

TESIS DEFENDIDA POR

Eddie Helbert Clemente Torres

Y aprobada por el siguiente comité:

Dr. Gustavo Olague Caballero

Director del Comité

M.C. José Luis Briseño Cervantes

Miembro del Comité

Dr. J. Apolinar Reynoso Hernández

Miembro del Comité

Dr. Raúl Rangel Rojo

Miembro del Comité

Dr. Pedro Gilberto López Mariscal

*Coordinador del Programa de Posgrado
en Ciencias de la Computación*

Dr. Raúl Ramón Castro Escamilla

*Director de Estudios
de Posgrado*

27 de Septiembre de 2006

CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN
SUPERIOR DE ENSENADA



POSGRADO EN CIENCIAS
EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

**Detector paramétrico a nivel sub-píxel de esquinas múltiples y
blancos retro-reflejantes**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

Eddie Helbert Clemente Torres

Ensenada, Baja California, México. Septiembre del 2006.

RESUMEN de la tesis de **Eddie Helbert Clemente Torres**, presentada como requisito parcial para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS en CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN. Ensenada, Baja California. Septiembre del 2006.

Detector paramétrico a nivel sub-pixel de esquinas múltiples y blancos retro-reflejantes

Resumen aprobado por:

Dr. Gustavo Olague Caballero

Director de Tesis

La detección de esquinas y blancos retro-reflejantes es un problema común en áreas de Visión Artificial y Fotogrametría, ya que estos puntos determinan información necesaria e imprescindible para solución de problemas tan complejos como: análisis de formas y escenas, reconocimiento de objetos, detección de movimiento, algoritmos de correspondencia entre dos o más imágenes, reconstrucción tridimensional y calibración de cámaras entre otros. Mientras más certera y precisa es la ubicación de esquinas y blancos retro-reflejantes, la calidad de los procesos de más alto nivel son mejorados notablemente.

Este trabajo propone un detector preciso de esquinas múltiples y un detector paramétrico de blancos retro-reflejantes a nivel sub-pixel. Ambos detectores modelan la región donde se encuentra ubicado el punto de estudio y sus características geométricas y físicas a partir de una expresión analítica. Dicha expresión se ajusta a la imagen desde el punto de vista de un problema de optimización, el cual es resuelto con un algoritmo genético.

Palabras clave: Detector de esquinas, sub-pixel, modelado paramétrico.

ABSTRACT of the thesis presented by **Eddie Helbert Clemente Torres**, as a partial requirement to obtain the MASTER IN SCIENCE degree in COMPUTER SCIENCES. Ensenada, Baja California. august 2006.

Parametric sub-pixel multi-corner detector and targets

Abstract approved by:

Dr. Gustavo Olague Caballero

Thesis director

The corner and retro-reflective targets detection are common problems in artificial vision and photogrammetry, both of them aimed detection within subpixel resolution. They have been used to solve complex problems such as: forms and scenes analysis, reconstruction and recognition, tracking, algorithms for correspondence between two or more images, three-dimensional reconstruction and computing camera calibration, among others. The great deal of effort has been spent in the location of the corners and retro-reflective targets because its precision affects directly on the quality of high level processes.

This work introduces a high-accurate parametric multiple corner detector and a new parametric retro-reflective target detector. The basic idea is to propose a parametric model and then fit the model directly to image intensities. The optimization problem is solved by a genetic algorithm.

Keywords: Corner detector, sub-pixel, parametric model.

A mis padres
y
mi hermano Alexander

Agradecimientos

Agradezco a mis padres y mi hermano Alexander por su apoyo incondicional sin el cual no hubiera podido lograr este sueño.

Al Dr. Gustavo Olague, por haberme aceptado en el seno de su grupo de investigación. Por las lecturas y correcciones al documento de tesis que sin duda mejoraron el manuscrito. Por las numerosas discusiones humano científicas que me han hecho crecer como persona. Por último quisiera agradecerle por haberme brindado su amistad.

A mis sinodales por sus aportaciones y observaciones a este trabajo.

A Araceli que fue una luz y una compañera en este camino, que sin su cariño y ánimo hubiera sido interminable.

A mis amigos y compañeros de *Evovisión*, de los cuales siempre tuve su apoyo y amistad.

A mis amigos de CICESE por hacer esta estancia más agradable, así como a mis amigos que siempre me apoyaron y me dieron ánimos en tiempos difíciles.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por darme las facilidades para estudiar en esta institución.

Ensenada, México
27 de Septiembre del 2006.

Eddie Helbert Clemente Torres

Tabla de Contenido

Capítulo	Página
Resumen	iii
Abstract	iv
Lista de Figuras	ix
Lista de Tablas	xv
I Introducción	1
I.1 Motivación	1
I.1.1 Detección de esquinas y blancos como un problema en Fotogrametría	1
I.1.2 Detección de esquinas y blancos como un problema en Visión Artificial	2
I.2 Planteamiento del problema	3
I.3 Objetivos de la investigación	6
I.3.1 Objetivos generales	7
I.3.2 Objetivos particulares	7
I.4 Propuesta	7
I.5 Organización de la tesis	10
II Antecedentes y conceptos básicos	12
II.1 Conceptos básicos	13
II.1.1 Concepto de imagen	13
II.1.2 Modelo de la cámara	14
II.1.3 Cálculo de la derivada en una imagen	17
II.1.4 Función de autocorrelación en una imagen	20
II.1.5 Concepto de esquina	22
II.1.6 Morfología de una esquina	23
II.1.7 Geometría de una esquina	24
II.1.8 Propiedades físicas de una esquina	26
II.2 Métodos de detección de esquinas	30
II.2.1 Métodos basados en contornos	31
II.2.2 Métodos basados en intensidad de la imagen	32
II.2.3 Métodos basados en modelos paramétricos	49
II.3 Conclusiones	58
III Modelado de esquinas y blancos retro-reflejantes	60
III.1 Preliminares	61
III.2 Modelo analítico de un borde	62
III.3 Modelo de esquina L	67
III.4 Modelo de vértice o esquinas múltiples	70
III.4.1 Criterio de ubicación del punto de esquina	72

Tabla de Contenido (Continuación)

Capítulo	Página
III.5 Modelado de un blanco retro-reflejante	76
III.5.1 Tipos de blancos	77
III.5.2 Técnicas de reconocimiento y localización de blancos	79
III.5.3 Distorsiones comunes en un blanco circular retro-reflejante	85
III.6 Modelo analítico de un blanco retro-reflejante circular	87
III.7 Conclusión	93
IV Modelado de datos y optimización multidimensional	95
IV.1 Conceptos básicos	96
IV.1.1 Método de Newton-Raphson	97
IV.1.2 Método de descenso de gradiente	99
IV.2 Criterio de optimización	99
IV.2.1 Descripción del método de mínimos cuadrados	99
IV.2.2 Estimador χ^2 y el modelo de esquina	101
IV.2.3 Mínimos cuadrados para modelos no lineales	104
IV.3 Métodos de optimización	108
IV.3.1 Estrategia de Nelder y Mead	108
IV.3.2 Estrategias evolutivas	113
IV.3.3 Consideraciones básicas de la estrategia evolutiva para el modelo de Esquina	129
IV.4 Conclusiones	136
V Resultados experimentales	137
V.1 Arquitectura del sistema	138
V.1.1 Interacción con el usuario	140
V.1.2 Inicialización de parámetros	141
V.1.3 Implementación de las rutinas de optimización	144
V.1.4 Estrategia de Nelder y Mead para el punto de esquina	149
V.1.5 Despliegue de resultados	153
V.2 Resultados experimentales del detector paramétrico de esquinas múltiples	153
V.2.1 Esquina tipo L	155
V.2.2 Esquina tipo Y	192
V.2.3 Esquina tipo T y esquina tipo X	228
V.3 Resultados Experimentales del detector paramétrico de blancos retro- reflejantes	249
V.4 Conclusiones	253
VI Conclusiones y trabajo futuro	254
Bibliografía	257

Lista de Figuras

Figura		Página
1	Bordes en una imagen Digital	4
2	Difuminado producto de los CCD's	5
3	Modelo de un lente delgado	15
4	Modelo de una cámara oscura o estenopeica	17
5	Tipos de Esquinas	24
6	Geometría de una Esquina	25
7	Ubicación del punto de esquina	27
8	Difuminado Producto de una Celda Fotosensible	30
9	Intensidades en una Esquina	31
10	Detector de Beaudet	34
11	Detector de Dreschler y Nagel	36
12	Detector de Kitchen y Rosenfeld	38
13	Detector de Wang y Brady	39
14	Detector de Harris	43
15	Detector de Forstner	44
16	Detector IPGP1	48
17	Detector IPGP2	49
18	Esquina ideal U_{Rohr}	52
19	Modelo general de esquina-L M_{Rohr}	54
20	Esquina Tipo T generada a partir de 3 FUB.	57
21	Función Error	62
22	Gráfica de la función de $F(x) = \frac{erf(x)}{2} + \frac{1}{2}$	63
23	Función Unitaria de Borde	64
24	Características de la FUB	65
25	Orientación de la FUB	66
26	Cálculo del ángulo de apertura de ML	68
27	Esquina tipo L	69
28	Construcción de una esquina tipo T a partir de dos esquinas tipo L	72
29	Criterio de ubicación exacta del punto de esquina $P_e(x_e, y_e)$	73
30	Ubicación del punto de esquina	74
31	Ubicación del punto de esquina en una esquina múltiple	75
32	Blancos retro-reflejantes	78
33	Transformada Hough	81
34	Acumulador de Hough	82
35	Funciones comúnmente utilizadas para el ajuste de un blanco circular retro-reflejante	84
36	Gráficas del modelo paramétrico de un blanco retro-reflejante	88

Lista de Figuras (Continuación)

Figura		Página
37	Gráfica de FBR	89
38	Gráfica de diferentes FBR en el plano x, z para valores de $\sigma = 1, \sigma = .5$ y $\sigma = .1$. Los parámetros: $r_1 = 15, r_2 = 15, h = 0, k = 0, \sigma = .1, \theta = \pi/4, A = 255, B = 0$, son comunes	90
39	Varios casos de FBR	91
40	Caracterización de FBR	92
41	Modelos de blancos retro-reflejantes	93
42	Relación entre sistemas coordenados	103
43	Movimientos geométricos del método <i>downhill simplex</i>	110
44	Diagrama a bloques de un <i>Algoritmo Genético</i>	116
45	<i>Ilegalidad e infactividad</i> de la representación genética.	121
46	<i>Correspondencia</i> entre el espacio codificado y el espacio de soluciones.	122
47	Estructura general de un algoritmo genético.	130
48	Diagrama a bloques del sistema	139
49	Interfaz del sistema	140
50	Histograma de una esquina tipo Y.	142
51	Apertura de la esquina a partir de los signos de la FUB	144
52	Rutinas utilizadas por Down_hill_L	147
53	Rutinas utilizadas por Modelo_L_Curvatura	151
54	Inicialización del método <i>Simplex</i>	152
55	Ajuste con downhill simplex	154
56	Imágenes de esquinas L de prueba	156
57	Modelos de esquinas tipo L	157
58	Ubicación del punto de esquina en cada modelo	158
59	Comparación en una esquina tipo L aguda, del detector de Beaudet contra el criterio propuesto	160
60	Comparación en una esquina tipo L del detector de Beaudet contra el criterio propuesto	161
61	Comparación en una esquina tipo L obtusa del detector de Beaudet contra el criterio propuesto	162
62	Comparación en una esquina tipo L aguda del detector de Dreschler y Nagel contra el criterio propuesto	165
63	Comparación en una esquina tipo L del detector de Dreschler y Nagel contra el criterio propuesto	166
64	Comparación en una esquina tipo L obtusa del detector de Dreschler y Nagel contra el criterio propuesto	167
65	Comparación en una esquina tipo L aguda del detector de Kitchen y Rosenfeld contra el criterio propuesto	169

Lista de Figuras (Continuación)

Figura		Página
66	Comparación en una esquina tipo L del detector de Kitchen y Rosenfeld contra el criterio propuesto	170
67	Comparación en una esquina tipo L obtusa del detector de Kitchen y Rosenfeld contra el criterio propuesto	171
68	Comparación en una esquina tipo L aguda del detector de Wang y Brady contra el criterio propuesto	173
69	Comparación en una esquina tipo L del detector de Wang y Brady contra el criterio propuesto	174
70	Comparación en una esquina tipo L obtusa del detector de Wang y Brady contra el criterio propuesto	175
71	Comparación en una esquina tipo L aguda del detector de Harris contra el criterio propuesto	177
72	Comparación en una esquina tipo L del detector de Harris contra el criterio propuesto	178
73	Comparación en una esquina tipo L obtusa del detector de Harris contra el criterio propuesto	179
74	Comparación en una esquina tipo L aguda del detector de Förstner contra el criterio propuesto	181
75	Comparación en una esquina tipo L del detector de Förstner contra el criterio propuesto	182
76	Comparación en una esquina tipo L obtusa del detector de Förstner contra el criterio propuesto	183
77	Comparación en una esquina tipo L aguda del detector IPGP1 contra el criterio propuesto	185
78	Comparación en una esquina tipo L del detector IPGP1 contra el criterio propuesto	186
79	Comparación en una esquina tipo L obtusa del detector IPGP1 contra el criterio propuesto	187
80	Comparación en una esquina tipo L aguda del detector IPGP2 contra el criterio propuesto	189
81	Comparación en una esquina tipo L del detector IPGP2 contra el criterio propuesto	190
82	Comparación en una esquina tipo L obtusa del detector IPGP2 contra el criterio propuesto	191
83	Imágenes de esquinas tipo Y de prueba	192
84	Comparación entre las imágenes y sus respectivos modelos	194
85	Ubicación del punto de esquina en cada modelo	195

Lista de Figuras (Continuación)

Figura		Página
86	Comparación en la esquina Y_1 , del detector de Beaudet contra el criterio propuesto	197
87	Comparación en la esquina Y_2 , del detector de Beaudet contra el criterio propuesto	198
88	Comparación en la esquina Y_3 , del detector de Beaudet contra el criterio propuesto	199
89	Comparación en la esquina Y_1 , del detector de Dreschler y Nagel contra el criterio propuesto	201
90	Comparación en la esquina Y_2 , del detector de Dreschler y Nagel contra el criterio propuesto	202
91	Comparación en la esquina Y_3 , del detector de Dreschler y Nagel contra el criterio propuesto	203
92	Comparación en la esquina Y_1 , del detector de Kitchen y Rosenfeld contra el criterio propuesto	205
93	Comparación en la esquina Y_2 , del detector de Kitchen y Rosenfeld contra el criterio propuesto	206
94	Comparación en la esquina Y_3 , del detector de Kitchen y Rosenfeld contra el criterio propuesto	207
95	Comparación en la esquina Y_1 , del detector de Wang y Brady contra el criterio propuesto	209
96	Comparación en la esquina Y_2 , del detector de Wang y Brady contra el criterio propuesto	210
97	Comparación en la esquina Y_3 , del detector de Wang y Brady contra el criterio propuesto	211
98	Comparación en la esquina Y_1 , del detector de Harris contra el criterio propuesto	213
99	Comparación en la esquina Y_2 , del detector de Harris contra el criterio propuesto	214
100	Comparación en la esquina Y_3 , del detector de Harris contra el criterio propuesto	215
101	Comparación en la esquina Y_1 , del detector de Förstner contra el criterio propuesto	217
102	Comparación en la esquina Y_2 , del detector de Förstner contra el criterio propuesto	218
103	Comparación en la esquina Y_3 , del detector de Förstner contra el criterio propuesto	219
104	Comparación en la esquina Y_1 , del detector de IPGP1 contra el criterio propuesto	221

Lista de Figuras (Continuación)

Figura		Página
105	Comparación en la esquina Y_2 , del detector de IPGP1 contra el criterio propuesto	222
106	Comparación en la esquina Y_3 , del detector de IPGP1 contra el criterio propuesto	223
107	Comparación en la esquina Y_1 , del detector de IPGP2 contra el criterio propuesto	225
108	Comparación en la esquina Y_2 , del detector de IPGP2 contra el criterio propuesto	226
109	Comparación en la esquina Y_3 , del detector de IPGP2 contra el criterio propuesto	227
110	Imágenes de prueba de esquinas tipo T y tipo X	228
111	Comparación entre las imágenes y sus respectivos modelos	230
112	Ubicación del punto de esquina en cada modelo	231
113	Comparación en la esquina T , del detector de Beaudet contra el criterio propuesto	233
114	Comparación en la esquina X , del detector de Beaudet contra el criterio propuesto	234
115	Comparación en la esquina T , del detector de Dreschler y Nagel contra el criterio propuesto	235
116	Comparación en la esquina X , del detector de Dreschler y Nagel contra el criterio propuesto	236
117	Comparación en la esquina T , del detector de Kitchen y Rosenfeld contra el criterio propuesto	237
118	Comparación en la esquina X , del detector de Kitchen y Rosenfeld contra el criterio propuesto	238
119	Comparación en la esquina T_1 , del detector de Wang y Brady contra el criterio propuesto	239
120	Comparación en la esquina X , del detector de Wang y Brady contra el criterio propuesto	240
121	Comparación en la esquina T , del detector de Harris contra el criterio propuesto	241
122	Comparación en la esquina X , del detector de Harris contra el criterio propuesto	242
123	Comparación en la esquina T , del detector de Förstner contra el criterio propuesto	243
124	Comparación en la esquina X , del detector de Förstner contra el criterio propuesto	244

Lista de Figuras (Continuación)

Figura		Página
125	Comparación en la esquina T , del detector de IPGP1 contra el criterio propuesto	245
126	Comparación en la esquina X , del detector de IPGP1 contra el criterio propuesto	246
127	Comparación en la esquina T , del detector de IPGP2 contra el criterio propuesto	247
128	Comparación en la esquina X , del detector de IPGP2 contra el criterio propuesto	248
129	Imágenes digitales de la mira de calibración.	249
130	Modelos de blancos retro-reflejante	251
131	Curvas de nivel de los modelos de los blancos retro-reflectivos en estudio sobre sus respectivas imágenes.	252

Lista de Tablas

Tabla		Página
I	Diferentes máscaras utilizadas para derivar una imagen	19
II	Parámetros de los modelos FBR_1 , FBR_2 y FBR_3	92
III	Parámetros que caracterizan a la función ML	158
IV	Factores de Escala de la función ML	158
V	Ubicación del punto de esquina en cada modelo	158
VI	Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo	163
VII	Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo	164
VIII	Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo	168
IX	Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo	172
X	Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo	176
XI	Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo	180
XII	Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo	184
XIII	Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo	188
XIV	Parámetros que caracterizan a la función V_Y	193
XV	Ubicación del punto de esquina en cada modelo	195
XVI	Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo	196
XVII	Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo	200
XVIII	Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo	204
XIX	Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo	208
XX	Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo	212
XXI	Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo	216
XXII	Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo	220
XXIII	Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo	224
XXIV	Parámetros que caracterizan a cada función	229
XXV	Ubicación del punto de esquina por cada detector en una esquina tipo T231	
XXVI	Ubicación del punto de esquina por cada detector en una esquina tipo X232	
XXVII	Parámetros de los modelos MBR_1 , MBR_2 y MBR_3	252

Capítulo I

Introducción

I.1 Motivación

El problema de detección de esquinas y de patrones predeterminados llamados “blancos retro-reflejantes”, es de gran relevancia (Harris y Stephens, 1988; Beaudet, 1978; Deriche y Giraudon, 1993), ya que estos puntos determinan información necesaria e imprescindible para solución de problemas tanto de fotogrametría como de visión artificial. Los avances en estas áreas exigen propuestas más eficientes y precisas para la detección de estos puntos relevantes en la imagen. Detectores a nivel subpixel se han desarrollado (Rohr, 1992; Trinder, 1989; Deriche y Giraudon, 1993; Olague y Hernández, 2005) los cuales modelan la región de la imagen donde se localizan estos puntos implicando que la incertidumbre en la ubicación de estos puntos disminuya considerablemente.

I.1.1 Detección de esquinas y blancos como un problema en Fotogrametría

La fotogrametría es la ciencia y el arte de determinar el tamaño y la forma de objetos como una consecuencia del análisis de la imagen registrada en una película o medio electrónico. Tal estudio se ha fundamentado en el uso de herramientas matemáticas y físicas empleadas para la interpretación precisa de imágenes fotográficas. Para medir las imágenes, se construyeron instrumentos de precisión mecánica. Al surgir la tecnología digital aplicada a las imágenes, ésta fue adoptada rápidamente por la fotogrametría. De esta forma el campo de aplicación abarca desde sistemas remotos usados para mapeo (fotogrametría aérea) hasta aplicaciones de inspección industrial arquitectónica.

De esta forma la fotogrametría busca obtener mediciones con la mayor precisión posible, debido a la naturaleza no lineal de los procesos que involucran la solución de problemas en esta área. Con esto, la calidad de los datos de entrada deben de contar con un alto grado de exactitud.

Algunos problemas básicos en fotogrametría son la calibración de cámaras, triangulación óptica entre múltiples imágenes, planeación de tareas y medición de objetos en una escena 3-D. En dichos problemas la ubicación de puntos de referencia como lo son las esquinas y los blancos retro-reflejantes a un nivel subpixel es de gran importancia, para obtener resultados satisfactorios.

I.1.2 Detección de esquinas y blancos como un problema en Visión Artificial

La visión por computadora puede ser entendida como la ciencia de obtener información relevante, precisa y útil a partir de imágenes con el objetivo de ejecutar tareas dedicadas a la percepción, sensado e interacción con el mundo que rodea a un sistema de visión artificial.

De esta forma, se puede clasificar a la visión por computadora como una rama de la inteligencia artificial, que tiene como propósito la descripción explícita y significativa de las características de los objetos físicos, captados en una imagen digital. Para lograr este objetivo, la visión por computadora requiere de una combinación de un tratamiento de bajo nivel de una imagen, como el reconocimiento de bordes y esquinas, eliminar ruido, mejorar el contraste, etc. y un procesamiento de alto nivel, como es el caso de la segmentación de una imagen, reconocimiento de texturas, reconocimiento de objetos, detección de movimiento, entre otras.

Uno de los procesos fundamentales en visión por computadora, es la detección y extracción de las características de los objetos discretizados por un sistema de adquisición de imágenes. Los bordes y las esquinas son elementos de referencia, llamados *puntos de interés*, *puntos de control* o *puntos prominentes*, para procesos de alto nivel. Dichos puntos de control son útiles en los siguientes procesos: 1) algoritmos de correspondencia entre dos o más imágenes, 2) reconocimiento de objetos; por ejemplo, la detección de las esquinas de un poliedro y 3) reconstrucción tridimensional. Una reconstrucción tridimensional de una escena se puede lograr a través de un conjunto de imágenes, información de contexto y parámetros de calibración de la cámara. Por estas razones la detección de *blancos* y *esquinas* en una imagen digital son considerados como operaciones básicas en la visión por computadora.

I.2 Planteamiento del problema

Actualmente, tanto la fotogrametría como la visión artificial han convergido a problemas comunes. Tal es el caso de la ubicación de esquinas y blancos. Así, aunque atacados desde diferentes enfoques el objetivo es el mismo. Por esto las comunidades de fotogrametría y visión por computadora han tenido un especial interés sobre este tema (Deriche y Giraudon, 1993; Dreschler y Nagel, 1982; Olague y Hernández, 2005; Rohr, 1992; Rosin, 1996).

Al reconocer la ubicación de un elemento de control a partir de variaciones de intensidad en una imagen, se tiene una serie de condiciones que producen incertidumbre en la ubicación de los puntos prominentes, lo que implica que dicha tarea no sea trivial. Los factores fundamentales son:

- **El ruido inherente de la señal.** Por ejemplo, la detección de un borde requiere

un cambio significativo de intensidad (gradiente) entre dos regiones uniformes y planas. En este sentido, un borde puede ser representado como una rampa entre ambas regiones. En una imagen se encuentran los casos siguientes: 1) una transición gradual entre dos regiones, Figura 1.a. 2) regiones con intensidad no uniforme, Figura 1.b. 3) umbral insuficiente para distinguir un borde, Figura 1.c. 4) ruido en la señal, Figura 1.d. 5) transición gradual con ruido, Figura 1.e. y 6) bordes indistinguibles, Figura 1.f.

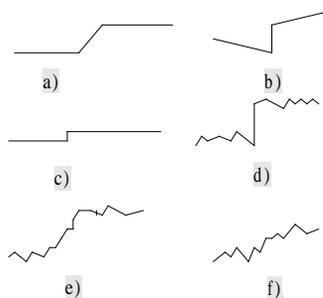


Figura 1: Diferentes casos que puede presentar un borde en una imagen digital.

- **La posición y orientación de la cámara con respecto al objeto.** Un sistema de adquisición de imágenes tiene como elemento de entrada un sistema digitalizador, generalmente es una cámara digital. La posición y orientación de la cámara provoca que las estructuras registradas por este dispositivo sean borrosas. Por ejemplo, si el punto de interés está mal enfocado se produce un efecto de difuminado continuo en la imagen, imposibilitando la detección clara de los bordes y las esquinas.
- **Los parámetros intrínsecos de la cámara.** Una cámara digital es un sistema óptico compuesto por un grupo de lentes que dirigen la luz hacia un arreglo de

sensores que registra la imagen. De esta forma una cámara digital se suele aproximar a una cámara obscura o estenopeica. En general dada una imagen digital representada como un arreglo de píxeles, se trata de especificar la relación entre el modelo de la cámara y la imagen. Lo anterior implica describir la correspondencia de las coordenadas del píxel (i, j) de la imagen con el plano (x, y) del modelo de la cámara. Lo que hace necesario llevar a cabo una serie de transformaciones lineales (escala, desplazamiento y rotación), que dependen de cada cámara en particular. Al proceso de determinar los parámetros que marca cada transformación lineal se denomina calibración de la cámara.

- **La geometría de los elementos fotosensibles.** Se ha observado que los arreglos de CCD's en forma rectangular producen un grado de difuminado distinto en la dirección de los ejes principales de la imagen digital. La Figura 2, es una ampliación de una esquina rectangular adquirida con una cámara con sensores rectangulares. Obsérvese que la región de transición entre los niveles de gris que conforman los bordes de la esquina son diferentes. Se requieren más píxeles en el eje horizontal que sobre el eje vertical (Olague y Hernández, 2002).

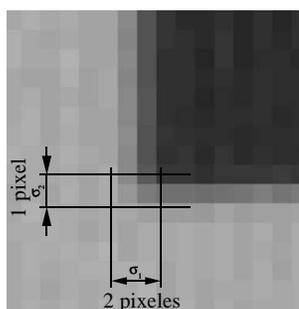


Figura 2: Los CCD's rectangulares producen difuminados distintos sobre los ejes del plano de la imagen digital.

- **Las variaciones de iluminación.** La iluminación en la escena contribuye con un grado de incertidumbre en la detección de puntos de control. Una mala iluminación causa un contraste muy pobre, así como ruido Gaussiano en las estructuras contenidas en la escena.

Junto con lo anterior, cabe mencionar que los sistemas de adquisición de imágenes están limitados en el espectro de frecuencias de radiación de luz que pueden captar los elementos fotosensibles. En resumen, todos estos factores provocan que una imagen digital sea borrosa. Más aún, estos factores de difuminado están acompañados de un desplazamiento de las estructuras de los puntos de control en el plano de la imagen, como lo señalan (Baker y Nayar, 1998; Deriche y Giraudon, 1993; Rohr, 1992).

En procesos de alto nivel, como pueden ser los algoritmos de calibración y reconstrucción tridimensional, la ubicación precisa de los puntos prominentes afecta directamente la calidad de dichas tareas. Debido a que pequeños errores en las mediciones en el plano de la imagen generalmente provocan, errores significativos en su interpretación tridimensional. En este sentido, la exactitud en la ubicación de las esquinas y blancos retro-reflejantes es un factor fundamental en el desarrollo de sistemas de visión por computadora y fotogrametría.

I.3 Objetivos de la investigación

Esta tesis propone el desarrollo de un detector paramétrico de esquinas y un detector paramétrico de blancos retro-reflejantes, capaz de modelar sus características geométricas y físicas; con el fin de ubicar estos puntos a un nivel de subpixel. El problema de ajuste de la imagen con el modelo propuesto es resuelto con un enfoque de optimización. De esta forma se proponen los siguientes objetivos:

I.3.1 Objetivos generales

- Ubicación del punto de esquina en una región de la imagen a un nivel subpixel.
- Ubicación del centro de un blanco retro-reflejante a un nivel subpixel.

I.3.2 Objetivos particulares

- Desarrollar un detector de esquinas múltiples a partir de un modelo paramétrico que simule las características físicas y geométricas de la región de estudio en una imagen digital.
- Desarrollar un detector de blancos retro-reflejantes a partir de un modelo paramétrico que simule las características físicas y geométricas de la región de estudio en una imagen digital.

I.4 Propuesta

Lo descrito en las secciones anteriores motiva el presente trabajo a proponer un nuevo detector preciso de esquinas múltiples y un detector paramétrico de blancos retro-reflejantes. Ambos detectores modelan la región donde se encuentra ubicado el punto de estudio a partir de una expresión analítica, la cual se ajusta a la imagen desde el punto de vista de un problema de optimización.

En el caso del detector de esquinas, la propuesta se realiza a partir del trabajo realizado por Olague y Hernández (2002) donde reporta la ubicación del punto donde se encuentra una esquina de tipo L a nivel sub-píxel. El nuevo detector, complementa el detector propuesto por Olague y Hernández (2005) y lo extiende para esquinas múltiples. De esta forma se describe la construcción de esquinas complejas a partir de esquinas tipo L. Lo anterior permite analizar el comportamiento del modelo en esquinas múltiples y

proponer un criterio general para la ubicación del punto de esquina para cualquier caso.

El detector de blancos retro-reflejantes, es limitado a patrones circulares; el cual dependiendo de la orientación y posición de la cámara puede degenerarse a una elipse. En este caso el modelo busca adaptarse a esta nueva forma, encontrando de forma directa y precisa el centro de la nueva figura.

Ambos modelos se limitan a una región cuadrada de la imagen definida por el usuario. Dichos detectores tiene las siguientes propiedades:

1. Se basan en una función paramétrica que caracteriza completamente las propiedades geométricas (posición y orientación) y físicas (amplitud y difuminado) de cada región. En el caso del detector de esquinas, modela cada uno de los bordes que construyen la esquina a partir de la Función Unitaria de Borde (FUB) propuesta por Olague y Hernández (2005).
2. El modelo resultante de esquina tiene las siguientes características:
 - El producto de dos FUB genera la esquina básica llamada esquina en L.
 - En este trabajo una esquina múltiple o compleja se genera con la superposición de esquinas en L.
 - La esquina se mueve libremente en la región explorada.
 - Los ángulos de cada borde son independientes. Por tanto, es posible modelar esquinas con un ángulo de apertura en un intervalo abierto de $(0, 2\pi)$.
 - Cada uno de los bordes parametriza en forma independiente un factor de difuminado. Esto permite modelar el fenómeno producido por los arreglos CCD's rectangulares.

- Los niveles de gris dentro y fuera de la esquina se ajustan automáticamente a la región en estudio.

Definir un nuevo modelo paramétrico de esquinas múltiples permite analizar la geometría de la esquina. Como consecuencia directa, se propone un nuevo criterio de ubicación del punto de esquina para esquinas múltiples, el cual se basa en el criterio propuesto por Olague y Hernández (2005) para llegar a una generalización.

En el caso del modelado de la imagen de un blanco retro-reflejante circular, se propone una sola expresión analítica. Determinando de forma inmediata el centro del blanco retro-reflejante.

Los parámetros de cada modelo se calculan por métodos de optimización multi-dimensional, ajustando el modelo a la imagen digital en tonos de gris. Para realizar esta tarea se utiliza un algoritmo evolutivo o bien la heurística de downhill simplex, en conjunto con el proceso de optimización de Levenberg-Marquardt.

La idea principal consiste en aproximar los parámetros de cada modelo a los valores óptimos, con las heurísticas antes mencionadas. Los algoritmos evolutivos y el downhill simplex permiten una exploración profunda del espacio de búsqueda así como métodos para salir de mínimos locales; mientras que el algoritmo de Levenberg-Marquardt es empleado para acelerar este proceso, ya que es capaz de entregar el valor óptimo dentro de un vecindario. De esta forma se puede decir que tanto el algoritmo evolutivo como la estrategia de downhill simplex son empleados como una optimización global y el algoritmo de Levenberg-Marquardt es utilizado para entregar los mejores valores locales. En este caso la función objetivo o la función a minimizar es propuesta mediante el estimador por mínimos cuadrados χ^2 . Esta representa una métrica para calcular que tan bueno es el ajuste del modelo contra los datos representados en la imagen.

I.5 Organización de la tesis

- *Introducción*
- *Antecedentes y conceptos básicos.* Se introducen definiciones básicas las cuales se utilizan a lo largo de esta tesis. Así como la definición de esquina y de los elementos que la componen. En este capítulo también, se realiza una revisión bibliográfica de los desarrollos propuestos de detectores de esquinas, con un énfasis en los trabajos afines a la presente propuesta.
- *Modelado de esquinas y blancos retro-reflejantes.* En este capítulo se definen los conceptos necesarios para describir las ecuaciones y características del Detector Paramétrico de esquinas Múltiples y el Detector Paramétrico de Blancos Retro-reflejantes. Para el detector de esquinas múltiples se discute el criterio propuesto por Olague y Hernández (2005) y este se extiende a esquinas complejas, así como la metodología para construir esquinas múltiples. En el caso del detector paramétrico de Blancos Retro-reflejantes, se realiza una revisión del estado del arte, así como una discusión sobre el comportamiento del blanco frente a condiciones que producen efectos de difuminado y su degeneración a elipses.
- *Modelado de datos y optimización multidimensional.* El objetivo de este capítulo es mostrar el criterio de optimización que se utiliza en el ajuste de datos. Asimismo, se explican las técnicas de optimización multidimensional que se emplean en este trabajo.
- *Resultados experimentales.* Se hace referencia a la estructura del software realizado para la implementación de los detectores propuestos. Se aplica el detector paramétrico de esquinas propuesto a diferentes imágenes analizando el modelado de éstas. Se discute la ubicación del punto de esquina en cada una de ellas y por

último se hace una comparación entre los detectores expuestos en el capítulo II.

- *Conclusiones.* Este capítulo hace un breve análisis de los puntos sobresalientes descritos a lo largo de esta tesis y sobre la comparación con otros detectores.

Capítulo II

Antecedentes y conceptos básicos

Las comunidades de fotogrametría y visión por computadora clasifican la extracción de características de bajo nivel (bordes y esquinas) como un problema fundamental. Debido a que éstas son de gran relevancia en problemas tan complejos como: análisis de formas y escenas, reconocimiento de objetos, detección de movimiento, algoritmos de correspondencia entre dos o más imágenes, reconstrucción tridimensional y calibración de cámaras entre otros.

De esta forma, autores como Moravec (1977); Beaudet (1978); Kitchen y Rosenfeld (1982), entre otros proponen detectores de esquinas y puntos de interés a nivel pixel. Rohr (1992), hizo un estudio del desplazamiento de la ubicación del punto de esquina utilizando un modelo analítico. Deriche y Giraudon (1993) proponen modelos analíticos para el estudio de las esquinas y demuestran que éstas sufren un desplazamiento.

El capítulo está estructurado de la siguiente forma:

Conceptos Básicos. Se definirá formalmente el concepto de imagen el cual se utilizará a lo largo de este trabajo. También se hará una discusión, del concepto de *esquina* y sus propiedades morfológicas, geométricas y físicas. Esta sección definirá los conceptos que serán empleados en el desarrollo del trabajo.

Métodos de Detección de Esquinas. Se discutirán los desarrollos más representativos en la detección de esquinas. Se tratarán a detalle los trabajos de modelos

geométricos y paramétricos, con el propósito de comparar y discutir estos con el modelo propuesto en la presente tesis.

Conclusiones. Se resumen los conceptos relevantes y se concluye el capítulo con una breve discusión.

II.1 Conceptos básicos

II.1.1 Concepto de imagen

El término *imagen* se refiere a una función bidimensional de la intensidad de la luz, a la que se indica por $f(x, y)$, donde el valor o amplitud de f en las coordenadas espaciales (x, y) determina la intensidad (iluminación) de la imagen en ese punto (Gonzalez y Woods, 2002). Puesto que la luz es una forma de energía, $f(x, y)$ debe de ser estrictamente mayor que cero y finita, es decir:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad . \quad (1)$$

Con lo anterior, se define a la intensidad de una imagen monocromática f en las coordenadas (x, y) con un *nivel de gris* l . Es evidente que $l \in [L_{min}, L_{max}]$ donde L_{min} es estrictamente mayor que cero y L_{max} es finita. Es decir, la función $f(x, y)$ es acotada en el intervalo $[L_{min}, L_{max}]$ y se le denomina *escala de grises*.

En la práctica el intervalo $[L_{min}, L_{max}]$ se desplaza numéricamente al intervalo $[0, L]$, donde la escala, $l = 0$ se considera como negro y $l = L$ se considera como blanco. Todos los valores intermedios son tonos de gris que varían de forma continua entre el negro y el blanco.

Para que una imagen $f(x, y)$ pueda ser analizada computacionalmente debe ser

digitalizada tanto espacialmente como en su amplitud. Es decir la función $f(x, y)$ se muestrea uniformemente en su dominio (*muestreo de la imagen*) y en su contradominio (*cuantificación del nivel de gris*). Lo anterior se suele representar como una matriz de rango $N \times M$ (*imagen digital*), donde cada elemento (*pixel*) es una cantidad discreta:

$$f(x, y) \approx \begin{bmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) & \cdots & f(0, M - 1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) & \cdots & f(1, M - 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(N - 1, 0) & f(N - 1, 1) & \cdots & f(N - 1, M - 1) \end{bmatrix} = F(X, Y) \quad , \quad (2)$$

Nótese que $(X, Y) \in \mathbb{Z}^2$, es decir:

$$F(X, Y) : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z} \quad . \quad (3)$$

En esta tesis se supondrá que los niveles de grises discretos están igualmente espaciados entre $[0, L]$.

Aunque una imagen sea una función de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R} se suele graficar la superficie generada en un plano tridimensional, tomando los valores en el eje z como $f(x, y)$.

II.1.2 Modelo de la cámara

Una cámara (o en general un sistema óptico) es construido por un sistema de lentes (comúnmente llamado *objetivo*), con el propósito de recibir los haces de luz procedentes del objeto y modificar su dirección hasta crear la imagen óptica, réplica luminosa del objeto. En este caso se suele tomar el modelo simple de un lente delgado para explicar este proceso.

Un *lente delgado* es un modelo matemático definido por un eje, llamado *eje óptico*,

y un plano perpendicular a el eje, llamado plano focal, con una apertura centrada en el centro óptico, es decir la intersección del plano focal con el eje óptico. El lente delgado tiene dos parámetros: la *longitud focal* f y su *diámetro* d . Ésta función se caracteriza por dos propiedades. La primera propiedad es que los rayos que son paralelos al eje óptico se intersectan con este a una distancia f desde el centro óptico. El punto de intersección es llamado *foco* del lente (ver Figura 3). La segunda propiedad es que todos los rayos que pasan a través del centro óptico no se desvian (Y.Ma *et al.*, 2004).

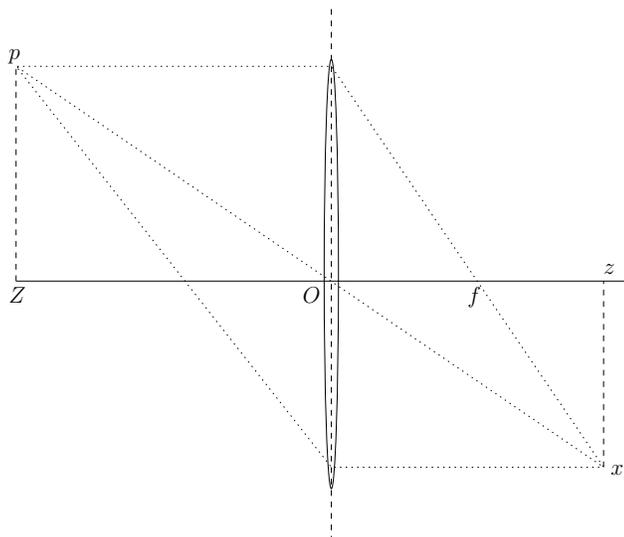


Figura 3: Modelo de un lente delgado

Si la apertura del lente delgado tiende a cero, todos los rayos son forzados a pasar por el centro del eje óptico O . En consecuencia, la apertura del cono decrece y solo los puntos que contribuyen a la imagen del punto $\mathbf{x} = (x, y)^T$ están sobre una línea que pasa a través del centro O del lente. Si un punto p tiene coordenadas $\mathbf{X} = (X, Y, Z)^T$ relativas al marco de referencia centrado en el centro óptico O , con su eje z sobre el

eje óptico del lente, entonces por semejanza de triángulos (ver Figura 4) se sigue que las coordenadas de p y su punto de imagen \mathbf{x} son relacionados por una proyección perspectiva ideal

$$x = -f \frac{X}{Z}, \quad y = -f \frac{Y}{Z}, \quad (4)$$

donde f se refiere a la *longitud focal*. Es común representar esta relación como:

$$\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2; \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x}. \quad (5)$$

También con frecuencia se escribe $\mathbf{x} = \pi(\mathbf{X})$. Nótese que cualquier otro punto sobre la línea que pasa por O y p se proyecta sobre las mismas coordenadas $\mathbf{x} = (x, y)^T$. Este modelo es llamado modelo de una *cámara ideal estenopeica o cámara oscura*. Ésta es una idealización del modelo de lente delgado, ya que cuando la apertura decrece, los efectos de la difracción comienzan a dominar y entonces el modelo del lente delgado no se mantiene. Más aún, como la apertura decrece a cero, la energía que incide y pasa sobre el lente comienza a tender a cero. Sin embargo, actualmente es posible construir dispositivos que se aproximen al modelo de la cámara estenopeica y el aproximar el modelo de cámara oscura a un sistema de adquisición de imágenes bien enfocado es aceptable.

Supongase que el sensor de adquisición de imágenes es bien modelado por un lente delgado. entonces, para medir la cantidad de energía recibida en el punto \mathbf{x} , la irradiancia (o intensidad de luz) I en \mathbf{x} puede ser expresada como:

$$I(\mathbf{x}) = \mathcal{R}(\mathbf{X}) \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{f} \right)^2 \cos^4(\alpha), \quad (6)$$

donde: d es el diámetro del lente, f es la longitud focal y α es el ángulo entre el eje óptico

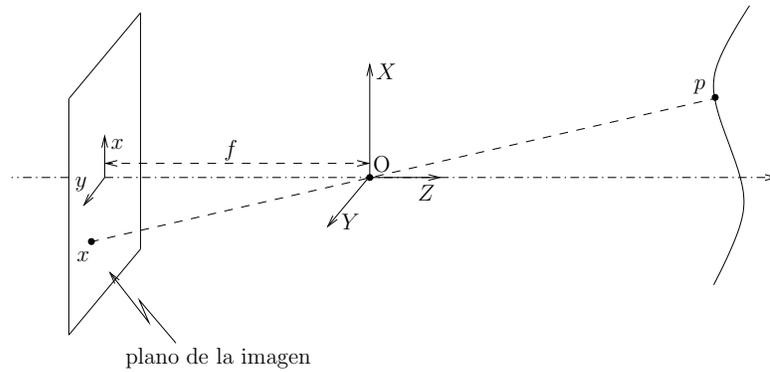


Figura 4: Modelo de una cámara oscura o estenopeica

y el punto \mathbf{x} . En general para un lente delgado con un pequeño campo de visión, α es aproximado a una constante. Entonces, en el modelo ideal de la cámara estenopeica, se asume que la intensidad de luz (es decir la irradiancia) es dada por:

$$I(\mathbf{x}) = \gamma \mathcal{R}(p), \quad (7)$$

donde γ es un factor constante.

Para propósitos de esta tesis estos modelos son una buena aproximación y se consideran los mismos para el desarrollo de este trabajo.

II.1.3 Cálculo de la derivada en una imagen

El problema fundamental en el cálculo de la derivada en una imagen digital $F(X, Y)$ es que, la definición matemática de la derivada como tal no puede ser aplicada por ser $F(X, Y)$ una función discreta. Por lo tanto, los algoritmos propuestos en la literatura son solo una aproximación a la derivada de la imagen continua $f(x, y)$.

Uno de los métodos más comunes, es utilizar el concepto del gradiente para la diferenciación de una imagen. De esta manera, el gradiente de una imagen $f(x, y)$ en

el punto (x, y) es el vector:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} . \quad (8)$$

En este caso el gradiente indica la dirección de la máxima variación de $f(x, y)$. El módulo de $\nabla f(x, y)$, es la magnitud de la máxima variación de $f(x, y)$

$$\|\nabla f(x, y)\| = \left[\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (9)$$

En la práctica se suele aproximar por:

$$\|\nabla f(x, y)\| \approx |G_x| + |G_y| , \quad (10)$$

y la dirección del gradiente está dada por:

$$\alpha(x, y) = \arctan \left(\frac{G_y}{G_x} \right) . \quad (11)$$

En el caso de una imagen digital se suele tomar:

$$\|\nabla F(X, Y)\| = \left[(H_x \otimes F(X, Y))^2 + (H_y \otimes F(X, Y))^2 \right]^{\frac{1}{2}} , \quad (12)$$

$$\alpha(X, Y) = \arctan \left(\frac{H_y \otimes F(X, Y)}{H_x \otimes F(X, Y)} \right) . \quad (13)$$

Donde: \otimes representa una convolución y H_x y H_y son máscaras que operan sobre la imagen digital en dirección de los ejes x y y respectivamente.

Autores como Roberts, Prewit y Sobel (ver Tabla II.1.3) proponen máscaras, las cuales al formar parte del proceso de convolución con la imagen, aproximan la derivada por diferencias finitas. Cabe destacar que la convolución de una máscara con la imagen, es un proceso en el cual se toman regiones de la imagen del mismo tamaño que la máscara y se realiza la convolución entre la máscara y la región de la imagen; dicha

región es centrada en cada pixel de la imagen.

Tabla I: Diferentes máscaras utilizadas para derivar una imagen

	Derivada Parcial en x	Derivada Parcial en y
Roberts	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
Prewitt	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Sobel	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Los operadores de Sobel tienen la ventaja de proporcionar tanto la diferenciación como un efecto de suavizado. Dado que las derivadas realzan el ruido, el efecto de suavizado es una característica particularmente atractiva. Marr y Hildreth en 1980 propusieron la utilización de un filtro Gaussiano para calcular el Laplaciano de la siguiente manera:

$$h(x, y) = e^{\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (14)$$

$$\nabla^2 h = \left(\frac{r^2 - \sigma^2}{\sigma^4}\right) e^{\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)} . \quad (15)$$

Actualmente se suele utilizar este tipo de filtros por ser más robustos al ruido y eficientes en el cálculo de la primera derivada, la segunda derivada y el Laplaciano.

Deriche (1993) propone aproximar la derivada de la imagen como un filtro recursivo aplicado a la imagen, el cual se determina a partir de la función de transferencia entre la convolución de la primera derivada de la función Gaussiana y la imagen. Autores como Lindeberg (1993); van Vliet *et al.* (1998); Yokono y Poggio (2004), entre otros han propuesto mejoras a los algoritmos recursivos que propone Deriche, los cuales son cada vez más eficientes en el procesamiento como en la aproximación numérica a una derivada.

De esta manera, en el presente trabajo se decidió utilizar una máscara Gaussiana para calcular la primera y segunda derivada en las imágenes digitales utilizadas.

II.1.4 Función de autocorrelación en una imagen

La función de autocorrelación mide cambios locales en una señal. Esta medida es obtenida por la correlación de un elemento de la imagen con sus vecinos. Es decir, se obtienen las diferencias de un elemento con respecto a sus vecinos por medio de corrimientos en diferentes direcciones alrededor de este. En el caso de un punto de interés y en particular de una esquina, la función de autocorrelación es alta para todos los cambios de dirección (Schmid *et al.*, 2000). La función de autocorrelación en una imagen se define como:

Definición II.1.1 (Función de autocorrelación en una imagen). Dados $(\Delta x, \Delta y)$ y un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La función de autocorrelación en una imagen es dada por la siguiente relación:

$$f(x, y) = \sum_{(x_k, y_k) \in W} [I(x_k, y_k) - I(x_k + \Delta x, y_k + \Delta y)]^2, \quad (16)$$

donde (x_k, y_k) pertenecen a una región W centrada en el punto (x, y) de la imagen I .

Para utilizar esta función como un detector de puntos de interés o en su defecto como detector de esquinas, se requiere realizar una integración sobre todas las direcciones donde se llevaron acabo los corrimientos. La integración sobre corrimientos discretos puede ser sustituida por la matriz de autocorrelación. Esta matriz se deriva al aplicar una aproximación de primer orden de la expansión de Taylor.

$$I(x_k + \Delta x, y_k + \Delta y) \approx I(x_k, y_k) + \begin{pmatrix} I_x(x_k, y_k) & I_y(x_k, y_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} . \quad (17)$$

Donde $I_x(x_k, y_k)$ y $I_y(x_k, y_k)$ indican la primera derivada la imagen I con respecto a x y y respectivamente. Substituyendo (17) en (16) se obtiene:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{(x_k, y_k) \in W} \left[\begin{pmatrix} I_x(x_k, y_k) & I_y(x_k, y_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \right]^2 \\ &= \begin{pmatrix} \Delta x & \Delta y \end{pmatrix} \cdot \\ &\quad \begin{bmatrix} \sum_{(x_k, y_k) \in W} (I_x(x_k, y_k))^2 & \sum_{(x_k, y_k) \in W} I_x(x_k, y_k) I_y(x_k, y_k) \\ \sum_{(x_k, y_k) \in W} I_x(x_k, y_k) I_y(x_k, y_k) & \sum_{(x_k, y_k) \in W} (I_y(x_k, y_k))^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Delta x & \Delta y \end{pmatrix} \cdot \mathbf{M}(x, y) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (18)$$

De esta forma, la función de autocorrelación dada por la Ecuación (16) puede aproximarse por la matriz $\mathbf{M}(x, y)$. En la práctica se suele dar un peso a $\mathbf{M}(x, y)$ por medio de un filtro Gaussiano $G(\sigma)$, esto es:

$$\mathbf{M}(x, y) = G(\sigma) \otimes \begin{bmatrix} (I_x(x_k, y_k))^2 & I_x(x_k, y_k) I_y(x_k, y_k) \\ I_x(x_k, y_k) I_y(x_k, y_k) & (I_y(x_k, y_k))^2 \end{bmatrix} . \quad (19)$$

En este trabajo se calcula la matriz de autocorrelación $\mathbf{M}(x, y)$ como en la Ecuación (19).

II.1.5 Concepto de esquina

En 1992, Karl Rohr discutió la definición de esquina para imágenes en escalas de grises como sigue:

Definición II.1.2 (Esquina). Si en una escena tridimensional (escena-3D) al menos dos superficies se encuentran, existirá un borde tridimensional (borde-3D). Una esquina en una escena-3D es formada cuando al menos dos bordes-3D se unen mutuamente, en cuyo caso se estará hablando de una esquina tridimensional (esquina-3D). Análogamente, un borde bidimensional (borde-2D) se genera cuando al menos dos superficies se intersectan. Si al menos dos bordes-2D se intersectan en una imagen digital, se genera una esquina bidimensional (esquina-2D). Entonces, el término *esquina* es definido uniformemente en dos y tres dimensiones (2D y 3D respectivamente). Las esquinas son siempre un subconjunto de los bordes.

Un modelo de esquina deberá ser capaz de describir el grupo de atributos que caracterizan una esquina como son: posición o ubicación, ángulo de apertura, orientación, la forma de los bordes, la textura de los bordes, contraste, tipo de unión y tamaño. En general estas características pueden ser agrupadas en tres propiedades generales:

1. *Características morfológicas*. Este grupo de propiedades son relacionadas al aspecto cualitativo (textura, color, forma) describiendo en general las características exteriores.
2. *Características geométricas*. Este grupo se relaciona a la forma de la esquina, como un producto de los bordes. Las propiedades geométricas describen la ubicación de la esquina con respecto a un sistema coordenado dado.
3. *Características físicas*. Son el grupo de atributos que hacen referencia a las propiedades físicas, como una consecuencia del muestreo de una escena 3D por un sistema digital (cámara, sensor, lente, etc).

II.1.6 Morfología de una esquina

Las propiedades *morfológicas* son clasificadas de acuerdo a la forma y al número de bordes que definen una esquina:

- *Esquina-L*. Se genera cuando dos bordes se intersectan en un punto, creando dos zonas de gris, ver Figura 5.a. La esquina-L es la estructura más simple de una esquina.
- *Esquina-T*. Se produce cuando un extremo de un borde se une en una región que no pertenece a uno de los extremos del segundo borde, ver Figura 5.b. Regularmente la intersección de los bordes forma un ángulo recto. En una esquina-T existen tres regiones con diferente intensidad en tonos de gris.
- *Esquina-Y*. También llamada “punta de flecha”, se produce cuando tres bordes se unen en un extremo común, ver Figura 5.c. En este tipo de unión existen 3 zonas de gris distintas.
- *Esquina-K*. Es la unión de una esquina-L en una región que no pertenece a los extremos de un tercer borde, ver Figura 5.d. En este sentido, una esquina-T es un caso particular de una esquina-K; el ángulo de la esquina-L es de 90 grados unida al tercer borde en alguna región que no es un extremo. De forma similar se forman 3 zonas de niveles de gris distintas.
- *Esquina-X*. Se genera cuando dos bordes se unen en una región que no pertenece a algún extremo de dichos bordes, ver Figura 5.e. Este tipo de estructuras puede verse también, como 4 bordes que confluyen en un mismo punto y los ángulos de los bordes no adyacentes son iguales.
- *Vértice*. Se genera cuando más de dos bordes se unen en un extremo común. En un vértice el número de zonas de gris diferentes es igual al número de bordes que la

conforman, vea Figura 5.f. La esquina-T, la esquina-Y, la esquina-K y la esquina-X son diferentes tipos de vértices. El término vértice se emplea exactamente en este sentido en el presente trabajo. Por tanto existen sólo dos tipos de esquinas, la esquina-L y los vértices.

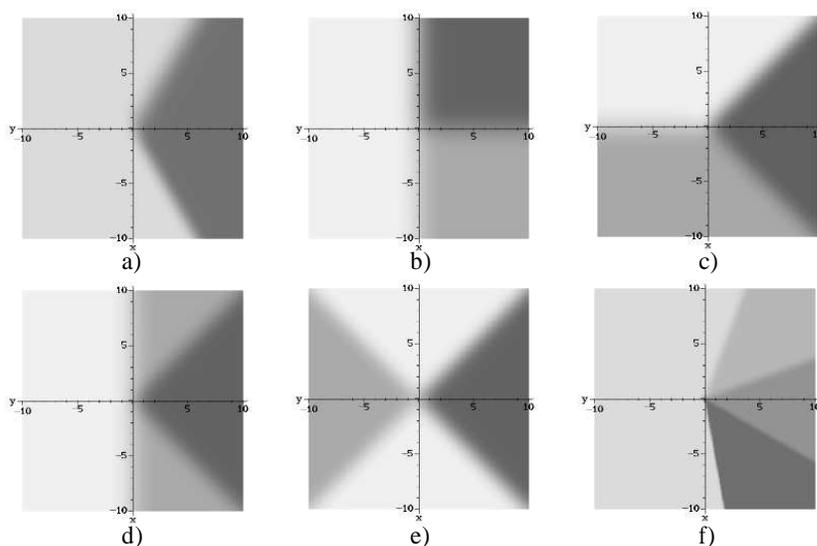


Figura 5: Clasificación de las esquinas dependiendo del tipo de unión de los bordes que las conforman. a) Esquina-L. b) Esquina-T. c) Esquina-Y. d) Esquina-K. e) Esquina-X. f) Vértice.

Aunque se ha descrito como se construyen los diferente tipos de esquinas múltiples a partir de la suma de bordes. Estas también se pueden modelar a partir de una esquina en L, lo que implica generar estructuras más complejas en forma metódica, llegando a una generalización. Lo anterior se discutirá más ampliamente en el siguiente capítulo.

II.1.7 Geometría de una esquina

Para caracterizar una esquina se supondrá como una estructura que está situada en el origen de un sistema coordenado. Las propiedades *geométricas* son descritas por las

rectas que caracterizan a un borde y a la curvatura producto de la intersección de los bordes. Estas propiedades son:

1. *Ángulo de apertura.* Es el ángulo α generado entre los bordes r_1 y r_2 y el punto de intersección O , ver Figura 6.
2. *Ángulo de los bordes.* Es el ángulo ϑ generado por un borde y su intersección con un eje coordenado, ver Figura 6.

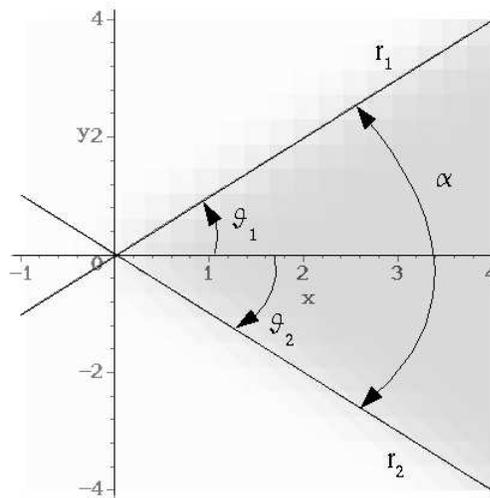


Figura 6: Geometría de los bordes de una esquina-L. r_1 y r_2 son los bordes de la esquina. ϑ_1 y ϑ_2 son los ángulos de r_1 y r_2 respectivamente. α es el ángulo de apertura de la esquina.

3. *Ubicación de la esquina.* Este término se refiere al punto donde se localiza la esquina. Existen varios desarrollos teóricos sobre esta definición:

- técnicas basadas en contornos

- técnicas basadas en intensidad de la imagen y
- técnicas basadas en modelos paramétricos.

Estas técnicas se discutirán en detalle en la sección II.2. En la Figura 7 se muestran tres criterios distintos para la ubicación de la esquina. P_1 denota el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 que definen a cada borde. Si en una esquina las dos regiones de gris de la esquina están bien definidas o describen un perfil claro, entonces la esquina pudiera ubicarse en P_1 . Para el caso de P_3 , la localización de la esquina es obtenida calculando la máxima curvatura planar de la estructura. Otras aproximaciones extraen los puntos en el contorno de los bordes, y los tratan como una cadena de puntos. A partir de interpolaciones u otros métodos se calcula la intersección de las rectas generadas para determinar P_2 . En general P_2 se localiza en la región comprendida entre P_1 y P_3 (Rohr, 1992).

4. *Orientación de la esquina.* La orientación de la esquina está implícita en las coordenadas del punto de esquina. Sin embargo, algunos autores argumentan que la orientación, puede estar dada por el ángulo de la recta que bisecta el ángulo de apertura y pasa por el punto de esquina (Rosin, 1996). En la Figura 7, r_{bis} es la recta bisectriz del punto de esquina. Para este caso, la esquina mostrada es simétrica con respecto al eje x , por tanto r_{bis} está sobre el eje x .

II.1.8 Propiedades físicas de una esquina

En general un sistema digital de adquisición de imágenes genera un grado de difuminado en las imágenes, ya que es limitado en banda (Olague y Hernández, 2005; Baker y Nayar, 1998; Rohr, 1992). Lo anterior implica un grado de incertidumbre referente a la posición, orientación y localización del punto exacto donde se ubica la esquina. Generalmente, esta incertidumbre se refleja como un cambio gradual en niveles de gris

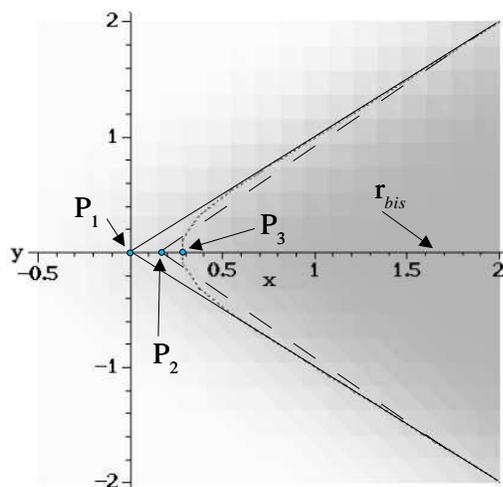


Figura 7: Ubicación del punto de esquina-L para diferentes métodos. P_1 es el punto de intersección de las dos rectas de borde. P_2 aproximación atendiendo a los puntos de frontera de los bordes. P_3 aproximación atendiendo a la máxima curvatura.

así como una curvatura en el punto de unión de los bordes.

Las características físicas cuantifican la iluminación de una escena 3-D, la calidad de parámetros ópticos como el enfoque y la distorsión provocada por la forma y el tamaño de los sensores digitales CCD¹. Estas características provocan dos efectos importantes en la imagen, los cuales son:

1. *Difuminado*. El término difuminado se refiere a la transición de un nivel de gris a otro. Es decir, si existe una transición suave entre un nivel de gris a otro habrá una serie de tonalidades intermedias entre ellas. En el caso de un borde, indica si está bien definido o delineado, en otras palabras, si el perfil del borde puede verse con claridad. El difuminado es el factor principal que produce incertidumbre

¹Por sus siglas en inglés “Charge-Coupled Device”

sobre la ubicación de la esquina. Los factores que provocan este fenómeno son:

- Enfoque. Si una sección de la escena se encuentra fuera del plano focal del sistema de adquisición de la imagen, entonces se dice que la imagen está fuera de foco. Este efecto provoca un difuminado continuo en la imagen final. Por tanto, la ubicación de la cámara con respecto al objeto juega un papel preponderante en el proceso de localización de la esquina.
- El tamaño finito de apertura del lente causa que la función de transferencia óptica de un sistema de adquisición de imagen esté limitada en banda en su resolución espacial (Baker y Nayar, 1998). Este efecto es descrito como un difuminado continuo.
- Las variaciones en la iluminación de la escena causan que el difuminado varíe en diferentes secciones de la imagen. Sin embargo, si la región de interés donde se ubica la esquina es relativamente pequeña, este factor se convierte en un difuminado continuo.
- Muestreo. Una escena continua se discretiza típicamente empleando sensores CCD. El CCD es un arreglo o matriz de elementos fotosensibles, donde cada una de estas celdas representan un pixel en una imagen digital. Dichos elementos son generalmente rectangulares, como es el caso de la cámara digital PULNIX 9701 donde cada celda fotosensible es de $11.6\mu m \times 13.6\mu m$. El fenómeno producido por elementos fotosensibles rectangulares, puede cuantificarse a través de dos diferentes factores de difuminado en la dirección de los ejes principales del plano del sensor, (Olague y Hernández, 2005). El modelo analítico de esquina que se presenta en este trabajo, caracteriza este fenómeno.

La Figura 8.a., es la imagen de una mira de calibración adquirida con la cámara

PULNIX 9701. El factor de difuminado σ es la región de transición entre las dos zonas de intensidad en tonos de gris que componen a la esquina. Si se toma la región de la imagen en la vecindad del pixel (477, 135), Figura 8.b, se observa con claridad que los factores de difuminado σ_1 y σ_2 son distintos. Es importante enfatizar que los problemas de enfoque, la banda limitada de los sistemas de adquisición y las variaciones de iluminación provocan un difuminado continuo. Por tanto, se esperaría que σ_1 y σ_2 fueran iguales, siempre y cuando sólo estos factores determinaran el grado de difuminado en una imagen. Como se observa en la Figura 8.b esto no ocurre. Más aún, σ_1 y σ_2 están en la dirección del eje horizontal y vertical del plano del sensor respectivamente. Debido a lo anterior y que en este trabajo es importante la exactitud en la localización del punto de esquina, σ_1 y σ_2 son considerados como diferentes en el modelo analítico de esquina.

En una esquina compleja la incertidumbre se incrementa por la intersección de más de dos bordes. En este caso es importante que cada borde se modele con un difuminado independiente, para caracterizar de forma correcta cada esquina, y de este modo discernir la ubicación del punto de esquina.

2. *Intensidad.* En imágenes digitales en tonos de gris, los diferentes patrones de intensidad identifican a las estructuras contenidas en ellas. Para una esquina en L se requiere de al menos dos zonas de gris distintas que representen a dos bordes que se intersectan en una región en común. Para una esquina-L es común utilizar los términos de intensidad dentro de la esquina e intensidad fuera de la esquina. La diferencia entre estas intensidades es la calidad del contraste, señalando al nivel de gris menor en la imagen como el fondo de la misma. La Figura 9, muestra este concepto; I_1 representa el fondo de la imagen e I_0 la cresta de la esquina.

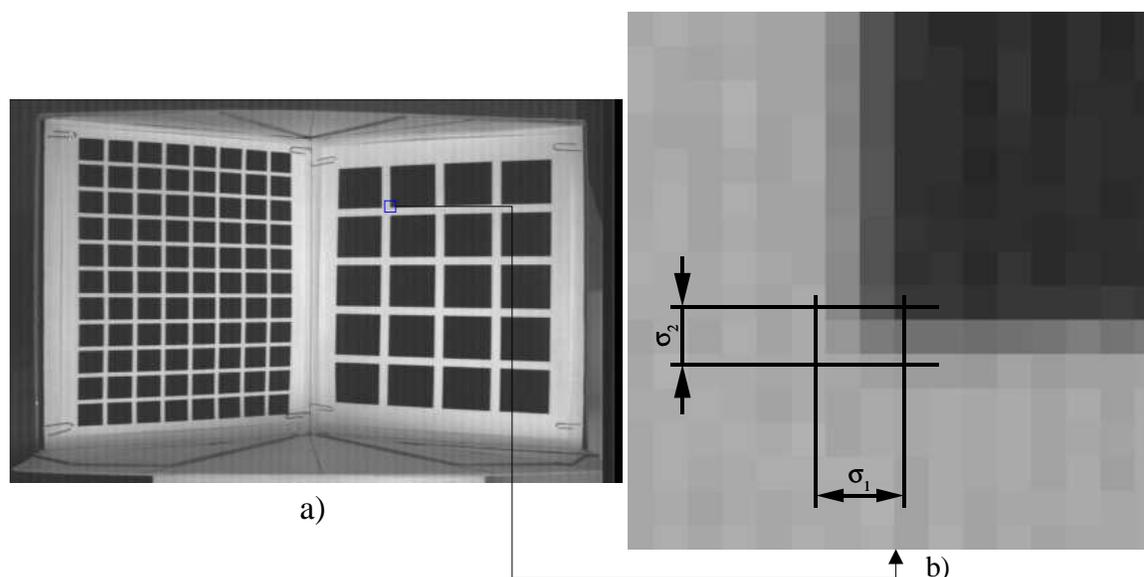


Figura 8: Difuminados $\sigma_1 \neq \sigma_2$ producidos por celdas fotosensibles rectangulares. a) Malla de calibración adquirida con una cámara PULNIX 9701. b) Zona ampliada en la vecindad del pixel (477, 135)

En conclusión, una esquina se define en función de las características geométricas y físicas de cada uno de los bordes que la forman. La morfología de la esquina describe a la estructura que se observa en una imagen. Como se menciona en la introducción de este capítulo, el problema de localización de una esquina es complejo. En la siguiente sección se discuten algunos trabajos que han sido publicados para este fin.

II.2 Métodos de detección de esquinas

El propósito de esta sección es ubicar el presente trabajo dentro de un marco contextual de propuestas en la literatura. Las técnicas de detección de esquinas pueden clasificarse en tres grupos: los basados en contornos, los basados en intensidad de la imagen y los basados en modelos paramétricos.

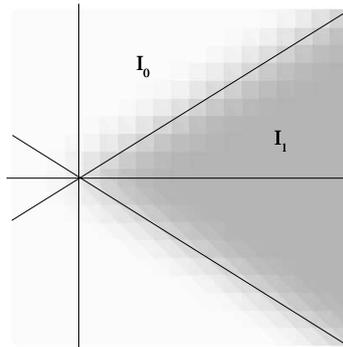


Figura 9: Identificación de las intensidades en una esquina-L. I_1 es la intensidad fuera de la esquina. I_0 es la intensidad dentro de la esquina.

El modelo que se presenta en este trabajo, está basado en una función paramétrica que describe las propiedades físicas y geométricas de cada uno de los bordes involucrados en una esquina. Adicionalmente, presenta propiedades geométricas interesantes en una esquina-L. Es por ello, que se desarrollan a detalle los detectores basados en intensidad de la imagen y los basados en modelos paramétricos.

II.2.1 Métodos basados en contornos

Los métodos basados en contornos, operan sobre todos aquellos puntos que describen el borde de un objeto. La esquina se identifica como el punto que tiene máxima curvatura o donde se localiza el punto de inflexión, de la estructura representada por la unión de todos los bordes.

Tsai *et al.* (1999) proponen una medida de la curvatura basada en los valores propios de la matriz de covarianza de los bordes. La máxima curvatura ocurre en los valores significativamente grandes de los valores propios.

Sohn *et al.* (1998) proponen un método de suavizado de los bordes para estimar la curvatura, empleando aproximaciones determinísticas basadas en el recocido simulado. Los máximos de esta función de curvatura una vez aplicado el método, identifican a cada una de las esquinas.

Medioni y Yasumoto (1987) emplean B-splines para aproximarse al contorno descrito por los bordes. La esquina se ubica en el máximo de la curvatura una vez calculado los coeficientes de los B-splines.

II.2.2 Métodos basados en intensidad de la imagen

Los métodos basados en intensidad de la imagen operan sobre los valores de intensidad en tonos de gris en una región de la imagen. La esquina es detectada a partir del cálculo de diversas propiedades geométricas de la superficie, basados en los principios de geometría diferencial. En la literatura se les conoce como métodos directos (Rohr, 1992), debido a que trabajan directamente con los valores de intensidad de la región donde esta ubicada la esquina. Estos métodos detectan el punto de esquina a un nivel de pixel (números enteros). Esta limitante, provoca que en procesos de mayor nivel (por ejemplo, la calibración) la precisión sea mucho menor en comparación con el uso de métodos de detección de esquinas a nivel subpixel. Los métodos que serán discutidos son: detector de Beaudet, detector de Dreschler y Nagel, detector de Kitchen y Rosenfeld, detector de Wang y Brady, detector de Harris, detector de Förstner, detector IPGP1 y detector IPGP2.

La clase de detectores de esquinas que operan directamente sobre la intensidad en la imagen son referidos como detectores de puntos de interés. Estos detectores definen un función que opera sobre un vecindario local y extrae una medida de *esquinicidad*

o interés sobre cada pixel en la imagen. Esta operación produce una nueva imagen la cual es denominada *imagen de interés*. Esto es, se describinan los puntos a través de un umbral, seleccionando aquellos que tengan un valor más alto en la medida de interés o arriba del umbral. Conceptualmente cada uno de estos operadores fue diseñado como detectores de esquinas. Su capacidad de detección no está limitada a puntos que forman estrictamente una esquina. Entonces este tipo de detectores extraen todos los puntos donde la variación de intensidad en la imagen es alta con respecto a una medida particular. En otras palabras, el tipo de características que se extraen de una imagen son denominadas como *puntos de interés*. En este contexto, los puntos de interés son pixeles de la imagen que muestran una propiedad característica.

En el presente trabajo, este tipo de detectores son aplicados localmente a la región de la imagen donde está localizada una esquina. Con lo cual se puede hablar propiamente como detectores de esquinas, sin embargo el concepto de detector de puntos de interés es útil para definir algunos detectores como es el caso de IPGP1 e IPGP2.

Detector de Beaudet

Beaudet (1978) propone un operador rotacional invariante, basado en el cálculo del determinante del Hessiano de una región de la imagen, con el propósito de ubicar las esquinas. La expresión propuesta por Beaudet es la siguiente:

$$K_{Beaudet} = \Delta(H) = \begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{vmatrix}, \quad (20)$$

donde $I(x, y)$ es la función de intensidad en tonos de gris de una imagen. $\Delta(H)$ es el determinante del Hessiano de $I(x, y)$. I_{xx} , I_{yy} e I_{xy} son las segundas derivadas parciales de $I(x, y)$ con respecto a xx , yy y xy respectivamente.

La localización de una esquina consta de dos pasos:

1. Se calcula el operador rotacional invariante $K_{Beaudet}$.
2. Si el valor calculado en la Ecuación (20) sobrepasa un umbral definido por el usuario, entonces la esquina se encuentra en las coordenadas (x,y) del máximo encontrado.

La Figura 10 muestra el comportamiento tridimensional del operador rotacional invariante para el caso de una esquina-L, con un ángulo de apertura de $\pi/2$ y un factor de difuminado $\sigma = 1$. En este caso la imagen digital fue construida artificialmente con el modelo paramétrico propuesto en esta tesis.

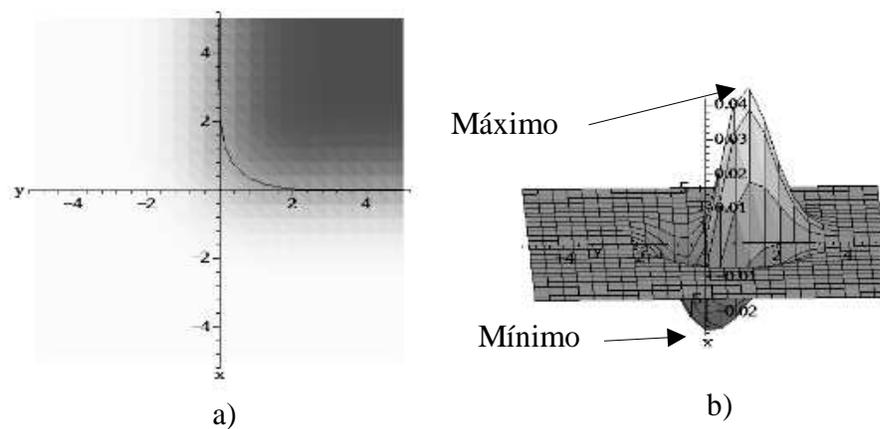


Figura 10: Detector de Beaudet. a) Esquina-L. b) Superficie generada por el determinante del Hessiano $K_{Beaudet}$ operado sobre la imagen sintética.

Las características de este detector son:

1. El detector $K_{Beaudet}$ otorga una máximo positivo y un mínimo negativo.
2. El mínimo negativo detecta una posición falsa del punto de esquina, véase Figura 10.b. Por tanto se debe tener cuidado en el momento de calcular los extremos.

3. El máximo positivo de $K_{Beaudet}$ determina la ubicación de la esquina. Se observa que el máximo se encuentra desplazado hacia la cresta de la esquina.
4. El detector no es estable en el espacio de escala lineal Gaussiano. Esto es, si se aplican distintos factores de difuminado, la ubicación de la esquina es desplazada. Un análisis detallado de este comportamiento se encuentra en el capítulo V.
5. El detector es sensible al ruido. El operador rotacional invariante no contempla algún elemento que suavice las regiones de intensidad dentro y fuera de la esquina.
6. Se requiere definir intuitivamente un umbral para considerar la existencia de una esquina, $máximo(K_{Beaudet}) \geq Umbral$.

Detector de Dreschler y Nagel

Dreschler y Nagel (1982) proponen un operador basado en la *curvatura Gaussiana principal* de una superficie. Zheng *et al.* (1999) caracterizan a detalle este detector. El principal aporte radica en aplicar el concepto de curvatura Gaussiana de una superficie a una esquina en la imagen. La curvatura Gaussiana principal $k_{min}k_{max}$ esta dada por:

$$K_{D\&N} = k_{min}k_{max} = \frac{\Delta(H)}{(1 + I_x^2 + I_y^2)} \quad , \quad (21)$$

donde I_x e I_y son la primeras derivadas parciales de la función de intensidad $I(x, y)$ con respecto a x y y respectivamente. $\Delta(H)$ es el determinate del Hessiano, equivalente al detector $K_{Beaudet}$.

El comportamiento del detector $K_{D\&N}$ es similar al propuesto por Beaudet, en su forma y propiedades. Sin embargo, el determinante del Hessiano no es la expresión exacta que denota a la curvatura Gaussiana $k_{min}k_{max}$ (Deriche y Giraudon, 1993). El punto de esquina se localiza como sigue:

1. Se calcula la curvatura Gaussiana dada por la Ecuación (21).
2. Se identifica el máximo positivo y el mínimo negativo de la curvatura, puntos P_a y P_b de la Figura 11. El punto P_a representa el extremo cuando $k_{min}k_{max} > 0$. En la literatura, P_a es un punto elíptico. Por otro lado, el punto P_b representa el extremo cuando $k_{min}k_{max} < 0$ y se le conoce como punto hiperbólico (Deriche y Blazka, 1993).
3. El punto de esquina P_e se localiza en la intersección de la línea que une a P_a y P_b con la curva $k_{min}k_{max} = 0$. La curva $k_{min}k_{max} = 0$ es la curvatura Gaussiana principal. La Figura 11 muestra gráficamente estos conceptos.

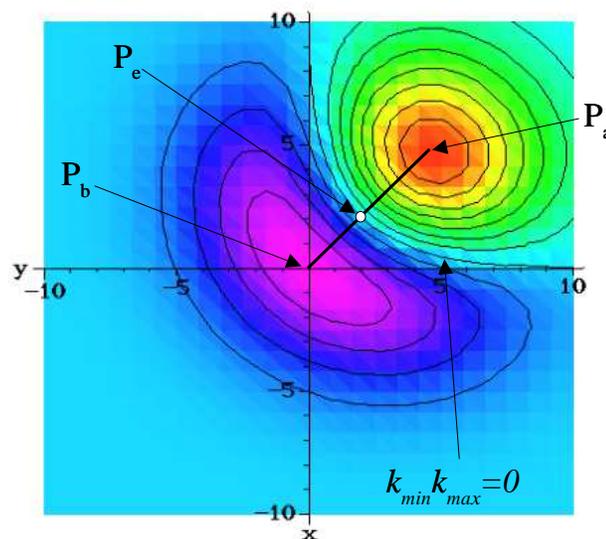


Figura 11: Ubicación del punto de esquina del detector de Dreschler y Nagel, para una esquina con un ángulo de apertura de $\pi/2$ y $\sigma = 1$.

Algunas características de este detector son:

- Sensible al ruido.
- Se requiere definir un umbral para discernir la existencia de una esquina.
- No es estable en el espacio de escala lineal Gaussiano.

Detector de Kitchen y Rosenfeld

En 1982, Kitchen y Rosenfeld propusieron uno de los detectores más populares que operan sobre imágenes digitales. El detector está basado en el cambio de la dirección del gradiente a lo largo del borde que define una esquina, multiplicado por la magnitud del gradiente (Kitchen y Rosenfeld, 1982). La expresión que representa este detector esta dada por:

$$K_{K\&R} = \frac{I_{xx}I_y^2 + I_{yy}I_x^2 - 2I_{xy}I_xI_y}{I_x^2 + I_y^2} . \quad (22)$$

La ubicación de la esquina se encuentra en las coordenadas (x,y) donde se localiza el extremo dado por la Ecuación (22), ver Figura 12. Las características son:

1. Existe sólo un mínimo o máximo. El punto de esquina P_e corresponde al extremo de $K_{K\&R}$, ver Figura12.a.
2. El máximo del detector $K_{K\&R}$ está ubicado fuera de la curva que representa la curvatura principal. La Figura 12.c muestra gráficamente este efecto.
3. No es estable en el espacio de escala lineal Gaussiano. En el capítulo V se discute en detalle el problema de desplazamiento de P_e y su sensibilidad con diferentes factores de difuminado.
4. Es sensible al ruido.
5. Se requiere definir intuitivamente un valor de umbral para discernir la existencia de una esquina.

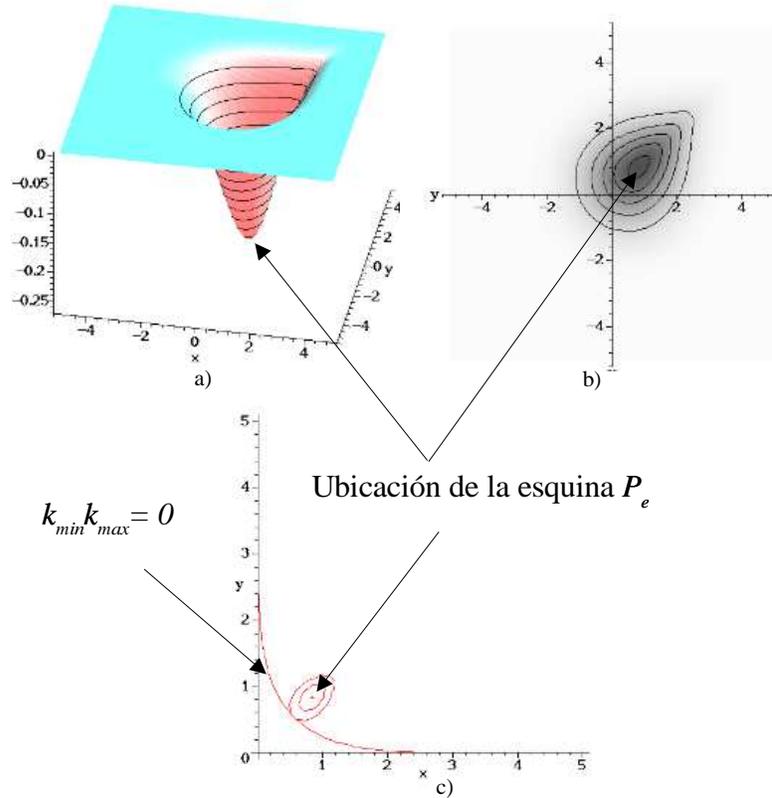


Figura 12: Ubicación del punto de esquina del detector de Kitchen y Rosenfeld, para una esquina con un ángulo de apertura de $\pi/2$ y $\sigma = 1$. a) Modelo tridimensional de $K_{K\&R}$. b) Curvas de contorno de $K_{K\&R}$. c) Ubicación del punto de esquina P_e .

Detector de Wang y Brady

En 1995, Wang y Brady proponen otra medida de curvatura $K_{W\&B}$. El valor de la curvatura $K_{W\&B}$ es proporcional a la segunda derivada tangencial en la dirección del borde e inversamente proporcional a la magnitud de su velocidad de cambio (Wang y Brady, 1995). El detector de Wang y Brady está dado por:

$$K_{W\&B} = \frac{\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}}{|\nabla(I)|} \quad \text{para} \quad \nabla^2(I) \gg 1, \quad (23)$$

donde $\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \frac{I_{xx}I_y^2 + I_{yy}I_x^2 - 2I_{xy}I_xI_y}{|\nabla(I)|^2} = K_{K\&R}$, es la segunda derivada tangencial de I . $\nabla(I)$

es el gradiente de I . $\nabla^2(I)$ es el Laplaciano de I . Aplicando la supresión de respuesta falsa de esquina, la Ecuación (23) se reduce a la siguiente expresión:

$$K_{W\&B} = (\nabla^2(I))^2 - S|\nabla(I)|^2 \quad , \quad (24)$$

donde S es una constante en la supresión de respuesta falsa de una esquina. S es propuesta empíricamente por el usuario. La Figura 13 muestra el comportamiento tridimensional de $K_{W\&B}$.

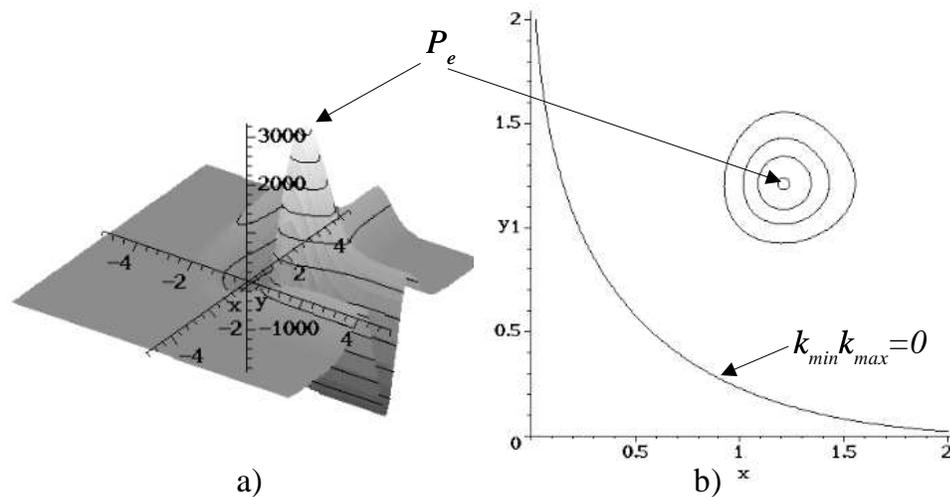


Figura 13: Detector de Wang y Brady, para una esquina con un ángulo de apertura de $\pi/2$ y $\sigma = 1$. a) Modelo tridimensional de $K_{W\&B}$. b) Ubicación del punto de esquina P_e .

La ubicación de la esquina se localiza calculando el máximo de la Ecuación (24). El detector de Wang y Brady satisface los requerimientos de tiempo real para la estimación de escenas en movimiento, Zheng *et al.* (1999). Sin embargo, la ubicación de la esquina se encuentra desplazada en la dirección de la cresta de la esquina, como se observa en

la Figura 13.b.

Detector Harris y Stephens

Harris y Stephens (1988) proponen un detector de esquinas basado en el detector de puntos propuesto por Moravec y de la función de autocorrelación. Originalmente, Harris y Stephens escriben la función de autocorrelación ($E_{x,y}$) como:

$$E_{x,y} = \sum_{u,v} W_{u,v} \cdot [I_{x+u,y+v} - I_{u,v}]^2 \quad (25)$$

$$\approx \sum_{u,v} W_{u,v} \cdot [xX + yY + O(x^2, y^2)]^2 . \quad (26)$$

Donde $W_{u,v}$ es una región de la imagen I . Nótese que la expresión (26) es equivalente a la Ecuación (17). Los gradientes son aproximados como:

$$X = I \otimes [-1, 0, 1] = \frac{\partial I}{\partial x} , \quad (27)$$

$$Y = I \otimes [-1, 0, 1]^T = \frac{\partial I}{\partial y} . \quad (28)$$

Para pequeños cambios en $E_{x,y}$ se sigue que:

$$E_{x,y} = Ax^2 + 2Cxy + By^2 , \quad (29)$$

donde:

$$A = X^2 \otimes \omega_{u,v} , \quad (30)$$

$$B = Y^2 \otimes \omega_{u,v} , \quad (31)$$

$$C = XY \otimes \omega_{u,v} , \quad (32)$$

tomando,

$$\omega_{u,v} = e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}} . \quad (33)$$

Finalmente los cambios en $E_{x,y}$, para pequeños corrimientos en (x, y) la Ecuación (29) puede ser escrita consistentemente como:

$$E_{x,y} = (x, y)\mathbf{M}(x, y)^T \quad . \quad (34)$$

Donde \mathbf{M} es una matriz simétrica de 2×2 dada por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix} \quad . \quad (35)$$

Nótese que \mathbf{M} es la matriz de autocorrelación descrita en la Ecuación (18). Las curvaturas principales de la función de autocorrelación están definidas por los eigenvalores α y β de la matriz de autocorrelación \mathbf{M} y forman una descripción rotacionalmente invariante de \mathbf{M} . Con esto se pueden determinar tres casos principales:

1. Si ambas curvaturas son pequeñas, entonces la autocorrelación local es uniforme y consecuentemente la región W de la imagen esta compuesta por una intensidad casi constante (i.e., si existe un cambio en el vecindario causa un pequeño cambio en $E_{x,y}$);
2. Si una curvatura es considerablemente mayor que la otra, entonces la función de autocorrelación se puede modelar como una cresta, esto es, sólo los cambios a lo largo de la cresta (i.e., a lo largo del borde) provocan pequeños cambios en $E_{x,y}$; con lo cual el punto está situado sobre un borde.
3. Si ambas curvaturas son grandes, entonces la función es un pico pronunciado, por lo que cambios en cualquier dirección incrementan $E_{x,y}$, lo cual indica una esquina.

Los eigenvalores α y β de la matriz \mathbf{M} se pueden aproximar como:

$$Tr(\mathbf{M}) = \alpha + \beta = A + B \quad , \quad (36)$$

$$Det(\mathbf{M}) = \alpha\beta = AB - C^2 \quad . \quad (37)$$

Donde: $Tr(\mathbf{M})$ indica la Traza de \mathbf{M} , y $Det(\mathbf{M})$ es el Determinante de \mathbf{M} . Con lo cual el detector de Harris es dado por

$$R = Det(\mathbf{M}) - k \cdot Tr(\mathbf{M}) \quad . \quad (38)$$

Donde k es la llamada constante de Harris, y es propuesta por el usuario, aunque en la práctica suele tener un valor aproximado de 0.04. De esta forma, el criterio de ubicación del punto de esquina se simplifica al tomar los puntos que estén por arriba de un umbral definido por el usuario.

La Figura 14 muestra el detector de Harris aplicado a una esquina tipo L, así como la superficie generada por R . La implementación de este detector fue realizada aproximando el gradiente con un filtro Gaussiano como se describe en la sección II.1.3 y la matriz de autocorrelación como se describe en la Ecuación (19).

Detector de Förstner

El operador de Förstner puede ser visto como un desarrollo estadístico y analítico, el cual es formulado como un problema de búsqueda de puntos apropiados para una descripción de la imagen. Esto implica que dada una región en la imagen, debe contener estructuras sobresalientes que la describan. Förstner y Gülch (1987) a partir de observaciones hechas en problemas como: correspondencia de imágenes por medio de mínimos cuadrados, detección de esquinas a partir de la intersección de bordes, la búsqueda del

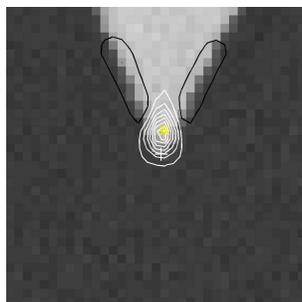
centro de gravedad de una región de la imagen, así como la búsqueda del centro de blancos circulares, notan la similitud de estos procesos y propone una métrica a partir de la matriz de la ecuación normal N definida en la siguiente ecuación.

$$N = \begin{bmatrix} \sum g_x^2 & \sum g_x g_y \\ \sum g_x g_y & \sum g_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}, \quad (39)$$

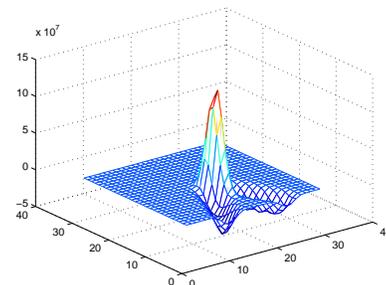
donde g_x y g_y es la imagen convolucionada con la primera derivada de un filtro Gaussiano. En otras palabras es equivalente a la matriz de autocorrelación \mathbf{M} propuesta en la Ecuación (18).

En este caso si se calcula $Q = N^{-1}$, una métrica de error para el punto (x, y) puede determinarse a partir de los eigenvalores λ_1 y λ_2 de la matriz Q . Los eigenvalores definen los semiejes de una elipse de error, que caracteriza al punto. De esta forma:

- Si la elipse se aproxima a una forma circular, entonces el punto puede estar ubicado dentro de un borde.
- En el caso en que los semiejes de la elipse sean pequeños se hablará de un punto de interés.



(a)



(b)

Figura 14: a) Curvas de nivel de R sobre la imagen, el * muestra el punto de esquina propuesto por Harris. b) Superficie generada por R

Förstner y Gülch determinan que los eigenvalores de N y Q son iguales, con lo cual realizan aproximaciones para determinar la razón de los semiejes de la elipse y medir la *circularidad* (q) y su orientación ($\tan(2\Phi)$). Estas medidas se determinan por:

$$q = 1 - \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^2 = 4 \frac{\text{Det}(N)}{(\text{Tr}(N))^2} \quad , \quad (40)$$

$$\tan(2\Phi) = 2 \frac{2N_{12}}{N_{11} - N_{22}} \quad . \quad (41)$$

De forma similar Förstner y Gülch proponen una medida del tamaño de la elipse de error como:

$$w = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\text{Det}(N)}{\text{Tr}(N)} \quad , \quad (42)$$

si los puntos exceden un cierto umbral en el valor de q y w entonces representan puntos de interés. En el caso de este trabajo dichos valores determinarán la ubicación del punto de esquina. Se suele determinar el umbral como un porcentaje del valor más alto de q y w . La Figura 15 muestra la aplicación de este operador sobre una esquina tipo L.

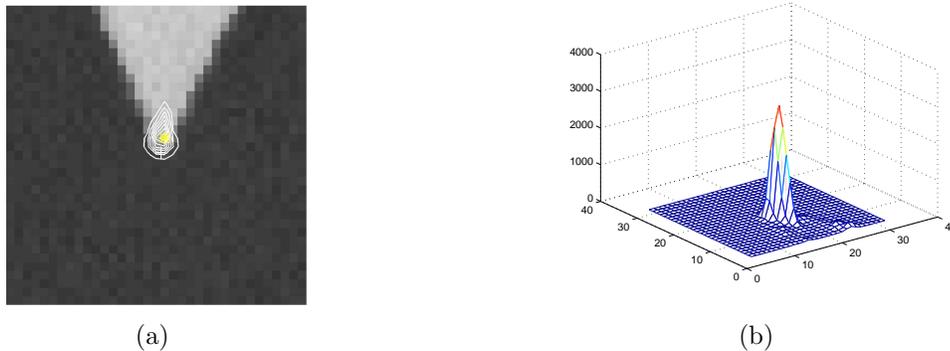


Figura 15: a) Curvas de nivel de w sobre la imagen, el * muestra el punto de esquina propuesto por Förstner. b) Superficie generada por w

Detectores de puntos de interés usando programación genética

Trujillo y Olague (2006) proponen dos nuevos detectores de esquinas y puntos de interés, IPGP1 y IPGP2 (de sus siglas en inglés *Interest Point Genetic Programing*), donde se plantea un nuevo enfoque al problema de detección de puntos de interés. Es decir, se aborda como un problema de optimización, donde el criterio que se utiliza para encontrar la solución es descrito por 3 características principales:

1. **Distinción Global** entre los puntos extraídos. Es decir, los puntos seleccionados como prominentes en una imagen, estén distribuidos sobre las regiones que presenten información relevante.
2. **Alta Información de Contenido** en comparación a otros píxeles.
3. **Estabilidad** sobre ciertos tipos de transformación en la imagen, i.e., la rotación. Una métrica importante en este aspecto es la repetibilidad.

El problema es resuelto a través de la Programación Genética (GP), donde cada individuo en la población del GP representa un operador candidato de puntos de interés. Para definir una aplicación de Programación Genética es necesario definir tres elementos: Función de Aptitud, un Conjunto de Funciones y un Conjunto de Terminales.

En este caso la función de aptitud es determinada por la siguiente expresión:

$$f(x) = r_J(\epsilon) \cdot \phi_x^\alpha \cdot \phi_y^\beta \cdot N_{\%}^\delta \quad , \quad (43)$$

donde $r_J(\epsilon)$ es la razón de repetibilidad calculada para un conjunto de n imágenes de entrenamiento, $J = \{J_i | i = 1 \dots n\}$. Además

$$\phi_x = \frac{1}{1 + e^{-\alpha(H_x - c)}} \quad (44)$$

y

$$\phi_y = \frac{1}{1 + e^{-\alpha(H_y - c)}} \quad , \quad (45)$$

son funciones sigmoideas para promover la dispersión de los puntos a lo largo de las direcciones x y y . Los términos H determinados a través de las siguientes expresiones:

$$H_x = - \sum_{x_k} P(\cdot) \log_2[P(\cdot)] \quad , \quad (46)$$

$$H_y = - \sum_{y_k} P(\cdot) \log_2[P(\cdot)] \quad , \quad (47)$$

las cuales representan el valor de la entropía de la distribución espacial de los puntos de interés detectados a lo largo de cada dirección principal. $P(\cdot)$ es aproximado por el histograma de la ubicación de los puntos de interés.

Finalmente el término

$$N_{\%} = \frac{\text{número de puntos requeridos}}{\text{número de puntos encontrados}} \quad , \quad (48)$$

es un factor de penalización que reduce la aptitud para los detectores que devuelven un número de puntos menor a los requeridos.

El Grupo de Funciones F fue propuesto con 5 funciones unarias y 6 binarias, es decir:

$$F_{binaria} = \{+, -, | -, \otimes, /\} \quad , \quad (49)$$

$$F_{unaria} = \{A^2, \sqrt{A}, \log_2, EQ, G(\sigma = 1), G(\sigma = 2)\} \quad , \quad (50)$$

$$F = F_{binaria} \cup F_{unaria} \quad , \quad (51)$$

donde EQ es el histograma de equalización de la imagen y $G(\sigma = x)$ es un filtro

Gaussiano con $\sigma = x$. El Conjunto de Terminales T fue propuesto como:

$$T = \{I_i, I_{i,\sigma=1}, L_{i,x}, L_{i,y}, L_{i,x,x}, L_{i,y,y}, L_{i,x,y}, / \} \quad , \quad (52)$$

donde $L_{i,w}$ es la derivada de la imagen en la dirección w y $I_{i,\sigma=1}$ es la imagen convolucionada con un filtro Gaussiano con $\sigma = 1$.

Detector IPGP1

Con las consideraciones anteriores se define como:

$$IPGP1 = G(\sigma = 2) \otimes [G(\sigma = 1) \otimes I - I] \quad . \quad (53)$$

Nótese que IPGP1 es un detector con una estructura muy sencilla, lo cual tiene ventajas como un procesamiento rápido y de fácil implementación. Básicamente IPGP1 extrae el punto en dos pasos:

1. Extraer las frecuencias altas de la imagen. Esto se lleva a cabo al substraer de la imagen original una imagen que ha sido convolucionada con un filtro Gaussiano, el cual tiene el efecto de suprimir las frecuencias más altas.
2. Suavizar la imagen resultante de la operación anterior. Es decir, se convoluciona la imagen resultante con un filtro Gaussiano con un efecto de suprimir las frecuencias más altas.

IPGP1 tiene algunas características interesantes como:

- No utilizar derivadas para la extracción de puntos.
- Tener una repetibilidad del 95% que es superior a detectores como el propuesto por Harris y Stephens.

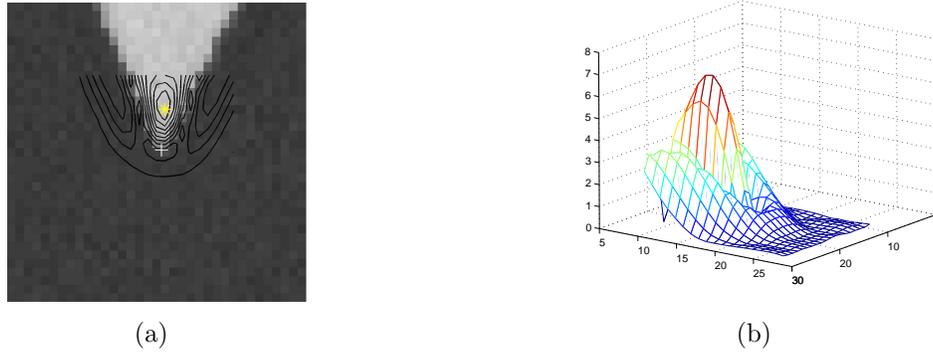


Figura 16: a) Curvas de nivel de IPGP1 sobre la imagen, el * muestra el punto de esquina propuesto por IPGP1. b) Superficie generada por IPGP1

El criterio de ubicación de la esquina es por medio de un umbral propuesto por el usuario. En este caso, para tener un mayor peso en las esquinas se implementa como:

$$IPGP1 = ||G(\sigma = 2) \otimes [G(\sigma = 1) \otimes I - I]|| \quad . \quad (54)$$

La figura 16 muestra la ubicación de la esquina en una imagen tipo L, así como la superficie generada al aplicar IPGP1 a la imagen.

Detector IPGP2

IPGP2 (Trujillo y Olague, 2006) al igual que IPGP1, es un detector de puntos de interés desarrollado con Programación Genética. El detector IPGP2 representa una versión modificada del operador propuesto por Beudet (1978) (véase sección II.2.2). IPGP2 tiene la misma estructura que el DET, con la diferencia de promediar alrededor de un vecindario local con una función de suavizado Gaussiana. La siguiente Ecuación muestra la expresión para el IPGP2.

$$IPGP2 = G(\sigma = 1) \otimes [L_{xx} \cdot L_{yy}] - G(\sigma = 1) \otimes [L_{xy} \cdot L_{yx}] \quad . \quad (55)$$

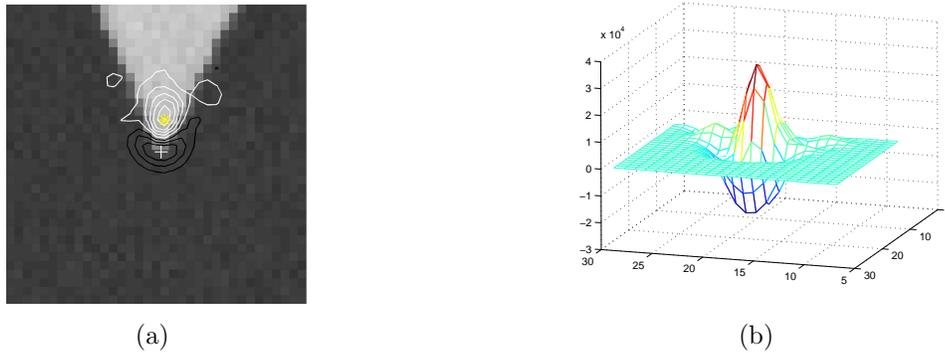


Figura 17: a) Curvas de nivel de IPGP2 sobre la imagen, el * muestra el punto de esquina propuesto por IPGP2. b) Superficie generada por IPGP2

La Figura 17 ilustra el IPGP2 aplicado a una esquina tipo L. El criterio para seleccionar los puntos de interés es a partir de un umbral propuesto por el usuario.

II.2.3 Métodos basados en modelos paramétricos

Los detectores paramétricos se basan en expresiones analíticas que modelan las variaciones de intensidad en una imagen digital. Los parámetros de los modelos describen los efectos ópticos, físicos y geométricos de la región de la imagen para describir una esquina. Estos parámetros generalmente son:

- El ángulo de apertura de la esquina.
- La magnitud de la intensidad fuera y dentro de la esquina.
- Posición espacial de la esquina.
- Grado de incertidumbre (difuminado) de la esquina.

Los detectores propuestos por Rohr (1992); Deriche y Giraudon (1993); Deriche y Blazka (1993); Baker y Nayar (1998) y Olague y Hernández (2005) son conocidos como

detectores paramétricos. Los primeros 4 detectores comparten los siguientes elementos:

1. Una función escalón unitaria que representa un borde ideal.
2. Un filtro Gaussiano o exponencial que emula el efecto de difuminado.
3. Un proceso de convolución entre el filtro Gaussiano y el borde ideal. El proceso de convolución es necesario para representar el efecto de difuminado en el modelo de esquina ideal.
4. Una descripción de los parámetros modelados.
5. Una región de la imagen en la vecindad donde se ubica el punto de esquina. Generalmente es una región cuadrada.
6. Un método para la obtención de los mejores valores de los parámetros que se ajusten a la imagen en tonos de gris en la región de estudio. Generalmente, los parámetros se ajustan a la imagen a través de métodos de optimización multidimensionales (descenso de gradiente, mínimos cuadrados).

La ubicación exacta de la esquina se incluye como un parámetro en estos desarrollos. Por tanto, la ubicación de la esquina es conocida una vez realizado el ajuste de los parámetros de los modelos a la imagen original. El ajuste proporciona una primera aproximación en la ubicación de la esquina. Es importante enfatizar, *que el proceso de convolución de la esquina ideal y el filtro Gaussiano provoca un desplazamiento del punto de esquina* (Rohr, 1992).

Olague y Hernández (2002) proponen un nuevo detector paramétrico empleando el modelado de los bordes que conforman una esquina a partir de la Función Unitaria de Borde (FUB). Esta función se propone en base a la función error, lo que permite que

se considere como una función de distribución de probabilidad. Una vez modelada la esquina se emplea un algoritmo para la ubicación del punto de esquina, el cual toma en consideración el difuminado en cada borde. Este detector se describe a detalle en las siguientes líneas y se retoman las ideas principales como base para este trabajo.

El primer modelo paramétrico fue propuesto por Rohr. El propone un modelo basado en una función escalón convolucionada con un filtro Gaussiano. Deriche y Blazka (1993) desarrollaron un modelo simplificado del detector de Rohr. Ellos proponen un filtro exponencial sustituyendo el filtro Gaussiano y caracterizan a cada borde en lugar del eje de simetría que emplea Rohr. Por tal motivo se analiza en detalle el modelo paramétrico de Rohr (M_{Rohr}) y se harán las anotaciones pertinentes para el modelo propuesto por Deriche.

Baker y Nayar (1998) desarrollan un algoritmo que construye un detector para un número arbitrario de parámetros. El trabajo hace un interesante énfasis en los efectos ópticos y de percepción en los sistemas de adquisición de imágenes. Cada característica es representada como un valor de densidad en un subespacio múltiple de muestreo simplificado. Las muestras del subespacio son tomadas por cada uno de los parámetros del modelo. Una característica es detectada si la proyección de los valores de intensidad alrededor del punto de interés, la esquina, está lo suficientemente cerca del subespacio de muestreo.

Modelo paramétrico propuesto por Rohr

El detector de Rohr se basa en una función escalón ideal. Para el caso de una esquina-L, el eje de simetría de dicho escalón está centrado en el eje x . Las coordenadas del punto de esquina corresponden al origen del sistema de coordenadas (x,y) Rohr (1992). El ángulo de apertura de la esquina es β y el valor de la amplitud de esquina es a , ver la

Figura 18. El escalón ideal es de la forma:

$$U_{Rohr}(x, y, \beta, a) = \begin{cases} a & \text{si } x \geq 0 \wedge \\ & |y| \leq \tan(\frac{\beta}{2})x \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} . \quad (56)$$

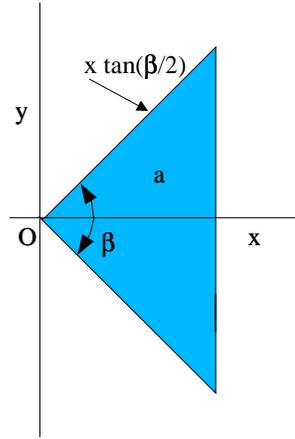


Figura 18: Esquina ideal U_{Rohr} .

El filtro Gaussiano simula el efecto de difuminado, dado por:

$$G(x, y) = G(x)G(y), \quad G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} . \quad (57)$$

Sea $\mathbf{x} = (x, y)$ un sistema cartesiano general y $\xi = (\xi, \eta)$ el sistema coordenado local de la esquina ideal. El modelo de esquina-L en coordenadas locales es:

$$\begin{aligned} M_{local}(\mathbf{x}, \beta, a) &= U_{Rohr}(\mathbf{x}, \beta, a) \otimes G(\mathbf{x}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_{Rohr}(\xi, \beta, a) G(\mathbf{x} - \xi) d\xi , \end{aligned} \quad (58)$$

donde \otimes significa convolución. Rohr reporta que la integración de la Ecuación (58) se simplifica utilizando una función de error Gaussiana $\phi(x)$. Utilizando las siguientes

expresiones:

$$\begin{aligned}
t &= \tan(\beta/2) \\
\zeta_2 &= tx - y \\
\phi(x) &= \int_{-\infty}^x G(\xi)d\xi \\
\phi(\mathbf{x}) &= \phi(x)\phi(y) \\
D(\mathbf{x}) &= G(x)\phi(y) \quad ,
\end{aligned}$$

la mitad superior de la esquina sin el factor de amplitud queda definida por

$$\begin{aligned}
M(\mathbf{x}, \beta) &= \int_{\xi=0}^{\infty} \int_{\eta=0}^{t\xi} G(\mathbf{x} - \xi)d\xi \\
&= \phi(\mathbf{x}) - m(\mathbf{x}, \beta) \quad ,
\end{aligned} \tag{59}$$

donde

$$m(\mathbf{x}, \beta) = \int_{-\infty}^x D(\xi, t\xi - \zeta_2)d\xi \quad .$$

El modelo de esquina-L M_{local} queda completo al sumar la reflexión sobre el eje de simetría. Si se emplea $\mathbf{x}^\# = (x, -y)$, reflexión sobre el eje y y $\phi(-y) = 1 - \phi(y)$, propiedad de la función de error. El modelo de esquina-L en coordenadas locales es descrito por:

$$\begin{aligned}
M_{local}(\mathbf{x}, \beta, a) &= a(M(\mathbf{x}, \beta) + M(\mathbf{x}^\#, \beta)) \\
&= a(\phi(x) - m(\mathbf{x}, \beta) - m(\mathbf{x}^\#, \beta)) \quad .
\end{aligned} \tag{60}$$

Finalmente, al trasladar el sistema de coordenadas locales a $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ y rotar un ángulo α . Incluyendo el factor de escala σ introducido por el filtro Gaussiano. La transformación es dado por:

$$\mathbf{x}^*(\alpha, \sigma) = \left(\frac{(x - x_0) \cos(\alpha) + (y - y_0) \sin(\alpha)}{\sigma}, \frac{-(x - x_0) \sin(\alpha) + (y - y_0) \cos(\alpha)}{\sigma} \right) \quad .$$

El modelo de esquina-L propuesto por Rohr se expresa como:

$$M_{Rohr}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \alpha, \beta, a, \sigma) = M_{local}(\mathbf{x}^*(\alpha, \sigma), \beta, a) \quad . \tag{61}$$

La Figura 19 muestra la ubicación de los siguientes elementos:

(x_0, y_0) Ubicación del punto de esquina.

β Ángulo de apertura de la esquina.

ξ Eje de simetría de la esquina.

η Eje normal a ξ .

α Ángulo de rotación del eje de simetría ξ .

a Amplitud de la esquina.

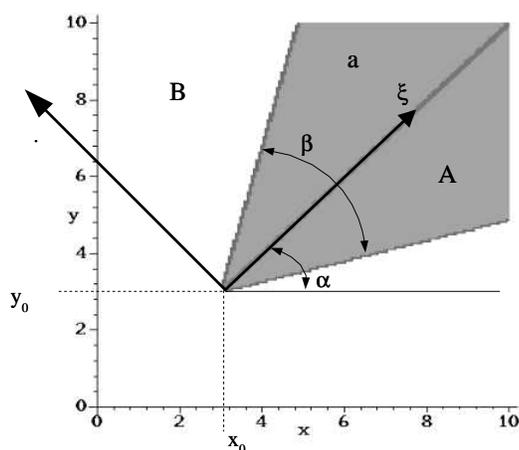


Figura 19: Modelo general de esquina-L M_{Rohr} .

El método de descenso de gradiente propuesto por Powell en 1964 y el método de Levenberg-Marquardt propuesto en 1963 fueron utilizados por este autor. Dichos métodos se emplean para ajustar los 7 parámetros de su modelo $x_0, y_0, \alpha, \beta, a, \sigma$ a los valores de intensidad en tonos de gris de la estructura en estudio. En particular, en esta tesis se emplea el método de Levenberg-Marquardt.

Rohr analiza el desplazamiento de la esquina-L causado por el efecto de difuminado del filtro Gaussiano. Finalmente, concluye que la ubicación de la esquina es independiente de la altura de la esquina a y que tiene una relación lineal con respecto al factor de difuminado σ y una relación no lineal con respecto al ángulo de apertura de la esquina β .

Modelo Paramétrico Propuesto por Deriche y Giraudon

Deriche y Giraudon proponen un modelo similar al de Rohr. Ambos trabajos parten de un modelo de esquina ideal convolucionado con un filtro Gaussiano. Su desarrollo inicia con una función escalón unitaria del borde ideal (Deriche y Blazka, 1993; Deriche y Giraudon, 1993), representada por:

$$U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} .$$

El modelo de esquina-L ideal, función escalón unitaria, con respecto a los eje ξ y η está dado por:

$$U_{D\&G}(\xi, \eta, \beta) = U(\xi)U(t\xi - \eta) \quad . \quad (62)$$

Convolucionando $U_{D\&G}$ y $G(x, y)$, Deriche y Giraudon reportan la siguiente expresión que representa a su modelo general de esquina-L, ver Figura 19:

$$M_{D\&G}(x, y, x_0, y_0, \alpha, \beta, \sigma, A, B) = (A-B)M_1 \left(\frac{\xi(x, y, x_0, y_0, \alpha)}{\sigma}, \frac{\eta(x, y, x_0, y_0, \alpha)}{\sigma}, \beta \right) + B, \quad (63)$$

donde:

$$\xi(x, y, x_0, y_0, \alpha) = (x - x_0) \cos(\alpha) + (y - y_0) \sin(\alpha) \quad (64)$$

$$\eta(x, y, x_0, y_0, \alpha) = -(x - x_0) \sin(\alpha) + (y - y_0) \cos(\alpha) \quad (65)$$

$$M_1(\xi, \eta, \beta) = M_0(\xi, \eta, \beta) + M_0(\xi, -\eta, \beta) \quad (66)$$

$$M_0(\xi, \eta, \beta) = \phi(\xi)\phi(\eta) - \int_{z=-\infty}^{\xi} G(z)\phi(\eta + t(z - \xi))dz \quad (67)$$

Las expresiones M_{Rohr} y $M_{D\&G}$ son equivalentes. Nótese que en el desarrollo que emplean estos autores existen similitudes. Tal es el caso de la definición de las ecuaciones de traslación y rotación de los sistemas coordenados locales de la esquina (ξ, η) , Ecuaciones (64) y (65) de la aproximación de Deriche, con respecto a la definición de $\mathbf{x}^*(\alpha, \sigma)$ propuesta por Rohr. El modelo de esquina local M_{local} , Ecuación (60), y M_1 , Ecuación (66), de los trabajos de Rohr y Deriche respectivamente. En términos de modelado, Deriche incluye el nivel de intensidad dentro de la esquina A y la intensidad fuera de la misma B , ver Figura 19. En oposición, Rohr modela la amplitud de la esquina a .

La diferencia fundamental entre estos dos métodos radica en la forma de localizar el desplazamiento del punto de esquina. Deriche basa su análisis en el comportamiento de su modelo y los detectores de Beaudet y Dreschler y Nagel, en el espacio de escalas lineal Gaussiano. Deriche y Giraudon reportan que la posición exacta de la esquina puede ser detectada en el cruzamiento por cero del modelo en el espacio de escalas Gaussiano, es decir, cuando el Laplaciano del modelo es igual a cero. Adicionalmente, afirma que los detectores $K_{Beaudet}$ y $K_{D\&N}$ se desplazan a lo largo de una recta bisectriz que pasa por la posición correcta del punto de esquina, en el espacio de escalas Gaussiano. A partir de estas dos observaciones, propone un método para determinar el punto de esquina. Por otro lado, el desplazamiento de la esquina-L de Rohr, obedece a un comportamiento no lineal con respecto al ángulo de apertura β .

Modelo Paramétrico Propuesto por Olague y Hernandez

Olague y Hernández proponen en el 2002 la Función Unitaria de Borde (FUB) determinada por

$$U_1(x, y, \mathbf{P}) = \pm \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{(t-y \cdot \tan(\theta_1) - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} dt + \frac{1}{2} \quad ,$$

donde el producto de dos FUB construyen una Función Unitaria de Esquina (FUE) que caracteriza en forma independiente cada borde y por ende el difuminado, orientación y dirección del mismo. La FUE se escala por dos parámetros (A y B) que determinan el piso y la amplitud de la esquina modelando totalmente una esquina Tipo L, con un ángulo de apertura de $[0, \pi/2]$. Esta expresión es la siguiente:

$$M_L = U_1(I, P_0) \cdot U_y(I, P_1) \cdot A + B \quad .$$

Olague y Hernández proponen el uso de operaciones aritméticas sencillas como suma, resta, multiplicación y división de varias FUE's para construir esquinas complejas. La Figura 20 muestra el modelo de una Esquina Tipo T construido a partir de 3 bordes.

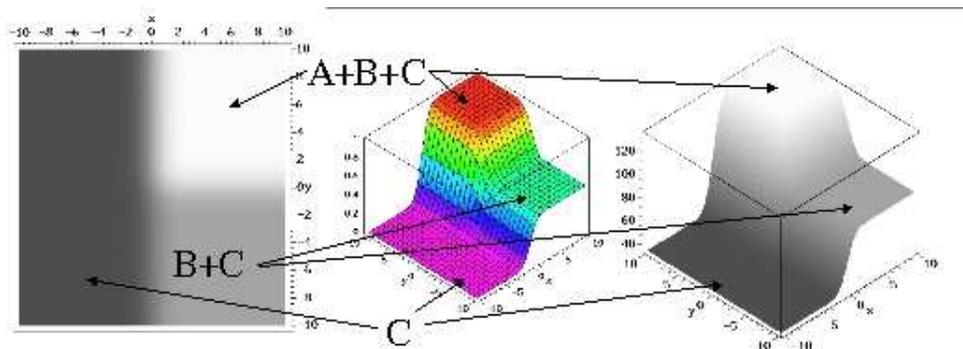


Figura 20: Esquina Tipo T generada a partir de 3 FUB.

El criterio de localización para el punto de esquina es determinado por la FUE. El punto de esquina es ubicado sobre la curva de nivel que satisface $FUE = 0.5$ y queda determinado por la distancia mínima entre la intersección de las asíntotas que orientan al borde.

Otra contribución de este trabajo es el enfoque del ajuste del modelo como un problema de optimización. Esto permite proponer heurísticas para su resolución. Las técnicas utilizadas son Recosido Simulado, Escalando la Colina y un Algoritmo Evolutivo empleados como una optimización global y un ajuste local por Levenberg-Marquardt.

Este trabajo hace un estudio detallado de esquinas tipo L y el desplazamiento que existe de la esquina propuesta por otros modelos. En el capítulo siguiente se formalizan los conceptos de FUB y FUE para establecer una propuesta para el modelado metódico de esquinas complejas.

II.3 Conclusiones

En este capítulo se expusieron definiciones básicas como el concepto de imagen, el uso de la derivada de una Gaussiana para aproximar la derivada de una imagen, la función de autocorrelación y el concepto de esquina. Lo anterior con el objetivo de describir y comprender los diferentes detectores de esquinas propuestos en el estado del arte.

Se mencionaron las diferentes características geométricas y físicas de una esquina, además de resaltar el efecto de difuminado en una imagen y sus posibles causas.

Al final del capítulo se discuten tres principales modelos paramétricos. En especial se hace mención del detector propuesto por Olague y Hernández (2002), donde se toman

las ideas principales para este trabajo.

Capítulo III

Modelado de esquinas y blancos retro-reflejantes

Dada la importancia de conocer la precisión en ubicar un punto de esquina, el establecer un criterio que permita ubicarla con una incertidumbre que oscile en centésimas de pixel, es de gran relevancia. Para esto ha sido necesario definir una expresión analítica que modele la esquina con gran exactitud.

Este capítulo hace mención a conceptos que permiten definir un modelo básico de borde. Esto hace posible representar una esquina simple y posteriormente extender el modelo a esquinas más complejas. El capítulo concluye con un criterio de ubicación de la esquina. De esta manera en la sección III.1 se abordan algunas definiciones básicas. Las secciones III.2 y III.3 introducen el modelado de una esquina sencilla. La sección III.4 extiende el modelo a esquinas complejas y se discute el criterio para la ubicación de una esquina sencilla y se generaliza hacia esquinas complejas y vértices. La sección III.5 plantea las características que debe cumplir un blanco retro-reflejante, así como una breve revisión del estado del arte y algunos conceptos básicos. Para definir en la sección III.6 un modelo analítico de un blanco retro-reflejante circular. Finalmente en la sección III.7 se presentan las conclusiones del presente capítulo

III.1 Preliminares

En el capítulo II, se describen las principales características de una esquina y las condiciones que debe cumplir una función para que represente una imagen. Dado lo anterior podemos proponer una función que se ajuste y modele una esquina descrita por los datos de una imagen digital.

Un borde es el elemento básico para modelar una esquina. Por lo tanto, primero se definirá una función que modele un borde.

Una función que es interesante estudiar es la función error, ya que además de representar una distribución de probabilidad Gaussiana sus propiedades permiten construir un modelo para una imagen.

Definición III.1.1 (Función error). La función error también llamada integral de la probabilidad Gaussiana, es un caso especial de la función Gamma incompleta. Su definición es:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad . \quad (68)$$

La Figura 21.a muestra la gráfica de la función error. Algunas propiedades de la función error son:

$$erf(0) = 0, \quad erf(\infty) = 1, \quad erf(-x) = -erf(x) \quad .$$

Nótese que una propiedad importante de la Función Error se presenta cuando

$$\lim_{t \rightarrow 0} erf\left(\frac{x}{t}\right) \quad . \quad (69)$$

Ya que el cambio entre -1 y 1 es más abrupto mientras t se acerca a cero y por ende, la pendiente o la razón de cambio entre estos dos niveles se incrementa. Esto se ejemplifica

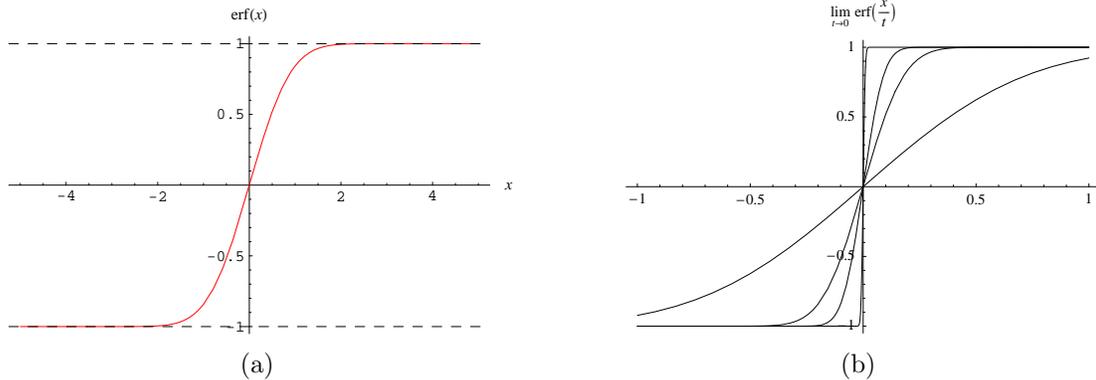


Figura 21: Función Error

en la Figura 21.b, donde se grafica la Ecuación (69) con diferentes valores de t .

De acuerdo a la Ecuación (68) se construye una nueva función dividiendo la $erf(x)$ entre 2 y sumando un medio de la distribución normal se obtiene:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \\
 F(x) &= \frac{erf(x)}{2} + \frac{1}{2} .
 \end{aligned} \tag{70}$$

Esta nueva expresión tiene la propiedad de tener su contradominio o imagen en el intervalo $[0, 1]$ (ver Figura 22.b), además de ser una distribución de probabilidad. Estas características podrán ser utilizadas para proponer un modelo analítico de borde.

III.2 Modelo analítico de un borde

Para definir un modelo de borde se toma como base la Ecuación (70), la cual se extiende a \mathbb{R}^2 y se sustituye adecuadamente la variable independiente x ; con lo anterior se define:

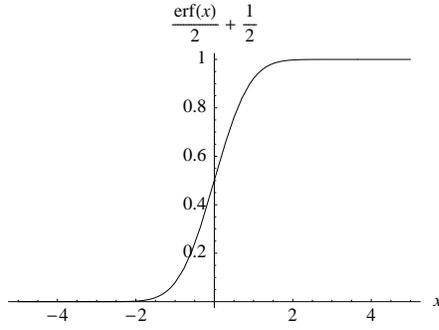


Figura 22: Gráfica de la función de $F(x) = \frac{\text{erf}(x)}{2} + \frac{1}{2}$

Definición III.2.1 (Función Unitaria de Borde). Para todo (x, y) que pertenece a una region I de \mathbb{R}^2 y para el conjunto de parámetros $P = \{\sigma, \mu, \theta\}$. Se define la Función Unitaria de Borde ($FUB : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$) como:

$$U_x(I, P) = \pm \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{(x-y \cdot \tan(\theta) - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{1}{2} . \quad (71)$$

Donde: $\mu \in I$, $\sigma > 0$ y $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

La Ecuación (71) se simplifica como:

$$U_x(I, P) = \pm \frac{1}{2} \text{erf} \left(\frac{x - y \cdot \tan(\theta) + \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} . \quad (72)$$

La Figura 23 muestra la gráfica de la FUB con diferentes valores de σ . La magnitud de este parámetro caracteriza el fenómeno de difuminado producido por el proceso de discretización de la imagen.

La orientación del borde es dada por la ecuación de la recta

$$x = y \cdot \tan(\theta) - \mu , \quad (73)$$

donde θ es el ángulo (como lo muestra la Figura 24) medido en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje y . El parámetro μ es el cruce por cero sobre el eje x de

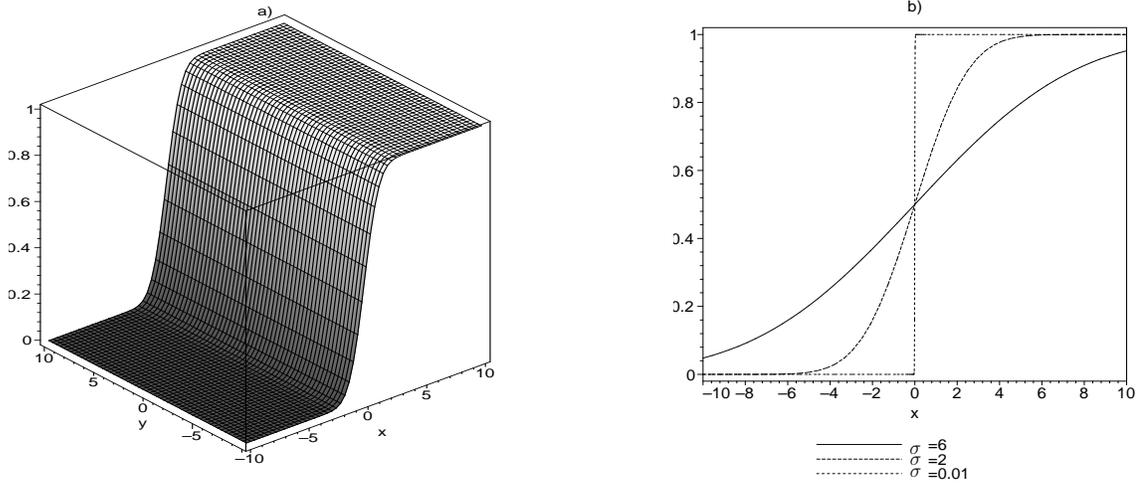


Figura 23: Función Unitaria de Borde. a) Gráfica 3D de la FUB. b) Distintos valores de σ en una vista sobre el plano $x-z$

la Ecuación (73). Nótese que si y es la variable independiente de la Ecuación (73), es decir:

$$y = x \cdot \tan(\theta) - \mu \quad , \quad (74)$$

el ángulo θ del borde será medido desde el eje x y se denotará a la FUB como $U_y(I, P)$, ver Figura 24

El signo de la función error en la FUB (ver Ecuación (72)), determina el sentido de “apertura” del borde. De esta forma se llamará FUB positiva si el signo de la función error es positivo y en caso contrario se llamará FUB negativa. Por ejemplo, sea $U_x(I, P)$ una FUB positiva con valores $\mu = 0, \sigma = 1$ y $\theta = 0$, crecerá hasta su valor máximo para todas las $x > 0$. En caso de que la FUB sea negativa $U_x(I, P)$ tomará su valor máximo para todas las $x < 0$. Lo mismo sucede para las FUB $U_y(I, P)$. Si $U_y(I, P)$ es positiva

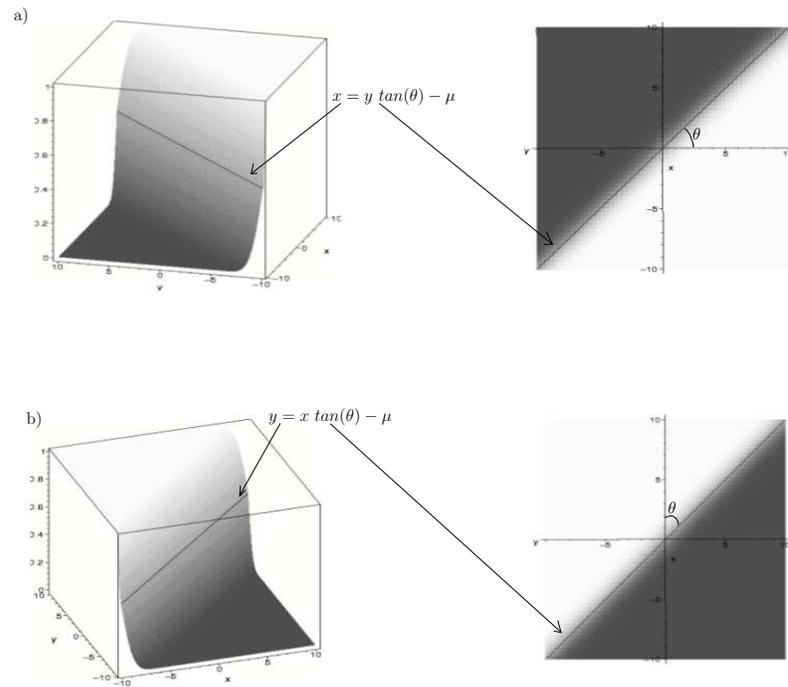


Figura 24: La recta. a) Gráfica 3D de la FUB. b) Distintos valores de σ en una vista sobre el plano $x-z$

con $\mu = 0$, $\sigma = 1$ y $\theta = 0$ tomará su valor máximo para todas las $y > 0$, en caso de que $U_y(I, P)$ sea negativa tomará su valor máximo para todas las $y < 0$, ver Figura 25.

La FUB describe en su totalidad las variaciones de intensidad de una imagen en una sola expresión. Lo anterior implica el no ser necesario un proceso de convolución con un filtro Gaussiano para representar el fenómeno de difuminado en una imagen, como se proponen en trabajos previos (Deriche y Giraudon, 1993; Rohr, 1992).

Nótese que la FUB tiene su contradominio en el intervalo $[0, 1]$. Dado que en esta tesis se analizan imágenes digitales en un intervalo de grises de $[0, 255]$ se proponen 2

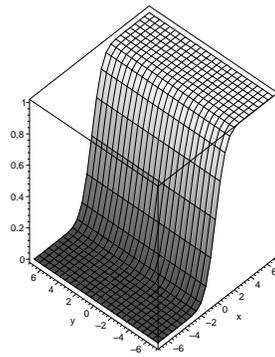
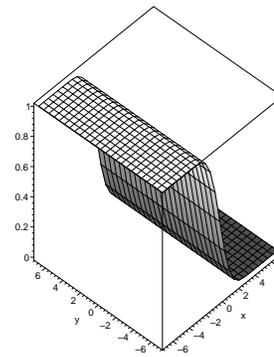
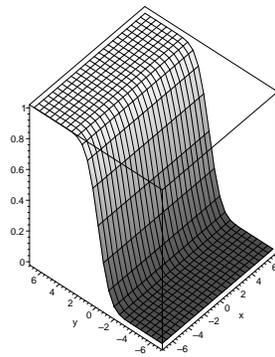
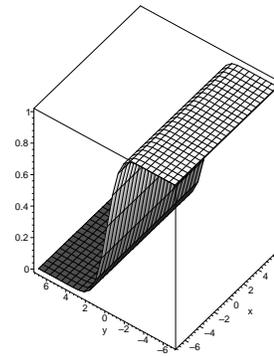
(a) $U_x(I, P)$ positivo(b) $U_x(I, P)$ negativo(c) $U_y(I, P)$ positivo(d) $U_y(I, P)$ negativo

Figura 25: Los diferentes signos en la FUB determinan el sentido de “apertura” del borde

factores de escala A, B como sigue:

$$U'_x(I, P) = U_x(I, P) \cdot (A - B) + B \quad , \quad (75)$$

donde A es el nivel de gris superior del borde y B es el nivel de gris inferior del borde también llamado *piso* del borde.

III.3 Modelo de esquina L

De acuerdo con la definición II.1.2 una esquina es generada por la intersección de dos o más bordes. Un caso especial es la esquina en L que se construye con la intersección de solo dos bordes. De esta forma se define lo siguiente.

Definición III.3.1 (Función Unitaria de Esquina). Se define la Función Unitaria de Esquina (FUE) como el producto de dos FUB

$$FUE = U_x(I, P_0) \cdot U_y(I, P_1) \quad , \quad (76)$$

donde $P_0 = \{\sigma_0, \mu_0, \theta_0\}$ y $P_1 = \{\sigma_1, \mu_1, \theta_1\}$

Para modelar por completo una imagen de esquina en L es necesario escalar la FUE en el rango de la escala de grises, esto se representa como:

$$ML = U_x(I, P_0) \cdot U_y(I, P_1)(A - B) + B \quad , \quad (77)$$

donde A es el nivel de gris superior del borde y B es el nivel de gris inferior del borde.

La expresión escrita de esta forma permite modelar varias características como son:

1. ML modela el grado de difuminado σ en la dirección principal de cada borde en forma independiente. Este fenómeno se manifiesta en las imágenes digitales debido a los sensores CCD rectangulares, como es el caso de la cámara Pulnix 9701. La cual se usó para capturar las imágenes digitales que se presentan en esta tesis.
2. El ángulo de orientación en cada borde es independiente. Lo anterior implica que ML no tenga restricción en el ángulo de apertura α en el intervalo de $]0, \pi[$. La siguiente Ecuación se deduce directamente del modelo y permite calcular el ángulo α a partir de los ángulos de cada borde:

$$\alpha = \arccos(s_{U_1} s_{U_2} (\text{sen}(\vartheta_1) \cos(\vartheta_2) + \text{sen}(\vartheta_2) \cos(\vartheta_1))) \quad , \quad (78)$$

donde el s_{U_1} y s_{U_2} son los signos de cada borde. Ver Figura 26.

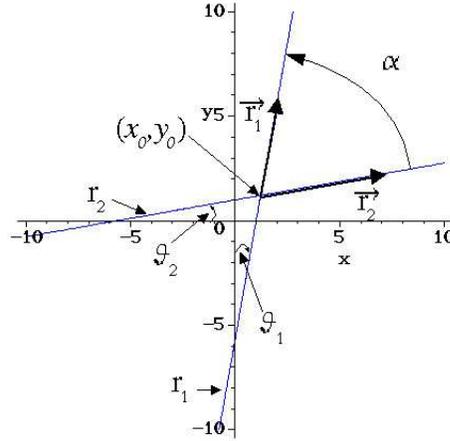


Figura 26: Punto de intersección (x_0, y_0) de los bordes \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 y el ángulo de apertura α de la esquina.

3. La esquina puede estar ubicada en cualquier punto de la region I . Esto es, se obtiene la orientación y ubicación de la esquina alrededor de cualquier punto dentro de una región (*ventana*) de la imagen digital. En este caso el punto de intersección (x_0, y_0) de los bordes es un punto de referencia para localizar la esquina, esto es:

$$\left(x_0 = -\frac{\tan(\vartheta_1)\mu_2 + \mu_1}{\tan(\vartheta_2)\tan(\vartheta_1) - 1}, y_0 = -\frac{\tan(\vartheta_2)\mu_1 + \mu_2}{\tan(\vartheta_2)\tan(\vartheta_1) - 1} \right), \quad (79)$$

donde el origen del sistema coordenado de referencia es el punto central de la región de la imagen (ver Figura 26).

4. Los niveles de gris dentro y fuera de la esquina se ajustan automáticamente.

La forma en que se pueden modelar las esquinas con un ángulo de apertura α entre

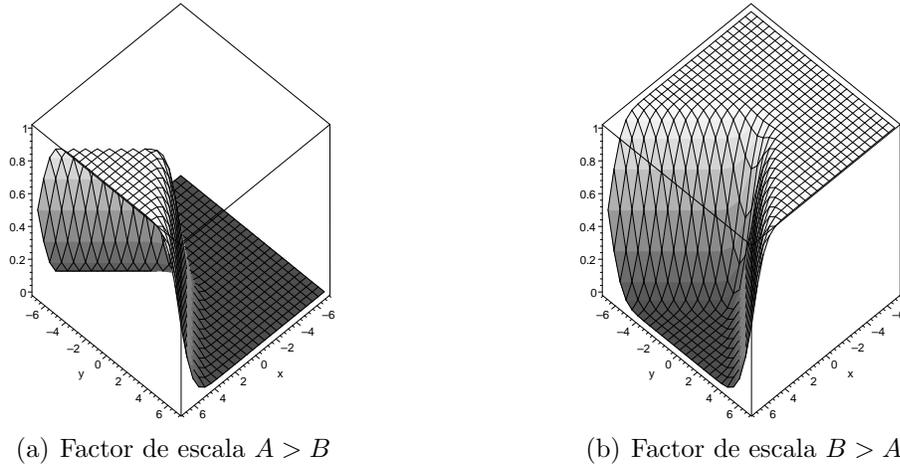


Figura 27: Esquina tipo L

$]0, 2\pi[$ depende de la magnitud de los parámetros de escala A y B . Si se desarrolla la Ecuación (77) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 ML &= U_x(I, P_0) \cdot U_y(I, P_1) \cdot (A - B) + B \\
 &= U_x(I, P_0) \cdot U_y(I, P_1) \cdot A - U_x(I, P_0) \cdot U_y(I, P_1) \cdot B + B \\
 &= \underbrace{U_x(I, P_0) \cdot U_y(I, P_1) \cdot A}_{L} + B \cdot \underbrace{(1 - U_x(I, P_0) \cdot U_y(I, P_1))}_{L \text{ complemento}}. \quad (80)
 \end{aligned}$$

Esto es, ML es construido a partir del producto de dos FUB más su complemento, ambos términos con un peso diferente; lo que implica que si $A > B$ la esquina tendrá un ángulo de apertura α dentro del intervalo $]0, \pi[$. En caso contrario, si $A < B$ entonces $\alpha \in [\pi, 2\pi[$. La Figura 27 ilustra lo anterior.

III.4 Modelo de vértice o esquinas múltiples

En la sección anterior se discute el caso particular cuando solo dos bordes se intersectan y forman una esquina tipo L. En esta sección se extiende al caso cuando n bordes se intersectan formando estructuras más complejas como esquinas T, K, X, etc.

Nótese que el problema de construir una esquina múltiple puede tener varias soluciones. Por ejemplo una esquina tipo T, puede construirse a partir de 3 bordes (ver Figura 20, o bien se puede ver como la suma de dos esquinas tipo L (ver Figura 28). Si la esquina se construye a partir de 3 bordes entonces estará en función de la geometría de cada uno de ellos, lo cual implica analizar directamente la geometría de la imagen y que cada tipo de esquina tenga un modelo particular. La ventaja de este proceso es la optimización con un mínimo de parámetros en la función resultante.

En el caso en que se construya una esquina múltiple a partir de esquinas tipo L, la función resultante dependerá directamente de los diferentes niveles de gris. Esto es, sólo es necesario un análisis de los niveles de gris que componen a una esquina múltiple. Lo anterior implica un modelo general para las esquinas que tienen el mismo número de niveles de gris diferentes y un proceso metódico para construir una esquina múltiple. De esta forma Rohr (1992) propone lo siguiente:

Dada una región $I \in \mathbb{R}^2$ que corresponde a una imagen, y un conjunto de parámetros desconocidos $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, respectivamente. El modelo general $G_M(I, P)$ que describe las variaciones de intensidad de cierto clase de esquinas es la superposición de funciones que modelen la esquina en L, llamada $G_{ML}(I, P)$

$$G_M(I, P) = \sum_{i=0}^{N-1} G_{MLi}(I, P) \quad N \geq 2 \quad , \quad (81)$$

de forma análoga se define:

Definición III.4.1. [Vértice] Sea I una región en una imagen y $P = \{P_0, P_1, \dots, P_{N-1}\}$ un conjunto de parámetros. Se define un vértice o esquina compleja como sigue:

$$V(I, P) = \sum_{i=0}^{N-1} FUE_i(I, P_i) \cdot (A_i - B) + B \quad N \geq 2 \quad , \quad (82)$$

donde la FUE es la Función Unitaria de Esquina definida en la Ecuación (76), $P_i = \{\sigma_{i0}, \mu_{i0}, \theta_{i0}, \sigma_{i1}, \mu_{i1}, \theta_{i1}\}$ que corresponde a los parámetros de cada FUE y $A_i, B \in [0, 255]$

Esta definición permite construir esquinas múltiples como composición de esquinas en L. Esto es, que cada nivel de gris diferente represente una esquina en L. Por ejemplo, si se modela una esquina tipo T, solo basta con sumar dos FUE (en otras palabras $N = 2$) con los parámetros de escala A_0, A_1 y B como se muestra en la Figura 28. Es decir

$$\begin{aligned} V_T &= \sum_{i=0}^1 FUE_i(I, P_i) \cdot (A_i - B) + B \\ &= FUE_0(I, P_0) \cdot (A_0 - B) + FUE_1(I, P_1) \cdot (A_1 - B) + B \quad . \end{aligned} \quad (83)$$

En general, la Ecuación (83) modela todas aquellas esquinas que comprendan 2 niveles de grises más el suelo. Dentro de este rango están las esquinas tipo T, Y y K. Si $N = 3$ se podrán modelar las esquinas tipo X. Para $N \geq 4$ siguen estructuras más complejas o vértices de N niveles de grises.

Nótese que para cada FUE son necesarios 7 parámetros diferentes (3 parámetros σ, μ y θ para cada FUB y 1 parámetro A_i de escala) más el parámetro del suelo. Es decir para N niveles de grises se obtiene la siguiente relación:

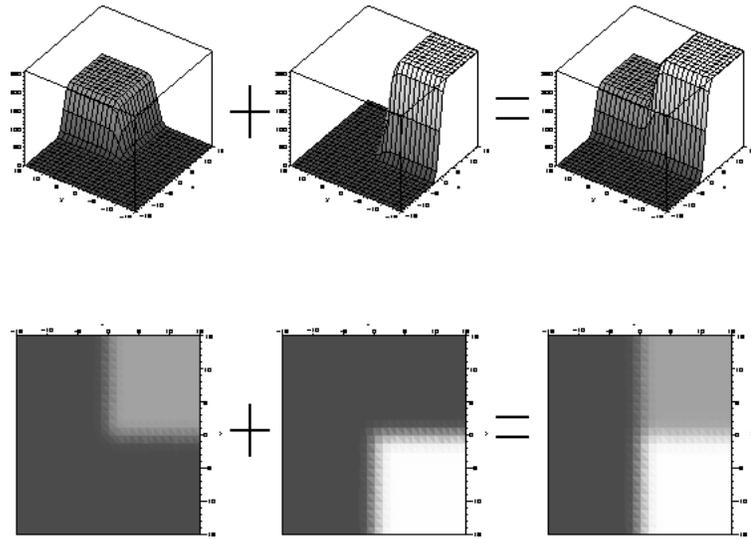


Figura 28: Construcción de una esquina tipo T a partir de dos esquinas tipo L

$$n = 7N + 1 \quad , \quad (84)$$

donde n es el número total de parámetros

III.4.1 Criterio de ubicación del punto de esquina

Para lograr la localización exacta del punto de esquina en una imagen, se considera el efecto de difuminado a lo largo de la dirección principal de cada borde. En la literatura este efecto es llamado “*Desplazamiento de la esquina*” (Rohr, 1992; Deriche y Giraudon, 1993; Olague y Hernández, 2005).

Olague y Hernández (2005) proponen que el punto exacto de esquina, en una esquina tipo L es ubicado como sigue:

Proposición III.4.1. *El punto exacto de esquina (x_e, y_e) está ubicado sobre la curva de nivel $M_L(x, y, \mathbf{P}) = 0.5$ y que satisface la mínima distancia Euclidiana D_{min} al punto de intersección (x_0, y_0) .*

donde el punto (x_0, y_0) (ver Ecuación (79)) es la intersección de las rectas definidas en la Ecuación (73) para cada borde que construye la *FUE* y $M_L(x, y, \mathbf{P}) = 0.5$ nos indica la curva de nivel a 0.5 de la *FUE* que define al modelo de la esquina tipo L, ver Figura 29.

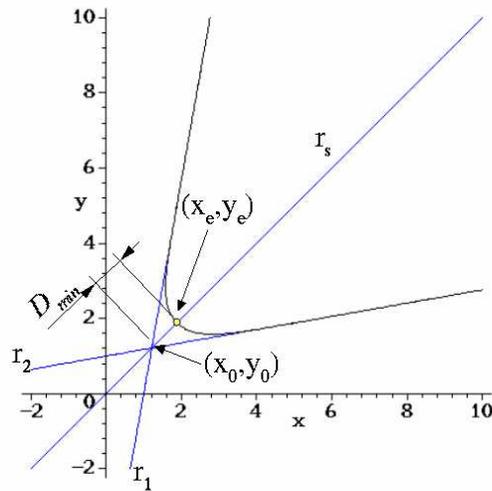


Figura 29: Criterio de ubicación exacta del punto de esquina $P_e(x_e, y_e)$.

Geoméricamente las rectas en la dirección principal de cada borde (ver Ecuación (73)) son las asíntotas a las curvas de contorno $M_L(x, y, \mathbf{P}) = 0.5$. Esto quiere decir que existe igual cantidad de señal o energía hacia el piso como hacia la cresta del borde, a partir de dichas rectas.

Al tener un difuminado (σ) que no es necesariamente el mismo en cada borde, el punto exacto de la esquina varía con respecto a este parámetro. Si ambos difuminados son iguales, (x_e, y_e) es igual al punto de intersección que se genera con la recta (r_{bis}) que bisecta al ángulo de apertura α de la esquina y la curva de nivel a 0.5, ver Figura

30. Una explicación a mayor detalle la menciona Hernández Valencia (2002).

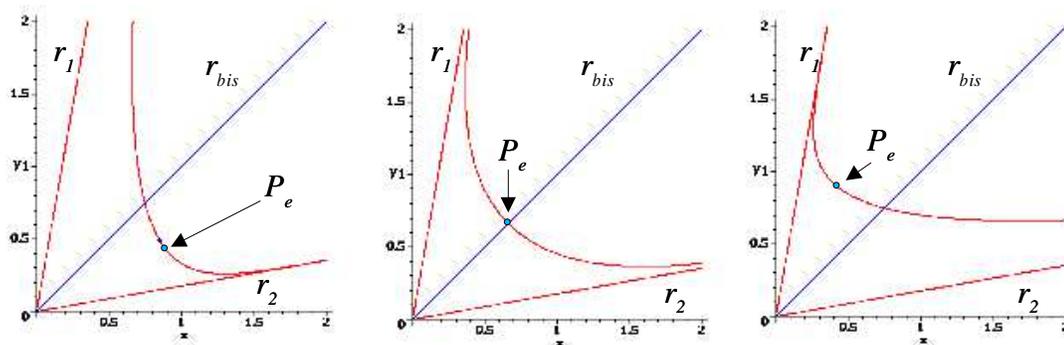


Figura 30: Distorsión de la curvatura $M_L(x, y, P) = 0.5$ causada por diferentes valores de difuminado. a) $\sigma_1 = 0.5, \sigma_2 = 4$. b) $\sigma_1 = \sigma_2 = 1.0$. c) $\sigma_1 = 4, \sigma_2 = 0.5$.

Para extender el criterio de ubicación del punto exacto de una esquina tipo L a esquinas múltiples se consideran las siguientes proposiciones.

Proposición III.4.2. *Una esquina múltiple se construye por la superposición de varias esquinas tipo L.*

Proposición III.4.3. *A cada esquina tipo L le corresponde un punto de esquina exacto (x_e, y_e) .*

Proposición III.4.4. *Los diferentes puntos (x_e, y_e) son los vértices de una figura geométrica.*

Proposición III.4.5. *El punto exacto de una esquina múltiple (x_m, y_m) es el centroide de la figura construida a partir de la proposición III.4.4.*

Nótese que el centroide $P_c = (x_c, y_c)$ puede ser visto como el punto que minimiza la suma de las distancias desde el punto P_c hacia n puntos $\mathbf{x}(x, y)$ considerados. Esto se expresa como:

$$\mathbf{P}_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \quad . \quad (85)$$

Si en este caso la esquina múltiple es vista como una distribución de probabilidad entonces el centroide se encuentra a la misma distancia de cada punto (x_e, y_e) y por lo tanto está en la región de máxima probabilidad que ubica el punto de esquina.

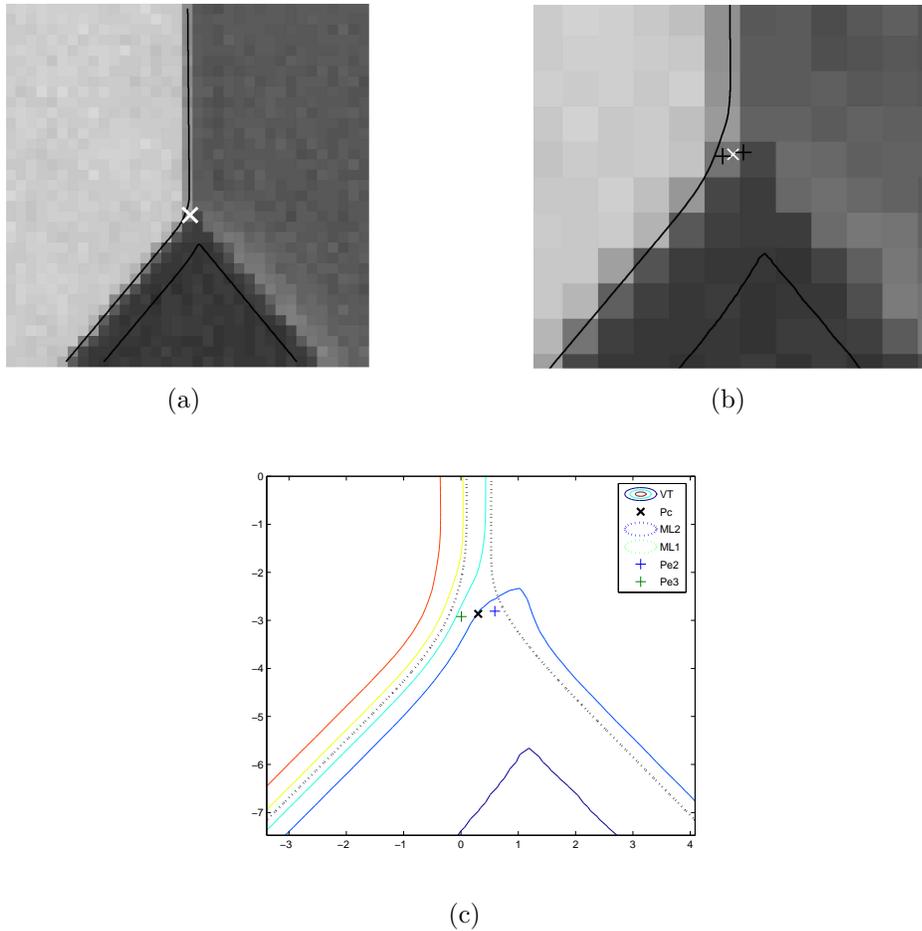


Figura 31: Criterio para ubicar el punto esquina P_c a partir de los puntos P_{e2} y P_{e3} que corresponden a los puntos de esquina de ML_1 y ML_2

La Figura 31 ilustra el criterio de ubicación del punto esquina (x_m, y_m) en una esquina tipo Y. La Figura 31.c muestra las curvas de nivel del modelo de la esquina tipo Y. Las líneas punteadas son curvas de contorno de los modelos de esquina en L que construyen a la esquina tipo Y, mientras los puntos Pe_2 y Pe_3 son sus respectivos puntos de esquina representados por un signo “+” en la figura. Nótese como el punto esquina se ubica entre ambos. Las Figuras 31.a y 31.b muestran las curvas de contorno del modelo de esquina tipo Y sobre la imagen y la localización del punto propuesto

III.5 Modelado de un blanco retro-reflejante

Un blanco retro-reflejante es un patrón predeterminado que se utiliza para distinguir puntos sobresalientes en una escena así como marcar objetos con poca textura (Shortis *et al.*, 1994; Fiala, 2005; Zhou, 1990). El uso de blancos retro-reflejantes, es una práctica común tanto en fotogrametría como en visión artificial, para llevar a cabo tareas de alto nivel como el reconocimiento de objetos, mediciones de alta precisión, calibración de cámaras, detección de movimiento, algoritmos de correspondencia entre dos o más imágenes, reconstrucción tridimensional, aplicaciones industriales, seguimiento de objetos, entre otras.

A partir de actividades como: calibración de cámaras, mediciones de alta precisión y reconstrucciones tridimensionales, surge la necesidad de crear estimadores a nivel sub-píxel para la ubicación de estos puntos de control (Valkenburg *et al.*, 1994). En esta sección se discuten cuales son los procedimientos más comunes para la localización de estos puntos. Esto dará pie a proponer un nuevo modelo analítico de blancos retro-reflejantes.

III.5.1 Tipos de blancos

Los blancos pueden ser clasificados en dos conjuntos, aquellos que son marcas puestas sobre el objeto y aquellos que señalan el objeto con haces de luz. A continuación se mencionan algunos de ellos:

- **Blancos retro-reflejantes.** El uso de este tipo de blancos es común debido a que su característica principal es reflejar la luz que incide sobre ellos en la misma dirección (ver Figura 32.a).
- **Esferas.** Los blancos son pequeñas esferas blancas, su característica principal es ser invariante frente a la rotación.
- **Blancos retro-reflejantes negros sobre un fondo blanco.** Son pequeños puntos negros que están inmersos en un fondo blanco. Lo anterior provoca el efecto de un mayor contraste en la imagen.
- **Cruces.** Se suele utilizar este tipo de marcas para señalar puntos sobresalientes en terrenos.
- **Blancos codificados.** Su característica principal es representar información para su identificación. En este sentido existen los blancos concéntricos codificados, estos son blancos retro-reflejantes rodeados por segmentos que representan un código binario (ver Figura 32.a). En la actualidad existen sistemas que manejan blancos codificados de diversos tipos como el propuesto por Fiala (2005) en su sistema ARTag o como el propuesto por Hattori *et al.* (2002).
- **Blancos proyectados por luz laser.** Este tipo de señalización es frecuente en superficies.

- **Blancos proyectados por luz blanca.** Un objeto puede ser marcado por la proyección de luz blanca.

El presente trabajo se basa en el modelado y detección de blancos retro-reflejantes circulares. Un blanco retro-reflejante circular es construido por un material llamado *Scotchlite*. Éste material es una película la cual es recubierta por una capa de pequeñas esferas de aproximadamente $50\mu\text{m}$ de diámetro. Cada esfera actúa como un prisma retro-reflejante, en donde la luz que incide es reflejada en la misma dirección. Para lograr esta característica el índice de refracción debe ser aproximado a 1.9. La Figura 32.a muestra la imagen de un blanco codificado, la Figura 32.b es la imagen de un blanco retro-reflejante circular y la Figura 32.c ilustra el comportamiento de la luz incidente en el blanco retro-reflejante.

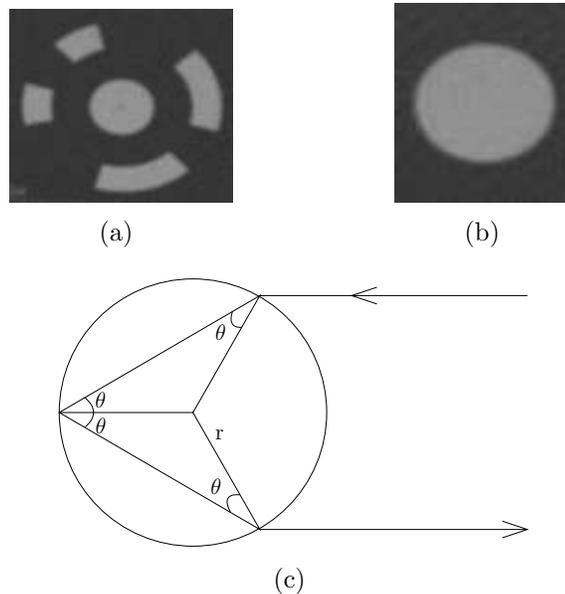


Figura 32: Blancos retro-reflejantes

III.5.2 Técnicas de reconocimiento y localización de blancos

Autores como Valkenburg *et al.* (1994), Jansa *et al.* (1993) y Shortis *et al.* (1994) hacen comparaciones entre diferentes métodos para la localización a nivel sub-píxel de los blancos retro-reflejantes, algunas de estas técnicas son:

Localización del centroide

Este algoritmo es tal vez el más usado en la literatura (Jansa *et al.*, 1993; Valkenburg *et al.*, 1994; Chen y Clarke, 1992; Zhou, 1990). Básicamente se calcula el centro de gravedad de los píxeles que forman el blanco. Estos son determinados al aplicar un umbral a la imagen y convertir estos a valores binarios, de esta forma separando el fondo de los blancos retro-reflejantes. El valor promedio no ponderado de la posición de todos los píxeles del blanco corresponde al centro del blanco. El principal problema de este método es la selección de un umbral apropiado, lo que es crucial para que el borde sea bien definido. Pequeñas variaciones del umbral pueden cambiar significativamente la localización del centro del blanco retro-reflejante. La expresión utilizada para calcular el centroide es descrita en la Ecuación (85).

Una variación de este método consiste en ponderar la localización del centroide. El principio es básicamente el mismo, pero la posición de los píxeles son ponderados con el correspondiente valor de gris del píxel. Este algoritmo no es sensible a la elección de un umbral incorrecto debido a que los pequeños pesos de los píxeles oscuros e inciertos, no afectan el resultado de forma significativa. Algunos autores proponen elevar al cuadrado los pesos de cada píxel (Shortis *et al.*, 1994).

Trinder (1989) documenta el error sistemático en la ubicación del blanco si existe una asimetría significativa en el perfil del blanco provocado por una mala elección del

umbral.

Extracción y ajuste a los bordes

En este método, se propone ajustar por mínimos cuadrados un modelo de elipse, al grupo de puntos que se suponen están sobre el perímetro del blanco. Los parámetros determinados de forma directa o indirecta por el ajuste son: el centro de la elipse, los semiejes mayor y menor y el ángulo de rotación de la elipse en el plano x, y .

En este contexto (Jansa *et al.*, 1993) propone la extracción de bordes con el detector de Förstner (ver sección II.2.2) y con un ajuste de mínimos cuadrados determina la posición del borde, el cual es presentado como sigue:

$$S = \frac{\text{sen}(t) \sum(G_x G_x X + G_y G_y Y) - \text{cos}(t) \sum(G_x G_y X + G_x G_y Y)}{\text{sen}^2(t) \sum(G_x G_x) - 2\text{cos}(t)\text{sen}(t) \sum(G_x G_y) - \text{cos}^2(t) \sum(G_y G_y)} \quad (86)$$

$$X_0 = S \text{sen}(t) \quad (87)$$

$$Y_0 = -S \text{cos}(t) \quad (88)$$

Donde: t es el ángulo de la dirección del borde; G_x y G_y son el gradiente en la dirección x y y respectivamente; X y Y son las coordenadas de los pixeles de referencia; S es la distancia desde el borde al origen de la region de ajuste; (X_0, Y_0) es la posición del borde. Una vez obtenido la posición del borde, esta se ajusta a la ecuación de la elipse.

Algunos métodos están basados en la transformada de Hough. La transformada Hough considera puntos enlazados para determinar si están situados en una curva en forma específica. En general, sobre el punto (x_i, y_i) pasan un número infinito de líneas que satisfacen la ecuación $y_i = ax_i + b$ para diversos valores de a y b . Sin embargo,

al escribir la ecuación de la recta como $b = -x_i a + y_i$ y considerando el plano ab (también denominado *espacio parámetro*) se obtiene la ecuación de una única línea para un determinado (x_i, y_i) . Además, un segundo punto (x_j, y_j) también tiene una línea en el espacio de parámetros asociado con él, intersectando a la línea asociada con (x_i, y_i) en (a', b') , donde a' es la pendiente y b' la ordenada en el origen de la línea que contiene a (x_i, y_i) y (x_j, y_j) en el plano xy . De hecho todos los puntos contenidos en esta recta tienen líneas en el espacio parámetro que se intersectan en (a', b') . La Figura 33 muestra lo anterior.

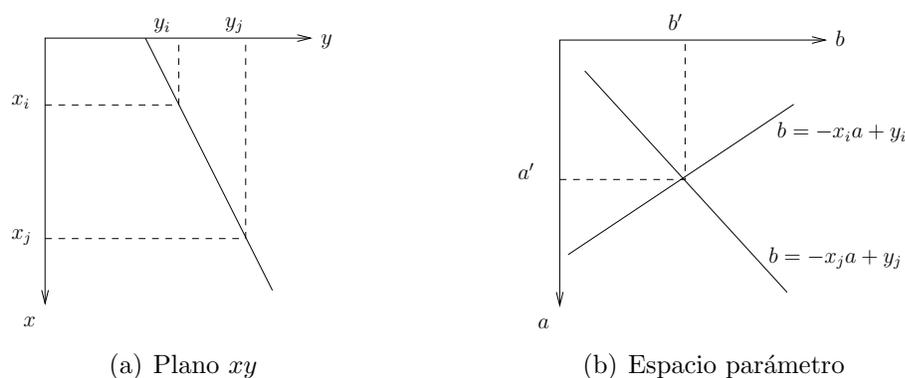


Figura 33: Correspondencia de los puntos en el plano xy al espacio de parámetros

La transformada Hough divide el espacio de parámetros en *células acumulador*, que se muestran en la Figura 34, donde $[a_{máx}, a_{mín}]$ y $[b_{máx}, b_{mín}]$ son los rangos esperados de los valores de la pendiente y ordenada. La célula de coordenadas (i, j) , con un valor de acumulador $A(i, j)$, corresponde al cuadro asociado con las coordenadas (a_i, b_j) . Por cada punto (x_k, y_k) del plano imagen, se fija el parámetro a igual a cada uno de los valores permitidos de división sobre el eje x y se resuelve para el b correspondiente utilizando la ecuación $b = -x_k a + y_k$. Las b resultantes se redondean después al valor

más próximo permitido en el eje x . Si una elección de a_p resulta ser la solución de b_q , se fija $A(p, q) = A(p, q) + 1$. Al final de este procedimiento, un valor de M en $A(i, j)$ corresponde a M puntos del plano xy situados en la línea $y = a_i x_i + b_j$. La precisión de colinearidad de estos puntos está determinada por el número de divisiones del plano ab .

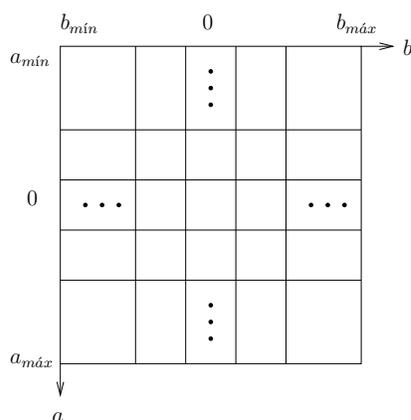


Figura 34: Cuantificación del plano de parámetros para utilizar la transformada de Hough

Nótese que al dividir el eje x en K incrementos y con n puntos en la imagen, éste método implica nK cálculos. Es decir de orden $O(n)$.

Una alternativa a la ecuación $y = ax + b$ para representar una línea es su representación normal $x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = \rho$. En este caso, en vez de líneas rectas, los lugares geométricos son curvas senoidales en el plano $\rho\theta$. Como antes M puntos colineales situados sobre una línea $x\cos(\theta_j) + y\sin(\theta_j) = \rho_i$ producen M curvas senoidales que se intersectan en (ρ_i, θ_j) en el espacio de parámetros. Al incrementar θ y resolver para el ρ correspondiente proporciona M entradas en el acumulador $A(i, j)$ asociada con la

célula determinada por (ρ_i, θ_j) .

De esta forma Ho y Chen (1995) proponen a partir del uso de la simetría geométrica global localizar todos los posibles centros de elipses y círculos en una imagen. Todos los puntos característicos son clasificados en sub-imágenes. Elipses y círculos con diferentes centros de simetrías se colocan en diferentes sub-imágenes. Entonces, la simetría geométrica es aplicada de nuevo a cada sub-imagen para encontrar todos los posibles grupos de 3 parámetros (longitud del eje mayor, longitud del eje menor y orientación) para elipses y un parámetro (radio) para círculos. Finalmente el concepto de *células acumulador* de la transformada de Hough es usado para extraer todas las elipses y círculos en la imagen de entrada.

Shortis *et al.* (2003) proponen el empleo de la transformada de Hough y una segmentación para el reconocimiento automático de blancos en la imagen. Dicha segmentación es a través de un umbral elegido dado el histograma de la imagen.

Modelado local por mínimos cuadrados

Este método se basa en el ajuste de los niveles de gris de una región de la imagen, en donde es localizado el blanco con un modelo.

Las ventajas de este método son: la sensibilidad al ruido es baja, las distorsiones perspectivas son calculadas automáticamente y la precisión de los valores que describen la calidad de la correspondencia pueden ser estimados como parte del ajuste. El proceso es mucho más lento que los descritos anteriormente.

Valkenburg *et al.* (1994) mencionan a la función *sinc* (seno cardinal) o función de muestreo como un posible modelo para representar un blanco. Al decrecer lentamente

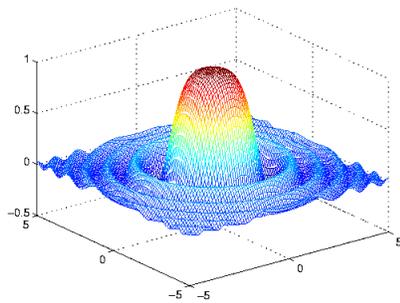
la función a cero (ver Figura 35.a), es necesario demasiados términos lo que representa una desventaja.

Generalmente se suele tomar la función de distribución Gaussiana 2-D como un modelo para el ajuste de un blanco (Shortis *et al.*, 1994), esta se escribe como sigue:

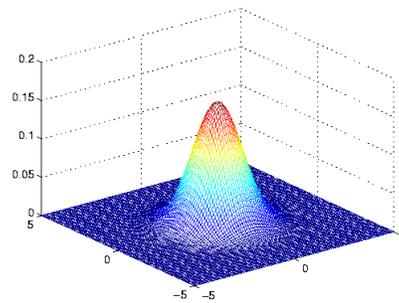
$$I = f(x, y) = \frac{K}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2\right]} \quad (89)$$

Donde: σ_x, σ_y son las desviaciones estandard en cada dirección, ρ es el coeficiente de correlación y K es un parámetro de escala, ver Figura 35.b.

El factor de escala K es usado para modificar la amplitud de la superficie creada por la Ecuación (89). La correlación normalmente es cero y el valor de escala es determinado por la suma de los niveles de gris. El factor de correlación es comparable al factor de rotación en una elipse.



(a) Función *sinc*



(b) Función de distribución Gaussiana

Figura 35: Funciones comúnmente utilizadas para el ajuste de un blanco circular retro-reflejante

Nótese que ambas funciones no modelan el posible difuminado de los bordes. En el caso de la función de distribución Gaussiana, el factor de escala no varía linealmente con respecto a los niveles de grises presentados en la imagen, ya que su amplitud varía con respecto a σ . Debido a esto los mejores resultados en el ajuste son reportados solo para pequeñas regiones de a lo más 15 x 15 píxeles (Jansa *et al.*, 1993; Shortis *et al.*, 1994) aplicando un filtro Gaussiano sobre la imagen, este es usado para que el modelo tenga un mejor rango de convergencia hacia la imagen.

III.5.3 Distorsiones comunes en un blanco circular retro-reflejante

Jansa *et al.* (1993) hacen un estudio sobre los diferentes factores que afectan la ubicación precisa del centro de un blanco circular retro-reflejante. Estas se mencionan a continuación.

Un factor que contribuye considerablemente en el difuminado de un blanco retro-reflejante es la iluminación. El difuminado se incrementa a medida que el ángulo de intersección del rayo de luz con la superficie del blanco decrece. Si la fuente de luz se ubica cerca de la cámara, el punto más brillante en la imagen aparece cerca del centro del blanco, mientras que el brillo gradualmente disminuye del centro de la imagen a la orilla y se convierte en un mínimo a lo largo del perímetro del blanco. Si la fuente de la luz se ubica a cierta distancia de la cámara, el punto más brillante se localiza fuera del centro.

El tamaño es un parámetro importante el cual afecta la calidad de la ubicación del punto en forma significativa, la mayoría de los métodos de localización de puntos utilizan las orillas del blanco más o menos directamente. La precisión de localización

del blanco se deteriora si el número de píxeles en los bordes comparados al número de píxeles que se encuentran en el centro se incrementa debido al difuminado. De esta forma (Jansa *et al.*, 1993) proponen que el diámetro debe de estar en un rango de 9 a 15 píxeles.

La forma del blanco en la imagen depende considerablemente de la dirección de observación, los círculos se convierten más o menos en elipses oblicuas (no definidas). La exactitud de la correspondencia de una elipse oblicua es muy pobre y se debe de tomar en consideración que el centro de la elipse no es idéntico con la imagen del centro del blanco (Jansa *et al.*, 1993).

Coe *et al.* (1995), propone un método para el cálculo del centro de la elipse a partir de principios de geometría proyectiva. Ya que en general el centro de un círculo no se proyecta en el centro de la imagen de un círculo. En este caso son usados los axiomas de incidencia y el teorema de Briachon.

III.6 Modelo analítico de un blanco retro-reflejante circular

Tomando en cuenta las técnicas para localizar el centro de un blanco retro-reflejante circular y sus características. Se propone una función para modelar un blanco retro-reflejante circular. Este modelo es capaz de simular algunas características físicas como lo son el difuminado del blanco y la amplitud del mismo. Las características geométricas que pueden ser modeladas por la función propuesta son:

- La degeneración del blanco circular hacia una elipse debido a la proyección en la imagen.
- El tamaño del blanco el cual solo es limitado por el tamaño de la imagen.
- Dada una región en la que es localizado el blanco, este puede estar centrado sobre cualquier punto. Es decir puede sufrir una traslación en la imagen.
- La orientación del blanco. Dada una región de estudio en donde es localizado el blanco, se considera que el blanco puede sufrir una rotación en un intervalo de 0 a 2π .
- El centro del círculo o en su defecto de la elipse se calcula como un parámetro más del modelo

De esta forma se define lo siguiente:

Definición III.6.1 (Función unitaria de un blanco retro-reflejante). Para todo (x, y) que pertenece a una región I de \mathbb{R}^2 y para el conjunto de parámetros $P = \{r_1, r_2, h, k, \theta, \sigma\}$. Se define la Función Unitaria de un blanco retro-reflejante ($FUBR : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$) como:

$$FUBR(I, P) = 1 - \operatorname{erf} \left(2 \frac{((x-h)\cos(\theta) + (y-k)\operatorname{sen}(\theta))^2}{r_1^2} + 2 \frac{((y-k)\cos(\theta) - (x-h)\operatorname{sen}(\theta))^2}{r_2^2} \right)^{\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)}, \quad (90)$$

donde: $h, k \in I$, $r_1, r_2, \sigma > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi]$.

La imagen o contradominio de la función $FUBR$ es definida en el intervalo $[0, 1]$. Es necesario un factor de escala para que este intervalo esté dentro del rango de niveles de gris de la imagen, es decir de 0 a 255. De esta forma la función queda definida como:

$$\begin{aligned} FBR(I,P) &= \left(1 - \operatorname{erf} \left(2 \frac{((x-h)\cos(\theta)+(y-k)\operatorname{sen}(\theta))^2}{r_1^2} + 2 \frac{((y-k)\cos(\theta)-(x-h)\operatorname{sen}(\theta))^2}{r_2^2} \right)^{\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)} \right) (A-B) + B \\ &= A + (B-A) \operatorname{erf} \left(2 \frac{((x-h)\cos(\theta)+(y-k)\operatorname{sen}(\theta))^2}{r_1^2} + 2 \frac{((y-k)\cos(\theta)-(x-h)\operatorname{sen}(\theta))^2}{r_2^2} \right)^{\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)}. \end{aligned} \quad (91)$$

La Figura 36.a muestra la gráfica de la superficie generada por la función FBR en un intervalo de $[-30, 30]$ en x y y . Una vista del plano x, y se muestra en la Figura 36.b. Los parámetros del modelo mostrado en la Figura 36 son: $r_1 = 15, r_2 = 15, h = 0, k = 0, \sigma = .1, A = 255, B = 0$.

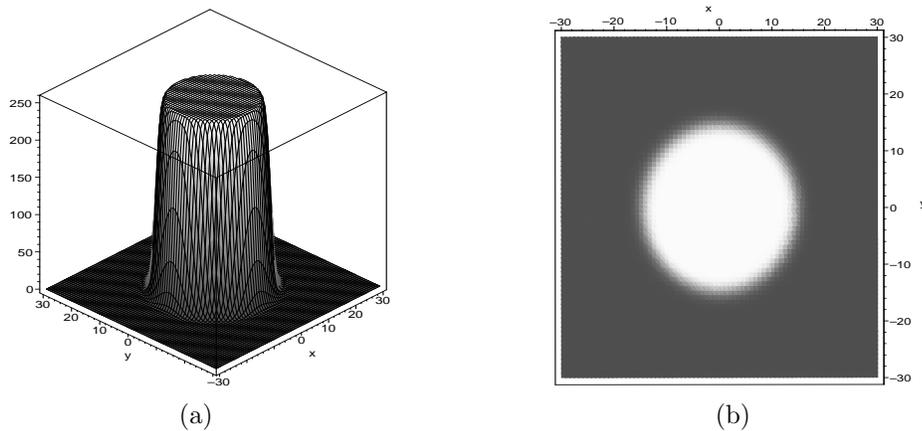


Figura 36: Gráficas del modelo paramétrico de un blanco retro-reflejante

Los parámetros r_1 y r_2 determinan el radio de la circunferencia del blanco (cuando $r_1 = r_2$), o en su defecto, la magnitud de los ejes principales de la elipse que el blanco

retro-reflejante describe en la imagen (cuando $r_1 \neq r_2$), no siendo estos, propiamente la magnitud de los ejes de la elipse (aunque su relación es directa). El blanco retro-reflejante puede estar centrado en cualquier parte de la región de estudio I . Los parámetros h y k provocan que el modelo pueda desplazarse a lo largo de la región I y por lo tanto ubica el centro del modelo en las coordenadas (h, k) . La orientación del modelo se determina por la transformación de coordenadas implícitas en la función FBR , donde θ , es el ángulo de rotación medido desde el eje de las abscisas del marco de referencia. La Figura 37 muestra la gráfica de una FBR en el plano x, y , donde los parámetros r_1 y r_2 son diferentes, formando una elipse. En este caso el centro de la elipse es desplazado al punto $(5, 5)$ y la elipse rotada a un ángulo de $\pi/4$ con respecto al eje x .

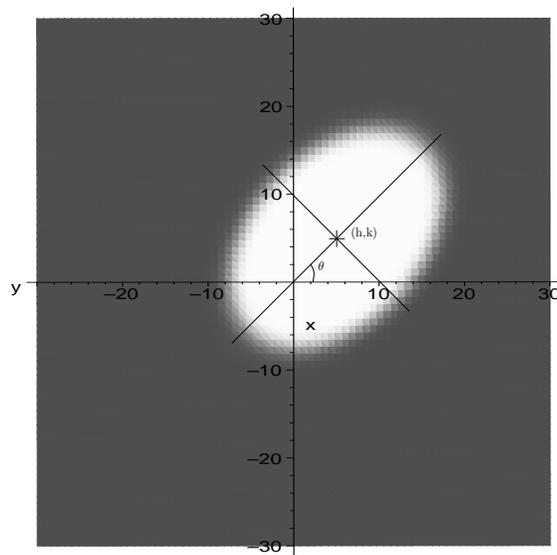


Figura 37: Gráfica de la FBR con parámetros: $r_1 = 15, r_2 = 10, h = 5, k = 5, \sigma = .1, \theta = \pi/4, A = 255, B = 0$.

La transición entre los niveles de gris B y A queda determinado por la magnitud del parámetro σ en el modelo FBR . Si σ es 1 la función FBR crece suavemente de B hasta alcanzar el valor de A en el punto (h, k) (se supone $B < A$). En el caso que σ sea muy cercano a cero la función pasa de B a A en un intervalo muy reducido. Es decir al variar σ , el modelo decrece del punto central hacia los bordes de la circunferencia o en su caso de la elipse, la Figura 38 muestra dicho efecto. En ésta figura se grafica el perfil de los modelos mostrados en las Figuras 39.a, 39.b y 39.c con valores de $\sigma = 1$, $\sigma = .5$ y $\sigma = .1$ respectivamente.

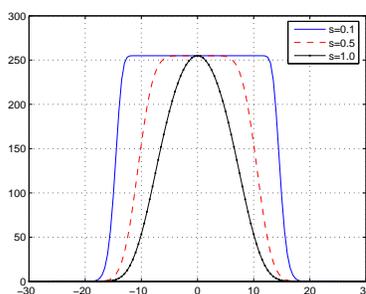


Figura 38: Gráfica de diferentes FBR en el plano x, z para valores de $\sigma = 1$, $\sigma = .5$ y $\sigma = .1$. Los parámetros: $r_1 = 15, r_2 = 15, h = 0, k = 0, \sigma = .1, \theta = \pi/4, A = 255, B = 0$, son comunes

En la imagen el efecto de difuminado se presenta como una pérdida de definición en los bordes, en este caso en los límites del blanco retro-reflejante. Lo anterior se puede entender como un “ensachamiento” y degradado del borde sobre el rango de niveles de gris. De esta forma un comportamiento deseado del modelo para emular el difuminado, no es el descrito en el párrafo anterior, ya que no sólo consiste en suavizar la transición del suelo al techo, si no en representar el borde de la circunferencia o en su defecto de la

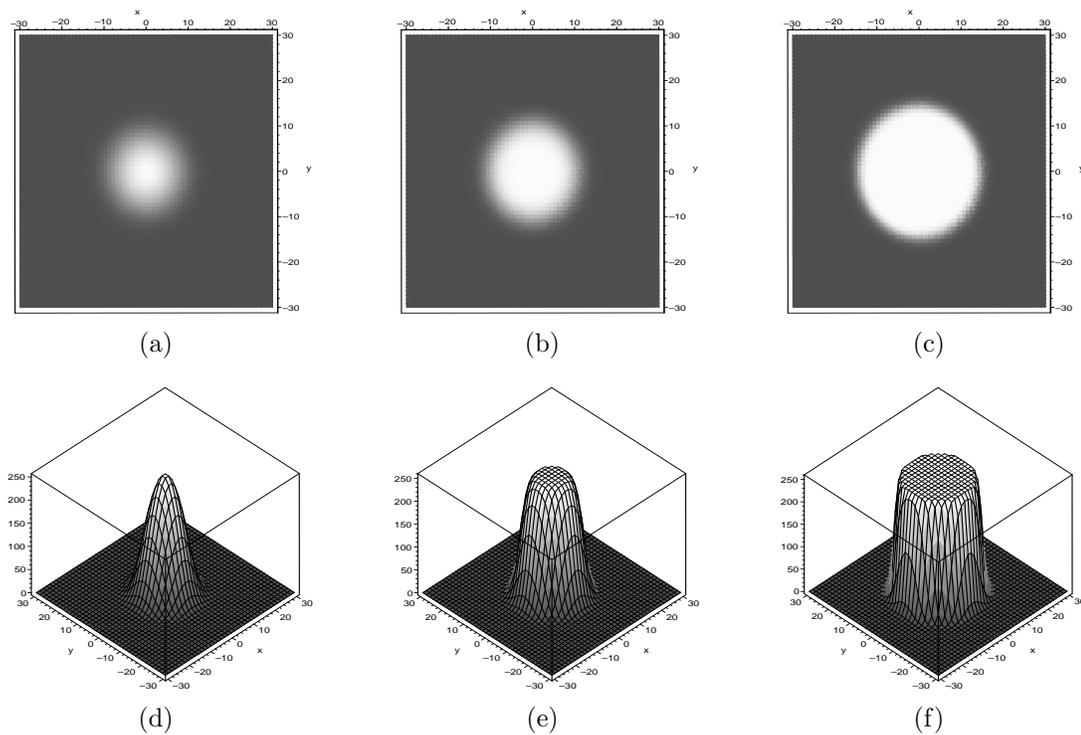


Figura 39: Gráficas del Modelo Paramétrico de un blanco retro-reflejante con valores de $\sigma = 1$, $\sigma = .5$ y $\sigma = .1$. Las gráficas a), b) y c) muestran una vista x, y del modelo, mientras las gráficas d), e) y f) son los respectivos modelos 3D

elipse en el punto central del difuminado. La Figura 40 ilustra lo anterior con diferentes difuminados. Por lo tanto para representar este fenómeno no sólo es necesario variar el parámetro σ del modelo, sino también los parámetros r_1 y r_2 .

La Tabla II lista los parámetros de los modelos FBR_1 , FBR_2 y FBR_3 presentados en las Figuras 40 y 41. En este caso se mantiene $r_1 = r_2$ para obtener un modelo de un blanco retro-reflejante circular. Las Figuras 41.a, 41.b y 41.c muestran los modelos FBR_1 , FBR_2 y FBR_3 respectivamente en una vista sobre el plano x, y , mientras las Figuras 41.d, 41.f y 41.e visualizan las gráficas de las superficies generadas en cada caso.

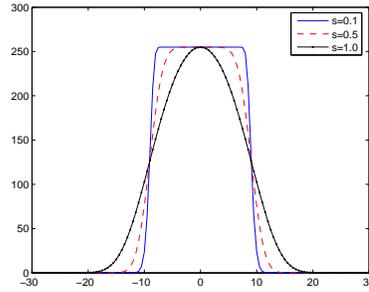


Figura 40: Gráfica de diferentes FBR en el plano x, z para valores de $\sigma = 1$, $\sigma = .5$ y $\sigma = .1$. y con diferentes valores de r_1 y r_2

Tabla II: Parámetros de los modelos FBR_1 , FBR_2 y FBR_3

	r_1	r_2	h	k	θ	σ	A	B
FBR_1	26	26	0	0	0	1.0	255	0
FBR_2	18.1	18.1	0	0	0	0.5	255	0
FBR_3	13.1	13.1	0	0	0	0.1	255	0

Una característica importante de este modelo, es la capacidad de ser ajustado a blancos retro-reflejantes sin restricción del tamaño en pixeles que éste represente.

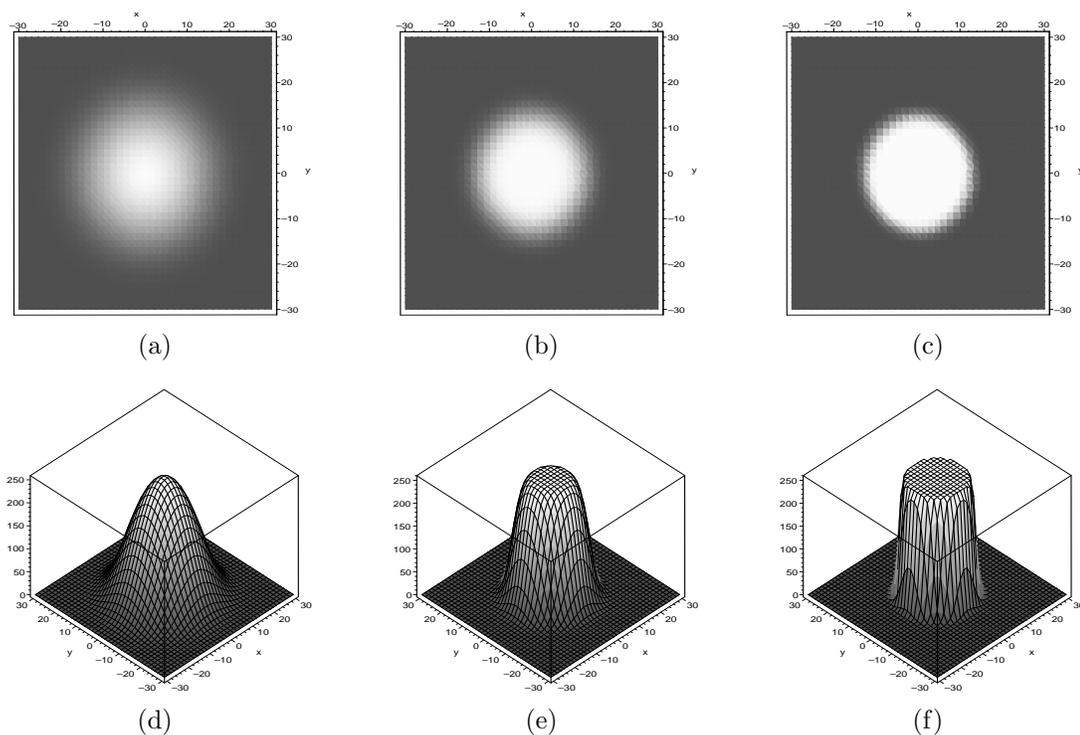


Figura 41: Gráficas de los modelos FBR_1 , FBR_2 y FBR_3 . Las gráficas muestran 3 tipos de difuminado, con valores de $\sigma = 1$, $\sigma = .5$ y $\sigma = .1$ respectivamente. En este caso los valores de r_1 y r_2 son diferentes en cada gráfica. Las Figuras a), b) y c) muestran una vista x, y de los modelos FBR_1 , FBR_2 y FBR_3 respectivamente, mientras las Figuras d), e) y f) son los respectivos modelos 3D

III.7 Conclusión

En este capítulo se abordaron algunos preliminares que permitieron definir una Función de Borde Unitaria (FUB) formalmente. Una FUB es capaz de modelar características físicas y geométricas que describen a un borde en una imagen digital. A partir de la FUB se definió la Función Unitaria de Esquina (FUE) y el Modelo de esquina en L (ML) que es la función base para generar esquinas complejas en forma metódica. Al definir una esquina múltiple como la suma de dos o más esquinas en L permite proponer un criterio de localización del punto esquina acorde a las necesidades planteadas en el

Capítulo I y II.

En la última parte de este capítulo y tomando en cuenta los conceptos básicos se ha definido la Función Unitaria de un Blanco Retro-reflejante (FUBR) que modela las características de un blanco retro-reflejante circular, lo que da pie a localizar su centro de forma directa; siendo este un parámetro más del modelo.

Capítulo IV

Modelado de datos y optimización multidimensional

Uno de los objetivos de las ciencias experimentales es proponer modelos que se ajusten a un grupo de observaciones dadas. El enfoque común es seleccionar o diseñar una función de mérito que mida el error ya sea en forma directa o indirecta entre los datos y el modelo propuesto. El modelo generalmente contiene un grupo de parámetros que son ajustados para alcanzar un mínimo en la función de mérito, con el fin de encontrar el grupo de los mejores parámetros. El proceso de ajuste es básicamente un problema de minimización en varias dimensiones. Encontrar este grupo de parámetros dirigiendo a la función de mérito a un valor mínimo o máximo es considerado como un problema de optimización.

En este caso se discute como el ajuste de los datos, dados por la región I de la imagen y el modelo del vértice, definido en la sección III.4.1, es considerado un problema multimodal y por ende no trivial. Lo que implica aplicar una heurística como lo es el *downhill simplex* o un *algoritmo evolutivo* como metodología para lograr una optimización global. Así mismo, utilizar un proceso determinístico como Levenberg-Marquardt para una optimización local.

De esta forma en el presente capítulo se discuten las técnicas de ajuste y optimización que se utilizaron en el presente trabajo. En la sección IV.1 se abordan algunos puntos básicos como la definición de un problema de optimización global, así como algunos

conceptos y técnicas comunes de optimización local. La sección IV.2 se enfoca en la descripción del estimador χ^2 aplicado al método de Levenberg-Marquardt como criterio que permite evaluar el ajuste de un conjunto de parámetros dados. En la sección IV.3 se explican las heurísticas de *downhill simplex* para funciones multidimensionales y el *algoritmo evolutivo* ambos métodos empleados como técnicas de ajuste a un conjunto de datos. Finalmente, en la sección IV.4, se presentan las observaciones generadas en la implementación de estos algoritmos.

IV.1 Conceptos básicos

Definición IV.1.1 (Optimización Global). En general un problema de optimización requiere encontrar un conjunto $\mathbf{P} \in S \subset \mathbb{R}^n$ donde \mathbf{P} minimiza o maximiza una función de mérito u objetivo $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Sin pérdida de generalidad, solo es necesario considerar tareas de minimización, dado que maximizar $f()$ es equivalente a minimizar $-f()$. El problema entonces es encontrar un punto $\mathbf{P}_{min} \in S$ tal que $f(\mathbf{P}_{min})$ es un mínimo global sobre S . Es decir se requiere encontrar un P_{min} tal que:

$$\forall \mathbf{P} \in S : f(\mathbf{P}_{min}) \leq f(\mathbf{P}) \quad . \quad (92)$$

En esta clase de problemas el conjunto de parámetros \mathbf{P} que son parte del universo de solución S y es fuertemente restringido por los límites que debe asumir cada parámetro en \mathbf{P} , así como por los datos observados (Vandenberghe y Boyd, 2004). Además, en general los datos no son exactos por lo que están sujetos a errores de medición, lo que implica que el modelo no se ajuste con un error cero. Mas aún si la función objetivo en el punto P no es lineal, se suele tener un problema de optimización no convexa. Esto hace que el problema sea complejo y que se propongan diferentes metodologías, para su solución.

Existen diferentes técnicas que se pueden emplear en el proceso de optimización, tales como: las basadas en la evaluación de la función de mérito, las basadas en el descenso de gradiente (desarrollada por Newton), las basadas en lo que se conoce como

recocido simulado, y más recientemente las basadas en técnicas de computación evolutiva. Si la función de mérito es continua y unimodal, con un sólo máximo, el óptimo puede ser encontrado mediante movimientos definidos en la dirección de los gradientes locales (Salomon, 1998). Para una revisión de ejemplos de programas y métodos de aceleración de búsqueda, se recomienda la lectura correspondiente a las referencias Press *et al.* (1994) y Stoer y Bulirsch (1980). Si la función es multimodal, el método de descenso de gradiente sólo garantiza la existencia de un extremo local. Las técnicas evolutivas y de recocido simulado pueden ser aplicables para el problema de funciones multimodales. Si el planteamiento del problema requiere de más de una función de mérito, conocida en la literatura como “*optimización multi-objetivo*” Gen M. (2000), se pueden experimentar con las técnicas evolutivas. Así, la técnica de optimización depende de las características del problema. La idea de la mejor técnica, depende de un análisis particular del problema estudiado, sobre el rendimiento resultante de la implementación y experimentación de varias técnicas con el mismo problema. Este último concepto, es la principal motivación para implementar distintas técnicas de optimización multidimensional, sobre el detector de esquinas múltiples propuesto.

IV.1.1 Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson es un método basado en la expansión en series de Taylor de una función a su primera aproximación. Es decir si $y = f(x)$ y las $n + 1$ primeras derivadas existen en un intervalo alrededor de $x = a$ la expansión de Taylor sobre este punto es

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \dots$$

Al evaluar $f(x) = 0$ en la primera aproximación de la serie de Taylor; donde x_{actual} es la coordenada actual y $x_{actual+1}$ es la siguiente aproximación, se tiene

$$0 = f(x) = f(x_{actual}) + \frac{f'(x_{actual})}{1!}(x_{actual+1} - x_{actual}) \quad ,$$

$$x_{actual+1} = x_{actual} - \frac{f(x_{actual})}{f'(x_{actual})} \quad .$$

Para una función multidimensional, como es el caso de un problema de optimización se tiene: $f(\mathbf{P}) = f(p_1, \dots, p_n)$ un función objetivo con n variables a minimizar, $\nabla f(\mathbf{P})$ es el gradiente, $\mathbf{H}(\mathbf{P}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_k} \right)$, $j, k = 1, \dots, n$ es el Hessiano de f donde el mínimo se encuentra cuando el gradiente es cero, $\nabla f(\mathbf{P}) = 0$. En las cercanías de un punto \mathbf{P}_i , se expande $f(\mathbf{P})$ en la segunda aproximación de Taylor,

$$f(\mathbf{P}) \approx f(\mathbf{P}_i) + (\mathbf{P} - \mathbf{P}_i) \cdot \nabla f(\mathbf{P}_i) + \frac{1}{2}(\mathbf{P} - \mathbf{P}_i) \cdot \mathbf{H} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}_i) \quad , \quad (93)$$

tal que el gradiente es,

$$\nabla f(\mathbf{P}) = \nabla f(\mathbf{P}_i) + \mathbf{H} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}_i) \quad . \quad (94)$$

Comunmente se asigna $\nabla f(\mathbf{P}) = 0$ para determinar el siguiente punto en la iteración,

$$\mathbf{P} - \mathbf{P}_i = -\mathbf{H}^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{P}_i) \quad . \quad (95)$$

La parte izquierda de la ecuación representa los pasos finitos que se requieren para extraer el mínimo. La parte derecha de la Ecuación (95) implica el cálculo de la matriz del Hessiano. Esta matriz debe ser positiva definida, para que exista su inversa. En general, cerca del mínimo no existe garantía que \mathbf{H} sea positiva definida, por tal motivo existen métodos alternos que garantizan esta característica de \mathbf{H} , como por ejemplo, el método *cuasi-Newton* o el método *Levenberg-Marquardt* (Press *et al.*, 1994; Stoer y Bulirsch, 1980).

IV.1.2 Método de descenso de gradiente

Newton desarrollo el *método de descenso de gradiente*. Este método requiere del cálculo de gradiente $\nabla f(\mathbf{P})$ para encontrar el mínimo de f . El método inicia en un punto \mathbf{P}_0 . El siguiente punto \mathbf{P}_{t+1} está dado por una pequeña fracción λ en la dirección del gradiente local $\nabla f(\mathbf{P}_t)$, calculado en el punto actual \mathbf{P}_t . Si λ es lo suficientemente pequeña este procedimiento converge a un óptimo local. La siguiente ecuación es conocida como el método de descenso de gradiente:

$$\mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{P}_t - \lambda \nabla f(\mathbf{P}_t) \quad . \quad (96)$$

El método de descenso de gradiente únicamente puede ser aplicado a funciones $f(\mathbf{P})$ continuas y diferenciables. De esta forma, la búsqueda de un extremo está dirigida por una fracción del gradiente en el punto que se está evaluado P_t . Esto significa, que si λ es grande el método no puede alcanzar la cresta o valle de la función. Por otra lado, si λ es demasiado pequeña, el método no podrá buscar en otros valles o crestas de $f(\mathbf{P})$. De esta forma, el método de descenso de gradiente es considerado como un método de optimización local. Press *et al.* (1994), Schwefel (1995) y Stoer y Bulirsch (1980) proponen distintos algoritmos de aceleración del método de descenso de gradiente.

IV.2 Criterio de optimización

IV.2.1 Descripción del método de mínimos cuadrados

Cuando se quiere ajustar un conjunto de N puntos conocidos (x_i, y_i) , también llamados datos observados, a cualquier modelo dado con M parámetros ajustables p_j , $j = 1, 2, \dots, M$, el modelo que predice la relación funcional existente entre las variables independientes y dependientes es

$$f(x) = f(x; p_1, p_2, \dots, p_M) = f(x; \mathbf{P});$$

Para efectos de obtener los p_j parámetros que obedecen a las N diferentes mediciones experimentales se genera un sistema de ecuaciones

$$f(x_i) = f(x_i; p_1, p_2, \dots, p_M) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N \quad , \quad (97)$$

tal que p_j satisfice las observaciones. En general, se necesita $N \geq M$ ecuaciones para poder obtener los p_j parámetros que representen una solución única. Si $N > M$ el sistema se define como sobredeterminado, lo cual es deseable para validar al modelo en una diversidad de condiciones. Debido a que los valores de las observaciones y_i contienen errores en las mediciones. Estos sistemas generalmente no tienen una solución única. Consecuentemente, en lugar de buscar la solución exacta a la Ecuación (97), el problema se transforma en buscar la *mejor solución* (problema de optimización). Es decir encontrar los valores p_j que representen el mínimo error cuadrático entre los datos observados y el modelo, esto es:

$$\text{minimizar } a_1, a_2, \dots, a_M : \sum_{i=1}^M [y_i - f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_M)]^2 \quad . \quad (98)$$

La Ecuación (98) se conoce como *ajuste de mínimos cuadrados*, o *minimización del residuo de la norma Euclidiana*. El ajuste de mínimos cuadrados es una medida estadística del *error* entre las observaciones. En este caso los valores de intensidad de la imagen en tonos de gris son los datos y el modelo evaluado en los \mathbf{P} parámetros representa la hipótesis. Esto implica, conocer la distribución estadística de un conjunto de N eventos observados y su correspondencia a la función de distribución del valor esperado por la hipótesis. Así, el *estimador* χ^2 representa una cota:

$$Q = \chi^2 \equiv \sum_{i=1}^M \left(\frac{y_i - f(x_i; p_1, p_2, \dots, p_M)}{\sigma_i} \right)^2 \quad , \quad (99)$$

donde: x_i es el conjunto de observaciones y σ_i es la desviación estandar. Los valores

de la desviación estandar σ_i son una medida del error de las i -ésimas observaciones, presumiblemente conocida. Si esta medida de error es desconocida, puede asignarse un valor constante de $\sigma_i = 1$, lo cual no altera el comportamiento estadístico de χ^2 (Press *et al.*, 1994).

Si se asigna $\sigma_i = 1$ en la Ecuación (99), el criterio χ^2 es equivalente al ajuste de mínimos cuadrados expresado en la ecuación (98). Por tanto, se requiere minimizar Q para el conjunto de \mathbf{P} parámetros desconocidos, representados por:

$$\text{minimizar } Q(p_1, p_2, \dots, p_M) = Q(\mathbf{P})\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^M [y_i - f(x_i; p_1, p_2, \dots, p_M)]^2 \quad . \quad (100)$$

El ajuste basado en Q es el *estimador de máxima probabilidad* de los parámetros ajustados, la máxima probabilidad de que los \mathbf{P} parámetros sean los mejores, *si* los errores en las mediciones son independientes y distribuidos en forma normal con una desviación estándar constante. En el presente trabajo se emplea el estimador Q como *criterio* para medir la *calidad* del ajuste.

IV.2.2 Estimador χ^2 y el modelo de esquina

El proceso de localización de una esquina, se realiza por medio del ajuste de los parámetros \mathbf{P} al modelo $V(I, \mathbf{P})$ propuesto en la Ecuación (82). En este caso el conjunto de parámetros $\mathbf{P} = \{\sigma_{i0}, \mu_{i0}, \theta_{i0}, \sigma_{i1}, \mu_{i1}, \theta_{i1}, A_i, B\}$ donde $i = 1 \dots N$ que caracterizan al modelo del vértice propuesto en la definición III.4.1. El conjunto de datos es definido por una región cuadrada de tamaño $m \times m$ de la imagen digital $I = I(u_i, v_j)$. De esta forma las restricciones que deben cumplir los parámetros \mathbf{P} quedan limitadas a los diferentes valores reales que estos puedan tomar.

De esta forma el problema consiste en encontrar un conjunto de parámetros

$\mathbf{P} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}$, tal que para el conjunto de $m \times m$ observaciones $I(u_i, v_j)$, la diferencia cuadrática entre los datos I y el modelo $V(x_i, y_j, \mathbf{P})$ sea mínima. Esta relación es expresada por el estimador de máxima probabilidad:

$$\chi^2 \equiv Q = F(\mathbf{P}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m [I(u_i, v_j) - V(x_i, y_j, \mathbf{P})]^2 \quad , \quad (101)$$

minimización sobre p_1, p_2, \dots, p_n

donde:

n es el número de parámetros a minimizar del modelo.

m es el número de datos observados, equivalente al número de columnas multiplicado por el número de renglones de la región de estudio de la imagen.

$\mathbf{P} = \{\sigma_{i0}, \mu_{i0}, \theta_{i0}, \sigma_{i1}, \mu_{i1}, \theta_{i1}, A_i, B\}$ son los parámetros del modelo de vértice V .

$V(x_i, y_j, \mathbf{P})$ puede ser el modelo de esquina o blancos evaluado en el conjunto de parámetros \mathbf{P} en el sistema coordenado del modelo (x, y) .

$I(u_i, v_j)$ son los valores de intensidad de una imagen en niveles de gris. $I(u_i, v_j)$ es una región cuadrada de $m \times m$ pixeles, en el sistema coordenado de la imagen (u, v) .

$F(\mathbf{P})$ es el estimador χ^2 .

La expresión descrita por Q , Ecuación (101), incluye dos sistemas coordenados. El sistema coordenado de imagen (u, v) y el sistema coordenado del modelo (x, y) . Los sistemas coordenados de la imagen y del modelo son diferentes. El origen de una imagen, posición $(0,0)$, en el sistema coordenado de la imagen, está ubicada en el extremo

superior izquierdo. Apartir de ese punto las coordenadas (u, v) representan un desplazamiento positivo en números enteros hacia la derecha y hacia abajo respectivamente. Por otro lado, el sistema coordenado del modelo (x, y) es un sistema coordenado cartesiano, definido en el intervalo $[-w, +w]$, Figura 42. Por tanto, es necesario un conjunto de expresiones que permitan la transformación entre los sistemas coordenados. Si se quiere explorar la ventana definida en el intervalo $[-w, +w] \in I$ para un punto conocido (u_0, v_0) en el sistema coordenado de la imagen, las ecuaciones de transformación son:

$$\begin{aligned} u_i &= u_o + x_i & ; & & x_i &= i - 1 - w & ; & & i &= 1, 2, \dots, 2w + 1 \\ v_j &= v_o - y_j & ; & & y_j &= -j + 1 + w & ; & & j &= 1, 2, \dots, 2w + 1 \end{aligned} \quad (102)$$

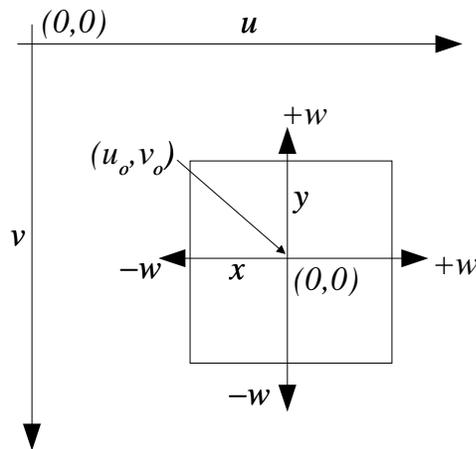


Figura 42: Sistema coordenado de la imagen (u, v) y el sistema coordenado del Modelo (x, y) . La relación entre los dos sistemas coordenados esta dada por la Ecuación (102).

En notación matricial, los elementos de la región pueden ser representados por:

$$\mathbf{A}(j, i) \quad i = 1, 2, \dots, 2w + 1 \quad j = 1, 2, \dots, 2w + 1 \quad ,$$

donde i son las columnas y j los renglones de la matriz \mathbf{A} .

Existen diversos métodos para resolver el problema de mínimos cuadrados, los cuales dependen del tipo de modelo: lineal o no lineal. La estructura representada por $V(x, y, \mathbf{P})$ es una expresión no lineal, por lo que el enfoque se realizará con técnicas que resuelvan este tipo de problemas.

Finalmente, la Ecuación (101) representa el *criterio de optimización*. En las secciones subsecuentes la función Q es llamada también *función de mérito*, *función de costo*, *función de aptitud* o *función objetivo*, dependiendo de la técnica de optimización que se analice.

IV.2.3 Mínimos cuadrados para modelos no lineales

Los métodos descritos en la sección IV.3 están enfocados a la búsqueda de un óptimo *global*. En esta sección se muestra el método de Levenberg-Marquardt desarrollado para el problema de mínimos cuadrados considerando modelos no lineales. El método de Levenberg-Marquardt asegura encontrar, *el mejor* conjunto de parámetros, siempre y cuando los valores de \mathbf{P} estén lo suficientemente cercanos a un mínimo. Por esta razón, el método de Levenberg-Marquardt es considerado un método de optimización *local*.

El método de Levenberg-Marquardt se emplea para acelerar la búsqueda del óptimo global, en la estructura general del proceso de optimización. En otras palabras, los procesos de optimización downhill simplex y evolutivo, *proponen* un conjunto de parámetros. Estos valores son iterados con el método de Levenberg-Marquardt. Si los valores propuestos están cercanos a un mínimo, entonces Levenberg-Marquardt devolverá el conjunto de parámetros óptimos. Esto implica, que el proceso de optimización global requiere únicamente de un ciclo de proceso para la búsqueda de un extremo. En caso contrario, el método de Levenberg-Marquardt no modifica los valores propuestos

por los procesos de optimización global.

El desarrollo de mínimos cuadrados para modelos no lineales, consiste en buscar un conjunto de expresiones que permitan encontrar un extremo. Para ello, se emplean los métodos de Newton-Raphson y descenso de gradiente. Este procedimiento se muestra como sigue:

Ecuaciones generales

La Ecuación (102) representa el criterio de optimización. Esta expresión puede aproximarse a un segundo orden, cerca de un punto mínimo, por:

$$F(\mathbf{P}) \approx \gamma + \nabla F(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{P} + \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{P} \quad , \quad (103)$$

donde $\nabla F(\mathbf{P})$ es el gradiente de χ^2 y \mathbf{H} es el Hessiano. Si la aproximación es buena, puede emplearse el método de Newton, Ecuación (95) para encontrar el mínimo \mathbf{P}_{min} a partir de la posición actual \mathbf{P}_{act} en un sólo salto. Esta expresión es:

$$\mathbf{P}_{min} = \mathbf{P}_{act} + \mathbf{H}^{-1} \cdot [-\nabla F(\mathbf{P}_{act})] \quad . \quad (104)$$

A esta expresión se le conoce como *el método de la Inversa del Hessiano*.

Si la aproximación de χ^2 a un segundo orden de la serie de Taylor en el punto actual \mathbf{P}_{act} , se encuentra *lejos* del mínimo local, entonces la búsqueda del mínimo puede intentarse con el método de *descenso de gradiente*. Esto es:

$$\mathbf{P}_{act+1} = \mathbf{P}_{act} - \lambda \nabla F(\mathbf{P}_{act}) \quad . \quad (105)$$

El gradiente de la función de mérito χ^2 es:

$$\frac{\partial F(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}_k} = -2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m [I(u_i, v_j) - V(x_i, y_j, \mathbf{P})] \frac{\partial V(x_i, y_j, \mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}_k} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad . \quad (106)$$

El Hessiano de χ^2 esta dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}_k \partial \mathbf{P}_l} = & \quad 2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial V(x_i, y_j, \mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}_k} \frac{\partial V(x_i, y_j, \mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}_l} \right. \\ & \left. - [I(u_i, v_j) - V(x_i, y_j, \mathbf{P})] \frac{\partial^2 V(x_i, y_j, \mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}_k \partial \mathbf{P}_l} \right] \\ & \quad k = 1, 2, \dots, n \quad l = 1, 2, \dots, n \quad . \end{aligned} \quad (107)$$

Si se toma:

$$\beta_k \equiv -\frac{1}{2} \frac{\partial F(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}_k} \quad \alpha_{kl} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}_k \partial \mathbf{P}_l} \quad , \quad (108)$$

y haciendo $[\alpha] = \frac{1}{2} \mathbf{H}$, la expresión de la inversa del Hessiano (104) se expresa como:

$$\sum_{l=1}^n \alpha_{kl} \delta \mathbf{P}_l = \beta_k \quad . \quad (109)$$

Este conjunto de ecuaciones puede ser resuelto con incrementos $\delta \mathbf{P}_l$, donde al sumar la aproximación actual, proporcionan la siguiente aproximación:

$$\delta \mathbf{P}_l = \text{constante} \times \beta_l \quad . \quad (110)$$

Para evitar el cálculo del Hessiano de la función de mérito χ^2 , un método usual es construir el Hessiano a partir de las primeras derivadas parciales (Schwefel, 1995) como sigue:

$$\alpha_{kl} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial V(x_i, y_j, \mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}_k} \frac{\partial V(x_i, y_j, \mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}_l} \right] \quad . \quad (111)$$

Algoritmo de Levenberg-Marquardt

Para esta tesis el algoritmo de Levenberg-Marquardt fue tomado del libro “Numerical Recipes in C” (Press *et al.*, 1994). La condición para que $F()$ sea mínima, definida por $\beta_k = 0; \forall k$, es independiente de $[\alpha]$. La idea principal consiste en variaciones suaves entre los extremos del *método de la Inversa del Hessiano* utilizando la Ecuación (109) y el *método del descenso de gradiente* a través de la Ecuación (110) a partir de la matriz $[\alpha]$. El término *constante* en el descenso de gradiente, ver Ecuación (110), es definido como:

$$\delta \mathbf{P}_l = \frac{1}{\lambda \alpha_{ll}} \beta_l \quad \text{ó} \quad \lambda \alpha_{ll} \delta \mathbf{P}_l = \beta_l \quad . \quad (112)$$

Las ecuaciones (112) y (109) pueden ser combinadas si se define una matriz nueva α' de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \alpha'_{jj} &\equiv \alpha_{jj}(1 - \lambda) \\ \alpha'_{jk} &\equiv \alpha_{jk} \quad (j \neq k) \quad . \end{aligned} \quad (113)$$

Entonces por los métodos expresados por las Ecuaciones (112) y (109):

$$\sum_{l=1}^n \alpha'_{kl} \delta \mathbf{P}_l = \beta_k \quad . \quad (114)$$

Cuando λ es muy grande, la matriz α' es una matriz *diagonal dominante*, de forma que la Ecuación (114) tiende a ser equivalente a (112). Por otra lado, si λ se aproxima a cero, la Ecuación (114) equivale a (109). Dado un conjunto de n valores iniciales para los parámetros de \mathbf{P} , el algoritmo de Levenberg-Marquardt se define de la siguiente forma:

1. Se calcula el valor de χ^2 para los parámetros \mathbf{P} .
2. Se toma un valor modesto de λ , por ejemplo $\lambda = 0.001$.
3. Se resuelve el sistema de ecuaciones (114) para $\delta \mathbf{P}$ y se evalúa χ^2 en $F(\mathbf{P} + \delta \mathbf{P})$.

4. Si $F(\mathbf{P} + \delta\mathbf{P}) \geq F(\mathbf{P})$, se incrementa λ en un factor de 10 y se regresa al paso 3.
5. Si $F(\mathbf{P} + \delta\mathbf{P}) < F(\mathbf{P})$, se reduce λ en un factor de 10, se actualiza la solución $\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{P} + \delta\mathbf{P}$, y se regresa al paso 3.
6. El proceso termina después de 2 ó 3 iteraciones si el valor de χ^2 decrece en una cantidad despreciable. Esto se puede calcular cuando el valor absoluto de la diferencia entre los valores de χ^2 sea inferior a 0.1. Otro criterio de paro es cuando el valor $\lambda \rightarrow 0$, como por ejemplo $\lambda < 1.0e^{-15}$.

Finalmente, el método de Levenberg-Marquardt calcula la matriz de covarianza entre el modelo ajustado y los datos, asignando $\lambda = 0$ al final del proceso.

IV.3 Métodos de optimización

IV.3.1 Estrategia de Nelder y Mead

Nelder y Mead (1965) desarrollaron un método de minimización de funciones multidimensionales llamado *downhill simplex* (Press *et al.*, 1994) o estrategia *Simplex* (Schwefel, 1995). Este método no tiene relación con el método de programación lineal simplex propuesto por Dantzing en 1966. La idea original se centra en reducir lo más posible, el número de pruebas simultáneas que se identifican experimentalmente para el diseño de problemas de orden factorial (Schwefel, 1995). El número mínimo de situaciones simultáneas es $n+1$ eventos. El método *downhill simplex* toma entonces $n+1$ situaciones simultáneas, llamadas vértices, para cada uno de los n parámetros desconocidos.

Un *simplex* es una figura geométrica en un espacio *n-dimensional*, compuesta por $n+1$ puntos o vértices y todos los segmentos de interconexión entre ellos. En dos dimensiones un simplex es un triángulo, en tres dimensiones es un tetraedro, en n -dimensiones es un poliedro. El método comienza con la generación de un simplex, lo

que equivale a generar $n + 1$ vértices. Se evalúa la función objetivo en cada uno de estos puntos. A partir de esta etapa se generan una serie de movimientos geométricos de los vértices tendientes a conservar el volumen del simplex (proceso no degenerativo) definidos en las siguientes reglas de cada iteración, para el caso de minimización:

- El vértice cuyo valor de la función objetivo sea el más grande, “*punto alto*”, se mueve a través de la cara opuesta del simplex donde se encuentra el “*punto bajo*”, a este movimiento se le llama *reflexión*, Figura 43.b. El “*punto bajo*” es el vértice con el valor más pequeño de la función objetivo, el ***mejor punto***, y el “*punto alto*” representa al ***peor punto***. El movimiento de reflexión es útil para buscar una región más promisoría en el espacio de búsqueda.
- Si el movimiento de reflexión mejora al ***peor punto***, entonces el simplex se *expande* en esa misma dirección, ver Figura 43.d, lo que equivale a explotar exhaustivamente la región más promisoría.
- Si se alcanza un “valle” el último vértice calculado puede ser también el ***peor punto***. En este caso se intenta una *contracción* del simplex, punto medio entre el peor y el mejor vértice, ver Figura 43.c, con el objeto de buscar una salida del valle. La prueba consiste en comparar si el movimiento de *contracción* mejora el valor del ***peor punto*** con respecto al ***segundo peor***.
- Si la prueba anterior falla, el simplex efectúa una *contracción múltiple* alrededor del “*punto bajo*”, ver Figura 43.e, el cual reduce su volumen para intentar pasar a través del valle.

La búsqueda termina cuando la magnitud del vector que define la distancia entre el mejor y el peor vértice es inferior a cierta tolerancia. La Figura 43, muestra los movimientos de la estrategia de optimización *simplex*.

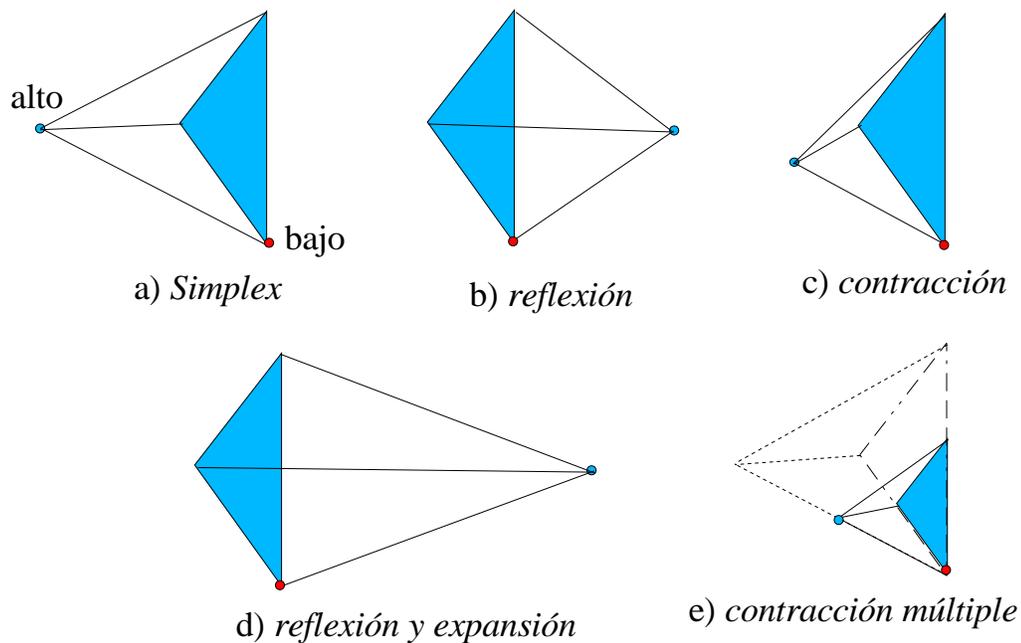


Figura 43: Movimientos geométricos definidos en el método *Downhill Simplex*. a) *Simplex* de 3 parámetros en el inicio de cada iteración, representado por un tetraedro. El *simplex* al final de una iteración puede ser uno de los casos siguientes: b) *Reflexión* del punto “alto” en la dirección del punto “bajo”; c) *Contracción* de la cara del *simplex* definido por los puntos “alto” y “bajo”; d) *Reflexión y expansión* sobre el punto “alto”; e) *Contracción múltiple* alrededor del punto “bajo”.

El procedimiento básico consiste en:

1. Dada una matriz $p_{(i,j)}$, $i = 1, \dots, n + 1$; $j = 1, \dots, n$ que representa los $n + 1$ vértices de un *simplex* con n parámetros iniciales, $y_{(i)} = F(p_{(i,j)})$ es el vector que contiene los valores de la función objetivo $F()$ en el i -ésimo vértice y una tolerancia $\varepsilon > 0$ (i.e., $\varepsilon = 10^{-12}$).
2. Se determinan los índices (b, w, s) que representan el *mejor*, el *peor* y del *segundo peor* vértice, respectivamente

$$\begin{aligned}
y_{(b)} &= \min\{y_{(i)}, i = 1, \dots, n + 1\} \\
y_{(w)} &= \max\{y_{(i)}, i = 1, \dots, n + 1\} \\
y_{(s)} &= \max\{y_{(i)}, i = 1, \dots, n + 1, i \neq w\} \quad .
\end{aligned}$$

3. Se contruye un vector de peso

$$\bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1, i \neq w}^{n+1} p_{(i,k)} \quad k = 1, \dots, n \quad ,$$

y se efectúa un movimiento de reflexión normal

$$p' = 2\bar{c} - p_{(w,k)} \quad .$$

En los subsecuentes pasos, el subíndice $k = 1, \dots, n$ representa a los n parámetros.

Si $F(p') < F(p_{(b,k)})$ entonces se va al paso 5.

4. Si la reflexión no mejora el valor del **peor** punto, se compara el movimiento de reflexión con respecto al **segundo peor** vértice.

Si $F(p') \geq F(p_{(s,k)})$ entonces intente una contracción, vaya al paso 6, de lo contrario asigne $p_{(w,k)} = p'$ y ejecute el paso 8.

5. Expansión. Se explota exhaustivamente la región más promisoría, construyendose

$$p'' = 2p' - \bar{c} \quad .$$

Si $F(p'') < F(p_{(b,k)})$ entonces $p_{(w,k)} = p''$, de lo contrario $p_{(w,k)} = p'$. En cualquier caso, ejecute el paso 8.

6. Contracción. Se contruye,

$$p'' = 0.5(\bar{c} + p_{(w,k)}) \quad .$$

Si $F(p'') \geq F(p_{(w,k)})$ realice una contracción múltiple, ejecute el paso 7, de lo contrario asigne $p_{(w,k)} = p''$ y ejecute el paso 8.

7. Contracción múltiple alrededor del **mejor** punto b .

$$p_{(i,k)} = 0.5(p_{(b,k)} + p_{(i,k)}) \quad i = 1, \dots, n+1, i \neq b \quad .$$

8. Terminación. El proceso finaliza cuando una fracción de la magnitud del vector de distancia entre el **peor** y el **mejor** punto son inferiores a cierta tolerancia.

$$2 \frac{|y_{(w)} - y_{(b)}|}{|y_{(w)}| + |y_{(b)}|} \leq \varepsilon \quad .$$

Si el criterio de terminación no se cumple entonces regresa al paso 2

En general, la estrategia de optimización *simplex* tiene las siguientes características:

- Requiere únicamente de evaluaciones de la función objetivo, por tanto, es innecesario el cálculo del gradiente o el Hessiano de la función de mérito. Esta característica es deseable si la obtención de las derivadas parciales con respecto a los parámetros de la función objetivo es difícil o imposible de calcular.
- El número de hipótesis que se prueba en una iteración es de $n + 1$.
- El criterio de búsqueda del mínimo es geométrico. El mínimo se encuentra cuando el volumen del poliedro que se forma a través de los vértices es pequeño. El poliedro tiende a convertirse en un punto. Si la función objetivo no es muy compleja, que contenga un gran número de extremos cercanos, esta estrategia puede llegar a converger rápidamente a un extremo (local al menos), en caso contrario no se recomienda su empleo.

La estrategia *simplex* se emplea en dos procesos de optimización:

1. Como un proceso de optimización global para buscar el mejor conjunto de parámetros \mathbf{P} , pertenecientes a $V(I, \mathbf{P})$, que se ajusten mejor a las observaciones (una ventana de la imagen). En este caso, la función objetivo o de mérito es el valor de χ^2 , ver Ecuación (101).
2. Como un proceso de optimización para encontrar el punto exacto (x_e, y_e) de cada esquina tipo L que construye el vértice. En este caso la función objetivo es la distancia entre (x_0, y_0) y un punto en la curva de contorno central de cada $M_L(I, \mathbf{P})$.

IV.3.2 Estrategias evolutivas

Debido al continuo desarrollo de las computadoras (velocidad de proceso y capacidad de almacenamiento) desde la década de los 60s se ha incrementado el interés por imitar el proceso de evolución natural. Este proceso evolutivo se fundamenta en dos grandes estudios: 1) la *Teoría de Evolución de las Especies*, postulada por Charles Darwin en 1859, la cual se basa en la supervivencia de la especie que mejor se adapte a su medio ambiente, y 2) en la mecánica de evolución postulada por diversos principios biológicos extraídos de la Genética y la Biología (Gen M., 2000; Holland, 1992; Koza, 1992; Michalewicz, 1992).

Charles Darwin, realizó una extensa investigación sobre la evolución natural e identificó tres principios (Darwin (1859)):

- El ciclo reproductivo.
- La selección natural.
- La diversidad por variación.

El ciclo reproductivo explica la naturaleza iterativa de la evolución mediante el proceso de nacimiento y muerte. Todos los individuos son mortales, pero a través de la

reproducción crean hijos que los reemplazan, los descendientes forman la siguiente generación de la especie, y a veces, forman una nueva variedad de la especie mediante aislamiento geográfico y especialización. La selección natural es el proceso mediante el cual los individuos se adaptan al entorno que los rodea. En este proceso, los individuos que llevan a cabo sus funciones vitales de mejor manera tienen mayores probabilidades de sobrevivir, y son ellos los que consiguen reproducirse. Así, en cada generación de individuos, aparecen nuevas alteraciones que convierten a los descendientes en mejores o peores individuos que sus padres. En la capacidad de adaptarse a su entorno, consiguiendo así la diversidad por variación. El entorno se encarga de decidir si las variantes incorporadas a la especie permanecen o no. Si los descendientes llegan a reproducirse con dichos cambios tienen la posibilidad de transmitirse de nuevo a sus propios hijos y el nuevo rasgo puede llegar a conservarse, hasta que ya no sea de utilidad a la especie.

Darwin no pudo haber explicado el porqué los individuos tenían esa capacidad de variación, fue Gregor Mendel quien poco después ofreció la respuesta al introducir las bases de la genética. Cada gen posee información codificada sobre un individuo y durante el proceso reproductivo se combinan las características de ambos progenitores para crear a sus descendientes, a esto se le conoce como *cruzamiento*. De esta manera los hijos resultan ser diferentes de ambos padres y no una réplica de alguno de ellos. Además, durante la combinación de genes, periódicamente se cometen errores, en consecuencia se producen *mutaciones* que provocan una nueva diferenciación de los hijos respecto de los padres.

La simulación de estas teorías ha traído como resultado el desarrollo de algoritmos y nuevas técnicas de optimización numérica Gen M. (2000). Al conjunto de estas técnicas

se les conoce como *Computación Evolutiva* (EC¹). En la literatura especializada, son 4 las divisiones más representativas en EC que se conocen: 1) *Algoritmos Genéticos* (GA), propuesto por Holland (1992), creador del *Teorema Fundamental* donde demuestra matemáticamente la factibilidad de estas técnicas; 2) *Estrategias Evolutivas* (ES²), desarrolladas por Rechenberg (1973) y Schwefel (1995), que centran su atención en la forma de explotar el proceso evolutivo (selección, apareamiento, mutación y autoadaptación); 3) *Programación Evolutiva* (EP³), desarrollado por Fogel *et al.* (1966), que aplica estos conceptos a una máquina de estado finito o autómatas, y por último ; 4) *Programación Genética* (GP), propuesto por Koza Koza (1992), que propone la explotación de una estructura de árbol aplicando estos elementos.

El proceso de selección natural postula “que sólo el individuo dentro de una población que se adapte mejor a los cambios de su medio ambiente, es el que sobrevive”. En este sentido, Rechenberg propone la hipótesis “que el método de evolución orgánica representa la estrategia óptima para la adaptación y supervivencia de cosas dentro de su ambiente”, y concluye, “por tanto, esto debiera tener validez mientras se tomen los principios biológicos de la evolución para la optimización de sistemas”.

Descripción de un Algoritmo Genético

Un algoritmo genético es una técnica estocástica, que se basa en el mecanismo de selección orgánica e incluye en su terminología diversos principios biológicos. En general, son 5 los componentes básicos de este algoritmo se sintetizan en la forma siguiente:

1. Una *representación genética* de la solución del problema.
2. Una forma o técnica de crear una población inicial de las soluciones.

¹por sus siglas en inglés *evolutionary computation*.

²por sus siglas en inglés *evolutionary strategies*.

³por sus siglas en inglés *evolutionary programming*.

3. Una *función de evaluación* o clasificación de las soluciones en términos de su *aptitud*.
4. *Operadores genéticos* que alteren la composición genética de los hijos durante la reproducción.
5. Valores de los parámetros del algoritmo genético.

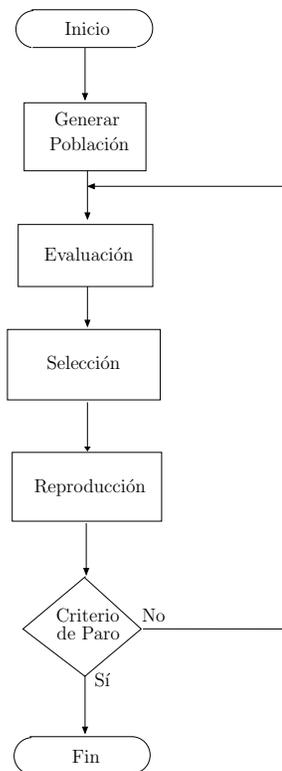


Figura 44: Diagrama a bloques de un *Algoritmo Genético*.

A partir de estos elementos un algoritmo genético mantiene a una población de individuos, en cada una de las generaciones. Es decir, se genera un conjunto aleatorio de soluciones llamado *población*. Cada individuo en la población representa un *cromosoma*, que es una posible solución del problema. El cromosoma evoluciona a través de

iteraciones sucesivas llamadas *generaciones*. Durante cada generación, el cromosoma es *evaluado*, empleando su valor de *aptitud*. Para crear nuevos cromosomas llamados *descendencia* y producir nuevas generaciones, existen dos operadores genéticos; *mutación* que es el proceso de generar un individuo nuevo a partir de la modificación de la estructura de uno ya existente y *apareamiento* que genera dos individuos nuevos a partir de dos padres mediante la recombinación o cruzamiento de la estructura genética de cada padre, *intercambio genético*. Finalmente se seleccionan aquellos que se encuentren mejor adaptados al medio, en base a su valor de aptitud o en base a diferentes procesos estocásticos. A estos procesos se les conoce como *operaciones evolutivas*. Después de varias generaciones el proceso converge a la mejor solución, que representa el **óptimo** o **subóptimo** del proceso. En la Figura 44 se presenta en forma esquemática este proceso.

Representación genética.

Al proceso de *representar o codificar* una solución de un problema dentro de un cromosoma y como *decodificar* un cromosoma en términos de la solución del mismo es llamado **Codificación**. En este sentido, un algoritmo genético requiere de dos espacios: Un **espacio de soluciones** donde cada elemento es llamado *fenotipo*; y un **espacio codificado** llamado *genotipo*. Un cromosoma es entonces el *genotipo* de una solución del problema. En general, el algoritmo opera sobre el espacio de soluciones y sobre el espacio codificado alternativamente. Los operadores genéticos, mutación y apareamiento, son aplicados al genotipo del problema y el proceso evolutivo, selección y evaluación operan sobre el espacio de soluciones. La codificación se ha investigado bajo diferentes aspectos, los cuales son:

1. *Clasificación de la codificación.*

Dependiendo del tipo de dato que contiene un cromosoma, la codificación se

clasifica en:

- *Binaria*. Un cromosoma es representado por una una cadena de “1” y “0”. Este tipo de representación no consume muchos recursos de memoria y sus operaciones no son costosas, sólo requiere de manipulaciones binarias sobre variables binarias. Sin embargo, se necesita encontrar una función que permita efectuar una correspondencia entre el espacio de soluciones y su representación genética. Adicionalmente, se requiere una segunda función que permita regresar al espacio de soluciones. A este último proceso se le conoce como *morfogénesis*. La búsqueda de estas funciones podría resultar una tarea complicada. Los GA utilizan generalmente la representación binaria, vea por ejemplo los trabajos de Holland y algunos ejemplos propuestos por Gen M. (2000).
- *Entero o también llamado alfabético*. Un cromosoma es representado por una cadena de números enteros o alguna letra del alfabeto. Para problemas de optimización combinatoria ésta es considerada la mejor representación genética. En esencia el problema combinatorio busca la mejor permutación o combinación de los elementos sujetos a ciertas restricciones, por lo que se estima que esta codificación es la mejor forma de representar dichos problemas.
- *Reales*. Cada cromosoma se representa como un vector de números reales. Este tipo de representación es empleado ampliamente en problemas de optimización numérica (Gen M., 2000), dado que el proceso de morfogénesis no es necesario, esto es, el espacio codificado y de soluciones es el mismo. En este trabajo se utiliza la representación del cromosoma con números reales.
- *Estructura de datos*. Cada cromosoma representa una o más estructuras

de datos. Un ejemplo de este concepto se observa en el trabajo de Koza (1992), donde cada cromosoma representa una estructura de árbol; las hojas se definen como un conjunto de *terminales* (constantes) unidas entre si por un conjunto de *funciones* (operadores booleanos, aritméticos, trascendentales, condicionales o de transferencia).

Dependiendo del contenido de la codificación del cromosoma, se clasifican en:

- *Sólo-la-Solución*. El cromosoma sólo contiene información de la solución del problema. La gran mayoría de los GA están inmersos en esta clasificación, en particular, el algoritmo genético mostrado en el presente trabajo pertenece a este tipo.
- *Solución + Parámetros*. Cada cromosoma se construye de dos partes: la primera está dada por la solución del problema y la segunda está dada por los parámetros de la estrategia evolutiva, principalmente la varianza y covarianza de la distribución normal para la mutación. Esta técnica es introducida por Schwefel (1995), en las estrategias evolutivas. El propósito de incorporar parámetros de estrategia dentro de la representación genética de los individuos, es la facultad de auto-adaptación evolutiva de estos parámetros mediante la aplicación de operadores evolutivos (Gen M., 2000).

2. *Ilegalidad e infactibilidad de la codificación.*

En un algoritmo genético, los operadores de mutación y apareamiento son aplicados al genotipo del problema. Dichos operadores manipulan directamente el código de la estructura de los cromosomas por procesos estocásticos. Por otra parte, el proceso evolutivo opera sobre el espacio de la solución, evaluando y seleccionando los cromosomas que se adapten mejor al medio ambiente del problema, a través de funciones de aptitud y heurísticas de clasificación. Es por ello,

que la correspondencia entre el genotipo y el fenotipo a partir de funciones de codificación y decodificación de ambos espacios tiene una considerable influencia en el rendimiento de un algoritmo genético. Así mismo, debe distinguirse entre dos conceptos; *ilegalidad* e *infectibilidad*.

El término *infectibilidad* se refiere al fenómeno ocurrido cuando la solución decodificada a partir de un cromosoma, morfogénesis, no pertenece a una región factible en el espacio de soluciones, pero sí al universo de soluciones, ver Figura 45. En problemas de optimización con restricciones, el óptimo ocurre típicamente en el límite definido por los espacios factible e infectible, en cuyo caso, el empleo de *estrategias de penalización* es una técnica empleada para solventar este problema. La aplicación de una *penalización* fuerza a la búsqueda genética a validar la existencia del óptimo en esta región.

Por otro lado, el término *ilegalidad* se refiere al fenómeno producido por la morfogénesis cuando el cromosoma no representa una solución, ver Figura 45. Este problema es originado por la naturaleza del proceso de codificación. Una forma básica de evitarlo, es replanteando las ecuaciones de codificación y decodificación de las soluciones. No obstante, existen las técnicas llamadas *estrategias de reparación* de cromosomas como una herramienta adicional para atacar este fenómeno. En el libro escrito por Gen M. (2000) ambas estrategias son explicadas con detalle.

3. Correspondencia de la codificación

La correspondencia entre el espacio de soluciones y el espacio codificado puede ser de 3 tipos, ver Figura 46:

- 1 – a – 1

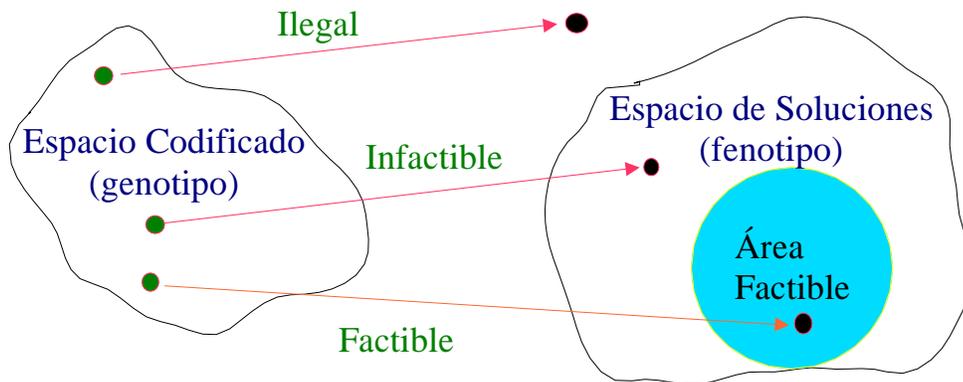


Figura 45: *Ilegalidad e infactibilidad* de la representación genética.

- $n - a - 1$
- $1 - a - n$

La correspondencia $1 - a - 1$ es el caso más deseable de la morfogénesis, no existe ambigüedad en la representación y no hay operaciones triviales en el momento de generar descendencia. A esta característica se le conoce como la propiedad de *unicidad* o *no-redundancia* de la representación.

Para el caso de $n - a - 1$, dos o más cromosomas estructuralmente distintos, tienen la misma representación con respecto a su fenotipo. Esto provoca que el número de individuos en cada espacio sea distinto. Por lo tanto el universo de selección, *diversidad* genética, se puede reducir significativamente. El efecto final sobre el algoritmo es una convergencia prematura que no alcanza un óptimo global.

El último caso, $1 - a - n$, es el peor caso para estos algoritmos. Dado que un cromosoma representa n soluciones, resulta imposible discernir que cromosoma representa la mejor solución. En otras palabras, un cromosoma tiene distintos

valores de la función de aptitud, por consiguiente no se podrá obtener una solución. En esta situación es preferible replantear el proceso de morfogénesis del algoritmo.

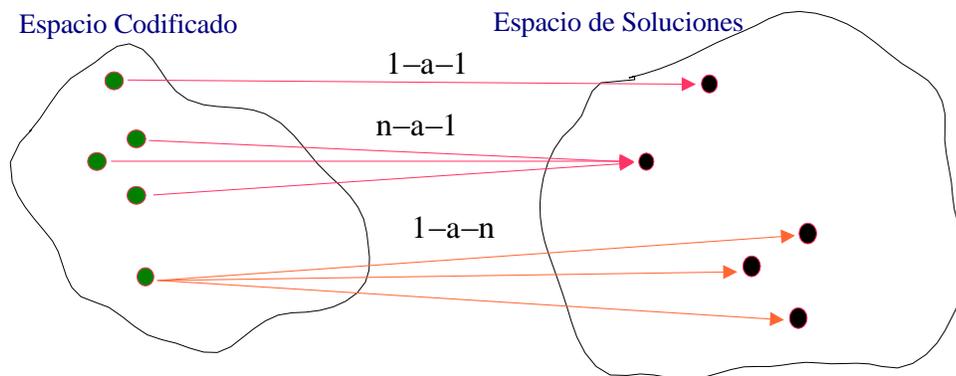


Figura 46: *Correspondencia* entre el espacio codificado y el espacio de soluciones.

Operadores Genéticos.

La forma de generar nuevos individuos dentro de cada generación está controlada por dos operadores genéticos, el *apareamiento* y la *mutación*.

Así, un cromosoma es la representación genética de una solución del problema definida por una estructura de la siguiente forma:

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_l, \dots, x_n] \quad ,$$

donde n es el tamaño o longitud del cromosoma que permanece constante durante el proceso evolutivo. $x_1, x_2, \dots, x_l, \dots, x_n$ se conocen como *genes* y representan a la unidad básica de la estructura del cromosoma, por lo que un cromosoma es un conjunto finito de

genes. x_i puede representar un número binario, entero, alfabético o real, vea la sección de **representación genética**. Un *alele* es un subconjunto no vacío de genes de x que representa una característica de la solución y es la unidad básica de información en el fenotipo del problema. Un alele guarda siempre su posición y número de elementos dentro del cromosoma y son subconjuntos disjuntos entre si. Un cromosoma entonces, puede contener uno o más aleles. Por ejemplo, si x es la representación binaria de las variables de una función bidimensional $f(a, b)$ y consideramos que a se representa con r elementos binarios y b con s elementos binarios, entonces x contiene dos aleles a y b con la estructura siguiente:

$$x = \left[\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_r}_a, \underbrace{x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_{n=r+s}}_b \right] .$$

Un paso inicial para la aplicación de las técnicas evolutivas es la determinación de la longitud total de x , la cual depende de la complejidad de la representación de la solución del problema.

El **apareamiento**, también llamado *recombinación*, consiste en la generación de dos individuos nuevos a partir de dos padres. Si representamos a un par de cromosomas como:

$$\begin{aligned} x &= [x_1, x_2, \dots, x_n] \\ y &= [y_1, y_2, \dots, y_n] \quad , \end{aligned}$$

donde x y y son dos cromosomas con n elementos. Si el apareamiento es en un sólo punto después de la k -ésima posición, donde k es un número aleatorio generado en el rango $[1, n]$, los descendientes o hijos estarán expresados como sigue:

$$\begin{aligned} x' &= [x_1, x_2, \dots, x_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n] \\ y' &= [y_1, y_2, \dots, y_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n] \quad . \end{aligned}$$

La forma de apareamiento descrita anteriormente es empleada ampliamente en los algoritmos con representación binaria, entera o alfabética y es conocida como cruzamiento **convencional** en *un punto de corte*. Este estilo de apareamiento puede ser ampliado a *dos puntos de corte* o *múltiples puntos de corte*. Existen otros tipo de apareamiento como son:

- *Apareamiento aritmético*. Propuesto por Gen M. (2000), el apareamiento esta basado en el concepto de combinaciones lineales de vectores a partir de la teoría de espacios convexos. Esta técnica se explicará en más detalle en la sección IV.3.3 ya que es empleada en el desarrollo del algoritmo evolutivo implementado en este trabajo.
- *Apareamiento direccional*. Este estilo de apareamiento emplea los valores de la función objetivo para determinar la dirección de la búsqueda genética y únicamente produce un descendiente a partir de dos cromosomas padres (Michalewicz, 1992).

El operador de **mutación** altera el valor de uno o más genes con una cierta probabilidad. Para la representación binaria; se selecciona aleatoriamente un conjunto de genes de toda la población. Dichos genes cambian su valor, así, si el valor del gen es “1” se remplaza por “0” y viceversa. Para la representación con números reales el procedimiento es similar. Supongase que el cromosoma $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ es seleccionado para mutación. Obtenemos un número aleatorio $k \in [1, n]$ y producimos entonces un descendiente $x' = [x_1, \dots, x'_k, \dots, x_n]$, tal que x'_k es un valor aleatorio uniformemente distribuido en el rango $[x_k^I, x_k^S]$. x_k^I y x_k^S son los valores de la cota inferior y superior de la k -ésima variable respectivamente, generalmente dadas por el dominio del problema. Por otro lado existen otros tipos de mutación como son:

- *Mutación dinámica.* Este operador es conocido como *mutación no uniforme*, y fue propuesto por Michalewicz (1992). Una mutación dinámica es diseñada con el propósito de lograr una “sintonía fina” con objeto de obtener precisiones altas en el proceso evolutivo. En secciones posteriores se explicará con más detalle este tipo de mutación ya que es el empleado en el algoritmo genético del presente trabajo.
- *Mutación direccional.* Al igual que en el apareamiento direccional, la mutación direccional toma en cuenta el gradiente de una función objetivo y con la cual se define el valor de la heurística del cambio. Esta técnica fue propuesta Gen M. (2000).

En un proceso de optimización, los operadores evolutivos explotan exhaustivamente el espacio de *búsqueda* del dominio del problema. Típicamente existen dos tipos de búsqueda: la *búsqueda aleatoria* explora todo el espacio de soluciones y tiene la capacidad de “escapar” de un óptimo local. Por otro lado, la *búsqueda local* explota la mejor solución y es capaz de ascender o descender rápidamente hacia un valle o colina para obtener un óptimo local. Estas dos habilidades son mutuamente complementarias en un proceso de búsqueda. Un algoritmo genético es entonces, una clase de método de búsqueda de propósito general que combina elementos de búsqueda direccional y estocástica, y puede efectuar un buen balance entre la exploración y explotación del espacio de soluciones.

El operador de apareamiento es usado para explotar el espacio de búsqueda. Holland (1992) propone la hipótesis de que a partir de dos padres con un valor de aptitud mayor que los otros integrantes de la población, se producirá una descendencia igual o superior. Esta teoría está basada en el análisis de esquemas realizado por Holland y es la base que sustenta la convergencia de este tipo de algoritmos. Los algoritmos

genéticos convencionales enfocados a la optimización, el cruzamiento es el principal operador del sistema evolutivo y por ende se le asigna un valor de probabilidad relativamente alto. Por otro lado, el operador de mutación provoca cambios espontáneos en la composición genética de los cromosomas, lo que implica que explore otras áreas del espacio de búsqueda. Sin embargo, la mutación puede algunas veces jugar un papel más importante que el apareamiento en una búsqueda genética (Schwefel, 1995).

Selección.

El proceso de selección se encarga de simular los postulados Darwinianos de la evolución orgánica. La selección es la fuerza de conducción del algoritmo genético y la *presión* que ejerce sobre la evolución generacional, es crítica en el proceso evolutivo. En un extremo, si la presión es alta, la búsqueda puede terminar prematuramente, por otro lado, si la presión es baja el progreso del algoritmo puede ser más lento del necesario. Generalmente se emplea una presión baja al iniciar el algoritmo. Esto permite que se explore en forma amplia el espacio de soluciones. Una presión alta es recomendable al final del proceso, con objeto de explotar exhaustivamente la región más promisoría en el espacio de búsqueda. La selección es empleada en dos procesos: para seleccionar los individuos candidatos a mutación y apareamiento y para seleccionar los individuos que pertenecerán a la siguiente generación. Existen una gran variedad de métodos de selección, los más comunes son:

- *Selección por Ruleta.* Propuesto por Holland (1992), es uno de los métodos de selección *estocástica* empleado comunmente en GA. La idea principal es determinar la probabilidad de supervivencia de cada individuo de forma proporcional a su valor de aptitud. En esta estrategia se construye una *rueda de ruleta* segmentada. Cada segmento de la rueda es proporcional al valor de aptitud del cromosoma, y el número de segmentos es igual al *tamaño* o *longitud* de la población. Se gira

la rueda, y se “lanza” un “dardo” para seleccionar un cromosoma. Existe una mejor probabilidad de seleccionar un cromosoma con un valor de aptitud mayor. En otras palabras, con una área mayor en el segmento de la rueda de la ruleta, se tiene una mejor probabilidad de selección que otro cromosoma con valor menor en su función de mérito. La rueda se gira tantas veces como número de individuos hay en una población. En cada paso, el cromosoma seleccionado formará parte de la nueva generación. En este método el universo de selección es constante, donde los padres seleccionados para apareamiento o mutación son reemplazados por sus hijos. A esta estrategia de selección se le conoce como *reemplazo generacional*.

- *Selección $(\mu + \lambda)$ y (μ, λ)* . Propuesto por Bäck (1994), es un proceso *determinístico* donde los mejores individuos, padres y descendencia, son seleccionados para formar a la nueva generación, a partir de su valor de la función de mérito o aptitud. Para el caso de $(\mu + \lambda)$, los μ padres y los λ descendientes compiten para sobrevivir y los mejores μ , de todos los padres más su descendencia, formarán a la nueva generación. (μ, λ) selecciona los mejores λ descendientes, como individuos de la nueva generación a partir de los μ padres. En estos métodos determinísticos se prohíbe la selección de cromosomas duplicados de la población. Los criterios determinísticos más comunes son:

Truncamiento. Se ordenan todos los cromosomas tomando como base su valor de aptitud. Se define un umbral T que representa un porcentaje de los mejores. Seguido, sólo se seleccionan los mejores T cromosomas para pasar a la siguiente generación.

Elitismo. Únicamente los mejores cromosomas pasan a formar parte de la próxima generación.

Reproducción de estado-equilibrado. Consiste en reemplazar los peores λ cromosomas de la población original por los μ descendientes. Esta estrategia es una modificación del reemplazo generacional.

- *Selección por Torneo.* La idea general de esta estrategia es elegir aleatoriamente un conjunto de cromosomas para competir en un torneo. Por ejemplo, se abstraen los mejores cromosomas para su reproducción empleando el método de la ruleta, los cuales serán los integrantes del torneo. Al número de cromosomas escogidos para el torneo se le llama *longitud del torneo*. Este método *híbrido*, combina elementos estocásticos y determinísticos, como los descritos en la selección por ruleta y la selección $(\mu + \lambda)$ respectivamente.
- *Selección por escalamiento y ranking.* En las estrategias anteriores la selección o probabilidad de selección de un individuo es proporcional a su valor de aptitud. Este esquema puede provocar características no deseadas. Después de varias generaciones existe la tendencia a generar *supercromosomas*, que dominan el proceso de selección y por tanto se pierde la *diversidad genética* de la población. Para minimizar estos problemas se han propuesto los mecanismos de *escalamiento y ranking*. El escalamiento realiza una correspondencia entre el valor de la función objetivo hacia un valor positivo real. La probabilidad de supervivencia será tomada a partir de este valor. En general, si f'_k es la función de escalamiento basada en una función objetivo original f_k para un cromosoma k , el escalamiento se expresa como:

$$f'_k = g(f_k) \quad . \quad (115)$$

donde $g(\cdot)$ es la función de transformación de función de aptitud original dentro de la aptitud escalada. La función $g(\cdot)$ puede tomar distintas formas, tales como: *escalamiento lineal*, *escalamiento dinámico lineal*, *truncamiento en sigma*,

escalamiento en potencias, escalamiento logarítmico, por ventana, normalizada y escalamiento basado en Boltzmann. Los parámetros de escalamiento de estos métodos son dependientes del problema.

La selección por ranking ignora el valor actual de la función objetivo. En su lugar emplea una clasificación definida por la posición que guardan los cromosomas en la población, para determinar la probabilidad de sobrevivencia. Existen dos métodos comunmente usados; *ranking lineal* y *ranking exponencial* propuestos por Baker y Michalewicz respectivamente. Una buena revisión bibliográfica del escalamiento y ranking puede ser consultada en Gen M. (2000).

En resumen, un proceso evolutivo es una heurística que contiene elementos estocásticos y determinísticos, que intenta lograr un buen balance entre la explotación y exploración del espacio de búsqueda definido por el dominio del problema a optimizar, a través de los principios biológicos de la evolución orgánica. La Figura 47 sintetiza la estructura general de un GA.

IV.3.3 Consideraciones básicas de la estrategia evolutiva para el modelo de Esquina

En la teoría de algoritmos evolutivos cada problema se representa en una forma particular y su codificación depende de las características del mismo. En los siguientes párrafos se explicarán en forma específica las particularidades de la estrategia evolutiva propuesta en este trabajo.

Existen diferentes formas de representar a cada uno de los individuos, ver sección IV.3.2 y su manipulación mediante operadores genéticos (cruzamiento y mutación) para producir nuevas generaciones. Michalewicz (1992) argumenta que la mejor manera de resolver un problema es buscar la representación más apropiada que se asemeje a las

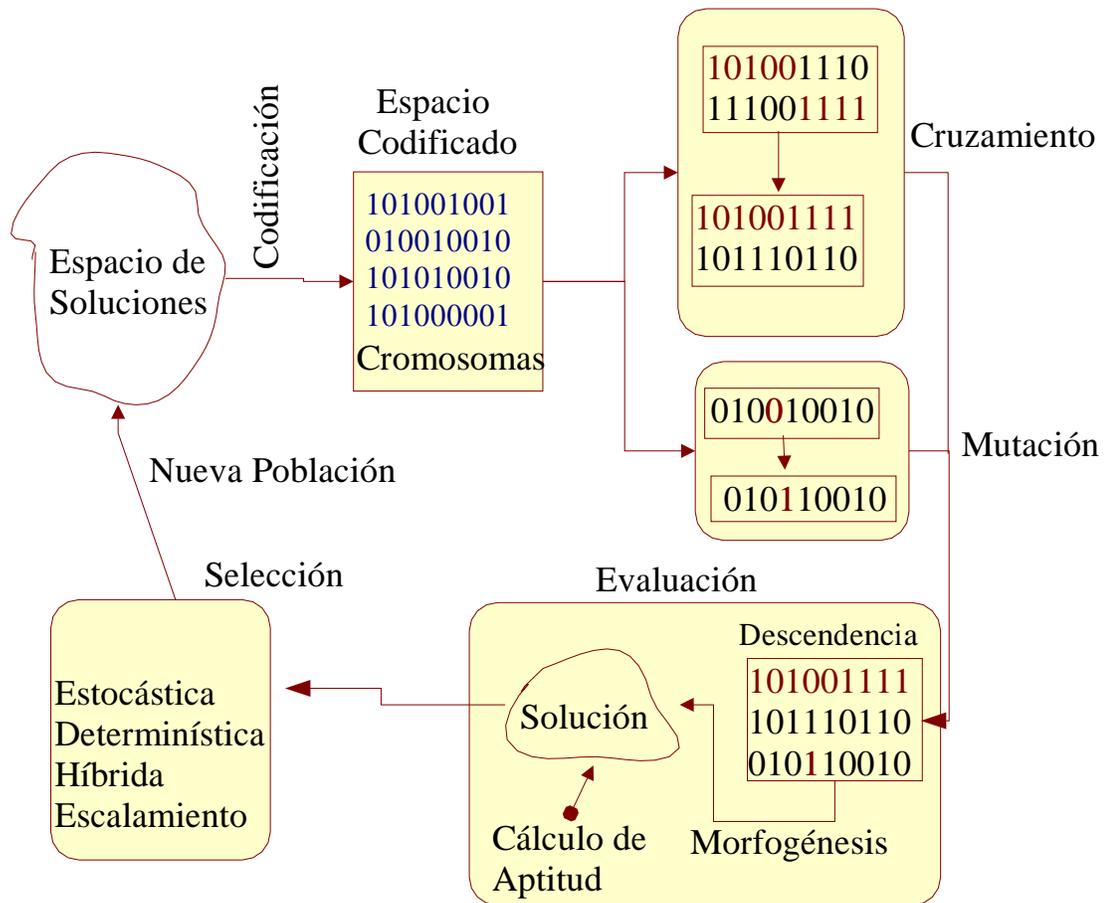


Figura 47: Estructura general de un algoritmo genético.

operaciones específicas del comportamiento del fenómeno. En este caso se emplea una representación en **números reales** (cada cromosoma es codificado como un vector de números reales \mathbf{P}) y se desarrolla una forma de como llevar a cabo un conjunto de transformaciones con una operación algebraica.

Apareamiento

Muchos operadores de cruzamiento han sido introducidos con el nombre de aritmética de operadores, los cuales han sido diseñados tratando de imitar el concepto de combinaciones lineales de vectores en el campo de la "teoría de espacios convexos"⁴.

Los operadores de cruzamiento son utilizados para producir descendencia, mediante el cálculo del peso promedio de 2 vectores \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}'_1 &= \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}'_2 &= \lambda_2\mathbf{P}_1 + \lambda_1\mathbf{P}_2 \quad ,\end{aligned}\tag{116}$$

si los multiplicadores están restringidos a:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0 \quad ,$$

la expresión es conocida como una combinación convexa. Por otro lado, si la condición de no negatividad en los multiplicadores es respetada, se le conoce como una combinación afin y si los multiplicadores siempre están contenidos en el espacio real, la combinación es conocida como una combinación lineal (Gen M., 2000).

Existen diferentes tipos de combinaciones convexas, las cuales dependen de la forma en que se generan λ_1 y λ_2 . Por ejemplo, en una "combinación promedio" $\lambda_1 = 0.5$ y $\lambda_2 = 0.5$, en una "combinación afin" $\lambda_1 = 1.5$ y $\lambda_2 = -0.5$. En particular, en este trabajo se emplea una *combinación intermedia afin extendida*, propuesta por Gen M. (2000). En la cual, λ_1 es un número aleatorio en el intervalo $[-d, 1 + d]$, tal que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. En este caso se tomó $d = 0.5$.

⁴en inglés convex sets theory.

Mutación

Para efectos de generar descendientes que busquen aleatoriamente soluciones independientes a la convergencia que impone el proceso de selección, se utiliza el concepto de “mutación dinámica” introducido por Michalewicz (1992), el cual tiene la capacidad de producir ajustes finos que facilita obtener precisiones altas. Las mutaciones dinámicas están expresadas como sigue: dado un padre \mathbf{P} , si el k -ésimo elemento p_k es seleccionado para una mutación, el descendiente generado es $\mathbf{P}' = (p_1, \dots, p'_k, \dots, p_n)$. Donde p'_k es un número aleatorio seleccionado a través de dos posibilidades:

$$\begin{aligned} p'_k &= p_k + \Delta(t, p_k^U - p_k) \\ p'_k &= p_k - \Delta(t, p_k - p_k^L) \\ \Delta(t, p) &= pr \left(1 - \frac{t}{T}\right)^b, \end{aligned} \tag{117}$$

donde p_k^U y p_k^L son las cotas superior e inferior del k -ésimo elemento respectivamente. r es un número aleatorio en el rango de $[0, 1]$. t es la generación actual. T es el número máximo de generaciones permitidas. b es el parámetro que determina el grado de no uniformidad en la función $\Delta(t, p)$. La función $\Delta(t, p)$ regresa un valor en el rango de $[0, p]$ tal que el valor de $\Delta(t, p) \rightarrow 0$ cuando t crece. Esto causa que en las generaciones iniciales (t pequeño) la mutación opere uniformemente en el espacio de soluciones y explote en forma exhaustiva la región más promisoría al final del proceso.

Transformación afín sobre operadores genéticos

Los operadores de mutación y cruzamiento pueden ser encapsulados dentro de una transformación afín. Esta idea fue propuesta por Olague y Mohr (2001), la cual consiste en lo siguiente: aplicando las propiedades geométricas de planos afines, si se supone \mathfrak{R}_a como una representación de un plano *afín*, todas las transformaciones de la clase entera \mathfrak{R}_A son derivadas aplicando transformaciones del tipo:

$$Y'_1 = b_{11}Y_1 + b_{12}Y_2 + C_1 \quad (118)$$

$$Y'_2 = b_{21}Y_1 + b_{22}Y_2 + C_2 \quad , \quad (119)$$

donde las Ecuaciones (118) y (119) representan un par de ecuaciones invariantes y $Y = \left(\frac{y_1}{y_0}, \frac{y_2}{y_0} \right)$ suponiendo $y_0 = 0$ es un par de coordenadas no homogéneas que representan el punto actual en el plano afin, y los coeficientes son números reales arbitrarios con la condición $|b_{rs}| \neq 0$. Entonces para el caso en dos dimensiones todas las n variables (aleles de los cromosomas) se pueden representar como:

$$\begin{pmatrix} Y'_{1_1} & Y'_{1_2} & \dots & Y'_{1_n} \\ Y'_{2_1} & Y'_{2_2} & \dots & Y'_{2_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & C_1 \\ b_{21} & b_{22} & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1_1} & Y_{1_2} & \dots & Y_{1_n} \\ Y_{2_1} & Y_{2_2} & \dots & Y_{2_n} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (120)$$

ercruzamiento mutación

La Ecuación (120) puede ser expandida para aplicarse a la población completa. Las ventajas de esta representación son:

- El tratamiento de todas las transformaciones son estándares.
- Transformaciones complejas implican simples multiplicaciones de matrices.
- En lugar de aplicar transformaciones sucesivas a todos los puntos de un escenario tridimensional, sólo se puede calcular la matriz de transformación total, misma que se multiplica con las coordenadas homegéneas de cada punto.
- Inversiones en las transformaciones son realizadas mediante inversiones de matrices.
- Cálculo rápido. Operaciones matriciales están soportadas en el hardware de estaciones de trabajo con alto rendimiento gráfico.

Selección

En este caso se implementaron dos métodos de selección: *selección por ruleta* y *selección por torneo*. Ambos métodos se integran para aumentar la presión en la convergencia de la población. Esto es, se emplea el método de selección por ruleta para escoger a los dos cromosomas que competirán en un torneo. Después, se elige el cromosoma con el mejor valor de la función de aptitud χ^2 . Combinando ambos métodos se obtiene una selección estocástica, selección por ruleta, y determinística, selección por torneo. Así mismo, se emplea el *reemplazo generacional* en la obtención de la nueva población. El algoritmo general de selección por ruleta es el siguiente:

1. Se calcula el valor de aptitud v_k para cada cromosoma \mathbf{y}_k :

$$v_k = Q(\mathbf{y}_k) \quad .$$

2. Se calcula la aptitud total de la población:

$$a = \sum_{k=1}^{pop} v_k \quad ,$$

donde pop es el número total de individuos en la población.

3. Se calcula la probabilidad de selección p_k para cada cromosoma \mathbf{y}_k :

$$p_k = \frac{v_k}{a}, \quad k = 1, 2, \dots, pop \quad .$$

Esta expresión implica que mientras mayor sea el valor de aptitud de un cromosoma, éste tendrá una mejor probabilidad de ser seleccionado y por lo tanto una mayor probabilidad que contenga mayor área en la construcción de la ruleta. Para problemas de maximización este criterio es suficiente. Sin embargo, se requiere minimizar la función objetivo Q . Es decir, se necesitan que valores pequeños de v_k ocupen una mayor área en la rueda de la ruleta. Para lograr esto, se invierte el

valor de probabilidad p_k como sigue:

$$p'_k = p_k^{-1} = \frac{a}{v_k} \quad ,$$

el cual se normaliza

$$\begin{aligned} a' &= \sum_{k=1}^{pop} p'_k \\ p''_k &= \frac{p'_k}{a'} \quad k = 1, 2, \dots, pop \quad , \end{aligned}$$

donde p''_k es el inverso normalizado de la probabilidad p_k .

4. Se calcula la probabilidad acumulada q_k para cada cromosoma \mathbf{y}_k :

$$q_k = \sum_{j=1}^k p''_j, \quad k = 1, 2, \dots, pop \quad .$$

q_k representa la rueda de la ruleta.

5. La rueda de ruleta se hace girar tantas veces como pop individuos existan en una generación. En cada una de los giros se selecciona un cromosoma de la siguiente forma:

- (a) Se genera un número aleatorio r en el rango de $[0, 1]$.
- (b) Si $r \leq q_1$ entonces el primer cromosoma \mathbf{P}_1 es seleccionado; de otra forma, se selecciona el k -ésimo cromosoma \mathbf{P}_k tal que $q_{k-1} < r \leq q_k$.

Finalmente, se aplica la *selección por torneo*. Es decir, de dos cromosomas seleccionadas por el método de la *ruleta*, el individuo de mejor valor de aptitud será seleccionado.

Criterio de paro

De manera similar que la estrategia de Nelder y Mead el criterio de paro en un algoritmo *Evolutivo* es un proceso que depende de las características del problema. Esto es, resulta

difícil determinar cuando un algoritmo de optimización ha encontrado el máximo o mínimo global. En este caso se emplean dos criterios:

1. Cuando la función objetivo $Q \rightarrow 0$. Este criterio es aplicable sólo a imágenes perfectas (imágenes sintéticas). En general, el proceso termina cuando $Q < \varepsilon^2$.
2. Cuando un porcentaje de la población converja, calculado mediante el criterio siguiente: el proceso finaliza cuando una fracción de la magnitud del vector de distancia entre el *peor* v_w y el *mejor* v_b valor de aptitud de los cromosomas, correspondientes a un porcentaje de la población dado, es inferior a cierta tolerancia:

$$2 \frac{|v_w - v_b|}{|v_w| + |v_b|} \leq \varepsilon \quad (121)$$

IV.4 Conclusiones

En este capítulo se realizó una revisión de los métodos de optimización. Así como heurísticas capaces de una optimización multiobjetivo. De esta manera se ha descrito a detalle las heurísticas de *downhill* y *estrategia evolutiva* con el propósito de utilizar sus características al presente trabajo. En general estas técnicas son combinadas con el procedimiento determinístico de Levenberg-Marquardt para encontrar los mínimos locales. De igual forma se discutió el criterio de optimización χ^2 , que en este caso es tomada como una medida para decidir sobre la calidad de cada solución. Lo anterior da pie a resolver el problema de ajuste de una región de la imagen con los modelos propuestos en el capítulo III.

Capítulo V

Resultados experimentales

En los capítulos anteriores se expone la importancia del problema de la localización de esquinas y blancos retro-reflejantes. También se hace una revisión bibliográfica sobre los detectores de esquinas tradicionales y se detalla cada uno de ellos. Finalmente el trabajo de Olague y Hernández (2005) abre la pauta para proponer un nuevo detector paramétrico de esquinas múltiples con un modelo que simula las características físicas y geométricas de una esquina. Al obtener un modelo analítico es posible proponer un criterio de ubicación del punto de esquina en forma precisa. De manera similar se hace una breve revisión de los detectores de blancos retro-reflejantes y se propone una función analítica que lo modele. Ubicando el centro del blanco como un parámetro de la función. Finalmente se describen los diferentes tipos de técnicas y heurísticas que se usan para un ajuste multidimensional de datos.

De esta forma en el presente capítulo se describe la implementación y los resultados experimentales del detector paramétrico de esquinas múltiples y el detector paramétrico de blancos retro-reflejantes.

El capítulo se estructura como sigue:

- La primera sección describe la estructura del programa y los puntos importantes de la implementación del algoritmo, así como las características básicas del software.
- La sección V.2 aborda los resultados experimentales obtenidos con el detector paramétrico de esquinas múltiples, el ajuste del modelo, la localización del punto de

esquina y la comparación con otros modelos. Lo anterior se realiza para esquinas tipo L, tipo T, tipo Y y tipo X.

- En la sección V.3 se exponen algunos resultados relevantes determinados por el Modelo paramétrico de blancos retro-reflejantes. Así como algunas consideraciones importantes en el modelaje y su comportamiento.
- Finalmente en la sección V.4 se concluye el capítulo con una pequeña reseña y análisis sobre los resultados obtenidos.

V.1 Arquitectura del sistema

Se desarrolla un sistema escrito en lenguaje C para la detección de esquinas múltiples y blancos retro-reflejantes circulares, en imágenes en escala de gris. Dicho sistema está embebido en una plataforma para el desarrollo de aplicaciones llamado VXL por sus siglas en inglés (*Vision-X-Libraries*). VXL es una colección de bibliotecas diseñadas para la investigación y desarrollo en Visión Artificial. Este es basado en proyectos como *TargetJr* y *IUE* con el objetivo de realizar un sistema ligero, rápido y consistente. VXL está escrito en código ANSI/ISO C++ y es diseñado para ser multiplataforma. El sistema es instalado en la distribución de Linux Fedora Core 4 en una computadora de marca HP L2000, con procesador AMD Turion 64.

De esta forma son incorporadas y adaptadas las rutinas SIDEE (Sistema Integral para la Detección Exacta de esquinas) desarrolladas por Hernández Valencia (2002). Se proponen nuevas funciones de esquina en L y esquinas múltiples. En el caso del detector de blancos paramétrico las rutinas son modificadas para este fin. Además de incorporar una interfaz para el usuario, escrita en VXL. El programa se describe a partir del esquema que se muestra en la Figura 48

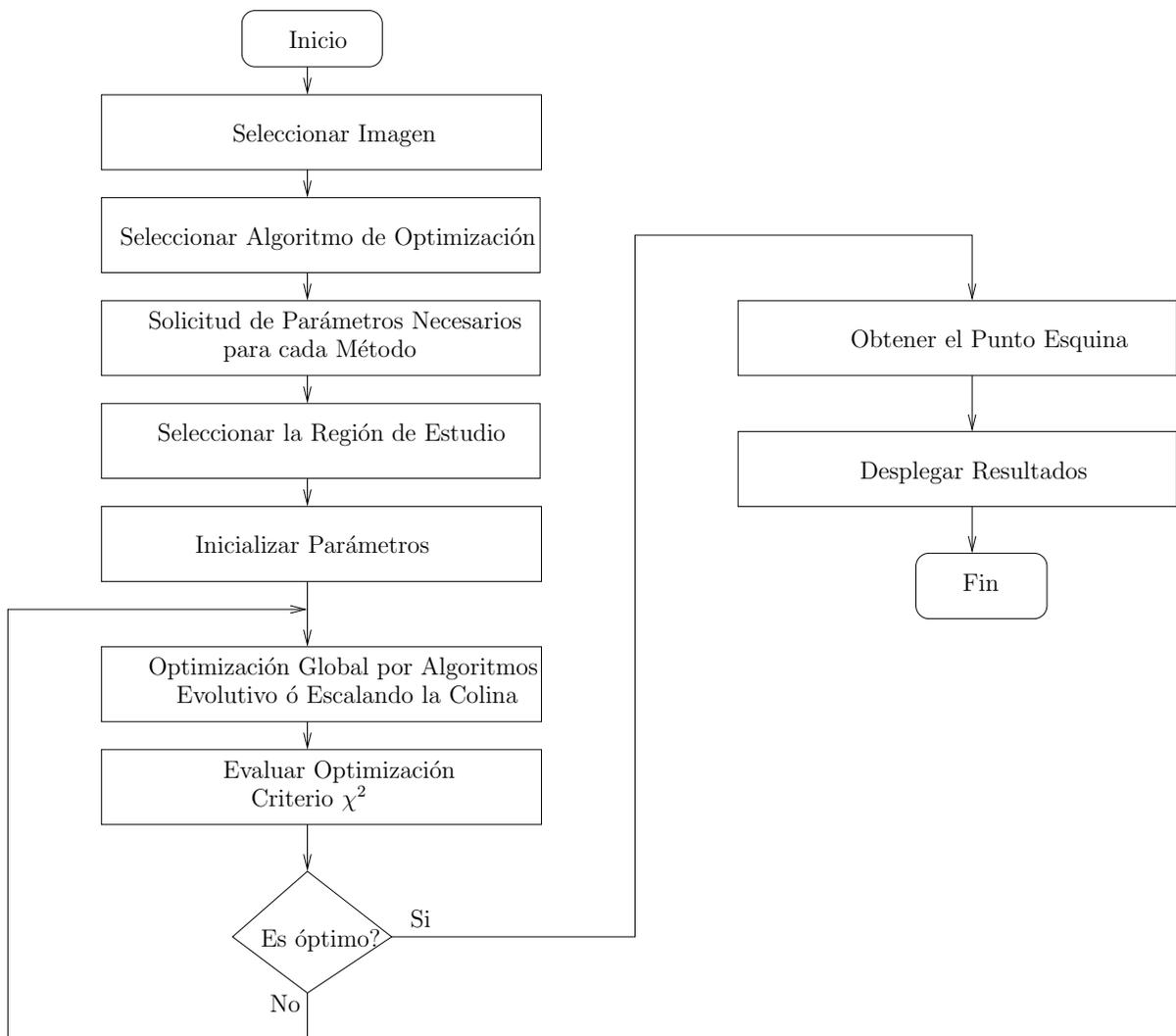


Figura 48: Diagrama a bloques del sistema para la detección de esquinas y blancos

V.1.1 Interacción con el usuario

El sistema se desarrolla como una rutina incorporada a la aplicación XCV predefinida en VXL. En esta se agrega la opción para elegir cualquiera de los detectores implementados. Dentro de esta opción se elige el método a utilizar y se solicita al usuario los parámetros necesarios para cada heurística. Por ejemplo, si se selecciona la opción de detección de esquinas se debe de elegir el tamaño de la ventana, el tipo de esquina que se encuentre dentro de la región por seleccionar, y el tipo de heurística para la optimización global (ver Figura 49). Si se elige una optimización por un algoritmo evolutivo los parámetros requeridos son: tamaño de la población, probabilidad de mutación, probabilidad de cruzamiento, probabilidad de convergencia, número máximo de generaciones y tolerancia. En el caso de la heurística de downhill simplex, no se requieren parámetros. Estas opciones se obtienen por medio de ventanas de diálogo.

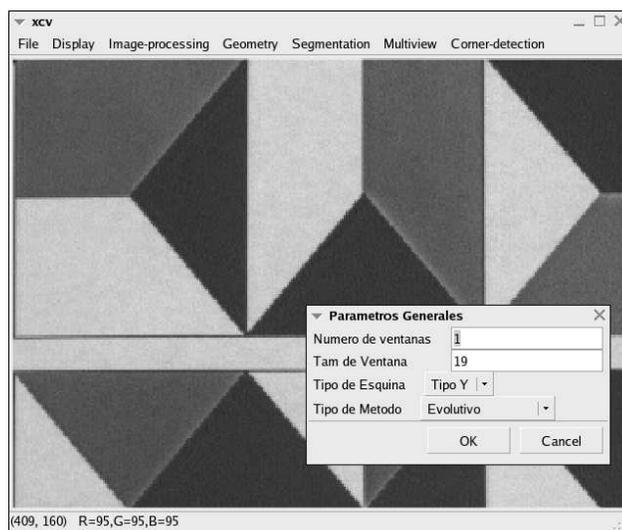


Figura 49: Ventana de interacción con el usuario para la adquisición de parámetros, en el caso del detector de esquinas

V.1.2 Inicialización de parámetros

Tener una buena inicialización de los parámetros del modelo, implica encontrar un conjunto de soluciones cercanas al óptimo. Esto se traduce en una convergencia más rápida del algoritmo al conjunto de las mejores soluciones. En el caso de las esquinas múltiples existen un sin número de óptimos locales, lo que hace que la solución de este problema sea complejo y sea necesaria la utilización de heurísticas que ofrecen una búsqueda combinada entre una exploración exhaustiva del espacio de búsqueda entorno a un óptimo local y la capacidad de salir de los mismos. Por construcción las esquinas múltiples ofrecen una forma de inicialización “sencilla”. Este proceso se lleva a cabo como sigue:

1. Se segmenta la esquina múltiple en esquinas tipo L.
2. Se encuentra los parámetros que ajusten a cada esquina tipo L.
3. Se concatenan estos parámetros para proponer una inicialización de los parámetros del modelo de esquina múltiple.
4. Cada parámetro se inicializa en una distribución uniforme en un rango alrededor de los valores obtenidos en el paso anterior.

Para dividir la región de la imagen seleccionada en esquinas tipo L (en este caso se supone que el usuario ha seleccionado una región donde se encuentra una esquina múltiple) se realiza una segmentación a partir del histograma. Se localizan los puntos más altos del mismo y dado un intervalo entre estos valores se supone la existencia de un región (ver Figura 50). Después de esto se discriminan los valores fuera del intervalo determinado para cada región. La región con un valor más bajo es propuesta como el piso de una esquina tipo L y el valor de cada región corresponde al techo de una esquina tipo L. De esta forma se obtienen subimágenes las cuales contienen una

esquina tipo L. Cada subimagen se ajusta al modelo de esquina tipo L con un algoritmo evolutivo, dando prioridad a una búsqueda exhaustiva y pocas generaciones para una rápida convergencia a un óptimo local.

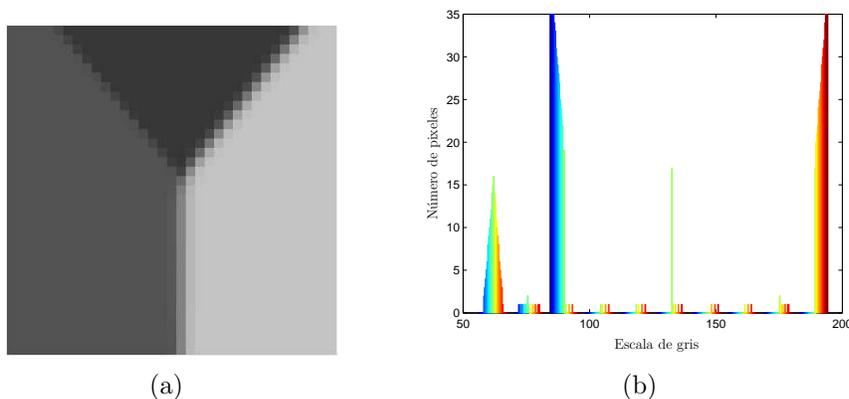


Figura 50: Histograma de una esquina tipo Y.

Nuevamente, al utilizar una heurística para encontrar un óptimo en una esquina tipo L, se necesita inicializar el algoritmo con un conjunto de posibles soluciones. En este caso se conocen los valores tanto del piso como del techo de la esquina, que representan los parámetros de escala A y B de ML . Recuerdese que si $A > B$ entonces se trata de una esquina con un ángulo de apertura entre $]0, \pi[$, en caso contrario el ángulo de apertura se encuentra en un intervalo de $]\pi, 2\pi[$. Si el número de píxeles que se encuentran en el techo es mayor al número de píxeles en el piso entonces $A > B$, en caso contrario $A < B$.

La combinación de los signos de cada borde permite representar las esquinas en las direcciones de los cuatro cuadrantes que forman el sistema coordenado de la región de la

imagen seleccionada. Para modelar una esquina en la dirección del cuadrante (x^+, y^+) los signos de U_1 y U_2 (donde U_1 y U_2 son los bordes que construyen a una esquina tipo L) deben ser ambos positivos. Para la dirección del cuadrante (x^-, y^+) los signos de U_1 y U_2 son $-$ y $+$ respectivamente y así sucesivamente. Esto se muestra en la Figura 51. En una imagen real o en la aplicación de $M_L(x, y, \mathbf{P})$, la determinación de los signos de U_1 y U_2 se obtienen, promediando el valor de intensidad de los pixeles que se encuentra en la parte positiva y negativa de cada uno de los ejes x y y . El promedio mayor será el que determine el signo de U_1 y U_2 . En forma específica:

Para obtener el signo de U_1 , si $I(x, y)$ es la región seleccionada de tamaño $(2w + 1) \times (2w + 1)$ pixeles, se calcula el promedio de la parte positiva del eje x ,

$$px^+ = \frac{1}{w(2w + 1)} \sum_{x=1}^w \sum_{y=-w}^w I(x, y) \quad x = 1, 2, \dots, w \quad y = -w, \dots, 0, \dots, w \quad .$$

Además, se calcula el promedio de la parte negativa del eje x ,

$$px^- = \frac{1}{w(2w + 1)} \sum_{x=-w}^{-1} \sum_{y=-w}^w I(x, y) \quad x = -w, \dots, -1 \quad y = -w, \dots, 0, \dots, w \quad .$$

Si $px^+ > px^-$ el signo de U_1 es **positivo** (+) de otra forma es negativo ($-$).

De forma similar, para obtener el signo de U_2 se promedia la región comprendida en la parte positiva del eje y ,

$$py^+ = \frac{1}{w(2w + 1)} \sum_{x=-w}^w \sum_{y=1}^w I(x, y) \quad x = -w, \dots, 0, \dots, w \quad y = 1, 2, \dots, w \quad ,$$

y el promedio de la parte negativa del eje y queda determinado por

$$py^- = \frac{1}{w(2w + 1)} \sum_{x=-w}^w \sum_{y=-w}^{-1} I(x, y) \quad x = -w, \dots, 0, \dots, w \quad y = -w, \dots, -1 \quad .$$

Si $py^+ > py^-$ el signo de U_2 es **positivo** (+) de otra forma es negativo ($-$).

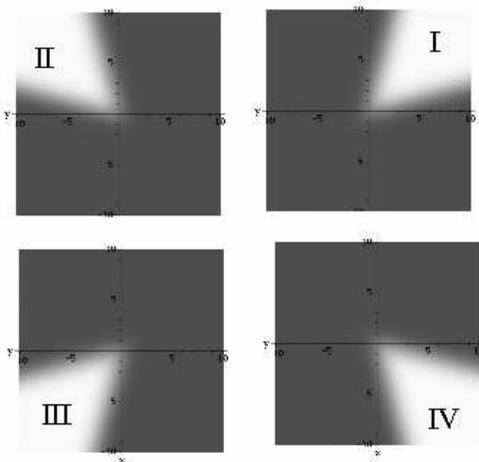


Figura 51: esquinas con un ángulo de apertura de 60° , centradas en el origen $\mu_1 = \mu_2 = 0$ y un factor de difuminado $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ en diferentes cuadrantes. Para el cuadrante I, U_1 y U_2 tienen signo $+$. Para el cuadrante II, U_1 tiene signo $-$ y U_2 tiene signo $+$. Para el cuadrante III, U_1 y U_2 tiene signo $-$. Para el cuadrante IV, U_1 tiene signo $+$ y U_2 tiene signo $-$.

Cabe señalar que en la práctica los signos de cada borde no representan un parámetro más en el ajuste de datos, ya que el signo es agregado a σ de manera que el signo σ representa la orientación del borde y la magnitud $|\sigma|$ el grado de difuminado del mismo.

Los parámetros $|\sigma|$, μ y θ se varían uniformemente en un rango predeterminado, construyendo de esta forma un conjunto de soluciones iniciales.

En el caso de los blancos retro-reflejantes la inicialización solo se hace a partir de una distribución uniforme de los parámetros a minimizar.

V.1.3 Implementación de las rutinas de optimización

Básicamente estas rutinas fueron tomadas del trabajo desarrollado por Hernández Valencia (2002). Estas rutinas están codificadas en lenguaje C. Anteriormente las rutinas

estaban programadas para procesar el modelo de esquina en L propuesto por Olague y Hernández (2002), la documentación detallada de cada rutina puede encontrarse en Hernández Valencia (2002). La modificación de estas rutinas radica en la propuesta de los modelos de esquina tipo L, esquina múltiples de 2 diferentes niveles de gris y el modelo del blanco Reflejante. Debido a lo anterior solo se describe brevemente en que consisten las rutinas principales de los algoritmos de optimización.

Los modelos y sus derivadas parciales fueron hechos en *Maple*, que es un Sistema Algebraico Computacional (CAS¹).

Rutina Levenberg-Marquardt

La implementación del algoritmo de Levenberg-Marquardt se basa en las rutinas del libro *Numerical Recipes in C* Press *et al.* (1994), correspondientes a este algoritmo.

La rutina **Criterio_ch2_L** en el caso del detector de esquinas y **Criterio_ch2_C** en el caso del detector de blancos retro-reflejantes controlan el proceso de minimización del algoritmo de Levenberg-Marquardt, para una matriz de datos **Datos[1,...,W][1,...,W]** que representa los valores de intensidad de una región de la imagen y un vector de parámetros **a[1,...,Nmodel+2]** con **Nmodel** números de parámetros a minimizar. Al final del proceso, esta rutina entrega el valor de χ^2 y los mejores valores dentro del mínimo local, el cual no necesariamente es el mejor. La rutina **Criterio_ch2_L** y **Criterio_ch2_C** interactúa con la rutina de **mrqmin**, *Numerical Recipes* y con la rutina **corner** en el caso del detector de esquinas y **cornerC** en el caso del detector de blancos retro-reflejantes.

La rutina **mrqmin** realiza una iteración del método de Levenberg-Marquardt, pasos

¹por sus siglas en inglés Computer Algebra System

2 al 5 de la sección IV.2.3. Esta rutina llama a **mrqcof** para obtener la matrix $[\alpha]$, Ecuación (111), y el vector β de las ecuaciones (108) y (109). **mrqcof** llama a la rutina **corner** o en su caso a **cornerC**, para la evaluación del modelo y sus derivadas parciales.

El proceso de minimización de Levenberg-Marquardt termina cuando, después de 2 iteraciones, la diferencia entre los valores de χ^2 pueda ser considerado despreciable. En este caso cuando $\chi^2 < 0.1$, o bien $\lambda < 1 \times 10^{-15}$. El proceso se detiene también, si los valores de los parámetros propuestos por **mrqmin** quedan fuera de los límites permitidos. La rutina **Limites_L** es la encargada de este control.

Estrategia de Nelder y Mead

Esta estrategia se emplea en dos procesos de optimización, uno como optimización global para encontrar los valores óptimos, de los modelos propuestos en este trabajo y para localizar el punto de esquina en el detector de esquinas múltiples. El primer proceso se lleva a cabo en la rutina **Down_Hill_L** en el caso del detector de esquinas y **Down_Hill_C** en el caso del detector de blancos retro-reflejantes. El segundo proceso se explica más adelante.

Rutina Down_hill_L y Down_hill_C La rutina **Down_hill_L** y **Down_hill_C** inicializan el primer *simplex* dada una función objetivo Q , sobre la que se realiza el ajuste de mínimos cuadrados de la región de la imagen. La región de la imagen está representada por la matriz **Datos**[1, . . . , **W**][1, . . . , **W**] para el vector de parámetros a minimizar **P_M**[1, . . . , **N_par**]. Q se obtiene por medio de la rutina **Criterio_ch2_L** o por **Criterio_ch2_C** en el caso de los blancos retro-reflejantes, la cual ejecuta el método de Levenberg-Marquardt. El valor de Q para cada uno de los vértices es almacenado en

el vector $\mathbf{yd}[1,\dots,\mathbf{N_par}+1]$. Un esquema simple de interacción con otras rutinas se muestra en la Figura 52.

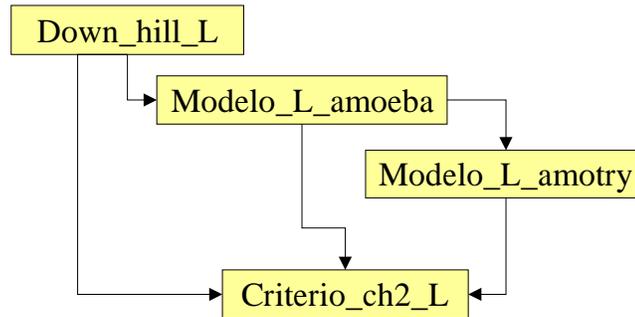


Figura 52: Rutinas utilizadas por **Down_hill_L**.

Down_hill_L y **Down_hill_C** contruyen el *simplex* de inicio, donde los vértices se encuentran a la misma distancia uno de otro. Esto significa, que el *simplex* inicial representa una muestra uniforme entre las cotas superior e inferior, de los valores permitidos para cada parámetro del modelo. En forma específica el *simplex* inicial se construye de la forma siguiente:

1. Se construye el vector de parámetros a minimizar **P_M** donde el número de parámetros a minimizar es **N_par**
2. Las cotas superior e inferior de cada uno de los parámetros están contenidas en los vectores **P_max[1,...,N_par]** y **P_min[1,...,N_par]** respectivamente. Las cotas son definidas conforme a cada modelo. En el caso del detector de esquinas los límites son los siguientes: 1) σ está definido en el intervalo $[-w, w]$ sin tomar el 0; 2) μ en el intervalo $(-w, w)$; 3) ϑ en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$; 4) A y B en el intervalo $[0, 255]$. Para el caso del detector de blancos retro-reflejantes, los límites quedan definidos como sigue: 1) σ está definidos en el intervalo $]0, 1]$; 2) h y k en

el intervalo $(-w, w)$; 3) ϑ en el intervalo $[0, \pi)$; 4) A y B en el intervalo $[0, 255]$; 5) a y b en el intervalo $(-w, w)$. Estos límites son los valores extremos de las cotas.

3. Se calcula un vector del tamaño de los incrementos $\mathbf{inc}[1, \dots, \mathbf{N_par}]$ que debe tener cada uno de los vértices. Este vector es de la forma,

$$\mathbf{inc}(j) = \frac{\mathbf{P_max}(j) - \mathbf{P_min}(j)}{\mathbf{N_par} + 1} \quad j = 1, \dots, \mathbf{N_par} \quad .$$

4. Cada uno de los vértices \mathbf{pd} representa una muestra uniforme en el intervalo de búsqueda. \mathbf{pd} se construye a través de la siguiente expresión:

$$\mathbf{pd}(i, j) = \mathbf{P_min}(j) + (i - 1)\mathbf{inc}(j) \quad i = 1, \dots, \mathbf{N_par} + 1; j = 1, \dots, \mathbf{N_par} \quad ,$$

donde, el índice i representa los vértices del simplex y el índice j representa los parámetros a minimizar.

Las rutinas **Modelo_L_amoeba**, **Modelo_L_omotry** y **Modelo_C_amoeba**, **Modelo_C_omotry** se encargan de realizar los movimientos propuestos por la estrategia de Nelder y Mead y corresponden a los procedimientos **amoeba** y **omotry** modificados con el objeto de operar a partir del método de minimización de Levenberg-Marquardt.

Estrategia evolutiva

La rutina **Evolutivo_L** y **Evolutivo_C** en los casos del detector de esquinas y el detector de blancos son las responsables del proceso evolutivo, planteado en el capítulo anterior. De manera similar que las estrategias anteriores de optimización, **Evolutivo_L** y **Evolutivo_C** determinan los \mathbf{P} parámetros de cada modelo que se ajusten mejor a una ventana de la imagen original $\mathbf{Datos}[1, \dots, \mathbf{W}][1, \dots, \mathbf{W}]$. La función de

aptitud Q está dada por la rutina **Criterio_ch2_L** y **Criterio_ch2_C** segun el caso.

Evolutivo_L depende de las rutinas siguientes:

1. **initialize_population**. Genera un población inicial, donde los aleles de cada cromosoma están uniformemente distribuidos entre las cotas superior e inferior, de los valores permitidos para cada uno de los parámetros del modelo.
2. **evaluate**. Evalúa a cada cromosoma a través del estimador de máxima probabilidad Q , rutina **Criterio_ch2_L** en el caso del detector de esquinas y **Criterio_ch2_C** en el caso del detector de blancos.
3. **seleccion_ruleta**. Criterio de selección, equivalente al método de la ruleta.
4. **flip**. Determina si un cromosoma es candidato para la mutación o apareamiento.
5. **homographie**. Transformación afín sobre los operadores genéticos.

V.1.4 Estrategia de Nelder y Mead para el punto de esquina

En el caso del detector de esquinas una vez que se tiene el mejor conjunto de parámetros \mathbf{P} , que se ajustan a la región de la imagen es necesario ejecutar la rutina **Modelo_L_Curvatura** para localizar el punto exacto (x_e, y_e) donde se ubica la esquina. Este proceso localiza el punto (x_e, y_e) que pertenece a $M_L(x, y, \mathbf{P}) = 0.5$ y representa la mínima distancia Euclidiana $D(a, b)$ con respecto al punto de intersección (x_0, y_0) de las rectas de borde r_1 y r_2 que definen a una esquina tipo L. Para una esquina múltiple este proceso se repite para cada esquina tipo L que la construye para finalizar con la rutina **encuentraCentroide** que ubica el centroide de los puntos dados por la rutina **Modelo_L_Curvatura**.

Rutina Modelo_L_Curvatura

La rutina **Modelo_L_Curvatura** genera el *simplex* inicial para una función objetivo $D(a, b)$. El número de elementos desconocidos es **NP**=2 que representan los valores de la coordenada (x_e, y_e) . Por tanto, el número total de vértices es **MP**=3. El vector **y**[1,...,MP] almacena el valor de la función objetivo para las coordenadas (x_s, y_s) propuestas por los movimientos del método de Nelder y Mead. La matriz **p**1[1,..,MP][1,...,NP] contiene las coordenadas de cada vértice del *simplex*. La función objetivo $D(a, b)$ requiere del cálculo del punto $a = (x_0, y_0)$ y otro punto arbitrario $b = (x_s, y_s)$ con las siguientes características.

- $a = (x_0, y_0)$ es el punto de intersección de \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , obtenido a través de los valores ya conocidos de **P**. La rutina **sol** entrega el valor de (x_0, y_0) a partir de la siguiente expresión, Ecuación (79):

$$\mathbf{sol} = \begin{cases} x_0 & = -\frac{\tan(\vartheta_1)\mu_2 + \mu_1}{\tan(\vartheta_2)\tan(\vartheta_1) - 1} \\ y_0 & = -\frac{\tan(\vartheta_2)\mu_1 + \mu_2}{\tan(\vartheta_2)\tan(\vartheta_1) - 1} \end{cases} .$$

- $b = (x_s, y_s)$ debe ser un punto que pertenece a $M_L(x, y, \mathbf{P}) = 0.5$. Además, la línea que forma con (x_0, y_0) debe estar orientada entre las rectas de borde \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 . En otras palabras, se encuentra entre el ángulo de apertura de la esquina. El algoritmo que denominamos "Curva de Contorno", es ejecutado por la rutina **Intercepta**, a fin de localizar a la coordenada (x_s, y_s) .

Una vez calculados los puntos $a = (x_0, y_0)$ y $b = (x_s, y_s)$, la rutina **distancia** devuelve el valor de la distancia entre dichos puntos:

$$\mathbf{distancia} = (x_s - x_0)^2 + (y_s - y_0)^2 .$$

La Figura 53 muestra un diagrama de interacción de **Modelo_L_Curvatura** con otras rutinas.

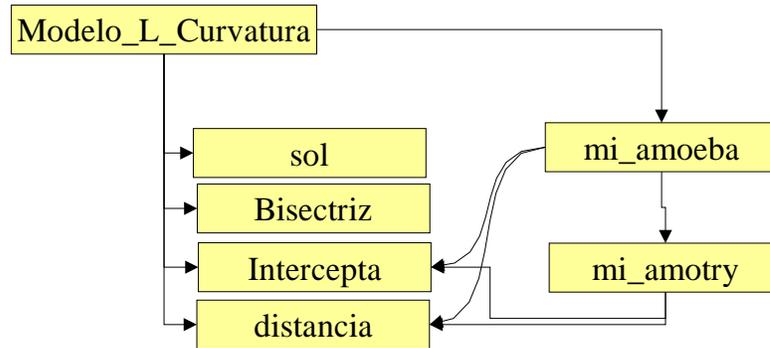


Figura 53: Rutinas utilizadas por **Modelo_L_Curvatura**.

Este algoritmo se ejecuta a través de los siguientes 5 pasos:

1. Se genera una coordenada (x_l, y_l) que obedece a los movimientos de la estrategia *Simplex*. Este punto generalmente no pertenece a la curva de contorno $M_L(x, y, \mathbf{P}) = 0.5$.
2. Se calcula el ángulo β de la recta generada por los puntos (x_l, y_l) y (x_0, y_0) .
3. El algoritmo "Curva de Contorno", ejecutado por la rutina **Intercepta**, genera una recta r_s con el ángulo β y el punto (x_0, y_0) . Si r_s está orientada entre r_1 y r_2 entonces regresa el punto (x_s, y_s) que satisface a $M_L(x, y, \mathbf{P}) = 0.5$. En caso contrario penaliza a la coordenada propuesta por el *simplex* y le asigna un valor de coordenada sobre las rectas de borde r_1 o r_2 dependiendo de cual de los ángulos, definidos por ambas rectas, sea el más cercano a β . Este algoritmo regresa siempre un punto $(x_s, y_s) \in M_L(x, y, \mathbf{P}) = 0.5$.
4. Se evalúa la función objetivo $D(a, b)$ con esta nueva coordenada, $b = (x_s, y_s)$.

5. Se continúa con el método downhill simplex hasta lograr la convergencia. Para cada vértice nuevo propuesto por el método downhill simplex, se regresa al paso 1. Con estos pasos se garantiza que cada vértice satisface su pertenencia a la curva de contorno.

Los tres vértices iniciales del *simplex* en la rutina **Modelo_L_Curvatura**, se contruyen mediante la siguiente lógica: 1) el primer vértice C_1 se genera con el ángulo de la recta bisectriz r_{bis} , calculado por la rutina **Bisectriz**, 2) el segundo vértice C_2 es un punto en la recta de borde r_1 y 3) el último vértice C_3 corresponde a un punto en la recta de borde r_2 . La Figura 54, muestra la inicialización del método downhill simplex.

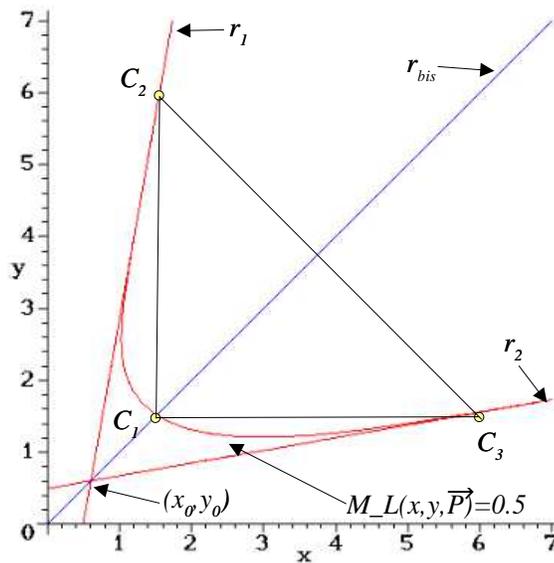


Figura 54: Los vértices C_1 , C_2 , C_3 delimitan la figura geométrica del *simplex* inicial, el cual es generado y resuelto por la rutina **Modelo_L_Curvatura**.

Rutina encuentraCentroide

Esta rutina únicamente se aplica a las esquinas múltiples, donde dados n puntos determinados por la rutina **Modelo_L_Curvatura**, se calcula el centroide determinado por los mismos. Esta rutina se codifica a partir de la expresión (85) descrita en la sección III.4.1.

V.1.5 Despliegue de resultados

Los resultados pueden ser almacenados en un archivo de texto con el formato siguiente: Cada renglon representa el resultado de cada ajuste en una región determinada en la imagen. La primera columna hace referencia al número de región seleccionada, la segunda y tercera columna son las coordenadas (en el sistema de referencia de la imagen) del centro de la región seleccionada, la 3ª y 4ª son las coordenadas (en el sistema de referencia de la imagen) del punto de esquina, las columnas siguientes corresponden a los parámetros del modelo al que se ha ajustado. En el caso de una esquina tipo L los parámetros siguen el orden de $\sigma_1, \mu_1, \theta_1, \sigma_2, \mu_2, \theta_2, A, B$. Para una esquina múltiple de dos diferentes niveles de gris, los parámetros son ordenados como sigue: $\sigma_1, \mu_1, \theta_1, \sigma_2, \mu_2, \theta_2, \sigma_3, \mu_3, \theta_3, \sigma_4, \mu_4, \theta_4, A_1, B, A_2$. Finalmente para el modelo de un blanco retro-reflejante los parámetros son acomodados como: $a, b, h, k, \theta, \sigma, A, B$. Cada resultado también es desplegado en consola.

V.2 Resultados experimentales del detector paramétrico de esquinas múltiples

Esta sección expone una comparación del nuevo detector paramétrico de esquinas múltiples y los documentados en la sección II.2.2. Se reproducen los detectores de esquinas de Beaudet, Dreschler y Nagel, Kitchen y Rosenfeld, Wang y Brady II.2.2,

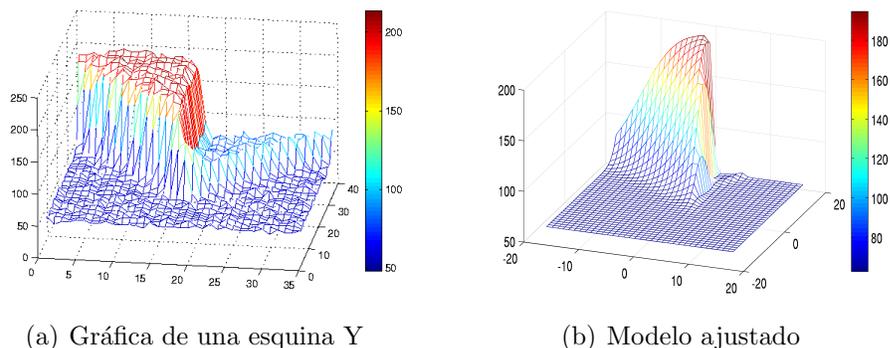


Figura 55: Ajuste con el método downhill simplex

Harris II.2.2, Förstner II.2.2, IPGP1 II.2.2 e IPGP2 II.2.2, los cuales son implementados en el paquete computacional Matlab 7, el mismo paquete es utilizado para generar las gráficas de los modelos propuestos en este trabajo.

Las imágenes utilizadas son fotografías tomadas en el laboratorio con una cámara digital PULNIX 9701d donde cada celda fotosensible es de tamaño $11.6\mu\text{m} \times 13.6\mu\text{m}$.

La implementación de cada detector es sobre una región cuadrada de 35×35 píxeles, en la cual se encuentra ubicada una esquina. Dentro de cada región se establece un sistema coordinado como marco de referencia, donde el origen es ubicado en el píxel central.

La presente sección se divide en varias partes. Cada una de ellas trata por separado un tipo de esquina específico, donde se presenta la región de ajuste y su respectivo modelo, así como una comparación con otros tipos de detectores de esquinas.

Cabe destacar que el algoritmo evolutivo utilizado para el ajuste de datos tuvo mejor desempeño que la heurística de downhill simplex. En este caso el algoritmo downhill simplex se mantenía en mínimos locales, en especial sobre las esquinas complejas. Mientras que el algoritmo evolutivo alcanzaba un óptimo a través de la exploración profunda (dada por un porcentaje de cruzamiento alto) de cada mínimo local (en este caso el factor de mutación permite al algoritmo salir de los mínimos locales). Los parámetros típicos por el algoritmo evolutivo fueron los siguientes: tamaño de la población 80 individuos, probabilidad de cruzamiento 90%, probabilidad de mutación 2%, probabilidad de convergencia 60%, número máximo de generaciones 3000 y un factor de tolerancia del 0.002 (ver sección IV.3.2). La Figura 55 muestra el ajuste a una esquina tipo Y por medio del algoritmo downhill simplex.

V.2.1 Esquina tipo L

En esta sección se muestra el comportamiento del detector paramétrico operado sobre 3 tipos de Esquinas tipo L. Estas son clasificadas de acuerdo a su ángulo de apertura, ver Figura 56. La región de interés es señalada con un recuadro en cada imagen. En este caso se toman esquinas con ángulos de apertura de valores cercanos a $\pi/4$, $\pi/2$ y $7\pi/4$ respectivamente. En cada imagen se selecciona una región de 35×35 pixeles, esta se ajusta al modelo de esquina tipo L. La Figura 57 expone este proceso. Las Figuras 57.a, 57.b y 57.c muestran la región de interés. Las Figuras 57.d, 57.e y 57.f representan las gráficas que corresponde a cada región de la imagen, donde los ejes x y y proporcionan la ubicación de cada pixel y el eje z es la intensidad de gris de ese pixel. Nótese como la gráfica no es uniforme por la presencia de ruido y el cambio entre el piso y el techo de la esquina es en forma gradual. Este efecto se presenta como un difuminado en la imagen. Las Figuras 57.g, 57.h y 57.i muestran las gráficas del modelo ajustado a cada tipo de esquina L. En este caso tanto el piso y el techo de la esquina son uniformes y el

cambio gradual entre estos límites es determinado por la función ML . Las Figuras 57.j, 57.k y 57.l describen la imagen creada a partir del modelo. Esta imagen se construye discretizando el modelo en cada unidad y asignándole el valor de la función como un nivel de gris. Nótese como la imagen generada es similar a la imagen original.

El problema de ajuste del modelo ML a la imagen, se resuelve como un problema de optimización el cual es descrito en el capítulo IV. De esta forma los parámetros que caracterizan a cada modelo se listan en la Tabla III, mientras la Tabla IV expone los factores de escala.

Una vez obtenido el modelo, el criterio de localización de la esquina es aplicado. Los resultados se muestran en la Tabla V para cada tipo de esquina. Las unidades son pixeles y la medición es a partir del pixel central de la región de estudio.

La Figura 58 muestra las diferentes regiones de estudio. En ellas se sobreponen las curvas de nivel del modelo ML correspondiente. El modelo acota los bordes y el área de difuminado de cada uno de ellos. Lo que hace posible ubicar el punto de esquina, la cual se muestra como un “+” en la imagen.

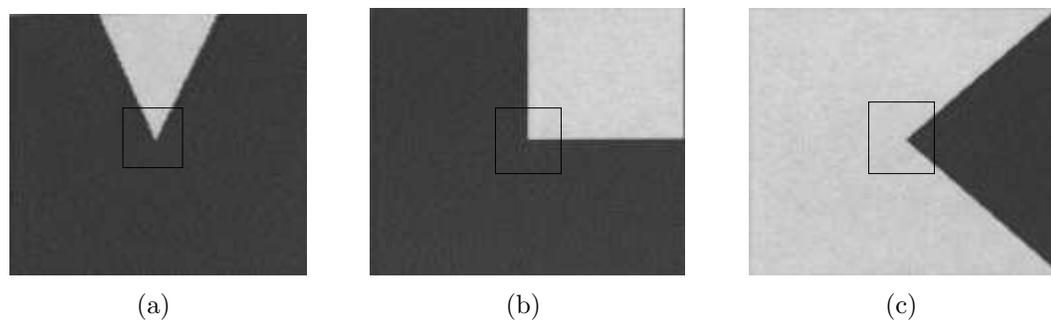


Figura 56: Imágenes de prueba a) Esquina aguda con un ángulo de apertura aproximado a $\pi/4$. b) Esquina Recta con un ángulo aproximado a $\pi/2$ c) Esquina obtusa con un ángulo de apertura aproximado a $3\pi/4$

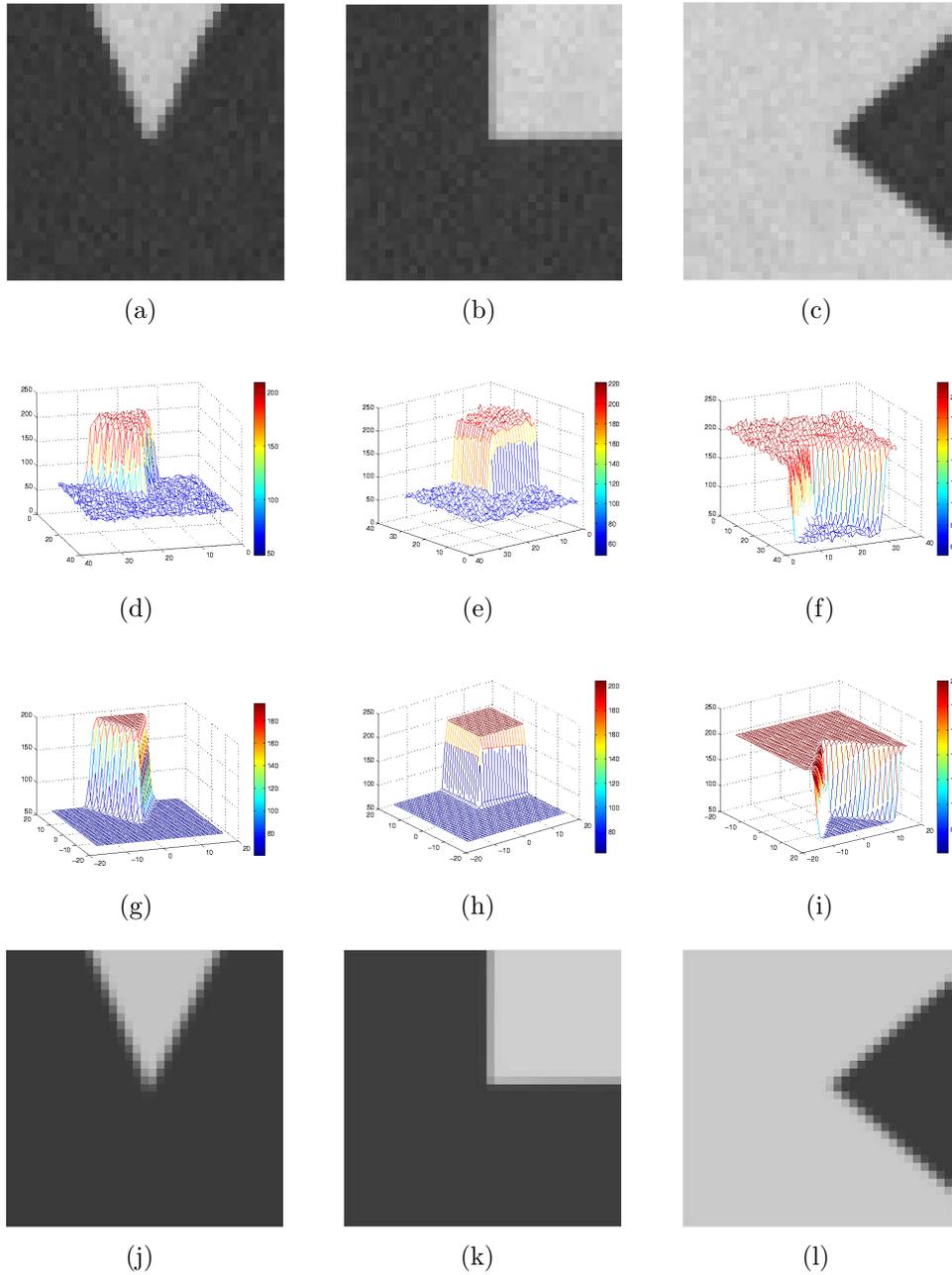


Figura 57: Comparación entre las imágenes y sus respectivos modelos

Tabla III: Parámetros que caracterizan a la función ML

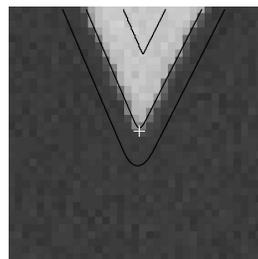
Tipo esquina	$U_x(I, P_0)$			$U_y(I, P_1)$		
	σ	μ	θ	σ_1	μ_1	θ_1
Esquina Aguda	0.619271	0.590215	-0.404664	1.1944	-1.17401	1.10351
Esquina Recta	0.412019	0.748988	0.00269737	0.41952	0.570088	0.0112274
Esquina Obtusa	0.734514	0.746005	0.854218	0.70028	1.32135	-0.712591

Tabla IV: Factores de Escala de la función ML

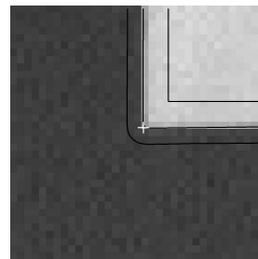
Factor de Escala	Esquina Aguda	Esquina Recta	Esquina Obtusa
A	196.551	205.554	59.8324
B	59.0356	61.5944	201.452

Tabla V: Ubicación del punto de esquina en cada modelo

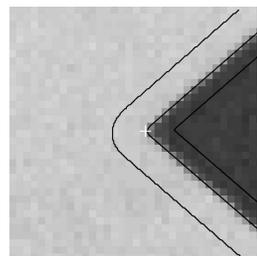
Tipo de esquina	Esquina aguda	Esquina recta	Esquina obtusa
Punto esquina	(0.5905, 0.253)	(0.833, 1.2849)	(1.2849, 0.3355)



(a)



(b)

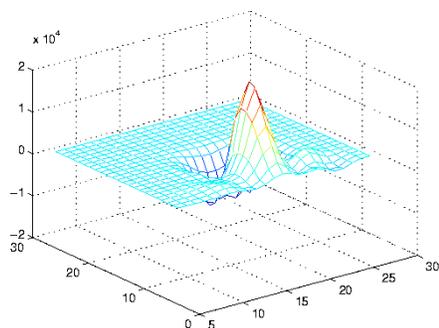


(c)

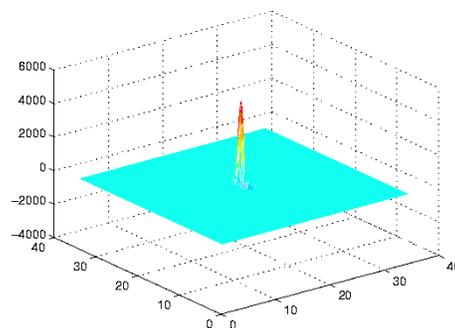
Figura 58: El símbolo $+$ representa el punto de esquina propuesto con el criterio. Las curvas de nivel del modelo se muestran sobre la región de estudio

Detector de Beaudet

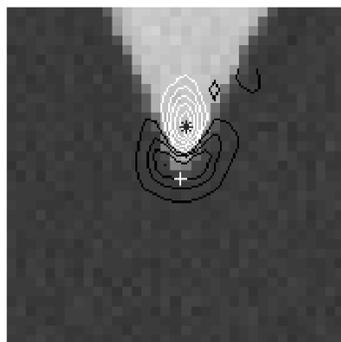
Una comparación interesante se lleva a cabo entre el operador de Beaudet aplicado a la imagen y el operador aplicado al modelo. De esta forma, las figuras 59.a y 59.c muestran el resultado de operar el detector de Beaudet a la imagen y las figuras 59.b y 59.d el resultado del operador de Beaudet aplicado al modelo. En este caso la esquina a tratar es de tipo L con un ángulo de apertura menor a $\pi/2$. Nótese que al tener un modelo analítico las derivadas se calculan sobre la función y por ende el punto determinado por el Hessiano se acerca al punto de esquina propuesto por el criterio, utilizado en este trabajo. En las Figuras 59.c y 59.d se sobreponen las curvas de nivel de la superficie generada por el detector de Beaudet aplicado a la imagen. En el caso de la Figura 59.c las curvas de nivel marcan un cambio más gradual comparado con la Figura 59.d debido a la aproximación de las derivadas por un filtro Gaussiano, haciendo que la ubicación del punto de esquina esté desplazada en sentido del mayor cambio de intensidad de la imagen; es decir no solo hacia la cresta de la esquina como en el caso de las Figuras 59 y 60 si no también hacia el borde que presenta un menor difuminado. Esto se aprecia al analizar las Figuras 60 y 61, donde se hace una comparación con esquinas tipo L con ángulos de apertura similares a $\pi/2$ y mayores a $\pi/2$ respectivamente. Cabe señalar que al utilizar el detector de Beaudet sobre el modelo, este arroja una precisión a nivel subpixel, mientras que si solo se aplica a la imagen la precisión es a nivel pixel. La Tabla VI muestra la ubicación del punto de esquina, en cada caso medido desde el pixel central de la imagen.



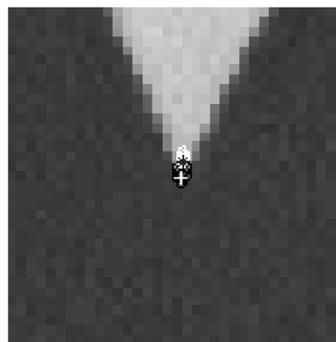
(a) Gráfica generada por el detector de Beaudet aplicado a la imagen



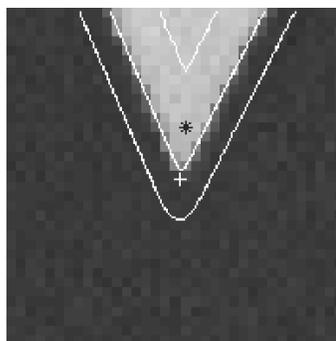
(b) Gráfica generada por el detector de Beaudet aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Beaudet operado en la imagen

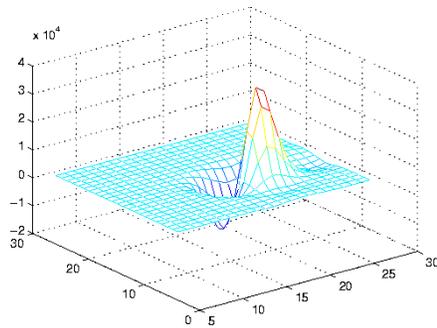


(d) Curvas de nivel del detector de Beaudet operado en el modelo

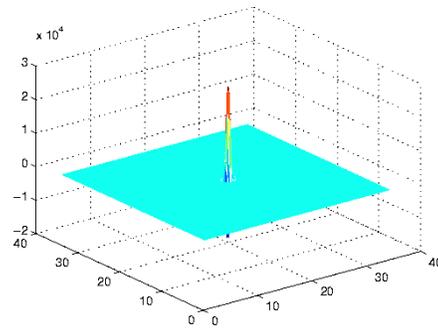


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

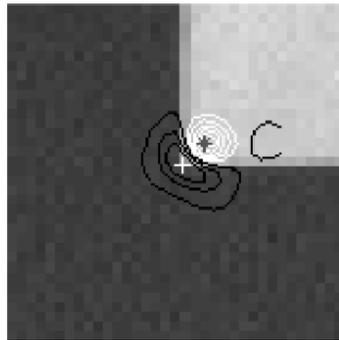
Figura 59: Esquina tipo L con un ángulo de apertura menor a $\pi/2$. Operador de Beaudet aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Beaudet y el + representa la esquina propuesta.



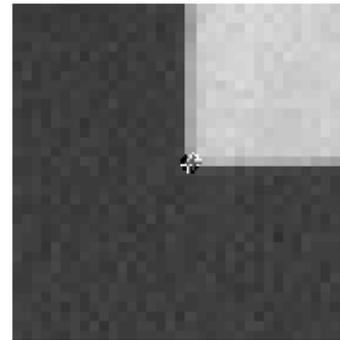
(a) Gráfica generada por el detector de Beaudet aplicado a la imagen



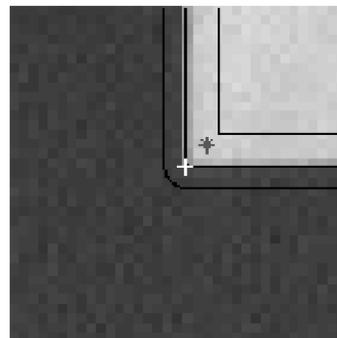
(b) Gráfica generada por el detector de Beaudet aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Beaudet operado en la imagen

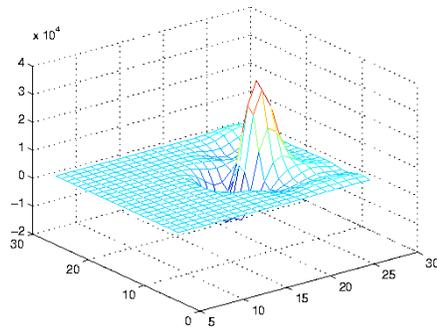


(d) Curvas de nivel del detector de Beaudet operado en el modelo

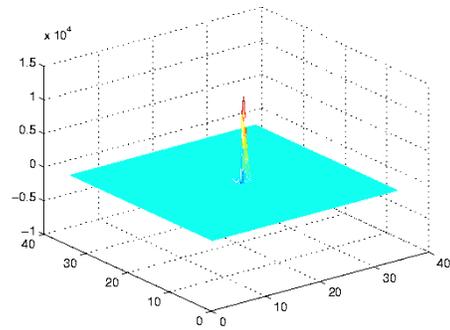


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

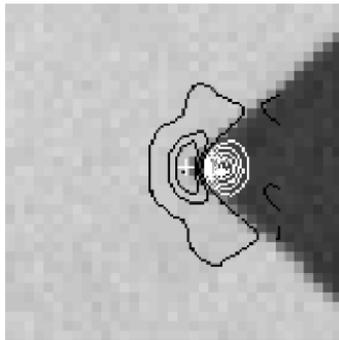
Figura 60: Esquina tipo L con un ángulo de apertura igual a $\pi/2$. Operador de Beaudet aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Beaudet y el + representa la esquina propuesta.



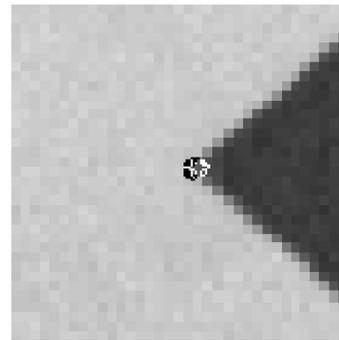
(a) Gráfica generada por el detector de Beaudet aplicado a la imagen



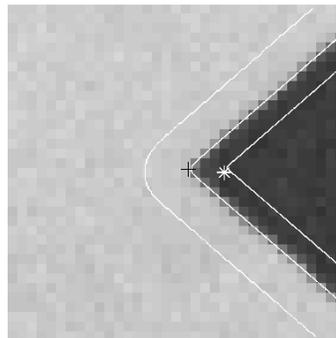
(b) Gráfica generada por el detector de Beaudet aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Beaudet operado en la imagen



(d) Curvas de nivel del detector de Beaudet operado en el modelo



(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

Figura 61: Esquina tipo L con un ángulo de apertura mayor a $\pi/2$. Operador de Beaudet aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Beaudet y el + representa la esquina propuesta.

Tabla VI: Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo

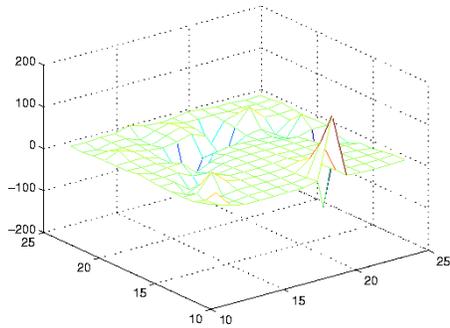
Tipo de esquina	Punto propuesto	Beudet aplicado sobre el modelo	Beudet aplicado a la imagen
Esquina aguda	(0.5905, 0.253)	(0.68, 1.53)	(1, 3)
Esquina recta	(0.833, 1.2849)	(1.19, 1.02)	(3, 2)
Esquina obtusa	(1.2849, 0.3355)	(2.04, 0.34)	(4, 0)

Detector de Dreschler y Nagel

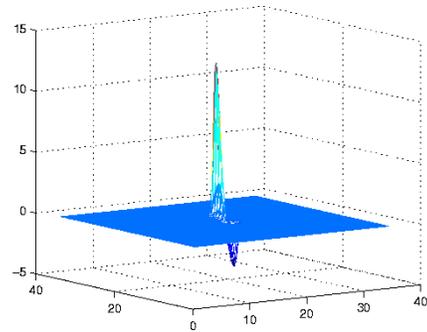
El detector de Dreschler y Nagel (ver sección II.2.2) se compara tanto a nivel pixel como a nivel subpixel, contra el detector propuesto. Las Figuras 62,63 y 64 muestran esta comparación gráficamente entre esquinas tipo L con ángulos cercanos a $\pi/4$, $\pi/2$ y $7\pi/4$ respectivamente. La Tabla VII presenta los puntos localizados por el detector propuesto y por el detector de Dreschler y Nagel operado tanto en el modelo como en la imagen. Este detector al calcular la máxima curvatura Gaussiana, el punto de esquina localizado es muy cercano al propuesto por el detector paramétrico, tan solo desplazado en el orden de décimas de pixel hacia el borde que presenta un mayor difuminado (ver Figura 62.d, 63.d y 64.d). Sin embargo, al aplicar este operador sobre la imagen resulta demasiado sensible al ruido (ver Figura 62.a, 63.a y 64.a), lo que lo hace detectar puntos falsos y por ende ubicar el punto de esquina muy alejado del punto localizado sobre el modelo. Las Figuras 62.e, 63.e y 64.e muestran una comparación entre el punto ubicado por el detector de Dreschler y Nagel aplicado a la imagen y el detector paramétrico propuesto en este trabajo.

Tabla VII: Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo

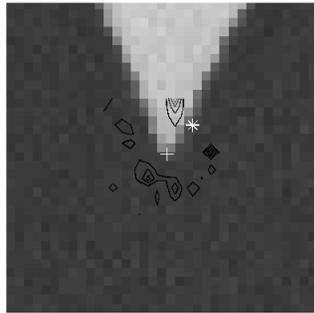
Tipo de esquina	Punto propuesto	D. & N. aplicado sobre el modelo	D. & N. aplicado sobre la imagen
Esquina aguda	(0.5905, 0.253)	(0.68, 0.85)	(3, 3)
Esquina recta	(0.833, 1.2849)	(1.19, 1.02)	(2, 1)
Esquina obtusa	(1.2849, 0.3355)	(1.70, 0.34)	(5, 2)



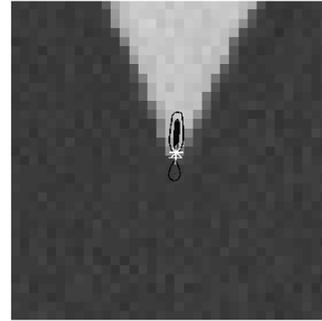
(a) Gráfica generada por el detector de Dreschler y Nagel aplicado a la imagen



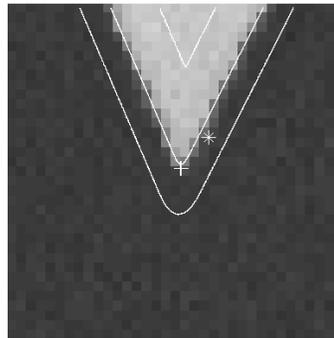
(b) Gráfica generada por el detector de Dreschler y Nagel aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Dreschler y Nagel operado en la imagen

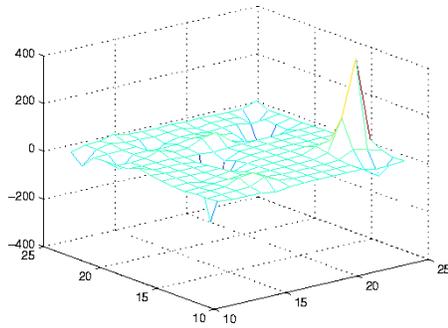


(d) Curvas de nivel del detector de Dreschler y Nagel operado en el modelo

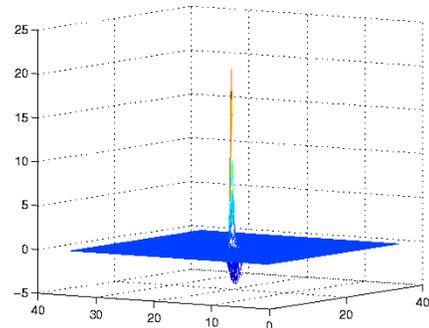


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

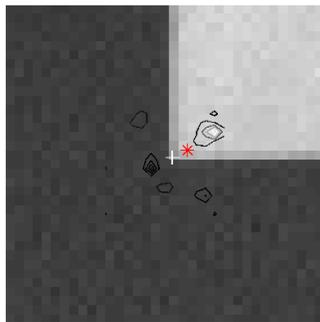
Figura 62: Esquina tipo L con un ángulo de apertura menor a $\pi/2$. Operador de Dreschler y Nagel aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Dreschler y Nagel y el + representa la esquina propuesta.



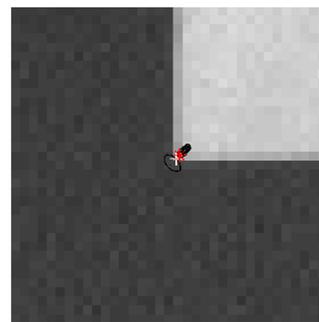
(a) Gráfica generada por el detector de Dreschler y Nagel aplicado a la imagen



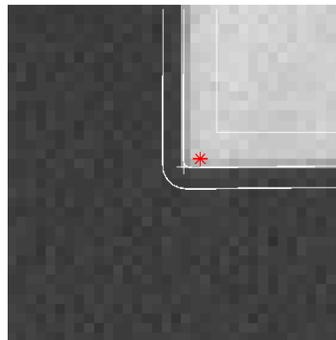
(b) Gráfica generada por el detector de Dreschler y Nagel aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Dreschler y Nagel operado en la imagen

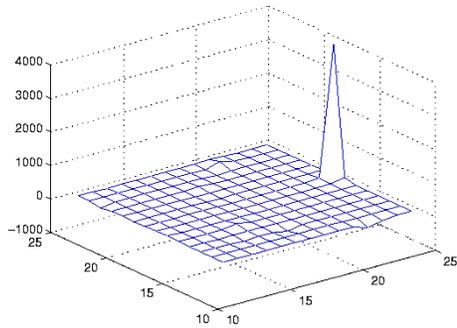


(d) Curvas de nivel del detector de Dreschler y Nagel operado en el modelo

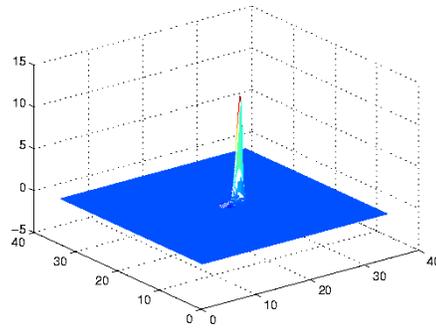


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

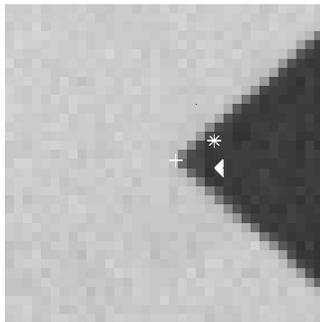
Figura 63: Esquina tipo L con un ángulo de apertura igual a $\pi/2$. Operador de Dreschler y Nagel aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Dreschler y Nagel y el + representa la esquina propuesta.



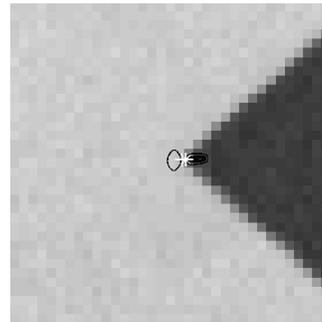
(a) Gráfica generada por el detector de Dreschler y Nagel aplicado a la imagen



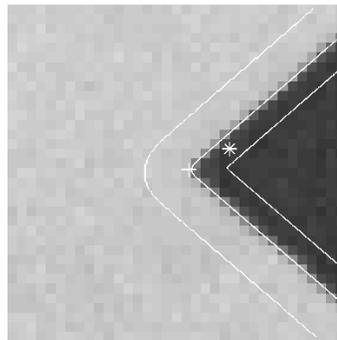
(b) Gráfica generada por el detector de Dreschler y Nagel aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Dreschler y Nagel operado en la imagen



(d) Curvas de nivel del detector de Dreschler y Nagel operado en el modelo



(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

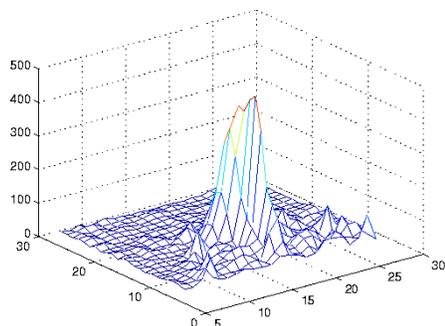
Figura 64: Esquina tipo L con un ángulo de apertura mayor a $\pi/2$. Operador de Dreschler y Nagel aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Dreschler y Nagel y el + representa la esquina propuesta.

Detector de Kitchen y Rosenfeld

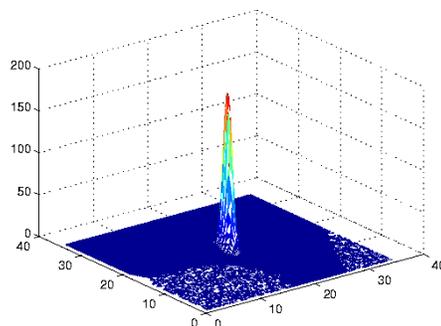
Este detector define el punto de esquina a partir del cambio en la magnitud del gradiente (ver sección II.2.2). En este caso existe solo un máximo local, ubicado en el punto de esquina; el cual es desplazado hacia la cresta de la esquina (ver Figuras 65 y 66) si es que esta tiene un ángulo de apertura menor a π . En el caso contrario, el cambio mayor en el gradiente queda determinado fuera de la esquina (ver Figura 67). En ambas situaciones el punto de esquina sufre un desplazamiento adicional, en dirección del borde con un menor grado de difuminado. La Tabla VIII muestra la ubicación del punto de esquina en cada imagen analizada y en su respectivo modelo.

Tabla VIII: Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo

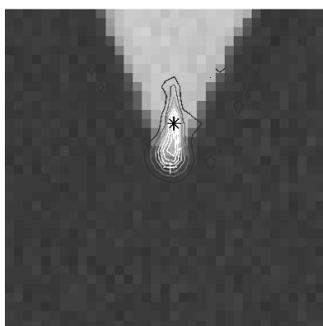
Tipo de esquina	Punto propuesto	K. & R. aplicado sobre el modelo	K. & R. aplicado sobre la imagen
Esquina aguda	(0.5905, 0.253)	(0.68, 1.19)	(1, 5)
Esquina recta	(0.833, 1.2849)	(1.02, 0.85)	(2, 2)
Esquina obtusa	(1.2849, 0.3355)	(1.87, 0.34)	(3, 0)



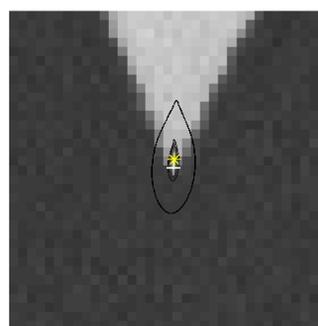
(a) Gráfica generada por el detector de Kitchen y Rosenfeld aplicado a la imagen



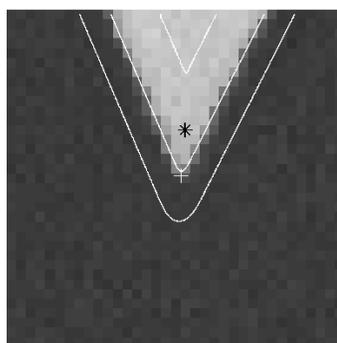
(b) Gráfica generada por el detector de Kitchen y Rosenfeld aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Kitchen y Rosenfeld operado en la imagen

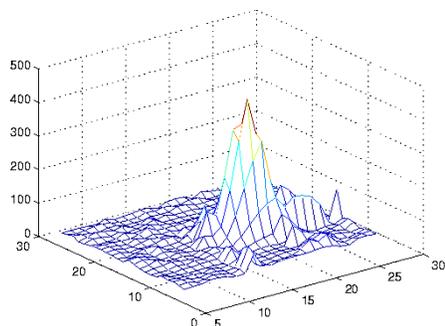


(d) Curvas de nivel del detector de Kitchen y Rosenfeld operado en el modelo

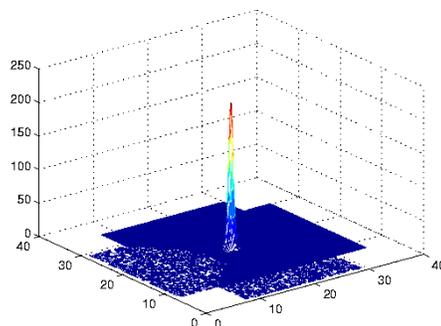


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

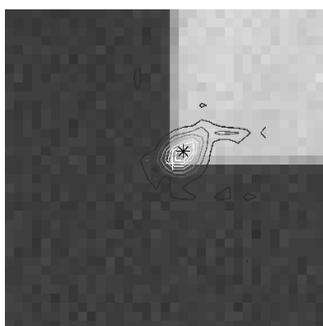
Figura 65: Esquina tipo L con un ángulo de apertura menor a $\pi/2$. Operador de Kitchen y Rosenfeld aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Kitchen y Rosenfeld y el + representa la esquina propuesta.



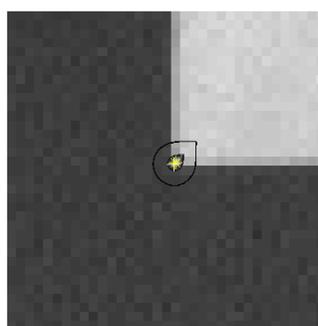
(a) Gráfica generada por el detector de Kitchen y Rosenfeld aplicado a la imagen



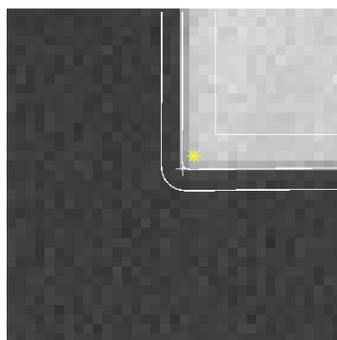
(b) Gráfica generada por el detector de Kitchen y Rosenfeld aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Kitchen y Rosenfeld operado en la imagen

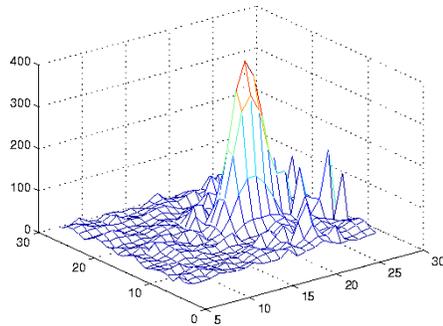


(d) Curvas de nivel del detector de Kitchen y Rosenfeld operado en el modelo

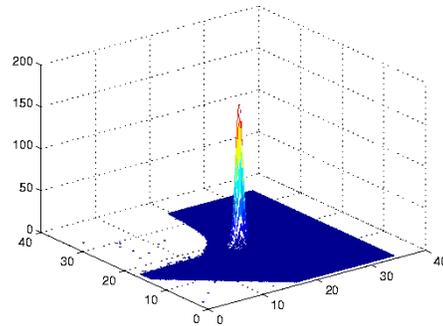


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

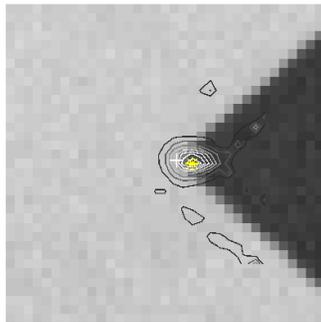
Figura 66: Esquina tipo L con un ángulo de apertura igual a $\pi/2$. Operador de Kitchen y Rosenfeld aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Kitchen y Rosenfeld y el + representa la esquina propuesta.



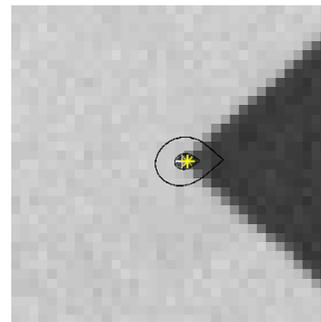
(a) Gráfica generada por el detector de Kitchen y Rosenfeld aplicado a la imagen



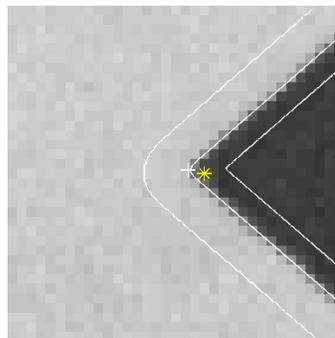
(b) Gráfica generada por el detector de Kitchen y Rosenfeld aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Kitchen y Rosenfeld operado en la imagen



(d) Curvas de nivel del detector de Kitchen y Rosenfeld operado en el modelo



(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

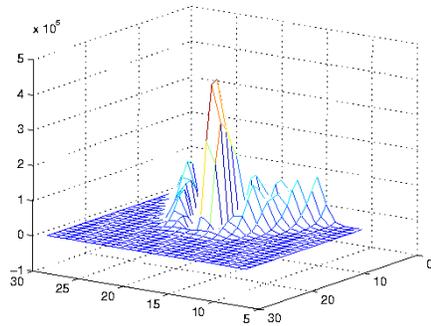
Figura 67: Esquina tipo L con un ángulo de apertura mayor a $\pi/2$. Operador de Kitchen y Rosenfeld aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Kitchen y Rosenfeld y el + representa la esquina propuesta.

Detector de Wang y Brady

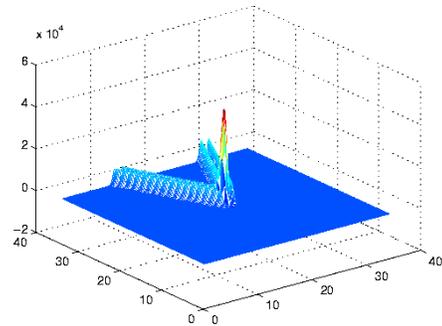
El detector de Wang y Brady (ver sección II.2.2) realiza la diferencia entre el Laplaciano al cuadrado de la imagen y la magnitud del gradiente al cuadrado, realizando los cambios relevantes en la imagen. Es decir no sólo señala la esquina, sino también los bordes que la forman, marcando el punto de mayor cambio como el punto de esquina. Al igual que los detectores anteriores, la esquina se desplaza en dirección del mayor cambio del gradiente. Es decir, hacia la cresta de la esquina, en los casos en que el ángulo de apertura sea menor a π o bien en el suelo de la misma, en los casos que el ángulo de apertura sea mayor a π . Nótese que el punto de esquina sufre un desplazamiento adicional hacia el borde que presenta un menor difuminado, ya que el cambio en este es mayor que en el borde que presenta un difuminado mayor. Las Figuras 68, 69 y 70 ilustran lo anterior. La Tabla IX muestra la ubicación del punto de esquina en cada esquina analizada y su respectivo modelo.

Tabla IX: Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo

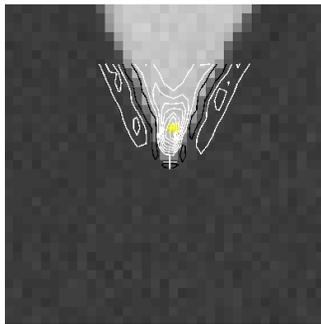
Tipo de esquina	Punto propuesto	W. & B. aplicado sobre el modelo	W. & B. aplicado sobre la imagen
Esquina Aguda	(0.5905, 0.253)	(0.68, 1.36)	(1, 4)
Esquina Recta	(0.833, 1.2849)	(1.19, 1.02)	(3, 2)
Esquina Obtusa	(1.2849, 0.3355)	(2.04, 0.34)	(4, 0)



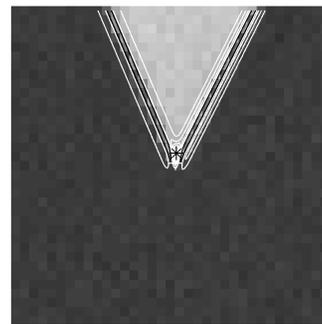
(a) Gráfica generada por el detector de Wang y Brady aplicado a la imagen



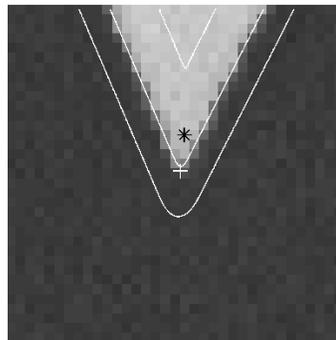
(b) Gráfica generada por el detector de Wang y Brady aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Wang y Brady operado en la imagen

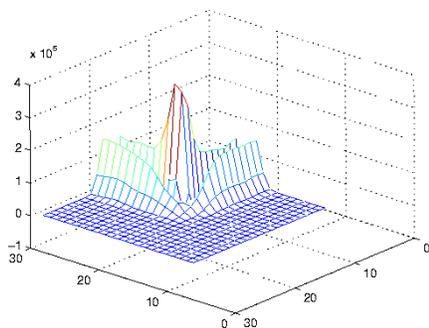


(d) Curvas de nivel del detector de Wang y Brady operado en el modelo

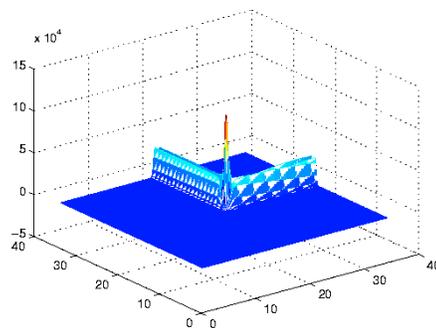


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

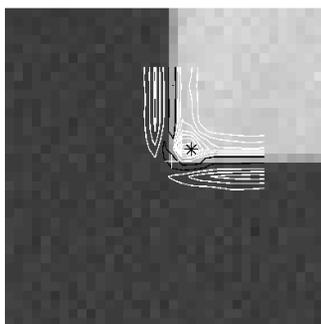
Figura 68: Esquina tipo L con un ángulo de apertura menor a $\pi/2$. Operador de Wang y Brady aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Wang y Brady y el + representa la esquina propuesta.



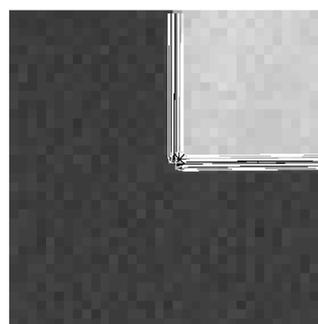
(a) Gráfica generada por el detector de Wang y Brady aplicado a la imagen



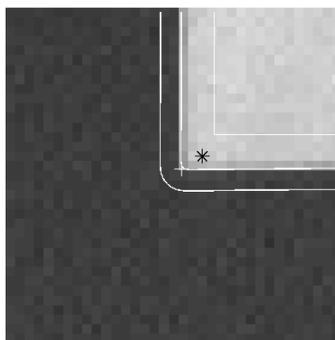
(b) Gráfica generada por el detector de Wang y Brady aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Wang y Brady operado en la imagen

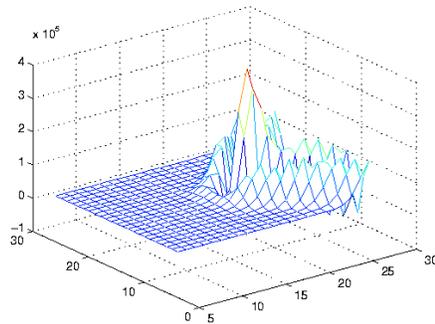


(d) Curvas de nivel del detector de Wang y Brady operado en el modelo

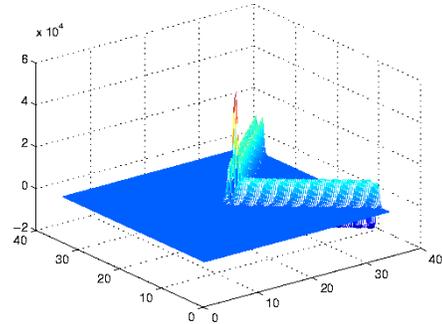


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

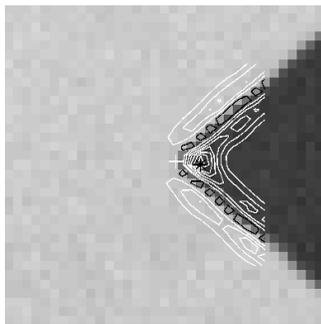
Figura 69: Esquina tipo L con un ángulo de apertura igual a $\pi/2$. Operador de Wang y Brady aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Wang y Brady y el + representa la esquina propuesta.



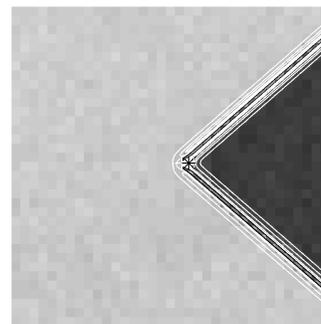
(a) Gráfica generada por el detector de Wang y Brady aplicado a la imagen



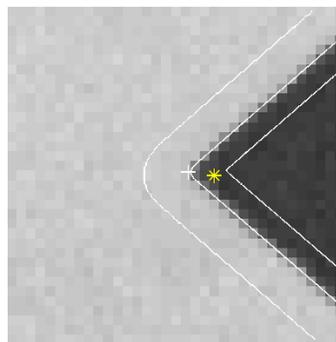
(b) Gráfica generada por el detector de Wang y Brady aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Wang y Brady operado en la imagen



(d) Curvas de nivel del detector de Wang y Brady operado en el modelo



(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

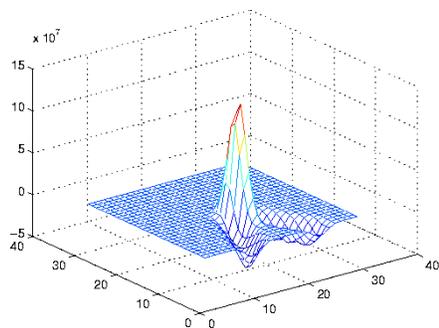
Figura 70: Esquina tipo L con un ángulo de apertura mayor a $\pi/2$. Operador de Wang y Brady aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Wang y Brady y el + representa la esquina propuesta.

Detector de Harris

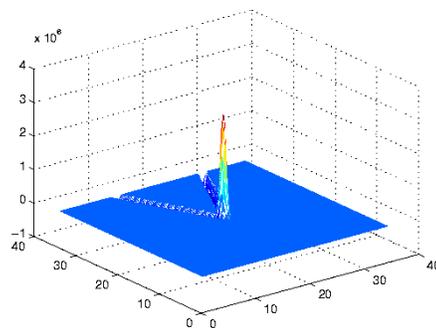
En la sección II.2.2 se define el detector de Harris como el determinante de la matriz de autocorrelación menos la traza multiplicada por un factor k . En este caso la matriz de autocorrelación es una medida de la diferencia de un píxel con respecto a su vecindario. Es decir se da mayor peso a aquellos puntos que sean distintivos, como lo son los bordes y las esquinas. El detector de Harris solo hace uso de la primera derivada para el cálculo de la matriz de autocorrelación y en la práctica esta es filtrada por una máscara Gaussiana, haciendo que dicho detector sea estable en presencia de ruido. Las gráficas 71, 72 y 73 muestran el resultado de aplicar este operador a una imagen como a su modelo. Como en los detectores anteriores el punto de esquina es desplazado hacia la región de mayor cambio de intensidad. La Tabla X muestra una comparación entre los puntos detectados en cada caso.

Tabla X: Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo

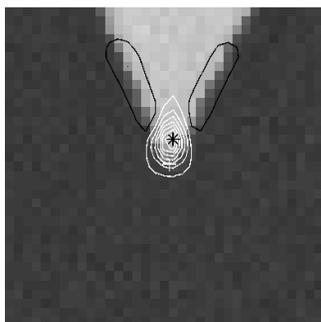
Tipo de esquina	Punto propuesto	Harris sobre el modelo	Harris sobre la imagen
Esquina aguda	(0.5905, 0.253)	(0.68, 1.02)	(1, 3)
Esquina recta	(0.833, 1.2849)	(1.19, 1.02)	(2, 2)
Esquina obtusa	(1.2849, 0.3355)	(1.70, 0.34)	(3, 0)



(a) Gráfica generada por el detector de Harris aplicado a la imagen



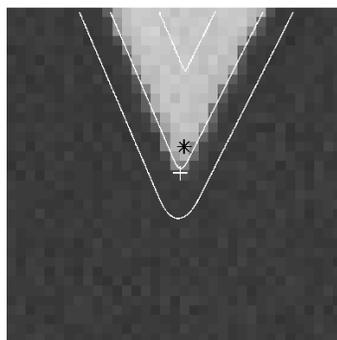
(b) Gráfica generada por el detector de Harris aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Harris operado en la imagen

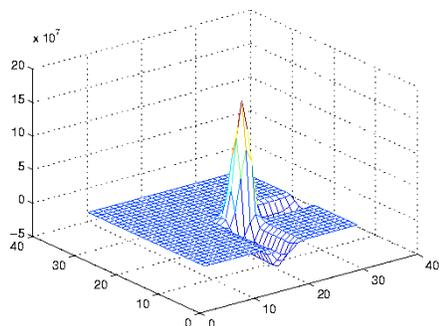


(d) Curvas de nivel del detector de Harris operado en el modelo

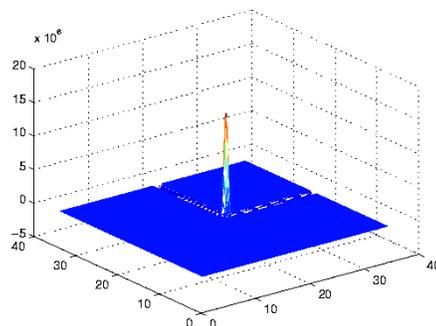


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

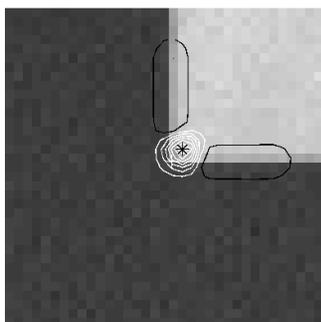
Figura 71: Esquina tipo L con un ángulo de apertura menor a $\pi/2$. Operador de Harris aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Harris y el + representa la esquina propuesta.



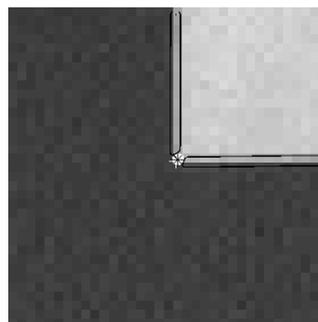
(a) Gráfica generada por el detector de Harris aplicado a la imagen



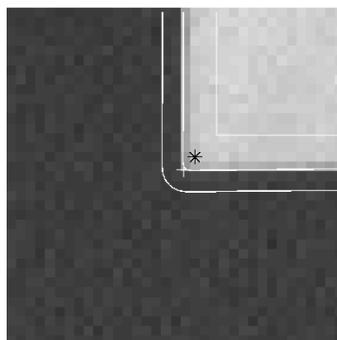
(b) Gráfica generada por el detector de Harris aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Harris operado en la imagen

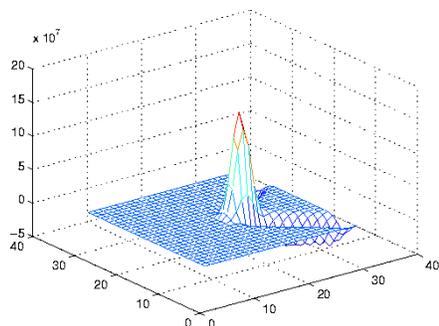


(d) Curvas de nivel del detector de Harris operado en el modelo

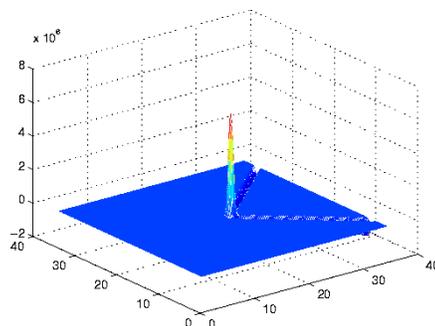


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

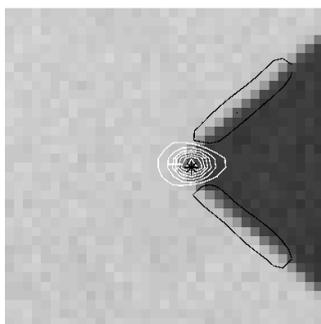
Figura 72: Esquina tipo L con un ángulo de apertura igual a $\pi/2$. Operador de Harris aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Harris y el + representa la esquina propuesta.



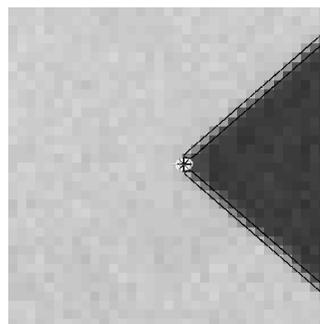
(a) Gráfica generada por el detector de Harris aplicado a la imagen



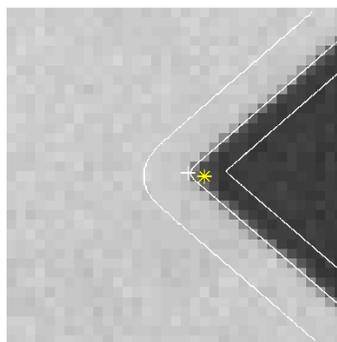
(b) Gráfica generada por el detector de Harris aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Harris operado en la imagen



(d) Curvas de nivel del detector de Harris operado en el modelo



(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

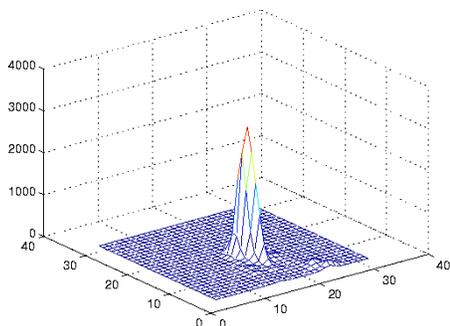
Figura 73: Esquina tipo L con un ángulo de apertura mayor a $\pi/2$. Operador de Harris aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Harris y el + representa la esquina propuesta.

Detector de Förstner

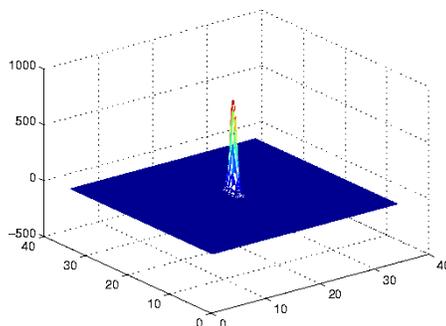
Al igual que el detector de Harris, Förstner (ver sección II.2.2) propone su detector de esquinas a partir de la matriz de autocorrelación. Solo que su métrica es el determinante entre la traza de dicha matriz. Lo anterior implica que sólo exista un máximo en el punto donde se encuentra la mayor variación en intensidad con respecto a la región de la imagen en estudio. En este caso el operador no depende de alguna constante que de peso al cambio de intensidad. Las gráficas 74, 75 y 76 muestran el comportamiento de este operador sobre la imagen y su respectivo modelo. En este caso los desplazamientos se dan en sentido del punto que representa el mayor cambio de intensidad en la región. Lo anterior implica que el punto de esquina se ubique en la cresta de la esquina como en el caso de las Figuras 74 y 75 o bien en el piso como es el caso de la Figura 76. La Tabla XI muestra una comparación de los puntos de esquina ubicados en cada caso.

Tabla XI: Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo

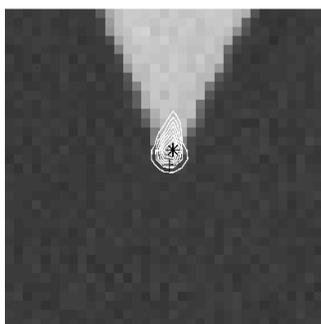
Tipo de esquina	Punto propuesto	Förstner operado sobre el modelo	Förstner operado sobre la imagen
Esquina aguda	(0.5905, 0.253)	(0.68, 1.02)	(1, 2)
Esquina recta	(0.833, 1.2849)	(1.19, 1.02)	(2, 2)
Esquina obtusa	(1.2849, 0.3355)	(1.87, 0.34)	(3, 0)



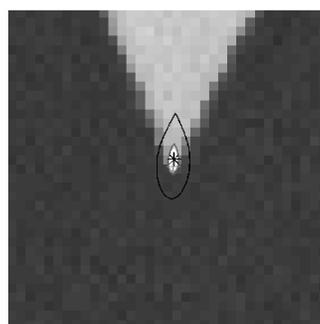
(a) Gráfica generada por el detector de Förstner aplicado a la imagen



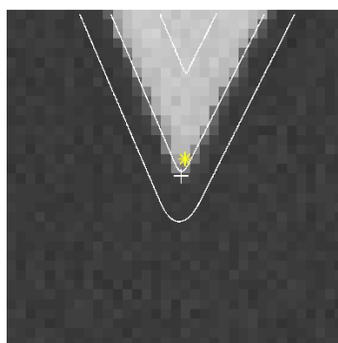
(b) Gráfica generada por el detector de Förstner aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Förstner operado en la imagen

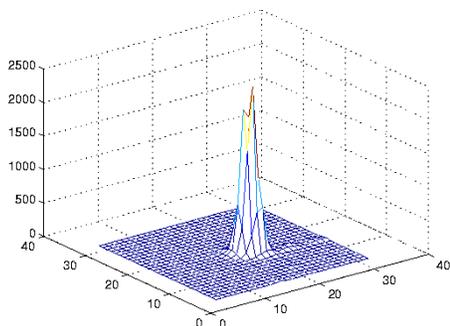


(d) Curvas de nivel del detector de Förstner operado en el modelo

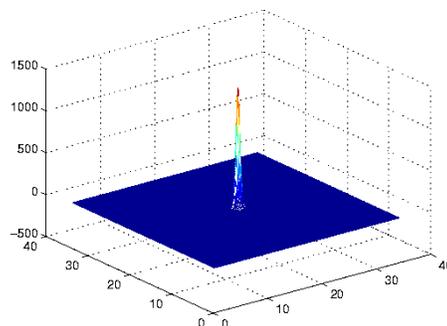


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

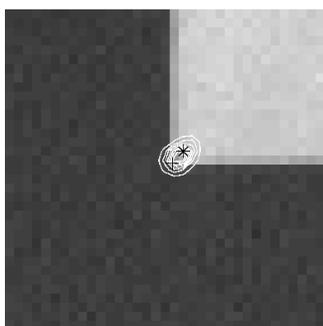
Figura 74: Esquina tipo L con un ángulo de apertura menor a $\pi/2$. Operador de Förstner aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Förstner y el + representa la esquina propuesta.



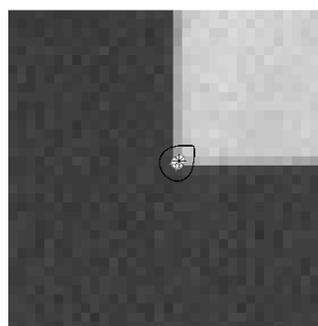
(a) Gráfica generada por el detector de Förstner aplicado a la imagen



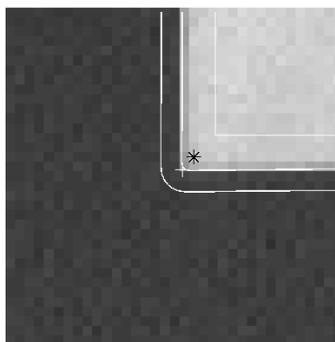
(b) Gráfica generada por el detector de Förstner aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Förstner operado en la imagen

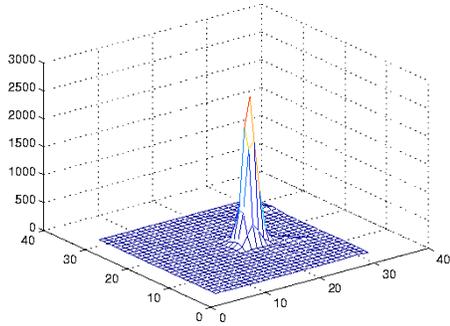


(d) Curvas de nivel del detector de Förstner operado en el modelo

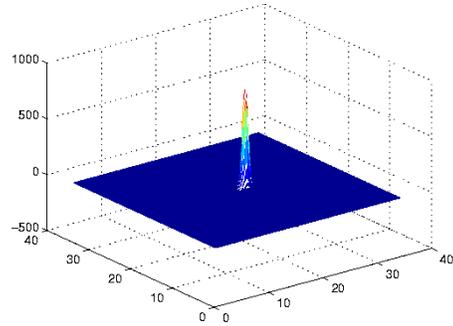


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

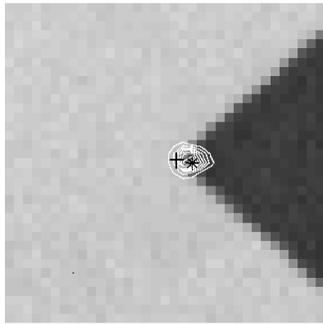
Figura 75: Esquina tipo L con un ángulo de apertura igual a $\pi/2$. Operador de Förstner aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Förstner y el + representa la esquina propuesta.



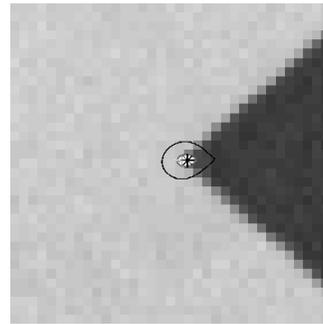
(a) Gráfica generada por el detector de Förstner aplicado a la imagen



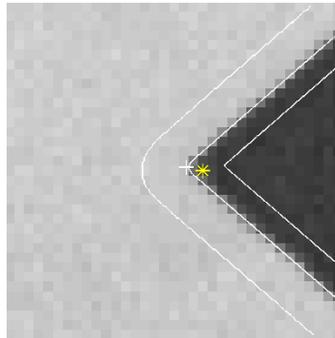
(b) Gráfica generada por el detector de Förstner aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Förstner operado en la imagen



(d) Curvas de nivel del detector de Förstner operado en el modelo



(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

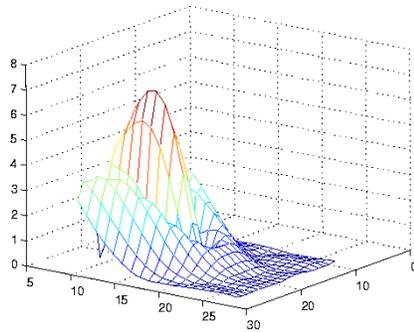
Figura 76: Esquina tipo L con un ángulo de apertura mayor a $\pi/2$. Operador de Förstner aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Förstner y el + representa la esquina propuesta.

Detector IPGP1

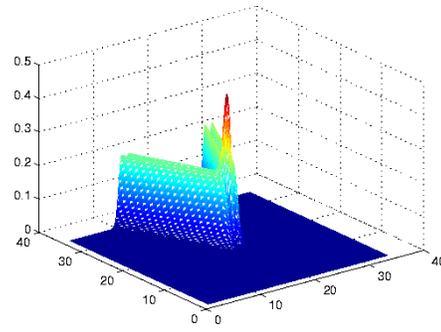
En la sección II.2.2 se expone el detector de esquinas IPGP1, el cual en un proceso sencillo extrae las características prominentes de una imagen como lo son los bordes y las esquinas. En este caso las esquinas son los puntos más sobresalientes de la imagen, ya que representan las frecuencias más altas o de mayor cambio. Esta característica es determinante para este detector. Nótese que en concepto, la estructura es similar al detector de Wang y Brady, ya que encontrar el Laplaciano menos el gradiente en una imagen equivale a extraer las altas frecuencias de la misma. Este efecto se ilustra en las Figuras 77, 78 y 79, cabe mencionar que este detector no hace uso de las derivadas de la imagen, por lo cual la sensibilidad al ruido es menor, comparado con los detectores que se exponen en párrafos anteriores. La Tabla XII muestra una comparación de los puntos esquina ubicados en cada caso.

Tabla XII: Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo

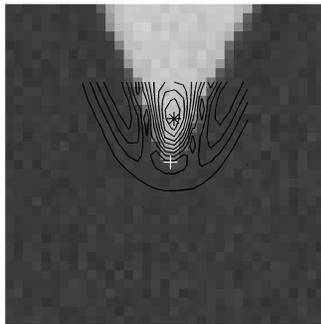
Tipo de esquina	Punto propuesto	IPGP1 aplicado sobre el modelo	IPGP1 aplicado sobre la imagen
Esquina aguda	(0.5905, 0.253)	(0.68, 1.53)	(1, 5)
Esquina recta	(0.833, 1.2849)	(1.36, 1.19)	(3, 3)
Esquina obtusa	(1.2849, 0.3355)	(1.21, 0.34)	(5, 0)



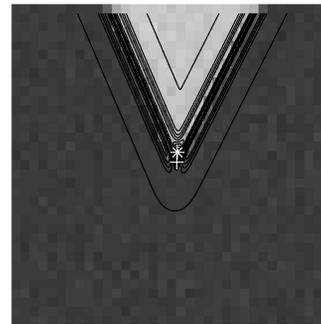
(a) Gráfica generada por el detector IPGP1 aplicado a la imagen



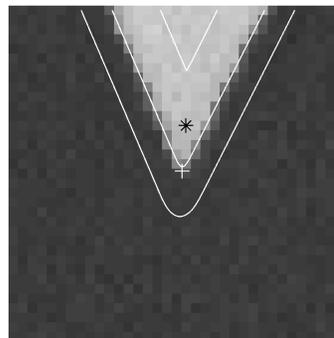
(b) Gráfica generada por el detector IPGP1 aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector IPGP1 operado en la imagen

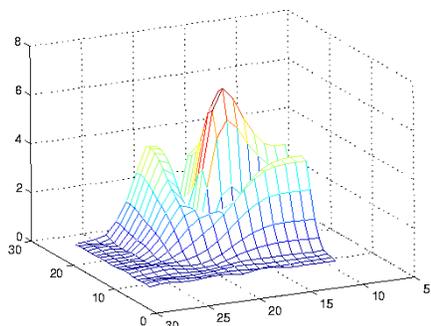


(d) Curvas de nivel del detector IPGP1 operado en el modelo

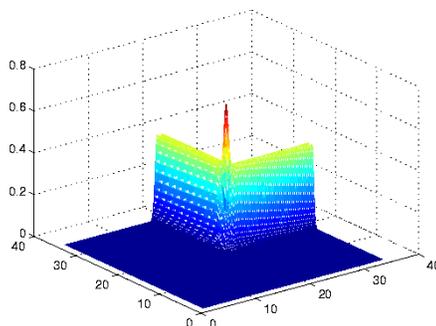


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

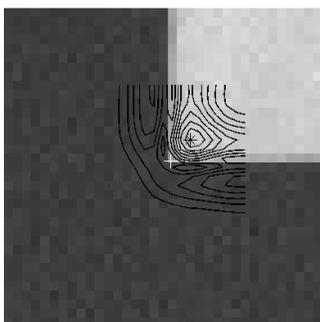
Figura 77: Esquina tipo L con un ángulo de apertura menor a $\pi/2$. Operador IPGP1 aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por IPGP1 y el + representa la esquina propuesta.



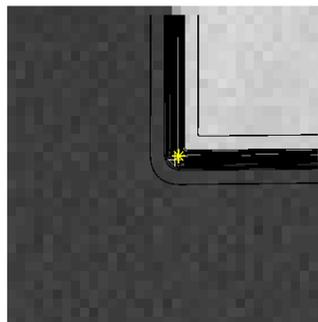
(a) Gráfica generada por el detector IPGP1 aplicado a la imagen



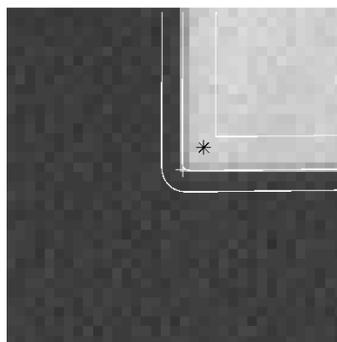
(b) Gráfica generada por el detector IPGP1 aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector IPGP1 operado en la imagen

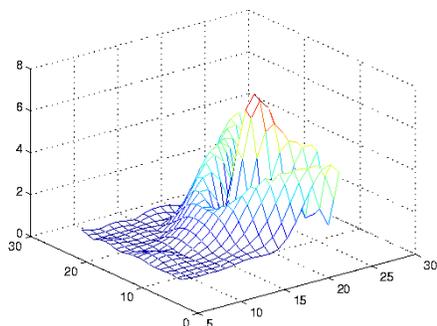


(d) Curvas de nivel del detector IPGP1 operado en el modelo

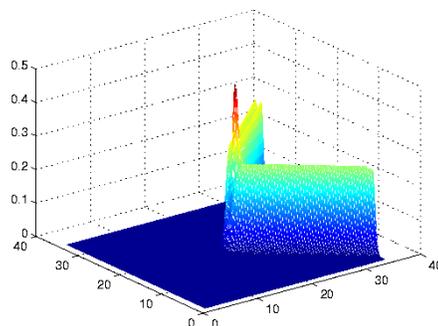


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

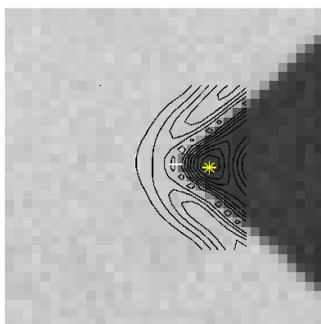
Figura 78: Esquina tipo L con un ángulo de apertura igual a $\pi/2$. Operador IPGP1 aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por IPGP1 y el + representa la esquina propuesta.



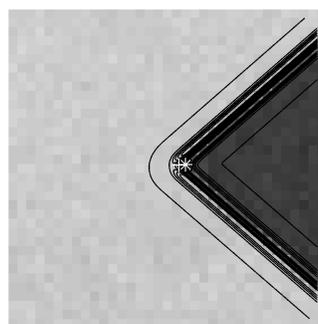
(a) Gráfica generada por el detector IPGP1 aplicado a la imagen



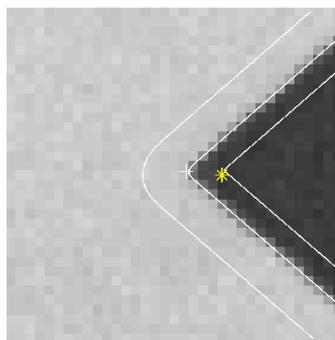
(b) Gráfica generada por el detector IPGP1 aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector IPGP1 operado en la imagen



(d) Curvas de nivel del detector IPGP1 operado en el modelo



(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

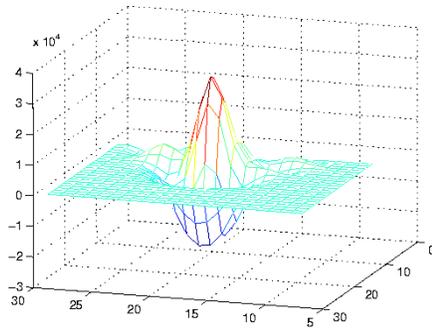
Figura 79: Esquina tipo L con un ángulo de apertura mayor a $\pi/2$. Operador IPGP1 aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por IPGP1 y el + representa la esquina propuesta.

Detector IPGP2

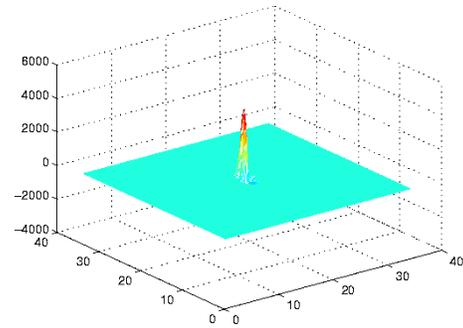
El comportamiento del detector IPGP2 (ver sección II.2.2) es muy similar al detector de esquinas propuesto por Beaudet. En este caso existe un desplazamiento hacia la región de mayor cambio del gradiente. Es decir el punto de esquina se ubica hacia al borde de menor difuminado y hacia la cresta de la esquina, como es el caso de las esquinas con un ángulo de apertura menor a π (ver Figuras 80 y 81) o bien hacia el piso en las esquinas con un ángulo mayor a π (ver Figura 82). La Tabla XIII muestra una comparación de los puntos esquina ubicados en cada caso.

Tabla XIII: Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo

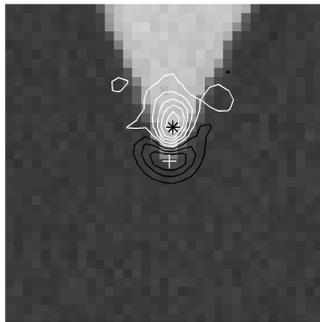
Tipo de esquina	Punto propuesto	IPGP2 aplicado sobre el modelo	IPGP2 aplicado sobre la imagen
Esquina aguda	(0.5905, 0.253)	(0.68, 1.53)	(1, 4)
Esquina recta	(0.833, 1.2849)	(1.19, 1.19)	(3, 3)
Esquina obtusa	(1.2849, 0.3355)	(2.04, 0.34)	(4, 0)



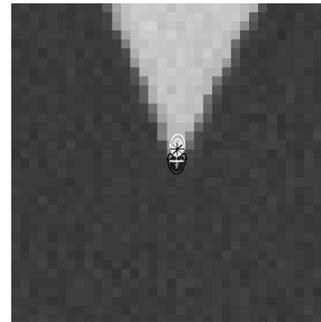
(a) Gráfica generada por el detector IPGP2 aplicado a la imagen



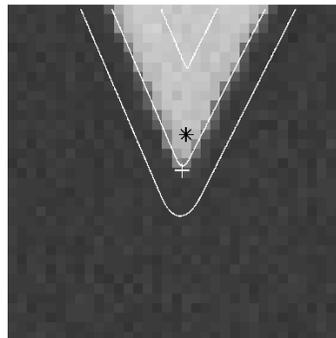
(b) Gráfica generada por el detector IPGP2 aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector IPGP2 operado en la imagen

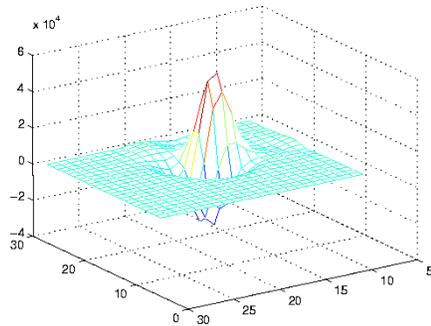


(d) Curvas de nivel del detector IPGP1 operado en el modelo

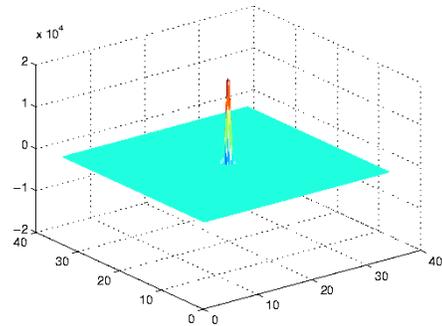


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

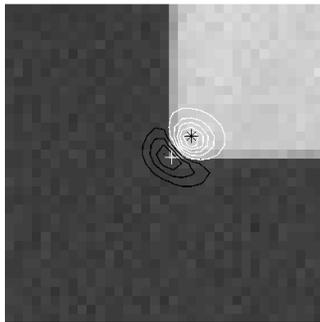
Figura 80: Esquina tipo L con un ángulo de apertura menor a $\pi/2$. Operador IPGP2 aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por IPGP2 y el + representa la esquina propuesta.



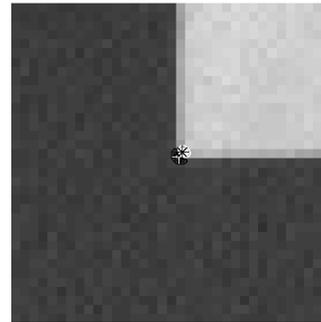
(a) Gráfica generada por el detector IPGP2 aplicado a la imagen



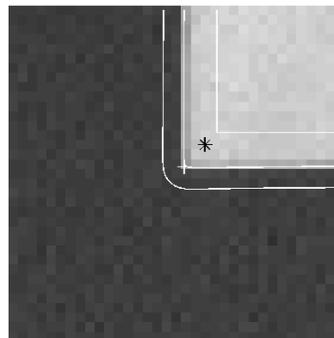
(b) Gráfica generada por el detector IPGP2 aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector IPGP2 operado en la imagen

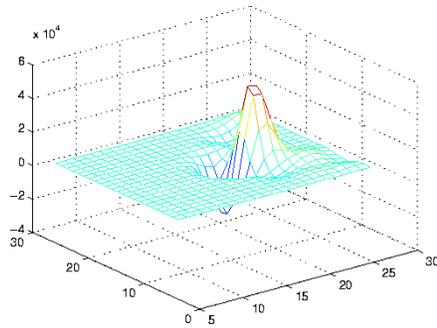


(d) Curvas de nivel del detector IPGP1 operado en el modelo

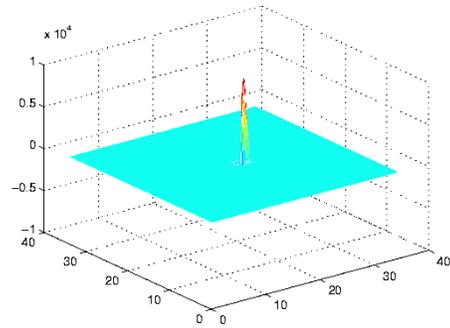


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

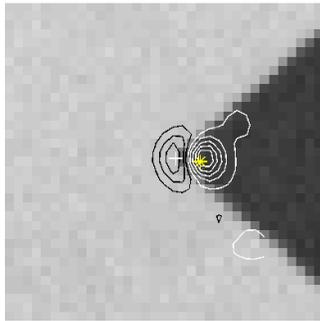
Figura 81: Esquina tipo L con un ángulo de apertura igual a $\pi/2$. Operador IPGP2 aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por IPGP2 y el + representa la esquina propuesta.



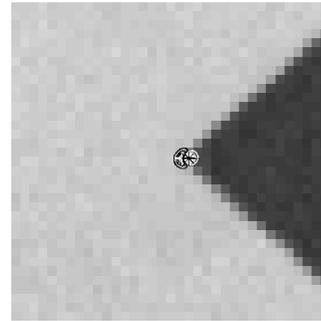
(a) Gráfica generada por el detector IPGP2 aplicado a la imagen



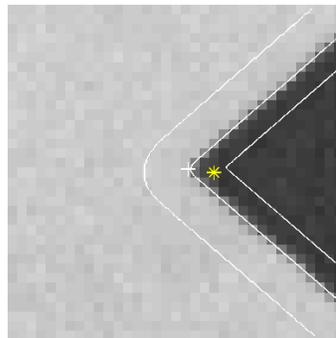
(b) Gráfica generada por el detector IPGP2 aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector IPGP2 operado en la imagen



(d) Curvas de nivel del detector IPGP1 operado en el modelo



(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

Figura 82: Esquina tipo L con un ángulo de apertura mayor a $\pi/2$. Operador IPGP2 aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por IPGP2 y el + representa la esquina propuesta.

V.2.2 Esquina tipo Y

En esta sección se estudia el detector paramétrico de esquinas múltiples aplicado a 3 tipos de esquina tipo Y. Estas son construidas con dos niveles de gris diferentes más el piso (ver sección III.4). La Figura 83 muestra las esquinas tipo Y que se consideran en esta sección. La región de interés es señalada con un recuadro en cada imagen.

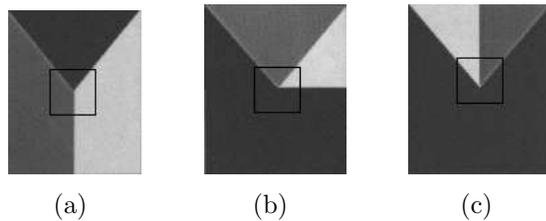


Figura 83: Imágenes tipo Y que se consideran en esta sección

En cada imagen se selecciona una región de 35×35 píxeles, esta se ajusta al modelo de esquina tipo Y (V_Y). En general, el modelo utilizado para el ajuste es el mismo para una esquina tipo T y tipo X, debido a que estas se construyen a partir de dos esquinas tipo L.

Las Figuras 84.a, 84.b y 84.c muestran el área de ajuste para el modelo. Las Figuras 84.d, 84.e y 84.f son las gráficas 3D que corresponden a cada región de la imagen, donde los ejes x y y representan la ubicación de cada píxel y el eje z es la intensidad de gris de ese píxel. En este caso cada borde presenta un difuminado diferente. Las Figuras 84.g, 84.h y 84.i muestran las gráficas del modelo ajustado a cada tipo de esquina Y. Las Figuras 84.j, 84.k y 84.l representan la imagen creada a partir del modelo. Estas imágenes se construyen discretizando el modelo en cada unidad y asignándole el valor de la función como un nivel de gris.

Tabla XIV: Parámetros que caracterizan a la función V_Y

Parámetros	Esquina Y_1	Esquina Y_2	Esquina Y_3
σ	-0.6798	0.4265	0.2536
μ	1.2859	0.8739	0.1404
θ	0.0631	-0.7161	0.0580
σ_1	-0.4275	0.3029	0.3657
μ_1	2.7143	1.2434	-5.7924
θ_1	-0.8772	0.0671	0.8682
σ_2	0.7267	0.7392	-0.5216
μ_2	1.1673	-0.3566	-0.2095
θ_2	0.0114	0.6832	-0.0085
σ_3	-0.9720	0.5361	0.7986
μ_3	-0.0767	2.2639	-5.1913
θ_3	0.8943	-0.0317	-0.8698
A_1	83.4178	96.3108	88.5126
B	54.7818	52.5880	57.3406
A_2	195.7350	160.4120	202.0930

El problema de ajuste es resuelto como un problema de optimización. Este es descrito en el capítulo IV. Los parámetros que caracterizan a cada modelo se listan en la Tabla XIV.

Una vez obtenido el modelo, el criterio de localización de la esquina es aplicado. Los resultados se muestran en la Tabla XV para cada tipo de esquina. Las unidades son pixeles y el origen del sistema coordenado es situado en el pixel central de la región de estudio.

La Figura 85 muestra las diferentes regiones de estudio. En ellas se sobreponen las curvas de nivel del modelo correspondiente a cada esquina tipo Y. El modelo acota los bordes y el área de difuminado de cada uno de ellos. Lo anterior hace posible ubicar el

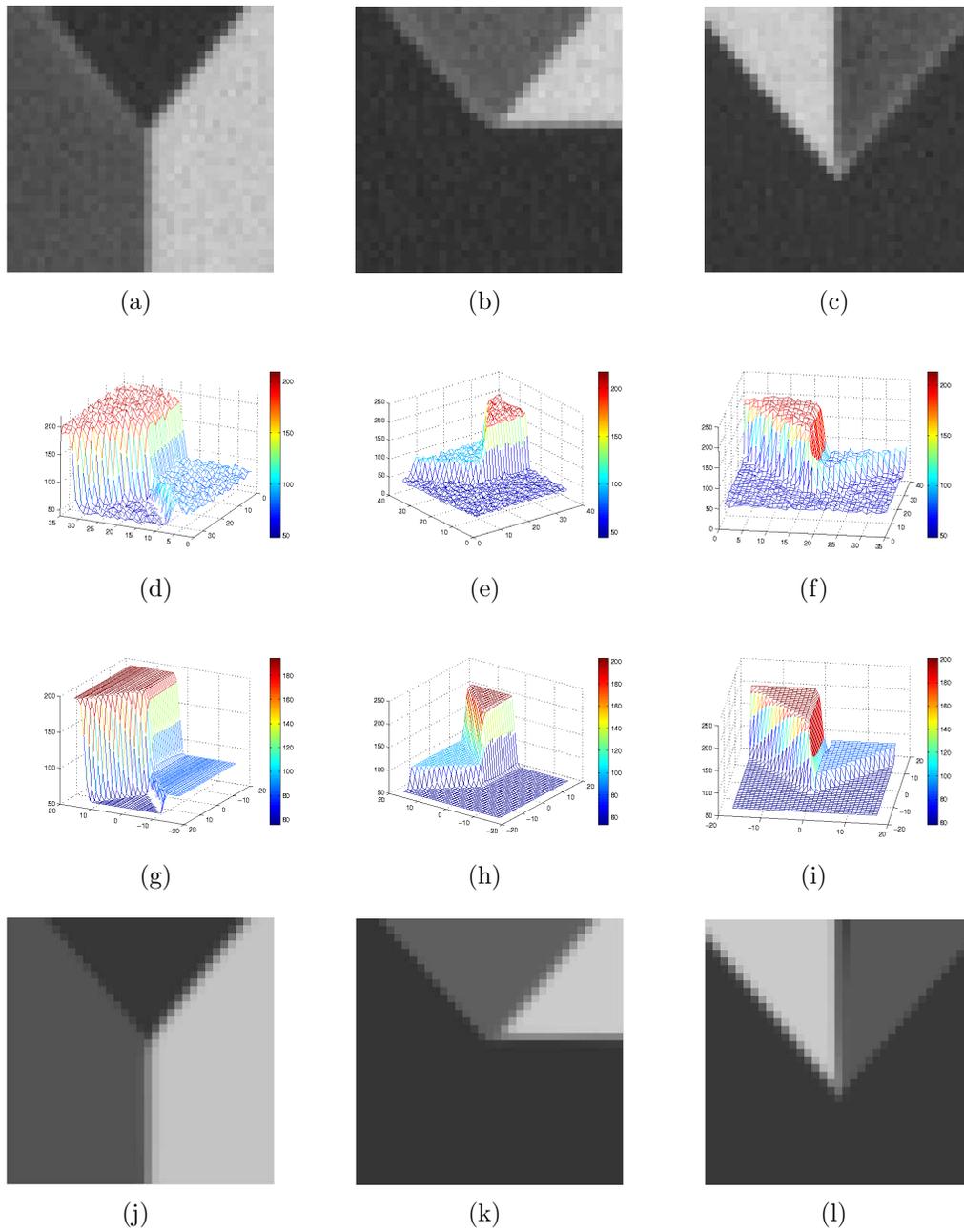
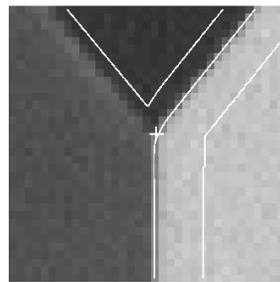


Figura 84: Comparación entre las imágenes y sus respectivos modelos

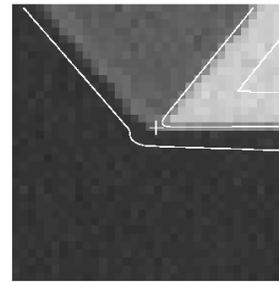
punto de esquina, la cual se muestra como un “+” en la imagen.

Tabla XV: Ubicación del punto de esquina en cada modelo

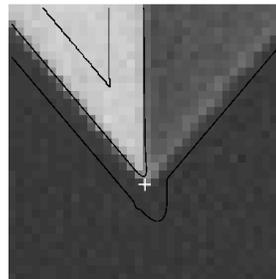
Tipo de esquina	Esquina Y_1	Esquina Y_2	Esquina Y_3
Punto esquina	(1.1811, 1.2309)	(0.7440, 1.8129)	(-0.2180, -5.3050)



(a)



(b)



(c)

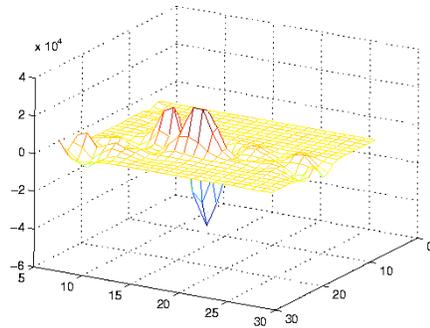
Figura 85: El símbolo + representa el punto de esquina propuesto con el criterio. Las curvas de nivel del modelo se muestran sobre la región de estudio

Detector de Beaudet

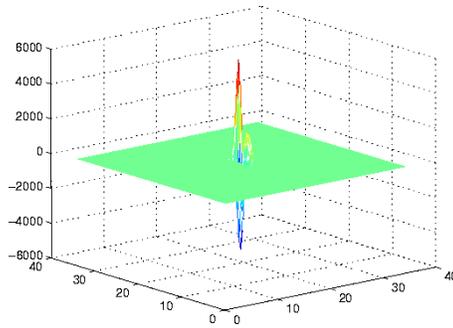
El detector de Beaudet (ver sección II.2.2) al ser operado sobre una esquina múltiple, presenta varios mínimos y máximos locales. Estos son generados por la variación de intensidad de las diferentes amplitudes en la esquina múltiple (ver Figuras 86 y 87 y 88). En estos casos se utiliza el máximo local como el punto donde se ubica la esquina. Lo anterior hace que el punto de esquina sea desplazado hacia la posición del mayor cambio en intensidad. Cuando se aplica el detector de Beaudet a la imagen, el punto de esquina es ubicado en aquella esquina tipo L que presente una mayor amplitud (recordando que una esquina tipo Y es construida por dos esquinas tipo L). Sin embargo, cuando el detector de Beaudet es operado sobre el modelo el punto de esquina es cercano al propuesto en este trabajo, ya que es el punto de mayor variación con respecto a su vecindario. La Tabla XVI muestra una comparación numérica de los puntos esquina ubicados en cada caso.

Tabla XVI: Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo

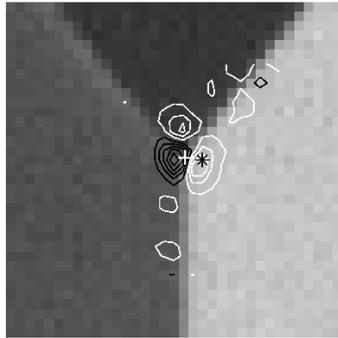
Tipo de esquina	Punto propuesto	Beaudet aplicado sobre el modelo	Beaudet aplicado sobre la imagen
Esquina Y_1	(1.18, 1.23)	(1.02, 1.87)	(3, 1)
Esquina Y_2	(0.74, 1.81)	(0, 1.53)	(5, 4)
Esquina Y_3	(-0.21, -5.30)	(0.17, -5.27)	(-2, 0)



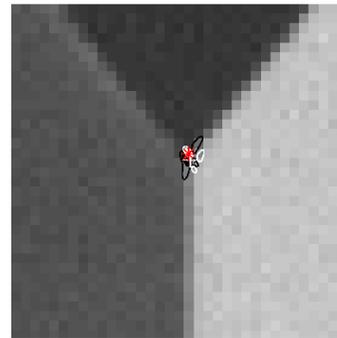
(a) Gráfica generada por el detector de Beaudet aplicado a la imagen



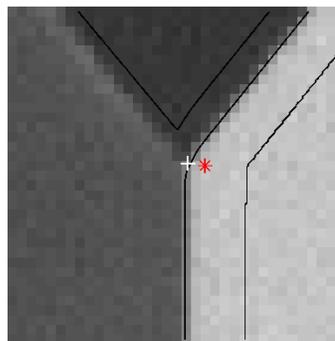
(b) Gráfica generada por el detector de Beaudet aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Beaudet operado en la imagen

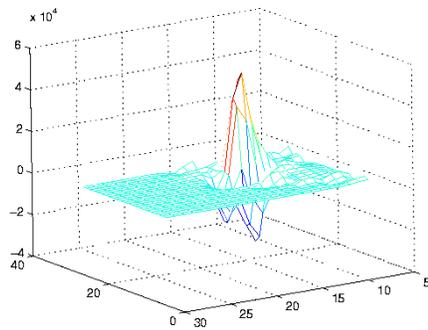


(d) Curvas de nivel del detector de Beaudet operado en el modelo

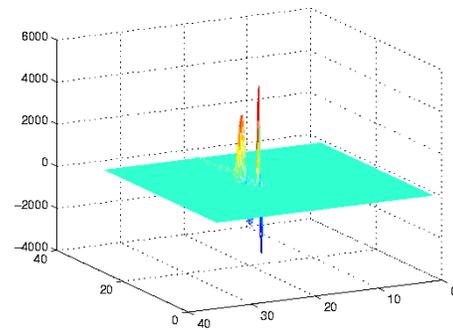


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

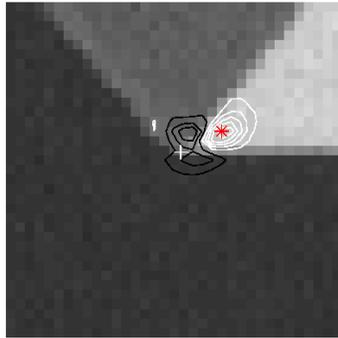
Figura 86: Esquina Y_1 . Operador de Beaudet aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Beaudet y el + representa la esquina propuesta.



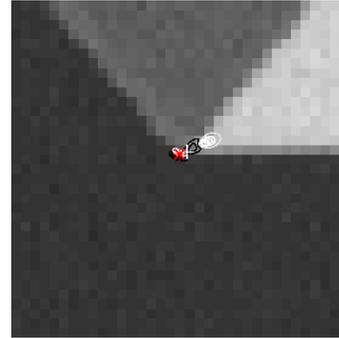
(a) Gráfica generada por el detector de Beaudet aplicado a la imagen



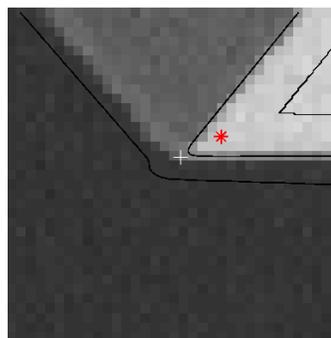
(b) Gráfica generada por el detector de Beaudet aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Beaudet operado en la imagen

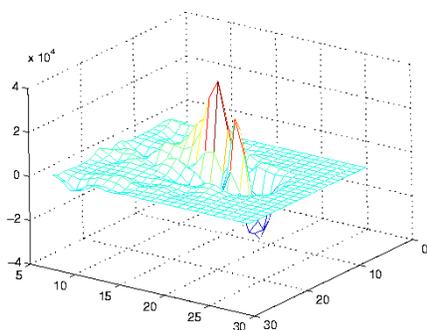


(d) Curvas de nivel del detector de Beaudet operado en el modelo

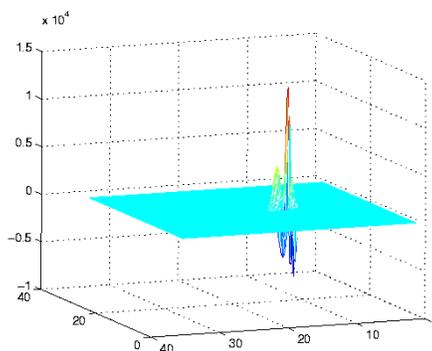


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

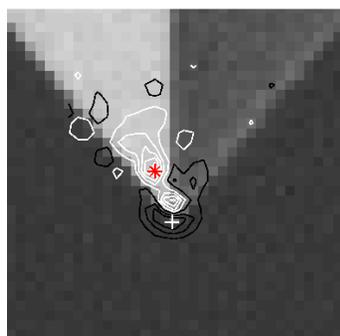
Figura 87: Esquina Y_2 . Operador de Beaudet aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Beaudet y el + representa la esquina propuesta.



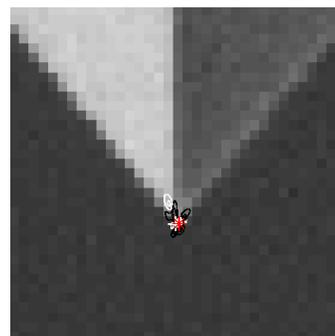
(a) Gráfica generada por el detector de Beaudet aplicado a la imagen



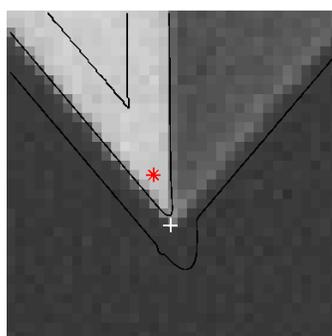
(b) Gráfica generada por el detector de Beaudet aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Beaudet operado en la imagen



(d) Curvas de nivel del detector de Beaudet operado en el modelo



(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

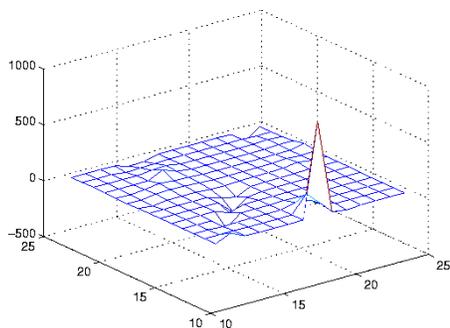
Figura 88: Esquina Y_3 . Operador de Beaudet aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Beaudet y el + representa la esquina propuesta.

Detector de Dreschler y Nagel

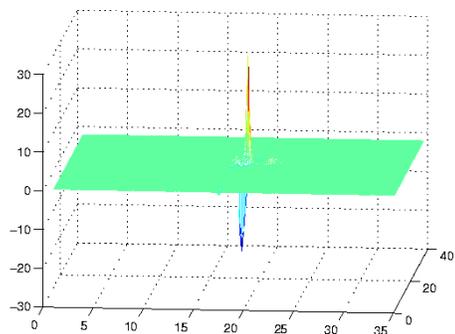
Al igual que el detector de Beaudet, el detector de Dreschler y Nagel (ver sección II.2.2) presenta una serie de mínimos y máximos locales. Dreschler y Nagel propusieron que la esquina se ubica en el cruce por cero de la línea que une el máximo positivo y el mínimo negativo de la curvatura Gaussiana. En este caso el criterio es ambiguo ya que dicha línea pasa por varios cruces por cero. De esta forma se propone que el criterio implementado es tomar como punto de esquina al punto medio de la línea que une el máximo positivo y el mínimo negativo de la curvatura Gaussiana. Al aplicar este detector sobre el modelo se obtienen los puntos de esquinas desplazados hacia la región del máximo cambio en la intensidad. Cabe mencionar que el detector de Dreschler y Nagel es sensible al ruido, su aplicación sobre la imagen arroja puntos fuera de la región de ubicación de la esquina. Lo anterior se muestra en las Figuras 89, 90 y 91. La Tabla XVII muestra una comparación numérica de los puntos esquina ubicados en cada caso.

Tabla XVII: Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo

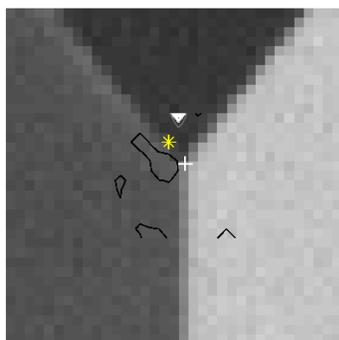
Tipo de esquina	Punto propuesto	D&N aplicado sobre el modelo	D&N aplicado sobre la imagen
Esquina Y_1	(1.18, 1.23)	(0.51, 2.21)	(-1, 3)
Esquina Y_2	(0.74, 1.81)	(2.21, 3.06)	(2, -1)
Esquina Y_3	(-0.21, -5.30)	(-1.02, -4.08)	(1, -4)



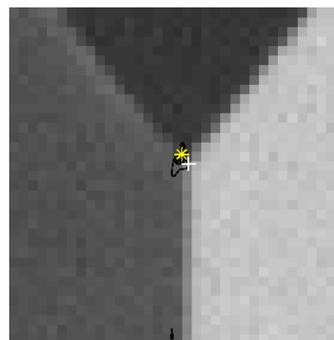
(a) Gráfica generada por el detector de Dreschler y Nagel aplicado a la imagen



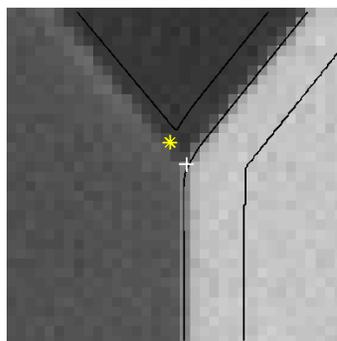
(b) Gráfica generada por el detector de Dreschler y Nagel aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Dreschler y Nagel operado en la imagen

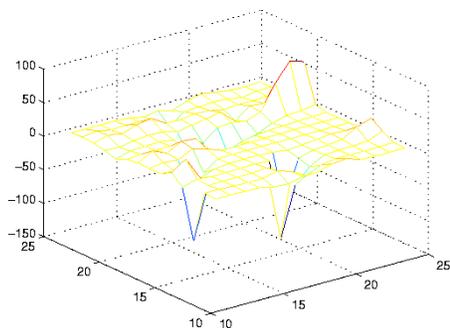


(d) Curvas de nivel del detector de Dreschler y Nagel operado en el modelo

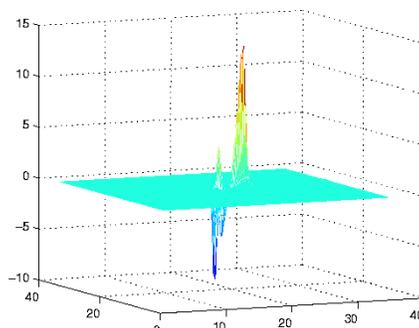


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

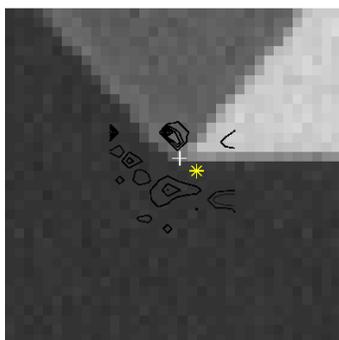
Figura 89: Esquina Y_1 . Operador de Dreschler y Nagel aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Dreschler y Nagel y el + representa la esquina propuesta.



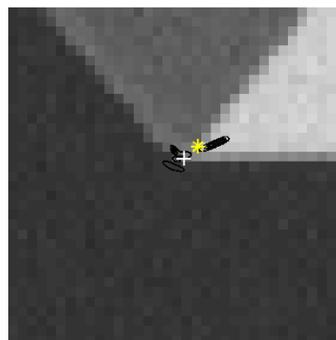
(a) Gráfica generada por el detector de Dreschler y Nagel aplicado a la imagen



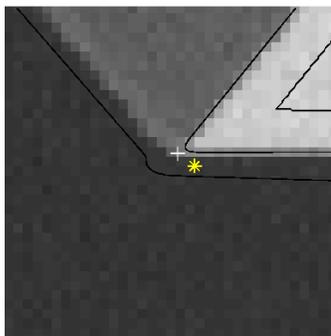
(b) Gráfica generada por el detector de Dreschler y Nagel aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Dreschler y Nagel operado en la imagen

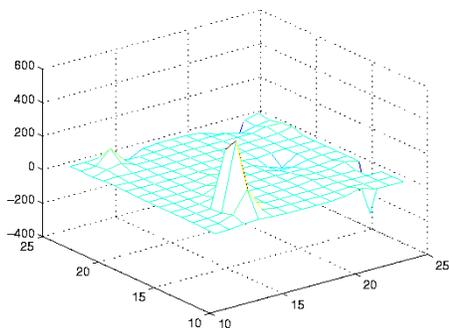


(d) Curvas de nivel del detector de Dreschler y Nagel operado en el modelo

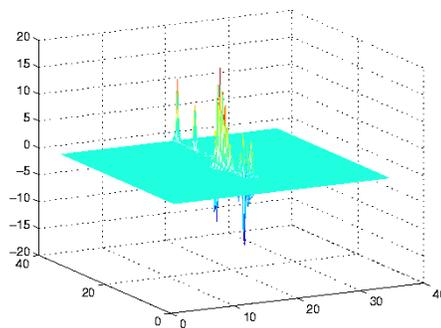


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

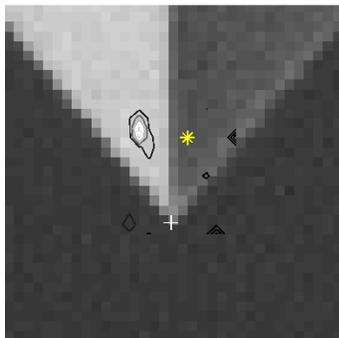
Figura 90: Esquina Y_2 . Operador de Dreschler y Nagel aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Dreschler y Nagel y el + representa la esquina propuesta.



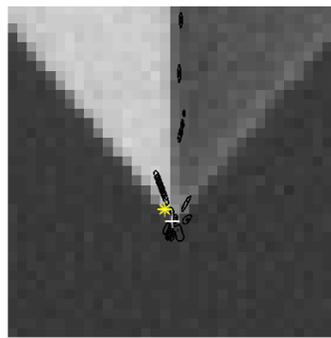
(a) Gráfica generada por el detector de Dreschler y Nagel aplicado a la imagen



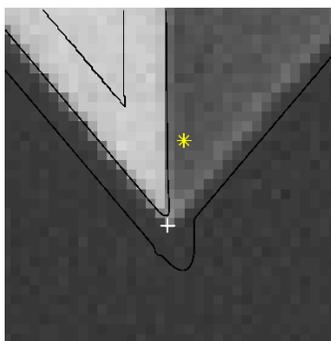
(b) Gráfica generada por el detector de Dreschler y Nagel aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Dreschler y Nagel operado en la imagen



(d) Curvas de nivel del detector de Dreschler y Nagel operado en el modelo



(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

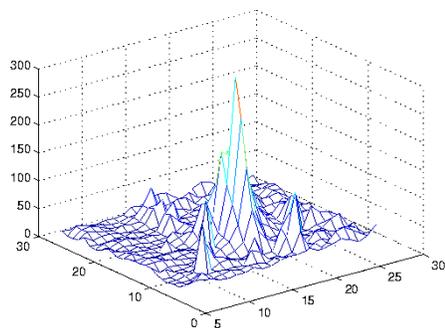
Figura 91: Esquina Y_3 . Operador de Dreschler y Nagel aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Dreschler y Nagel y el + representa la esquina propuesta.

Detector de Kitchen y Rosenfeld

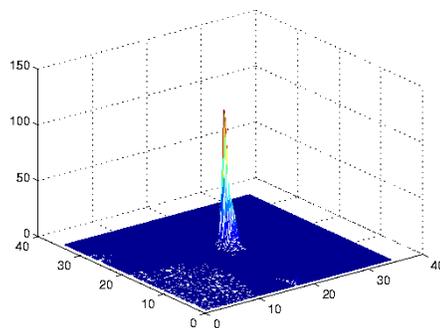
El detector de Kitchen y Rosenfeld (ver sección II.2.2) al ser operado sobre una esquina múltiple, presenta máximos locales. En este caso solo se toma el mayor de ellos, el cual define la región de mayor cambio en el gradiente. De esta forma el punto de esquina es desplazado hacia esa región, la cual se ubica en la cresta de la esquina que presenta una mayor amplitud (ver Figuras 93 y 94) o bien en el suelo de ambas esquinas en L que forman a la esquina múltiple (ver Figura 92). La Tabla XVIII muestra la ubicación de los puntos esquina en cada caso.

Tabla XVIII: Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo

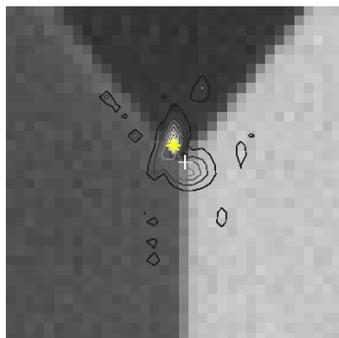
Tipo de esquina	Punto propuesto	K&R aplicado sobre el modelo	K&R aplicado sobre la imagen
Esquina Y_1	(1.18, 1.23)	(0.8500, 2.04)	(0, 3)
Esquina Y_2	(0.74, 1.81)	(2.5500, 2.72)	(3, 3)
Esquina Y_3	(-0.21, -5.30)	(0, -5.44)	(-2, 0)



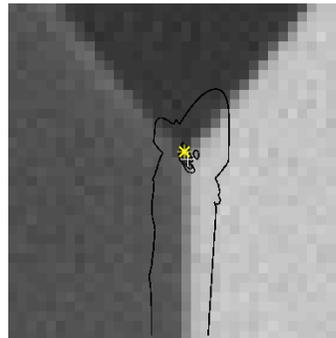
(a) Gráfica generada por el detector de Kitchen y Rosenfeld aplicado a la imagen



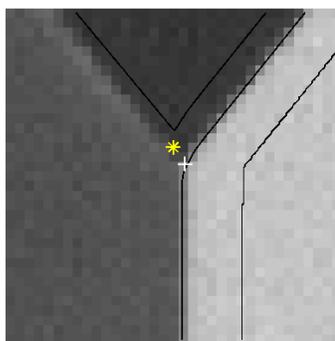
(b) Gráfica generada por el detector de Kitchen y Rosenfeld aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Kitchen y Rosenfeld operado en la imagen

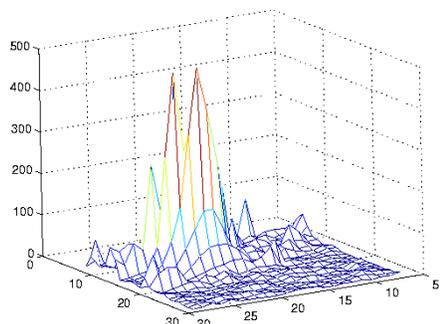


(d) Curvas de nivel del detector de Kitchen y Rosenfeld operado en el modelo

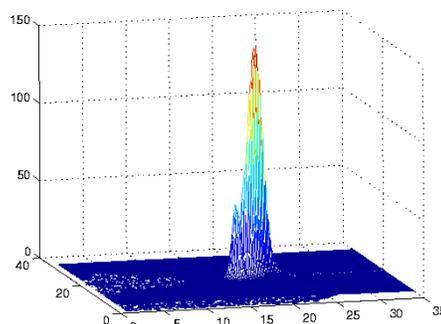


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

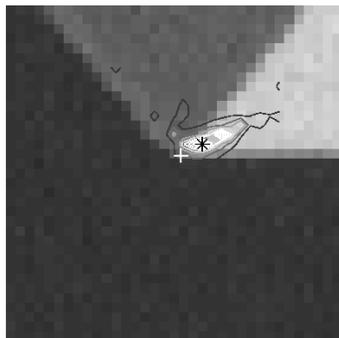
Figura 92: Esquina Y_1 . Operador de Kitchen y Rosenfeld aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Kitchen y Rosenfeld y el + representa la esquina propuesta.



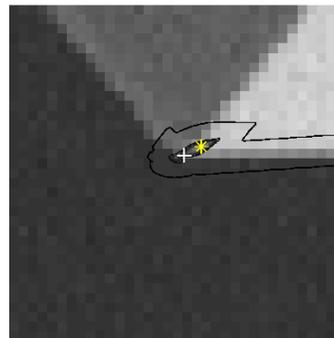
(a) Gráfica generada por el detector de Kitchen y Rosenfeld aplicado a la imagen



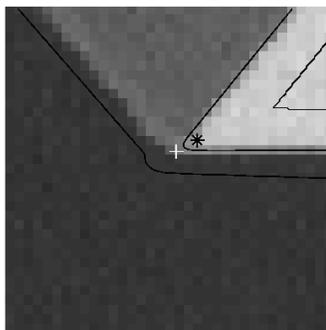
(b) Gráfica generada por el detector de Kitchen y Rosenfeld aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Kitchen y Rosenfeld operado en la imagen

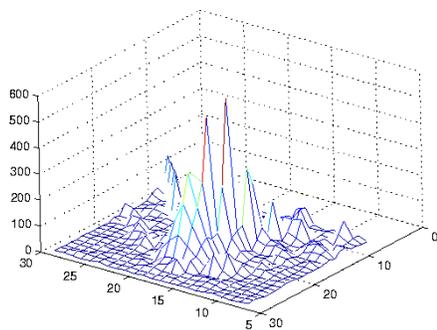


(d) Curvas de nivel del detector de Kitchen y Rosenfeld operado en el modelo

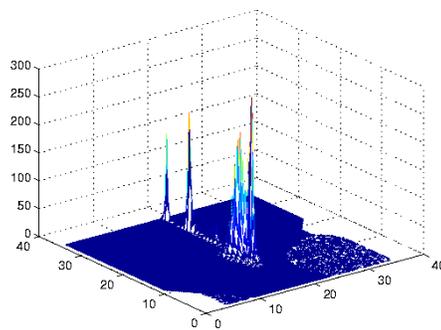


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

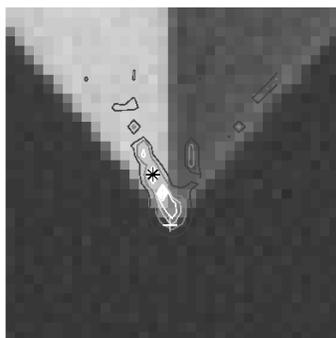
Figura 93: Esquina Y_2 . Operador de Kitchen y Rosenfeld aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Kitchen y Rosenfeld y el + representa la esquina propuesta.



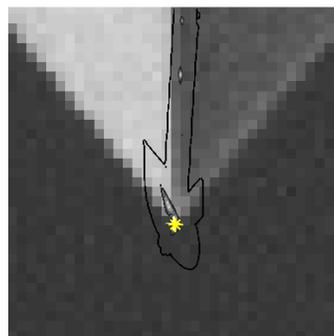
(a) Gráfica generada por el detector de Kitchen y Rosenfeld aplicado a la imagen



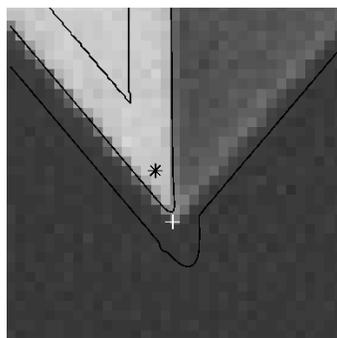
(b) Gráfica generada por el detector de Kitchen y Rosenfeld aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Kitchen y Rosenfeld operado en la imagen



(d) Curvas de nivel del detector de Kitchen y Rosenfeld operado en el modelo



(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

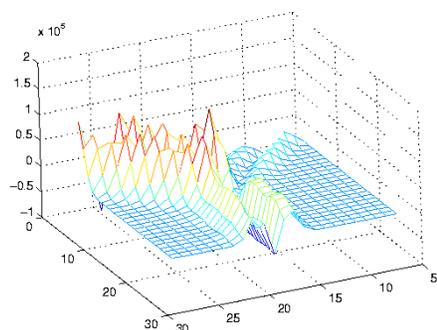
Figura 94: Esquina Y_3 . Operador de Kitchen y Rosenfeld aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Kitchen y Rosenfeld y el + representa la esquina propuesta.

Detector de Wang y Brady

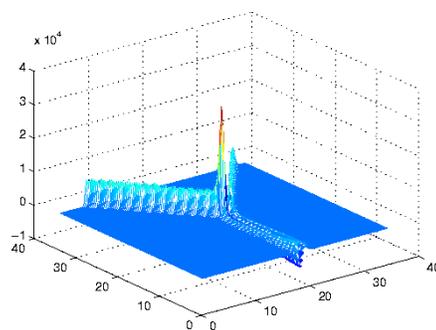
Como se menciona en la sección anterior, el detector de Wang y Brady (ver sección II.2.2), presenta un peso hacia los mayores cambios en el gradiente, desplazando el punto de esquina a la región de mayor cambio del mismo. En este caso el punto de esquina sufre un desplazamiento adicional hacia el borde que presenta un menor difuminado (ver Figura 96), ya que el cambio en este es mayor que en los demás bordes. Las Figuras 95, 96 y 97 ilustran lo anterior. La Tabla XIX muestra la ubicación del punto de esquina en cada esquina analizada y su respectivo modelo.

Tabla XIX: Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo

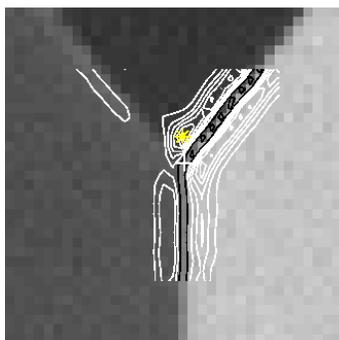
Tipo de esquina	Punto propuesto	W. & B. aplicado sobre el modelo	W. & B. aplicado sobre la imagen
Esquina Y_1	(1.18, 1.23)	(1.02, 1.87)	(1, 4)
Esquina Y_2	(0.74, 1.81)	(12.24, 2.38)	(5, 4)
Esquina Y_3	(-0.21, -5.30)	(0, -5.44)	(-2, 0)



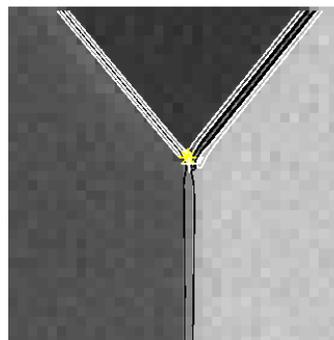
(a) Gráfica generada por el detector de Wang y Brady aplicado a la imagen



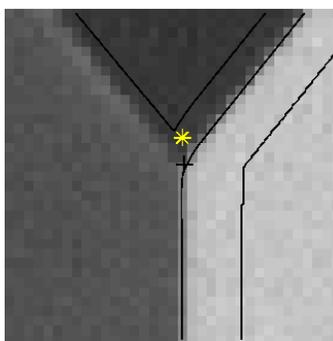
(b) Gráfica generada por el detector de Wang y Brady aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Wang y Brady operado en la imagen

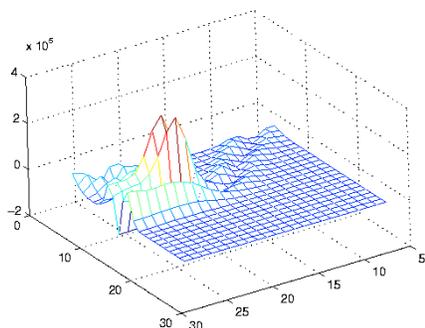


(d) Curvas de nivel del detector de Wang y Brady operado en el modelo

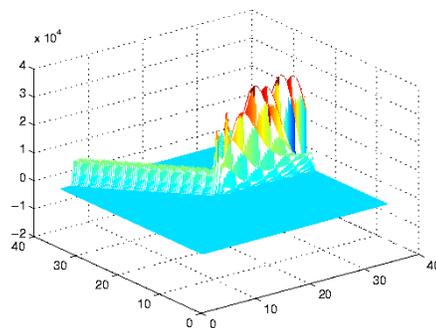


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

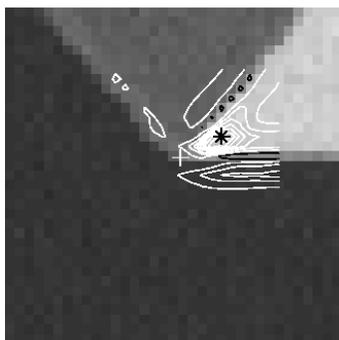
Figura 95: Esquina Y_1 . Operador de Wang y Brady aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Wang y Brady y el + representa la esquina propuesta.



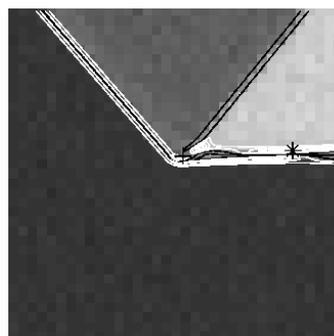
(a) Gráfica generada por el detector de Wang y Brady aplicado a la imagen



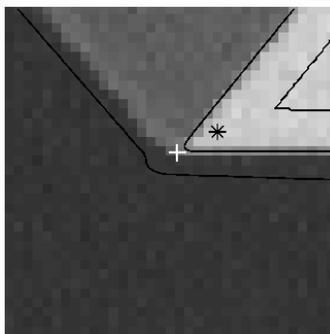
(b) Gráfica generada por el detector de Wang y Brady aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Wang y Brady operado en la imagen

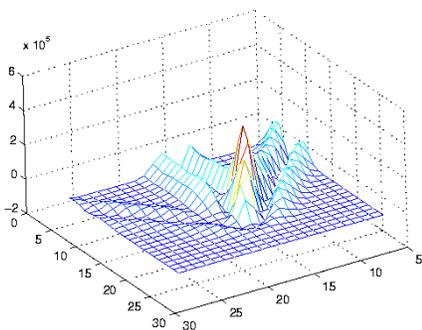


(d) Curvas de nivel del detector de Wang y Brady operado en el modelo

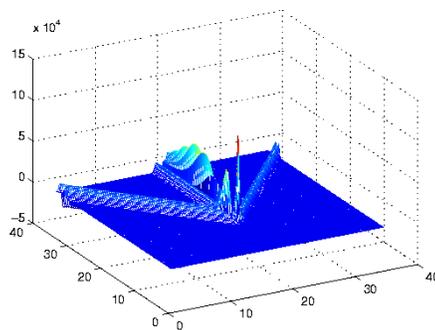


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

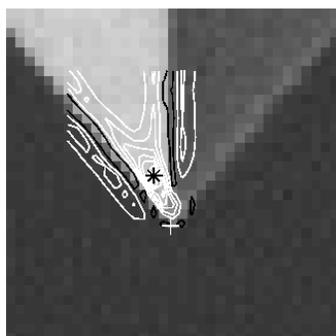
Figura 96: Esquina Y_2 . Operador de Wang y Brady aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Wang y Brady y el + representa la esquina propuesta.



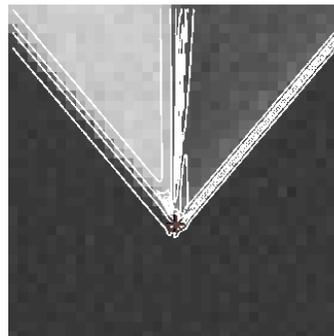
(a) Gráfica generada por el detector de Wang y Brady aplicado a la imagen



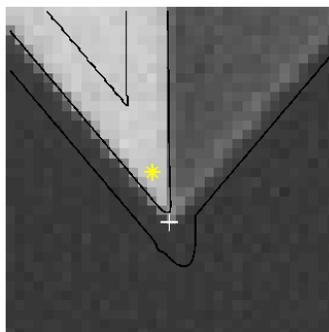
(b) Gráfica generada por el detector de Wang y Brady aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Wang y Brady operado en la imagen



(d) Curvas de nivel del detector de Wang y Brady operado en el modelo



(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

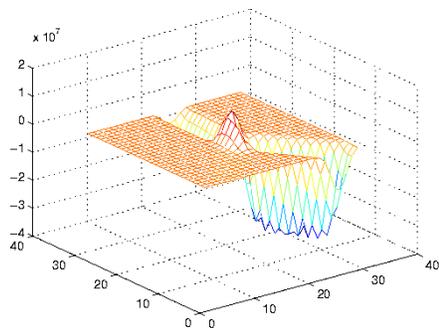
Figura 97: Esquina Y_3 . Operador de Wang y Brady aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Wang y Brady y el + representa la esquina propuesta.

Detector de Harris

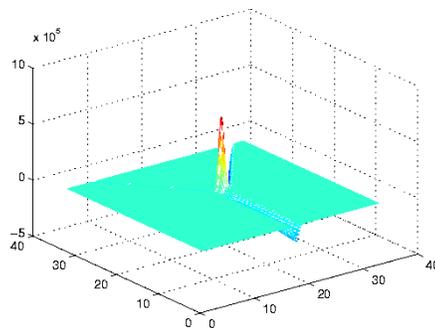
El detector de Harris (ver sección II.2.2) al hacer uso de la matriz de autocorrelación, marca un solo máximo local en la zona de mayor variación de intensidad de la región analizada. Esto hace que dicho detector no marque puntos fuera de la región en donde se espera encontrar la esquina. Cabe mencionar que es robusto al ruido presentado en la imagen. Los puntos localizados tanto en el modelo como sobre la imagen son cercanos al punto localizado por el criterio presentado en este trabajo. Las gráficas 98, 99 y 100 muestran el resultado de aplicar este operador a una imagen como a su modelo. El punto de esquina se ve desplazado hacia la región de mayor cambio. La Tabla XX muestra una comparación entre los puntos detectados en cada caso.

Tabla XX: Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo

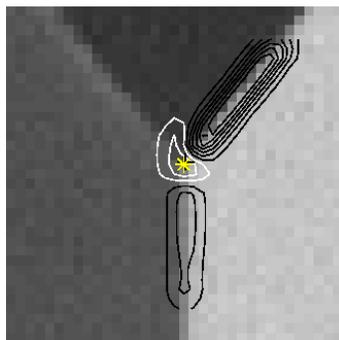
Tipo de esquina	Punto propuesto	Detector de Harris aplicado al modelo	Detector de Harris aplicado a la imagen
Esquina Y_1	(1.18, 1.23)	(1.02, 1.70)	(1, 1)
Esquina Y_2	(0.74, 1.81)	(2.38, 2.55)	(4, 3)
Esquina Y_3	(-0.21, -5.30)	(-0.85, -3.40)	(-1, -2)



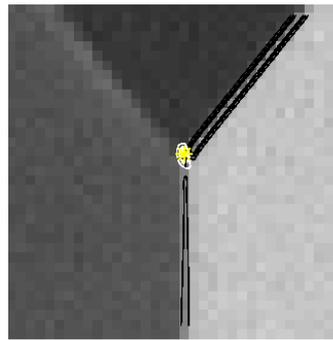
(a) Gráfica generada por el detector de Harris aplicado a la imagen



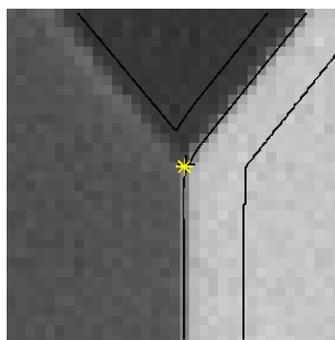
(b) Gráfica generada por el detector de Harris aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Harris operado en la imagen

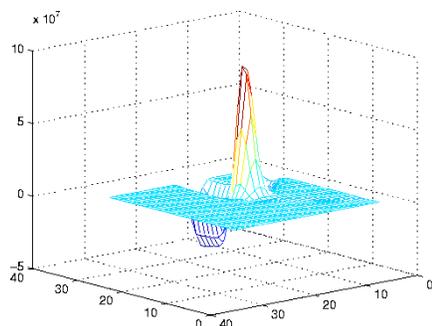


(d) Curvas de nivel del detector de Harris operado en el modelo

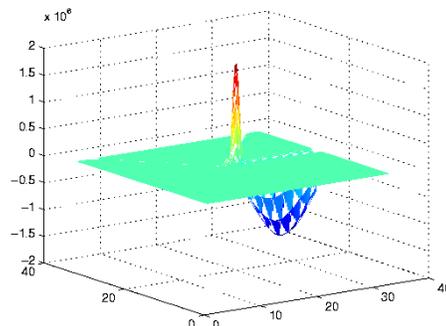


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

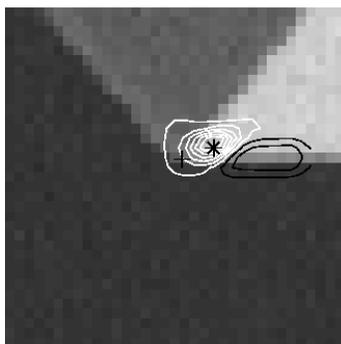
Figura 98: Esquina Y_1 . Operador de Harris aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Harris y el + representa la esquina propuesta.



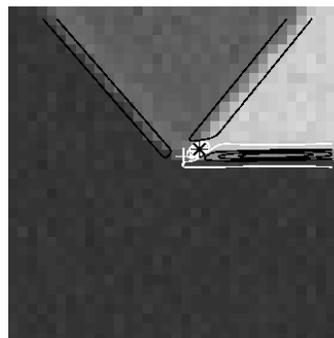
(a) Gráfica generada por el detector de Harris aplicado a la imagen



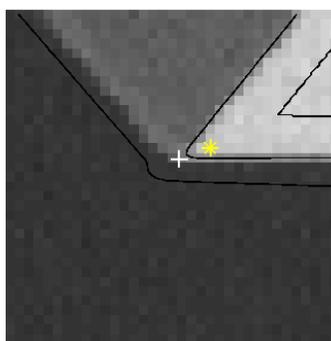
(b) Gráfica generada por el detector de Harris aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Harris operado en la imagen

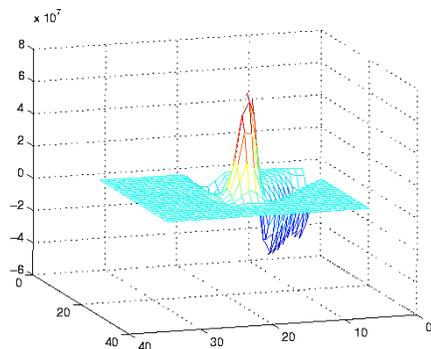


(d) Curvas de nivel del detector de Harris operado en el modelo

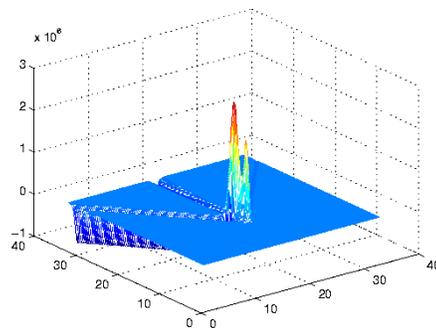


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

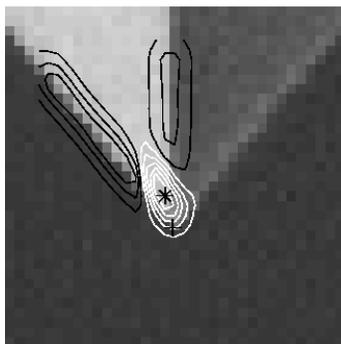
Figura 99: Esquina Y_2 . Operador de Harris aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Harris y el + representa la esquina propuesta.



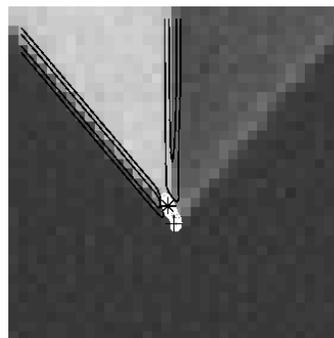
(a) Gráfica generada por el detector de Harris aplicado a la imagen



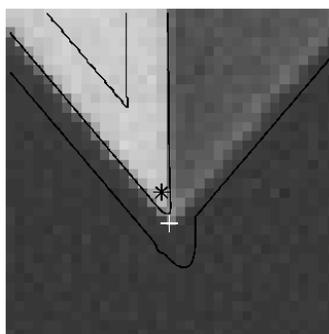
(b) Gráfica generada por el detector de Harris aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Harris operado en la imagen



(d) Curvas de nivel del detector de Harris operado en el modelo



(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

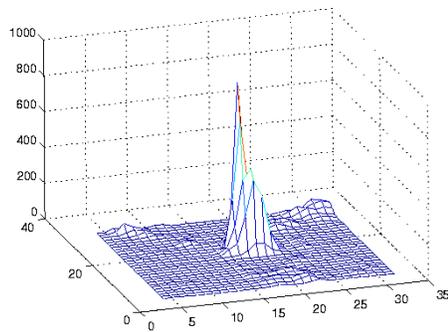
Figura 100: Esquina Y_3 . Operador de Harris aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Harris y el + representa la esquina propuesta.

Detector de Förstner

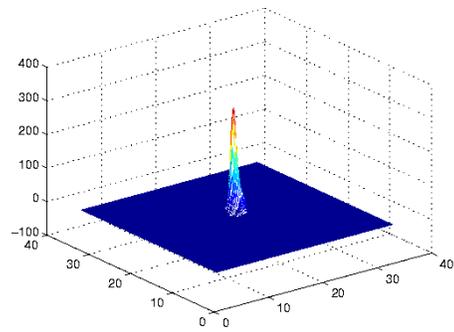
Förstner (ver sección II.2.2) propone un detector de esquinas a partir de la matriz de autocorrelación. Su métrica es el determinante entre la traza de dicha matriz. Esto implica la existencia de un máximo local, ubicando en ese punto al punto de esquina. En este caso el operador no depende de alguna constante que de peso al cambio de intensidad, como es el caso del detector de Harris. Las gráficas 101, 102 y 103 muestran el comportamiento de este operador sobre la imagen y su respectivo modelo. En este caso los desplazamientos se dan en sentido del punto que representa el mayor cambio de intensidad en la región. La Tabla XXI muestra una comparación de los puntos de esquina ubicados en cada caso.

Tabla XXI: Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo

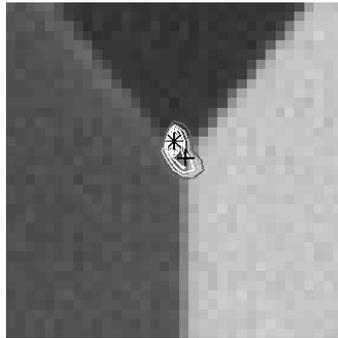
Tipo de esquina	Punto propuesto	Förstner sobre el modelo	Förstner sobre la imagen
Esquina Y_1	(1.18, 1.23)	(0.85, 1.87)	(0, 3)
Esquina Y_2	(0.74, 1.81)	(2.21, 2.55)	(3, 3)
Esquina Y_3	(-0.21, -5.30)	(-0.68, -3.57)	(-1, -2)



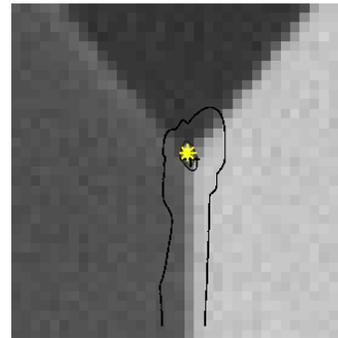
(a) Gráfica generada por el detector de Förstner aplicado a la imagen



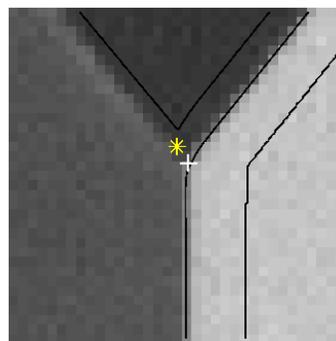
(b) Gráfica generada por el detector de Förstner aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Förstner operado en la imagen

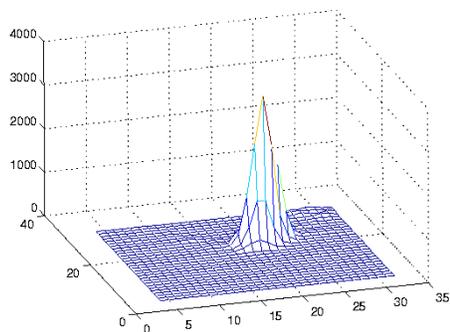


(d) Curvas de nivel del detector de Förstner operado en el modelo

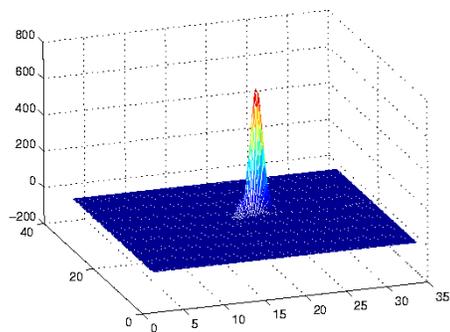


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

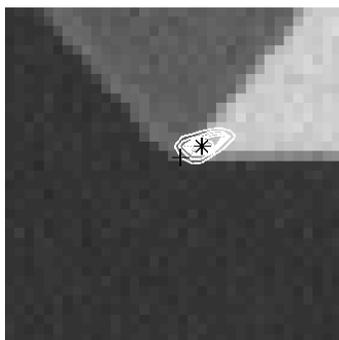
Figura 101: Esquina Y_1 . Operador de Förstner aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Förstner y el + representa la esquina propuesta.



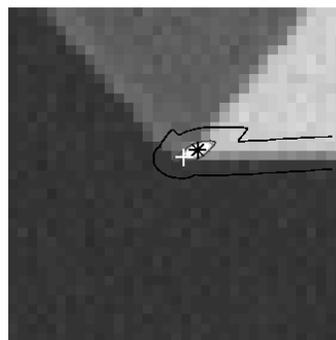
(a) Gráfica generada por el detector de Förstner aplicado a la imagen



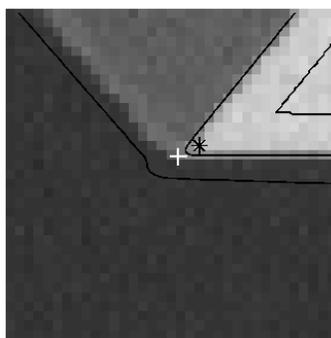
(b) Gráfica generada por el detector de Förstner aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Förstner operado en la imagen

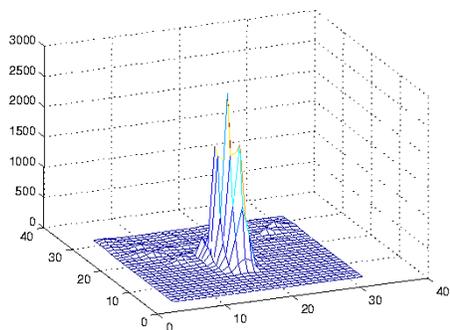


(d) Curvas de nivel del detector de Förstner operado en el modelo

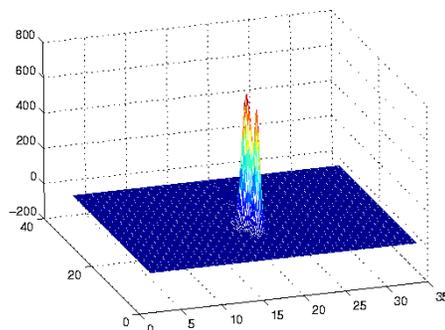


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

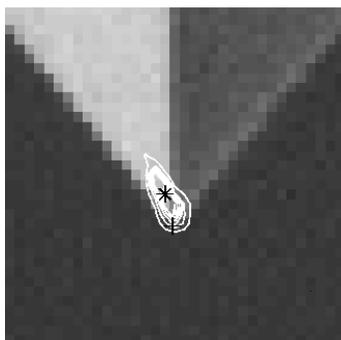
Figura 102: Esquina Y_2 . Operador de Förstner aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Förstner y el + representa la esquina propuesta.



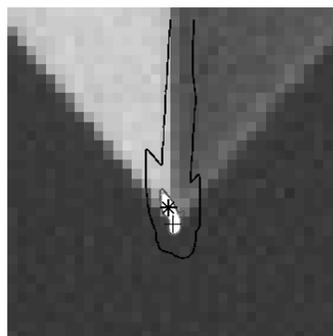
(a) Gráfica generada por el detector de Förstner aplicado a la imagen



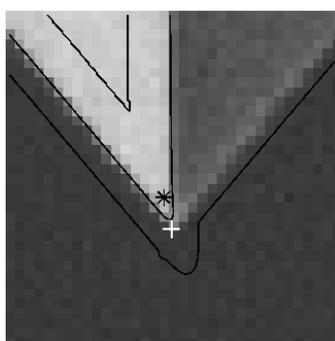
(b) Gráfica generada por el detector de Förstner aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Förstner operado en la imagen



(d) Curvas de nivel del detector de Förstner operado en el modelo



(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

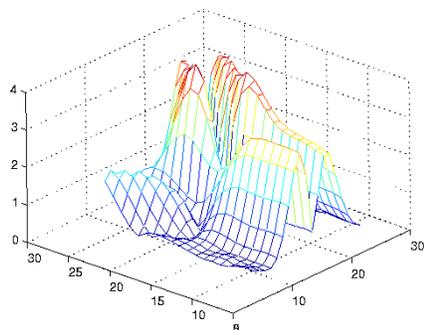
Figura 103: Esquina Y_3 . Operador de Förstner aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Förstner y el + representa la esquina propuesta.

Detector IPGP1

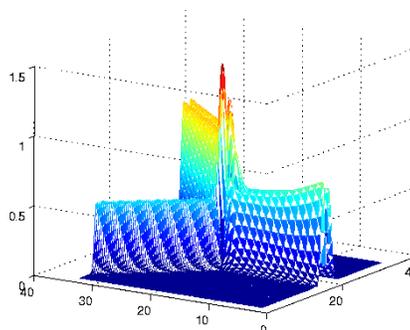
El detector IPGP1 propuesto por Olague y Trujillo (ver sección II.2.2). Extrae las frecuencias altas de la imagen, provocando que los bordes presenten valores altos y las esquinas representen un máximo local. Lo anterior hace que el punto de esquina se ubique en la región de mayor variación, ya que ésta presenta las frecuencias más altas. Cabe señalar que al no hacer uso de derivadas el detector es robusto al ruido. Las Figuras 104, 105 y 106 muestran el comportamiento de este detector en tres tipos de esquinas tipo Y. La Tabla XXII muestra una comparación de los puntos esquina ubicados en cada caso.

Tabla XXII: Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo

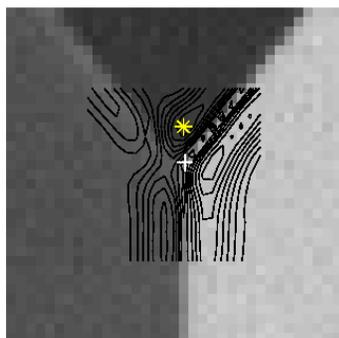
Tipo de esquina	Punto propuesto	IPGP1 aplicado al modelo	IPGP1 aplicado a la imagen
Esquina Y_1	(1.18, 1.23)	(1.02, 2.04)	(1, 5)
Esquina Y_2	(0.74, 1.81)	(2.72, 2.72)	(6, 4)
Esquina Y_3	(-0.21, -5.30)	(-1.02, -3.06)	(-3, 2)



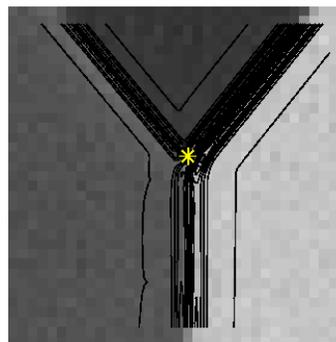
(a) Gráfica generada por el detector de IPGP1 aplicado a la imagen



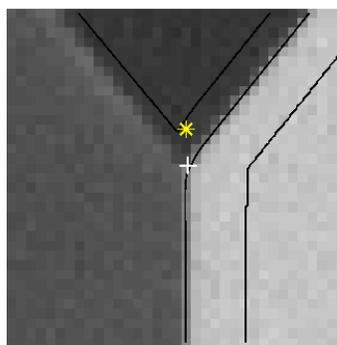
(b) Gráfica generada por el detector de IPGP1 aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de IPGP1 operado en la imagen

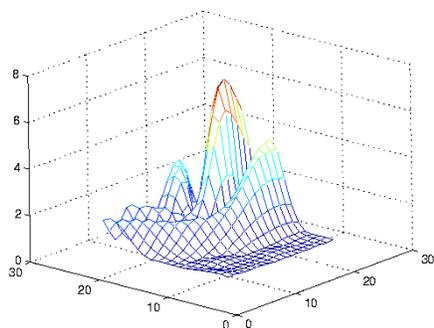


(d) Curvas de nivel del detector de IPGP1 operado en el modelo

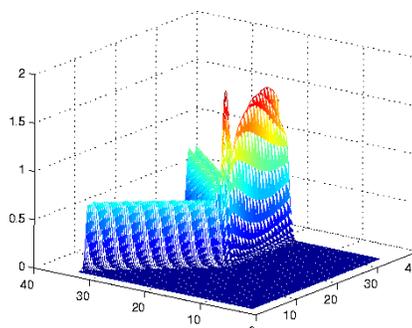


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

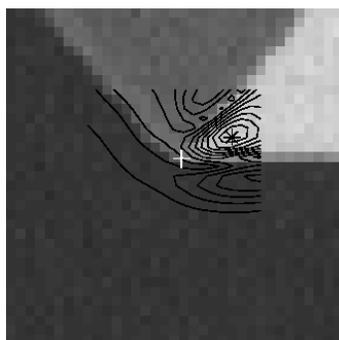
Figura 104: Esquina Y_1 . Operador IPGP1 aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por IPGP1 y el + representa la esquina propuesta.



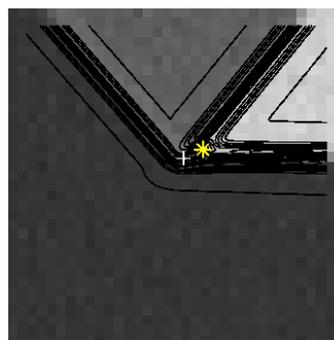
(a) Gráfica generada por el detector de IPGP1 aplicado a la imagen



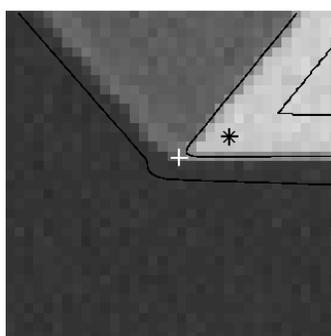
(b) Gráfica generada por el detector de IPGP1 aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de IPGP1 operado en la imagen

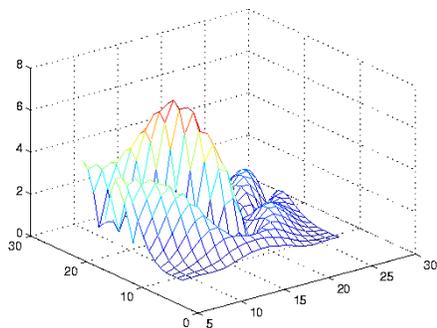


(d) Curvas de nivel del detector de IPGP1 operado en el modelo

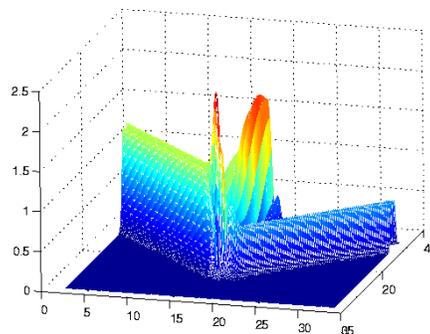


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

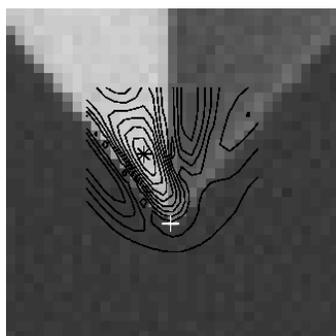
Figura 105: Esquina Y_2 . Operador IPGP1 aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por IPGP1 y el + representa la esquina propuesta.



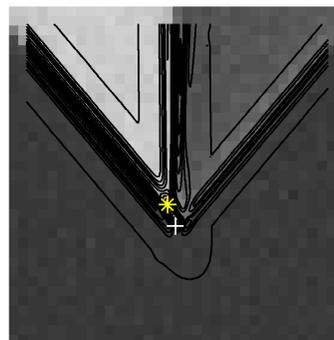
(a) Gráfica generada por el detector de IPGP1 aplicado a la imagen



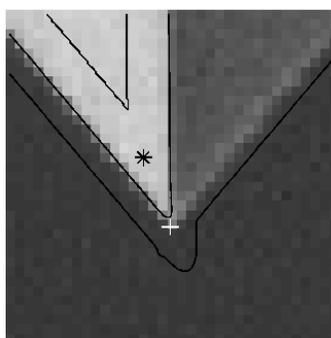
(b) Gráfica generada por el detector de IPGP1 aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de IPGP1 operado en la imagen



(d) Curvas de nivel del detector de IPGP1 operado en el modelo



(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

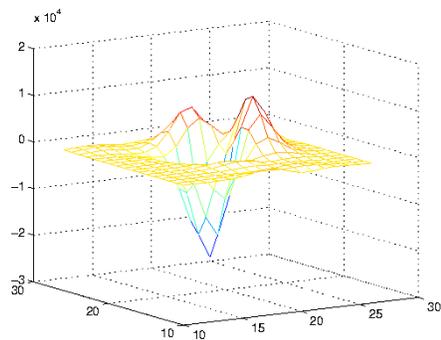
Figura 106: Esquina Y_3 . Operador IPGP1 aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por IPGP1 y el + representa la esquina propuesta.

Detector IPGP2

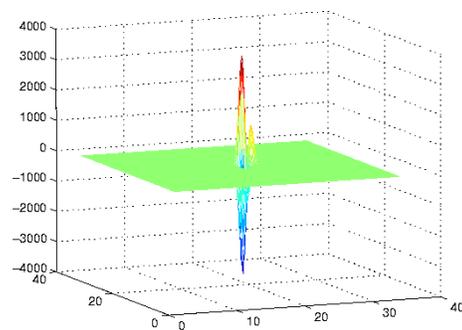
El comportamiento del detector IPGP2 (ver sección II.2.2) es muy similar al detector de Beaudet. En este caso existen varios máximos y mínimos locales, y el punto de esquina es ubicado con un desplazamiento hacia la región de mayor cambio en el gradiente. Es decir el punto de esquina se ubica hacia la cresta de la esquina tipo L con mayor amplitud (ver Figuras 108 y 109) o bien en el suelo como lo muestra la Figura 107. El punto de esquina sufre un desplazamiento adicional hacia el borde que presenta un menor difuminado. La Tabla XXIII muestra una comparación de los puntos de esquina ubicados en cada caso.

Tabla XXIII: Comparación de la ubicación del punto de esquina sobre cada modelo

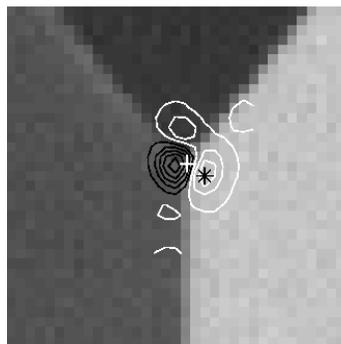
Tipo de esquina	Punto propuesto	IPGP2 aplicado al modelo	IPGP2 aplicado a la imagen
Esquina Y_1	(1.18, 1.23)	(1.02, 2.04)	(3, 0)
Esquina Y_2	(0.74, 1.81)	(2.89, 2.89)	(6, 4)
Esquina Y_3	(-0.21, -5.30)	(0.17, -5.10)	(-2, 1)



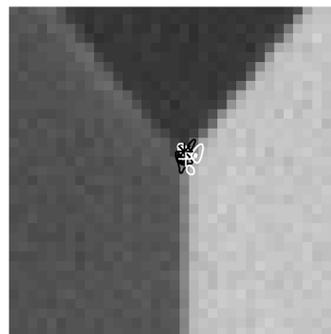
(a) Gráfica generada por el detector de IPGP2 aplicado a la imagen



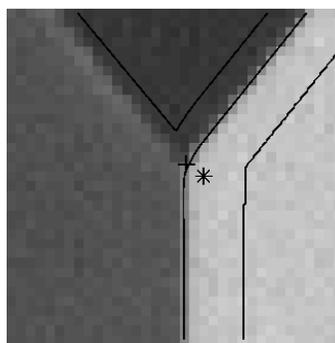
(b) Gráfica generada por el detector de IPGP2 aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de IPGP2 operado en la imagen

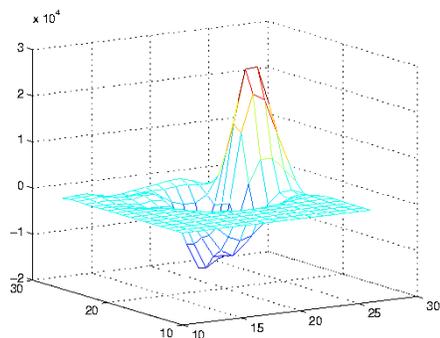


(d) Curvas de nivel del detector de IPGP2 operado en el modelo

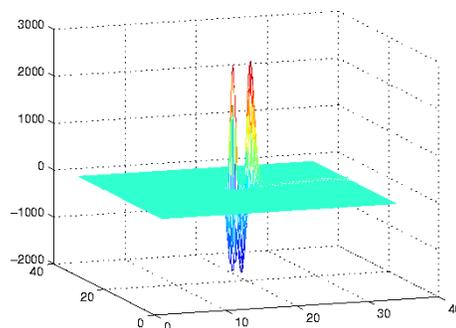


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

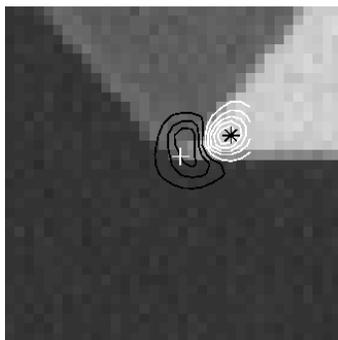
Figura 107: Esquina Y_1 . Operador IPGP2 aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por IPGP2 y el + representa la esquina propuesta.



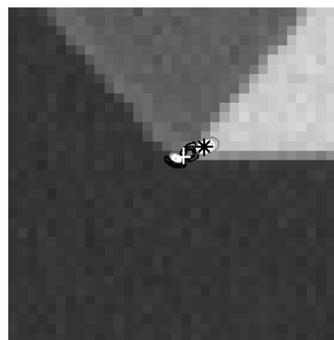
(a) Gráfica generada por el detector de IPGP2 aplicado a la imagen



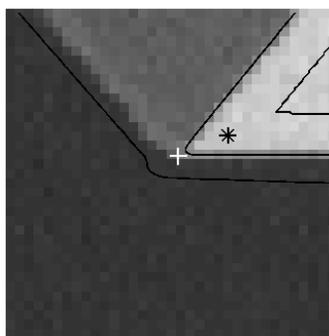
(b) Gráfica generada por el detector de IPGP2 aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de IPGP2 operado en la imagen

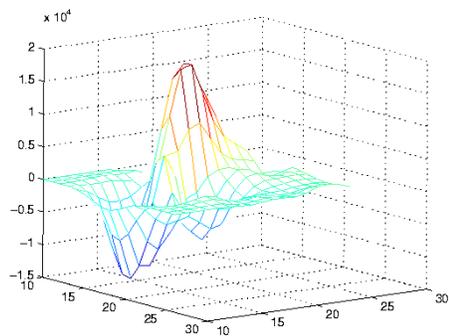


(d) Curvas de nivel del detector de IPGP2 operado en el modelo

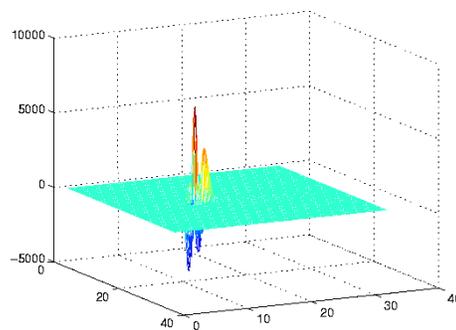


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

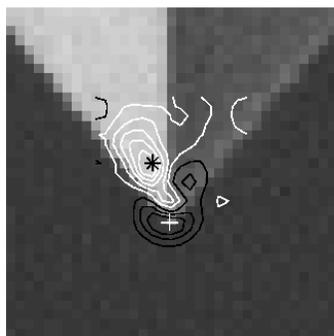
Figura 108: Esquina Y_2 . Operador IPGP2 aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por IPGP2 y el + representa la esquina propuesta.



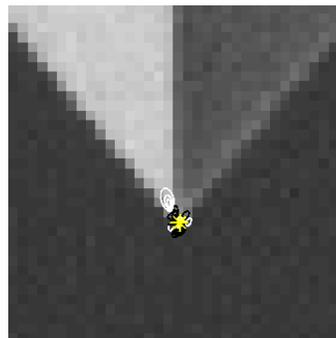
(a) Gráfica generada por el detector de IPGP2 aplicado a la imagen



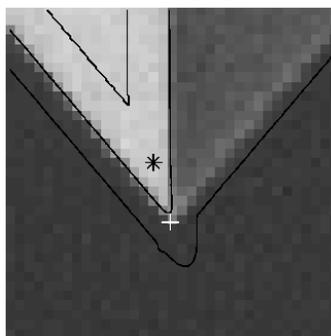
(b) Gráfica generada por el detector de IPGP2 aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de IPGP2 operado en la imagen



(d) Curvas de nivel del detector de IPGP2 operado en el modelo

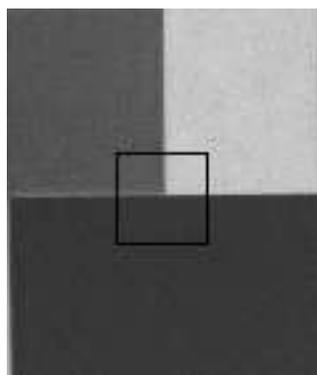


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

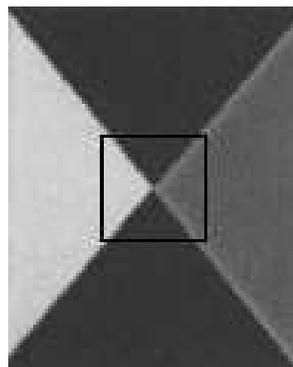
Figura 109: Esquina Y_3 . Operador IPGP2 aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por IPGP2 y el + representa la esquina propuesta.

V.2.3 Esquina tipo T y esquina tipo X

En las secciones V.2.1 y V.2.2 se expone el comportamiento de los detectores de Beaudet, Dreschler y Nagel, Kitchen y Rosenfeld, Wang y Brady, Harris, Förstner, IPGP1 e IPGP2, en las esquinas tipo L y tipo Y destacando las características principales de estos detectores. Otros dos casos de estudio son las esquinas múltiples tipo T y tipo X (ver Figuras 110.a y 110.b respectivamente), ambas se construyen a partir de dos esquinas tipo L (ver sección III.4) al igual que la esquina tipo Y.



(a) Esquina tipo T



(b) Esquina tipo X

Figura 110: Imágenes consideradas en esta sección

En cada imagen se selecciona una región de tamaño 35×35 píxeles, esta se ajusta al modelo de esquina múltiple. En general, el modelo utilizado para el ajuste es el mismo para una esquina tipo T y tipo X, debido a que estas se construyen a partir de dos esquinas tipo L.

Las Figuras 111.a y 111.b muestran la región de ajuste para el modelo. Las Figuras 111.c y 111.d se visualizan las gráficas 3D que corresponden a cada región de la imagen, donde los ejes x y y representan la ubicación de cada píxel y el eje z es la intensidad

Tabla XXIV: Parámetros que caracterizan a cada función

Parámetros	Esquina tipo T	Esquina tipo X
σ	-1.0831	0.3467
μ	1.9362	-0.5971
θ	-0.1717	-0.6736
σ_1	0.2207	-0.3189
μ_1	1.0396	0.3551
θ_1	0.0102	0.8695
σ_2	0.8254	-0.6892
μ_2	1.3647	-0.4222
θ_2	-0.0462	-0.6773
σ_3	0.3808	0.7957
μ_3	1.3020	0.7643
θ_3	0.0095	0.8666
A_1	90.9360	99.0714
B	54.8792	54.5851
A_2	196.5990	204.1080

de gris de ese pixel. En este caso cada borde presenta un difuminado diferente. Las Figuras 111.e y 111.f muestran las gráficas del modelo ajustado a cada tipo de esquina. En las Figuras 111.g y 111.h se aprecian las imágenes creadas a partir del modelo, estas imágenes se construyen discretizando el modelo en cada unidad y asignándole el valor de la función como un nivel de gris.

Los parámetros que caracterizan a cada modelo se listan en la Tabla XXIV.

La Figura 112 muestra las diferentes regiones de estudio. En ellas se sobreponen las curvas de nivel del modelo correspondiente a cada esquina. El modelo acota los bordes y el área de difuminado de cada uno de ellos. Lo anterior hace posible ubicar el punto de esquina, el cual se muestra como un “+” en la imagen.

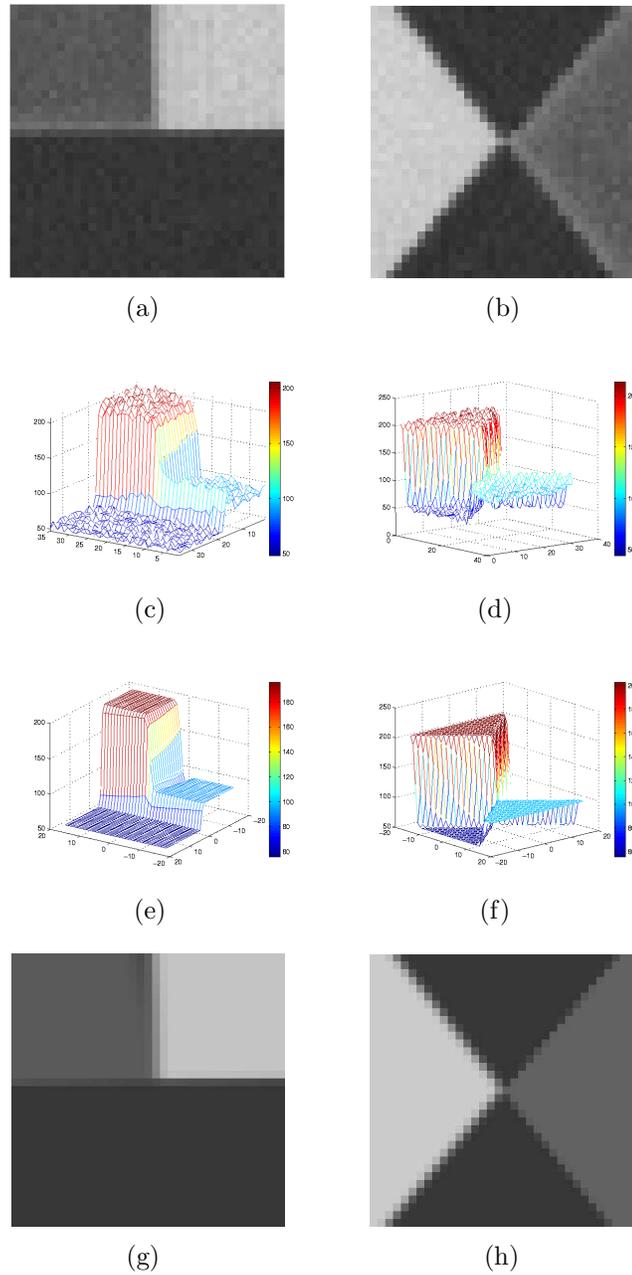


Figura 111: Comparación entre las imágenes y sus respectivos modelos

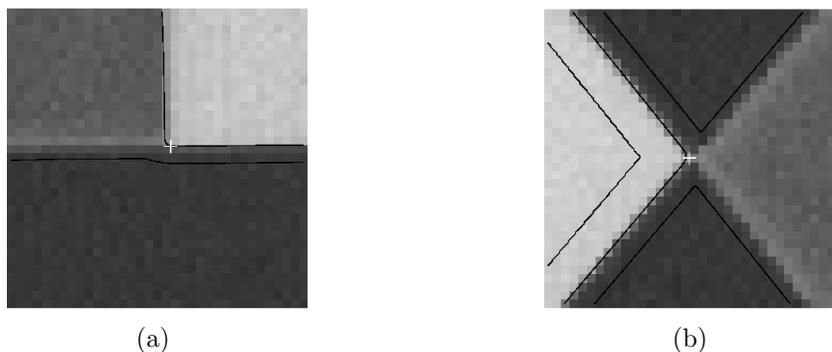


Figura 112: El símbolo + representa el punto de esquina propuesto. Las curvas de nivel del modelo se muestran sobre la región de estudio

Una vez obtenido el modelo, el criterio de localización de la esquina es aplicado y comparado con los criterios discutidos en la sección II.2. Los resultados se muestran en la Tabla XXV para la esquina tipo T y en la Tabla Tabla XXVI para la esquina tipo X. Las unidades son pixeles y el origen del sistema coordenado es situado en el pixel central de la región de estudio. Ambas tablas citan a la figura que muestra la aplicación del detector la imagen y su respectivo modelo.

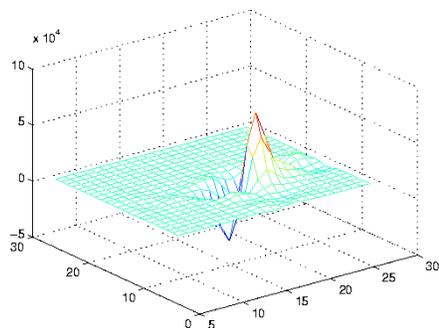
Tabla XXV: Ubicación del punto de esquina por cada detector en una esquina tipo T

Tipo de detector	Punto Propuesto	Detector sobre el Modelo	Detector sobre la Imagen	Figura
Beaudet	(1.54,1.29)	(2.21, 1.70)	(3, 3)	113
Dreschler y Nagel	(1.54,1.29)	(1.19, 2.21)	(2, -4)	115
Kitchen y Rosenfeld	(1.54,1.29)	(1.70, 1.87)	(2, 3)	117
Wang y Brady	(1.54,1.29)	(2.21, 0.85)	(3, 3)	119
Harris	(1.54,1.29)	(1.53, 1.70)	(2, 3)	121
Förstner	(1.54,1.29)	(1.53, 1.87)	(2, 3)	123
IPGP1	(1.54,1.29)	(2.38, 1.87)	(4, 4)	125
IPGP2	(1.54,1.29)	(2.21, 1.87)	(3, 3)	127

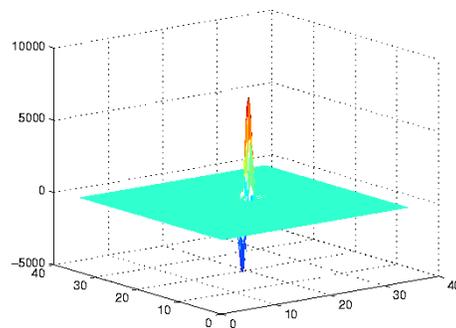
Tabla XXVI: Ubicación del punto de esquina por cada detector en una esquina tipo X

Tipo de detector	Punto Propuesto	Detector sobre el modelo	Detector sobre la imagen	Figura
Beaudet	(-0.53,-0.02)	(-1.36, 0.17)	(-3, 0)	114
Dreschler y Nagel	(-0.53,-0.02)	(-0.17, -0.17)	(0, -2)	116
Kitchen y Rosenfeld	(-0.53,-0.02)	(-0.34, 0.17)	(-1, 0)	118
Wang y Brady	(-0.53,-0.02)	(-0.17, 0.51)	(-3, 0)	120
Harris	(-0.53,-0.02)	(-1.02, 0.17)	(-2, 0)	122
Förstner	(-0.53,-0.02)	(-1.19, 0.17)	(-1, 0)	124
IPGP1	(-0.53,-0.02)	(-1.53, 0.17)	(-4, 0)	126
IPGP2	(-0.53,-0.02)	(-1.36, 0.17)	(-4, 0)	128

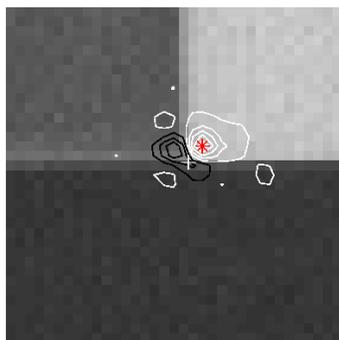
Las esquinas tipo T y tipo X son dos casos de las esquinas construidas por dos niveles de grises y ambas se modelan como la suma de dos esquinas tipo L. Por lo cual el comportamiento de cada detector de esquinas es similar al que se presenta en las esquinas tipo Y (ver sección V.2.2) y su análisis es equivalente.



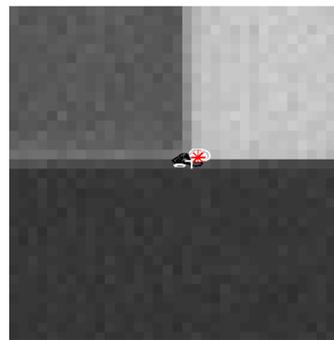
(a) Gráfica generada por el detector de Beaudet aplicado a la imagen



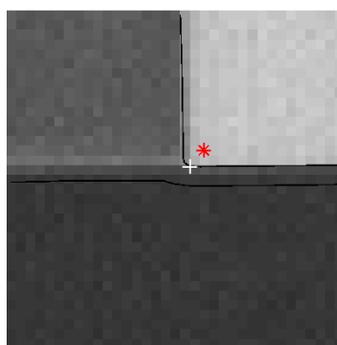
(b) Gráfica generada por el detector de Beaudet aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Beaudet operado en la imagen

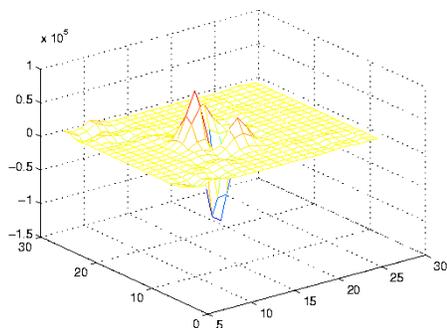


(d) Curvas de nivel del detector de Beaudet operado en el modelo

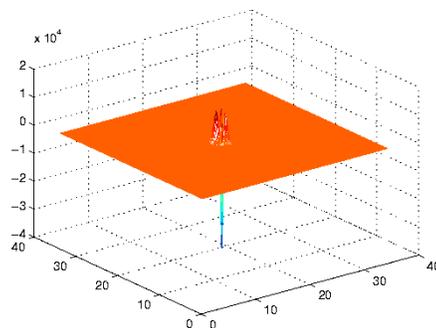


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

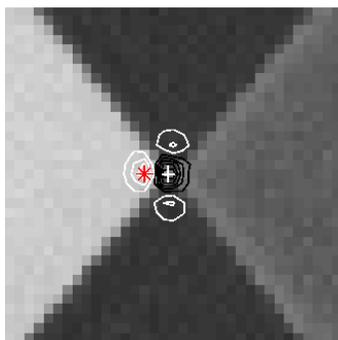
Figura 113: Esquina T . Operador de Beaudet aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Beaudet y el + representa la esquina propuesta.



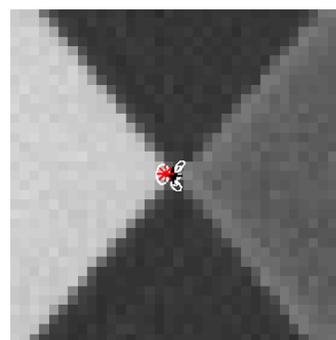
(a) Gráfica generada por el detector de Beaudet aplicado a la imagen



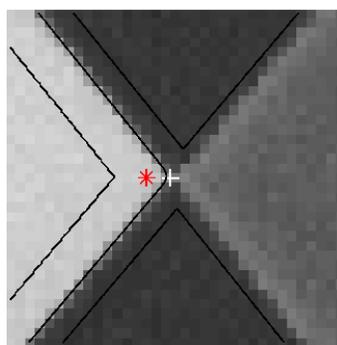
(b) Gráfica generada por el detector de Beaudet aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Beaudet operado en la imagen

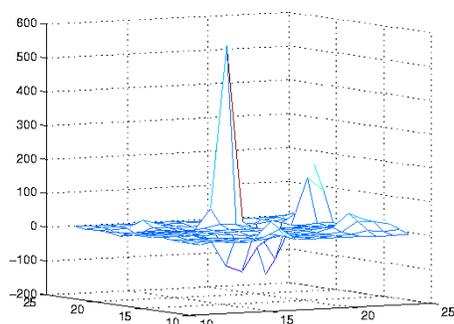


(d) Curvas de nivel del detector de Beaudet operado en el modelo

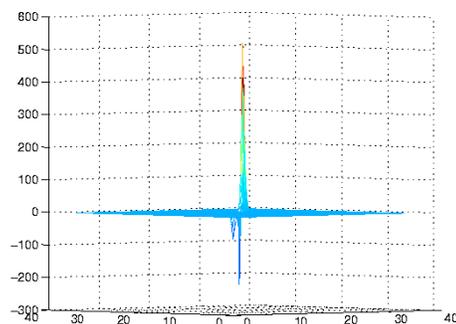


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

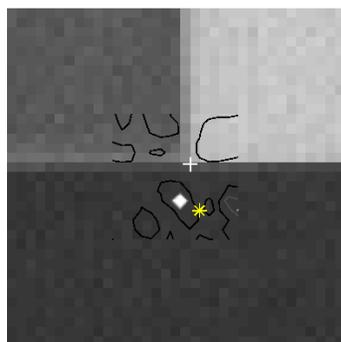
Figura 114: Esquina X . Operador de Beaudet aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Beaudet y el + representa la esquina propuesta.



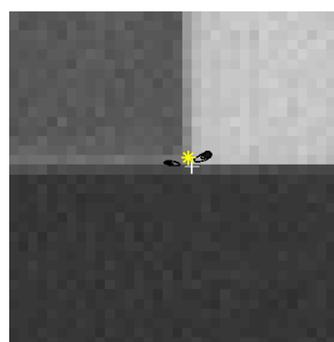
(a) Gráfica generada por el detector de Dreschler y Nagel aplicado a la imagen



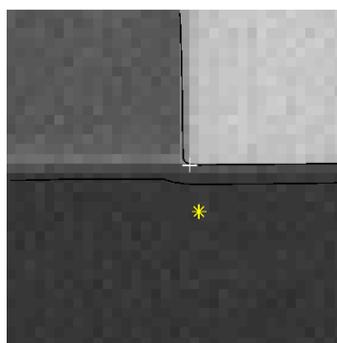
(b) Gráfica generada por el detector de Dreschler y Nagel aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Dreschler y Nagel operado en la imagen

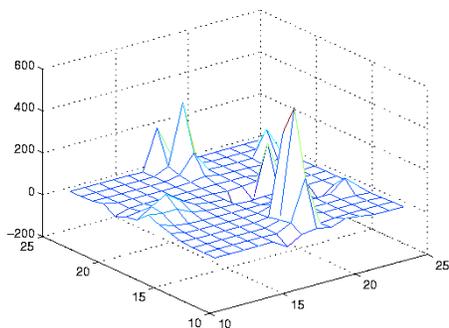


(d) Curvas de nivel del detector de Dreschler y Nagel operado en el modelo

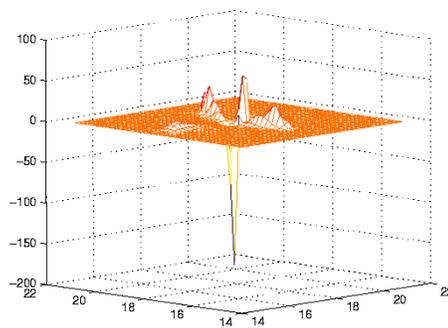


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

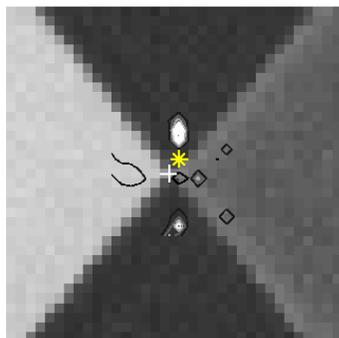
Figura 115: Esquina T . Operador de Dreschler y Nagel aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Dreschler y Nagel y el + representa la esquina propuesta.



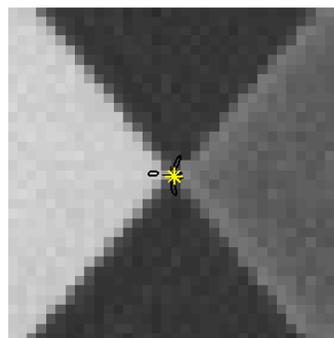
(a) Gráfica generada por el detector de Dreschler y Nagel aplicado a la imagen



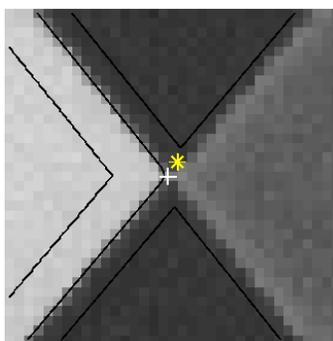
(b) Gráfica generada por el detector de Dreschler y Nagel aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Dreschler y Nagel operado en la imagen

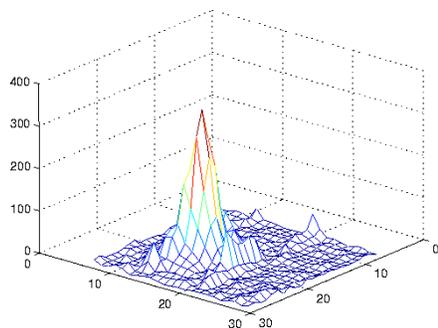


(d) Curvas de nivel del detector de Dreschler y Nagel operado en el modelo

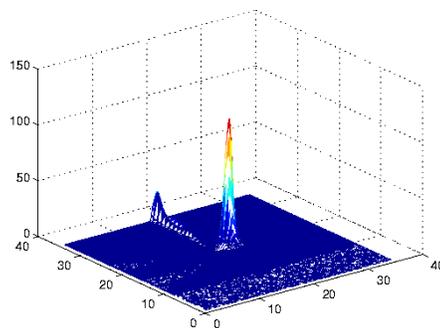


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

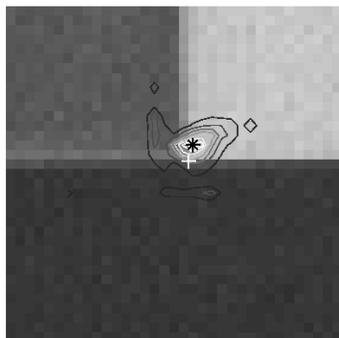
Figura 116: Esquina X. Operador de Dreschler y Nagel aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Dreschler y Nagel y el + representa la esquina propuesta.



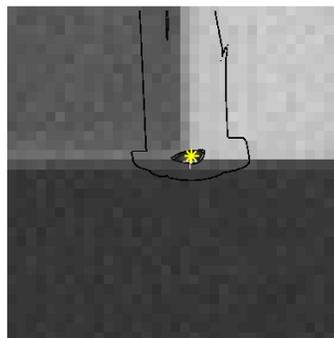
(a) Gráfica generada por el detector de Kitchen y Rosenfeld aplicado a la imagen



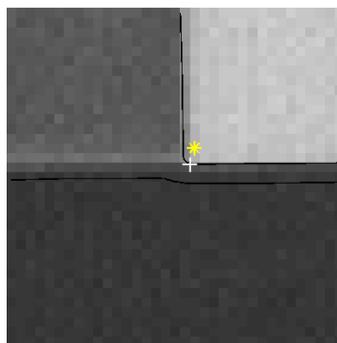
(b) Gráfica generada por el detector de Kitchen y Rosenfeld aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Kitchen y Rosenfeld operado en la imagen

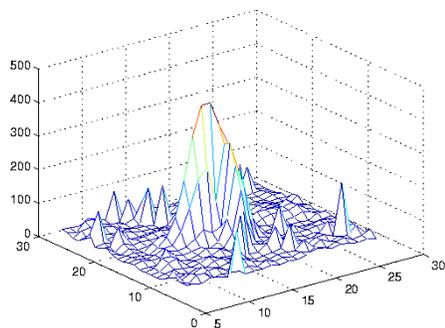


(d) Curvas de nivel del detector de Kitchen y Rosenfeld operado en el modelo

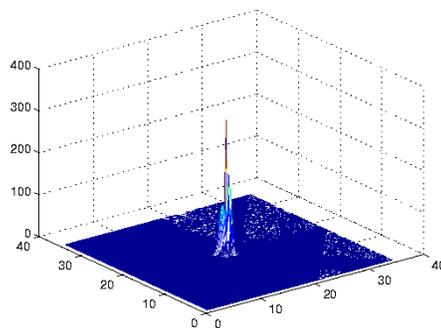


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

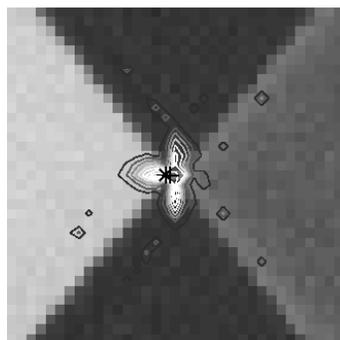
Figura 117: Esquina T . Operador de Kitchen y Rosenfeld aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Kitchen y Rosenfeld y el + representa la esquina propuesta.



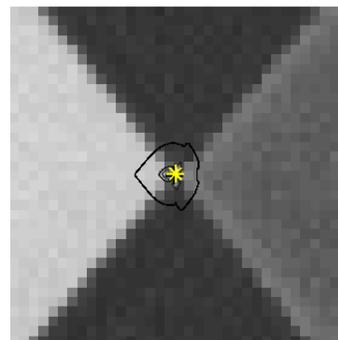
(a) Gráfica generada por el detector de Kitchen y Rosenfeld aplicado a la imagen



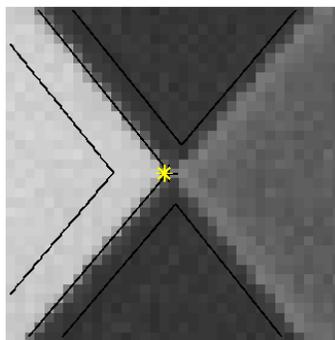
(b) Gráfica generada por el detector de Kitchen y Rosenfeld aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Kitchen y Rosenfeld operado en la imagen

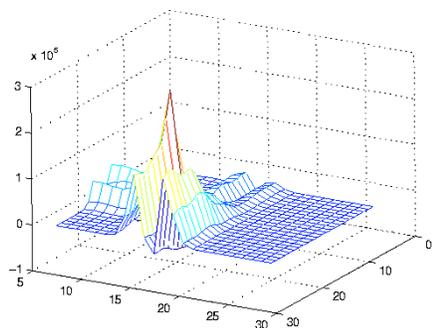


(d) Curvas de nivel del detector de Kitchen y Rosenfeld operado en el modelo

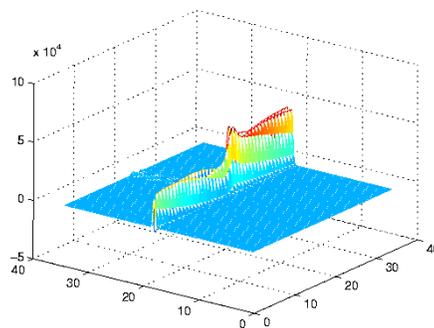


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

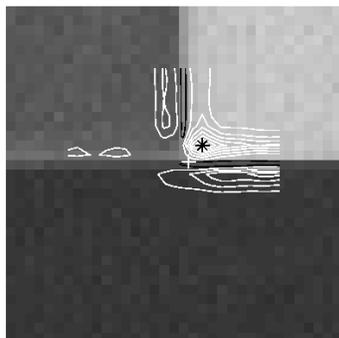
Figura 118: Esquina X. Operador de Kitchen y Rosenfeld aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Kitchen y Rosenfeld y el + representa la esquina propuesta.



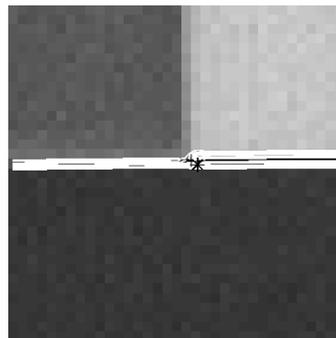
(a) Gráfica generada por el detector de Wang y Brady aplicado a la imagen



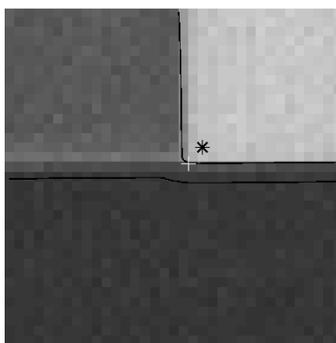
(b) Gráfica generada por el detector de Wang y Brady aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Wang y Brady operado en la imagen

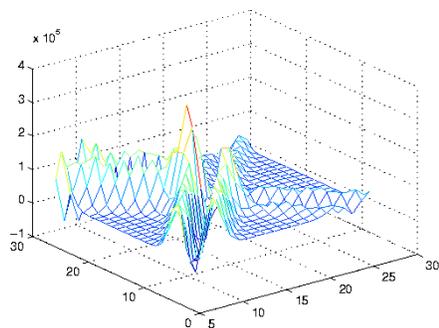


(d) Curvas de nivel del detector de Wang y Brady operado en el modelo

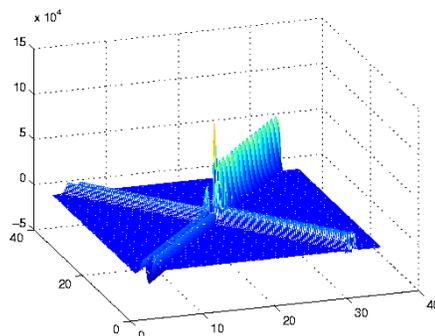


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

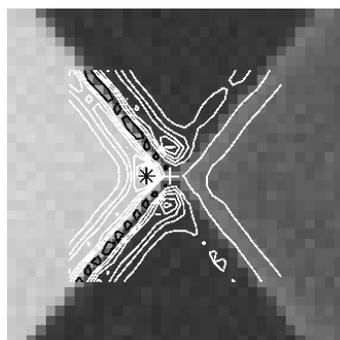
Figura 119: Esquina T_1 . Operador de Wang y Brady aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Wang y Brady y el + representa la esquina propuesta.



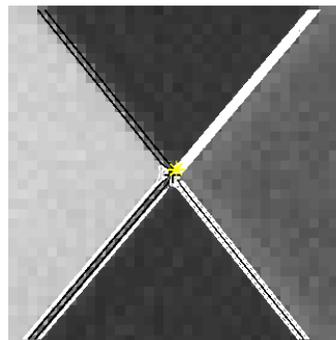
(a) Gráfica generada por el detector de Wang y Brady aplicado a la imagen



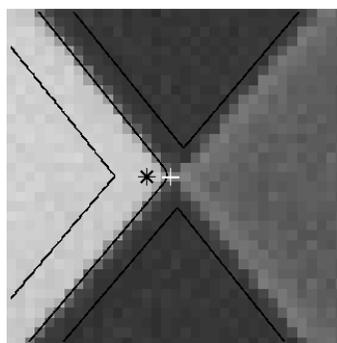
(b) Gráfica generada por el detector de Wang y Brady aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Wang y Brady operado en la imagen

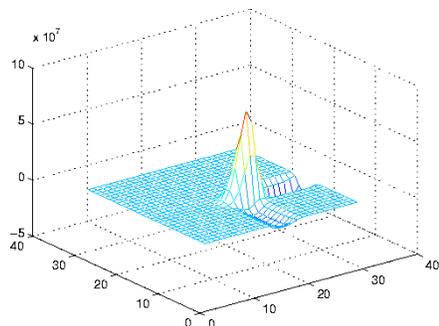


(d) Curvas de nivel del detector de Wang y Brady operado en el modelo

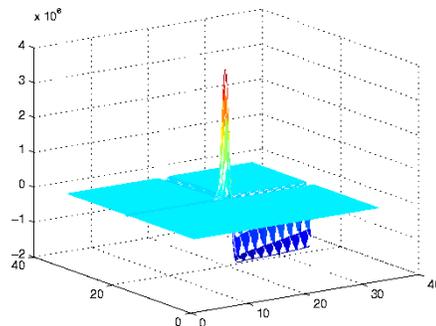


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

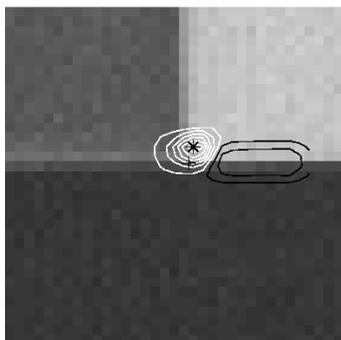
Figura 120: Esquina X . Operador de Wang y Brady aplicado a la imagen y a su modelo. El $*$ representa la esquina detectada por Wang y Brady y el $+$ representa la esquina propuesta.



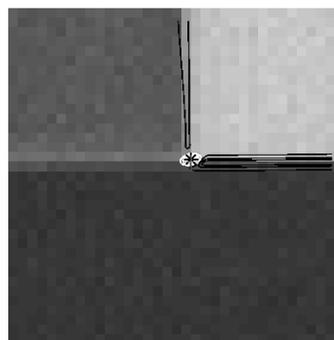
(a) Gráfica generada por el detector de Harris aplicado a la imagen



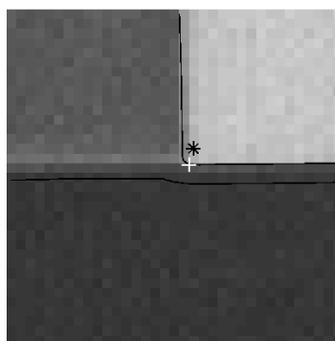
(b) Gráfica generada por el detector de Harris aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Harris operado en la imagen

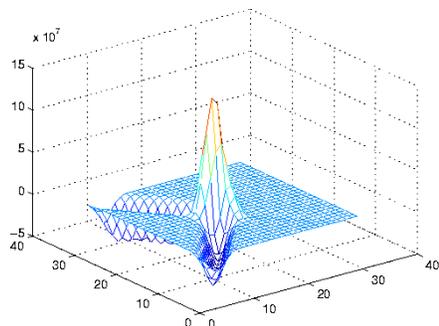


(d) Curvas de nivel del detector de Harris operado en el modelo

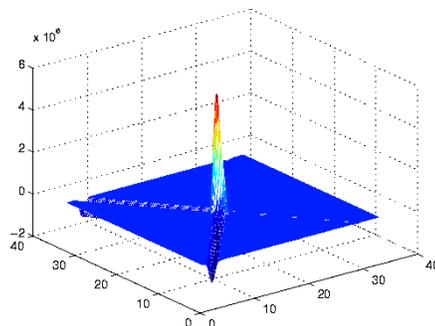


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

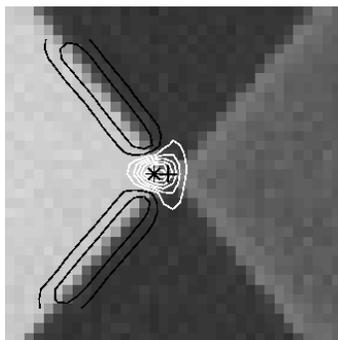
Figura 121: Esquina T . Operador de Harris aplicado a la imagen y a su modelo. El $*$ representa la esquina detectada por Harris y el $+$ representa la esquina propuesta.



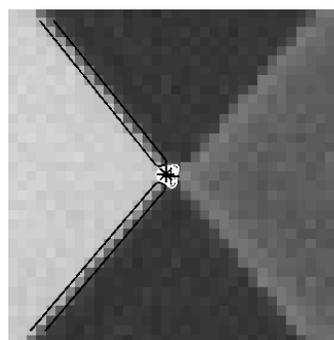
(a) Gráfica generada por el detector de Harris aplicado a la imagen



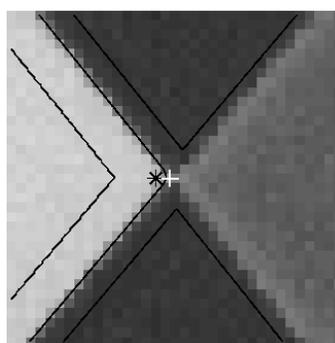
(b) Gráfica generada por el detector de Harris aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Harris operado en la imagen

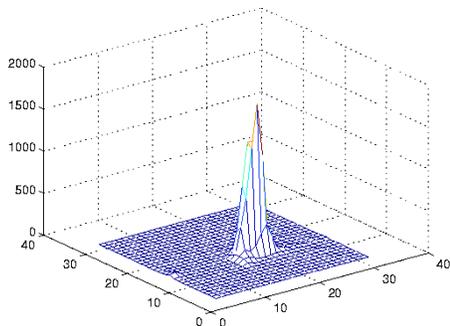


(d) Curvas de nivel del detector de Harris operado en el modelo

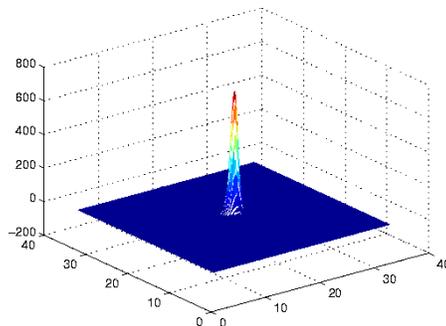


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

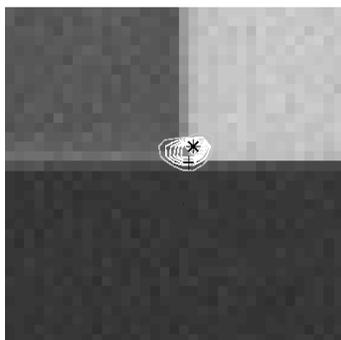
Figura 122: Esquina X. Operador de Harris aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Harris y el + representa la esquina propuesta.



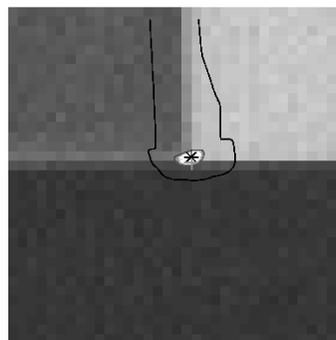
(a) Gráfica generada por el detector de Förstner aplicado a la imagen



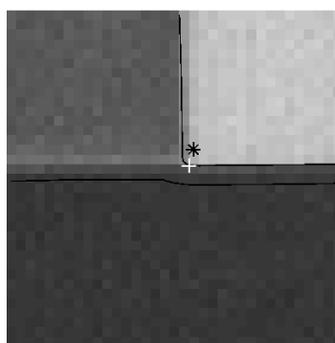
(b) Gráfica generada por el detector de Förstner aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Förstner operado en la imagen

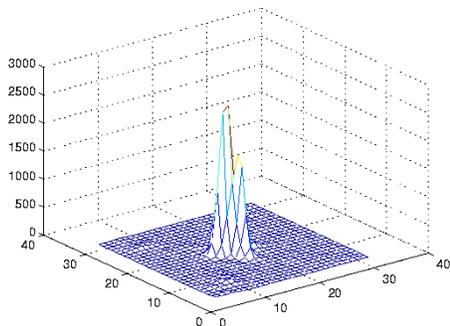


(d) Curvas de nivel del detector de Förstner operado en el modelo

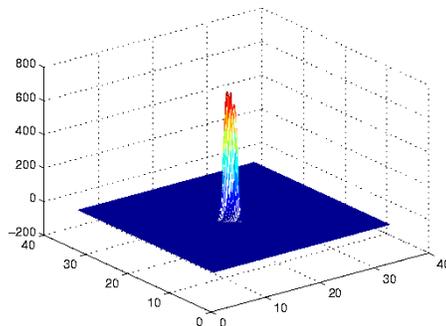


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

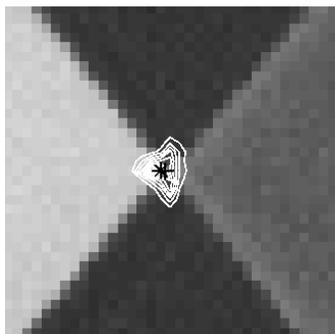
Figura 123: Esquina T . Operador de Förstner aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por Förstner y el + representa la esquina propuesta.



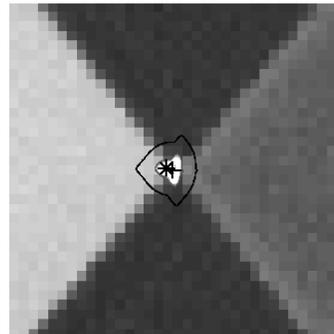
(a) Gráfica generada por el detector de Förstner aplicado a la imagen



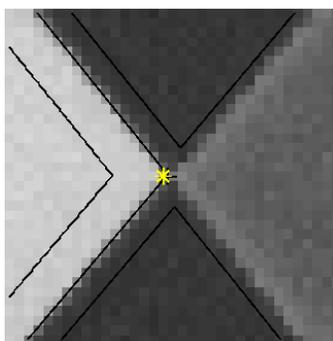
(b) Gráfica generada por el detector de Förstner aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de Förstner operado en la imagen

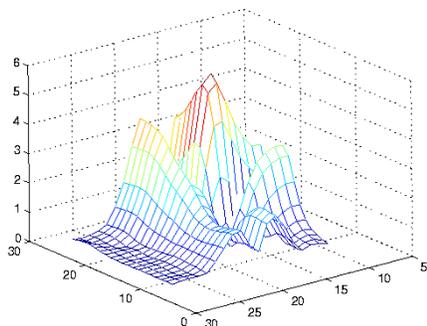


(d) Curvas de nivel del detector de Förstner operado en el modelo

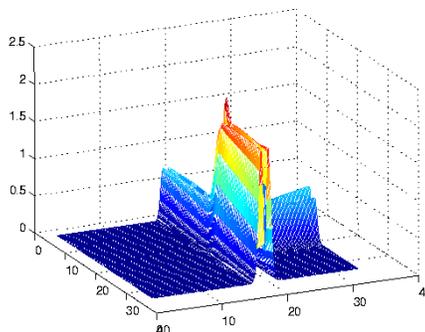


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

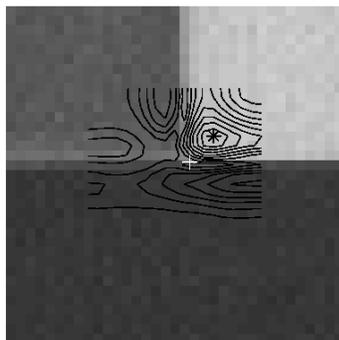
Figura 124: Esquina X . Operador de Förstner aplicado a la imagen y a su modelo. El $*$ representa la esquina detectada por Förstner y el $+$ representa la esquina propuesta.



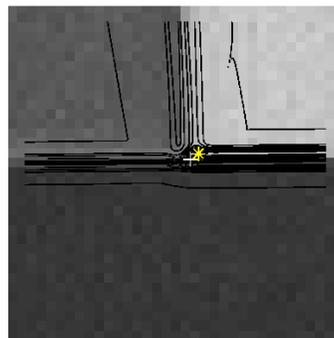
(a) Gráfica generada por el detector de IPGP1 aplicado a la imagen



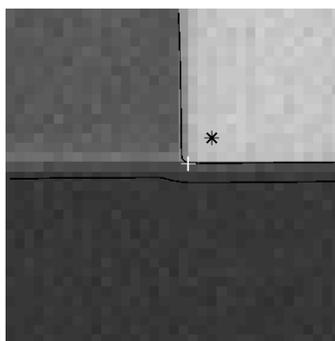
(b) Gráfica generada por el detector de IPGP1 aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de IPGP1 operado en la imagen

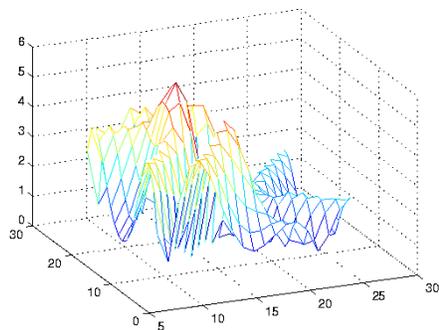


(d) Curvas de nivel del detector de IPGP1 operado en el modelo

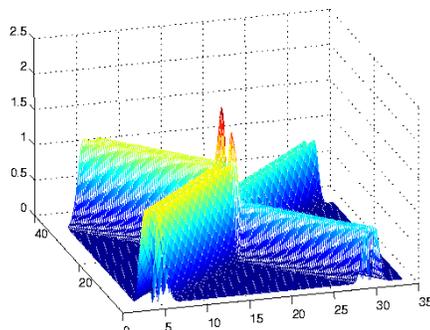


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

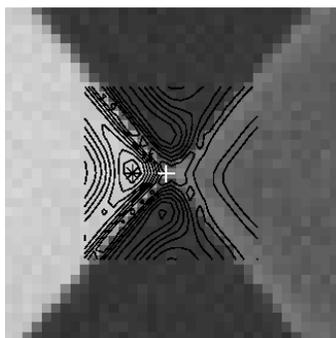
Figura 125: Esquina T . Operador IPGP1 aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por IPGP1 y el + representa la esquina propuesta.



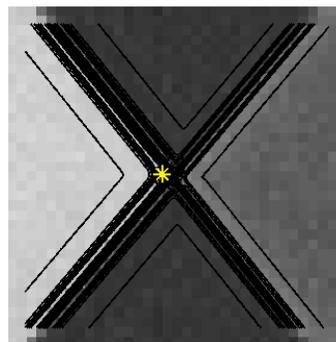
(a) Gráfica generada por el detector de IPGP1 aplicado a la imagen



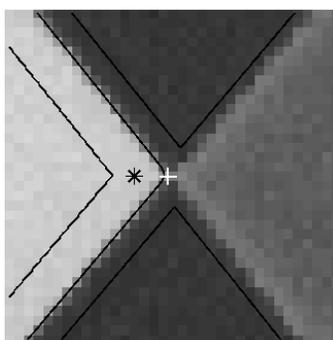
(b) Gráfica generada por el detector de IPGP1 aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de IPGP1 operado en la imagen

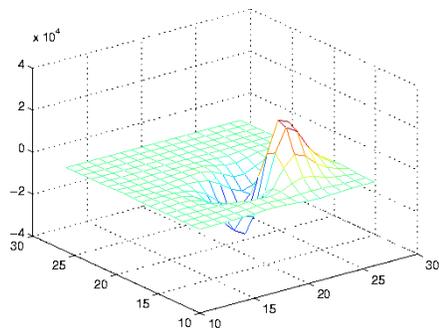


(d) Curvas de nivel del detector de IPGP1 operado en el modelo

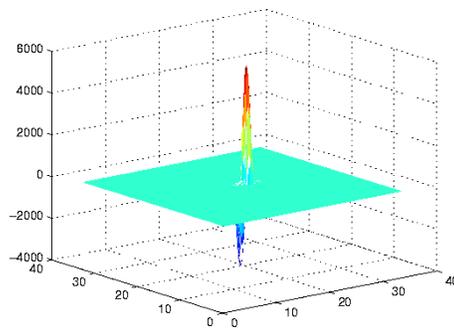


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

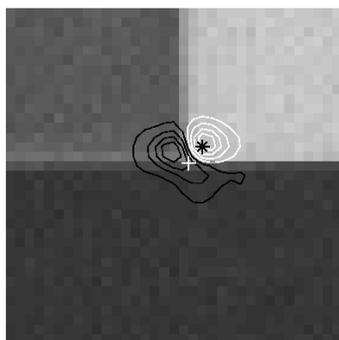
Figura 126: Esquina X . Operador IPGP1 aplicado a la imagen y a su modelo. El $*$ representa la esquina detectada por IPGP1 y el $+$ representa la esquina propuesta.



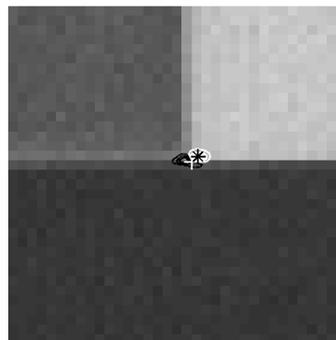
(a) Gráfica generada por el detector de IPGP2 aplicado a la imagen



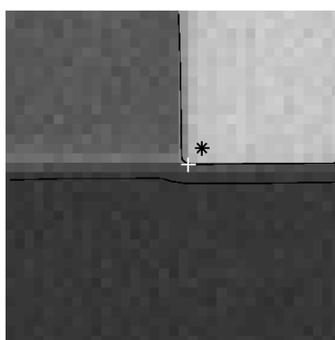
(b) Gráfica generada por el detector de IPGP2 aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de IPGP1 operado en la imagen

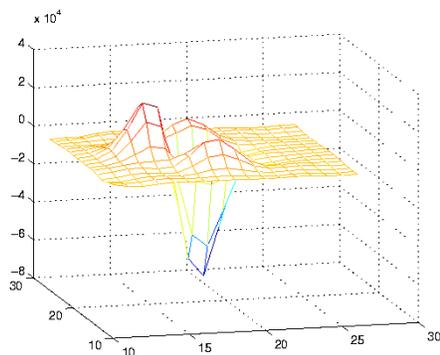


(d) Curvas de nivel del detector de IPGP2 operado en el modelo

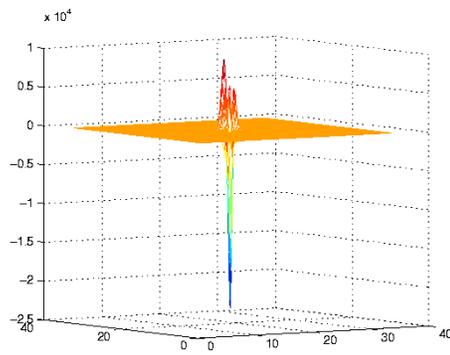


(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

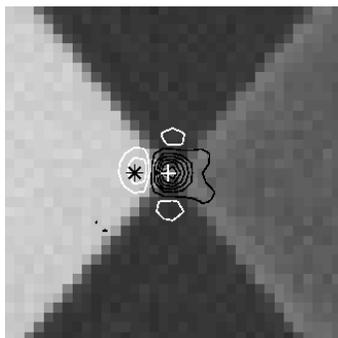
Figura 127: Esquina T . Operador IPGP2 aplicado a la imagen y a su modelo. El * representa la esquina detectada por IPGP2 y el + representa la esquina propuesta.



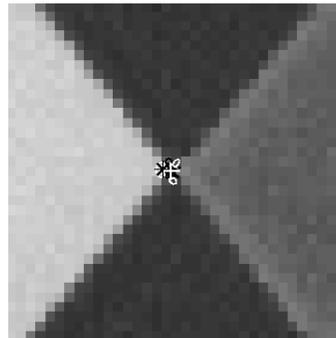
(a) Gráfica generada por el detector de IPGP2 aplicado a la imagen



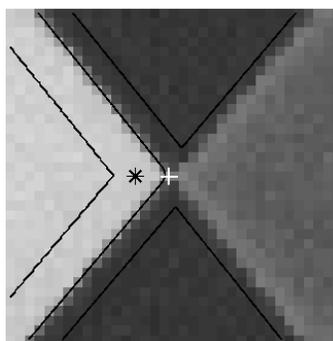
(b) Gráfica generada por el detector de IPGP2 aplicado al modelo



(c) Curvas de nivel del detector de IPGP2 operado en la imagen



(d) Curvas de nivel del detector de IPGP2 operado en el modelo



(e) Curvas de nivel del modelo sobre la imagen

Figura 128: Esquina X . Operador IPGP2 aplicado a la imagen y a su modelo. El $*$ representa la esquina detectada por IPGP2 y el $+$ representa la esquina propuesta.

V.3 Resultados Experimentales del detector paramétrico de blancos retro-reflejantes

En el laboratorio de EvoVision (*Evolutionary Vision*) ubicado en el departamento de Ciencias de la Computación, se cuenta con una mira de calibración de marca *AICON 3D Systems GmbH*. Esta mira implementa el uso de blancos retro-reflejantes y blancos retro-reflejantes Codificados y es usada para la experimentación práctica del modelo propuesto en el capítulo III. La Figura 129 muestra las imágenes digitales de prueba utilizadas en el presente capítulo. Estas imágenes fueron elegidas por presentar diferentes distorsiones en los blancos retro-reflejantes como el difuminado y la degeneración de la forma circular a elipses. Las imágenes fueron capturadas por una cámara digital PULNIX 9701d con una resolución de 768×484 píxeles y celdas fotosensibles de tamaño $11.6\mu m \times 13.6\mu m$.

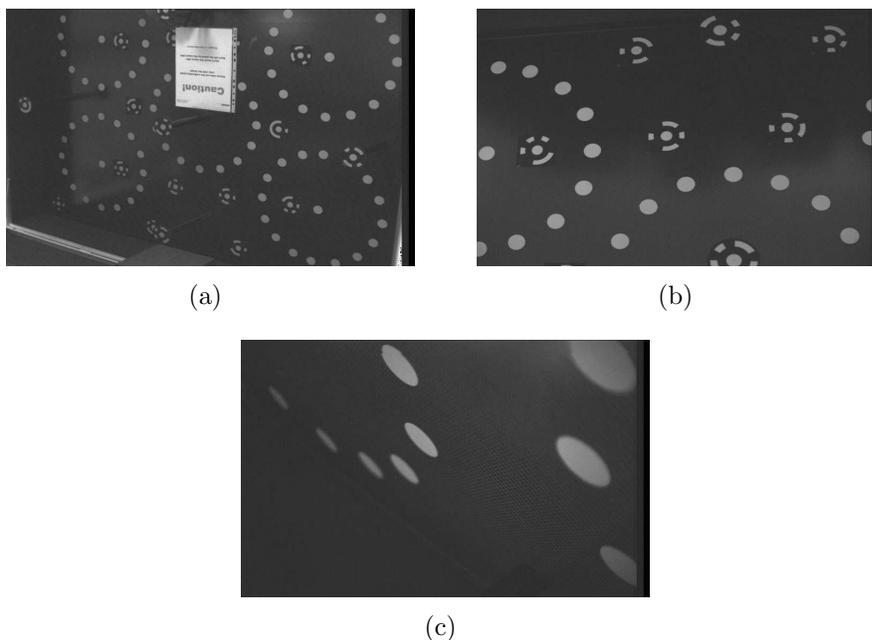


Figura 129: Imágenes digitales de la mira de calibración.

En este caso se han seleccionado tres imágenes de blancos retro-reflejantes (ver Figura 130). Estos han sido elegidos por las distorsiones presentadas en cada uno de ellos. La Figura 130.a muestra una imagen de 25×25 píxeles en la cual se encuentra un blanco retro-reflejante típico (BR_1). La Figura 130.b muestra un blanco retro-reflejante a mayor escala (BR_2), en este caso abarca una región de 41×41 píxeles. La Figura 130.c muestra un blanco retro-reflejante degenerado a una elipse y con un alto grado de difuminado (BR_3), la región es de 73×73 píxeles. Las Figuras 130.d, 130.e y 130.f muestran las gráficas de la posición de cada pixel contra su respectivo valor en gris de cada imagen, respectivamente. Los modelos de cada imagen se muestran en las Figuras 130.g, 130.h y 130.i, estas exponen las gráficas de la posición de cada pixel contra su respectivo valor en gris de cada modelo. Una mejor comparación visual se muestran en las Figuras 130.j, 130.k y 130.l, donde el modelo se muestrea en cada unidad para construir una imagen artificial.

Cabe mencionar que experimentalmente, el algoritmo evolutivo utilizado para el ajuste de datos tuvo mejor desempeño que la heurística de downhill simplex. En este caso el algoritmo downhill simplex se mantenía en mínimos locales. Mientras que el algoritmo evolutivo alcanzaba un óptimo a través de la exploración profunda (dada por un porcentaje de cruzamiento alto) de cada mínimo. Los parámetros típicos por el algoritmo evolutivo fueron los siguientes: tamaño de la población 60 individuos, probabilidad de cruzamiento 95%, probabilidad de mutación 3%, probabilidad de convergencia 60%, número máximo de generaciones 3000 y un factor de tolerancia del 0.002 (ver sección IV.3.2).

La Tabla XXVII lista los parámetros que obtuvo el algoritmo de optimización para modelar los blancos retro-reflejantes BR_1 , BR_2 y BR_3 . De esta forma sus respectivos modelos son llamados como MBR_1 , MBR_2 y MBR_3 .

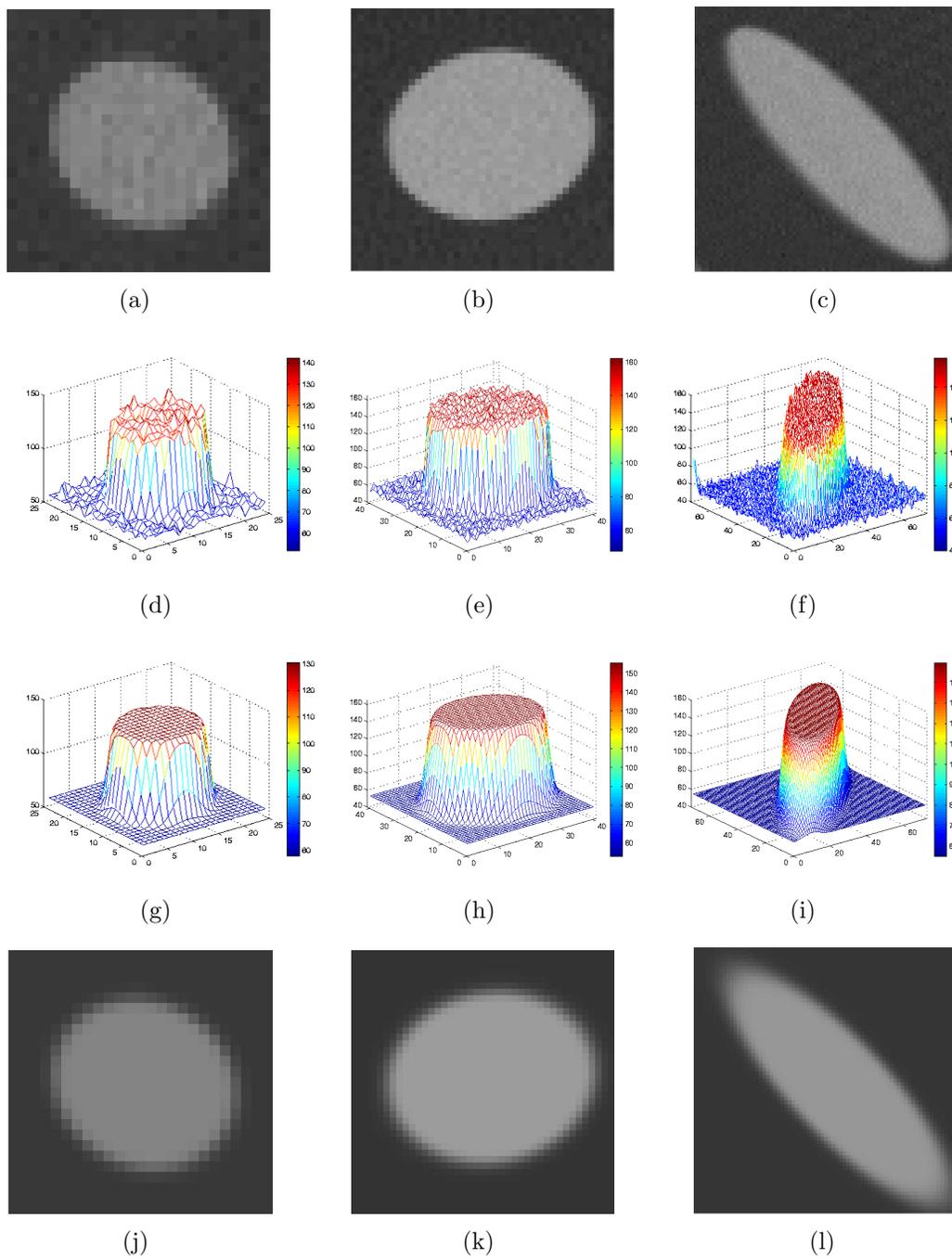


Figura 130: Comparación de los blancos retro-reflejantes en estudio y sus modelos.

Finalmente la Figura 131 muestra las Figuras de BR_1 , BR_2 y BR_3 en las cuales se sobreponen las curvas de nivel de sus respectivos modelos. Nótese que en este caso el modelo delimita el área donde la imagen sufre una degradación. Cabe mencionar que en el caso de BR_3 sufre una degradación mayor en los extremos de la elipse, la cual es también emulada por el modelo.

Tabla XXVII: Parámetros de los modelos MBR_1 , MBR_2 y MBR_3

	r_1	r_2	h	k	θ	σ	A	B
MBR_1	9.07	7.98	0.38	-0.22	-0.51	0.10	130.95	57.18
MBR_2	13.45	16.53	1.34	0.68	-1.38	0.09	156.35	52.18
MBR_3	14.64	47.36	3.40	-1.66	0.75	0.18	150.38	54.26

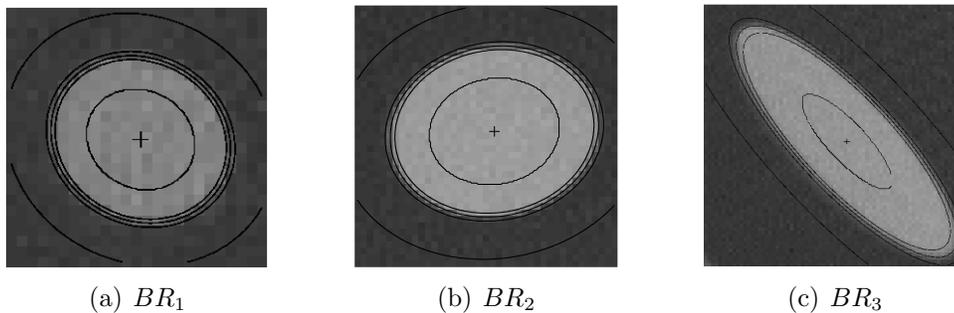


Figura 131: Curvas de nivel de los modelos de los blancos retro-reflectivos en estudio sobre sus respectivas imágenes.

V.4 Conclusiones

En este capítulo se han presentado los resultados del ajuste logrado por las heurísticas, presentadas en el capítulo III. Lo anterior ha permitido comparar los modelos propuestos contra una imagen real, así como en el caso del detector de esquinas contra otras propuestas en el estado del arte. De esta forma podemos concluir en el caso del detector paramétrico de esquinas múltiples que el punto de esquina ubicado a partir del criterio propuesto; no sufre un desplazamiento hacia la región de mayor cambio en la intensidad, como lo presentado por los detectores analizados. Lo anterior se cumple incluso al aplicar dichos criterios al modelo propuesto.

En el caso del detector paramétrico de blancos retro-reflejantes, se ha propuesto un modelo totalmente nuevo, capaz de emular aspectos físicos como el difuminado y la degeneración de blancos retro-reflejantes circulares en elipses, proporcionando la capacidad de localizar el centro de blancos retro-reflejante a un nivel subpixel. Este detector se ha probado en imágenes reales obteniendo resultados satisfactorios.

Cabe mencionar que durante la experimentación los mejores resultados de ajuste se obtuvieron al utilizar un algoritmo evolutivo, debido a su capacidad para salir de mínimos locales.

Capítulo VI

Conclusiones y trabajo futuro

Durante el presente trabajo se propone un nuevo detector paramétrico de esquinas múltiples y un detector paramétrico de blancos retro-reflejantes, los cuales son capaces de ubicar a nivel sub-píxel el punto de esquina y el centro de un blanco retro-reflejante respectivamente. Lo anterior cumple con los objetivos propuestos en esta tesis.

Para lograr lo anterior fue necesario proponer un nuevo modelo de esquinas múltiples y blancos reflejantes. En el primer caso, el modelo de esquinas múltiples fue basado en la función de borde unitario (FUB) propuesto por Olague y Hernández (2002), ya que a partir del producto de dos FUB se construye el modelo de una esquina tipo L. A partir de una combinación lineal de esquinas tipo L se determina una forma metódica para construir esquinas múltiples. El concepto anterior da pie a proponer el criterio de ubicación del punto de esquina. El cual, define al punto de esquina, como aquel que se ubica en el centroide de los puntos esquina de cada esquina tipo L que construye a una esquina múltiple. Donde el punto de esquina en una esquina tipo L se ubica sobre la curva de nivel que cumple con $FUE = 0.5$ y satisface la mínima distancia Euclidiana de este punto a la intersección de las asíntotas de los bordes.

Para el modelado de un blanco retro-reflejante circular se propone una función totalmente novedosa y capaz de modelar los diferentes efectos que se presentan en la imagen de un blanco retro-reflejante, como lo son: la distorsión de la forma circular a una elipse, el difuminado producto de un mal enfoque o una mala iluminación de la

escena entre otros.

En ambos casos se emulan las características físicas como lo son: difuminado y amplitud. Además de adaptarse a las características geométricas que presentan las esquinas múltiples y los blancos retro-reflejantes como lo son: orientación, rotación y traslación. En el caso de las esquinas múltiples se modela el ángulo de apertura entre los bordes como un parámetro implícito. En los blancos retro-reflejantes un parámetro explícito es la ubicación del centro. Cabe destacar que en ambos casos las expresiones son continuas sobre \mathbb{R}^2 y no es necesario la convolución con algún filtro Gaussiano a fin de modelar el efecto de difuminado.

Una parte fundamental del presente trabajo fue el ajuste de datos presentados por la imagen contra el modelo propuesto. Este problema fue resuelto como una optimización multidimensional. Lo que llevó a proponer una heurística para realizar una optimización global en conjunto con un proceso determinístico, para obtener los óptimos locales. En este caso la heurística que tuvo mejor desempeño fue un Algoritmo Evolutivo, ya que combina dos características principales, una exploración a profundidad, así como la posibilidad de explorar todo el espacio de búsqueda. Lo anterior es conveniente para la solución del problema por sus múltiples mínimos locales. Por otro lado, utilizar un proceso determinístico como parte de la exploración local asegura la convergencia a un óptimo local en pocas iteraciones, acelerando el proceso de búsqueda.

Todos los elementos anteriores fueron implementados e integrados en un sistema de bibliotecas escritas en lenguaje C. Lo anterior facilitó su uso dentro del ambiente de VXL, que es un software especializado en procesos de visión por computadora. De esta forma se obtuvieron resultados experimentales y fue posible la comparación con otras

metodologías en el estado del arte.

Las principales ventajas de proponer un modelo paramétrico es la caracterización, en este caso de las esquinas y los blancos retro-reflejantes. Lo anterior ofrece la ventaja de ubicar con una precisión a nivel sub-píxel el punto de esquina y el centro del blanco retro-reflejante. En el caso de las esquinas, representa un ventaja significativa con respecto a los métodos basados en intensidad; ya que estos desplazan el punto de esquina hacia la región de mayor cambio en el gradiente. Esta proposición se ve reforzada con la experimentación realizada en este trabajo.

Para el modelado de los blancos retro-reflejantes se propone una función diferente a las propuestas en la bibliografía, como lo son la distribución Gaussiana y la función Sinc. En ambos casos ninguno modela del todo el comportamiento natural de un blanco retro-reflejante circular. Ya que la primera no puede modelar blancos que abarquen una región extensa de la imagen, debido a la naturaleza de la función, además de ser necesario un proceso de difuminado previo, para poder utilizar este método. Por otro lado, la función Sinc no decae lo suficientemente rápido, lo cual es una característica desfavorable. De esta forma, esta nueva función es capaz de modelar blancos retro-reflejantes que abarcan una gran región de la imagen, así como tomar en cuenta efectos como el difuminado. Lo anterior se logra justificar de forma experimental.

Debido a lo anterior, se puede decir que un trabajo futuro consiste en optimizar el tiempo de búsqueda de la mejor solución. Así como desarrollar implementaciones que utilicen ambos detectores en tareas de alto nivel como son la reconstrucción 3D de una escena, la calibración de cámaras y medición precisa de un objeto entre otras.

Bibliografía

- Bäck, T. 1994. "Selective pressure in evolutionary algorithms: a characterization of selection mechanisms." En: "In Proc. of the first IEEE Conference on Evolutionary Computation". Orlando, FL, USA. Junio 27-29, 57-62 p.
- Baker, S. y S. Nayar 1998. "Parametric feature detection". *International Journal of Computer Vision*, 27(1):27-50 p.
- Beaudet, P. 1978. "Rotationally invariant image operators." En: "Proc. Of the International Conference on Pattern Recognition." Noviembre 7-10, Kyoto, Japan, 579-583 p.
- Chen, J. y T. Clarke 1992. "The automatic recognition, location, and labelling of targets in digital photogrammetric engineering measurement". En: "ISPRS Conference". Washington, DC, USA. Agosto 2-14, 686-693 p.
- Coe, D., J. B. Fallon, R. L. West, y A. L. Abbott 1995. "Finding the center: Using incidence to recover geometric features from single, monocular views". En: "The Workshop on Geometrical Modeling and Invariants for Computer Vision". Xi'an China. 202-208 p.
- Darwin, C. 1859. "On the origin of species by means of natural selection". Murray, London, primera edición. 459 p.
- Deriche, R. 1993. "Recursively implementing the gaussian and its derivatives". Reporte técnico, Institut National de Recherche en Informatique et Automatique. Tech Report, TR-1893.
- Deriche, R. y T. Blazka 1993. "Recovering and characterizing image features using an efficient model based approach." En: "Proc. of the Conference on Computer Vision and Pattern Recognition." New York. Junio 15-17, 530-535 p.

- Deriche, R. y G. Giraudon 1993. "A computational approach for corner and vertex detection.". *International Journal of Computer Vision.*, 2(10):101-124 p.
- Dreschler, L. y H. Nagel 1982. "On the selection of critical points and local curvature extrema of region boundaries for interframe matching.". En: "In Proc. Of the International conference on Pattern Recognition.". Octubre 19-22, Munich, Germany, 542-544 p.
- Fiala, M. 2005. "Artag, a fiducial marker system using digital techniques". En: "IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'05)IEEE". San Diego, CA, USA. Junio 20-25, 590-596 p.
- Fogel, L., A. Owens, y M. Walsh 1966. "Artificial intelligence through simulated evolution.". John Wiley & Sons, Inc., New York. 459 p.
- Förstner, W. y E. Gülch 1987. "A fast operator for detection and precise location of distinct points, corners and centres of circular features". En: "In Proc. ISPRS Intercommission Conference on Fast Processing of Photogrammetric Data". Junio 2-4, Interlaken, Switzerland, 281-305 p.
- Gen M., C. R. 2000. "Genetic algorithms and engineering optimization.". John Wiley & Sons, Inc., New York. 512 p.
- Gonzalez, R. y R. Woods 2002. "Digital image processing". Prentice Hall, Inc., Saddle River, New Jersey, second edition. 793 p.
- Harris, C. J. y M. Stephens 1988. "A combined corner and edge detector". En: "4th Alvey Vision Conference". Agosto 31-Septiembre 2, Manchester, UK, 147-151 p.
- Hattori, S., K. Akimoto, C. Fraser, y H. Imoto 2002. "Automated procedures with coded targets in industrial vision metrology". *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, 68:441-446 p.
- Hernández Valencia, B. 2002. "Un nuevo detector sub-píxel paramétrico de esquinas múltiples, empleando técnicas de optimización tradicionales y cómputo evolutivo".

- Tesis de Maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Ensenada, Baja California. 254 pp.
- Ho, C. T. y L. H. Chen 1995. "A fast ellipse/circle detector using geometric symmetry." . *Pattern Recognition*, 28:117-124 p.
- Holland, J. 1992. "Adaptation in natural and artificial systems." . University of Michigan Press, Ann Arbor. 211 p.
- Jansa, J., Y. Huang, y J. C. Trinder 1993. "Problems of target location and camera orientation in digital close-range photogrammetric". En: "Videometrics II" . Boston, MA, USA. Septiembre 9-10, 151-161 p.
- Kitchen, L. y A. Rosenfeld 1982. "Gray level corner detection". *Pattern Recognition Letters*, 1(2):85-102 p.
- Koza, J. R. 1992. "Genetic programming: On the programming of computers by means of natural selection" . MIT press, Cambridge, MA. USA. 840 p.
- Lindeberg, T. 1993. "Discrete derivative approximations with scale-space properties: A basis for low-level feature extraction". *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 3(4):349-376 p.
- Medioni, G. y Y. Yasumoto 1987. "Corner detection and curve representation using cubic b-spline". *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 39:267-278 p.
- Michalewicz, Z. 1992. "Genetic algorithms + data structures = evolution programs" . Springer-Verlag, New York. 385 p.
- Moravec, H. 1977. "Towards automatic visual obstacle avoidance". *Proceedings of the 5th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 2:584 p.
- Olague, G. y B. Hernández 2002. "Flexible model-based multi-corner detector for accurate measurements and recognition." . En: "Proc. Of the International Conference on Pattern Recognition." . Quebec, Canada. Agosto 11-15, 578-583 p.

- Olague, G. y B. Hernández 2005. "A new accurate and flexible model based multi-corner detector for measurement and recognition". *Pattern Recognition Letters*, 26(1):27-41 p.
- Olague, G. y R. Mohr 2001. "Optimal camera placement for accurate reconstruction.". *Pattern Recognition*, 35(4):927-944 p.
- Press, W., S. Teukolsky, W. Vetterling, y B. Flannery 1994. "Numerical recipes in c". Cambridge University Press, 40 West 20th Street, New York, second edition. 994 p.
- Rechenberg, I. 1973. "Evolutiostrategie: Optimieruung technischer systeme nach prinzipien der biologischen evolution.". Frommann-Holzboog, Stuttgart, Germany. 525 p.
- Rohr, K. 1992. "Recognizing corners by fitting parametric models.". *International Journal of Computer Vision*, 9(3):213-230 p.
- Rosin, P. 1996. "Augmenting corner descriptors.". *Graphical Models and Image Processing*, 58(3):286-294 p.
- Salomon, R. 1998. "Evolutionary algoritms and gradient search: Similarities and differences.". *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2(2):45-55 p.
- Schmid, C., R. Mohr, y C. Bauckhage 2000. "Evaluation of interest point detectors". *International Journal of Computer Vision*, 2(37):151-172 p.
- Schwefel, H. P. 1995. "Evolution and optimum seekin". John Wiley & Sons, Inc. 495 p.
- Shortis, M., T. A. Clarke, y T. Short 1994. "A comparison of some techniques for the subpixel location of discrete target images". En: "Videometrics III". Boston, MA, USA. Noviembre 10-31, 239-250 p.
- Shortis, M. R., J. W. Seager, E. S. Harvey, y Robson 2003. "Automatic recognition of coded targets based on a hough transform and segment matching.". En: "Proceedings Videometrics VII". Santa Clara CA. Enero 21-22, 372-375 p.

- Sohn, K., J. Kim, y W. Alexander 1998. "A mean field annealing approach to robust corner detection". *IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics-Part B*, 28(1):82-90 p.
- Stoer, J. y R. Bulirsch 1980. "Introduction to numerical analysis.". Springer-Verlag, New York, first edition. 660 p.
- Trinder, J. C. 1989. "Precision of digital target location.". *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 55(6):883-886 p.
- Trujillo, L. y G. Olague 2006. "Synthesis of interest point detectors through genetic programming". En: "Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO)". Seattle WA USA. Julio 8-12, 887-894 p.
- Tsai, D., H. Hou, y H. Su 1999. "Boundary-base corner detection using eigenvalues of covariance matrices". *Pattern Recognition Letters*, 20:31-40 p.
- Valkenburg, R. J., A. M. McIvor, y P. W. Power 1994. "An evaluation of subpixel feature localisation methods for precision measurement". En: "Videometrics III". Boston, MA, USA. Noviembre 10-31, 229-238 p.
- van Vliet, L., I. Young, y P. W. Verbeek 1998. "Recursive gaussian derivative filters". En: Jain, A., S. Venkatesh, y B. Lovell, editores, "International Conference on Pattern Recognition (ICPR98)". Brisbane, Australia, IEEE Computer Society Press. Agosto 17-20, 509-514 p.
- Vandenberghe, L. y S. P. Boyd 2004. "Convex optimization". Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge, CB2 2RU, UK, first edition. 730 p.
- Wang, H. y M. Brady 1995. "Real-time corner detection algorithms for motion estimation.". *Image and Vision Computing*, 13(9):695-703 p.
- Y.Ma, S. Soatto, J. Kosecká, y S. Shankar 2004. "An invitation to 3-d vision.". Springer., New York, primera edition. 526 p.

- Yokono, J. y T. Poggio 2004. "Oriented filters for object recognition: an empirical study". En: "International Conference on Automatic Face and Gesture Recognition (FG2004)". Seoul, Korea, IEEE. Mayo 17-19, 755-760 p.
- Zheng, Z., H. Wang, y E. Teoh 1999. "Analysis of gray level corner detection". Pattern Recognition Letters, 20:149-162 p.
- Zhou, H. B. 1990. "Object-points detection in a photogrammetric test field". En: "Close-Range Photogrammetry Meets Machine Vision, SPIE Proceedings". Zurich, Suiza. Septiembre 3-7, 1227-1233 p.