeo de Poincaré, hasta encontrar el punto ξ_k con el índice más pequeño para el cual

$$\|\xi_k - \xi_i\| < \epsilon,$$

donde ϵ es un número pequeño positivo. Típicamente existe en la vecindad de ξ_i una órbita periódica inestable de periodo $m = k - i$. Por ejemplo, hay una órbita tipo silla de periodo uno en la vecindad del vector ξ_{30} si $\|\xi_{31} - \xi_{30}\| < \epsilon$, y una órbita de periodo dos alrededor de ξ_{60} si $\|\xi_{61} - \xi_{60}\| > \epsilon$ y $\|\xi_{62} - \xi_{60}\| < \epsilon$.

En general, cualquier punto del mapeo puede ser representativo de una órbita periódica inestable. Sin embargo, para tener una mejor oportunidad de determinar correctamente un modelo local de la dinámica, es necesario escoger un punto fijo inestable que sea representativo de una de las órbitas que tenga mayor presencia en el atractor reconstruido; es decir, un punto fijo que tenga un número grande de puntos de recurrencia asociados a éste. Para identificar estos puntos fijos, se agrupan los puntos de recurrencia de la siguiente manera.

Primero se localizan los puntos de recurrencia para un valor pequeño¹⁰ de ϵ . Se toma el primero como punto representativo ξ_{r_1} del primer grupo de puntos de recurrencia. Si el siguiente punto de recurrencia ξ cumple con la condición

$$\|\xi - \xi_{r_1}\| < \epsilon,$$

se considera que forma parte del mismo grupo representado por ξ_{r_1} ; de lo contrario, este punto será el punto representativo ξ_{r_2} del siguiente grupo de puntos de recurrencia y estará asociado a otro punto fijo inestable. Se examinan de esta forma todos los puntos de recurrencia localizados para el valor actual de ϵ .

Enseguida se incrementa el valor de ϵ y se repite el procedimiento anterior, observando el comportamiento de los grupos de puntos de recurrencia. Cuando el número de

¹⁰ El primer valor de ϵ que se utiliza es el más pequeño para el cual existe al menos un punto de recurrencia.

grupos se mantenga estable ante los incrementos de ϵ , se tiene la clasificación adecuada de los puntos de recurrencia. En otras palabras, con este procedimiento se identifican las localidades aproximadas de los puntos fijos inestables predominantes en el atractor reconstruido.

III.3.1.1 Implementación del análisis de puntos de recurrencia.

Se presenta el algoritmo utilizado para determinar la localización aproximada de las órbitas tipo silla contenidas en el atractor reconstruido.

1. Identificar, si existe, el punto de recurrencia para cada uno de los puntos de intersección ξ para el valor actual de ϵ .
2. Agrupar los puntos de recurrencia como se indicó arriba.
3. Incrementar el valor de ϵ y repetir desde el paso 1, hasta que el número de grupos de recurrencia no aumente ante los incrementos de ϵ .
4. Graficar los puntos representativos ξ_{r_i} de cada grupo de recurrencia.

Este algoritmo se realizó mediante un programa en el paquete MATLAB, versión 4.2c.

III.4 Identificación de la dinámica local.

III.4.1 Linealización de Eckmann-Ruelle.

Los puntos de intersección generados por la trayectoria reconstruida en la sección de Poincaré pueden ser tratados como iteraciones de un mapeo no lineal P , del que no se tiene la forma exacta. Considerando que P es casi lineal en la vecindad del punto fijo inestable ξ_F , se puede aproximar este mapeo mediante la expresión

$$P(\xi) \approx A\xi + b, \quad (19)$$

donde A es una matriz de dimensión $(d_E - 1) \times (d_E - 1)$ que representa una estimación

de la matriz Jacobiana del mapeo de Poincaré evaluada en ξ_F y b es un vector de dimensión d_E .

Esta aproximación de la dinámica discreta alrededor de ξ_F se puede calcular mediante el algoritmo de mínimos cuadrados, utilizando el procedimiento conocido como linealización de Eckmann-Ruelle, que se describe a continuación (Eckmann y Ruelle, 1985).

Lo que se desea modelar es la manera en que la dinámica del sistema desconocido lleva pequeños vectores alrededor del punto de referencia ξ_F a la vecindad del siguiente punto en la evolución del sistema. Para lograr esto, primero se identifican los puntos $\{\xi_{k_i}\}_{i=1}^N$ incluidos en una bola de radio r alrededor del punto fijo inestable ξ_F . Estos puntos ξ_{k_i} son llevados por el mapeo a sus imágenes ξ_{k+1_i} . A partir de estos dos grupos de puntos se definen los vectores de desplazamiento

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^i &= \{\xi_{k_i} - \xi_F \mid \|\xi_{k_i} - \xi_F\| \leq r\}, \\ \mathbf{y}^i &= \{\xi_{k+1_i} - \xi_F \mid \|\xi_{k+1_i} - \xi_F\| \leq r\}, \end{aligned} \quad (20)$$

de modo que la ecuación (19) se puede escribir en la forma

$$\mathbf{y}^i = A\mathbf{x}^i + b. \quad (21)$$

El k -ésimo renglón a_k de A y el k -ésimo componente de b están dados por la solución, en sentido de mínimos cuadrados, de la ecuación

$$\mathbf{y}_k^i = \langle a_k, \mathbf{x}^i \rangle + b_k, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N. \quad (22)$$

III.4.2 Problemas para estimar la dinámica.

III.4.2.1 Asignación del tamaño de la vecindad r .

Una mala elección del tamaño de la vecindad es uno de los principales problemas para obtener el modelo local, pues si la vecindad es muy grande, los efectos de las no linealidades pueden llegar a ser importantes, de modo que el modelo lineal propuesto

en la sección anterior no sería una buena aproximación de la dinámica. Por otro lado, si la vecindad es muy pequeña, no se tendrán suficientes puntos en la vecindad para obtener una solución confiable del problema de mínimos cuadrados. A continuación se presenta una forma de escoger el tamaño de la vecindad r , de modo que se satisfagan estos dos requerimientos.

Primero se obtiene el modelo de la dinámica utilizando el valor más pequeño de r para el cual el número de puntos en la vecindad de ξ_F es por primera vez mayor al mínimo entre $2(d_E - 1)$ y $(d_E - 1 + 4)$. Esto es con el fin de que se tengan más puntos medidos en la vecindad del punto fijo que incógnitas, de modo que se pueda resolver adecuadamente el problema de mínimos cuadrados (Eckmann *et al.*, 1986).

Enseguida, se incrementa el valor de r y se obtiene el modelo otra vez. Si el modelo no ha cambiado en forma importante, es decir, si los valores de los elementos de la matriz A no varían gran cantidad, se vuelve a incrementar el valor de r . Este procedimiento se repite hasta que se tengan suficientes puntos en la vecindad¹¹, siempre que los elementos de A no hayan cambiado mucho debido al efecto de las no linealidades.

III.4.2.2 Mínimos cuadrados mal condicionados.

Los atractores caóticos de baja dimensión tienen una estructura fractal, con una forma de capas sobrepuestas. Estas capas son difíciles de distinguir debido a las limitaciones de resolución y el tamaño típico de las series de datos; de modo que en el espacio de estados sólo se distingue una curva simple.

Por ejemplo, en una sección de Poincaré de dos dimensiones, si todos los puntos en la vecindad de ξ_F se agrupan casi en una curva simple el atractor aparenta ser unidimensional con la resolución disponible. Aún cuando se puede medir la expansión a lo largo de la dirección inestable en ξ_F , no se tienen suficientes puntos para medir la contracción en la otra dirección. Entonces no es posible calcular una estimación adecuada

¹¹ Se recomienda un número de vecinos cercano a 50 para tener los resultados más apropiados (Lapthrop y Kostelick, 1989).

de la matriz Jacobiana, pues debido a la singularidad que se presenta en las matrices de covarianza que se calculan en el algoritmo de mínimos cuadrados, el resultado obtenido para la matriz A tiene grandes errores relativos. Cuando esta situación se presenta, se dice que el problema de mínimos cuadrados está mal condicionado. Este problema se puede detectar utilizando la descomposición en valores singulares, como se indica a continuación.

La matriz de mediciones M de orden $m \times d$ ($m > d$), se puede escribir como el producto de una matriz ortogonal por columnas U de dimensión $m \times d$, una matriz diagonal W de orden $d \times d$ y la transpuesta de una matriz ortogonal V de dimensión $d \times d$,

$$M = UWV^T. \quad (23)$$

A esta representación de la matriz M se le llama descomposición en valores singulares porque los elementos diagonales w_i de la matriz W ordenados por tamaño $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_d \geq 0$, son los valores singulares de M (Press *et al.*, 1986).

Si la matriz M es de rango r ($r < d$), entonces sólo los primeros r valores singulares son positivos y el resto son ceros. Debido a los errores de redondeo rara vez los valores singulares son exactamente cero. Para determinar si la matriz M tiende a ser deficiente de rango, se define el número de condición μ como:

$$\mu = \frac{w_1}{w_d}.$$

En la literatura se indica que cuando el valor μ es mayor a 10, el problema de mínimos cuadrados puede estar mal condicionado [Kostelick y Yorke, 1990; Kostelick, 1992].

El problema de mínimos cuadrados mal condicionado produce grandes errores relativos en el cálculo de la matriz Jacobiana. Esto se puede evitar realizando un cambio de coordenadas, de modo que los vectores de desplazamiento estén alineados con la dirección inestable del punto fijo. Esta dirección corresponde al vector de la base ortogonal (la matriz V) asociado con el valor singular más grande de M . En estas coordenadas se obtiene un mapa unidimensional a lo largo de la dirección inestable de la dinámica, que

es la única que se puede evaluar, y mediante la transformación de coordenadas inversa se obtiene la matriz A del modelo local, que cuando $d = 2$ será de rango uno.

III.5 Obtención del modelo local.

Una vez que se conoce la localización aproximada del punto fijo inestable ξ_{r_i} alrededor del cual se modelará la dinámica del sistema, se utiliza el siguiente procedimiento para obtener la localización exacta del punto fijo inestable ξ_F , e identificar la matriz Jacobiana del mapeo A en ese punto.

Primero se toma como primera aproximación al punto fijo ξ_F , el punto representativo ξ_r del grupo de puntos de recurrencia seleccionado $\xi_F^i = \xi_r$, y se modela la dinámica local por medio de la linealización de Eckmann-Ruelle.

Una vez obtenidos los valores de A y b , se calcula una nueva aproximación a la posición exacta de ξ_F mediante la ecuación

$$\xi_F^{i+1} - \xi_F^i = (I - A)^{-1}b, \quad (24)$$

donde I representa la matriz identidad del tamaño adecuado.

Con este nuevo valor para ξ_F^i , se calcula de nuevo A y b . Este procedimiento se repite hasta que los valores de ξ_F^i y A se mantengan básicamente iguales de una iteración a la siguiente. En ese momento se tiene la mejor aproximación a la dinámica del sistema en la vecindad del punto fijo ξ_F .

Para determinar el desempeño del modelo lineal se calcula el error cuadrático medio normalizado, utilizando la siguiente ecuación:

$$Error = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\xi_{Med}^i - \xi_{Cal}^i}{\xi_{Med}^i} \right)^2} \cdot 100\%, \quad (25)$$

donde ξ_{Med}^i es el punto en la vecindad medido y ξ_{Cal}^i es el punto correspondiente calculado.

III.5.1 Algoritmo para la obtención del modelo local.

A continuación se presenta el algoritmo utilizado para obtener el modelo de la dinámica local de un sistema a partir de su representación en el mapeo de Poincaré.

1. Identificar los puntos fijos (como se indica en la sección III.3).
2. Escoger un tamaño de vecindad r (como se indica en la sección III.4.2.1).
3. Calcular el número de condición de las observaciones por medio de la descomposición en valores singulares (ecuación 23).
4. Utilizar la aproximación actual al punto fijo ξ_F^i para obtener A y b , mediante la linealización de Eckmann-Ruelle (sección III.4.1)
5. Calcular la nueva aproximación al punto fijo ξ_F^i , utilizando la ecuación (24) y repetir desde el paso 4 hasta que los resultados permanezcan constantes.
6. Calcular el porcentaje de error del modelo con la ecuación (25).
7. Graficar los resultados del modelado.

III.6 Resultados del modelado local.

III.6.1 Sistema de Hénon.

El mapeo de Hénon es un sistema dinámico discreto de segundo orden con un atractor caótico, que fue desarrollado para fines de simulación numérica por M. Hénon en 1976.

Las ecuaciones de este sistema son:

$$x_{n+1} = \alpha - x_n^2 + \beta y_n,$$

$$y_{n+1} = x_n.$$

Con los parámetros $\alpha = 1.4$ y $\beta = 0.3$, el mapeo de Hénon presenta un atractor caótico que tiene inmerso un punto fijo inestable, que está dado por:

$$x_F = y_F = \frac{1}{2} \left[(\beta - 1) + \sqrt{(\beta - 1)^2 + 4\alpha} \right]; \quad \xi_F = \begin{pmatrix} 0.8839 \\ 0.8839 \end{pmatrix},$$

y la matriz Jacobiana del sistema en este punto fijo está dada por

$$A = \begin{pmatrix} -2x_F & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.7678 & 0.3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando las herramientas desarrolladas en este capítulo se obtuvieron los siguientes resultados.

- Localización aproximada del punto fijo inestable.

Se analizaron los puntos de recurrencia para 4000 puntos del mapeo de Hénon, localizando el punto representativo ξ_{r_1} del punto fijo inestable en

$$\xi_{r_1} = \begin{pmatrix} 0.8810 \\ 0.8836 \end{pmatrix}.$$

- Asignación del tamaño de la vecindad r .

Utilizando el procedimiento presentado en la sección 2.3.1, para esta linealización se asignó el tamaño de vecindad en

$$r = 0.075951,$$

para el cual se tienen 39 puntos en la vecindad del punto fijo ξ_F .

- Número de condición μ .

Para determinar si se presenta el problema de mínimos cuadrados mal condicionado se calculó en número de condición para las matrices $M_x = \{\mathbf{x}^i\}$ y $M_y = \{\mathbf{y}^i\}$, obteniendo

$$\mu_x = 1.4744, \quad \mu_y = 9.4895.$$

Por tanto, es posible obtener una buena aproximación de la matriz Jacobiana del sistema en dos dimensiones.

- Resultados finales.

Después de iterar 6 veces el cálculo de la linealización y la aproximación al punto fijo, se obtuvieron los siguientes resultados:

$$\xi_F = \begin{pmatrix} 0.8837309 \\ 0.8837309 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -1.760456 & 0.301541 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 81.3 \times 10^{-15} \\ 9.6 \times 10^{-15} \end{pmatrix}.$$

En la figura 30 se presenta la localización del punto fijo inestable en el atractor del sistema de Hénon. El comportamiento¹² del modelo local identificado se presenta en la figura 31. El error que se presenta entre los puntos medidos y los calculados fue del 1.7642%.

Como se puede ver, los resultados obtenidos con los algoritmos presentados en esta sección funcionan adecuadamente en la identificación de la dinámica local de este sistema.

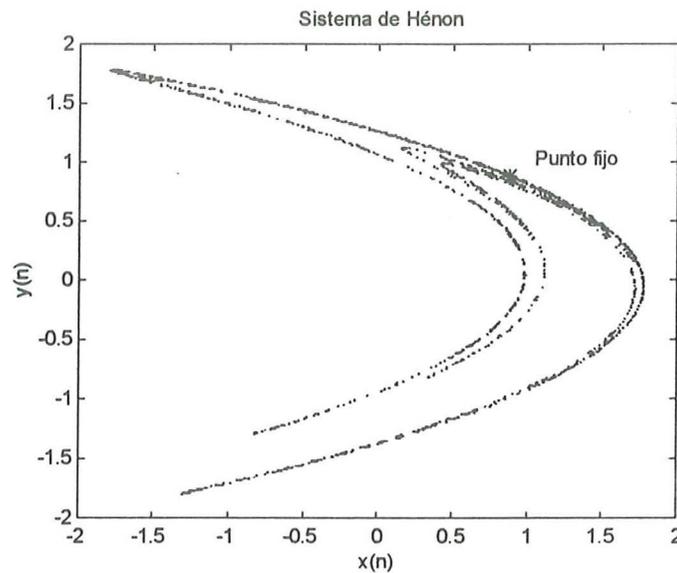


Figura 30. Localización del punto fijo inestable del sistema de Hénon.

¹² En todas las gráficas de comportamiento, las cruces (+) corresponden a los puntos medidos de la vecindad y los círculos (o) corresponden a los valores calculados con el modelo.

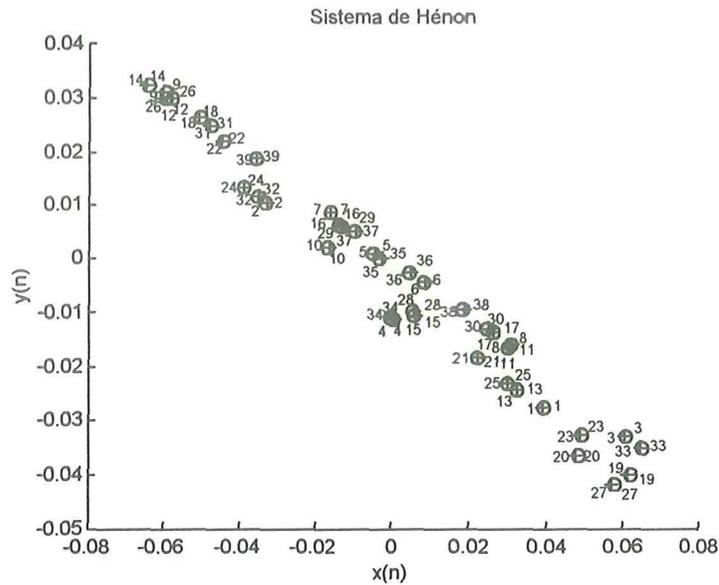


Figura 31. Comportamiento del modelo local del sistema de Hénon.

III.6.2 Modelo de Lorenz.

Se aplicaron los procedimientos de modelado desarrollados en este capítulo al mapeo de Poincaré del sistema de Lorenz reconstruido, obteniendo los resultados que se presentan a continuación.

- Localización aproximada del punto fijo inestable.

Se analizó la recurrencia de 5300 puntos de intersección ξ en la sección de Poincaré, para localizar el mejor punto fijo contenido en el atractor reconstruido, obteniendo el punto representativo

$$\xi_{r_1} = \begin{pmatrix} 5.1592 \\ 2.4493 \end{pmatrix}.$$

- Asignación del tamaño de la vecindad r .

Se asignó el tamaño de vecindad $r = 0.0811$, con el cual se tienen 39 puntos en la vecindad del punto fijo ξ_F .

- Número de condición μ .

Se calculó el número de condición para las matrices $M_x = \{\mathbf{x}^i\}$ y $M_y = \{\mathbf{y}^i\}$, obteniendo

$$\mu_x = 6.7860, \quad \mu_y = 128.9844.$$

Esto es representativo de un posible problema de mínimos cuadrados mal condicionado.

- Resultados finales.

Utilizando el procedimiento de mínimos cuadrados normal se obtuvo el modelo:

$$\xi_F = \begin{pmatrix} 5.1580 \\ 2.4489 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 5.3746 & -0.7094 \\ 5.1703 & -0.6816 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 1.5 \times 10^{-14} \\ 1.0 \times 10^{-13} \end{pmatrix}.$$

El punto fijo localizado se presenta en la figura 32.

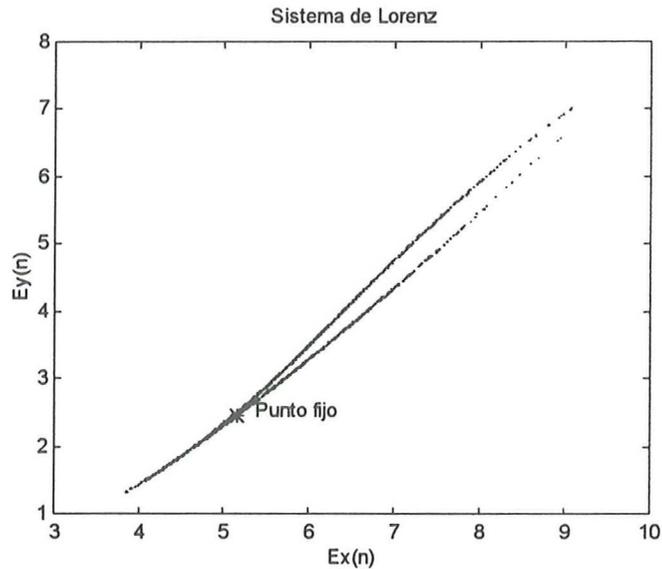


Figura 32. Localización del punto fijo inestable más representativo del sistema de Lorenz.

En la figura 33 se presenta el comportamiento de la linealización calculada en la vecindad del punto ξ_F .

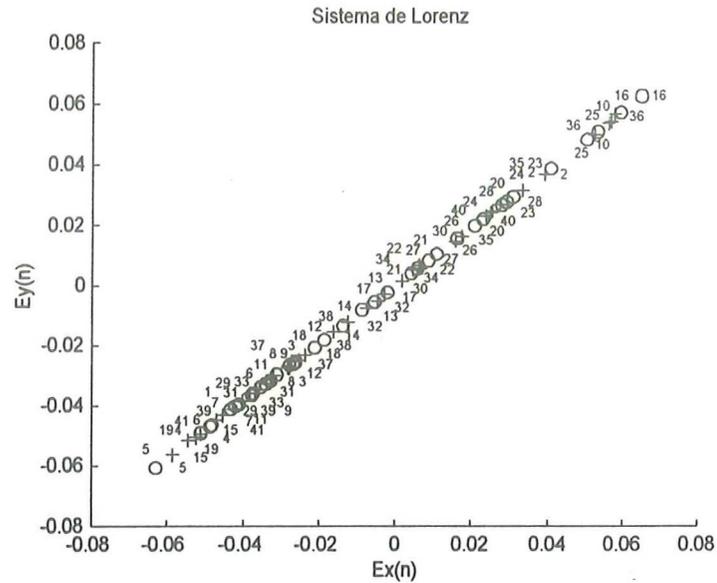


Figura 33. Comportamiento de la linealización en la vecindad del punto fijo en las coordenadas originales.

El error que se presenta entre los puntos medidos y los calculados fue del 28.0841%.

Una posibilidad para resolver el problema del mal condicionamiento es hacer una transformación de coordenadas utilizando la matriz V de la descomposición en valores singulares de la matriz con el número de condición más grande. En este caso, es la matriz

$$V_y = \begin{pmatrix} 0.7207 & -0.6932 \\ 0.6932 & 0.7207 \end{pmatrix},$$

de modo que los vectores de desplazamiento se transforman en

$$\tilde{x}^i = x^i V_y \quad \text{y} \quad \tilde{y}^i = y^i V_y.$$

En las coordenadas transformadas la solución del problema de mínimos cuadrados es \tilde{A} y \tilde{b} . Utilizando estos valores se calculó el modelo, obteniendo un valor para la matriz Jacobiana y para el punto fijo, de modo que para al aplicar la transformación de coordenadas inversa (V_y^{-1}) se obtienen estos valores en las coordenadas originales.

El modelo obtenido es:

$$\xi_F = \begin{pmatrix} 5.4155 \\ -1.8096 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.7207 & -0.6932 \\ 0.6932 & 0.7207 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5.158018 \\ 2.448846 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 4.7136 & -5.908119 \\ 0.00093 & 0.00033 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.7207 & -0.6932 \\ 0.6932 & 0.7207 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7.4927 & -0.99194 \\ 0.0004 & 0.00089 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} -9.037 \times 10^{-15} \\ 1.733 \times 10^{-15} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.7207 & -0.6932 \\ 0.6932 & 0.7207 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -7.75 \times 10^{-15} \\ -0.50 \times 10^{-15} \end{pmatrix}.$$

El comportamiento de este modelo en la vecindad trasformada se presenta en la figura 34.

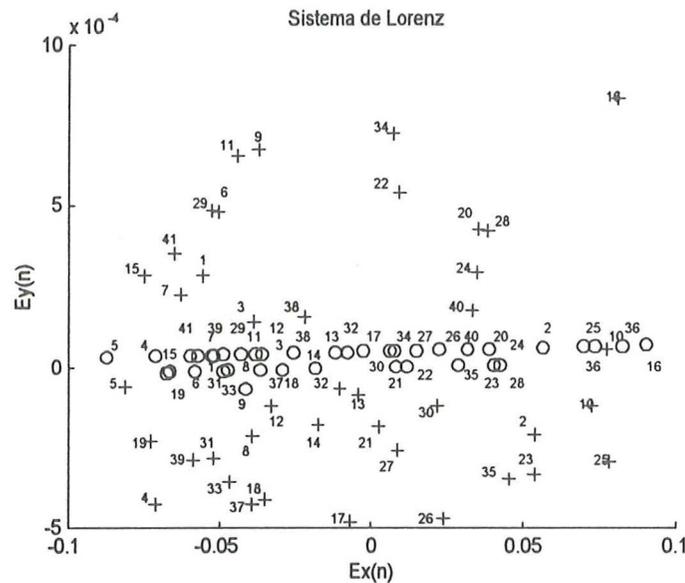


Figura 34. Comportamiento del modelo local del sistema Lorenz en las coordenadas transformadas.

El error que se presenta entre los puntos medidos y los calculados para este modelo sigue siendo 28.0841%, pero los resultados obtenidos para la matriz A han variado completamente. Por lo tanto, se puede ver que la cantidad de error que se produce en el algoritmo de mínimos cuadrados debido a que la matriz de mediciones y^i es casi deficiente de rango contaminan fuertemente las estimaciones de la matriz Jacobiana del

sistema en dos dimensiones. Una posible solución es utilizar un mapeo unidimensional, que puede ser más apropiado para describir la dinámica en esta vecindad.

III.6.3 Sistema Hénon-continuo.

Se aplicaron los algoritmos de modelado en los dos mapeos de Poincaré generados para este sistema, obteniendo en primer lugar, para el mapeo definido en base a las intersecciones de la trayectoria reconstruida con la sección de Poincaré, los siguientes resultados.

- Localización aproximada del punto fijo inestable.

Se analizó la recurrencia de 1950 puntos de intersección ξ en la sección de Poincaré, localizando el punto representativo

$$\xi_{r_1} = \begin{pmatrix} -0.5045 \\ 1.0768 \end{pmatrix}.$$

- Asignación del tamaño de la vecindad r .

Se asignó el tamaño de vecindad $r = 0.1898$, con el cual se tienen 25 puntos en la vecindad del punto fijo ξ_F .

- Número de condición μ .

Se calculó el número de condición para las matrices $M_x = \{x^i\}$ y $M_y = \{y^i\}$, obteniendo

$$\mu_x = 4.1076, \quad \mu_y = 34.6991.$$

Esto es representativo de un posible problema de mínimos cuadrados mal condicionado.

- Resultados finales.

Utilizando el algoritmo de mínimos cuadrados normal se obtuvo el modelo:

$$\xi_F = \begin{pmatrix} -0.5052 \\ 1.0777 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -3.4061 & -0.8951 \\ 1.3627 & 0.6170 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 1.0 \times 10^{-14} \\ -1.0 \times 10^{-13} \end{pmatrix}.$$

El error que se presenta entre los puntos medidos y los calculados fue del 25.751%.

La localización del punto fijo se presenta en la figura 35. En la figura 36 se presenta el comportamiento del modelo en la vecindad del punto ξ_F .

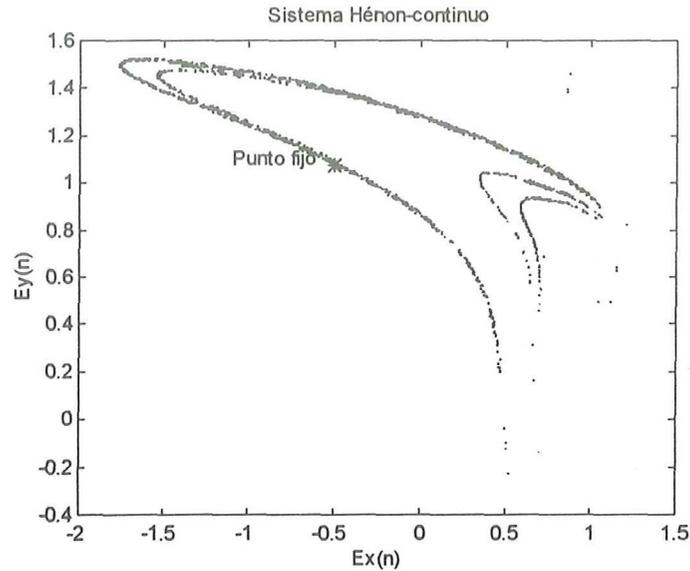


Figura 35. Localización del punto fijo inestable más representativo del mapeo por intersecciones del sistema Hénon-continuo.

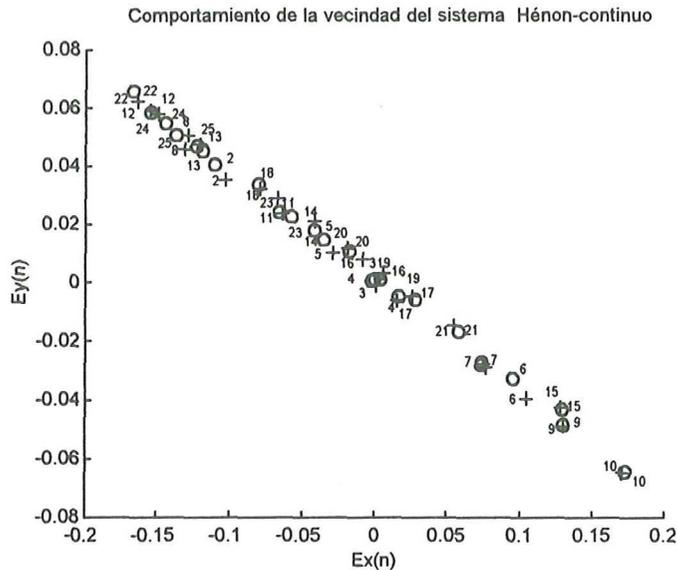


Figura 36. Comportamiento de la linealización en la vecindad del punto fijo del mapeo por cruces del sistema Hénon-continuo.

Enseguida se aplicaron los métodos de modelado al mapeo de primer retorno del

sistema, obteniendo los resultados que se presentan a continuación:

- Localización aproximada del punto fijo inestable.

$$\xi_{r_1} = \begin{pmatrix} 0.8695 \\ 0.8468 \end{pmatrix}.$$

- Asignación del tamaño de la vecindad r .

Se asignó el tamaño de vecindad $r = 0.0665$, con el cual se tienen 26 puntos en la vecindad del punto fijo ξ_F .

- Número de condición μ .

$$\mu_x = 1.6745, \quad \mu_y = 9.3454.$$

- Resultados finales.

Utilizando el algoritmo de mínimos cuadrados normal se obtuvo el modelo:

$$\xi_F = \begin{pmatrix} 0.8694 \\ 0.8468 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -1.7615 & 0.2982 \\ 1.0000 & 0.0000 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} -8.0 \times 10^{-15} \\ -0.09 \times 10^{-15} \end{pmatrix}.$$

En la figura 37 se presenta la localización del punto fijo identificado para este mapeo del sistema Hénon-continuo.

El comportamiento del modelo obtenido en la vecindad del punto fijo ξ_F se ilustra en la figura 38.

El error que se presentó entre los puntos medidos y los calculados fue del 5.10%, de modo que este modelo es más apropiado para describir la dinámica en la vecindad de una órbita periódica de este sistema que el obtenido mediante el mapeo por cruces de la trayectoria reconstruida.

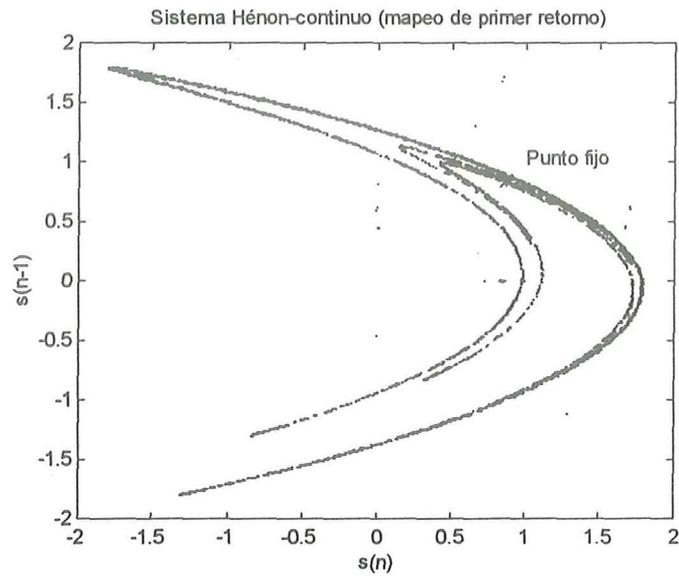


Figura 37. Localización del punto fijo inestable más representativo del mapeo de primer retorno del sistema Hénon-continuo.

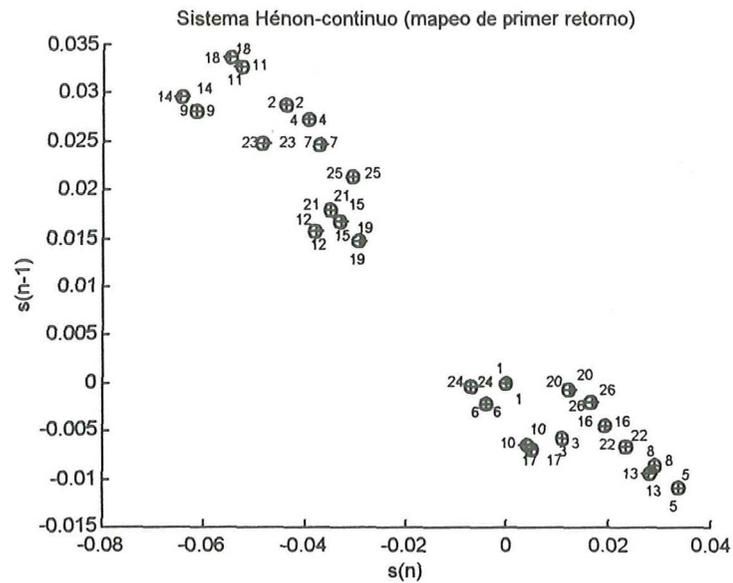


Figura 38. Comportamiento del modelo en la vecindad del punto fijo del mapeo de primer retorno para el sistema Hénon-continuo.

III.7 Observaciones.

La información que se puede obtener de una serie de tiempo tiene limitaciones. No se puede obtener información del comportamiento de la dinámica en la dirección estable cuando no se tiene un número suficiente de puntos para obtener una estimación adecuada con los algoritmos implementados.

Las herramientas desarrolladas en esta sección funcionan adecuadamente cuando no se presenta degeneración en los cálculos. En general, éste no es el caso para sistemas caóticos de dimensión baja, pues es más común que la vecindad sea casi coplanar.

Debido a las limitaciones en la información que se puede obtener a partir de una serie de mediciones, puede no ser posible obtener un modelo lineal adecuado de la dinámica local. Por lo tanto, es necesario buscar otras metodologías que contemplen esta situación, una posible solución sería utilizar mapeos unidimensionales para describir la dinámica local.

En el siguiente capítulo se utilizará la mejor aproximación a la dinámica local que se logró identificar para los sistemas analizados, con fines de aplicar el algoritmo de control OGY.

IV. Control de órbitas periódicas.

IV.1 Introducción.

El caos es una característica del comportamiento dinámico de un sistema, que puede ser deseable o indeseable, dependiendo del proceso y los objetivos de control que se refieran. Por ejemplo, en los sistemas de combustión, la presencia del caos lleva a mejores mezclas de aire y combustible, con lo que se mejora la eficiencia del sistema. En cambio, en los sistemas aerodinámicos, el caos en forma de turbulencia, puede llegar a causar fallas estructurales y eventualmente la destrucción del sistema.

Por lo tanto, al controlar un sistema caótico no siempre es la mejor opción eliminar las características que lo vuelven caótico; por el contrario, en muchas ocasiones es posible utilizar la naturaleza caótica del sistema para encontrar soluciones más ventajosas y tener flexibilidad en los objetivos de control que se pueden alcanzar. En este sentido Edward Ott, Celso Grebogi y James A. Yorke desarrollaron un método de control, conocido como control OGY (Ott *et al.*, 1990), en el cual se propone la estabilización del comportamiento de un sistema caótico utilizando exclusivamente pequeños cambios sobre algún parámetro accesible del sistema. Estos cambios paramétricos se determinan en función de un modelo de la dinámica local. Por lo tanto, se puede aplicar a sistemas reconstruidos.

En este capítulo se presenta, en primer lugar, una descripción del método de control OGY. Enseguida se presentan los mecanismos necesarios para su aplicación a sistemas con ecuaciones y sistemas modelados a partir de su mapeo de Poincaré.

IV.2 El método de control OGY.

La observación básica de la estrategia de control OGY es que un atractor caótico típicamente tiene empujadas un número muy grande de órbitas periódicas inestables tipo silla, de modo que es posible, con pequeñas perturbaciones sobre los parámetros del sistema, estabilizar su comportamiento en alguna de las órbitas ya existentes en el atractor.

La estrategia de control propuesta por OGY es la siguiente:

- a) Determinar algunas órbitas periódicas inestables, de periodo bajo, que estén empujadas en el atractor caótico.
- b) Escoger una órbita que mejore el comportamiento del sistema en algún sentido.
- c) Introducir una pequeña perturbación dependiente del tiempo sobre algún parámetro accesible del sistema, de modo que se estabilice la órbita escogida.

IV.2.1 Características del método de control OGY.

El algoritmo de control OGY tiene las siguientes características [Ott *et al.*, 1990 y Romeiras *et al.*, 1992]:

1. En ausencia de ruido y errores de identificación del sistema, el control se puede lograr con una perturbación arbitrariamente pequeña.
2. Antes de que se estabilice en la órbita deseada una trayectoria que se origina en unas condiciones iniciales dadas, experimentará un transitorio caótico cuya longitud diverge a medida que el valor máximo permitido de la perturbación se acerca a cero.
3. Cuando se tiene incertidumbre en la determinación de la dinámica asociada con la órbita periódica a ser estabilizada, la amplitud de la perturbación paramétrica debe ser mayor que un valor mínimo que depende de la intensidad del ruido o del error,

para que el control pueda ser efectivamente alcanzado.

4. Es posible que pequeños ruidos en el sistema produzcan estallidos de comportamiento caótico en los cuales el sistema se aleja de la órbita controlada.
5. Este método puede ser implementado para sistemas dinámicos de dimensión alta (incluyendo sistemas de dimensión infinita), si la dinámica se desarrolla esencialmente en una variedad de dimensión baja.
6. El número de parámetros que son accesibles para el control deben ser al menos igual al número de valores propios inestables de la dinámica asociada con la órbita periódica que se desea estabilizar.
7. Los sistemas caóticos controlados con este método presentan la ventaja de flexibilidad; en éstos un número grande de órbitas diferentes se pueden estabilizar. Además se puede conmutar de una a otra dependiendo del comportamiento deseado del sistema en cada caso.
8. Mediante el uso de coordenadas retardadas en el tiempo, este método se puede aplicar en situaciones experimentales en las cuales no se tiene conocimiento *a priori* de la dinámica del sistema.

IV.2.2 Descripción del método de control.

El algoritmo de control propuesto por OGY se puede dividir básicamente en dos elementos. El primero es una aplicación relativamente estándar de la teoría de control, llamada asignación de polos, que consiste en utilizar la linealización de la dinámica del sistema alrededor de algún punto fijo para realizar el control. La segunda es la novedosa idea de utilizar la naturaleza no lineal del sistema caótico para estabilizar exponencialmente la dinámica del sistema, llevándolo a la órbita deseada.

Por simplicidad, se presenta el procedimiento de estabilización de un punto fijo inestable bidimensional, pero el algoritmo se extiende directamente a sistemas de dimensión superior.

Considérese el sistema dinámico discreto,

$$Z_{i+1} = \mathbf{F}(Z_i, p), \quad (26)$$

donde $Z_i \in \mathbf{R}^d$ es el estado del sistema, $p \in \mathbf{R}$ es un parámetro al que se tiene acceso y \mathbf{F} es una función suficientemente diferenciable en ambas variables.

Si $Z_F^* = Z(\tilde{p})$ es el punto fijo inestable del mapeo que se desea estabilizar, entonces la linealización del mapeo alrededor de Z_F^* y \tilde{p} tiene la forma

$$\Delta Z_{i+1} = A\Delta Z_i + B\Delta p_i \quad (27)$$

donde A es una matriz constante de dimensión $d \times d$ que se obtiene con la fórmula

$$A = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial Z}(Z_F^*, \tilde{p}), \quad (28)$$

y representa la matriz Jacobiana del sistema en el punto fijo escogido. B es un vector de dimensión d que está dado por

$$B = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p}(Z_F^*, \tilde{p}), \quad (29)$$

y representa el efecto del control. Además, $\Delta Z_i = Z_i - Z_F^*$ es el incremento de la variable de estado y $\Delta p_i = p_i - \tilde{p}$ el incremento en el parámetro de control.

Si la pareja A y B cumplen la condición de controlabilidad, entonces se puede utilizar una retroalimentación lineal de la forma:

$$\Delta p_i = K^T \Delta Z_i, \quad (30)$$

donde K es un vector de ganancias de dimensión d .

Sustituyendo la ley de control (30) en la linealización (27), se tiene el sistema en lazo cerrado

$$\Delta Z_{i+1} = (A + BK^T) \Delta Z_i. \quad (31)$$

De modo que para estabilizar el punto Z_F^* , sólo es necesario resolver el problema de asignación de polos para $A + BK^T$. En otras palabras, se requiere hacer una elección del vector K^T tal que todos los valores propios de la matriz $A + BK^T$ estén dentro del círculo unitario.

IV.2.2.1 Ley de control.

En el algoritmo original propuesto por OGY, se supone que el parámetro real p puede ser ajustado externamente, pero está restringido a un intervalo pequeño $|p - \tilde{p}| < \delta$, alrededor de su valor nominal \tilde{p} , para el cual el sistema presenta comportamiento caótico. Sin perder generalidad, se asigna $\tilde{p} = 0$ y $Z_F^* = 0$. Entonces es posible variar el parámetro p solamente en el intervalo

$$-p_{\max} < p < p_{\max}$$

en cada iteración.

Cuando se perturba levemente el parámetro de control p de su valor nominal a otro $p = \bar{p}$, el punto fijo Z_F^* se mueve a un lugar cercano $Z_F(\bar{p})$. Con base en esta nueva posición, podemos aproximar un vector de cambio, que OGY llaman g , de la siguiente forma:

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{\partial Z_F(p)}{\partial p} \right]_{p=0} \approx \frac{1}{\bar{p}} Z_F(\bar{p}). \quad (32)$$

Las características de estabilidad del punto fijo Z_F^* escogido se obtienen directamente de la matriz Jacobiana de la dinámica local. En este caso, la matriz A tendrá un valor propio menor a 1 (λ_s) y otro mayor a 1 (λ_u), que corresponden a la dirección estable (e_s) e inestable (e_u) respectivamente, de modo que se puede representar en la forma:

$$A = \lambda_u e_u f_u^T + \lambda_s e_s f_s^T, \quad (33)$$

donde los vectores unitarios e_s y e_u son los vectores propios estables e inestables, respectivamente. Los vectores f_s y f_u forman una base contravariante de la matriz A que

cumple con las siguientes relaciones.

$$\begin{aligned} f_s \cdot e_s &= f_u \cdot e_u = 1, \\ f_s \cdot e_u &= f_u \cdot e_s = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Aproximando $Z_F(\bar{p}) \approx \Delta p g$ y escribiendo la matriz A en función de sus eigen-vectores y su base contravariante, la linealización en la vecindad del punto fijo (27) se puede escribir como:

$$Z_{i+1} \approx \Delta p_i g + \underbrace{(\lambda_u e_u f_u^T + \lambda_s e_s f_s^T)}_A \Delta Z_i, \quad (35)$$

considerando que p se ajusta a un nuevo valor Δp_i en cada paso. Es decir, se observa el nuevo valor de Z_i y luego se ajusta p .

Cuando la trayectoria está en la vecindad de Z_F^* , se busca escoger un valor para p , de modo que Z_{i+1} se coloque sobre la dirección estable de la órbita tipo silla escogida. En otras palabras, buscamos un control Δp_i tal que:

$$f_u \cdot \Delta Z_{i+1} = 0. \quad (36)$$

Una vez que ΔZ_{i+1} está en la variedad estable de Z_F^* , podemos eliminar la perturbación y la órbita se moverá hacia el punto fijo deseado exponencialmente rápido (según indique λ_s). Como siempre existe incertidumbre, no se puede asegurar que en un paso se estará exactamente sobre la dirección estable. Por lo tanto, se debe aplicar el control en cada iteración.

Para valores de ΔZ_i suficientemente pequeños, podemos resolver la ecuación (35) para p_i con la condición (36), obteniendo el control

$$\Delta p_i = C_i = \frac{\lambda_u \Delta Z_i \cdot f_u}{(\lambda_u - 1) g \cdot f_u} \stackrel{def}{=} C \cdot \Delta Z_i, \quad (37)$$

donde se considera que la condición genérica $g \cdot f_u \neq 0$ se satisface.

Este valor de control sólo se puede aplicar en forma local, en la vecindad donde la linealización es válida. Además, considerando que el valor de p está limitado a un

intervalo pequeño, no podemos hacer $\Delta p_i = C_i$ cuando $|C_i|$ es muy grande. Entonces, en forma global, el valor de Δp_i está dado por:

$$\Delta p_i = \begin{cases} 0, & \text{cuando } |C_i| > p_{\max}, \\ C_i, & \text{cuando } |C_i| \leq p_{\max}. \end{cases}$$

IV.2.2.2 Ley de control por asignación de polos.

La ley de control original de OGY se puede ver como una elección particular del vector de ganancias K^T para el problema de asignación de polos (31), en la que uno de los polos asignados es cero y el otro es igual λ_s . En general, cualquier matriz K^T para la cual los eigenvalores de lazo cerrado sean menores a 1, estabilizará el comportamiento del sistema, pero se ha demostrado que la elección original de OGY es óptima en cuanto al tiempo en el que se logra el control (Romeiras *et al.*, 1992).

Resolviendo el problema de asignación de polos con la elección de OGY; es decir, asignando uno de los polos en cero y el otro en λ_s , se obtiene la siguiente expresión para el control (Dressler y Nitsche, 1992):

$$C_i = -\frac{\lambda_u f_u}{f_u \cdot B} \cdot \Delta Z_i. \quad (38)$$

Esta ley de control es equivalente a la ecuación (37), pero es más fácil de calcular pues sólo se utilizan los valores de la linealización de la dinámica.

IV.3 Implementación del control OGY con las ecuaciones del sistema.

A continuación se describe la implementación del algoritmo de control OGY para estabilizar un punto fijo inestable del sistema de Hénon¹³, considerando que el parámetro α es accesible para control y puede ser variado alrededor de su valor nominal $\alpha_o = 1.4$, una cantidad máxima de 0.1 ($p_{\max} = 0.1$)

$$\alpha = \alpha_o + p.$$

¹³ Este sistema está descrito en la sección III.6.1.

El primer paso del algoritmo de control es localizar un punto fijo inestable Z_F^* , que en este caso se puede obtener en forma explícita a partir de las ecuaciones del sistema, de modo que $Z_F^* = (0.8839, 0.8839)^T$.

Enseguida se obtiene la linealización del sistema en la vecindad de Z_F^* . La matriz Jacobiana en Z_F^* tiene la forma

$$A = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial Z}(Z_F^*, \tilde{p}) = \begin{bmatrix} -2x_F & \beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.7678 & 0.3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

y el efecto del cambio paramétrico

$$B = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p}(Z_F^*, \tilde{p}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De modo que la linealización de la dinámica alrededor del punto fijo inestable tiene la forma:

$$\Delta Z_{i+1} = \begin{bmatrix} -1.7678 & 0.3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta Z_i + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta p_i.$$

Los valores y vectores necesarios para el cálculo del control paramétrico (38) también se pueden obtener en forma explícita:

$$\begin{aligned} \lambda_u &= -x_F - \sqrt{x_F^2 + \beta} = -1.9237, \\ \lambda_s &= -x_F + \sqrt{x_F^2 + \beta} = 0.1559, \\ e_u &= (\lambda_u x_o + y_o)(\lambda_u^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} -0.8873 \\ 0.4612 \end{bmatrix}, \\ e_s &= (\lambda_s x_o + y_o)(\lambda_s^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0.1541 \\ 0.9851 \end{bmatrix}, \\ f_u &= (x_o - \lambda_s y_o)(\lambda_u^2 + 1)^{\frac{1}{2}}(\lambda_u - \lambda_s)^{-1} = \begin{bmatrix} -1.0425 \\ 0.1626 \end{bmatrix}, \\ f_s &= (x_o - \lambda_u y_o)(\lambda_s^2 + 1)^{\frac{1}{2}}(\lambda_s - \lambda_u)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4867 \\ 0.9362 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde $x_o = [1, 0]^T$ y $y_o = [0, 1]^T$ forman la base canónica en \mathbf{R}^2 .

Entonces, la perturbación paramétrica para cada tiempo i es:

$$C_i = \begin{bmatrix} 1.9237 \\ -0.3510 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_i - 0.8839 \\ y_i - 0.8839 \end{bmatrix}.$$

Cuando el valor absoluto de C_i sea menor a p_{\max} ($|C_i| \leq 0.1$), se aplica el cambio paramétrico calculado. Al aplicar el algoritmo de control al sistema de Hénon se obtuvieron los resultados que se presentan en la figura 39.

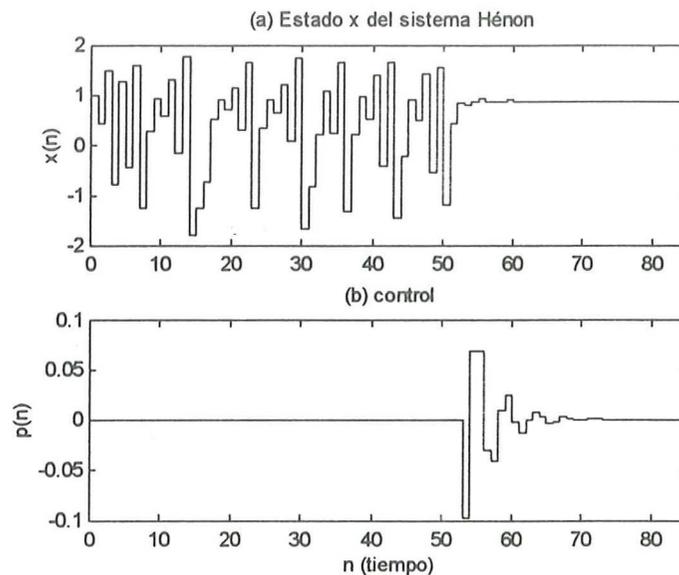


Figura 39. Resultados del control del sistema de Hénon, cuando se utilizan las ecuaciones.

Como podemos ver, se estabiliza el punto fijo inestable $(0.8839, 0.8839)^T$ rápidamente, una vez que el sistema entra en la región donde la linealización es válida.

IV.4 Implementación del control OGY sin las ecuaciones del sistema.

En la implementación del algoritmo de control OGY, cuando no se conocen las ecuaciones del sistema, se consideran dos casos: Uno es cuando se tiene acceso a los puntos que forman el mapeo de Poincaré, y el otro es cuando sólo se tiene acceso a una señal medida de un sistema desconocido. En este último caso, si se trata de un

sistema no autónomo con excitación periódica y se conoce el periodo de excitación, es posible obtener un mapeo de primer retorno. De lo contrario es necesario reconstruir el espacio de estados del sistema desconocido para posteriormente, mediante una sección de Poincaré, localizar los puntos de intersección que forman el mapeo.

Una vez que se obtienen los puntos del mapeo discreto generados a partir de la serie de mediciones o mediante un muestreo apropiado, se pueden utilizar los procedimientos de modelado desarrollados en el capítulo anterior. Con este modelado se obtiene una estimación de la matriz Jacobiana del sistema, de modo que para calcular la ley de control, sólo hace falta determinar el efecto de un cambio paramétrico en la vecindad del punto fijo Z_F^* .

IV.4.1 Identificación del efecto de un cambio paramétrico en la dinámica local.

A continuación se presenta el procedimiento para identificar el vector B de la linealización descrita en la ecuación (27).

Primero se modela la dinámica local a partir de una serie de puntos de intersección para el sistema con el valor nominal del parámetro de control $p = \tilde{p}$. Enseguida, se aplica un pequeño cambio en el valor del parámetro¹⁴ $p = \bar{p}$ y se obtiene una nueva serie de mediciones. Con esta nueva serie de mediciones se identifican los nuevos vectores de desplazamiento (39) para el mismo tamaño de la vecindad r alrededor del mismo punto fijo Z_F^* .

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}^i &= \{Z_{k_i} - Z_F^* \mid \|Z_{k_i} - Z_F^*\| \leq r\}, \\ \bar{\mathbf{y}}^i &= \{Z_{k+1_i} - Z_F^* \mid \|Z_{k+1_i} - Z_F^*\| \leq r\}.\end{aligned}\tag{39}$$

Enseguida, se resuelve para cada uno de los componentes del vector B , el problema de

¹⁴ El cambio paramétrico \bar{p} debe ser suficientemente pequeño para que la dinámica del sistema en la vecindad de Z_F^* no cambie en forma radical.

mínimos cuadrados que ajusta

$$\bar{y}^i = A\bar{x}^i + B\Delta p, \quad (40)$$

con el valor de A identificado anteriormente, obteniendo d ecuaciones lineales, a partir de las cuales es fácil obtener una expresión para el efecto del cambio paramétrico,

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N [\bar{y}^i - A\bar{x}^i]}{N\Delta p}. \quad (41)$$

IV.4.2 Implementación a partir de los puntos del mapeo de Poincaré.

A continuación se presenta la aplicación del algoritmo de control OGY para el sistema de Hénon, pero ahora todos los valores necesarios para sintetizar la ley de control se calculan a partir de las mediciones del sistema. Utilizando los resultados del modelado de la dinámica local del sistema Hénon obtenidos en la sección III.6.1, se tiene la matriz Jacobiana $A = \begin{bmatrix} -1.7479 & 0.3028 \\ 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$. A partir de ésta matriz se calculan los valores propios, vectores propios y vectores contravariantes necesarios para calcular la perturbación adecuada en cada paso

$$\begin{aligned} \lambda_u &= -1.9119, & e_u &= \begin{bmatrix} -0.8861 \\ 0.4635 \end{bmatrix}, & f_u &= \begin{bmatrix} -1.0382 \\ 0.1727 \end{bmatrix}, \\ \lambda_s &= 0.1663, & e_s &= \begin{bmatrix} -0.1641 \\ -0.9865 \end{bmatrix}, & f_s &= \begin{bmatrix} -0.4878 \\ -0.9326 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Enseguida se incrementa el valor del parámetro accesible del sistema una cantidad $\Delta p = (\bar{p} - \tilde{p}) = 0.01$ y se aplica el procedimiento presentado en la sección IV.4.1. El efecto de un cambio paramétrico en la vecindad del punto fijo es $B = (0.9856, 0.0000)^T$.

Con estos valores se calculó la ley de control, obteniendo

$$C_i = \begin{bmatrix} 1.9398 \\ -0.3227 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_i - 0.8836 \\ y_i - 0.8836 \end{bmatrix}.$$

Cuando el valor de C_i es menor a p_{\max} ($|C_i| \leq 0.1$), se aplica este cambio paramétrico, obteniendo los resultados que se presentan en la figura 40.

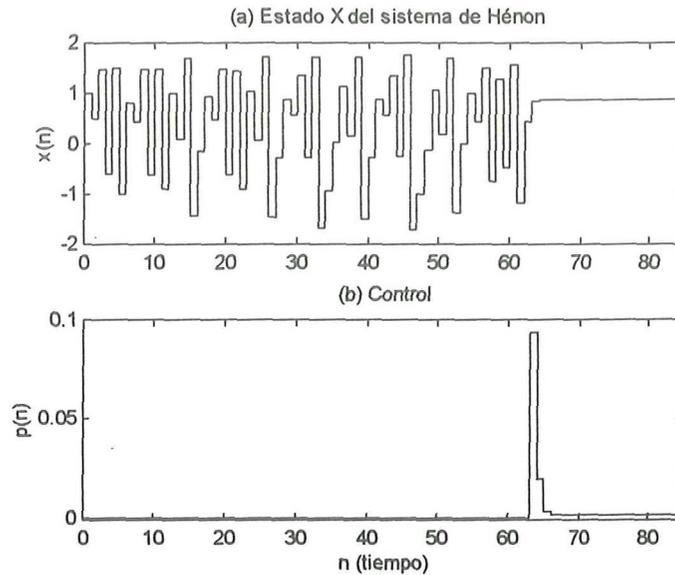


Figura 40. Resultados del control del sistema de Hénon cuando no se tienen las ecuaciones del sistema.

Se estabilizó el sistema en el punto $(0.8844, 0.8844)^T$. Esto es debido a los errores de identificación.

IV.4.3 Implementación a partir de una serie de mediciones.

A continuación se presentan dos ejemplos ilustrativos. En el primero se utiliza el sistema de Lorenz, considerando que sólo se tiene acceso a una serie de tiempo; en el segundo ejemplo, se utiliza una serie de mediciones del sistema Hénon-continuo, del cual se conoce el periodo de excitación y además se sabe que estará adecuadamente representado mediante un mapeo en dos dimensiones, de modo que es posible obtener un mapeo de primer retorno, a partir de la serie de tiempo.

IV.4.3.1 Sistema de Lorenz

Para aplicar el método de control OGY cuando sólo se tiene acceso a una serie de tiempo, es necesario en primer lugar analizar la serie $s(n)$ utilizando las herramientas

desarrolladas en el segundo capítulo ($PIM(T)$ y $PVPMC(d)$) para determinar los parámetros de reconstrucción adecuados; es decir, el mejor tiempo de retardo entre las coordenadas y la cantidad de dimensiones necesarias para tener una representación adecuada de la dinámica del sistema desconocido.

Una vez que se tiene el espacio de estados reconstruido, la representación del sistema como un mapeo se obtiene mediante la definición de una sección de Poincaré, a partir de la cual se identifica un modelo de la dinámica alrededor de un punto fijo y el efecto de un cambio paramétrico. Por último, se sintetiza la ley de control que se aplicará en cada punto de intersección de la trayectoria reconstruida con la sección de Poincaré.

En la sección III.6.2 se obtuvo un modelo para la dinámica local del sistema de Lorenz alrededor de un punto fijo inestable localizado en $\xi_F^* = [5.1580, 2.4489]^T$. Al modelar la dinámica de los puntos en la vecindad del sistema se determinó que la mejor estimación de la matriz Jacobiana que se puede hacer con los algoritmos implementados es $A = \begin{bmatrix} 5.4009 & -0.7157 \\ 5.1934 & -0.6869 \end{bmatrix}$. A partir de esta matriz se calculan los parámetros necesarios para el calcular la ley de control,

$$\lambda_u = 4.7125, \quad e_u = \begin{bmatrix} 0.7207 \\ 0.6932 \end{bmatrix}, \quad f_u = \begin{bmatrix} 1.5902 \\ 0.2108 \end{bmatrix}, \\ \lambda_s = 0.0015, \quad e_s = \begin{bmatrix} 0.1314 \\ 0.9913 \end{bmatrix}, \quad f_s = \begin{bmatrix} -1.1120 \\ 1.1561 \end{bmatrix}.$$

El efecto del cambio paramétrico $\Delta p = 0.01$ se identificó mediante el procedimiento descrito en la sección IV.4.1, obteniendo $B = [0.2432, 0.2524]^T$. Con estos valores se obtuvo la ley de control

$$C_i = \begin{bmatrix} -22.1803 \\ 2.9281 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \xi_x(i) - 5.1580 \\ \xi_y(i) - 2.4489 \end{bmatrix}.$$

En la figura 41 se presenta el lazo de control que se requiere para aplicar el control OGY en este caso.

Diagrama a bloques de la implementación del control OGY, a partir de un mapeo de Poincaré obtenido del espacio reconstruido.

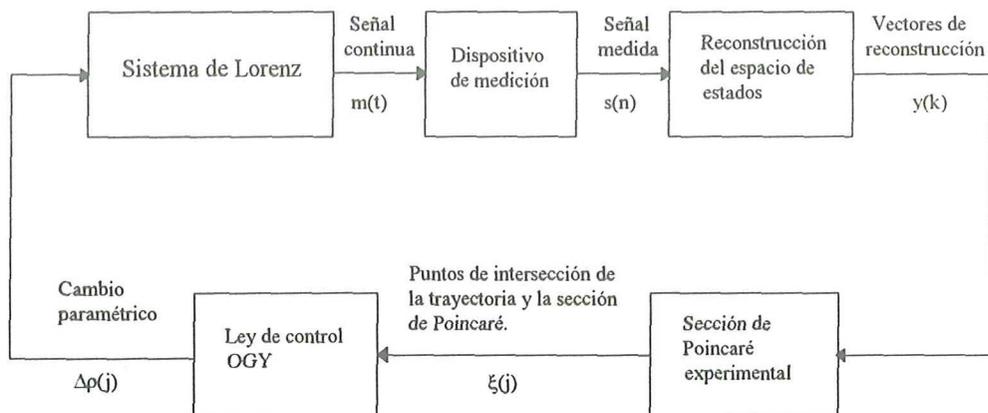


Figura 41. Lazo de control utilizado para controlar un sistema a partir de una medición escalar.

Este lazo de control se implementó en el compilador de Borland C++ 3.1.

Cuando el valor absoluto de C_n es menor a uno ($|C_n| \leq 1$), se aplica el cambio paramétrico calculado, obteniendo los resultados que se presentan en la figura 42.

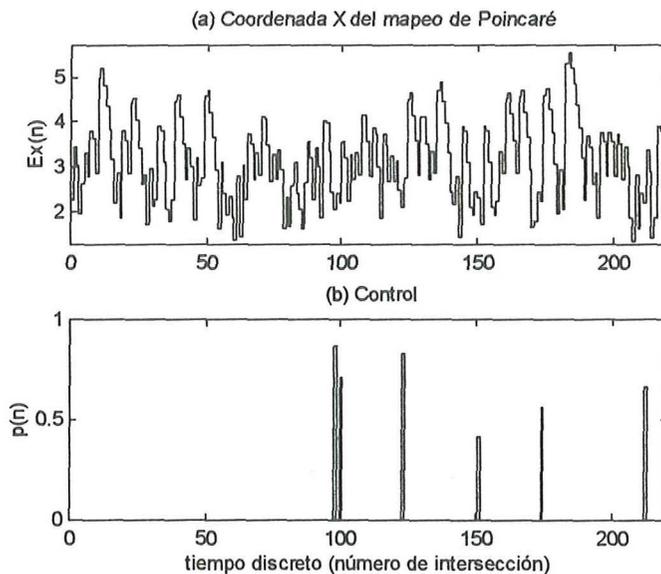


Figura 42. (a) Comportamiento de la primera coordenada del mapeo de Poincaré ξ_{x_n} del sistema de Lorenz. (b) Los cambios paramétricos indicados por la ley de control OGY.

Como se puede ver, el algoritmo de control implementado no logró estabilizar el punto fijo inestable ξ_F^* .

IV.4.3.2 Sistema Hénon-continuo.

Del sistema Hénon-continuo sólo se tiene acceso a una señal $m(t)$, la cual es medida con un periodo de medición fijo ($\tau_s = 0.2$) y menor al periodo de excitación ($T = 1$). A partir de esta serie de tiempo se generó un sistema discreto de dos dimensiones utilizando como coordenadas la medición actual y la medición un periodo de excitación después. De esta representación se obtuvieron los valores y vectores necesarios para la aplicación del control.

En la sección III.6.3 se obtuvo un modelo para la dinámica local del sistema Hénon-continuo, a partir de su mapeo de primer retorno, para el cual se identificó un punto fijo inestable en $\xi_F^* = (0.8694, 0.8468)^T$, la matriz Jacobiana alrededor de este punto tiene la forma $A = \begin{bmatrix} -1.7615 & 0.2982 \\ 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$. Enseguida se identificó el efecto de un cambio paramétrico ($\Delta p = 0.01$), obteniendo $B = [1.0061, 0.0000]^T$.

Diagrama a bloques de la implementación del control OGY, a partir de un mapeo estroboscópico.

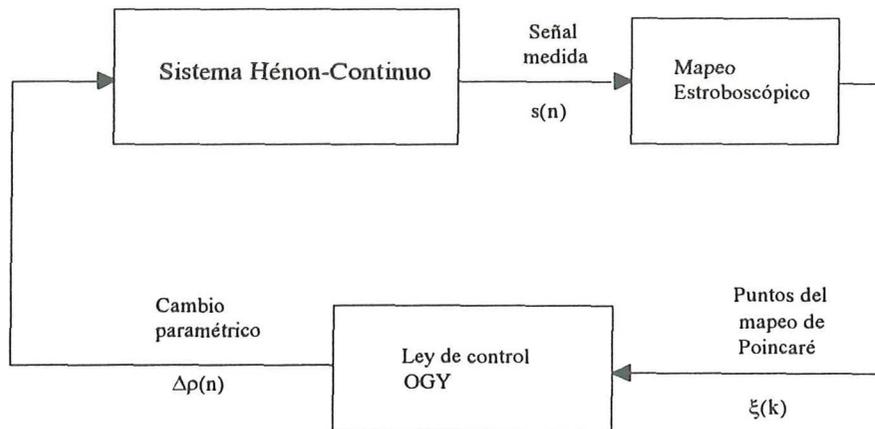


Figura 43. Lazo de control del sistema Hénon-continuo.

Con estos valores se sintetizó la ley de control, obteniendo

$$C_n = \begin{bmatrix} 1.9171 \\ -0.2982 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s(n-1) - 0.8694 \\ s(n) - 0.8468 \end{bmatrix}.$$

El lazo de control que se ilustra en la figura 43, se implemento en la paquetería SIMNON/PCW 2.0.

Considerando que la máxima perturbación permitida sobre el parámetro de control es 0.1, se aplicó el control obteniendo los resultados que se presentan en la figura 44.

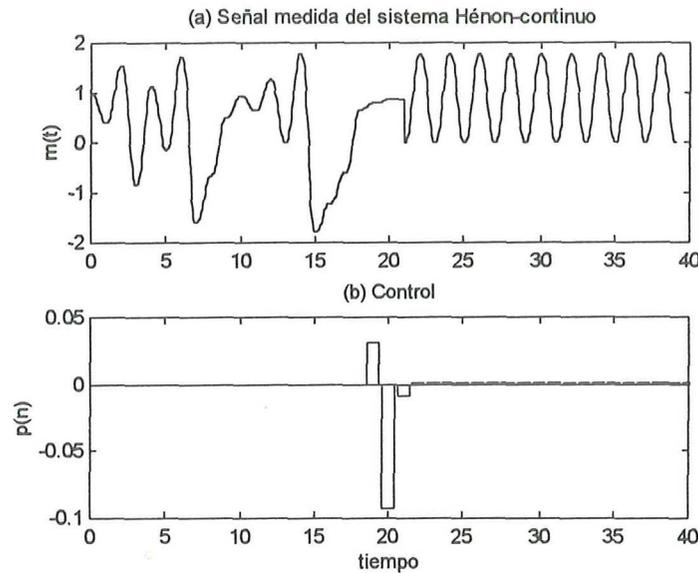


Figura 44. (a) Comportamiento de la señal medida $m(t)$ del sistema Hénon-continuo. (b) Los cambios paramétricos necesarios para el control.

El control para este sistema es alcanzado rápidamente una vez que el sistema entra en la vecindad linealizada del punto fijo.

Para determinar la razón por la cual el control no se logra en el caso del sistema de Lorenz, se investigan dos aspectos de la implementación. El primero es el efecto de los cambios paramétricos pasados (efectos del control); y el segundo es el efecto de los errores de identificación del modelo de la dinámica local.

IV.5 Método de control OGY para sistemas reconstruidos con coordenadas retardadas.

IV.5.1 Descripción del problema

Una de las características más atractivas del algoritmo propuesto por OGY es que todos los datos necesarios para realizar el control se pueden obtener experimentalmente a partir de una medición escalar del sistema. Una forma de hacer esto es reconstruir el espacio de estados del sistema a partir de las mediciones experimentales; en este caso, es necesario tener en cuenta lo siguiente.

Por medio de la técnica de coordenadas retardadas, se relaciona la dinámica original del sistema continuo desconocido $Y(t)$ con la dinámica reconstruida $X(t)$, a través de un empotramiento

$$X(t) = \Phi(Y(t)), \quad \text{donde } Y(t + \tau) = \varphi^\tau(Y(t)). \quad (42)$$

Enseguida, a partir de este sistema continuo reconstruido se obtiene un sistema discreto mediante una sección de Poincaré experimental apropiadamente escogida. Una elección común es tomar los puntos de la dinámica reconstruida en los que uno de los componentes de $X(t)$ sea igual a una constante ($h = [1, 0, \dots, 0]$ y $x_\Sigma = [cte, 0, \dots, 0]$). De modo que con este procedimiento de transformación se generan los puntos sucesivos

$$Z_i = [h(t_i - T), \dots, h(t_i - (d_E - 1)T)] \in R^{d_E - 1}, \quad (43)$$

en la sección de Poincaré.

Con estos puntos se define el mapeo de Poincaré como:

$$Z_{i+1} = G(Z_i).$$

Aplicar el algoritmo de control OGY como se presentó en la sección anterior significa que se cambiará en forma instantánea en el tiempo t_i el valor del parámetro p , del valor p_{i-1} al valor apropiadamente escogido p_i .

La razón por la cual se espera poder controlar el sistema original $Y(t)$, observando los vectores $X(t)$, es que el mapeo Φ es una relación biyectiva entre los estados $Y(t)$ y $X(t)$. De modo que el mapeo está relacionado con las ecuaciones del sistema, y estas ecuaciones en general dependen del valor actual del parámetro p_i .

Durante el tiempo que tarda el sistema en pasar de una intersección a la otra, puede que se haya generado uno o varios cambios paramétricos, en el caso más simple solamente se generó uno. Es decir, el tiempo entre intersecciones sucesivas en la sección de Poincaré, es más grande al tiempo de retardo necesario para generar un nuevo vector de reconstrucción

$$t_{i-1} - t_i > (d_E - 1)T. \quad (44)$$

En este caso, se asegura que el valor del parámetro p durante el intervalo (t_{i-1}, t_i) tiene el valor de p_{i-1} .

Dressler y Nitsche demostraron que en el caso de control activado, es decir, al cambiar de p_{i-1} a p_i en el tiempo t_i , el mapeo G de los puntos de la sección de Poincaré experimental no solamente depende del nuevo valor p_i del parámetro de control, sino también del valor anterior del parámetro cuando se cumple la condición (44)

$$Z_{i+1} = G(Z_i, p_{i-1}, p_i). \quad (45)$$

En general el mapeo de Poincaré experimental G depende de todos los cambios paramétricos que se presentaron en el tiempo que toma para generar un nuevo vector de reconstrucción. En otras palabras, dependerá de todos los r cambios paramétricos que ocurran en el intervalo de tiempo $(t_i, t_i + (d_E - 1)T)$, de modo que el mapeo de Poincaré tendrá la forma (Dressler y Nitsche, 1992)

$$Z_{i+1} = G(Z_i, p_{i-r}, \dots, p_{i-1}, p_i). \quad (46)$$

IV.5.2 Descripción del método de control propuesto.

La dinámica del mapeo de Poincaré experimental (ecuación 46) se puede linealizar alrededor de un punto fijo Z_F^* , definiendo una matriz A de dimensión $(d_E - 1) \times (d_E - 1)$

y un conjunto de vectores columna de dimensión $(d_E - 1)$ B_1, \dots, B_{r-1} , que describan el efecto de pequeñas perturbaciones de algún parámetro de control

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial G}{\partial Z}(Z_F^*, p_{i-r}, \dots, p_{i-1}, p_i), \\ B_1 &= \frac{\partial G}{\partial p_i}(Z_F^*, p_{i-r}, \dots, p_{i-1}, p_i), \\ B_2 &= \frac{\partial G}{\partial p_{i-1}}(Z_F^*, p_{i-r}, \dots, p_{i-1}, p_i), \\ &\dots, \\ B_{r+1} &= \frac{\partial G}{\partial p_{i-r}}(Z_F^*, p_{i-r}, \dots, p_{i-1}, p_i), \end{aligned}$$

donde $p_{i-r} = \dots = p_{i-1} = p_i = \tilde{p}$.

Para valores de p cercanos a \tilde{p} en la vecindad de $Z_F^*(\tilde{p})$, el mapeo de Poincaré se aproxima por:

$$\Delta Z_{n+1} = A\Delta Z_n + B_1(p_n - \tilde{p}) + B_2(p_{n-1} - \tilde{p}) + \dots + B_{r+1}(p_{n-r} - \tilde{p}). \quad (47)$$

IV.5.2.1 Ley de control por asignación de polos.

Por simplicidad se tratará el caso en el que $r = 1$ ($t_{i-1} - t_i > (d-1)\tau$) y se desea estabilizar un punto fijo. Existen extensiones del algoritmo para la estabilización de órbitas de orden superior (So y Yorke, 1995).

En este caso, la linealización de la ecuación (47) tiene la forma

$$\Delta Z_{i+1} = A\Delta Z_i + B_1\Delta p_i + B_2\Delta p_{i-1}. \quad (48)$$

Ahora, definimos el parámetro de control mediante una ley de control lineal

$$\Delta p_i = p_i - \tilde{p} = -K^T \Delta Z_i - k\Delta p_{i-1}.$$

Combinando ambas ecuaciones y definiendo una nueva variable con un componente extra:

$$Y_{i+1} = \begin{pmatrix} Z_{i+1} \\ p_i \end{pmatrix},$$

obtenemos el sistema “estados más parámetro”:

$$\Delta Y_{i+1} = (\bar{A} - \bar{B}\bar{K}^T)\Delta Y_i,$$

donde

$$\Delta Y_i = Y_i - Y_F^*, \quad Y_F^*(\tilde{p}) = \begin{pmatrix} Z_F^*(\tilde{p}) \\ \tilde{p} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} A & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \bar{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \tilde{K} \\ k \end{pmatrix}.$$

El vector de ganancias $\bar{\mathbf{K}}^T$ se asigna de modo que el punto fijo inestable $Y_F^*(\tilde{p})$ se estabilice. Es decir, que la matriz $\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}^T$ tenga todos sus valores propios dentro del círculo unitario.

IV.5.2.2 Leyes de control propuestas por Dressler y Nitsche.

Existen otras formas de solucionar este problema de control. Dressler y Nitsche proponen tomar la representación de la ecuación (48) y aplicar directamente la condición

$$f_u \cdot \Delta Z_{i+1} = 0,$$

del algoritmo original OGY, de modo que se obtiene la ley de control

$$\Delta p_i = -\frac{\lambda_u}{f_u \cdot B_1} f_u \cdot \Delta Z_i - \frac{f_u \cdot B_2}{f_u \cdot B_1} \Delta p_{i-1}.$$

Se puede observar que si el mapeo de Poincaré no depende del valor anterior del parámetro p ($B_2 = 0$) se tiene la ley de control original. Con esta ley de control se puede presentar indeterminación en el término

$$\frac{f_u \cdot B_2}{f_u \cdot B_1}.$$

Además, no se asegura que Z_{i+2} caiga en la dirección estable. Para solucionar estos problemas Dressler y Nitsche proponen cambiar la condición original de OGY por las condiciones:

$$f_u \cdot \Delta Z_{i+2} = 0 \quad \Delta p_{i+1} = 0$$

Aplicando estas condiciones se obtiene una segunda ley de control

$$\Delta p_i = -\frac{\lambda_u^2}{\lambda_u f_u \cdot B_1 + f_u \cdot B_2} \cdot f_u \cdot \Delta Z_i - \frac{\lambda_u f_u \cdot B_2}{\lambda_u f_u \cdot B_1 + f_u \cdot B_2} \Delta p_{i-1}, \quad (49)$$

para la cual no se presenta el problema de indeterminación (Dressler y Nitsche, 1992).

IV.5.3 Implementación del algoritmo de control OGY para el caso de coordenadas retardadas.

La matriz A se puede obtener directamente de un serie de tiempo utilizando los procedimientos presentados en el capítulo anterior; mientras que para obtener los vectores B_j se puede utilizar el procedimiento que se presenta a continuación:

IV.5.3.1 Identificación de los vectores B_j (efecto de cambios paramétricos pasados).

Primeramente se modela la dinámica local del mapeo de Poincaré experimental considerando que todos los cambios paramétricos pasados son iguales al valor nominal del parámetro de control \tilde{p} ; es decir, $\Delta p_1 = 0, \dots, \Delta p_{r-1} = 0$. Enseguida se obtiene una nueva serie de tiempo en la que se aplica el control paramétrico en forma intermitente, haciendo $\Delta p_n = p_{\max} - \tilde{p} \neq 0$, para cada $(r + 1)$ -ésima intersección de la trayectoria reconstruida con la sección de Poincaré. Esto es, se hace $\Delta p_n = p_{\max}$ para toda n que sea divisible en $r + 1$ y para cualquier otra n se hace $\Delta p_n = 0$.

Una vez que se tiene esta serie de tiempo, se identifican los puntos de intersección que se encuentran en la vecindad del punto fijo inestable Z_F^* y se clasifican en $r + 1$ grupos de puntos según se haya aplicado la perturbación paramétrica. Por ejemplo, en el caso de todos los pares de puntos¹⁵ (Z_n, Z_{n+1}) con $\Delta p_n \neq 0$. Para este grupo de puntos las perturbaciones correspondiente a los otros r puntos de intersección son cero ($\Delta p_{i-1} = \dots = \Delta p_{i-r} = 0$), entonces la linealización (47) se reduce a

$$\Delta Z_{i+1} = A\Delta Z_i + B_1\Delta p_i.$$

El vector columna B_1 de dimensión $(d_E - 1)$, se puede estimar mediante mínimos cuadrados en la misma forma que se hace en la sección IV.4.1. Los otros vectores B_j ,

¹⁵ Los otros r grupos de pares de puntos corresponden a los puntos para los cuales $\Delta p_{n-1} \neq 0, \dots, \Delta p_{n-r} \neq 0$.

con $2 \leq j \leq r + 1$, se obtienen en forma similar.

Una forma de verificar que los valores obtenidos para los vectores B_j son correctos, es comprobar que la suma de todos los vectores B_j sea igual al vector B obtenido para la ley de control OGY original.

IV.5.3.2 Sistema de Lorenz.

Para calcular la ley de control es necesario en primer lugar determinar el número de cambios paramétricos que pueden ocurrir entre cada punto del mapeo. Para el sistema de Lorenz el tiempo entre intersecciones es de 95 segundos, mientras que el tiempo de retardo necesario para generar un nuevo vector es de 0.3 segundos. De modo que se cumple la condición (44) y sólo es necesario considerar el efecto de un cambio paramétrico pasado. Con un cambio paramétrico intermitente de $\Delta p = 0.1$ se obtienen los vectores

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.4212 \\ 0.4036 \end{bmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{bmatrix} -0.1780 \\ -0.1516 \end{bmatrix}.$$

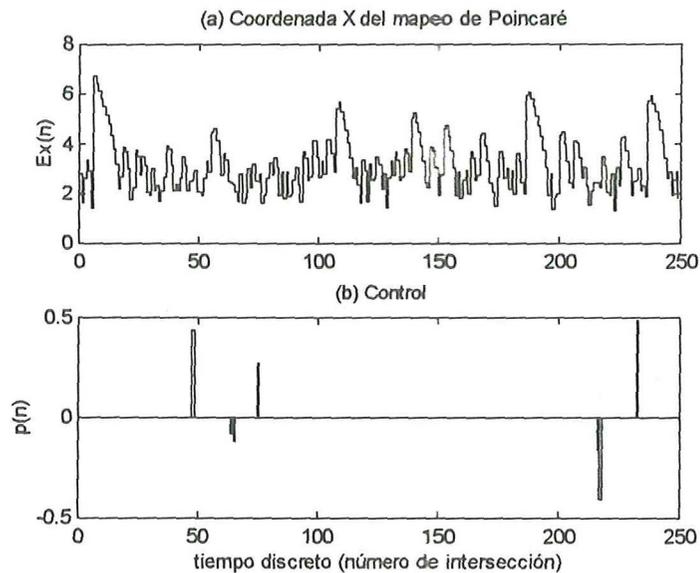


Figura 45. (a) Comportamiento de la primera coordenada del mapeo de Poincaré ξ_{x_n} del sistema de Lorenz. (b) Los cambios paramétricos indicados por la segunda ley de control propuesta por Dressler y Nitsche.

Con estos valores se calculó la segunda ley de control propuesta por Dressler y Nitsche (49) obteniendo

$$C_i = \begin{bmatrix} 14.0382 \\ -1.8532 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \xi_x(i) - 5.1580 \\ \xi_y(i) - 2.4489 \end{bmatrix} - 0.4726\Delta p_i.$$

En la figura 45 se presenta el resultado obtenido con este control.

Como se puede ver, el control fue incapaz de estabilizar el punto fijo inestable, aún cuando se toma en cuenta el efecto de la perturbación pasada.

IV.5.3.3 Sistema Hénon-continuo.

Para el mapeo de primer retorno utilizado para este sistema, los tiempos de retardo para construir un nuevo punto y el tiempo entre cada punto del mapeo son iguales, de modo que aún cuando la condición (44) no se satisface estrictamente, solamente es necesario considerar un cambio paramétrico pasado.

Utilizando el procedimiento descrito en la sección IV.5.3.1 se obtienen los vectores

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1.0083 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{bmatrix} 0.3134 \times 10^{-4} \\ 0.0000 \end{bmatrix}.$$

Como se puede ver en este sistema el efecto del cambio paramétrico pasado es despreciable, por lo tanto, se tiene básicamente la misma ley de control.

Con los valores obtenidos en la sección IV.4.3.2, y los vectores B_1 y B_2 , se calculó la segunda ley propuesta por Dressler y Nitsche (49),

$$C_n = \begin{bmatrix} 1.9008 \\ -0.2951 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s(n-1) - 0.8694 \\ s(n) - 0.8469 \end{bmatrix} - 3.1083 \times 10^{-5} \Delta p_n.$$

Se aplica esta ley de control cuando $|C_n| \leq 0.1$ obteniendo los resultados que se presentan en la figura 46.

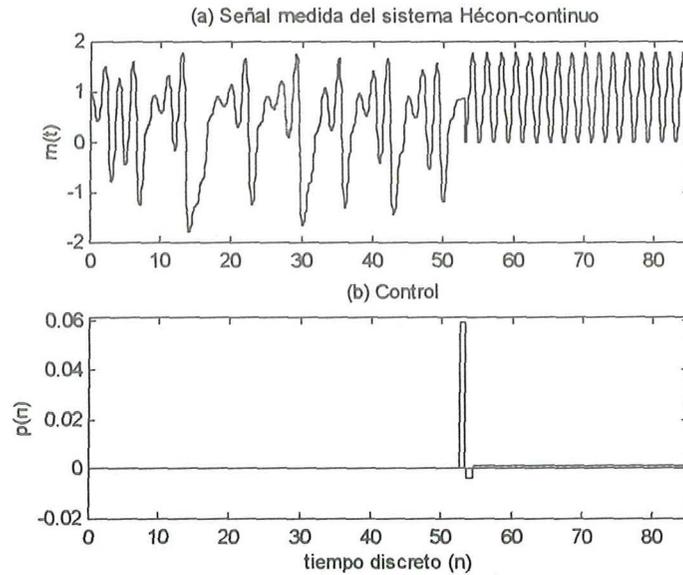


Figura 46. (a) Comportamiento de la señal medida $m(t)$ del sistema Hénon-continuo. (b) Los cambios paramétricos necesarios para el control según la segunda ley de control propuesta por Dressler y Nitsche.

IV.6 Desempeño del control.

Para evaluar el desempeño del control se consideraron, en primer lugar, diferentes condiciones iniciales del sistema Hénon-continuo, observándose que el efecto de inicializar el sistema en diferentes puntos sólo afecta la duración del transitorio caótico, como se ilustra en la figura 47.

Enseguida se investigó el efecto del tamaño máximo permitido para la perturbación (p_{\max}) sobre la habilidad para lograr el control, observando que para valores muy pequeños de la perturbación máxima el tiempo para lograr el control crece. El valor mínimo del parámetro para el cual se logró el control en un tiempo razonable, fue de $p_{\max} = 0.051$. Por otro lado, si el valor máximo permisible al cambio paramétrico es mayor a 0.5, el control se alcanza casi de inmediato; este comportamiento se presenta en la figura 48.

Por último, se realizaron cambios en los parámetros del sistema, para observar la capacidad del control para resistir este tipo de perturbaciones. El control logra estabilizar el comportamiento del sistema para pequeños cambios en los parámetros (de hasta 10% del valor nominal), siempre que el valor de p_{\max} sea grande, aunque la órbita en la que se estabiliza no es la misma que se tenía antes de la perturbación; esto se ilustra en la figura 49.

Cuando el efecto de la perturbación es superior al efecto del cambio paramétrico permitido, el control se pierde, pero al retirar la perturbación, la ley de control vuelve a estabilizar el sistema; este comportamiento se presenta en la figura 50.

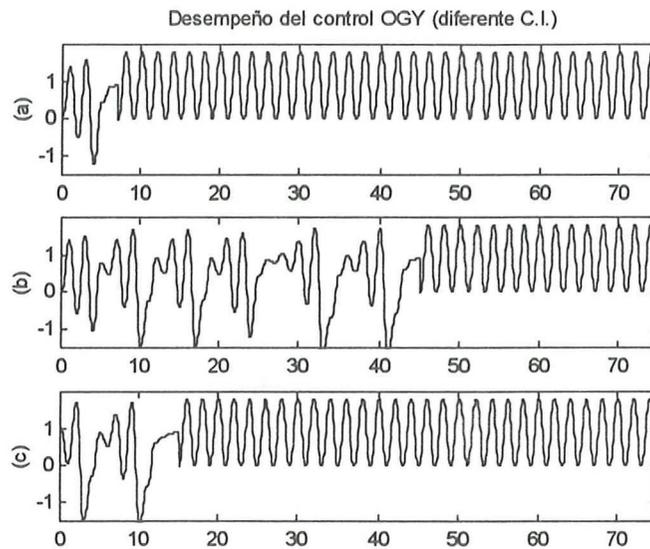


Figura 47. Comportamiento del lazo de control del sistema Hénon-continuo iniciando el sistema en el punto (a) $(1.0, 0.3)$, (b) $(0.1, 0.0)$ y (c) $(1.01, -1.09)$.

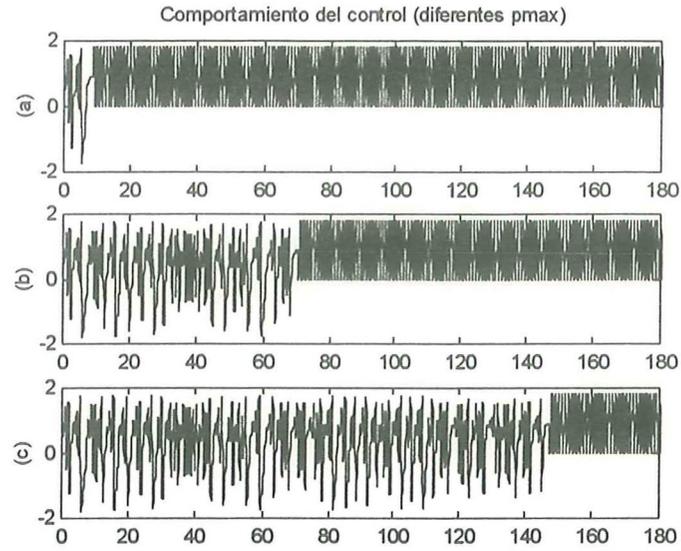


Figura 48. Comportamiento del lazo de control del sistema Hénon-continuo para diferentes valores del cambio paramétrico máximo (a) $p_{\max} = 0.5$, (b) $p_{\max} = 0.1$ y (c) $p_{\max} = 0.051$.

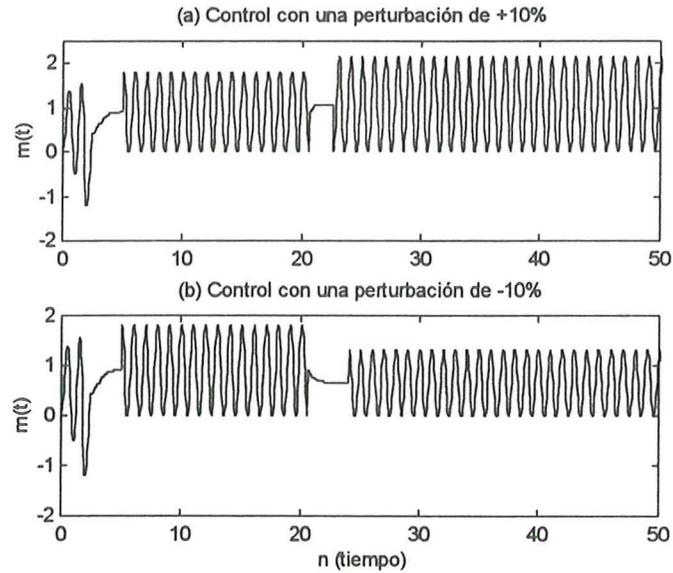


Figura 49. Comportamiento del control ante perturbaciones de los parámetros del sistema.

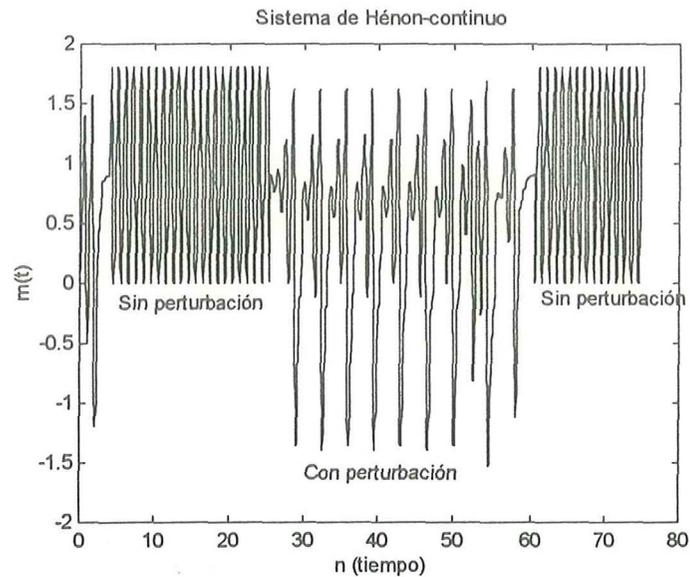


Figura 50. Comportamiento del control del sistema Hénon-continuo, cuando se aplica una perturbación superior al control, y luego se retira.

IV.7 Observaciones

El método de control OGY funciona bajo la suposición de que el sistema tiene una dirección estable y otra inestable, y que el cambio paramétrico mueve el sistema sobre la dirección estable. En el caso del sistema reconstruido de Lorenz y los demás atractores caóticos de dimensión baja en los que se presenta el problema de mínimos cuadrados mal condicionado, no se tiene acceso a toda la información de la dinámica de la vecindad. De modo que el hecho de que el algoritmo de control no fuera capaz de estabilizar la dinámica del sistema reconstruido, significa que el efecto del cambio paramétrico pasado no es tan importante como lo son los errores en la identificación del modelo local de la dinámica. Por lo tanto, es necesario buscar una alternativa que permitan solucionar los problemas de identificación que se presenta en este tipo de sistemas.

Estos problemas de identificación se concentran en dos aspectos de la implementación

del control. El primero es la forma en que se obtiene el modelo; es decir, el algoritmo de mínimos cuadrados que se implementó, pues es necesario resolver el problema de deficiencia de rango que se presenta en las mediciones. El segundo es la forma en que se obtienen los puntos en el mapeo de Poincaré experimental, pues con el algoritmo presentado en la sección III.2.3.1 se identifica el punto de cruce ξ como una interpolación lineal entre dos vectores reconstruidos una vez que atraviesan la sección de Poincaré, por lo que el control se aplica por lo menos un paso después del cruce. Además, los valores de ξ no son los obtenidos directamente en la serie de mediciones. En adelante, se deberá atender estos aspectos de la implementación de la estrategia de control.

V. Discusión y conclusiones.

V.1 Discusión de resultados.

En este trabajo de tesis se implementó la técnica de coordenadas retardadas por medio de la cual, es posible obtener un equivalente topológico del atractor de un sistema desconocido, a partir de una serie de tiempo. Para implementar esta técnica es necesario determinar el tiempo de retardo y la dimensión de reconstrucción adecuados para cada serie de tiempo; con este fin se desarrollaron los cálculos del promedio de información mutua ($PIM(T)$) y el promedio de falsos vecinos más cercanos ($PFVMC(d)$), respectivamente.

Se mostró que estos calculos pueden ser utilizados para determinar la naturaleza del sistema que originó la serie de tiempo. También se mostró que estos calculos pueden tener otros usos, en particular el $PVVMC(d)$ se puede utilizar para determinar el efecto de incluir o retirar algún componente de un sistema, en la dimensión necesaria para visualizar el atractor. Por otra parte, se mostró que es posible reducir el tiempo de cálculo para obtener el $PIM(T)$ utilizando una combinación menor de número de muestras y de intervalos, teniendo un resultado equivalente al encontrado mediante un cálculo mucho más largo.

Se realizó la reconstrucción del espacio de estados a partir de siete series de tiempo, de las cuales dos fueron obtenidas de sistemas implementados físicamente. Para estos sistemas se observó que los resultados obtenidos son geoméricamente similares a los que se obtuvieron para sus contrapartes simuladas numéricamente, con lo que se alienta el uso de esta técnica de análisis en sistemas experimentales.

Se ha mostrado que, aún cuando una de las características principales de los sistemas caóticos es que son prácticamente impredecibles a largo plazo, es posible obtener

un modelo del comportamiento caótico a nivel local del mapeo de Poincaré del mismo, siendo en general, un mapeo lineal la opción más utilizada para este tipo de modelos.

Teniendo en cuenta que un atractor caótico se puede representar como un conjunto denso de órbitas tipo silla de todos los periodos, es posible identificar una de éstas para obtener un modelo local de la dinámica reconstruida con fines de control. Una forma de facilitar el manejo de la información del atractor reconstruido es aplicar la técnica del mapeo de Poincaré, por medio de la cual se reemplaza la trayectoria continua reconstruida por una serie de puntos, de modo que para localizar una órbita periódica en esta representación, basta con analizar los puntos de recurrencia que se presentan en el mapeo.

Una vez localizado un punto fijo de interés, el modelado local de la dinámica se realiza ajustando, en el sentido de mínimos cuadrados, un mapeo lineal a la evolución de pequeños vectores alrededor del punto de interés a sus imágenes en el mapeo; de esta forma se obtiene una aproximación a la matriz Jacobiana del mapeo en este punto. La matriz Jacobiana obtenida indica las características de estabilidad de este punto fijo, de modo que es posible identificar la dirección estable y la dirección inestable del comportamiento del sistema en la vecindad de la órbita periódica que se desea estabilizar. El método de control OGY consiste en perturbar los parámetros del sistema para moverlo a la dirección estable de la órbita periódica identificada, de esta forma estabilizando el comportamiento del sistema.

Para la implementación del control, además de la estimación de la matriz Jacobiana, es necesario conocer el efecto de un cambio paramétrico sobre la vecindad del punto fijo; esto se obtiene del ajuste, en sentido de mínimos cuadrados, de la nueva vecindad del punto fijo después de un cambio paramétrico.

Se implementó este método de control para dos situaciones: cuando se tiene acceso a las ecuaciones del sistema y cuando no se tiene acceso a ellas. En este último caso, se consideraron dos posibles circunstancias, en una se tiene acceso a los puntos que

forman el sistema discreto a controlar, y en la otra solamente se cuenta con una serie de mediciones.

Con las ecuaciones del sistema es posible obtener, en forma explícita, todos los valores necesarios para calcular la ley de control, de modo que los errores de identificación son cero. En este caso, el control se alcanza rápidamente en cuanto el sistema entra en la vecindad donde la linealización es válida.

Cuando se tiene acceso a los puntos del sistema discreto asociado, es necesario aplicar los mecanismos de modelado para identificar, en primer lugar, la localización de una órbita periódica, para luego obtener la matriz Jacobiana y el vector del efecto de un cambio paramétrico. En este caso, existen errores de identificación, pero si el valor del cambio paramétrico es suficientemente grande como para contra restar su efecto, el control será alcanzado.

Por último, en el caso de tener sólo una serie de tiempo hay dos caminos a seguir para obtener un sistema discreto, dependiendo de la información disponible del sistema. Si se conoce el periodo de excitación, se pueden definir una frecuencia de muestreo con la cual formar un mapeo de primer retorno, en base a los valores de la serie de tiempo, cada periodo de excitación. Cuando sólo se tiene la serie de tiempo y ninguna información extra, es necesario reconstruir el espacio de estados y obtener el mapeo de Poincaré. Ambas formas de representar la dinámica del sistema desconocido son posibles para un sistema cuando se conoce el periodo de excitación, y depende de la funcionalidad; es decir, cual es más útil para lo que se desea hacer, que se utiliza una u otra representación.

Se mostró que es necesario considerar los cambios paramétricos pasado en la ley de control OGY cuando se implementa esta estrategia a partir de un mapeo experimental obtenido de la reconstrucción del espacio de estados mediante coordenadas retardadas.

Al aplicar el algoritmo de control desarrollado a este tipo de sistema se observó que sólo se logra el control cuando se tiene un buen modelo de la dinámica local. Por

este motivo el control no fue alcanzado para el sistema de Lorenz, pues en este caso los algoritmos de modelado presentaron un gran error relativo debido a que el problema de mínimos cuadrados correspondiente está mal condicionado. Por lo tanto, es necesario buscar un método de modelado que pueda resolver este problema cuando la vecindad del punto fijo es casi coplanar, que desafortunadamente, es una característica propia de los sistemas caóticos de dimensión baja.

Otro problema que se presenta en la implementación del control es la identificación de los puntos de cruce entre la trayectoria reconstruida y la sección de Poincaré, pues es necesario esperar a que se presente un cruce a través de la sección de Poincaré para, mediante una interpolación, determinar el punto de intersección, de modo que el control no sea aplicado a destiempo.

V.2 Conclusiones.

Es posible obtener un equivalente topológico de la dinámica de un sistema desconocido, a partir de una serie de mediciones, mediante el cual se puede determinar la naturaleza del sistema que originó la serie de tiempo, para posteriormente generar un modelo de la dinámica reconstruida con fines de control.

Existen limitaciones a la información que se puede obtener a partir de la reconstrucción del espacio de estados de un sistema, siendo el principal problema para la identificación de la dinámica local, el hecho de que las observaciones en la vecindad de un punto de interés se agrupan en curvas casi unidimensionales, de modo que al estimar la matriz Jacobiana del sistema en ese punto, se generan grandes errores relativos, debido a que el problema de mínimos cuadrados está mal condicionado.

Es posible estabilizar una órbita periódica empotrada en un sistema caótico, mediante pequeñas perturbaciones sobre los parámetros del sistema. Además es posible aplicar esta metodología a sistemas de los cuales no se conocen las ecuaciones que describen su dinámica. La estrategia de control propuesta funciona adecuadamente

cuando se tiene un buen modelo de la dinámica local de la órbita inestable que se desea estabilizar.

V.3 Recomendaciones.

La metodología presentada en esta tesis para el análisis de series de tiempo, modelado y control de sistemas caóticos es muy amplia. Por lo tanto, existe un gran número de problemas abiertos en cada una de sus etapas. En consecuencia, al realizar estas recomendaciones se abordan exclusivamente los problemas de implementación que se presentaron para la realización del trabajo de tesis.

- En cuanto a la reconstrucción del espacio de estados, es recomendable investigar otros métodos para determinar el tiempo de retardo y la dimensión de reconstrucción, para evaluar el desempeño de las técnicas implementadas en esta tesis.
- En cuanto al modelado de la dinámica reconstruida, es necesario implementar alguna técnica de ajuste que solucione el problema de mínimos cuadrados mal condicionado, de modo que sea posible obtener un modelo más confiable de la dinámica local cuando las observaciones son casi coplanares.
- También es importante investigar el efecto de la interpolación que se hace para determinar el punto de cruce entre la trayectoria reconstruida y la sección de Poincaré, en la capacidad para aplicar el control en el momento adecuado.
- En cuanto al control de la dinámica reconstruida, es recomendable investigar otras técnicas de control para sistemas caóticos, como el control de caos mediante mapeos unidimensionales, para el cual sólo es necesario identificar un modelo unidimensional de la dinámica local. Otra posibilidad es el método de control OPF (Occasional Proportional Feedback) para el cual no es necesario conocer un modelo de la dinámica del sistema caótico reconstruido, sólo se requiere identificar el punto que se desea estabilizar.

LITERATURA CITADA

- **Abarbanel, H. D. I.** 1996. "Analysis of observed chaotic data". Springer-Verlag New York Inc. New York. 272 paginas.
- **Auerbach, D., P. Cvitanovi'c, J.-P. Eckmann, G. Gunaratne y I. Procaccia.** 1987. "Exploring chaotic motion through periodic orbits". Phys. Rev. Lett. 58, pag. 2387-2389.
- **Curiel, E.** 1996. "Caos en sistemas de control convensionales". Tesis de maestría CICESE, por publicarse. También **Alvarez, J., E. Curiel y F. Verduzco.** 1996. "Complex dynamics in classical control systems". System & Control Letters, por publicarse.
- **Cvitanović, P.** 1988. "Invariant measurements of strange sets in terms of cycles". Phys. Rev. Lett. 61, pag.2729-2732.
- **Dressler, U. y G. Nitsche.** 1990. "Controlling chaos using time delay coordinates". Phys. Rev. Lett. 68, pag. 1-4. También **Nitsche G. y U. Dressler.** 1992. "Controlling chaotic dynamical systems using time delay coordinates". Physica D 58, pag. 153-164.
- **Eckmann, J.-P. y D. Ruelle.** 1985. "Ergodic theory of chaos and strange atractors". Rev. of Mod. Phys. 57, pag. 617-656.
- **Eckmann, J.-P., S. O. Kaspforst, D. Ruelle y S. Ciliberto.** 1986. "Liapunov exponents from time series". Phys. Rev. A 34, pag. 4971-4979.
- **Kennedy, M. P.** 1993. "Three steps to chaos". IEEE Trans. Circuits Syst. 40, pag. 640-674.
- **Kostelick, E. J.** 1992. "Problems in estimating dynamics from data". Physica D 58, pag. 138-152.
- **Kostelick, E. J. y J. A. Yorke.** 1990. "Noise reduction: finding the simplest dynamical system consistent with the data". Physica D 41, pag. 183-196.

LITERATURA CITADA (Continuación)

- **Lathrop, D.P.** y E.J. Kostelick. 1989. "Charaterization of an experimental strange attractor by periodic orbits". *Phys. Rev. A* 40, pag. 4028-4032.
- **Mañé, R.** 1981. en *Dynamical Systems and Turbulence*, Warwick, 1980, editado por D. Rand y L.S. Young, *Lecture Notes in Mathematics* No. 898 (Springer, Berlin), pag. 230.
- **Márquez, A.** y J. Alvarez. 1996, "Diseño de un circuito para generar caos en base a las ecuaciones de Lorenz". Reporte tecnico CICESE. Por publicarse.
- **Ott, E., C. Grebogy y J.A. Yorke.** 1990. "Controlling Chaos". *Phys. Rev. Lett.* 64, pag.1196-1199. También **Ott, E., C. Grebogy y J.A. Yorke.** 1990. en "Chaos/Xaos Soviet-American prespectives on nonlinear science". editado por D.K. Campell (*American Inst. of Phys.*), pag.153-172.
- **Packard, N. H., J. P. Crutchfield, J. D. Farmer y R.S. Shaw.** 1980. "Geometry from a time series". *Phys Rev. Lett.* 45, pag. 712 -718.
- **Parker, T. S. y L. O. Chua.** 1989. "Practical numerical algorithms for chaotic systems". Springer-Verlag New York inc. New York. 348 páginas.
- **Press, W. H., B. P. Flannery, S. A. Teokolsky y W.T. Vetterline.** 1986. "Numerical recipes, the art of scientific computing". Cambridge University Press. Cambridge. 818 páginas.
- **Romeiras, F. J., C. Grebogi, E. Ott y W. P. Dayawansa.** 1992. "Controlling chaotic dynamical systems". *Physica D* 58. pag 124-152.
- **Sano, M. y Y. Sawada.** 1985. "Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series". *Phys. Rev. Lett.* 55, pag. 1082-1085.
- **So, P. y E. Ott.** 1995. "Controlling chaos using time delay coordenates via stabilization of periodic orbits". Obtenido por internet de la Universidad de Maryland en College Park, Estados Unidos.

LITERATURA CITADA (Continuación)

- **Spong, M. W.** 1994. "The control of underactuated mechanical systems". Obtenido por internet de la Universidad de Illinois en Urbana, Estados Unidos.
- **Takens, F.**1981. en *Dynamical Systems and Turbulence*, Warwick, 1980, editado por D. Rand y L.S. Young, *Lecture Notes in Mathematics* No. 898 (Springer, Berlin), pag. 366.