

**Centro de Investigación Científica y de Educación  
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias  
en Óptica con orientación en Óptica Física**

---

**Interacción de haces ópticos en superficies con  
énfasis en corrimientos tipo Goos-Hänchen y la  
excitación de PPS**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

**Juan David Castrillón Gómez**

Ensenada, Baja California, México

2019

Tesis defendida por

**Juan David Castrillón Gómez**

y aprobada por el siguiente Comité

---

Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez  
Director de tesis

Dra. Karina Garay Palmett

Dr. Paulina Segovia Olvera

Dr. Edgar Leonel Chávez González



---

Dr. Israel Rocha Mendoza  
Coordinador del Posgrado en Óptica

---

Dra. Rufina Hernández Martínez  
Directora de Estudios de Posgrado

*Juan David Castrillón Gómez © 2019*

*Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis*

Resumen de la tesis que presenta Juan David Castrillón Gómez como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Óptica con orientación en Óptica Física.

## **Interacción de haces ópticos en superficies con énfasis en corrimientos tipo Goos-Hänchen y la excitación de PPS**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez  
Director de tesis

En este trabajo de tesis se presenta un estudio teórico y numérico del corrimiento Goos-Hänchen que sufren los campos ópticos aleatorios reflejados por una interfaz dieléctrica. Se plantea un principio de equivalencia entre el corrimiento de un haz gaussiano determinista y el de un patrón de moteado con propiedades estadísticas bien definidas y se estudia la influencia del grado de coherencia en el corrimiento del haz promedio. Por otro lado, se presenta también un análisis del acoplamiento y desacoplamiento de plasmones polaritones de superficie por rejilla de difracción metálicas con doble periodo. En particular, se explora la posibilidad de implementar este tipo de sistemas de doble esparcimiento para generar luz que hayan pasado por estados plasmónicos. El estudio es realizado partiendo del formalismo del espectro angular para tener una representación formal y conveniente de los campos ópticos, y la solución de la interacción entre el haz y la superficie se calcula con un método numérico riguroso.

**Palabras clave: Plasmón polariton de superficie, patrón de moteado, Coherencia espacial y temporal, esparcimiento de luz.**

Abstract of the thesis presented by Juan David Castrillón Gómez as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Optics with orientation in Physical Optics.

**Interaction between optical beams and surfaces with emphasis on  
Goos-Hänchen shifts and excitation of SPP**

Abstract approved by:

---

Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez  
Thesis Director

In this thesis, we present a theoretical and numerical study of the Goos-Hänchen shift that occurs in the reflection of random fields from flat dielectric interfaces. A principle of equivalence is proposed between the lateral shift of a deterministic Gaussian beam and a speckle pattern with well-defined statistics properties, and the influence of the degree of coherence on the average beam shift is studied. On the other hand, we present an analysis of the coupling and decoupling of surface plasmon polaritons with metallic diffraction gratings that have two harmonic components. We explore the possibility of implementing this kind of double scattering system to generate light that involves in its trajectory the passage through a plasmonic state. The study is carried out using an angular spectrum formalism that permits a formal and convenient representation of the optical fields, and the solution of the interaction between the light and the surface is calculated using a rigorous numerical method.

**Keywords: Surface plasmon polariton, speckle pattern, spatial and temporal coherence, light scattering.**

## **Dedicatoria**

***A mis padres Carlos Duván y Ángela Patricia por todo . . . simplemente.***

***A mi hermana Ana María por aguantarme.***

***A mi abuelo Manuel Gómez por alcahuetearme todo.***

***A mis padrinos Darío, Luz y Giovanni por estar siempre pendiente de mí y mis necesidades.***

***A Luisa por acompañarme durante la maestría, por escucharme y entenderme. Gracias por iluminar mi camino.***

## Agradecimientos

Al Dr. Eugenio Méndez por dedicarme tiempo sin importar que tan ocupado estuviera. Muchas gracias por su paciencia, consejos y disposición. Aprendí mucho de su forma de ser, dedicación y compromiso con el quehacer científico. Mis más profundos agradecimientos por aceptarme como estudiante.

A los miembros de mi comité de tesis, a la Dra. Karina, a la Dra. Paulina y al Dr. Edgar. Muchas gracias por sus valiosas correcciones, por estar siempre disponible. Y, además, por aguantar mis avances de tesis.

A Víctor y Stephanie por tantas cosas, si tratase de escribir algo se me harían cortas estas páginas. Gracias por su sincera amistad.

Al Dr. Pedro Negrete por sus consejos. Por recordarme que lo importante no siempre es lo que se ve a primera vista. Además, por enseñarme que la felicidad es algo que se recuerda.

A mis amigos de generación. David, Joe, Alejandro, Emilio, Josué, Ángela, Lambo, Edgardo, Jesús y Azael. Muchas gracias por ser mi familia mexicana.

A Angie, Yryx, Guillermo y Ana por compartir conmigo charlas, tintos, almuerzos y por brindarme ayuda siempre que fuera necesaria.

A mis compañeros del grupo de plasmónica y esparcimiento. Alma, Miguel, Carlos, Anna y Liliana. Muchas gracias por la ayuda que me proporcionaron para sacar adelante este trabajo de grado. También por escucharme en las interminables juntas de grupo.

A Isaac Fimbres y Carmen Ochoa que siempre estuvieron disponibles por cualquier cosa que necesitara. Ustedes son piezas fundamentales del departamento de óptica.

Al departamento de óptica. A todos los investigadores y estudiantes por todas sus enseñanzas académicas.

A todos los mexicanos que me acogieron, me enseñaron sus costumbres y que al final, lograron hacerme sentir en casa.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por abrirme sus puertas y permitirme alcanzar un logro más.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría. No. de becario: 638558.

# Tabla de contenido

	Página
Resumen en español .....	ii
Resumen en inglés .....	iii
Dedicatoria .....	iv
Agradecimientos .....	v
Lista de figuras .....	ix
<b>Capítulo 1. Introducción</b>	
<b>Capítulo 2. Generalidades de la teoría electromagnética</b>	
2.1. Ecuaciones de Maxwell macroscópicas .....	7
2.2. Ecuación de onda y ecuación de Helmholtz .....	9
2.3. Respuesta óptica de metales .....	10
<b>Capítulo 3. Propagación de campos en medios homogéneos</b>	
3.1. Expansiones en términos de ondas planas: El espectro angular .....	13
3.1.1. Polarizaciones fundamentales .....	18
3.2. Haces gaussianos .....	20
3.3. Pulsos de luz .....	22
3.4. Haces Aleatorios .....	24
3.4.1. Patrones de speckle .....	26
3.4.2. Haces con speckle .....	29
<b>Capítulo 4. Interacción de campos ópticos con superficies y esparcimiento electromagnético</b>	
4.1. Interacción de campos ópticos con superficies planas .....	38
4.1.1. Plasmones polaritones de superficie .....	40
4.2. Interacción de campos ópticos con superficies generales .....	43
4.2.1. Campo esparcido y funciones fuente .....	46
4.2.2. Coeficiente diferencial de reflexión .....	48
<b>Capítulo 5. Corrimiento Goos-Hänchen para campos aleatorios</b>	
5.1. Corrimiento Goos-Hänchen para haces .....	53
5.2. Corrimiento Goos-Hänchen para campos aleatorios .....	58
5.3. Corrimiento de la envolvente del haz con speckle .....	64
<b>Capítulo 6. Acoplamiento y desacoplamiento de PPS mediante rejillas metálicas con doble periodo</b>	
6.1. Descripción del sistema de interés .....	70
6.2. Rejilla de difracción simple .....	73

## Tabla de contenido (continuación)

6.3. Rejilla de difracción con doble periodo asociado . . . . .	77
6.4. Optimización del proceso de doble esparcimiento . . . . .	80
6.5. Interferencia de dos haces en incidencia simétrica . . . . .	84
6.6. Iluminación por pulsos cortos . . . . .	88
6.6.1. Rejilla de difracción simple . . . . .	89
6.6.2. Rejilla de difracción con doble periodo asociado . . . . .	91

## Capítulo 7. Conclusiones

Literatura citada . . . . .	95
-----------------------------	----

## Lista de figuras

Figura	Página
1. Anomalías de Wood asociadas al orden 1 de difracción para una rejilla de aluminio con un periodo de $1.66 \mu\text{m}$ . Se observa la evolución de las bandas de absorción en función del ángulo de incidencia marcado a la izquierda de la imagen (tomada de (Wood, 1935)). . . . .	4
2. Ángulos directores de una onda plana. . . . .	13
3. Transformación de la amplitud compleja del espacio de coordenadas al espacio de Fourier. . . . .	14
4. Ilustración del cambio de formalismo tridimensional a uno bidimensional invariante a lo largo de la coordenada $x_2$ . . . . .	17
5. Ilustración de las polarizaciones fundamentales en el sistema de referencia $x_1 - x_3$ para el campo eléctrico de una onda plana. . . . .	19
6. Sistema de referencia $x' - z'$ . Rotación del sistema coordenado de laboratorio $x_1 - x_3$ en dirección del campo propagante $\psi(\mathbf{r} \omega)$ . . . . .	20
7. Simulación de la propagación de dos haces gaussianos, con longitud de onda $\lambda$ y viajando a $45^\circ$ con respecto al eje $x_3$ . a) Haz gaussiano con semiancho $g = 2 \lambda$ . b) Haz gaussiano con semiancho $g = 8 \lambda$ . . . . .	22
8. Simulación de un pulso de luz con distribución transversal y espectro gaussiano, con longitud de onda central $\lambda_0$ y con semiancho espectral $\Delta\lambda = 40 \text{ nm}$ . a) Dependencia temporal del pulso de luz. b) Distribución espacial del pulso de luz en $t_0 = 50 \text{ fs}$ . . . . .	24
9. Generación de un campo óptico aleatorio utilizando el modelo de las pantallas de fase. . . . .	25
10. Simulación de dos patrones de speckle, con longitud de onda $\lambda$ y viajando a $45^\circ$ con respecto al eje $x_3$ . a) Speckle con tamaño de mota promedio de $\xi = 2 \lambda$ . b) Speckle con tamaño de mota promedio de $\xi = 8 \lambda$ . . . . .	28
11. Correlación de la <i>transmitancia</i> en términos del espectro angular para diferentes valores de la desviación estándar $\sigma_\phi$ . . . . .	31
12. Intensidad promedio ( $\sim 2000$ realizaciones) de un haz con speckle sobre el plano $z' = 0$ , con $\xi = 8\lambda$ y para diferentes valores de $\sigma_\phi$ . . . . .	31
13. Simulación de dos realizaciones de patrones de speckle, con longitud de onda $\lambda$ , viajando a $45^\circ$ con respecto al eje $x_3$ , semiancho $w_0 = 70\lambda$ y $\sigma_\phi = \pi$ . a) Speckle con tamaño de mota promedio de $\xi = 2 \lambda$ . b) Speckle con tamaño de mota promedio de $\xi = 8 \lambda$ . . . . .	33
14. Promedio en intensidad de la simulación de un haz con speckle ( $\sim 2000$ realizaciones), con longitud de onda $\lambda$ , viajando a $45^\circ$ con respecto al eje $x_3$ y semiancho $w_0 = 70\lambda$ . . . . .	34
15. Relación de Fourier existente entre los parámetro de los campos aleatorios. . . . .	34

## Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
16. Ilustración de la interacción de un campo óptico con una superficie rugosa. El campo óptico incidente es una onda plana con vector de propagación $\mathbf{K}_{inc}$ , mientras que el campo esparcido se expresa como una superposición de ondas planas con vectores de propagación $\mathbf{K}_{sc}$ . . . . .	36
17. Ilustración de la interacción de una onda plana con una superficie plana. Se puede observar los posibles campos reflejados y/o transmitidos debido a la interfaz. . . . .	38
18. Esquemático del modelo físico de un plasmón polaritón de superficie que se propaga en dirección del vector de onda $\mathbf{k}_{sp}$ y donde se aprecia la distribución de la amplitud del campo eléctrico contenido en el plano $x_1$ - $x_3$	41
19. Relación de dispersión típica para los plasmones polaritones de superficie y su comparación con soluciones propagantes típicas. . . . .	42
20. Ilustración del teorema de Green. . . . .	45
21. Intensidad del campo cercano para las situaciones de interés, en todos los casos se tiene un campo óptico que incide sobre una interfaz aire-vidrio a un ángulo $\theta_0 = 42^\circ$ respecto a la normal. a) Haz gaussiano con semiancho en amplitud $g = 24\lambda$ . b) Patrón de speckle con correlación delta y tamaño de mota $\xi = 16.97\lambda$ . c) Haz con speckle con $\xi = 16.97\lambda$ y semiancho $w_0 = 100\lambda$ . d) Promedio en intensidad sobre varias realizaciones para los patrones de speckle ( $\sim 500$ realizaciones). . . . .	53
22. Sistemas de referencia utilizados para la descripción del corrimiento Goos-Hänchen. . . . .	54
23. Intensidades reflejadas a una altura de $x_3 = 4\lambda$ para un haz con semiancho en amplitud de $g = 24\lambda$ y que incide sobre una interfaz vidrio-aire y un espejo perfecto para un ángulo promedio de incidencia $\theta_0 = 42^\circ$ . . . . .	56
24. Ajuste utilizado para el cálculo del corrimiento GH del haz gaussiano. . . . .	57
25. Corrimiento lateral para cuatro haces gaussianos con diferente semiancho a una altura $1/e$ en amplitud ( $g = 6\lambda, 12\lambda, 24\lambda$ y $48\lambda$ , respectivamente). La línea negra vertical indica el ángulo crítico para una interfaz aire-vidrio. . . . .	58
26. Intensidad de los campos aleatorios reflejados por una interfaz vidrio-aire a una altura de $x_3 = 4\lambda$ con línea azul. La línea roja representa la referencia. a) Patrón de speckle con extensión infinita con ángulo de incidencia $\theta_0 = 42^\circ$ y tamaño de mota promedio de $\zeta = 16.97\lambda$ . b) Patrón de speckle con correlación gaussiana para las fases, con $\theta_0 = 42^\circ$ , $\zeta = 16.97\lambda$ y semiancho de envolvente $w_0 = 100\lambda$ . . . . .	59

## Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
27. Corrimiento GH para cuatro patrones de speckle estacionarios con tamaño de mota diferente (valor correspondiente sobre la gráfica). En cada recuadro se compara el corrimiento con el correspondiente a un haz gaussiano. Las barras rojas verticales representan las fluctuaciones estadísticas del corrimiento estimado para cada ángulo de incidencia. . . . .	63
28. Corrimiento GH para cuatro patrones de speckle con correlación de fase gaussiana y tamaños de mota diferente (valor correspondiente sobre la gráfica). Se marca con las barras rojas verticales la varianza del corrimiento para cada ángulo de incidencia. . . . .	64
29. Corrimiento GH teórico para tres haces con el mismo semiancho de envolvente, $w_0 = 100\lambda$ , y con tamaños de speckle $\xi = 4.24\lambda$ , $8.48\lambda$ y $16.97\lambda$ respectivamente de izquierda a derecha. Se presenta una comparación entre el corrimiento a nivel de haz y el corrimiento a nivel del patrón de speckle. . . . .	67
30. Comparativa entre el corrimiento Goos-Hänchen teórico que presentan haces con diferente ancho de envolvente e igual tamaño de mota. Se presentan tres conjuntos de curvas donde el tamaño de speckle aumenta de izquierda a derecha. . . . .	67
31. Evolución del error estadístico asociado al promedio de los patrones de speckle en cuanto al número de muestras. . . . .	68
32. Comparativa entre el corrimiento GH obtenido directamente desde la expresión teórica y el medido por medio de la generación numérica de múltiples patrones de speckle con correlación gaussiana. Se presentan las gráficas correspondientes a haces con envolvente definida por $w_0 = 100\lambda$ y para los mismos tamaños de speckle anteriormente propuestos. . . . .	69
33. Suma de dos rejillas de difracción con diferentes periodos para el diseño de una superficie plasmónica que permita llevar a cabo un proceso de doble esparcimiento. . . . .	71
34. Ilustración del proceso de acoplamiento de luz a PPS mediante la primera componente periódica de la superficie $\zeta(x_1)$ . . . . .	71
35. Ilustración del proceso de desacoplamiento del PPS a un modo propagante mediante la segunda componente periódica de la superficie $\zeta(x_1)$ . . . . .	72
36. Evolución del coeficiente diferencial de reflexión para una rejilla de oro con periodo sub-longitud de onda e iluminada por un haz gaussiano con polarización s. . . . .	74

## Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
37. Comportamiento del CDR como función del ángulo de incidencia para tres rejillas simples de oro con profundidad $h_1 = 20$ nm que son iluminadas con un haz gaussiano con polarización $p$ con $g = 5$ $\mu\text{m}$ . a) Rejilla que acopla a $\theta_0 = 30^\circ$ . b) Rejilla que acopla a $\theta_0 = 15^\circ$ . a) Rejilla que acopla a $\theta_0 = 0^\circ$ . . . . .	75
38. Intensidad del campo cercano de un haz gaussiano que interacciona con una rejilla simple en condición de acoplamiento. Se muestra el comportamiento en función de la profundidad $h_1$ , partiendo de $h_1 = 5$ nm en (a) y avanzando en pasos de 5 nm hasta (f). . . . .	76
39. CDR de la rejilla propuesta en la primera configuración y que es iluminada por un haz con polarización $s$ . . . . .	77
40. CDR para las rejillas con doble periodo y que son iluminadas por un haz gaussiano con polarización $p$ . a) Primera configuración, acoplamiento de PPS en $\theta_0 = 30^\circ$ y desacoplamiento en $\theta_s = 15^\circ$ . b) Segunda configuración, acoplamiento de PPS en $\theta_0 = 30^\circ$ y desacoplamiento en $\theta_s = 0^\circ$ . . . . .	78
41. Corte del CDR en el ángulo de acoplamiento $\theta_0 = 30^\circ$ para la primera configuración. a) Acoplamiento de PPS mediante la primera componente periódica. b) Interacción con la segunda componente. c) Acoplamiento del PPS y desacoplamiento del mismo ilustrado por el orden ubicado en $\theta_s = 15^\circ$ . . . . .	79
42. Intensidad del campo cercano del proceso de doble esparcimiento para rejilla de difracción con dos periodos. a) Primera configuración, desacoplamiento en $\theta_s = 15^\circ$ . b) Segunda configuración, desacoplamiento en $\theta_s = 0^\circ$ . . . . .	80
43. Mapa de optimización para el orden correspondiente al proceso de desacoplamiento. En los correspondientes recuadros se ilustra la pareja de altura que maximizan la potencia desacoplada. a) Primera configuración. b) Segunda configuración. . . . .	81
44. Comparación en el proceso de acoplamiento-desacoplamiento óptimo y el presentado en los análisis previos. a) Desacoplamiento en $\theta_s = 15^\circ$ . b) Desacoplamiento en $\theta_s = 0^\circ$ . . . . .	82
45. Intensidad del campo cercano para el proceso de acoplamiento y desacoplamiento óptimo. a) Desacoplamiento en $\theta_s = 15^\circ$ . b) Desacoplamiento en $\theta_s = 0^\circ$ . . . . .	82
46. Órdenes de difracción asociados al batimiento de las dos componentes periódicas asociadas a la superficie $\zeta(x_1)$ . . . . .	83
47. Ilustración del experimento de interferencia propuesto para dos haces desacoplados mediante el proceso de doble esparcimiento. . . . .	84

## Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
48. CDR para la interacción entre dos haces y la rejilla descrita en la segunda configuración. a) Haces en fase. b) Haces en contrafase. . . . .	85
49. Intensidad del campo cercano de la interferencia de dos haces que son desacoplados en la misma dirección. . . . .	86
50. Evolución del CDR en función del desfase introducido en el camino óptico de uno de los haces. . . . .	86
51. Intensidad del campo esparcido por la rejilla descrita en la configuración 2 debido a la incidencia de dos haces con speckle con semiancho de envolvente $w_0 = 10 \mu\text{m}$ y tamaño de mota $\xi = 2 \mu\text{m}$ . a) Interferencia constructiva. b) Interferencia destructiva. . . . .	87
52. Dependencia temporal de un pulso de luz con longitud de onda central $\lambda_0 = 810$ y semiancho espectral $\Delta\lambda = 40$ . En el recuadro se ilustra un corte de la intensidad centrada a lo largo de $x_1 = 0$ . . . . .	88
53. CDR normalizado para la interacción con un pulso de luz incidente a $\theta_s = 0^\circ$ . a) Espejo perfecto. b) Rejilla simple definida por la componente acopladora. c) Rejilla simple definida por la componente desacopladora. . . . .	90
54. Corte a lo largo de $\theta_s = 30^\circ$ para los CDR ilustrados en la figura (53). . . . .	90
55. CDR normalizado para la interacción de la rejilla de doble periodo con un pulso de luz incidente en condición de acoplamiento. Se muestra los resultados para cada una de las configuraciones propuestas. . . . .	91
56. Cortes a lo largo de las direcciones de desacoplamiento para los CDR ilustrados en la figura (55). . . . .	92

## Capítulo 1. Introducción

---

El problema de esparcimiento electromagnético, como resultado de la interacción entre campos y superficies planas e irregulares ha sido objeto de interés académico desde hace más de dos siglos y es considerado actualmente como parte fundamental del electromagnetismo aplicado. Su importancia en la óptica radica en que la mayoría de los elementos utilizados para la manipulación de la luz están conformados por superficies, ya sea metálicas o dieléctricas, como es el caso de los espejos, los prismas, los lentes y las rejillas de difracción.

En lo que respecta a la interacción entre campos electromagnéticos y superficies perfectamente planas, la solución al problema se puede expresar en términos de los coeficientes de Fresnel para ondas planas, los cuales expresan la relación existente entre la amplitud de los campos reflejados e incidentes, incluyendo su relación de fase. Sin embargo, como resultado de diversos factores, en situaciones más prácticas y realistas, las superficies presentan normalmente irregularidades con dimensiones comparables con la longitud de onda. Además, los campos que las iluminan pueden ser parcialmente coherentes y policromáticos, complicando así el planteamiento para encontrar una solución analítica. A pesar de lo anterior, se han establecido métodos de solución para algunos casos específicos. Entre estos, podemos mencionar la aproximación de Kirchhoff y las implementaciones numéricas rigurosas, como la del método integral (Maradudin *et al.*, 1990). Esta última se basa en el segundo teorema integral de Green y proporciona una solución formal al problema de esparcimiento por geometrías bidimensionales.

Dada la variedad de procesos y posibles interacciones en interfases, se han reportado y estudiado muchos efectos. Algunos como simples curiosidades científicas, a pesar de su potencial para aplicaciones, y otras que por el contrario han logrado desencadenar desarrollos que han desembocado en avances tecnológicos importantes. Por ejemplo, en el desarrollo de sensores y en las guías de onda para el transporte de señales ópticas clásicas y no clásicas. Este es el campo general del conocimiento en el que se enmarcan efectos como el corrimiento Goos-Hänchen (Goos y Hänchen, 1947; Goos y Lindberg-Hänchen, 1949) y la excitación de ondas electromagnéticas superficiales en metales, que son los problemas estudiados en esta tesis.

El primero de estos es, tal vez, el efecto no especular más estudiado en la literatura. El corrimiento Goos-Hänchen (GH) se manifiesta como el desplazamiento lateral que sufre un haz reflejado con respecto a la posición esperada con base en la óptica geométrica; este se puede dar tanto en superficies metálicas como dieléctricas. Con base a este efecto, se han reportado aplicaciones como la construcción de sensores tipo refractómetro (Hashimoto y Yoshino, 1989), el acoplamiento de modos fugado en guías de ondas y hasta la posibilidad de excitar ondas superficiales no lineales (Emile *et al.*, 1995; Pillon *et al.*, 2005).

El caso más estudiado corresponde al que se da en interfaces dieléctricas cerca de la condición de reflexión total interna. En un principio la explicación del fenómeno se atribuía a que el campo incidente lograba penetrar más allá de la superficie para reflejarse en una superficie virtual. Sin embargo, esta explicación no es satisfactoria y no permite un análisis detallado del problema. Una mejor manera de entender el fenómeno es en términos de los cambios de fase que experimenta el campo reflejado en la interfaz (Renard, 1964). Una ojeada rápida a la literatura permite ver que el corrimiento Goos-Hänchen en interfaces dieléctricas ha sido muy estudiado para el caso de haces gaussianos e incluso otros más sofisticados. Sin embargo, el caso de campos aleatorios, como patrones de moteado y haces parcialmente coherentes no ha sido estudiado con la profundidad requerida y los pocos resultados que se pueden encontrar en la literatura son controversiales (Aiello y Woerdman, 2011; Wang *et al.*, 2008; Ziauddin *et al.*, 2015; Simon y Tamir, 1989). El estudio de este tema forma parte importante del trabajo presentado en esta tesis.

Por otro lado, la posibilidad de excitar resonancias y ondas electromagnéticas superficiales en metales, así como las aplicaciones que estas tienen, ha dado origen a la plasmónica, que se puede considerar como una rama de la óptica que se encarga del estudio de la interacción de la luz con materiales metálicos nanoestructurados. Las ondas superficiales que hemos mencionado reciben el nombre de plasmones polaritones de superficie (PPS) y son ondas electromagnéticas que se propagan a lo largo de la interfaz dieléctrico-metal. Se trata de un tipo de ondas guiadas por la superficie en las que la amplitud de los campos decae exponencialmente en dirección perpendicular a la superficie; es decir, cuando nos alejamos de la interfaz (Pitarke *et al.*, 2006). Se trata de un tipo de campo híbrido que involucra el acoplamiento de un campo elec-

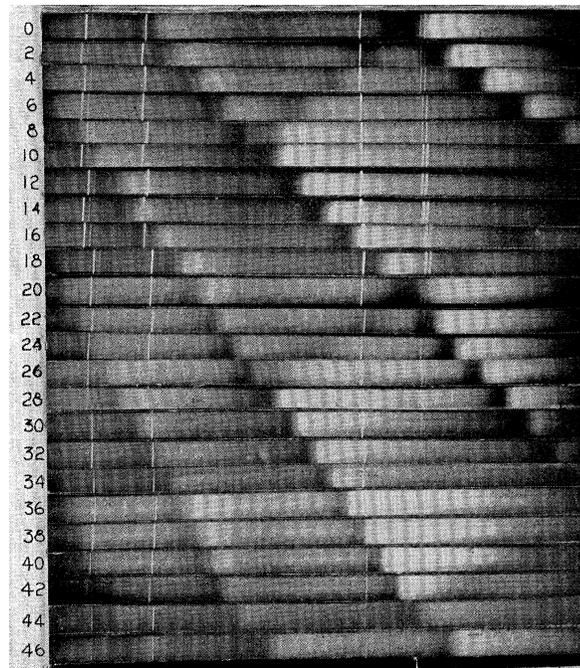
tromagnético con las oscilaciones de los electrones de conducción del metal (plasma). Los metales se caracterizan por tener una separación entre los niveles de energía de sus bandas de conducción que es muy pequeña en comparación con las excitaciones térmicas a temperatura ambiente. Esto permite modelar su respuesta óptica en términos de sistemas clásicos, como el modelo de Drude y las ecuaciones de Maxwell (Maier, 2007). El modelo más utilizado se conoce como el del gas de electrones libres, en el que el sistema de partículas cargadas se puede considerar como un plasma (de donde viene el nombre de plasmónica).

Los PPS se encuentran fuertemente confinados a la vecindad de la superficie, lo cual les da una característica de ondas que son prácticamente bidimensionales, por lo que son consideradas ondas superficiales. Lo anterior es interesante para cuestiones de la reducción del tamaño de los dispositivos ópticos, pues los PPS constituyen ondas guiadas con un grado de confinamiento mayor al de las ondas en las guías dieléctricas, abriendo la posibilidad de desarrollar circuitos ópticos integrados a escala nanométrica que serían útiles en el área de las comunicaciones y procesamiento de información. Además, cuentan con capacidades de transmisión cercanas a las proporcionadas por las técnicas ópticas convencionales (Heber, 2009). Lo anterior invita al desarrollo de aplicaciones de la plasmónica en el campo de las comunicaciones, lo que ha motivado propuestas de dispositivos plasmónicos capaces de procesar y transmitir señales ópticas, tanto en el régimen clásico como en el cuántico (Chang *et al.*, 2006; Di Martino *et al.*, 2012; Fakonas *et al.*, 2014, 2015).

Si consideramos la propagación del campo óptico acoplado a las oscilaciones del plasma, es de esperarse que las diferencias entre las relaciones de dispersión de la luz y los PPS, además de las rugosidades o variaciones de los perfiles de la superficie, alteren las propiedades de coherencia de la luz que se obtiene por medio de un desacoplamiento de los PPS. Estos efectos podrían comprometer la habilidad de producir interferencia entre los campos resultantes, lo que vendría a reducir la capacidad de información llevada por los PPS. Es aquí donde nace la necesidad de estudiar la integridad de la información contenida en haces de luz que se acoplarán a PPS para posteriormente ser desacoplados y utilizados en algún experimento. El estudio de la evolución de la coherencia temporal y espacial de haces plasmónicos, así como los efectos del proceso de acoplamiento-desacoplamiento, son fundamentales para las

potenciales aplicaciones de la plasmónica en la transmisión y procesamiento de información.

Como se mostrará en posteriores capítulos, no es posible acoplar de forma directa un campo de luz propagante a PPS. Esto se debe a que la magnitud del vector de onda asociado a estos últimos,  $k_{sp}$ , siempre es mayor que el correspondiente al campo propagante en el aire. Sin embargo, es bien conocido que se puede lograr este acoplamiento introduciendo una modulación periódica en el perfil de alturas de la interfaz dieléctrico-metal (Hutley y Maystre, 1976; Raether, 1988). Este efecto es el responsable de la aparición de las anomalías descritas por Wood (1935) en sus estudios del espectro de la luz blanca difractada por rejillas metálicas.



**Figura 1.** Anomalías de Wood asociadas al orden 1 de difracción para una rejilla de aluminio con un periodo de  $1.66 \mu\text{m}$ . Se observa la evolución de las bandas de absorción en función del ángulo de incidencia marcado a la izquierda de la imagen (tomada de (Wood, 1935)).

Haciendo referencia a lo anterior, Wood centró su análisis en el orden 1 de difracción de la rejilla. Al examinar el espectro correspondiente a una lámpara de luz blanca, notó la presencia de una banda oscura que se desplazaba al cambiar el ángulo de incidencia, como se muestra en la figura (1). Dado que Wood no proporcionó una explicación para el fenómeno, éste generó interés entre los teóricos de la época, pero, tuvieron que pasar varios años para que se lograra asociar estas bandas al acoplamiento de luz a PPS. La posición de estas bandas obedece una relación de

conservación de momento para la componente paralela del vector de onda a la superficie, que se puede derivar de manera análoga a la *ecuación de la rejilla*, que se puede escribir como

$$\sin(\theta_m) = \sin(\theta_0) \pm \frac{m\lambda}{T}, \quad (1)$$

donde  $m$  corresponde al orden de difracción de interés,  $\theta_0$  es el ángulo de incidencia medido respecto a la normal de la rejilla en sentido antihorario,  $\theta_m$  es el ángulo de difracción medido en sentido horario,  $\lambda$  la longitud de onda y  $T$  el periodo de la rejilla.

Por otro lado, si a una rejilla diseñada para acoplar luz a PPS se le añade una modulación extra con un periodo diferente al primero, es posible desacoplar la luz que ha sido acoplada en una dirección diferente a la especular (West y O'Donnell, 1996). De esta forma, es posible generar un haz de luz que involucra en su camino óptico el paso por PPS. Con este tipo de dispositivos relativamente sencillos, es posible estudiar vía interferencia los efectos que este tipo de procesos tiene sobre la coherencia de la luz, tanto a nivel clásico como cuántico.

El objetivo principal de esta tesis es abordar, en primera instancia, el estudio del corrimiento Goos-Hänchen como proceso no especular en interfaces dieléctricas. Basados en una representación de los campos en términos de su espectro angular, examinamos el corrimiento GH que presenta un haz gaussiano (McGuirk y Carniglia, 1977), para compararlo posteriormente con el que experimenta un campo aleatorio, como un patrón de moteado (speckle) o un haz parcialmente coherente, que construimos en concordancia con el modelo de fuentes llamado Gauss-Shell.

Por otro lado, también se busca estudiar la interacción de campos ópticos, tales como haces gaussianos y pulsos de luz, con rejillas de difracción metálicas con doble periodo. Como parte del trabajo, se establecen los parámetros adecuados para generar campos de luz que han seguido estos procesos de acoplamiento a PPS y su posterior desacoplamiento de manera óptima. De esta manera, es posible estudiar la evolución de las propiedades de coherencia y sentar las bases que permitan estudiar las consecuencias que esto tiene sobre estados de luz no clásicos.

La tesis se encuentra estructurada de la siguiente manera. Después de esta introducción, en el capítulo 2 se exploran algunas generalidades de la teoría electromagnética clásica que son necesarias para abordar los problemas estudiados en la tesis.

Además, se presenta una breve introducción del modelo de Drude, que nos será de utilidad para describir la respuesta óptica de los metales.

En el capítulo 3 se presenta el formalismo del espectro angular para la representación de campos en términos de ondas planas. Con base en este formalismo se proponen construcciones de campos ópticos bidimensionales (invariantes a lo largo de un eje coordenado), iniciando con los haces gaussianos monocromáticos, siguiendo con la síntesis de pulsos de luz como una superposición de campos monocromáticos y finalizando con una descripción formal para campos aleatorios con propiedades estadísticas apropiadas.

En el capítulo 4 se presenta un estudio de la interacción de campos ópticos con superficies. Se considera en primera estancia la interacción de la luz con superficies planas utilizando el formalismo del espectro angular y se introduce el concepto de plasmón polaritón de superficie, como una solución electromagnética particular que es soportada por interfaces planas metal-dieléctrico. Finalmente, se describe un método que permite calcular de manera rigurosa la interacción de un campo con una superficie rugosa. El método, conocido como el método de la ecuación integral, está basado en el segundo teorema integral de Green.

En el capítulo 5 se utiliza el formalismo de representación de haces aleatorios para estudiar el corrimiento lateral que sufre un campo óptico aleatorio debido a su interacción con una superficie dieléctrica plana cerca de la condición de reflexión total interna. Se establece, además, una relación entre este corrimiento y el más estudiado corrimiento Goos-Hänchen que experimentan los haces deterministas.

En el capítulo 6 se presentan resultados y el correspondiente análisis del estudio de la interacción de haces y pulsos de luz con superficies metálicas con dos componentes armónicos que, como hemos expuesto, constituye la principal motivación de este trabajo de tesis. Se establecen los parámetros y consideraciones de diseño que permiten maximizar la intensidad del haz generado a través de la doble interacción con los componentes armónicos de la rejilla.

Finalmente, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones, apreciaciones finales del trabajo y se mencionan posibles trabajos futuros.

## Capítulo 2. Generalidades de la teoría electromagnética

En este capítulo se presentan elementos básicos de la teoría electromagnética que servirán de base para el desarrollo de capítulos posteriores. También se presenta el modelo de Drude para describir la respuesta óptica de los metales.

### 2.1. Ecuaciones de Maxwell macroscópicas

En electromagnetismo clásico, toda interacción y comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos en un medio material puede ser deducido de las ecuaciones de Maxwell, que en su forma más general y utilizando el sistema gaussiano, pueden ser escritas como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (5)$$

con  $c$  la velocidad de la luz.

Las ecuaciones anteriores, relacionan el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y la inducción magnética  $\mathbf{B}$  con parámetros *fuentes*, como lo son la densidad de carga  $\rho$  y la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  y que por lo general, hacen referencia a la totalidad de fuentes involucradas en el sistema bajo consideración. En otras palabras, son las fuentes ligadas al sistema ( $\rho_{lig}$  y  $\mathbf{J}_{lig}$ ) o que son inducidas por los factores externos ( $\rho_{ext}$  y  $\mathbf{J}_{ext}$ ), de tal forma que

$$\begin{cases} \rho = \rho_{lig} + \rho_{ext}, \\ \mathbf{J} = \mathbf{J}_{lig} + \mathbf{J}_{ext}. \end{cases} \quad (6)$$

En este punto vale aclarar que todo los campos vectoriales anteriormente mencionados tiene forma funcional del tipo  $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t)$ , donde  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  es un vector en el sistema de referencia del laboratorio y  $t$  es la variable temporal.

Dadas las expresiones (6), es posible introducir dos nuevos campos que establezcan una relación entre las densidades y las propiedades medibles del medio material.

Definiremos el campo de polarización  $\mathbf{P}$  (momento dipolar eléctrico por unidad de volumen) y el campo de magnetización  $\mathbf{M}$  (momento dipolar magnético por unidad de volumen), tal que

$$\begin{cases} \rho_{lig} = -\nabla \cdot \mathbf{P}, \\ \mathbf{J}_{lig} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}, \end{cases} \quad (7)$$

de estas expresiones se puede comprobar que las cargas ligadas cumplen con la ecuación de continuidad  $\nabla \cdot \mathbf{J}_{lig} + \frac{\partial \rho_{lig}}{\partial t} = 0$ . Por lo tanto, estas cantidades se conservan y garantizan el desacoplamiento de las fuentes externas propuestas en (6). Utilizando las expresiones (7), las ecuaciones de Maxwell se pueden redefinir como

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_{ext}, \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (10)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{ext}, \quad (11)$$

las cuales reciben el nombre de *ecuaciones macroscópicas de Maxwell* y donde  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{H}$  son nuevos campos electromagnéticos, llamados desplazamiento eléctrico y campo magnético respectivamente, que están dados por

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad (12)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}. \quad (13)$$

De esta forma, se relacionan cuatro campos vectoriales macroscópicos con la respuesta electromagnética de un medio material, en función de las fuentes externas que lo perturban.

Para efectos de la presente tesis, se harán dos consideraciones de suma importancia para los medios materiales de interés. Primero, se trabajará sobre medios no magnéticos, por lo tanto, no se tiene en cuenta la respuesta magnética  $\mathbf{M}$ . La segunda consideración hace referencia a la respuesta eléctrica y en este caso, se supondrá que el campo de polarización  $\mathbf{P}$  es proporcional al campo eléctrico  $\mathbf{E}$  (modelo lineal),

además de considerar medios homogéneos e isotrópicos. Escribimos entonces que

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}, \quad (14)$$

con  $\chi_e$  una constante escalar de proporcionalidad, por lo general compleja y llamada *susceptibilidad eléctrica*. Utilizando (14), es posible escribir el campo de desplazamiento eléctrico como

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\chi_e)\mathbf{E}, \quad (15)$$

donde la constante  $\epsilon = (1 + 4\pi\chi_e)$  es la *permitividad eléctrica* del medio.

Vale aclarar que los resultados (14) y (15) solo son válidos para campos eléctricos monocromáticos de frecuencia angular  $\omega$  y que en general, toman la forma de

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t|\omega) = \chi_e(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t|\omega),$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t|\omega) = \epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t|\omega),$$

donde  $\epsilon(\omega) = \epsilon_r(\omega) + i\epsilon_i(\omega)$  es conocida como la *función dieléctrica* del medio y caracteriza su respuesta eléctrica (u óptica) en función de la frecuencia del campo con el cual interactúa.

## 2.2. Ecuación de onda y ecuación de Helmholtz

Finalmente, si se utilizan las ecuaciones (10) y (11), además de imponer un sistema libre de fuentes externas (nulidad de la densidad de corriente y carga), se puede mostrar que un campo  $\psi$  cumple la *ecuación de onda*, por lo tanto

$$\nabla^2 \psi - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (16)$$

donde  $\psi$  representa el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  o el campo magnético  $\mathbf{H}$ .

Para buscar soluciones a la ecuación de onda, simplificamos el problema proponiendo campos de la forma

$$\psi(\mathbf{r}, t|\omega) = \psi(\mathbf{r}|\omega)e^{-i\omega t}, \quad (17)$$

la cual corresponde a un onda vectorial monocromática de frecuencia  $\omega$  y donde  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}|\omega) = \boldsymbol{\psi}(x_1, x_2, x_3|\omega)$  es la amplitud compleja que describe el comportamiento espacial de  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t|\omega)$ . Con esta simplificación, sustituyendo la ecuación (17) en (16), buscaremos entonces soluciones a la ecuación

$$\nabla^2 \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}|\omega) + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}|\omega) = \mathbf{0}, \quad (18)$$

que se conoce como la *ecuación de Helmholtz* y representa la base general y fundamental para abordar la mayoría de los problemas en óptica basados en un marco clásico y lineal.

### 2.3. Respuesta óptica de metales

Una buena aproximación para modelar la respuesta óptica de metales lineales y homogéneos fue propuesta por Paul Drude alrededor del año 1900. El modelo describe bastante bien el comportamiento de los metales, a frecuencias ópticas y del infrarrojo cercano, con base en una descripción clásica del movimiento de los electrones libres en el material en respuesta a los campos eléctricos de la onda electromagnética.

En el modelo se plantea un sistema en el que los electrones son considerados como parte de un gas que se puede mover libremente en una matriz conformada por iones positivos y pesados (fijos). Bajo esta condición, los electrones oscilan en respuesta al campo electromagnético aplicado al sistema y, a su vez, se ven amortiguados por las colisiones consecutivas que sufren con la matriz de iones. De tal forma, se puede escribir una ecuación dinámica para la posición promedio de un electrón como

$$m \left[ \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} \right] \langle \mathbf{r} \rangle(t) = -e \mathbf{E}(\mathbf{r}, t|\omega), \quad (19)$$

donde  $m$  representa la masa del electrón en reposo,  $e$  la carga del electrón y  $\gamma$  es una frecuencia característica del medio, que representa una medida promedio de los choques entre los electrones y la matriz de iones. Esta constante se puede escribir como  $\gamma = 1/\tau_r$ , donde  $\tau_r$  es el tiempo de relajación del gas de electrones libre.

Si se considera la interacción entre los electrones y un campo eléctrico monocromático, como el propuesto en la ecuación (17), se puede suponer que la solución para

la posición promedio de éstos, también sigue una dependencia armónica monocromática, permitiéndose escribir como

$$\langle \mathbf{r} \rangle(t) = \langle \mathbf{r} \rangle e^{-i\omega t},$$

donde  $\langle \mathbf{r} \rangle$  es la amplitud de las oscilaciones de un electrón inmerso en el gas libre. Con esto, haciendo uso de las consideraciones anteriores y reemplazando en la ecuación diferencial (19), se tiene que la dinámica de los electrones como función del campo aplicado esta determinada por

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \frac{e/m}{\omega^2 + i\omega\gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}|\omega). \quad (20)$$

Ahora, partiendo del hecho que el momento dipolar promedio de un electrón se puede escribir como el producto entre su carga y su posición promedio,  $\langle \mathbf{p} \rangle = -e \langle \mathbf{r} \rangle$ , se puede definir la polarización macroscópica o el campo de polarización como

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}|\omega) = -ne \langle \mathbf{r} \rangle,$$

con  $n$  el número de electrones por unidad de volumen. Además, tomando en cuenta este resultado y la expresión (14), también se puede escribir

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}|\omega) = -\frac{ne^2/m}{\omega^2 + i\omega\gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}|\omega). \quad (21)$$

Según esto último, la susceptibilidad eléctrica esta dada por  $\chi_e(\omega) = -\frac{ne^2/m}{\omega^2 + i\omega\gamma}$ , siendo una función compleja y dependiente de la frecuencia, como se mencionó brevemente en la sección 2.1. En consecuencia, la *función dieléctrica* característica de un medio bajo el modelo de Drude, toma la forma

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma}, \quad (22)$$

donde  $\omega_p = \sqrt{4\pi ne^2/m}$  es una frecuencia característica, conocida como *la frecuencia de plasma* del medio.

Para examinar el comportamiento de la  $\epsilon(\omega)$ , vale la pena explorar el caso conser-

vativo ( $\gamma \approx 0$ ), haciendo referencia a los medios sin disipación. Así que

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

caracteriza a un medio donde el gas de electrones libres no está amortiguado. En esta aproximación, si se cumple que  $\omega > \omega_p$ , la función dieléctrica siempre es positiva ( $\epsilon(\omega) > 0$ ), lo que indica que el material se comporta como un dieléctrico. Por otro lado, para frecuencia menores a la frecuencia del plasma,  $\omega < \omega_p$ , la función dieléctrica toma un valores negativos, característica correspondiente a los metales. Para el caso particular en el que la frecuencia del campo eléctrico aplicado coincide con la frecuencia de plasma,  $\epsilon(\omega_p) = 0$ , el gas de electrones libres responde de manera rígida ante la perturbación externa. En tal caso, el índice de refracción es cero y se tiene también la posibilidad de tener ondas electromagnéticas longitudinales en el medio (Maier, 2007).

Finalmente, los resultados presentados brevemente en este capítulo proveen una plataforma sólida para el desarrollo de los posteriores, donde se buscará introducir herramientas útiles para la descripción de la propagación de campos ópticos y su interacción con superficies metálicas y dieléctricas.

## Capítulo 3. Propagación de campos en medios homogéneos

Debido a que a lo largo de nuestro trabajo consideraremos la interacción de la luz con algunas superficies de interés, es necesario presentar en este capítulo el estudio de la propagación de campos electromagnéticos en un medio homogéneo y dieléctrico. Limitaremos el análisis a la descripción formal de tres casos específicos; los conocidos haces gaussianos, pulsos de luz y campos aleatorios. Existen varias técnicas para abordar el problema, una de estas es la descomposición de los campos en términos de su espectro angular de ondas planas (Goodman, 2005). A continuación, serán presentados los fundamentos más generales de esta técnica.

### 3.1. Expansiones en términos de ondas planas: El espectro angular

Las técnicas de espectro angular constituyen una poderosa herramienta matemática para la descripción de campos propagantes en medios homogéneos. Su principio fundamental se basa en expresar un campo complejo como una suma infinita de ondas planas propagantes y evanescentes, con pesos apropiados que conlleven a una convergencia deseada.

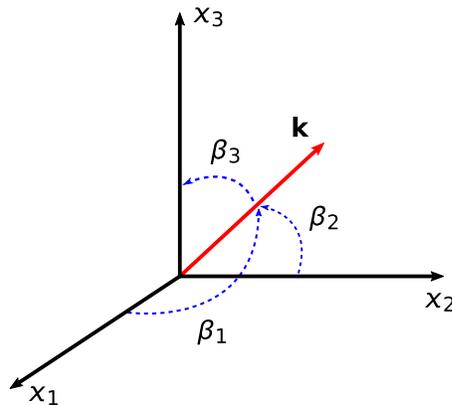


Figura 2. Ángulos directores de una onda plana.

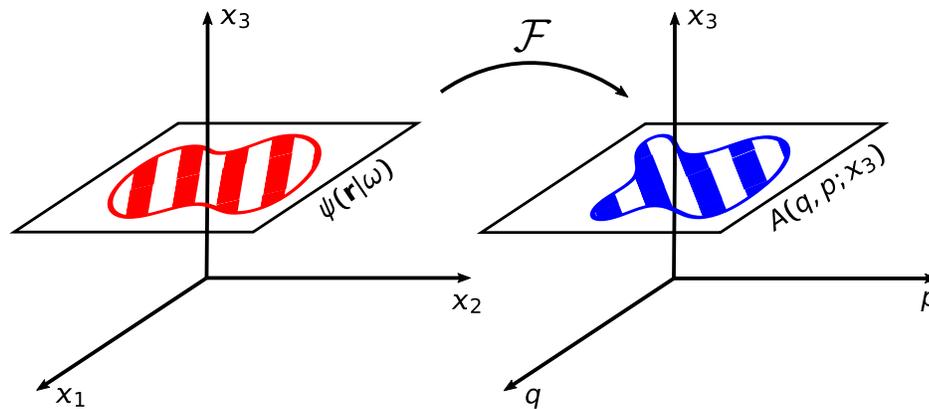
En base a lo anterior, se puede definir a una onda plana escalar como un campo de la forma

$$\psi(\mathbf{r}|\omega) = \psi_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (23)$$

donde  $\psi_0$  es una amplitud constante, compleja y con unidades adecuadas y  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$  es llamado el vector de onda, que conceptualmente indica la dirección de

propagación de los frentes de onda que son los planos de fase constante definidos por el producto  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ . En algunos casos es conveniente expresar el vector  $\mathbf{k}$  en términos de los ángulos que forma con los ejes coordenados (cosenos directores), de modo que esté definido como  $\mathbf{k} = k(\cos(\beta_1), \cos(\beta_2), \cos(\beta_3))$ , con  $k = |\mathbf{k}|$ . Ver figura (2).

Para que la expresión (23) sea solución de la ecuación de Helmholtz, se debe cumplir la *relación de dispersión*  $\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} = n(\omega)\frac{\omega}{c}$  para cualquier vector  $\mathbf{k}$ , donde  $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$  es el índice de refracción del medio en el que se propaga la onda plana. Considerando la definición de los cosenos directores, es fácil ver que para cualquier dirección de propagación,  $|\mathbf{k}| = n(\omega)\frac{\omega}{c}$  (número de onda).



**Figura 3.** Transformación de la amplitud compleja del espacio de coordenadas al espacio de Fourier.

Suponemos ahora que para un plano constante  $X_3$  se puede escribir la dependencia espacial de un campo cualquiera  $\psi(\mathbf{r}|\omega) = \psi(x_1, x_2, x_3|\omega)$  como una integral de Fourier, de tal forma que

$$\psi(\mathbf{r}|\omega) = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{dp}{2\pi} A(q, p; x_3) e^{i(qx_1 + px_2)}, \quad (24)$$

con  $q$  y  $p$  coordenadas en el espacio de Fourier y  $A(q, p; x_3) = \mathcal{F}\{\psi(\mathbf{r}|\omega)\}$ . Esto se ilustra en la figura (3). Dado que el campo satisface la ecuación de Helmholtz, podemos escribir lo siguiente

$$\nabla^2 \left( \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{dp}{2\pi} A(q, p; x_3) e^{i(qx_1 + px_2)} \right) + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \left( \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{dp}{2\pi} A(q, p; x_3) e^{i(qx_1 + px_2)} \right) = 0, \quad (25)$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{dp}{2\pi} \left\{ \nabla^2 [A(q, p; x_3) e^{i(qx_1 + px_2)}] + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} [A(q, p; x_3) e^{i(qx_1 + px_2)}] \right\} = 0, \quad (26)$$

donde

$$\nabla^2 [A(q, p; x_3) e^{i(qx_1 + px_2)}] = \left[ -q^2 - p^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] A(q, p; x_3) e^{i(qx_1 + px_2)}. \quad (27)$$

Usando las expresiones (27) y (26) se tiene que

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dq dp}{2\pi 2\pi} \left[ -q^2 - p^2 + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] A(q, p; x_3) e^{i(qx_1 + px_2)} = 0, \quad (28)$$

esta expresión solo tiene solución no trivial si se cumple que

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} A(q, p; x_3) = -\alpha^2 A(q, p; x_3),$$

con

$$\alpha = \begin{cases} \sqrt{n^2 \frac{\omega^2}{c^2} - q^2 - p^2} & \text{si } q^2 + p^2 \leq n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \\ i\sqrt{q^2 + p^2 - n^2 \frac{\omega^2}{c^2}} & \text{si } q^2 + p^2 > n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \end{cases}. \quad (29)$$

Por lo tanto, una solución para la amplitud compleja en el espacio de Fourier puede ser escrita por una suma de exponenciales del tipo

$$A(q, p; x_3) = A(q, p; 0) e^{i\alpha x_3} + B(q, p; 0) e^{-i\alpha x_3}, \quad (30)$$

donde  $A(q, p; 0)$  y  $B(q, p; 0)$  son funciones determinadas por las condiciones de frontera del problema. Con este resultado se puede escribir la amplitud del campo óptico  $\psi(\mathbf{r}|\omega)$  como

$$\psi(\mathbf{r}|\omega) = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dq dp}{2\pi 2\pi} [A(q, p; 0) e^{i(qx_1 + px_2 + \alpha x_3)} + B(q, p; 0) e^{i(qx_1 + px_2 - \alpha x_3)}]. \quad (31)$$

Si consideramos un problema de medio espacio ( $x_3 \geq 0$ ), el segundo término de la expresión (31) debe ser cero, pues de lo contrario la solución no sería física. Por lo tanto

$$\psi(\mathbf{r}|\omega) = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dq dp}{2\pi 2\pi} A(q, p; 0) e^{i(qx_1 + px_2 + \alpha x_3)}. \quad (32)$$

Esta expresión es válida para campos escalares que se propagan desde un plano de referencia  $x_3 = 0$  a otro  $x'_3$  donde  $x'_3 > 0$ . (En nuestro caso  $x_3 = 0$ , pero igualmente podría ser otro valor). Por otro lado, la amplitud compleja  $A(q, p; 0) = A(q, p)$  se puede conocer si se tiene conocimiento del campo escalar en el plano de origen, de tal manera que,  $A(q, p; 0) = \mathcal{F}\{\psi(x_1, x_2, 0|\omega)\}$ .

Si comparamos el argumento de la expresión (32) con el de una onda plana del tipo presentado en (23), es posible definir un vector  $\mathbf{K} = (q, p, \alpha)$  de tal forma que esta expresión se pueda ver como una superposición infinita de ondas planas del tipo  $e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}$ , pesadas por la amplitud  $A(q, p)$ , donde esta última recibe el nombre de *espectro angular* del campo  $\psi(\mathbf{r}|\omega)$ .

Siguiendo la idea anterior, si se considera que  $q^2 + p^2 > n^2 \frac{\omega^2}{c^2}$  se tienen ondas que pueden ser escritas como

$$\psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{r}|\omega) \propto e^{-|\alpha|x_3} e^{i(qx_1 + px_2)},$$

que corresponden a ondas planas inhomogéneas<sup>1</sup> que decaen rápidamente cuando  $x_3 > 0$  (ondas evanescentes). Por otro lado, si  $q^2 + p^2 \leq n^2 \frac{\omega^2}{c^2}$  se tiene ondas planas homogéneas y propagantes,

$$\psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{r}|\omega) \propto e^{i(qx_1 + px_2 + \alpha x_3)}.$$

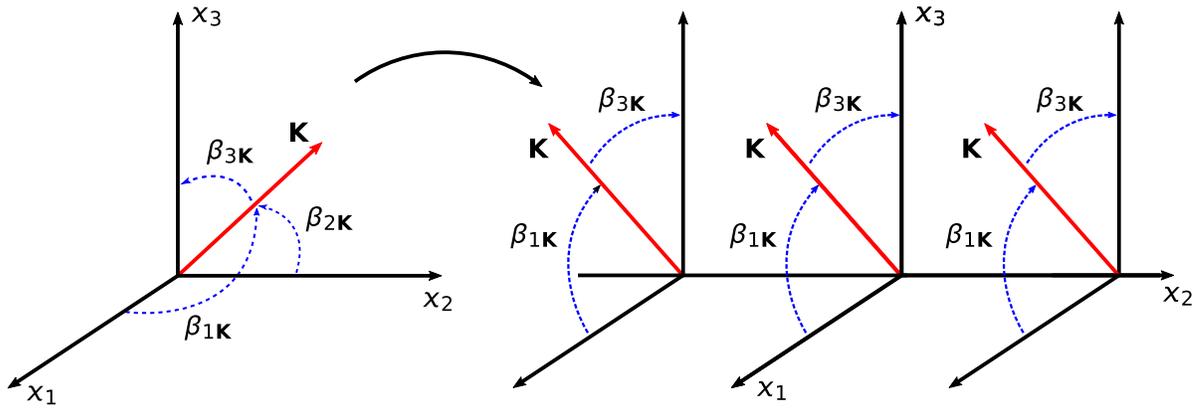
Finalmente, cabe resaltar que cada onda de la superposición (32) es una solución a la ecuación de Helmholtz (18); por lo tanto, el formalismo del espectro angular no es una representación en Fourier, sino mas bien, una representación modal del campo óptico  $\psi(\mathbf{r}|\omega)$ .

Las componentes del vector  $\mathbf{K}$  de una onda propagante se pueden escribir en términos de los cosenos directores del vector, de la siguiente manera:

$$\begin{cases} q = k \cos(\beta_{1\mathbf{K}}) \\ p = k \cos(\beta_{2\mathbf{K}}) \\ \alpha = k \cos(\beta_{3\mathbf{K}}) \end{cases} \quad (33)$$

<sup>1</sup>Se dice que una onda es homogénea si las superficies de fase constante y amplitud constante coinciden.

Así, la integral en la ecuación (32) se puede ver como una superposición angular de ondas planas (régimen propagante).



**Figura 4.** Ilustración del cambio de formalismo tridimensional a uno bidimensional invariante a lo largo de la coordenada  $x_2$ .

De aquí en adelante, con fines de simplificar la implementación del método integral, se considerarán ondas bidimensionales. Dado esto, asumiremos campos escalares  $\psi(\mathbf{r}|\omega)$  invariantes en la dirección  $x_2$ ,  $\psi(\mathbf{r}|\omega) = \psi(x_1, x_3|\omega)$ , como se ilustra en la figura (4), con lo que

$$\alpha = \begin{cases} \sqrt{n^2 \frac{\omega^2}{c^2} - q^2} & \text{si } q \leq n^2 \frac{\omega}{c} \\ i\sqrt{q^2 - n^2 \frac{\omega^2}{c^2}} & \text{si } q > n^2 \frac{\omega}{c} \end{cases} . \quad (34)$$

Debido a esto, la integral en la ecuación (32) toma la forma

$$\psi(\mathbf{r}|\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} A(q) e^{i(qx_1 + \alpha x_3)}, \quad (35)$$

con  $A(q) = \mathcal{F}\{\psi(x_1, 0)\}$  y donde

$$\begin{cases} q = k \sin(\beta_{3\mathbf{K}}) \\ \alpha = k \cos(\beta_{3\mathbf{K}}) \end{cases} , \quad (36)$$

para ondas propagantes con vector de onda  $\mathbf{K}$ .

### 3.1.1. Polarizaciones fundamentales

Bajo la propuesta anterior de campos ópticos invariantes a lo largo de un eje coordenado, se hace posible la introducción de dos modos de polarización desacoplados, constituidos por las polarizaciones elementales  $s$  y  $p$ . Esto permite la descripción completa de un campo óptico vectorial. En este caso, tomando soluciones monocromáticas como la ecuación (17) para el campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t|\omega)$  y para el campo magnético  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t|\omega)$ , se puede mostrar que las ecuaciones de Maxwell (10) y (11), solo dependen de las amplitudes complejas  $\mathbf{E}(\mathbf{r}|\omega)$  y  $\mathbf{H}(\mathbf{r}|\omega)$ , respectivamente. Además, se pueden escribir como

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}|\omega) = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{H}(\mathbf{r}|\omega) \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}|\omega) = \frac{i\omega}{c} \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}|\omega) \end{cases} \quad (37)$$

Siguiendo con el análisis, y bajo la suposición de que cualquier campo vectorial  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}|\omega)$  puede ser escrito de la forma

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}|\omega) = (\psi_{x_1}(\mathbf{r}|\omega), \psi_{x_2}(\mathbf{r}|\omega), \psi_{x_3}(\mathbf{r}|\omega)), \quad (38)$$

y con la suposición de invarianza a lo largo de  $x_2$  ( $\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_2} = \mathbf{0}$ ), se puede probar de las ecuaciones (37), que las componentes de los campos satisfacen dos conjuntos de ecuaciones desacopladas, que podemos escribir de la forma

$$\begin{cases} \frac{\partial E_{x_2}}{\partial x_1} = \frac{i\omega}{c} H_{x_3} \\ \frac{\partial E_{x_2}}{\partial x_3} = -\frac{i\omega}{c} H_{x_1} \\ \left[ \frac{\partial H_{x_3}}{\partial x_1} - \frac{\partial H_{x_1}}{\partial x_3} \right] = \frac{i\omega}{c} \epsilon(\omega) E_{x_2} \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H_{x_2}}{\partial x_3} = \frac{i\omega}{c} \epsilon(\omega) E_{x_1} \\ \frac{\partial H_{x_2}}{\partial x_1} = -\frac{i\omega}{c} \epsilon(\omega) E_{x_3} \\ \left[ \frac{\partial E_{x_3}}{\partial x_1} - \frac{\partial E_{x_1}}{\partial x_3} \right] = -\frac{i\omega}{c} \epsilon(\omega) H_{x_2} \end{cases} \quad (40)$$

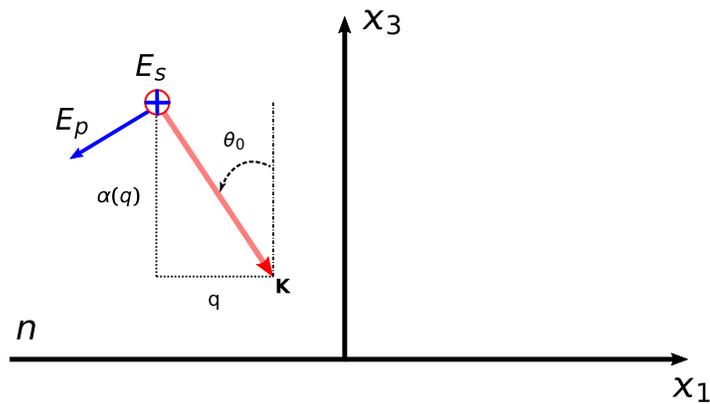
De los conjuntos de ecuaciones (39) y (40) se tiene que estos quedan totalmente determinados si se conocen las componentes vectoriales de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  a lo largo del eje coordenado  $x_2$ , por consiguiente, cualquiera de estos campos se puede

considerar como la superposición de dos campos vectoriales independientes y que no cambian al interactuar con algún sistema de interés. Entonces, un campo con polarización  $s$  está definido como

$$\begin{cases} \mathbf{E}_s(\mathbf{r}|\omega) = (0, E_{x_2}(\mathbf{r}|\omega), 0) \\ \mathbf{H}_s(\mathbf{r}|\omega) = -\frac{c}{i\omega} \left( \frac{\partial E_{x_2}}{\partial x_3}, 0, -\frac{\partial E_{x_2}}{\partial x_1} \right) \end{cases}, \quad (41)$$

mientras que uno con polarización  $p$  por

$$\begin{cases} \mathbf{H}_p(\mathbf{r}|\omega) = (0, H_{x_2}(\mathbf{r}|\omega), 0) \\ \mathbf{E}_p(\mathbf{r}|\omega) = \frac{c}{i\omega\epsilon(\omega)} \left( \frac{\partial H_{x_2}}{\partial x_3}, 0, -\frac{\partial H_{x_2}}{\partial x_1} \right) \end{cases}. \quad (42)$$



**Figura 5.** Ilustración de las polarizaciones fundamentales en el sistema de referencia  $x_1 - x_3$  para el campo eléctrico de una onda plana.

En general, cualquier campo óptico  $\psi(\mathbf{r}, t|\omega)$  se puede describir en términos de sus componentes de polarización  $s$  y  $p$ , por lo que en general lo escribiremos de la forma

$$\psi(\mathbf{r}, t|\omega) = (0, \psi(\mathbf{r}|\omega), 0)e^{-i\omega t}, \quad (43)$$

donde  $\psi(\mathbf{r}|\omega)$  es un campo escalar correspondiente a la componente  $x_2$  del campo eléctrico o magnético en los casos de polarización  $s$  y  $p$ , respectivamente. Para cada componente de la descomposición en ondas planas, si se trabaja en polarización  $s$  o *transversal eléctrica*, la componente del campo eléctrico es siempre perpendicular al plano que contiene los vectores de onda  $\mathbf{K}$ , mientras que en el caso de la polarización  $p$  o *transversal magnética*, la componente de campo magnético es la que es perpendicular a los vectores de onda  $\mathbf{K}$ . En este caso, el campo eléctrico está en el plano

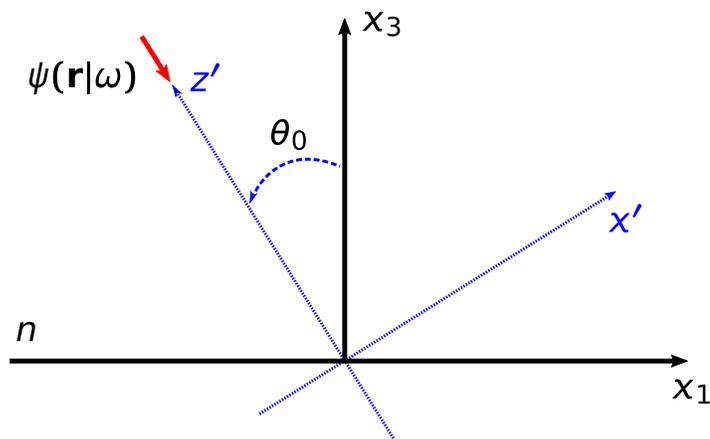
$x_1 - x_3$ .

A lo largo de la tesis utilizaremos  $\psi(\mathbf{r}|\omega)$  para denotar campos escalares que representan la componente de los campos eléctricos o magnéticos a lo largo de  $x_2$ , según se trate de la polarización  $s$  o  $p$ .

### 3.2. Haces gaussianos

Un primer ejemplo de la utilidad de las técnicas del espectro angular está dado por la representación formal de un haz gaussiano, que permite también estudiar su propagación. Este tipo de campos ópticos se refieren a ondas altamente direccionales, que presenta una baja divergencia a lo largo de una dirección de propagación bien definida, y cuya intensidad presenta un decaimiento en la dirección transversal al alejarse de su eje óptico siguiendo una forma funcional gaussiana.

Para facilitar la descripción de los haces gaussianos se propone inicialmente una rotación de los ejes con respecto a los definidos como sistema de referencia o de laboratorio ( $x_1 - x_3$ ). Según lo anterior, se trabaja en un sistema de referencia orientado en la dirección de propagación del haz que se desea construir ( $x' - z'$ ) como se muestra en la figura (6). Luego de esto, con una rotación adecuada se puede obtener el campo  $\psi(\mathbf{r}|\omega)$  para el sistema de laboratorio.



**Figura 6.** Sistema de referencia  $x' - z'$ . Rotación del sistema coordenado de laboratorio  $x_1 - x_3$  en dirección del campo propagante  $\psi(\mathbf{r}|\omega)$ .

En general, un campo  $\psi(\mathbf{r}|\omega)$  como el de la figura (6), propagándose en un medio con índice de refracción  $n$  puede ser escrito en el sistema  $x' - z'$  (sistema rotado un

ángulo  $\theta_0$ ) como

$$\psi(\mathbf{r}|\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq'}{2\pi} A(q') e^{i(q'x' - \alpha'z')}. \quad (44)$$

En este caso, consideramos que todas las contribuciones están en el régimen propagante,  $\alpha' = \alpha(q') = \sqrt{n^2 \frac{\omega^2}{c^2} - q'^2}$  con  $q' \leq n \frac{\omega}{c}$ , de tal forma que

$$\psi(\mathbf{r}|\omega) = \int_{-n \frac{\omega}{c}}^{n \frac{\omega}{c}} \frac{dq'}{2\pi} A(q') e^{i[q'x' - \alpha(q')z']}, \quad (45)$$

con

$$\begin{cases} x' = x_1 \cos(\theta_0) + x_3 \sin(\theta_0) \\ z' = -x_1 \sin(\theta_0) + x_3 \cos(\theta_0) \end{cases}, \quad (46)$$

y además, teniendo en cuenta también la rotación de los vectores  $\mathbf{K} = (q, \alpha)$

$$\begin{cases} q' = q \cos(\theta_0) - \alpha(q) \sin(\theta_0) \\ \alpha(q') = q \sin(\theta_0) + \alpha(q) \cos(\theta_0) \end{cases}. \quad (47)$$

Para el caso de un haz gaussiano, se toma un espectro angular del tipo

$$A(q') = A_0 \sqrt{\pi} g e^{-\frac{q'^2 g^2}{4}}, \quad (48)$$

donde  $A_0$  es una constante con unidades apropiadas y  $g$  es el semiancho a la altura  $1/e$  del haz en amplitud.

Vale notar que bajo la consideración de la alta direccionalidad de los haces gaussianos, el ancho de la expresión (48) es bastante estrecho en comparación con el rango de integración de la ecuación (45), por lo que, se puede omitir el uso de límites finitos.

Además, se puede verificar que en el plano  $z' = 0$

$$\psi(x', 0|\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq'}{2\pi} A(q') e^{iq'x'} = A_0 e^{-\frac{x^2}{g^2}}, \quad (49)$$

donde  $A_0 e^{-\frac{x^2}{g^2}} = \mathcal{F}^{-1}\{A(q')\}$ . Por otro lado, la intensidad del haz en este plano se

puede escribir como

$$I(x', 0) = |\psi(x', 0|\omega)|^2 = I_0 e^{-\frac{x'^2}{\sigma^2}}, \quad (50)$$

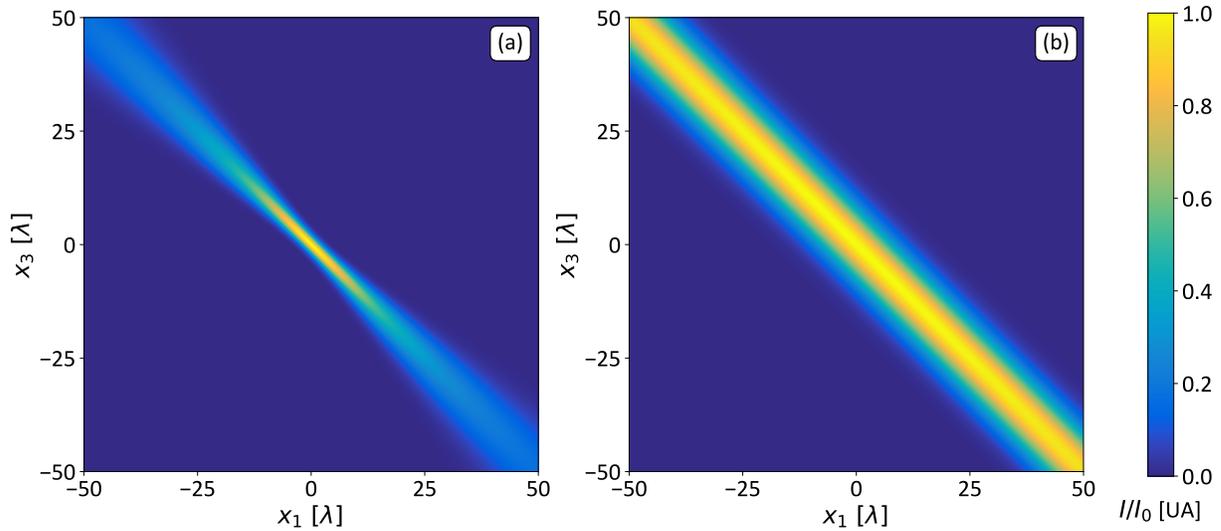
donde  $I_0 = |A_0|^2$  y  $\sigma = \frac{g}{\sqrt{2}}$  el semiancho en intensidad a la altura 1/e del haz.

Finalmente, haciendo uso de las rotaciones establecidas en las expresiones (46) y (47), el haz gaussiano puede ser escrito en el sistema de referencia del laboratorio  $x_1 - x_3$  como

$$\psi(\mathbf{r}|\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} B(q|\mathbf{K}) e^{i[qx_1 - \alpha(q)x_3]}. \quad (51)$$

En esta expresión, el término  $B(q|\mathbf{K})$  representa el espectro angular y está dado por

$$B(q|\mathbf{K}) = \left[ \cos(\theta_0) + \frac{q}{\alpha(q)} \sin(\theta_0) \right] A(q \cos(\theta_0) - \alpha(q) \sin(\theta_0)).$$



**Figura 7.** Simulación de la propagación de dos haces gaussianos, con longitud de onda  $\lambda$  y viajando a  $45^\circ$  con respecto al eje  $x_3$ . a) Haz gaussiano con semiancho  $g = 2\lambda$ . b) Haz gaussiano con semiancho  $g = 8\lambda$ .

### 3.3. Pulsos de luz

Continuando con la descripción de los campos ópticos que requeriremos para el desarrollo del presente trabajo, se hace necesario introducir una descripción sencilla, aunque suficiente, para el modelado de pulsos de luz. Para este propósito, se puede partir de un resultado básico de la teoría de Fourier, que se señala el hecho de que

una señal con *duración* o extensión finita se puede representar como una suma de funciones armónicas (Boyd, 2003).

Con esto, y teniendo en mente la idea de que un pulso de luz se puede definir como un campo óptico con extensión temporal limitada (duración finita y bien definida), es válido enunciar que puede ser expresado como una superposición de soluciones monocromáticas del tipo mostrado en la ecuación (17), de tal forma que pueda ser escrito como

$$\psi_p(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} G(\omega) \psi(\mathbf{r}|\omega) e^{-i\omega t}, \quad (52)$$

donde la función  $G(\omega)$ , en general compleja, representa el *espectro* del pulso; queda pendiente la tarea de pesar apropiadamente los campos armónicos que lo conforman.

Es importante notar que la forma temporal que adquiere el pulso está determinada por la transformada de Fourier del espectro  $G(\omega)$  mientras que por otro lado, su distribución espacial transversal es la misma que tienen los campos  $\psi(\mathbf{r}|\omega)$ . Para efectos de esta tesis, se considerarán pulsos que tienen distribución espacial y temporal de forma gaussiana, para lo cual, se utiliza una superposición de haces gaussianos como los descritos por la ecuación (51).

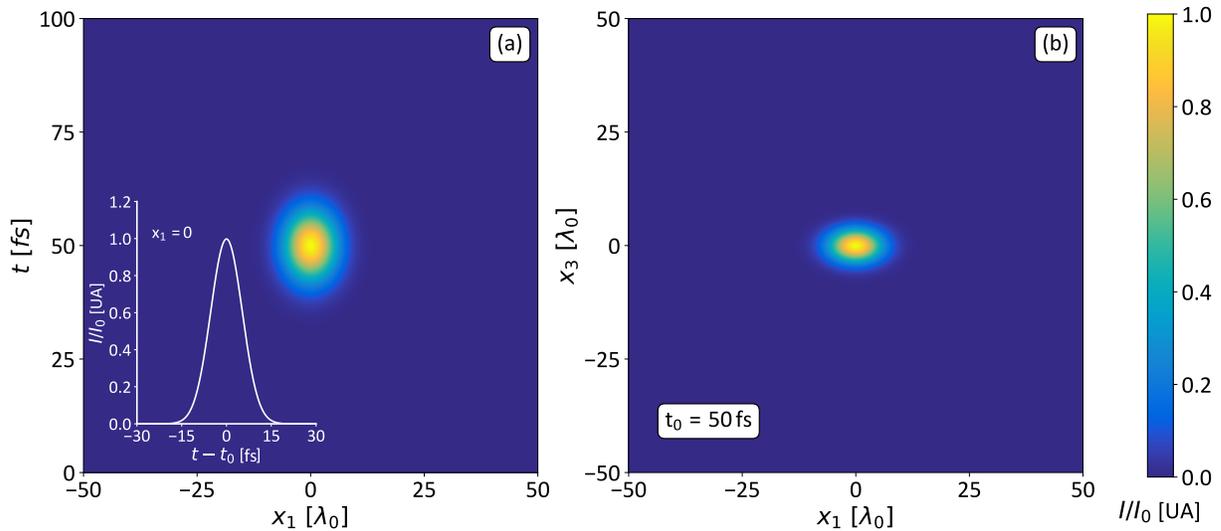
Por otro lado, existen múltiples formas para modelar la distribución temporal que sigue el espectro asociado a un pulso de luz. En este caso, tomando en cuenta que pueden ocurrir ensanchamientos por diferentes mecanismos (Saleh y Teich, 2007), supondremos una distribución gaussiana como una buena aproximación para pulsos producidos por una fuente láser. Así, podemos definir el espectro  $G(\omega)$  como

$$G(\omega) = \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}\Delta\omega} e^{-\left[\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega}\right]^2}, \quad (53)$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia central del pulso y  $\Delta\omega$  es la mitad del ancho de banda a la altura  $1/e$ . Por otro lado, tomando la transformada de Fourier de la ecuación (53), se puede probar que la duración en intensidad del pulso esta dada por

$$\Delta t_I = \frac{2\sqrt{2}}{\Delta\omega}, \quad (54)$$

mientras que en amplitud toma la forma de  $\Delta t_A = \frac{4}{\Delta\omega}$ .



**Figura 8.** Simulación de un pulso de luz con distribución transversal y espectro gaussiano, con longitud de onda central  $\lambda_0$  y con semiancho espectral  $\Delta\lambda = 40$  nm. a) Dependencia temporal del pulso de luz. b) Distribución espacial del pulso de luz en  $t_0 = 50$  fs.

En la figura (8) se muestra la simulación de un pulso de luz gaussiano que se propaga en el vacío con longitud de onda central  $\lambda_0$ , semiancho  $g = 8 \lambda_0$  y semiancho espectral  $\Delta\lambda = 40$  nm; que equivale a  $\Delta\omega = 1.88 \times 10^{14}$  Hz<sup>2</sup>. En la figura (8a) se muestra la intensidad del pulso en función de la posición  $x_1$  (como si se tuviera un detector en  $x_3 = 0$ ) y donde  $t = 50$  fs indica el tiempo de arribo de la parte central del pulso. En el recuadro de la figura se muestra un corte de la intensidad a lo largo de  $x_1 = 0$ , haciendo explícito que la dependencia temporal del pulso también sigue una distribución gaussiana y que su duración, al  $1/e$  del máximo de intensidad, está alrededor de  $\Delta t_I = 14.9$  fs como se indica en la expresión (54). Adicionalmente, es posible obtener la forma espacial del pulso si el tiempo se fija en un valor determinado, como se ve en figura (8b), donde se muestra la distribución espacial de intensidad en  $t_0 = 50$  fs. En este caso, se tiene que el ancho a lo largo del eje  $x_3$  está definido por la distancia que logra recorrer el pulso en un tiempo de  $\Delta t_I$ , que está dado por el producto  $\Delta t_I c$ .<sup>3</sup>

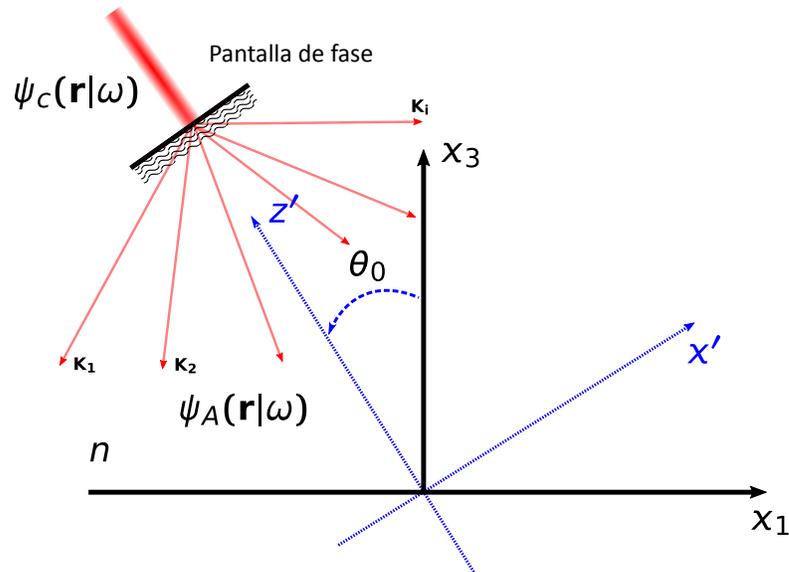
### 3.4. Haces Aleatorios

En este punto, se pretende establecer un método para la generación de campos ópticos aleatorios basados en el formalismo del espectro angular tratado previamente.

<sup>2</sup>Ancho de banda típico para un pulso de luz producido por un láser pulsado de Titanio-zafiro.

<sup>3</sup>Expresión válida en el vacío. Para medios dispersivos con índice de refracción  $n(\omega)$  no es trivial encontrar la extensión del pulso.

En general, los campos aleatorios hacen referencia a aquellos campos que presentan fluctuaciones aleatorias de fase, ya sean espaciales o temporales. Para efectos del presente trabajo nos referiremos a las de primer tipo. La situación mas típica para entender la generación de haces aleatorios es considerar un haz monocromático coherente  $\psi_c(\mathbf{r}|\omega)$  que pasa a través de un difusor <sup>5</sup> (o una pantalla de fase) que produce una alteración en cada punto del frente de onda del haz incidente y genera un campo  $\psi_A(\mathbf{r}|\omega)$  como se ilustra en la figura (9).



**Figura 9.** Generación de un campo óptico aleatorio utilizando el modelo de las pantallas de fase.

En términos del espectro angular, si se piensa en una superposición descrita por la expresión (35), cada onda plana con vector de onda  $\mathbf{K} = (q, \alpha)$  tendrá una fase adicional  $\phi(q)$  mapeada al intervalo  $[-\pi, \pi]$  y quedará distribuida uniformemente y de manera aleatoria.

Para generar un campo aleatorio como los descritos anteriormente, se propone una modificación del método de las pantallas de fase aleatorias en el espacio coordenado (Xiao y Voelz, 2006), donde se emplea una simulación de haces con speckle (PSCB, partial spatially coherent beams) y se toman promedios de conjunto sobre muchas realizaciones de las mismas (como la rotación de un difusor). En nuestro caso, se pretende introducir un análogo a estas últimas al adicionar una función de *transmitancia*

<sup>4</sup>Se puede pensar en aquellos campos donde la fase de un frente de onda está totalmente correlacionada con ella misma.

<sup>5</sup>Un difusor es un prisma rectangular transparente donde la cara por donde se incide es plana y la de salida presenta un perfil de alturas aleatorio.

apropiada  $e^{i\phi(q)}$  al espectro angular  $A(q)$  de un haz gaussiano.

### 3.4.1. Patrones de speckle

El caso mas sencillo de campos ópticos aleatorios son los patrones de "speckle" o de moteado. Para generar un campo  $\psi_A(\mathbf{r}|\omega)$  de este tipo, se considera una pantalla de fase aleatoria con correlación delta (definida mediante la función delta de Dirac) y media cero. Esto implica que en un punto cualquiera del espacio  $q$ , la fase  $\phi(q_i)$  introducida al espectro angular, no guarda ningún tipo de *relación* con la fase en cualquier otro punto  $\phi(q_j)$ . Con esto último, se puede mostrar que la distribución de intensidad del espectro angular no sufre modificaciones, como se verá mas adelante.

Si partimos del sistema coordenado  $x' - z'$ , se puede proponer la introducción de una fase aleatoria con las siguientes propiedades estadísticas

$$\begin{cases} \langle e^{-i\phi(q')} e^{i\phi(s')} \rangle = 2\pi\delta(q' - s') \\ \langle e^{i\phi(q')} e^{i\phi(s')} \rangle = 0 \end{cases}, \quad (55)$$

donde  $s' = q' + \Delta q'$  y los paréntesis angulares  $\langle \cdot \rangle$  representan un promedio sobre el conjunto de realizaciones.<sup>6</sup>

Con lo anterior, el espectro angular que consideramos para generar el campo aleatorio  $\psi_A(\mathbf{r}|\omega)$  está dado por

$$\mathcal{A}(q') = A(q') e^{i\phi(q')} = A_0 \sqrt{\pi}\xi e^{-\frac{q'^2 \xi^2}{4}} e^{i\phi(q')}, \quad (56)$$

donde el parámetro  $\xi$  representa el semiancho que tendría el haz gaussiano en ausencia de las fluctuaciones de fase. Así,  $\mathcal{A}(q')$  será entonces el espectro angular aleatorio del patrón de speckle y dada su naturaleza, es necesario calcular su autocorrelación estadística. Utilizando las propiedades estadísticas de las fluctuaciones de fase, encontramos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}^*(q') \mathcal{A}(s') \rangle &= A^*(q') A(s') \langle e^{-i\phi(q')} e^{i\phi(s')} \rangle \\ &= 2\pi [A^*(q') A(s')] \delta(q' - s'), \end{aligned} \quad (57)$$

<sup>6</sup>En general, estas propiedades están definidas por la autocorrelación estadística, que para un conjunto de variables aleatorias  $U$  se define como  $\langle U_i^* U_j \rangle$ .

y utilizando las propiedades de la función delta de Dirac, podemos escribir

$$\begin{cases} \langle A^*(q')A(s') \rangle = 2\pi\mathcal{I}(q')\delta(q' - s') \\ \langle A(q')A(s') \rangle = 0 \end{cases}, \quad (58)$$

donde la función  $\mathcal{I}(q')$  está dada por la distribución de intensidad del espectro angular, que en muchos casos es

$$\mathcal{I}(q') = \mathcal{I}_0\pi\xi^2 e^{-\frac{\xi^2 q'^2}{2}}. \quad (59)$$

Retomando nuestro problema, tenemos entonces que el patrón de speckle  $\psi_A(\mathbf{r}|\omega)$  es un campo aleatorio definido por

$$\psi_A(\mathbf{r}|\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq'}{2\pi} A(q') e^{i\phi(q')} e^{i[q'x' - \alpha(q')z']}, \quad (60)$$

donde el espectro angular (aleatorio) cumple con las condiciones (58) y cuya intensidad está dada por (59).

De lo anterior, la autocorrelación estadística del campo o *función de densidad espectral cruzada* está dada por

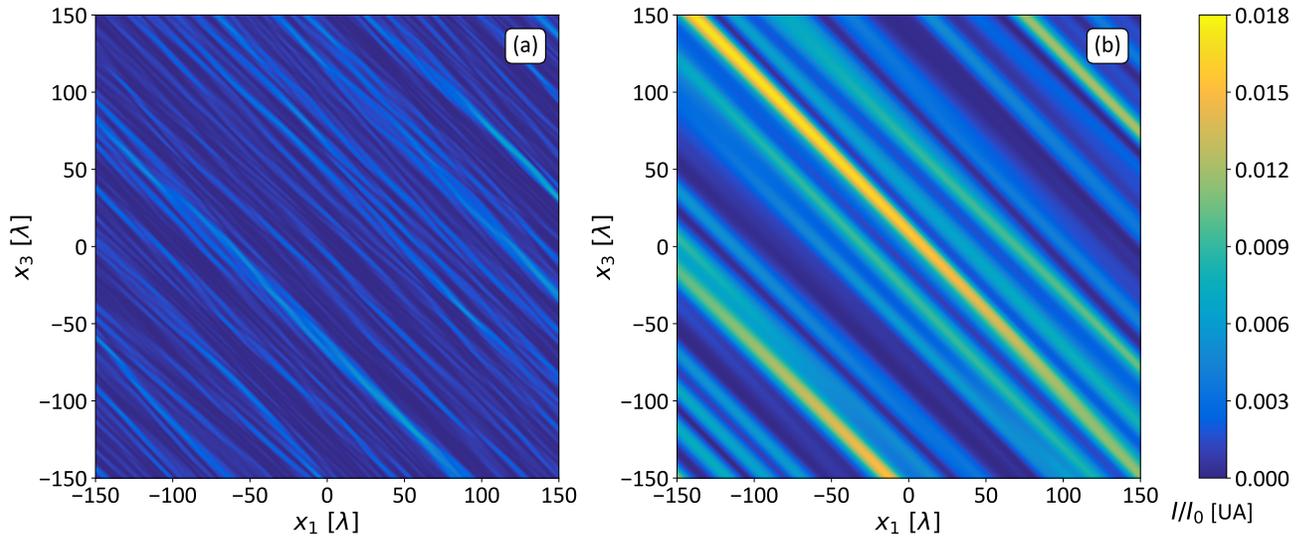
$$\begin{aligned} W_A(\Delta x', z') &= \langle \psi_A^*(x', z'|\omega) \psi_A(x' + \Delta x', z'|\omega) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq'}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds'}{2\pi} \langle A^*(q')A(s') \rangle e^{-i[q'x' - s'(x' + \Delta x')]} e^{i[\alpha(q') - \alpha(s')]z'} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq'}{2\pi} \mathcal{I}(q') e^{iq'\Delta x'} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathcal{I}_0 \xi e^{-\frac{\Delta x'^2}{2\xi^2}}, \end{aligned} \quad (61)$$

donde  $\Delta x'$  es la distancia entre dos puntos cualesquiera sobre el plano  $z'$ . Vale resaltar que la función de autocorrelación  $W_A(\Delta x')$  proporciona una idea sobre las propiedades estadísticas del campo aleatorio  $\psi_A(\mathbf{r}|\omega)$  con respecto a él mismo o, de otra forma, da una medida del *parecido* que existe entre  $\psi_A(\mathbf{r}|\omega)$  y una versión trasladada  $\psi_A(\mathbf{r}'|\omega)$ . También, se puede ver que para el caso de patrones de speckle, depende de la distancia entre coordenadas pero no de los valores que estos toman a lo largo de  $x'$ . Esto es una consecuencia de que el patrón de speckle es un proceso estocástico estacionario y se puede además inferir que el campo  $\psi_A(\mathbf{r}|\omega)$  se extiende sobre todo el rango del  $x'$ .

Cuando  $\Delta x = 0$ , la función de autocorrelación se puede ver como la intensidad promedio del campo aleatorio, que viene dada por

$$\begin{aligned} W_A(0) &= \langle \psi_A^*(x', z' | \omega) \psi_A(x', z' | \omega) \rangle \\ &= \langle I_A(x') \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2}} I_0 \xi. \end{aligned} \quad (62)$$

Como es de esperarse para un proceso estacionario, la intensidad es constante, lo que corrobora la afirmación anterior sobre la extensión del patrón de speckle.



**Figura 10.** Simulación de dos patrones de speckle, con longitud de onda  $\lambda$  y viajando a  $45^\circ$  con respecto al eje  $x_3$ . a) Speckle con tamaño de mota promedio de  $\xi = 2 \lambda$ . b) Speckle con tamaño de mota promedio de  $\xi = 8 \lambda$ .

Finalmente, dado que normalmente los detectores ópticos responden a la intensidad de la onda, es conveniente calcular la autocorrelación de los patrones de speckle en intensidad. En este caso, si se consideran las fluctuaciones de amplitud como variables aleatorias, complejas y gaussianas, la función de autocorrelación puede ser calculada por medio del teorema de momentos (Goodman, 2015)

$$\langle I_A(x') I_A(x' + \Delta x') \rangle = \langle I_A(x') \rangle \langle I_A(x' + \Delta x') \rangle + |W_A(\Delta x')|^2. \quad (63)$$

Como se mostró anteriormente, para un patrón de speckle estadísticamente estacionario, los dos primeros términos son constantes e iguales. Por lo tanto, la dependencia funcional de la autocorrelación de intensidad está determinada por el módulo cuadra-

do de la autocorrelación del campo

$$|W_A(\Delta x')|^2 = \frac{\pi}{2} I_0^2 \xi^2 e^{-\frac{\Delta x'^2}{\xi^2}}. \quad (64)$$

El ancho de la expresión (64) se puede considerar como una medida del tamaño promedio de las motas producidas por el patrón de speckle (Dainty, 2013). De esta manera, vemos que las motas tienen un tamaño en intensidad dado por el parámetro  $\xi$ . Además, es importante notar que existe un factor de  $\sqrt{2}$  entre el ancho en intensidad del haz coherente  $\sigma$  (cuando no hay fluctuaciones de fase en el espectro angular) y el tamaño de las motas.

### 3.4.2. Haces con speckle

En este punto, se presenta con cierto detalle el formalismo matemático para describir haces con speckle a partir del espectro angular de ondas planas. Por otro lado, se mostrará que los patrones de speckle introducidos anteriormente corresponden al caso límite de un haz con speckle de envolvente infinita.

En general, cualquier campo óptico aleatorio  $\psi(\mathbf{r}|\omega)$  puede ser escrito como

$$\psi_A(\mathbf{r}|\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq'}{2\pi} \mathcal{A}(q') e^{i[q'x' - \alpha(q')z']}, \quad (65)$$

donde  $\mathcal{A}(q') = A(q')e^{i\phi(q')}$  y  $\phi(q')$  constituyen un proceso aleatorio con media cero.

Al igual que en el caso de los patrones de speckle, es conveniente determinar la autocorrelación de campo dada por la ecuación (65) para derivar sus propiedades de coherencia. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} W_A(x'_1, x'_2, z') &= \langle \psi_A^*(x'_1, z'|\omega) \psi_A(x'_2, z'|\omega) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq'}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds'}{2\pi} A^*(q') A(s') \langle e^{-i\phi(q')} e^{i\phi(s')} \rangle e^{-i[q'x'_1 - s'x'_2]} e^{i[\alpha(q') - \alpha(s')]z'}, \end{aligned} \quad (66)$$

con  $s' = q' + \Delta q'$  y  $x'_1, x'_2$  dos puntos a lo largo de la coordenada  $x'$ . Vemos que

esta expresión depende de la coordenada  $z'$ , por lo que resulta conveniente restringir nuestra atención al plano  $z' = 0$ .

Si se vuelve a tomar en cuenta que el ancho de la función gaussiana  $A(q')$  es muy estrecho en comparación con el dominio de la variable  $q'$ , el producto  $A(q')A(q' + \Delta q')$  solo existe para valores de  $\Delta q'$  muy pequeños comparados con  $2/\xi$ . Bajo esta consideración se puede hacer la aproximación  $[A(q')A(q' + \Delta q')] \approx \mathcal{I}(q')$ . Tenemos entonces que la autocorrelación estadística viene dada por

$$\begin{aligned} W_A(x'_1, x'_2) &= \langle \psi_A^*(x'_1|\omega) \psi_A(x'_2|\omega) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq'}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds'}{2\pi} \mathcal{I}(q') \langle e^{-i\phi(q')} e^{i\phi(s')} \rangle e^{-i[q'x'_1 - s'x'_2]}. \end{aligned} \quad (67)$$

De la expresión (67), cabe destacar que para lograr una descripción detallada de los haces con speckle, el problema se reduce a calcular la autocorrelación de la función de transmitancia  $\langle e^{-i\phi(q')} e^{i\phi(s')} \rangle$ , la cual no es trivial y requiere tener en cuenta varias suposiciones de nivel estadístico.

Si las fases  $\phi(q')$  y  $\phi(s')$  son variables aleatorias gaussianas con correlación

$$W_\phi(s' - q') = \sigma_\phi^2 C_\phi(s' - q'),$$

se puede mostrar que el promedio que aparece en la ecuación (67) está dado por

$$g(s' - q') = \exp \left\{ -\sigma_\phi^2 [1 - C_\phi(s' - q')] \right\},$$

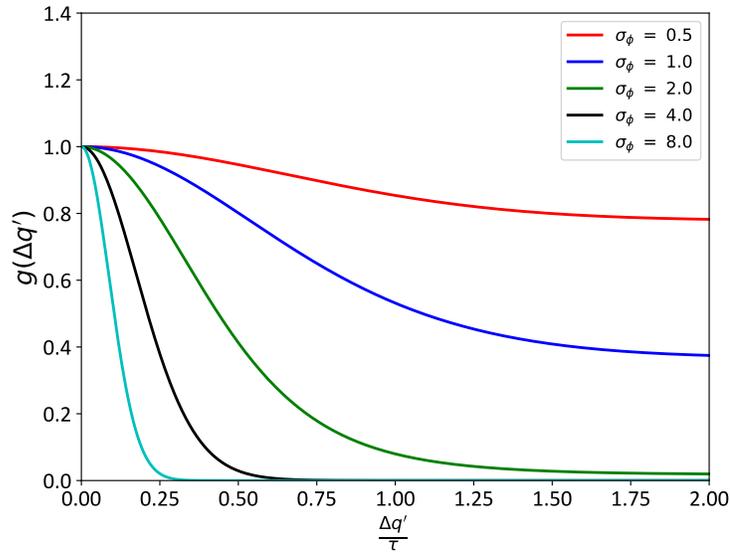
donde  $\sigma_\phi$  es la desviación estándar de la fase (Goodman, 2015).

Si suponemos que la autocorrelación normalizada de las fluctuaciones de fase  $C_\phi(\Delta q')$  es de forma gaussiana, tenemos que

$$g(\Delta q') = \exp \left\{ -\sigma_\phi^2 \left[ 1 - e^{-\left(\frac{\Delta q'}{\tau}\right)^2} \right] \right\}, \quad (68)$$

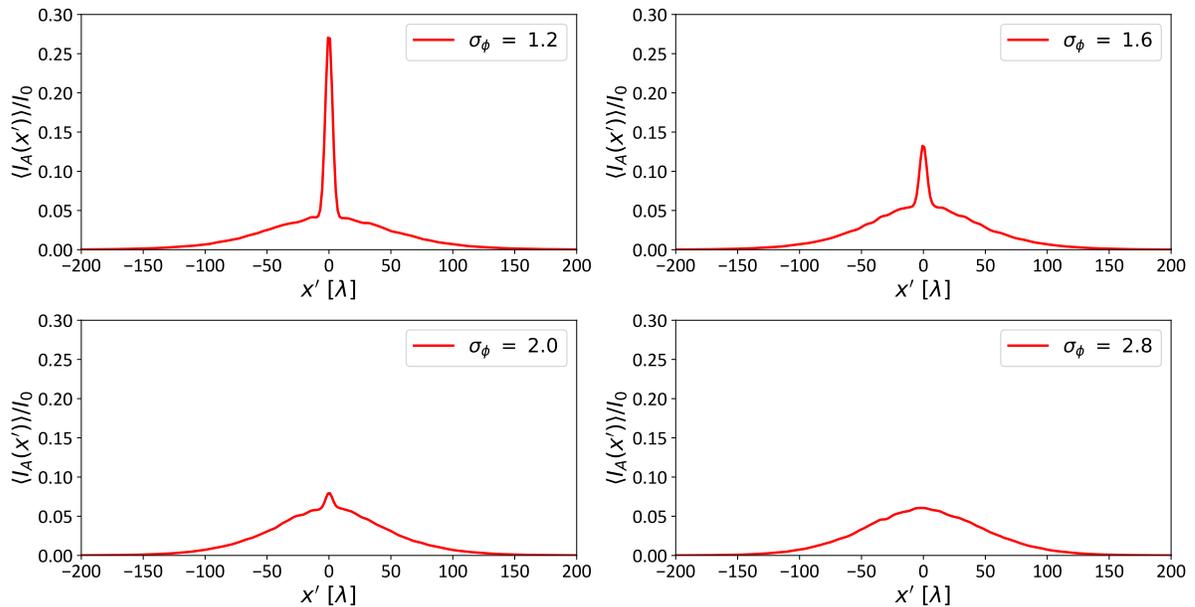
donde  $\tau$  es un parámetro conocido como la longitud de correlación.

En la figura (11) se muestra el comportamiento de esta función para diferentes valores de  $\sigma_\phi$ .



**Figura 11.** Correlación de la *transmitancia* en términos del espectro angular para diferentes valores de la desviación estándar  $\sigma_\phi$ .

Vemos que para valores de  $\sigma_\phi$  pequeños, la correlación de la transmitancia se extiende mucho y en el dominio del integrando de (67) se podría considerar constante. En consecuencia, es de esperarse que bajo esta situación la expresión solo sea la autocorrelación de un haz coherente  $\psi_c(\mathbf{r}|\omega)$ .



**Figura 12.** Intensidad promedio ( $\sim 2000$  realizaciones) de un haz con speckle sobre el plano  $z' = 0$ , con  $\xi = 8\lambda$  y para diferentes valores de  $\sigma_\phi$ .

Si se toma el promedio sobre varias realizaciones de la intensidad de los campos aleatorios, se puede ilustrar con la figura (12), que para valores pequeños de la des-

viación estándar ( $\sigma_\phi \sim 1$ ), el campo generado por medio del método de las pantallas de fase presenta una componente coherente muy fuerte en comparación con la parte difusa. En esta situación, predomina la parte coherente del campo aleatorio y la intensidad en el plano  $z' = 0$  presenta un pico delgado con un ancho del orden de  $\xi$ , como si el haz no se hubiera esparcido al interactuar con las pantallas de fase. Por otro lado, la componente difusa es aquella que se esparce en otras direcciones y que tiene un ancho mucho mayor que el de la parte coherente.

Para fines del presente trabajo y en general, se conoce como haces con speckle a aquellos campos aleatorios donde la parte coherente no aparece. Es decir, que solo se tiene la componente difusa. Para esto, es necesario imponer la condición  $\sigma_\phi \gg 1$  que en el caso de difusores se conoce como la aproximación de difusor fuerte. Bajo esta suposición, la contribución a la integral viene de la región con  $\frac{\Delta q'}{\tau}$  pequeña. Ver figura (11). Utilizando entonces una expansión en series de Taylor

$$e^{-\left(\frac{\Delta q'}{\tau}\right)^2} = 1 - \left(\frac{\Delta q'}{\tau}\right)^2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta q'}{\tau}\right)^4 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta q'}{\tau}\right)^6 + \dots,$$

si se trunca en el segundo termino, la función  $g(\Delta q')$  se puede escribir como

$$g(\Delta q') = \langle e^{-i\phi(q')} e^{i\phi(s')} \rangle \approx e^{-\left(\frac{\sigma_\phi \Delta q'}{\tau}\right)^2}, \quad (69)$$

y con esto, se tiene que la autocorrelación del campo aleatorio es

$$W_A(x'_1, x'_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq'}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds'}{2\pi} \mathcal{I}(q') e^{-\left(\frac{\sigma_\phi \Delta q'}{\tau}\right)^2} e^{-i[q'x'_1 - s'x'_2]}. \quad (70)$$

Con los cambios de variable  $\Delta q' = q' - s'$  y  $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ , la expresión anterior se puede escribir de la forma

$$W_A(x'_2, \Delta x') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq'}{2\pi} \mathcal{I}(q') e^{iq'\Delta x'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta q'}{2\pi} e^{-\left(\frac{\sigma_\phi \Delta q'}{\tau}\right)^2} e^{i\Delta q'x'_2}, \quad (71)$$

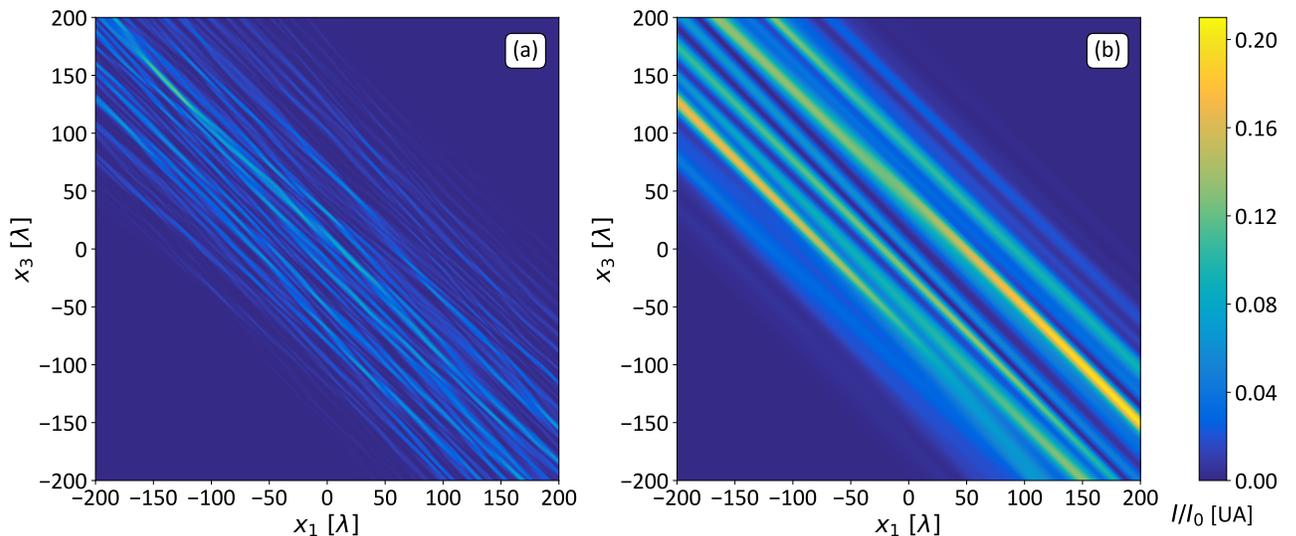
$$W_A(x', \Delta x') = \frac{I_0 \xi \sigma_g}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\Delta x'^2}{2\xi^2}} e^{-\frac{x'^2 \sigma_g^2}{4}}, \quad (72)$$

con  $x'_2 = x'$  y  $\sigma_g = \frac{\tau}{\sigma_\phi}$ .

En este punto, cabe resaltar que la autocorrelación del campo expresada por la ecuación (72) depende de las variables espaciales, a diferencia del patrón de speckle, cuya autocorrelación solo depende de  $\Delta x'$ . Esto quiere decir que un haz con speckle ya no constituye un proceso aleatorio estacionario. El haz representado por (72) es básicamente un haz de tipo Gauss-Schell (Friberg y Sudol, 1982). La primera exponencial determina el grado de coherencia y está ligada a la longitud de coherencia espacial del haz, que a su vez está relacionada con el tamaño del speckle contenido en el mismo. Por otro lado, la segunda exponencial es el perfil gaussiano de intensidad del haz. En efecto, podemos ver que si  $\Delta x' = 0$ , la expresión (72) representa la intensidad promedio del haz

$$W_A(x', 0) = \langle I_A(x) \rangle = \frac{I_0 \xi \sigma_g}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{x'^2 \sigma_g^2}{4}}. \quad (73)$$

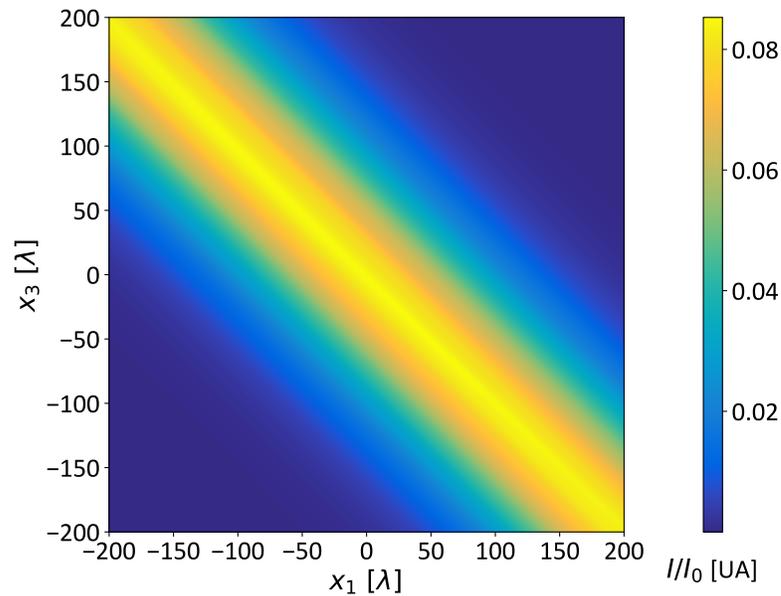
De lo anterior, vemos que en el plano  $z' = 0$ , la envolvente del speckle tiene perfil gaussiano con semiancho a la altura  $1/e$  de  $w_0 = 2/\sigma_g$ . Es importante resaltar que en el caso limite donde  $\sigma_g \sim 0$ , el ancho de esta envolvente tiende a infinito, dando lugar a los patrones de speckle introducidos con anterioridad.



**Figura 13.** Simulación de dos realizaciones de patrones de speckle, con longitud de onda  $\lambda$ , viajando a  $45^\circ$  con respecto al eje  $x_3$ , semiancho  $w_0 = 70\lambda$  y  $\sigma_\phi = \pi$ . a) Speckle con tamaño de mota promedio de  $\xi = 2\lambda$ . b) Speckle con tamaño de mota promedio de  $\xi = 8\lambda$ .

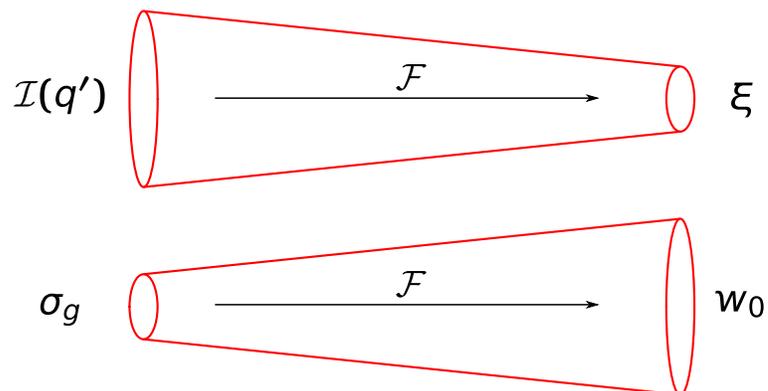
En las figuras (13) y (14) se muestran simulaciones correspondientes a los haces con speckle. Se presentan en la figura (13) dos realizaciones de patrones de speckle con diferente tamaño de mota y limitados espacialmente por la envolvente gaussiana. Por otro lado, en la figura (14) se presenta la intensidad promedio obtenida sobre muchas realizaciones de los dos patrones ilustrados en la figura (13). Se hace notar

que el patrón resultante es el mismo en los dos casos porque tienen el mismo  $w_0$ .



**Figura 14.** Promedio en intensidad de la simulación de un haz con speckle ( $\sim 2000$  realizaciones), con longitud de onda  $\lambda$ , viajando a  $45^\circ$  con respecto al eje  $x_3$  y semiancho  $w_0 = 70\lambda$ .

Finalmente, si se presta atención a la expresión (72) y se compara con (67), vemos que existe una relación entre los parámetros que caracterizan el campo aleatorio. Por un lado, si la distribución de intensidad del espectro angular es ancha, la correlación del speckle (o el tamaño promedio de la mota) es pequeña, mientras que si la longitud de correlación de la fase del espectro angular es pequeña, la distribución de intensidad del haz es ancha. Lo anterior se ilustra en la figura (15). El primero de estos resultados, que relaciona el ancho del espectro angular con el tamaño de la mota es similar a lo que establece el teorema de Van Cittert-Zernike de la teoría clásica de coherencia (Born y Wolf, 1999) y (Mandel y Wolf, 1995).



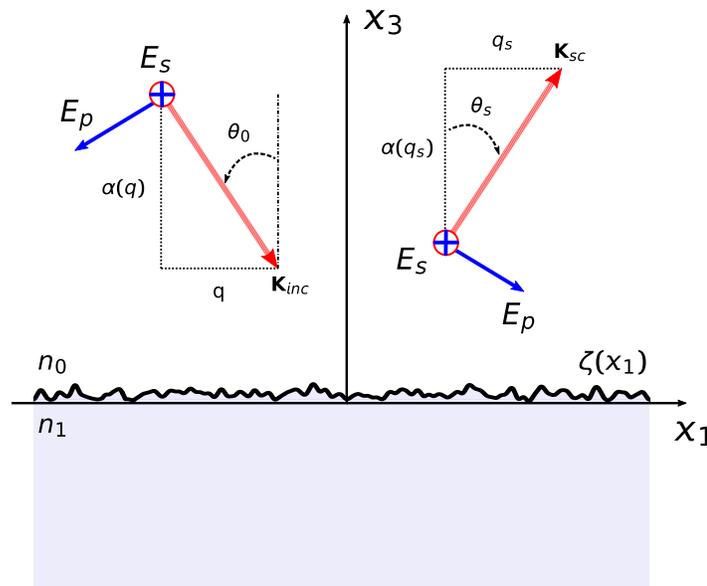
**Figura 15.** Relación de Fourier existente entre los parámetros de los campos aleatorios.

Es importante mencionar que el análisis teórico para la descripción de los campos aleatorios se ha realizado en el marco de referencia  $x' - z'$ . Para obtener una descripción en el marco de referencia del laboratorio  $x_1 - x_3$ , basta con utilizar las rotaciones (46) y (47). Aunque el cambio de coordenadas no facilitan el cálculo analítico de las integrales, se puede proceder de manera numérica.

## Capítulo 4. Interacción de campos ópticos con superficies y esparcimiento electromagnético

Continuando con la discusión del marco teórico, es necesario establecer el formalismo para describir la interacción de campos ópticos con superficies bien definidas y determinadas por la interfaz entre dos medios, los cuales pueden ser dieléctrico-dieléctrico, metal-dieléctrico ó inclusive metal-metal. Los conceptos a tratar conforman la columna vertebral de la presenta tesis y proporcionan herramientas que permitirán realizar un análisis riguroso de los problemas físicos de interés.

En la figura (16) se muestra una representación del sistema de interacción que se propone describir (marco de referencia  $x_1 - x_3$ ). Se consideran dos semiespacios divididos por una interfaz descrita por el perfil de alturas  $\zeta(x_1)$ . En este caso, cada semiespacio hace referencia a un medio material diferente, por lo tanto, los semiespacios  $x_3 > \zeta(x_1)$  y  $x_3 < \zeta(x_1)$  están caracterizados por funciones dieléctricas  $\epsilon_0(\omega)$  y  $\epsilon_1(\omega)$  respectivamente.



**Figura 16.** Ilustración de la interacción de un campo óptico con una superficie rugosa. El campo óptico incidente es una onda plana con vector de propagación  $\mathbf{K}_{inc}$ , mientras que el campo esparcido se expresa como una superposición de ondas planas con vectores de propagación  $\mathbf{K}_{sc}$ .

Cuando un campo óptico  $\psi(\mathbf{r}|\omega)$  constituido por una onda plana con vector de onda  $\mathbf{K}_{inc}$  incide sobre una superficie, su interacción depende de la polarización del campo, su dirección de propagación, longitud de onda, el perfil superficial y las propiedades de

los medios. En general, dicha interacción se ve reflejada en términos del campo óptico esparcido por la superficie y que está caracterizada por un conjunto de ondas planas con vectores de onda  $\mathbf{K}_{sc}$  (con dirección de propagación  $\theta_s$ ) que componen el espectro angular. En el caso que el campo óptico incidente provenga desde el semiespacio  $x_3 > \zeta(x_1)$ , para ángulos de esparcimiento  $\theta_s < \frac{\pi}{2}$  se dice que el campo es reflejado.

En adición a lo anterior, para solucionar el problema de interacción es necesario imponer sobre el sistema las correspondientes condiciones de frontera. De forma general, y como es conocido de la teoría electromagnética clásica (Jackson, 2007), se debe garantizar que

- Las componentes normales de los campos  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{B}$  sean continuas a través de la interfaz.
- Las componentes tangenciales de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  sean continuas a través de la interfaz.

De lo anterior, y haciendo uso de las expresiones (41) y (42) para los campos correspondientes a las polarizaciones fundamentales, las condiciones de continuidad pueden ser sintetizadas como

$$\psi^>(x_1, x_3|\omega)|_{x_3=\zeta(x_1)} = \psi^<(x_1, x_3|\omega)|_{x_3=\zeta(x_1)}, \quad (74)$$

$$\frac{1}{\nu_0} \left[ \frac{\partial}{\partial n} \psi^>(x_1, x_3|\omega) \right]_{x_3=\zeta(x_1)} = \frac{1}{\nu_1} \left[ \frac{\partial}{\partial n} \psi^<(x_1, x_3|\omega) \right]_{x_3=\zeta(x_1)}, \quad (75)$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{-\zeta'(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}}{\sqrt{1 + [\zeta'(x_1)]^2}},$$

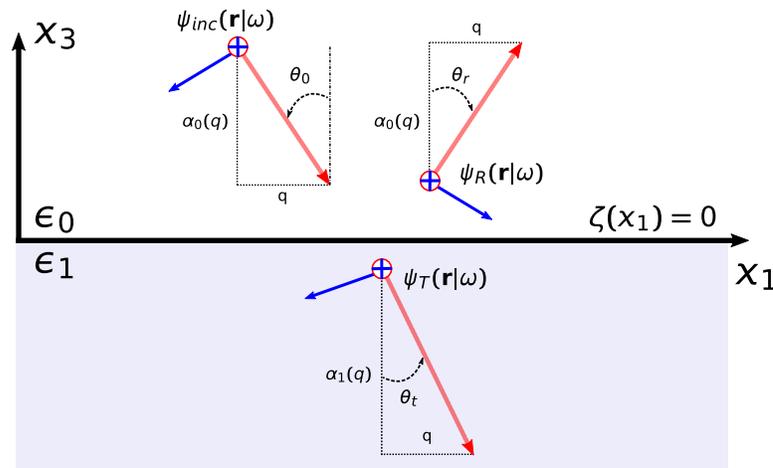
es la derivada normalizada a lo largo de la dirección normal en cada punto de la superficie definida por  $\zeta(x_1)$  y que apunta desde la interfaz hacia el semiespacio superior. Por otro lado, la función  $\psi^>(x_1, x_3|\omega)$  hace referencia a la componente a lo largo de la dirección  $x_2$  del campo eléctrico o magnético total por encima de la interfaz, mientras que  $\psi^<(x_1, x_3|\omega)$  es el campo total debajo de ésta.

Además,

$$\begin{cases} \nu_{0,1} = \epsilon_{0,1} & \text{polarización } p \\ \nu_{0,1} = 1 & \text{polarización } s \end{cases} . \quad (76)$$

#### 4.1. Interacción de campos ópticos con superficies planas

En esta sección, se busca exponer la interacción entre la luz y una superficie plana,  $\zeta(x_1) = 0$ , como el caso más sencillo de interacción. En este punto, el sistema de interés está conformado por dos semiespacios divididos por el plano  $x_1 - x_2$ .



**Figura 17.** Ilustración de la interacción de una onda plana con una superficie plana. Se puede observar los posibles campos reflejados y/o transmitidos debido a la interfaz.

Para el análisis, es conveniente partir de la interacción de una onda plana para luego generalizar a un campo más general. Siendo así, se considera un campo  $\psi_{inc}(\mathbf{r}|\omega)$  con polarización  $p$  o  $s$  que incide sobre un la interfaz entre los dos medios desde el semiespacio superior. Debido a la interacción con la superficie, es de esperarse que existan a lo sumo tres campos interviniendo en el proceso; el mismo campo incidente, el campo reflejado y un posible campo transmitido al semiespacio inferior, como se ilustra en la figura (17). Con lo anterior, estos campos pueden ser escritos como

$$\begin{cases} \psi_{inc}(\mathbf{r}|\omega) = \psi_0 e^{i[qx_1 - \alpha_0(q)x_3]} \\ \psi_R(\mathbf{r}|\omega) = \psi_0 r(q) e^{i[qx_1 + \alpha_0(q)x_3]} , \\ \psi_T(\mathbf{r}|\omega) = \psi_0 t(q) e^{i[qx_1 - \alpha_1(q)x_3]} \end{cases} \quad (77)$$

donde  $r(q)$  y  $t(q)$  son funciones complejas que determinan la fracción de la amplitud que es reflejada o transmitida con respecto al campo incidente, respectivamente. Estos coeficientes incluyen posibles cambios de fase que pueden adquirir los campos por la interacción. Cabe resaltar que estas funciones dependen de la dirección del campo incidente, que está definida por la variable  $q$ . Esta variable representa la proyección del vector de onda incidente a lo largo del eje  $x_1$  (Sección 3.1).

No es difícil mostrar que la variable  $q$  debe ser la misma para los tres campos y en particular sobre la superficie.

En este punto, es necesario encontrar explícitamente las funciones  $r(q)$  y  $t(q)$  como solución al problema debido a una onda plana. Aplicando las condiciones de frontera (74) y (75), con  $\psi^> = \psi_{inc} + \psi_R$ ; y  $\psi^< = \psi_T$  se tiene que

$$\begin{cases} \frac{\alpha_0(q)}{\nu_0}r(q) + \frac{\alpha_1(q)}{\nu_1}t(q) = \frac{\alpha_0(q)}{\nu_0} \\ 1 + r(q) = t(q) \end{cases} \quad (78)$$

Utilizando las expresiones (78) se puede entonces mostrar que  $r(q)$  y  $t(q)$  toman la forma

$$r(q) = \frac{\nu_1\alpha_0(q) - \nu_0\alpha_1(q)}{\nu_1\alpha_0(q) + \nu_0\alpha_1(q)}, \quad (79)$$

$$t(q) = \frac{2\nu_1\alpha_0(q)}{\nu_1\alpha_0(q) + \nu_0\alpha_1(q)}, \quad (80)$$

que se conocen como las ecuaciones de Fresnel para reflexión y transmisión, respectivamente.

Cabe resaltar que al escribir un campo arbitrario en términos del espectro angular, es posible calcular su interacción con una superficie plana con base en las expresiones (79) y (80). Por ejemplo, en el caso de tener un haz gaussiano descrito por la ecuación (51), el haz reflejado y el haz transmitido pueden ser escritos como

$$\psi_R(\mathbf{r}|\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} B(q|\mathbf{K})r(q)e^{i[qx_1 + \alpha(q)x_3]}, \quad (81)$$

$$\psi_T(\mathbf{r}|\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} B(q|\mathbf{K})t(q)e^{i[qx_1 - \alpha(q)x_3]}. \quad (82)$$

#### 4.1.1. Plasmones polaritones de superficie

Para efectos de esta tesis, es importante encontrar los modos del sistema ilustrado en la figura (17). Para esto, escribimos las ecuaciones (78) de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{\alpha_0(q)}{\nu_0} r(q) + \frac{\alpha_1(q)}{\nu_1} t(q) = \frac{\alpha_0(q)}{\nu_0} \\ r(q) - t(q) = -1 \end{cases} \quad (83)$$

El lado derecho de estas expresiones corresponde a la onda incidente, que es la que excita el sistema.

Buscamos entonces una solución posible para el sistema a consecuencia de una excitación externa. Igualando a cero al sistema de ecuaciones (83), encontramos una solución no trivial cuando el determinante de la matriz que representa al sistema es cero. Es decir, cuando

$$\frac{\alpha_0(q)}{\nu_0} + \frac{\alpha_1(q)}{\nu_1} = 0. \quad (84)$$

Examinando la anterior expresión y teniendo en mente que las partes reales de  $\alpha_0(q)$  y  $\alpha_1(q)$  son siempre positivas, la solución que se busca solo existe cuando  $\nu_0$  y  $\nu_1$  tienen signos contrarios. Esto ocurre solamente con polarización  $p$ , donde,  $\nu_{0,1} = \epsilon_{0,1}$ , y en medios cuyas constantes dieléctricas sean de signos contrarios. Esto es con interfaces metal-dieléctrico. De esta manera, también es posible mostrar que el número de onda asociado a la solución está dado por

$$q_{sp} = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_1}{\epsilon_0 + \epsilon_1}}, \quad (85)$$

que representa la componente  $x_1$  del vector de propagación de este modo del sistema.

Similarmente, las componentes a lo largo de  $x_3$  se pueden escribir de la forma

$$\alpha_0(q_{sp}) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_0^2}{\epsilon_0 + \epsilon_1}}, \quad (86)$$

$$\alpha_1(q_{sp}) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_0 + \epsilon_1}}, \quad (87)$$

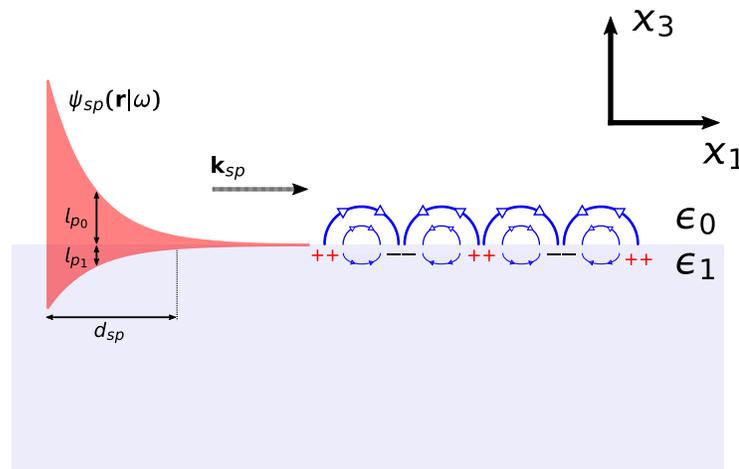
para los medios 0 y 1, respectivamente.

Tomando al medio caracterizado por la función dieléctrica  $\epsilon_1$  como un metal de Drude (22) con poca disipación, podemos suponer que  $\Re\{\epsilon_1\} < 0$  con  $|\Re\{\epsilon_1\}| \gg \epsilon_0$  y  $|\Re\{\epsilon_1\}| \gg \Im\{\epsilon_1\}$ . De aquí, se puede ver que los parámetros  $\alpha_0(q_{sp})$  y  $\alpha_1(q_{sp})$  poseen una parte real despreciable en comparación con su parte imaginaria. Con este resultado se puede concluir que la magnitud del vector de onda asociado a la solución es aproximadamente igual a la parte real del parámetro  $q_{sp}$ , además de que solo puede estar orientado a lo largo del eje  $x_1$ , por lo cual  $|\mathbf{k}_{sp}| = k_{sp} \approx \Re\left\{\frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_1}{\epsilon_0 + \epsilon_1}}\right\}$ .

Escribiendo  $k_i = \Im\left\{\frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_1}{\epsilon_0 + \epsilon_1}}\right\}$ ,  $\beta_0 = i\alpha_0(k_{sp})$  y  $\beta_1 = i\alpha_1(k_{sp})$ , y teniendo en cuenta todo lo anterior, la solución que se busca puede ser escrita en forma general como

$$\psi_{sp}(\mathbf{r}|\omega) = \begin{cases} \psi_0 e^{ik_{sp}x_1} e^{-k_i x_1} e^{-\beta_0 x_3} & x_3 > 0 \\ \psi_0 e^{ik_{sp}x_1} e^{-k_i x_1} e^{\beta_1 x_3} & x_3 < 0 \end{cases} \quad (88)$$

El campo electromagnético descrito por la ecuación (88) recibe el nombre de *plasmón polaritón de superficie* (PPS) y corresponde a una onda superficial que se propaga a lo largo de una interfaz dieléctrico-metal y que además decae exponencialmente al alejarse de ésta en dirección ortogonal a la propagación (a lo largo del eje  $x_3$ ), como se muestra en la figura (18). De una forma más formal, se puede definir también como una fluctuación propagante y no-radiativa de la densidad de carga superficial de un metal (Raether, 1988).

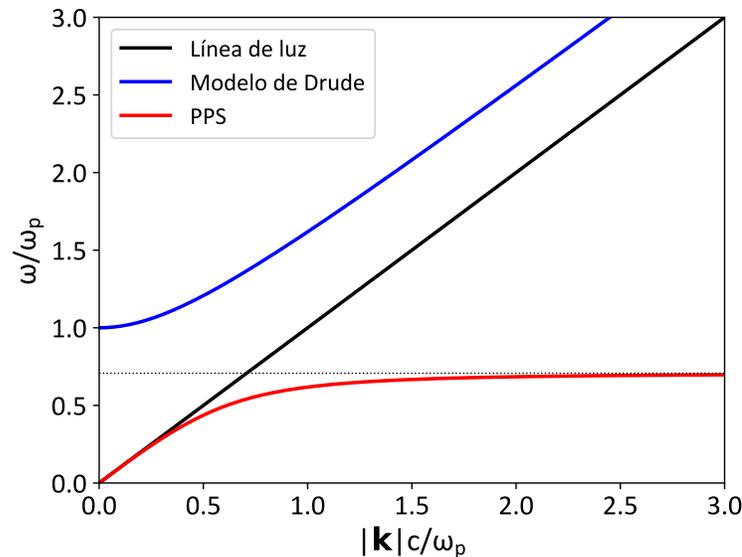


**Figura 18.** Esquemático del modelo físico de un plasmón polaritón de superficie que se propaga en dirección del vector de onda  $\mathbf{k}_{sp}$  y donde se aprecia la distribución de la amplitud del campo eléctrico contenido en el plano  $x_1$ - $x_3$

Por otro lado, se define la distancia de propagación de un PPS,  $d_{sp}$ , como la distancia

que debe recorrer para que su amplitud  $\psi_0$  caiga a un valor de  $\frac{\psi_0}{e}$ . Así  $d_{sp} = \frac{1}{k_i}$ . Por otro lado, las distancias de decaimiento en la dirección normal a la superficie están dadas por  $l_{p_0} = \frac{1}{\beta_0}$  y  $l_{p_1} = \frac{1}{\beta_1}$ , que constituyen una medida del confinamiento del PPS en la interfaz.

Para terminar, es común presentar en el estudio de soluciones electromagnéticas la relación de dispersión del campo. Esto, a manera de caracterizar a este tipo de ondas y establecer el comportamiento del número de onda  $|\mathbf{k}|$  en función de su frecuencia  $\omega$ . Ahora, motivados por la solución presentada anteriormente y suponiendo un PPS que se propaga en una interfaz generada por aire y un metal de Drude sin disipación con frecuencia del plasma  $\omega_p$ , es posible presentar un análisis sencillo y sin pérdida de generalidad para este tipo de solución particular. Generalmente, para ilustrar el comportamiento general sin especificar el tipo de metal, es usual presentar la relación de dispersión en términos de los parámetros normalizados,  $\omega/\omega_p$  y  $|\mathbf{k}|c/\omega_p$ .



**Figura 19.** Relación de dispersión típica para los plasmones polaritones de superficie y su comparación con soluciones propagantes típicas.

En la figura 19 se presenta la relación de dispersión para tres campos ópticos diferentes. En primer lugar se tiene la llamada *línea de luz*, representada por la recta de color negro y que corresponde a un campo óptico que se propaga en el vacío. Debido a la familiaridad que tenemos con ella, constituye una referencia para analizar el comportamiento de otros tipos de campo. Por otro lado, la línea azul representa la relación de dispersión para un campo óptico en un medio modelado por el modelo de Drude. Recordemos que por arriba de la frecuencia del plasma el material tiene comporta-

miento de dieléctrico, por lo que esta curva representa un campo propagante cuya relación de dispersión se acerca asintóticamente a la línea de luz. Para frecuencias por debajo de la frecuencia del plasma, el campo se vuelve evanescente como es de esperarse en los metales.

Finalmente, las líneas roja representan la relación de dispersión de los PPS para una interfaz entre aire y un medio de Drude. Se trata de una solución propagante y no radiativa. Dado que la magnitud de su vector de onda siempre es mayor a la línea de luz, este tipo de radiación no se puede convertir por sí sola en luz o viceversa. También vale la pena anotar el hecho de que la relación de dispersión se acota al valor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , dado que para valores grandes de  $|\mathbf{k}|$  la velocidad de grupo y de fase se acercan a cero, haciendo que en este límite el PPS se comporte más bien como una fluctuación localizada de los electrones libres.

#### 4.2. Interacción de campos ópticos con superficies generales

En general, la descripción del problema de esparcimiento electromagnético como resultado directo de la interacción de un campo óptico y una superficie resulta complicado de resolver debido a que se hace necesario determinar el campo electromagnético y su correspondiente derivada normal sobre toda la superficie. En esta sección se pretende presentar los conceptos básicos de un método de solución muy utilizado (Maradudin *et al.*, 1990), el cual está basado en el segundo teorema integral de Green. Este método permite calcular, de manera general, el campo esparcido por una superficie unidimensional en cualquier punto del espacio.

Ahora, como situación de interés se tomará nuevamente el ilustrado en la figura (16), donde se pueden observar dos medios diferentes divididos por una interfaz descrita por el perfil unidimensional  $\zeta(x_1)$ . En este caso, se considera que la superficie es iluminada por un campo óptico monocromático cualquiera  $\psi_{inc}(\mathbf{r}|\omega)$  (omitiendo la dependencia temporal) que representa la amplitud compleja del campo eléctrico a lo largo del eje  $x_2$  para la polarización  $s$  o del campo magnético en polarización  $p$ .

Partiendo del hecho de que el campo total presente en el sistema debe cumplir la ecuación de Helmholtz, y que cumple con las condiciones de frontera impuestas por

las expresiones (74) y (75), se puede escribir que

$$\nabla^2 \psi^>(\mathbf{r}|\omega) + \epsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} \psi^>(\mathbf{r}|\omega) = 0, \quad (89)$$

$$\nabla^2 \psi^<(\mathbf{r}|\omega) + \epsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} \psi^<(\mathbf{r}|\omega) = 0, \quad (90)$$

donde  $\psi^>(\mathbf{r}|\omega) = \psi_{inc}(\mathbf{r}|\omega) + \psi_{sc}(\mathbf{r}|\omega)$  corresponde al campo total en la región  $x_3 > \zeta(x_1)$  conformado por el campo incidente y el esparcido hacia el semiespacio superior, mientras que,  $\psi^<(\mathbf{r}|\omega)$  es el campo en el semiespacio inferior,  $x_3 < \zeta(x_1)$ , como se mencionó al inicio del capítulo. En este punto, si se toma en cuenta el comportamiento de los campos en los límites  $x_3 \rightarrow \infty$  y  $x_3 \rightarrow -\infty$ , es posible introducir funciones de Green, que satisfagan dicho comportamiento, como soluciones de las siguientes ecuaciones no homogéneas

$$\nabla^2 G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \epsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (91)$$

$$\nabla^2 G_1(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \epsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} G_1(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (92)$$

donde  $\mathbf{r}$  representa el punto de observación,  $\mathbf{r}'$  la ubicación de la *fente* representada por la función de Green y  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  es la función delta de Dirac.

Se puede mostrar que las funciones de Green que cumplen estas condiciones están dadas por

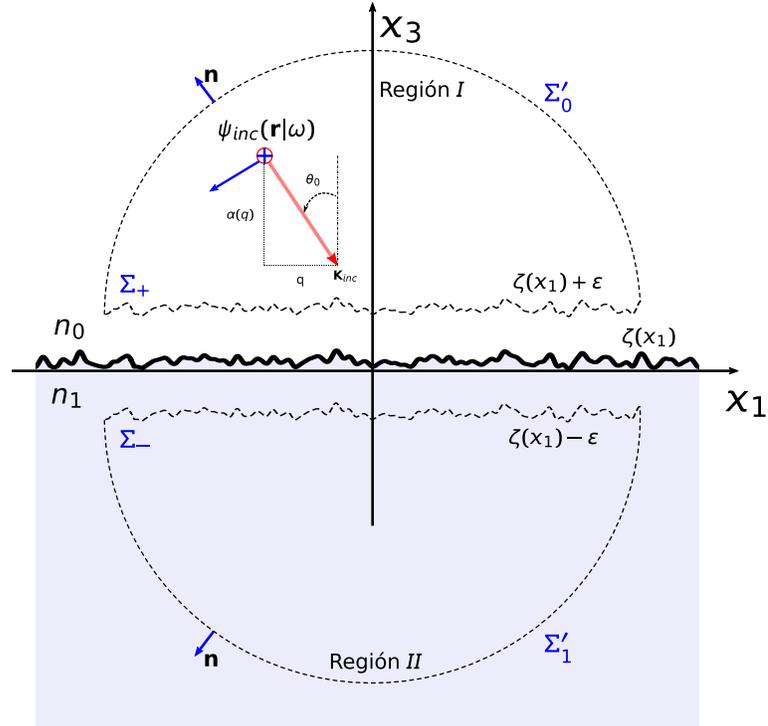
$$G_j(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}\left(n_j \frac{\omega}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right), \quad (93)$$

donde  $H_0^{(1)}$  es la función Hankel de primera clase y orden cero,  $j$  hace referencia al medio considerado, así como  $n_j = \sqrt{\epsilon_j}$  a su correspondiente índice de refracción complejo. Una representación útil para la descripción de estas funciones de Green está dada en términos de su espectro angular, que podemos escribir de la forma

$$G_j(x_1, x_3|x'_1, x'_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{2\pi i}{\alpha_j(q)} e^{iq(x_1-x'_1)+i\alpha_j(q)|x_3-x'_3|}, \quad (94)$$

con

$$\alpha_j(q) = \begin{cases} \sqrt{n_j^2 \frac{\omega^2}{c^2} - q^2} & \text{si } q \leq \text{Re}\{n_j \frac{\omega}{c}\} \\ i\sqrt{q^2 - n_j^2 \frac{\omega^2}{c^2}} & \text{si } q > \text{Re}\{n_j \frac{\omega}{c}\} \end{cases}. \quad (95)$$



**Figura 20.** Ilustración del teorema de Green.

Para realizar el cálculo del campo esparcido se hace uso del segundo teorema integral de Green (Jackson, 2007), el cual establece que dados dos campos escalares,  $u$  y  $v$ , bien comportados dentro de un volumen  $V$ , se cumple que

$$\int_V d^3x (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) = \oint_{\Sigma} ds \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right), \quad (96)$$

donde  $\Sigma$  representa una superficie cerrada y arbitraria que contiene al volumen  $V$ . A su vez,  $ds$  es un elemento diferencial sobre la superficie y  $\frac{\partial}{\partial n}$  representa una derivada a lo largo de la normal a la superficie.

Con base a la figura (20), y ubicando el punto de observación  $\mathbf{r}$  en el medio de incidencia, se utiliza el teorema de Green (96) en la región I, definida por la superficies

$\Sigma'_0 + \Sigma_+$ . Considerando que  $u = \psi^>(x_1, x_3|\omega)$  y  $v = G_0(x_1, x_3|x'_1, x'_3)$ , podemos escribir

$$\begin{aligned} \psi^>(x_1, x_3|\omega)\theta(\zeta(x_1) - x_3) &= \psi_{inc}(x_1, x_3|\omega) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx'_1 \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial N} G_0(x_1, x_3|x'_1, x'_3) \right]_{x'_3=\zeta(x'_1)} \right. \\ &\quad \left. \times H(x'_1|\omega) - G_0(x_1, x_3|x'_1, \zeta(x'_1))L(x'_1|\omega) \right\}, \end{aligned} \quad (97)$$

donde  $\theta(x)$  es la función escalón de Heaviside que vale 1 para puntos de observación en la región I,  $\frac{\partial}{\partial N}$  es la derivada normal no normalizada y las funciones  $H(x_1|\omega)$  y  $L(x_1|\omega)$  se conocen como funciones fuente y están definidos por las expresiones

$$H(x_1|\omega) = \psi^>(x_1, x_3|\omega)|_{x_3=\zeta(x_1)}, \quad (98)$$

$$L(x_1|\omega) = \frac{\partial}{\partial N} \psi^>(x_1, x_3|\omega)|_{x_3=\zeta(x_1)}. \quad (99)$$

De igual forma, si se aplica también el teorema de Green para la región II, definida por la superficie  $\Sigma'_1 + \Sigma_-$ , y empleando  $u = \psi^<(x_1, x_3|\omega)$  y  $v = G_1(x_1, x_3|x'_1, x'_3)$ , se puede escribir

$$\begin{aligned} \psi^<(x_1, x_3|\omega)\theta(\zeta(x_1) - x_3) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx'_1 \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial N} G_1(x_1, x_3|x'_1, x'_3) \right]_{x'_3=\zeta(x'_1)} \right. \\ &\quad \left. \times H(x'_1|\omega) - \nu G_1(x_1, x_3|x'_1, \zeta(x'_1))L(x'_1|\omega) \right\}, \end{aligned} \quad (100)$$

con

$$\begin{cases} \nu = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} & \text{polarización } p \\ \nu = 1 & \text{polarización } s \end{cases} \quad (101)$$

#### 4.2.1. Campo esparcido y funciones fuente

Si se hace uso de las funciones de Green en su forma definida por la expresión (94), además de tomar el segundo término del lado derecho de la ecuación (97) y el lado derecho de la ecuación (100), se puede mostrar que los campos reflejado y transmitido

por la superficie con perfil  $\zeta(x_1)$ , están dados respectivamente por

$$\psi_{sc}(x_1, x_3|\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \mathcal{R}_{sc}(q) e^{i[qx_1 + \alpha_0(q)x_3]}, \quad (102)$$

$$\psi^<(x_1, x_3|\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \mathcal{T}_{sc}(q) e^{i[qx_1 - \alpha_1(q)x_3]}, \quad (103)$$

donde  $\mathcal{R}_{sc}(q)$  y  $\mathcal{T}_{sc}(q)$  corresponden a los espectros angulares o amplitudes complejas de esparcimiento y pueden ser escritos como

$$\mathcal{R}_{sc}(q) = \frac{i}{2\alpha_0(q)} \int_{-\infty}^{\infty} dx'_1 \left\{ [i(q\zeta'(x'_1) - \alpha_0(q))H(x'_1|\omega)] - L(x'_1|\omega) \right\} e^{-i[qx'_1 + \alpha_0(q)\zeta(x'_1)]}, \quad (104)$$

$$\mathcal{T}_{sc}(q) = -\frac{i}{2\alpha_1(q)} \int_{-\infty}^{\infty} dx'_1 \left\{ [i(q\zeta'(x'_1) + \alpha_1(q))H(x'_1|\omega)] - \nu L(x'_1|\omega) \right\} e^{-i[qx'_1 + \alpha_1(q)\zeta(x'_1)]}. \quad (105)$$

Es importante notar que para solucionar el problema de esparcimiento por una superficie rugosa unidimensional, es necesario evaluar estas integrales. Por otro lado, vemos que éstas toman la misma forma para las dos polarizaciones (la única diferencia está en  $\nu$ ), y que, en cualquiera de los dos casos el problema se reduce a determinar las funciones fuente  $H(x'_1|\omega)$  y  $L(x'_1|\omega)$  (que dependen de la polarización).

Ahora, para encontrar una solución para las funciones fuente que representan los campos y sus derivadas normales evaluadas sobre la superficie, es necesario hacer tender el punto de observación  $\mathbf{r}$  a la superficie  $\zeta(x_1)$  desde la región I. Es decir,  $\mathbf{r} \rightarrow (x_1, \zeta(x_1) + \varepsilon)$  con  $\varepsilon \approx 0 \wedge \varepsilon > 0$ . De esta manera se puede establecer un par de ecuaciones integrales acopladas cuya solución numérica determina las funciones fuente. El límite que hemos mencionado se debe tomar con cierto cuidado debido a que las funciones de Green propuestas anteriormente presentan una divergencia en su origen y no es posible intercambiar la operación de integración con la del límite. Con todo lo anterior, es posible encontrar el siguiente par de ecuaciones integrales

$$H(x_1|\omega) = H_{inc}(x_1|\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 [H_0(x_1|x'_1)H(x'_1|\omega) - L_0(x_1|x'_1)L(x'_1|\omega)], \quad (106)$$

$$0 = - \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 [H_1(x_1|x'_1)H(x'_1|\omega) - \nu L_1(x_1|x'_1)L(x'_1|\omega)], \quad (107)$$

donde haciendo uso de la ecuación (93), se encuentra que

- $H_{inc}(x_1|\omega) = \psi_{inc}(x_1, \zeta(x_1)|\omega),$
- $H_j(x_1|x'_1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial N} \{H_0^{(1)} [n_j \frac{\omega}{c} \xi_d]\} \Big|_{x'_3 = \zeta(x'_1) + \varepsilon},$
- $L_j(x_1|x'_1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{i}{4} H_0^{(1)} [n_j \frac{\omega}{c} \xi_d] \Big|_{x'_3 = \zeta(x'_1) + \varepsilon},$

con  $\xi_d = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_3 - x'_3)^2}.$

Las ecuaciones (106) y (107) forman un sistema de ecuaciones integrales acopladas donde las variables incógnitas son el campo y su respectiva derivada normal, ambas evaluadas en la superficie. Para proporcionar una solución numérica a las funciones  $L(x_1|\omega)$  y  $H(x_1|\omega)$ , se propone construir a partir de (106) y (107), un sistema de ecuaciones matriciales usando la aproximación por rectángulos para la evaluación de las integrales a lo largo de un rango de integración  $[-L/2, L/2]$ . En este caso, es recomendable tener un intervalo de muestreo de al menos  $\lambda/20$  para obtener resultados confiables, y por esto, la longitud de la superficie a trabajar representa una gran limitante en términos de poder computacional. Debido a esto, se limitará siempre el análisis a superficies con un número total de puntos en un rango entre 2048 y 4096 (en el anexo de Maradudin *et al.* (1990) se muestra la construcción de la ecuación matricial a resolver, así como los detalles de la evaluación de los elementos matriciales).

#### 4.2.2. Coeficiente diferencial de reflexión

En el estudio de la teoría de esparcimiento debido a superficies rugosas es útil tener una medida de la fracción de potencia incidente que es esparcida por unidad de ángulo, que está representada por la intensidad normalizada que en el contexto de esparcimiento se conoce como el coeficiente diferencial de reflexión (CDR). EL CDR se define como la fracción del flujo total que incide sobre la superficie y que es esparcida en un intervalo angular  $d\theta_s$ . Matemáticamente, se puede escribir como

$$\frac{\partial R_s}{\partial \theta_s} = \frac{P_s(\theta_s)}{P_{inc}}, \quad (108)$$

donde  $P_s(\theta_s)$  es la potencia esparcida a un ángulo  $\theta_s$  y  $P_{inc}$  es la potencia total incidente.

En los cálculos que presentamos en esta tesis se hará uso de haces gaussiano, por lo que, se hace necesario calcular la potencia incidente como el promedio temporal del flujo incidente que atraviesa un plano horizontal (por ejemplo,  $x_3 = 0$ ). Para este propósito partimos del vector de Poynting  $\mathbf{S}$ , dado por

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \}. \quad (109)$$

Haciendo uso de las expresiones de los campos para las polarizaciones fundamentales, (41)-(42), y considerando un campo que incide sobre la superficie desde un medio con función dieléctrica  $\epsilon_0$ , se pueden mostrar que la componente  $x_3$  del vector  $\mathbf{S}$  es

$$S_3(\mathbf{r}|\omega) = \begin{cases} \frac{c^2}{8\pi\omega} \operatorname{Re} \left\{ iE_{x_2} \frac{\partial E_{x_2}^*}{\partial x_3} \right\} & \text{polarización } s \\ -\frac{c^2}{8\pi\omega\epsilon_0} \operatorname{Re} \left\{ iH_{x_2}^* \frac{\partial H_{x_2}}{\partial x_3} \right\} & \text{polarización } p \end{cases}. \quad (110)$$

Si se toma un haz gaussiano descrito por la ecuación (51), y bajo la consideración de un espectro angular estrecho y centrado alrededor de  $q = k_0$ , se puede considerar que el parámetro  $\alpha_0(q)$  varia lentamente sobre el intervalo de integración. Aproximamos entonces la derivada del haz incidente por

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \psi_{inc}(x_1, x_3|\omega) \simeq -i\alpha_0(k_0) \psi_{inc}(x_1, x_3|\omega), \quad (111)$$

donde  $\alpha_0(k_0)$  queda determinado por el ángulo de incidencia de la forma  $\alpha_0(k_0) = n_0 \frac{\omega}{c} \cos(\theta_0)$ . Así, la expresión (110) toma la forma

$$S_{3inc}(\mathbf{r}|\omega) = -\frac{c^2}{8\pi\omega\nu_0} \alpha_0(k_0) |\psi_{inc}(x_1, x_3)|^2,$$

donde  $\nu_0$  depende de la polarización, como en (76).

Evaluando la integral de  $S_3(\mathbf{r}|\omega)$  sobre todo el plano  $x_1 - x_2$  (en  $x_3 = 0$ ), se obtiene la magnitud del flujo total promedio que incide sobre la superficie

$$P_{inc} = \left| \int dx_1 \int dx_2 [S_{3inc}(\mathbf{r}|\omega)]_{x_3=0} \right|. \quad (112)$$

De esta forma, la potencia incidente debido al haz gaussiano  $\psi_{inc}(\mathbf{r}|\omega)$  viene dada por

$$P_{inc} = L_2 \frac{cn_0}{8\pi\nu_0} F \cos(\theta_0), \quad (113)$$

donde  $L_2$  es la longitud de la superficie en la dirección  $x_2$  y el valor de  $F$  depende de la forma y el ancho del haz a lo largo del eje  $x_1$ , y está dado por

$$F = \int_{-L/2}^{L/2} dx_1 |\psi_{inc}(x_1, 0)|^2. \quad (114)$$

De manera similar, es posible calcular el flujo total promedio que es esparcido por la superficie y que atraviesa un plano constante  $x_3 = x_0$  y con  $x_0 > \zeta(x_1) \forall x_1$ . Haciendo uso de la ecuación (102) para el campo esparcido, además de la expresión (110), es posible mostrar luego de algunas manipulaciones matemáticas y limitando el análisis al régimen propagante, que

$$P_{sc} = L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega\nu_0} \int_{-n_0\omega/c}^{n_0\omega/c} \frac{dq}{2\pi} \alpha_0(q) |\mathcal{R}_{sc}(q)|^2. \quad (115)$$

Si se toma la ecuación anterior como la suma de la potencia esparcida en todas las direcciones, desde  $\theta_s = -\pi/2$  hasta  $\theta_s = \pi/2$ , la potencia  $P_{sc}$  puede ser escrita en términos de  $P_s(\theta_s)$  como una suma sobre todo su dominio, de tal manera que

$$P_{sc} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_s P_s(\theta_s). \quad (116)$$

Empleando el cambio de variable,  $q = \frac{n_0\omega}{c} \sin(\theta_s)$ , que implica que  $\alpha_0(q) = \frac{n_0\omega}{c} \cos(\theta_s)$  y  $dq = \frac{n_0\omega}{c} \cos(\theta_s)$ , es posible encontrar que

$$P_s(\theta_s) = L_2 \frac{c^2}{64\pi^2\omega\nu_0} |r_{sc}(\theta_s)|^2, \quad (117)$$

donde

$$r_{sc}(\theta_s) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \left\{ \left[ i \frac{\omega}{c} (\zeta'(x_1) \sin(\theta_s) - \cos(\theta_s)) H(x_1|\omega) \right] - L(x_1|\omega) \right\} \times e^{-i \frac{\omega}{c} [x_1 \sin(\theta_s) + \zeta(x_1) \cos(\theta_s)]} \quad (118)$$

Finalmente, volviendo a la definición del coeficiente diferencial de reflexión dada por la expresión (108) y utilizando los resultados obtenidos en las ecuaciones (113) y (117), el CDR para ángulos de esparcimiento comprendidos en el rango  $|\theta_s| \leq \frac{\pi}{2}$ , se puede expresar de la forma

$$\frac{\partial R_s}{\partial \theta_s} = \frac{c}{8\pi\omega n_0} F \cos(\theta_0) |r_{sc}(\theta_s)|^2. \quad (119)$$

Se hace notar que el coeficiente diferencial de transmisión puede ser deducido de una manera análoga. Sin embargo, para efectos de la tesis, esto no es necesario.

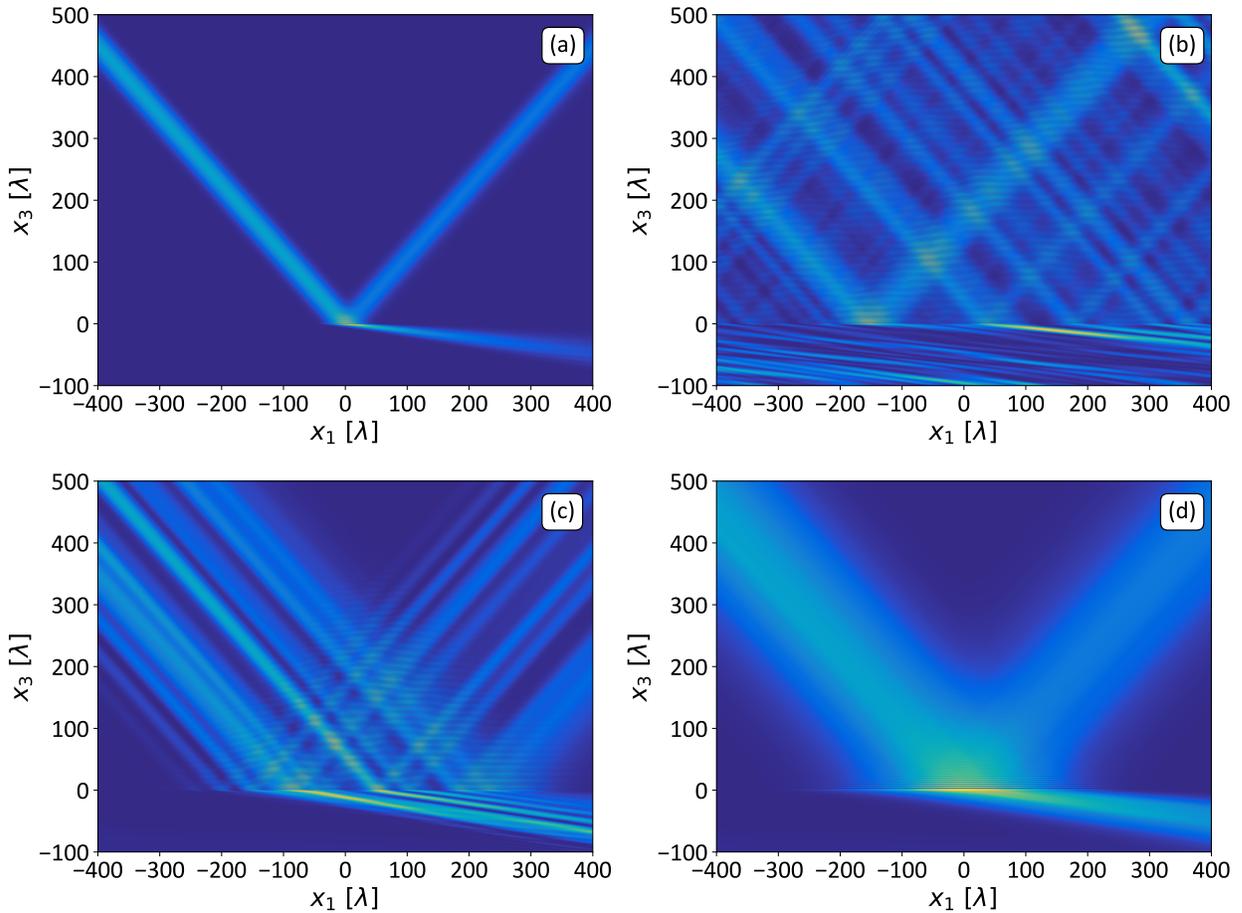
## Capítulo 5. Corrimiento Goos-Hänchen para campos aleatorios

---

Un efecto de interés que surge de la interacción de haces de luz con superficies es el corrimiento lateral que sufre éste cuando es reflejado totalmente por interfaces planas o fronteras periódicas metálicas. Este efecto, llamado corrimiento Goos-Hänchen (GH), se manifiesta como un desplazamiento lateral del campo óptico sobre la superficie respecto a la posición que es esperada por la óptica geométrica (Goos y Hänchen, 1947; Goos y Lindberg-Hänchen, 1949; Artmann, 1948) y puede ser el efecto no-especular más estudiado en el campo de la óptica. La mayoría de los estudios correspondientes a este efecto se han reportado considerando la interacción de haces deterministas con interfaces dieléctrica en condiciones cercanas a la de reflexión total interna (Renard, 1964; Horowitz y Tamir, 1971; Lai *et al.*, 1986), pero, no se ha reportado este tipo de efectos en los campos aleatorios.

En este capítulo, se presenta un estudio riguroso para el corrimiento que experimentan los campos aleatorio, como los construidos en la sección (3.4), cuando interactúan con superficies planas dieléctricas. Se pretende mostrar un principio de equivalencia entre el corrimiento de un haz determinista con respecto al experimentado por un patrón de speckle, así como de un haz con speckle. Además, se muestra como novedad, la dependencia que tiene el corrimiento Goos-Hänchen con el grado de coherencia del haz reflejado; resultado obtenido al analizar el corrimiento de la envolvente del haz con speckle.

Para ilustrar los efectos que se pretenden presentar en este capítulo, se muestran en la figura (21) simulaciones para la intensidad en campo cercano (haciendo referencia al régimen de Fresnel) de las diferentes situaciones exploradas. En ambas situaciones se considerará un campo óptico de longitud de onda  $\lambda = 632.8$  nm que viaja en vidrio, con  $\epsilon_1 = 2.25$ , y que incide a un ángulo cercano de la condición de reflexión total interna ( $\theta_0 = 41.8^\circ$ ) sobre la interfaz plana entre este material y el aire. El primer caso, figura (21a), corresponde al ya conocido corrimiento en haces gaussianos, en este punto, se presenta el modelo de análisis que servirá como punto de referencia para el estudio de los demás campos. Las situaciones (21b y 21c) corresponden al corrimiento para campos aleatorios y, para finalizar, la figura (21d) hace referencia al corrimiento que presenta la envolvente de un haz con speckle; en este caso, lo que se



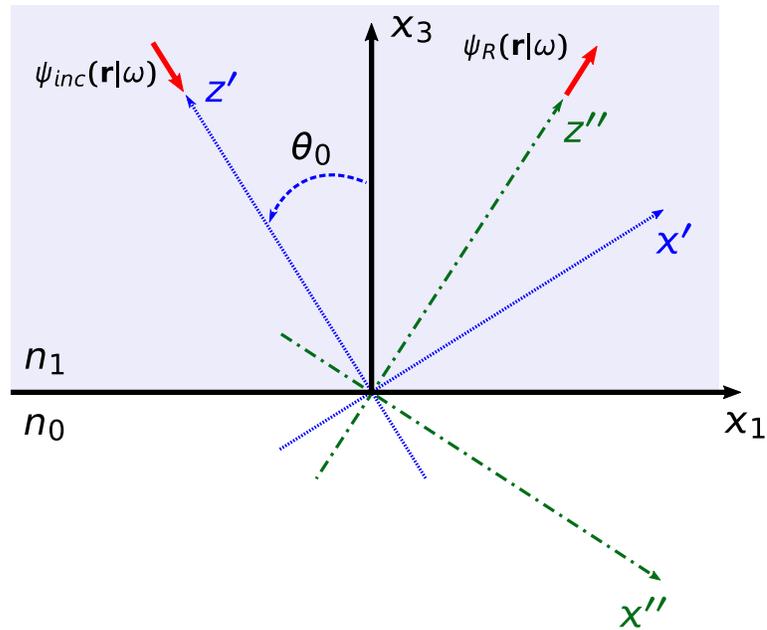
**Figura 21.** Intensidad del campo cercano para las situaciones de interés, en todos los casos se tiene un campo óptico que incide sobre una interfaz aire-vidrio a un ángulo  $\theta_0 = 42^\circ$  respecto a la normal. a) Haz gaussiano con semiancho en amplitud  $g = 24\lambda$ . b) Patrón de speckle con correlación delta y tamaño de mota  $\xi = 16.97\lambda$ . c) Haz con speckle con  $\xi = 16.97\lambda$  y semiancho  $w_0 = 100\lambda$ . d) Promedio en intensidad sobre varias realizaciones para los patrones de speckle ( $\sim 500$  realizaciones).

muestra es un promedio sobre muchas realizaciones del haz con speckle. Vale la pena resaltar que además de que se trata de una situación práctica, el caso es interesante debido a que existe amplio debate en la literatura referente a este corrimiento (Ziauddin *et al.*, 2015; Aiello y Woerdman, 2011; Merano *et al.*, 2013; Wang *et al.*, 2008).

### 5.1. Corrimiento Goos-Hänchen para haces

Como referencia, es importante iniciar considerando el corrimiento que presenta un haz gaussiano determinista. Partimos entonces considerando un haz gaussiano bidimensional  $\psi_{inc}(\mathbf{r}|\omega)$ , con polarización  $s$  o  $p$ , escrito en términos de su espectro angular según la expresión (51), correspondiendo a un campo óptico escrito en el sistema de referencia  $x_1 - x_3$  y que incide sobre una interfaz plana en  $x_3 = 0$  a un ángulo  $\theta_0$  con

respecto al eje coordenado  $x_3$ . Además, haciendo uso de las ecuaciones de Fresnel y de los resultados obtenidos en la sección (4.1) se tiene que el haz reflejado  $\psi_R(\mathbf{r}|\omega)$  debido a esta interacción se puede escribir según la ecuación (81).



**Figura 22.** Sistemas de referencia utilizados para la descripción del corrimiento Goos-Hänchen.

Previamente en la sección (3.2), donde se desarrollan las herramientas necesarias para la generación de campo óptico, se propuso una rotación de ejes coordenados para la descripción apropiada de los haces de luz, en este cambio se pasa de un sistema de referencia  $x' - z'$  orientado hacia la dirección de propagación del campo (o dirección incidencia) al sistema de referencia del laboratorio  $x_1 - x_3$ . Para efectos del presente capítulo se hace necesario introducir una nueva rotación de ejes que facilite el análisis del corrimiento, en este punto, se establece un sistema coordenado auxiliar  $x'' - z''$  alineado hacia el campo reflejado (rotación de un ángulo  $-\theta_0$ ) como se muestra en la figura (22). La relación entre las "coordenadas del haz" ( $x'', z''$ ) y las del laboratorio está dada por

$$\begin{cases} x_1 = x'' \cos(\theta_0) + z'' \sin(\theta_0) \\ x_3 = -x'' \sin(\theta_0) + z'' \cos(\theta_0) \end{cases} \quad (120)$$

Con la finalidad de representar el campo  $\psi_R(\mathbf{r}|\omega)$  en este nuevo sistema, es necesario tener en cuenta el cambio de dirección de los vectores  $\mathbf{K} = (q, \alpha)$  correspondientes a

cada una de las ondas planas de su espectro angular, de tal forma que

$$\begin{cases} q'' = q \cos(\theta_0) - \alpha(q) \sin(\theta_0) \\ \alpha(q'') = q \sin(\theta_0) + \alpha(q) \cos(\theta_0) \end{cases} \quad (121)$$

Tomando (81) y haciendo uso de las expresiones (120) y (121), se puede mostrar que el haz reflejado por la interfaz es

$$\psi_R(\mathbf{r}|\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq''}{2\pi} A(q'') r(q'') e^{i[q''x'' + \alpha(q'')z'']}, \quad (122)$$

con  $\alpha(q'') = \sqrt{n_1^2 \frac{\omega^2}{c^2} - q''^2}$  para el régimen propagante, donde  $A(q'')$  es un espectro angular definido como en (48). Por lo tanto,

$$A(q'') = A_0 \sqrt{\pi} g e^{-\frac{q''^2 g^2}{4}}. \quad (123)$$

Además,  $r(q'') = r(q \cos(\theta_0) + \alpha(q) \sin(\theta_0))$  es el coeficiente de Fresnel para cada onda plana que lo conforma (ver ecuación (79)).

Centrando el análisis sobre el plano  $z'' = 0$ , se puede escribir la intensidad del campo reflejado como

$$|\psi_R(x''|\omega)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq''}{2\pi} A(q'') r(q'') e^{iq''x''} \right|^2. \quad (124)$$

Teniendo en cuenta que el espectro angular es simétrico con respecto a  $q''$ , si se considera una reflexión debido a un espejo perfecto,  $r(q'') = 1$ , la distribución de intensidad del haz es simétrica de igual forma y, además, esta centrada en  $x_1 = x'' = 0$  como sería de esperarse de acuerdo a la óptica geométrica. Para entender de donde viene el corrimiento para el caso de la interacción con la interfaz vidrio-aire, es conveniente considerar el caso en que el haz incide sobre la superficie en la condición de reflexión total interna. Bajo esta suposición, el coeficiente de Fresnel puede ser escrito como  $r(q'') = e^{i\phi(q'')}$ . De aquí, si se expande en una serie de Taylor (centrando en cero) la fase  $\phi(q)$  que adquiere cada componente del espectro angular del haz y truncando

para los dos primeros términos, la expresión (124) toma la forma de

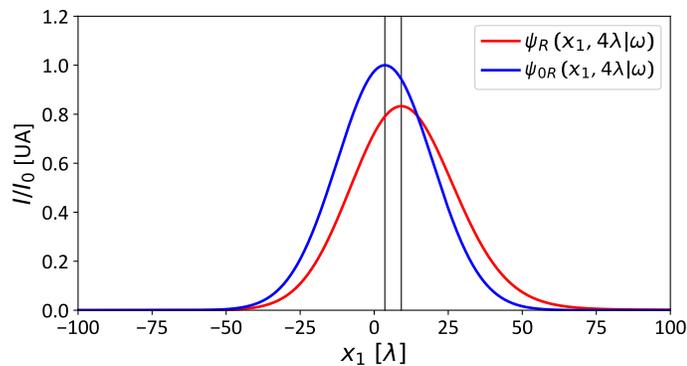
$$|\psi_R(x''|\omega)|^2 = \left| e^{i\phi_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq''}{2\pi} A(q'') e^{i\phi'(0)q''} e^{iq''x''} \right|^2. \quad (125)$$

Aplicando la propiedad de corrimiento de las transformadas de Fourier, la ecuación anterior puede ser re-escrita como

$$|\psi_R(x''|\omega)|^2 = |\psi_{0R}(x'' + \delta''|\omega)|^2, \quad (126)$$

donde  $\delta'' = \phi'(0)$  y  $\psi_{0R}(x''|\omega)$  es el campo óptico que sería reflejado por un espejo perfecto.

En general, examinando las ecuaciones (125) y (126) se puede concluir que para haces gaussianos el corrimiento queda enteramente determinado por dos factores fundamentales. En primera instancia, del cambio de la fase que adquiere el haz en la reflexión. Y por otro lado, de la forma del espectro angular  $A(q'')$ , especialmente del ancho del integrando sobre  $q''$ . Por lo tanto, es de esperarse que el tamaño del haz sea fundamental para el corrimiento Goos-Hänchen. Es importante mencionar que el corrimiento  $\delta''$  está medido en el sistema coordenado  $x''-z''$ , por lo que el corrimiento medido en el sistema del laboratorio estará dado por  $\delta = \frac{\delta''}{\cos(\theta_0)}$ .

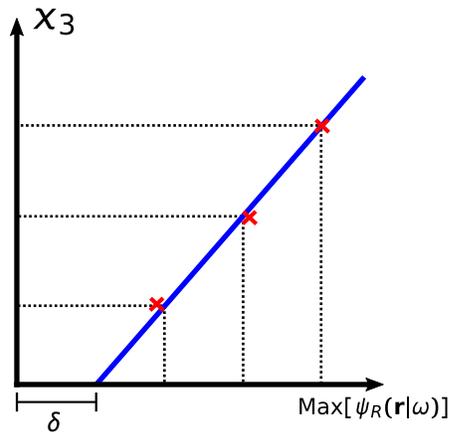


**Figura 23.** Intensidades reflejadas a una altura de  $x_3 = 4\lambda$  para un haz con semiancho en amplitud de  $g = 24\lambda$  y que incide sobre una interfaz vidrio-aire y un espejo perfecto para un ángulo promedio de incidencia  $\theta_0 = 42^\circ$ .

Para el análisis se propone construir el campo cercano del haz reflejado haciendo uso de la ecuación (102) de la teoría del método integral, al igual como se hizo en la figura (21). Siendo así, en la figura (23) se ilustra un corte de la intensidad del haz reflejado por la interfaz dieléctrica a una altura de  $x_3 = 4\lambda$ , además del perfil

correspondiente al haz reflejado por un espejo perfecto; esto con el fin de evidenciar un corrimiento GH de  $\sim 5\lambda$  para la condición de incidencia escogida que se encuentra ilustrado por las dos líneas verticales que marcan la posición de máxima intensidad para cada una de las situaciones.

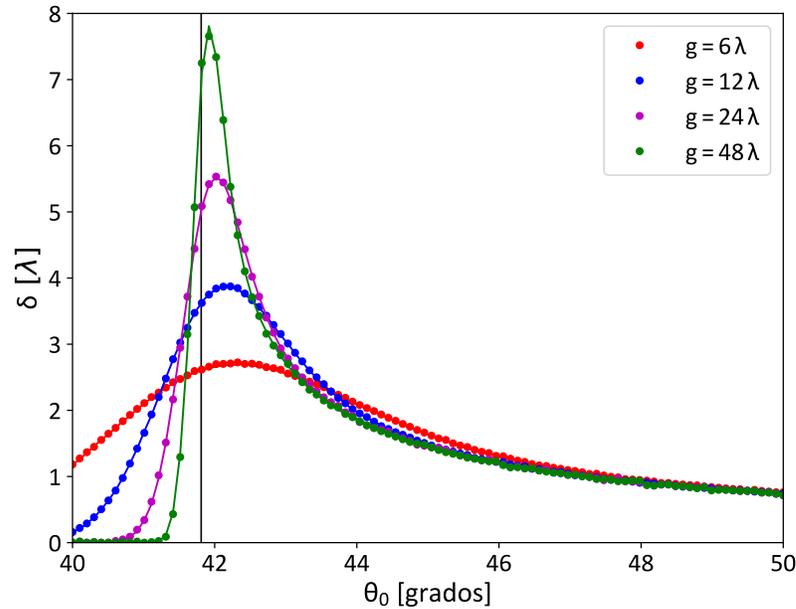
Para evaluar el corrimiento del haz gaussiano se propone detectar la intensidad máxima del campo reflejado en diferentes alturas para luego ajustar los datos obtenidos a una línea recta hasta la altura  $x_3 = 0$ , como se muestra en la siguiente figura



**Figura 24.** Ajuste utilizado para el cálculo del corrimiento GH del haz gaussiano.

En este análisis, es conveniente utilizar el ajuste debido a la dificultad de evaluar el campo esparcido sobre la interfaz o en su vecindad. Posteriormente, para validar el ajuste propuesto y la fiabilidad del método integral, se hace uso de la expresión analítica para el haz reflejado en el nuevo sistema coordenado cuando  $z'' = 0$ , para con esto buscar la posición de máxima intensidad y deducir el corrimiento.

La figura (25) presenta el corrimiento GH para diferentes ángulos de incidencia en la vecindad del ángulo crítico para ondas planas, considerando un rango de incidencia entre  $\theta_0 = 40^\circ$  y  $\theta_0 = 50^\circ$ . Además, se ilustra el comportamiento de cuatro haces de diferente semiancho en amplitud,  $g = 6\lambda, 12\lambda, 24\lambda$  y  $48\lambda$ , respectivamente. Las líneas continuas de la imagen representan el corrimiento calculado directamente desde la expresión analítica, mientras que los puntos son resultado del método integral y el correspondiente ajuste. Con estos resultados se muestra que, a medida que el espectro angular del haz se hace más angosto, el corrimiento experimentado es mayor y se acerca al ángulo crítico para una onda plana. Este resultado coincide con lo esperado de la expresión (124) e indica que el efecto GH es resultado de la interacción de cada



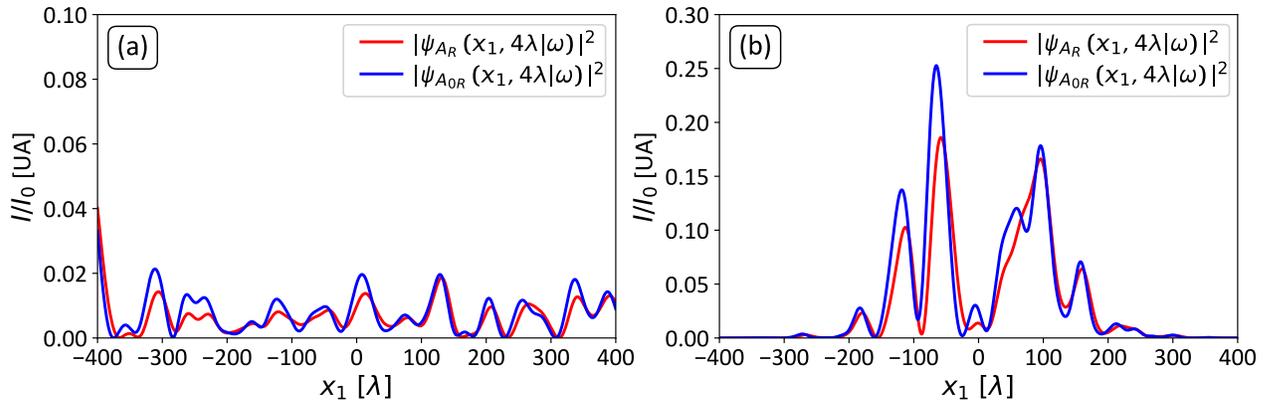
**Figura 25.** Corrimiento lateral para cuatro haces gaussianos con diferente semiancho a una altura  $1/e$  en amplitud ( $g = 6\lambda$ ,  $12\lambda$ ,  $24\lambda$  y  $48\lambda$ , respectivamente). La línea negra vertical indica el ángulo crítico para una interfaz aire-vidrio.

una de las ondas planas que conforman el haz con la superficie dieléctrica. Además, también se puede apreciar que para todos los casos, las curvas tienden a converger para ángulos de incidencia mayores a  $\theta_0 = 46^\circ$ . Se puede entonces inferir que los coeficientes de Fresnel son relativamente estables en estas condiciones (en cuanto a su primera derivada) de incidencia por arriba del ángulo crítico. Es también de esperarse que en el límite de una onda plana (espectro angular con distribución delta de Dirac), el corrimiento sea infinito, aunque esto en realidad no se puede establecer por falta de una referencia.

## 5.2. Corrimiento Goos-Hänchen para campos aleatorios

En este apartado, se pretende mostrar un resultado novedoso al expandir el análisis anterior a los campos ópticos aleatorios introducidos en la sección (3.4). Si consideramos el corrimiento GH como un efecto resultante del cambio de fase que experimenta cada una de las ondas planas que conforman el campo óptico en una representación de espectro angular, es de esperarse que este tipo de campo también presente un corrimiento similar. Siendo así, la dificultad para medirlo radica en su distribución espacial no uniforme, como se puede observar en las figuras (10) y (13), pero es de esperarse que el corrimiento se dé a nivel de speckle. Para ilustrar la situación an-

teriormente descrita, en la figura (26) se muestra el corrimiento de los patrones de speckle respecto a su referencia para los dos tipos de campos aleatorios de interés; patrones de speckle de extensión infinita (izquierda) y haces con speckle (derecha).



**Figura 26.** Intensidad de los campos aleatorios reflejados por una interfaz vidrio-aire a una altura de  $x_3 = 4\lambda$  con línea azul. La línea roja representa la referencia. a) Patrón de speckle con extensión infinita con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 42^\circ$  y tamaño de mota promedio de  $\zeta = 16.97\lambda$ . b) Patrón de speckle con correlación gaussiana para las fases, con  $\theta_0 = 42^\circ$ ,  $\zeta = 16.97\lambda$  y semiancho de envolvente  $w_0 = 100\lambda$ .

Con lo anterior, se propone realizar un análisis basado en el uso de la correlación entre el patrón de speckle reflejado por la interfaz dieléctrica,  $|\psi_{A_R}(x_1, x_0|\omega)|^2$  y una referencia, que igual al caso del haz gaussiano, corresponde al campo reflejado por un espejo perfecto,  $|\psi_{A_{0R}}(x_1, x_0|\omega)|^2$  (con  $x_0$  una constante mayor a 0); esto con el fin de buscar el desplazamiento de un patrón speckle con respecto al otro.

Debido a que se trabaja sobre procesos aleatorios, la correlación de los patrones de intensidad  $I_{A_R}(x_1) = |\psi_{A_R}(x_1, x_0|\omega)|^2$  e  $I_{A_{0R}}(x_1) = |\psi_{A_{0R}}(x_1, x_0|\omega)|^2$  será diferente para cada realización, por lo cual es necesario calcular el promedio sobre muchas de ellas para obtener un resultado cercano al promedio real. Por otro lado, también es posible tener una expresión teórica para esta correlación estadística que nos servirá de referencia.

Para calcular la correlación estadística de las intensidades, es necesario encontrar primero la del campo. Esto de la misma forma a como se hizo en la sección (3.4), donde se calculó la autocorrelación estadística para el patrón de speckle y el haz con speckle, representadas por las ecuaciones (62) y (72), respectivamente. Partimos de una expresión general para un campo aleatorio cualquiera reflejado por la interfaz

dieléctrica en el sistema  $x'' - z''$ , como

$$\psi_{A_R}(\mathbf{r}|\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq''}{2\pi} \mathcal{A}(q'') r(q'') e^{i[q''x'' + \alpha(q'')z'']}, \quad (127)$$

donde  $\mathcal{A}(q'')$  representa un espectro angular aleatorio con el tipo de propiedades que ya hemos descrito. Utilizando procedimientos análogos a los ya empleados, es posible encontrar expresiones analíticas para la correlación cruzada del campo (127) y la referencia sobre el plano  $z'' = 0$ . Para el caso particular del patrón de speckle estadísticamente estacionario (espectro angular con correlación delta), la correlación se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} W_{A_{0R,R}}(\Delta x'') &= \langle \psi_{A_{0R}}^*(x'', 0|\omega) \psi_{A_R}(x'' + \Delta x'', 0|\omega) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq''}{2\pi} \mathcal{I}(q'') r(q'') e^{iq''\Delta x''}, \end{aligned} \quad (128)$$

donde  $\mathcal{I}(q'')$  es la distribución de intensidad definida en (59), por lo que

$$\mathcal{I}(q'') = \mathcal{I}_0 \pi \xi^2 e^{-\frac{\xi^2 q''^2}{2}}, \quad (129)$$

donde  $\xi$  representa el tamaño promedio de la mota.

Por otro lado, para el haz con speckle se tiene que

$$\begin{aligned} W_{A_{0R,R}}(x'', \Delta x'') &= \langle \psi_{A_{0R}}^*(x'', 0|\omega) \psi_{A_R}(x'' + \Delta x'', 0|\omega) \rangle \\ &= \frac{\sigma_g}{2\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x''\sigma_g}{2}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq''}{2\pi} \mathcal{I}(q'') r(q'') e^{iq''\Delta x''}, \end{aligned} \quad (130)$$

donde  $\sigma_g$  es un parámetro que determina la extensión del patrón de speckle; es decir, el tamaño de la envolvente gaussiana generada por el promedio sobre realizaciones de  $\psi_A(\mathbf{r}|\omega)$ . Este parámetro se puede identificar como  $\sigma_g = \frac{2}{w_0}$ , donde  $w_0$  es el semiancho del haz promedio (ver sección 3.4).

La correlación para la intensidad puede ser calculada partiendo del teorema de momentos para procesos aleatorios gaussianos, como se hizo en (63). Primero, en el

caso del campo aleatorio estacionario (espectro con correlación delta) se tiene que

$$\langle I_{A_{0R}}(x'')I_{A_R}(x'' + \Delta x'') \rangle = \langle I_{A_{0R}}(x'') \rangle \langle I_{A_R}(x'' + \Delta x'') \rangle + |W_{A_{0R,R}}(\Delta x'')|^2. \quad (131)$$

Por lo anterior, y teniendo en cuenta que para un proceso espacialmente estacionario el promedio del patrón de speckle es una constante (como se muestra en (62)), es claro que la correlación de la intensidad solo tiene una dependencia funcional a través de la correlación del campo (128), por lo tanto, el corrimiento para este tipo de campos se puede obtener de la siguiente expresión

$$|W_{A_{0R,R}}(\Delta x'')|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq''}{2\pi} \mathcal{I}(q'')r(q'')e^{iq''\Delta x''} \right|^2. \quad (132)$$

De esta expresión, se puede inferir que el corrimiento del campo  $\psi_{A_R}(x'', 0|\omega)$  con respecto a  $\psi_{A_{0R}}(x'', 0|\omega)$  equivale al valor de  $\Delta x''$  para el cual la función expresada por la ecuación (132) es máxima. Por lo tanto, si se compara esta expresión con la dada para encontrar el corrimiento de un haz gaussiano en (124), es de esperarse que si la distribución de intensidad  $\mathcal{I}(q'')$  es igual al espectro angular  $A(q'')$ , el corrimiento de estos dos campos debe ser también igual. Así, al tomar las ecuaciones (123) y (129) normalizadas, se tiene que un haz gaussiano y un patrón de speckle con extensión infinita tienen el mismo corrimiento cuando  $\xi = \frac{g}{\sqrt{2}}$  o  $\xi = \sigma$ . Es decir, cuando el ancho en intensidad del haz gaussiano sea igual al tamaño promedio de la mota en el patrón de speckle.

En el caso del haz con speckle, la correlación de la intensidad se puede escribir de forma similar que como se hizo en (131). Aquí, sin embargo, debido a que la correlación del campo presenta una dependencia adicional debido a la extensión finita del patrón del speckle, es necesario fijar el punto de observación para éste. Puesto que nos interesa medir el corrimiento del patrón reflejado desde el origen de coordenadas es conveniente considerar que  $x'' = 0$ , de tal forma que

$$\langle I_{A_{0R}}(x'')I_{A_R}(x'' + \Delta x'') \rangle \Big|_{x''=0} = \langle I_{A_{0R}}(0) \rangle \langle I_{A_R}(\Delta x'') \rangle + |W_{A_{0R,R}}(0, \Delta x'')|^2, \quad (133)$$

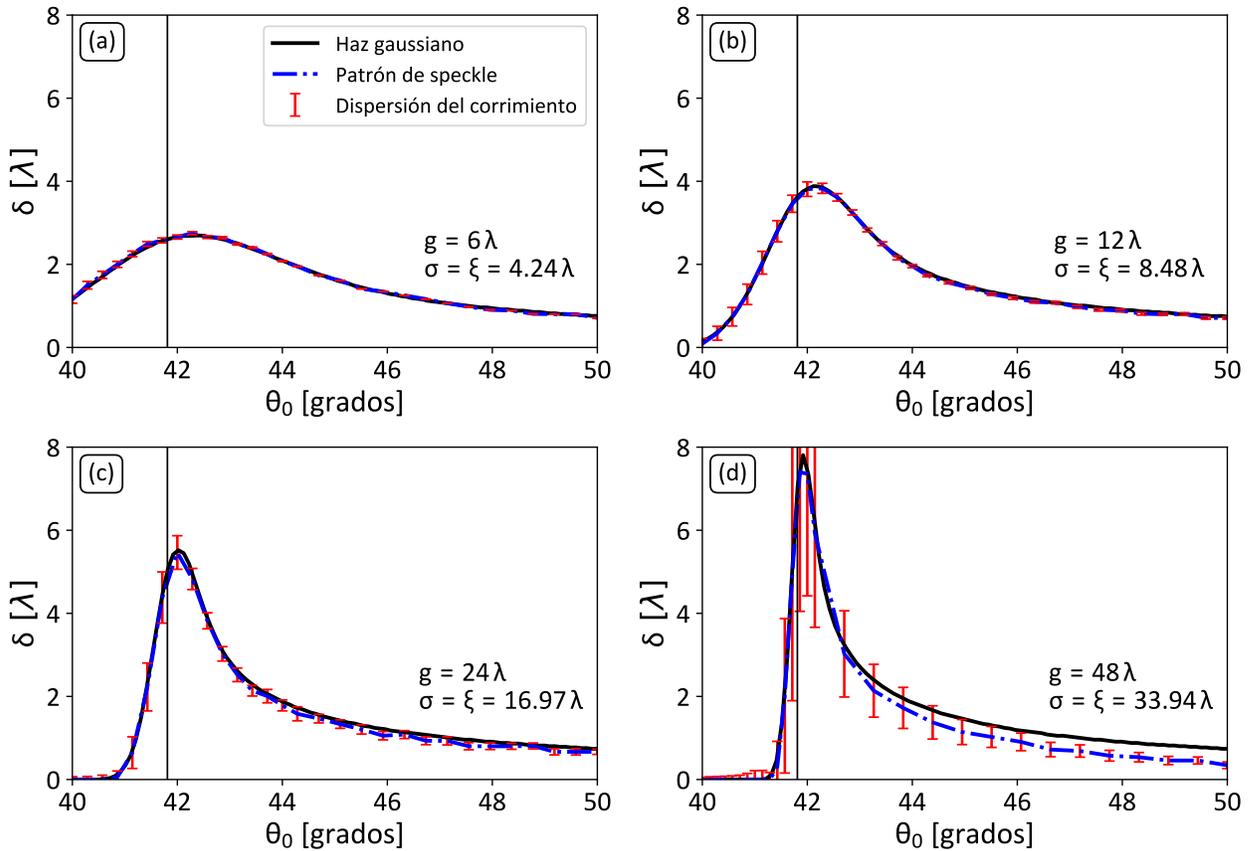
con

$$|W_{A_{0R,R}}(0, \Delta x'')|^2 = \frac{\sigma_g^2}{4\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq''}{2\pi} \mathcal{I}(q'') r(q'') e^{iq'' \Delta x''} \right|^2. \quad (134)$$

Si se presta atención al primer término del lado derecho de la ecuación (133) tenemos que el primer factor del producto es una constante y el segundo corresponde al promedio del haz reflejado por la interfaz dieléctrica, es decir la envolvente gaussiana del haz. Por lo tanto, este término también es una gaussiana que tiene una extensión definida por  $w_0$ . Por otro lado, el segundo término determina el tamaño del speckle, por lo que normalmente esta función es mucho más angosta que la representada por el primer término. Debido a esto último, en muchos casos es apropiado aproximar el primer término como una constante, como ocurre en el caso del patrón de speckle estacionario. En tales condiciones, el corrimiento del speckle contenido en el haz se comporta igual que el de un patrón de speckle con extensión infinita. Esto ya era de esperarse en casos en los que la envolvente es mucho más grande que el tamaño de la mota, como típicamente lo es.

Para verificar las situaciones anteriormente expuestas se propone presentar resultados obtenidos por medio de simulaciones. Para esto, se generan campos aleatorios ( $\sim 2000$  realizaciones) y se calculan los campos reflejados tanto por la interfaz dieléctrica como por un espejo perfecto, a partir de una ecuación similar a (127) en el sistema de coordenadas  $x_1 - x_3$  y a una altura determinada ( $x_3 = 4\lambda$ ). Posteriormente se procede a calcular la correlación cruzada para cada dupla de patrones de speckle, para luego obtener el correspondiente promedio sobre las realizaciones. La localización del máximo se forma como el valor del corrimiento GH.

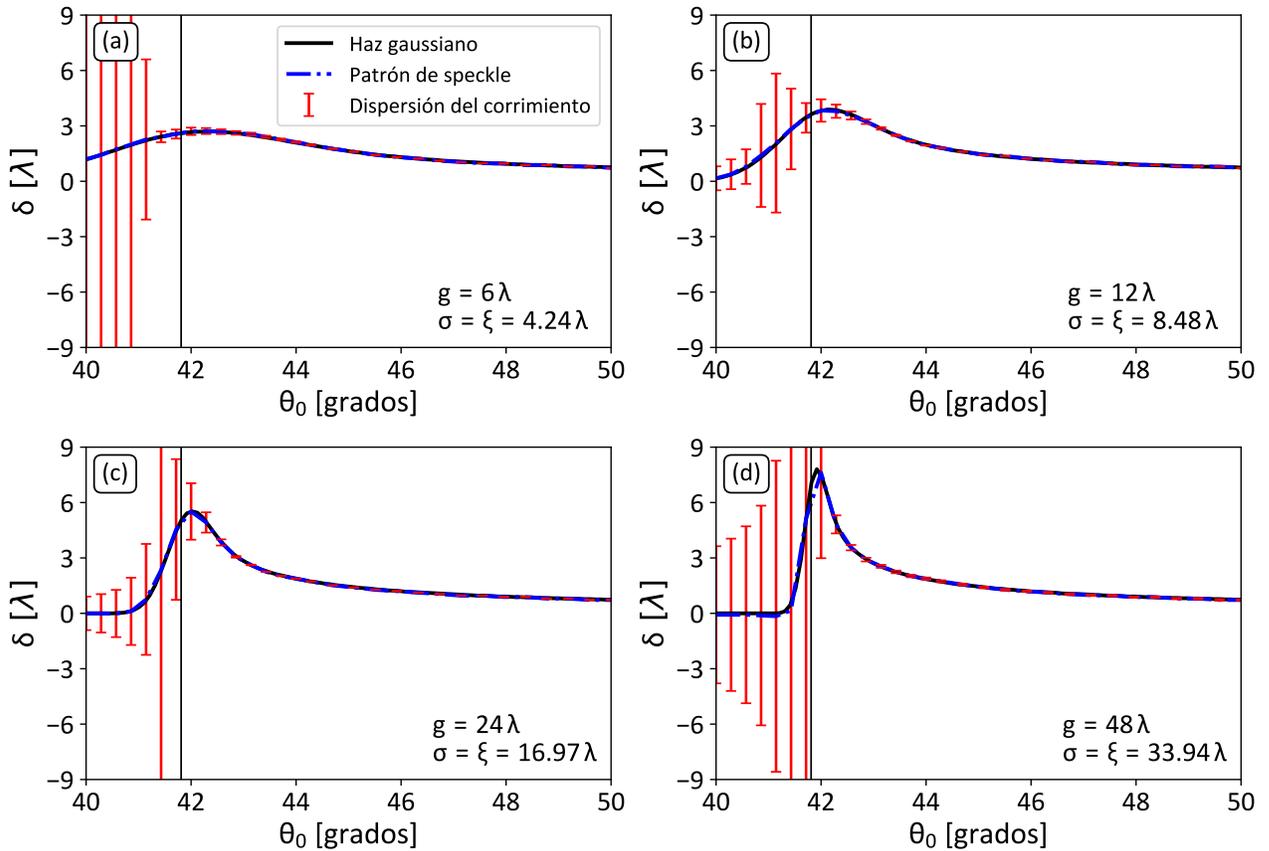
En la figura (27) se ilustra con la línea continua negra el corrimiento GH para los mismos cuatro haces gaussianos de la sección anterior y, se muestra con línea azul discontinua el corrimiento que experimentan los patrones de speckle que cumplen con la condición  $\xi = \frac{g}{\sqrt{2}}$  para el tamaño de la mota,  $\xi = 4.24\lambda, 8.48\lambda, 16.97\lambda$  y  $33.94\lambda$ , respectivamente. Los resultados avalan las suposiciones y las conclusiones obtenidas previamente. Se puede notar en las figuras (27c) y (27d) algunas diferencias entre el corrimiento del speckle y el del haz. Estas discrepancias se atribuyen al truncamiento que ocasiona la ventana espacial aplicada sobre el patrón de speckle, de tal forma que



**Figura 27.** Corrimiento GH para cuatro patrones de speckle estacionarios con tamaño de mota diferente (valor correspondiente sobre la gráfica). En cada recuadro se compara el corrimiento con el correspondiente a un haz gaussiano. Las barras rojas verticales representan las fluctuaciones estadísticas del corrimiento estimado para cada ángulo de incidencia.

los resultados para una mota grande ( $\xi = 33.94\lambda$ ) se ven mayormente afectados.

Por último, en el caso del haz con speckle consideramos un semiancho para la envolvente de  $w_0 = 100\lambda$  (medida en el sistema de coordenadas de incidencia  $x' - z'$ ), por lo que es necesario considerar una extensión a lo largo del eje  $x_1$  de al menos  $600\lambda$  para evitar truncamientos en el patrón del speckle. Al igual que en el caso del speckle de extensión infinita, se toma en cuenta el corrimiento para cuatro diferentes tamaños de mota que cumplen con la condición necesaria para ser comparados con un haz gaussiano determinista. En la figura (28) se ilustra el corrimiento para el patrón de speckle en línea azul, se puede ver que en promedio este concuerda con el predicho por el haz gaussiano como se esperaba de la teoría. Además, se puede apreciar, en las figuras (28c) y (28d), que no se presentan las diferencias debido al truncamiento como en el caso anterior. Esto, debido a que el patrón de speckle presenta extensión finita y contenida en el intervalo considerado. En adición, se pueden observar también



**Figura 28.** Corrimiento GH para cuatro patrones de speckle con correlación de fase gaussiana y tamaños de mota diferente (valor correspondiente sobre la gráfica). Se marca con las barras rojas verticales la varianza del corrimiento para cada ángulo de incidencia.

las barras verticales de las fluctuaciones estadísticas (varianza) del corrimiento para los correspondientes ángulos de incidencia. En este punto, es de notar la existencia de corrimientos negativos para algunos patrones de speckle y, además, corrimientos mucho mayores en contraste con el promedio, aunque esto solo aparece para ángulos menores al ángulo crítico (marcado con la línea vertical negra) y obedece, en parte, a las fluctuaciones de amplitud y fase en el espectro angular reflejado, que conduce a las modificaciones sustanciales en el patrón del speckle reflejado.

### 5.3. Corrimiento de la envolvente del haz con speckle

Una vez que hemos presentado este estudio para el corrimiento asociado a los patrones de speckle de los campos aleatorios, es válido preguntarse sobre el posible corrimiento que tendría la envolvente gaussiana para los haces con speckle. Es decir, ¿Cómo se relaciona el corrimiento de la envolvente del haz, en comparación con un

haz gaussiano totalmente coherente? La anterior pregunta resulta de gran interés debido a que existe una controversia en la literatura sobre está. En específico, sobre el corrimiento de un haz en función de su grado de coherencia o, equivalentemente en función del tamaño de mota que presenta.

Primero, como modelo teórico se propone estudiar el perfil en intensidad de la envolvente reflejada (promedio de los patrones de speckle) sobre la interfaz, de tal forma que se pueda medir su desplazamiento con respecto al origen de coordenadas. Esto, buscando la localización de su máximo de igual forma a como se hizo en el caso del haz gaussiano. Para lo anterior, es necesario encontrar una expresión analítica para el haz reflejado. Teniendo en cuenta las consideraciones hechas en la sección anterior y, partiendo del sistema de coordenadas del haz ( $x'' - z''$ ), es posible calcular la autocorrelación estadística del campo aleatorio reflejado sobre el plano  $z'' = 0$ . Escribimos entonces

$$\begin{aligned} W_{AR}(x''_1, x''_2) &= \langle \psi_{AR}^*(x''_1|\omega) \psi_{AR}(x''_2|\omega) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq''}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds''}{2\pi} \mathcal{I}(q'') r(q'')^* r(s'') \\ &\quad \times \langle e^{-i\phi(q'')} e^{i\phi(s'')} \rangle e^{-i[q''x''_1 - s''x''_2]}, \end{aligned} \quad (135)$$

donde  $r(q'')^*$  es el complejo conjugado del coeficiente de Fresnel correspondiente. Si  $x''_2 = x''_1 + \Delta x''$  y  $s'' = q'' + \Delta q''$ , de manera análoga a como llegamos a la ecuación (71), la expresión (135) toma la forma

$$\begin{aligned} W_{AR}(x''_2, \Delta x'') &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq''}{2\pi} \mathcal{I}(q'') r(q'')^* e^{iq''\Delta x''} \\ &\quad \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta q''}{2\pi} e^{-\left(\frac{\Delta q''}{\sigma_q}\right)^2} r(q'' + \Delta q'') e^{i\Delta q''x''_2} \right]. \end{aligned} \quad (136)$$

Si se evalúa en  $\Delta x'' = 0$ , lo que resulta es la intensidad promedio del patrón de speckle reflejado. Es decir, representa una expresión analítica para la envolvente del haz. Con

esto, podemos escribir

$$\begin{aligned} W_A(x''_2, 0) &= \langle I_{A_R}(x'') \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq''}{2\pi} \mathcal{I}(q'') r(q'')^* \mathcal{C}(x'', q''), \end{aligned} \quad (137)$$

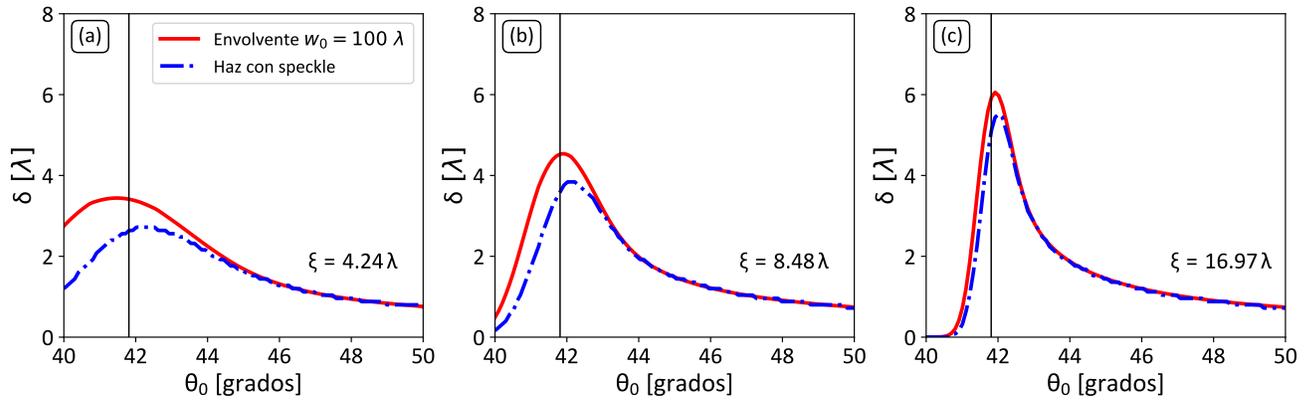
donde

$$\mathcal{C}(x'', q'') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta q''}{2\pi} e^{-\left(\frac{\Delta q''}{\sigma_g}\right)^2} r(q'' + \Delta q'') e^{i\Delta q'' x''}. \quad (138)$$

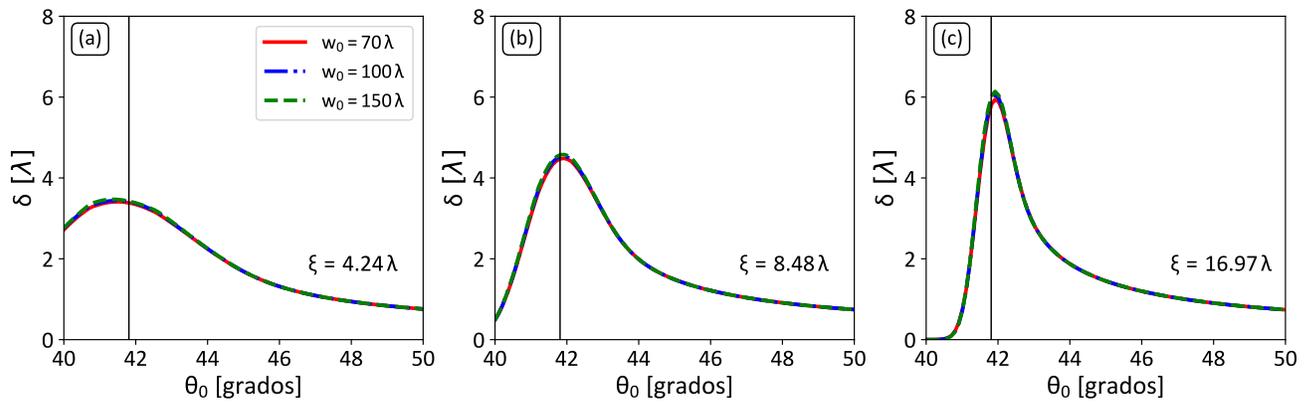
Si se presta atención a la ecuación (137) y en relación con el modelo Gauss-Shell, esta última ecuación puede ser vista como una convolución entre el grado de coherencia y el perfil gaussiano de intensidades representado por la función  $\mathcal{C}(x'', q'')$ . En general, los haces con speckle poseen un tamaño de speckle mucho más pequeño que su envolvente,  $w_0 \gg \xi$ , lo que se traduce en un perfil gaussiano muy angosto para  $\mathcal{C}(x'', q'')$  como función de la variable  $q''$ , y en comparación con la distribución de intensidad  $\mathcal{I}(q'')$ . Por lo tanto, en esta situación, el corrimiento para la envolvente  $\langle I_{A_R}(x'') \rangle$  está dominado enteramente por el tamaño del speckle; es decir, por su grado de coherencia. Por otro lado, la extensión del mismo depende del parámetro  $\sigma_g$  que, como es de esperarse, no interviene en el corrimiento GH.

Haciendo uso de la expresión (146) es posible encontrar numéricamente el máximo de la intensidad  $\langle I_{A_R}(x'') \rangle$  en el plano  $z'' = 0$ , con este valor y proyectando en el sistema  $x_1 - x_3$  se puede obtener el corrimiento GH para la envolvente del haz con speckle. La figura (29) muestra el correspondiente corrimiento para tres haces con envolvente de semiancho  $w_0 = 100\lambda$  y tamaños de speckle que corresponden a los tres primeros que utilizamos en los análisis anteriores (línea roja continua). También se presenta para efectos de comparación el corrimiento del patrón de speckle (línea azul discontinua).

Con estos resultados, se confirma la dependencia del corrimiento con el tamaño de la mota contenida en el haz con speckle. Se aprecia que el mismo no difiere en gran medida del corrimiento de los patrones de speckle, y que el valor máximo está centrado en el ángulo crítico. Es de esperarse que en el límite en el que  $\xi \rightarrow w_0$ , el corrimiento asociado sea igual al que un haz gaussiano con semiancho  $g = \sqrt{2}\xi$ .



**Figura 29.** Corrimiento GH teórico para tres haces con el mismo semiancho de envolvente,  $w_0 = 100\lambda$ , y con tamaños de speckle  $\xi = 4.24\lambda$ ,  $8.48\lambda$  y  $16.97\lambda$  respectivamente de izquierda a derecha. Se presenta una comparación entre el corrimiento a nivel de haz y el corrimiento a nivel del patrón de speckle.



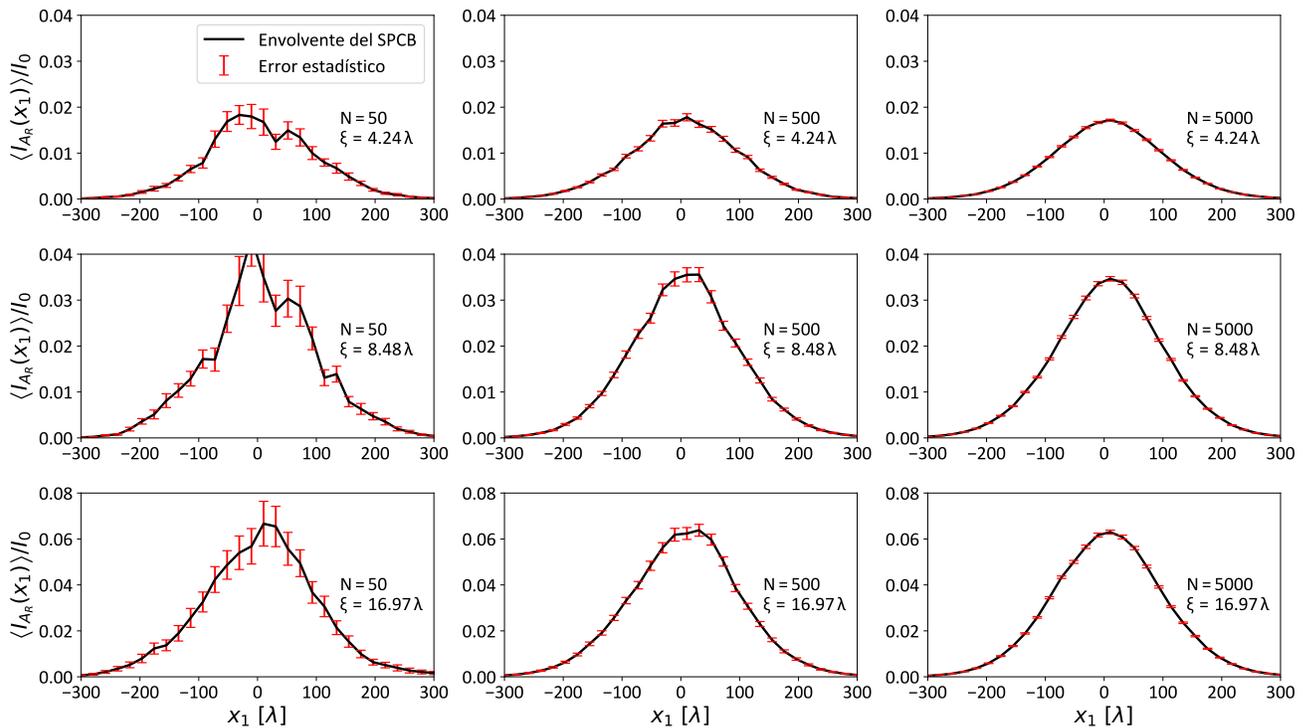
**Figura 30.** Comparativa entre el corrimiento Goos-Hänchen teórico que presentan haces con diferente ancho de envolvente e igual tamaño de mota. Se presentan tres conjuntos de curvas donde el tamaño de speckle aumenta de izquierda a derecha.

A su vez, en la figura (30) se muestran tres conjuntos de gráficas para el corrimiento GH para los tres tamaños de speckle previamente mencionados y haces con diferentes anchos ( $w_0 = 70\lambda$ ,  $100\lambda$ , y  $150\lambda$ ). En esta comparativa se muestra la insensibilidad que presenta el corrimiento con el ancho del haz, resultado que confirma una vez más la importancia del speckle en el corrimiento de este tipo de campos ópticos.

Por último, para validar los resultados anteriores, se propone estimar el corrimiento propuesto en este apartado mediante simulaciones. Es decir, se generan muchas realizaciones de patrones de speckle (en el sistema  $x_1 - x_3$  y a una altura fija  $x_0$ ) con correlación gaussiana, que son reflejados tanto por la interfaz dieléctrica como por un espejo perfecto. Tomando el promedio sobre todas las realizaciones, podemos estimar el desplazamiento de una envolvente respecto a la referencia (envolvente reflejada por espejo) por medio de la correlación. En este punto se hace necesario realizar un

análisis extra para establecer la cantidad mínima de patrones de speckle utilizados para generar una envolvente adecuada para una estimación confiable de  $\langle I_{A_R}(x_1) \rangle$  e  $\langle I_{A_{R_0}}(x_1) \rangle$ . Lo anterior se debe a que el corrimiento encontrado por la correlación se ve fuertemente afectado por las fluctuaciones que se tienen cuando el número de muestras es bajo, especialmente para ángulos de incidencia menores al ángulo crítico donde las fluctuaciones pueden ser mayores.

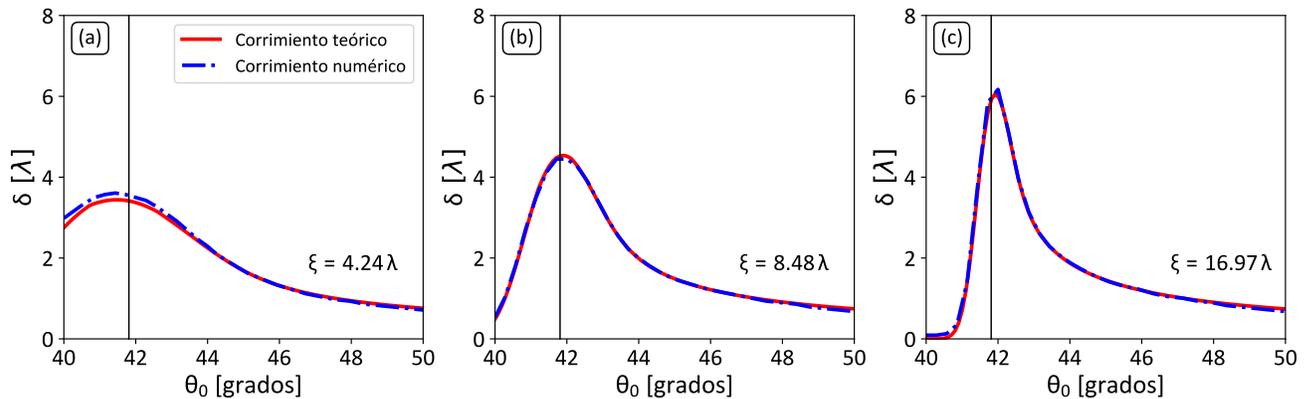
Estimamos el error haciendo uso de error estadístico que se tiene al estimar el valor promedio con base en un conjunto de muestras con distribución gaussiana. En la figura (31), se muestra un conjunto de nueve gráficas para el perfil del haz reflejado por la interfaz vidrio-aire con envolvente fija de  $w_0 = 100\lambda$  y un ángulo de incidencia  $\theta_0 = 41.5^\circ$ , se muestra los haces promedio estimados junto con el error asociado al número de patrones de speckle utilizados. De arriba hacia abajo se muestra la envolvente estimada para los tres tamaños de speckle estudiados mientras que de izquierda a derecha se varia el número de muestras entre  $N = 50$ ,  $N = 500$  y  $N = 5000$ .



**Figura 31.** Evolución del error estadístico asociado al promedio de los patrones de speckle en cuanto al número de muestras.

De la figura anterior se puede observar que para tener un error respecto a la media relativamente bajo ( $\sim 3\%$ ), es recomendable utilizar un número de muestras mayor a 5000. Cabe remarcar que este error depende fuertemente del ángulo de incidencia

y que, debido a esto, para los datos presentados a continuación se trabajó con una población de 20000 patrones de speckle. En la figura (32) se presentan resultados del corrimiento GH utilizando los mismos parámetros que en la figura (29), en cuanto al tamaño de speckle y de la envolvente. La línea roja continua es el desplazamiento teórico calculado para el haz promedio a partir de la ecuación (137) y realizar las integraciones correspondientes de manera numérica. Por otro lado, la línea azul discontinua muestra los datos encontrados mediante la simulación y la generación de haces con speckle. Estos resultados validan las consideraciones teóricas previamente expuestas, dado que puede verificarse que existe un excelente ajuste entre ambas curvas. Además, a modo de conclusión parcial, se demuestra la importancia del grado de coherencia asociado a un haz aleatorio en cuanto al corrimiento Goos-Hänchen que éste experimenta. Este resultado contrasta fuertemente con los resultados encontrados en un haz gaussiano coherente, donde el corrimiento está determinado por su tamaño.



**Figura 32.** Comparativa entre el corrimiento GH obtenido directamente desde la expresión teórica y el medido por medio de la generación numérica de múltiples patrones de speckle con correlación gaussiana. Se presentan las gráficas correspondientes a haces con envolvente definida por  $w_0 = 100\lambda$  y para los mismos tamaños de speckle anteriormente propuestos.

## Capítulo 6. Acoplamiento y desacoplamiento de PPS mediante rejillas metálicas con doble periodo

---

En el capítulo introductorio se mencionó la posibilidad de acoplar luz a PPS por medio de rejillas de difracción metálicas. Esto, debido a que éstas, a través de los órdenes de difracción facilitan el empatamiento de los *momentos* o números de onda asociados a PPS. Bajo este principio, en el presente capítulo se propone realizar un análisis de los efectos que conlleva el paso por PPS en el camino óptico de un campo de luz. Lo anterior en el marco de la nanofotónica, donde se proponen dispositivos plasmónicos para manipular señales con diferentes estados de coherencia.

Siendo así, es necesario partir de una superficie que tenga la capacidad de generar un doble proceso de esparcimiento; acoplamiento y desacoplamiento de PPS. Para esto, y como se mencionó también previamente, se hace uso de una rejilla metálica de difracción con dos componentes periódicas, donde la primera se encarga de acoplar la luz a PPS mediante un orden de difracción específico, mientras que la segunda componente, lo reconvierte en un modo propagante (lo difracta).

### 6.1. Descripción del sistema de interés

Al igual que en los puntos tratados anteriormente, se consideran campos ópticos invariantes a lo largo del eje  $x_2$ . En este caso, se tiene un haz gaussiano  $\psi_{inc}(x_1, x_2|\omega)$  con polarización  $p$ , que incide a un ángulo  $\theta_0$  (medido respecto al eje  $x_3$ ) sobre una superficie con perfil de altura  $\zeta(x_1)$ . Este perfil representa la interfaz entre un metal (oro) con permitividad eléctrica  $\epsilon_1(\omega)$  y el aire ( $\epsilon_0 = 1$ ).

Dado el objetivo de nuestro análisis, el perfil de alturas  $\zeta(x_1)$  asociado a la superficie puede definirse como la suma de dos funciones armónicas, de tal forma

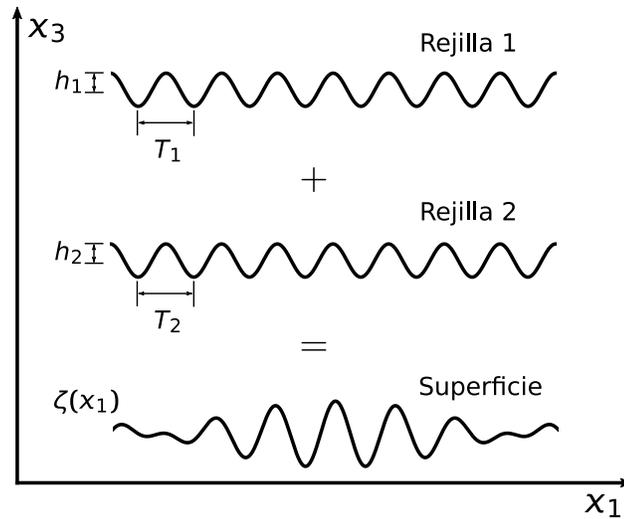
$$\zeta(x_1) = \zeta_1(x_1) + \zeta_2(x_1),$$

con

$$\zeta_i(x_1) = h_i \sin\left(\frac{2\pi}{T_i}x_1 + \phi_i\right), \quad (139)$$

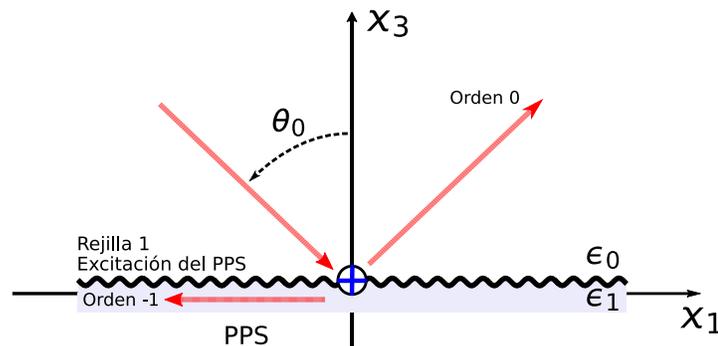
donde  $i = 1, 2$  hace referencia a la componente periódica,  $T_i$  representa su periodo,

$h_i$  la profundidad de la modulación y  $\phi_i$  es una fase arbitraria sin importancia para el problema. En la figura (33) se presenta una ilustración del modelo para la superficie de interés.



**Figura 33.** Suma de dos rejillas de difracción con diferentes periodos para el diseño de una superficie plasmónica que permita llevar a cabo un proceso de doble esparcimiento.

En la figura (33) se ilustra el hecho de que la superficie ha sido construida como la superposición de dos rejillas con periodos  $T_1$  y  $T_2$ . Con fin de no tener órdenes de difracción adicionales al haz especular, se consideran periodos por abajo de la longitud de onda. La rejilla 1 es utilizada para acoplar parte del haz  $\psi_{inc}(x_1, x_3|\omega)$  a PPS mediante su orden difracción  $-1$ . Esta situación se ilustra en la figura (34).



**Figura 34.** Ilustración del proceso de acoplamiento de luz a PPS mediante la primera componente periódica de la superficie  $\zeta(x_1)$ .

En estas circunstancias la interacción de la luz con esta componente periódica solo genera el haz especular (orden de difracción 0) además de excitar un PPS, que viaja

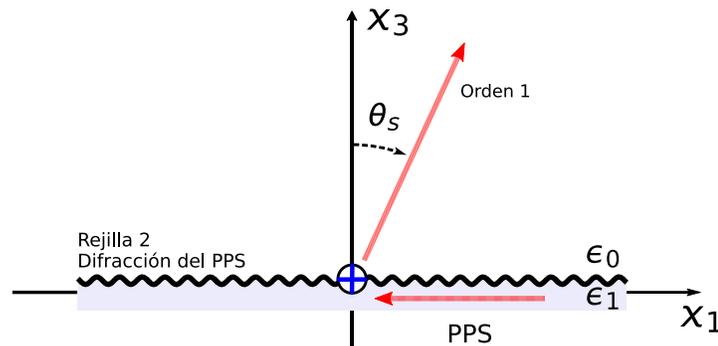
hacia la izquierda, a través del orden  $-1$  que es aún evanescente.

En lo que toca a los aspectos cuantitativos, para garantizar lograr lo anterior es necesario cumplir la condición de acoplamiento que puede verse como una condición de conservación de momento paralelo a la interfaz y que puede también establecerse como una extensión de la ecuación de la rejilla (1). Multiplicando dicha ecuación por  $\frac{\omega}{c}$  para convertirla a una ecuación que relaciona números de onda, podemos igualar al número de onda de la definición del plasmón polaritón de superficie (85) para la frecuencia de excitación. Tenemos entonces que

$$\sin(\theta_0) - \frac{\lambda}{T_1} = -\sqrt{\frac{\epsilon_1(\omega)}{1 + \epsilon_1(\omega)}}, \quad (140)$$

donde  $\lambda$  la longitud de onda del haz incidente.

Por otro lado, la rejilla 2 es utilizada para interactuar con el plasmón excitado previamente y desacoplarlo a través de un orden de difracción. la situación se ilustra en la figura (35), con un PPS que viaja hacia la izquierda y que se difracta a un ángulo  $\theta_s$  por la interacción con la rejilla 2 (medido con respecto al eje  $x_3$  en sentido horario).



**Figura 35.** Ilustración del proceso de desacoplamiento del PPS a un modo propagante mediante la segunda componente periódica de la superficie  $\zeta(x_1)$ .

De la misma forma que para la primera componente, se puede mostrar que en esta situación la condición de acoplamiento se puede obtener al considerar que el campo “incidente” es el PPS. Con esto, tenemos que

$$-\sqrt{\frac{\epsilon_1(\omega)}{1 + \epsilon_1(\omega)}} + \frac{\lambda}{T_2} = \sin(\theta_s). \quad (141)$$

Es importante resaltar que a la hora de hacer uso de las ecuaciones (140) y (141) para encontrar los periodos adecuados para las componentes periódicas de la superficie, se obtienen valores para  $T_1$  y  $T_2$  por debajo de la longitud de onda del campo óptico incidente sobre la superficie, resultado proveniente de exigir procesos de acoplamiento y desacoplamiento mediante los órdenes  $-1$  y  $1$ , respectivamente.

En primera instancia, se centrará el análisis en dos configuraciones que se pueden considerar como propuestas para la implementación experimental de los principios aquí presentados. En ambas situaciones consideramos que incide sobre la superficie un haz gaussiano con semiancho en amplitud de  $g = 5 \mu\text{m}$  y de longitud de onda  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ; en cuanto a la superficie, se propone una interfase aire-oro, donde la respuesta de este último material se modela utilizando el modelo de Drude que, presenta un excelente ajuste experimental a partir de los  $600 \text{ nm}$ . En este caso, su función eléctrica toma el valor de  $\epsilon_1(\omega) = -11.806 + i1.244$ . Finalmente, como primera configuración se propone una superficie que acopla PPS a  $\theta_0 = 30^\circ$  y que posteriormente los desacopla a  $\theta_s = 15^\circ$ . En la segunda configuración la luz se acopla a PPS a  $\theta_0 = 30^\circ$  pero lo desacopla en la dirección normal de la superficie, es decir a  $\theta_s = 0^\circ$ . La primera configuración es útil para entender el doble proceso de acoplamiento-desacoplamiento, mientras que la segunda se orienta al estudio de la interacción entre dos campos que pasen por estados plasmónicos.

Haciendo uso de las ecuaciones (140) y (141) se puede mostrar que los periodos para cada componente de las superficies anteriormente mencionadas estarán dadas por:

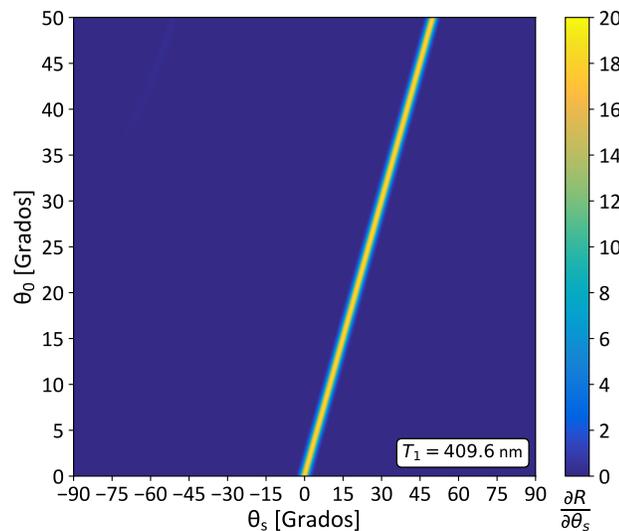
- Acoplamiento  $\theta_0 = 30^\circ$ , Desacoplamiento  $\theta_s = 15^\circ \rightarrow T_1 = 409.6 \text{ nm}$  y  $T_2 = 485.4 \text{ nm}$ .
- Acoplamiento  $\theta_0 = 30^\circ$ , Desacoplamiento  $\theta_s = 0^\circ \rightarrow T_1 = 409.6 \text{ nm}$  y  $T_2 = 605.7 \text{ nm}$ .

## 6.2. Rejilla de difracción simple

Antes de analizar los sistemas anteriormente propuestos, consideramos el caso de la interacción de un haz gaussiano con una rejilla de difracción simple. Esto, con el fin

de ejemplificar el proceso de acoplamiento a PPS.

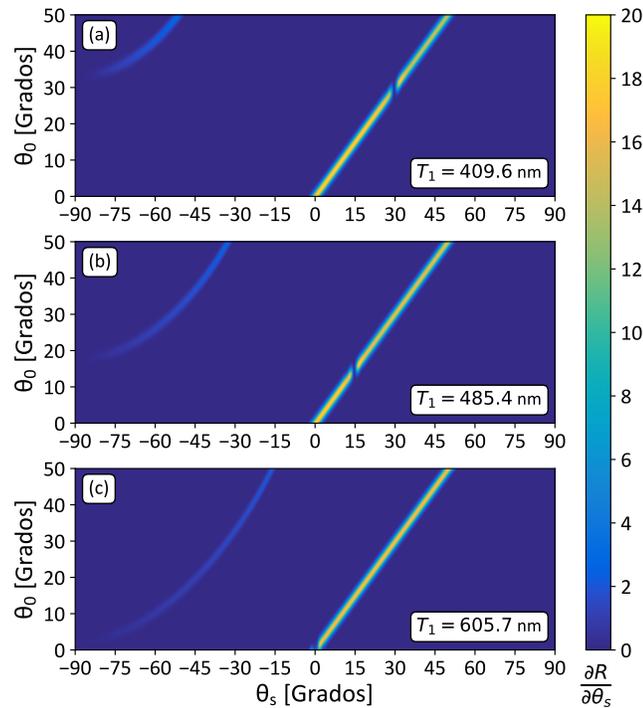
Para establecer el comportamiento de rejillas simples, se toman como referencia las condiciones de acoplamiento anteriormente mencionada. Esto es, acoplamientos a  $\theta_0 = 30^\circ$ ,  $\theta_0 = 15^\circ$  y  $\theta_0 = 0^\circ$ . Cabe mencionar que aunque estas dos últimas son diseñadas para llevar a cabo el proceso de desacoplamiento en los ángulos anteriormente remarcados, también pueden acoplar PPS como proceso inverso. Como valor de profundidad inicial se toma  $h_1 = 20$  nm. Por otro lado, en términos de la implementación numérica, se considera una superficie de 2048 puntos a intervalos de  $\frac{\lambda}{20}$  y calculamos el coeficiente diferencial de reflexión (CDR) utilizando el método integral. Ver sección 4.2.2.



**Figura 36.** Evolución del coeficiente diferencial de reflexión para una rejilla de oro con periodo sub-longitud de onda e iluminada por un haz gaussiano con polarización  $s$ .

El análisis de la interacción superficie-haz se presenta en términos de la evolución del CDR en función del ángulo de incidencia del haz que ilumina la rejilla. Por conveniencia, se limita el rango de iluminación al intervalo  $[0^\circ, 50^\circ]$ . Para ilustrar lo anterior, en la figura (36) se muestra la interacción entre la primera rejilla (acoplamiento de PPS a  $\theta_0 = 30^\circ$ ) y un haz gaussiano con polarización  $s$ , en este caso, se puede ver que el valor de reflexión de la superficie siempre es máximo a lo largo de ángulos de esparcimiento  $\theta_s$  que corresponden a la especular. Por lo tanto, se puede concluir que para esta interacción la superficie se comporta como un espejo para ángulos por abajo de  $30^\circ$ , dado que después aparece un orden de difracción.

Por otro lado, en la figura (37) se ilustra el CDR para las rejillas de interés ilumina-

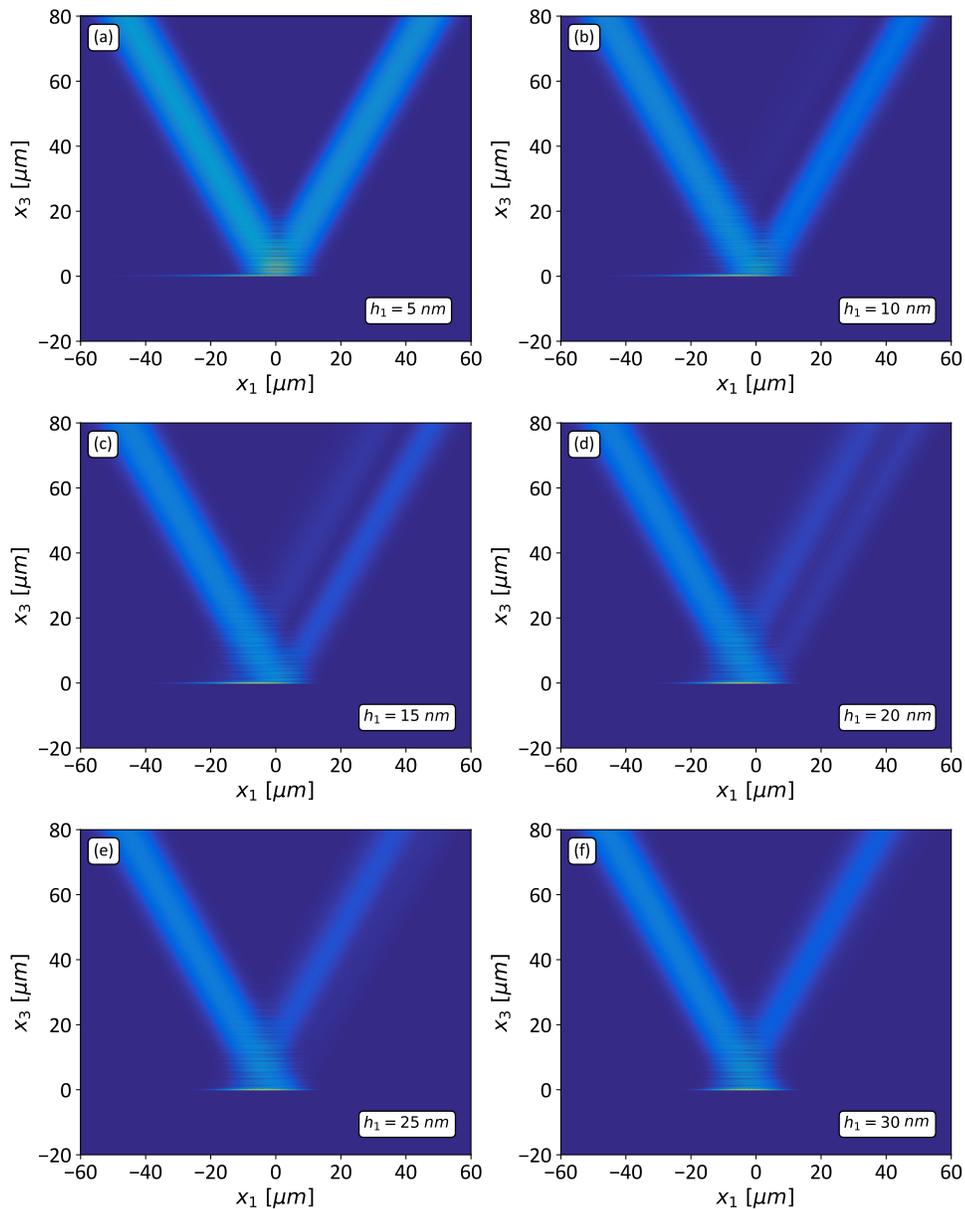


**Figura 37.** Comportamiento del CDR como función del ángulo de incidencia para tres rejillas simples de oro con profundidad  $h_1 = 20$  nm que son iluminadas con un haz gaussiano con polarización  $p$  con  $g = 5 \mu\text{m}$ . a) Rejilla que acopla a  $\theta_0 = 30^\circ$ . b) Rejilla que acopla a  $\theta_0 = 15^\circ$ . a) Rejilla que acopla a  $\theta_0 = 0^\circ$ .

das por un haz con polarización  $p$ . En los mapas de intensidad mostrados se observa una caída significativa de la reflectividad de la superficie en los ángulos de acoplamiento para los cuales fueron diseñadas las rejillas,  $\theta_0 = 30^\circ$ ,  $15^\circ$ , y  $0^\circ$ . Lo anterior, se ve justo sobre la línea que marca el ángulo especular, es decir, del haz reflejado y se atribuye a una absorción de potencia debido al acoplamiento del PPS. Este es el fenómeno responsable de las anomalías de Wood ilustradas en las figura (1). Por otro lado, se observa también en los recuadros un orden de difracción propagante adicional que aparece en ángulos de incidencia mayores al de acoplamiento. Este es el correspondiente al orden  $-1$  de la rejilla que desaparece cuando dicho orden se vuelve evanescente (alrededor de  $\theta_s \sim -90^\circ$ ) y en la cercanía de cuando se excita el PPS. Por ejemplo, en la figura (37c) este orden existe en todo el rango de incidencia hasta  $\theta_0 = 0^\circ$ , condición de acoplamiento para la rejilla con periodo  $T_1 = 605.7$  nm.

Los resultados presentados permiten visualizar el comportamiento del campo reflejado o difractado en la región del campo lejano. Sin embargo, el método integral también permite calcular los campos en la región cercana a la interfaz. De acuerdo a esto, hacemos uso de la expresión (102) para construir el campo cerca a la interfaz.

Para ejemplificar la visualización del campo cercano, consideramos la dependencia del acoplamiento con la profundidad de la rejilla. En la figura (38) se presenta un conjunto de seis gráficas correspondientes al campo cercano, en situación en los que se tiene el acoplamiento de luz a PPS. En el recuadro (38a) se presenta una rejilla con profundidad  $h_1 = 5$  nm y en los demás, se aumenta la profundidad en pasos de 5 nm hasta llegar a  $h_1 = 30$  nm en el recuadro (38f). En las dos primeras imágenes se aprecia el



**Figura 38.** Intensidad del campo cercano de un haz gaussiano que interactúa con una rejilla simple en condición de acoplamiento. Se muestra el comportamiento en función de la profundidad  $h_1$ , partiendo de  $h_1 = 5$  nm en (a) y avanzando en pasos de 5 nm hasta (f).

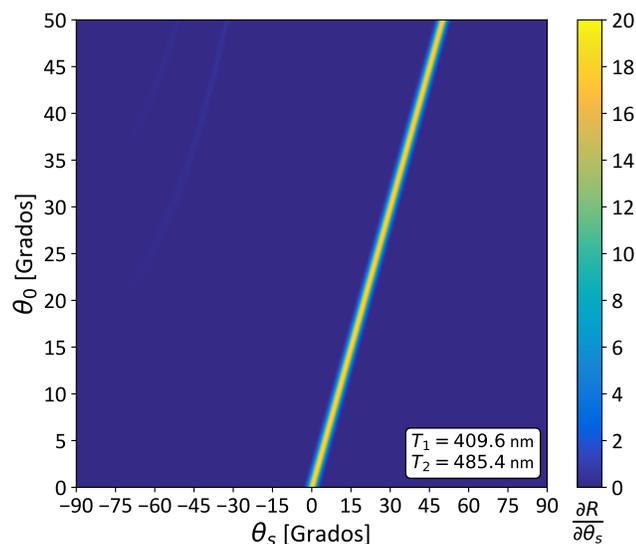
haz reflejado con una intensidad menor al incidente. También, se puede notar el PPS que se propaga en la dirección  $-x_1$  con una longitud de propagación coincidente con

la dada por la expresión vista en la subsección (4.1.1), donde  $d_{sp} = \frac{1}{\kappa_i}$ , con  $\kappa_i$  la parte imaginaria del número de onda, y que para este caso corresponde a  $d_{sp} = 19.9 \mu\text{m}$ .

En los recuadros (38c) y (38d) sucede algo muy interesante que no ha sido descrito en la literatura; se observa que el haz especular se divide en dos y que el PPS excitado disminuye su distancia de propagación. Este efecto puede ser atribuido a una especie de filtrado de la rejilla sobre el espectro angular del haz incidente o como una interferencia destructiva entre el haz especular y otro resultante del desacoplamiento del PPS mediante el orden 1 de la rejilla (proceso visto desde el punto de vista del PPS excitado). Por último, en los recuadros (38e) y (38f) se nota que el doble haz desaparece y en su lugar se observa un corrimiento Goos-Hänchen para el haz emergente. Por lo tanto, no se trata de una reflexión especular y puede indicar, aparte de un proceso de acoplamiento óptico, un desacoplamiento inmediato del PPS debido a la alta rugosidad. Cabe resaltar que este comportamiento favorece la hipótesis de interferencia en la descripción de los recuadros (38c) y (38d).

### 6.3. Rejilla de difracción con doble periodo asociado

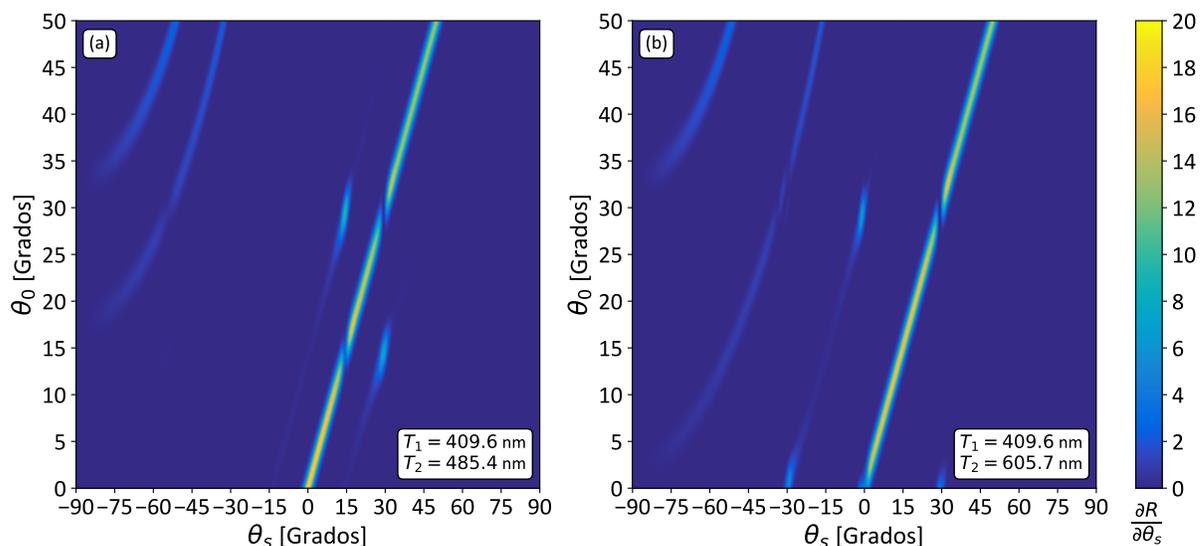
En esta sección se presenta una investigación sobre el doble proceso de esparcimiento propuesto en la interacción de campos ópticos con rejillas con doble periodicidad.



**Figura 39.** CDR de la rejilla propuesta en la primera configuración y que es iluminada por un haz con polarización *s*.

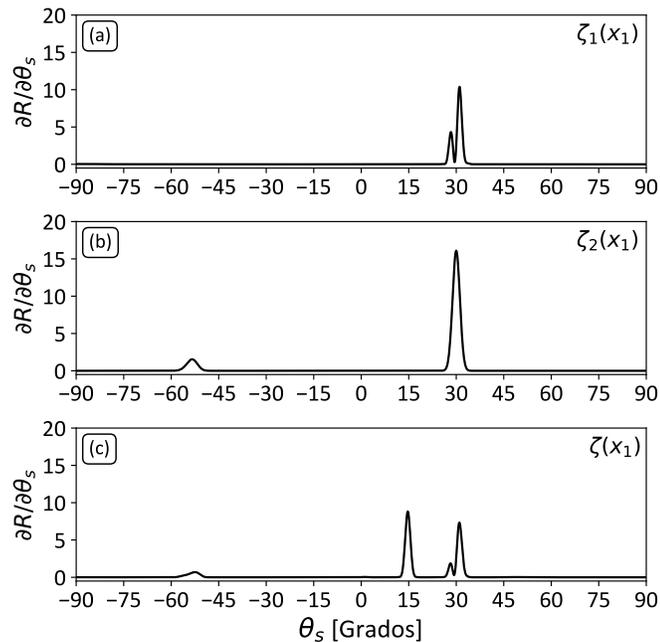
Como referencia y por completez, resulta útil mostrar la interacción del haz gaussiano con polarización  $s$  y la superficie diseñada para la primera configuración de doble esparcimiento. En la figura (39), se muestra la evolución de la intensidad difractada, que al igual que la que se muestra en la figura (36) no evidencia caídas de intensidad sobre el modo especular debidos a acoplamientos. Se observan levemente los órdenes 1 de difracción correspondientes a cada componente periódica, que se vuelven evanescentes para los ángulos de acoplamiento diseñados para la otra polarización.

Por otro lado, y de mayor interés para este trabajo, en la figura (40) se presenta el comportamiento del CDR para iluminación con polarización  $p$ . En la imagen (40a) sobre la distribución de intensidad que corresponde al haz especular se pueden apreciar dos caídas pronunciadas justo en los ángulos  $\theta_0 = 15^\circ$  y  $\theta_0 = 30^\circ$ . Estas caídas de intensidad corresponden al acoplamiento de parte de la luz incidente a PPS. Sin embargo, a diferencia de las imágenes (37a) y (37b), justo para estos ángulos de incidencia aparecen nuevos órdenes de esparcimiento en  $\theta_s = 30^\circ$  y  $\theta_s = 15^\circ$ , respectivamente. Es decir, para un haz que incide a  $30^\circ$  emerge de la superficie un haz a un ángulo de  $15^\circ$ , lo que corresponde al proceso de doble esparcimiento predicho. La figura sugiere además la posibilidad de excitar el proceso inverso; es decir, el acoplamiento de PPS a  $30^\circ$  y su respectiva difracción a  $15^\circ$ . Por otra parte, en la figura (40b), correspondiente a la segunda configuración, ocurre el mismo proceso anteriormente descrito pero con un desacoplamiento en  $0^\circ$ .



**Figura 40.** CDR para las rejillas con doble periodo y que son iluminadas por un haz gaussiano con polarización  $p$ . a) Primera configuración, acoplamiento de PPS en  $\theta_0 = 30^\circ$  y desacoplamiento en  $\theta_s = 15^\circ$ . b) Segunda configuración, acoplamiento de PPS en  $\theta_0 = 30^\circ$  y desacoplamiento en  $\theta_s = 0^\circ$ .

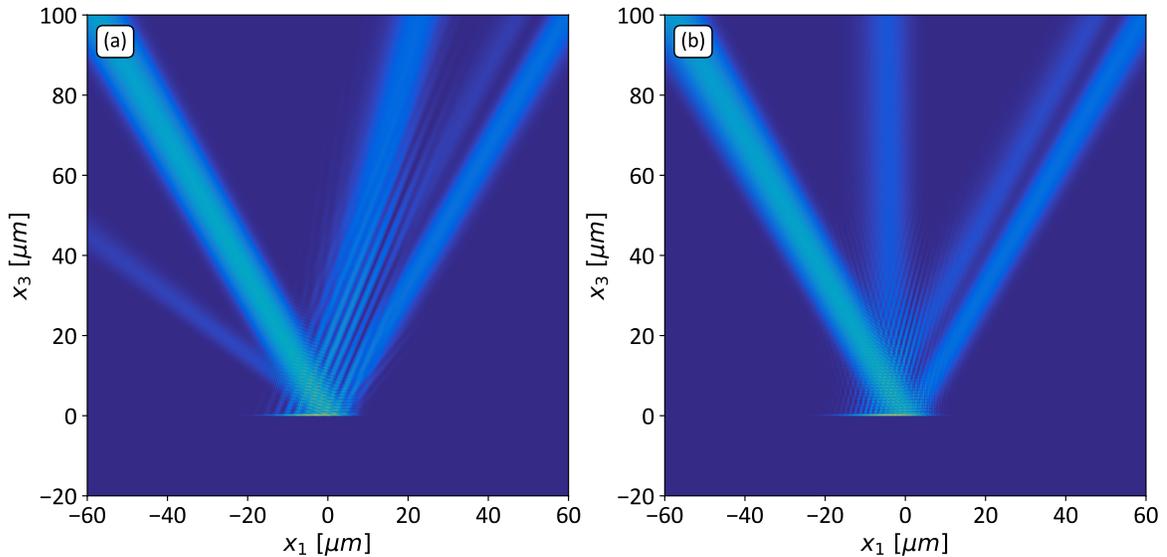
Centrando el análisis en la primera configuración y considerando un ángulo de incidencia  $\theta_0 = 30^\circ$ , en la figura (41) se muestra el CDR que se produce al difractar la luz por cada una de las componentes periódicas de manera individual, (41a) y (41b), además, de lo que se obtiene con el perfil que combina a estas dos componentes,  $\zeta(x_1)$  en (41c). En el primer recuadro se tiene la caída de intensidad del haz reflejado debido al acoplamiento del PPS incluso, comparando con la forma del haz reflejado por la otra rejilla (41b) se observa que el haz parece haberse dividido en dos lo cual corresponde al efecto visualizado en el campo cercano (38d). Por otro lado, y manteniendo en mente lo inmediatamente anterior, en el comportamiento de la superficie que combina los dos perfiles (figura (41c)) se observa que el haz incidente se ha partido en dos haces que emergen de la superficie; la especular (partida en dos haces) y uno nuevo, ubicado en  $\theta_s = 15^\circ$ . Es importante resaltar de esta figura, que el proceso de acoplamiento y desacoplamiento de PPS mediante la configuración de rejillas de difracción con doble periodo puede ser altamente eficiente, lo que resulta interesante desde el punto de vista práctico.



**Figura 41.** Corte del CDR en el ángulo de acoplamiento  $\theta_0 = 30^\circ$  para la primera configuración. a) Acoplamiento de PPS mediante la primera componente periódica. b) Interacción con la segunda componente. c) Acoplamiento del PPS y desacoplamiento del mismo ilustrado por el orden ubicado en  $\theta_s = 15^\circ$ .

Para finalizar, en la figura (42) se presentan cálculos del campo cercano para las dos configuraciones de rejillas, en condiciones de excitación de PPS. En ambas imágenes se ve claramente el haz que emerge de la superficie en una dirección diferente a la

especular y que corresponde a la calculada a través del periodo de las componentes. En la figura de la izquierda el haz emerge a  $\theta_s = 15^\circ$  y en el de la derecha en  $\theta_s = 0^\circ$ . Por otro lado, se alcanza a apreciar que estos haces no emergen centrados en el origen de coordenadas y que han sufrido un corrimiento tipo Goos-Hänchen hacia la izquierda, lo cual concuerda con la dirección de propagación del PPS antes del desacoplamiento. Además, se aprecia también el desdoblamiento aunque tenue; aparece también un haz difractado en el orden 1 de la segunda componente periódica.



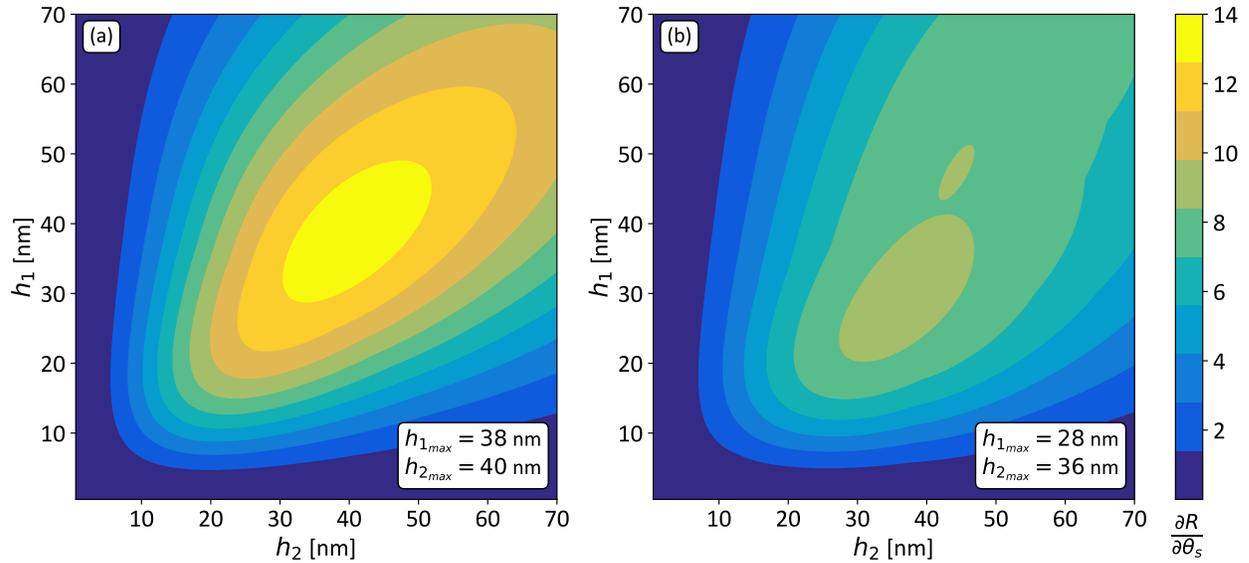
**Figura 42.** Intensidad del campo cercano del proceso de doble esparcimiento para rejilla de difracción con dos periodos. a) Primera configuración, desacoplamiento en  $\theta_s = 15^\circ$ . b) Segunda configuración, desacoplamiento en  $\theta_s = 0^\circ$ .

#### 6.4. Optimización del proceso de doble esparcimiento

Regresando a los cálculos mostrados en la figura (41c), es notorio que para la primera configuración de rejilla propuesta, la intensidad reflejada en la dirección espejular es comparable con la desacoplada en la dirección deseada (situación esperada también para la segunda configuración). En esta sección consideramos el problema de optimización de las rejillas para transferir la mayor potencia posible al haz que desacopla los PPS. Para esto, se hace necesario realizar una búsqueda paramétrica considerando las profundidades  $h_1$  y  $h_2$  de cada componente periódica, las cuales juegan un papel fundamental en la interacción PPS-superficie.

Para encontrar configuraciones óptimas, calculamos el valor del CDR en el haz de desacoplamiento para rejillas con diferentes amplitudes, haciendo un barrido para ca-

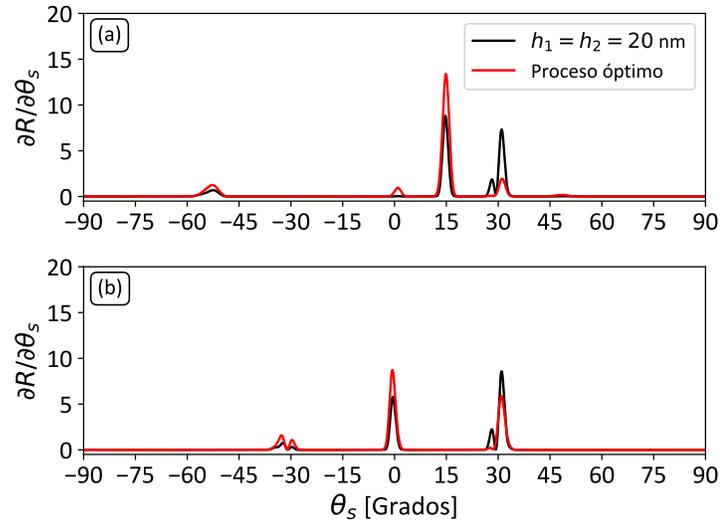
da dupla de alturas en el rango comprendido entre 0.5 nm y 70 nm. De esta manera, buscamos encontrar parejas de alturas que maximicen la potencia desacoplada mediante el proceso de doble esparcimiento para las configuraciones que desacoplan tanto a  $\theta_s = 15^\circ$  como a  $\theta_s = 0^\circ$ .



**Figura 43.** Mapa de optimización para el orden correspondiente al proceso de desacoplamiento. En los correspondientes recuadros se ilustra la pareja de altura que maximizan la potencia desacoplada. a) Primera configuración. b) Segunda configuración.

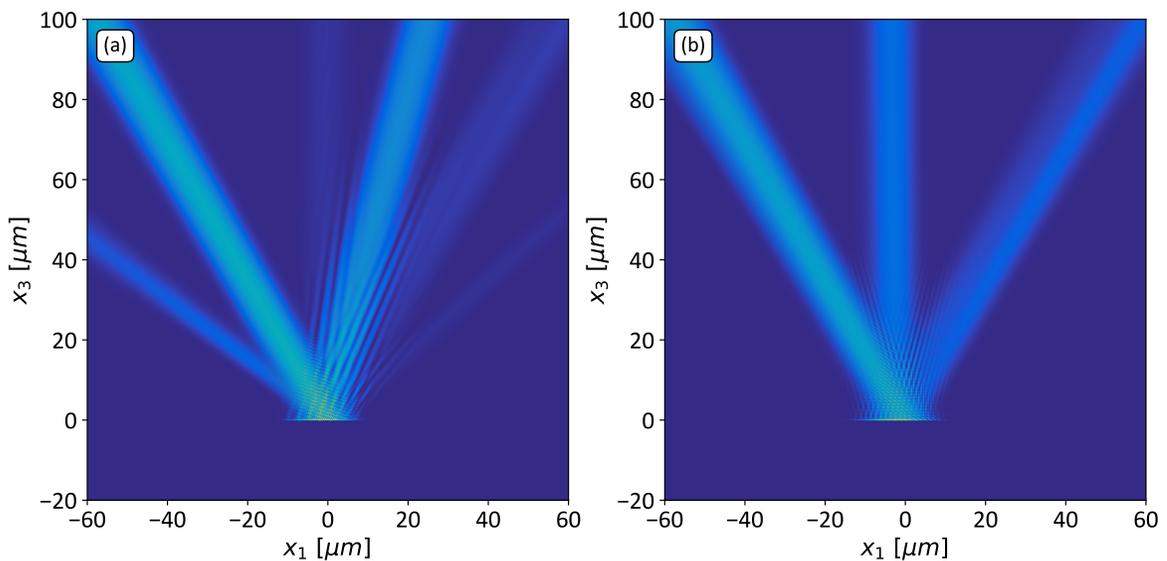
En la figura (43) se muestran mapas de calor para el valor del CDR del haz desacoplado para las dos configuraciones. En ambas imágenes la elipse más intensa representa todas las parejas de alturas que generan haces en los que la potencia desacoplada difiere en menos del %5 de la máxima posible. También, se puede observar que la segunda configuración es menos eficiente que la primera. Posiblemente esto se debe a la falta de simetría del haz desacoplado en comparación con el haz especular. Es entonces de esperarse que para diseños en los que el ángulo de desacoplamiento sea cercano a  $\theta_s = 30^\circ$ , la potencia desacoplada sea mayor. Volviendo a la posición de la elipse de mayor eficiencia, se tiene que la segunda configuración es más sensible a variaciones en la profundidad de la rejilla, la situación también se puede asociar a la simetría del problema. Finalmente, cabe agregar que en ambas configuraciones las variaciones de altura encuadradas en las elipses de máxima eficiencia rondan los 20 nm para las dos rejillas, lo cual representa una tolerancia muy amplia que facilita las implementaciones experimentales de estos dispositivos.

A manera de comparación entre los procesos descritos con anterioridad (profun-



**Figura 44.** Comparación en el proceso de acoplamiento-desacoplamiento óptimo y el presentado en los análisis previos. a) Desacoplamiento en  $\theta_s = 15^\circ$ . b) Desacoplamiento en  $\theta_s = 0^\circ$ .

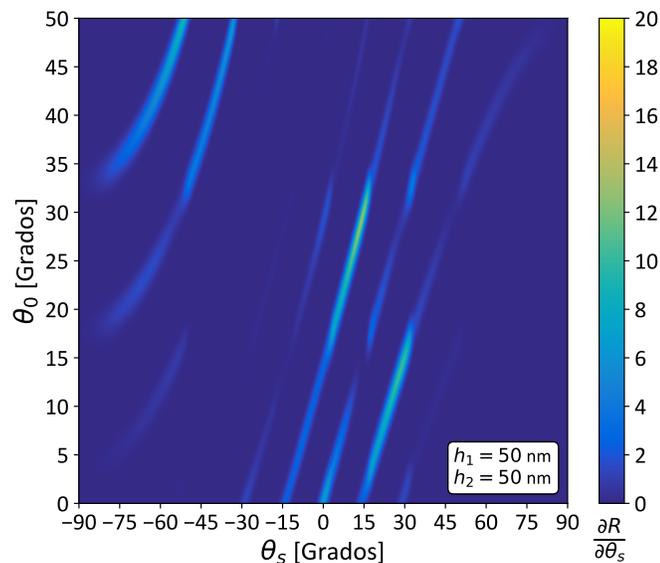
didades  $h_1 = h_2 = 20$  nm) y los óptimos, se presenta en la figura (44) los CDR de ambas configuraciones en la condición de acoplamiento. Se observa una reducción muy significativa de la potencia reflejada en la dirección especular (en comparación con la mostrada en la figura (41b)); encontramos una reducción del 87.9 % en el primer caso y del 63.5 % para la segunda configuración, con esto, se muestra que es posible lograr una alta eficiencia en el proceso de acoplamiento-desacoplamiento. Además, la división del haz en la dirección especular se hace menos notoria, lo que indica que la eficiencia de excitación es mayor.



**Figura 45.** Intensidad del campo cercano para el proceso de acoplamiento y desacoplamiento óptimo. a) Desacoplamiento en  $\theta_s = 15^\circ$ . b) Desacoplamiento en  $\theta_s = 0^\circ$ .

Para finalizar, en la figura (45) se presenta el campo cercano de la situación óptima. En comparación con la mostrada en (42), es evidente el aumento de la intensidad del haz de luz proveniente de los PPS. De igual forma, se observa el cambio en la distribución espacial del haz especular y aunque en menor medida, la separación de este haz.

En la figura (44a), también vale la pena resaltar la presencia de un orden de esparcimiento que se encuentra ubicado cerca del ángulo  $\theta_s = 0^\circ$ . Este se debe a una periodicidad causada por el batimiento de las dos componentes periódicas que conforman el perfil superficial. Es un orden de difracción que se hace evidente cuando la profundidad de la modulación aumenta. Para ilustrar la situación, en la figura (46) se muestra la evolución del CDR para una superficie que corresponde a la primera configuración, pero para un caso extremo en el que las profundidades de cada periodo son  $h_1 = h_2 = 50$  nm.

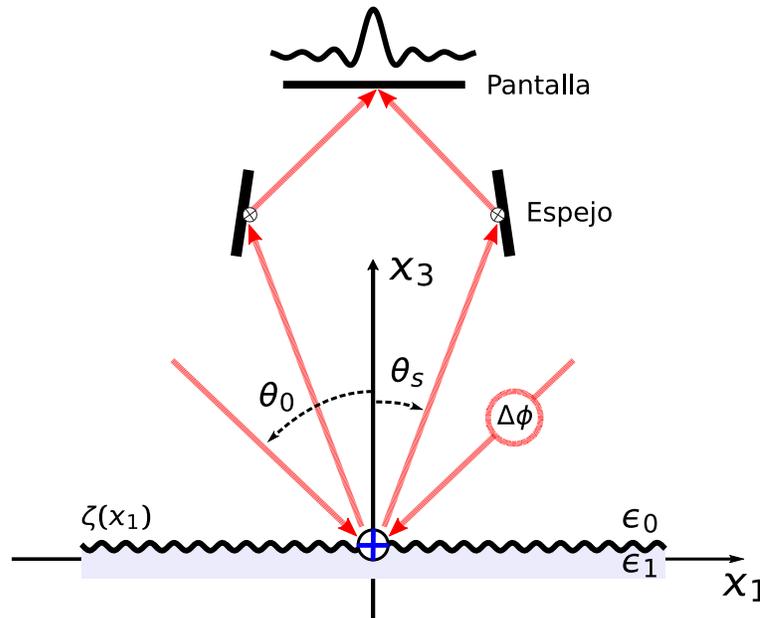


**Figura 46.** Órdenes de difracción asociados al batimiento de las dos componentes periódicas asociadas a la superficie  $\zeta(x_1)$ .

En esta figura se observa la existencia de múltiples órdenes de difracción. Además, haciendo uso de la ecuación (1), se puede mostrar que estos órdenes corresponden a una rejilla con periodo  $T = \frac{T_1 - T_2}{2}$ . Es importante resaltar este fenómeno, dado que si no se tiene suficiente cuidado con el control en las alturas de la rejilla, se pueden producir órdenes de difracción que traslapen con el haz proveniente del proceso plasmónico.

### 6.5. Interferencia de dos haces en incidencia simétrica

Después de ilustrar la posibilidad de generar un haz de luz monocromático producto de un proceso plasmónico, es importante explorar la posibilidad de que este paso por PPS altere las propiedades espaciales del haz desacoplado. Es decir, que el proceso modifique las fases de manera que se pueda alterar la habilidad de interferencia entre este tipo de campos.

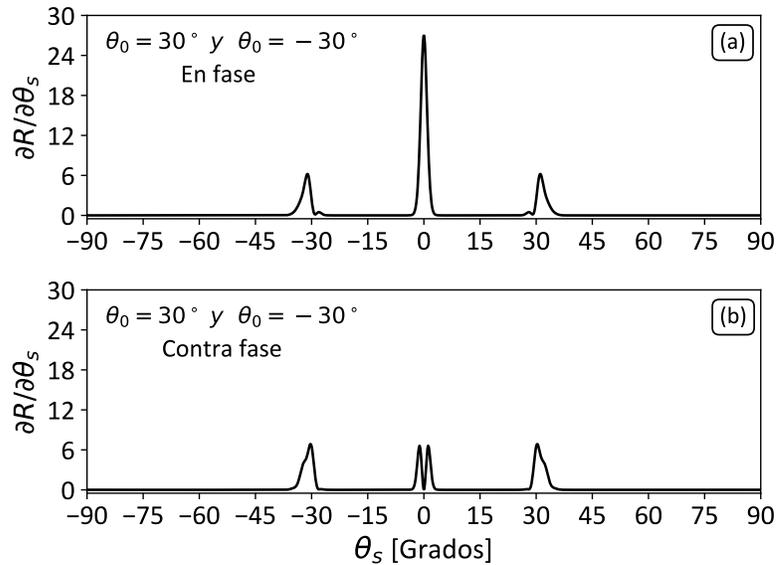


**Figura 47.** Ilustración del experimento de interferencia propuesto para dos haces desacoplados mediante el proceso de doble esparcimiento.

Para estudiar este problema, se propone un arreglo como el mostrado en la figura (47). Se consideran dos haces gaussianos coherentes que inciden sobre la superficie  $\zeta(x_1)$  en direcciones simétricas con respecto al eje  $x_3$ , de tal forma que formen ángulos  $\theta_0$  y  $-\theta_0$  con este, y que a su vez se acoplen a PPS que viajan en direcciones opuestas. Estos PPS serán desacoplados como haces propagantes que viajan en las direcciones  $\theta_s$  y  $-\theta_s$ . Luego de esto, los haces resultantes son llevados por medio de algún sistema óptico a un punto en el que se puede producir la interferencia. Vale la pena suponer que es posible introducir un desfase  $\Delta\phi$  sobre alguno de los haces, antes que este incida sobre la rejilla.

Presentamos ahora los resultados de esta propuesta en el contexto de la configuración 2, utilizando las profundidades  $h_{1max}$  y  $h_{2max}$  encontradas en el proceso de optimización. Consideramos una iluminación por dos haces gaussianos con semiancho

$g = 5 \mu\text{m}$ , y donde uno de ellos presenta un desfase  $\Delta\phi$  con respecto al otro. Luego, debido a la interacción con la superficie, se obtiene una superposición de los dos campos desacoplados en la dirección  $\theta_s = 0^\circ$ , permitiendo la interferencia entre ellos.

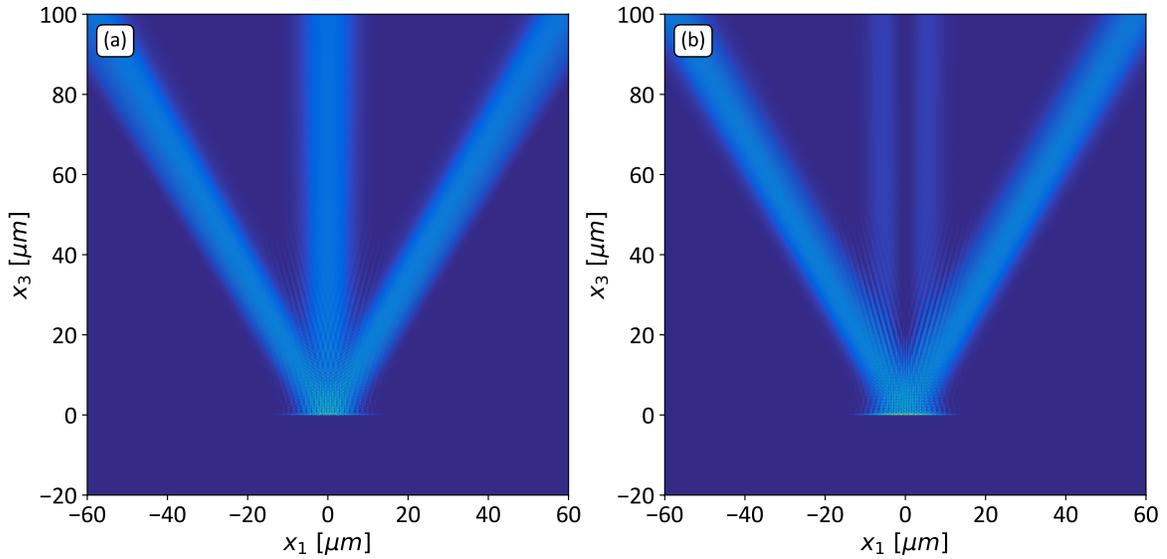


**Figura 48.** CDR para la interacción entre dos haces y la rejilla descrita en la segunda configuración. a) Haces en fase. b) Haces en contrafase.

En la figura (48) se presentan cálculos del CDR para dos casos de interés. Estos son, el desfase  $\Delta\phi = 0$  (figura (48a)) y desfase  $\Delta\phi = \pi$  (figura (48b)), ambos medidos en radianes. En el primer caso, se observa que la potencia esparcida en el ángulo de desacoplamiento corresponde a 4 veces la potencia esparcida que se obtiene en la situación óptima ilustrada en la figura (44b). Es decir que tenemos una interferencia totalmente constructiva entre los dos haces desacoplados. Por otro lado, cuando  $\Delta\phi = \pi$ , los resultados que presentamos en la figura (48b) muestran la presencia de un mínimo en la dirección de desacoplamiento, lo cual corresponde a interferencia destructiva.

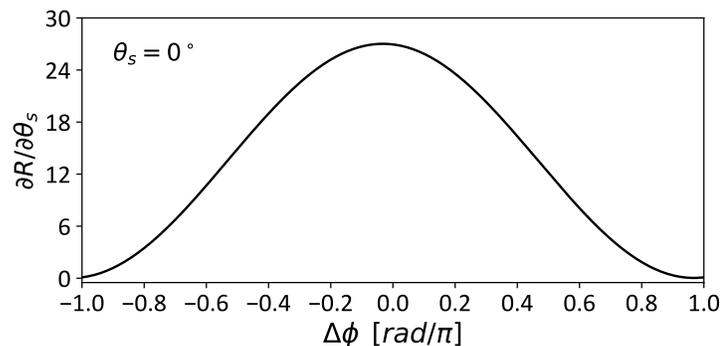
En la figura (49) se presentan resultados para el campo cercano que corresponde a estas dos situaciones. En el recuadro (49b), se puede observar que los dos órdenes que aparecen alrededor de  $\theta_s = 0^\circ$  no se encuentran totalmente traslapados espacialmente, pues han experimentado un corrimiento Goos-Hänchen en direcciones opuestas. Esto conlleva a que la interferencia destructiva se dé solamente en una zona de los haces emergentes.

Por otro lado, al realizar variaciones continuas del desfase  $\Delta\phi$  en el rango  $[-\pi, \pi]$ ,



**Figura 49.** Intensidad del campo cercano de la interferencia de dos haces que son desacoplados en la misma dirección.

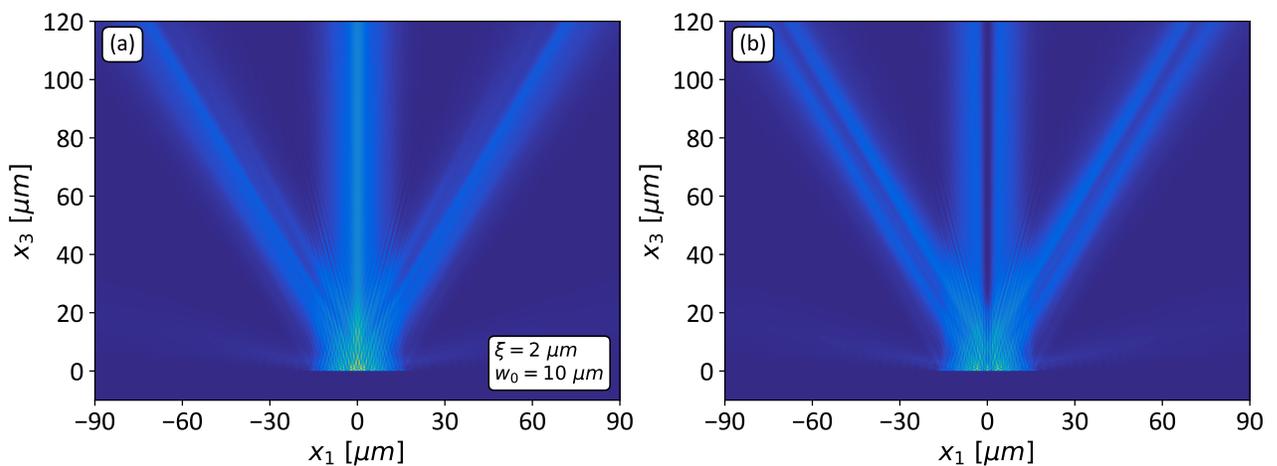
es posible obtener la dependencia de la intensidad reflejada en  $\theta_s = 0^\circ$ . De la figura (50), vemos que las variaciones de intensidad tienen un contraste máximo y sigue el comportamiento descrito por los experimentos clásicos de interferencia con haces monocromáticos. Esto sugiere que el paso por plasmón que experimentan ambos haces antes de interferir, guarda la relación de fase existente antes del acoplamiento. Siguiendo con la misma línea de pensamiento, de ser válida la afirmación anterior, es de esperarse que el proceso de doble esparcimiento descrito en este capítulo mantenga el grado de coherencia espacial que lleva el campo de iluminación.



**Figura 50.** Evolución del CDR en función del desfase introducido en el camino óptico de uno de los haces.

Para probar lo anterior, es importante recordar que el fenómeno de interferencia depende esencialmente de las propiedades de autocorrelación del campo. Se trata fundamentalmente de una superposición entre este campo y una versión corrida de

si mismo, espacial o temporalmente. Con referencia a la expresión (72), que muestra la autocorrelación de un haz con speckle, se puede inferir que la interferencia entre dos haces aleatorios de este tipo varía espacialmente y lo hace en función de la pareja de puntos que coincidan en la superposición. Es decir, si consideramos dos frentes de onda iguales que inciden sobre una pantalla, el contraste de la interferencia entre la luz que proviene de dos puntos cualesquiera aumenta si la distancia entre ellos disminuye. Siendo así, y bajo la suposición previamente mencionada, si tenemos dos haces con speckle que inciden sobre la rejilla con doble periodo, donde uno de estos es el reflejo espejo del otro, la interferencia de los haces desacoplados en  $\theta_s = 0^\circ$  debe ser máxima en puntos cercanos al centro de la envolvente gaussiana, dado que las demás pareja de puntos tienen una separación grande entre ellas respecto al frente de onda. Es decir, la relación de fase existente entre ellas tiene un cierto grado de aleatoriedad. Además, de (72) se puede ver que esta zona de máxima interferencia tiene una extensión proporcional al tamaño promedio de la mota  $\xi$ .



**Figura 51.** Intensidad del campo esparcido por la rejilla descrita en la configuración 2 debido a la incidencia de dos haces con speckle con semiancho de envolvente  $w_0 = 10 \mu\text{m}$  y tamaño de mota  $\xi = 2 \mu\text{m}$ . a) Interferencia constructiva. b) Interferencia destructiva.

En la figura (51) se muestran resultados de la intensidad de campo esparcido en condiciones de acoplamiento de los dos haces con speckle, como los descrito anteriormente. La imagen corresponde al promedio sobre muchas realizaciones ( $\sim 500$ ) de patrones de speckle con semiancho de envolvente  $w_0 = 10 \mu\text{m}$  y tamaño de mota  $\xi = 2 \mu\text{m}$ . En los recuadros (51a) y (51b) se puede ver la interferencia constructiva y destructiva, respectivamente de los haces desacoplados, en ambos casos se observa que este efecto se da solo en una pequeña zona alrededor de la normal a la superficie

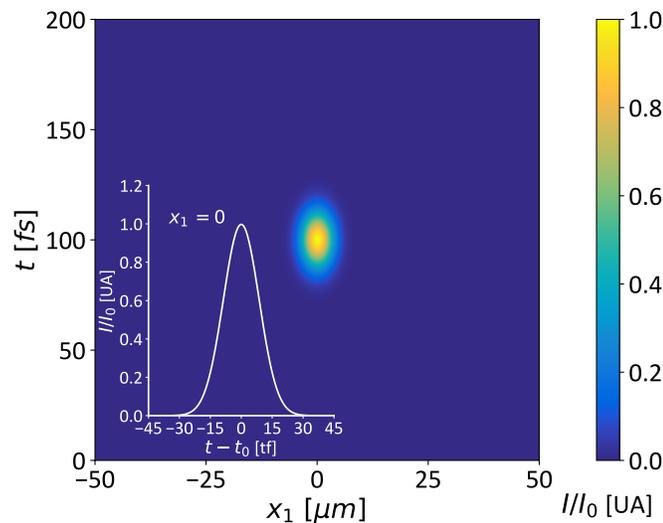
y que tiene una extensión igual a la predicha por la propuesta basada en la expresión (72).

Con base a estos resultados, podemos decir que el paso de un haz de luz que es parcialmente coherente espacialmente por PPS mantiene el grado de coherencia espacial al desacoplarse.

## 6.6. Iluminación por pulsos cortos

Después de describir la interacción de campos monocromáticos con la superficie de interés y de establecer los efectos del proceso de doble esparcimiento sobre estos, es importante estudiar las implicaciones que conlleva el acoplamiento de PPS sobre las propiedades temporales de los campos ópticos.

Con este propósito, se considerará que la rejilla de doble periodo es iluminada por un pulso de luz con distribución espectral gaussiana como los descritos en la sección (3.3). Además, en aras de posibles implementaciones experimentales, es conveniente asumir un pulso similar a los producidos por un láser pulsado de titanio-zafiro. Siendo así, se propone trabajar sobre pulsos con longitud de onda central  $\lambda_0 = 810$  nm y con un semiancho espectral típico de  $\Delta\lambda = 40$  nm.



**Figura 52.** Dependencia temporal de un pulso de luz con longitud de onda central  $\lambda_0 = 810$  y semiancho espectral  $\Delta\lambda = 40$ . En el recuadro se ilustra un corte de la intensidad centrada a lo largo de  $x_1 = 0$ .

La figura (52) representa el perfil temporal del pulso descrito previamente, el cual

tiene una duración temporal de 25.59 fs, según la ecuación (54). Esto se puede comprobar en el recuadro de la figura mencionada. Al igual que en capítulo anterior, el tamaño del haz es de  $g = 5 \mu\text{m}$ .

En cuanto a las rejillas, es necesario adaptar los periodos de las componentes armónicas para la longitud de onda central que estamos considerando ahora. Partiendo de las ecuaciones (140) y (141) se tiene que los nuevos periodos están dados por:

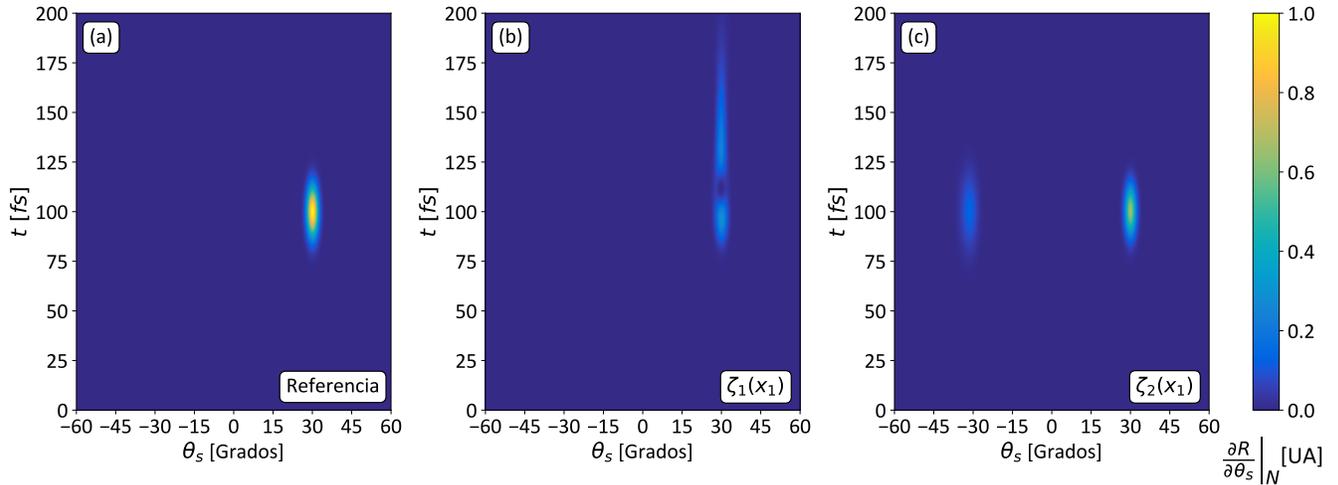
- Acoplamiento  $\theta_0 = 30^\circ$ , Desacoplamiento  $\theta_s = 15^\circ \rightarrow T_1 = 532.7 \text{ nm}$  y  $T_2 = 633.1 \text{ nm}$ .
- Acoplamiento  $\theta_0 = 30^\circ$ , Desacoplamiento  $\theta_s = 0^\circ \rightarrow T_1 = 532.7 \text{ nm}$  y  $T_2 = 793.6 \text{ nm}$ .

Por otro lado, realizando un proceso de optimización como el expuesto en la sección (6.4), se tiene que las profundidades óptimas  $h_1$  y  $h_2$  son 39 nm y 42 nm, respectivamente, para la primera configuración. Para la segunda, estas son 28 nm y 43 nm. Por otro lado, es importante señalar que la función dieléctrica  $\epsilon_1(\omega)$  del oro es igualmente modelada mediante el modelo de Drude en todo el rango espectral del pulso propuesto.

### 6.6.1. Rejilla de difracción simple

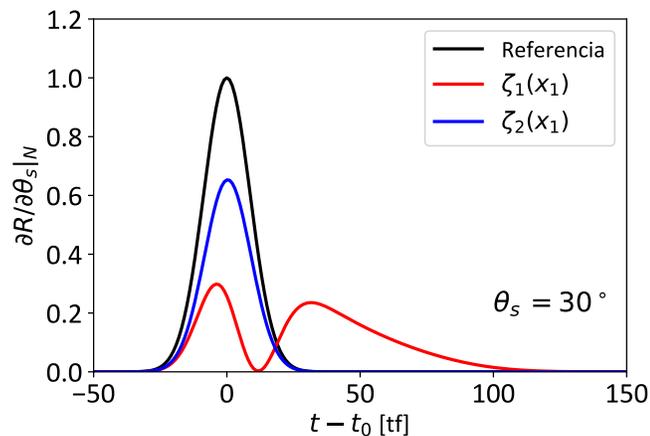
Antes de considerar la interacción con las rejillas dobles, es importante ilustrar el comportamiento del pulso al ser reflejado y difractado por rejillas simples. Para esto, se propone realizar un análisis basado en la evolución del CDR normalizado en función del tiempo. Esto provee una medida de la distribución de intensidad esparcida por la superficie a medida que interactúa con el pulso de luz. En la figura (53) se muestra el CDR normalizado para tres sistemas de interés. En (53a) se ve la potencia esparcida por un espejo perfecto cuando un pulso de luz lo ilumina en una dirección igual a la condición de acoplamiento,  $\theta_0 = 30^\circ$ , mientras que en (53b) y (53c) representan el esparcimiento por la componente acopladora y desacopladora, respectivamente, también ante una incidencia a  $30^\circ$ .

De la imagen se logra observar que en (53a) todo el pulso se refleja en  $\theta_s = 30^\circ$



**Figura 53.** CDR normalizado para la interacción con un pulso de luz incidente a  $\theta_s = 0^\circ$ . a) Espejo perfecto. b) Rejilla simple definida por la componente acopladora. c) Rejilla simple definida por la componente desacopladora.

como es de esperarse, además, no sufre ninguna modificación temporal con respecto al pulso incidente, como se puede verificar en la figura (54) donde la línea negra corresponde a un corte de CDR justo en el ángulo de desacoplamiento. El resultado de la interacción con una superficie con modulación de alturas, pero que no favorece el acoplamiento es mostrada (53c). De igual forma que en el caso anterior, el pulso esparcido en la dirección especular no es modificado, salvo por su intensidad la cual es repartida entre el orden de difracción 1.



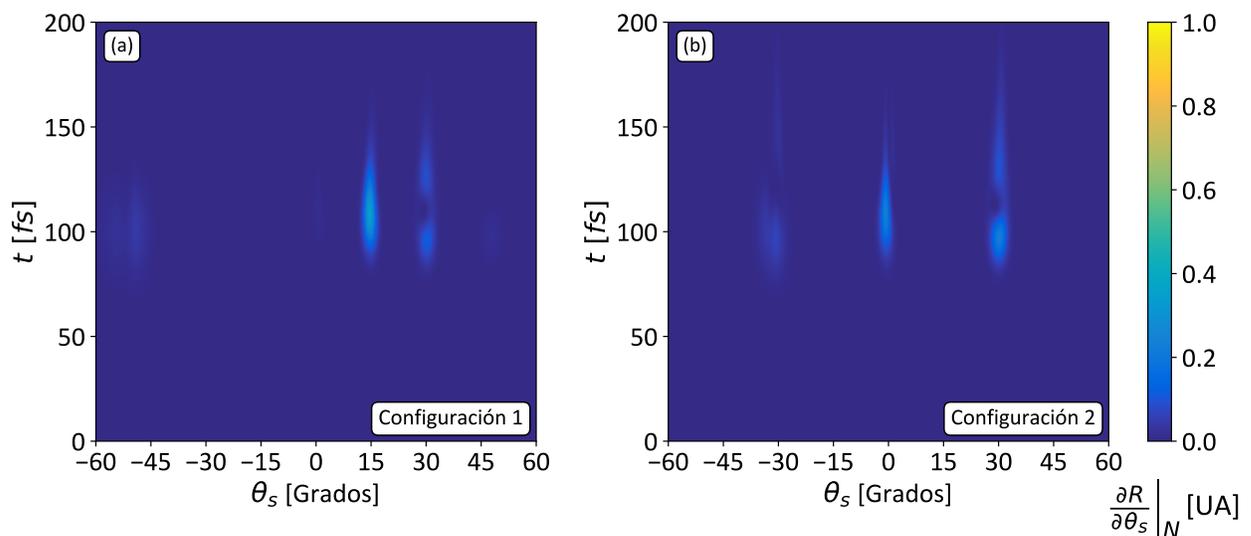
**Figura 54.** Corte a lo largo de  $\theta_s = 30^\circ$  para los CDR ilustrados en la figura (53).

Por otro lado, en el recuadro (53b) se ve que el pulso reflejado es sustancialmente modificado por el proceso de acoplamiento a PPS y, debido a esto, su extensión temporal ha aumentado con respecto a la referencia. El perfil temporal del pulso se

muestra con la línea roja de la figura (54). De aquí, se puede estimar que su duración es de 74.29 fs, lo que en un principio sugiere una reducción del ancho de banda en un 69%. Es decir, que su semiancho espectral se reduce a  $\Delta\lambda = 12.4$  nm. También cabe destacar la existencia de un mínimo, el cual puede ser efecto de una interferencia destructiva debido a dos pulsos superpuestos, uno correspondiente al verdadero pulso especular y otro, resultado del desacoplamiento del PPS. Lo anterior sugiere un comportamiento similar al ilustrado anteriormente en la figura (38) para el caso de haces gaussianos.

### 6.6.2. Rejilla de difracción con doble periodo asociado

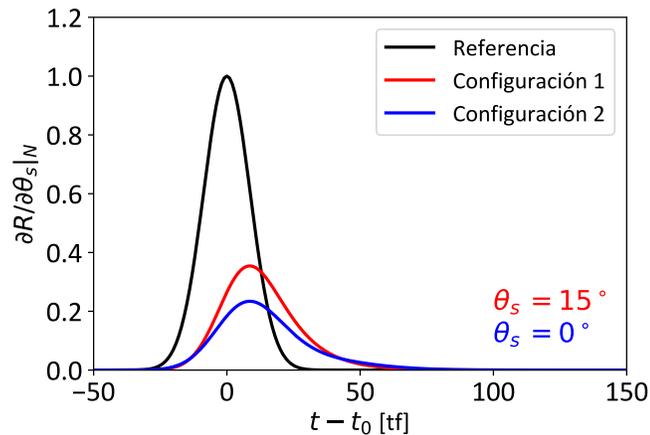
Para finalizar, en la figura (55) se muestra la evolución de la potencia esparcida por las superficies diseñadas en las configuraciones de interés cuando son iluminadas por el pulso de luz en condición de acoplamiento.



**Figura 55.** CDR normalizado para la interacción de la rejilla de doble periodo con un pulso de luz incidente en condición de acoplamiento. Se muestra los resultados para cada una de las configuraciones propuestas.

En las dos situaciones presentadas en la figura, se nota que en comparación con la referencia mostrada en (53a), el pulso reflejado es dividido en dos pulsos, uno que se refleja especularmente, y otro que es producto del proceso de acoplamiento y desacoplamiento del PPS. Centrando el análisis primero en este último orden de esparcimiento, se parte de la figura (56) donde se ilustran los cortes de los CDR correspondientes a los ángulos de desacoplamiento  $\theta_s = 15^\circ$  y  $\theta_s = 0^\circ$  de las configuraciones ilustradas en

(55a) y (55b), respectivamente. De los perfiles mostrados (líneas azul y roja) se puede apreciar dos diferencias en relación con la referencia mostrada por la línea negra. Primero, se evidencia que los dos pulsos desacoplados tienen una extensión temporal más larga y, segundo, que a pesar de que son desacoplados en diferentes direcciones poseen la misma duración, la cual es estimada en 35.4 fs. Lo anterior, implica una reducción del ancho de banda del 35.2 % y además, sugiere que la condición de acoplamiento para rejillas establecida en la ecuación (140) actúa como un filtro espectral pasa banda centrado en  $\lambda_0$ .



**Figura 56.** Cortes a lo largo de las direcciones de desacoplamiento para los CDR ilustrados en la figura (55).

Por otro lado, es apreciable un desplazamiento temporal estimado de 9 fs correspondiente al tiempo que pasa el campo óptico siendo PPS. Cabe resaltar que el tiempo es igual en las dos configuraciones. Además, este puede ser utilizado para medir la distancia recorrida por el PPS antes de difractarse, así como para establecer medidas de dispersión y posibles corrimientos espectrales.

Para finalizar, el pulso reflejado en la dirección especular también sufre una modificación temporal al igual que en el caso expuesto en la figura (53b). Además, mantiene el mínimo de intensidad reportado en el caso de la rejilla simple, por lo cual se puede hacer nuevamente la suposición de que es producto de la interferencia producida por el haz especular (posiblemente modificado por el acoplamiento) y un pulso desplazado temporalmente que resulta del desacoplamiento parcial del PPS.

## Capítulo 7. Conclusiones

---

En este último capítulo se hace un recuento de los principales resultados obtenidos en la tesis poniendo énfasis sobre los más relevantes o que vale la pena resaltar. Se presentan también las conclusiones del trabajo y algunas apreciaciones finales.

En la primera parte se presentó un desarrollo formal que permite la descripción de los campos ópticos de interés en la tesis, tales los como los haces gaussianos, los campos aleatorios y los pulsos de luz. El formalismo, que es riguroso y bastante general, está basado en el formalismo del espectro angular. Aunque algunas de estas representaciones son conocidas e incluso son usuales en la literatura, vale la pena resaltar la novedad del método utilizado para la generación de haces parcialmente coherentes, que son equivalentes al modelo de fuentes Gauss-Shell.

Con base en estos formalismos, se presentó un estudio del corrimiento Goos-Hänchen para haces de luz con propiedades espaciales bastantes generales, permitiendo así formular un principio de equivalencia entre el corrimiento de patrones de speckle y un haz gaussiano determinista. Además, partiendo de lo anterior, se logró demostrar que el corrimiento lateral es un efecto que depende del grado de coherencia del campo óptico. De acuerdo a esto, el corrimiento que sufre un haz parcialmente coherente, como un haz con speckle, estará determinado por el tamaño de su área de coherencia (o mota) y no por el tamaño de la envolvente que lo define.

En cuanto al principal tema de interés, representado por los cambios en las propiedades de coherencia de haces acoplados a PPS, se mostró la viabilidad de la implementación de un sistema de doble esparcimiento conformado por una superficie de oro con dos componentes periódicas. De esta manera es posible generar campos de luz que hayan pasado en su trayectoria por estados plasmónicos y que, además, sean susceptibles de ser implementados experimentalmente. Los cálculos presentados muestran que con una elección adecuada de las modulaciones de la rejilla es posible acoplar a PPS alrededor del 88 % de la potencia incidente.

Haciendo uso del acoplamiento de dos haces de manera simultánea y simétrica, se mostró que es posible observar efectos de interferencia entre los campos desacoplados. Esto quiere decir que el proceso de doble esparcimiento mantiene la relación de fase existente entre los haces originales y el resultado se puede extender a haces

con otro tipo de coherencia espacial. Finalmente, en cuanto a las propiedades temporales, encontramos que la superficie metálica se comporta como un filtro espectral pasa banda. Esto no es del todo sorprendente, pues las condiciones de acoplamiento dependen fuertemente del ángulo de incidencia y la frecuencia. En consecuencia, para iluminación por un pulso de luz, el desacoplamiento de PPS produce un pulso temporalmente más largo que el incidente, lo que se traduce en una reducción de su ancho de banda y, en consecuencia, un aumento del tiempo de coherencia. Vale la pena hacer la acotación de que esto último sólo es cierto para pulsos con un ancho de banda suficientemente grande para verse afectado por las características de selectividad del acoplamiento.

Con el tipo de análisis y resultados presentados, hemos logrado observar algunos procesos de esparcimiento de alto orden que no es posible visualizar con estudios basados solamente en el coeficiente diferencial de reflexión. La dificultad de diferenciar estos procesos en el campo lejano estriba en que el desacoplamiento del PPS y la reflexión especular ocurren esencialmente en la misma dirección. Nuestros resultados muestran que los campos que han sufrido el doble proceso de acoplamiento-desacoplamiento pueden estar desplazados espacial y temporalmente del haz especular. En referencia a esto, se considera interesante como trabajo a futuro plantear un método perturbativo para solucionar el problema de esparcimiento por el tipo de superficies estudiadas, para con este identificar los procesos de esparcimiento involucrados en la interacción.

## Literatura citada

- Aiello, A. y Woerdman, J. P. (2011). Role of spatial coherence in goos-hänchen and imbert-fedorov shifts. *Opt. Lett.*, **36**(16): 3151–3153.
- Artmann, K. (1948). Berechnung der seitenversetzung des totalreflektierten strahles. *Annalen der Physik*, **437**(1-2): 87–102.
- Bliokh, K. Y., Shadrivov, I. V., y Kivshar, Y. S. (2009). Goos-hänchen and imbert-fedorov shifts of polarized vortex beams. *Opt. Lett.*, **34**(3): 389–391.
- Born, M. y Wolf, E. (1999). *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge University Press.
- Boyd, R. (2003). *Nonlinear Optics*. Elsevier Science.
- Chang, D. E., Sørensen, A. S., Hemmer, P. R., y Lukin, M. D. (2006). Quantum optics with surface plasmones. *Phys. Rev. Lett.*, p. 053002.
- Dainty, J. (2013). *Laser Speckle and Related Phenomena*. Topics in Applied Physics. Springer Berlin Heidelberg.
- Di Martino, G., Sonnefraud, Y., Kéna-Cohen, S., Tame, M., Özdemir, S. K., Kim, M. S., y Maier, S. A. (2012). Quantum statistics of surface plasmon polaritons in metallic stripe waveguides. *Nano Lett.*, pp. 2504–2508.
- Emile, O., Galstyan, T., Le Floch, A., y Bretenaker, F. (1995). Measurement of the non-linear goos-hänchen effect for gaussian optical beams. *Phys. Rev. Lett.*, **75**: 1511–1513.
- Fakonas, J. S., Lee, H., Kelaita, Y. A., y Atwater, H. A. (2014). Two-plasmon quantum interference. *Nat. Photon*, p. 317.
- Fakonas, J. S., Mitskovets, A., y Atwater, H. A. (2015). Path entanglement of surface plasmones. *New J. Phys.*, p. 023002.
- Friberg, A. y Sudol, R. (1982). Propagation parameters of gaussian schell-model beams. *Optics communications*, **41**(6): 383–387.
- Goodman, J. (2005). *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill physical and quantum electronics series. W. H. Freeman.
- Goodman, J. W. (2007). *Speckle Phenomena in Optics*. Roberts and Company Publishers.
- Goodman, J. W. (2015). *Statistical Optics*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. Wiley.
- Goos, F. y Hänchen, H. (1947). Ein neuer und fundamentaler versuch zur totalreflexion. *Annalen der Physik*, **436**(7-8): 333–346.
- Goos, F. y Lindberg-Hänchen, H. (1949). Neumessung des strahlversetzungseffektes bei totalreflexion. *Annalen der Physik*, **440**(3-5): 251–252.
- Hashimoto, T. y Yoshino, T. (1989). Optical heterodyne sensor using the goos-hänchen shift. *Opt. Lett.*, **14**(17): 913–915.
- Heber, J. (2009). Plasmonics: Surfing the wave. *Nature*, **461**: 720–722.

- Horowitz, B. R. y Tamir, T. (1971). Lateral displacement of a light beam at a dielectric interface. *J. Opt. Soc. Am.*, **61**(5): 586–594.
- Hutley, M. C. y Maystre, D. (1976). The total absorption of light by a diffraction grating. *Opt. Commun.*, **19**: 431–436.
- Jackson, J. (2007). *Classical electrodynamics*. Wiley India Pvt. Limited.
- Lai, H. M., Cheng, F. C., y Tang, W. K. (1986). Goos-hänchen effect around and off the critical angle. *J. Opt. Soc. Am. A*, **3**(4): 550–557.
- Maier, S. A. (2007). *Plasmonics: Fundamentals and Applications*. Springer.
- Mandel, L. y Wolf, E. (1995). *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press.
- Maradudin, A., Michel, T., McGurn, A., y Méndez, E. (1990). Enhanced backscattering of light from a random grating. *Annals of Physics*, **203**(2): 255 – 307.
- Maradudin, A. A., McGurn, A. R., y Méndez, E. R. (1995). Surface plasmon polariton mechanism for enhanced backscattering of light from one-dimensional randomly rough metal surfaces. *J. Opt. Soc. Am. A*, **12**(11): 2500–2506.
- McGuirk, M. y Carniglia, C. K. (1977). An angular spectrum representation approach to the goos-hänchen shift. *J. Opt. Soc. Am.*, **67**(1): 103–107.
- McGurn, A. R. y Maradudin, A. A. (1987). Localization effects in the elastic scattering of light from a randomly rough surface. *J. Opt. Soc. Am. B*, **4**(6): 910–926.
- Mendoza-Suárez, A. y Méndez, E. R. (1997). Light scattering by a reentrant fractal surface. *Appl. Opt.*, **36**(15): 3521–3531.
- Merano, M., Umbriaco, G., y Mistura, G. (2013). Observation of non-specular effects for gaussian-schell model light beams. En: *CLEO: 2013*. Optical Society of America, p. JTu4A.56.
- Pillon, F., Gilles, H., Girard, S., Laroche, M., Kaiser, R., y Gazibegovic, A. (2005). Goos-hänchen and imbert-fedorov shifts for leaky guided modes. *J. Opt. Soc. Am. B*, **22**(6): 1290–1299.
- Pitarke, J. M., Silkin, V. M., Chulkov, E. V., y Echenique, P. M. (2006). Theory of surface plasmons and surface-plasmon polaritons. *Reports on Progress in Physics*, **70**(1): 1–87.
- Raether, H. (1988). *Surface plasmons on smooth and rough surfaces and on gratings*. Springer.
- Renard, R. H. (1964). Total reflection: A new evaluation of the goos-hänchen shift. *J. Opt. Soc. Am.*, **54**(10): 1190–1197.
- Saleh, B. y Teich, M. (2007). *Fundamentals of Photonics*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. Wiley.
- Simon, R. y Tamir, T. (1989). Nonspecular phenomena in partly coherent beams reflected by multilayered structures. *J. Opt. Soc. Am. A*, **6**(1): 18–22.

- Valencia, C. I., Méndez, E. R., y Mendoza, B. S. (2003). Second-harmonic generation in the scattering of light by two-dimensional particles. *J. Opt. Soc. Am. B*, **20**(10): 2150–2161.
- Wang, L.-Q., Wang, L.-G., Zhu, S.-Y., y Zubairy, M. S. (2008). The influence of spatial coherence on the goos-hänchen shift at total internal reflection. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, **41**(5): 055401.
- West, C. y O'Donnell, K. (1996). Backscattering enhancement from plasmon polaritons on a deterministic metal surface. *Opt. Commun.*, **123**: 109–114.
- Wolf, E. (2007). *Introduction to the theory of coherence and polarization of light*. Cambridge University Press.
- Wood, R. W. (1935). Anomalous diffraction gratings. *Phys. Rev.*, **48**: 928–936.
- Xiao, X. y Voelz, D. (2006). Wave optics simulation approach for partial spatially coherent beams. *Optics express*, **14**(16): 6989–6992.
- Zernike, F. (1938). The concept of degree of coherence and its applications to optical problems. *Physica*, pp. 785–795.
- Ziauddin, Chuang, Y.-L., y Lee, R.-K. (2015). Negative and positive goos-hänchen shifts of partially coherent light fields. *Phys. Rev. A*, **91**: 013803.