Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California

Doctorado en ciencias
en Electrónica y Telecomunicaciones
con orientación en Instrumentación y Control

Diseño e implementación de algoritmos de control para la atenuación de vibraciones sísmicas en una clase de estructuras

Tesis
para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Doctor en Ciencias

Presenta:

Gerardo Hirata Salazar

Ensenada, Baja California, México
2016

Tesis defendida por

Gerardo Hirata Salazar

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos
Director de Tesis

Dr. Ervin Jesús Álvarez Sánchez

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez

Dr. Yury Orlov

Dr. David Isaías Rosas Almeida

Dr. Luis Agustín Alvarez-Icaza Longoria

Dr. Miguel Angel Alonso Arévalo
Coordinador del Programa de Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dra. Rufina Hernández Martínez
Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Gerardo Hirata Salazar como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

Diseño e implementación de algoritmos de control para la atenuación de vibraciones sísmicas en una clase de estructuras

Resumen elaborado por:

Gerardo Hirata Salazar

En esta memoria de tesis se presenta un estudio sobre el desempeño de algoritmos de control para la atenuación de vibraciones sísmicas en una clase de estructuras mecánicas flexibles. Dichos algoritmos se diseñan tanto para una estructura virtual como para una plataforma experimental. En la primera parte se describen, de forma general, algunos métodos tanto pasivos como activos, semi-activos e híbridos que se utilizan para protección sísmica. Se analiza la aplicación de dos de estos métodos, uno activo y otro semi-activo, a una estructura virtual de cinco pisos. Los métodos activos se aplican posteriormente a una plataforma experimental formada por una estructura flexible, que permite movimientos en una sola dirección, montada sobre una mesa vibratoria con la cual se introducen perturbaciones diversas en la base de la estructura. La mesa vibratoria, accionada por un motor lineal, presenta una fricción seca elevada, por lo que se evaluaron varios controladores, clásicos y discontinuos, para seguimiento de distintas señales oscilatorias. La estructura flexible experimental puede configurarse de uno o de dos niveles y cuenta con actuadores constituidos por una masa que puede deslizarse sobre el nivel, accionada por un motor. Después de desarrollar un modelo dinámico para la estructura completa, se propusieron dos algoritmos de control, óptimo y $\mathscr{H}_\infty$, para atenuar el efecto de perturbaciones oscilatorias, especialmente sísmicas, sobre la misma. Se evaluaron diversas configuraciones, tanto de uno como de dos niveles, con uno o con dos actuadores. Los resultados obtenidos muestran un desempeño notablemente superior de los controladores discontinuos para el control de la mesa vibratoria, y del control $\mathscr{H}_\infty$ para la estructura flexible.

Palabras clave: **absorción de vibraciones en estructuras, mesa vibratoria, controladores PD, discontinuo, óptimo y sub-óptimo.**

Abstract of the thesis presented by Gerardo Hirata Salazar as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Doctor in Sciences in Electronics and Telecomunications.

Design and implementation of control algorithms for attenuation of seismic vibrations in a class of structures

Abstract by:

Gerardo Hirata Salazar

This thesis presents a study on the performance of control algorithms for the attenuation of seismic vibrations in a class of flexible mechanical structures. These algorithms are designed for both a virtual structure and an experimental platform. The first part of the work describes, in general, some methods both passive and active, semi-active and hybrid that are used for seismic protection. We analyze the application of two of these methods, one active and another semi-active, to a virtual structure of five floors. The active methods are then applied to an experimental platform formed by a flexible structure, which allows movements in a single direction, mounted on a vibrating table with which various perturbations are introduced at the base of the structure. The shaking table, driven by a linear motor, has a high dry friction, so that several controllers, classic and discontinuous, were evaluated to tracking different oscillatory signals. The experimental flexible structure can be configured on one or two levels and has actuators constituted by a mass that can slide on the level, driven by a motor. After developing a dynamic model for the complete structure, two control algorithms, optimal and $\mathscr{H}_\infty$, were proposed to attenuate the effect of oscillatory, especially seismic, perturbations on the same. Various configurations, on one and two levels, were evaluated with one or two actuators. The obtained results show a significantly superior performance of the discontinuous controllers for the control of the shaking table, and of the $\mathscr{H}_\infty$ control for the flexible structure.

Keywords: **vibration absortion in structures, shaking table, PD, discontinous, optimal and sub-optimal controllers.**

Dedicatoria

A mis hijas Harumi e Isami y especialmente a mi amada esposa Karen…

Agradecimientos

Al Dr. Joaquín Álvarez por ser siempre una guía en este trabajo, por su tiempo, su paciencia, sus conocimientos transmitidos y sobre todo por sus valiosos consejos y comentarios.

A los miembros del comité: Dr. Ervin, Dr. Alejandro, Dr. Yury y Dr. David por dedicar parte de su tiempo para este trabajo tesis. Al Dr. Luis Álvarez-Icaza por sus comentarios y sugerencias en el área de control de estructuras.

A mi querida esposa Karen, por su gran apoyo incondicional desde el inicio de mis estudios de doctorado.

A mis suegros, por su apoyo y por cuidar siempre de mis hijas.

A mis padres y hermanos.

A mis compañeros: Ulises, Eduardo y Abimael, por estar siempre dispuestos a compartir sus conocimientos conmigo y por su apoyo moral en todo momento.

A todos los investigadores, estudiantes y personal del posgrado en electrónica y telecomunicaciones del CICESE, por su apoyo y enseñanza académica.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por brindarme la oportunidad de estudiar en sus instalaciones.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de doctorado bajo el proyecto de investigación titulado «Control y sincronización de sistemas subactuados: aplicación al control de oscilaciones en mecanismos y estructuras», No. CB-2012-180011-Y, financiado por el mismo CONACyT.

Tabla de contenido

Resumen en español . . . . **iii**

Resumen en inglés . . . . **iv**

Dedicatoria . . . . **v**

Agradecimientos . . . . **vi**

Lista de figuras . . . . **xi**

Lista de tablas . . . . **xv**

1. Introducción **1**

1.1. Objetivos 1

1.2. Metodologías 2

2. Antecedentes **4**

2.1. Introducción 4

2.2. Sistemas pasivos 6

2.2.1. Aislamiento de base 6

2.2.2. Disipadores de energía 7

2.2.3. Sistemas inerciales acoplados 9

2.3. Sistemas activos 10

2.4. Sistemas híbridos 13

2.5. Sistemas semi-activos 13

2.5.1. Amortiguadores de orificio variable 14

2.5.2. Amortiguadores de fluido controlable 14

3. Preliminares y control de estructuras **18**

3.1. Modelo virtual de una estructura de 5 pisos 18

3.2. Métodos semi-activos, uso del amortiguador magneto-reológico (AMR) 19

3.2.1. Observador de la variable interna 19

3.2.2. Modelo en variables de estado 20

3.2.3. Linealización entrada-salida 21

3.2.4. Grado relativo bien definido 22

3.2.5. Grado relativo indefinido 24

3.2.6. Desarrollo del controlador para el AMR 24

3.2.7. Resultados numéricos del sistema con el AMR 27

3.2.8. Observaciones y conclusiones sobre métodos semi-activos . . 27

3.3. Métodos activos 29

3.3.1. Controlador óptimo 29

3.3.1.1. Regulador lineal 31

3.3.2. Control $\mathscr{H}_\infty$ para la atenuación de perturbaciones 34

4. Estudio de una mesa vibratoria **37**

4.1. ¿Qué es una mesa vibratoria? 37

4.2. Descripción del sistema 39

4.3. Modelo matemático 39

4.4. Algoritmos de control utilizados 46

4.4.1. PD con compensación de perturbaciones 46

4.4.2. Modos deslizantes con dinámica tipo Zeno 48

4.4.3. Control discontinuo con superficie deslizante no conexa(CD-SDNC) 49

4.5. Discusión de resultados 52

4.6. Conclusiones del capítulo 59

5. Control de una estructura de 1 nivel 63

5.1. Descripción matemática de la masa activa 63

5.1.1. Observador para la masa activa 67

5.1.2. Diseño de un controlador para la masa activa 67

5.1.3. Resultados experimentales obtenidos con la masa activa . . . 68

5.2. Análisis y control de la estructura completa (AMD-1) 71

5.2.1. Ecuaciones de movimiento de la AMD-1 71

5.2.2. Diseño de un control óptimo para la AMD-1 74

5.2.2.1. Resultados numéricos del control óptimo de la AMD-1 . . . 75

5.2.2.2. Resultados experimentales con el control óptimo para la AMD-1 78

5.2.3. Diseño de un control $\mathscr{H}_\infty$ para la AMD-1 79

5.2.3.1. El estimador para control $\mathscr{H}_\infty$ 81

5.2.4. Resultados experimentales 81

5.3. Conclusiones del capítulo 84

6. Control de una estructura de dos niveles 85

6.1. Descripción del sistema 85

6.1.1. Ecuaciones de movimiento 86

6.1.2. Ecuaciones de estado 88

6.2. Diseño de un control óptimo para el AMD-2 89

6.2.1. Resultados numéricos aplicando control óptimo 91

6.2.2. Resultados experimentales aplicando control óptimo 94

6.3. Diseño de un control $\mathscr{H}_\infty$ para el AMD-2 98

6.3.1. Resultados experimentales con control $\mathscr{H}_\infty$ 100

6.4. Conclusiones del capítulo 102

7. Control de una estructura de dos niveles con dos actuadores 105

7.1. Descripción de la dinámica del AMD-2 con dos actuadores 105

7.1.1. Representación de estado 109

7.2. Planteamiento del problema de control $\mathscr{H}_\infty$ 110

7.3. Resultados de simulación con la AMD-2 con dos actuadores 112

7.4. Resultados experimentales con la AMD-2 con dos actuadores 114

7.5. Conclusiones del capítulo 116

8. Conclusiones 118

Literatura citada 120

A. Conceptos matemáticos 124

B. Configuración experimental de la mesa vibratoria 126

B.1. Conexión y configuración de arranque 127

B.2. Pruebas con el motor lineal y el software CM2. 129

B.3. Observaciones 133

B.4. Diagrama de conexión de cables 134

Lista de figuras

Figura Página

1. Sistemas de protección sísmica. 5
2. Respuesta sísmica de un edificio sin/con aislamiento de base. 7
3. Dispositivos aislantes. 8
4. Técnica de aislamiento sísmico en la base (Oviedo y del Pilar Duque, 2006). 8
5. Disipadores de energía en los marcos de una estructura Oviedo y del Pilar Duque (2006). 9
6. Algunos ejemplos de disipadores de energía. 10
7. Esquemas de control estructural: a) TMD (*Tuned Mass Damper*), b) AMD (*Active Mass Damper*) Preumont y Seto (2008). 12
8. Sistema de control híbrido Nishitani y Inoue (2001). 13
9. Esquema del amortiguador de orificio variable. 14
10. Esquema del amortiguador de fluido controlable. 15
11. Esquema del amortiguador de fluido MR de 20 toneladas. 15
12. Estructura virtual de 5 pisos. 18
13. Función tipo saturación 26
14. Posición y velocidad del primer entrepiso en lazo abierto. 28
15. Posición y velocidad del primer entrepiso en lazo cerrado. 28
16. Gráfica del control aplicado antes y después de la saturación. 29
17. Mesa vibratoria manufacturada por H2W Technologies®. 39
18. Respuesta de la mesa vibratoria a una señal periódica como entrada en lazo abierto. 40
19. Respuestas experimental y simulada del sistema con una entrada tipo rampa. 42
20. Comparación de los estados del sistema y observador ante una entrada $u = 5\,\mathrm{sen}(2t)$. Las subfiguras (a) y (b) corresponden al caso nominal (los parámetros del observador son idénticos que los del sistema). Las subfiguras (c) y (d) compara los estados para una diferencia en α de 11 % y -9.4 % en β. 45
21. Superficie deslizante discontinua usada por el controlador (69), y una trayectoria típica del sistema (diagrama adaptado de Cuesta *et al.* (2015)). 50
22. Señales sísmicas utilizadas. 53
23. Proceso para obtener la posición de referencia. 53

Figura Página

24. Seguimiento de posición con los algoritmos descritos en (61) y (69) (Sismo: El Centro). 54
25. Detalle de la figura 24 (Sismo: El Centro) 54
26. Comparación de las señales de control (Sismo: El Centro). 55
27. Detalle de la figura 26 (Sismo: El Centro). 55
28. Seguimiento de posición con los controladores descritos en (61) y (69) (Sismo: Mexicali). 56
29. Detalle de la figura 28 (Sismo: Mexicali) 56
30. Espectro de frecuencia de las señales de control. 57
31. Aceleración real y experimental, sismo El Centro. 59
32. Aceleración real y experimental, sismo Mexicali. 60
33. Espectro de frecuencia de la aceleración de El Centro, comparado con los espectros de aceleración de la mesa con los controles descritos. 61
34. Espectro de frecuencia de la aceleración de Mexicali, comparado con los espectros de aceleración de la mesa con los controles descritos. 61
35. Estructura flexible de un piso. 63
36. Diagrama a bloques del AMD. 64
37. Representación eléctrica del motor. 65
38. Seguimiento de una señal periódica. 69
39. Señal de control para la señal periódica. 69
40. Seguimiento de una señal chirp. 70
41. Señal de control para la señal chirp. 70
42. Diagrama de fuerzas del AMD. 71
43. Resultados numéricos de la posición del piso 1 con respecto a su base, condición inicial diferente de cero. 76
44. Resultados numéricos de la posición de la masa activa. 77
45. Señal de control obtenida con la simulación numérica en lazo cerrado. . . . 77
46. Resultados experimentales con control óptimo. 78
47. Desplazamiento de la AMD1 con una señal tipo chirp como perturbación. . 82
48. Aceleración del piso 1 como respuesta ante una perturbación tipo chirp. Se muestra la aceleración de la base como referencia para las aceleraciones del piso 1. 82

Figura Página

49. Desplazamiento de la AMD1 con una señal tipo sísmica como perturbación. 83

50. Aceleración del piso 1 como respuesta ante una perturbación tipo sísmica. Se muestra la aceleración de la base como referencia para las aceleraciones del piso 1. 83

51. Diagrama de fuerzas del AMD-2. 86

52. Desplazamiento del piso 1 con una condición inicial diferente de cero. Se muestra respuesta en oscilación libre (lazo abierto) y con control óptimo. . . 92

53. Desplazamiento del piso 2 con una condición inicial diferente de cero. Se muestra respuesta en oscilación libre (lazo abierto) y con control óptimo. . . 92

54. Desplazamiento de la masa activa. Se muestra respuesta en oscilación libre (lazo abierto) y con control óptimo. 93

55. Señal de control óptimo aplicada a la estructura. 93

56. Desplazamiento del piso 1 con el sismo de El Centro aplicando control óptimo. 95

57. Desplazamiento del piso 2 con el sismo de El Centro aplicando control óptimo. 95

58. Señal de control aplicada a la estructura con el sismo de El Centro aplicando control óptimo. 96

59. Desplazamiento del piso 1 con una perturbación tipo chirp (control óptimo). 97

60. Desplazamiento del piso 2 con una perturbación tipo chirp (control óptimo). 97

61. Señal de control aplicada a la estructura excitada con la señal chirp (control óptimo). 98

62. Desplazamiento del piso 1 con el sismo de El Centro aplicando control $\mathscr{H}_\infty$. 101

63. Desplazamiento del piso 2 con el sismo de El Centro aplicando control $\mathscr{H}_\infty$. 101

64. Señal de control aplicada a la estructura con el sismo de El Centro aplicando control $\mathscr{H}_\infty$. 102

65. Desplazamiento del piso 1 con una perturbación tipo chirp (control $\mathscr{H}_\infty$). . 103

66. Desplazamiento del piso 2 con una perturbación tipo chirp (control $\mathscr{H}_\infty$). . 103

67. Señal de control aplicada a la estructura excitada con la señal chirp (control $\mathscr{H}_\infty$). 104

68. Diagrama de fuerzas del AMD-2 con dos actuadores. 106

69. Desplazamiento del piso 1 con una condición inicial diferente de cero. Se muestran resultados en oscilación libre (lazo abierto) y aplicando control. . 113

Figura Página

70. Desplazamiento del piso 2 con una condición inicial diferente de cero. Se muestran resultados en oscilación libre (lazo abierto) y aplicando control. . 113
71. Señales de control aplicadas al AMD-2 con dos actuadores. 114
72. Desplazamiento del piso 1 con el sismo de El Centro (control $\mathscr{H}_\infty$). 115
73. Desplazamiento del piso 2 con el sismo de El Centro (control $\mathscr{H}_\infty$). 115
74. Señales de control aplicadas a la estructura con el sismo de El Centro (control $\mathscr{H}_\infty$). 116
B.1. Mesa vibratoria H2W Techologies. 126
B.2. Configuración del puerto serial utilizado. 130
B.3. Selección del puerto serial COM3. 130
B.4. El Baud Rate se deja como está. 131
B.5. Derecha: CM2 comunicándose con el amplificador. Izquierda: Comunicación establecida correctamente. 131
B.6. Abriendo archivo de configuración. 132
B.7. Derecha: Mensaje de advertencia. Izquierda: Configuración V$\rightarrow$A. 133
B.8. Configuración del Panel de Control. 133
B.9. Así es como quedaría físicamente el cable de lazo de control. 134
B.10.Cable de conexión para el lazo de control. 135
B.11.Cable para los enconders de los AMD's. 135

Lista de tablas

Tabla Página

1. Tabla comparativa de sistemas de control estructural implementadas a escala real. 16
2. Parámetros utilizados en la simulación. 27
3. Características de los controladores (Sismo: El Centro). 58
4. Características de los controladores (Sismo: Mexicali). 58
5. Parámetros del sistema 76
6. Descripción de los parámetros y variables para la AMD-1. 85
7. Parámetros del sistema AMD-2 91
8. Comparación de resultados utilizando el error cuadrático medio y los desplazamientos máximos (control óptimo). 98
9. Comparación de resultados utilizando el error cuadrático medio y los desplazamientos máximos (control $\mathscr{H}_\infty$). 100
10. Descripción de términos del sistema 107
11. Comparación de resultados utilizando el error cuadrático medio y los desplazamientos máximos (control $\mathscr{H}_\infty$). 116

Capítulo 1. Introducción

Gran parte del estado de Baja California es afectada por la falla transformante de San Andrés, la cual es famosa por producir terremotos grandes y devastadores (Wakabayashi y Romero, 1988). Por ejemplo, el domingo 4 de abril de 2010 ocurrió un terremoto de 7.2 grados en la escala de Richter con epicentro en Laguna Salada, entre Mexicali y San Felipe, con un saldo de 2 muertos y aproximadamente 233 heridos. La amenaza sísmica constituye un riesgo si es acompañada por edificaciones vulnerables a los sismos. De aquí la necesidad de diseñar y construir estructuras más resistentes a eventos sísmicos grandes sin que la estructura colapse.

El estudio de técnicas de diseño en estructuras resistentes a sismos, ha sido un área de intensa actividad en las últimas décadas. Se han desarrollado diferentes técnicas que comprenden desde el uso de materiales más resistentes hasta la implementación de sistemas más complejos que se añaden a una estructura para mejorar su comportamiento dinámico. Estas últimas muestran un mejor desempeño ya que se basan en mediciones de sensores y algoritmos que definen, de acuerdo a ciertos objetivos, el comportamiento de mecanismos que actúan sobre la estructura para atenuar efectos de sismos o del viento.

1.1. Objetivos

En esta tesis se aborda el problema general del uso de técnicas de control automático para la atenuación de vibraciones. Se consideran los siguientes objetivos:

- Proponer y desarrollar controladores que mejoren el efecto de vibraciones sísmicas en una clase de estructuras considerando movimientos en un solo eje,
- evaluar el desempeño de los algoritmos de control propuestos,
- caracterizar y poner a punto una plataforma experimental donde se evaluarán los algoritmos de control.

Descripción del marco experimental

Se considera una estructura experimental de al menos 2 pisos, la cual será sometida a excitaciones sísmicas en una sola dirección horizontal, las excitaciones son introducidas en la base de la estructura.

Se utilizará igualmente una estructura física, flexible, que puede emular una estructura real de varios niveles o pisos, sometida a aceleraciones en una sola dirección por medio de una mesa vibratoria.

1.2. Metodologías

Para cumplir con los objetivos se propone la obtención de un modelo dinámico lo más completo posible. Para esto, se debe considerar:

- movimientos en una sola dirección,
- número de niveles,
- el acoplamiento entre cada nivel,
- rigidez y fricción involucradas.

Se diseñarán algoritmos de control que muestren mejor desempeño en la absorción de vibraciones, principalmente sísmicas. Entre ellos se pueden considerar control óptimo, control discontínuo y control $\mathscr{H}_\infty$.

Organización de la tesis

Esta memoria de tesis está organizada como sigue. En el capítulo 2 se muestra un panorama general sobre el tema de control de estructuras y las diferentes metodologías que se han realizado para la atenuación de vibraciones en estructuras. En este mismo capítulo se clasifican dichas metodologías y se da una breve descripción de cada una de ellas. El conocimiento de estas metologías servirá como base para el desarrollo de este trabajo de tesis. En el capítulo 3 se hace el planteamiento general del problema y se estudia el modelo dinámico de estructuras. Así mismo, se analizan diferentes metodologías de control particularmente para una estructura de 5 niveles o pisos.

Para poder realizar pruebas experimentales de lo que se describe en los primeros capítulos, mencionados anteriormente, se requiere de una estructura y de una mesa vibratoria. Esta última, debe ser capaz de reproducir señales de interés necesarias para analizar los efectos de las mismas sobre la estructura. En el capítulo 4 se describe, se modela y se controla una mesa vibratoria cuyo movimiento es generado por un motor lineal sin escobillas. Sobre esta mesa se colocará la estructura cuyo comportamiento se analizará en los capítulos posteriores.

La estructura estudiada en este trabajo de tesis, presenta varias configuraciones. En cada una de ellas, se realizan pruebas en lazo abierto y lazo cerrado para observar su comportamiento. Por ejemplo en el capítulo 5 se inicia el análisis de la estructura considerando un solo nivel y un actuador en la parte superior de la misma. Se estudia también el comportamiento de la masa activa (actuador) y se obtiene su dinámica la cual se considera en el diseño del control de la estructura en sus diferentes configuraciones, pues la masa activa es la misma para todas.

En el capítulo 6 se consideran dos niveles para la estructura y un actuador en la parte superior de la misma. Se obtiene su dinámica y se diseñan dos algoritmos de control para la atenuación de las vibraciones. Al final de este capítulo se analiza el desempeño de dichos controladores.

Aumentando la dinámica de la estructura, en el capítulo 7 se agrega una segunda masa activa en el primer nivel, obteniendo una estructura de dos niveles con dos actuadores. El modelo dinámico, el diseño del algoritmo de control y los resultados para la estructura en esta configuración también se muestran en este capítulo. Finalmente, este trabajo de tesis culmina con las conclusiones mostradas en el capítulo 8.

Capítulo 2. Antecedentes

El tema de absorción de vibraciones en estructuras ha sido ampliamente estudiado en las últimas décadas. En el siguiente capítulo se presentan, de forma general, las técnicas pasivas, activas, semi-activas e híbridas utilizadas como sistemas de protección sísmica. Las primeras, como su nombre lo dice, utiliza solamente elementos pasivos integrados en la estructura desde su construcción. Las técnicas activas requieren de energía y de algoritmos inteligentes que mejoren la dinámica de la estructura ante perturbaciones diversas. Por otro lado, las híbridas son una combinación de las dos anteriores aprovechando lo mejor de ambas. Por último, las técnicas semi-activas utilizan elementos cuyas propiedades pueden ser modificadas con poca energía y cuya eficiencia es similar a los elementos activos. La parte central de este trabajo de tesis se basa en las técnicas activas aplicadas a una plataforma experimental con características particulares.

2.1. Introducción

El primer trabajo registrado sobre el control de estructuras para la absorción de vibraciones sísmicas data de 1972 (Yao, 1972). A partir de entonces se ha realizado un progreso significativo, no solo en el desarrollo de técnicas para la absorción de vibraciones sino también para contrarrestar los efectos del viento en estructuras.

En México existen normas de diseño para estructuras sismorresistentes. Por ejemplo, en Ing. Alfredo Elías (2008) se presenta un estudio sobre las regiones sísmicas del suelo mexicano y, con base en esto, se establecen recomendaciones sobre los parámetros de diseño de las estructuras. Además, se toma en cuenta la cercanía a fuentes generadoras de vibraciones, así como las condiciones locales del terreno.

Existen diferentes métodos para proteger una estructura contra los efectos de un sismo. Dichos métodos se clasifican en cuatro tipos: pasivos, activos, híbridos y semi-activos (véase la figura 1).

Un gran número de estas metodologías se aplican directamente en el diseño de la estructura Wakabayashi y Romero (1988); Rosenblueth (1980). Las técnicas más comunes

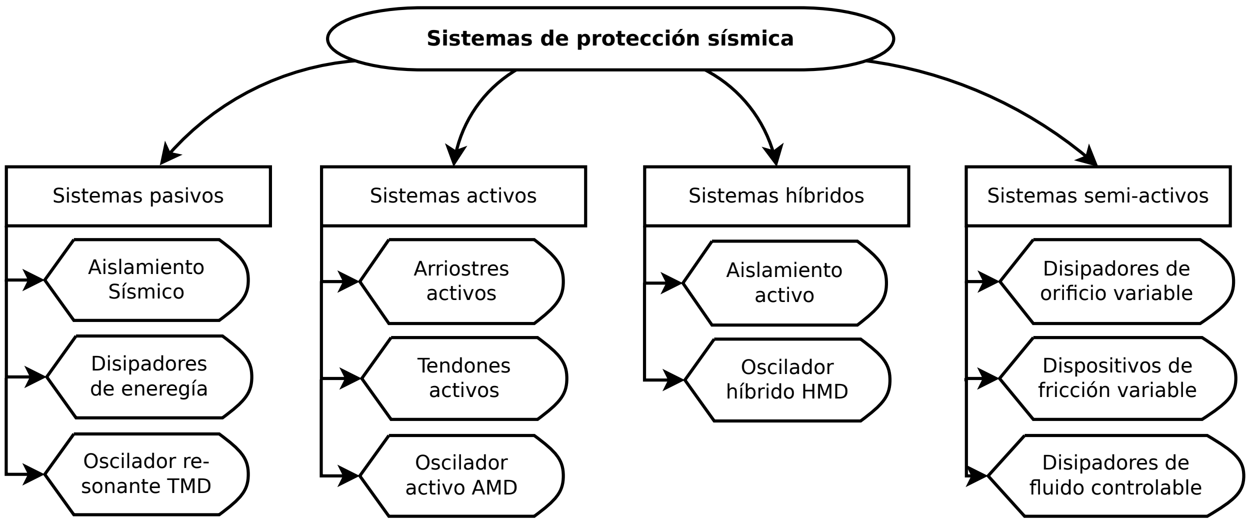


Figura 1: Sistemas de protección sísmica.

son: uso de amortiguadores, aislamiento de base y el aumento de rigidez. El amortiguamiento ayuda a atenuar los picos de excitación mediante la disipación de energía. El aislamiento previene la propagación de perturbaciones hacia las partes sensibles de una estructura. El aumento de rigidez consiste en cambiar la frecuencia de resonancia de la estructura hacia un intervalo de frecuencias diferente a la banda de frecuencias de la excitación. Estas técnicas son conocidas como pasivas, ya que no requieren de energía para su funcionamiento.

Cuando se requiere mejorar el desempeño en la absorción de vibraciones en estructuras se utiliza la técnica de control activo. Esto implica también el uso de sensores, actuadores y un algoritmo de control. Los sensores miden señales como la aceleración, velocidad, posición, fuerza, etc; los actuadores son los que realizan ciertas tareas de acuerdo a los objetivos de control (Alvarez *et al.*, 2010), y para el diseño de algoritmos de control existen diferentes metodologías tales como las técnicas de Lyapunov, control «bang bang», control óptimo, control $\mathscr{H}_\infty$, control «backstepping», control adaptable, control por modos deslizantes, control difuso, control discontinuo, etc., que ofrecen desempeños diversos (Çetin *et al.*, 2009). También se debe considerar la ubicación adecuada de sensores y actuadores, cuyo consumo de energía es importante.

El control híbrido se utiliza cuando se requiere proteger una estructura sin consumir mucha energía. Consiste en la combinación de una técnica pasiva con una técnica activa. Su principal ventaja es que, aún cuando la parte activa tuviera una falla, la parte pasiva del sistema seguiría actuando, de forma menos eficiente, pero cumpliendo con el objetivo de atenuar el efecto de vibraciones sobre la estructura.

Recientemente se ha propuesto una técnica que no es ni pasiva ni activa, conocida como control semi-activo (Preumont y Seto, 2008). Esta técnica se caracteriza por el uso de dispositivos pasivos con propiedades controlables, por ejemplo, el amortiguador magnetoreológico. Éste es un dispositivo de bajo consumo de energía cuyo fluido puede cambiar sus propiedades mediante una corriente eléctrica (Cuprich Rodríguez y Elizondo Garza, 1998).

Aunque las técnicas activas y pasivas son las que más se han implementado en estructuras reales, el control semi-activo muestra ciertas ventajas; por ejemplo, requiere de poca energía para su funcionamiento y, además, funciona como control pasivo inherente en caso de que la fuente de energía fuera interrumpida.

A continuación se presenta un resumen de lo más destacado que se encuentra en la literatura sobre los sistemas de protección sísmica. Gran parte de la información, así como algunas imágenes, se obtuvieron de (Horacio Andrés, 2010). En particular se hará mayor énfasis en el control semi-activo de estructuras, ya que es un área en desarrollo.

2.2. Sistemas pasivos

Los sistemas de control pasivos utilizan dispositivos completamente mecánicos, los cuales responden de manera inercial a los movimientos provocados por perturbaciones sísmicas o el viento, atenuando la respuesta de una estructura ante la presencia de estos eventos. Entre las metodologías pasivas más conocidas se tienen los aisladores de base, los disipadores de energía y los amortiguadores de masa sintonizados.

2.2.1. Aislamiento de base

El aislamiento se realiza usualmente entre la cimentación y la base de una estructura. Estos dispositivos son flexibles a movimientos horizontales, pero rígidos con respecto al eje vertical (véase figura 2).

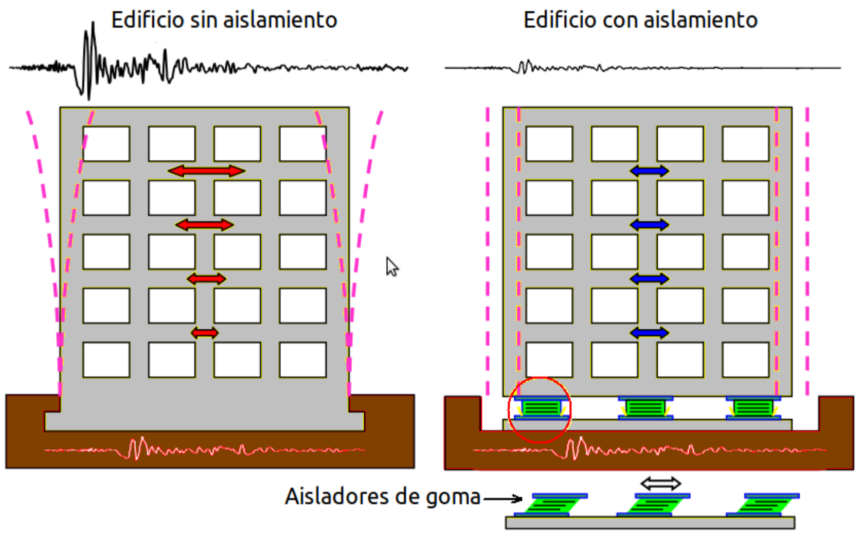


Figura 2: Respuesta sísmica de un edificio sin/con aislamiento de base.

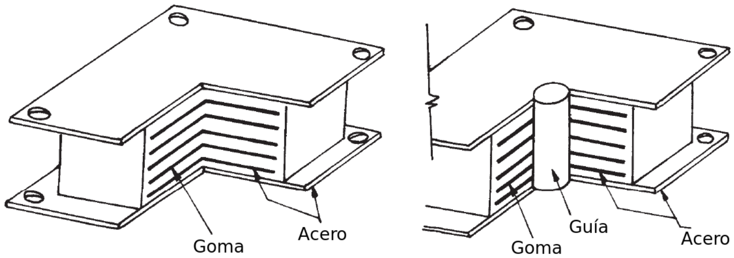
En la figura 3 se muestran algunos dispositivos utilizados para el aislamiento de base (Datta, 2003); entre ellos están: aislador de base de placa, de fricción, de bola, pendular y soportes laminados de goma, etc.

En México se utilizan los siguientes tipos de aisladores, que se encuentran especificados en Ing. Alfredo Elías (2008): apoyos laminados de hule natural, apoyos de hule con núcleo de plomo y apoyos deslizantes.

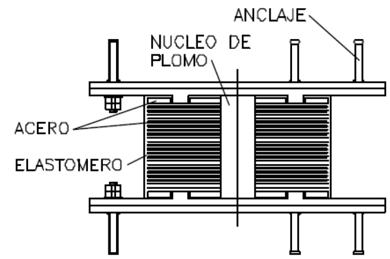
En la figura 4 se muestra la ubicación de estos dispositivos aisladores de base. Más imágenes e información sobre esto se podrá encontrar en la referencia mencionada en esta misma figura.

2.2.2. Disipadores de energía

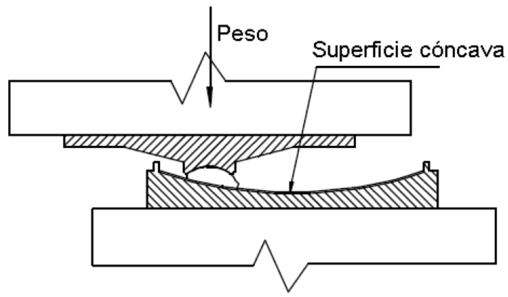
Los disipadores de energía liberan la energía que se genera debido a vibraciones sísmicas o por efectos del viento. Para el primer caso, se ubican este tipo de disipadores en la base de una estructura (véase figura 4). Para el segundo caso, se pueden tener distintos arreglos entre los marcos de una estructura, de tal forma que cuando exista movimiento lateral, éste sea absorbido por estos dispositivos (véase figura 5). Estos pueden clasificarse en: histeréticos, de fluidos, viscoelásticos y de fricción (Higashino y Okamoto,



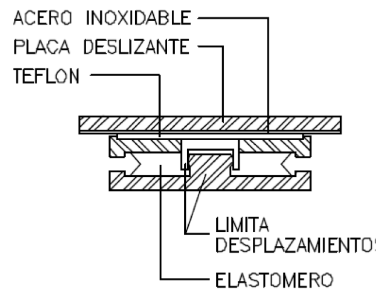
(a) De placa (vista isométrica)



(b) De placa (vista lateral)



(c) Pendular



(d) De fricción

Figura 3: Dispositivos aislantes.

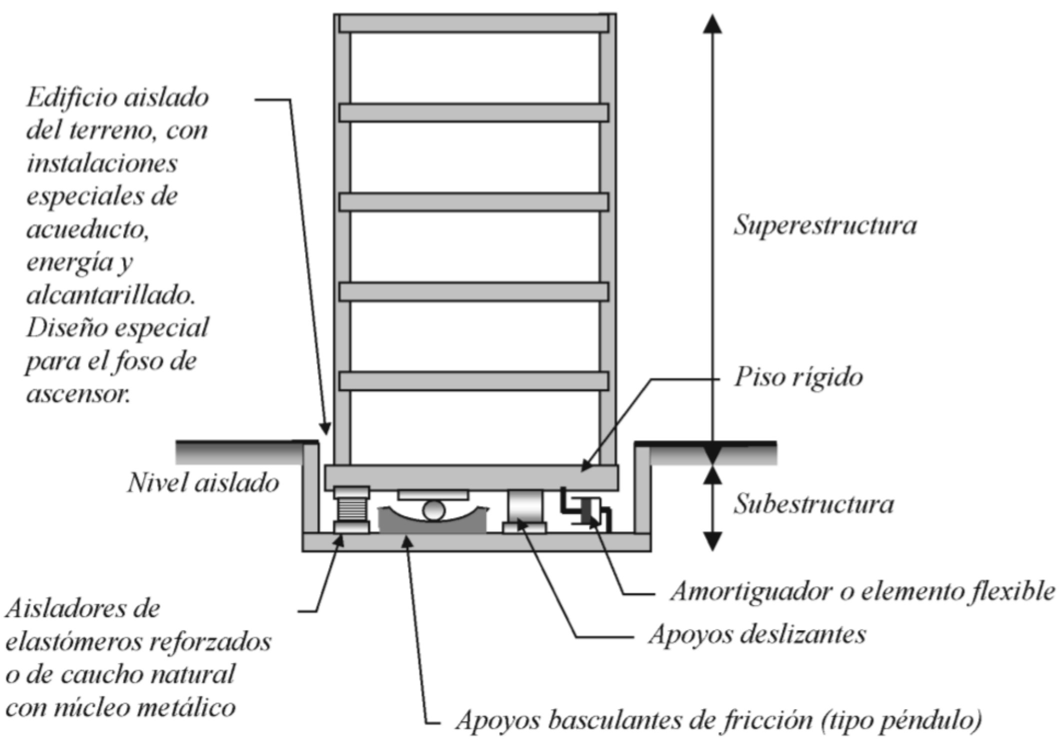


Figura 4: Técnica de aislamiento sísmico en la base (Oviedo y del Pilar Duque, 2006).

2006). Algunos ejemplos de éstos se muestran en la figura 6.

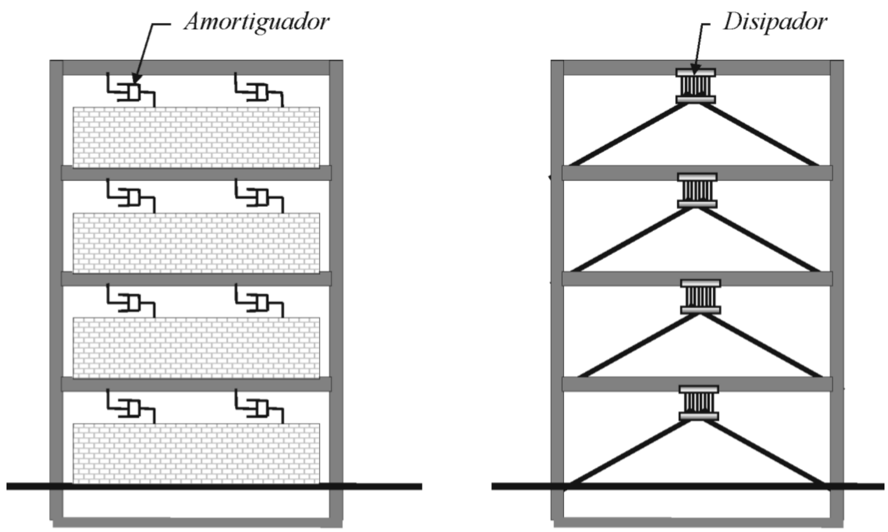


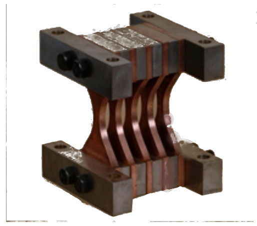
Figura 5: Disipadores de energía en los marcos de una estructura Oviedo y del Pilar Duque (2006).

Los dispositivos disipadores de energía que se consideran en México son (Ing. Alfredo Elías, 2008): dispositivos dependientes del desplazamiento y los dispositivos dependientes de la velocidad.

Estos dispositivos aisladores no absorben por completo la energía del sismo. Dependiendo del tipo de aislador y del material con que esté hecho, será la cantidad de energía que transfiera a la estructura. Esto también se puede mejorar haciendo una combinación de los dispositivos mencionados anteriormente.

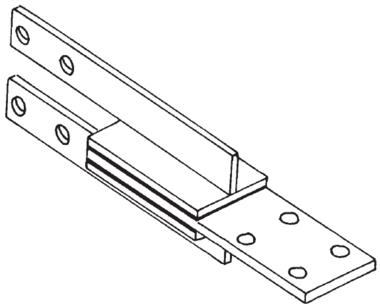
2.2.3. Sistemas inerciales acoplados

Otro método consiste en añadir un sistema masa resorte en la parte superior del edificio para contrarrestar no solo los efectos de un sismo, sino también los del viento (véase figura 7a). Los dispositivos más comunes son los amortiguadores de masa sintonizados (TMD, por sus siglas en inglés: *Tuned Mass Damper* (Daniel Ambrosini Guadalupe Cuitiño, 2004)). Estos amortiguadores se constituyen por una masa, un resorte y un elemento de fricción viscosa que, con los parámetros adecuados para estructuras civiles, pueden sintonizarse para que vibre a la frecuencia de la estructura y, de esta manera, atenuar las vibraciones no deseadas. En este trabajo también se presentan simulaciones numéricas que ayudan al estudio y visualización de estructuras de múltiples grados de libertad (múltiples pisos), así como los efectos que tienen los TMD sobre las mismas. Las

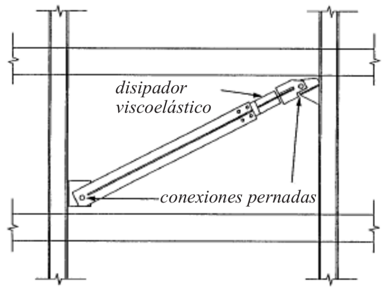


(a) Disipador de placas a flexión

(b) Disipadores histeréticos metálicos



(c) Disipador viscoelástico



(d) Insalación de disipador viscoelástico

Figura 6: Algunos ejemplos de disipadores de energía.

desventajas que presentan este tipo de sistemas es que trabajan en un ancho de banda estrecho y, para modificarlo, se deben cambiar las características físicas del TMD. Esto es una tarea complicada, dado el peso de los mismos (alrededor de 4 toneladas), entre otros factores.

2.3. Sistemas activos

Los primeros trabajos de control activo realizados en estructuras reales se hicieron en Tokyo, Japón, en 1989, con el edificio de Kyobashi Seiwa. Esta construcción abrió las puertas a la nueva era de diseño y construcción de estructuras resistentes a los sismos (Nishitani y Inoue, 2001).

Un sistema de control activo implica consumo de energía. Usualmente consta de actuadores que atenúan vibraciones en forma constante. Para esto se requiere también de un sistema de control, el cual se encarga de tomar decisiones con base en la medición de la respuesta de la estructura en tiempo real para calcular y enviar la acción de control al actuador.

Se tienen varias clasificaciones en los sistemas activos. Dependiendo de la variable medida el sistema es (Suhardjo *et al.*, 1990):

- *realimentado*: cuando se miden las variables correspondientes a la respuesta de la estructura,
- *anticipativo*: cuando se miden las variables de excitación,
- *anticipativo-realimentado*: cuando se miden las dos anteriores.

Con base en el algoritmo de control que se utilice, se puede también tener la siguiente clasificación (Datta, 2003):

- control en lazo abierto
- control en lazo cerrado
- control en lazo abierto-cerrado.

Un sistema de control adaptable es una variación del control en lazo abierto-cerrado con un controlador, el cual ajusta los parámetros del mismo en función del desempeño o de la dinámica cambiante de la estructura.

Uno de los actuadores más utilizados para el control activo de estructuras consiste de un amortiguador de masa activa (AMD, por sus siglas en inglés: *Active Mass Damper*). A diferencia de las técnicas pasivas vistas anteriormente, el movimiento de esta masa es controlado por el actuador representando en el diagrama de la figura 7b. Se puede ver que este sistema de control activo consiste de una masa adicional colocada en la parte superior de una estructura de varios pisos. Esta masa se opone al movimiento producido por vibraciones sísmicas y por el viento.

Una de las ventajas de los sistemas de control activo es que son efectivos para un intervalo amplio de frecuencias, además de que pueden implementarse en distintos terrenos. Por el contrario, son limitados en cantidad y disponibilidad de energía, lo cual es muy importante cuando se presenta un sismo.

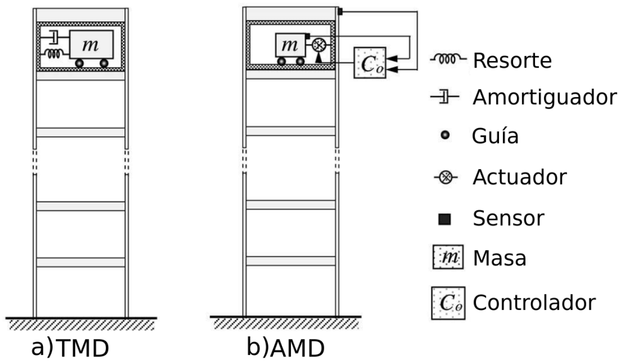


Figura 7: Esquemas de control estructural: a) TMD (*Tuned Mass Damper*), b) AMD (*Active Mass Damper*) Preumont y Seto (2008).

Existen numerosos trabajos sobre control activo, muchos de ellos se enfocan en el uso del AMD y el diseño de alguna ley de control que cumpla con ciertos objetivos. La mayor parte de los trabajos se basan en la medición de aceleraciones relativas, pero también hay trabajos que miden los desplazamientos y velocidades de los entrepisos. Es común utilizar estimadores de velocidad cuando esa variable no puede ser medida.

Una referencia relativamente nueva es el libro de Preumont y Seto (2008). En él se habla sobre el amortiguamiento activo de las estructuras, así como del aislamiento activo de base. También se analiza la dinámica de las estructuras, sus modelos matemáticos y algunos dispositivos de control. La última parte se enfoca con más detalle al control activo de estructuras y puentes haciendo uso de algoritmos de control como el LQR y el control robusto $\mathscr{H}_\infty$. El primero, conocido como regulador cuadrático lineal (por sus siglas en inglés «*Linear Quadratic Regulator*»), es un caso especial de control óptimo que proporciona herramientas de diseño analítico para resolver distintos problemas. Cuando se aplica un control óptimo a un sistema en lazo cerrado, no se espera que este sistema sea simplemente estable, sino que cumpla con ciertos criterios de control clásico, en este caso encontrando el mínimo para cada uno de ellos. Aunque el ajuste de las ganancias del algoritmo de control es relativamente simple, el diseño del LQR se realiza para el caso nominal, es decir, sin perturbaciones. Por otro lado, el control $\mathscr{H}_\infty$ es otro tipo de control óptimo que minimiza la relación de ciertos criterios con respecto a perturbaciones. Dichos criterios se definen previamente de tal forma que el problema de control $\mathscr{H}_\infty$ pueda resolverse.

2.4. Sistemas híbridos

Los sistemas híbridos son una combinación de sistemas activos y pasivos. La idea es que, en caso de que llegara a fallar el sistema activo, la parte pasiva del sistema seguiría actuando para atenuar vibraciones, aunque de forma menos eficiente. Una ventaja importante es que la parte activa de este sistema tiene un consumo de energía menor.

Los dispositivos más conocidos son los HMD (Hybrid Mass Damper), que es la combinación del amortiguador de masa sintonizada (TMD) y el amortiguador de masa activa (AMD), resultando el sistema de la figura 8. Debido a las características mencionadas en el párrafo anterior, este sistema ha sido atractivo para muchas construcciones, llegando a ser el más empleado en gran escala a nivel mundial.

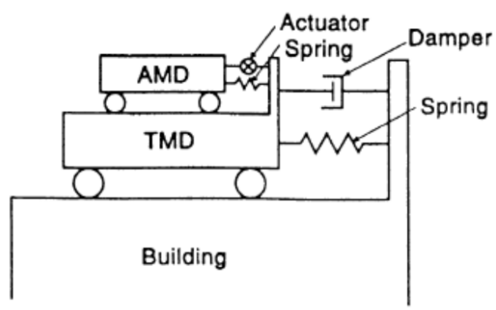


Figura 8: Sistema de control híbrido Nishitani y Inoue (2001).

Muchos de estos trabajos, así como implementación real, se han hecho en Japón. La primera implementación a gran escala del HMD fue en Tokyo, 1991, con el laboratorio de Shimizu (Spencer Jr. y Nagarajaiah, 2003).

2.5. Sistemas semi-activos

Los sistemas de control semi - activos funcionan de manera similar al control activo. Utilizan dispositivos cuyas características dinámicas (rigidez o amortiguamiento) pueden ser controladas y de esta manera modificar la dinámica de una estructura. La principal ventaja de este tipo de dispositivos es que tienen un consumo relativamente bajo de energía y son capaces de generar grandes fuerzas en aplicaciones a gran escala.

Sobre control semi - activo de estructuras se han hecho estudios sobre la efectividad de TMD's semi - activos bajo excitaciones armónicas (Bozer y Altay, 2013). Se han planteado estrategias modificadas semi - activas superiores a LQG's para puentes con autopistas, se han usado controladores neuro - difusos para dispositivos MR y ER, controlado vibraciones en edificaciones con amortiguadores de fricción variable, usado amortiguadores de fricción semi - activa para monitorear la salud estructural de edificios y, al mismo tiempo, controlar sus vibraciones, etc. (Case *et al.*, 2013; Zong *et al.*, 2012; Horacio Andrés, 2010).

Algunos ejemplos de dispositivos semi - activos conocidos se discutirán en esta sección (Spencer Jr. y Nagarajaiah, 2003).

2.5.1. Amortiguadores de orificio variable

El principio fundamental de los amortiguadores de orificio variable es una válvula controlada electromecánicamente. En la figura 9 se muestra el esquema de este amortiguador. Típicamente operan con aproximadamente 50W de potencia. La primera aplicación de estos dispositivos fue en puentes, para protegerlos de movimientos sísmicos y de las vibraciones producidas por el tráfico.

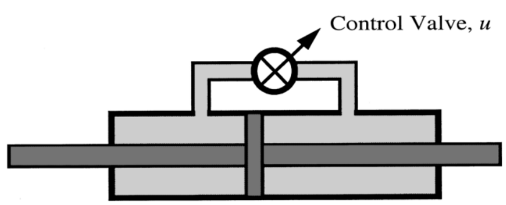


Figura 9: Esquema del amortiguador de orificio variable.

2.5.2. Amortiguadores de fluido controlable

Muchos de los amortiguadores semi - activos utilizan válvulas controladas eléctricamente o ciertos mecanismos para generar cambios en las características del dispositivo. Esos mecanismos pueden ser problemáticos en términos de confiabilidad y mantenimiento. Una clase de dispositivos de control semi - activo utiliza fluidos controlables en amortiguadores de orificio fijo. Como se muestra esquemáticamente en la figura 10, la ventaja de estos dispositivos es su simplicidad ya que no contienen partes mecánicas móviles más que el mismo pistón.

Dos tipos de fluidos considerados para el desarrollo de amortiguadores controlables son: los *fluidos electroreológicos* (ER) y los *fluidos magnetoreológicos* (MR). Sin embargo, solo los fluidos MR son atractivos para aplicaciones en ingeniería civil. La principal característica de estos fluidos es la capacidad de cambio de su viscosidad cuando se expone a campos magnéticos. En ausencia de estos campos, el fluido se mueve libremente dentro del amortiguador. Más aún, los dipositivos de fluidos MR pueden ser controlados con bajos niveles de potencia (menos de 50W), con voltaje bajo ($\sim$12V) o con una corriente de $\sim$1-2 A.

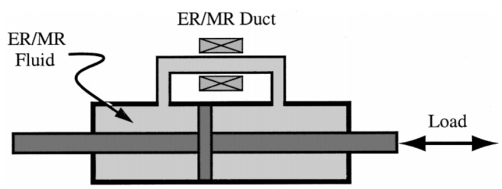


Figura 10: Esquema del amortiguador de fluido controlable.

El desarrollo de la tecnología ha permitido desarrollar este tipo de dispositivos para aplicaciones a gran escala, tal es el caso del amortiguador magnetoreológico (AMR) mostrado en la figura 11. Este amortiguador ya ha sido probado en estructuras reales.

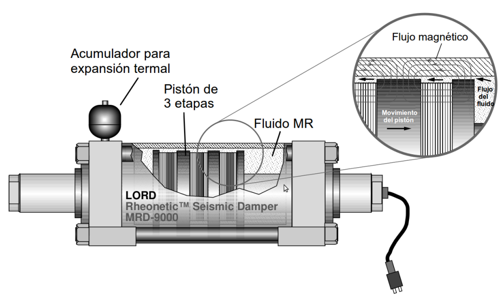


Figura 11: Esquema del amortiguador de fluido MR de 20 toneladas.

Un trabajo de hace pocos años estudia experimentalmente un amortiguador MR utilizando un modelo basado en la fricción de LuGre. En Çetin *et al.* (2009) se presentan resultados numéricos del uso de este modelo en un controlador adaptable para atenuar las vibraciones tipo sísmicas.

Otros trabajos relacionados se pueden encontrar en Nagarajaiah *et al.* (2000), Yoshida *et al.* (2003), B.F. Spencer *et al.* (1997b,a); Yang *et al.* (2002).

Como ya se mencionó anteriormente, se han realizado numerosos estudios para sistemas de control activo e híbrido. Sin embargo, como se puede ver en la tabla 1, el consumo de energía es mucho menor en los sistemas semi - activos que en los demás. Por esto y por su simplicidad, se han venido estudiando e implementando en los últimos años. Sin embargo, todavía existen algunos problemas por resolver, en particular sobre la caracterización y modelado de dispositivos de fluidos MR, así como también en el diseño de algoritmos de control apropiados donde, debido a la complejidad del modelo, es necesario el desarrollo de algoritmos no lineales para mejorar su desempeño.

Por otro lado, en México es incipiente el uso de este tipo de sistemas de control en ingeniería civil. Aunque en las últimas décadas se ha notado una mayor preocupación en esta área, por ejemplo, la Torre Latinoamericana, considerada uno de los edificios más seguros del mundo gracias a su cimentación y construcción resistente a sismos. De igual forma se tiene la Torre Ejecutiva Pemex, la Torre Mayor, el U.S. Bank Tower y el Costanera Center, entre otros, estructuras reconocidas por estar en una zona de alto riesgo sísmico al igual que la Torre Latinoamericana.

También se han realizado algunos trabajos relacionados este tema. Por ejemplo, en Alvarez-Icaza y Romero (2005) se presenta el diseño de una ley de control utilizando técnicas de pasividad con asignación de interconexión y amortiguamiento (CBP-AIA) que, en conjunto con un AMR, trata de mantener alineado un edificio sujeto a excitación sísmica. Un año más tarde se presentó un trabajo relacionado, donde se incorpora un observador para un edificio con un AMR y un parámetro desconocido. El edificio que se presenta tiene múltiples grados de libertad, se utilizan técnicas de Lyapunov y se diseña una ley de adaptación para los parámetros y el observador de estados. Más detalles se encuentran en Jiménez y Alvarez-Icaza (2006).

Tabla 1: Tabla comparativa de sistemas de control estructural implementadas a escala real.

Sistemas de control estructural	Ancho de banda	Consumo de energía
Pasivo	limitado	no aplica
Activo	amplio	alto
Híbrido	amplio	mediano
Semi activo	amplio	bajo

Los sistemas de protección sísmica presentados en este capítulo se consideran de importancia ya que servirán como base para el resto de este trabajo de tesis; particularmente los sistemas activos y semi-activos; temas que se retomarán para un estudio más detallado de sus características. Además del estudio teórico, se harán también estudios experimentales donde se aplicará principalmente sistemas de control activo para atenuar vibraciones en una estructura a escala pequeña.

Capítulo 3. Preliminares y control de estructuras

En este capítulo se describen algunas leyes de control diseñadas para absorber o atenuar vibraciones en una clase de estructuras. Éstas se forman de paredes flexibles y su masa se considera concentrada y uniforme en cada nivel. Primeramente se presenta una estructura virtual desarrollada con un software especializado cuyas características son similares a las estructuras estudiadas en los capítulos posteriores. Luego se presentan dos metodologías utilizadas en los sistemas de protección sísmica. La primera de ellas es el control semi-activo, haciendo uso de un actuador en la base de la estructura. Este actuador es un amortiguador magneto-reológico (AMR) cuyo modelo se basa en el modelo de fricción de LuGre.

La otra metodología se basa en el control activo, considerando un actuador en la parte superior de la estructura. Para ésta, se describen algunos algoritmos de control utilizados en los métodos activos.

3.1. Modelo virtual de una estructura de 5 pisos

Para una estructura como la mostrada en la figura 12, se realiza el diseño de un modelo virtual con las siguientes características: el movimiento de los entrepisos de la estructura se orienta a lo largo de una dirección solamente. Se consideran virtualmente dos actuadores, uno en los cimientos de la estructura y el otro en la parte superior de la misma. Estos actuadores tienen la finalidad de modificar la dinámica de la estructura de acuerdo a una ley de control. En el modelo virtual se muestran los dos tipos de actuadores: uno en la parte superior (métodos activos) y el otro en la base (métodos semi-activos).

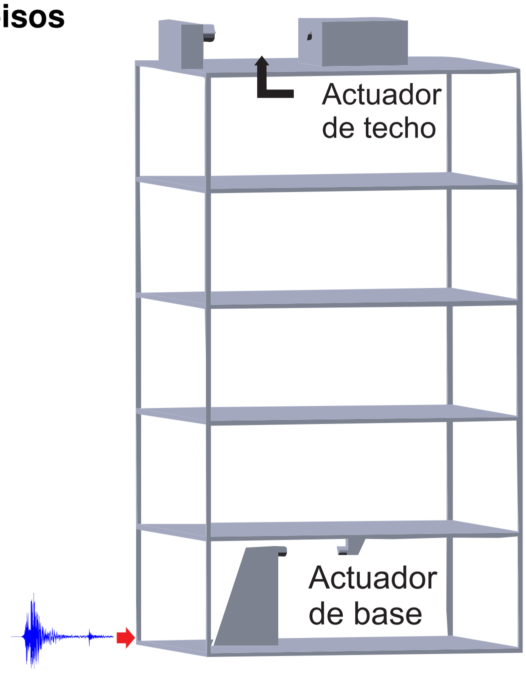


Figura 12: Estructura virtual de 5 pisos.

Para el análisis dinámico de la estructura se utiliza el modelo descrito en Chopra

(1980). La posición de los entrepisos es relativa con respecto a un punto de la base de la estructura. Esto se describe mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -U - M\ddot{x}_g \tag{1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de posiciones relativas con respecto a la base. El número de pisos se denota por n y las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez son M, C y K, respectivamente (para más detalles sobre la obtención del modelo ver Hirata (2011)). $U = [f \quad 0 \quad 0]^T$ es un vector columna que incluye la acción de control f que representa la fuerza que genera el amortiguador magneto-reológico (AMR) entre el primer piso y la base de la estructura.

3.2. Métodos semi-activos, uso del amortiguador magneto-reológico (AMR)

La dinámica de un AMR puede representarse por distintos modelos (Jiménez y Alvarez-Icaza, 2005; Ali y Ramaswamy, 2009; Case *et al.*, 2013). Para este estudio, el modelo matemático del AMR se basa en una modificación del modelo dinámico de LuGre (Çetin *et al.*, 2009), representado por las ecuaciones siguientes:

$$f = \sigma_a z + \sigma_0 z v + \sigma_1(\dot{x} - a_0|\dot{x}|z) + \sigma_2\dot{x} + \sigma_b\dot{x}v \tag{2}$$

$$\dot{z} = \dot{x} - a_0|\dot{x}|z \tag{3}$$

donde $\dot{x}$ es la velocidad del amortiguador[1], z es la variable interna que mide el comportamiento del fluido MR, f es la fuerza generada por el AMR y v es la tensión aplicada como entrada de control.

3.2.1. Observador de la variable interna

El fluido del AMR, denotado por z, no se puede medir directamente. Es por eso que se requiere estimarla. Para esto se utiliza el observador propuesto en Alvarez-Icaza y

[1] La velocidad del amortiguador es igual a la velocidad relativa entre el primer piso y la base de la estructura.

Jiménez (2002) el cual tiene la siguiente forma:

$$\dot{\hat{z}} = \dot{x} - a_0|\dot{x}|\hat{z} \tag{4}$$

donde $\hat{z}$ es el valor estimado de z. Si $e_z = z - \hat{z}$ es el error de observación de z, entonces la dinámica del error de estimación es:

$$\dot{e}_z = \dot{z} - \dot{\hat{z}} = -a_0|\dot{x}|e_z.$$

La estabilidad y convergencia del observador se demuestra utilizando la función candidata de Lyapunov $V_z = e_z^2/2$, cuya derivada con respecto al tiempo es

$$\dot{V}_z = e_z\dot{e}_z = e_z(-a_0|\dot{x}|e_z) = -a_0|\dot{x}|e_z^2,$$

que es negativa para todo error e_z diferente de cero. En consecuencia, $\hat{z}(t) \to z(t)$.

3.2.2. Modelo en variables de estado

Para el diseño del controlador es conveniente expresar el sistema en variables de estado. De (1) se obtiene

$$\ddot{x} = -M^{-1}(U + M\ddot{x}_g + C\dot{x} + Kx). \tag{5}$$

Definiendo los vectores de estado

$$X_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T, \tag{6}$$

$$X_2 = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)^T = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n})^T, \tag{7}$$

$$z = x_{2n+1}. \tag{8}$$

Se obtiene la siguiente representación en estados del sistema (5)

$$\dot{X}_1 = X_2, \tag{9a}$$

$$\dot{X}_2 = -M^{-1}KX_1 - M^{-1}CX_2 - M^{-1}U - \Gamma\ddot{x}_g, \tag{9b}$$

$$\dot{x}_{2n+1} = x_{n+1} - a_0|x_{n+1}|x_{2n+1}, \tag{9c}$$

donde $X_1 \in \mathbb{R}^n$ representa las posiciones relativas de los pisos, $X_2 \in \mathbb{R}^n$ sus velocidades y $x_{2n+1} \in \mathbb{R}^1$ es un estado extra que representa la variable dinámica interna del AMR (situado entre la base y el primer piso de la estructura). La aceleración del sismo es $\ddot{x}_g \in \mathbb{R}^1$ y se multiplica por el vector $\Gamma = (1, 1, \ldots, 1)^T$ con $\Gamma \in \mathbb{R}^n$. Por último, como se definió anteriormente, $U = [f \quad 0 \quad 0]^T$ donde f está dada por (2). El modelo del sistema queda finalmente como

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{x}_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & I_{n\times n} & 0_{1\times 1} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C & 0_{1\times 1} \\ 0_{1\times n} & \Upsilon & -a_0|x_{n+1}| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ x_{2n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n\times 1} \\ -\Gamma \\ 0_{1\times 1} \end{bmatrix} \ddot{x}_g + \begin{bmatrix} 0_{n\times n} \\ -M^{-1}U \\ 0_{1\times n} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

donde $\Upsilon = (1, 0, 0, 0, 0, \ldots, 0)$ es un vector fila de ceros excepto por su primer elemento, que es 1.

Este modelo será utilizado para el diseño de controladores. Por otro lado, es importante considerar que, debido a la dinámica del actuador (AMR), el diseño del controlador se realiza para la variable v, correspondiente al voltaje de entrada del AMR. En la siguiente sección se muestran los detalles.

3.2.3. Linealización entrada-salida

La linealización por retroalimentación es una técnica de diseño de algoritmos de control para sistemas no lineales. La idea principal es transformar algebraicamente la dinámica no lineal de un sistema a una dinámica lineal, ya sea parcial o total, de tal forma que se puedan aplicar las técnicas clásicas de control lineal (Slotine y Li, 1991).

Una metodologia de linealización por retroalimentación es la linealización entrada-salida para sistemas SISO[2] no lineales y es la que se va a utilizar en esta primera parte del trabajo.

Considérese el sistema no lineal descrito por la siguiente representación de estados:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v \quad (11a)$$

$$y = h(x) \quad (11b)$$

donde y es la salida del sistema. La linealización entrada - salida es una relación diferencial lineal entre la salida y y una nueva entrada de control u.

3.2.4. Grado relativo bien definido

Para este caso, el escenario se sitúa en una región del espacio de estados denotada por Ω_x, el cual es un conjunto abierto y conexo. Usando esta notación de geometría diferencial, el proceso de diferenciar de forma repetida siginifica que se empieza con

$$\dot{y} = \nabla h(f + gv) = L_f h(x) + L_g h(x)v$$

Si $L_g h(x) \neq 0$ para algún $x = x_0$ en Ω_x, entonces, por continuidad, esa relación también se cumple en una vecindad finita Ω de x_0. En Ω, la transformación de la entrada es

$$v = \frac{1}{L_g h}(-L_f h + u)$$

resulta en una relación lineal entre y y u, donde u es una nueva entrada de control, esto es $\dot{y} = u$.

Si $L_g h(x) = 0$ para todo x en Ω_x, se puede diferenciar $\dot{y}$ para obtener

$$\ddot{y} = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)v$$

si $L_g L_f h(x)$ es nuevamente cero para todo x en Ω_x, se debe diferenciar otra vez y otra

[2] Por sus siglas en inglés: *Single-Input Single-Output*

vez

$$y^{(i)} = L_f^i h(x) + L_g L_f^{i-1} h(x) v$$

hasta que algún entero r resulte en $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$ para algún $x = x_0$ en Ω_x. Entonces, por continuidad, la relación anterior se debe de cumplir en una vecindad finita de Ω de x_0. En Ω, la ley de control es

$$v = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h}(-L_f^r h + u) \tag{12}$$

aplicada a

$$y^{(r)} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) v$$

resulta en una relación lineal simple

$$y^{(r)} = u. \tag{13}$$

Recuérdese que el número r corresponde a las veces que se tuvo que diferenciar para que apareciera la entrada v y se le conoce como *grado relativo*. Se puede notar que necesariamente se tiene $r \leq n$ (donde n es el órden del sistema). Si $r = n$, entonces la linealización entrada - salida es equivalente a la linealización entrada - estado en Ω (Lema 6.3, Slotine y Li (1991), p. 238).

Basándose en el procedimiento anterior, se obtiene la siguiente definición (Slotine y Li, 1991):

DEFINICIÓN 1 *Se dice que un sistema SISO tiene grado relativo r en una región Ω si, $\forall x \in \Omega$*

$$L_g L_f^i h(x) = 0 \qquad 0 \leq i < r - 1 \tag{14}$$

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0 \tag{15}$$

3.2.5. Grado relativo indefinido

Es común el interés por estudiar un sistema alrededor de un punto de equilibrio especifico x_0. La definición del grado relativo entonces requiere de un cuidado particular.

Tal y como se hizo anteriormente, diferenciando la salida y hasta que aparezca la entrada v, es decir, hasta que el coeficiente de v no sea idénticamente cero alrededor de x_0, entonces

$$L_g L_f^{r-1} h(x_0) \neq 0$$

esto implica, por continuidad, que (15) se cumple en una vecindad finita de x_0. Entonces se dirá que el sistema tiene grado relativo r en el punto x_0.

Sin embargo, es posible que cuando la entrada aparezca, su coeficiente $L_g L_f^{r-1} h(x_0)$ sea cero en x_0, pero no cero en algunos puntos de x arbitrariamente cerca de x_0. Se dice entonces que el grado relativo del sistema no lineal es *indefinido* en x_0.

3.2.6. Desarrollo del controlador para el AMR

En las secciones anteriores se describieron los modelos dinámicos tanto de la estructura (parte lineal) como el del AMR (parte no lineal). En esta sección de desarrollará un controlador basado en la linealización entrada-salida. La estructura utilizada es de 5 pisos, por lo tanto $n = 5$.

Se comenzará con el sistema a partir de la ecuación (10) suponiendo que no existe perturbación sísmica, es decir, $\ddot{x}_g = 0$. Ahora se substituirá explícitamente el valor de U y se tiene

$$U = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_a x_{11} + \sigma_0 x_{11} v + \sigma_1 (x_6 - a_0 |x_6| x_{11}) + \sigma_2 x_6 + \sigma_b x_6 v \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

El primer objetivo de control será disminuir las posiciones relativas entre los pisos. Como el actuador se encuentra en el primer nivel, se busca que la diferencia en distancia de la base del edificio y el primer piso tienda a cero de manera suave y asintótica. Matemáticamente esto es

$$x_1 \approx 0.$$

De acuerdo al algoritmo de control visto anteriormente, se diferencía de manera repetida la salida

$$\begin{aligned}
y &= x_1 \\
\dot{y} &= \dot{x}_1 = x_6 \\
\ddot{y} &= \overbrace{-\frac{1}{m_1}\left(k_1 + k_2 + c_1 + c_2\right)x_6 - \frac{1}{m_1}\left(\sigma_a x_{11} + \sigma_1 x_6 - \sigma_1 a_0 |x_6| x_{11} + \sigma_2 x_6\right)}^{f_1} + \\
&\qquad \underbrace{\left(-\frac{\sigma_0}{m_1}x_{11} - \frac{\sigma_b}{m_1}x_6\right)}_{f_2} v
\end{aligned} \tag{17}$$

Como se puede ver en la ecuación anterior, el efecto del control v aparece al diferenciar por segunda vez la salida y, por lo tanto el grado relativo es $r = 2$. La ecuación (17) se iguala a una nueva entrada de control u la cual podemos diseñar utilizando técnicas de control lineal. Utilizando la notación indicada, la ley de control (12) se expresa ahora por

$$\begin{aligned}
f_1 + f_2 v &= u \\
v &= \frac{u - f_1}{f_2}
\end{aligned} \tag{18}$$

donde f_2 debe ser diferente de cero para evitar singularidades. Lo que sigue es el diseño de u para que, como ya se mencionó, estabilice el sistema alrededor de origen. Se propone la ecuación del error

$$e = y - y_d$$

donde y_d es el origen, por lo tanto

$$\begin{aligned} e &= x_1 - 0 \\ \dot{e} &= x_6 \\ &\vdots \end{aligned}$$

y así sucesivamente se sigue un procedimiento similar al de Hirata (2011), pág. 57, para llegar a un controlador PD

$$u = -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_6 \tag{19}$$

y con esto, la ley de control (18) queda

$$v = \frac{1}{f_2}(-\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_6 - f_1) \tag{20}$$

Debido a que no se puede asegurar que $f_2 \neq 0$ y tomando en cuenta las especificaciones de voltaje del AMR LORD RD-8041, se utiliza la siguiente función tipo saturación como una primera solución para estos problemas. La función se define como sigue

$$\mathrm{sat}^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq v_{max}, \\ v_{max} & \text{si } x > v_{max} \end{cases} \tag{21}$$

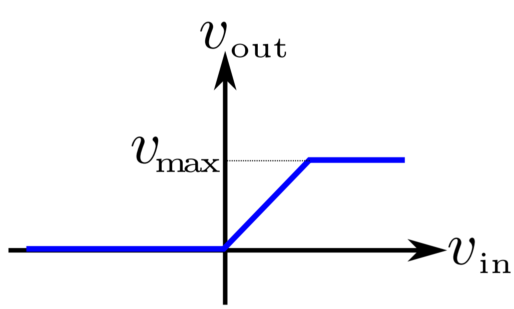


Figura 13: Función tipo saturación

3.2.7. Resultados numéricos del sistema con el AMR

El sistema descrito anteriormente, así como su ley de control, se simularon con el software Matlab®. Los parámetros utilizados fueron los que se muestran en la tabla 2. Los parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez así como los del AMR se obtuvieron de Çetin *et al.* (2009).

Tabla 2: Parámetros utilizados en la simulación.

De la estructura	Del AMR	Del control
$m_i = 2.8$ Kg, con i =1,...,5	$\sigma_0 = 28815$ N/(m·V)	k1 = 5000
$b_i = 49$ Kg	$\sigma_1 = 0.131$ N·s/m	k2 = 550
$k_1 = 5815$ N/m	$\sigma_2 = 29.6$ N·s/m	
	$\sigma_a = 30542$ N/m	
	$\sigma_b = 16.3$ N·s/(m·V)	
	$a_0 = 3198$ V/N	

Los parámetros del controlador fueron encontrados de manera empírica. Las condiciones iniciales fueron: $x_1 = 0.1$ m y $x_6 = 0.2$ m/s. Todas las demás se dejaron en cero.

La primera simulación realizada fue sin control y se muestra en la figura 14. Ésta posteriormente se compara con la simulación lazo cerrado (figura 15). El voltaje proporcionado por el controlador se muestra en la figura 16.

Se puede observar que, en lazo cerrado, hay una disminución en el desplazamiento del primer entrepiso al aplicar la ley de control mostrada, manteniendo así esa disminución durante el tiempo de simulación.

3.2.8. Observaciones y conclusiones sobre métodos semi-activos

En esta sección se describió el uso de un amortiguador magneto-reológico en la base de una estructura de 5 niveles con la finalidad de atenuar vibraciones inducidas en un solo eje. Se utilizó la linealización entrada-salida para cancelar la no linealidad inducida por el amortiguador. Se encuentra una solución utilizando una función tipo saturación que evita indeterminaciones en la señal de control, logrando así una reducción de movimiento en lazo cerrado. La función tipo saturación también pudiera permitir el uso de esta ley de

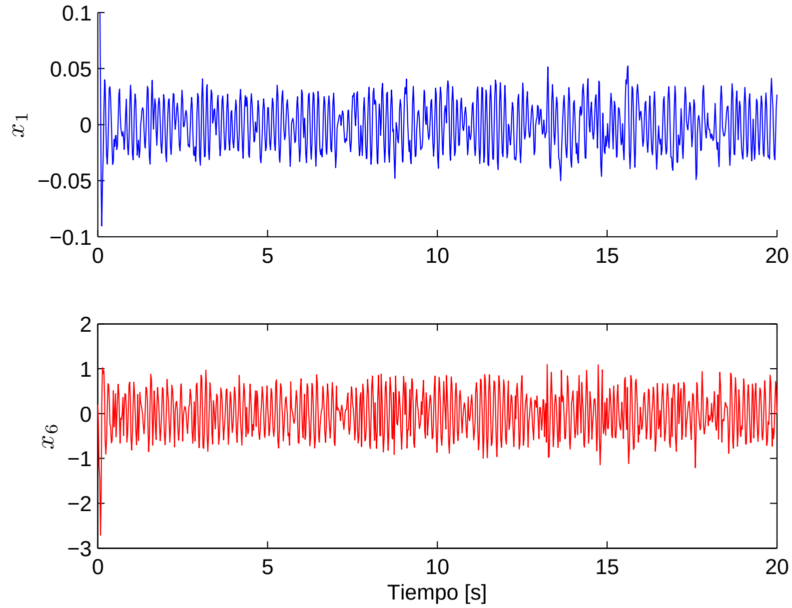


Figura 14: Posición y velocidad del primer entrepiso en lazo abierto.

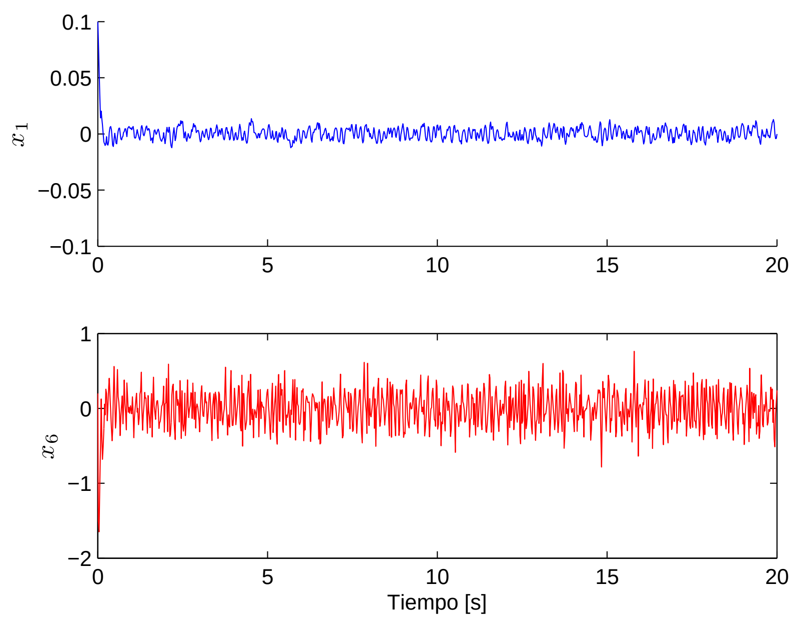


Figura 15: Posición y velocidad del primer entrepiso en lazo cerrado.

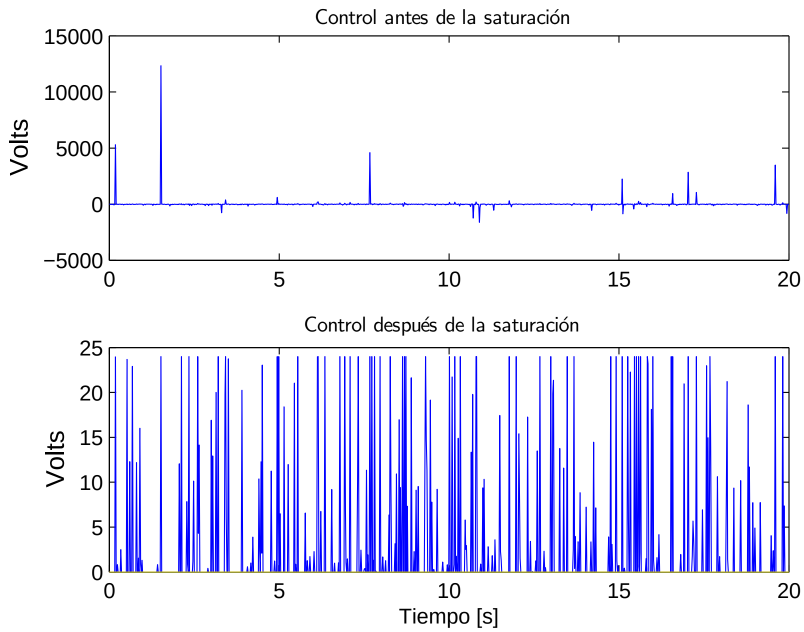


Figura 16: Gráfica del control aplicado antes y después de la saturación.

control en un amortiguador real ya que puede limitar la máxima señal de control evitando trabajar fuera de los intervalos permitidos por el amortiguador.

3.3. Métodos activos

Para los métodos activos se considera un actuador en la parte superior de la estructura. Este actuador se basa principalmente en una masa accionada por algún dispositivo que requiere de energía. Moviendo la masa de un lado al otro se busca minimizar los efectos de vibraciones en la estructura. El actuador más común se le conoce con el nombre de «masa activa» y en esta sección se describen dos metodologías de control utilizados más adelante para la atenuación de vibraciones.

3.3.1. Controlador óptimo

El objetivo de la teoría del control óptimo es determinar las señales de control para que un proceso opere de manera óptima, satisfaciendo ciertas restricciones (Kirk, 2004).

Para formular el problema de control óptimo se requiere de tres componentes:

1. Descripción matemática o modelo del proceso

2. Especificación de restricciones

3. Criterio de desempeño

Modelo matemático

No es trivial obtener una descripción matemática simple que se adecúe a la respuesta del sistema físico para toda entrada $u(t)$.

Para el diseño del control óptimo no se toman en cuenta las perturbaciones, es decir, se realiza el diseño en su estado nominal. Se consideran ecuaciones de estado de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m$$

y una salida

$$y(t) = h(x(t)), \qquad y(t) \in \mathbb{R}^\ell.$$

El siguiente paso es definir las restricciones físicas a las que se somete el sistema, tanto para el estado como para la señal de control. Las siguientes definiciones fueron tomadas de (Kirk, 2004).

DEFINICIÓN 2

La señal de control que satisface las restricciones durante todo el intervalo $[t_o,\ t_f]$ *se le llama «control admisible», se denota por* $u \in U$*; donde* U *es el conjunto de controles admisibles.*

DEFINICIÓN 3

La trayectoria de estado que satisface las restricciones de las variables de estado durante el intervalo completo $[t_o,\ t_f]$ *se le llama «trayectoria admisible, se denota por* $x \in X$*.*

Para evaluar de manera cuantitativa el desempeño de un sistema, el diseñador establece una *medida* de desempeño. El control óptimo se define como aquel que minimiza esa medida de desempeño. En algunos casos, la descripción del problema indicará claramente el criterio de desempeño, mientras que en otros problemas la selección se hará de manera más subjetiva, de acuerdo al criterio del propio diseñador.

En todos los casos el criterio de desempeño de un sistema es evaluado mediante una medida de la forma

$$J = \hat{h}(x(t_f), t_f) + \int_{t_o}^{t_f} g(x(t), u(t), t)dt, \tag{22}$$

donde t_o y t_f son el tiempo inicial y final; $\hat{h}$ y g son funciones escalares (Kirk, 2004). El tiempo final se puede especificar o dejar libre, dependiendo del problema.

El problema de control óptimo se resume en encontrar un control admisible $u^* \in U$ que logre que el sistema

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)$$

siga una trayectoria admisible $x^* \in X$ tal que el criterio (22) sea mínimo cuando

$$u = u^*$$
$$x = x^*$$

donde u^* es el control óptimo y x^* es la trayectoria óptima.

A continuación se presenta el estudio de una importante clase de problemas de control óptimo: *el regulador lineal*.

3.3.1.1. Regulador lineal

La planta se define por las siguientes ecuaciones de estado lineales

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{23}$$

la cual puede tener coeficientes variantes con el tiempo. El criterio de desempeño que se minimiza es

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)Hx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_o}^{t_f}\left[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right]dt \tag{24}$$

el tiempo final t_f es fijo, H y Q son matrices reales simétricas semidefinidas positivas y R es una matriz real simétrica definida positiva. Se supone que los estados y las señales de control no están acotadas y $x(t_f)$ es libre. Una interpretación física de esta medida de desempeño es la siguiente: se desea mantener el vector de estados cerca del origen sin un esfuerzo de control excesivo.

En (Kirk, 2004) se define el hamiltoniano $\mathscr{H}$, que es de la forma

$$\begin{aligned}\mathscr{H}\left(x(t), u(t), p(t), t\right) = \frac{1}{2}x^T(t)Q(t)x(t) + \frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t)\\ + P^T(t)A(t)x(t) + P^T(t)B(t)u(t),\end{aligned} \tag{25}$$

y las condiciones necesarias para la optimización son

$$\dot{x}^*(t) = A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) \tag{26}$$

$$\dot{P}^*(t) = -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x} = -Q(t)x^*(t) - A^T(t)P^*(t) \tag{27}$$

$$0 = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial u} = R(t)u^*(t) + B^T(t)P^*(t) \tag{28}$$

La ecuación (28) se puede resolver para $u^*(t)$ y se tiene

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P^*(t) \tag{29}$$

la existencia de R^{-1} está asegurada a partir de que R es una matriz definida positiva. Substituyendo (29) en (26) produce

$$\dot{x}^*(t) = A(t)x^*(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P^*(t) \tag{30}$$

entonces se tiene un conjunto de $2n$ ecuaciones diferenciales homogéneas lineales formado por (30) y (27)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^*(t) \\ \dot{P}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \tag{31}$$

La solución de este sistema de ecuaciones se puede encontrar en el libro de (Kirk, 2004), sección 5.2.

Resolviendo para $P^*(t)$ se obtiene

$$P^*(t) \triangleq K(t)x^*(t), \tag{32}$$

lo que significa que $P^*(t)$ es una función lineal de los estados del sistema; K es una matriz $n \times n$, depende también de t_f específico. Sustituyendo en (29), se obtiene

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t) \\ &\triangleq F(t)x(t),^{3} \end{aligned} \tag{33}$$

lo que indica que la ley de control es una combinación lineal, aunque variante con el tiempo, de los estados del sistema. Nótese que aún si la planta es fija, la matriz F es variante con el tiempo. Además, se deben tener las mediciones de todas las variables de estado para poder aplicar esta ley de control.

Para determinar la matriz F, se necesita la matriz de transición del sistema dada por (31). Si todas las matrices ($A,\ B,\ R,\ Q$) son invariantes con el tiempo, la matriz de transición requerida se puede encontrar evaluando la transformada inversa de Laplace de la matriz

$$\left\{ sI - \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

y sustituyendo (t_f - t) en t. Resolver esto podría ser un problema largo y tedioso; sin embargo, se puede hacer uso de computadoras que agilicen este cálculo.

[3] No se usa $x^*(t)$ porque aquí la ley de control se aplica para toda $x(t)$.

Hay una manera aproximada de resolver el sistema. Se puede demostrar (Kirk (2004), problema 5-9), que la matriz K satisface la ecuación diferencial matricial

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) - Q(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) \tag{34}$$

con la condición de acotamiento $K(t_f) = H$.

Esta ecuación diferencial matricial es del tipo de Riccati; de hecho, a la ecuación (34) se le llama *la ecuación de Riccati*.

3.3.2. Control $\mathscr{H}_\infty$ para la atenuación de perturbaciones

Para el problema de control $\mathscr{H}_\infty$ considérese un sistema de la forma

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \tag{35a}$$

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \tag{35b}$$

$$y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \tag{35c}$$

donde $x \in \mathbb{C}^n$ es el vector de estados, la salida objetivo se expresa por z y considera las variables de interés en el diseño del control. La perturbación se denota por w, la entrada de control por u y la salida por y. Se hacen las siguientes suposiciones:

S1: $D_{11} = 0$

S2: $D_{22} = 0$

lo que significa que no hay perturbaciones en la salida objetivo ni tampoco efectos de control directamente en la salida. Con esto el sistema (35) se reduce a:

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \tag{36a}$$

$$z = C_1 x + D_{12} u \tag{36b}$$

$$y = C_2 x + D_{21} w \tag{36c}$$

donde se también se consideran estas suposiciones:

S3: *Los pares* (A, B_2) *y* (A, B_1) *sean estabilizables.*

S4: *Los pares* (C_2, A) *y* (C_1, A) *sean detectables*

S5: $C_1^T D_{12} = 0$

S6: $D_{12}^T D_{12} = I$

S7: $D_{21} B_1^T = 0$

S8: $D_{21} D_{21}^T = I$

Las suposiciones S3: y S4: son necesarias para garantizar la existencia de un control estabilizable y detectable mientras que el resto de las suposiciones garantizan la existencia de soluciones definidas positivas a la ecuación de Riccati asociada.

Bajo las supociciones anteriores, las siguientes condiciones son necesarias y suficientes para la solución del problema de control $\mathscr{H}_\infty$ (Doyle *et al.*, 1989).

C1: *Existe una solución simétrica semidefinida positiva a la ecuación*

$$PA + A^T P + C_1^T C_1 + P \left[\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right] P = 0 \tag{37}$$

tal que la matriz $[A - (B_2 B_2^T - \gamma B_1 B_1^T) P]$ *tenga todos sus valores propios con parte real negativa.*

C2: *Existe una solución simétrica positiva semidefinida a la ecuación*

$$A_1 Z + Z A_1^T + B_1 B_1^T + Z \left[\frac{1}{\gamma^2} P B_2 B_2^T P - C_2 C_2^T \right] Z = 0 \tag{38}$$

con $A_1 = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T P$*, tal que la matriz* $[A_1 - Z(C_2^T C_2 - \gamma^{-2} P B_2 B_2^T P)]$ *tenga todos sus valores propios con parte real negativa.*

De acuerdo con Orlov y Aguilar (2004), las ecuaciones de Riccati perturbadas son

$$P_\epsilon A + A^T P_\epsilon + C_1^T C_1 + P_\epsilon[\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T] P_\epsilon + \epsilon I = 0 \tag{39}$$

$$A_\epsilon Z_\epsilon + Z_\epsilon A_\epsilon^T + B_1 B_1^T + Z_\epsilon[\gamma^{-2} P B_2 B_2^T P_\epsilon - C^T C] Z_\epsilon = 0 \tag{40}$$

y tienen una única solución simétrica definida positiva (P_ϵ,Z_ϵ) para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ con $A_\epsilon = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T P$. Siguiendo el teorema 1 de Orlov y Aguilar (2004) se puede mostrar que si se satisfacen las condiciones **C1** y **C2** y las soluciones a las ecuaciones perturbadas de Riccati, entonces

$$u = -B_2^T P_\epsilon x \tag{41}$$

es una solución local al problema de control $\mathscr{H}_\infty$.

En los capítulos posteriores se utilizan estos resultados, tomados de la referencia mencionada, para diseñar el control de una estructura en diferentes configuraciones.

Capítulo 4. Estudio de una mesa vibratoria

En este capítulo se describe el diseño, análisis, implementación y evaluación de algoritmos de control para seguimiento de trayectorias para una mesa vibratoria[1]. Este mecanismo forma parte de una plataforma experimental para estudiar los efectos de diferentes señales tipo sísmicas en estructuras metálicas. La mesa cuenta con un actuador lineal y una característica importante es la fricción seca que tiene, la cual es relativamente elevada. Para contrarrestar los efectos de ésta, en las siguientes secciones se describen diferentes metodologías para seguir alguna trayectoria deseada. También se describe un observador robusto para la estimación del estado.

4.1. ¿Qué es una mesa vibratoria?

El estudio del efecto de vibraciones, principalmente sísmicas, en diferentes tipos de estructuras es un tema que ha ido tomando mayor importancia en los últimos años. Diferentes técnicas se han desarrollado con la finalidad de contrarrestar el efecto que tienen dichas vibraciones en estas estructuras. Entre los trabajos relacionados con este tema podemos mencionar Cetin *et al.* (2011), Horacio Andrés (2010), Preumont y Seto (2008) y las referencias ahí incluidas.

La atenuación de perturbaciones de este tipo de mecanismos require conocer algunas características tales como: frecuencia de resonancia, excursión máxima de movimiento, respuesta a perturbaciones, entre otras. Una técnica utilizada para investigar estas características es la reproducción a escala de este tipo de estructuras montadas en una plataforma móvil. Esta última es también conocida como «*mesa vibratoria*» y es utilizada para reproducir los movimientos de interés para el investigador.

Existen diferentes tipos de mesas vibratorias. Por ejemplo en ingeniería civil, estos mecanismos se construyen usualmente para soportar grandes estructuras, que son usadas para evaluar la resistencias de las mismas a las perturbaciones reproducidas por la mesa. En Ji *et al.* (2009) se analiza una mesa vibratoria a escala real a la cual se le monta

[1]Nota aclaratoria: gran parte de este capítulo es una traducción al español de Hirata *et al.* (2016), que documenta parte de los resultados considerados producto de esta tesis.

una estructura de metal de 5 pisos. La mesa reproduce los movimientos correspondientes a la respuesta de uno de los pisos superiores de una estructura grande. Para asegurar la reproducción adecuada de estos movimientos se propone un control por modelo interno y control $\mathscr{H}_\infty$. Ambos algoritmos muestran un buen desempeño, aunque se observan ligeros errores de seguimiento de las señales deseadas, que se deben principalmente a que no se consideran los términos no lineales. Algo similar se describe en Lamarche *et al.* (2010).

Otro tipo de mesas vibratorias a escala pequeña tienen una gran variedad de aplicaciones en el campo industrial y de investigación. Comúnmente se utilizan en pruebas para estudiar los efectos de vibraciones producidas por maquinaria con mecanismos giratorios y similares. En Seki *et al.* (2009) se presenta un control adaptable para mejorar la atenuación del ruido en una mesa vibratoria, ruido producido por la rotación de un motor industrial. Para estos propósitos se utiliza un actuador hidráulico cuyo fluido es controlado por una servo-válvula. En general esta metodología presenta un buen desempeño con respecto a la reproducción de una aceleración deseada. Un trabajo similar, donde lo que se busca es la reproducción de aceleración de una mesa vibratoria, se describe en Tang *et al.* (2015).

Una aplicación importante en este campo es la reproducción de vibraciones tipo sísmicas en mecanismos de pequeña escala como los descritos en los siguientes trabajos: Yang y Junwei (2007), Conte y Trombetti (2000), Guan *et al.* (2014), Phillips *et al.* (2014) y Zhong Lin y Christenson (2009). Todas las mesas vibratorias descritas en esas referencias tienen la característica principal de usar un actuador hidráulico.

Dentro de este campo, existen otro tipo de mesas vibratorias cuyos actuadores son motores eléctricos y se utilizan con propósitos de investigación y académicos. Por ejemplo, la mesa manufacturada por Quanser®, descrita en Ashasi-Sorkhabi *et al.* (2013) y Baratta *et al.* (2012), utliza un motor eléctrico y un mecanismo tipo ”gusano” para reproducir los movimientos en la plataforma móvil considerando una sola dirección.

De igual forma existe toda una familia de mesas vibratorias cuyo actuador es un motor lineal sin escobillas. Dicha mesa, manufacturada por H2W Techonologies®, tiene mayor potencia y capacidad de carga. Esta mesa es capaz de reproducir vibraciones que son de interés en pruebas con estructuras a escala pequeña u otros mecanismos montados sobre dicha mesa. La reproducción adecuada de señales es importante para los estudios que se mencionarán después en este trabajo de tesis. Es por eso que esta última mesa se estudia con mayor detalle en las siguientes secciones.

4.2. Descripción del sistema

La mesa vibratoria manufacturada por la compañía H2W Techonologies® puede soportar una carga de hasta 250 kg. La plataforma móvil situada en la parte superior de la mesa está hecha de placas de aluminio y está montada sobre dos rieles que le permiten el movimiento en una sola dirección (véase la figura 17). Entre los rieles se encuentran unos potentes imanes que sirven para generar el movimiento controlando el flujo de corriente de las bobinas que se encuentran debajo de la plataforma móvil. A su vez, el tren de movimiento se conforma por varios baleros que producen una fricción considerable.

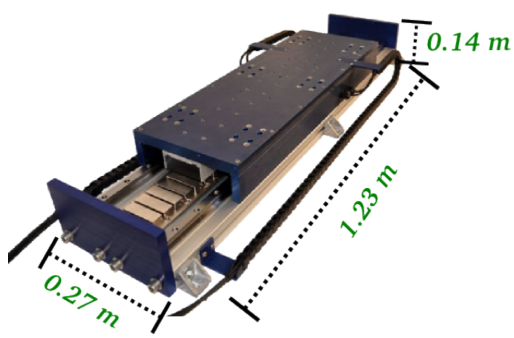


Figura 17: Mesa vibratoria manufacturada por H2W Technologies®.

Más detalles sobre la configuración experimental, conexiones, cableado, etc. se muestran en el apéndice B. A continuación se describe la dinámica de la mesa.

4.3. Modelo matemático

El modelo matemático de la mesa consiste de un sistema mecánico de masa m, movido por una fuerza u, con un coeficiente de fricción f_v. En la figura 18 se muestra la respuesta en lazo abierto a una entrada periódica. Se puede ver el efecto de la fricción seca, ya que en las zonas donde la velocidad es baja, se presenta un atascamiento del movimiento del motor lineal. A este fenómeno también se le conoce como fricción de Coulomb.

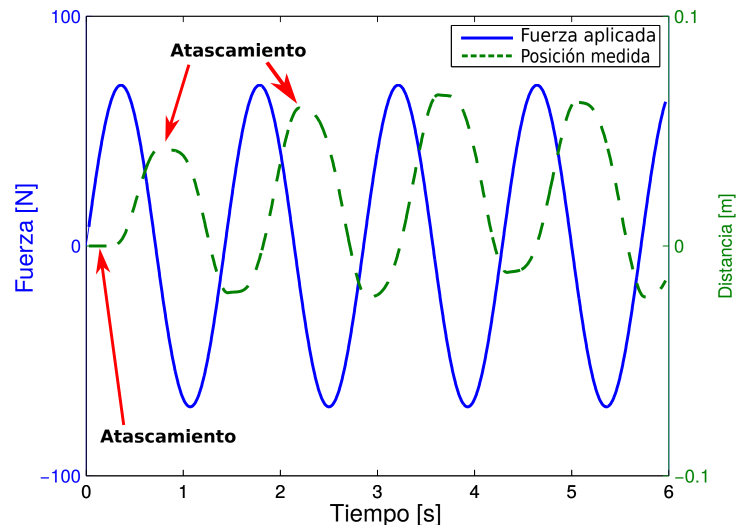


Figura 18: Respuesta de la mesa vibratoria a una señal periódica como entrada en lazo abierto.

Si esta no linealidad es despreciada, el desempeño del seguimiento de una posición deseada se verá afectado notablemente. Es por eso que en el diseño del controlador se debe tomar en cuenta dicha no linealidad. El comportamiento de esta fricción puede describirse por una gran variedad de modelos dinámicos. Comúnmente se modela utilizando la función signo teniendo como argumento a la velocidad. En este trabajo se utiliza esta función para modelar dicha fricción.

Entonces, este sistema se modela como sigue

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \alpha\,\mathrm{sign}(\dot{x}) = ku, \tag{42}$$

donde x es la posición de la plataforma móvil con respecto a un punto de referencia (normalmente el centro de la excursión total), $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ denotan la velocidad y la aceleración, respectivamente; sign es la función signo definida como (Filippov, 1988)

$$\mathrm{sign}(v) = \begin{cases} -1, & \text{if} \quad v < 0; \\ \nu, & \text{if} \quad v = 0; \\ +1, & \text{if} \quad v > 0; \end{cases} \tag{43}$$

donde $\nu \in [-1, +1]$; β y α son una relación del coeficiente de fricción viscosa (f_v) y el coeficiente de fricción de Coulomb (f_c) con respecto a la masa m, esto es,

$$\alpha = \frac{f_c}{m}, \quad \beta = \frac{f_v}{m}, \tag{44}$$

y k es el inverso de la masa. Una representación en variables de estado de este modelo es la siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\beta x_2 - \alpha\,\mathrm{sign}(x_2) + ku, \\ y &= x_1, \end{aligned} \tag{45}$$

donde $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ y la salida es denotada por y.

La masa m tiene un valor de 33 kg, dado por el fabricante. Los parámetros de fricción, f_v y f_c, no son conocidos. Para obtener una estimación de éstos, se sigue la metodología descrita en Kelly *et al.* (2000). Ahí se propone obtener los coeficientes de fricción a partir de la respuesta en velocidad del sistema ante una señal de entrada tipo rampa de la forma $ku = \mu t$, donde μ es la pendiente en [Nm/s], y t es el tiempo en segundos. Al aplicar esta señal con una pendiente $\mu = 35$, se obtiene la gráfica de la figura 19, donde la velocidad es estimada por el observador descrito más adelante.

En Kelly *et al.* (2000) se muestra que los parámetros pueden ser calculados a partir de ciertas características de la respuesta del sistema (figura 19), es decir,

$$f_v = \frac{\mu}{a}, \qquad f_c = \frac{b}{a}\mu, \tag{46}$$

donde a es la pendiente de la velocidad estimada y b/a es la intersección de la velocidad con el eje del tiempo. Los datos experimentales se calculan de acuerdo con las

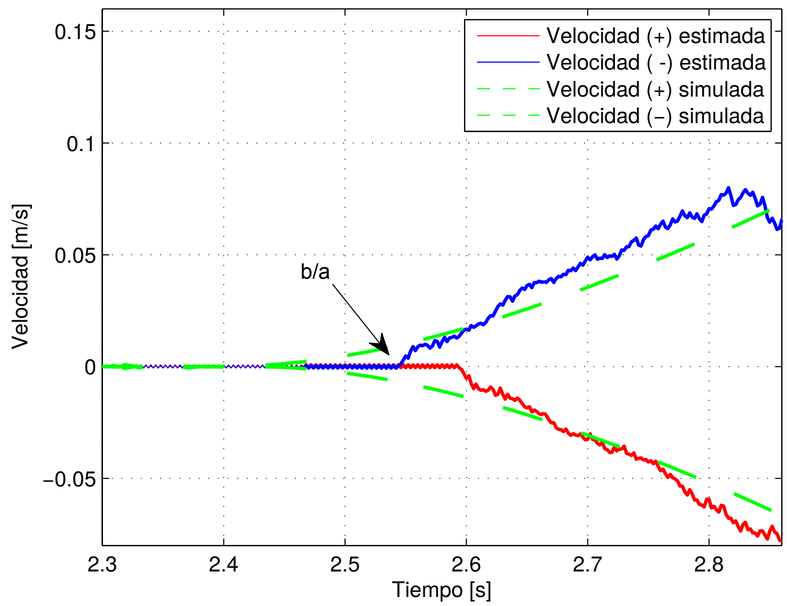


Figura 19: Respuestas experimental y simulada del sistema con una entrada tipo rampa.

ecuaciones definidas en (46), obteniendo lo siguiente

$$a \approx \frac{x_2(t_2) - x_2(t_1)}{t_2 - t_1} \approx 0.32, \qquad \frac{b}{a} \approx 2.55.$$

Los puntos $(t_1, x_2(t_1))$ y $(t_2, x_2(t_2))$ se obtienen a partir de la gráfica, explícitamente de la velocidad observada en el sentido positivo (línea azul en la figura 19). Con estos valores aproximados y sabiendo que $\mu = 35$, se obtuvieron los siguientes valores

$$f_v \approx 109.38, \qquad f_c \approx 89.25;$$

entonces, los coeficientes α y β del sistema (45) están dados por

$$\alpha \approx 2.7, \qquad \beta \approx 3.31.$$

Estos valores se usaron para simular el sistema (45), considerando la misma entrada. Las líneas discontinuas en color verde de la figura 19, corresponden a esta respuesta simulada mostrando una aproximación razonable del modelo de fricción propuesto.

Observador robusto. Como este sistema cuenta solamente con medición de posición, se diseña un observador para estimar la velocidad. Se propone el observador descrito en Rosas *et al.* (2007), cuya principal característica es su robustez, además de proporcionar una estimación de las perturbaciones que afectan al sistema. Este observador tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + c_1(y_1 - \hat{y}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\beta_0\hat{x}_2 - \alpha_0 \operatorname{sign}(\hat{x}_2) + c_2(y_1 - \hat{y}_1) + c_3 \operatorname{sign}(y_1 - \hat{y}_1) + ku, \\ \hat{y} &= \hat{x}_1 \end{aligned} \tag{47}$$

donde $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$ son los estados estimados, c_1, c_2 y c_3 son constantes definidas positivas. Nótese la diferencia que se hace entre los parámetros del sistema (α, β) y los del observador (α_0, β_0), esto para tomar en cuenta la incertidumbre entre los parámetros estimados correspondientes a las fuerzas de fricción y los verdaderos.

Ahora, se definen los parámetros del error como $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$, $e_2 = x_2 - \hat{x}_2 - c_1(x_1 - \hat{x}_1) = x_2 - \hat{x}_2 - c_1 e_1$. Entonces la dinámica de éste se describe por

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= -\tilde{c}_1 e_1 - \tilde{c}_2 e_2 - c_3 \operatorname{sign}(e_1) + w(e), \end{aligned} \tag{48}$$

donde $\tilde{c}_1 = c_1\beta_0 + c_2$, $\tilde{c}_2 = c_1 + \beta_0$, y

$$w(e) = -\Delta\beta\, x_2 - \Delta\alpha\ \operatorname{sign}(x_2) - \alpha_0 \left[\operatorname{sign}(x_2) - \operatorname{sign}(\hat{x}_2) \right], \tag{49}$$

donde $x_2 = c_1 e_1 + e_2 + \hat{x}_2$, $\Delta\alpha$ y $\Delta\beta$ denota los parámetros de incertidumbre α y β, respectivamente, tales que $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$, $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$. Nótese que, para una velocidad acotada del sistema $|x_2| \leq x_{2M}$, la perturbación w satisface

$$|w(e)| \leq |\Delta\beta\, x_{2M} + \Delta\alpha + 2\alpha_0| \triangleq w_M. \tag{50}$$

Del teorema 1 de Rosas *et al.* (2007) se puede concluir que el origen de (e_1, e_2) en el plano, es un punto de equilibrio global y asintóticamente estable, para un $\theta \in (0, 1)$, si los parámetros del observador satisfacen

$$c_3 > 2\lambda_M(P)\sqrt{\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)}}\frac{(c_1\beta_0 + c_2)w_M}{\theta}. \tag{51}$$

En la ecuación (51), P es una matriz definida positiva, resultado de la ecuación de Lyapunov $A^T P + PA = -I$. $\lambda_m(P)$ y $\lambda_M(P)$ son los valores propios mínimo y máximo de P, respectivamente, y A es la matriz (Hurwitz)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(c_1\beta_0 + c_2) & -(c_1 + \beta_0) \end{pmatrix}. \tag{52}$$

El sistema (45) se puede representar como el sistema perturbado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\beta_0 x_2 - \alpha_0 \operatorname{sign}(x_2) + ku + d(x), \end{aligned} \tag{53}$$

donde d es el término de perturbaciones

$$d(x) = -\Delta\beta\, x_2 - \Delta\alpha\ \operatorname{sign}(x_2). \tag{54}$$

Entonces, cuando $\hat{x}_2$ converge a x_2, el término de incertidumbres w (Eq. (49)) del sistema (48) está dado por

$$w_\infty = -\Delta\beta x_2 - \Delta\alpha \operatorname{sign}(x_2), \tag{55}$$

lo que corresponde solamente a las perturbaciones no conocidas $d(x)$ del sistema (53). Por lo tanto, cuando el sistema (48) se comporta como un modo deslizante, la técnica de control equivalente (Utkin *et al.*, 1999) conduce a

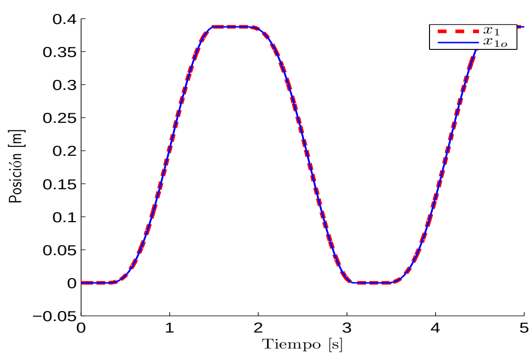
$$\lim_{t\to\infty} w_\infty = c_3 \lim_{t\to\infty} \operatorname{sign}(e_1), \tag{56}$$

y una estimación de la perturbación w está dada por

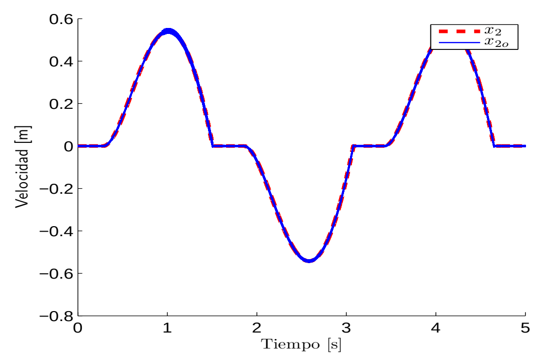
$$\hat{w} \approx \lim_{t\to\infty} \overline{w_\infty} = c_3 \lim_{t\to\infty} \overline{\operatorname{sign}(e_1)}. \tag{57}$$

El valor medio $\overline{\operatorname{sign}(e_1)}$ se puede obtener con un filtro adecuado, por ejemplo, un filtro tipo Butterworth. Para más detalles ver Alvarez *et al.* (2009).

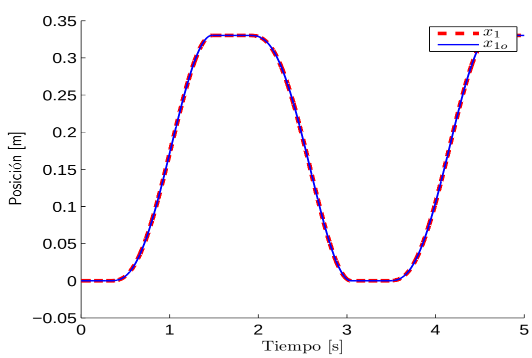
La figura 20 muestra los resultados numéricos a partir del observador (47), usando los parámetros previamente identificados, $k = 1$, los parámetros del observador son $c_1 = 10$, $c_2 = 1$, y $c_3 = 100$, para una entrada $u(t) = 5\,\mathrm{sen}(2t)$. Las figuras 20a y 20b muestran los estados del sistema y del observador cuando los valores de los parámetros del observador y del sistema son idénticos. Las figuras 20c y 20d muestran una comparación entre los estados del sistema y del observador para una incertidumbre en α del 11 % ($\Delta\alpha = 0.3$), y -9.4 % en β ($\Delta\beta = -0.31$). Nótese la convergencia del estado observado con respecto al estado real.



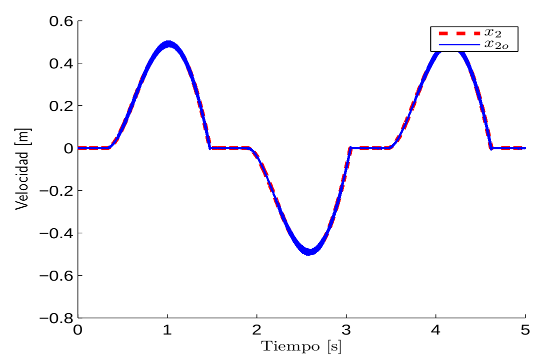
(a) Caso nominal.



(b) Caso nominal.



(c) Caso perturbado.



(d) Caso perturbado.

Figura 20: Comparación de los estados del sistema y observador ante una entrada $u = 5\,\mathrm{sen}(2t)$. Las subfiguras (a) y (b) corresponden al caso nominal (los parámetros del observador son idénticos que los del sistema). Las subfiguras (c) y (d) compara los estados para una diferencia en α de 11 % y -9.4 % en β.

4.4. Algoritmos de control utilizados

En esta sección se describen algoritmos de control para la mesa vibratoria. El objetivo es hacer que la mesa siga una señal deseada con el menor error de seguimiento posible y considerando límites en la señal de control. En esta sección se estudiará el desempeño de estos algoritmos de control así como sus ventajas y desventajas.

4.4.1. PD con compensación de perturbaciones

El control proporcional-derivativo (PD) es un algoritmo comúnmente usado para regular sistemas mecánicos (Takegaki y Arimoto, 1981). Usualmente se aplica acompañado de términos que compensan la gravedad o términos no lineales (Kelly *et al.*, 2005).

A continuación se describe el diseño del algoritmo de control para segimiento de posición, usando el modelo previamente descrito para compensar la fricción del sistema. El control PD clásico está dado por

$$u_{pd_0} = k^{-1}\left[-k_p(x_1 - x_d) - k_v(x_2 - \dot{x}_d) + \beta x_2 + \alpha\,\mathrm{sign}(x_2)\right], \qquad (58)$$

donde k_p y k_v son los parámetros del control PD, respectivamente, los cuales deben ser positivos, y x_d es la posición deseada. Es sencillo demostrar que el sistema (42), controlado con (58), lleva el estado del sistema $x(t)$ al estado deseado $(x_d, \dot{x}_d)$. Esto considerando que los parámetros del sistema son bien conocidos. En la práctica, existen siempre incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas.

Sea $\omega(t)$ la perturbación externa que afecta a la segunda ecuación del sistema (45), y α_0 y β_0 sean los parámetros nominales, con la incertidumbre paramétrica $\Delta\alpha$ y $\Delta\beta$, respectivamente. No se considera incertidumbre en m debido a que, generalmente, es posible obtener un valor suficientemente exacto. Por lo tanto, la dinámica del error del sistema controlado está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -k_p\varepsilon_1 - k_v\varepsilon_2 + \eta(\varepsilon, t), \end{aligned} \qquad (59)$$

donde $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\varepsilon_1 = x_1 - x_d$, $\varepsilon_2 = x_2 - \dot{x}_d$, y

$$\eta(\varepsilon, t) = -\Delta\beta(\varepsilon_2 + \dot{x}_d) - \Delta\alpha \operatorname{sign}(\varepsilon_2 + \dot{x}_d) - \ddot{x}_d + \omega(t). \tag{60}$$

Es claro que, aunque los parámetros α y β fuesen bien conocidos, siempre habría un error en estado estacionario bajo la presencia de perturbaciones externas.

Se puede utilizar una estimación para η, dada por $\eta(\varepsilon, t) \approx x_f$, entonces el controlador estará dado por

$$u_{pd} = k^{-1}[-k_p\varepsilon_1 - k_v\varepsilon_2 + \beta x_2 + \alpha \operatorname{sign}(x_2) - x_f]. \tag{61}$$

El término x_f denota una estimación de perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas. De forma similar a los resultados obtenidos en la sección anterior, es posible demostrar que, usando un observador como el descrito en (47) para estimar el estado $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ del sistema (59) se puede obtener una estimación de perturbaciones y/o incertidumbres paramétricas filtrando el término discontinuo $\eta_f = c_3 \operatorname{sign}(\varepsilon_1 - \hat{\varepsilon}_1) = c_3 \operatorname{sign}(x_1 - \hat{x}_1)$, tal que

$$x_f \approx \lim_{t\to\infty} \overline{\eta_f} = \lim_{t\to\infty} \overline{c_3 \operatorname{sign}(\varepsilon_1 - \hat{\varepsilon}_1)}, \tag{62}$$

donde la barra superior denota el valor medio. En la práctica, una buena elección para calcular (62) es usar un filtro Butterworth con entrada η_f y salida x_f, cuya función de transferencia normalizada está dada por (Ogata, 2003)

$$F_B(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + 1.4142\omega_c s + \omega_c^2}, \tag{63}$$

donde w_c es la frecuencia de corte, que se selecciona de tal forma que se obtenga el menor defasamiento posible.

Los resultados experimentales obtenidos con esta metodología de control, aplicada a la mesa vibratoria, se mostrarán más adelante.

4.4.2. Modos deslizantes con dinámica tipo Zeno

El control por modos deslizantes (CMD) es una técnica de control discontinuo utilizada comúnmente en sistemas mecánicos para mover el sistema a lo largo de una superficie de conmutación y manteniendo el objetivo de control (Utkin *et al.*, 1999). La implementación del CMD es sencilla y el control muestra robustez ante perturbaciones externas y poca sensibilidad a incertidumbres paramétricas. Esto se logra bajo el costo de tener componentes de alta frecuencia en la señal de control y posibles periodos de alta velocidad si la condición inicial del sistema se encuentra muy alejada del objetivo de control.

Entre los algoritmos de este tipo, el controlador descrito en Orlov (2005), dado por

$$u_{zeno} = -\kappa_p \operatorname{sign}(e_1) - \kappa_v \operatorname{sign}(e_2) + m\ddot{x}_d, \tag{64}$$

donde $e_1 = x_1 - x_d$ y $e_2 = x_2 - \dot{x}_d$ representan las variables de la dinámica del error, con x_d y sus derivadas conocidas, ofrece algunas características interesantes mencionadas enseguida.

De (45) y (64), la dinámica de las variables de error, en lazo cerrado, tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= -\overline{\kappa}_p \operatorname{sign}(e_1) - \overline{\kappa}_v \operatorname{sign}(e_2) + \gamma(e,t), \end{aligned} \tag{65}$$

donde $\overline{\kappa}_p = \kappa_p/m$, $\overline{\kappa}_v = \kappa_v/m$ y $\gamma(e,t) = -\beta(e_2 + \dot{x}_d) - \alpha \operatorname{sign}(e_2 + \dot{x}_d)$.

Cuando la perturbación γ es cero y $\overline{\kappa}_p > \overline{\kappa}_v > 0$, este sistema reproduce una dinámica llamada Zeno, cuyo estado converge al origen en tiempo finito (Orlov, 2005). En esta referencia se muestra también que, si la perturbación satisface $|\gamma(e,t)| < \rho$ y los coeficientes satisfacen $\overline{\kappa}_p > \overline{\kappa}_v > \rho$ y $\overline{\kappa}_p - \overline{\kappa}_v > \rho$, entonces el estado del sistema (65) converge al origen, también en tiempo finito. Un análisis más detallado se puede consultar en Orlov (2005).

4.4.3. Control discontinuo con superficie deslizante no conexa(CD-SDNC)

En el control por modos deslizantes (CMD) se pueden utilizar diversas superficies de conmutación que definen el comportamiento del sistema en lazo cerrado. Cuando la condición inicial del sistema está muy alejada del objetivo de control, como ya se mencionó en la subsección anterior, se presenta un transitorio de alta velocidad. Este efecto se debe a que, en el diseño clásico, la superficie deslizante se caracteriza por una función lineal del estado.

En esta sección se describe un caso especial de CMD, adaptado de Cuesta *et al.* (2015), que asegura que la magnitud máxima de la velocidad del sistema se mantiene constante la mayor parte del tiempo. De hecho, se puede especificar el valor de velocidad máxima deseado. El algoritmo presenta un excelente seguimiento y robustez. Este controlador se diseña con base en una superficie deslizante no conexa para lograr el seguimiento del sistema a una señal de referencia deseada. Por simplicidad este algoritmo se abreviará como **CD-SDNC**.

Supóngase que $x_d(t)$ es la señal que se desea seguir, tal que el estado del sistema (45), denotado por $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, debe converger a $(x_d(t), \dot{x}_d(t))$, esto es, $x_1(t) \to x_d(t)$, $x_2(t) \to \dot{x}_d(t)$. Definiendo el error de seguimiento como se hizo anteriormente, esto es, $\varepsilon_1 = x_1 - x_d$ y $\varepsilon_2 = x_2 - \dot{x}_d$. Con esto, la dinámica del error de seguimiento está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -\beta\varepsilon_2 - \alpha\,\mathrm{sign}(\varepsilon_2) + ku + w(t,\varepsilon), \end{aligned} \tag{66}$$

donde

$$w(t,\varepsilon) = -\alpha\left[\,\mathrm{sign}(\varepsilon_2 + \dot{x}_d(t)) - \,\mathrm{sign}(\varepsilon_2)\right] - \beta\dot{x}_d(t) - \ddot{x}_d(t). \tag{67}$$

Nótese que, si $\dot{x}_d$ y $\ddot{x}_d$ están acotadas, entonces

$$|w(t,\varepsilon)| \leq 2\alpha + \beta\dot{x}_{d_M} + \ddot{x}_{d_M} \triangleq w_M, \tag{68}$$

donde el subíndice M denota una cota positiva de la señal asociada.

El control propuesto está dado por

$$u(\varepsilon) = -\rho\,\mathrm{sign}(\sigma(\varepsilon)), \quad \sigma(\varepsilon) = \gamma\,\mathrm{sign}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2, \tag{69}$$

donde ρ y γ son constantes positivas. La función $\sigma(\varepsilon) = \gamma\,\mathrm{sign}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2$ divide el espacio de estados en regiones cuando $\sigma(\varepsilon) = 0$, región I para $\sigma(\varepsilon) > 0$ (zona en color verde, figura 21), y la región II para $\sigma(\varepsilon) < 0$ (zona en color azul, misma figura). La frontera límite entre estas regiones corresponde a los puntos que satisfacen $\sigma(\varepsilon) = 0$. Es relativamente sencillo mostrar el siguiente resultado.

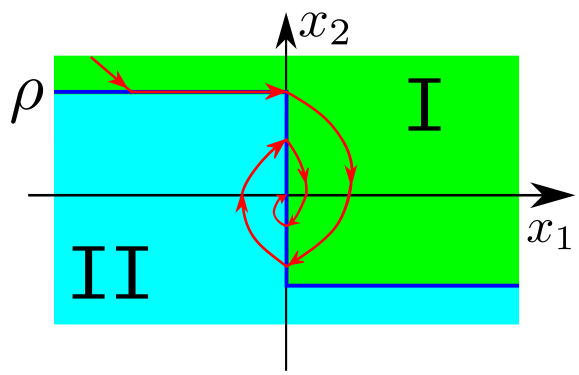


Figura 21: Superficie deslizante discontinua usada por el controlador (69), y una trayectoria típica del sistema (diagrama adaptado de Cuesta *et al.* (2015)).

Proposición 1 *Considérese el sistema (66)-(67), y supóngase que la perturbación $w(t,\varepsilon)$ satisface (68) y se aplica el control (69). Definiendo la región $\mathcal{S}$ como*

$$\mathcal{S} = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}^2 | \varepsilon_1 \neq 0 \;\&\; \sigma(\varepsilon) = \gamma\,\mathrm{sgn}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2 = 0\} \tag{70}$$

y supóngase que $k\rho > \alpha + \beta\gamma + w_M$. Definiendo $\mathcal{S}_0$ como $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S} \cup \{0 \in \mathbb{R}^2\}$. Entonces, cualquier punto $\varepsilon \notin \mathcal{S}_0$ está asociado a $\mathcal{S}$, y se produce un modo deslizante por este sistema a lo largo de esta región.

Demostración. Para probar lo anterior, nótese que $\sigma\dot{\sigma} < 0$ para cada punto $\varepsilon \notin \mathcal{S}_0$ (Utkin *et al.*, 1999). ■

Obsérvese que a pesar de que $\mathcal{S}$ es atractora, no todas las trayectorias llegan a esta superficie si no ocurre antes una conmutación. Sin embargo, para cualquier trayectoria que alcanza $\mathcal{S}$, ocurrirá un deslizamiento con una velocidad constante impuesta por el parámetro γ.

NOTA 1 *Dado que $\varepsilon_2 = \dot{\varepsilon}_1$, el movimiento a lo largo de $\mathcal{S}$ es dirigido a la derecha de $\varepsilon_2 = \gamma$ y a la izquierda de $\varepsilon_2 = -\gamma$ (véase figura 21). Entonces, cualquier trayectoria que inicie fuera de $\mathcal{S}_0$ y que llegue a $\mathcal{S}$, es llevada al punto $(0, \gamma)$ o al punto $(0, -\gamma)$, y llega a estos puntos en un tiempo finito. Cualquier otra trayectoria llegará también en tiempo finito, al intervalo $\mathcal{I} = \{\varepsilon \in \mathbb{R}^2 | \varepsilon_1 = 0 \ \& \ |\varepsilon_2| \leq \gamma\}$. Por consiguiente, se puede establecer que cualquier trayectoria que inicie en cualquier punto $\varepsilon \neq 0$ llegará a $\mathcal{I}$ en tiempo finito.*

Para probar la convergencia de las trayectorias del sistema (66) al origen, se usarán los resultados del teorema 4.4, página 94 de Orlov (2005). Este teorema se enuncia a continuación.

Teorema 4.1 *(Orlov, 2005) Considérese el sistema $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -a\,\mathrm{sign}(x) - b\,\mathrm{sign}(y) - hx - py + \omega(x, y, t)$, con $|\omega(\cdot)| \leq W$. Entonces este sistema es global y uniformemente estable en tiempo finito alrededor del origen si se cumple $0 < W < b < a - W$, y h y p son no negativas.*

Lo siguiente resume los resultados descritos para este punto.

Teorema 4.2 *Considérese el sistema (66)-(67) y la ley de control (69). Supóngase que la perturbación w satisface (68) y $k\rho > \alpha + M > 2M$, donde $M = \beta\gamma + w_M$. Entonces, para cualquier condición inicial $\varepsilon = \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^2$, el estado $\varepsilon(t)$ converge el origen en tiempo finito.*

Demostración. Primeramente se observa, como se estableció en la proposición 1, el conjunto $\mathcal{S}$ es atractivo y cualquier trayectoria que eventualmente alcance este conjunto, se dirige al punto $(0, +\gamma)$ si $\varepsilon_2 > 0$, o a $(0, -\gamma)$ si $\varepsilon_2 < 0$, y llega a este punto en tiempo finito. Cualquier otra trayectoria que no alcance el conjunto $\mathcal{S}$ llega al intervalo $\mathcal{I}$

casi en tiempo finito. En consecuencia, todas las trayectorias llegan, en tiempo finito, al intervalo $\mathcal{I}$. Por lo tanto, es suficiente demostrar que cualquier órbita que inicia en este intervalo converge al origen. Para probar esto, nótese también que la región $\mathcal{W} = \{\varepsilon \in \mathbb{R}^2 | -\gamma \leq \varepsilon_2 \leq \gamma\}$ es invariante, debido a la propiedad atractiva de la superficie $\mathcal{I}$. Por lo tanto, si $\varepsilon \in \mathcal{W}$, entonces $u = -\rho\,\mathrm{sign}(\gamma\,\mathrm{sign}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2) = -\rho\,\mathrm{sign}(\varepsilon_1)$. Bajo estas condiciones, el sistema en lazo cerrado es el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -k\rho\,\mathrm{sign}(\varepsilon_1) - \alpha\,\mathrm{sign}(\varepsilon_2) + \tilde{w}(t,\varepsilon), \end{aligned} \tag{71}$$

donde

$$\tilde{w}(t,\varepsilon) = -\beta\varepsilon_2 + w(t,\varepsilon). \tag{72}$$

Se observa que, en $\mathcal{W}$,

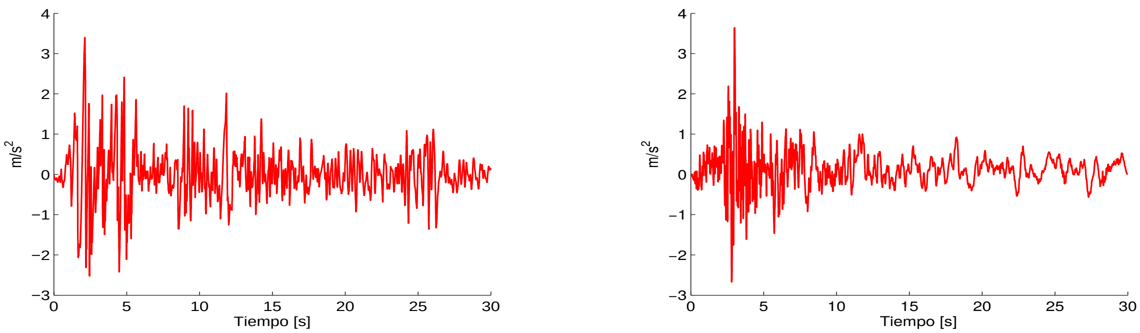
$$|\tilde{w}(t,\varepsilon)| \leq \beta\gamma + w_M. \tag{73}$$

El sistema (71) tiene la misma forma analizada por el teorema 4.1. Aplicando este teorema, se obtiene ese resultado. ■

Nótese que no es necesario los valores paramétricos exactos del sistema α, β, y k, solo las cotas α_M, β_M, y k_m, tales que si $\alpha < \alpha_M$, $\beta < \beta_M$, y $k > k_m$, entonces la ganancia del controlador $\rho > (\alpha_M + \beta_M\gamma + w_M)/k_m > 2(\beta_M + w_M)/k_m$ funcionará adecuadamente.

4.5. Discusión de resultados

En esta sección se muestran algunos resultados experimentales obtenidos a partir de la aplicación de los controladores descritos anteriormente. La posición de referencia se obtuvo a partir de dos datos sísmicos. El primero corresponde al sismo de El Centro ocurrido el 18 de mayo de 1940 en California. Estos datos son típicamente utilizados para realizar pruebas y estudiar sus efectos. Se utilizó la componente norte-sur mostrada en la figura 22a. Los otros datos corresponden al sismo de Mexicali ocurrido el 5 de abril de 2010 en Baja California, México. Se utilizó una ventana de 30 segundos obtenida de la componente norte-sur (véase figura 22b).



(a) Sismo El Centro, 1940. (b) Sismo de Mexicali, 2010.

Figura 22: Señales sísmicas utilizadas.

Estos datos se procesan numéricamente para obtener la velocidad y la posición, procedimiento que se ilustra con mayor detalle en la figura 23. En cada caso, se busca compensar la deriva generada por el cálculo de las integrales correspondientes. Las variables $\ddot{x}_d$, $\dot{x}_d$ y x_d representan aceleración, velocidad y posición, respectivamente. Finalmente, la señal de posición obtenida con este procedimiento se le aplica una escala de 1:0.6 con la finalidad de asegurar que el sistema opere dentro de sus límites de posición ($\pm$ 15 cm a partir de su centro). Para la señal obtenida a partir de los datos del sismo de Mexicali, se usaron las mismas consideraciones.

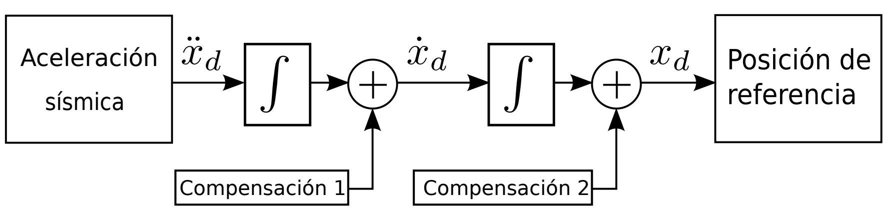


Figura 23: Proceso para obtener la posición de referencia.

Los resultados correspondientes al sismo de El Centro se muestran primero. Después, se muestran solamente los resultados de interés obtenidos con el sismo de Mexicali.

La figura 24 muestra la posición de la mesa vibratoria controlada por los algoritmos descritos anteriormente. La curva en color azul (- - -) y en color verde (· - · -) corresponden a los resultados obtenidos con el control PD (ec. (61)) y el CD-SDD (69), respectivamente. También se muestra la posición de referencia (curva continua color rojo), obtenida por el procedimiento de la figura 23. La figura 25 muestra una amplificación de la figura 24 con la finalidad ver con más detalle los primeros 1.1 segundos del experimento. Se puede

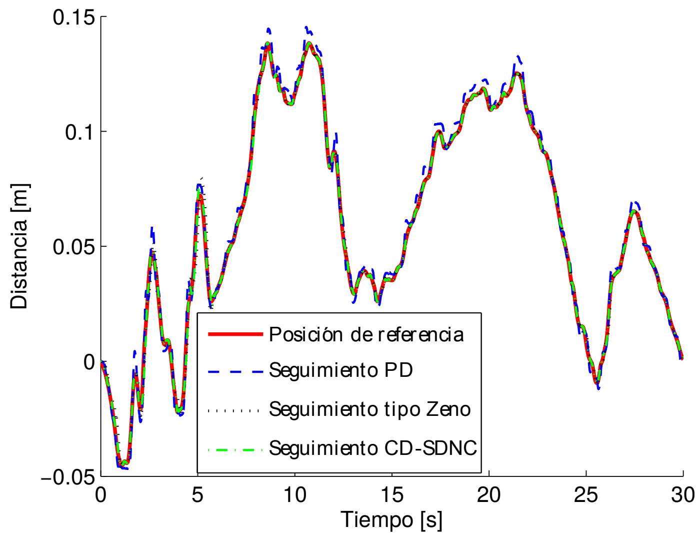


Figura 24: Seguimiento de posición con los algoritmos descritos en (61) y (69) (Sismo: El Centro).

apreciar mejor la diferencia de las respuestas obtenida con los controladores propuestos.

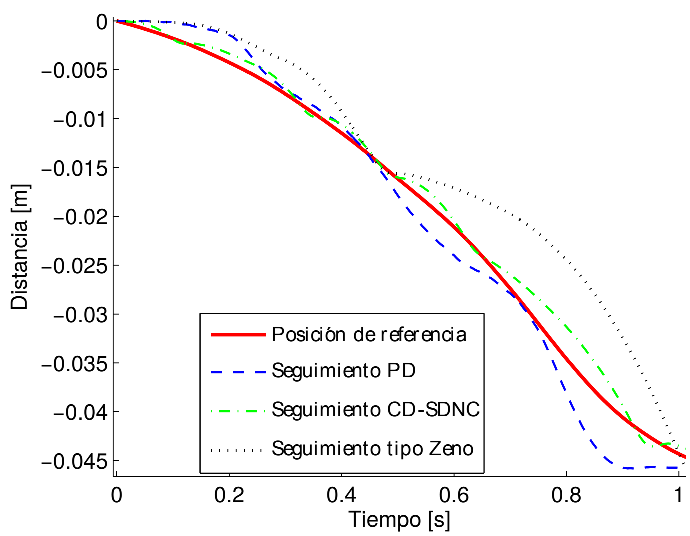


Figura 25: Detalle de la figura 24 (Sismo: El Centro) .

Las señales de control y una vista más a detalle se muestran en las figuras 26 y 27, respectivamente.

Resultados similares se obtuvieron con los datos del sismo de Mexicali. El seguimiento de posición obtenido se muestra en las figuras 28 y 29.

Las figuras 24 y 25 muestran que el error de seguimiento del control CD-SDD es mu-

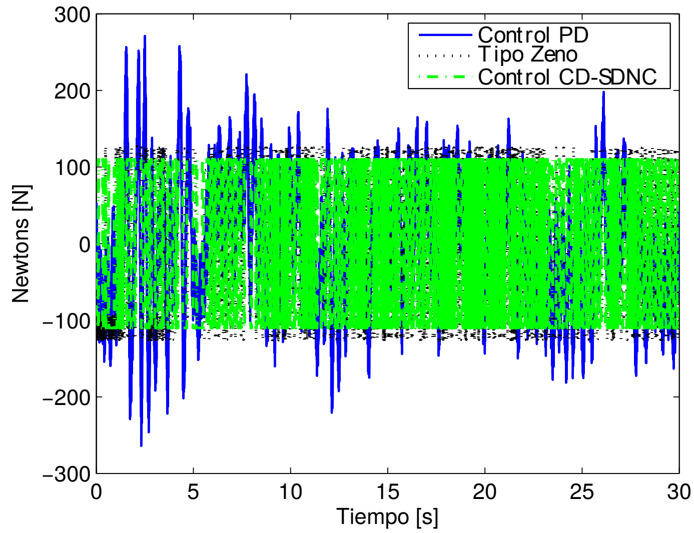


Figura 26: Comparación de las señales de control (Sismo: El Centro).

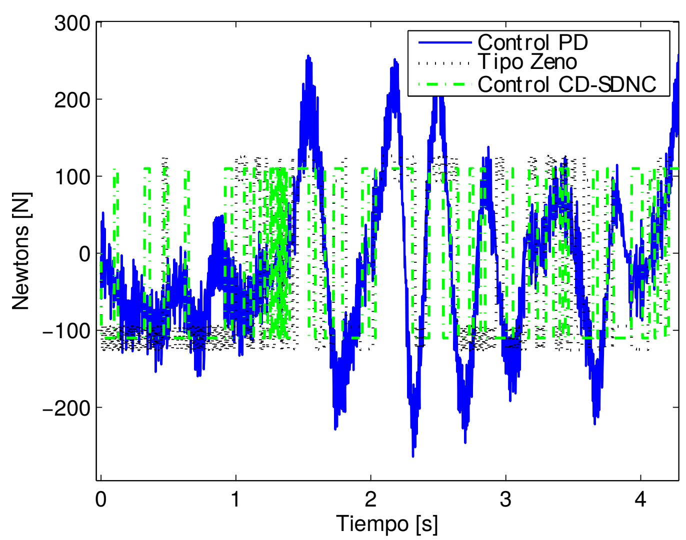


Figura 27: Detalle de la figura 26 (Sismo: El Centro).

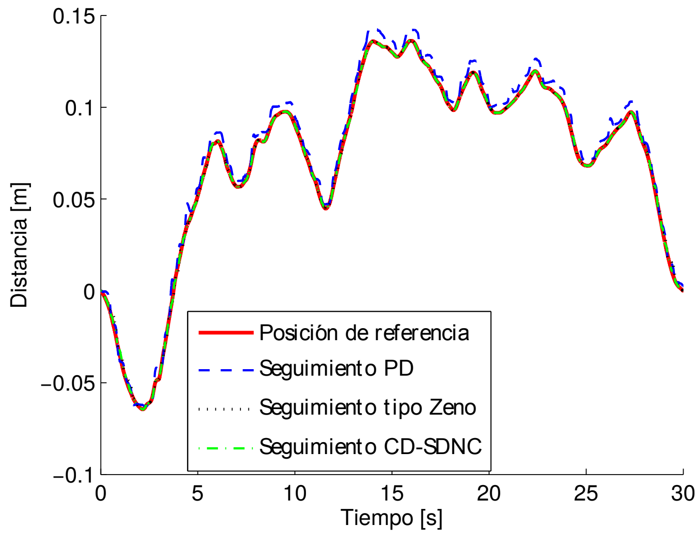


Figura 28: Seguimiento de posición con los controladores descritos en (61) y (69) (Sismo: Mexicali).

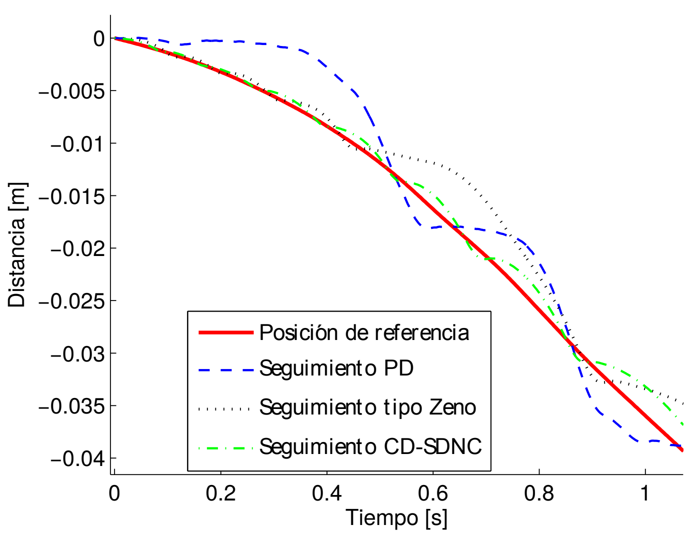


Figura 29: Detalle de la figura 28 (Sismo: Mexicali) .

cho más pequeño que el error obtenido con el PD, mientras que la respuesta de este último se considera aceptable. Mas aún, las figuras 26 y 27 muestran que el control discontinuo presenta componentes de alta frecuencia; sin embargo, la señal del control PD muestra mayor amplitud.

La figura 30 muestra el espectro de frecuencia de estas señales de control, esto con la finalidad de tener un elemento más de comparación entre los algoritmos de control. Por

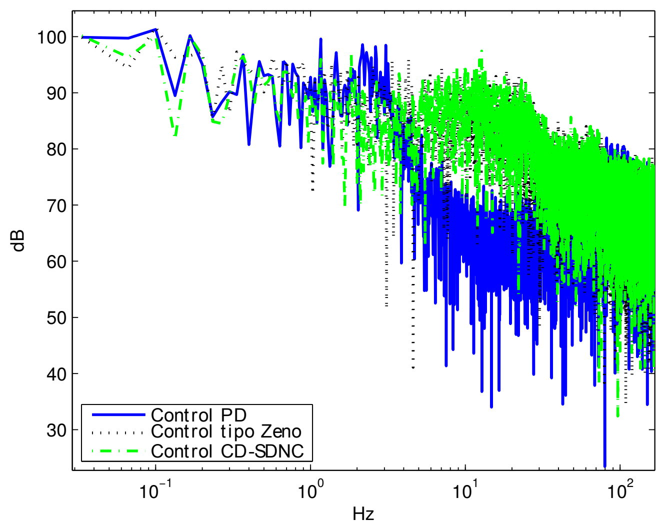


Figura 30: Espectro de frecuencia de las señales de control.

ejemplo, se puede ver que el control CD-SDD tiene una amplitud ligeramente mayor en frecuencias superiores a los 10Hz.

Como pudo apreciarse, la inclusión de un término para compensar la fricción y las perturbaciones (x_f) en el control PD mejora significativamente el desempeño de este algoritmo. En efecto, la ausencia de este término (x_f) reduce la calidad del algoritmo a un punto en el que se vuelve inaplicable. Esto se observó en varios experimentos realizados para observar el desempeño de los algoritmos propuestos. Sin embargo, la inclusión de los términos de fricción requiere estimar los parámetros α y β; la síntesis de la señal de compensación x_f complica la sintonización del controlador porque aumenta el número de parámetros. Además, la señal de compensación x_f se sintetiza a partir de un algoritmo de observación discontinuo que se utiliza para estimar los estados del sistema, requeridos por el controlador. El uso de estas señales estimadas produce las componentes de alta frecuencia observadas en las figuras 26, 27 y 30. La eficiencia de este término depende también de una buena selección de la frecuencia de corte del filtro.

La tabla 3 muestra un resumen de desempeño de los algoritmos de control mencionados anteriormente.

Tabla 3: Características de los controladores (Sismo: El Centro).

Característica	Control PD	Control tipo Zeno	Control CD-SDD
Error cuadrático medio (m)	5.8×10^{-3}	2.6×10^{-3}	1.3×10^{-3}
Máximo valor de control (N)	271.41	127	110
Sintonización de parámetros	Difícil	Sencilla	Simple
Robustez a perturbaciones	Baja	Alta	Alta
Conocimiento de parámetros	Si	No	No

Por otra parte, el desempeño de los controladores en experimentos realizados con los datos del sismo de Mexicali, muestran resultados similares. Un resumen de esto se muestra en la tabla 4. Cabe mencionar que todos los casos presentan componentes de alta frecuencia.

Tabla 4: Características de los controladores (Sismo: Mexicali).

Característica	Control PD	Control tipo Zeno	Control CD-SDD
Error cuadrático medio (m)	4.8×10^{-3}	9.33×10^{-4}	5.08×10^{-4}
Máximo valor de control (N)	214.51	125.9	110
Sintonización de parámetros	Difícil	Sencilla	Simple
Robustez a perturbaciones	Baja	Alta	Alta
Conocimiento de parámetros	Si	No	No

Finalmente, cuando se utiliza este mecanismo para analizar el desempeño de algoritmos de control para atenuar los efectos que producen vibraciones sísmicas, la aceleración generada por la mesa con estos algoritmos de control debe ser lo más parecida a la aceleración real del sismo. Las figuras 31 y 32 muestran aceleraciones producidas por la mesa controlada por los algoritmos descritos anteriormente y la aceleración real del sismo. En las figuras 33 y 34 se incluye una comparación entre los espectros de frecuencias. En estas figuras se puede notar que, aún cuando el seguimiento de aceleración no es el objetivo de control, el control discontinuo produce una aceleración similar a la señal sísmica en ambos casos (El Centro y Mexicali), y el espectro de frecuencia también es muy similar en la región donde se concentra la mayor energía.

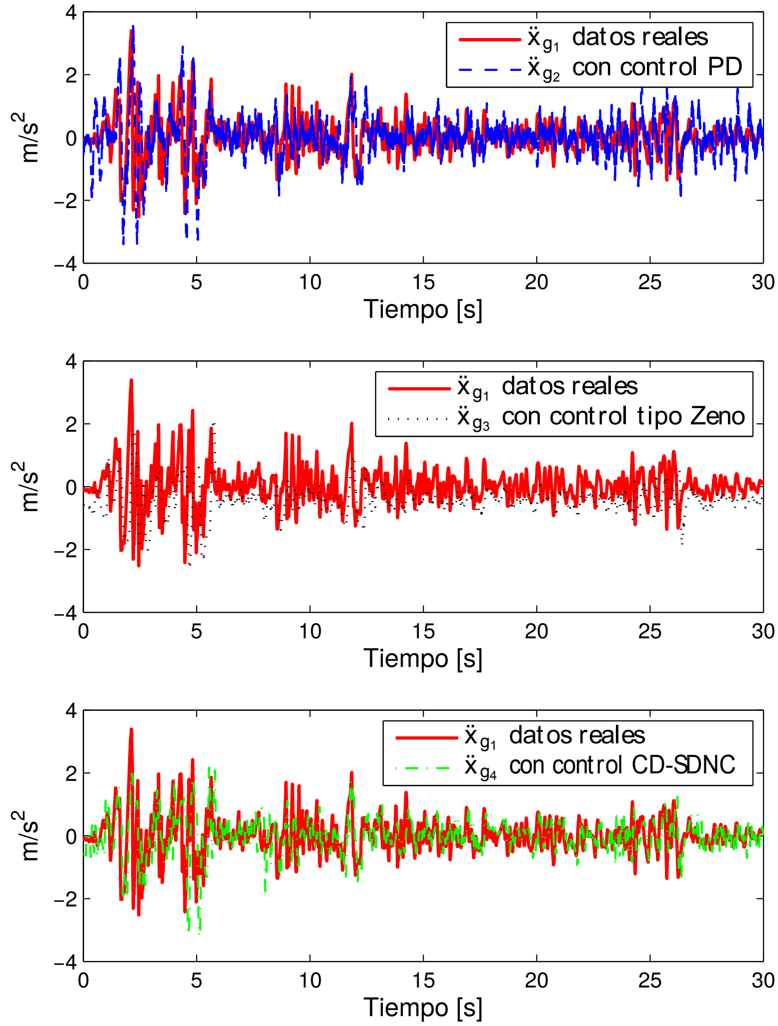
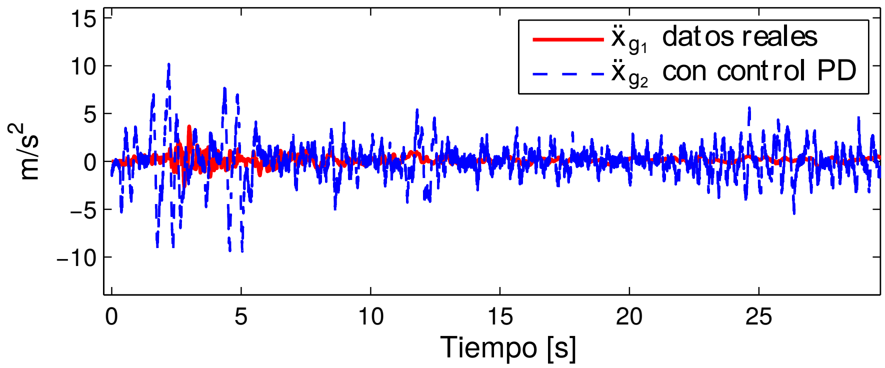
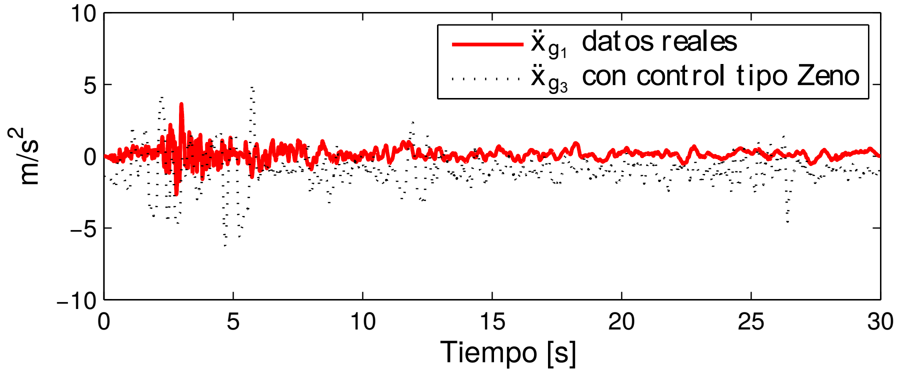


Figura 31: Aceleración real y experimental, sismo El Centro.

4.6. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se ha descrito el diseño, análisis, implementación, evaluación y comparación de los tres algoritmos de control de posición de la mesa vibratoria. Esta mesa forma parte de una plataforma experimental para estudiar los efectos de señales oscilatorias en estructuras y el control para atenuar vibraciones en las mismas. La mesa vibratoria tiene una alta fricción seca y solamente cuenta con medición de posición. Los algoritmos





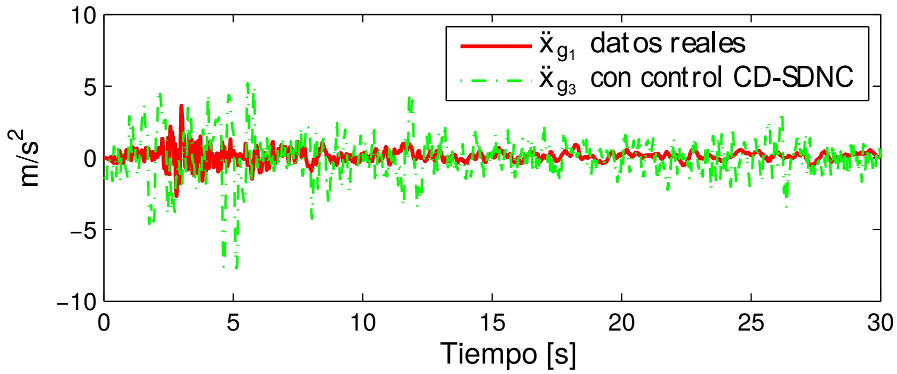


Figura 32: Aceleración real y experimental, sismo Mexicali.

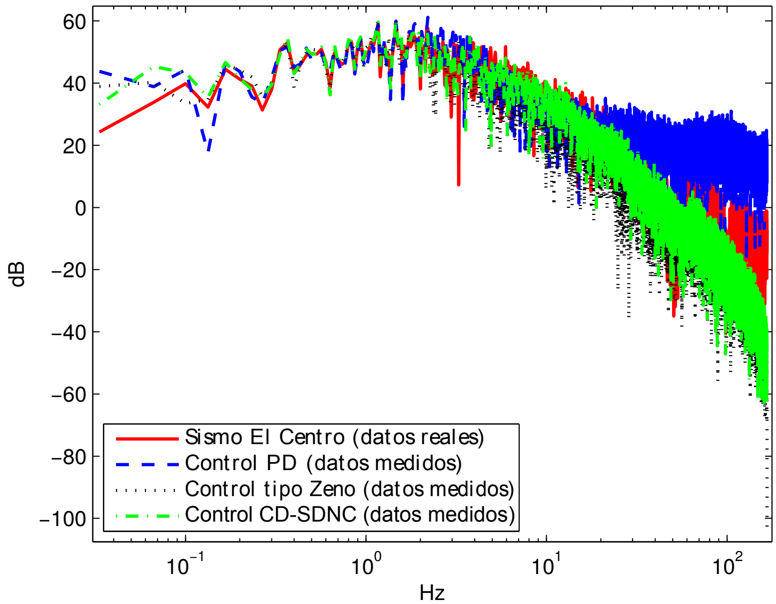


Figura 33: Espectro de frecuencia de la aceleración de El Centro, comparado con los espectros de aceleración de la mesa con los controles descritos.

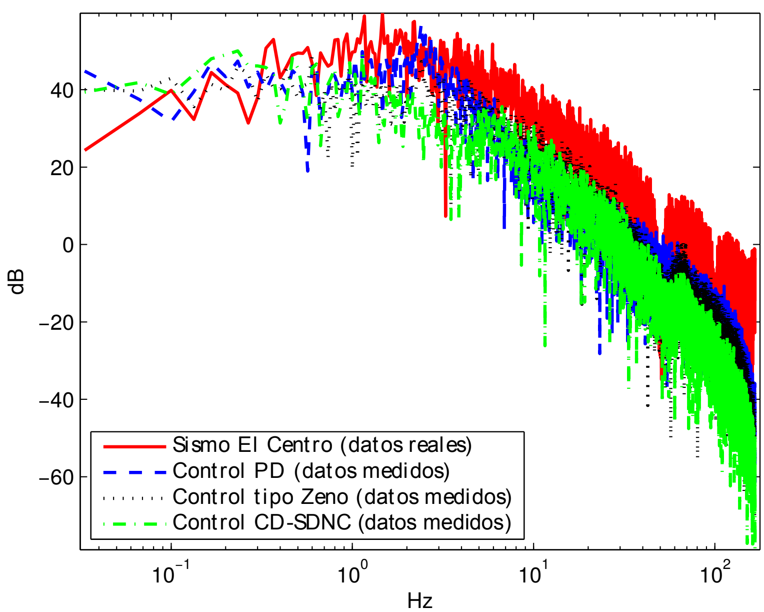


Figura 34: Espectro de frecuencia de la aceleración de Mexicali, comparado con los espectros de aceleración de la mesa con los controles descritos.

de control descritos requieren un observador o estimador de velocidad.

Los resultados obtenidos con las señales de referencia obtenidas a partir de los datos de dos sismos, mostraron que los controladores discontinuos lograron un error de posición sustancialmente menor al error producido con el control PD. Además, la aceleración del sistema en lazo cerrado con estos algoritmos de control producen un espectro de frecuencia similar al espectro de las señales sísmicas.

Por otro lado, para el controlador discontinuo se necesita una amplitud de señal de control menor que la del control PD, es decir, el control discontinuo requiere de menor energía (ver tablas 2 y 1). Otros experimentos realizados en esta mesa vibratoria siguiendo otro tipo de señales periódicas, en general, mostraron un mejor desempeño con el controlador discontinuo que con el PD.

En los siguientes capítulos se describe con mayor detalle la otra parte de la plataforma experimental, es decir, la estructura que se monta sobre la mesa para estudiar sus efectos y proponer leyes de control para atenuar vibraciones en diferentes configuraciones.

Capítulo 5. Control de una estructura de 1 nivel

En el capítulo anterior se describió una mesa vibratoria que es la primera parte de una plataforma experimental para el estudio de los efectos que tienen las vibraciones sobre distintos tipos de estructuras. En particular, en este capítulo se estudiará el comportamiento dinámico de una estructura de un solo nivel con movimiento en una sola dirección. Esta estructura cuenta con un mecanismo situado en la parte superior de la misma cuyo objetivo es minimizar las vibraciones y evitar un colapso de dicha estructura. A este mecanismo le llamaremos «masa activa».

En general, el capítulo se separa en dos partes: la primera es un estudio de la dinámica de la masa activa y la otra parte comprende el análisis y control de la estructura considerando que es afectada por dicha masa.

5.1. Descripción matemática de la masa activa

A continuación se describe el funcionamiento del AMD-1, por sus siglas en inglés *Active Mass Damper*[1], de la compañía Quanser®.

Este mecanismo consiste de una estructura con dos placas de metal flexible que sostienen en la parte superior una masa cuyo movimiento es generado por un motor eléctrico. El objetivo de esta masa es contrarrestar los efectos de vibraciones inducidos en la base de la estructura (véase la figura 35).

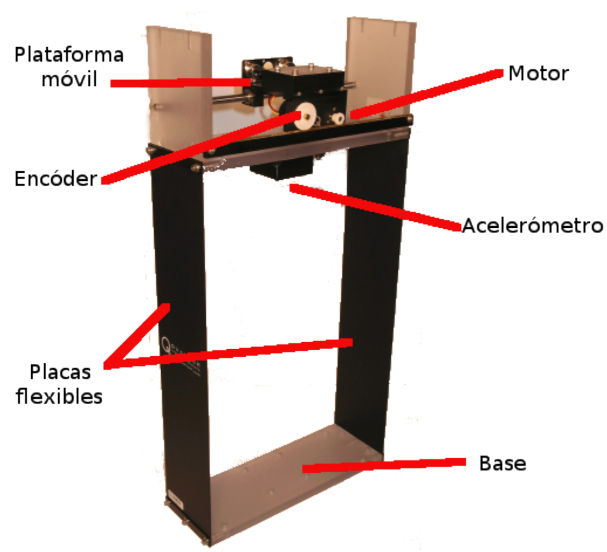


Figura 35: Estructura flexible de un piso.

En la parte superior se encuentra un mecanismo con un motor que mueve a una masa. Esta última se desplaza a través de dos rieles, uno de los cuales está dentado y es donde el motor,

[1] El número «1» indica la cantidad de niveles con los que cuenta.

mediante un engrane, aplica un par en ambas direcciones. Es por eso que se le conoce como «masa activa». Además, este mecanismo cuenta con un encoder ubicado al lado del motor. Este sensor mide la posición de la masa activa. El movimiento de esta masa afecta a la parte superior de la estructura. En esta parte se encuentra un acelerómetro para medir esos cambios.

Como estudio preliminar, es necesario conocer la dinámica de la masa activa antes de continuar con el estudio de la estructura completa. Para esto, se analiza la dinámica de la masa a partir de la figura 36.

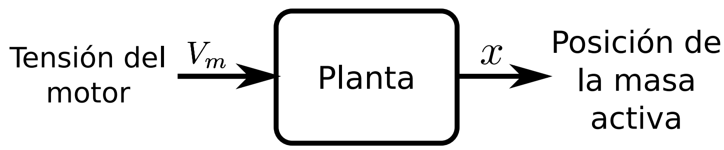


Figura 36: Diagrama a bloques del AMD.

Para obtener la relación entre la tensión de entrada y la posición de la masa activa, se necesita obtener la función de transferencia siguiente:

$$G(s) = \frac{X(s)}{V_m(s)} \tag{74}$$

donde $X(s)$ representa la transformada de Laplace de la salida y $V_m(s)$ es la transformada de Laplace correspondiente a la entrada. La fricción de Coulomb del motor no tiene efectos considerables en la dinámica de la masa activa, por lo tanto, se desprecia. Basándose en las leyes de Newton, se obtiene el siguiente modelo dinámico

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) = F_c(t), \tag{75}$$

donde m es la masa, b es su coeficiente de fricción, x es el estado y F_c es la fuerza del motor de corriente continua que actúa en la masa activa a través de un juego de engranes con la siguiente relación

$$F_c = \frac{\eta_g k_g T_m}{r_{mp}}, \tag{76}$$

donde η_g es la eficiencia de transmisión igual al 100 %, según el manual de usuario; k_g es la relación de reducción (3.71:1); el par del motor se representa por T_m y el radio del engrane del motor (r_{mp}) es de 6.35×10^{-3} m.

Considerando el circuito eléctrico del motor se buscará obtener la función de transferencia. Este circuito se muestra en la figura 37.

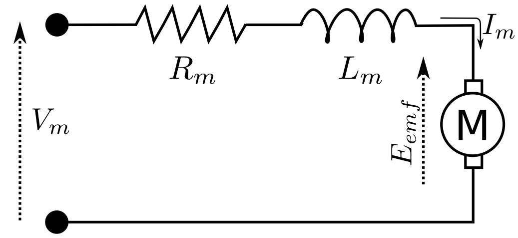


Figura 37: Representación eléctrica del motor.

Usando la ley de Kirchhoff de voltaje se determinan las caídas de tensión correspondientes

$$-V_m + V_{Rm} + V_{Lm} + E_{emf} = 0$$
$$R_m I_m + L_m \frac{dI_m}{dt} + E_{emf} = V_m \tag{77}$$

El efecto de la bobina se puede despreciar debido a que $L_m \ll R_m$ (ver capítulo 11 de Khalil (2003)). Con esta consideración se resuelve (77) para encontrar la corriente del circuito

$$I_m = \frac{V_m - E_{emf}}{R_m}. \tag{78}$$

Se sabe que la fuerza electromotriz, E_{emf}, es proporcional a la velocidad angular del motor ω_m

$$I_m = \frac{V_m - k_m \omega_m}{R_m}. \tag{79}$$

También se toman en cuenta las pérdidas eléctricas del motor, introduciendo un término de eficiencia η_m para calcular el par del motor

$$T_m = \eta_m k_t I_m. \tag{80}$$

Considerando lo anterior, se tiene que la fuerza queda entonces como sigue

$$F_c = \frac{\eta_g k_g \eta_m k_t \left(V_m - k_m \omega_m\right)}{r_{mp} R_m} \tag{81}$$

donde

$\eta_m \rightarrow$ eficiencia del motor
$k_t \rightarrow$ constante de par
$k_m \rightarrow$ constante de la fuerza electromotriz
$R_m \rightarrow$ resistencia de la armadura del motor

Considerando los mecanismos que mueven el engrane del motor, su velocidad angular se puede expresar como función de la velocidad lineal de la masa activa, es decir

$$\omega_m = \frac{k_g \dot{x}(t)}{r_{mp}}. \tag{82}$$

Considerando la ecuación (75), (81) y (82) se obtiene

$$m\ddot{x} + b\dot{x} = \frac{\eta_g k_g \eta_m k_t (r_{mp} V_m - k_m k_g \dot{x})}{r_{mp}^2 R_m}, \tag{83}$$

con lo que finalmente se obtiene una ecuación diferencial en función de la tensión inducida al motor

$$m\ddot{x} + (b + c_2)\dot{x} = c_1 V_m, \tag{84}$$

donde $c_1 = \frac{\eta_g k_g \eta_m k_t}{r_{mp} R_m}$ y $c_2 = \frac{\eta_g k_g^2 \eta_m k_t k_m}{r_{mp}^2 R_m}$. Para el diseño del algoritmo de control es conveniente representar (84) en las siguientes ecuaciones de estado

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{85}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{b + c_2}{m} x_2 + c_1 V_m. \tag{86}$$

5.1.1. Observador para la masa activa

Dado que este equipo cuenta solamente con medición de posición, se requiere utilizar un observador para la velocidad. Se propone entonces el observador robusto descrito en Rosas *et al.* (2006), que tiene la forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + c_1 \operatorname{sign}(x_1 - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\tfrac{b+c_2}{m}\hat{x}_2 + c_2(x_1 - \hat{x}_1) + c_3 \operatorname{sign}(x_1 - \hat{x}_1) + c_1 V_m,\end{aligned} \tag{87}$$

donde $c_1,\ c_2$ y c_3 son constantes positivas que, seleccionadas adecuadamente, aseguran la convergencia del estado observado al estado real. La demostración de esta propiedad puede consultarse en Rosas *et al.* (2006).

5.1.2. Diseño de un controlador para la masa activa

Para probar la eficiencia del modelo, pero sobre todo la relación descrita por la ecuación (81), se diseña un algoritmo de control para seguir una trayectoria deseada. Comprobar esta parte es importante, ya que la relación de fuerza en función de la tensión aplicada, será utilizada más adelante para el control de la estructura completa. Para esto se definen las variables del error de posición con respecto a la señal deseada

$$\dot{e}_1 = e_2, \tag{88}$$

$$\dot{e}_2 = -\frac{b+c_2}{m}(e_2 + \dot{x}_d) + c_1 V_m - \ddot{x}_d, \tag{89}$$

con $e_1 = x_1 - x_d$ y $e_2 = \hat{x}_2 - \dot{x}_d$.

Para evaluar el desempeño de control se utiliza el criterio de la integral del error cuadrático dado por la siguiente expresión

$$\int_0^\infty e^2(t)dt \tag{90}$$

donde el límite superior se reemplaza por T, valor que se elige suficientemente grande de tal forma que el error $e(t)$ sea despreciable para $T < t$.

Se propone un algoritmo basado en un control proporcional - derivativo, con las constantes k_1 y k_2 positivas. A partir de $\dot{e}_2$ se despeja V_m y el controlador queda como sigue

$$V_m = \frac{1}{c_1}\left[\frac{b+c_2}{m}(e_2+\dot{x}_d)+\ddot{x}_d-k_1e_1-k_2e_2\right]. \tag{91}$$

5.1.3. Resultados experimentales obtenidos con la masa activa

Es importante, además del modelo matemático, la verificación del equipo con el que se va a trabajar. Es por eso que se realizaron pruebas experimentales únicamente con la masa activa con la finalidad de comprobar su correcto funcionamiento, así como también verificar el modelo obtenido. Se realizaron pruebas con dos tipos de señales: una periódica y otra tipo chirp.

Antes de mostrar los resultados obtenidos, se describirá de forma general la configuración experimental. Este equipo cuenta con su propia fuente de energía para alimentar al motor y algunos de sus sensores. La señal de control (en volts) se obtiene a través de la tarjeta de adquisición de datos de la computadora. El algoritmo se programó en Simulink de Matlab®. Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 38-41. En estas figuras se muestra el seguimiento de trayectoria de las señales periódica y la chirp.

La primera, figura 38, tiene un excursión máxima de 4cm, es decir, $\pm$2cm a partir del centro y una frecuencia de 0.7Hz, con esta señal y usando el criterio (90) se obtiene un error de seguimiento de 3.8×10^{-3}. La segunda señal, figura 40, es una chirp que inicia en 0.5 Hz y termina en 2 Hz. Usando el mismo criterio, con esta señal se obtiene un error de seguimiento de 9.2×10^{-3}. Aunque los errores no son cero, se consideran lo suficientemente pequeños para decir que el desempeño de control es aceptable y adecuado para las pruebas realizadas. La señal de control en ambos casos (figuras 39 y 41) se encuentran dentro del límite de funcionamiento del equipo, el cual debe ser ≤ 10V.

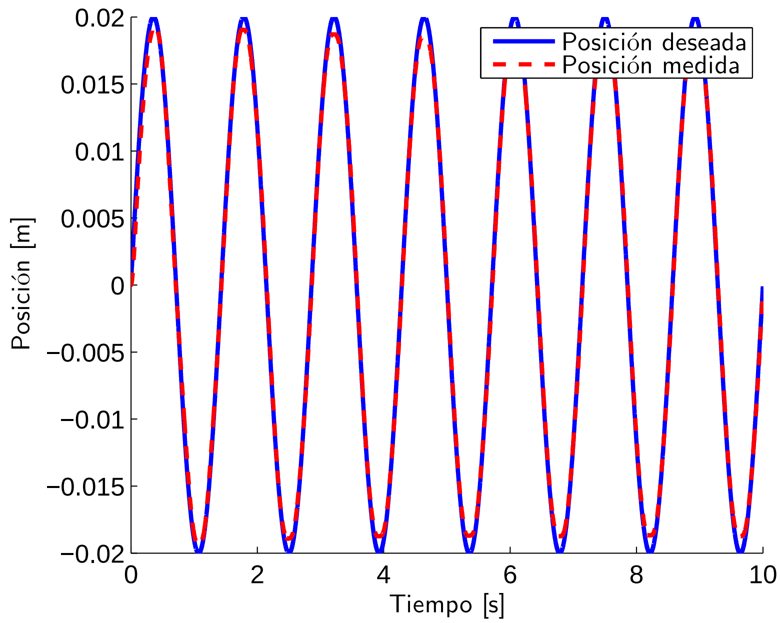


Figura 38: Seguimiento de una señal periódica.

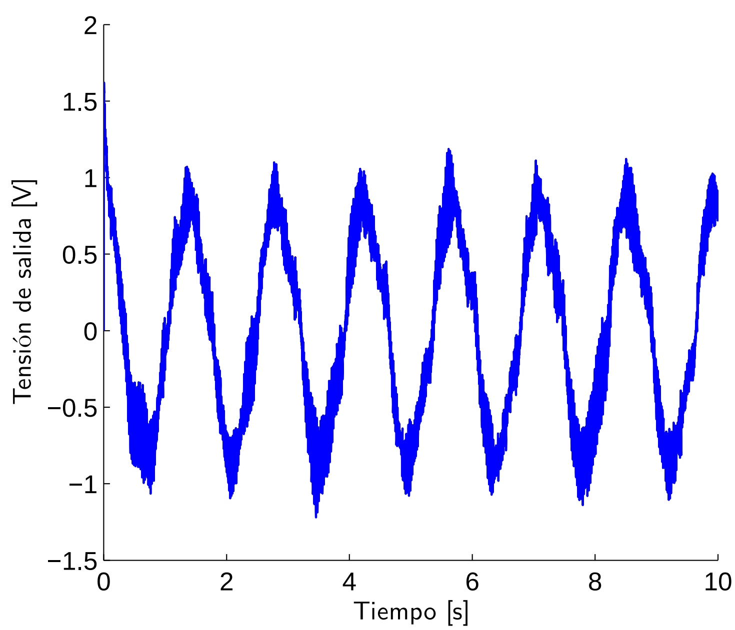


Figura 39: Señal de control para la señal periódica.

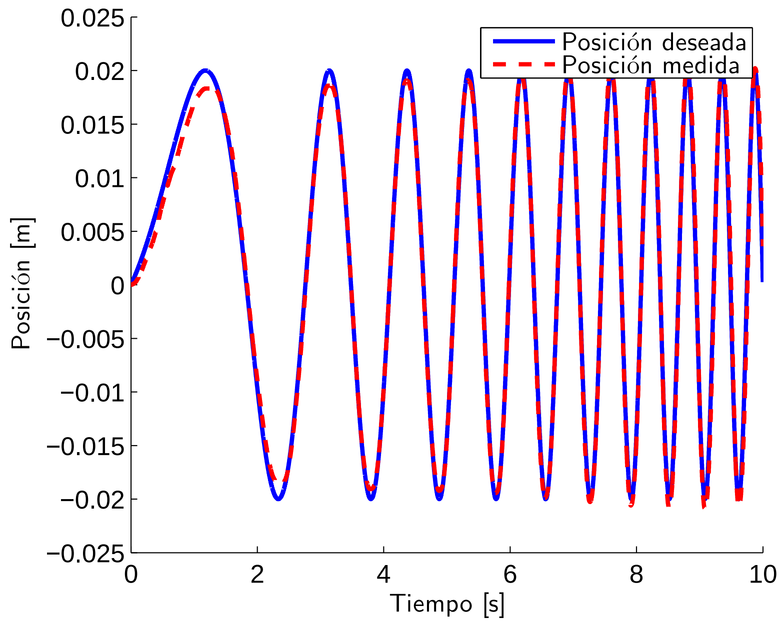


Figura 40: Seguimiento de una señal chirp.

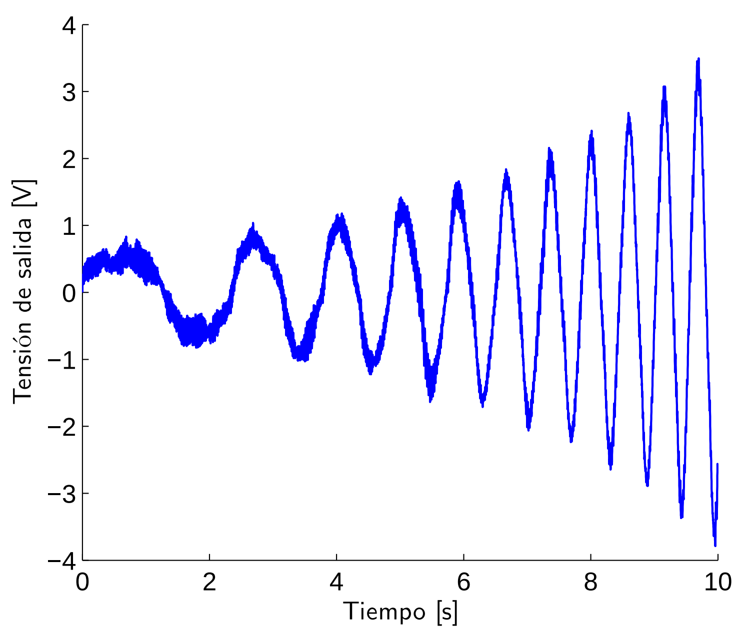


Figura 41: Señal de control para la señal chirp.

5.2. Análisis y control de la estructura completa (AMD-1)

La estructura tiene una rigidez k_1 correspondiente a las placas laterales de metal. El sistema en general presenta una fricción muy pequeña. Las fuerzas que actúan sobre la estructura dependen del movimiento de la masa activa o plataforma móvil situada en la parte superior de la estructura. Su diagrama de fuerzas se describe en la figura 42.

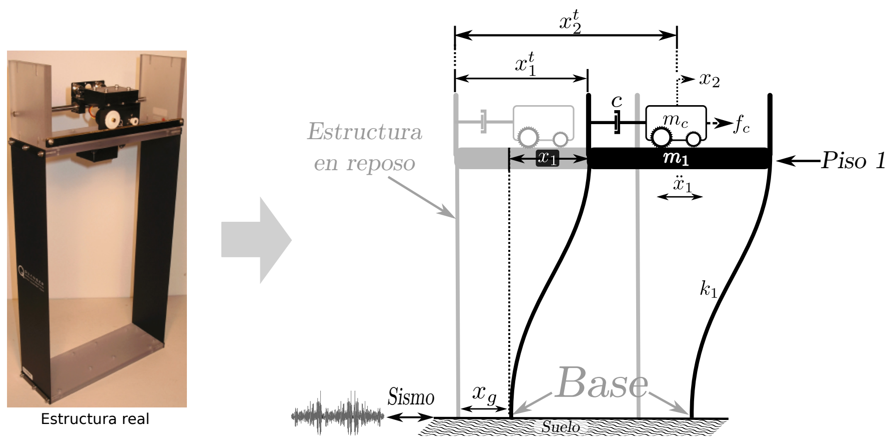


Figura 42: Diagrama de fuerzas del AMD.

5.2.1. Ecuaciones de movimiento de la AMD-1

Para obtener las ecuaciones de movimiento de este mecanismo, se utiliza la metodología de Lagrange. La energía potencial del sistema depende de la flexión de las placas laterales de la estructura. Considerando movimientos alrededor de la posición de reposo, la energía potencial es la siguiente

$$V_T = \frac{1}{2} k_1 x_1(t)^2 \tag{92}$$

donde k_1 es el coeficiente de rigidez, x_1 es la posición del piso 1 con respecto a su base.

La energía cinética asociada a la masa activa, la rotación del motor y el movimiento del piso es

$$T_T = T_{tc} + T_{rc} + T_{t_f} \tag{93}$$

donde T_{tc}, T_{rc} y T_{t_f} se definen a continuación.

El primero corresponde a la energía cinética total de la masa activa

$$T_{tc} = \frac{1}{2}m_c(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2. \tag{94}$$

donde m_c es el valor de la masa activa, $\dot{x}_1$ es la velocidad del piso 1 y $\dot{x}_2$ es la velocidad de la masa activa. El segundo término es la energía cinética correspondiente a la rotación del motor de corriente directa (DC) con el que cuenta la masa activa

$$T_{rc} = \frac{1}{2}J_m\omega_m^2 \tag{95}$$

donde J_m es el momento de inercia del motor, $\omega_m = k_g\dot{x}_2/r_{mp}$. Por último, T_{t_f} es la energía cinética del piso (movimiento traslacional), el cual se expresa como sigue

$$T_{t_f} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2. \tag{96}$$

donde m_1 se considera concentrada en la parte superior de la estructura (ver figura 36). La suma de (94), (95) y (96) nos da la energía cinética total

$$T_T = \frac{1}{2}m_c(\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2^2) + \frac{J_m k_g^2}{2r_{mp}^2}\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2. \tag{97}$$

El lagrangiano $\mathcal{L}$ es entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T_T - V_T, \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\alpha_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_2\dot{x}_2^2 + m_c\dot{x}_1\dot{x}_2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2, \end{aligned} \tag{98}$$

donde $\alpha_1 = m_1 + m_c$ y $\alpha_2 = m_c + J_m k_g^2/r_{mp}^2$. Las fuerzas que se generan son las siguientes:

- $F_{x_1} = -b\dot{x}_1$, lo que representa la fricción de la estructura con $b \ll 1$.
- $F_{x_2} = f_c - c\dot{x}_2$, donde f_c es la fuerza de la masa activa y el otro término representa la fricción entre el piso 1 y la masa activa.

Si se considera la acción del sismo sobre la estructura se debe agregar la fuerza $-m_i\ddot{x}_g$. Resolviendo $\frac{d}{dt}(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}_i)-\partial\mathcal{L}/\partial x_i = F_{x_i}$ con $i = 1, 2$, el sistema queda de la siguiente manera

$$\alpha_1\ddot{x}_1 + m_c\ddot{x}_2 + k_1x_1 = -b\dot{x}_1 - m_1\ddot{x}_g, \tag{99}$$

$$\alpha_2\ddot{x}_2 + m_c\ddot{x}_1 = f_c - c\dot{x}_2 - m_c\ddot{x}_g. \tag{100}$$

Considerando la fuerza que genera la masa activa, obtenida a partir de (81), $f_c = \rho_1(v - \rho_2\dot{x}_2)$ donde $\rho_1 = \eta_g k_g \eta_m k_t / r_{mp} R_m$, $\rho_2 = K_m k_g / r_{mp}$ y v es la tensión aplicada al motor. La representación matricial, a partir de (99) y (100) queda

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = \Upsilon v + W\ddot{x}_g \tag{101}$$

donde $M = \left[\begin{smallmatrix} \alpha_1 & m_c \\ m_c & \alpha_2 \end{smallmatrix}\right]$, $C = \left[\begin{smallmatrix} b & 0 \\ 0 & (c+\rho_1\rho_2) \end{smallmatrix}\right]$, $K = \left[\begin{smallmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\Upsilon = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \rho_1 \end{smallmatrix}\right]$, $W = \left[\begin{smallmatrix} -m_1 \\ -m_c \end{smallmatrix}\right]$.

Para la representación de estados del sistema (101) se considera x_1 como la posición relativa del piso 1 con respecto a la base de la estructura, x_2 la posición de la masa activa con respecto al centro de su excursión, x_3 la velocidad del piso 1 y x_4 la velocidad de la masa activa.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{2\times2} & I_{2\times2} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{m_c\rho_1}{d} \\ \frac{\alpha_1\rho_1}{d} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M^{-1}W \end{bmatrix} \ddot{x}_g \tag{102}$$

donde

$$M^{-1}K = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_2 k_1}{d} & 0 \\ -\frac{k_1 m_c}{d} & 0 \end{bmatrix} \tag{103}$$

$$M^{-1}C = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_2 b}{d} & -\frac{m_c(c+\rho_1\rho_2)}{d} \\ -\frac{m_c b}{d} & \frac{\alpha_1(c+\rho_1\rho_2)}{d} \end{bmatrix} \tag{104}$$

$$M^{-1}W = \begin{bmatrix} \frac{-\alpha_2 m_1 + m_c^2}{d} \\ \frac{m_c m_1 - \alpha_1 m_c}{d} \end{bmatrix} \tag{105}$$

teniendo en cuenta también que $0_{2\times2}$ es una matriz cero de 2×2, $I_{2\times2}$ es una matriz identidad de la misma dimensión. Por último, $d = \alpha_1\alpha_2 - m_c^2$ con $\alpha_1 = m_1 + m_c$ y $\alpha_2 = m_c + J_m k_g^2/r_{mp}^2$.

La estructura en esta primera configuración de un nivel, cuenta con un sensor de posición para la masa activa y un acelerómetro para el piso 1. En base a esto el vector de salidas es

$$Y = NX + Dv \tag{106}$$

donde $Y = [y_1 \quad y_2]^T = [\ddot{x}_1 \quad x_2]^T$, $X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$, $D = [-(m_c\rho_1/d) \quad 0]^T$ y

$$N = \frac{1}{d}\begin{bmatrix} -\alpha_2 k_1 & 0 & -\alpha_2 b & m_c(c+\rho_1\rho_2) \\ 0 & d & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{107}$$

Se observa que y_1 está en función de la aceleración, es decir, $\ddot{x}_1$ es una combinación lineal de los estados de acuerdo a (102) resultando en la matriz (107).

El objetivo de control para la estructura es que la distancia de los pisos con respecto a su base sea tal que se conserve la integridad física de la estructura, es por eso que se busca mantener la posición del piso 1 alrededor del origen, es decir, $\lim_{t\to\infty} x_1 \approx 0$ a pesar de las perturbaciones.

5.2.2. Diseño de un control óptimo para la AMD-1

Para realizar pruebas de atenuación de vibraciones en la estructura se propone el uso del algoritmo de control óptimo descrito en la subsección 3.3.1 (pág. 29) y que se expresa por

$$v = -r^{-1}B^T KX, \tag{108}$$

donde r escalar y K una matriz de ganancias obtenida por la ecuación de Riccati (34) considerando $\dot{K}(t) = 0$.

Como se mencionó anteriormente, se tienen mediciones de la aceleración del piso $\ddot{x}_1$ y de la posición de la masa activa x_2, entonces es necesario diseñar un observador de orden completo de la forma

$$\dot{\hat{X}}_o = A\hat{X}_o + Bv + L(Y - Y_o) \tag{109}$$

donde $\hat{X}_o$ es el estado observado, L un vector de ganancias y $Y_o = C_o\hat{X}_o + Dv$.

Se realizaron pruebas de controlabilidad y observabilidad que comprobaron que tanto el observador como el controlador pueden ser de orden completo.

5.2.2.1. Resultados numéricos del control óptimo de la AMD-1

Para evaluar el desempeño del observador y del controlador, se realizaron algunas simulaciones numéricas en Matlab.

Los parámetros utilizados fueron obtenidos del manual de usuario de Quanser® (2016) los siguientes:

En las figuras 43-45 se muestra una simulación con condiciones iniciales diferentes de cero y una perturbación periódica de baja amplitud. Con estas condiciones se observa el comportamiento del sistema en lazo abierto con la apreciando su movimiento en oscilación libre.

Al cerrar el lazo de control, puede notarse en la figura 43 que la amplitud de movimiento del piso 1 se reduce más rápido que en lazo abierto. Sin embargo, se muestra un movimiento oscilatorio remanente que se debe a la perturbación periódica aplicada.

La masa activa en lazo cerrado presenta un movimiento mayor que en lazo abierto.

Tabla 5: Parámetros del sistema

Parámetro	**Valor**	**Descripción**
b	0.2 N·s/m	fricción de la estructura $<< 1$
k_1	500 N/m	rigidez de la estructura
m_1	1.3 kg	masa del piso
m_c	0.64 kg	masa del carrito
c	60 N·s/m	fricción viscosa de la masa activa
J_m	3.9e-7 kg·m^2	momento de inercia del motor
r_{mp}	6.35$\times$10^{-3} m	radio del piñón del motor
k_g	3.71	relación de engranes
n_g	1	eficiencia de transmisión
n_m	1	eficiencia del motor
k_t	0.00767 N·m/A	constante de par de motor
k_m	0.00767 V·s/rad	constante de la fuerza contra electromotriz
R_m	2.6 Ω	resistencia de la armadura (motor)

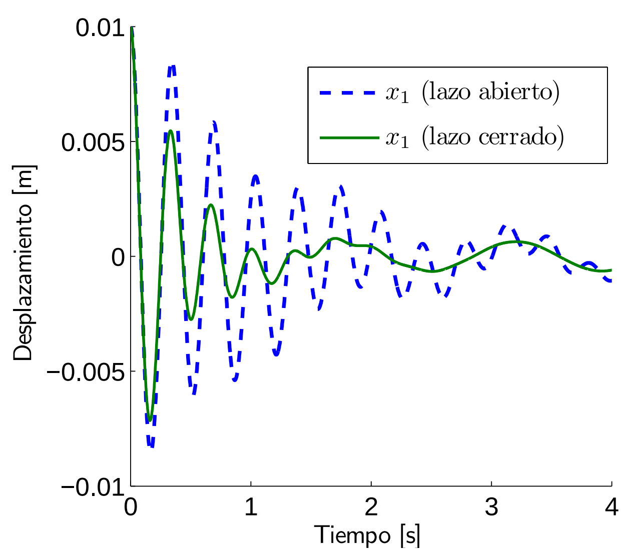


Figura 43: Resultados numéricos de la posición del piso 1 con respecto a su base, condición inicial diferente de cero.

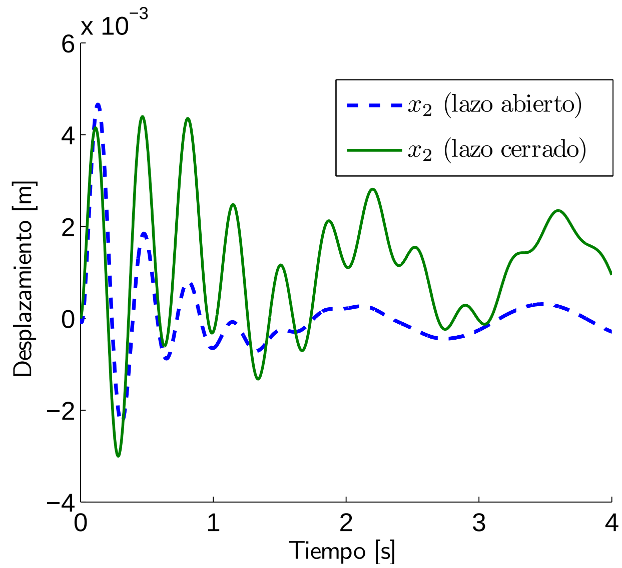


Figura 44: Resultados numéricos de la posición de la masa activa.

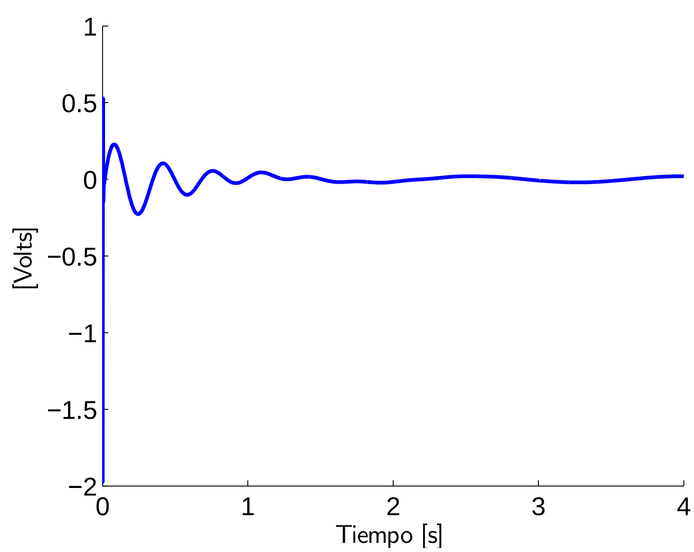


Figura 45: Señal de control obtenida con la simulación numérica en lazo cerrado.

Al aplicar la señal de control, el movimiento de la masa activa es tal que compensa, hasta cierto punto, la diferencia del piso 1 con respecto a la base, manteniendo este error alrededor del origen.

5.2.2.2. Resultados experimentales con el control óptimo para la AMD-1

Para la parte experimental se utilizó el mismo algoritmo, con algunos ajustes en las ganancias.

La figura 46 muestra los resultados experimentales de la estructura iniciando el experimento con una posición inicial diferente de cero y dejando oscilar libremente el sistema. Se registran las aceleraciones en lazo abierto y cerrado. De forma cualitativa se observa una reducción notable al aplicar el control óptimo. Físicamente el movimiento de la estructura es mitigado relativamente rápido por la masa activa quedando una ligera oscilación que tiende a cero asintóticamente.

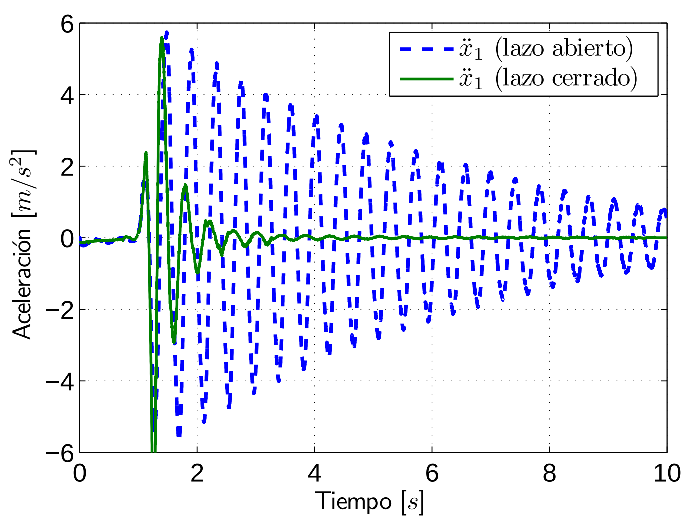


Figura 46: Resultados experimentales con control óptimo.

Se realizan otras pruebas experimentales con el control óptimo que no se incluyen en este trabajo, pero mostraron un bajo desempeño del sistema en lazo cerrado bajo una perturbación periódica de baja amplitud. Se observó atenuación los primeros segundos del experimento, sin embargo, la masa activa tendía hacia un extremo u otro excediendo los límites de seguridad. Comportamientos similares ocurrieron al aplicar otro tipo de perturbaciones, por ejemplo, señales tipo chirp o sísmicas.

La implementación de este algoritmo no mostró resultados satisfactorios debido principalmente a que el diseño no considera a las perturbaciones y, por otro lado, las mediciones de los acelerómetros presentan un ruido considerable.

La siguiente subsección muestra el diseño de otro algoritmo de control que considera una relación entre perturbaciones y ciertas variables de interés.

5.2.3. Diseño de un control $\mathscr{H}_\infty$ para la AMD-1

En esta subsección se propone resolver el problema de atenuación de perturbaciones en la AMD-1 usando la metodología de $\mathscr{H}_\infty$. El modelo obtenido en la sección 5.2, mediante la formulación de Lagrange, se utiliza nuevamente para el diseño de este control. Como ya se describió, en el sistema de la figura 42, la estructura y la masa activa (situada sobre la estructura), son afectadas por perturbaciones inducidas en la base. Este tipo de perturbaciones se denota por $w_1(t) \equiv \ddot{x}_g(t)$. El interés se enfoca en estudiar la posición de la masa activa y la aceleración de la estructura, ya que son las mediciones que se tienen. Para la formulación del problema de control $\mathscr{H}_\infty$, se consideran perturbaciones en las salidas $w_2(t)$ y $w_3(t)$. Suponiendo que la perturbación es $w(t) = [w_1 \; w_2 \; w_3]^T \in \mathcal{L}_2$, se define una salida virtual z con las variables de interés. Considerando esto, el planteamiento del control queda como sigue

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) + B_1 w(t) \tag{110}$$

$$z(t) = C_1 x(t) + D_{12} v(t) \tag{111}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + D_{21} w(t) \tag{112}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_2 k_1}{d} & 0 & -\frac{\alpha_2 b}{d} & \frac{m_c(c+\rho_1\rho_2)}{d} \\ \frac{k_1 m_c}{d} & 0 & \frac{m_c b}{d} & \frac{-\alpha_1(c+\rho_1\rho_2)}{d} \end{bmatrix}, \tag{113}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{m_c\rho_1}{d} \\ \frac{\alpha_1\rho_1}{d} \end{bmatrix}, \tag{114}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\alpha_2 m_1 + m_c^2}{d} & 0 & 0 \\ \frac{m_c m_1 - \alpha_1 m_c}{d} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{115}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -\sigma_1\frac{\alpha_2 k_1}{d} & \sigma_2 & -\sigma_3\frac{\alpha_2 b}{d} & \sigma_4\frac{m_c(c+\rho_1\rho_2)}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{116}$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_5 \end{bmatrix}, \tag{117}$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_2 k_1}{d} & 0 & -\frac{\alpha_2 b}{d} & \frac{m_c(c+\rho_1\rho_2)}{d} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{118}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{119}$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{120}$$

Se considera la salida como sigue

$$y = \tilde{y} - D'v \tag{121}$$

donde $\tilde{y} = Cx + D'v + D_{21}w(t)$ es la salida considerando la acción del control y $D' = [-(m_c\rho_1/d) \quad 0]^T$.

Para más detalles, revisar la subsección 3.3.2 en la página 34.

5.2.3.1. El estimador para control $\mathscr{H}_\infty$

Como se mencionó anteriormente, la estructura no cuenta con la medición total del estado, es por eso que para este algoritmo se utiliza un estimador de estados, que tiene la siguiente forma:

$$\dot{\xi} = A\xi + [\gamma^{-2}B_1B_1^T - BB^T]P_\epsilon\xi + Z_\epsilon C^T[y - y_o] \tag{122}$$

donde P_ϵ y Z_ϵ se obtienen a partir de las ecuaciones perturbadas de Riccati:

$$P_\epsilon A + A^T P_\epsilon + C_1^T C_1 + P_\epsilon[\gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T]P_\epsilon + \epsilon I = 0 \tag{123}$$

$$A_\epsilon Z_\epsilon + Z_\epsilon A_\epsilon^T + B_1B_1^T + Z_\epsilon[\gamma^{-2}PB_2B_2^T P_\epsilon - C^T C]Z_\epsilon = 0 \tag{124}$$

con $A_\epsilon = A + \gamma^{-2}B_1B_1^T P$.

5.2.4. Resultados experimentales

Se realizaron pruebas con el algoritmo de $\mathscr{H}_\infty$. La base de la estructura fue excitada por dos señales: una de ellas fue una señal chirp con una frecuencia inicial de 0.5Hz y final de 2.5Hz. La otra señal de excitación se basa en los datos del sismo de «El centro» reescalados para la AMD-1. Todos los experimentos tuvieron una duración de 30s. Las variables de interés son el desplazamiento del piso 1 y la aceleración del mismo.

Los resultados fueron los siguientes. Primero, en las figuras 47 y 48, se muestra el comportamiento dinámico de la estructura excitada por una señal chirp. Ahí mismo se puede observar una reducción del 44 % en desplazamiento y del 40 % en aceleración.

En las figuras 49 y 50, se muestra la respuesta de la estructura ante la perturbación sísmica mencionada. El desempeño del control logra una reducción del 57 % en desplazamiento y del 41.5 % en aceleración.

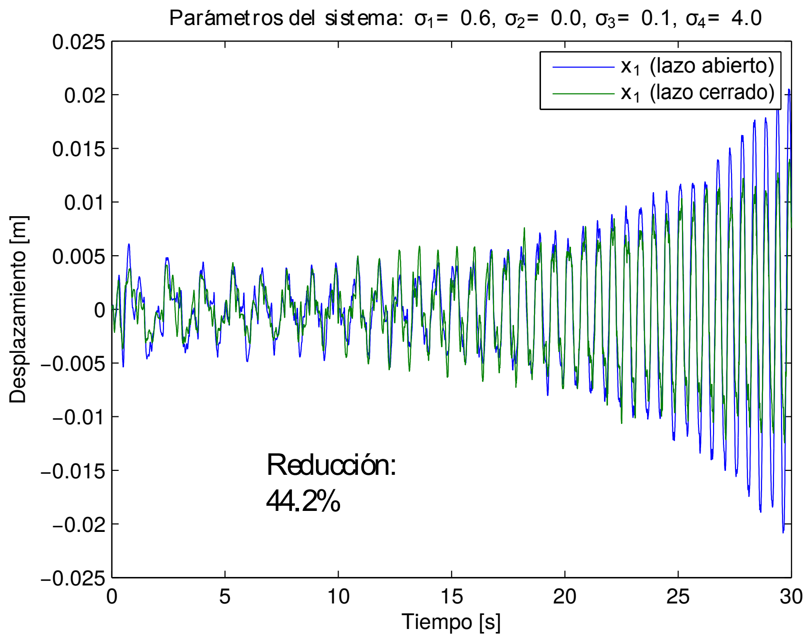


Figura 47: Desplazamiento de la AMD1 con una señal tipo chirp como perturbación.

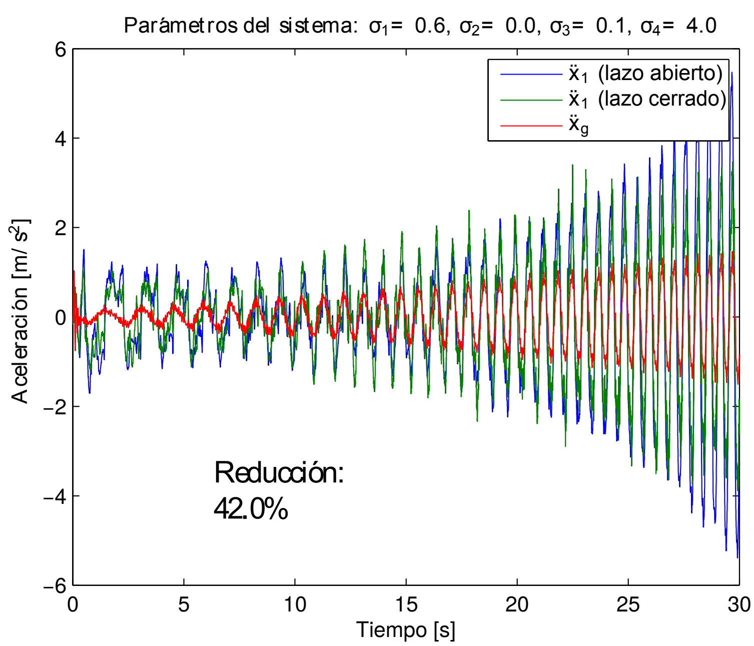


Figura 48: Aceleración del piso 1 como respuesta ante una perturbación tipo chirp. Se muestra la aceleración de la base como referencia para las aceleraciones del piso 1.

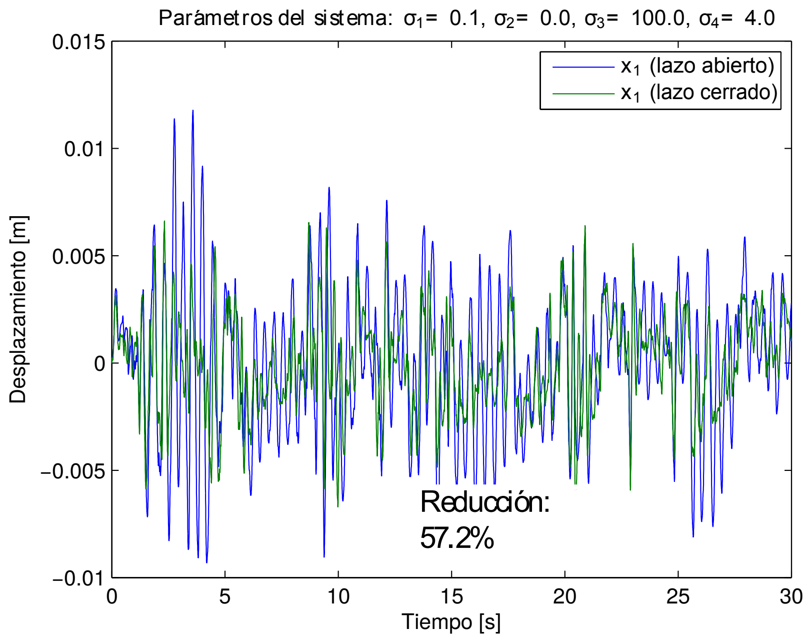


Figura 49: Desplazamiento de la AMD1 con una señal tipo sísmica como perturbación.

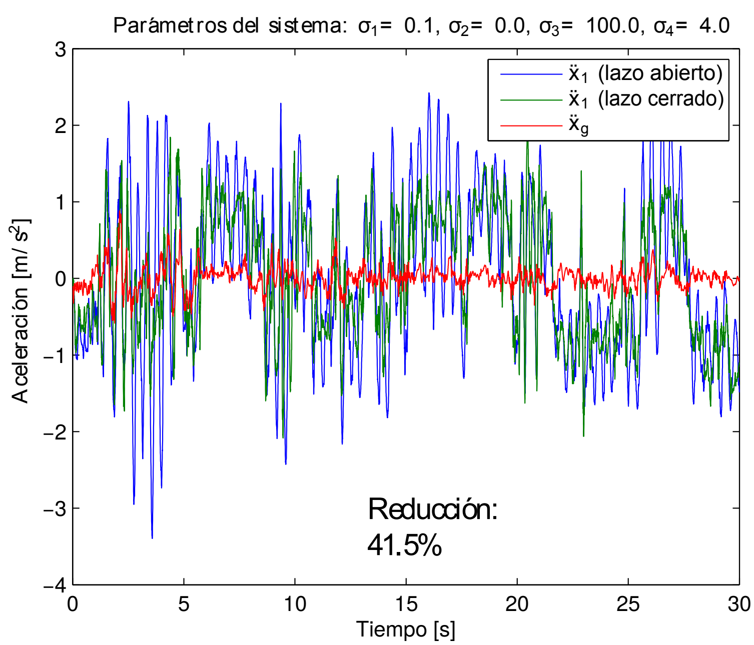


Figura 50: Aceleración del piso 1 como respuesta ante una perturbación tipo sísmica. Se muestra la aceleración de la base como referencia para las aceleraciones del piso 1.

5.3. Conclusiones del capítulo

El objetivo de control para esta estructura es que la distancia de los pisos con respecto a su base, sea tal que se conserve la integridad física de la estructura. La idea no es reducir completamente esta distancia ya que eso significa que la estructura se movería rígidamente hacia un lado y hacia el otro. Esto no ocurre físicamente para el tipo de estructuras consideradas en este trabajo de tesis. Es por esa razón que se busca minimizar o atenuar los efectos de perturbaciones en la estructura. En los resultados mostrados se toma como referencia la respuesta en lazo abierto como el peor de los casos; tomando en cuenta esto se puede evaluar el desempeño de los algoritmos aplicados. El primero de ellos (control óptimo), aunque logra reducir el efecto de ciertas señales usadas como perturbación, no se logra el mismo desempeño para las perturbaciones tipo sísmicas. Por otro lado, con el control $\mathscr{H}_\infty$, se logra una reducción que se considera adecuada para este tipo de sistemas. Todo lo anterior se reduce a un criterio de minimización, el cual se define por el usuario dando valor a las variables de interés. Dicho criterio puede considerar varias variables. La sintonización de éstas, junto con las correspondientes a las de perturbación, no fue sencilla de realizar. Todas las variables están relacionadas por el mismo criterio, si se ajusta una, las demás también se ven afectadas. Esto genera un compromiso entre los movimientos del piso y de la masa activa.

En el siguiente capítulo, se usan criterios similares para el análisis y control de una estructura de dos niveles. Primero se realizan pruebas numéricas y posteriormente se implementan los algoritmos experimentalmente.

Capítulo 6. Control de una estructura de dos niveles

En el capítulo anterior se estudió una estructura de un nivel para analizar su comportamiento ante el efecto de vibraciones. En este capítulo se retomará el análisis realizado para esa estructura de un solo nivel y se extenderá para una estructura de dos niveles con una masa activa en la parte superior de la misma. En la primera parte de este capítulo se describe el mecanismo de dos niveles y posteriormente se diseña un control óptimo y un control $\mathscr{H}_\infty$ para atenuar vibraciones en los niveles de la estructura.

6.1. Descripción del sistema

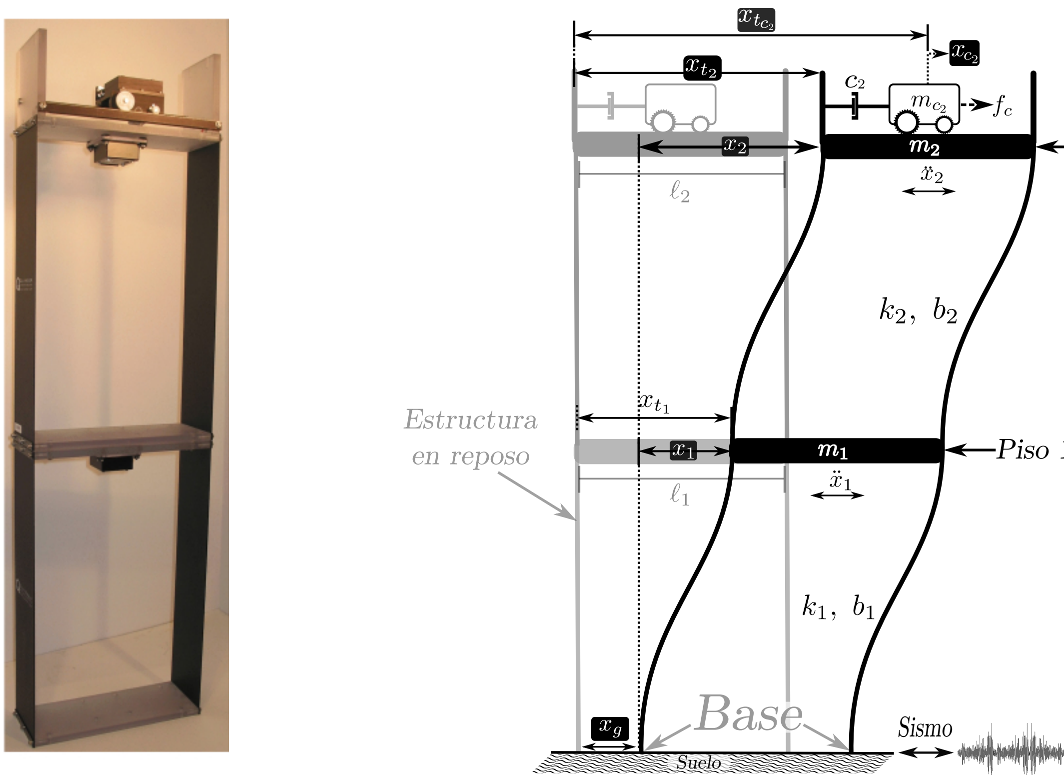
El AMD-2, por sus siglas en inglés *Active Mass Damper*, es un sistema mecánico que consta de dos pisos conectados el uno sobre el otro. A su vez, cada piso está formado por dos placas metálicas flexibles interconectadas por piezas rígidas. En la parte superior de la estructura, se tiene un elemento que servirá para atenuar las vibraciones en este sistema. Este elemento es la parte fundamental del AMD y está formado de una masa montada sobre dos rieles de los cuales uno es dentado. Dicha masa se mueve gracias a un juego de engranes y a un motor controlado por la computadora. Nuevamente se hace referencia a esta parte del sistema como «masa activa».

Para definir las variables de movimiento se utiliza el diagrama de la figura 51. A partir de este diagrama se define en la siguiente tabla.

Tabla 6: Descripción de los parámetros y variables para la AMD-1.

Dato	Descripción
$x_{1,2}$	posición de los pisos con respecto a su base
x_{c_2}	posición de la masa activa con respecto al centro del piso 2
x_{tn}	desplazamiento total de x_n, con $n = 1, 2, c_2$
x_g	desplazamiento total del suelo
$\ell_{1,2}$	anchura de los pisos
$k_{1,2}$ $b_{1,2}$	rigidez de las paredes o columnas laterales amortiguamiento de los pisos
m_n	masa n
f_c	fuerza generada por la masa activa.

Las fuerzas que actúan sobre la estructura dependen del movimiento de la masa activa situada en la parte superior de la estructura. Para entender mejor la dinámica de este sistema se analizan sus ecuaciones de movimiento a partir del diagrama de fuerzas que se describe en la figura 51(b).



(a) Estructura real.

(b) Diagrama de fuerzas.

Figura 51: Diagrama de fuerzas del AMD-2.

6.1.1. Ecuaciones de movimiento

Para obtener las ecuaciones de movimiento de este mecanismo, es necesario considerar lo mejor posible todos los elementos que interfieren en la dinámica del sistema, para esto, se utiliza nuevamente la metodología de Lagrange que considera principalmente los tipos de energía que actúan en el sistema. A continuación se definen las siguientes variables que se utilizarán para el modelo y se basan en la figura 51(b). Las posiciones totales se definen como sigue

$$x_{t_1} = x_1 + x_g \tag{125}$$

$$x_{t_2} = x_2 + x_g \tag{126}$$

$$x_{tc_2} = x_{c_2} + x_2 + x_g - \frac{\ell_2}{2} \tag{127}$$

y las velocidades de las variables de interés son

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_{t_1} - \dot{x}_g \tag{128}$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_{t_2} - \dot{x}_g \tag{129}$$

$$\dot{x}_{c_2} = \dot{x}_{tc_2} - \dot{x}_2 - \dot{x}_g \tag{130}$$

La energía potencial del sistema se considera a partir de la estructura en reposo, es decir, cuando las placas laterales no presentan deformación, esto es:

$$V_T = \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 \tag{131}$$

La energía cinética (EC) del sistema es:

$$T_T = T_{t_{f_1}} + T_{t_{f_2}} + T_{tc_2} + T_{rc_2} \tag{132}$$

donde $T_{t_{f_i}}$, para $i =$1,2, es la EC total de los pisos 1 y 2, T_{tc_2} es la EC total de la masa activa y la EC correspondiente al motor es T_{rc_2}. A continuación se desglosan los términos anteriores.

$$T_{t_{f_1}} = (1/2)m_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_g)^2 \tag{133}$$

$$T_{t_{f_2}} = (1/2)m_2(\dot{x}_2 + \dot{x}_g)^2 \tag{134}$$

$$T_{tc_2} = (1/2)m_{c_2}(\dot{x}_{c_2} + \dot{x}_2 + \dot{x}_g)^2 \tag{135}$$

$$T_{rc_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{J_{m_2}k_{g_2}^2}{r_{mp_2}^2}\right)\dot{x}_{c_2}^2 \tag{136}$$

donde J_{m_2}, k_{g_2} y r_{mp_2} son parámetros del motor. Con los términos anteriores se obtiene el lagrangiano $\mathcal{L} = T_T - V_T$ que se utiliza para el cálculo de las ecuaciones de movimiento de acuerdo a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} + F_i(\dot{x}_i) = \tau_i, \tag{137}$$

donde F_i representa los términos relacionados con la fricción viscosa (disipación de energía) y τ_i las fuerzas que actúan en el sistema. Considerando lo anterior, las ecuaciones que modelan al sistema son las siguientes

$$m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 - b_1\dot{x}_2 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = -m_1\ddot{x}_g \tag{138}$$

$$\alpha_1\ddot{x}_2 + m_{c_2}\ddot{x}_{c_2} - b_2\dot{x}_1 + (b_2+c_2)\dot{x}_2 - c_2\dot{x}_{c_2} - k_2x_1 + k_2x_2 = -\alpha_1\ddot{x}_g \tag{139}$$

$$m_{c_2}\ddot{x}_2 + \alpha_2\ddot{x}_{c_2} - c_2\dot{x}_2 + (c_2+\rho_1\rho_2)\dot{x}_{c_2} = \rho_1 v - m_{c_2}\ddot{x}_g \tag{140}$$

donde $\alpha_1 = m_2 + m_{c_2}$, $\alpha_2 = m_{c_2} + \frac{J_{m_2}k_{g_2}^2}{r_{mp_2}^2}$, v es la entrada de control en volts, ρ_1 y ρ_2 son parámetros de la masa activa.

Lo anterior se muestra en representación matricial

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & m_{c_2} \\ 0 & m_{c_2} & \alpha_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_{c_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & -b_1 & 0 \\ -b_1 & (b_2+c_2) & -c_2 \\ 0 & -c_2 & (c_2+\rho_1\rho_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_{c_2} \end{bmatrix} + \dots$$
$$\begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho_1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} -m_1 \\ -\alpha_1 \\ -m_{c_2} \end{bmatrix}\ddot{x}_g \tag{141}$$

6.1.2. Ecuaciones de estado

Se redefine el estado como sigue:

Variable	Interpretación física
x_1	posición del piso 1
x_2	posición del piso 2
x_3	posición de la masa activa

Variable	Interpretación física
x_4	velocidad del piso 1
x_5	velocidad del piso 2
x_6	velocidad de la masa activa

Se forma el siguiente sistema

$$\ddot{X} = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & I_{3\times3} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0_{3\times1} \\ -M^{-1}\Upsilon \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0_{3\times1} \\ -M^{-1}W \end{bmatrix} \ddot{x}_g \tag{142}$$

con $X \in \mathbb{R}^6$ el vector de estados, v la entrada en volts y $\ddot{x}_g$ la perturbación sísmica.

Por otro lado, el vector de salidas está compuesto por las aceleraciones de los pisos ($\ddot{x}_1, \ddot{x}_2$) y la posición de la masa activa (x_3)

$$Y = CX + Dv \tag{143}$$

con $D \neq 0$.

6.2. Diseño de un control óptimo para el AMD-2

En el capítulo anterior se diseñó un control óptimo para la atenuación de vibraciones en el AMD-1. De manera similar se realiza el diseño de un control óptimo para este sistema de 2 niveles. Para evitar deformaciones que afecten severamente a la estructura, la posición de cada piso con respecto a su base no debe rebasar cierto límite establecido por el fabricante y así deberá mantenerse en todo tiempo. Esto se logra moviendo la masa activa (situada en la parte superior de la estructura) de tal forma que contrarreste los efectos de vibraciones en la estructura. Pero físicamente el movimiento de la masa activa tiene una excursión máxima delimitada por los extremos de la estructura. Por lo tanto, el estado correspondiente a la masa activa también debe considerarse en la síntesis del control para evitar rebasar estos límites. Lo anterior se puede expresar matemáticamente como sigue

$$\begin{aligned} \sup_{t\in\Re} |x_1(t)| &< d_1 \\ \sup_{t\in\Re} |x_2(t)| &< d_2 \\ \sup_{t\in\Re} |x_3(t)| &< d_3 \end{aligned} \tag{144}$$

con d_i, con $i=$1,2,3, es una constante positiva mayor que cero.

Como se mencionó anteriomente, estas posiciones deben mantenerse por debajo de estos límites máximos durante todo tiempo, para esto se define la funcional de costo cuadrático que permite dar diferentes valores de importancia para las variables de interés expresados por (144). Si además se busca tener un control con esfuerzo mínimo (Kirk, 2004), la funcional de costo es

$$J = \int_{t_o}^{t_f} [X^T Q X + v^T r v] \, dt \tag{145}$$

donde r es un escalar positivo y Q es una matriz definida positiva. Considerando diferentes pesos en las variables de interés, se propone la siguiente matriz

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_6 \end{bmatrix} \tag{146}$$

donde q_i son valores constantes y positivos.

Comprobando las condiciones de controlabilidad y observabilidad se puede afirmar que éstas se cumplen. Como no se tiene acceso a todo el estado, utiliza un observador de estados y se diseña un control óptimo tomando en cuenta que no existe perturbación sísmica (caso nominal: $\ddot{x}_g = 0$), siendo así, el control óptimo queda de la forma

$$v = -r^{-1} B^T K X \tag{147}$$

y es único y óptimo para los valores de Q y r seleccionados. La matriz K es la solución de la ecuación de Riccati

$$A^T K + KA + Q - KBr^{-1}B^T K = 0 \tag{148}$$

que asegura que la dinámica del sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable (para más detalles ver la sección 3.3.1, pág. 29).

En las dos subsecciones siguientes se comprueba numéricamente el diseño de este algoritmo.

6.2.1. Resultados numéricos aplicando control óptimo

Para comprobar el correcto diseño de este algoritmo, se realiza una simulación numérica utilizando Matlab®. Se utiliza el modelo dinámico para la estructura de dos niveles con el actuador analizado en la sección 6.1. Los parámetros utilizados para este modelo se muestran en la tabla 7.

Tabla 7: Parámetros del sistema AMD-2

Parámetro	Valor	Unidad	Descripción
$b_{1,2}$	2	N·s/m	fricción de la estructura
$k_{1,2}$	480	N/m	rigidez de la estructura
m_1	1.16	kg	masa del piso 1
m_2	1.3	kg	masa del piso 2
m_c	0.64	kg	masa del carrito
c	60	N·s/m	fricción viscosa de la masa activa
J_m	3.9e-7	kg·m^2	momento de inercia del motor
r_{mp}	6.35×10^{-3}	m	radio del piñón del motor
k_g	3.71	—	relación de engranes
n_g	1	—	eficiencia de transmisión
n_m	1	—	eficiencia del motor
k_t	0.00767	N·m/A	constante de par de motor
k_m	0.00767	V·s/rad	constante de la fuerza contra electromotriz
R_m	2.6	Ω	resistencia de la armadura (motor)

Con esos parámetros se realiza la siguiente simulación: se inicia el sistema con una posición inicial diferente de cero, se deja el sistema oscilar libremente en lazo abierto. Después, con esas mismas condiciones, se realiza la simulación en lazo cerrado. Las figuras 52, 53, 54 y 55 muestran el comportamiento del sistema durante el tiempo de simulación.

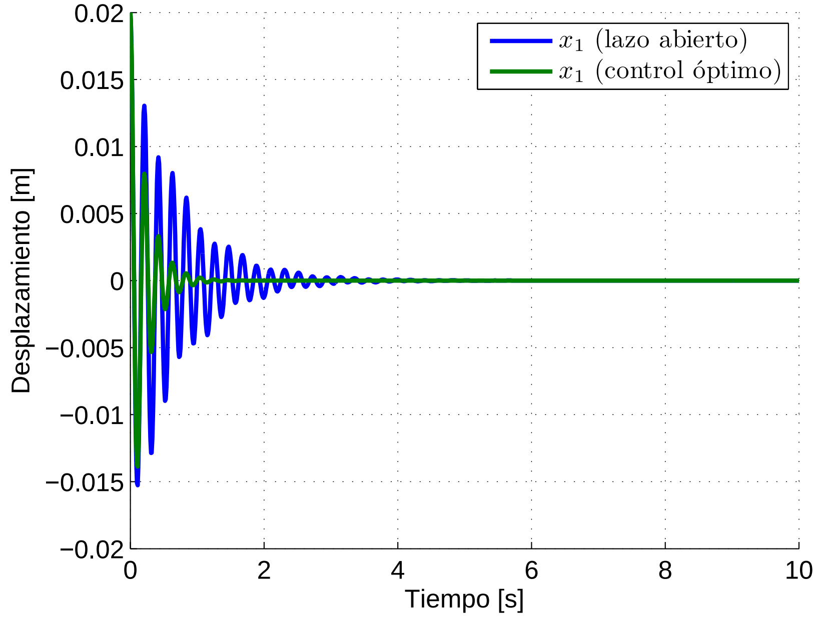


Figura 52: Desplazamiento del piso 1 con una condición inicial diferente de cero. Se muestra respuesta en oscilación libre (lazo abierto) y con control óptimo.

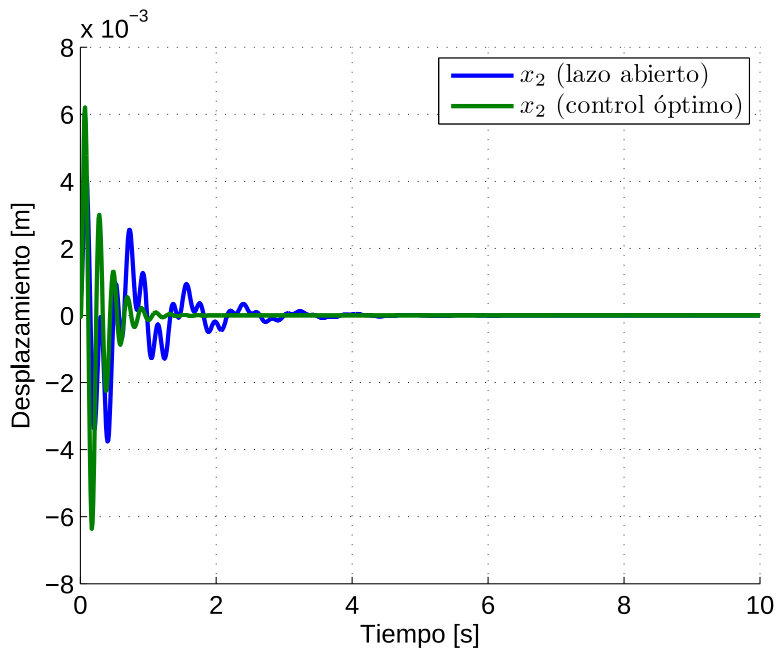


Figura 53: Desplazamiento del piso 2 con una condición inicial diferente de cero. Se muestra respuesta en oscilación libre (lazo abierto) y con control óptimo.

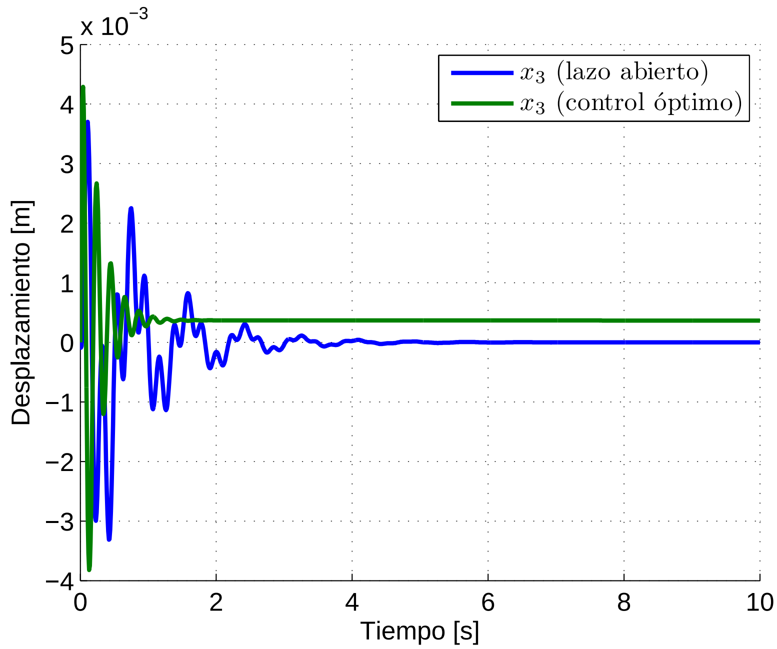


Figura 54: Desplazamiento de la masa activa. Se muestra respuesta en oscilación libre (lazo abierto) y con control óptimo.

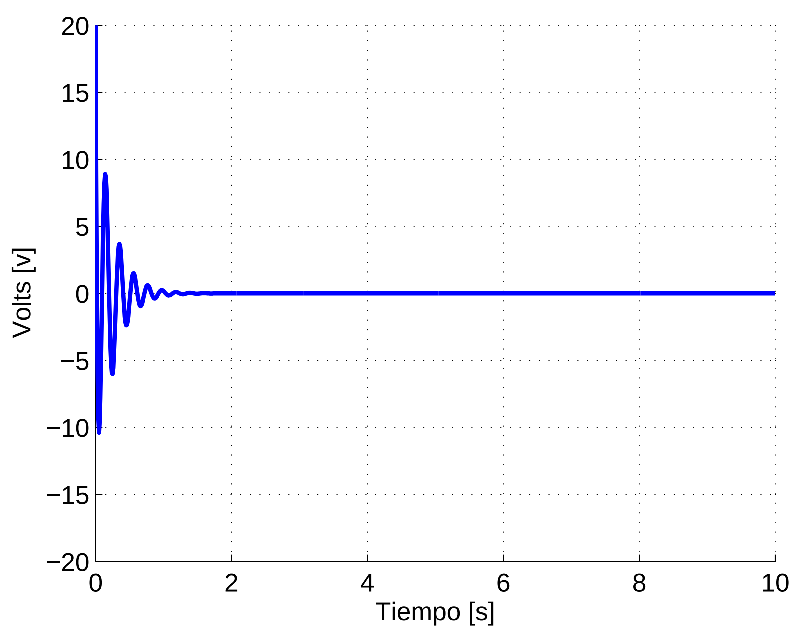


Figura 55: Señal de control óptimo aplicada a la estructura.

En las figuras anteriores se puede apreciar cualitativamente una reducción notable al aplicar el algoritmo de control, por ejemplo, en las figuras 52 y 53 el movimiento del piso 1 y piso 2 es mitigado en los primeros 1.5 segundos de la simulación, mientras que en lazo abierto el movimiento oscilatorio sigue después de los 4 segundos. De forma cuantitativa se toma como referencia los desplazamientos máximos en lazo abierto para definir los límites de x_1 y x_2 descritos por (144) y x_3 se define físicamente midiendo la máxima excursión de la masa activa. Estos límites son: d_1 =0.0151m, d_2 =0.004m y d_3 =0.09m.

6.2.2. Resultados experimentales aplicando control óptimo

En esta subsección se muestran los resultados experimentales realizados con la estructura de la figura 68(a) utilizando control óptimo. De igual manera que para el AMD-1, las vibraciones son inducidas en la base de la estructura con movimientos en una sola dirección. La lectura de los sensores se realiza a través de una tarjeta de adquisición de datos, misma que se utiliza para enviar la señal de control. El software utilizado en el sistema de cómputo es Matlab®-Simulink. Las primeras pruebas permitieron realizar la configuración experimental inicial y ajustar los parámetros del control óptimo para el sistema físico. Considerando la simulación numérica mostrada en la subsección anterior, se inicia el experimento partiendo de una condición inicial diferente de cero. Este sencillo experimento permitió comprobar de forma cualitativa que se logran atenuar las oscilaciones de la estructura en lazo cerrado. Una vez comprobado esto, se realizan otras pruebas con diferentes señales, pero principalmente con señales tipo sísmicas donde el comportamiento del algoritmo de control óptimo diseñado es aceptable. Las gráficas del comportamiento de la estructura en lazo cerrado, perturbada por el sismo de El Centro, se muestran en las figuras 56, 57 y 58.

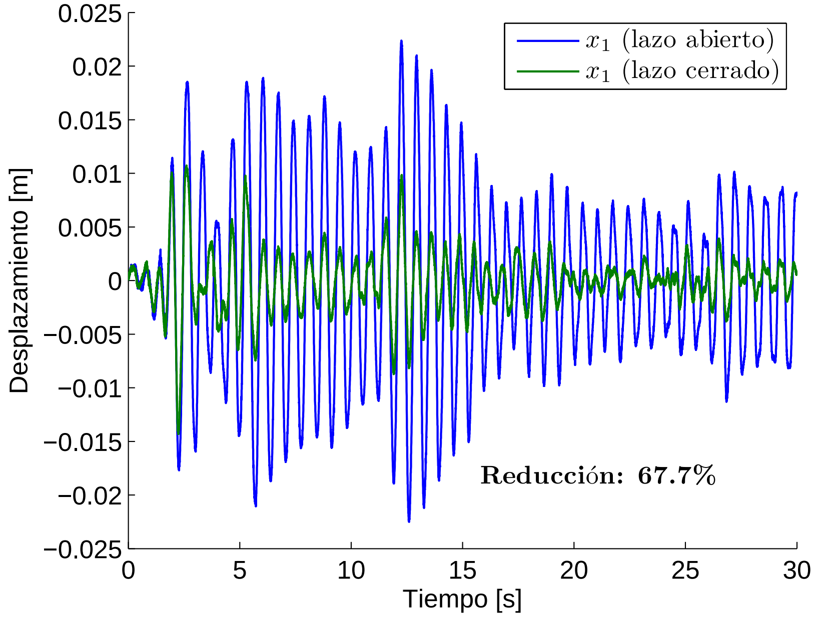


Figura 56: Desplazamiento del piso 1 con el sismo de El Centro aplicando control óptimo.

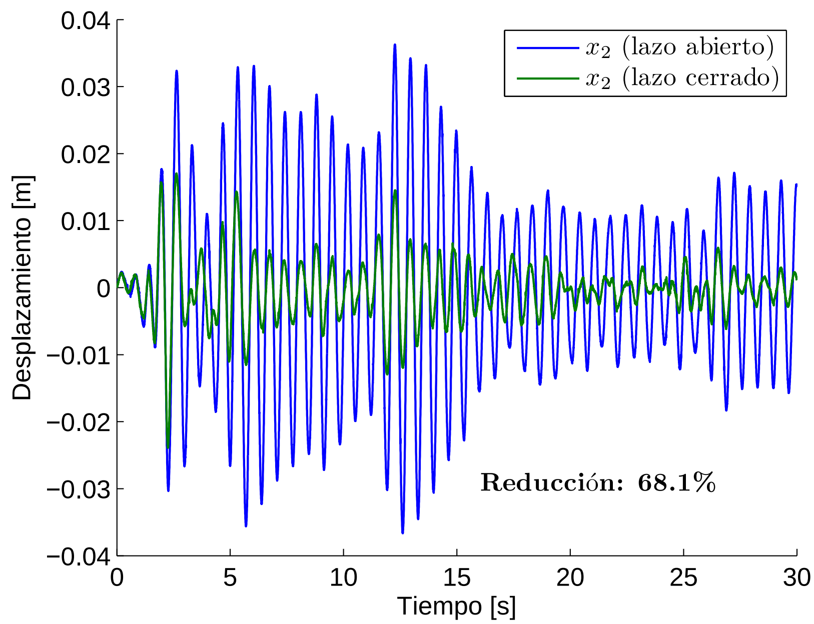


Figura 57: Desplazamiento del piso 2 con el sismo de El Centro aplicando control óptimo.

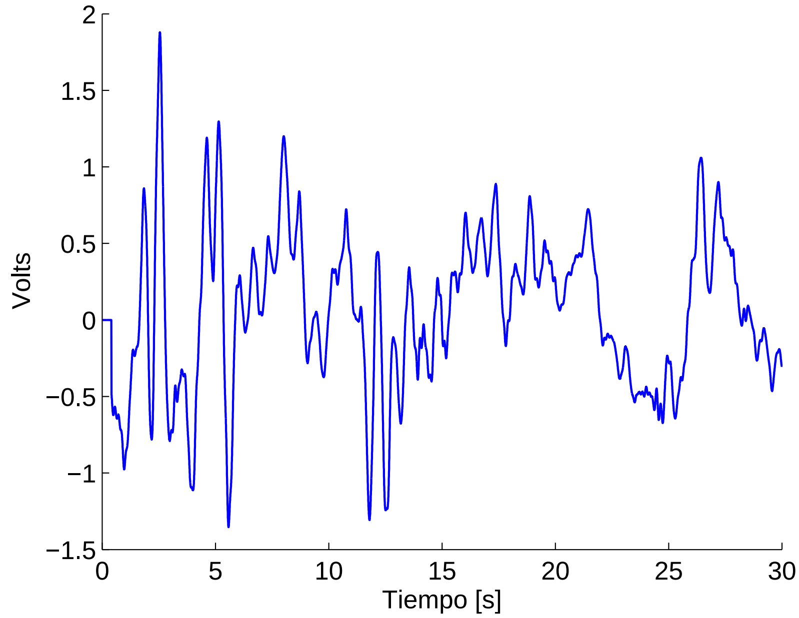


Figura 58: Señal de control aplicada a la estructura con el sismo de El Centro aplicando control óptimo.

La reducción lograda con este algoritmo fue la mejor para los parámetros seleccionados tanto del control, como del observador. La elección de estos parámetros no es sencilla debido que son varios factores los que se toman en cuenta al momento de llevar el experimento a la estructura física, además, las mediciones de las variables tienen cierta cantidad de ruido con el que hay que lidiar. Sin embargo, a pesar de eso, los desplazamientos máximos de la estructura en lazo cerrado, están por debajo de los valores de la estructura en lazo abierto con esas mismas condiciones. Cuantitativamente, se utiliza el error cuadrático medio para medir esta atenuación y poder comparar mejor estos resultados. Estos valores se indican en la tabla 8.

Por otro lado, aunque la señal tipo sísmica es adecuada para realizar pruebas con la estructura, también se realizaron pruebas con una señal chirp que va de 0.5Hz hasta 4Hz. Los experimentos realizados con esta señal se muestran en las figuras 59, 60 y 61.

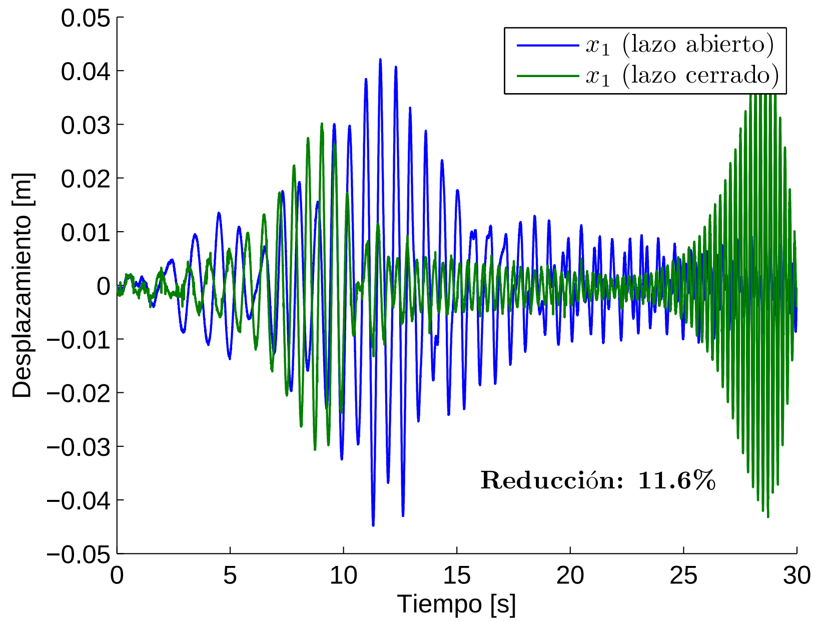


Figura 59: Desplazamiento del piso 1 con una perturbación tipo chirp (control óptimo).

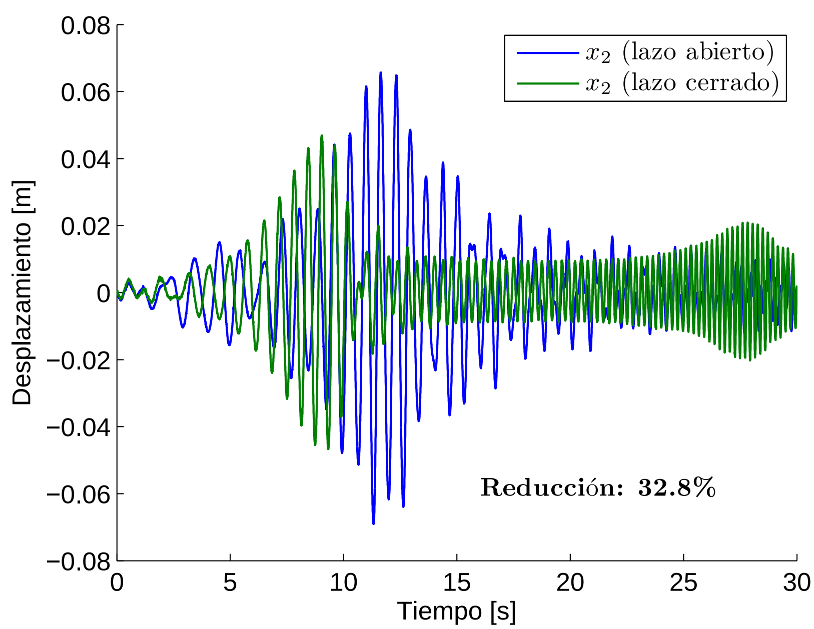


Figura 60: Desplazamiento del piso 2 con una perturbación tipo chirp (control óptimo).

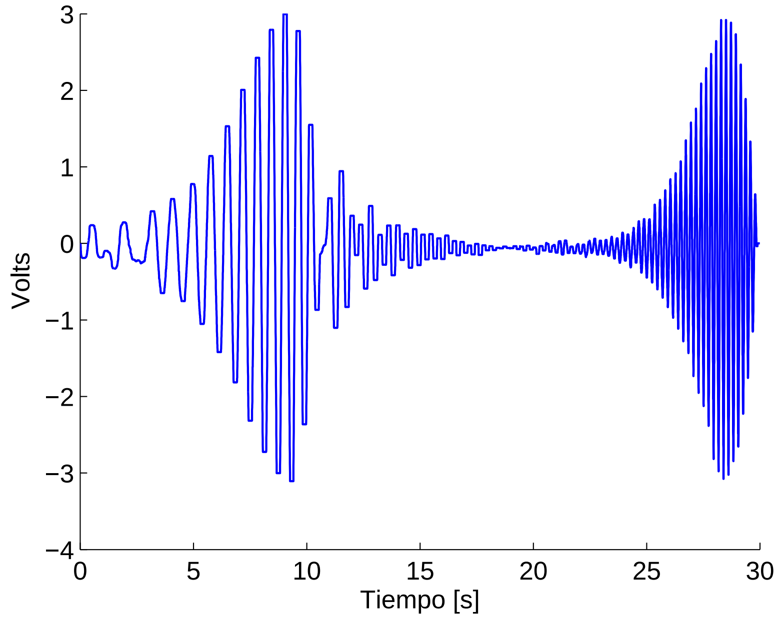


Figura 61: Señal de control aplicada a la estructura excitada con la señal chirp (control óptimo).

La señal chirp permite observar el comportamiento de la estructura en ese intervalo de frecuencias mencionado. De esta forma se pudo apreciar que el desempeño del controlador fue pobre al inicio y al final del experimento. Aunque el movimiento de la estructura sobrepasa la excursión máxima registrada en lazo abierto, se observa que en algunas zonas la estructura entra en resonancia y el comportamiento del control ya no es el adecuado. Un resumen de estos datos se muestra en la tabla 8.

Tabla 8: Comparación de resultados utilizando el error cuadrático medio y los desplazamientos máximos (control óptimo).

Tipo de señal	x_i	Lazo abierto (m)	Lazo cerrado (m)	Porcentaje de reducción	$\sup_{t\in\Re} \lvert x_i(t)\rvert$	
					L. abierto	*L. cerrado*
Sismo	x_1	8.8×10^{-3}	2.9×10^{-3}	$67.7\,\%$	2.3 cm	1.45 cm
	x_2	14.4×10^{-3}	4.6×10^{-3}	$68.1\,\%$	3.8 cm	2.4 cm
Chirp	x_1	11.5×10^{-3}	10.2×10^{-3}	$11.6\,\%$	4.5 cm	4.4 cm
	x_2	18.0×10^{-3}	12.1×10^{-3}	$32.8\,\%$	6.8 cm	4.8 cm

6.3. Diseño de un control $\mathscr{H}_\infty$ para el AMD-2

El algoritmo de control óptimo tiene ciertas limitaciones. Una de ellas es que no se considera, en el diseño, el efecto de perturbaciones. En esta sección se propone resolver el problema usando la metodología de control $\mathscr{H}_\infty$. Para esto, se utiliza el modelo obtenido en la sección 6.1.1 mediante la formulación de Lagrange. Como ya se describió, en el sistema de la figura 51(b), la estructura y la masa activa (situada sobre la estructura), son afectadas por la perturbación sísmica $w_1(t) \equiv \ddot{x}_g(t)$.

De igual forma, se busca que las posiciones de los pisos no rebasen cierto valor definido por la dinámica de la estructura en lazo abierto. Es por esto que las variables de interés en este algoritmo son la posición de la masa activa y las posiciones de los pisos. Estas variables son denotadas más adelante por la variable z. Para la formulación del problema de control $\mathscr{H}_\infty$, también se consideran perturbaciones en las salidas denotadas por $w_2(t)$ y $w_3(t)$. Estas perturbaciones se consideran en el planteamiento de control mediante $w(t) = [w_1\ w_2\ w_3]^T \in \mathcal{L}_2$. Considerando lo anterior y el sistema completo, la representación de estados queda como sigue

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bv(t) + B_1 w(t) \tag{149}$$

$$z(t) = C_1 X(t) + D_{12} v(t) \tag{150}$$

$$y(t) = CX(t) + Dv(t) + D_{21} w(t) \tag{151}$$

De igual manera, se utliza el estimador descrito en el capítulo 5, el cual también toma en cuenta las perturbaciones de acuerdo a una matriz de ganancias dada al resolver la siguiente ecuación

$$\dot{\xi} = A\xi + [\gamma^{-2} B_1 B_1^T - BB^T] P_\epsilon \xi + Z_\epsilon C^T [y - y_o] \tag{152}$$

donde P_ϵ y Z_ϵ se obtienen a partir de las ecuaciones perturbadas de Riccati:

$$P_\epsilon A + A^T P_\epsilon + C_1^T C_1 + P_\epsilon [\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T] P_\epsilon + \epsilon I = 0 \tag{153}$$

$$A_\epsilon Z_\epsilon + Z_\epsilon A_\epsilon^T + B_1 B_1^T + Z_\epsilon [\gamma^{-2} P B_2 B_2^T P_\epsilon - C^T C] Z_\epsilon = 0 \tag{154}$$

con $A_\epsilon = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T P$.

Simulaciones realizadas de manera similar que con el control óptimo, no incluidas aquí, mostraron un correcto desempeño del algoritmo. Y para ver también su desempeño de forma experimental, en la siguiente sección se muestran los resultados de la atenuación de perturbaciones principalmente sísmicas.

6.3.1. Resultados experimentales con control $\mathscr{H}_\infty$

A continuación se muestran los resultados de las pruebas hechas con el sistema descrito en la sección 6.1 bajo la ley de control $\mathscr{H}_\infty$. Se realizaron varias pruebas donde se compara el comportamiento en lazo abierto y lazo cerrado. En las figuras 62 y 63 se observa el desempeño de este algoritmo. Se aprecia claramente una mejora en la reducción de los desplazamientos de la estructura excitada por la misma señal sísmica y bajo las mismas condiciones que para el control óptimo. También se puede observar que los máximos desplazamientos no sobrepasan el límite máximo cuando la estructura está en lazo abierto, manteniéndose así durante todo el experimento. Lo anterior se resume en la tabla 9.

Tabla 9: Comparación de resultados utilizando el error cuadrático medio y los desplazamientos máximos (control $\mathscr{H}_\infty$).

Tipo de señal	x_i	Lazo abierto (m)	Lazo cerrado (m)	Porcentaje de reducción	$\sup_{t\in\Re} \lvert x_i(t)\rvert$	
					L. abierto	*L. cerrado*
Sismo	x_1	8.8×10^{-3}	2.5×10^{-3}	$71.9\,\%$	2.3 cm	1.4 cm
	x_2	14.4×10^{-3}	4.0×10^{-3}	$72.3\,\%$	3.8 cm	2.2 cm
Chirp	x_1	11.0×10^{-3}	5.9×10^{-3}	$46.4\,\%$	4.5 cm	2.2 cm
	x_2	18.2×10^{-3}	9.2×10^{-3}	$49.4\,\%$	7.1 cm	3.4 cm

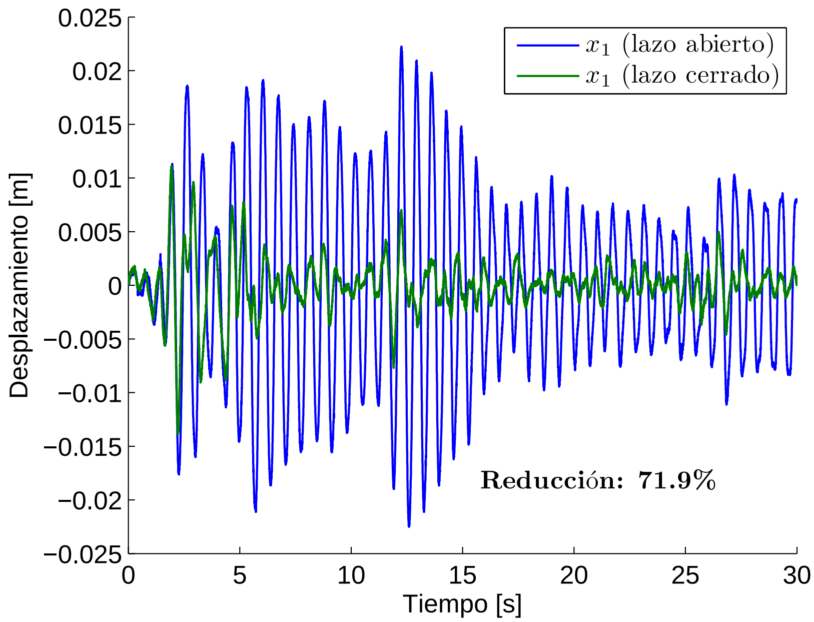


Figura 62: Desplazamiento del piso 1 con el sismo de El Centro aplicando control $\mathscr{H}_\infty$.

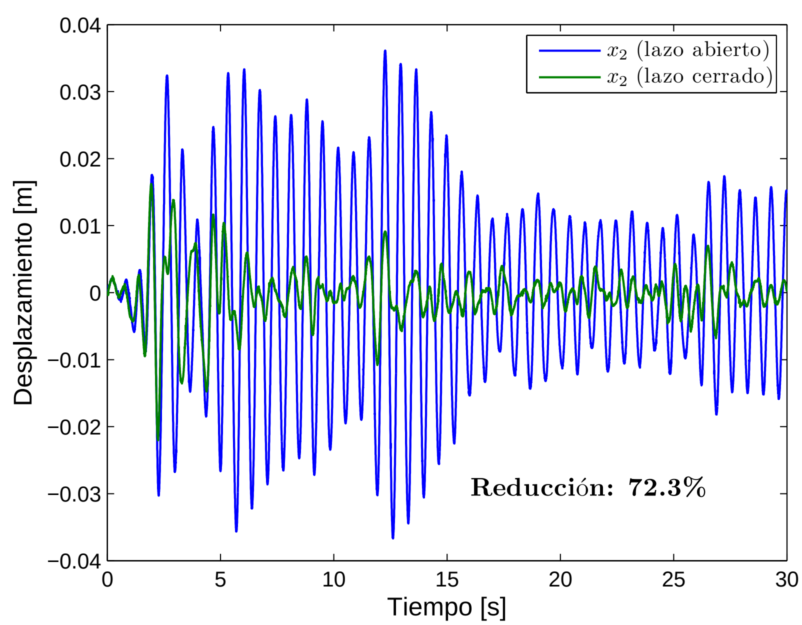


Figura 63: Desplazamiento del piso 2 con el sismo de El Centro aplicando control $\mathscr{H}_\infty$.

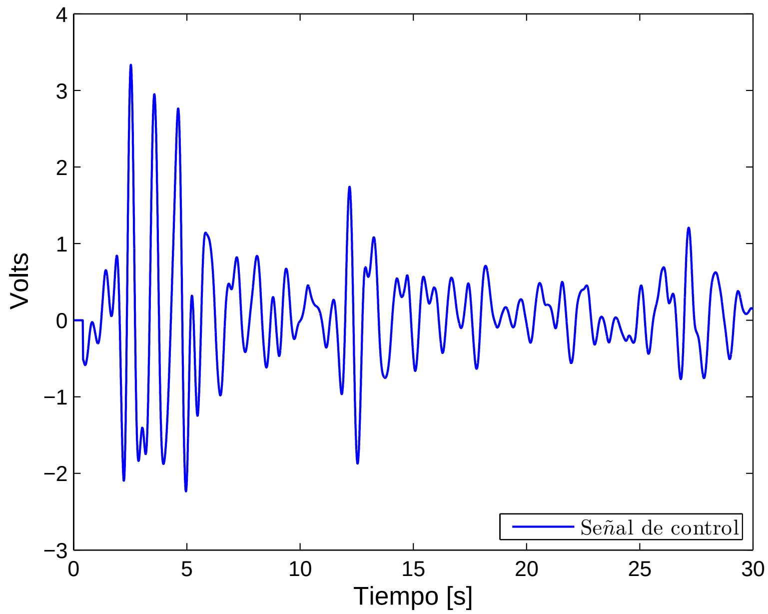


Figura 64: Señal de control aplicada a la estructura con el sismo de El Centro aplicando control $\mathscr{H}_\infty$.

De igual manera que para el control óptimo, se realizan pruebas con una señal tipo chirp que inicia en 0.5Hz y termina en 4Hz con la finalidad de probar la robustez del algoritmo dentro de ese intervalo de frecuencias. Los resultados se muestran en las figuras 65, 66 y 67. Para poder comparar mejor estos resultados, se hace un resumen de los datos de interés en la tabla 9, página 100.

6.4. Conclusiones del capítulo

Se mostraron los resultados de dos algoritmos de control aplicados a una estructura de dos niveles con un actuador en la parte superior de la misma y sometida a perturbaciones en una dirección inducidas en la base de la misma estructura. Los algoritmos se diseñaron y se probaron numéricamente. Luego se realizaron pruebas experimentales con diferentes señales, pero se muestran principalmente dos: sismo El Centro y una señal chirp.

En general, observando las gráficas se puede apreciar cualitativamente que el control $\mathscr{H}_\infty$ presenta un mejor desempeño ante los dos tipos de perturbaciones mostradas. El control óptimo, por su parte, muestra un desempeño similar al otro algoritmo cuando se

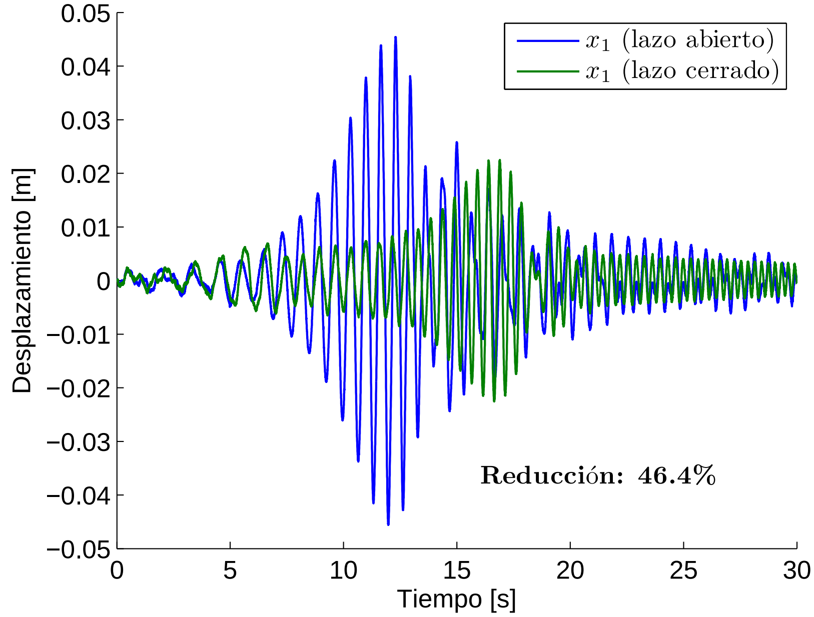


Figura 65: Desplazamiento del piso 1 con una perturbación tipo chirp (control $\mathscr{H}_\infty$).

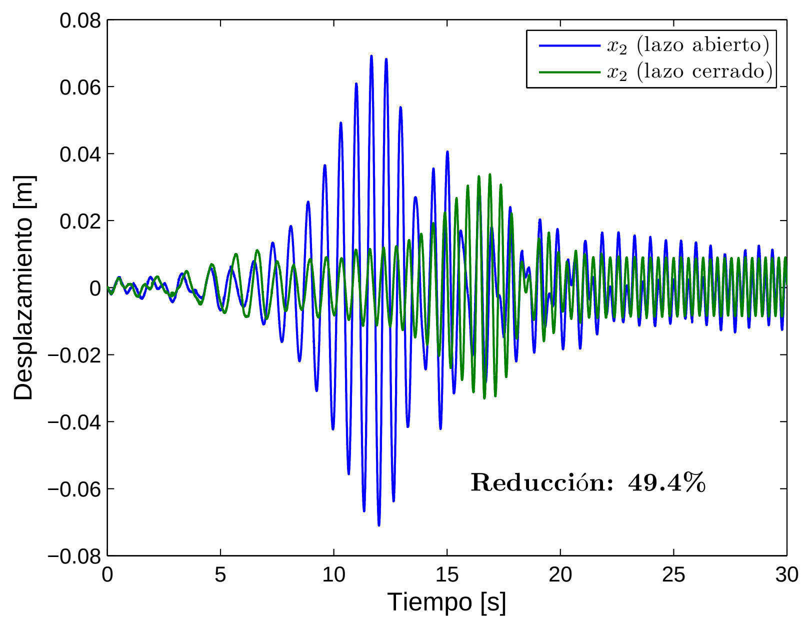


Figura 66: Desplazamiento del piso 2 con una perturbación tipo chirp (control $\mathscr{H}_\infty$).

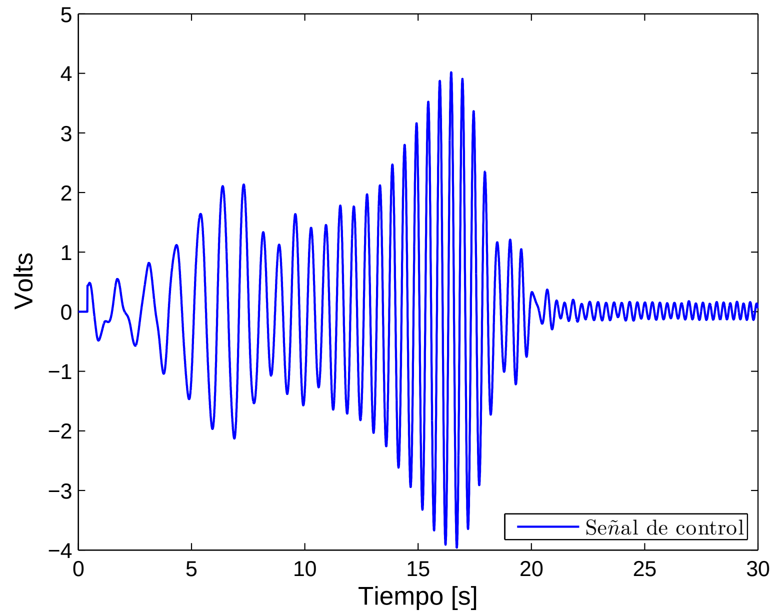


Figura 67: Señal de control aplicada a la estructura excitada con la señal chirp (control $\mathscr{H}_\infty$).

excita con la señal sísmica. Sin embargo, se observó un bajo desempeño con la señal chirp. El ajuste de los parámetros para el control óptimo no fue fácil y, en muchos de los casos, la masa activa llegaba a sus límites de movimiento provocando que el experimento se detuviera por razones de seguridad. Modificando los pesos en las variables de interés se mejoró esta parte, pero no así la atenuación de los desplazamientos de los pisos de la estructura.

Por otro lado, los parámetros del control $\mathscr{H}_\infty$ fueron sencillos de ajustar y se pudo limitar de una mejor manera la excursión máxima de la masa activa, logrando atenuaciones alrededor del 70 % en el caso de la señal sísmica y alrededor del 47 % para el caso de la señal chirp, mientras que para el control óptimo se observó casi la misma atenuación para la señal sísmica pero hubo una diferencia notable en el caso de la señal chirp, con una atenuación alrededor del 22 % (en promedio).

Capítulo 7. Control de una estructura de dos niveles con dos actuadores

La estructura de dos niveles estudiada en el capítulo anterior cuenta con un actuador en la parte superior de la misma. El diseño de los controladores para esta estructura se realizó considerando el primer nivel sin actuador. Ahora, en este capítulo se estudiará el efecto de agregar un segundo actuador en el primer nivel, de tal forma que la estructura esté completamente actuada. Esto, a su vez, agrega una dinámica más que debe considerarse en el modelo matemático. Por otro lado, el estudio de los algoritmos de control óptimo y control $\mathscr{H}_\infty$ realizado en los capítulos anteriores indica que el mejor desempeño, considerando perturbaciones en la base de la estructura, es el del control $\mathscr{H}_\infty$. Por esta razón, para el estudio de la estructura con dos actuadores se utilizará solamente este algoritmo.

El desarrollo del capítulo inicia con el análisis dinámico del sistema, seguido por el diseño del algoritmo de control. Luego se muestran resultados numéricos para evaluar este diseño. Por último se muestran las pruebas experimentales realizadas con la estructura.

7.1. Descripción de la dinámica del AMD-2 con dos actuadores

La configuración por defecto del sistema amortiguador con masa activa de dos niveles o AMD-2 (por sus siglas en inglés: *Active Mass Damper*) cuenta con un actuador en la parte superior de la estructura. Como ya se mencionó, para este capítulo se analizará el efecto de los actuadores sobre el AMD-2, colocándose uno en cada piso. La configuración cambia y, en consecuencia, la dinámica también. Para visualizar mejor esta configuración obsérvese el diagrama de la figura 68(b). A partir de esta figura se hacen las siguientes definiciones de variables:

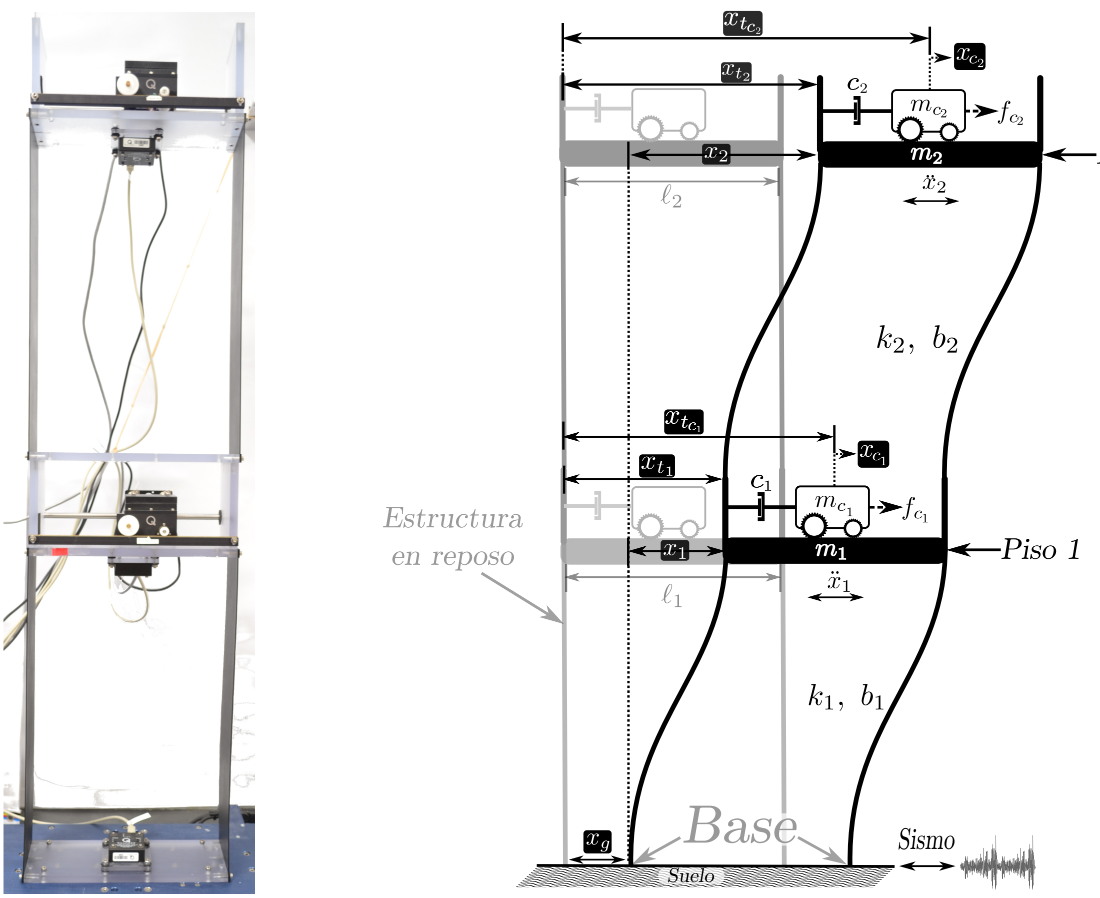
$$x_1 = x_{t_1} - x_g \tag{155}$$

$$x_{c_1} = x_{tc_1} - x_1 - x_g - \frac{\ell_1}{2} \tag{156}$$

$$x_2 = x_{t_2} - x_g \tag{157}$$

$$x_{c_2} = x_{tc_2} - x_2 - x_g - \frac{\ell_2}{2} \tag{158}$$

y la descripción de cada una de ellas se hace en la tabla 10.



(a) Estructura real con dos actuadores.

(b) Diagrama de fuerzas.

Figura 68: Diagrama de fuerzas del AMD-2 con dos actuadores.

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de este sistema, incluyendo la acción de ambos actuadores, nuevamente se obtienen por medio de la metodología de Lagrange.

Tabla 10: Descripción de términos del sistema

Variable	Descripción
x_1	Posición del primer piso con respecto a la base
x_{c_1}	Posición de la masa activa 1 con respecto al centro de su excursión
x_2	Posición del segundo piso con respecto a la base
x_{c_2}	Posición de la masa activa 2 con respecto al centro de su excursión
x_{t_1}	Posición del primer piso con respecto a la estructura en reposo
x_{tc_1}	Posición de la masa activa 1 con respecto a la estructura en reposo
x_{t_2}	Posición del segundo piso con respecto a la estructura en reposo
x_{tc_2}	Posición de la masa activa 2 con respecto a la estructura en reposo
x_g	Desplazamiento del suelo
$\ell_{1,2}$	Excursión total de las masas activas (constante = 0.18m).

La energía potencial total del sistema está en función de la elasticidad de las paredes de la estructura denotada por el coeficiente k_i

$$V_T = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 \tag{159}$$

La energía potencial total del sistema se denota por

$$T_T = T_{t_{f_1}} + T_{t_{f_2}} + T_{tc_1} + T_{rc_1} + T_{tc_2} + T_{rc_2} \tag{160}$$

donde $T_{t_{f_1}}$ y $T_{t_{f_2}}$ corresponde a la energía de los pisos y el resto de los términos corresponden a las masas activas. Cada término se define a continuación:

$$T_{t_{f_1}} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_{t_1}^2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_g + \dot{x}_1)^2 \tag{161}$$

$$T_{t_{f_2}} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_{t_2}^2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_g + \dot{x}_2)^2 \tag{162}$$

$$T_{tc_1} = \frac{1}{2}m_{c_1}\dot{x}_{tc_1}^2 = \frac{1}{2}m_{c_1}(\dot{x}_g + \dot{x}_1 + \dot{x}_{c_1})^2 \tag{163}$$

$$T_{rc_1} = \frac{1}{2}J_{m_1}\omega_{m_1}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{J_{m_1}k_{g_1}^2}{r_{mp_1}^2}\right)\dot{x}_{c_1}^2 \tag{164}$$

$$T_{tc_2} = \frac{1}{2} m_{c_2} \dot{x}_{tc_2}^2 = \frac{1}{2} m_{c_2} (\dot{x}_g + \dot{x}_2 + \dot{x}_{c_2})^2 \tag{165}$$

$$T_{rc_2} = \frac{1}{2} J_{m_2} \omega_{m_2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{J_{m_2} k_{g_2}^2}{r_{mp_2}^2} \right) \dot{x}_{c_2}^2 \tag{166}$$

con las ecuaciones 160 y 159 se obtiene el Lagrangiano $\mathcal{L} = T_T - V_T$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_g^2 + m_1 \dot{x}_g \dot{x}_1 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_g^2 + m_2 \dot{x}_g \dot{x}_2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_{c_1} \dot{x}_g^2 + \frac{1}{2} m_{c_1} \dot{x}_1^2 + \\ & \frac{1}{2} m_{c_1} \dot{x}_{c_1}^2 + m_{c_1} \dot{x}_g \dot{x}_1 + m_{c_1} \dot{x}_g \dot{x}_{c_1} + m_{c_1} \dot{x}_1 \dot{x}_{c_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{J_{m_1} k_{g_1}^2}{r_{mp_1}^2} \right) \dot{x}_{c_1}^2 + \frac{1}{2} m_{c_2} \dot{x}_g^2 + \\ & \frac{1}{2} m_{c_2} \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_{c_2} \dot{x}_{c_2}^2 + m_{c_2} \dot{x}_g \dot{x}_2 + m_{c_2} \dot{x}_g \dot{x}_{c_2} + m_{c_2} \dot{x}_2 \dot{x}_{c_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{J_{m_2} k_{g_2}^2}{r_{mp_2}^2} \right) \dot{x}_{c_2}^2 - \\ & \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + k_2 x_1 x_2 - \frac{1}{2} k_2 x_1^2 \end{aligned} \tag{167}$$

con el cual se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} + f_i(\dot{x}_i) = \tau_i \tag{168}$$

donde f_i son términos relacionados con la fricción y τ_i son fuerzas que actúan en el sistema, directamente relacionadas con las masas activas. Resolviendo (168) se obtienen las siguientes ecuaciones del sistema

$$\bar{m}_1 \ddot{x}_1 + m_{c_1} \ddot{x}_{c_1} + \tilde{b}_1 \dot{x}_1 - c_1 \dot{x}_{c_1} - b_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = -\bar{m}_1 \ddot{x}_g \tag{169}$$

$$\bar{m}_{c_1} \ddot{x}_{c_1} + m_{c_1} \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_{c_1} - c_1 \dot{x}_1 + d_1 \operatorname{sign}(\dot{x}_{c_1}) = f_{c_1} - m_{c_1} \ddot{x}_g \tag{170}$$

$$\bar{m}_2 \ddot{x}_2 + m_{c_2} \ddot{x}_{c_2} - b_2 \dot{x}_1 + (b_2 + c_2) \dot{x}_2 - c_2 \dot{x}_{c_2} - k_2 x_1 + k_2 x_2 = -\bar{m}_2 \ddot{x}_g \tag{171}$$

$$m_{c_2} \ddot{x}_2 + \bar{m}_{c_2} \ddot{x}_{c_2} - c_2 \dot{x}_2 + c_2 \dot{x}_{c_2} + d_2 \operatorname{sign}(\dot{x}_{c_2}) = f_{c_2} - m_{c_2} \ddot{x}_g \tag{172}$$

donde $\sigma_1 = J_{m_1} k_{g_1}^2 / r_{mp_1}^2$, $\sigma_2 = J_{m_2} k_{g_2}^2 / r_{mp_2}^2$, $\bar{m}_1 = m_1 + m_{c_1}$, $\bar{m}_2 = m_2 + m_{c_2}$, $\bar{m}_{c_1} = m_{c_1} + \sigma_1$, $\bar{m}_{c_2} = m_{c_2} + \sigma_2$ y $\tilde{b}_1 = b_1 + b_2 + c_1$.

Los términos $d_i \operatorname{sign}(\dot{x}_{c_i})$, con i =1,2, corresponden a la fricción seca de las masas activas. Estos términos se incluyeron porque se observó una ligera fricción seca, sin embargo, se consideran arbitrariamente pequeños y para el diseño del algoritmo de control se consideran como parte de la perturbación. La fuerza generada por cada masa activa está dada por la siguiente relación

$$f_{c_i} = \rho_1(v_i - \rho_2\dot{x}_{c_i}), \tag{173}$$

considerando que las características de ambos actuadores son similares, los coeficientes de (173) son

$$\rho_1 = \frac{\eta_g k_g \eta_m k_t}{r_{mp} R_m}; \qquad \rho_2 = \frac{k_m k_g}{r_{mp}}. \tag{174}$$

Lo anterior se utiliza para definir el modelo en ecuaciones de estado que son el punto de partida para el diseño del algoritmo de control.

7.1.1. Representación de estado

Para poder diseñar un controlador, las ecuaciones (169)-(172) se reescriben en forma matricial de la siguiente manera

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = \gamma V_v + W\ddot{x}_g \tag{175}$$

con $x = [x_1 \quad x_{c_1} \quad x_2 \quad x_{c_2}]^T$, $V_v = [v_1 \quad v_2]^T$ y

$$M = \begin{bmatrix} \bar{m}_1 & m_{c_1} & 0 & 0 \\ m_{c_1} & \bar{m}_{c_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{m}_2 & m_{c_2} \\ 0 & 0 & m_{c_2} & \bar{m}_{c_2} \end{bmatrix}, \tag{176}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{177}$$

$$C = \begin{bmatrix} (b_1 + b_2 + c_1) & -c_1 & -b_2 & 0 \\ -c_1 & (c_1 + \rho_1\rho_2) & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & (b_2 + c_2) & -c_2 \\ 0 & 0 & -c_2 & (c_2 + \rho_1\rho_2) \end{bmatrix}, \tag{178}$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 & 0 \end{bmatrix}^T, \tag{179}$$

$$W = \begin{bmatrix} -\bar{m}_1 \\ -m_{c_1} - d_1 \operatorname{sign}(\dot{x}_{c_1}) \\ -\bar{m}_2 \\ -m_{c_2} - d_2 \operatorname{sign}(\dot{x}_{c_2}) \end{bmatrix}. \tag{180}$$

Para la representación de estados se redefinen las posiciones como $X_1 = x = [x_1 \quad x_{c_1} \quad x_2 \quad x_{c_2}]^T$ y velocidades como $X_2 = \dot{x} = [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_{c_1} \quad \dot{x}_2 \quad \dot{x}_{c_2}]^T$.

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= M^{-1}\left(-CX_2 - KX_1 + \gamma V_v + W\ddot{x}_g\right) \end{aligned} \tag{181}$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & -M^{-1}K & & & & -M^{-1}C & & \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0_{4\times1} & 0_{4\times1} \\ M^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \rho_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & M^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M^{-1}W \end{bmatrix} \ddot{x}_g \tag{182}$$

Por otra parte, se consideran dos tipos de salidas:

- cuando se usan acelerómetros la salida es $Y^T = \ddot{X}_1$
- para el uso de sensores de distancia, la salida es $Y^T = X_1$.

7.2. Planteamiento del problema de control $\mathscr{H}_\infty$

Para realizar pruebas con este modelo, se busca atenuar vibraciones mediante la metodogía de control $\mathscr{H}_\infty$, el cual sugiere un planteamiento como el que sigue (véase sección 3.3.2)

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + BV_v(t) + B_1 w(t) \tag{183}$$

$$z(t) = C_1\xi(t) + D_{12}V_v(t) \tag{184}$$

$$y(t) = C\xi(t) + Du(t) + D_{21}w(t) \tag{185}$$

Las matrices correspondientes se definen a continuación. También se verifican condiciones para que este planteamiento pueda resolverse.

$$B = \begin{bmatrix} 0_{4\times1} & 0_{4\times1} \\ \frac{-m_{c_1}\rho_1}{\bar{m}_1\bar{m}_{c_1}^2 - m_{c_1}^2} & 0 \\ \frac{m_{c_1}\rho_1}{\bar{m}_1\bar{m}_{c_1}^2 - m_{c_1}^2} & 0 \\ 0 & \frac{-m_{c_2}\rho_1}{\bar{m}_2\bar{m}_{c_2}^2 - m_{c_2}^2} \\ 0 & \frac{m_{c_2}\rho_1}{\bar{m}_2\bar{m}_{c_2}^2 - m_{c_2}^2} \end{bmatrix} \tag{186}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} \multicolumn{4}{c}{0_{2\times4}} & \multicolumn{4}{c}{0_{2\times4}} \\ r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{187}$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{188}$$

$$C = \begin{bmatrix} I_4 & 0_{4\times4} \end{bmatrix} \tag{189}$$

La perturbación en los estados está en función de W el cual incluye a la aceleración sísmica como perturbación $\omega_1(t) \equiv \ddot{x}_g(t)$. Para cumplir con las condiciones del problema de control $\mathscr{H}_\infty$ se consideran perturbaciones en las salidas denotas por ω_2, ω_3, ω_4 y ω_5.

Con esto se forma un vector de perturbaciones denotado por

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 \end{bmatrix} \tag{190}$$

y los siguientes vectores se forman de acuerdo a lo anterior.

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad b_{11} \quad b_{12} \quad b_{13} \quad b_{14} \\ 0_{4\times 8} \end{bmatrix}^T \tag{191}$$

con $b_{11} = \frac{m_{c_1}^2 - \bar{m}_1 \bar{m}_{c_1}}{\bar{m}_1 \bar{m}_{c_1} - m_{c_1}^2}$, $b_{12} = 0$, $b_{13} = \frac{m_{c_2}^2 - \bar{m}_2 \bar{m}_{c_2}}{\bar{m}_2 \bar{m}_{c_2} - m_{c_2}^2}$, $b_{14} = 0$ y por último se considera

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 0_{4\times 1} & I_4 \end{bmatrix}. \tag{192}$$

7.3. Resultados de simulación con la AMD-2 con dos actuadores

Para comprobar la efectividad de esta metodología se realizaron simulaciones en Matlab®. Se inicia la simulación con posiciones iniciales diferentes de cero y se deja oscilar libremente. Se observa el comportamiento en lazo abierto y cerrado. Los resultados obtenidos en lazo abierto y lazo cerrado durante un tiempo de 30s, se muestran en las siguientes figuras 69, 70 y 71.

Con esta simulación se comprueba el correcto desempeño del algoritmo para poder aplicarlo a la parte experimental de la siguiente sección.

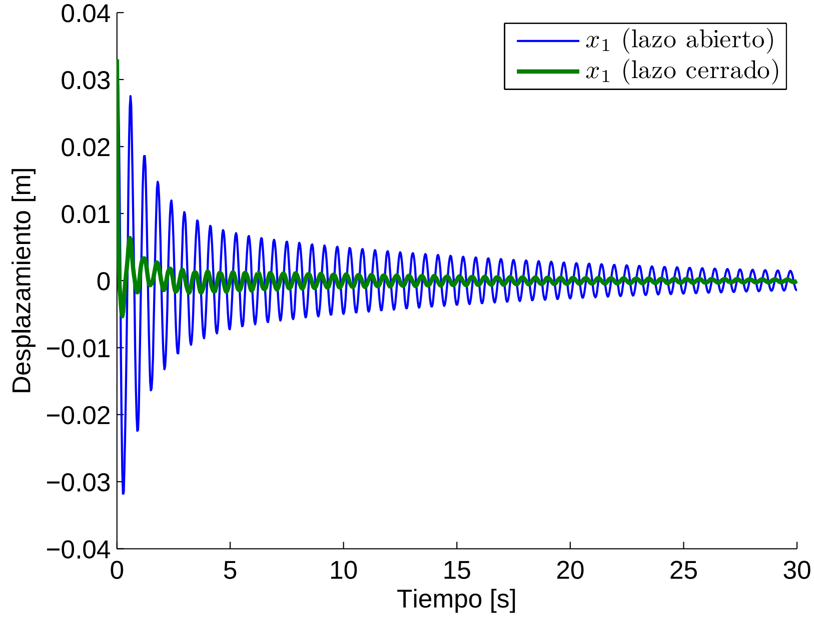


Figura 69: Desplazamiento del piso 1 con una condición inicial diferente de cero. Se muestran resultados en oscilación libre (lazo abierto) y aplicando control.

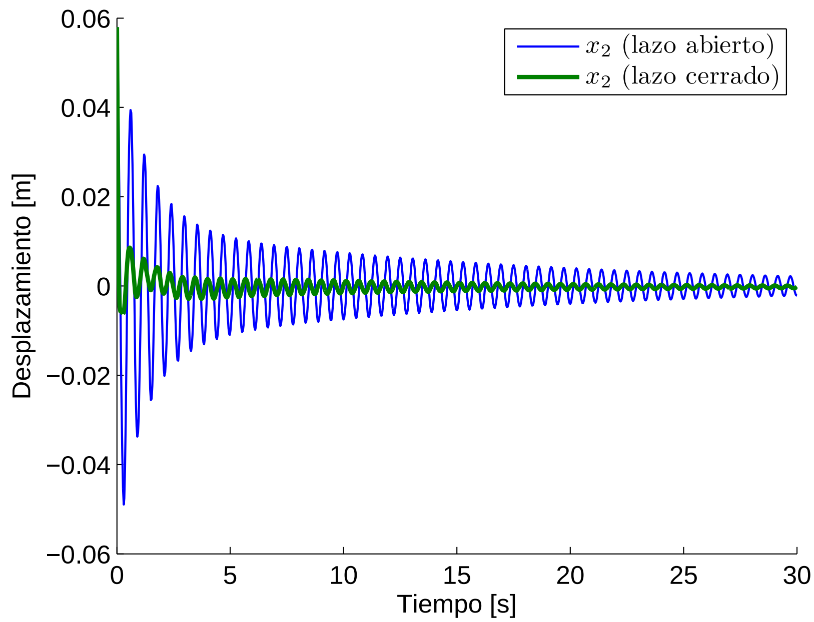


Figura 70: Desplazamiento del piso 2 con una condición inicial diferente de cero. Se muestran resultados en oscilación libre (lazo abierto) y aplicando control.

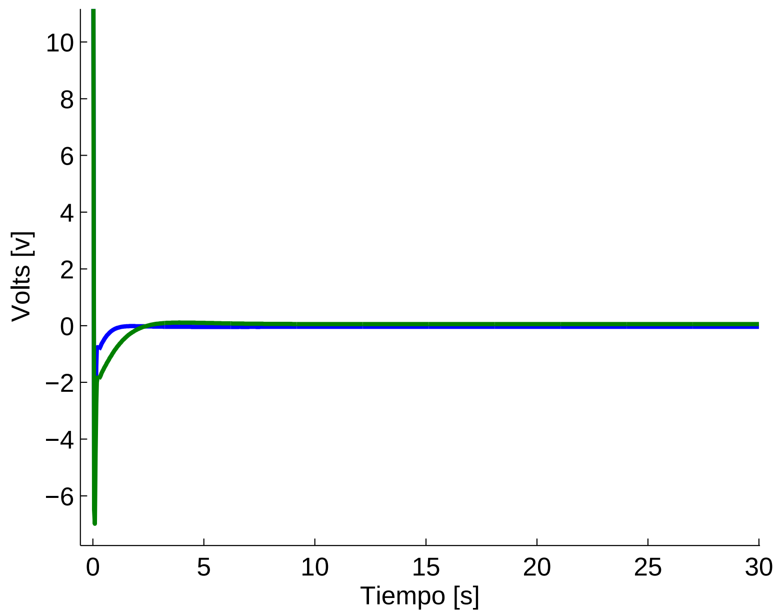


Figura 71: Señales de control aplicadas al AMD-2 con dos actuadores.

7.4. Resultados experimentales con la AMD-2 con dos actuadores

La configuración de la AMD-2 con dos actuadores no solo aumenta en el número de grados de libertad, sino también en hardware. Ahora se requieren sensores extras y salidas de control para este elemento adicional. De igual manera, en el software se agregan bloques adicionales a los que se tenían en la configuración de la AMD-2 con un actuador. Con respecto a la base de la estructura, las perturbaciones siguen siendo en una dirección.

Una prueba inicial para probar el hardware permite un ajuste inicial en los parámetros del control $\mathscr{H}_\infty$. Esta prueba consiste en usar una condición inicial diferente de cero observar su comportamiento en lazo abierto y cerrado. Las gráficas de estas pruebas no se incluyen, pero permitieron comprobar el correcto funcionamiento del sistema en general en la configuración de dos niveles y dos actuadores.

Se realizan pruebas con distintas señales utilizando el control $\mathscr{H}_\infty$. Su desempeño se muestra en las figuras 72, 73 y 74.

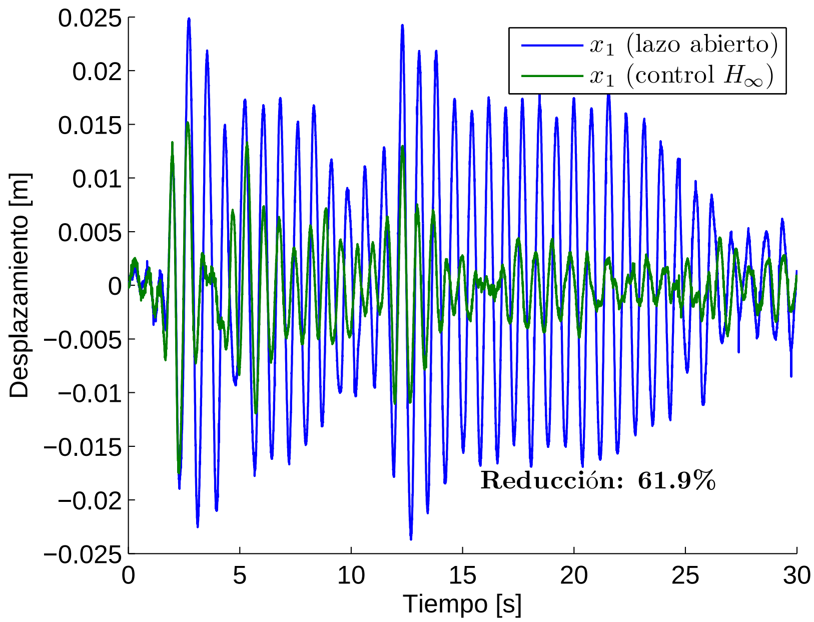


Figura 72: Desplazamiento del piso 1 con el sismo de El Centro (control $\mathscr{H}_\infty$).

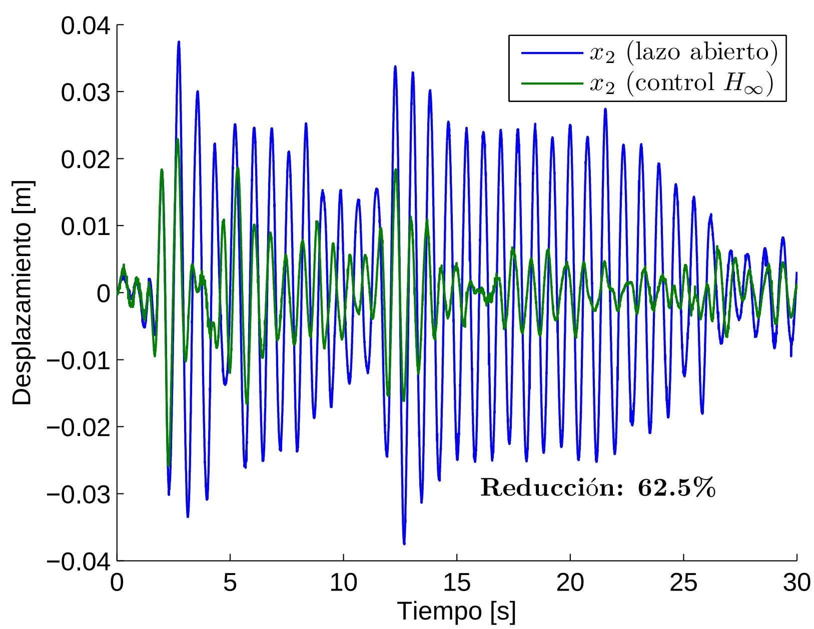


Figura 73: Desplazamiento del piso 2 con el sismo de El Centro (control $\mathscr{H}_\infty$).

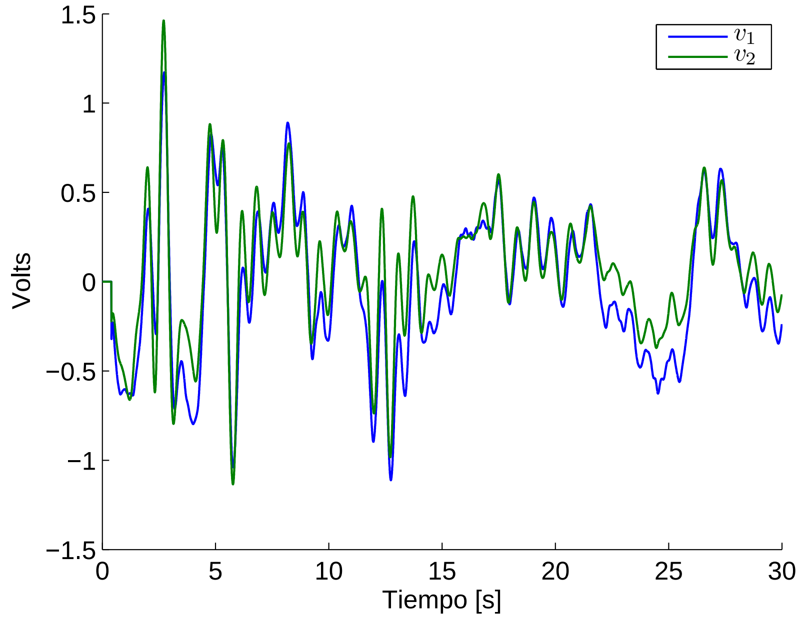


Figura 74: Señales de control aplicadas a la estructura con el sismo de El Centro (control $\mathscr{H}_\infty$).

Para comparar las gráficas anteriores obsérvese la tabla 11. Para evaluar el desempeño del algoritmo de control es importante destacar los siguientes aspectos: el error cuadrático medio o la energía en lazo abierto para esta estructura define la máxima cota de movimiento. En lazo cerrado puede apreciarse tanto en las gráficas como en la tabla que este aspecto es mucho menor en lazo cerrado; por otro lado, en lazo abierto se observan los máximos desplazamientos de los pisos que definen, para esta estructura, la cota máxima de movimiento. Se puede observar que estos máximos son menores en lazo cerrado.

Tabla 11: Comparación de resultados utilizando el error cuadrático medio y los desplazamientos máximos (control $\mathscr{H}_\infty$).

Tipo de señal	x_i	Lazo abierto (m)	Lazo cerrado (m)	Porcentaje de reducción	$\sup_{t\in\Re} \lvert x_i(t)\rvert$	
					L. abierto	*L. cerrado*
Sismo	x_1	10.4×10^{-3}	4.0×10^{-3}	$61.9\,\%$	0.025 m	0.017 m
	x_2	15.3×10^{-3}	5.7×10^{-3}	$62.5\,\%$	0.037 m	0.025 m

7.5. Conclusiones del capítulo

Haciendo un resumen de lo mostrado en este capítulo, se puede mencionar que se cambia la configuración de la AMD-2 para agregar un segundo actuador, resultando una estructura con dos actuadores y dos niveles. Se analiza su dinámica y se diseña un control $\mathscr{H}_\infty$ para atenuar o reducir los desplazamientos máximos definidos por la misma estructura en lazo abierto. Las pruebas son en una dirección con una señal sísmica conocida y estudiada en capítulos anteriores.

Al aumentar el número de actuadores o «masas activas», también se aumenta la dinámica de la estructura y por lo tanto el número de parámetros de sintonización para el algoritmo de control. Por otro lado, se observó que las señales de control disminuyeron alrededor de un 50 % con respecto a la señal de control de la estructura con un solo actuador. Por lo tanto se puede decir que para la estructura con dos actuadores, el esfuerzo de control se repartió entre las dos masas activas.

Capítulo 8. Conclusiones

En esta tesis se presenta el estudio de una plataforma experimental para realizar pruebas con una estructura mecánica y analizar los efectos inducidos por distintos tipos de señales. Así mismo, se diseñan algoritmos de control para atenuar vibraciones en la estructura con distintos tipos de configuraciones.

El estudio de la parte experimental comienza con el análisis de un sistema mecánico utilizado para inducir vibraciones en la base de la estructura. Dicho sistema cuenta con una fricción seca considerable. Se diseñaron algoritmos para lidiar con esta fricción y realizar seguimiento de señales de interés. Sobre este mecanismo o mesa vibratoria se coloca una estructura en diferentes configuraciones. Primero se realizan pruebas con la estructura de un nivel o piso, luego con la estructura con dos niveles; ambas considerando un actuador en la parte superior de la misma. Este actuador, también conocido como masa activa, tiene su propia dinámica y se aprovecha para controlar de forma indirecta el comportamiento de la estructura completa. Para realizar esto se hace uso de control óptimo y control $\mathscr{H}_\infty$. Finalmente, como una prueba extra, se considera interesante analizar el efecto de agregar una segunda masa activa en el primer nivel, resultando una estructura con dos niveles y dos actuadores.

El estudio de la mesa vibratoria permitió una mejor comprensión de los fenómenos de fricción que ésta presenta. Se utilizaron algoritmos de control discontinuo que, aunque mostraron un buen desempeño, inducen vibraciones de alta frecuencia pero poca amplitud. Para el tipo de pruebas realizadas, este fenómeno no representa un problema mayor debido a que los experimentos con la estructura se realizan en bajas frecuencias. El producto de esta parte del trabajo de tesis fue la adaptación e implementación de algoritmos de control que sirven como base para realizar pruebas de seguimiento con distintas señales. Aunque se tienen ciertas limitantes, estudios posteriores pueden basarse en estos resultados para mejorar el desempeño si es necesario.

Por otro lado, la estructura está inspirada en construcciones civiles con la finalidad de estudiar fenómenos de absorción de sismos. Si bien es cierto que este mecanismo es mucho más pequeño comparado con estructuras civiles, el análisis y diseño de controladores para la estructura experimental puede ser adaptado con cierta facilidad para estructuras de mayor dimensión gracias a que los modelos dinámicos son muy similares.

El desempeño de los algoritmos de control, utilizados para las masas activas, depende principalmente de los pesos asignados a cada una de las variables de interés. Sin embargo, se pudo observar un mejor desempeño al utilizar el control $\mathscr{H}_\infty$, debido a que desde el planteamiento de este algoritmo se consideran las perturbaciones que afectan al sistema.

En general, los sistemas mecánicos descritos, tanto la mesa vibratoria como la estructura con masas activas, fueron sistemas que se adquirieron y se pusieron en marcha durante este trabajo de tesis. La configuración inicial del hardware, la instrumentación e identificación parcial de parámetros físicos, también forman parte de esto. El uso de estos mecanismos no se limita a la atenuación de vibraciones, es posible realizar otro tipo de experimentos para estudiar otros fenómenos como la sincronización, por mencionar alguno. Además, la mesa vibratoria es físicamente robusta a tal grado que se pueden adicionar otros mecanismos sobre ella, por ejemplo, un elemento que permita el movimiento en dos direcciones.

Por todo lo anterior, se puede considerar a la plataforma experimental implementada en este trabajo de tesis, así como los diseños y resultados de los algoritmos de control implementados, como punto de partida para una serie de experimentos adicionales que se pueden realizar en el laboratorio de control.

Literatura citada

Ali, S. F. y Ramaswamy, A. (2009). Testing and Modeling of MR Damper and Its Application to SDOF Systems Using Integral Backstepping Technique. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **131**(021009): 1–11.

Alvarez, E., Alvarez, J., y Rosas, D. (2010). Soportes activos orientados a la absorción de sismos. En: *Artículo presentado en el congreso nacional 2010 de la Asociación de México de Control Automático*, Puerto Vallarta, México. pp. 201–205.

Alvarez, J., Rosas, D., y Peña, J. (2009). Analog implementation of a robust control strategy for mechanical systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **56**(9): 3377–3385.

Alvarez-Icaza, L. y Jiménez, R. (2002). Control semiactivo de estructuras con amortiguadores magneto-reológicos. *Artículo presentado en el congreso nacional 2002 de la Asociación de México de Control Automático*.

Alvarez-Icaza, L. y Romero, C. C. (2005). Control basado en pasividad de un edificio con amortiguadores magneto-reológicos. *Artículo presentado en el congreso nacional 2005 de la Asociación de México de Control Automático, Cuernavaca, México*, **SN**.

Ashasi-Sorkhabi, A., Malekghasemi, H., y Mercan, O. (2013). Implementation and verification of real-time hybrid simulation (RTHS) using a shake table for research and education. *Journal of Vibration and Control*.

Baratta, A., Corbi, I., Corbi, O., Carneiro, R., y Bairrão, R. (2012). Open Access Shaking Table Experimental Researches Aimed at the Protection of Structures Subject to Dynamic Loading. *The Open Construction and Building Technology Journal*, **6**: 355–360.

B.F. Spencer, J., Carlson, J. D., Sain, M. K., y Yang, G. (1997a). On the current status of magnetorheological dampers: seismic protection of full-scale structures. *Proceedings of the American Control Conference*.

B.F. Spencer, J., Dyke, S. J., Sain, M. K., y Carlson, J. D. (1997b). Phenomenological model of a magnetorheological damper. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, **123**: 230–238.

Bozer, A. y Altay, G. (2013). Hybrid tracking controller with attached tuned mass damper. *Structural Control and Health Monitoring*, **20**: 337–353.

Case, D., Taheri, B., y Richer, E. (2013). Design and characterization of a small-scale magnetorheological damper for tremor suppression. *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, **18**(1): 96–103.

Çetin, S., Zergeroglu, E., Sivrioglu, S., y Yüksek, I. (2009). *Adaptive control of structures with* MR *damper*. En: *Control Applications, (CCA) & Intelligent Control, (ISIC), 2009 IEEE, St. Petersburg*, Saint Petersburg, Russia. pp. 60–65.

Cetin, S., Zergeroglu, E., Sivrioglu, S., y Yuksek, I. (2011). A new semiactive nonlinear adaptive controller for structures using MR damper: Design and experimental validation. *Nonlinear Dynamics*, **66**(4): 731–743.

Chopra, A. K. (1980). Dynamics of Structures. University of California. Berkeley, 126 p.

Conte, J. y Trombetti, T. (2000). Linear dynamic modeling of a uni-axial servo-hydraulic shaking table system. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **29**: 1375–1404.

Cuesta, R., Alvarez, J., y Miranda, M. (2015). Robust Tracking and Cruise Control of a Class of Robotic Systems. *Mathematical Problems in Engineering, Article ID 728412*, **SN**.

Cuprich Rodríguez, M. y Elizondo Garza, F. J. (1998). Amortiguadores magnetoreológicos. *Ingenierías*, **1**(2).

Daniel Ambrosini Guadalupe Cuitiño, y. J. R. (2004). Eficiencia de amortiguadores de masa sintonizados en estructuras sismorresistentes. *Mec ánica Computacional*, **XXIII**.

Datta, T. K. (2003). A state of the art review on active control of structures. *ISET Journal of Earthquake Technology*, **40**: 1–17.

Doyle, J., Glover, K., Khargonekar, P., y Francis, B. (1989). State-Space Solutions to Standard $\mathscr{H}_2$ and $\mathscr{H}_\infty$ Control Problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **34**(8): 831–847.

Filippov, A. F. (1988). *Differential equations with discontinuous right-hand sides*. Kluwer Academic Publishers, 461 p.

Guan, G.-F., Wang, H.-T., y Xiong, W. (2014). Random vibration control of a hydraulic shaking table. *Journal of Vibration and Control*, **20**(2): 204–217.

Higashino, M. y Okamoto, S. (2006). *Response control and seismic isolation of buildings*. Taylor and Francis.

Hirata, G. (2011). Absorción de vibraciones en estructuras. Tesis de doctorado, CICESE, Ensenada, B.C., 114 p.

Hirata, G., Alvarez, J., y Cuesta, R. (2016). Robust tracking control of a shaking table with dry friction. *Nonlinear Dynamics*, **86**: 1535–1547.

Horacio Andrés, C. E. (2010). *Control robusto activo para la minimización de vibraciones en una estructura flexible de tres pisos bajo excitaciones sísmicas*. Tesis de doctorado, Universidad del Valle,, Colombia.

Ing. Alfredo Elías, A. (2008). Manual de diseño de obras civiles. Diseño por sismos.

Ji, X., Kajiwara, K., Nagae, T., Enokida, R., y Nakashima, M. (2009). A substructure shaking table test for reproduction of earthquake responses of high-rise buildings. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **38**: 1381–1399.

Jiménez, R. y Alvarez-Icaza, L. (2005). LuGre friction model for a magnetorheological damper. *Structural Control and Health Monitoring*, **12**: 91–116.

Jiménez, R. y Alvarez-Icaza, L. (2006). A state observer for a building with a magneto-rheological damper and parameter uncertainty. En: *Proceeding of the 2006 American Control Conference*, Proceeding of the 2006 American Control Conference, Minneapolis Minnesota, 14-16 de Junio de 2006.

Kelly, R., Llamas, J., y Campa, R. (2000). A measurement procedure for viscous and Coulomb friction. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, **49**: 857—-861.

Kelly, R., Santibáñez, V., y Loría, A. (2005). *Control of Robots Manipulators in Joint Space*. Springer-Verlag. p. 426.

Khalil, H. K. (2003). *Non Linear Systems*. Prentice-Hall. 4th Ed., p. 750.

Kirk, D. E. (2004). *Optimal Control Theory*. Dover. p. 452.

Lamarche, C., Tremblay, R., Léger, P., Leclerc, M., y Bursi, O. (2010). Comparison between real-time dynamic substructuring and shake table testing techniques for nonlinear seismic applications. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **39**: 1299–1320.

Nagarajaiah, S., Sahasrabudhe, S., y Iyer, R. (2000). Seismic Response of Sliding Isolated Bridges with MR Dampers. En: *Proceedings of the American Control Conference*.

Nishitani, A. y Inoue, Y. (2001). Overview of the application of active-semiactive control to building structures in Japan. *Earthquake engineering and structural dynamics*, **30**(11): 1565–1574.

Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna*. Prentice-Hall, 4^{a} Ed.

Orlov, Y. (2005). Finite Time Stability and Robust Control Synthesis of Uncertain Switched systems. *SIAM J. Control Optim.*, **43**(4): 1253–1271.

Orlov, Y. y Aguilar, L. (2004). Non-smooth $\mathscr{H}_\infty$-position control of mechanical manipulators with frictional joints. *International Journal of Control*, **77**(11): 1062–1069.

Oviedo, J. A. y del Pilar Duque, M. (2006). Sistemas de control de respuesta sísmica en edificaciones. *Revista EIA, ISSN 1794-1237. Escuela de Ingeniería de Antioquia, Medellín (Colombia)*, **6**: p. 105–120.

Phillips, B. M., Wierschem, N. E., y Spencer Jr., B. (2014). Model-based multi-metric control of uniaxial shake tables. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **43**: 681–699.

Preumont, A. y Seto, K. (2008). *Active Control of Structures*. John Wiley.

Quanser® (2016). Linear Motor Servo Plant: AMD-1 User Manual. Reporte técnico.

Rosas, D., Alvarez, J., y Fridman, L. (2006). Robust observation and identification of n DOF lagrangian systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, **Vol. (17)**: 842–861.

Rosas, D., Alvarez, J., y Fridman, L. (2007). Robust observation and identification of n DOF lagrangian systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, **17**: 842–861.

Rosenblueth, E., (ed.) (1980). *Design of earthquake resistant structures*. Wiley, 295 p.

Seki, K., Iwasaki, M., Kawafuku, M., Hirai, H., y Yasuda, K. (2009). Adaptive Compensation for Reaction Force With Frequency Variation in Shaking Table Systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **56**(10): 3864–3871.

Slotine, J. J. y Li, W. (1991). *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, 461 p.

Spencer Jr., B. F. y Nagarajaiah, S. (2003). State of art of structural control. En: *Journal of structural engineering*.

Suhardjo, J., Spencer, B. F., y Sain, M. K. (1990). Feedback-feedforward control of structures under seismic excitation. *Structural Safety*, **8**: 69–89.

Takegaki, M. y Arimoto, S. (1981). A new feedback method for dynamic control of manipulators. *Transactions ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, **103**(2): 119–125.

Tang, Y., Zhu, Z., Shen, G., y Li, X. (2015). Experimental investigation of feedforward inverse control with disturbance observer for acceleration tracking of electro-hydraulic shake table. *Journal of Vibroengineering*, **17**(1): 330–345.

Utkin, V., Guldner, J., y Shi, J. (1999). *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. Taylor and Francis. p. 325.

Wakabayashi, M. y Romero, E. M. (1988). *Diseño de estructuras sismorresistentes*. McGraw-Hill, primera edición. p. 418 p.

Yang, G., Jr., B. F. S., Carlson, J. D., y Sain, M. K. (2002). *Large-scale MR fluid dampers: modeling and dynamic performance considerations*. Engineering Structures, **24**(3): 309–323.

Yang, X. y Junwei, H. (2007). Three State Controller Design of Shaking Table in Active Structural Control System. En: *IEEE International Conference on Control and Automation Guangzhou, China*. pp. 88–93.

Yao, J. T. (1972). Concept of structural control. *Journal of the Structural Division*, **98**(7): 1567–1574.

Yoshida, O., Dyke, S. J., Giacosa, L. M., y Truman, K. Z. (2003). Experimental verification of torsional response control of asymmetric buildings using MR dampers. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*.

Zhong Lin, Y. y Christenson, R. E. (2009). Comparison of Real-Time Hybrid Testing with Shake Table Tests for an MR Damper Controlled Structure. En: *American Control Conference, Hyatt Regency Riverfront, St Louis, MO, USA*. pp. 5228–5233.

Zong, L.-H., Gong, X.-L., Guo, C.-Y., y Xuan, S.-H. (2012). Inverse neuro-fuzzy MR damper model and its application in vibration control of vehicle suspension system. *Vehicle System Dynamics*, **50**(7): 1025–1041.

Apéndice A. Conceptos matemáticos

A continuación se describen algunos conceptos matemáticos que son de utilidad para la comprensión de este trabajo de tesis.

Normas

Sea X un espacio vectorial en los reales o complejos. Entonces la función

$$\| \cdot \| : \quad X \to \mathbb{R} \tag{193}$$

que mapea X a los números reales $\Re$ es una *norma* si satisface las siguientes propiedades:

- $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$,
- $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo escalar λ,
- $\|x_1 + y_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ para todo $y_i \in x$ (desigualdad del triángulo).

Supóngase que x es un vector elemento de los complejos, entonces la norma p de x se define como

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + ... + |x_n|^p\right)^{1/p} \tag{194}$$

con $x \in \mathbb{C}^n$; $1 \leq p < \infty$. Las más utilizadas son la 1,2 e ∞:

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \tag{195}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \tag{196}$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \tag{197}$$

Norma de matrices

Las normas de matrices se definen a continuación

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \tag{198}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\text{máx}}\{A^T A\}} \tag{199}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{200}$$

donde λ se refiere al valor propio.

Una norma en el dominio de la frecuencia es:

$$\|G(j\omega)\|_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega|^2 d\omega\right)^{1/2} \tag{201}$$

$$\|G(j\omega)\|_\infty \triangleq \max_\omega |G(j\omega)| \tag{202}$$

Apéndice B. Configuración experimental de la mesa vibratoria

A continuación se describen más a detalle los elementos básicos para la configuración de la mesa vibratoria. Profundizando más respecto al motor, se tiene un conjunto de bobinas de núcleo de hierro el cuál es atraído magnéticamente por el conjunto de imanes estacionarios que proporciona una precarga para el sistema de cojinetes. Los carriles de rodadura lineal paralelos con 4 guías lineales de baleros proporcionan una capacidad de carga mucho mayor (cerca de los 200 kg). La forma alargada y ancha de la plataforma, así como su baja altura, permiten que sea un sistema estable que funcione el un solo eje. También cuenta con piezas adecuadas para anclarlo al suelo o mesa donde se desee poner. Gracias a esas dos características, a esta plataforma se le pueden adicionar elementos que proporcionen el movimiento en la otra dirección así como también estructuras de prueba, como se menciona anteriormente (ver figura B.1). También cuenta con protec-

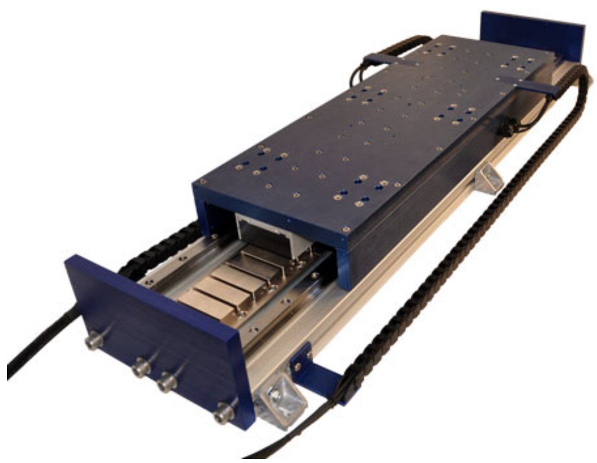


Figura B.1: Mesa vibratoria H2W Techologies.

tores tipo fuelle con una relación de compresión de 12:1 cuyo objetivo es evitar que piezas metálicas caigan sobre los imanes del motor y evitar accidentes, en general. Cuenta con un portador de cables flexible bastante útil. Además se pueden agregar o quitar cables fácilmente. Los encoders son del tipo A/B de cuadratura. Aunque también está disponible la opción sinusoidal.

Cuenta también con unas placas de metal grueso para bloquear la plataforma en el

caso en que ésta se salga de control. De igual forma cuenta con unos interruptores de fin de carrera, incluidos en ambos extremos de la plataforma. Se pueden utilizar para apagar el amplificador o para indicar al controlador que ha ocurrido un error. Para más información consultar el manual de usuario del amplificador en la siguiente liga:
http://www.copleycontrols.com/motion/Downloads/xenusData.html.

B.1. Conexión y configuración de arranque

Es muy importante conectar adecuadamente los cables ya que cualquier mal configuración podría dañar al equipo. La parte central de la plataforma de movimiento lineal es un amplificador Xenus XTL. Éste cuenta de dos partes:

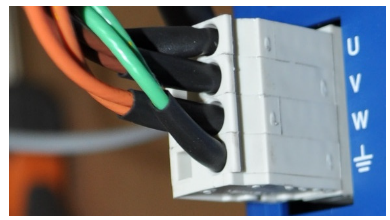
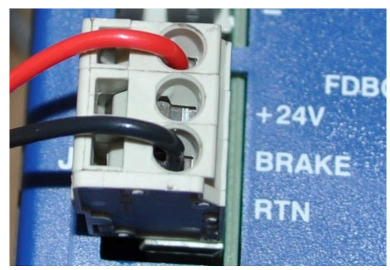
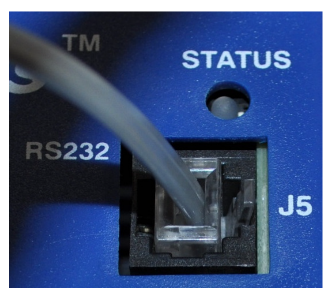
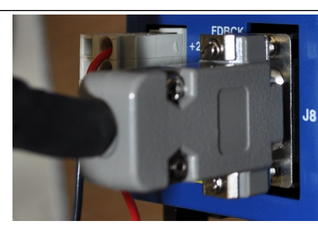
Circuito de potencia: este circuito proporciona energía al motor lineal y se alimenta desde 110VAC hasta 220VAC.

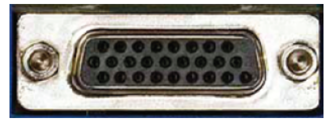
Circuitería lógica: esta parte se encarga de la comunicación con la PC (RS-232) y con otros amplificadores del mismo tipo, que en nuestro caso no son necesarios, así como también de los sensores de posición (encoders). Es de baja potencia y se alimenta con una fuente externa de 24VDC.

La finalidad de esto es aislar ambos circuitos de tal forma que permita mantener viva la circuitería lógica mientras se desconecta por completo la parte de potencia. Así, evitar la pérdida de información o comunicación con el sistema de control.

Las conexiones de la plataforma de movimiento lineal con el amplificador y de éste a la fuente de 24V y la PC, entre otras, se irán detallando a continuación.

NOTA: Es muy importante que todo esté correctamente conectado antes de usar cualquier fuente de energía. Si una conexión es inapropiada podría causar daños irreversibles en los circuitos o en el motor lineal.

J1: éste se conecta a la toma de AC L1 = línea L2 = neutral ⏚ = tierra NOTA: Es para la conexión de una sola fase, es decir, 110VAC.	
J2: Conexión del cable de alimentación del motor U = rojo V = Café W = anaranjado ⏚ = verde (tierra)	
J4: Conexión de la fuente externa de 24VDC +24V = rojo RTN = negro BRAKE = Conexión para botón de emergencia, detalles más adelante.	
J5: Comunicación serial RS232 Cuenta con un conector tipo teléfono que tiene un adaptador DB-9 ”hembra”, para el puerto serial de la computadora.	
J8: Conexión de los encoders. Cable proveniente del motor, su conector es un HD-15 ”macho”.	

J7: Señal de control y retroalimentación de la posición. Este conector es un HD-26 tipo "hembra"donde se le aplica una señal de control de $\pm$10V que viene de la computadora.	 Los detalles se explican más adelante.

B.2. Pruebas con el motor lineal y el software CM2.

El amplificador Xenus XLT es quien proporciona la eneregía necesaria para que el motor lineal funcione correctamente. Este amplificador se configura mediante el puerto serial de la computadora. Parámetros como picos de corrientes, voltajes, puertos, velocidad de comunicación, etc., se configuran mediante un software proporcionado por la empresa del fabricante. Este software se llama CM2. En nuestro caso, no será necesario hacer todas esas configuraciones mencionadas pues ya están hechas en un archivo *.ccx que nos envía el proveedor. Lo único que pudiéramos necesitar mover sería la conversión Volts$\rightarrow$Amperes, que es una ganancia para nuestra señal de control. A continuación se explica paso a paso cómo configurar dicho software.

1. La comunicación RS232 ya no es tan común en la actualidad y la computadora que se utiliza para realizar las pruebas, no cuenta con ese puerto. Se tuvo que instalar un adaptador USB-RS323 para poder configurar el amplificador. Dicho adaptador, después de instalar correctamente su controlador, quedó con el nombre de COM3 (ver figura B.2).
2. El software CM2 puede ser obtenido de: http://www.copleycontrols.com/Motion/Products/Software/driveSoft.html.
3. IMPORTANTE: la tecla F12 deshabilita la energía hacia el motor lineal, para tenerla a la mano por si cualquier evento o imprevisto llegara a ocurrir.
4. Una vez instalado se ejecuta por primera vez el CM2 para configurar el puerto. NOTA: es necesario ejecutarlo como administrador porque genera unos archivos

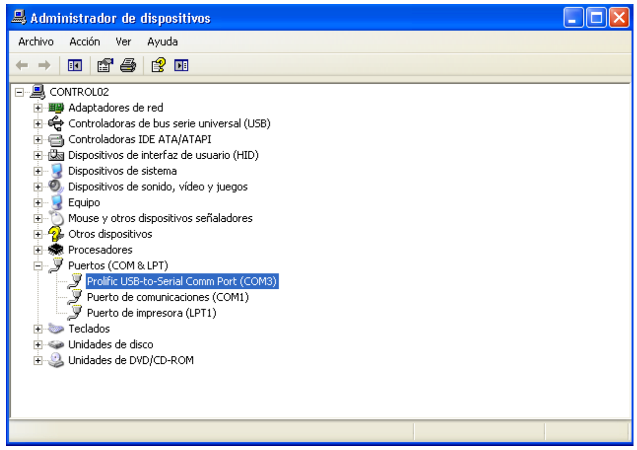


Figura B.2: Configuración del puerto serial utilizado.

temporales que si el usuario no tiene permiso, el software jamás inicia. Para nuestro caso, se selecciona el puerto serial y posteriormente el COM3, como se muestran en las figuras B.3 y B.4.

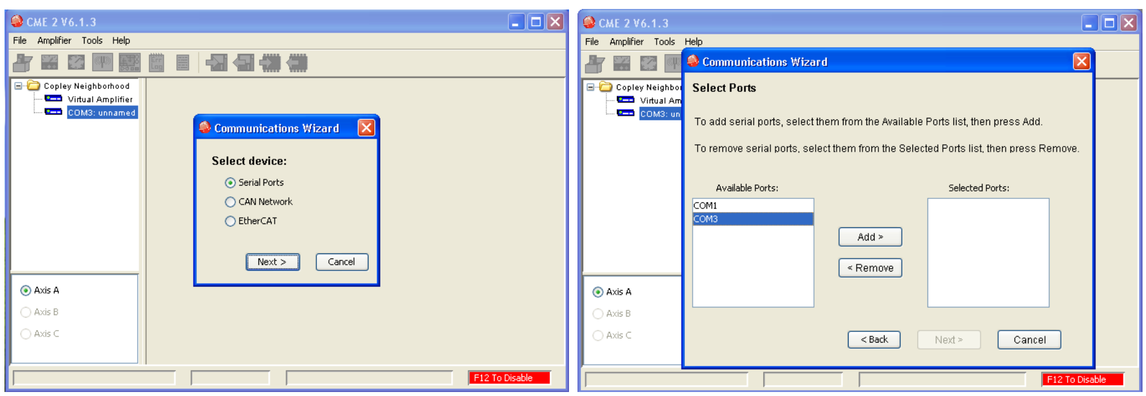


Figura B.3: Selección del puerto serial COM3.

5. Una vez configurado el puerto, automáticamente el software CM2 se conecta con el amplificador. NOTA: es importante que la fuente de +24VDC se encuentre conectada, de lo contrario la comuniación con el amplificador fallará. Si todo está bien, el CM2 genera un nuevo archivo de comunicación y habilita el amplificador (figura B.5).

6. Lo que sigue es cargar el archivo de configuración proporcionado por el fabricante en el programa. Para esto seleccionamos la opción *Restore amplifier Data from Disk*, buscamos el archivo `DRS-0102-11-250-01-EX(cicese).ccx` y al presionar Aceptar apa-

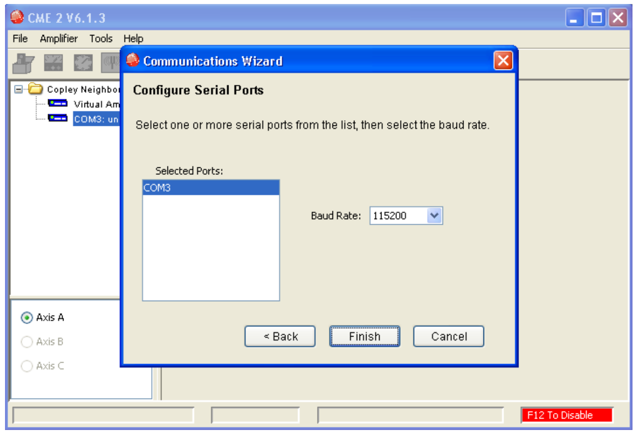


Figura B.4: El Baud Rate se deja como está.

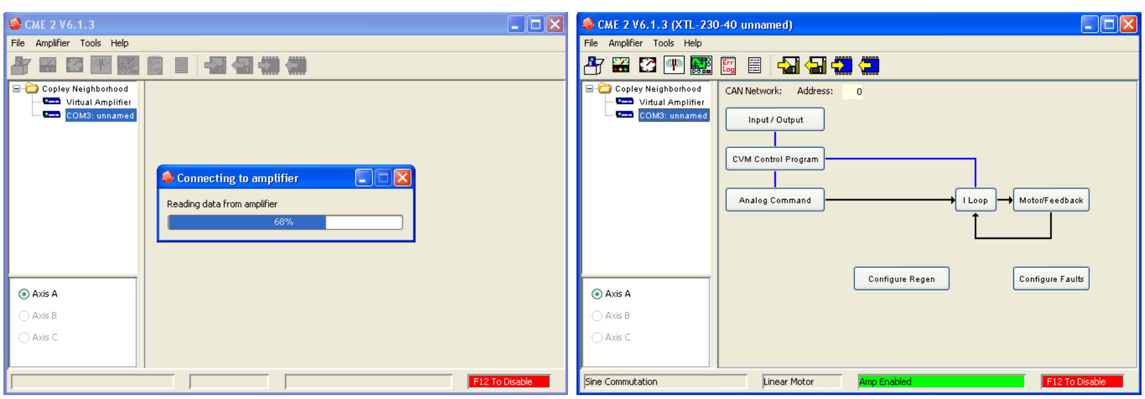


Figura B.5: Derecha: CM2 comunicándose con el amplificador. Izquierda: Comunicación establecida correctamente.

recerá un mensaje indicando que el amplificador se desactivará para cargar la configuración del archivo mencionado, ver figura B.6.

En este archivo el fabricante guardó todas las configuraciones necesarias para que el amplificador funcione correctamente con el motor lineal. Este amplificador puede dar picos de corriente de hasta 40 A y de forma continua hasta unos 20 A. En corriente directa puede llegar a alcanzar tensiones de voltaje que andan alrededor de los 373V. Por lo tanto debe tomarse todo eso en cuenta al momento de hacer las configuraciones pertinentes. Es por eso que el fabricante nos proporcionó dicho archivo, de otra forma se tendría que hacer referencia al manual de la Xenus XLT para su correcta configuración.

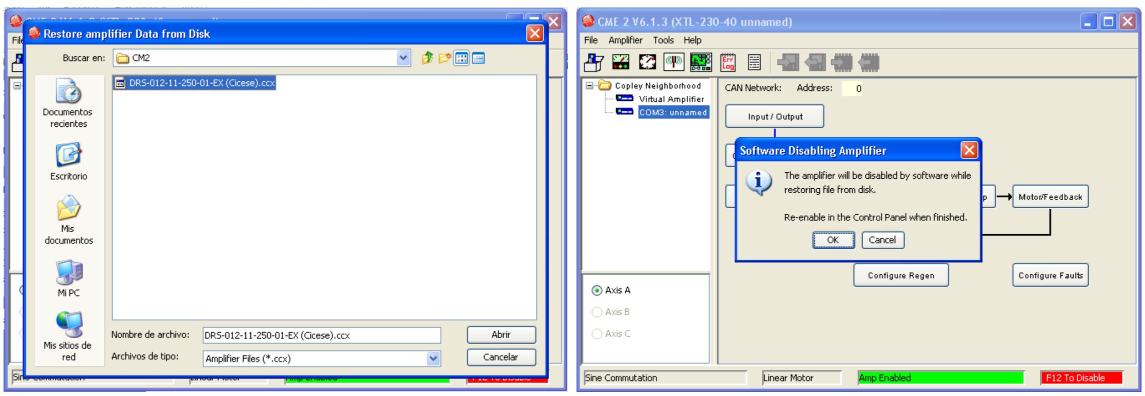


Figura B.6: Abriendo archivo de configuración.

7. Eventualmente podrá aparecer el mensaje de la figura B.7 (derecha), pero solo es una advertencia, el mismo software lo corrige y simplemente se cierra el mensaje. Un configuración importante es la señal analógica que se utilizará como señal de control. Como ya se mencionó anteriormente, esta señal se permite dentro del intervalo de ± 10 V, sin embargo, el motor lineal funciona con corriente. Se tiene que hacer una equivalencia de tensión a corriente. Esto se configura presionando en botón Analog Command que se encuentra en la parte del diagrama del programa. Aparecerá un recuadro donde se podrá configurar, entre otras cosas, esta conversión de Volt$\rightarrow$Amperes. El fabricante la puso en 3A cada 10V, pero podrá cambiarse posteriormente con el CM2.

8. Por último, solo queda hacer unas pruebas de funcionamiento de la plataforma. Esto

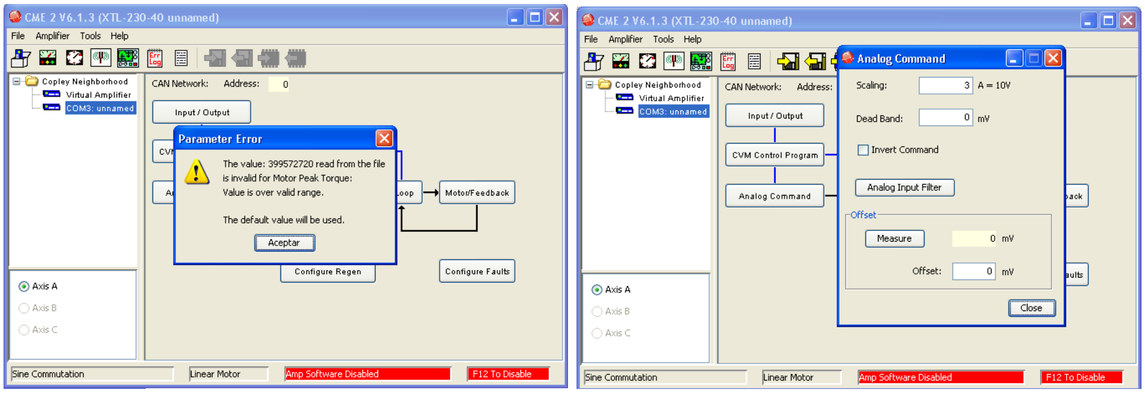


Figura B.7: Derecha: Mensaje de advertencia. Izquierda: Configuración V→A.

se hace mediante el CM2, seleccionando del menú lo siguiente: Amplifier►Control Panel. Se abrirá un recuadro donde se muestra el estado del motor, algunas variables de monitoreo como posición, velocidad del motor, corriente, etc. (ver figura B.8). También se muestran los botones de control del motor. Aquí se habilita o se deshabilita el motor, se configura la posición actual de la plataforma como la posición cero. Finalmente, la sección de **Jog** sirve para dar ligeros empujones a la plataforma teniendo como único parámentro la corriente hacia el motor.

NOTA: NO sobrepasar los 3A amperes, hasta no conocer bien el equipo.

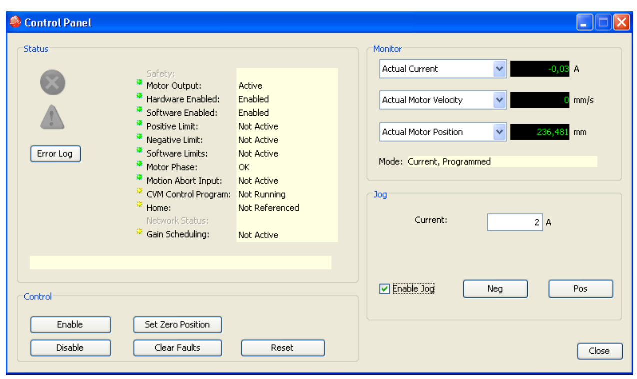


Figura B.8: Configuración del Panel de Control.

B.3. Observaciones

Se presentaron numerosos detalles que no estaban previstos, por ejemplo el uso de una fuente externa y la adaptación y construcción de unos cables que van de los equipos a la tarjeta de adquisición de datos de la PC. Todos estos detalles son indispensables para hacer que el equipo funcione correctamente.

B.4. Diagrama de conexión de cables

Alguno de los conectores del equipo adquirido son diferentes a los que se necesitan en las tarjetas de adquisición de datos en el laboratorio de control. Se tuvieron que hacer unos cables para adaptar dichos conectores. Los diagramas detallados se explican a continuación:

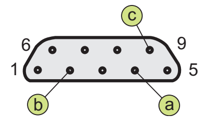
Conexión para lazo de control Las lecturas de posición de la plataforma de H2W Techonologies, así como el suministro de corriente al motor lineal se hace a través del amplificador Xenus XLT. Para esto se tiene que realizar un cable que de un lado tendrá el conector HD26 y del otro lado dos conectores: el DB-9 para los encoders y el RCA para la señal de control, como se muestra en la figura B.9.

Figura B.9: Así es como quedaría físicamente el cable de lazo de control.

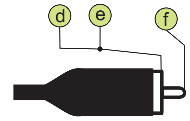
Internamente esos cables deberán conectarse como se muestra en la figura B.10.

Nomenclatura	Descripción	Nomenclatura	Descripción
a	Channel A	**e**	GND
b	Channel B	**f**	Señal de control
c	0v (referencia)	**g**	blindaje
d	GND		

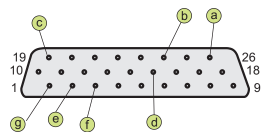
Conexión de los encoders de las estructuras AMD de Quanser Las estructuras de Quanser están hechas para que trabajen con la tarjeta de adquisición de datos del mismo fabricante, sin embargo, en el laboratorio se cuenta con unas tarjetas diferentes. El



(a) Conector DB-9 para la tarjeta de adquisición de datos.



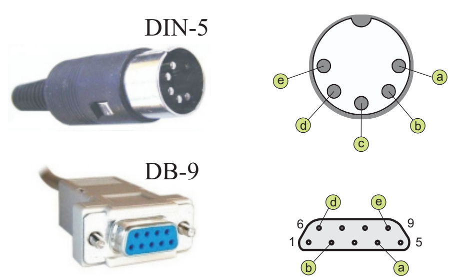
(b) Conector RCA para la tarjeta de adquisición de datos



(c) Conector HD-26 para el amplificador Xenus XLT

Figura B.10: Cable de conexión para el lazo de control.

cable también se debe adaptar. De una lado se debe tener un conector DIN-5 ("macho") y del otro lado un conector DB-9 ("hembra"). La conexión interna se muestra en la figura B.11.



(a) Diagrama de configuración.

Nomenclatura	Descripción
a	Channel A
b	Channel B
c	No conexión
d	+5V
e	GND

(b) Tabla de relación.

Figura B.11: Cable para los enconders de los AMD's.