

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias
en Ciencias de la Tierra
con orientación en Geofísica Aplicada**

**Inversión conjunta de sondeos electromagnéticos a
bajos números de inducción y resistividad en
corriente directa**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Eliana Vargas Huitzil

Ensenada, Baja California, México

2019

Tesis defendida por

Eliana Vargas Huitzil

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Marco Antonio Pérez Flores

Codirector de tesis

Dr. Francisco Javier Esparza Hernández

Codirector de tesis

Dr. José Manuel Romo Jones

Dr. Mario González Escobar

Dr. Markus Sebastian Gross



Dr. Efraín Gómez Arias

Coordinador del Posgrado en Ciencias de la Tierra

Dra. Rufina Hernández Martínez

Directora de Estudios de Posgrado

Eliana Vargas Huitzil © 2019

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis

Resumen de la tesis que presenta Eliana Vargas Huitzil como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Ciencias de la Tierra con orientación en Geofísica Aplicada.

Inversión conjunta de sondeos electromagnéticos a bajos números de inducción y resistividad en corriente directa

Resumen aprobado por:

Dr. Marco Antonio Pérez Flores

Codirector de tesis

Dr. Francisco Javier Esparza Hernández

Codirector de tesis

Corriente Directa (DC) y Electromagnéticos a Bajos Números de Inducción (LIN) son métodos muy importantes para la exploración geofísica somera y son comúnmente usados en prospección de agua, ingeniería civil y ciencias ambientales. Resistividad de corriente directa está parametrizado en términos del logaritmo de la resistividad del subsuelo y electromagnéticos a bajos números de inducción es sensible a la conductividad. Resistividad y conductividad son parámetros recíprocos sin embargo, plantear las ecuaciones integrales de Corriente Directa y de LIN en términos de un solo parámetro no es directo y se requiere de un proceso iterativo. En este trabajo se verá cómo se plantea la inversión conjunta de ambos métodos geofísicos, unificando sus ecuaciones en términos del logaritmo de la resistividad. Se aplica la metodología a datos sintéticos y reales tomados en el Valle de Maneadero, Baja California.

Palabras clave: inversión conjunta, corriente directa, bajos números de inducción

Abstract of the thesis presented by Eliana Vargas Huitzil as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Earth Sciences with orientation in Applied Geophysics.

Joint inversion of electromagnetic soundings at low induction numbers and direct current resistivity

Abstract approved by:

Dr. Marco Antonio Pérez Flores

Thesis Co-Director

Dr. Francisco Javier Esparza Hernández

Thesis Co-Director

Direct Current resistivity (DC) and control source electromagnetics at Low Induction Numbers (LIN-EM) joint inversion is important in near surface geophysics exploration. The utility of these methods has been proven in groundwater exploration, civil engineering, and environmental sciences. DC resistivity method is traditionally parametrized in terms of resistivity logarithm, and LIN-EM in terms of electrical conductivity. Resistivity and conductivity are reciprocal. Here it is shown how the integral equations of both methods can be rewritten in terms of the resistivity logarithm. This modification then allows their simultaneous solution. Single inversion for every method is linear. However, combining both inversions results in an iterative problem. We tested the algorithm for synthetic and real data from Maneadero Valley in Baja California.

Keywords: joint inversion, resistivity, near surface, low induction numbers

Dedicatoria

A las personas que más méritos tienen, por el amor que me han dado y porque sus vidas son la luz de la mía, mis padres.

Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por brindarme la oportunidad de estudiar en ésta institución.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría/doctorado. No. de becario: 634385

A GEMex por el apoyo económico para la participación en la Reunión Anual 2019 de la Unión Geofísica Mexicana.

A mis co-directores

- El Dr. Marco Antonio Pérez Flores por las enseñanzas y apoyo durante este trabajo. Por la emoción compartida en cada resultado.
- El Dr. Francisco Javier Esparza Hernández por aceptar ser mi asesor y compartir su tiempo, conocimiento y paciencia durante el trabajo de tesis.

A ambos, por la confianza y calidez que me brindaron.

Al Dr. José Manuel Romo Jones y Dr. Mario González Escobar por los comentarios y aportaciones para mejorar el trabajo.

Al Dr. Markus Sebastian Gross por el tiempo que se tomo para proporcionarme un lugar en la plataforma de GEMLab y por sus aportaciones a esta tesis.

Al Dr. Sóstenes Méndez Delgado por seguir en colaboración con CICESE y brindarnos apoyo con datos sintéticos.

Con cariño para Mirely, Juan Gerardo y la hermosa Brenda. Gracias por la amistad y por recibirme con el corazón abierto.

Por las comidas, viajes, películas, risas y por ser ejemplo de amistad incondicional: Jesús Trejo, Cristian Gallegos, Armando Rocha, Oswaldo Sagahon, Sebastian Jurado y Young Ho.

A Rocio Aurelia, Abigail Vera, Laura Velázquez, Eleyra Sena, Liza Fong, Ana y Thalia Avilés por los bailes, risas y compañía en esta etapa, con ustedes todo fue más fácil.

A las personas maravillosas que Ensenada y CICESE puso en mi camino: Manolo, Memo, Miguel Carapia, Abraham, Luis Ángel, Gerardo Vargas, Martín y José Ángel.

A mis amigos que a pesar de la distancia seguimos juntos, gracias por sus llamadas de apoyo: Jorge Santos y Ángel Coeto.

Al personal técnico y administrativo por su apoyo a lo largo de mi estancia en CICESE y Ensenada.

Finalmente a mi familia: mi hermano Richi y a mis padres ¡gracias!

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	ix
Lista de tablas	xii
Capítulo 1. Introducción	
1.1. Antecedentes	1
1.1.1. Hipótesis	2
1.1.2. Objetivo general	2
1.1.3. Objetivos específicos	2
Capítulo 2. Marco teórico	
2.1. Aspectos generales de la inversión aproximada	3
2.2. Resistividad en Corriente Directa	4
2.2.1. Esquema de inversión para Corriente Directa en 2D	6
2.3. Electromagnéticos a bajos números de inducción	8
2.3.1. Esquema de inversión 2D para bajos números de inducción . . .	10
Capítulo 3. Inversión conjunta de Corriente Directa y Electromagnéticos	
3.1. Función Objetivo	13
3.2. Solución al problema e implementación	15
Capítulo 4. Pruebas con datos sintéticos	
4.1. Modelo 1. Resistivo y conductor somero sin ruido	19
4.1.1. Inversión separada	21
4.1.2. Inversión conjunta entre EM-LIN y DC	25
4.2. Modelo 1. Resistivo y conductor somero con ruido	28
4.3. Modelo 2. Resistivo y conductor profundo sin ruido	31
4.3.1. Inversión separada	33
4.3.2. Inversión conjunta entre EM-LIN y DC	36
4.4. Modelo 2. Resistivo y conductor profundo con ruido	39
Capítulo 5. Aplicación a datos reales	
5.1. Caso 1. Marco geológico del Valle de Manadero	42
5.2. Adquisición e Inversión	43
5.2.1. Inversión de datos separada para EM-LIN y DC	45

Tabla de contenido (continuación)

5.2.2. Inversión conjunta entre EM-LIN y DC	49
5.3. Caso 2. Determinación del espesor de sedimentos: Las Auras	52
5.3.1. Inversión de datos separada para EM-LIN y DC	53
5.3.2. Inversión conjunta entre EM-LIN y DC	55
Capítulo 6. Conclusiones	
6.1. Sobre la implementación y validación de la inversión conjunta	58
6.2. Sobre los experimentos con datos reales	59
Literatura citada	61
Anexos	63

Lista de figuras

Figura	Página
1. Esquema de distribución de electrodos: a) Dipolo-dipolo, b) Wenner y c) Schlumberger.	5
2. Esquema de discretización 2D, donde c es la distancia del centro del prisma (x, z) a la posición de la fuente X_A y p la distancia a la posición del receptor X_M	6
3. Proceso de inducción con bobinas, modificada de Selepeng (2016).	8
4. Modo de operación de las bobinas EM-LIN. (a) Dipolo Magnético Horizontal y (b) Dipolo Magnético Vertical.	9
5. Búsqueda manual del parámetro de regularización en función del mínimo RMS.	16
6. Ejemplo de la búsqueda para 3 iteraciones.	17
7. Diagrama de flujo del algoritmo de inversión conjunta.	18
8. Esquema del modelo 1 utilizado para resistividad (DC) y electromagnéticos (LIN).	19
9. Respuesta sintética de EM-LIN en logaritmo de resistividad. a) DMV y b) DMH.	20
10. Respuesta sintética de DC en logaritmo de la resistividad para los arreglos a) Schlumberger b) Wenner y c) Dipolo-dipolo.	21
11. Inversión del modelo 1 sin ruido para a) DMV, b) DMV y c) la inversión conjunta de ambas configuraciones.	23
12. Inversiones del modelo 1 sin ruido para a) Schlumberger, b) Wenner, c) Dipolo-dipolo y d) conjunta entre arreglos de corriente directa.	24
13. Búsquedas realizadas para el modelo 1 sin ruido.	25
14. Inversiones del modelo 1 sin ruido para a) EM-LIN, b) DC y c) DCEM34 (conjunta entre DC y EM-LIN).	27
15. Búsquedas realizadas para el modelo 1 con ruido.	28
16. Inversiones del modelo 1 con 5% de ruido para a) EM-LIN, b) DC y c) DCEM34 (conjunta entre DC y EM-LIN).	30
17. Esquema del modelo 2 utilizado para resistividad (DC) y electromagnéticos (LIN).	31
18. Respuesta sintética del modelo 2 para EM-LIN en logaritmo de resistividad. a) DMV y b) DMH.	32
19. Respuesta sintética del modelo 2 para DC en logaritmo de la resistividad a) Schlumberger b) Wenner y c) Dipolo-dipolo.	32
20. Inversión del modelo 2 sin ruido para a) DMV, b) DMH y la c) la inversión conjunta de ambas configuraciones.	34

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
21. Inversiones del modelo 2 sin ruido para a) Schlumberger, b) Wenner, c) Dipolo-dipolo y d) conjunta entre arreglos de corriente directa.	35
22. Búsquedas realizadas para el modelo 2 sin ruido.	36
23. Inversiones del modelo 2 con ruido para a) EM-LIN, b) DC y c) DCEM34 (conjunta entre DC y EM-LIN).	38
24. Búsquedas realizadas para el modelo 2 con ruido.	39
25. Inversiones del modelo 2 con ruido para a) EM-LIN, b) DC y c) DCEM34 (conjunta entre DC y EM-LIN).	41
26. Ubicación de la zona de estudio ★ (DEM, res. 30 m, fuente USGS).	42
27. Línea 1. a) DMV y b) DMH.	44
28. Línea 1. Resistividades aparentes: a) Schlumberger, b) Wenner y c) dipolo-dipolo.	44
29. Inversiones de a) DMV, b) DMH y c) conjunta entre ambas bobinas, zona Maneadero.	47
30. Inversión de a) Schlumberger, b) Wenner, c) Dipolo-dipolo y c) conjunta entre arreglos de corriente directa, zona Maneadero.	48
31. Búsquedas realizadas para los datos de Maneadero.	49
32. Inversiones de a) EM-LIN, b) DC y c) DCEM34 (conjunta entre EM-LIN y DC).	51
33. Pseudo-secciones de resistividad aparente de a)DMV y b) DMH.	52
34. Pseudo-sección de resistividades aparente de dipolo-dipolo.	53
35. Inversiones de a) DMV, b) DMH y c) conjunta entre ambas bobinas, zona Las Auras.	54
36. Inversión de dipolo-dipolo, zona Las Auras.	54
37. Búsquedas realizadas para los datos de Las Auras.	55
38. Inversiones de a) EM-LIN, b) DC y c) DCEM34 (conjunta entre EM-LIN y DC).	57
39. Línea 1. Resistividades aparentes: a) Wenner, b) Schlumberger y c) Dipolo-Dipolo y d) sección dipolo-dipolo depurada.	66
40. Línea 1. a)DMV y b) DMH.	67
41. RMS de los ajustes a los datos de EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunta) para 10 iteraciones para el modelo 1.	68

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
42. RMS de los ajustes a los datos de EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunta) para 10 iteraciones para el modelo 1 con ruido.	69
43. RMS de los ajustes a los datos de EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunta) para 10 iteraciones para el modelo 2.	69
44. RMS de los ajustes a los datos de EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunta) para 10 iteraciones para el modelo 2 con ruido.	70
45. RMS de los ajustes a los datos de EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunta) para 10 iteraciones para los datos de resistividad y conductividad obtenidos en Maneadero.	71
46. Matrices de peso para a) DMV, b) DMH y c) matriz conjunta. Los valores positivos se encuentran distribuidos en la parte superior para los tres casos sin embargo, para el DMV los pesos positivos se muestran hasta $Z(m) = 80$. Para el caso de la matriz del DMH los valores positivos se muestran hasta $Z(m) = 50$. De ambos se destaca que el DMV tiene mayores pesos positivos en toda la región. La c) matriz conjunta muestra una distribución de pesos positivos sin embargo, se destaca una zona de influencia mayor en la parte superior (color blanco).	72
47. Funciones de peso para las matrices de a) dipolo-dipolo, b) Schlumberger, c) Wenner y d) Matriz Conjunta. El caso de dipolo-dipolo, se observa mayor distribución de pesos positivos hasta $Z(m) = 50$, se destaca una zona de valores altos (rojo) en la parte superior lo que coincide con la densidad de puntos y la resolución del arreglo. Para a) Schlumberger y b) Wenner presentan semejanza en la distribución de los pesos, se destaca los valores positivos en toda la sección. Los pesos mas grandes están asignados a la parte superior (rojos). En la c) matriz conjunta, se observa distribución triangular de pesos positivos y en los laterales valores negativos.	73

Lista de tablas

Tabla	Página
1. Especificaciones del equipo utilizado para adquisición de datos, EM34 con sus respectivas frecuencias, distancia entre la fuente y receptor .	9
2. Análisis de RMS para el modelo 1 de EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunto) sin ruido.	26
3. Análisis de RMS para el modelo 1 de EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunto) con 5 % de ruido.	29
4. Análisis de RMS para el modelo 2 de EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunto) sin ruido.	37
5. Análisis de RMS para el modelo 2 de EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunto) con ruido.	40
6. Análisis de RMS para los modelos EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunto), zona Maneadero.	50
7. Análisis de RMS para EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunto), Las Auras. . .	56

Capítulo 1. Introducción

1.1. Antecedentes

El término de inversión conjunta es utilizado por De Stefano *et al.* (2011), para denominar algoritmos destinados a obtener modelos integrados, dentro de las técnicas que abarca están la inversión conjunta en un solo dominio, secuencial y simultánea; aunque en general cuando se aplican estas metodologías lo que se busca es obtener las propiedades de las estructuras del subsuelo con diferentes métodos geofísicos.

La inversión conjunta en un solo dominio identifica a los algoritmos diseñados para invertir datos relacionados con un solo parámetro geofísico (p.ej. resistividad y conductividad) pero que han sido obtenidos por diferentes métodos. Por ejemplo, Vozoff y Jupp (1975), invierten datos de corriente directa y magnetotelúrico $1D$, ponderando ambas respuestas para producir un modelo en común; Yang y Tong (1999), realizan la inversión de tres tipos de datos: corriente directa, transitorio electromagnético y magnetotelúrico $1D$ para estimar la resistividad; Gómez-Treviño *et al.* (2002), invirtieron en conjunto datos de electromagnéticos a bajos números de inducción $1D$ (dipolo magnético vertical y horizontal) obteniendo resultados satisfactorios debido a la combinación de las dos configuraciones y no por el hecho de tener más datos por separado.

El segundo esquema denominado inversión secuencial se basa en la idea de integrar dos dominios o que uno actúe como restricción de otro. Lines *et al.* (1988), aplican esta metodología con la idea de que la densidad y los contrastes de velocidad sísmica se ayuden en fronteras en común, por lo que el modelo sísmico de velocidad es usado como entrada para obtener el modelo de densidad. Esparza y Gómez-Treviño (1997), plantean la inversión de datos de corriente directa y polarización inducida realizándola en dos pasos, el primero recuperando las resistividades del medio para después encontrar el modelo de cargabilidad que mejor ajuste.

Por último, la denominada inversión simultánea busca un enlace entre dominios diferentes (p.ej. datos de sísmica y gravedad). Haber y Oldenburg (1997), proponen que se consideran estructuras similares cuando ocurren cambios en las mismas ubicaciones físicas de dos modelos. Otra técnica usada para la inversión simultánea fue desarrollada por Gallardo y Meju (2004), que cuantifica el parecido estructural utilizando gradientes cruzados.

1.1.1. Hipótesis

Considerando que los métodos electromagnéticos y eléctricos son sensibles a la misma propiedad física (resistividad) es de esperar que la combinación de ambos datos genere un solo modelo con mayor resolución.

1.1.2. Objetivo general

Realizar la inversión conjunta $2D$ a partir de los esquemas de inversión de datos electromagnéticos a bajos números de inducción y resistividad en corriente directa.

1.1.3. Objetivos específicos

- Relación de la conductividad con el logaritmo de la resistividad.
- Modificación de los códigos que resuelven el problema inverso por separado e introducir el esquema de inversión conjunta para obtener modelos $2D$.
- Validar la inversión conjunta y explorar sus aplicaciones con datos sintéticos y de campo.

Capítulo 2. Marco teórico

2.1. Aspectos generales de la inversión aproximada

El esquema de inversión para electromagnéticos a bajos números de inducción y corriente directa parten de la ecuación planteada por Gómez-Treviño (1987).

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int_V \underbrace{\mathbf{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)}_{\text{Función de peso}} \sigma(\mathbf{r}) dV \quad (1)$$

La ecuación integral (Ec. 1) a diferencia de la de *Scattering* (esparcimiento), relaciona directamente los campos que se miden $\mathbf{B}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ con la propiedad geofísica (para este caso, conductividad eléctrica $\sigma(r)$ del subsuelo), a través de una función de peso, donde $E(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ es el campo debido a la posición de la fuente magnética \mathbf{r}_1 en un punto del semiespacio heterogéneo y $G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r})$ es la función de Green que representa el campo eléctrico medido en un punto del semi-espacio heterogéneo, con la fuente magnética colocada en el receptor \mathbf{r}_2 . Para poder estimar la conductividad verdadera a partir de mediciones del subsuelo Pérez-Flores *et al.* (2001) considera la solución de $\mathbf{G} \cdot \mathbf{E}$ en un medio homogéneo con la premisa de bajos contrastes de conductividad, en el que supone que el semi-espacio homogéneo no es tan diferente del heterogéneo y desarrolla las expresiones para invertir datos electromagnéticos a bajos números de inducción.

$$\sigma_a(x_1, x_2) \approx \frac{|x_2 - x_1|}{\pi} \int_{z=0}^{z=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} R_{DMV}(x_1, x_2, x, z) \sigma(x, z) dx dz$$

$$\sigma_a(x_1, x_2) \approx \frac{|x_2 - x_1|}{\pi} \int_{z=0}^{z=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} T_{DMH}(x_1, x_2, x, z) \sigma(x, z) dx dz$$

De manera similar, Pérez-Flores *et al.* (2001) obtiene la ecuación integral que relaciona el campo eléctrico medido con la resistividad eléctrica ρ para invertir datos de corriente directa.

$$\rho_a(x_A, x_B, x_M, x_N) \approx \frac{[G]^{-1}}{\pi} \int_{z=0}^{z=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} M_{DC}(x_A, x_B, x_M, x_N, x, z) \rho(x, z) dx dz$$

Los detalles y criterios para la implementación de las ecuaciones mencionadas se mostraran en los párrafos siguientes.

2.2. Resistividad en Corriente Directa

La base del método es la inyección de corriente eléctrica DC mediante un par de electrodos y la medición de la diferencia de potencial con otro par de electrodos. A esta distribución se le denomina arreglo tetrapolar; los más usados en campo son: dipolo-dipolo, Wenner y Schlumberger.

Los electrodos al ser puntuales, inyectan corriente en las tres direcciones (x, y, z). Sin embargo, el patrón de corrientes en el subsuelo dependerá si el semiespacio es homogéneo, uni-dimensional ($1D$), bi-dimensional ($2D$) o tri-dimensional ($3D$). En el caso de un par de fuentes puntuales en un semiespacio homogéneo, una fuente emite y otra recibe, dando una polaridad positiva y negativa respectivamente. El suelo al ser conductor cierra el circuito y se pueden formar líneas de corriente cerradas. Para el arreglo dipolo-dipolo los electrodos de potencial se encuentran a un lado de la fuente positiva o negativa, debido a esto la corriente decae más rápido, a diferencia de Wenner y Schlumberger donde los electrodos de potencial se encuentran a la misma distancia que los electrodos fuente por lo que la corriente es mayor. Cada uno de estos arreglos tetraelectródicos mide la diferencia de potencial de un patrón de corrientes y la visión que tienen de un cuerpo enterrado será diferente pero complementaria entre arreglos.

En la figura 1 se describe de manera esquemática la distribución de los electrodos y muestra los patrones de corriente característicos de cada arreglo. Las líneas rojas representan el vector de corriente, las líneas negras punteadas representan el campo escalar del potencial eléctrico, AB son los electrodos fuente y MN los receptores. Es importante aclarar que el potencial es negativo si la fuente lo es, sin embargo en el esquema se está representando el valor absoluto.

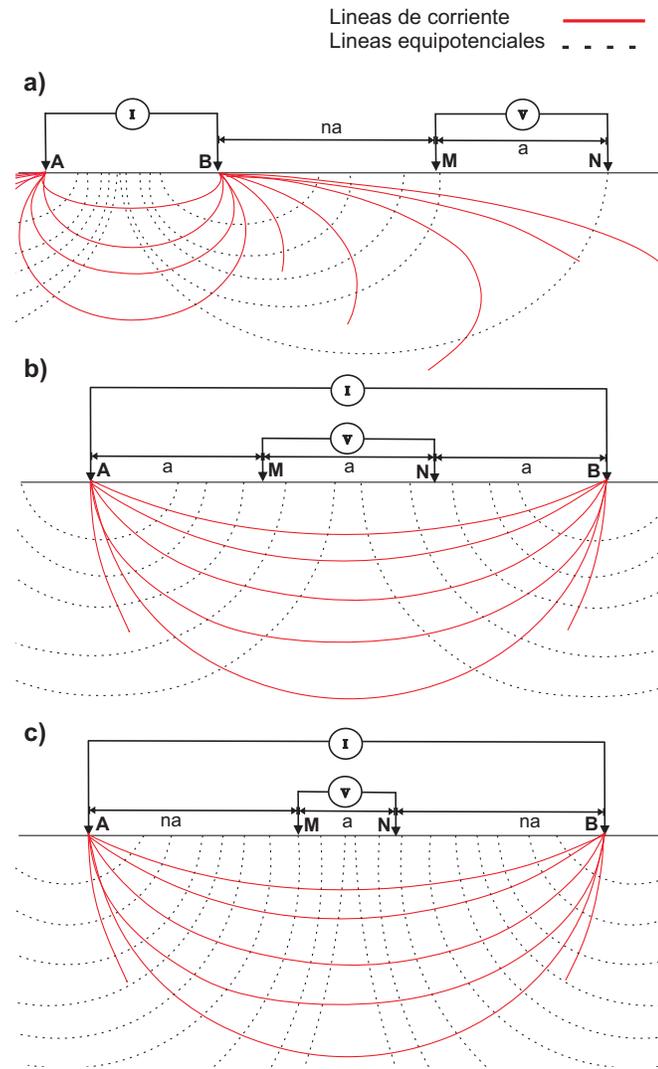


Figura 1. Esquema de distribución de electrodos: a) Dipolo-dipolo, b) Wenner y c) Schlumberger.

Como se ha mencionado anteriormente lo que se mide en campo es la diferencia de potencial y la formulación para realizarlo con cualquier arreglo tetrapolar y colineal es la siguiente:

$$\Delta V = \frac{I\rho}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} \right) - \left(\frac{1}{AN} - \frac{1}{BN} \right) \right] = \frac{I\rho}{2\pi} G \quad (2)$$

Donde G es el factor geométrico el cual depende de la distribución de electrodos. De la ecuación 2 se despeja ρ y se obtiene:

$$\rho_\alpha = 2\pi \frac{\Delta V}{I} \left[\left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} \right) - \left(\frac{1}{AN} - \frac{1}{BN} \right) \right] = 2\pi \frac{\Delta V}{I} G^{-1} \quad (3)$$

AM, BM, AN y BN son las distancias entre electrodos

2π viene de la superficie de una semiesfera

ΔV es la diferencia de potencial que se mide (Voltios)

I es la corriente inyectada (Amperes)

G^{-1} factor geométrico

ρ resistividad del medio homogéneo ($\Omega \cdot m$)

ρ_a cuando no es homogéneo ($\Omega \cdot m$)

2.2.1. Esquema de inversión para Corriente Directa en 2D

En el esquema de inversión, Pérez-Flores *et al.* (2001) obtiene las ecuaciones que relacionan de manera lineal a la incógnita con la distribución de resistividades mediante una función de peso M_{DC} , que es calculada en cada celda del modelo discretizado (figura 2). La expresión para un polo-polo queda representada en la ecuación 4, donde x_A es la posición de la fuente y x_M la posición del receptor.

$$\rho_a(x_A, x_M) \approx \frac{x_A - x_M}{2\pi} \int_{z=0}^{z=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} M_{DC}(x_A, x_M, x, z) \rho(x, z) dx dz \quad (4)$$

$$c^2 = (x - x_A)^2 + z^2$$

$$p^2 = (x_M - x)^2 + z^2$$

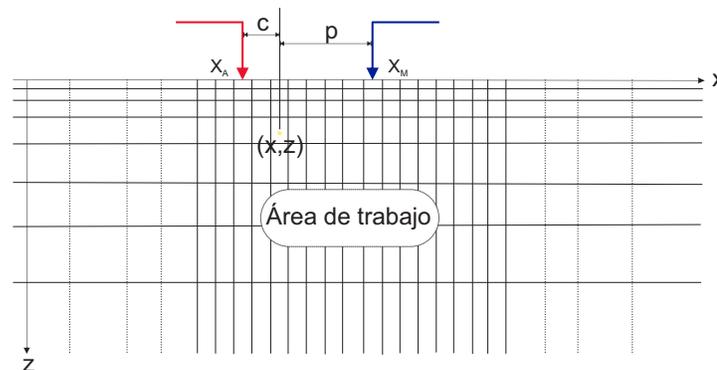


Figura 2. Esquema de discretización 2D, donde c es la distancia del centro del prisma (x, z) a la posición de la fuente x_A y p la distancia a la posición del receptor x_M .

Sin embargo, para estructuras 2D donde no hay variación de la resistividad en dirección de y , se debe resolver la integral hasta el infinito.

$$M_{DC}(x_A, x_M) = 2 \int_{y=0}^{y=\infty} \frac{(x_M - x)(x - x_A) - y^2 - z^2}{(y^2 + c^2)^{3/2}(y^2 + p^2)^{3/2}} dy \quad (5)$$

La solución se obtuvo de manera analítica y depende de tres condiciones, quedando de la siguiente manera:

Si $c > p$

$$M_{DC}(x_A, x_M) = \frac{4(c^2 + p^2)L(q) - 4p^2K(q)}{cp^2(c^2 - p^2)^2} [(x - x_A)(x_M - x) - z^2 + c^2] - \frac{4U}{c^3q} \quad (6)$$

si $c < p$

$$M_{DC}(x_A, x_M) = \frac{4(c^2 + p^2)L(q) - 4c^2K(q)}{pc^2(p^2 - c^2)^2} [(x - x_A)(x_M - x) - z^2 + p^2] - \frac{4U}{p^3q} \quad (7)$$

si $c = p$

$$M_{DC}(x_A, x_M) = \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{c^3} - \frac{3}{c^5} [(x - x_A)(x_M - x) - z^2] \right] \quad (8)$$

Donde $L(q)$ y $K(q)$ son integrales elípticas calculadas numéricamente por medio de filtros (Abramowitz, 1974).

$$U = \frac{L(q)}{q(1 - q^2)} - \frac{K(q)}{q}$$

La ecuación para un arreglo tetrapolar y colineal expresada de manera compacta se muestra en la ecuación 9; Además de esto Pérez-Flores *et al.* (2001) agrega a la expresión anterior un elemento que proporciona una sensibilidad logarítmica, incorporando lo que por experiencia se conoce; que el método tiene una resolución aproximadamente logarítmica.

$$\log \rho_a(x_A, x_B, x_M, x_N) \approx \frac{[G]^{-1}}{\pi} \int_{z=0}^{z=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} M_{DC}(x_A, x_B, x_M, x_N, x, z) \log \rho(x, z) dx dz \quad (9)$$

M_{DC} es la función que asigna pesos a las resistividades del subsuelo y relaciona de manera lineal la incógnita con la resistividad real; una característica importante de la ecuación utilizada para la inversión es que al ser considerado como un promedio pesado de las resistividades la integral de los pesos deberá ser unitaria ya que al estar evaluada en el semiespacio homogéneo $\rho_a = \rho(r)$ son constantes, entonces lo que se mide es la resistividad del semiespacio.

$$\frac{[G]^{-1}}{\pi} \int_{z=0}^{z=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} M_{DC}(x_A, x_B, x_M, x_N, x, z) \log \rho(x, z) dx dz = 1 \quad (10)$$

2.3. Electromagnéticos a bajos números de inducción

El método consiste en colocar dos bobinas, una transmisora y otra receptora. En la bobina transmisora (Tx) circula corriente alterna la cual genera un campo magnético conocido o primario (para un espacio completo homogéneo, líneas rojas) y cuando este se encuentra con un conductor induce una corriente eléctrica (semi espacio heterogéneo, líneas azules) produciendo un campo magnético secundario (líneas amarillas) el cual se suma vectorialmente con el primario y es registrado en la bobina receptora (Rx). En la figura 3 se muestra el proceso de inducción descrito.

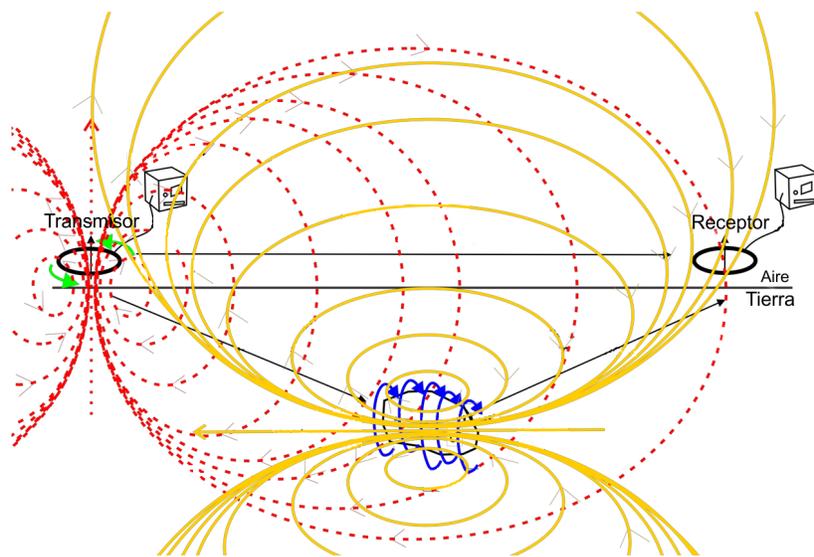


Figura 3. Proceso de inducción con bobinas, modificada de Selepeng (2016).

Uno de los equipos que operan a bajos números de inducción es el EM34 diseñado por *Geonics Ltd.* el cual trabaja con dos modalidades, la bobina coplanar vertical (Dipolo Magnético Horizontal, DMH; figura 4a) y bobina coplanar horizontal (Dipolo Magnético Vertical, DMV; figura 4b).

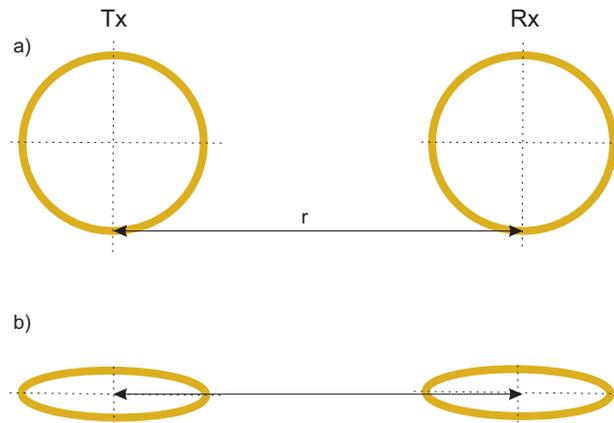


Figura 4. Modo de operación de las bobinas EM-LIN. (a) Dipolo Magnético Horizontal y (b) Dipolo Magnético Vertical.

Las especificaciones de los rangos de frecuencia y separación para este equipo se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Especificaciones del equipo utilizado para adquisición de datos, EM34 con sus respectivas frecuencias, distancia entre la fuente y receptor

Equipo	Frecuencia (Hz)	Distancia (m)
EM34	6400	10
	1600	20
	400	40

Las características anteriores son condiciones necesarias para que el equipo trabaje a bajos números de inducción. Donde el número de inducción B , se puede escribir como la razón entre la distancia fuente-receptor con el *skin depth*, δ .

$$B = \frac{r}{\delta}$$

$$B = r\sqrt{\pi f\mu\sigma} \quad (11)$$

- f frecuencia de operación del equipo (Hz)
 σ conductividad del medio homogéneo (siemens-m)
 μ_0 permeabilidad magnética (H/m)
 r separación de las bobinas (m)

Cuando el número de inducción es menor a 1 (bajos números de inducción), la ecuación para obtener la conductividad aparente es relativamente simple y los valores de la tabla 1, aseguran que B sea menor a 1. McNeil (1980) define que el cociente de H_s y H_p a bajos números de inducción es igual en ambas configuraciones de las bobinas, obteniendo lo siguiente:

$$\left(\frac{H_s}{H_p}\right)_V = \left(\frac{H_s}{H_p}\right)_H = 1 + \frac{(kr)^2}{4} \approx 1 + \frac{i\omega\mu\sigma}{4}r^2 \quad (12)$$

Por lo que McNeil (1980) indica que la conductividad medida en un medio heterogéneo es:

$$\sigma_a \approx \frac{4}{\omega\mu r^2} \left(\frac{H_s}{H_p}\right) \quad (13)$$

2.3.1. Esquema de inversión 2D para bajos números de inducción

De manera similar a Corriente Directa, Pérez-Flores *et al.* (2001) relaciona de manera lineal a la incógnita y los datos mediante la función de peso correspondiente (producto de la función de Green y el campo eléctrico, Ec. 1). La expresión de estas funciones para el DMV y DMH se muestran en las ecuaciones 14 y 15, donde x_1 y x_2 es la posición de la fuente y receptor respectivamente.

$$\sigma_a(x_1, x_2) \approx \frac{|x_2 - x_1|}{\pi} \int_{z=0}^{z=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} R_{DMV}(x_1, x_2, x, z) \sigma(x, z) dx dz \quad (14)$$

$$\sigma_a(x_1, x_2) \approx \frac{|x_2 - x_1|}{\pi} \int_{z=0}^{z=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} T_{DMH}(x_1, x_2, x, z) \sigma(x, z) dx dz \quad (15)$$

Para estructuras 2D donde no se tiene variación de resistividad en dirección y , la integral debe efectuarse hasta el infinito. Tomando el caso de las bobinas horizontales (DMV), la solución es similar a la de corriente directa y se resuelve de manera analítica, quedando lo siguiente:

$$R_{DMV}(x_1, x_2, x, z) = 2 \int_0^{\infty} \frac{y^2 - (x - x_1)(x_2 - x)}{(y^2 + c^2)^{3/2}(y^2 + p^2)^{3/2}} dy \quad (16)$$

$$c^2 = (x - x_1)^2 + z^2$$

$$p^2 = (x_2 - x)^2 + z^2$$

donde x_1 y x_2 es la posición de la fuente y receptor respectivamente. Estas ecuaciones se resuelven considerando tres casos:

Si $c > p$

$$R_{DMV}(x_1, x_2, x, z) = \frac{2U}{c^3 q} - \frac{2(c^2 + p^2)L(q) - 4p^2 K(q)}{cp^2(c^2 - p^2)^2} [(x - x_1)(x_2 - x) + c^2] \quad (17)$$

si $c < p$

$$R_{DMV}(x_1, x_2, x, z) = \frac{2U}{p^3 q} - \frac{2(c^2 + p^2)L(q) - 4c^2 K(q)}{pc^2(p^2 - c^2)^2} [(x - x_1)(x_2 - x) + p^2] \quad (18)$$

si $c = p$

$$R_{DMV}(x_1, x_2, x, z) = \frac{\pi}{8} \left[\frac{1}{c^3} - \frac{3}{c^5} (x - x_1)(x_2 - x) \right] \quad (19)$$

Donde $L(q)$ y $K(q)$ son integrales elípticas calculadas numéricamente por medio de filtros (Abramowitz, 1974).

$$U = \frac{L(q)}{q(1 - q^2)} - \frac{K(q)}{q}$$

Para el dipolo magnético horizontal (Ec. 15), la función de peso $T_{DMH}(x_1, x_2, x, z)$ es tan complicada que no se puede resolver analíticamente. Ésta se resuelve de manera numérica por lo que toma más tiempo de ejecución del programa a comparación del

tiempo de cómputo de la integral de Corriente Directa y del Dipolo Magnético Vertical por lo que la solución analítica resulta tener más ventaja. La ecuación integral para el DMH en la dirección y es la siguiente:

$$T_{DMV}(x_1, x_2, x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}_{H_y}(x_2, x, y, z) \cdot \mathbf{E}_{H_y}(x_1, x, y, z) dy \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{H_y}(x_2, x, y, z) = & \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[\frac{1}{\rho_2^2} - \frac{z+h}{\rho_2^2[(x-x_2)^2 + y^2 + (z+h)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{2y^2}{\rho_2^4} \right. \right. \\ & + \frac{2(z+h)y^2}{\rho_2^4[(x-x_2)^2 + y^2 + (z+h)^2]^{\frac{1}{2}}} + \left. \frac{(z+h)y^2}{\rho_2^2[(x-x_2)^2 + y^2 + (z+h)^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \mathbf{i} \\ & + \left[\frac{(x-x_2)y}{\rho_2^2} \left(\frac{2}{\rho_2^2} - \frac{2(z+h)}{\rho_2^2[(x-x_2)^2 + y^2 + (z+h)^2]^{\frac{1}{2}}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{z+h}{[(x-x_2)^2 + y^2 + (z+h)^2]^{\frac{3}{2}}} \right) \right] \mathbf{j} \left. \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{H_y}(x_1, x, y, z) = & -\frac{\omega\mu_0 m_y}{4\pi} \left\{ \left[\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{z+h}{\rho_1^2[(x-x_1)^2 + y^2 + (z+h)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{2y^2}{\rho_1^4} \right. \right. \\ & + \frac{2(z+h)y^2}{\rho_1^4[(x-x_1)^2 + y^2 + (z+h)^2]^{\frac{1}{2}}} + \left. \frac{(z+h)y^2}{\rho_1^2[(x-x_1)^2 + y^2 + (z+h)^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \mathbf{i} \\ & + \left[\frac{(x-x_1)y}{\rho_1^2} \left(\frac{2}{\rho_1^2} - \frac{2(z+h)}{\rho_1^2[(x-x_1)^2 + y^2 + (z+h)^2]^{\frac{1}{2}}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{z+h}{[(x-x_1)^2 + y^2 + (z+h)^2]^{\frac{3}{2}}} \right) \right] \mathbf{j} \left. \right\} \quad (22) \end{aligned}$$

Donde h es la altura del dipolo magnético sobre el semiespacio; $R_{DMV}(x_1, x_2, x, z)$ y $T_{DMH}(x_1, x_2, x, z)$ son funciones que asignan pesos a las conductividades del subsuelo por lo que la integral también deberá ser unitaria.

Capítulo 3. Inversión conjunta de Corriente Directa y Electromagnéticos

El esquema a tratar para este trabajo será la inversión conjunta en el sentido de invertir parámetros físicos relacionados, como lo es resistividad y conductividad pero que han sido obtenidos con distintos métodos geoelectricos, para finalmente obtener un modelo con un solo parámetro geofísico.

3.1. Función Objetivo

Para iniciar con la solución del problema de inversión conjunta lo primero que se planteó fue la función objetivo.

$$F(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{Y}_{EM} - \mathbf{A}_{EM}\mathbf{X}\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{Y}_{DC} - \mathbf{A}_{DC}\mathbf{X}\|^2 + \beta \|\mathbf{D}\mathbf{X}\|^2 \quad (23)$$

Donde \mathbf{Y}_{EM} y \mathbf{Y}_{DC} son las observaciones que corresponden a datos de electromagnéticos y corriente directa, respectivamente. \mathbf{A}_{EM} y \mathbf{A}_{DC} son las matrices de peso. El vector \mathbf{X} representa las incógnitas. Para corriente directa la incógnita está dada como el logaritmo de la resistividad (Ec. 9) y para electromagnéticos está dada por la conductividad (ecuaciones 14 y 15). En la función objetivo planteada se requiere que la incógnita sea la misma; logaritmo de la resistividad o conductividad. En las secciones siguientes se mostrará cómo se homogeneizaron las ecuaciones usadas para la inversión. La matriz \mathbf{D} contiene las derivadas espaciales del parámetro respecto a (x, z) para el caso bidimensional. Esta matriz cumple con la función de estabilizar numéricamente el algoritmo de inversión y de minimizar la derivada de las resistividades en (x, z) , por lo que resultará en un modelo suave, β es el factor que pondera la condición de suavidad; cuando éste es cero, la función objetivo minimiza la diferencia entre los datos observados y las respuestas del modelo por lo que resulta en un RMS muy bajo y variaciones espaciales muy grandes (modelo rugoso). La elección del β óptimo que estabilizará el proceso de inversión conjunta se discutirá en las secciones siguientes.

Para la solución del problema inverso, se necesita de la combinación de ambos datos, por lo que las observaciones y matrices se agrupan de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\text{EM}} \\ \mathbf{A}_{\text{DC}} \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{\text{EM}} \\ \mathbf{Y}_{\text{DC}} \end{pmatrix}$$

Extendida la matriz y el vector de observaciones se tiene la contribución de ambos métodos para invertirlos en conjunto, por lo que la ecuación 23 se reescribe quedando de la siguiente manera:

$$F(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{Y}_{\text{ext}} - \mathbf{A}_{\text{ext}}\mathbf{X}\|^2 + \beta \|\mathbf{D}\mathbf{X}\|^2 \quad (24)$$

La metodología a seguir será la misma que la usada por Pérez-Flores (1995). Para determinar la incógnita se usó programación cuadrática (Gill *et al.*, 1986), que consiste en minimizar la función objetivo sujeta a límites inferiores y superiores del parámetro geofísico (resistividad, conductividad o logaritmo de resistividad). La minimización de la función objetivo es la siguiente (los desarrollos se encuentran en el anexo 1):

$$F(\mathbf{X}) = \mathbf{C}^T\mathbf{X} + \frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{S}\mathbf{X} \quad (25)$$

$$\mathbf{X}_L \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}_U$$

donde $\mathbf{S} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} + \beta\mathbf{D}^T\mathbf{D}$, es una matriz simétrica y $\mathbf{C} = -(\mathbf{A}^T\mathbf{Y})^T$.

En los apartados siguientes se presenta la solución al problema conjunto, la parametrización de las ecuaciones y la búsqueda del β óptimo que establezca el proceso de inversión y proporcione un buen ajuste de ambos tipos de datos.

3.2. Solución al problema e implementación

En general uno de los principales problemas de la inversión conjunta es la apropiada combinación de ambos tipos de datos que nos lleven a un mismo modelo del subsuelo (Vozoff y Jupp, 1975). Un punto primordial a tratar fue la incompatibilidad de los datos de entrada y la propiedad física que será la incógnita en el esquema de inversión conjunta. La propiedad física en EM-LIN es la conductividad y en DC es el logaritmo de la resistividad por lo que se decidió usar el logaritmo de la resistividad para ambos métodos. La modificación se realizó solo a la ecuación integral de EM-LIN (ecuaciones 14 y 15)

La parametrización fue aplicada siguiendo la metodología implementada a resistividad en corriente directa 1D por Esparza y Gómez-Treviño (1997) y a EM-LIN 1D por Gómez-Treviño *et al.* (2002) obteniendo lo siguiente:

$$\log \rho_a(x_1, x_2) \approx \frac{|x_2 - x_1|}{\pi} \int_{z=0}^{z=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left[\underbrace{\frac{\rho_a \log \rho_a}{\rho(x, z) \log \rho(x, z)}}_{\Gamma} \cdot R(x_1, x_2, x, z) \right] \log \rho(x, z) dx dz \quad (26)$$

$$\log \rho_a(x_1, x_2) \approx \frac{|x_2 - x_1|}{\pi} \int_{z=0}^{z=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left[\underbrace{\frac{\rho_a \log \rho_a}{\rho(x, z) \log \rho(x, z)}}_{\Gamma} \cdot T(x_1, x_2, x, z) \right] \log \rho(x, z) dx dz \quad (27)$$

Los desarrollos de la parametrización de las ecuaciones 26 y 27 se muestran en el anexo 2. Para mayor formalidad, se presentan estas ecuaciones en forma matricial y las dimensiones de cada término. La ecuación 28 se resuelve como un sistema de ecuaciones lineales sujeto a condiciones de desigualdad (programación cuadrática, Gill *et al.* (1986)).

$$\underbrace{\log \rho_a}_{m \times 1} \approx \{ \underbrace{[\rho_a \cdot \log \rho_a]_{m \times m}}_{m \times m} \underbrace{\mathbf{A}_{EM}}_{m \times n} \underbrace{[\rho(x, z) \cdot \log \rho(x, z)]^{-1}}_{n \times n} \} \underbrace{\log \rho(x, z)}_{n \times 1} \quad (28)$$

Las ecuaciones de EM-LIN (ecuaciones 14 y 15) se convierten en la ecuación 28 a través de un término que escala el kernel de integración. El factor Γ (Ec. 26) contiene el logaritmo de las mediciones y el logaritmo de la resistividad del subsuelo, que es el parámetro a determinar con el proceso de inversión. Para dar solución a esta ecuación, se requiere de suponer la resistividad de un modelo anterior o inicial. Es decir el proceso se vuelve iterativo. Se supone un modelo inicial para calcular el término que escala a la matriz y determinar el logaritmo de la resistividad en la primera iteración. En la segunda iteración, el factor se actualiza con la distribución de resistividades del primer modelo. El proceso continúa durante varias iteraciones, hasta que no haya cambio en la solución o se obtenga el modelo con el mínimo RMS.

Cuando el factor Γ que modifica a la matriz de EM-LIN es actualizado en cada iteración es necesario la búsqueda del regularizador en cada una. Realizar esto de manera manual resulta poco eficiente y tardado por lo que se decidió automatizar el proceso de búsqueda de β^{opt} adaptando subrutinas de Ames y Brezinski (1993). Para calibrar las subrutinas, primero se realizó una búsqueda manual del modelo con menor RMS en función de β espaciado logarítmicamente con lo que cubrimos una amplia gama de valores. El objetivo de realizar la búsqueda manual fue para acotar el rango de valores de β (figura 5).

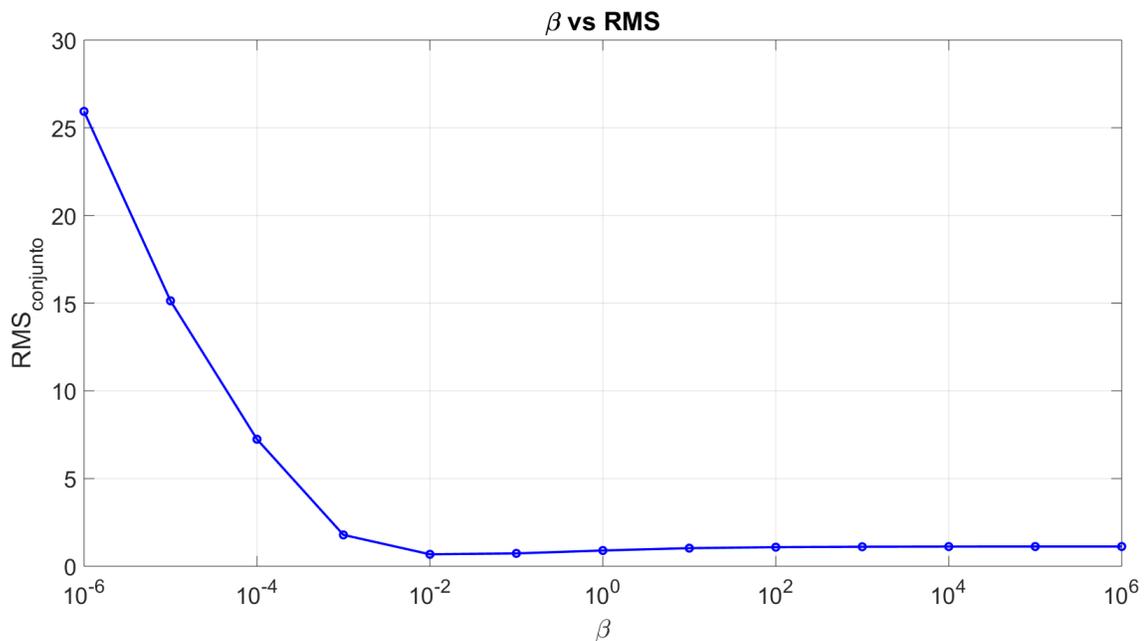


Figura 5. Búsqueda manual del parámetro de regularización en función del mínimo RMS.

En la figura 6 se presenta las búsquedas que realiza el algoritmo para cada iteración, este ejemplo corresponde al modelo 1 que será descrito en el capítulo siguiente. Los valores elegidos se muestran con una marca roja.

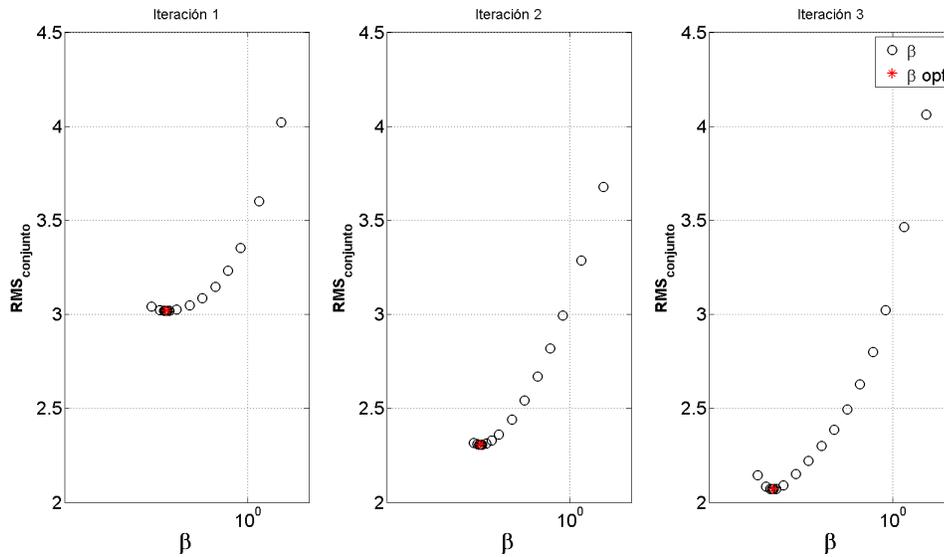


Figura 6. Ejemplo de la búsqueda para 3 iteraciones.

En este proceso de búsqueda se toma en cuenta el valor de β óptimo que pondera el ajuste y estabilidad, con este valor se calcula una solución y su respuesta para actualizar al factor Γ en cada iteración. Este tipo de esquema, donde se hace una búsqueda del factor de regularización en cada iteración ha sido implementado en inversión de sondeos electromagnéticos 1D por Constable *et al.* (1987).

Hasta este punto ya hemos definido la mayor parte del esquema de inversión conjunta que se muestra en el diagrama de la figura 7. Sin embargo para determinar el criterio de convergencia de la solución y ajuste de los datos para cada búsqueda e iteración se determina el residual cuadrático medio normalizado por el error, el cual queda definido de la siguiente manera:

$$RMS_{EM}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left[\frac{\log \rho_a - \log \hat{\rho}_a}{e} \right]^2 \quad (29)$$

$$RMS_{DC}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left[\frac{\log \rho_a - \log \hat{\rho}_a}{e} \right]^2 \quad (30)$$

La ecuación 29 y 30 corresponden al cálculo del residual cuadrático medio para EM-LIN y DC respectivamente. Donde $\log \rho_a$ corresponde a los datos observados, $\log \hat{\rho}_a$ a la resistividad aparente calculada en cada iteración y e el error de cada dato. Respecto al cálculo del RMS conjunto que se presenta en la ecuación 31, este resultó de la combinación de las ecuaciones 29 y 30 el cual es el criterio para la selección del modelo con menor RMS que actualiza el factor Γ . El proceso se repite hasta que la solución ya no cambie o se obtenga el RMS requerido.

$$RMS_{conjunto} = \sqrt{RMS_{EM}^2 + RMS_{DC}^2} \quad (31)$$

La figura 7, representa de forma esquemática el procedimiento numérico del algoritmo propuesto.

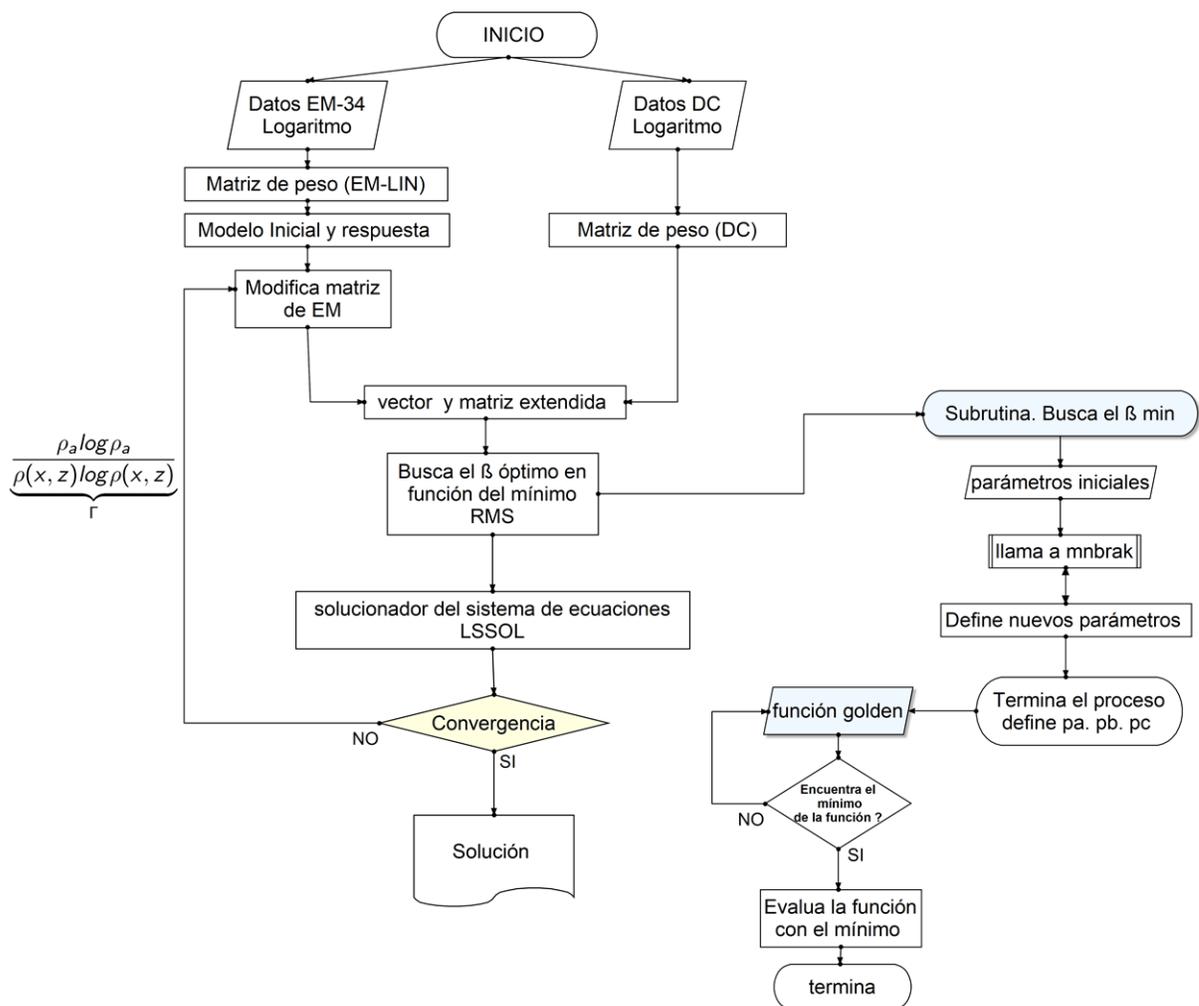


Figura 7. Diagrama de flujo del algoritmo de inversión conjunta.

Capítulo 4. Pruebas con datos sintéticos

En este capítulo se presentan los detalles de las pruebas con datos sintéticos y el planteamiento de dos modelos. Para ambos se calcularon datos de resistividad en corriente directa y electromagnéticos a bajos números de inducción. Para corriente directa los datos se obtuvieron utilizando el software EarthImager 2D desarrollado por Geosciences, Inc. En todas las simulaciones se utilizaron 28 electrodos espaciados 10 m y se realizó para los 3 arreglos típicos de DC. En el caso de electromagnéticos (EM-LIN) los datos del DMV y DMH con las tres aperturas fueron proporcionados por Méndez-Delgado *et al.* (1999) quién resuelve el problema directo exacto con la ecuación integral.

4.1. Modelo 1. Resistivo y conductor somero sin ruido

Para evaluar el desempeño del algoritmo de inversión conjunta es necesario un modelo controlado ya que se requiere saber que tan bien se están reproduciendo ambos tipos de datos. Para esto, el primer modelo propuesto consiste de dos prismas rectangulares de 10 por 40 m, con valores de resistividad de 1000 y 10 $\Omega \cdot m$ a una profundidad 10 m e inmersos en un medio homogéneo de 100 $\Omega \cdot m$. En la figura 8 se muestra los detalles del modelo planteado.

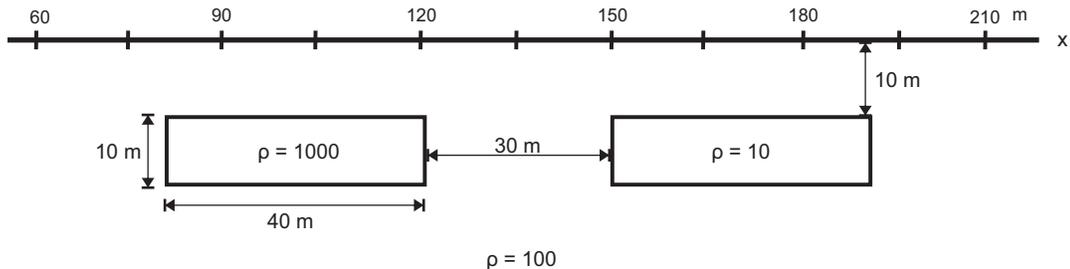


Figura 8. Esquema del modelo 1 utilizado para resistividad (DC) y electromagnéticos (LIN).

De las pseudo-secciones de resistividad aparente de electromagnéticos mostrados en la figura 9 se destaca la baja sensibilidad que tiene el método en presencia de cuerpos resistivos. La figura 9a que corresponde a la respuesta sintética del DMV muestra valores altos asociados al prisma conductor en comparación con la sección del DMH

que se muestra en la figura 9b. En ambas secciones se observa los valores asociados al semiespacio en el que se encuentran inmersos los prismas.

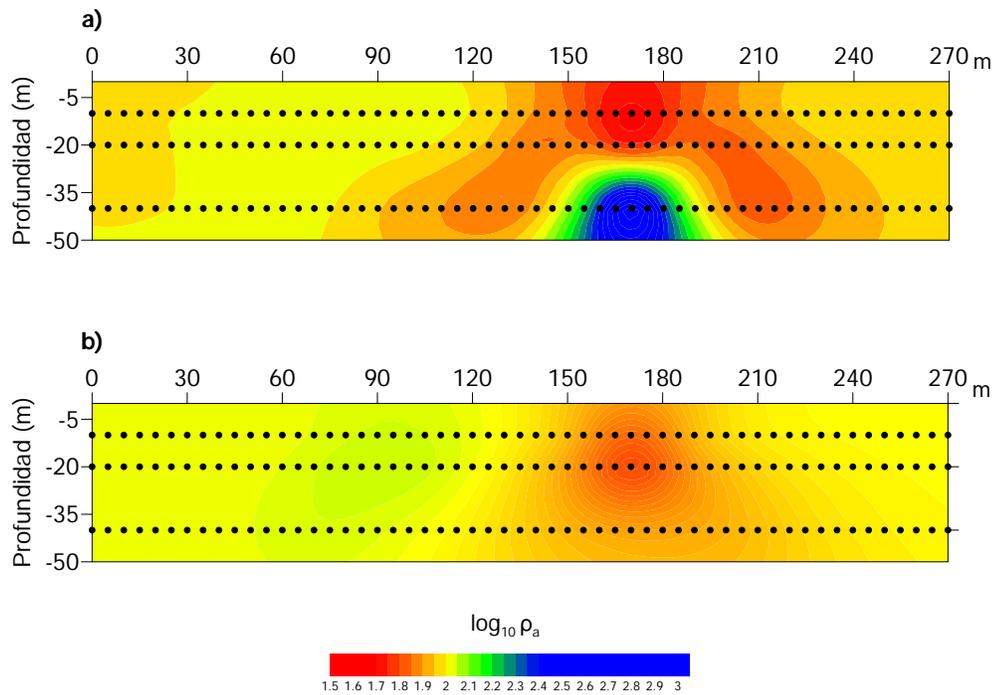


Figura 9. Respuesta sintética de EM-LIN en logaritmo de resistividad. a) DMV y b) DMH.

En la figura 10 se muestran las pseudo-secciones de resistividad aparente para corriente directa. En las secciones de Schlumberger (figura 10a) y Wenner (figura 10b) presentan semejanza, y en ambas se tiene la presencia de resistividades asociadas al conductor y al resistivo. En la pseudosección de dipolo-dipolo que se muestra en la figura 10c se aprecian contrastes de resistividades más fuertes asociadas a los dos cuerpos, además se observa que la anomalía conductora corta a la anomalía resistiva y se emplaza por la parte inferior. Es notable que la respuesta de DC para el resistivo es mayor que en EM-LIN.

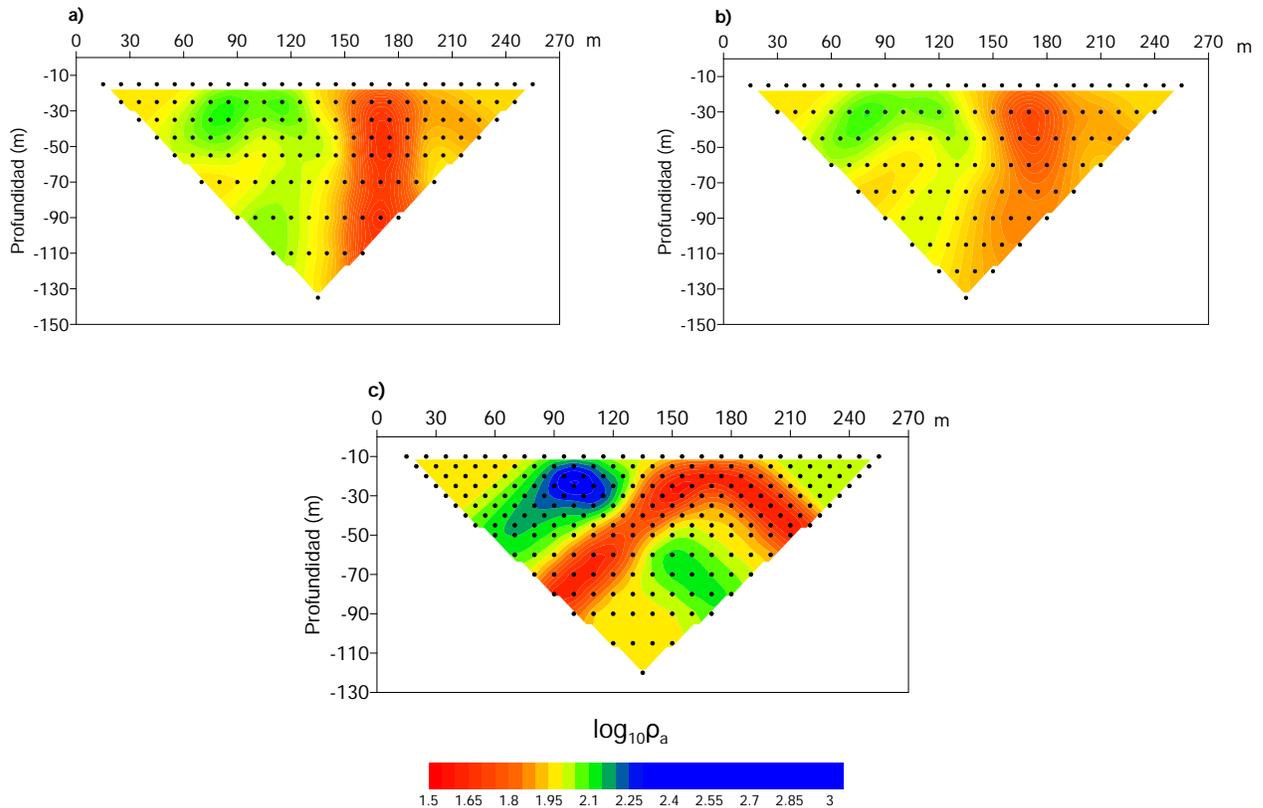


Figura 10. Respuesta sintética de DC en logaritmo de la resistividad para los arreglos a) Schlumberger b) Wenner y c) Dipolo-dipolo.

4.1.1. Inversión separada

Parte de los experimentos realizados para el modelo 1 fue las inversiones por separado para EM-LIN y DC. En la figura 11a y 11b se muestra la inversión del DMV y DMH respectivamente y en la figura 11c la inversión conjunta entre ambas configuraciones de las bobinas.

El DMV (figura 11a) recupera el cuerpo conductor con rangos de resistividad entre 20 a $40 \Omega \cdot m$, por el contrario el cuerpo resistivo se presenta con valores arriba de $132 \Omega \cdot m$. La inversión del DMH (figura 11b) recupera el conductor con rango de valores entre 30 a $44 \Omega \cdot m$ y para el resistivo se tienen valores a partir $132 \Omega \cdot m$. En ambas inversiones la parte inferior del resistivo y lateral no se logra definir sin embargo, para el conductor la base y la parte superior se aprecian de manera tenue aunque no logran coincidir con los prismas propuestos.

En la inversión conjunta de ambas bobinas se aprecia el conductor mejor definido en la parte superior e inferior, con un rango de resistividades acotado de 20 y 30 $\Omega \cdot m$, el resistivo presenta rangos superiores a 132 $\Omega \cdot m$ sin definir la base y los extremos del prisma propuesto. Conviene subrayar que los métodos electromagnéticos son sensibles a conductores y que la definición de la parte superior e inferior del prisma conductor propuesto se mejoró con la combinación de ambas configuraciones.

En la figura 12 se muestra la inversión por separado de los datos sintéticos de corriente directa. La figura 12a y 12b corresponde a las secciones de Schlumberger y Wenner. Se destaca la presencia del resistivo y conductor. La geometría de ambos prismas carece de definición en la parte inferior. Respecto a su parte superior, ambos se encuentra delimitados y concuerdan con los prismas propuestos.

La sección correspondiente a dipolo-dipolo (figura 12c) se define la parte superior e inferior de ambos cuerpos. El resistivo queda acotado a un rango de 150 a 400 $\Omega \cdot m$ y el conductor con rangos de 10 a 20 $\Omega \cdot m$. Con respecto a la inversión conjunta entre los arreglos de corriente directa que se muestra en la figura 12d, ambos prismas quedan acotados en la parte superior e inferior, aunque los límites inferiores exceden a los prismas propuestos. A primera vista podría parecer que con solo datos de dipolo-dipolo se recupera un buen modelo, con lo que podría pensarse en darle más peso a las mediciones para que éste influyera en la inversión conjunta entre los arreglos. Sin embargo, al trabajar en campo la corriente decae más rápido y las diferencias de potencial tienden a cero por lo que no siempre es conveniente asignarle mayor peso.

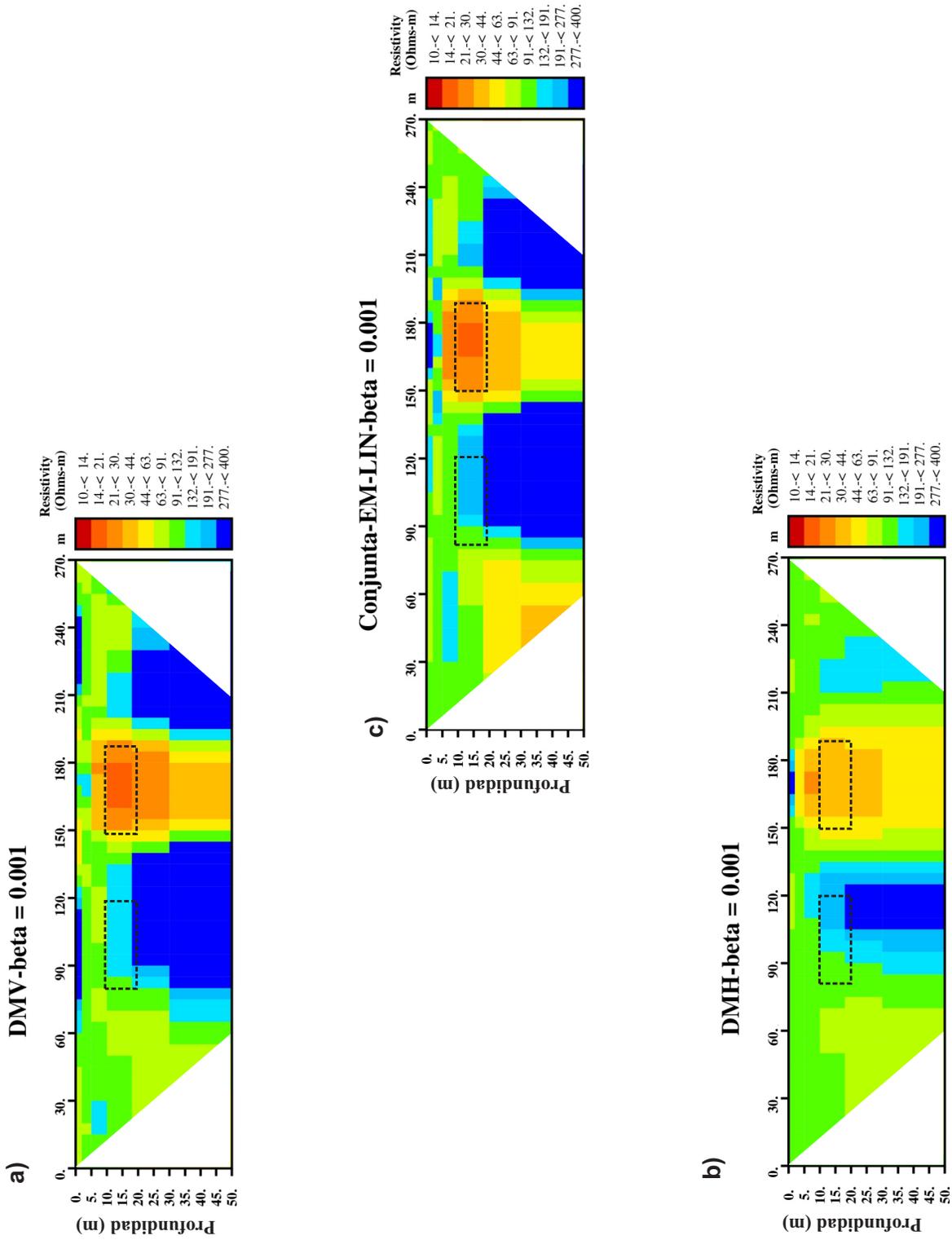


Figura 11. Inversión del modelo 1 sin ruido para a) DMV, b) DMH y c) la inversión conjunta de ambas configuraciones.

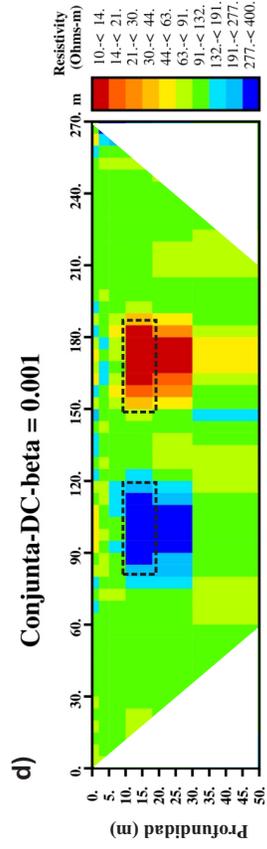
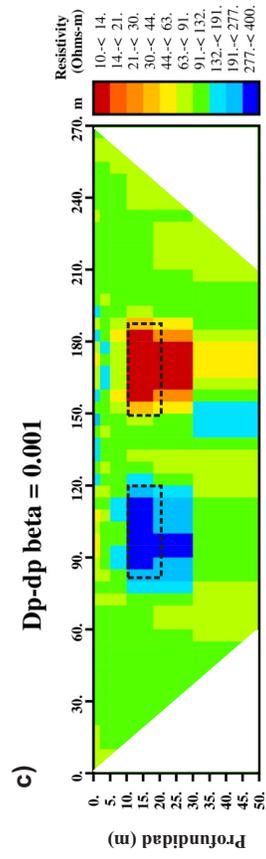
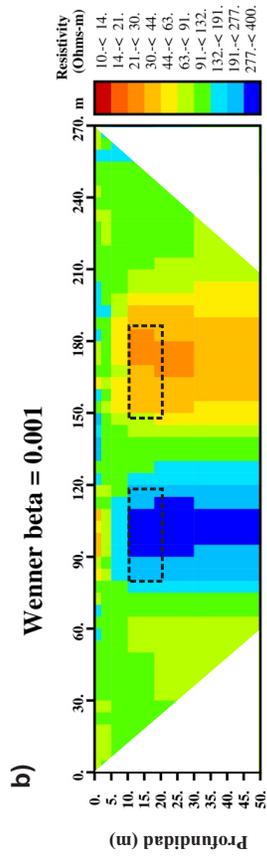
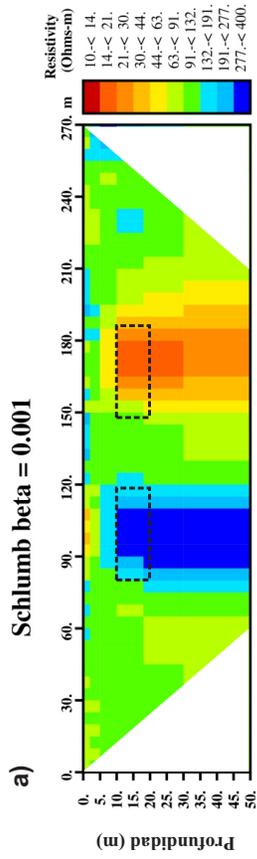


Figura 12. Inversiones del modelo 1 sin ruido para a) Schlumberger, b) Wenner, c) Dipolo-dipolo y d) conjunta entre arreglos de corriente directa.

4.1.2. Inversión conjunta entre EM-LIN y DC

Para este primer experimento, el proceso de inversión conjunta entre EM-LIN y DC la solución convergió en la tercera iteración. Como ya se ha mencionado en cada iteración busca un β^{opt} calculando un modelo y su correspondiente RMS. Este proceso de búsqueda se puede visualizar en la figura 13. La marca roja (*) muestra el β^{opt} que nos da un modelo con el menor RMS. En la ultima iteración se toma en cuenta que la solución ya no cambie para terminar el proceso.

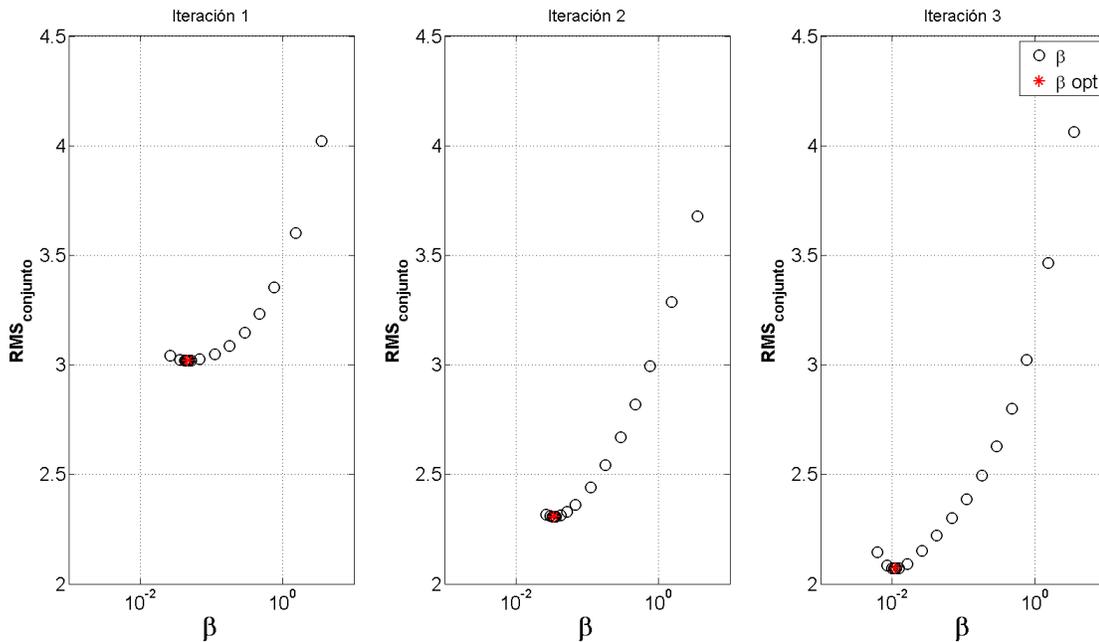


Figura 13. Búsquedas realizadas para el modelo 1 sin ruido.

Si observamos el modelo de inversión de EM-LIN (figura 14a) y el modelo conjunto (figura 14c), es notable la mejora respecto a la posición de las heterogeneidades. Se observa la presencia del resistivo con valores entre 277 a 400 $\Omega \cdot m$ y la definición del conductor con rangos de 10-14 $\Omega \cdot m$.

Con respecto al modelo inverso de DC (figura 14b) y el modelo conjunto (14c), se percibe una buena resolución respecto a la posición de las heterogeneidades que corresponden a los prismas ya que los límites inferiores, superiores y laterales se encuentran acotados y geoméricamente muy cercanos a los prismas propuestos. Los rangos de resistividad se mantienen para ambos prismas. Por lo que se refiere al semiespacio se tienen valores entre 90 y 130 $\Omega \cdot m$ lo cual corresponde al medio donde se encuentran inmersos los prismas.

Para completar el análisis del modelo obtenido, se realizó la tabla 2 la cual contiene los resultados del RMS de cada inversión (EM-LIN y DC) y de la inversión conjunta. En el caso de las inversiones separadas, son lineales y la solución se obtiene en una iteración, los valores obtenidos fueron de 2.89 % para EM-LIN y de 0.60 % para DC. El modelo conjunto presentado en la figura 14c convergió en la tercera iteración con un valor RMS normalizado por una estimación del 5 % de error de cada dato de 2.07 o su equivalente porcentual de 1.43 %

Tabla 2. Análisis de RMS para el modelo 1 de EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunto) sin ruido.

Inversión	RMS		
EM-LIN	2.89 %		
DC	0.60 %		
	Iteración 1	Iteración 2	Iteración 3
	$\beta^{opt} = 0.04$	$\beta^{opt} = 0.03$	$\beta^{opt} = 0.01$
DCEM34	RMS = 3.01	RMS = 2.30	RMS = 2.07
	RMS = 1.97 %	RMS = 1.51 %	RMS = 1.43 %

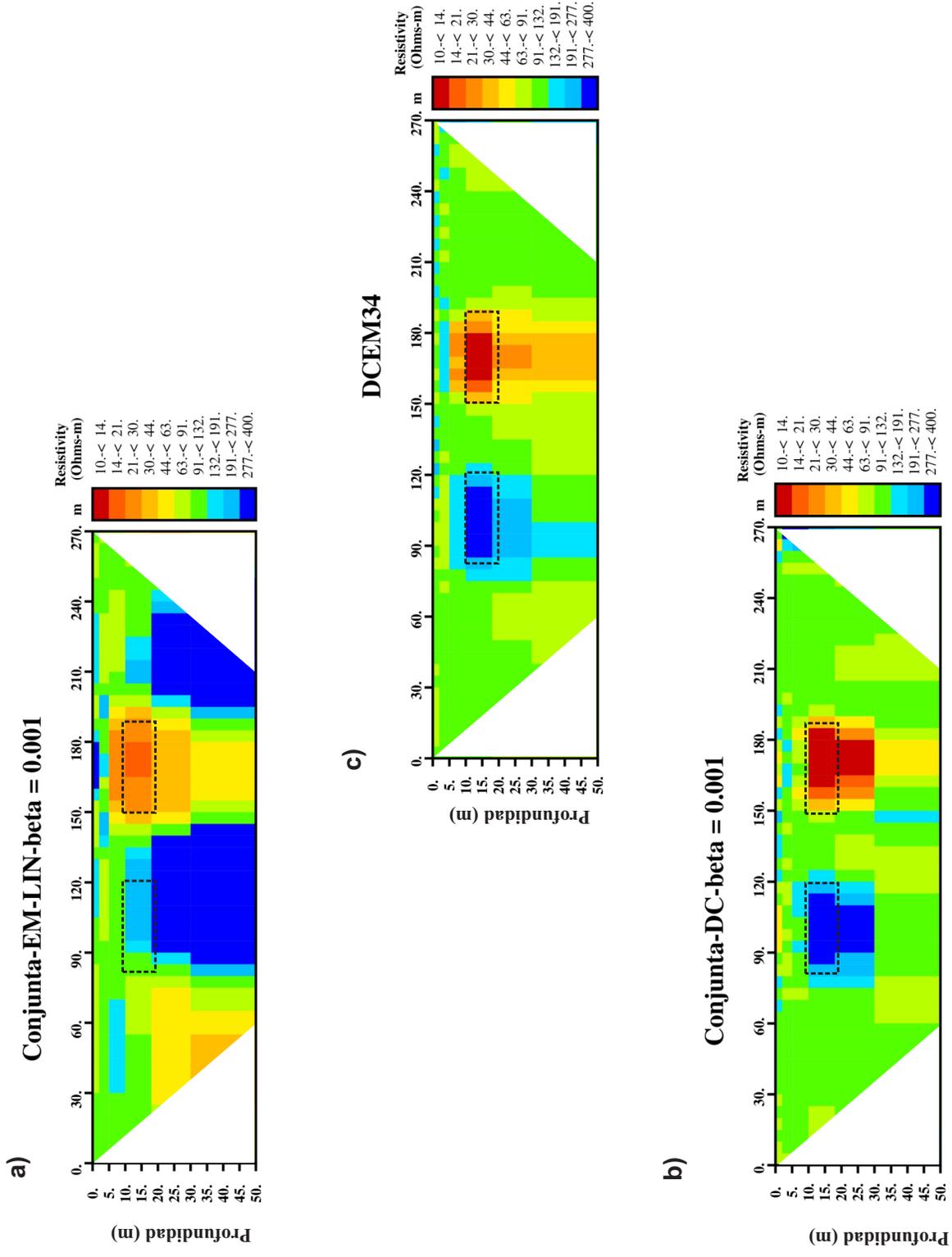


Figura 14. Inversiones del modelo 1 sin ruido para a) EM-LIN, b) DC y c) DCEM34 (conjunta entre DC y EM-LIN).

4.2. Modelo 1. Resistivo y conductor somero con ruido

El segundo experimento consistió en agregar 5 % de ruido con distribución normal a los datos de EM-LIN y DC. La inversión conjunta convergió en la tercera iteración y los resultados de la búsqueda y la selección del β^{opt} se muestran en la figura 15.

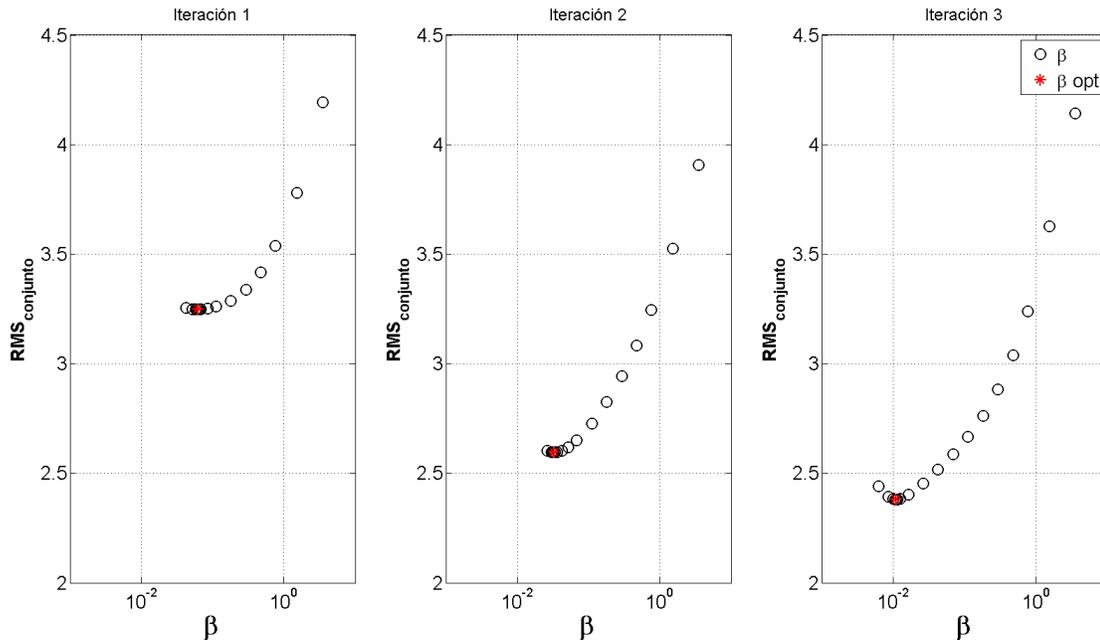


Figura 15. Búsquedas realizadas para el modelo 1 con ruido.

Realizando una comparación con el modelo de EM-LIN sin ruido (figura 14a) y el modelo de EM-LIN con ruido (figura 16a) el prisma resistivo se presenta con rangos a partir $190 \Omega \cdot m$ y para el conductor valores entre $20 - 30 \Omega \cdot m$. En ambos, la posición del prisma resistivo se encuentra desplazada lateralmente. Para el modelo de DC sin ruido (figura 14b) y con ruido (figura 16b) los cambios más notorios se observan en la definición de la base del resistivo y para el conductor el cambio principal se tienen en los laterales del cuerpo, los cuales coinciden con los prismas propuestos. Para ambos modelos, la base de los prismas no se define completamente.

El modelo conjunto de EM-LIN y DC sin ruido (figura 14c) respecto al modelo con ruido (16c) se recupera el prisma resistivo con valores entre $277 - 400 \Omega \cdot m$ y el conductor con rangos de $10 - 14 \Omega \cdot m$. Los cambios principales se observaron en los laterales del prisma conductor, no obstante se recupera definiendo en ambos la base y techo. Respecto al semiespacio los valores se mantienen en un rango de 90 y $132 \Omega \cdot m$.

En la tabla 3 se muestran los RMS obtenidos para EM-LIN, DC y la inversión conjunta. Las inversiones para EM-LIN y DC son lineales y la solución se obtiene en una iteración. El modelo conjunto convergió en la iteración 3 con un valor RMS normalizado por una estimación del 5 % de error de cada dato de 2.38 o su equivalente porcentual de 1.89 %.

Tabla 3. Análisis de RMS para el modelo 1 de EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunto) con 5 % de ruido.

Inversión	RMS		
EM-LIN	3.74 %		
DC	0.96 %		
	Iteración 1	Iteración 2	Iteración 3
	$\beta^{opt} = 0.06$	$\beta^{opt} = 0.03$	$\beta^{opt} = 0.01$
DCEM34	RMS = 3.24	RMS = 2.59	RMS = 2.38
	RMS = 2.33 %	RMS = 2.00 %	RMS = 1.89 %

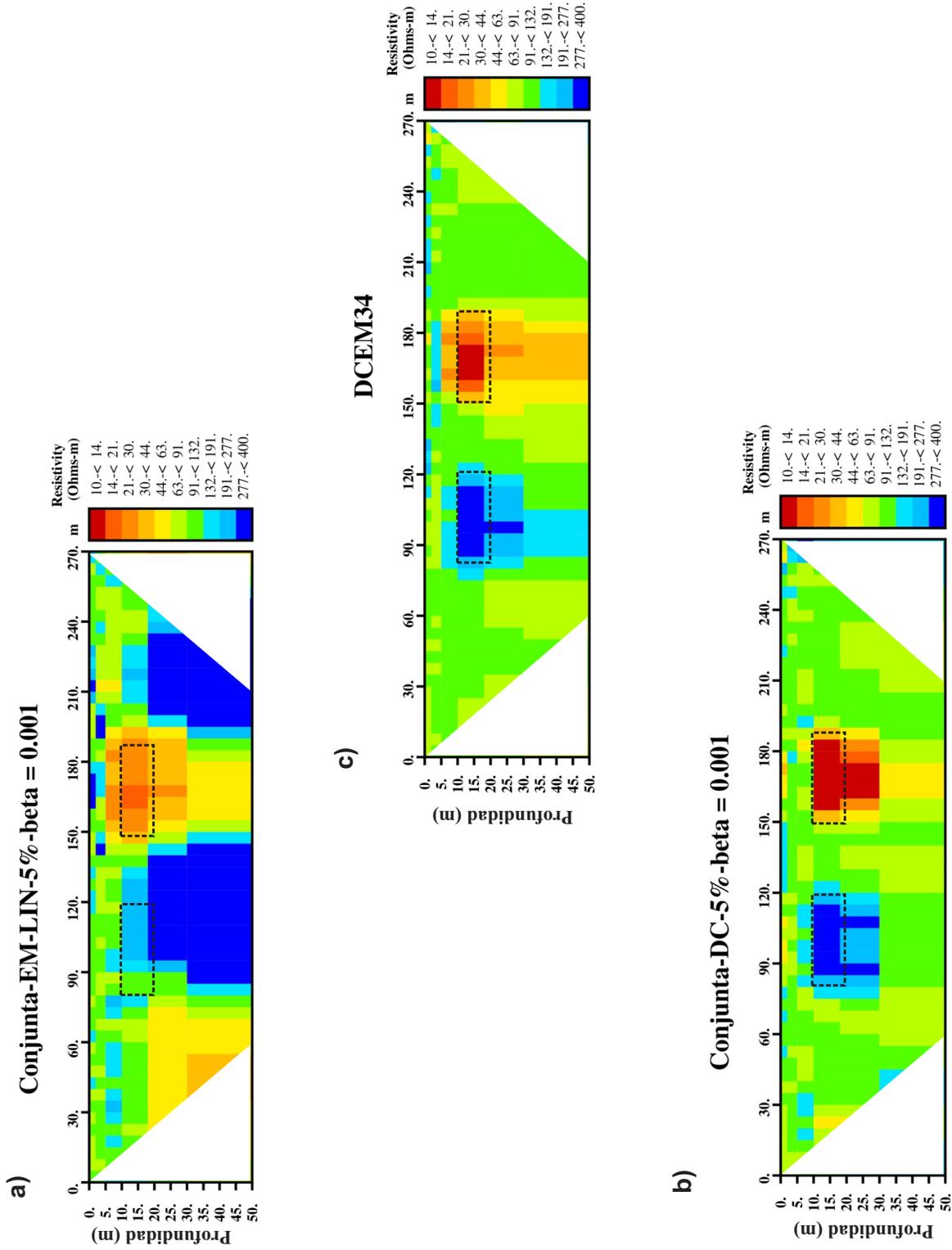


Figura 16. Inversiones del modelo 1 con 5 % de ruido para a) EM-LIN, b) DC y c) DCEM34 (conjunta entre DC y EM-LIN).

4.3. Modelo 2. Resistivo y conductor profundo sin ruido

Se replanteó el modelo 1 de manera que los prismas rectangulares ahora tienen dimensiones de 15 por 40 m y se encuentran enterrados 50 metros. La resistividad del prisma resistivo y conductor son de 1000 y 10 $\Omega \cdot m$ respectivamente y están inmersos en un semiespacio homogéneo de 100 $\Omega \cdot m$ (figura 17).

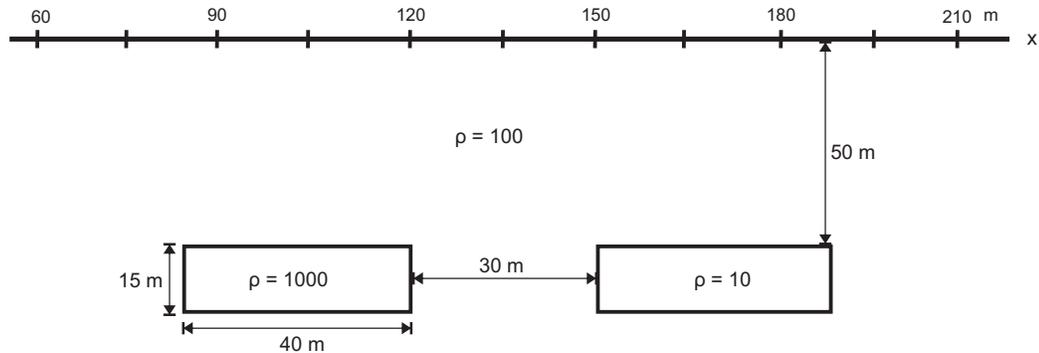


Figura 17. Esquema del modelo 2 utilizado para resistividad (DC) y electromagnéticos (LIN).

La figura 18 se muestra la pseudosección de resistividad aparente de electromagnéticos para el DMV y DMH. De estas secciones se destaca la baja sensibilidad del método a cuerpos resistivos. La figura 18a correspondiente a la respuesta sintética del DMV la cual presenta contrastes más altos asociados al prisma conductor en comparación con la respuesta sintética del DMH que se muestra en la figura 18b.

En la figura 19 se presentan las pseudo-secciones de resistividad aparente para corriente directa. En la figura 19a y 19b corresponden a los arreglos Schlumberger y Wenner respectivamente. En ambas se tiene la presencia tenue de resistividades asociadas a los prismas. La pseudosección de dipolo-dipolo que se muestra en la figura 19c se aprecia contrastes de resistividades mayores asociados a ambos prismas.

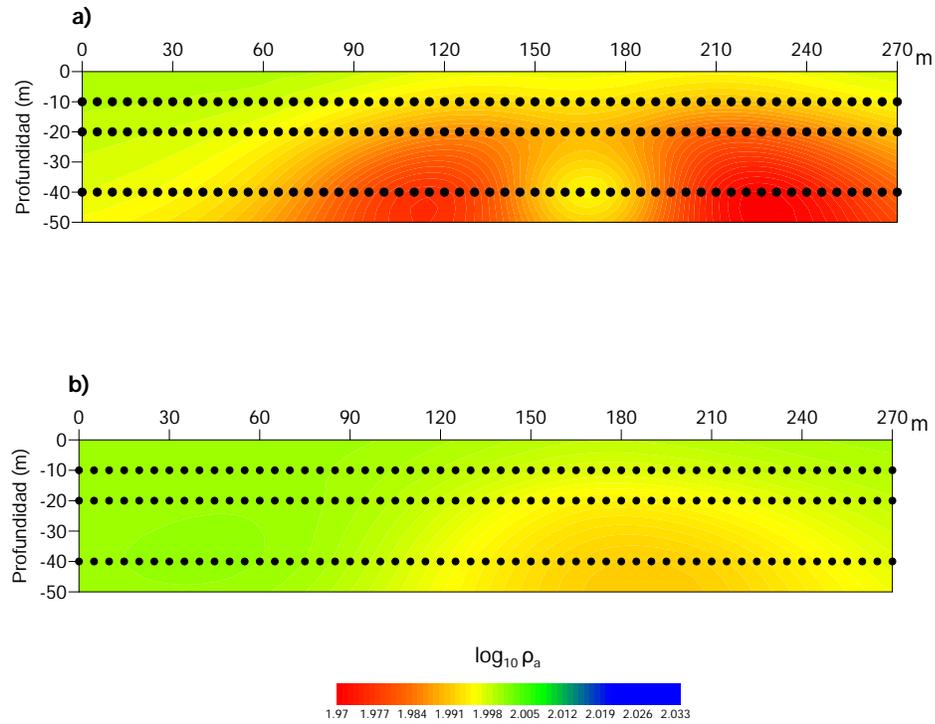


Figura 18. Respuesta sintética del modelo 2 para EM-LIN en logaritmo de resistividad. a) DMV y b) DMH.

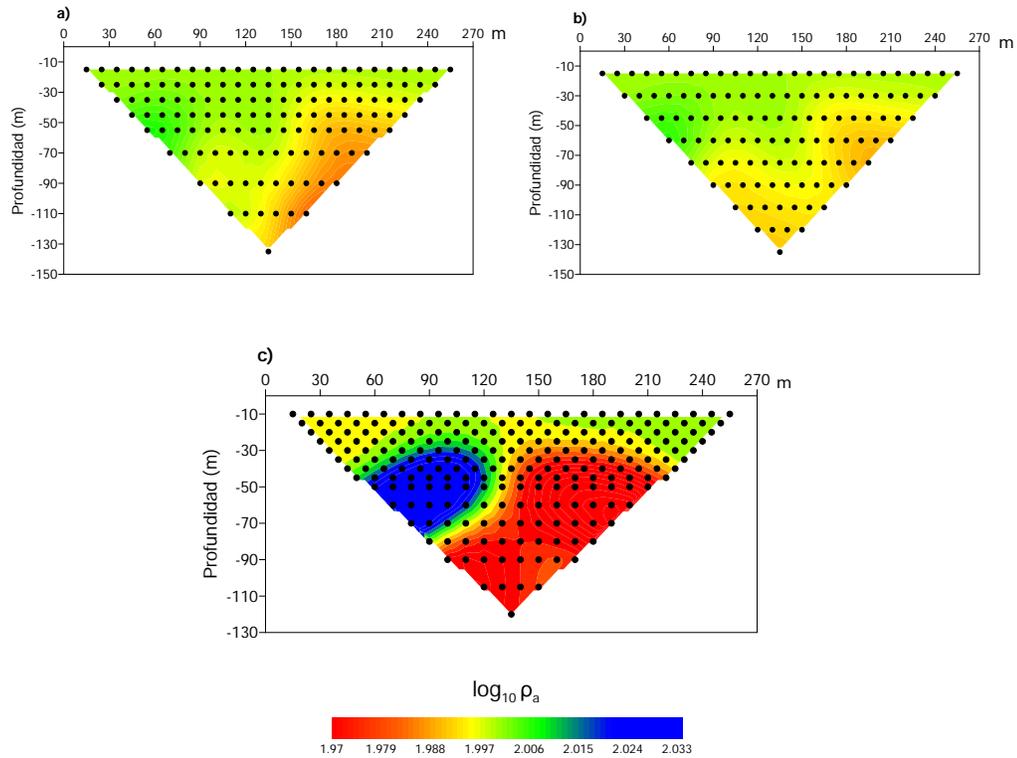


Figura 19. Respuesta sintética del modelo 2 para DC en logaritmo de la resistividad a) Schlumberger b) Wenner y c) Dipolo-dipolo.

4.3.1. Inversión separada

En la figura 20 se muestra el conjunto de inversiones para EM-LIN. La inversión del DMV que se muestra en la figura 20a, presenta de manera tenue ambos prismas propuestos con rangos de $102 - 115 \Omega \cdot m$ para el cuerpo resistivo. Para el conductor se tienen rangos entre $81 - 91 \Omega \cdot m$. La inversión del DMH que se presenta en la figura 20b se observa solo la recuperación del prisma conductor acotado de $81 - 91 \Omega \cdot m$.

En la inversión conjunta de ambas bobinas (figura 20c) se observan contrastes más altos que en las inversiones separadas. El resistivo queda acotado entre $115 - 130 \Omega \cdot m$ y el conductor con rangos de resistividad entre $65 - 86 \Omega \cdot m$. En los tres casos la parte superior e inferior de los prismas no esta definida.

En la figura 21a y 21b se presentan las inversiones de corriente directa para Schlumberger y Wenner. Se observa contrastes de resistividad asociados a los prismas propuestos sin embargo, ambas secciones carecen de definición geométrica.

La sección correspondiente a dipolo-dipolo que se muestra en la figura 21c muestra contrastes más altos de resistividad en comparación con las secciones de Schlumberger y Wenner. La anomalía resistiva es recuperada con un rango de resistividades entre $115 - 165 \Omega \cdot m$ y el prisma conductor queda acotado a rangos entre $50 - 63 \Omega \cdot m$.

En relación a la inversión conjunta entre arreglos de corriente directa que se muestran en la figura 21d, los contrastes de resistividad se mantienen similares a los obtenidos para dipol-dipolo sin embargo, en ambas secciones de resistividad se define la parte superior de los prismas.

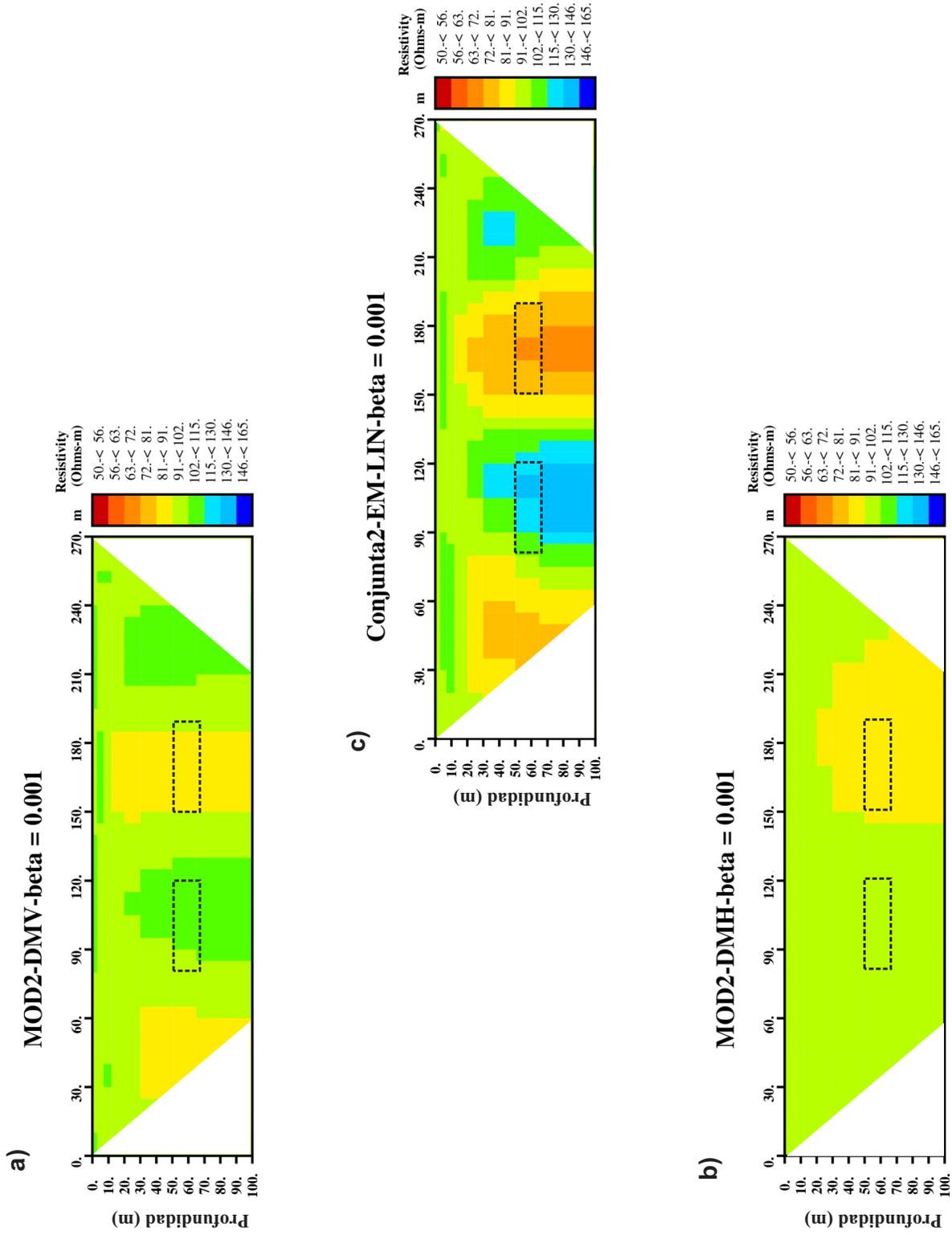


Figura 20. Inversión del modelo 2 sin ruido para a) DMV, b) DMH y la c) la inversión conjunta de ambas configuraciones.

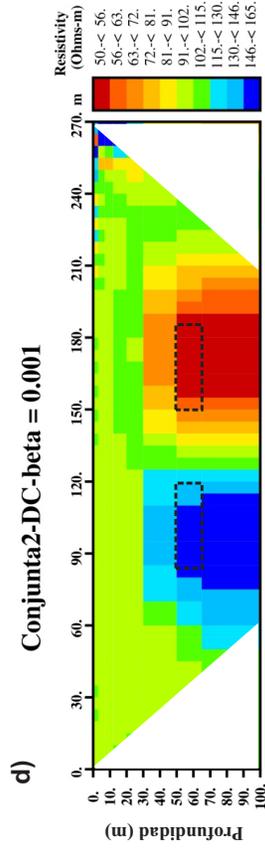
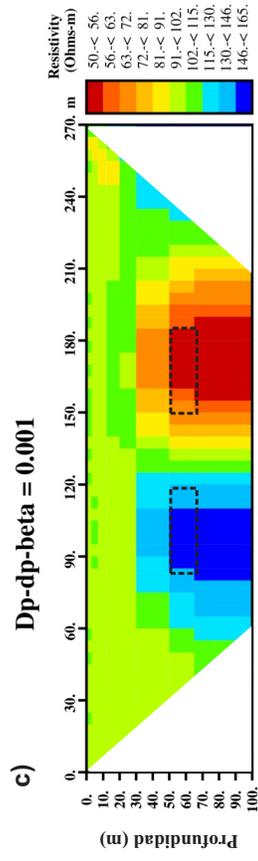
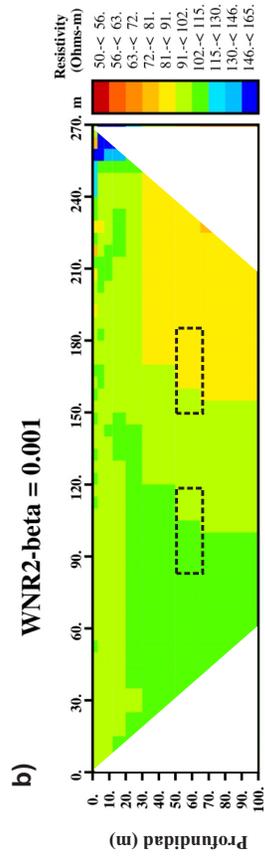
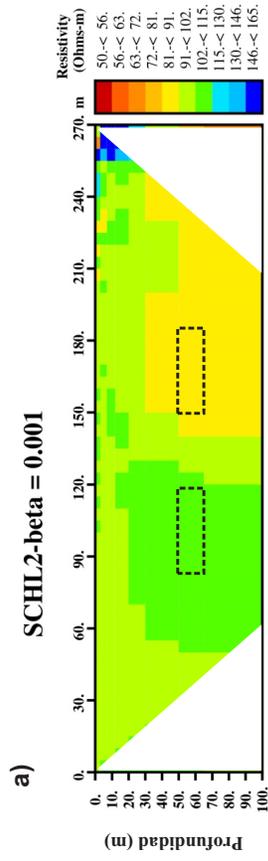


Figura 21. Inversiones del modelo 2 sin ruido para a) Schlumberger, b) Wenner, c) Dipolo-dipolo y d) conjunta entre arreglos de corriente directa.

4.3.2. Inversión conjunta entre EM-LIN y DC

Para el modelo 2, el proceso de inversión conjunta entre EM-LIN y DC la solución convergió en la tercera iteración y cada una de estas realiza la búsqueda del β^{opt} en función del mínimo RMS. En la gráfica 22 se muestra el proceso y con una marca roja (*) la selección del β que proporciona estabilidad al proceso de inversión y el modelo con mínimo RMS.

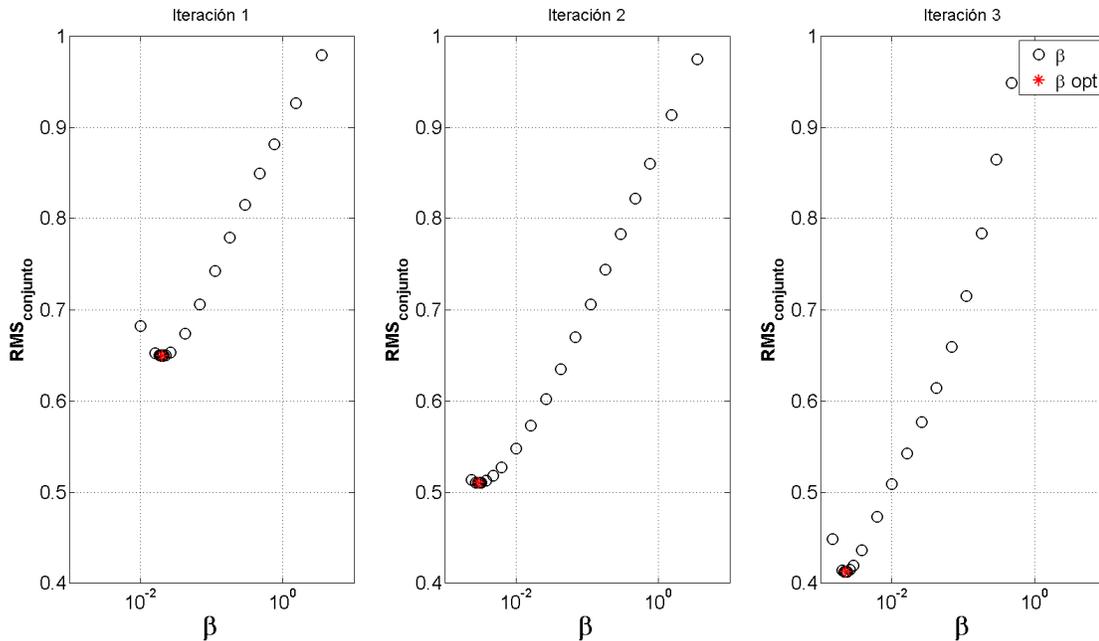


Figura 22. Búsquedas realizadas para el modelo 2 sin ruido.

El modelo conjunto de EM-LIN (figura 23a) respecto al modelo conjunto entre EM-LIN y DC (figura 23c), muestra mejoría respecto a los valores de resistividad. El resistivo se presenta con rangos de 130 – 140 $\Omega \cdot m$ y el conductor entre 60 – 80 $\Omega \cdot m$ y en ambos se aprecia el techo. Para el modelo de DC (figura 23b) respecto al modelo conjunto entre EM-LIN y DC permanece con cambios mínimos en los rangos de resistividad sin embargo, geoméricamente se observa que se tiene mejoría en la parte superior y laterales del conductor, definiendo la base en los extremos.

En la tabla 4 se muestra un análisis del RMS obtenido para el segundo modelo. Para EM-LIN y DC las inversiones son lineales y para el modelo conjunto entre EM-LIN y DC la solución convergió en la iteración 3 con un RMS normalizado por el 5 % del error de cada dato de 0.41 o su equivalente porcentual del 0.24 %.

Tabla 4. Análisis de RMS para el modelo 2 de EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunto) sin ruido.

Inversión	RMS		
EM-LIN	0.28 %		
DC	0.04 %		
	Iteración 1	Iteración 2	Iteración 3
	$\beta^{opt} = 0.02$	$\beta^{opt} = 0.002$	$\beta^{opt} = 0.002$
DCEM34	RMS = 0.64	RMS = 0.50	RMS = 0.41
	RMS = 0.32 %	RMS = 0.26 %	RMS = 0.24 %

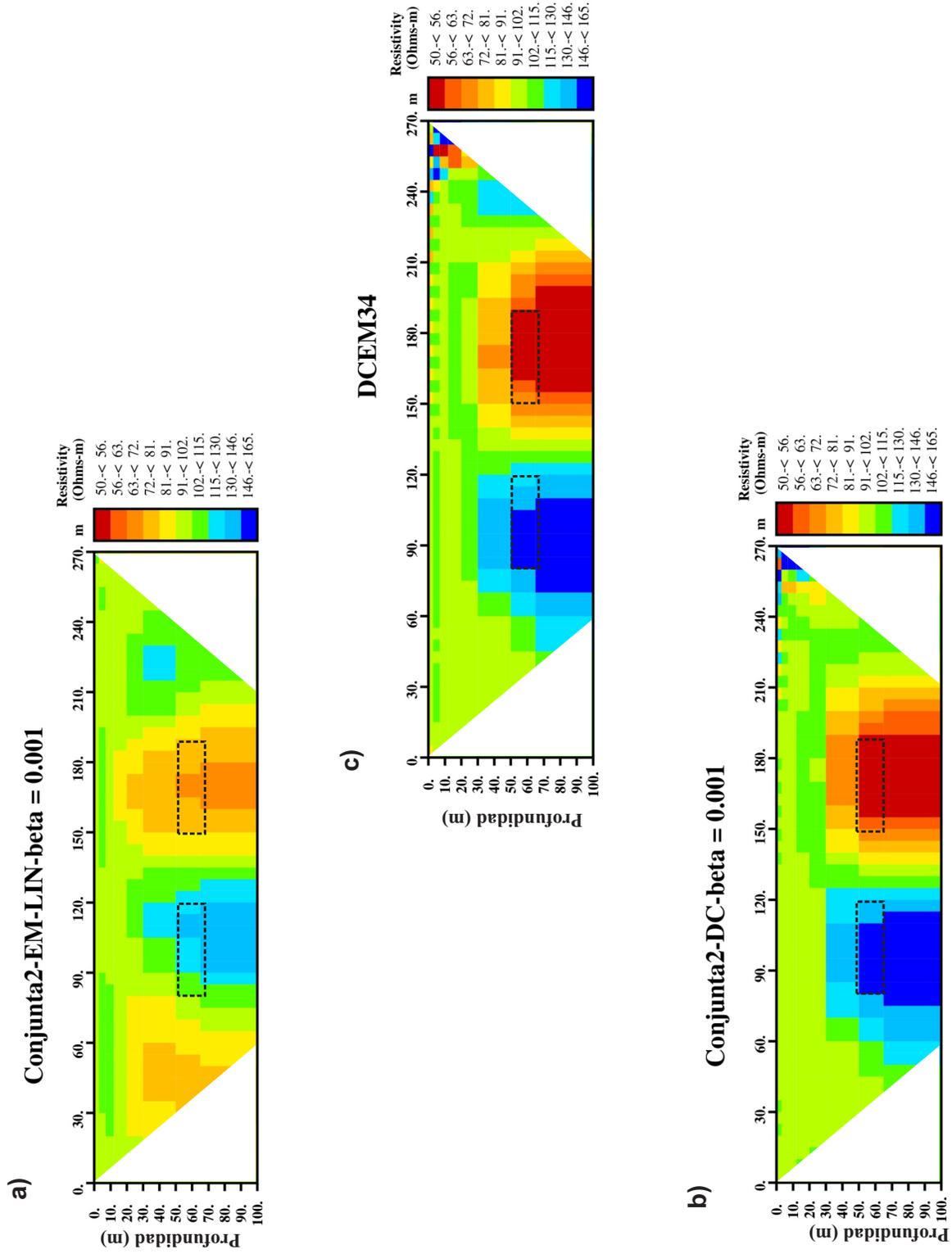


Figura 23. Inversiones del modelo 2 con ruido para a) EM-LIN, b) DC y c) DCEM34 (conjunta entre DC y EM-LIN).

4.4. Modelo 2. Resistivo y conductor profundo con ruido

La solución para el modelo 2 con la adición del 5% de ruido de distribución normal se obtuvo en tres iteraciones. En la figura 24 se muestra el proceso de búsqueda del β^{opt} en cada iteración y la selección del β (*) en función del mínimo RMS.

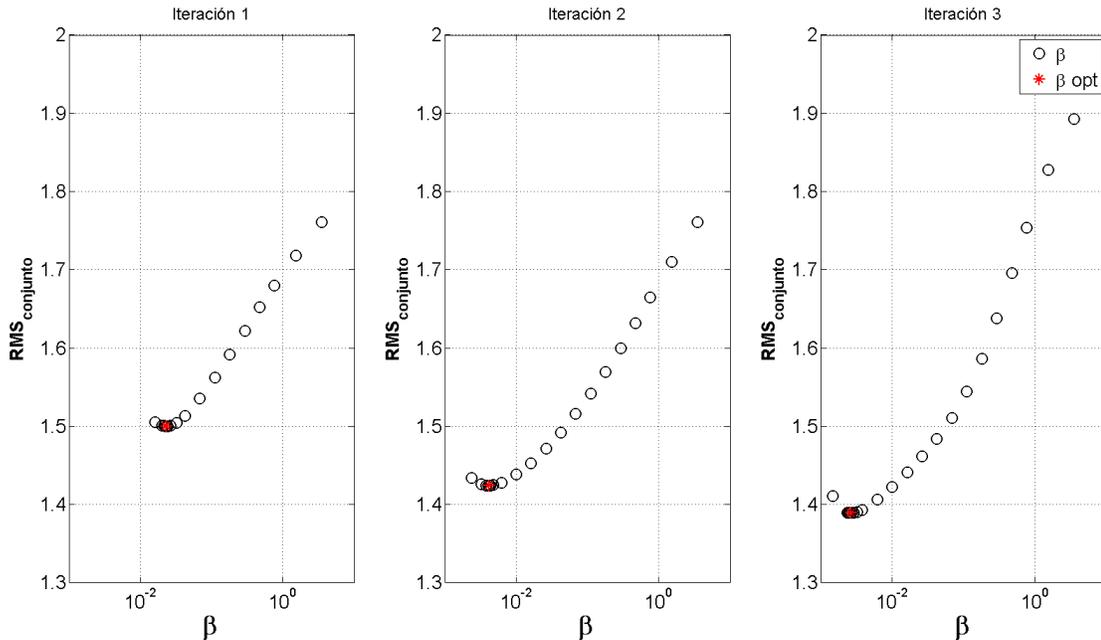


Figura 24. Búsquedas realizadas para el modelo 2 con ruido.

Si observamos el modelo de EM-LIN de la figura 25a y el modelo conjunto de la figura 25c los cambios principales se aprecian en la restricción de los rangos de resistividad. Otro cambio importante se presenta en la definición de la geometría de los prismas propuestos, ya que se delimita el techo y se acotan los laterales de manera que se logra apreciar que ambos prismas tienen extensión finita.

Respecto al modelo conjunto de la figura 25c y el modelo de DC que se muestra en la figura 25b los cambios se presentaron en la definición del techo de los prismas y en el acotamiento lateral, por lo que se aprecia la base de ambos, aun que no se limitan en profundidad. Respecto al semiespacio en el cual están inmersos se observa homogeneidad en comparación con los modelos inversos individuales.

Por último en la tabla 5 se presentan los resultados del RMS obtenidos. El modelo conjunto convergió en la iteración 3 con un RMS normalizado por el 5% del error de cada dato de 1.38.

Tabla 5. Análisis de RMS para el modelo 2 de EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunto) con ruido.

Inversión	RMS		
EM-LIN	3.22 %		
DC	0.77 %		
	Iteración 1	Iteración 2	Iteración 3
	$\beta^{opt} = 0.02$	$\beta^{opt} = 0.004$	$\beta^{opt} = 0.002$
DCEM34	RMS = 1.50	RMS = 1.42	RMS = 1.38
	RMS = 1.25 %	RMS = 1.20 %	RMS = 1.18 %

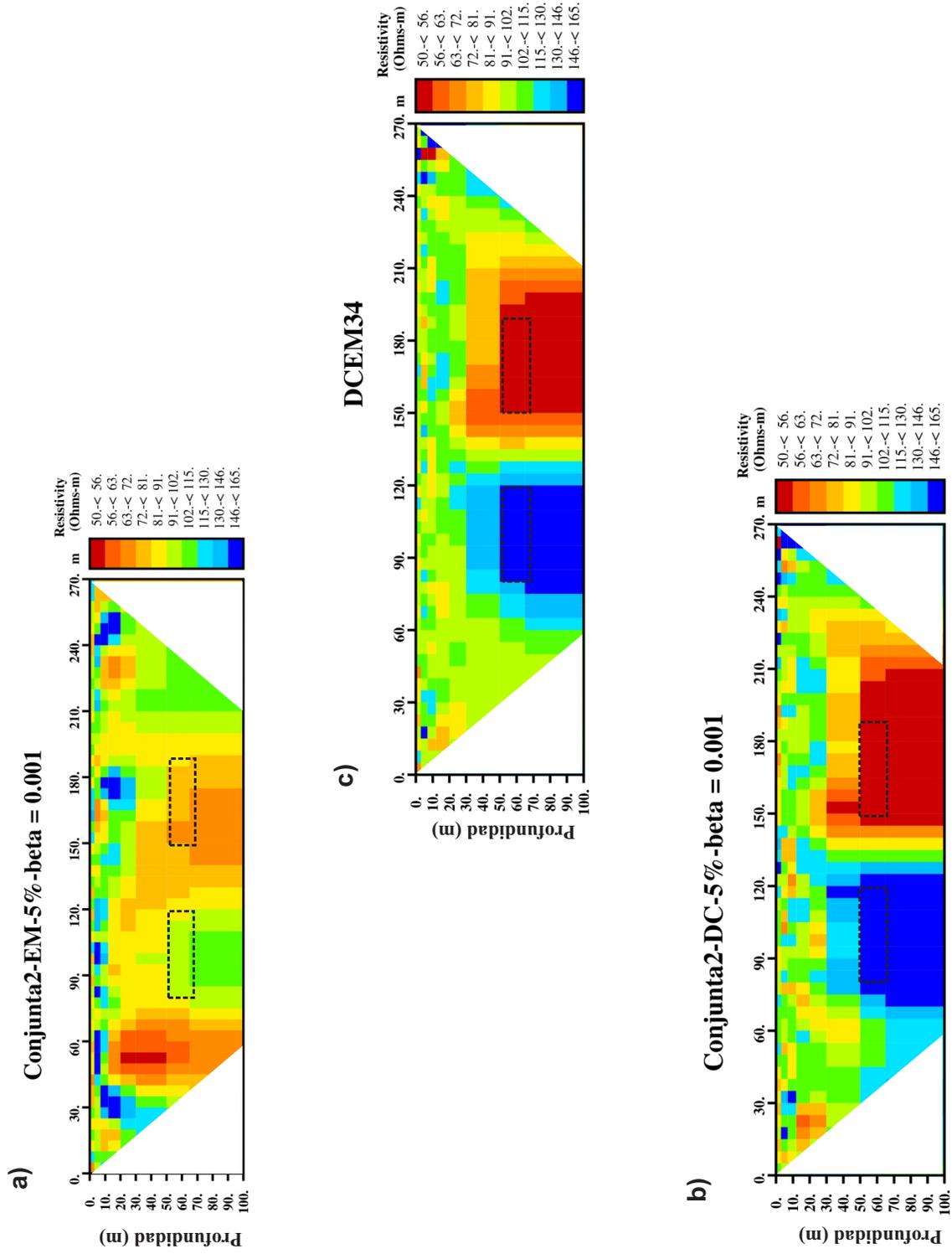


Figura 25. Inversiones del modelo 2 con ruido para a) EM-LIN, b) DC y c) DCEM34 (conjunta entre DC y EM-LIN).

Capítulo 5. Aplicación a datos reales

En este capítulo, se describe la aplicación del método de inversión conjunta a dos casos reales con el fin de probar el desempeño del algoritmo. En primer lugar, se describirán las inversiones obtenidas por separado y a continuación se presentarán los resultados de la inversión conjunta para los datos obtenidos en el Valle de Maneadero, B.C y el segundo caso que se detalla será para un conjunto de datos obtenidos en Las Auras, Tecate, BC.

5.1. Caso 1. Marco geológico del Valle de Maneadero

La zona de estudio queda comprendida dentro del Valle de Maneadero, localizado a 12 km de la ciudad de Ensenada, Baja California. La extensión de la cuenca es de 15 km de ancho por 20 km de largo, bordeada al sur por las montañas de Punta Banda y delimitada al Oeste por el Océano Pacífico (Fabriol *et al.*, 1982)

El bloque de Ensenada pertenece a la provincia geomorfológica de la Costa Pacífica y se incluye dentro del bloque Planicie Costera de Todos Santos. Esta planicie cubre a la ciudad de Ensenada, Valle de Maneadero y Bahía de Todos Santos. El área es un semi-graben controlado por la falla de Agua Blanca en el límite sur (Flores *et al.*, 2004).

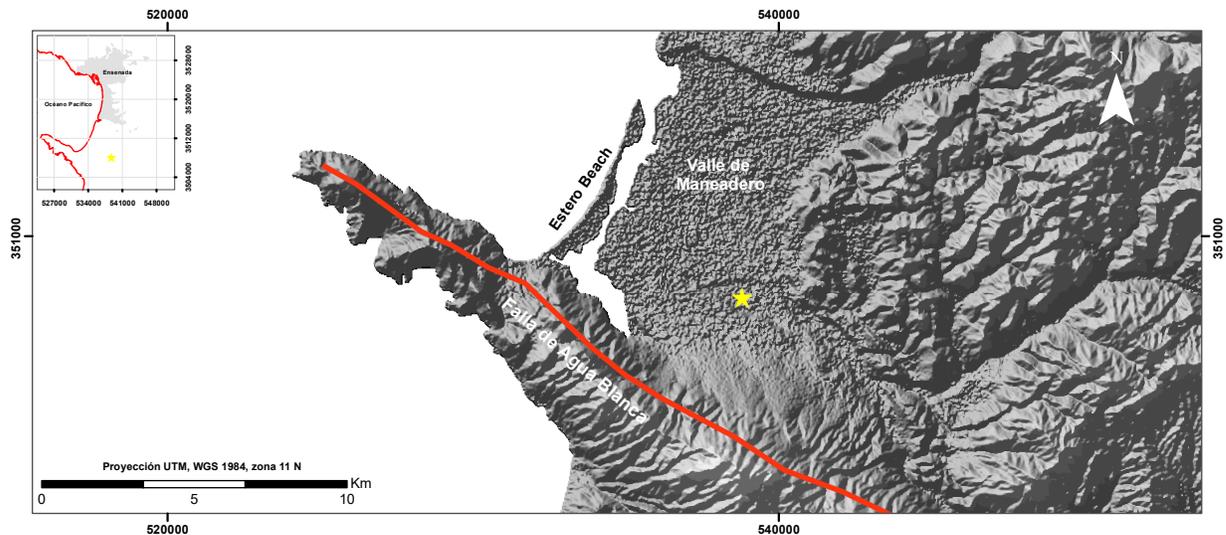


Figura 26. Ubicación de la zona de estudio ★ (DEM, res. 30 m, fuente USGS).

El Valle de Maneadero comprende tres unidades geológicas; una de rocas graníticas del batolito mesozoico aflorando en la parte oriental, la segunda son rocas volcánicas que constituyen la península de Punta Banda y la tercera con rocas sedimentarias del cuaternario divididas en aluviales, fluviales y de playa (Fabriol *et al.*, 1982).

El principal elemento estructural es la falla de Agua Blanca, la cual continúa mar adentro. En el segmento norte, a lo largo del Ejido Sánchez Taboada, la falla tiene un comportamiento de falla normal, con desplazamiento vertical significativo que forma el límite suroeste del semi-graben (Flores *et al.*, 2004).

5.2. Adquisición e Inversión

La adquisición de los datos se realizó sobre un perfil de 270 m en dirección Oeste-Este, en el cual se obtuvieron datos electromagnéticos en sus dos modalidades (DMV y DMH). Para corriente directa se obtuvieron datos para Schlumberger, Wenner y Dipolo-Dipolo.

Los datos de electromagnéticos se obtuvieron con el equipo de la marca Geonics Limited modelo EM34-3L. Las mediciones fueron obtenidas con las separaciones de 10 y 20 m. Debido a problemas de ruido ambiental la adquisición con la separación de 40 m se suspendió después de varios intentos. El levantamiento de datos de corriente directa fue hecho con el equipo SuperSting R1IP utilizando 28 electrodos separados 10 m. En las figuras 27 y 28 se muestran las pseudo-secciones graficadas como logaritmo base diez de la resistividad, esto se realizó con el propósito de revisar la coherencia para cada arreglo, con lo que también fue posible descartar datos anómalos (saltos de magnitudes cercanas entre un punto y otro).

Las pseudo-secciones de conductividad aparentes de EM-LIN se presentan en la figura 27, en ambas pseudo-secciones se observa la aparición de una anomalía conductiva en la parte inferior. Sin embargo, se tienen contrastes más altos para la pseudo-sección del DMV (figura 27a).

En la figura 28 se muestran las pseudo-secciones de resistividad aparente para corriente directa. En las tres secciones los rangos de resistividad son coherentes, se

observa una zona resistiva en la parte superior y una zona conductiva en la parte inferior de los perfiles. Conviene subrayar que la pseudo-sección de dipolo-dipolo (figura 28c) se depuró debido a que se tenían resistividades negativas y saltos de magnitud entre un punto y otro, por lo que en la parte inferior se observa menor densidad de datos.

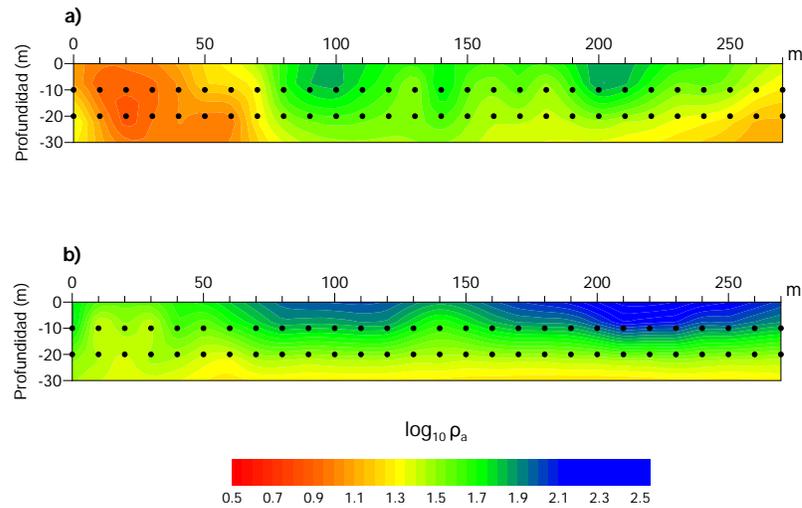


Figura 27. Línea 1. a) DMV y b) DMH.

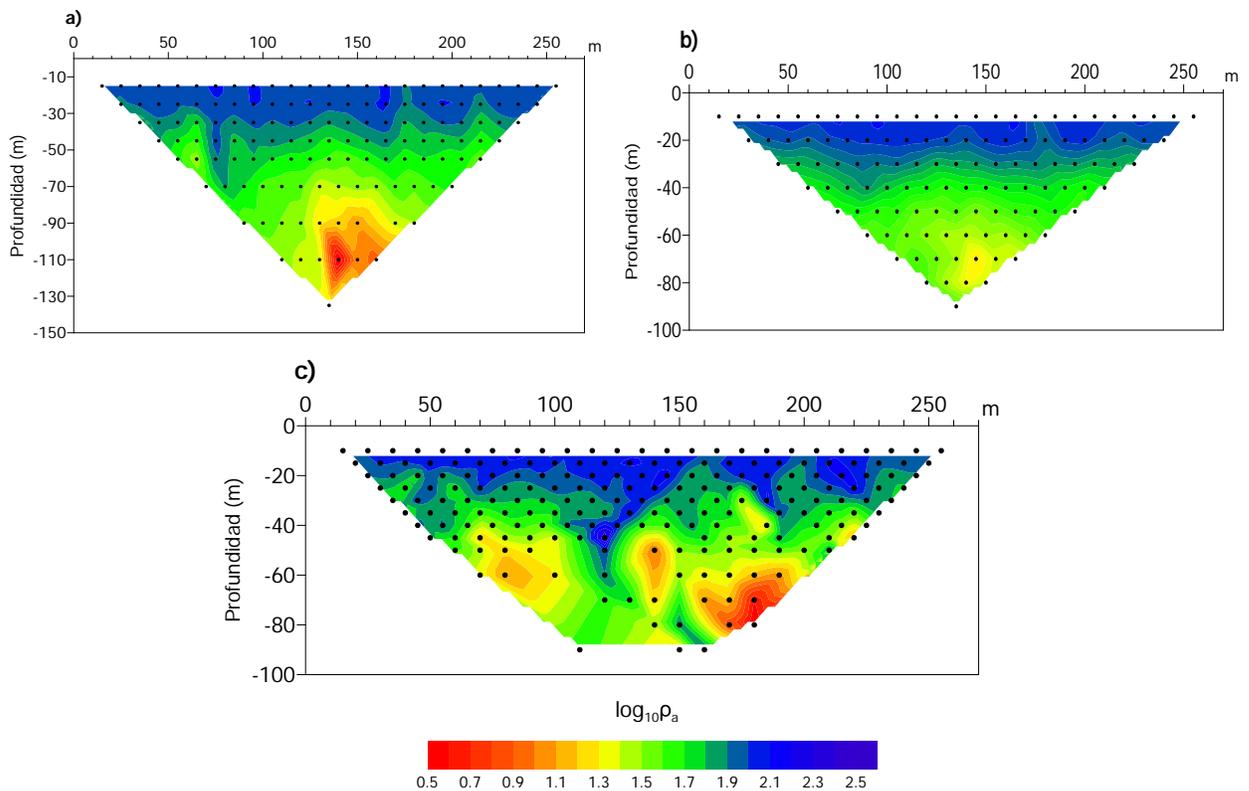


Figura 28. Línea 1. Resistividades aparentes: a) Schlumberger, b) Wenner y c) dipolo-dipolo.

5.2.1. Inversión de datos separada para EM-LIN y DC

La inversión de los datos de electromagnéticos se realizó de manera separada para el DMV y DMH (figura 29a y 29b) y conjunta entre ambas modalidades (figura 29c). Para el DMV se muestra en la mayoría del perfil una zona conductora con valores entre 8 a 30 $\Omega\cdot\text{m}$ y la aparición de una zona resistiva entre 70 m y 120 m en dirección horizontal, con valores a partir de 125 $\Omega\cdot\text{m}$. El DMH sigue teniendo la presencia de una zona conductora a lo largo de todo el perfil con valores entre 8 y 30 $\Omega\cdot\text{m}$. En la parte superior del perfil se aprecia la definición de una capa resistiva con valores entre 30 a 60 $\Omega\cdot\text{m}$.

En la inversión conjunta entre ambos dipolos que se observa en la figura 29, se tiene la presencia de la anomalía resistiva que corta al conductor y se extiende en profundidad. Es notable la zona somera de baja resistividad al inicio del perfil la cual se asoció a la intrusión salina proveniente del mar. El valor de β usado fue de 10^{-2} , el cual se eligió después de realizar pruebas con valores de 10^{-1} y 10^{-3} que resultó en modelos muy suaves y en modelos con mucha estructura o rugosos respectivamente.

En la figura 30 se muestra la inversión por separado para los datos de corriente directa. La figura 30a y 30b corresponden a las secciones de Schlumberger y Wenner, es notable la similitud de ambas secciones con la aparición de una zona conductora con valores entre 2 y 30 $\Omega\cdot\text{m}$ sobre todo el perfil. En la parte superior se tiene una zona resistiva más clara a comparación de los perfiles de EM-LIN con valores entre 60 a 125 $\Omega\cdot\text{m}$. En ambos perfiles se destaca de manera sutil la separación de la anomalía conductora.

La sección correspondiente a dipolo-dipolo (figura 30c) muestra una zona conductora más contrastante a lo largo del perfil con valores entre 2 a 32 $\Omega\cdot\text{m}$. En la parte superior se aprecia una zona resistiva con valores entre 60 a 126 $\Omega\cdot\text{m}$. Se resalta la aparición del resistivo que corta al conductor entre $x = 60$ m y $x = 90$ m en dirección horizontal.

El modelo de inversión conjunta entre arreglos de corriente directa se muestra en la figura 30c, se observa la presencia de una capa resistiva comprendida entre 0 m y 15 m de espesor con valores de 60 y 126 $\Omega\cdot\text{m}$. Debajo de esta capa, se aprecia una zona

conductora con valores entre 2 y 30 $\Omega\cdot\text{m}$. Es notable que entre $x = 60$ m y $x = 90$ m en dirección horizontal destaca el resistivo que corta a la anomalía conductora. El valor de suavizamiento β usado fue de 10^{-2} el cual se seleccionó después de realizar pruebas con β de 10^{-1} y 10^{-3} que resultó en modelos muy suaves y con mucha estructura respectivamente.

Los modelos obtenidos en ambos perfiles se corroboraron con los resultados de la línea 2 reportado por Serrano Ortiz (2011) ya que los perfiles de EM-LIN y de DC obtenidos para este trabajo se localizan aproximadamente a la mitad y de manera perpendicular a la línea 2, en el cual se reporta una zona resistiva somera con valores de 60 a 200 $\Omega\cdot\text{m}$ asociada a arena, grava y arcilla saturada de agua y sobre el mismo perfil en una zona entre 65 y 90 m de profundidad reporta una zona conductora con rangos de resistividad entre 12 y 35 $\Omega\cdot\text{m}$ asociada a presencia de agua salina la cual se hace más somera avanzando hacia el norte.

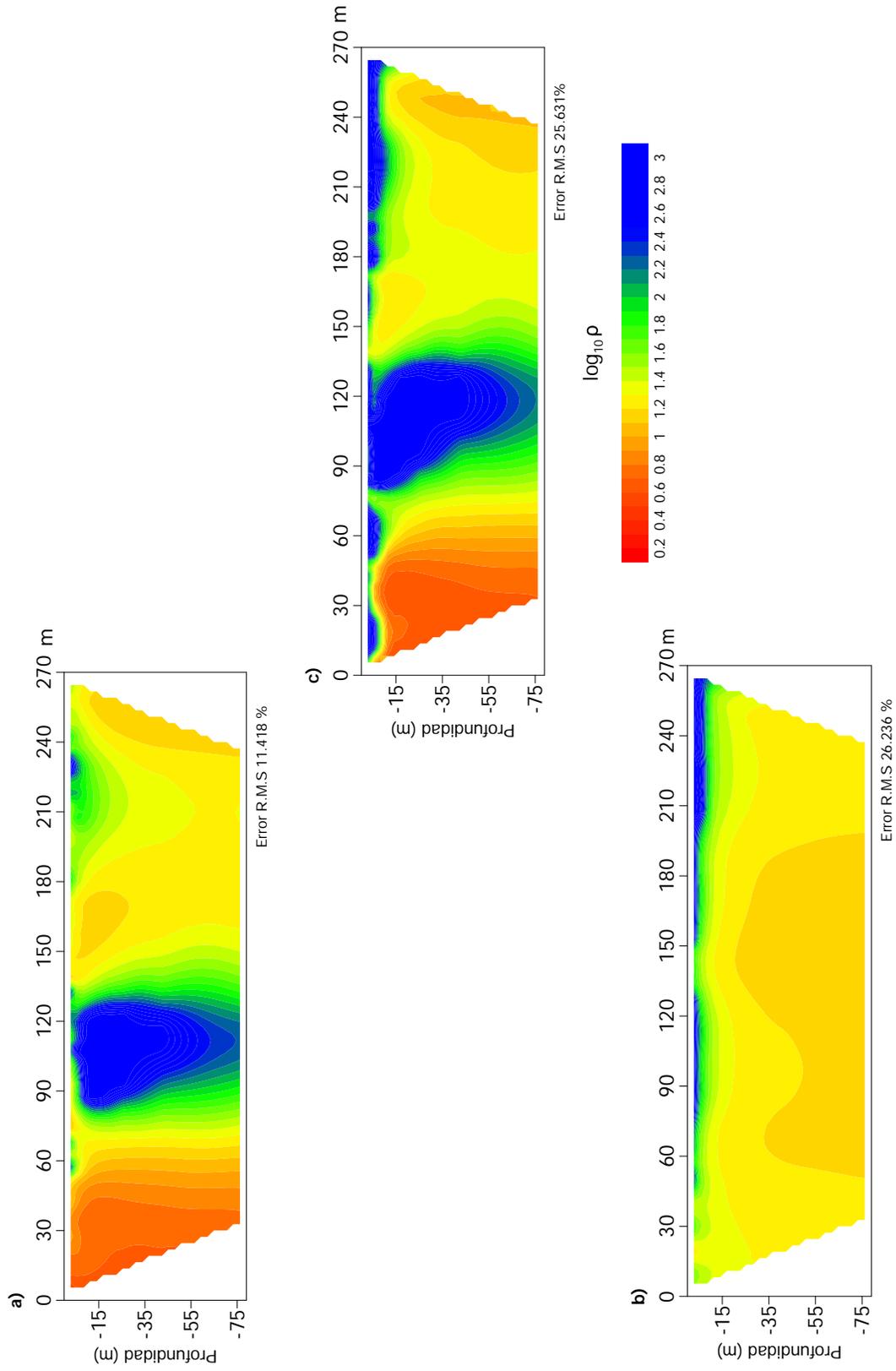


Figura 29. Inversiones de a) DMV, b) DMH y c) conjunta entre ambas bobinas, zona Maneadero.

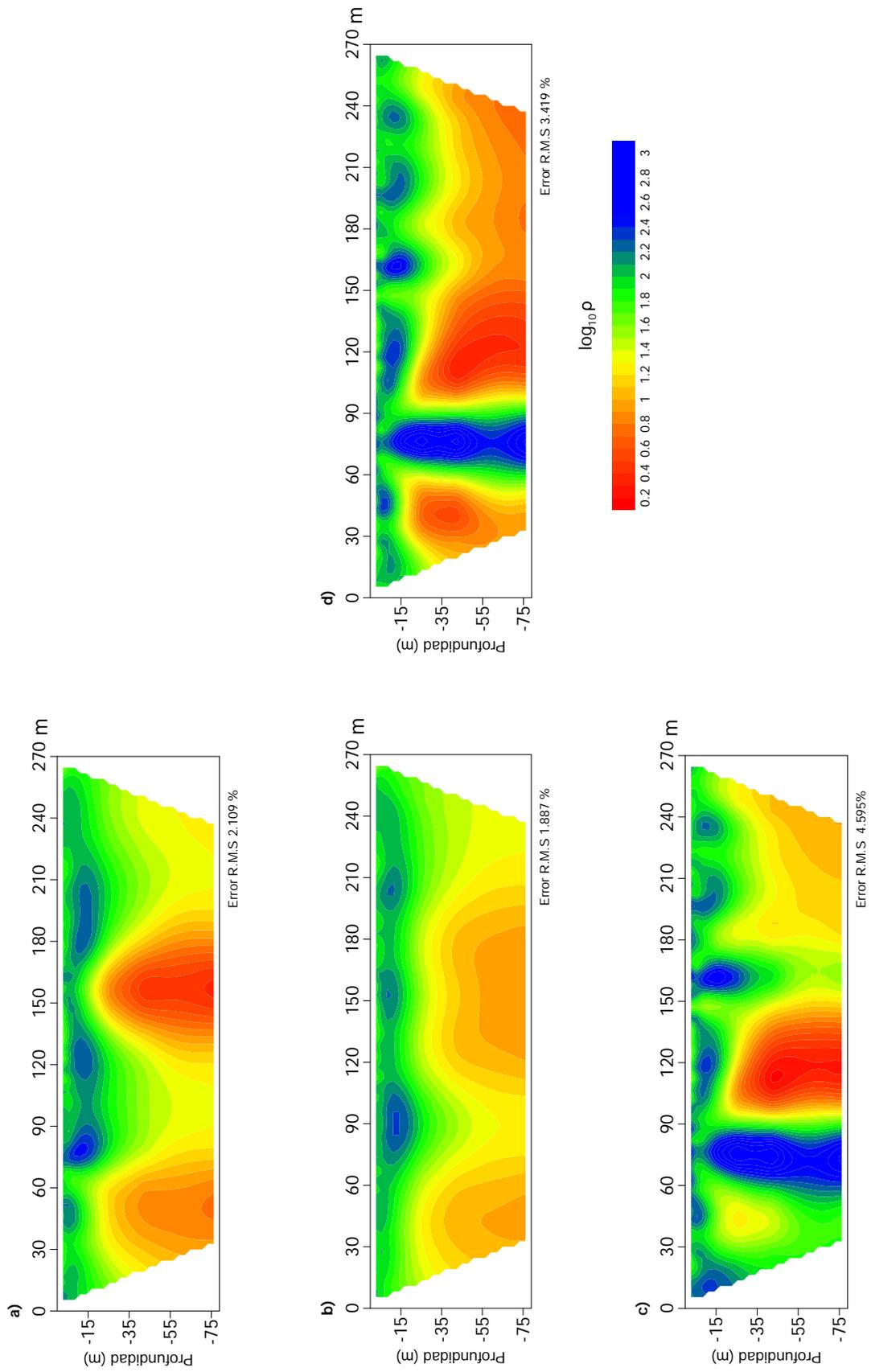


Figura 30. Inversión de a) Schlumberger, b) Wenner, c) Dipolo-dipolo y c) conjunta entre arreglos de corriente directa, zona Maneadero.

5.2.2. Inversión conjunta entre EM-LIN y DC

Para esta prueba con datos reales, el proceso de inversión convergió en la cuarta iteración. En la figura 31 se presentan en color negro cada búsqueda realizada y la marca roja (*) el valor de β^{opt} que estabiliza el proceso y nos da un modelo con menor RMS.

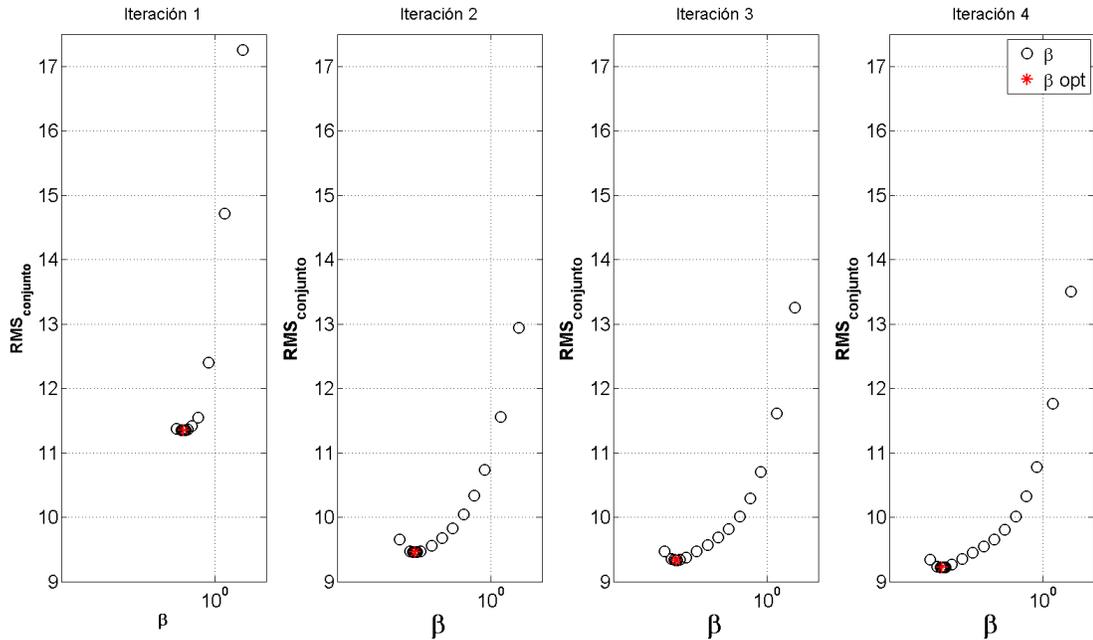


Figura 31. Búsquedas realizadas para los datos de Maneadero.

El modelo recuperado de la inversión conjunta entre EM-LIN y DC se muestra en la figura 32c. Respecto al modelo de EM-LIN (figura 32a) se observa valores de resistividad constreñidos entre 2 y 16 $\Omega \cdot m$ para la zona conductora. En la zona resistiva se tiene mejor definición con valores entre 60 a 126 $\Omega \cdot m$.

En el caso de DC (figura 32b) la zona conductora permanece con cambios mínimos con valores entre 2 y 16 $\Omega \cdot m$. De manera general, el modelo conjunto que se muestra en la figura 32c, se destaca al inicio la anomalía conductora asociada a la intrusión salina proveniente del mar. Entre $x = 60$ m y $x = 100$ m en dirección horizontal, se observa una anomalía resistiva que se extiende de $z = 0$ m y $z = 60$ m de profundidad cortando al conductor. Excluyendo estos resistivos, el conductor se encuentra en la mayoría del perfil, lo cual nos indica que todo esta invadido por la intrusión salina.

Para completar el análisis de los modelos obtenidos, se realizó la tabla 6 con los resultados del RMS de cada inversión. El modelo conjunto entre EM-LIN y DC convergió en la iteración 4 con un RMS normalizado por una estimación del 5 % de error de cada dato de 9.21 o su equivalente porcentual de 10.39 %.

Tabla 6. Análisis de RMS para los modelos EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunto), zona Maneadero.

Inversión	RMS			
EM-LIN	25.63 %			
DC	3.41 %			
	Iteración 1	Iteración 2	Iteración 3	iteración 4
	$\beta^{opt} = 0.2$	$\beta^{opt} = 0.03$	$\beta^{opt} = 0.01$	$\beta^{opt} = 0.01$
DCEM34	RMS = 11.34	RMS = 9.45	RMS = 9.33	RMS = 9.21
	RMS = 12.09 %	RMS = 10.46 %	RMS = 10.42 %	RMS = 10.39 %

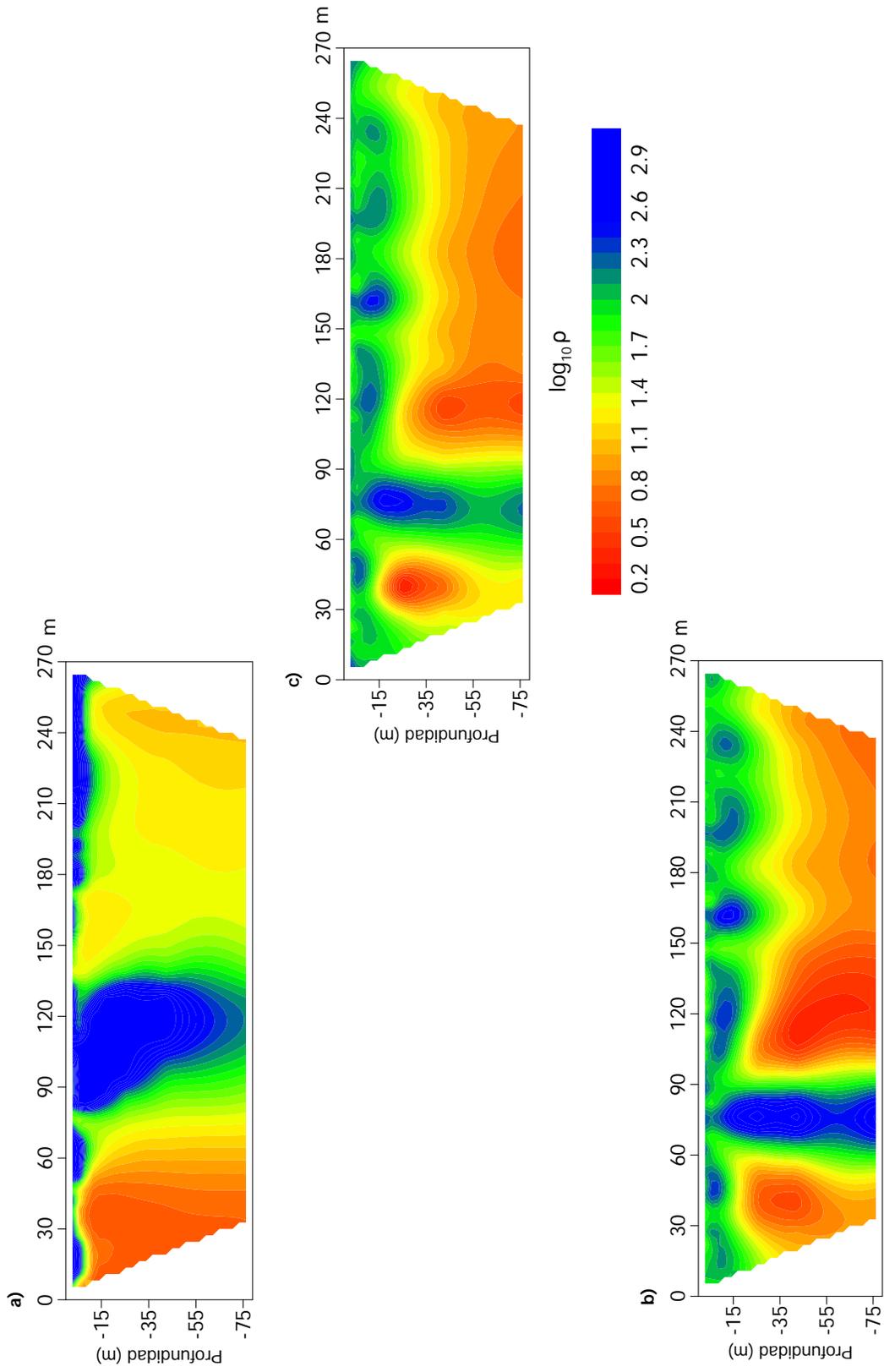


Figura 32. Inversiones de a) EM-LIN, b) DC y c) DCEM34 (conjunta entre EM-LIN y DC).

5.3. Caso 2. Determinación del espesor de sedimentos: Las Auras

Para este caso, se tomaron datos que fueron obtenidos por el Dpto. de Geofísica Aplicada del CICESE (1994) como parte de prácticas de campo en las que se utilizaron diversos métodos geofísicos incluyendo electromagnéticos a bajos números de inducción y corriente directa. En los siguientes párrafos describiremos las secciones de resistividad aparente para EM-LIN y DC además de la descripción de las secciones invertidas.

La adquisición electromagnética se realizó con el equipo de la marca Geonics Limited Modelo EM34-3L. Las mediciones fueron tomadas con las separaciones de 10, 20 y 40 m para ambas modalidades (DMV y DMH). El levantamiento de datos de corriente directa se realizó con el equipo Bison modelo 2390. Se tomaron solo datos para el arreglo dipolo-dipolo, con una abertura de 10 m.

La pseudo-secciones de resistividad aparentes para ambos arreglos de datos electromagnéticos se muestran en la figura 33a y 33b. En ambas se presenta una zona conductiva superficial, sin embargo para el DMV se muestra una anomalía resistiva en la parte inferior.

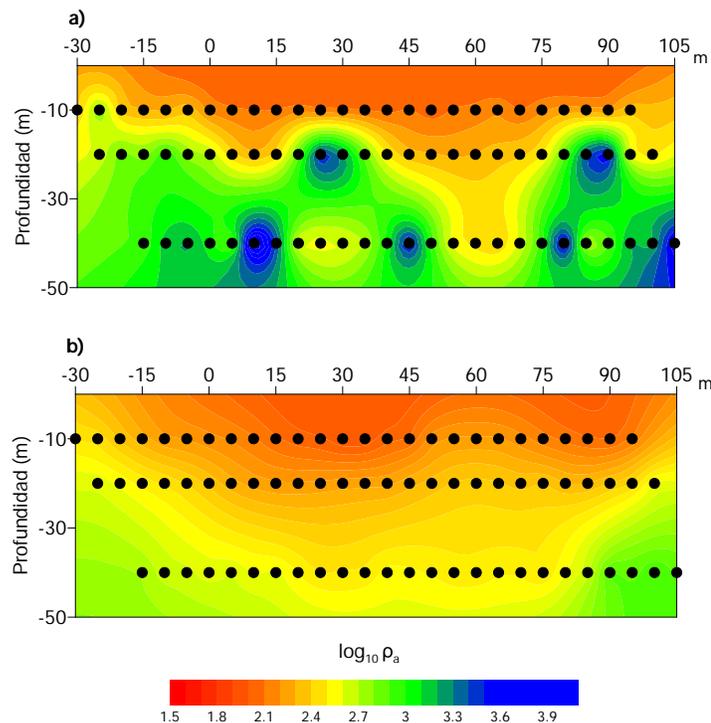


Figura 33. Pseudo-secciones de resistividad aparente de a)DMV y b) DMH.

La pseudo-sección de resistividad aparente en corriente directa mostrada en la figura 34 presenta una zona conductora en la mayor parte del tendido.

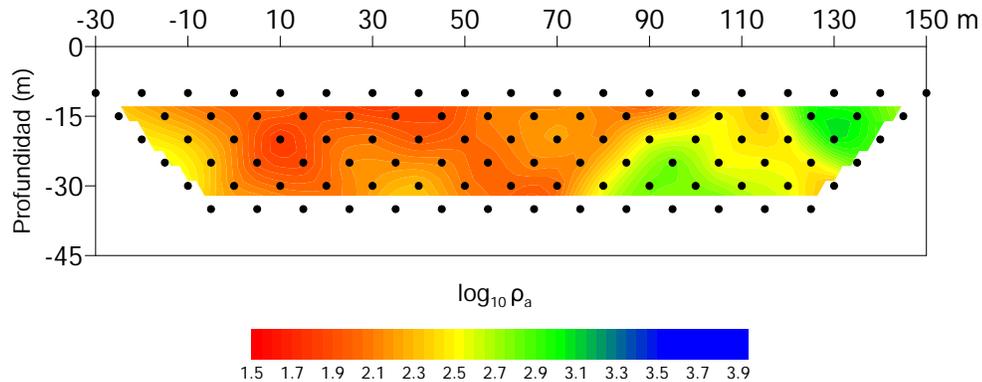


Figura 34. Pseudo-sección de resistividades aparente de dipolo-dipolo.

5.3.1. Inversión de datos separada para EM-LIN y DC

La inversión por separado de cada arreglo de bobinas se muestra en la figura 35. Para el perfil del DMV (figura 35a) presenta una zona conductiva en la parte superior con valores de 30–120 $\Omega \cdot m$ inmersa en una zona resistiva de hasta 1000 $\Omega \cdot m$. Para el DMH (figura 35b) se muestra más o menos la misma anomalía conductora con resistividades entre 30–180 $\Omega \cdot m$ y la zona resistiva que parece rodear a esta anomalía. La inversión conjunta entre ambas bobinas muestra una zona conductora más acotada a comparación de los modelos por separado y rodeada por una zona de alta resistividad.

La sección de dipolo-dipolo que se muestra en la figura 36 se aprecia una anomalía conductora en la parte superior con una geometría similar a las anomalías que se observaron en las secciones de EM-LIN, también se observa como se va delimitando gradualmente la zona conductora. Se destaca un contraste de resistividad alta en la parte derecha del perfil con valores de hasta 1000 $\Omega \cdot m$.

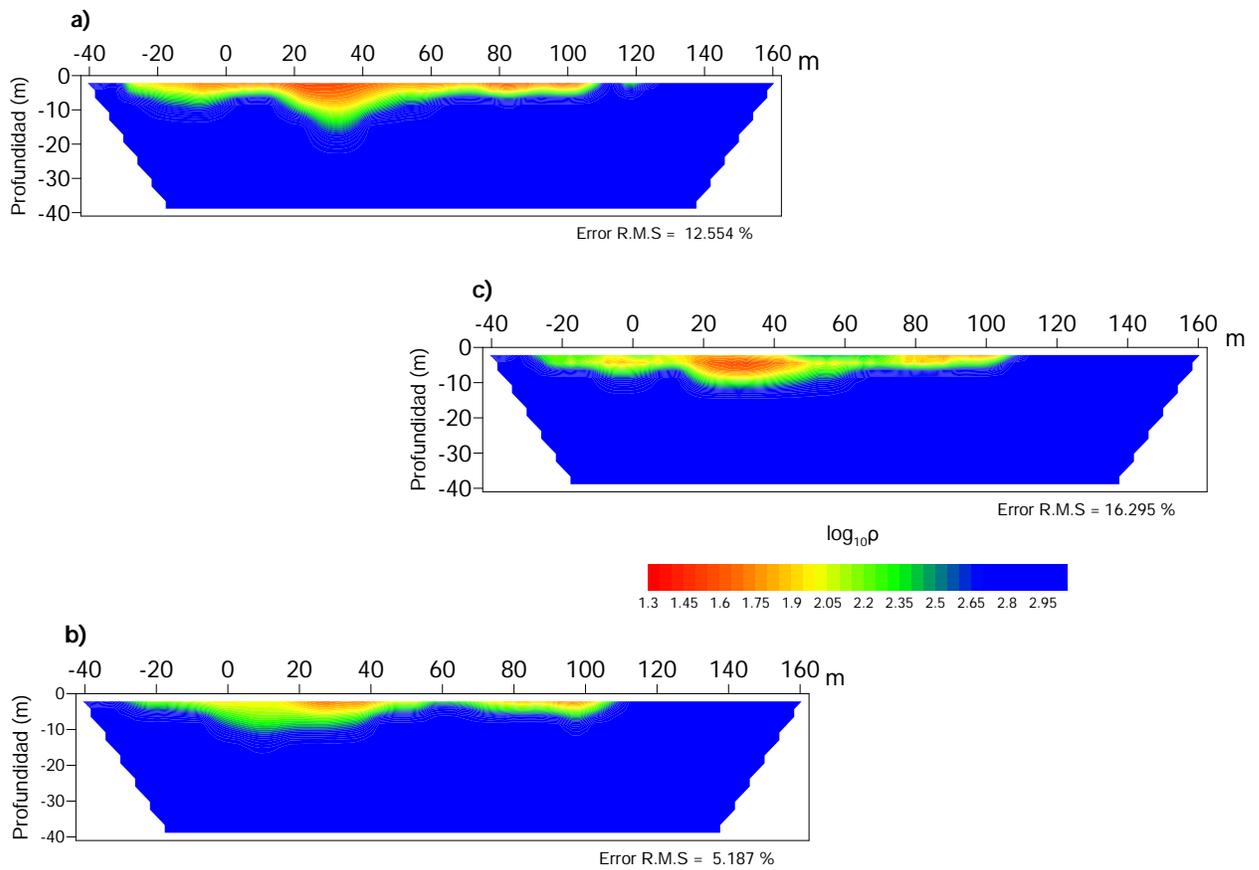


Figura 35. Inversiones de a) DMV, b) DMH y c) conjunta entre ambas bobinas, zona Las Auras.

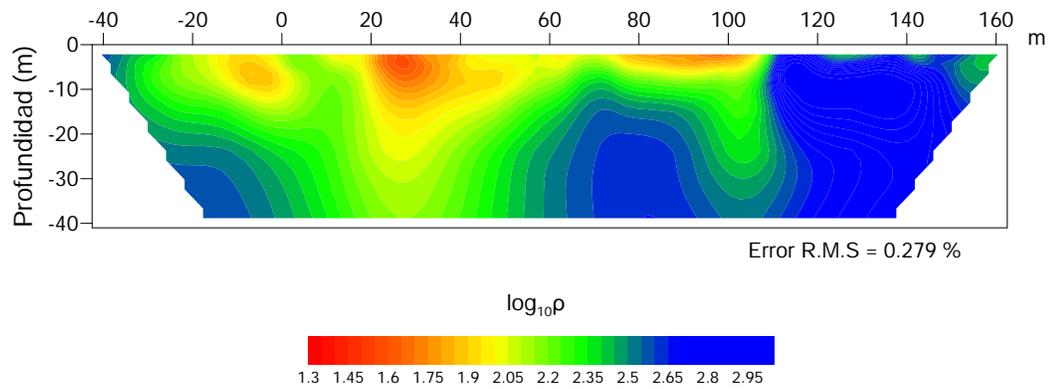


Figura 36. Inversión de dipolo-dipolo, zona Las Auras.

5.3.2. Inversión conjunta entre EM-LIN y DC

Para la segunda prueba con los datos tomados en Las Auras, la inversión convergió en la tercera iteración. El proceso de búsqueda se muestra en la figura 37 donde la marca en color rojo (*) representa el β^{opt} que estabiliza el proceso y nos da un modelo con menor RMS.

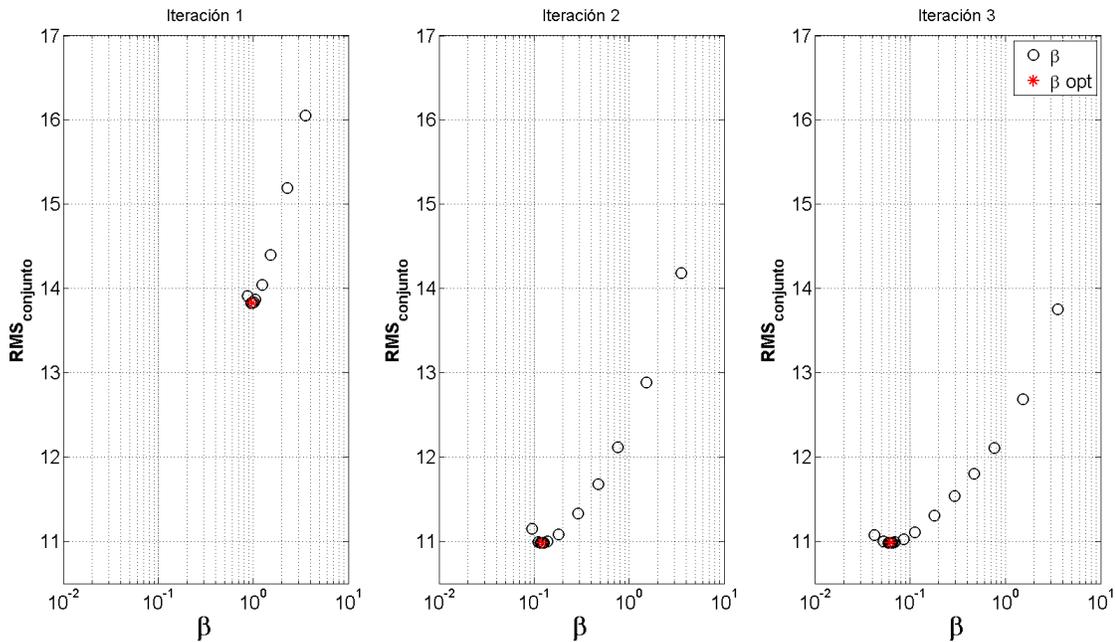


Figura 37. Búsquedas realizadas para los datos de Las Auras.

Respecto al modelo conjunto de EM-LIN (figura 38a) se observa una distribución de anomalías conductoras limitadas en profundidad de 0 – 20 m con valores de resistividad de 20 – 160 $\Omega \cdot m$. Se aprecia una zona de transición resistiva que alcanza valores de hasta 1000 $\Omega \cdot m$. Referente al modelo de dipolo-dipolo (figura 38b), la inversión conjunta muestra a la anomalía conductora distribuida de manera horizontal y con contrastes más altos en los valores de resistividad.

Lo reportado por Espinosa Luna (1996) para un perfil de VLF tomado sobre la misma línea que los datos de EM-LIN y DC, indica que existe una zona conductora dentro de un basamento resistivo. La parte conductora es asociada a sedimentos de poco espesor que coinciden con el cauce del Arroyo Las Auras y éstos cubren al basamento de roca granítica.

Para continuar con el análisis del modelo conjunto, se realizó la tabla 7 la cual contiene los resultados de RMS de cada inversión (EM-LIN y DC) y de la inversión conjunta. Para el caso del modelo conjunto el valor de RMS normalizado por la estimación del 5 % de error de cada dato en la iteración 3 fue de 10.98 o su equivalente porcentual de 7.54 %.

Tabla 7. Análisis de RMS para EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunto), Las Auras.

Inversión	RMS		
EM-LIN	16.295 %		
DC	0.279 %		
	Iteración 1	Iteración 2	Iteración 3
	$\beta^{opt} = 0.9$	$\beta^{opt} = 0.1$	$\beta^{opt} = 0.06$
DCEM34	RMS = 13.82	RMS = 10.98	RMS = 10.98
	RMS = 8.65 %	RMS = 7.43 %	RMS = 7.54 %

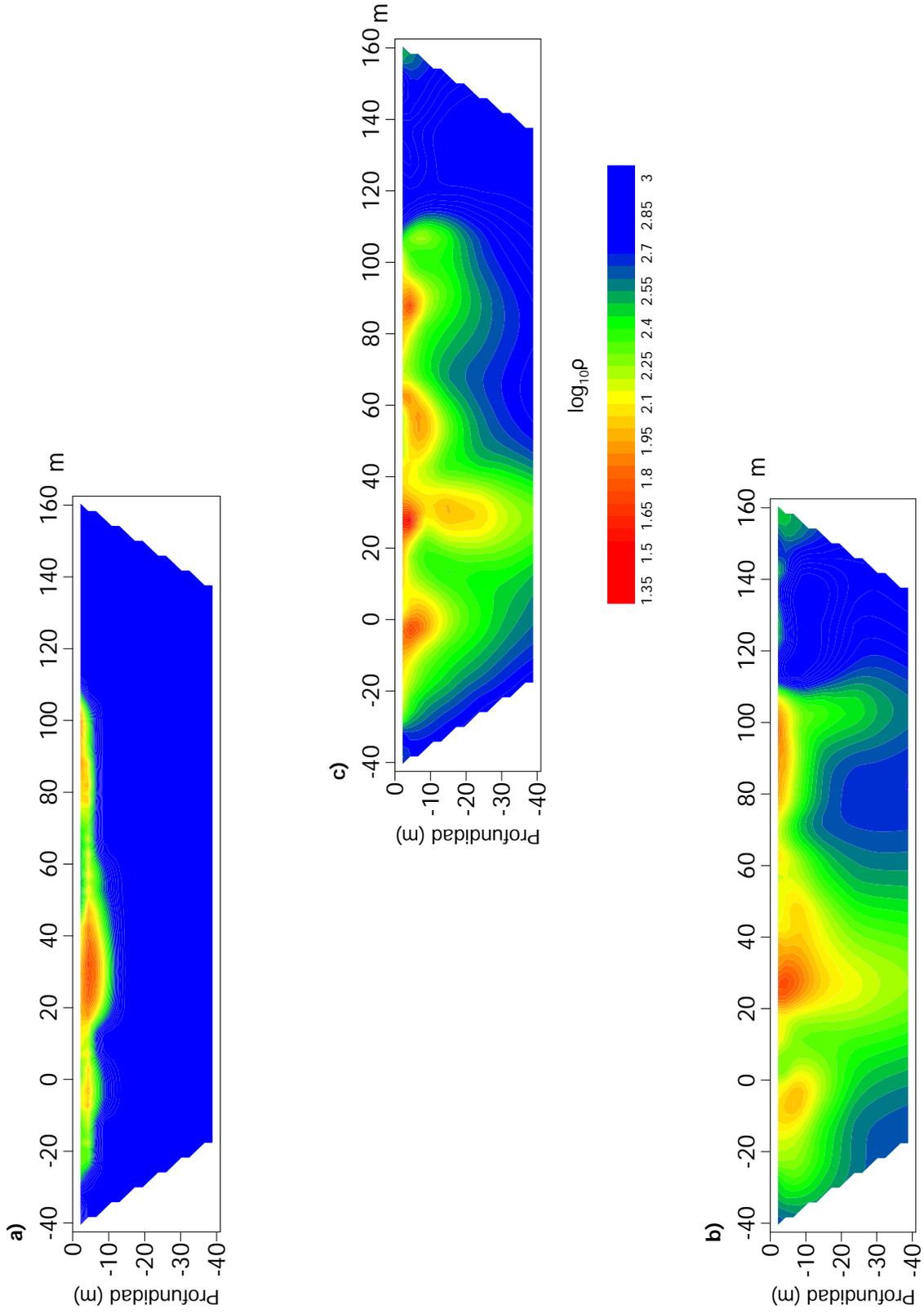


Figura 38. Inversiones de a) EM-LIN, b) DC y c) DCEM34 (conjunta entre EM-LIN y DC).

Capítulo 6. Conclusiones

Las conclusiones se presentarán en dos partes, la primera correspondiente a la implementación y validación del método con modelos controlados y la segunda parte a la aplicación con datos reales.

6.1. Sobre la implementación y validación de la inversión conjunta

1. Debido a que los programas de inversión tenían parámetros diferentes. Para EM-LIN era la conductividad y para DC el logaritmo de la resistividad, integrarlos en un solo algoritmo requirió homogeneizarlos, por lo que se planteó que las ecuaciones integrales de EM-LIN queden en términos del logaritmo de la resistividad y como consecuencia el proceso se volvió iterativo.
2. En el algoritmo propuesto, el coeficiente Γ que escala a la matriz de EM-LIN se actualiza hasta converger a una solución estable o cuando se haya alcanzado un RMS mínimo. Este proceso es controlado por un β^{opt} que pondera el ajuste y estabilidad de la solución y está en función del mínimo RMS.
3. La búsqueda del β^{opt} se realiza de manera automática para cada iteración, lo cual evita la búsqueda manual, que en la práctica resultaría poco eficiente.
4. Los resultados obtenidos de la inversión conjunta para el modelo 1 sin ruido que se muestra en la figura 14c, se observó mejoría respecto a los valores de resistividad de ambos prismas en comparación con los valores obtenidos en el modelo de inversión de EM-LIN (figura 14a). Respecto al modelo de DC de la figura 14b, la mejora en el modelo conjunto, se presenta principalmente en la base de los prismas (resistivo y conductor), ya que ambos se encuentran geoméricamente más cercanos al modelo propuesto.
5. Para el segundo modelo, con los prismas en $z = 50$ metros, las mejoras respecto al modelo de EM-LIN de la figura 23a y el modelo conjunto de la figura 23c fueron la delimitación lateral y del techo de ambos prismas así como la constricción en los valores de resistividad. Por lo que se refiere al modelo de DC de la figura 23b y el modelo 23c se delimitó el techo y laterales de los prismas sin embargo,

para cada uno de los modelos inversos presentados el piso de estos no se logró recuperar.

6. La inversión de los datos de EM-LIN y DC con la adición del 5% de ruido de distribución normal muestra que el algoritmo es suficientemente robusto como para recuperar los modelos ligeramente diferentes a los modelos sin ruido, por lo que se tuvo un buen acoplamiento de ambos tipos de datos.

6.2. Sobre los experimentos con datos reales

1. Valle de Maneadero

- a) La inversión entre los dipolos EM-LIN (figura 32a) produjo un modelo con una zona conductora a lo largo de todo el perfil sin embargo, es notorio que al inicio se tiene una anomalía conductora contrastante, la cual se asoció a la intrusión salina proveniente del mar.
- b) La inversión entre arreglos de DC (figura 32b) producen un modelo parecido a EM-LIN, aunque los contrastes de resistividades en DC son más notorios, se sigue teniendo la presencia de un conductor al inicio y en profundidad en el perfil. Otro rasgo destacable es la anomalía resistiva que corta al conductor.
- c) En la inversión conjunta entre EM-LIN y DC el modelo recuperado mostró la definición de la zona conductora constreñida a valores de $2 - 16 \Omega \cdot m$ y el resistivo que corta la continuidad de la anomalía conductiva sigue teniendo presencia con valores entre $60 - 126 \Omega \cdot m$ y en términos geológicos lo que se observa es un modelo de sedimentos arenosos secos en la parte superior (altas resistividad) saturados con agua salina en la parte inferior (baja resistividad) y el cuerpo resistivo de $60 - 126 \Omega \cdot m$ que corta la continuidad de la intrusión salina.

2. Las Auras

- a) Del modelo de EM-LIN en la figura 38a respecto al modelo obtenido de la inversión conjunta que se muestra en la figura 38c muestra una zona conductora delgada asociada a arenas saturadas y un cuerpo resistivo asociado a roca granítica.

- b) Para el modelo de DC que se presenta en la figura 38b respecto al modelo conjunto mostrado en la figura 38c se muestra la zona conductora acotada en profundidad y la transición a la zona resistiva. El modelo muestra mayor estructura.
- c) El modelo conjunto mostrado en la figura 38c presenta buena coherencia geológica definiendo la capa asociada a sedimentos de poco espesor que cubren al basamento de roca granítica. La parte más conductora dentro de los sedimentos puede estar asociada a la presencia del cause del arroyo Las Auras y el otro cuerpo conductor asociado a un paleocauce. Se observan rasgos someros debido a EM-LIN y estructuras más profundas debido a DC.

Literatura citada

- Abramowitz, M. (1974). *Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*,. Dover Publications, Inc. New York, NY, USA.
- Ames, W. y Brezinski, C. (1993). Numerical recipes in fortran (the art of scientific computing): Wh press, sa teukolsky, wt vetterling and bp flannery, cambridge univ. press, cambridge, 1992. 963 pp., isbn 0-521-43064-x.
- Constable, S. C., Parker, R. L., y Constable, C. G. (1987). Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. *Geophysics*, **52**(3): 289–300.
- De Stefano, M., Golfré Andreasi, F., Re, S., Virgilio, M., y Snyder, F. F. (2011). Multiple-domain, simultaneous joint inversion of geophysical data with application to subsalt imaging. *Geophysics*, **76**(3): R69–R80.
- Esparza, F. J. y Gómez-Treviño, E. (1997). 1-d inversion of resistivity and induced polarization data for the least number of layers. *Geophysics*, **62**(6): 1724–1729.
- Espinosa Luna, J. (1996). *Estudio geofísico en el proyecto de embalse "Las Auras" Municipio de Tecate, B.C.* Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California.
- Fabriol, H., Martínez, M., y Vázquez, R. (1982). Mediciones gravimétricas y teluricas en el valle de maneadero, ensenada, baja california. *Geofísica Internacional*, **21**(1).
- Flores, M. A. P., Vidal, F. S., Delgado, L. A. G., Fernández, A. G., y Vázquez, R. (2004). Structural pattern of the todos santos coastal plain, based on geophysical data. *Ciencias Marinas*, **30**(2): 349–364.
- Gallardo, L. A. y Meju, M. A. (2004). Joint two-dimensional dc resistivity and seismic travel time inversion with cross-gradients constraints. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **109**(B3).
- Gill, P. E., Hammarling, S. J., Murray, W., Saunders, M. A., y Wright, M. H. (1986). *User's guide for LSSOL (Version 1.0): A Fortran package for constrained linear least squares and convex quadratic programming*, Vol. 86. Systems Optimization Laboratory, Department of Operations Research, Stanford.
- Gómez-Treviño, E. (1987). Nonlinear integral equations for electromagnetic inverse problems. *Geophysics*, **52**(9): 1297–1302.
- Gómez-Treviño, E., Esparza, F. J., y Méndez-Delgado, S. (2002). New theoretical and practical aspects of electromagnetic soundings at low induction numbers. *Geophysics*, **67**(5): 1441–1451.
- Haber, E. y Oldenburg, D. (1997). Joint inversion: a structural approach. *Inverse Problems*, **13**(1): 63–77.
- Lines, L. R., Schultz, A. K., y Treitel, S. (1988). Cooperative inversion of geophysical data. *Geophysics*, **53**(1): 8–20.
- McNeil, J. (1980). Em 34-3 survey interpretation techniques technical note tn-8. *Geonics Ltd.*

- Meju, M. A. (1994). *Geophysical data analysis: understanding inverse problem theory and practice*. Society of Exploration Geophysicists.
- Méndez-Delgado, S., Gómez-Treviño, E., y Pérez-Flores, M. A. (1999). Forward modelling of direct current and low-frequency electromagnetic fields using integral equations. *Geophysical Journal International*, **137**(2): 336–352.
- Pérez-Flores, M. (1995). *Inversión rápida en 2-D de datos de resistividad, magnetotelúricos y electromagnéticos de fuente controlada a bajos números de inducción*. Tesis de doctorado, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California.
- Pérez-Flores, M., Méndez-Delgado, S., y Gómez-Treviño, E. (2001). Imaging low-frequency and dc electromagnetic fields using a simple linear approximation. *Geophysics*, **66**(4): 1067–1081.
- Pérez-Flores, M. A., Antonio-Carpio, R. G., Gómez-Treviño, E., Ferguson, I., y Méndez-Delgado, S. (2012). Imaging of 3d electromagnetic data at low-induction numbers. *Geophysics*, **77**(4): WB47–WB57.
- Selepeng, A. (2016). *Three Dimensional Numerical Modeling of Loop-Loop Electromagnetic Data at Low Induction Numbers*. Tesis de doctorado, Akita University, Japan.
- Serrano Ortiz, J. (2011). *Determinación de la geometría 2D y 3D del acuífero del sur del valle de Maneadero, mediante mediciones de resistividad*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California.
- Vozoff, K. y Jupp, D. (1975). Joint inversion of geophysical data. *Geophysical Journal International*, **42**(3): 977–991.
- Yang, C.-H. y Tong, L.-T. (1999). A study of joint inversion of direct current resistivity, transient electromagnetic and magnetotelluric sounding data. *Terrestrial Atmospheric and Oceanic Sciences*, **10**: 293–302.

Anexos

Anexo 1

Desarrollo de la función objetivo para la inversión conjunta de datos de Corriente Directa y Electromagnéticos

$$F(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{Y}_{\text{ext}} - \mathbf{A}_{\text{ext}}\mathbf{X}\|^2$$

Donde

$$\mathbf{A}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\text{EM}} \\ \mathbf{A}_{\text{DC}} \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{\text{EM}} \\ \mathbf{Y}_{\text{DC}} \end{pmatrix}$$

$$F(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \sum_i \|\mathbf{Y}_i - (\mathbf{A}\mathbf{X})_i\|^2$$

Por definición $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ es una suma

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \sum_i X_i^2 = \|\mathbf{X}\|^2$$

Por lo que la ecuación se desarrolla de la siguiente manera

$$\begin{aligned} F(\mathbf{X}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{X})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{X}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{Y}^T - (\mathbf{A}\mathbf{X})^T) (\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{X}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{Y}^T - \mathbf{X}^T\mathbf{A}^T) (\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{X}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{X}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Y} + \mathbf{X}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{X}) \end{aligned}$$

Factorizando y ordenando se obtiene

$$F(\mathbf{X}) = \left[\mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - (\mathbf{A}^T\mathbf{Y})^T\mathbf{X} + \frac{1}{2}(\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{X}) \right]$$

$$\mathbf{c}^T = -(A^T \gamma)^T$$
$$\mathbf{S} = A^T A$$

De manera general lo que se busca es obtener el mínimo de la función $f(x)$ por lo que la ecuación queda de la siguiente manera

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{Sx}$$

Para la determinación de la incognita se siguió la misma metodología que Pérez-Flores (1995) aplicando programación cuadrática lo que consiste en minimizar la función objetivo sujeta a límites inferiores y superiores de la resistividad verdadera $x_L \leq x \leq x_U$

Anexo 2

El desarrollo para escalar las ecuaciones 14 y 15 es el siguiente. Se usaran resistividades $\rho = \frac{1}{\sigma}$

$$\frac{1}{\rho_a} (x_1, x_2) \approx \frac{|x_2 - x_1|}{\pi} \int_{z=0}^{z=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} R(x_1, x_2, x, z) \frac{1}{\rho(x, z)} dx dz$$

Multiplicaremos y dividiremos a la matriz de pesos por $\text{Log}\rho(r)$ con lo que se obtiene a la incógnita escalada

$$R(x_1, x_2, x, z) \frac{1}{\rho(x, z)} \cdot \frac{\text{Log}\rho(x, z)}{\text{Log}\rho(x, z)}$$

$$\left[\frac{R(x_1, x_2, x, z)}{\rho(x, z)\text{Log}\rho(x, z)} \right] \text{Log}\rho(x, z)$$

Lo siguiente es escalar los datos de entrada con $\text{log}\rho_a$ por lo que se multiplica a ambos lados de la ecuación

$$\text{Log}\rho_a \frac{1}{\rho_a} (x_1, x_2) \approx \frac{|x_2 - x_1|}{\pi} \int_{z=0}^{z=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left[\frac{R(x_1, x_2, x, z)}{\rho(x, z)\text{Log}\rho(x, z)} \right] \text{Log}\rho(x, z) \text{Log}\rho_a dx dz$$

El procedimiento para escalar las magnitudes se aplico a las ecuaciones de inversión para electromagnéticos, por lo que resulta lo siguiente

$$\text{log}\rho_a (x_1, x_2) \approx \frac{|x_2 - x_1|}{\pi} \int_{z=0}^{z=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left[\frac{\rho_a \text{log}\rho_a}{\rho(x, z)\text{log}\rho(x, z)} \cdot R(x_1, x_2, x, z) \right] \text{log}\rho(x, z) dx dz$$

$$\text{log}\rho_a (x_1, x_2) \approx \frac{|x_2 - x_1|}{\pi} \int_{z=0}^{z=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left[\frac{\rho_a \text{log}\rho_a}{\rho(x, z)\text{log}\rho(x, z)} \cdot T(x_1, x_2, x, z) \right] \text{log}\rho(x, z) dx dz$$

Anexo 3

El propósito de graficar los datos es para revisar la coherencia entre éstos para cada arreglo, con lo que es posible también descartar datos de resistividad anómalos (saltos de magnitudes cercanas entre un punto y otro). En la figura 39 se muestran las pseudo-secciones aparentes después de ser depurados.

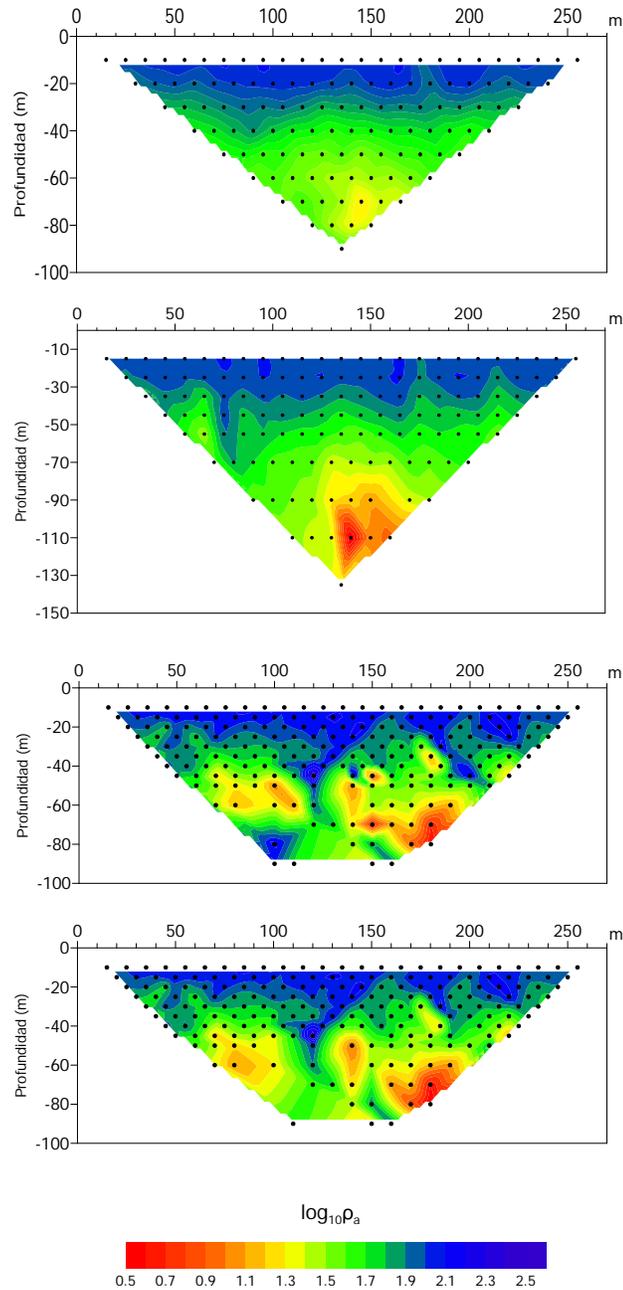


Figura 39. Línea 1. Resistividades aparentes: a) Wenner, b) Schlumberger y c) Dipolo-Dipolo y d) sección dipolo-dipolo depurada.

Datos electromagnéticos gráficos como logaritmo de la resistividad aparente

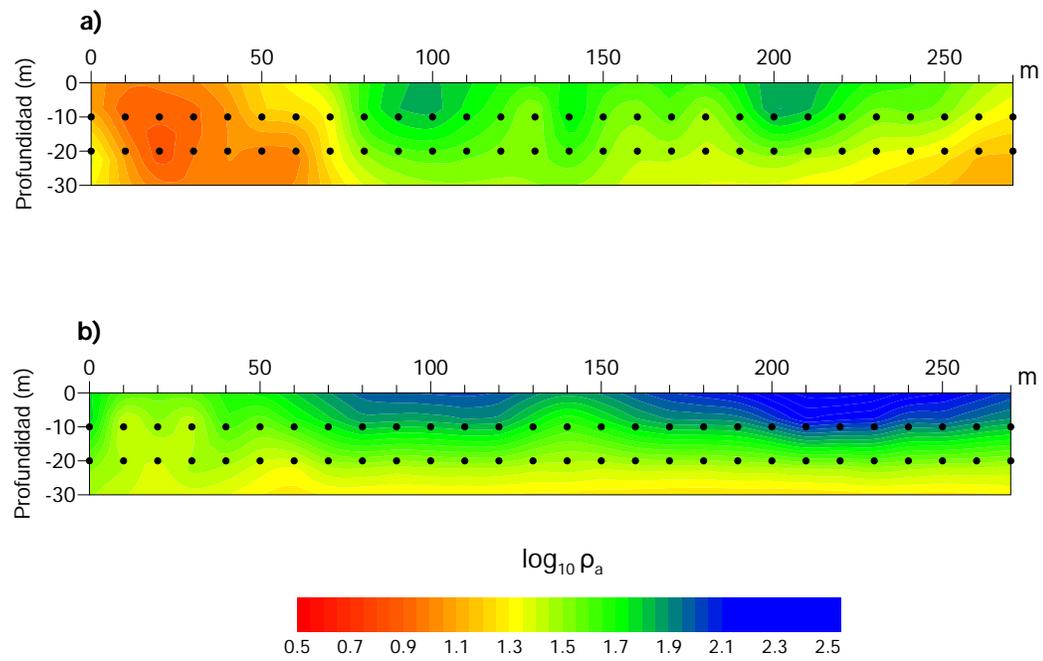


Figura 40. Línea 1. a) DMV y b) DMH.

Anexo 4

Para tener un análisis completo del algoritmo de inversión conjunta, se realizarán gráficas del comportamiento del RMS conjunto y del RMS de cada tipo de dato para 10 iteraciones las cuales se describen en los siguientes párrafos.

La inversión conjunta para el modelo 1 sin ruido requirió de 3 iteraciones. La gráfica 41a muestra el comportamiento del RMS conjunto en cada iteración incluyendo el RMS del modelo inicial, se observa el decrecimiento de los valores con variaciones mínimas entre iteración. En la gráfica 41b se observa los cambios en los valores del RMS a partir de la iteración 1 y el mínimo RMS alcanzado se presenta de manera clara en la iteración 3. La gráfica 41c muestra el comportamiento de los datos de EM-LIN, DC y de los datos en conjunto, con esto se permitió inspeccionar la estabilidad de ajuste de ambos tipos de datos durante el proceso iterativo.

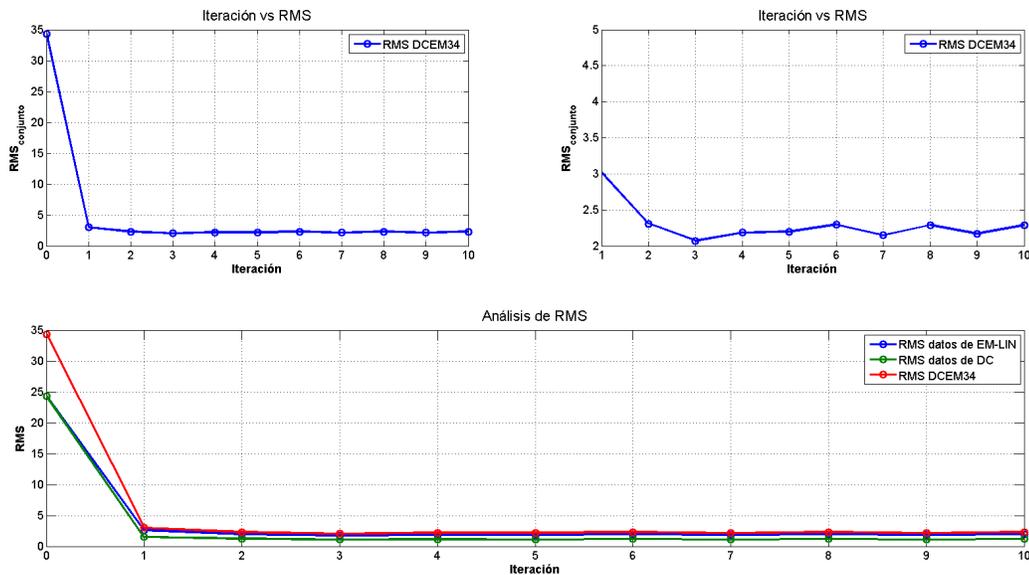


Figura 41. RMS de los ajustes a los datos de EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunta) para 10 iteraciones para el modelo 1.

La inversión conjunta del modelo 1 con ruido convergió en la tercera iteración. La gráfica 42a muestra los valores de RMS incluyendo el modelo inicial y hasta 10 iteraciones donde se observa el decremento del RMS a partir de la iteración 1 y variaciones mínimas en las iteraciones siguientes. En la gráfica 42b se tiene la variación del RMS desde la iteración 1 donde se observa que para la tercer iteración se obtuvo un modelo con mínimo RMS y a partir de ésta los valores tienden a aumentar. La gráfica 42c muestra que el ajuste de ambos tipos de datos fue prácticamente constante.

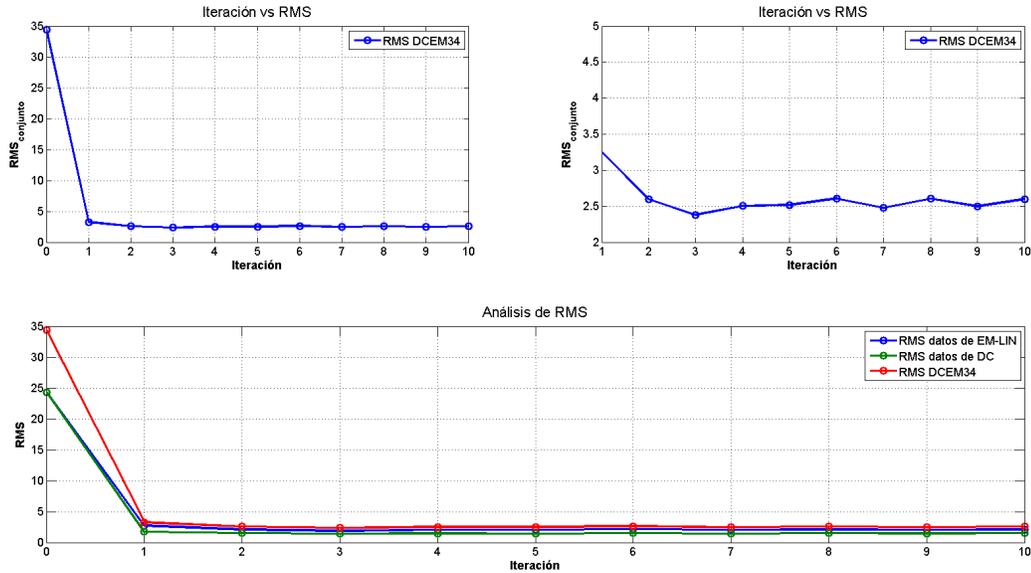


Figura 42. RMS de los ajustes a los datos de EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunta) para 10 iteraciones para el modelo 1 con ruido.

Para el modelo 2 sin ruido la inversión conjunta requirió de 3 iteraciones para alcanzar la solución. En la gráfica 43a se muestran los cambios en el RMS conjunto desde el modelo inicial y se observa que a partir de la iteración 4 aumenta y se tienen variaciones más o menos constantes. La gráfica 43b se tiene el RMS a partir de la iteración 1 y muestra el RMS mínimo en la iteración 3. Por último la gráfica 43c muestra los cambios para EM-LIN, DC y el RMS conjunto los cuales se mantienen constantes.

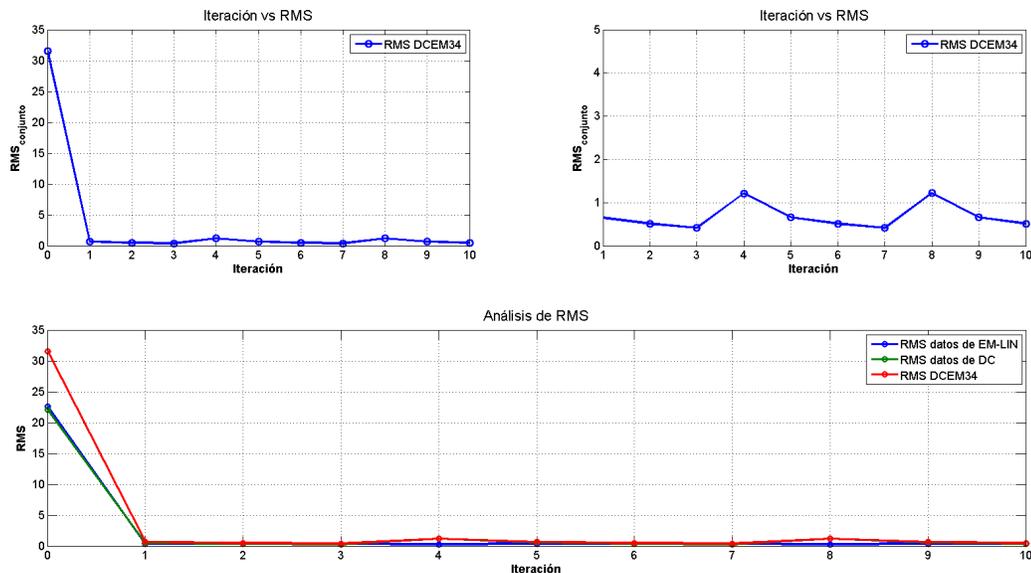


Figura 43. RMS de los ajustes a los datos de EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunta) para 10 iteraciones para el modelo 2.

Para recuperar el modelo 2 con ruido se requirió de tres iteraciones. La gráfica 44a muestra el RMS del modelo inicial y hasta 10 iteraciones en donde se observa un ajuste constante. Para la gráfica 44b se muestra el RMS de la iteración 1 hasta la 10 y se observa que para la iteración 3 se tiene el modelo con el mínimo RMS. Por ultimo la gráfica 44c muestra el comportamiento del ajuste de datos para EM-LIN, DC y en conjunto y se observa que a partir de la iteración 4 hay un ligero desajuste.

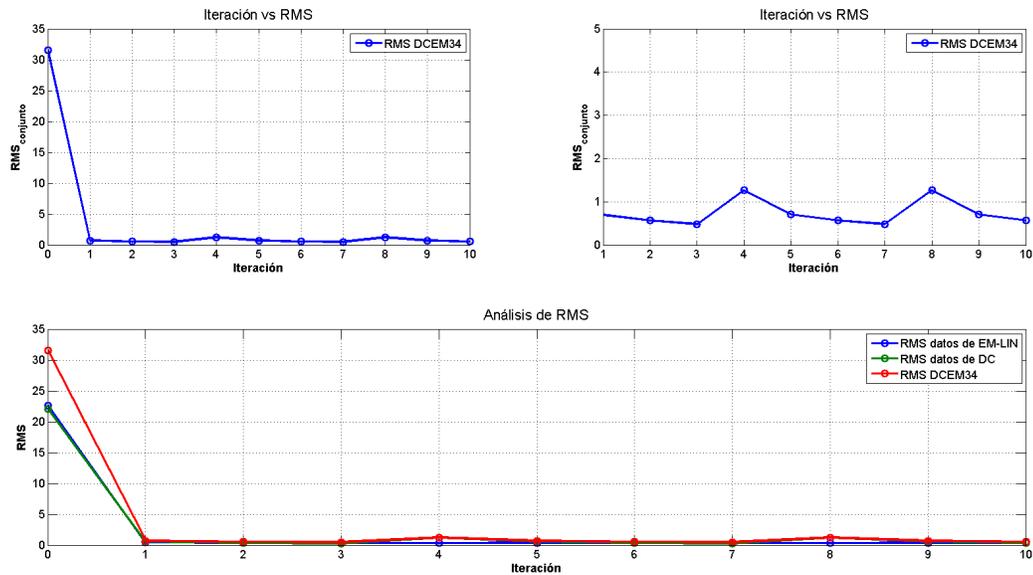


Figura 44. RMS de los ajustes a los datos de EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunta) para 10 iteraciones para el modelo 2 con ruido.

Anexo 5

Para el caso de datos reales de Maneadero la solución se obtuvo en la cuarta iteración. La gráfica 45a muestra el RMS conjunto a partir del modelo inicial y se observa que el valor de RMS disminuye y mantiene con cambios mínimos en cada iteración. En la gráfica 45b el RMS se gráfico a partir de la iteración 1 y se observa que para la cuarta iteración se obtiene la solución con mínimo RMS y a partir de la quinta iteración hay un desajuste. Finalmente la gráfica 45c muestra los ajuste para EM-LIN, DC y de manera conjunta los cuales fueron prácticamente constantes.

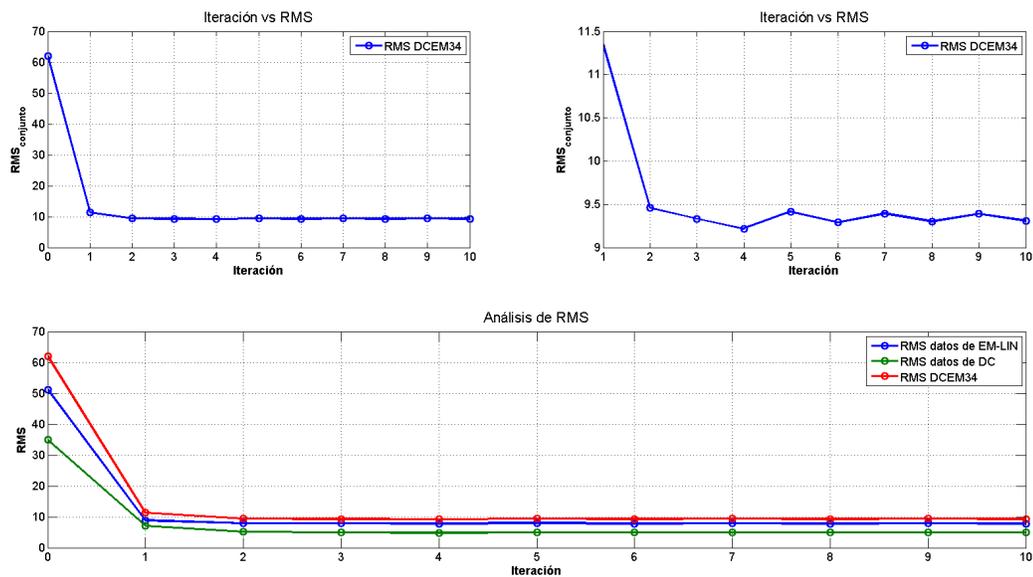


Figura 45. RMS de los ajustes a los datos de EM-LIN, DC y DCEM34 (conjunta) para 10 iteraciones para los datos de resistividad y conductividad obtenidos en Maneadero.

Anexo 6

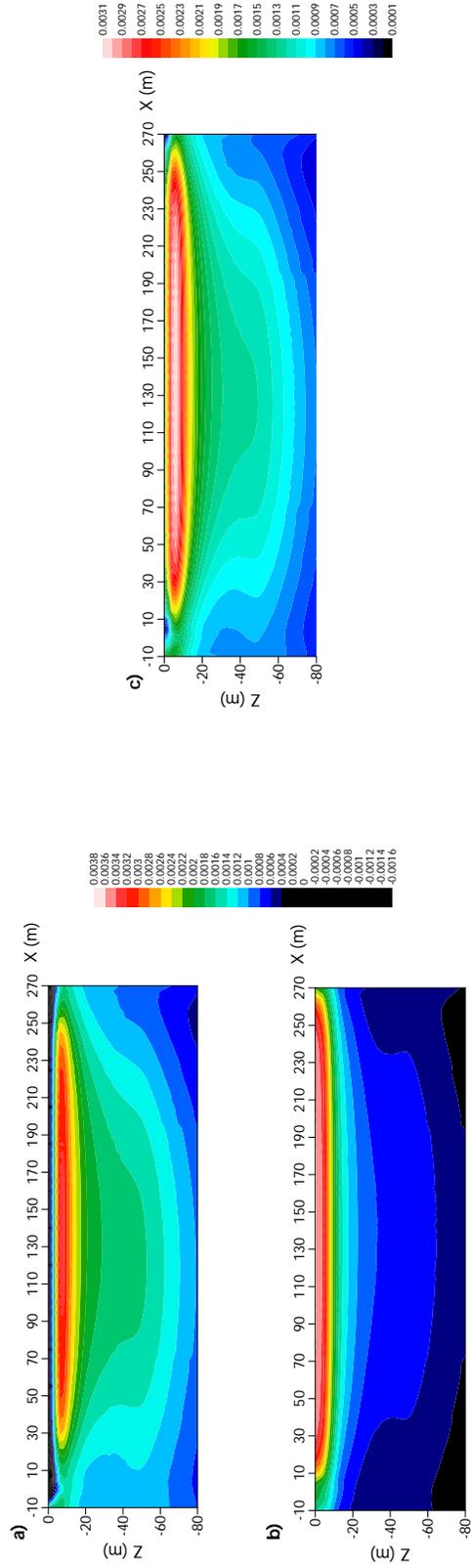


Figura 46. Matrices de peso para a) DMV, b) DMH y c) matriz conjunta. Los valores positivos se encuentran distribuidos en la parte superior para los tres casos sin embargo, para el DMV los pesos positivos se muestran hasta $Z = 80$. Para el caso de la matriz del DMH los valores positivos se muestran hasta $Z(m) = 50$. De ambos se destaca que el DMV tiene mayores pesos positivos en toda la región. La c) matriz conjunta muestra una distribución de pesos positivos sin embargo, se destaca una zona de influencia mayor en la parte superior (color blanco).

Anexo 7

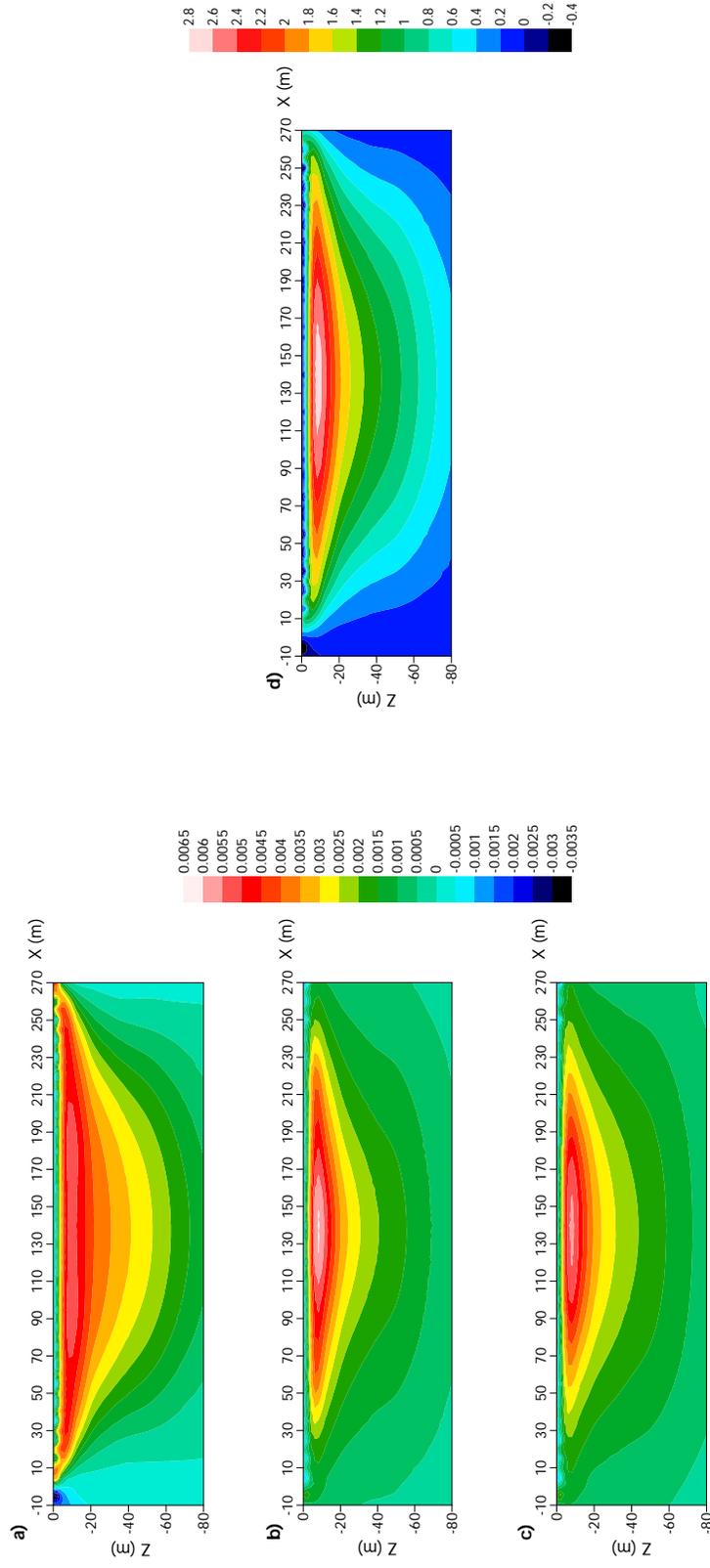


Figura 47. Funciones de peso para las matrices de a) dipolo-dipolo, b) Schlumberger, c) Wenner y d) Matriz Conjunta. El caso de dipolo-dipolo, se observa mayor distribución de pesos positivos hasta $Z(m) = 50$, se destaca una zona de valores altos (rojo) en la parte superior lo que coincide con la densidad de puntos y la resolución del arreglo. Para a) Schlumberger y b) Wenner presentan semejanza en la distribución de los pesos, se destaca los valores positivos en toda la sección. Los pesos mas grandes están asignados a la parte superior (rojos). En la c) matriz conjunta, se observa distribución triangular de pesos positivos y en los laterales valores negativos.