

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA

DECAIMIENTO DE VÓRTICES BAROTRÓPICOS

TESIS
MAESTRÍA EN CIENCIAS

RIGOBERTO FRANCISCO GARCÍA SÁNCHEZ

Ensenada, Baja California, México, marzo de 1994.

RESUMEN de la tesis de Rigoberto Francisco García Sánchez presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en OCEANOGRAFIA FISICA. Ensenada, Baja California, México. Marzo 1994.

DECAIMIENTO DE VORTICES BAROTROPICOS.

Resumen aprobado por:

José Luis Ochoa de la Torre.
Dr. José Luis Ochoa de La Torre.

Se examina analíticamente el decaimiento por fricción de un vórtice oceánico barotrópico en una aproximación lineal, que también se aplica en un modelo de gravedad reducida. A partir de un análisis dimensional de las ecuaciones de Navier-Stokes, expresadas en coordenadas cilíndricas, para el flujo de un fluido homogéneo con simetría azimutal, relativo a un plano que rota con velocidad angular constante $\frac{1}{2}f$ (plano f), arribamos a un sistema que dicta la evolución del vórtice para un perfil inicial de velocidad azimutal arbitrario. A este sistema se llega a través de una expansión perturbativa de las ecuaciones adimensionales en base al número (pequeño) de Ekman.

Los efectos de fricción en el fondo se reducen a la especificación de la velocidad vertical del bombeo o succión de Ekman, que en el caso lineal es proporcional a la vorticidad del flujo en el interior (alejado de la capa de frontera). En el modelo de gravedad reducida, el bombeo de Ekman desaparece al permitir deslizamiento sin fricción sobre la capa inerte.

Además de la fricción del fondo, el sistema tiene tres parámetros que determinan la evolución, estos son: el número de Rossby (R_o), el número de Froude (F) y un parámetro que compara la escala de tiempo difusivo con la escala de tiempo de Ekman (α).

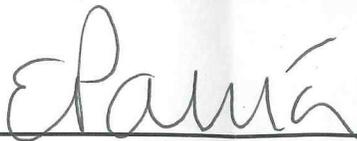
Como resultado principal, para el caso lineal ($R_o \ll 1$), se obtiene una solución general que incluye los otros parámetros y recupera los casos particulares tratados por varios autores.

Se muestran ejemplos con diferentes combinaciones de los parámetros libres α y F para un perfil de la superficie inicialmente gaussiano, y se discuten los efectos que ocasionan, cada uno de ellos, en el proceso de decaimiento.

TESIS DEFENDIDA POR: RIGOBERTO FRANCISCO GARCIA SANCHEZ
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITE:



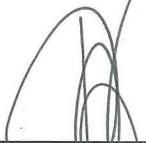
DR. JOSE LUIS OCHOA DE LA TORRE.- Director del Comité



DR. EDGAR GERARDO PAVIA LOPEZ.- Miembro del Comité



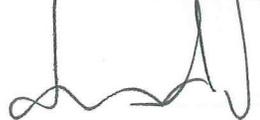
DR. FEDERICO GRAEF ZIEHL.- Miembro del Comité



DR. PEDRO RIPA.- Miembro del Comité



DRA. DIANA TENTORI SANTA CRUZ.- Miembro del Comité



DR. ANTOINE BADAN DANGON.- Jefe del Departamento de Oceanografía Física



DR. LUIS EDUARDO CALDERON AGUILERA.- Director de Estudios de Posgrado

3 DE MARZO DE 1994

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA

DIVISION DE OCEANOLOGIA
DEPARTAMENTO DE OCEANOGRAFIA FISICA

DECAIMIENTO DE VORTICES BAROTROPICOS

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de MAESTRO
EN CIENCIAS presenta:

RIGOBERTO FRANCISCO GARCIA SANCHEZ

Ensenada, Baja California, 3 de marzo de 1994

CONTENIDO

	PAGINA
I.- INTRODUCCION	1
II. FORMULACION DEL PROBLEMA	7
III. EVOLUCION LINEAL DEL VORTICE ($R_o \ll 1$)	17
III.1 Evolución debido a la viscosidad lateral	19
III.2 Evolución debido a los efectos de la superficie libre	21
III.3 Análisis general del decaimiento de un vórtice	22
IV.- EJEMPLO DE UN PERFIL INICIALMENTE GAUSSIANO	25
IV.1 Papel de la viscosidad lateral	28
IV.2 Papel de la superficie libre	32
V.- CONCLUSIONES	44
BIBLIOGRAFIA	47
APENDICE A. Adimensionalización de las ecuaciones	51

APENDICE B. Escala de tiempo de Ekman	55
B1. Problema en el interior	57
B2. Problema en la capa límite. Solución de Ekman	59
B3. Solución de la ecuación que dicta la evolución de la velocidad azimutal	64
APENDICE C. Modelo de gravedad reducida	68

LISTA DE FIGURAS

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
1	Diagrama esquemático de modelo bajo estudio.	10
2	a) Estado inicial de los campos $\eta_o(r)$, $v_o(r)$ y $\omega_o(r)$ y b) evolución de la velocidad azimutal debido solamente a la fricción del fondo ($\alpha = F = 0$).	26
3	Evolución de la velocidad azimutal con $F = 0$. a) para $\alpha = 0.1$ y b) para $\alpha = 1.0$. El ensanchamiento y el decaimiento del vórtice es más rápido, al incrementarse el valor del parámetro α .	30
4	a) Evolución de la velocidad azimutal extrema y b) posición donde se alcanza, para $\alpha = 0, 0.5$ y 1.0 .	31
5	Evolución de la velocidad azimutal para $\alpha = 0$ y a) $F = 1.0$ y b) $F = 10$. El decaimiento y ensanchamiento del vórtice es más rápido para valores menores de F .	33
6	Igual que la fig. 3 pero para a) $\alpha = 1$ ($F = 1$) y b) $\alpha = 0.1$ ($F = 10$).	36

LISTA DE FIGURAS (continuación)

7	Igual que la fig. 4 pero ahora con a) $\alpha = 1$ ($F = 1$) y b) $\alpha = 0.1$ ($F = 10$).	37
8	Importancia relativa de los mecanismos que modifican la vorticidad relativa del flujo, como una función del radio, para $F = 0$ y $\alpha = 0.1$. a) En el instante inicial, $t = 0$ y b) en $t = 1$.	38
9	Igual que la fig. 8 pero para $F = 10$ y $\alpha = 0.1$.	40
10	Términos de la ecuación de momento en la dirección radial en a) $t = 0$ y b) $t = 1$ para la solución con $F = 0$ y $\alpha = 0.1$.	42
11	Términos de la ecuación de momento en la dirección azimutal para la solución con $F = 0$ y $\alpha = 0.1$ en a) $t = 0$ y b) $t = 1$.	43
12	Diagrama esquemático del modelo de gravedad reducida.	71

LISTA DE TABLAS

<u>Tabla</u>		<u>Página</u>
I	Tabla I. Notación utilizada en el trabajo.	13

DECAIMIENTO DE VORTICES BAROTROPICOS

I. INTRODUCCION.

El desarrollo de técnicas observacionales y el incremento de mediciones en el océano, puso de manifiesto la presencia de una gran cantidad de estructuras vorticales o remolinos. Dada su relevancia en flujos geofísicos de gran escala, el estudio de éstas ha tenido un gran auge en los últimos 30 años.

Por medio de estudios analíticos, numéricos, de experimentos en laboratorio y observaciones directas, se han logrado importantes avances en el entendimiento de la dinámica general de vórtices. Los principales temas tratados hasta ahora son: su formación, su propagación, su estabilidad, el forzamiento producido por el viento, su intercambio de calor con la atmósfera, el efecto debido a la topografía, la disipación de su energía, el campo de velocidad circundante y su estructura vertical; Hopfinger y van Heijst (1993) presentan una revisión de trabajos realizados en algunas de esas direcciones.

Uno de los rasgos destacables de los remolinos oceánicos es su persistencia por largos períodos. Elliot (1982) estima tiempos típicos de decaimiento de un remolino cálido en el Golfo de México de un año. McWilliams (1985) señala que los remolinos del Mediterráneo tienen un mayor tiempo de vida y estima que son de dos a tres años. Joyce (1991) en una revisión de trabajos realizados en el sistema de la Corriente del Golfo, señala que el tiempo de vida de remolinos cálidos oscila entre dos y nueve meses.

En el plano β existen varios mecanismos que contribuyen a la persistencia y/o destrucción de un vórtice oceánico. Por ejemplo, Flierl (1977) muestra que en la aproximación lineal y en ausencia de fricción, un remolino decae rápidamente debido al efecto dispersivo del plano β ; contrario a esto, McWilliams y Flierl (1979), Smith y Reid (1982) muestran que al incluir los términos alineales, el vórtice se propaga como una unidad estable por largos períodos de tiempo, siendo la fricción, más que la dispersión, el mecanismo que gobierna la evolución y el decaimiento del vórtice; por último, Ripa (1989) señala que un ingrediente importante para explicar la longevidad de estos remolinos es que son estables a pequeñas perturbaciones.

Mecanismos muy complejos, como la interacción de un remolino con la costa, otros remolinos, corrientes anchas y angostas, entre otros, pueden causar una rápida evolución de la estructura de un remolino. En este trabajo se considera el decaimiento por procesos viscosos de un vórtice aislado, en el sentido planteado anteriormente.

En ausencia de variación latitudinal del parámetro de Coriolis ($\beta = 0$) y de difusión de masa, el único fenómeno físico que puede causar evolución de un remolino aislado es la fricción. Esta evolución, es una manifestación de la redistribución continua de su momento angular debido principalmente a procesos viscosos. Existen dos procesos viscosos diferentes: (i) difusión radial de vorticidad, que produce un cambio en la distribución de vorticidad en la escala de tiempo difusivo $T_h = L^2/\nu_h$, y (ii) cambios en la vorticidad debido al bombeo de Ekman en el fondo. La escala de tiempo asociada a este último mecanismo, llamada escala de tiempo de Ekman (Greenspan y Howard, 1963; Pedlosky, 1987), es $T_v = (2H^2/f\nu_v)^{1/2}$. Aquí L es la escala horizontal del vórtice, H la escala de profundidad, $f = 2\Omega$ el parámetro de Coriolis, con Ω la velocidad angular de la tierra, ν_h y ν_v son la

viscosidad horizontal y vertical del fluido, respectivamente. En un flujo de gran escala la difusión de momento, por turbulencia de menor escala, es diferente en la horizontal que en la vertical, por lo tanto, en modelos para estudios de fenómenos de gran escala, es común la utilización de coeficientes ν_h y ν_v diferentes. Estimaciones en el océano para ν_h están entre $10m^2/s$ y $10^4m^2/s$, mientras que para ν_v , son desde $10^{-4}m^2/s$ hasta $10^{-1}m^2/s$ (Pedlosky 1987).

La importancia relativa de ambos procesos está dada por la razón entre sus escalas de tiempo, que es igual a $\alpha = T_v/T_h = \lambda_h\lambda_v^{-1/2}$, con $\lambda_h = 2\nu_h/fL^2$ y $\lambda_v = 2\nu_v/fH^2$ los números de Ekman horizontal y vertical, respectivamente.

En condiciones de laboratorio, donde se logra evitar turbulencia y se reproducen importantes rasgos de interés para el estudio de la circulación oceánica de gran escala, se tiene: $\nu_h = \nu_v = \nu$ y $\alpha = (H/L)^2\lambda^{1/2}$, con $\lambda = 2\nu/fH^2$; como en estos experimentos $H/L = O(1)$ y $\lambda \ll 1$, la circulación de Ekman es el proceso dominante en la evolución del vórtice (Greenspan y Howard 1963; Hopfinger y van Heijst 1993; Maas 1993). En el laboratorio f es dos veces la velocidad angular del tanque que contiene al fluido.

Por otro lado, en el estudio de decaimiento de remolinos oceánicos el efecto de la capa de Ekman se desprecia y se considera que la difusión lateral es el proceso que domina en su evolución (Flierl y Mied 1985). Así, por ejemplo, Molinari (1970), Mied y Lindemann (1979) y Mied (1989), utilizan modelos de capas, despreciando el flujo vertical de momento entre ellas, con el objeto de determinar el papel de la fricción lateral en el decaimiento de vórtices. Un resultado consecuente en estos trabajos es que el tiempo de vida de los remolinos

depende del valor de la fricción lateral utilizado. Flierl y Mied (1985) presentan cálculos lineales para el decaimiento de la velocidad azimutal en un remolino anticiclónico, mostrando que ésta decae exponencialmente en el tiempo y retiene su forma inicial.

En este trabajo se examina analíticamente, en una aproximación lineal, la evolución de un vórtice barotrópico simétrico en el plano f . En tal aproximación, la velocidad azimutal inicial, dada por $v(r, 0) = v_o(r)$, está y permanece en balance geostrófico. El decaimiento del vórtice se produce por el efecto de la fricción del fondo, representado por una condición sobre la velocidad vertical en el tope de la capa de Ekman, por el efecto de la difusión lateral de momento en el interior (alejado de la capa de Ekman del fondo) y el efecto que ocasiona la anomalía del nivel superficial en la redistribución radial de volumen.

En el océano, un flujo se dice geostrófico cuando la fuerza de Coriolis está en balance con la fuerza debida al gradiente de presión, $f\hat{k} \times \vec{v} = -\nabla p/\rho$, con \hat{k} el vector unitario en la dirección del eje de rotación, p la presión y ρ la densidad. Para que un balance geostrófico exista realmente, es necesario que las fuerzas inerciales y viscosas sean despreciables, representadas por el número de Rossby $R_o = V/fL \ll 1$ y los números de Ekman horizontal y vertical, $\lambda_h \ll 1$ y $\lambda_v \ll 1$, respectivamente, donde V es una rapidez característica.

Para valores pequeños del número de Rossby ($R_o \ll 1$), la circulación en la capa de Ekman afecta la evolución del vórtice en la región interior actuando como fuente o sumidero de vorticidad. En este caso, la velocidad de bombeo/succión de Ekman, está relacionada linealmente a la vorticidad del fluido en el interior (ver apéndice B).

Si los efectos de fricción en el interior y la superficie libre no se toman en cuenta, la evolución del vórtice conducida sólo por la circulación de Ekman produce un decaimiento del perfil inicial en una escala de tiempo T_v y retiene su estructura espacial (Greenspan y Howard 1963). La inclusión de estos efectos produce una redistribución radial de vorticidad y modifica la escala de tiempo en la que se produce el decaimiento.

La importancia de la deformación de la superficie libre, en el proceso de decaimiento de un vórtice geostrófico, es medida por el número de Froude $F = f^2 L^2 / gH$ (donde g es la aceleración debido a la gravedad). Su presencia produce un ensanchamiento del perfil inicial de la velocidad azimutal y disminuye la rapidez del decaimiento.

La viscosidad en el interior, al igual que el efecto de la superficie libre, produce un ensanchamiento del perfil inicial de la velocidad azimutal, pero contrario a éste, aumenta la rapidez del decaimiento del vórtice.

Cada uno de los efectos mencionados anteriormente se han tratado de forma aislada; sin embargo, en este estudio se presenta una formulación y una solución del problema de decaimiento que los incluye a todos, y recupera como casos límites todos y cada uno de los que, hasta el presente, han sido publicados para el caso lineal.

La presentación de este trabajo se organiza en cinco capítulos. En el capítulo II se formula el problema y se arriba al sistema de ecuaciones que rige la evolución del vórtice. La solución para el caso lineal, y sus casos límites, se presentan en el capítulo III. En el capítulo IV se discute un ejemplo, enfatizando en los efectos que producen los parámetros por separado, y las conclusiones son dadas en el capítulo V. El análisis dimensional para el caso lineal es tratado en el apéndice A, las ecuaciones que rigen la evolución en el interior

y en la capa de frontera de Ekman, son dadas en el apéndice B, donde se regresan las ecuaciones a su forma dimensional y se presentan la ecuación de energía del sistema y la forma linealizada de la ecuación de vorticidad potencial. Para no interferir con el resto del trabajo, el modelo de gravedad reducida se trata por separado en el apéndice C. Este incluye un análisis dimensional de las ecuaciones en un modelo de esta naturaleza y la solución, en forma integral, del sistema lineal que resulta.

II. FORMULACION DEL PROBLEMA.

Las ecuaciones de movimiento, expresadas en coordenadas cilíndricas, para un flujo con simetría azimutal de un fluido homogéneo sobre un plano horizontal que rota con velocidad angular $\frac{1}{2}f$ constante (f : parámetro de Coriolis) alrededor del eje z , perpendicular al plano y en la dirección de la gravedad, son:

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{v^2}{r} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v_h D^2 u + v_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1a)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} + fu = v_h D^2 v + v_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (1b)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + v_h \nabla^2 w + v_v \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (1c)$$

y la ecuación de continuidad o de conservación de volumen es:

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) = 0. \quad (1d)$$

Los operadores que aparecen son:

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (2)$$

$$\nabla^2 := \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

y

$$D^2 := \nabla^2 - \frac{1}{r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \right].$$

En esta notación, u , v y w son las componentes de velocidad radial, azimutal y vertical, respectivamente, ρ es la densidad (uniforme) del fluido, g es la aceleración debida a la gravedad; ν_h y ν_v son los coeficientes de viscosidad turbulenta horizontal y vertical, respectivamente; r , z y t son las variables independientes que denotan las coordenadas radial, vertical y el tiempo, respectivamente. La coordenada vertical aumenta en dirección contraria a la aceleración de la gravedad y $z = 0$ coincide con el fondo plano. La presión, p , está dada por la suma de una presión hidrostática de referencia $\rho g(H - z)$, y la parte dependiente del tiempo y el espacio, asociada con la existencia del vórtice, $p'(r, z, t)$:

$$p(r, z, t) = \rho g(H - z) + p'(r, z, t). \quad (3)$$

El fluido está confinado en una región:

$$0 \leq r < \infty$$

$$0 \leq z \leq z_s = H + \eta(r, t) \quad (4)$$

donde $z_s(r, t)$ es la posición de la superficie libre con $\eta(r, t)$ su deformación por la presencia del vórtice ($z_s = H$, $\eta = 0$, en ausencia del vórtice). Un esquema del modelo se presenta en la figura 1.

Las ecuaciones se expresan sin dimensiones (ver apéndices A y B) con el uso de las escalas:

$$[u, v, w, p, \eta] = \left[\lambda_v^{1/2}, 1, \lambda_v^{1/2} \delta, \rho f L, \frac{fL}{g} \right] V$$

$$[r, z, t] = [L, H, 2f^{-1} \lambda_v^{-1/2}]$$

donde L y H son las escalas espaciales en la horizontal y la vertical, respectivamente, V es la escala de velocidad azimutal del vórtice, $\lambda_v = 2\nu_v / fH^2$ es el número de Ekman vertical y $\delta = H/L$ la razón de aspecto.

Se toman estas escalas ya que se supone (ver en el apéndice B) que para números de Ekman pequeños ($\lambda_v \ll 1$, que se considera en este estudio) la circulación es primordialmente azimutal, mientras que las circulaciones radial y vertical sólo entran como correcciones. El tiempo característico en que el decaimiento de un perfil inicial procede es prolongado, por un factor $\lambda_v^{-1/2}$, comparado con el período de rotación.

El sistema de ecuaciones (1) queda (usando los mismos símbolos para las variables pero ahora sin dimensiones de acuerdo al escalamiento) como:

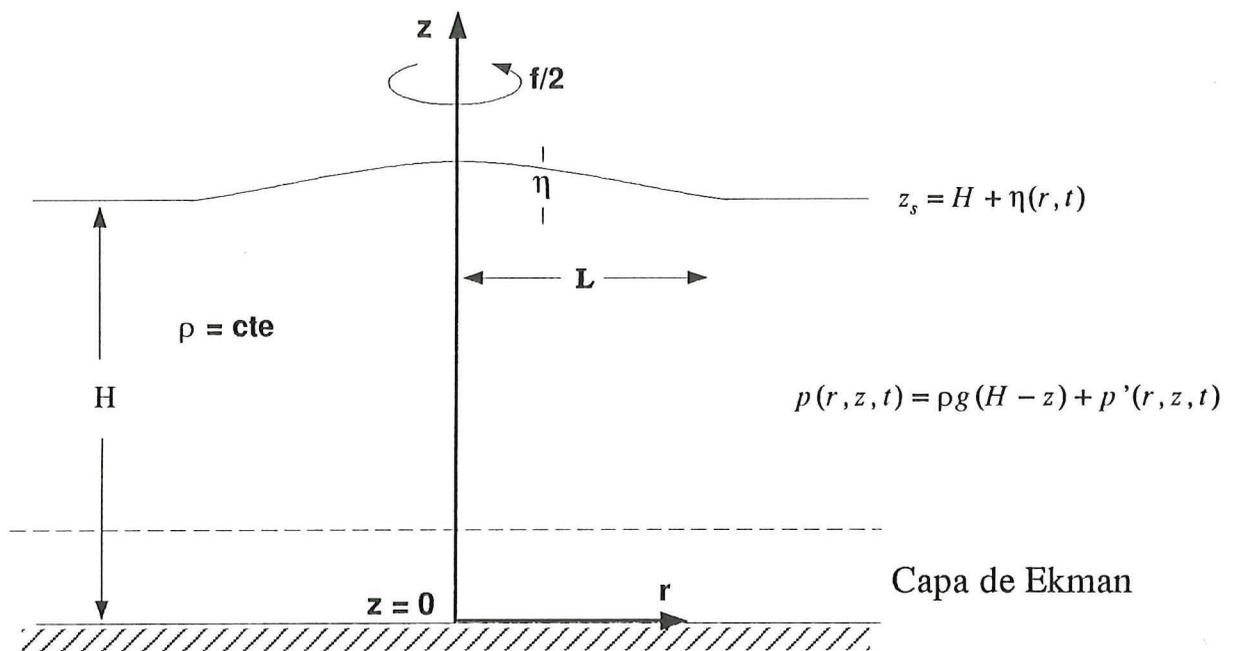


Fig. 1. Diagrama esquemático del modelo bajo estudio.

$$\lambda_v \left(\frac{\partial u}{\partial t} + 2R_o \left(u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u \right) - 2R_o \frac{v^2}{r} - 2v = -2 \frac{\partial p'}{\partial r} + \alpha \lambda_v D^2 u + \lambda_v^{3/2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (5a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2R_o \left(u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{u}{r} \right) v + 2u = \alpha D^2 v + \lambda_v^{1/2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (5b)$$

$$\lambda_v \delta^2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + 2R_o \left(u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) w \right) = -2 \frac{\partial p'}{\partial z} + \alpha \lambda_v \delta^2 \nabla^2 w + \lambda_v^{3/2} \delta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (5c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) = 0. \quad (5d)$$

La presión sin dimensiones es:

$$p = (1 - z + R_o F p') / (R_o F) \quad (6)$$

y el fluido está contenido en el dominio adimensional

$$0 \leq r < \infty$$

$$0 \leq z \leq z_s = 1 + R_o F \eta(r, t). \quad (7)$$

Los nuevos parámetros que aparecen son: el número de Rossby, $R_o = V/fL$, que determina la importancia de los términos alineales; el número de Froude $F = f^2 L^2 / gH$ que es una medida de la magnitud de la deformación de la superficie libre (Cederlof 1988); y el

parámetro α que mide la magnitud del efecto de la viscosidad horizontal en el interior y compara la escala de tiempo difusivo a la escala de tiempo de Ekman (ver introducción). En la Tabla I se presenta la notación utilizada en el trabajo.

En vista de que para casos de interés geofísico, $\lambda_v^{1/2} \ll 1$, se puede hacer una expansión perturbativa de las ecuaciones en términos de este parámetro. Aquí es suficiente tomar $\lambda_v = 0$ en (5) alejado de la capa de frontera, ya que muchos de los rasgos de interés aparecen a orden cero respecto a esta perturbación (Greenspan 1969; Kloosterziel y van Heijst 1992; Maas 1993). Así se obtiene para el interior:

$$R_o \frac{v^2}{r} + v = \frac{\partial p'}{\partial r} \quad (8a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2R_o \left(u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{u}{r} \right) v + 2u = \alpha \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v \quad (8b)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = 0 \quad (8c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) = 0. \quad (8d)$$

La ecuación (8c) representa el balance hidrostático, lo que indica que la presión es verticalmente uniforme, $p'(r, z, t) = \eta(r, t)$ y el campo de velocidad horizontal no varía con la profundidad, $\partial u / \partial z = \partial v / \partial z = 0$.

Tabla I. Notación utilizada en el trabajo.

Parámetros ambientales

f	parámetro de Coriolis
ρ	densidad del agua de mar
g	aceleración debida a la gravedad
H	profundidad del océano en ausencia del vórtice
L	escala horizontal del vórtice
V	escala para la velocidad azimutal
ν_h	coeficiente turbulento de viscosidad horizontal
ν_v	coeficiente turbulento de viscosidad vertical
w_E	bombeo de Ekman en el tope de la capa límite del fondo

Variables independientes

r	distancia radial
z	distancia vertical desde el fondo del océano
t	tiempo

Variables dependientes

u	velocidad radial
v	velocidad azimutal
w	velocidad vertical
p	presión
η	elevación de la superficie debido a la presencia del vórtice

Tabla I (continuación)

Operadores matemáticos

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}$$

$$D^2 = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r$$

Funciones especiales

$J_n(r)$ función de Bessel de primer tipo de orden n , $n = 0, 1$

Parámetros adimensionales

$R_o = V/fL$ número de Rossby

$F = f^2 L^2 / gH$ número de Froude

$\delta = H/L$ razón de aspecto

$\lambda_h = 2\nu_h / fL^2$ número de Ekman horizontal

$\lambda_v = 2\nu_v / fH^2$ número de Ekman vertical

$T_v = (2H^2 / f\nu_v)^{1/2}$ escala de tiempo de Ekman

$T_h = L^2 / \nu_h$ escala de tiempo difusivo

$\alpha = T_v / T_h = \lambda_h \lambda_v^{-1/2}$ razón entre la escala de tiempo de Ekman y la escala de tiempo difusivo

Para completar el problema se considera la capa de Ekman en el fondo, necesaria para satisfacer la condición de no deslizamiento del fluido en dicha frontera sólida. El efecto de

esta capa, que tiene un grosor adimensional $O(\lambda_v^{1/2})$, proporciona la velocidad del bombeo/succión de Ekman en su tope superior. La forma de determinar esta velocidad vertical válida para $R_o \ll 1$, está dada en el apéndice B, y es:

$$w_E = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} (rv). \quad (9)$$

La expresión (9) dice que la velocidad del bombeo/succión de Ekman es la mitad de la vorticidad, a orden cero, del fluido en el interior.

Con este resultado se puede integrar verticalmente la ecuación de continuidad (8d) utilizando (9) como condición en el fondo y la condición cinemática en superficie dada por:

$$w_s = \frac{1}{2} F \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} (1 + FR_o \eta). \quad (10)$$

Entonces, las ecuaciones que describen la evolución del vórtice debido a los efectos alineales, superficie libre y viscosidad en el interior, son:

$$R_o \frac{v^2}{r} + v = \frac{\partial \eta}{\partial r} \quad (11a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2u \left(\frac{R_o}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + 1 \right) = \alpha D^2 v \quad (11b)$$

$$F \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru(1 + FR_o \eta)) = 2w_E. \quad (11c)$$

La condición inicial preescrita, dada por $v(r,0) = v_0(r)$, está y permanece en balance ciclostrófico con el perfil de la superficie libre por (11a), pero en este trabajo se restringe el estudio al caso lineal ($R_o = 0$), por lo que el perfil inicial de velocidad está siempre en balance geostrófico.

Un caso clásico particular ocurre cuando los tres parámetros (R_o , F y α), que aparecen en el sistema (11), son muy pequeños. Bajo estas condiciones, la ecuación (11a) se reduce al balance geostrófico y las ecuaciones (11b) y (11c) se reducen a:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2u = 0$$

$$u = \frac{1}{2}v$$

donde se ha utilizado (9). En este caso la solución está dada por Greenspan y Howard (1963), a saber:

$$v(r, t) = v_0(r) \exp(-t).$$

En esta aproximación, el perfil inicial retiene su estructura espacial y decae con la escala de tiempo T_v .

La forma dimensional del sistema (11), su ecuación de energía y la forma linealizada de la vorticidad potencial, están dadas en el apéndice B.

III. EVOLUCION LINEAL DEL VORTICE ($R_o \ll 1$).

En este capítulo se considera la evolución de un vórtice cuando los efectos alineales son despreciables, pero se retienen los efectos del fondo, de la viscosidad en el interior y de la deformación de la superficie. Se obtiene una solución que recupera, como casos particulares, las planteadas por varios autores, que han considerado por separado cada uno de estos efectos. Al final del capítulo se realiza un análisis general del decaimiento de un vórtice geostrófico a partir de la ecuación de vorticidad.

La evolución del vórtice está dictada por las ecuaciones del sistema (11) tomando $R_o = 0$:

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial r} \quad (12a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2u = \alpha D^2 v \quad (12b)$$

$$F \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \quad (12c)$$

donde se ha utilizado (9). La última ecuación muestra que la conservación de masa es un balance entre los cambios de la elevación superficial, la divergencia de la circulación radial en el interior (los dos términos del lado izquierdo) y el bombeo de Ekman (el término del lado derecho). Además muestra que la presencia del bombeo o succión de Ekman en el tope de la capa de frontera del fondo induce una circulación radial, pero esta se puede compensar por el desplazamiento de la superficie libre. En el caso en que no hay la fricción del fondo, el movimiento de la superficie libre es el responsable de la existencia de la circulación

radial.

El sistema (12), que sólo contiene dos parámetros, α y F , se puede combinar para obtener una ecuación cerrada para la elevación de la superficie, η ; esto es, aplicando el operador $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r)$ a (12b) y sustituyendo en (12c), utilizando (12a), se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla^2 \eta - F \eta] = \alpha \nabla^4 \eta - \nabla^2 \eta. \quad (13a)$$

Si ahora se aplica el operador D^2 a (12b) y se sustituye el resultado de aplicar $\frac{\partial}{\partial r}$ a (12c), utilizando nuevamente (12a), se obtiene la ecuación que dicta la evolución de la velocidad azimutal, v :

$$\frac{\partial}{\partial t} [D^2 v - F v] = \alpha D^4 v - D^2 v. \quad (13b)$$

La solución de la ecuación diferencial que pronostica la evolución de la velocidad azimutal (13b), si su estado inicial está dado, $v(r, 0) = v_o(r)$, regular en el origen y decae a cero cuando $r \rightarrow \infty$, es:

$$v(r, t) = \int_0^{\omega} \hat{v}_o(k) J_1(kr) \exp\left[-\frac{k^2 + \alpha k^4}{k^2 + F} t\right] k dk \quad (14a)$$

donde

$$\hat{v}_o(k) = \int_0^{\omega} v_o(r) J_1(kr) r dr \quad (14b)$$

es la transformada de Fourier-Bessel del campo de velocidad azimutal inicial. $J_1(x)$ es la función de Bessel de primer tipo de orden 1. La forma en que se obtuvo esta solución está dada en la sección B3 del apéndice B.

De (12a), la elevación de la superficie evoluciona como:

$$\eta(r, t) = \int_0^{\infty} \hat{\eta}_o(k) J_0(kr) \exp\left[-\frac{k^2 + \alpha k^4}{k^2 + F} t\right] dk \quad (15a)$$

con

$$\hat{\eta}_o(k) = \int_0^{\infty} \eta_o(r) J_0(kr) dr. \quad (15b)$$

Esta solución, en presencia de los parámetros que aquí se consideran es la más general que se conoce, siendo el resultado más importante de este trabajo, y como se verá a continuación reproduce, como casos límites, las obtenidas por diferentes autores. Para ello se considera por separado cada parámetro y se utiliza indistintamente la ecuación que rige la evolución de la velocidad azimutal o la elevación de la superficie libre.

III.1 Evolución debido a la viscosidad lateral.

Si se desprecia el efecto de la superficie libre, el decaimiento de un vórtice simétrico está dado por el efecto viscoso del fondo, modificado por el efecto de la viscosidad lateral en el interior. Su evolución está dictada por (12) con $F=0$. La ecuación (12c) con $F = 0$ muestra que $u = \frac{1}{2}v$, que sustituida en (12b) produce:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = \alpha D^2 v. \quad (16a)$$

Haciendo $v = v'(r, t) \exp(-t)$, (16a) se reduce a una ecuación de difusión:

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = \alpha D^2 v', \quad (16b)$$

cuya solución, ampliamente tratada en libros de texto, es:

$$v'(r, t) = \int_0^{\infty} \hat{v}'_o(k) J_1(kr) \exp[-\alpha k^2 t] k dk \quad (17)$$

y es consistente con (14a), para $F = 0$:

$$v(r, t) = \int_0^{\infty} \hat{v}_o(k) J_1(kr) \exp[-(1 + \alpha k^2)t] k dk. \quad (18)$$

El efecto de la viscosidad lateral en el interior hace que el vórtice se ensanche, un resultado esperado con difusión, y que la rapidez del decaimiento aumente a medida que se incrementa el valor del parámetro α .

Entonces el decaimiento se debe a la difusión horizontal de momento y a la redistribución de éste por el flujo radial resultante. De (16a) vemos que un flujo radial alejándose del origen, unido a la difusión lateral de momento, debe aumentar la rapidez del decaimiento de la velocidad azimutal y un flujo radial hacia el origen, tiende a disminuir la razón de decaimiento de la velocidad azimutal, en oposición a la difusión lateral de momento.

III.2 Evolución debido a los efectos de la superficie libre.

En esta sección el efecto de la viscosidad en el interior no se considera, pero se retienen el bombeo de Ekman y la contribución, en la ecuación de continuidad, de la variación del nivel superficial ($F \neq 0$). La evolución de la superficie libre y de la velocidad azimutal, siguen de (13a) y (13b), cuyas soluciones son (15a) y (14a), respectivamente, tomando $\alpha = 0$.

La ecuación (13a) con $\alpha = 0$, aunque expresada en coordenadas cartesianas y con dimensiones, es la planteada por Gill (1982) para el decaimiento de un flujo geostrófico por la fricción del fondo. A modo de información, Gill la utiliza para determinar la escala de tiempo del decaimiento de una perturbación sinusoidal, cuando el número de onda es mayor o menor al radio de deformación.

Esta misma ecuación, fué derivada y resuelta por Cederlöf (1988), al estudiar el efecto de la superficie libre en el problema clásico de decaimiento, en un tanque con fondo parabólico (en equilibrio con la forma de la superficie libre) ; posteriormente Maas (1993) la resuelve para una condición inicial arbitraria (dada por la presencia del vórtice) y presenta a (15a) y (14a), con $\alpha = 0$, como la evolución de la superficie libre y de la velocidad azimutal, respectivamente, en un tanque de igual configuración, para un vórtice cuya escala horizontal es mucho menor que el radio del tanque.

Las mismas soluciones la obtuvieron Ou y Gordon (1986) en su estudio de decaimiento de remolinos en el mar de Weddell, donde domina la acción de la fricción producida por la capa de hielo en la superficie.

Como se verá en el ejemplo del siguiente capítulo y de las propias soluciones aquí presentadas, la presencia de una superficie libre deformable causa, al igual que el efecto viscoso, un ensanchamiento del perfil inicial del vórtice, pero al contrario del efecto viscoso horizontal, el tiempo de decaimiento aumenta al incrementar F su valor.

Es bueno señalar una de las principales restricciones para aplicar el modelo a condiciones oceánicas. El parámetro que mide la importancia de la deformación de la superficie libre, está definido como el cuadrado de la razón entre la escala horizontal del vórtice y el radio de deformación barotrópico, $F = (L/L_r)^2$, con $L_r = (gH)^{1/2}/f$. Para que este efecto sea significativo, se necesita $F \sim O(1)$; esto implica que la escala de longitud horizontal del vórtice sea del orden del radio de deformación barotrópico de Rossby (2000 km), siendo una escala excesiva en comparación a la observada en remolinos oceánicos en latitudes medias.

Una mejora a este problema se logra con un modelo de gravedad reducida, el cual es tratado en el apéndice C.

III. 3 Análisis general del decaimiento de un vórtice.

El decaimiento de un vórtice geostrofico, aunque afectado por la deformación de la superficie libre, se debe principalmente a la fricción. Su evolución se manifiesta en una continua redistribución de su vorticidad relativa y se observa claramente, si (13a) se expresa en términos de $\omega = (1/r)\partial/\partial r(rv) = \nabla^2\eta$. Así se obtiene que la ecuación que dicta la evolución de la vorticidad relativa es:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\omega + F \frac{\partial \eta}{\partial t} + \alpha \nabla^2 \omega \quad (19)$$

y muestra que su razón de cambio, el término del lado izquierdo, está determinada por el estiramiento de las líneas de vórtice debida tanto al bombeo o succión en la capa de Ekman como por el movimiento de la superficie libre (los dos primeros términos del lado derecho de la ecuación), y por la difusión lateral de vorticidad en el interior, el último término del lado derecho de (19).

En el caso clásico en que $\alpha = F = 0$, la ecuación (19) muestra que el decaimiento de la vorticidad relativa se debe exclusivamente al estiramiento de los tubos de vórtices por el bombeo de Ekman en la capa del fondo. En regiones donde la vorticidad relativa del fluido es positiva (negativa), la fricción en la capa del fondo ocasiona un bombeo (succión) de Ekman en el tope de esta capa, provocando así, la compresión (estiramiento) de los tubos de vórtices en el interior, lo que disminuye (aumenta) la vorticidad en el fluido.

Si $F = 0$, haciendo el cambio $\omega = \omega' \exp(-t)$, la ecuación (19) se reduce a

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \omega'. \quad (20)$$

Este resultado ya se obtuvo en una sección anterior, y muestra que la razón de cambio de la vorticidad relativa del flujo de un vórtice (pequeño, ya que $F \rightarrow 0$) se debe exclusivamente a la difusión de ésta, aumentando su razón de decaimiento para valores altos de α y disminuyéndola cuando éste toma valores pequeños.

Si ahora se toma $\alpha = 0$, pero la superficie libre es dinámicamente activa, es decir, cuando el número de Froude es distinto de cero, la ecuación (19) muestra que en regiones donde la vorticidad relativa del fluido es positiva (negativa), la compresión (estiramiento) de los tubos de vórtices, debido al bombeo (succión) de Ekman, están parcialmente compensados por el estiramiento (compresión) de los tubos de vórtices, debido al movimiento de la superficie libre. Esto disminuye la razón de decaimiento de la vorticidad en el fluido.

En el caso particular en que exista un balance entre el movimiento de la superficie libre y el bombeo de Ekman, esto es, la compresión (estiramiento) de los tubos de vórtices es nulo

$$F \frac{\partial \eta}{\partial t} = \omega \quad (21)$$

la evolución de la vorticidad relativa (19), toma nuevamente la forma de una ecuación de difusión, dada por (20).

IV. EJEMPLO DE UN PERFIL SUPERFICIAL INICIALMENTE GAUSSIANO.

Para clarificar los efectos que producen los parámetros considerados en el proceso de decaimiento, éstos se discuten de manera independiente a través de un ejemplo. Para ello, se considera que la forma inicial de la superficie corresponde a un perfil gaussiano:

$$\eta_o(r) = \exp(-r^2/2). \quad (22a)$$

La velocidad azimutal correspondiente es

$$v_o(r) = -r \exp(-r^2/2). \quad (22b)$$

La vorticidad inicial asociada al campo de velocidad azimutal inicial es

$$\omega_o(r) = (r^2 - 2) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right). \quad (22c)$$

Este tipo de perfil ha sido utilizado por varios autores para simular la forma de remolinos oceánicos (ver por ejemplo, McWilliams y Flierl 1979; Mied y Lindemann 1979; Ikeda 1981; Mied 1989) y dada su estructura simple y propiedades continuas, el vórtice gaussiano es frecuentemente utilizado para ajustar datos observados de velocidades de vórtices oceánicos o de laboratorio (Simpson et al 1984, Hopfinger y van Heijst 1993).

El vórtice consiste de un núcleo con vorticidad negativa, rodeado por un anillo de vorticidad positiva, como se observa en la figura 2a, donde se muestran los campos iniciales. De hecho,

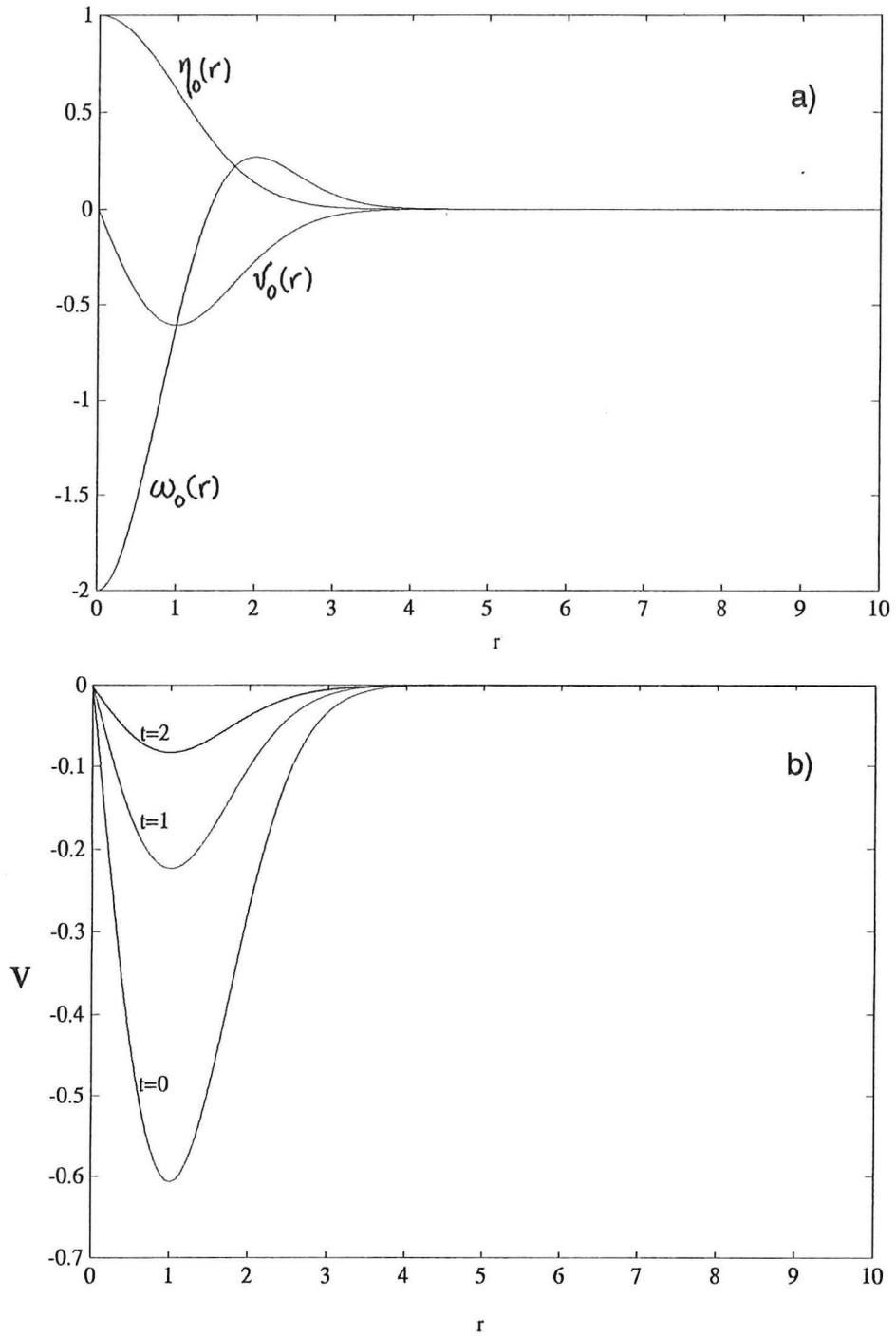


Fig. 2. a) Estado inicial de los campos $\eta_0(r)$, $v_0(r)$ y $\omega_0(r)$ y b) evolución de la velocidad azimutal debido solamente a la fricción del fondo ($\alpha = F = 0$).

se puede probar fácilmente que la vorticidad neta es cero: La integral de área de ω es cero, así que su circulación en distancias largas, $\sigma(r \rightarrow \infty)$, es también igual a cero, lo que implica que es un vórtice aislado.

La transformada de Fourier-Bessel (14b) de la velocidad azimutal inicial (22b) es

$$\hat{v}_\theta(k) = -k \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right). \quad (23)$$

Al sustituir en (14a) se obtiene la solución en forma integral para la evolución de un vórtice con esta velocidad azimutal inicial, a saber:

$$v(r, t) = - \int_0^\infty J_1(kr) k^2 \exp\left[-\frac{k^2}{2} - \frac{(k^2 + \alpha k^4)t}{k^2 + F}\right] dk \quad (24)$$

Se desconoce la solución de esta integral para un par de parámetros (α, F) arbitrarios. Algunos casos particulares, ya sean por la forma explícita de la integral o por integración numérica, serán presentados aquí para clarificar los efectos que producen cada uno de ellos en la evolución del vórtice.

IV. 1 Papel de la viscosidad lateral

Con el propósito de discutir los efectos que produce la difusión lateral de momento en el proceso de decaimiento, se supone que el efecto de la deformación de la superficie libre es despreciable.

Haciendo $F = 0$, la solución (24), después de calcular la integral, es:

$$v(r, t) = -\frac{r}{(1 + 2\alpha t)^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2(1 + 2\alpha t)}\right] \exp(-t). \quad (25a)$$

La vorticidad asociada a este campo de velocidad azimutal es:

$$\omega(r, t) = \frac{1}{(1 + 2\alpha t)^2} \left(\frac{r^2}{1 + 2\alpha t} - 2 \right) \exp\left[-\frac{r^2}{2(1 + 2\alpha t)}\right] \exp(-t) \quad (25b)$$

y la elevación de la superficie libre es dada por

$$\eta(r, t) = \frac{1}{1 + 2\alpha t} \exp\left[-\frac{r^2}{2(1 + 2\alpha t)}\right] \exp(-t). \quad (25c)$$

Nótese que el perfil inicial retiene su carácter gaussiano y que con $\alpha = 0$ se recupera el resultado de Greenspan y Howard (1963). Estos resultados se presentan en la figura 2b.

Con $\alpha = F = 0$, la dinámica lineal de Ekman predice un decaimiento puramente exponencial del flujo y la posición donde se alcanza la velocidad azimutal extrema (r_{ext}) se mantiene fija, sin embargo, la inclusión del flujo lateral de momento por difusión, lleva a una traslación de su posición de acuerdo a la fórmula:

$$r_{ext}(t) = (1 + 2\alpha t)^{1/2} \quad (26a)$$

y la amplitud de la velocidad azimutal extrema (v_{ext}), evoluciona en el tiempo de acuerdo a:

$$v_{ext}(t) = -\frac{1}{(1 + 2\alpha t)^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(1 + 2t)\right]. \quad (26b)$$

Entonces, como una corrección al decaimiento lineal de Ekman, la difusión provoca una migración de la velocidad azimutal extrema hacia afuera y su decaimiento aumenta a medida que aumenta el valor del parámetro α . Estos rasgos se muestran en la figura 3, donde se presentan los resultados de la evolución de la velocidad azimutal para $\alpha = 0.1$ y 1.0 . La forma en que evoluciona la velocidad azimutal extrema y el radio donde se alcanza se muestran en la figura 4 para $\alpha = 0, 0.5$ y 1.0 .

En ambas figuras (3 y 4) se observa que la razón de decaimiento es mayor en el inicio que para tiempos posteriores. De $t = 0$ a $t = 1$ la velocidad azimutal extrema decae 93% y 72% para $\alpha = 1.0$ y $\alpha = 0.1$, respectivamente; sin embargo, de $t = 1$ a $t = 2$, su decaimiento es del 83% y del 71%. Como es de esperar la razón de decaimiento para valores pequeños de α es casi constante y próxima a la escala de tiempo de Ekman.

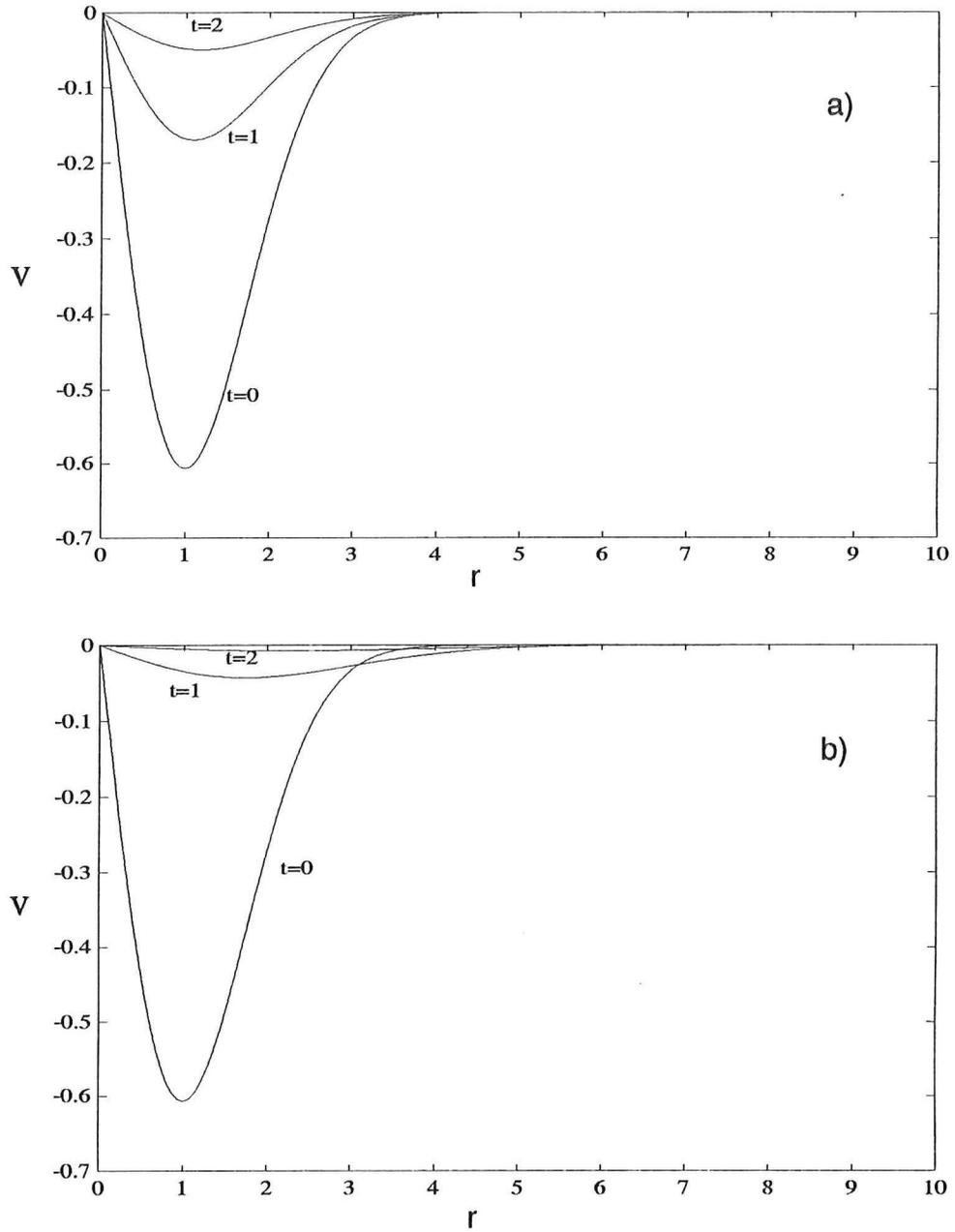


Fig. 3. Evolución de la velocidad azimutal con $F = 0$. a) para $\alpha = 0.1$ y b) para $\alpha = 1.0$. Nótese que el ensanchamiento y el decaimiento del vórtice es más rápido, al incrementarse el valor del parámetro α .

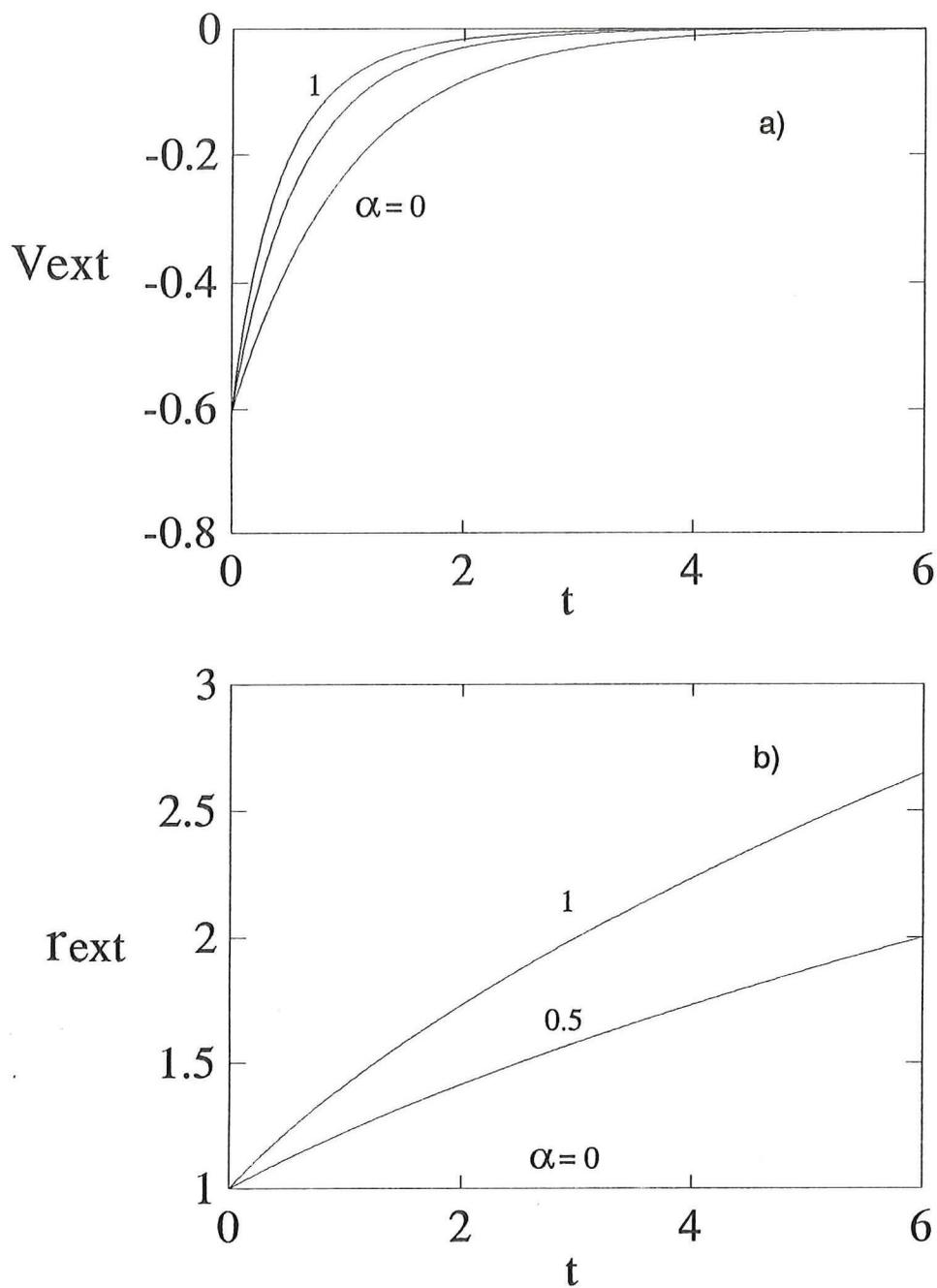


Fig. 4. a) Evolución de la velocidad azimutal extrema y b) posición donde se alcanza, para $\alpha = 0, 0.5$ y 1.0 .

IV. 2 Papel de la superficie libre.

Para analizar el efecto que ejerce la presencia de una superficie libre deformable, se toma ahora $\alpha = 0$, eliminando los efectos del flujo lateral de momento por difusión, por lo que (24) queda como:

$$v(r, t) = - \int_0^{\infty} J_1(kr) k^2 \exp\left[-\frac{k^2}{2} - \frac{k^2 t}{k^2 + F}\right] dk. \quad (27)$$

Esta integral no parece tener cuadratura conocida para cualquier valor del parámetro F , salvo, claro está, si $F = 0$, un resultado ya discutido.

En la figura 5 se presenta la evaluación numérica de dicha integral para $F = 1.0$ y 10 . En la figura 5b se observa más claramente como a medida que el tiempo aumenta, la posición de la velocidad azimutal extrema migra alejándose del centro del vórtice, mientras que su amplitud decae con una razón menor que con $\exp(-t)$. Además, si se compara la figura 5a con la figura 5b se observa que la rapidez del decaimiento disminuye al incrementarse el número de Froude. Estos resultados corroboran los previamente señalados por Mied (1989), Kloosterziel y van Heijst (1992) y Maas (1993).

Ahora bien, un caso particular donde están involucrados ambos parámetros, se tiene al tomar $F = 1/\alpha$. En tal caso, de (24) se obtiene:

$$v(r, t) = - \int_0^{\infty} J_1(kr) k^2 \exp\left[-\frac{k^2}{2} - \frac{k^2 t}{F}\right] dk.$$

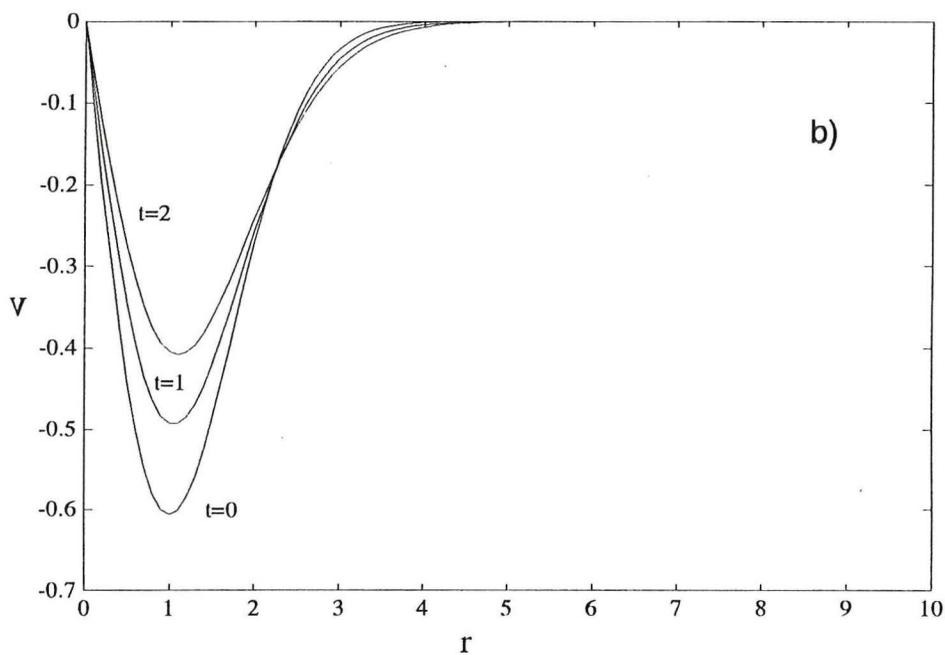
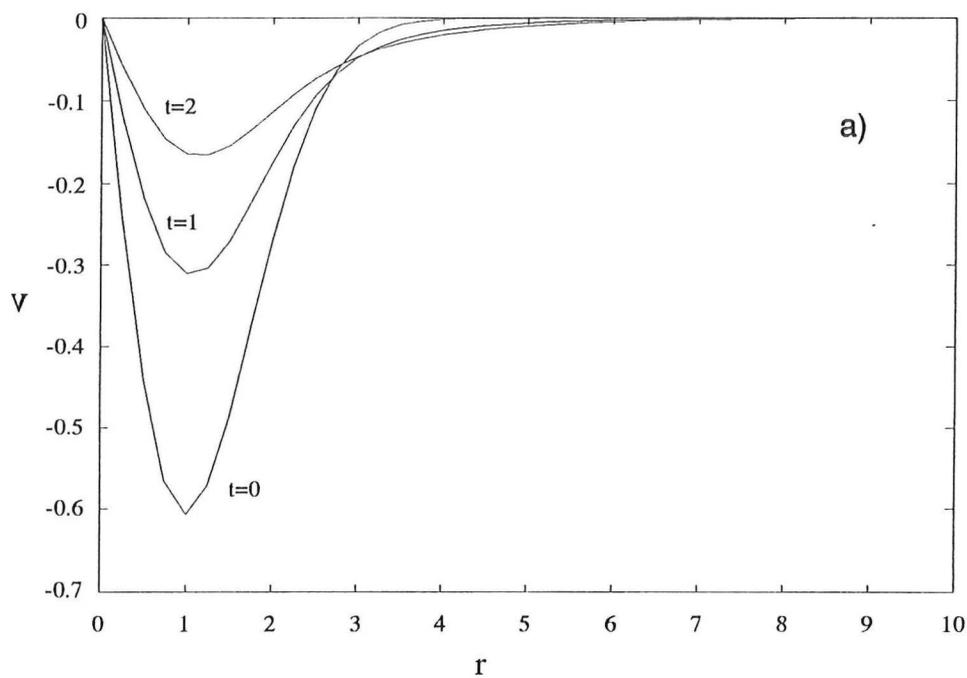


Fig. 5. Evolución de la velocidad azimutal para $\alpha = 0$ y a) $F = 1.0$ y b) $F = 10$. Nótese que el decaimiento y ensanchamiento del vórtice es más rápido para valores menores de F .

Después de resolver la integral se tiene

$$v(r, t) = -\frac{F^2 r}{(F + 2t)^2} \exp\left[-\frac{F r^2}{2(F + 2t)}\right]. \quad (28a)$$

El campo de vorticidad es

$$\omega(r, t) = \frac{F^2}{(F + 2t)^2} \left(\frac{F}{F + 2t} r^2 - 2\right) \exp\left[-\frac{F r^2}{2(F + 2t)}\right] \quad (28b)$$

y la elevación de superficie libre es

$$\eta(r, t) = \frac{F}{F + 2t} \exp\left[-\frac{F r^2}{2(F + 2t)}\right]. \quad (28c)$$

En este caso de (28a) se obtiene que la posición donde se alcanza la velocidad azimutal extrema, evoluciona respecto al tiempo por

$$r_{ext}(t) = \left(\frac{F + 2t}{F}\right)^{1/2} \quad (29a)$$

y su amplitud (v_{ext}), de acuerdo a:

$$v_{ext}(t) = -\left(\frac{F}{F + 2t}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\right]. \quad (29b)$$

En la figura 6 se muestran los perfiles de la velocidad azimutal en tres instantes de tiempo, para $F = 1.0$ y 10 ($\alpha = 1.0$ y 0.1). La evolución de la velocidad azimutal extrema y el radio donde se alcanza se presentan en la figura 7.

En este caso nuevamente se observa que el mayor decaimiento del vórtice ocurre para tiempos pequeños. En $t = 1$ la amplitud de la velocidad azimutal extrema decae, respecto a la inicial, un 81% y 24% y de $t = 1$ a $t = 2$ en un 54% y 21% para $F = 1$ y $F = 10$, respectivamente. Si se comparan estos resultados y las figuras 3 y 6, se observa de nueva cuenta, que al incrementarse el valor de F , retarda el decaimiento del vórtice.

A continuación se verá como en los casos donde se tiene una expresión explícita de las soluciones, la ecuación que dicta la evolución de la vorticidad relativa (19), se reduce a una ecuación de difusión.

En el caso $F = 0$, la razón de decaimiento de la vorticidad relativa está dada por (20); sin embargo, para tener una idea de la importancia relativa de los mecanismos que intervienen en el cambio de la vorticidad, se pueden mostrar las dos contribuciones del lado derecho de la ecuación (19). Estos términos se muestran en la figura 8 y se observa que existen regiones donde el cambio de la vorticidad es marcadamente diferente. Hay un núcleo, desde el centro hasta el primer cero del término de difusión, donde tanto la difusión como el bombeo de Ekman cooperan en el decaimiento. Hay un anillo, desde la frontera del núcleo hasta donde el bombeo de Ekman se hace cero, en el cual la difusión se opone al bombeo de Ekman impidiendo el decaimiento. Desde aproximadamente la mitad de este anillo hasta cierto radio la vorticidad está aumentando y más alejado de esta zona vuelve a decaer.

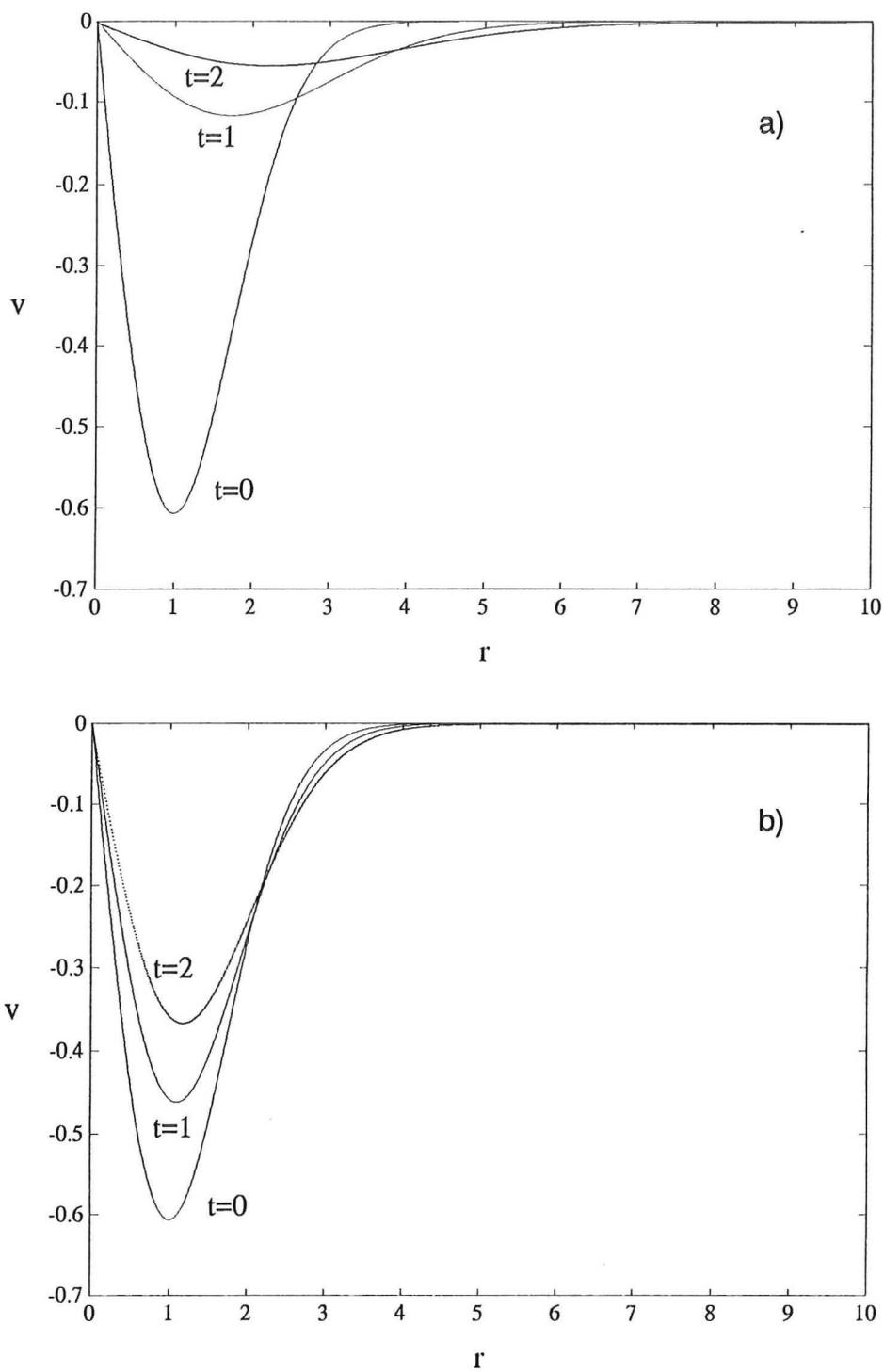


Fig. 6. Igual que la fig. 3 pero para a) $\alpha = 1$ ($F = 1$) y b) $\alpha = 0.1$ ($F = 10$).

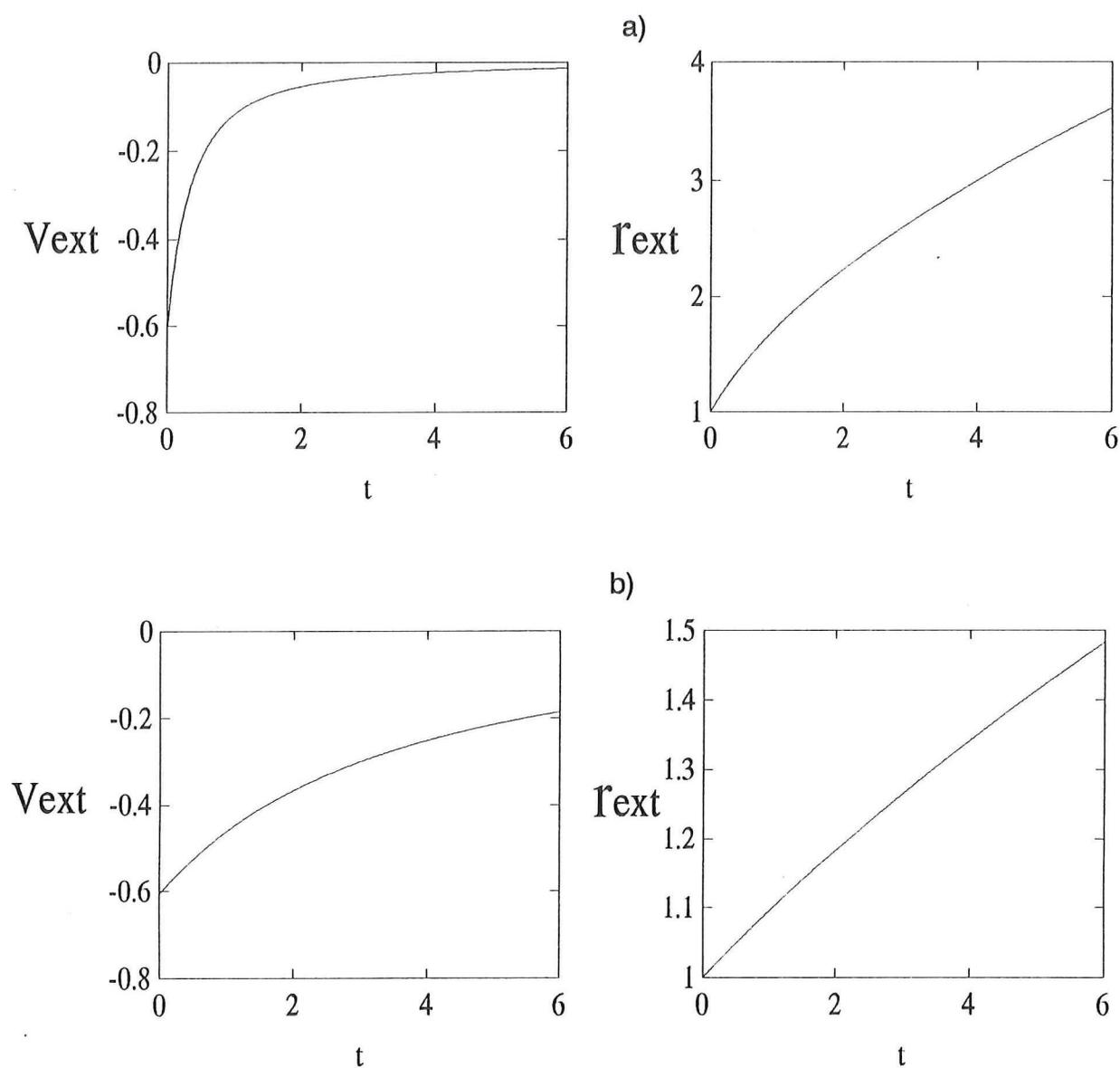


Fig. 7. Igual que la fig. 4 pero ahora con a) $\alpha = 1$ ($F = 1$) y b) $\alpha = 0.1$ ($F = 10$).

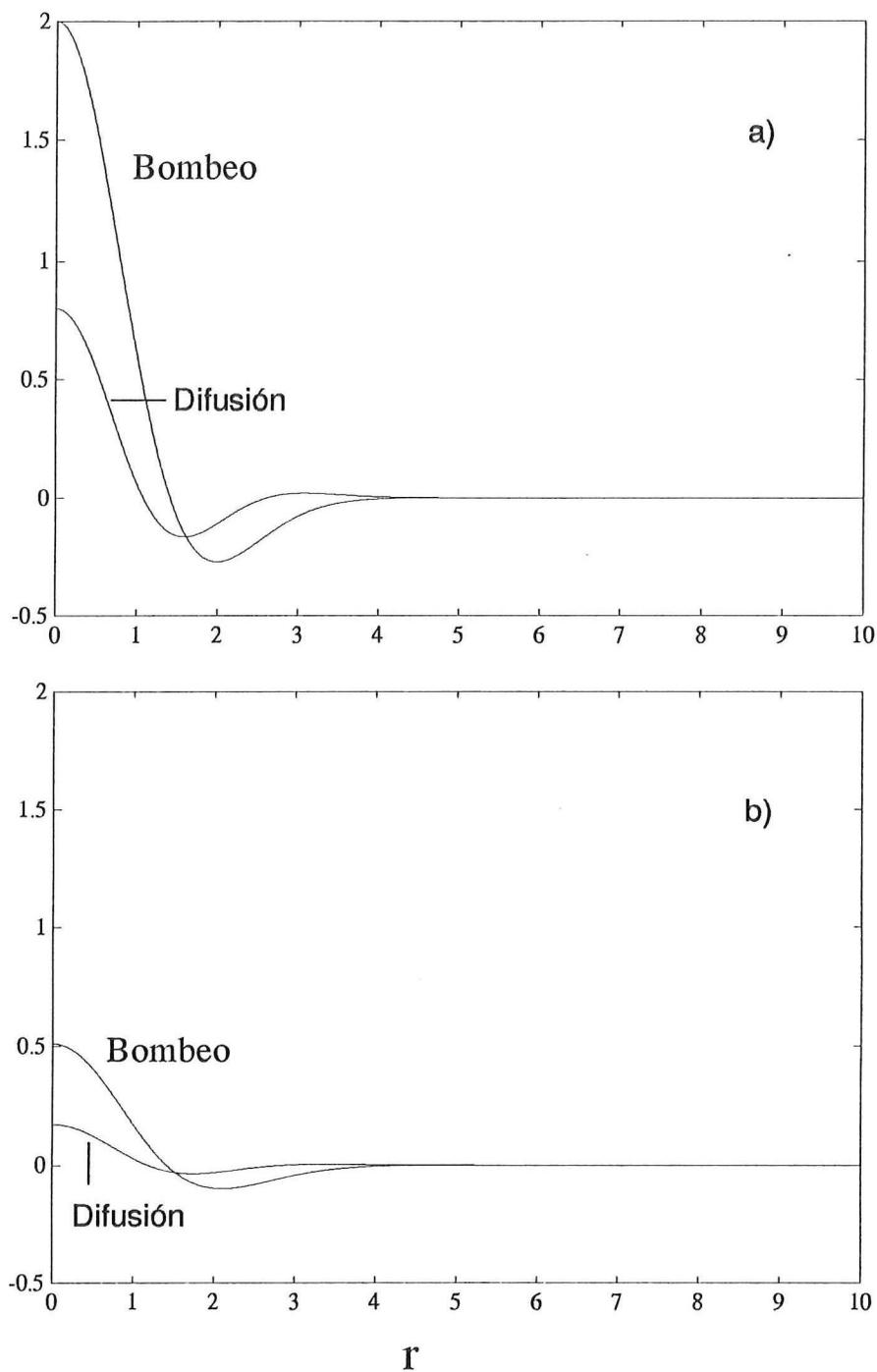


Fig. 8. Importancia relativa de los mecanismos que modifican la vorticidad relativa del flujo, como una función del radio, para $F = 0$ y $\alpha = 0.1$. a) En el instante inicial, $t = 0$ y b) en $t = 1$.

De forma general se tiene que, el decaimiento del núcleo, cuya velocidad azimutal es cercana a rotación rígida, es más rápido que en la parte más remota del vórtice, es decir, más allá del radio donde el perfil de la velocidad azimutal alcanza su extremo. Esto corrobora los resultados obtenidos por Maas (1993).

En el caso $F = 1/\alpha$, se puede demostrar fácilmente que (21) se satisface, a saber:

$$F \frac{\partial \eta}{\partial t} = \omega$$

con ω y η dadas por (28b, c), respectivamente. En este caso, la ecuación para la vorticidad relativa (19) queda:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{F} \nabla^2 \omega \quad (30)$$

De (30) se vé que para vórtices con escala horizontal pequeña comparada al radio de deformación de Rossby barotrópico, decaen rápidamente, mientras que para vórtices cuya escala horizontal es del orden o mayor que el radio de deformación, su decaimiento es más lento.

En este caso, aunque sólo el efecto de difusión interviene en la redistribución de la vorticidad, las magnitudes de los términos del lado derecho de la ecuación (19) están dados en la figura 9. En términos generales la razón de decaimiento de la vorticidad, presenta un comportamiento parecido al caso anterior, su decaimiento es mayor cercano al origen que en la región exterior.

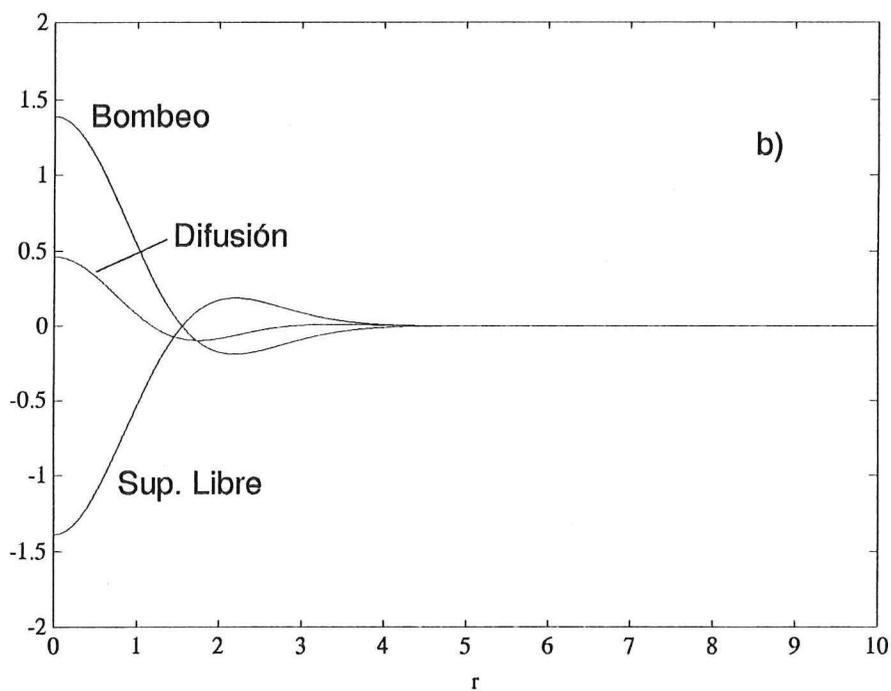
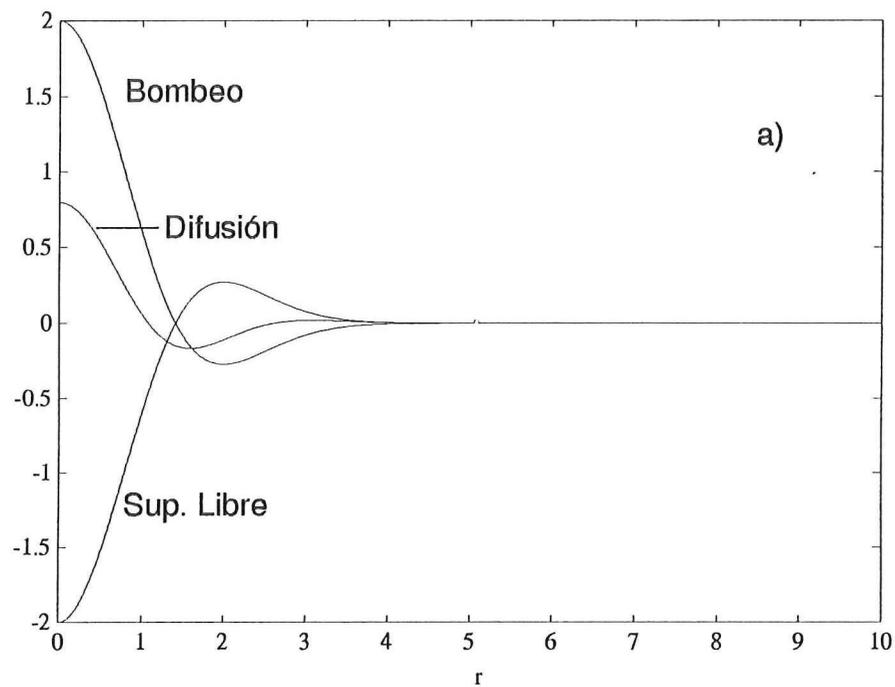


Fig. 9. Igual que la fig. 8 pero para $F = 10$ y $\alpha = 0.1$.

Para concluir con este capítulo, se presentan los valores de los términos alineales, que aparecen en el sistema (11) con $R_o = 1$, calculados a partir de las soluciones lineales obtenidas. En particular, para el caso $F = 1/\alpha$ la solución satisface completamente el sistema alineal, ya que la velocidad radial es nula, pues las columnas de vórtice no cambian de espesor. Para valores realistas de los parámetros ambientales se tiene que $F \ll 1/\alpha$, luego, para lograr $F\alpha = 1$ se necesita para el océano valores excesivamente altos de las viscosidades turbulentas o en condiciones de laboratorio, velocidades de rotación del tanque demasiado altas. Por lo tanto aunque matemáticamente se tiene la forma explícita de la solución, ésta no tiene un significado físico relevante.

El cálculo con $F = 0$ del término no lineal en la ecuación de momento radial se muestra en la figura 10 para $\alpha = 0.1$. Aquí se observa que en el instante inicial el término alineal es del mismo orden que los términos que forman el balance (fig. 10a) y disminuye su importancia considerablemente al aumentar el tiempo (fig. 10b). Esta característica también se observa para la ecuación de momento en la dirección azimutal, donde cada uno de sus términos son presentados en la figura 11. Además se tiene que el término alineal sólo es considerable cerca del origen (fig. 11a), cuando el tiempo transcurre tanto éste como el término de difusión son despreciables, estableciéndose un balance entre la velocidad azimutal $v = 2u$ y su razón de cambio (fig. 11b).

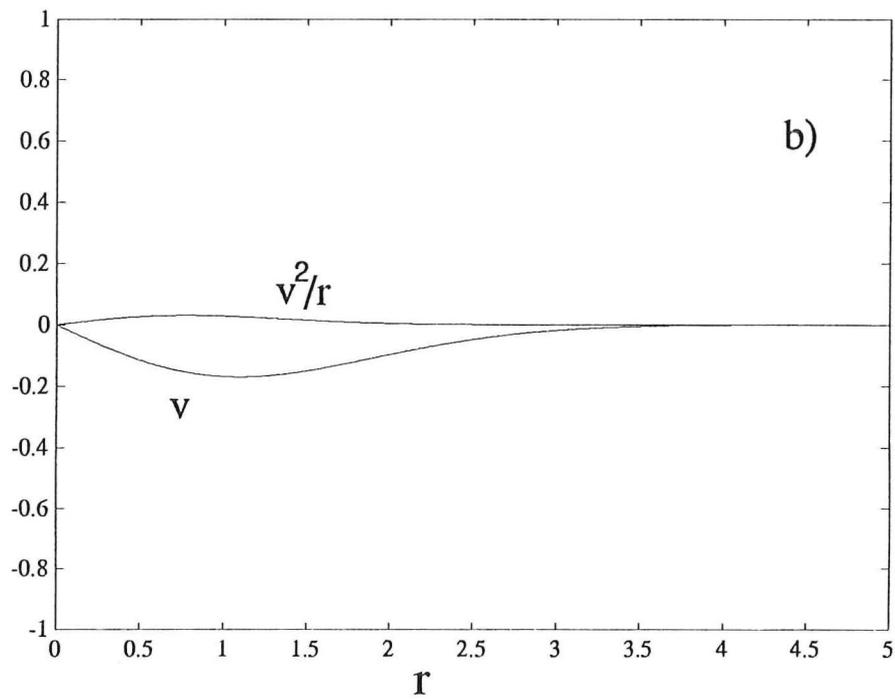
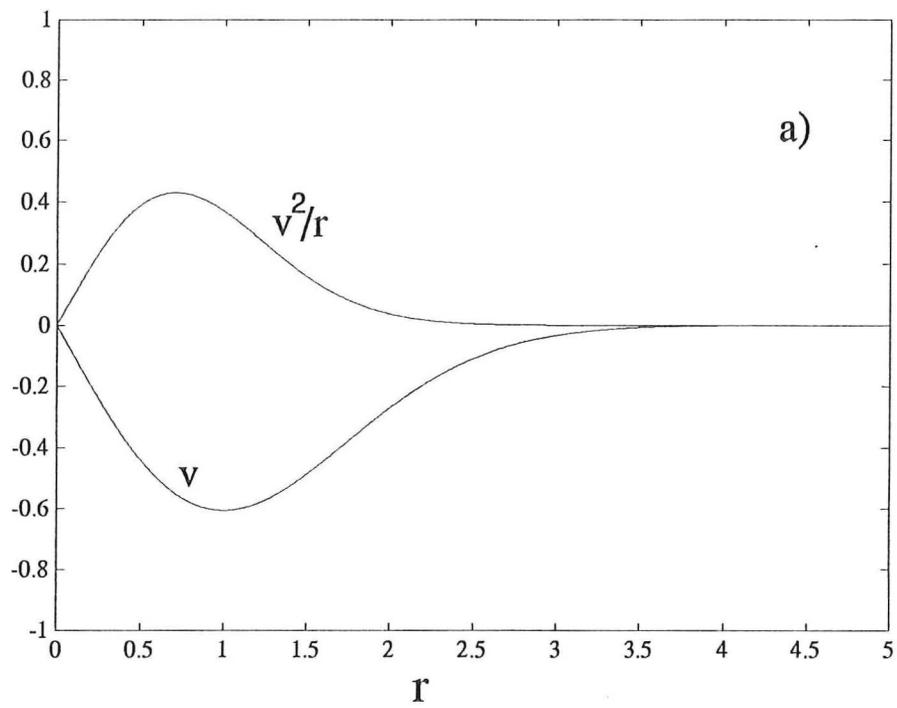


Fig. 10. Términos de la ecuación de momento en la dirección radial en a) $t = 0$ y b) $t = 1$ para la solución con $F = 0$ y $\alpha = 0.1$.

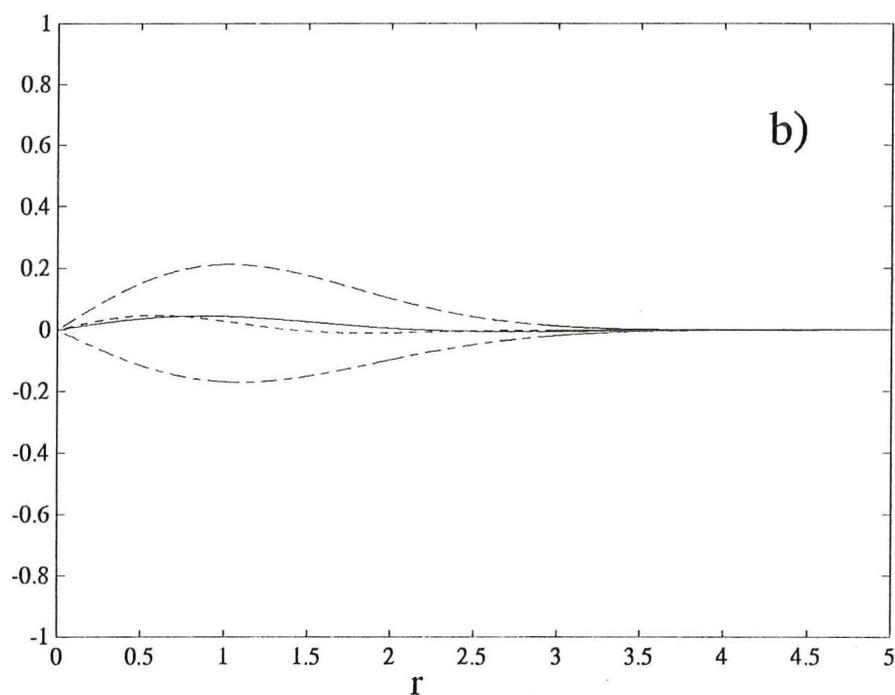
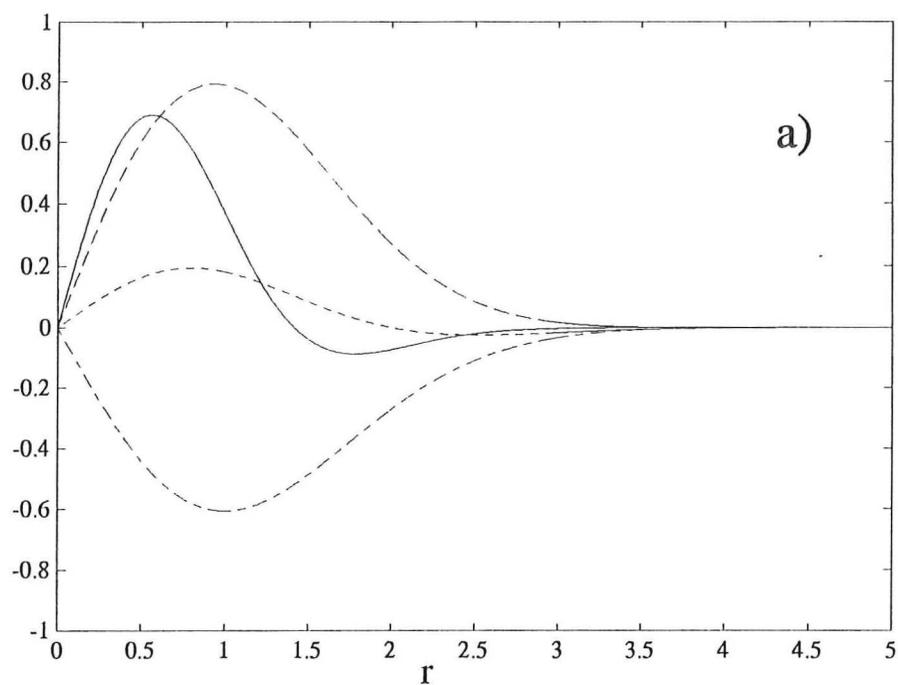


Fig. 11. Términos de la ecuación de momento en la dirección azimutal para la solución con $F = 0$ y $\alpha = 0.1$ en a) $t = 0$ y b) $t = 1$. Aquí \cdots denota $\partial v / \partial t$; $---$ $v (= 2u)$; $----$ término viscoso y la línea continua representa el término alineal, $v\omega$.

V. CONCLUSIONES.

En este estudio se llega a las ecuaciones que gobiernan la evolución de un vórtice en balance ciclostrófico, cuando las fuerzas viscosas son pequeñas, o sea, cuando los números de Ekman (λ_v y λ_h), son pequeños. Estas son las ecuaciones del sistema (11), utilizando la velocidad del bombeo de Ekman (9). En el modelo de gravedad reducida, la velocidad del bombeo desaparece al permitir que la capa activa se deslice sin fricción sobre la capa inferior inerte. En este caso las ecuaciones que dictan la evolución del vórtice están dadas en (C1).

En lo que sigue sólo se hará referencia al caso lineal ya que es el único tratado en el trabajo. Cuando $R_o \ll 1$, el vórtice está en balance geostrófico y sólo tres factores intervienen en el proceso de decaimiento del vórtice: el bombeo de Ekman, proporcional a la vorticidad en el interior, la deformación de la superficie libre y la difusión lateral de momento.

La importancia de la deformación de la superficie libre está dada por el valor del número de Froude, F , un parámetro que compara la escala horizontal del vórtice al radio de deformación de Rossby, mientras que la importancia de la difusión lateral de momento está representada por la magnitud del parámetro α , que compara la escala de tiempo difusivo con la escala de tiempo de Ekman.

En esta aproximación, la solución en forma integral para la ecuación que dicta la evolución de la velocidad azimutal es dada por (14a) y para la evolución de la superficie por (15a). Estas soluciones, que incluyen los tres factores, reproducen en su caso las publicadas anteriormente, que consideran uno o dos de tales factores.

Un análisis general del decaimiento del vórtice, con $R_o \ll 1$, es dado a través de la ecuación para la vorticidad relativa, mostrando que su razón de cambio se debe a la compresión (estiramiento) de los tubos de vórtices y a la difusión lateral.

Para el caso clásico, $F = \alpha = 0$, en las regiones donde la vorticidad relativa del fluido es positiva (negativa), la fricción en la capa del fondo ocasiona un bombeo (succión) de Ekman en el tope de esta capa, provocando así, la compresión (estiramiento) de los tubos de vórtice en el interior, lo que disminuye (aumenta) la vorticidad en el fluido.

Cuando la superficie libre es dinámicamente activa, es decir, cuando el número de Froude no es pequeño ($F \neq 0$), se observa que la velocidad azimutal extrema del vórtice se propaga hacia afuera, el vórtice se ensancha. Este efecto y el incremento en el tiempo de decaimiento son debidos a que la superficie libre parcialmente o completamente, cuando $F = 1/\alpha$, compensa el efecto de la compresión (estiramiento) de los tubos de vórtice en regiones de vorticidad positiva (negativa) del fluido.

La difusión lateral, unido al efecto de la superficie libre, lleva a una migración de la velocidad azimutal extrema hacia afuera, el vórtice se ensancha. Pero, contrario al efecto de la superficie libre, el tiempo de decaimiento disminuye al aumentar el valor del parámetro α .

Aunque con un modelo de esta naturaleza, se pueden entender los efectos dinámicos que ocasionan los factores considerados, es bueno señalar también las principales limitaciones e idealizaciones que se han utilizado: (i) se considera un océano de densidad uniforme, no acotado en la horizontal, (ii) no se tiene en cuenta la curvatura de la tierra (plano f), (iii) se

trabaja con las ecuaciones linealizadas cuando en realidad para remolinos oceánicos observados, $R_o \approx 0.2$, un valor que debe ser tomado en cuenta, (iv) no se considera difusión de masa y (v) el vórtice tiene una simetría azimutal perfecta.

La inclusión de los términos alineales puede causar un comportamiento distinto para vórtices ciclónicos y anticiclónicos (Maas 1993), pero en este trabajo existe simetría entre ambos casos.

BIBLIOGRAFIA.

- Auer, S. J. 1987 Five-year Climatological survey of the Gulf Stream system and its associated rings. *J. Geophys. Res.* **92**, 11709-11726.
- Barrett, J. R. 1971 Available potential energy of Gulf Stream rings. *Deep Sea Res.* **18**, 1221-1231.
- Cederlöf, U. 1988 Free-surface effects on spin-up. *J. Fluid Mech.* **187**, 395-407.
- Chassignet, E. P. y B. Cushman-Roisin 1991 On the influence of a Lower layer on the propagation of Nonlinear oceanic eddies. *J. Phys. Oceanogr.* **21**, 939-957.
- Cheney, R. y P. Richardson 1976 Observed decay of a cyclonic Gulf Stream ring. *Deep Sea Res.* **23**, 143-155.
- Cushman-Roisin, B., E. P. Chassignet y B. Tang 1990 Westward motion of mesoscale eddies. *J. Phys. Oceanogr.* **20**, 758-768.
- Davey, M. K. y P. D. Killworth 1984 Isolated waves and eddies in a shallow water model. *J. Phys. Oceanogr.* **14**, 1047-1064.
- Elliot, B. A. 1982 Anticyclonic rings in the Gulf of Mexico. *J. Phys. Oceanogr.* **12**, 1292-1309.
- Flierl, G. R. 1977 The application of linear quasi-geostrophic dynamics to Gulf Stream rings. *J. Phys. Oceanogr.* **7**, 365-379.

- Gill, A. E. 1982 *Atmosphere - Ocean Dynamics*. Academic Press., New York, 662 págs.
- Greenspan, H. P. 1968 *The Theory of Rotating Fluids*. Cambridge University Press.
- Greenspan, H. P. y L. N. Howard 1963 On a time-dependent motion of a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **17**, 385-404.
- Holton, J. R. 1965 The influence of viscous boundary layers on transient motions in a stratified rotating fluid. Part I y II. *J. Atmos. Sci.* **22**, no. **4**, 402-411; no. **5**, 535-540.
- Hopfinger, E. J. y G. J. F. van Heijst 1993 Vortices in rotating fluid. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **25**, 241-289
- Ikeda, M. 1981 Instability and splitting of mesoscale rings using a two-layer quasi-geostrophic model on an f-plane. *J. Phys. Oceanogr.* **11**, 987-998.
- Joyce, T. M. 1991 Review of U. S. contributions to warm-core rings. In *U. S. National Report to International Union of Geodesy and Geophysics 1987-1990. Contributions in Oceanography*, pp. 610-616.
- Kloosterziel, R. C. 1990 On the large-time asymptotics of the diffusion equation on infinite domains. *J. Engng. Maths.* **24**, 213-236.
- Kloosterziel, R. C. y G. J. F. van Heijst 1992 The evolution of stable barotropic vortices. *J. Fluid Mech.* **239**, 607-629.

- Lewis, J. K. y Kirwan 1985 Some observations of ring-topography and ring-ring interactions in the Gulf of Mexico. *J. Geophys. Res.* **90**, 9017-9028.
- Maas, L. R. M. 1993 Nonlinear and free-surface effects on the spin-down of barotropic axisymmetric vortices. *J. Fluid Mech.* **246**, 117-141.
- McWilliams, J. C. 1985 Submesoscale, coherent vortices in the ocean. *Rev. Geophys.* **23**, 165-182.
- McWilliams, J. C. y G. R. Flierl 1979 On the evolution of isolated, nonlinear vortices. *J. Phys. Oceanogr.* **9**, 1155-1182.
- Mied, R. P. 1989 The decay of mesoscale vortices. *In Mesoscale / Synoptic Coherent Structures in Geophysical Turbulence* (ed. J. C. J. Nihoul y B. M. Jamart), pp. 135-147. Elsevier.
- Mied, R. P. y G. R. Lindemann The propagation and evolution of cyclonic Gulf Stream rings. *J. Phys. Oceanogr.* **9**, 1183-1206.
- Molinari, R. L. 1970 Cyclonic ring spin down in the North Atlantic. Ph.D. Dissertation. Tex. A & M Univ. College Station Tex.
- Nof, D. 1981 On the β -induced movement of isolated baroclinic eddies. *J. Phys. Oceanogr.* **11**, 1662-1672.

- Nof, D. 1983 On the migration of isolated eddies with application to Gulf Stream rings. *J. Mar. Res.* **41**, 399-425.
- Ou, H. W. y A. L. Gordon 1986 Spin-down of baroclinic eddies under sea-ice. *J. Geophys. Res.* **91**, 7623-7630.
- Pedlosky, J. 1987 *Geophysical Fluid Dynamics*. New York. Springer-Verlag. 2nd ed.
- Ripa, P. 1989 On the stability of ocean vortices. In *Mesoscale / Synoptic Coherent Structures in Geophysical Turbulence* (ed. J.C.J. Nihoul y B.M. Jamart), pp. 167-179. Elsevier.
- Simpson, J. J., T. D. Dickey y C. J. Koblinsky 1984 An offshore eddy in the California Current System - I: Interior dynamics. *Prog. Oceanogr.* **13**, 5-49.
- Smith, D. C. IV y R. O. Reid 1982 A numerical study of nonfrictional decay of mesoscale eddies. *J. Phys. Oceanogr.* **12**, 244-255.
- Vukovich F. M. y B. W. Crissman 1986 Aspects of warm rings in the Gulf of Mexico. *J. Geophys. Res.* **91**, 2645-2660.

APENDICE A. ADIMENSIONALIZACION DE LAS ECUACIONES.

Se considera aquí el análisis dimensional de las ecuaciones (1), utilizando escalas en forma general, que se irán especificando de acuerdo al problema a atacar.

Introduciendo las escalas

$$[u, v, w, p, \eta] = [Uu_*, Vv_*, \delta U w_*, Pp_*, \Phi \eta_*]$$

$$[r, z, t] = [Lr_*, H z_*, \tau t_*]$$

donde L, H y δ están definidas en la tabla I y las variables con asteriscos son sin dimensiones.

Al sustituir estas variables en las ecuaciones del sistema (1), resulta:

$$\frac{1}{f\tau} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{U}{fL} \left(u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u - \frac{V^2}{UfL} \frac{v^2}{r} - \frac{V}{U} v = -\frac{P}{\rho fUL} \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{v_h}{fL^2} \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u + \frac{v_v}{fH^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (A1a)$$

$$\frac{1}{f\tau} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{U}{fL} \left(u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{u}{r} \right) v + \frac{U}{V} u = \frac{v_h}{fL^2} \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v + \frac{v_v}{fH^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (A1b)$$

$$\frac{\delta U f}{g} \frac{1}{f\tau} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\delta U f U}{g fL} \left(u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) w = -\frac{P}{\rho g H} \frac{\partial p}{\partial z} - 1 + \frac{\delta U f}{g} \frac{v_h}{fL^2} \nabla^2 w + \frac{\delta U f}{g} \frac{v_v}{fH^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (A1c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) = 0 \quad (A1d)$$

donde se han eliminado los asteriscos por comodidad en la notación. Este resultado se tiene después de dividir la primera ecuación por fU , la segunda por fV y la tercera por g multiplicada y dividida convenientemente por f . La escala para la velocidad vertical se tiene de la ecuación de continuidad, donde $\delta = H/L$ es la razón de aspecto.

Como se verá más adelante, cuando se formulen los requisitos para el flujo principal, la velocidad radial entra como una corrección a éste, sin embargo, la toma de $U=V$ no afecta nada el planteamiento del problema. Si además se utilizan las definiciones de los números de Rossby, Froude y de Ekman, horizontal y vertical, dadas en el texto (ver Tabla I), el sistema (A1) queda:

$$\frac{1}{f\tau} \frac{\partial u}{\partial t} + R_o \left(u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u - R_o \frac{v^2}{r} - v = -\frac{P}{\rho fLV} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{2} \lambda_h \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u + \frac{1}{2} \lambda_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (A2a)$$

$$\frac{1}{f\tau} \frac{\partial v}{\partial t} + R_o \left(u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{u}{r} \right) v + u = \frac{1}{2} \lambda_h \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v + \frac{1}{2} \lambda_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (A2b)$$

$$\delta^2 R_o F \frac{1}{f\tau} \frac{\partial w}{\partial t} + \delta^2 R_o^2 F \left(u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) w = -\frac{P}{\rho gH} \frac{\partial p}{\partial z} - 1 + \frac{\delta^2 R_o F}{2} \lambda_h \nabla^2 w + \frac{\delta^2 R_o F}{2} \lambda_v \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (A2c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) = 0 \quad (A2d)$$

donde se ha utilizado que $\delta V f/g = \delta^2 R_o F$, un resultado que se obtiene al multiplicar y dividir por fL^2H .

A continuación se reduce el número de escalas independientes, al relacionarlas entre sí, imponiendo ciertos balances como aproximaciones globales de la dinámica

Si se toma la escala para la presión de forma tal que a primer orden el vórtice esté en balance geostrófico (ver, por ejemplo, Cushman-Roisin et al. 1990), $P = \rho fLV$, la presión (3) sin dimensiones es:

$$fLVp_* = gH(1 - z_*) + fLVp'_*.$$

Después de dividir por gH y de multiplicar y dividir el primero y el último término por fL , la expresión de arriba toma la forma:

$$R_o F p = 1 - z + R_o F p'. \quad (A3a)$$

De la expresión (A3a) se obtiene que

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p'}{\partial r} \quad (A3b)$$

$$R_o F \frac{\partial p}{\partial z} = -1 + R_o F \frac{\partial p'}{\partial z}. \quad (A3c)$$

Para la escala de la elevación se toma aquella que a primer orden esté en balance hidrostático, $\Phi = fLV/g$, quedando la expresión (4):

$$Hz_{s*} = H + \frac{fLV}{g} \eta_*$$

la cual, después de dividir por H y multiplicar y dividir el último término por fL , queda

$$z_s = 1 + R_o F \eta. \quad (A4)$$

Sustituyendo en el sistema (A2) la escala para la presión, notando que $P/\rho gH = R_o F$ y utilizando las expresiones (A3b, c) se tiene, después de multiplicar las ecuaciones por 2 y de dividir la tercera por $R_o F$:

$$\frac{2}{f\tau} \frac{\partial u}{\partial t} + 2R_o \left(u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u - 2R_o \frac{v^2}{r} - 2v = -2 \frac{\partial p'}{\partial r} + \lambda_h \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u + \lambda_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (A5a)$$

$$\frac{2}{f\tau} \frac{\partial v}{\partial t} + 2R_o \left(u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{u}{r} \right) v + 2u = \lambda_h \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v + \lambda_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (A5b)$$

$$\frac{2\delta^2}{f\tau} \frac{\partial w}{\partial t} + 2\delta^2 R_o \left(u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) w = -2 \frac{\partial p'}{\partial z} + \delta^2 \lambda_h \nabla^2 w + \delta^2 \lambda_v \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (A5c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) = 0. \quad (A5d)$$

El decaimiento de un vórtice está controlado principalmente por dos procesos viscosos (ver introducción), uno debido a la presencia del fondo y otro a la difusión lateral de momento en el interior del fluido (alejado del fondo). Las escalas de tiempo asociadas a cada uno de estos mecanismos serán utilizadas a continuación y se verá que ecuaciones rigen la evolución y decaimiento del vórtice en ambos casos.

APENDICE B. ESCALA DE TIEMPO DE EKMAN.

En vista de los resultados conocidos de la dinámica lineal de Ekman (ver Greenspan 1968; Gill 1982; Pedlosky 1987) la escala de tiempo asociada al decaimiento de un vórtice, debido a la fricción del fondo, es la escala de tiempo de Ekman:

$$\tau = T_v = \left(\frac{2H^2}{f\nu_v} \right)^{1/2} = 2f^{-1}\lambda_v^{-1/2}. \quad (B1)$$

Sustituyendo (B1) en las ecuaciones del sistema (A5) se tiene:

$$\lambda_v^{1/2} \frac{\partial u}{\partial t} + 2R_o \left(u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u - 2R_o \frac{v^2}{r} - 2v = -2 \frac{\partial p'}{\partial r} + \alpha \lambda_v^{1/2} \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u + \lambda_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (B2a)$$

$$\lambda_v^{1/2} \frac{\partial v}{\partial t} + 2R_o \left(u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{u}{r} \right) v + 2u = \alpha \lambda_v^{1/2} \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v + \lambda_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (B2b)$$

$$\lambda_v^{1/2} \delta^2 \frac{\partial w}{\partial t} + 2\delta^2 R_o \left(u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) w = -2 \frac{\partial p'}{\partial z} + \alpha \lambda_v^{1/2} \delta^2 \nabla^2 w + \lambda_v \delta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (B2c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) = 0 \quad (B2d)$$

donde se ha utilizado $\lambda_h = \alpha \lambda_v^{1/2}$.

Para simplificar el problema se restringen las magnitudes de estos parámetros. En este trabajo la discusión se limita a un sistema en el que $\delta \ll 1$, se tiene la aproximación hidrostática, y se considera $R_o \ll 1$ el flujo es geostrófico en el interior. El sistema linealizado es:

$$\lambda_v^{1/2} \frac{\partial u}{\partial t} - 2v = -2 \frac{\partial p'}{\partial r} + \alpha \lambda_v^{1/2} \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u + \lambda_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (B3a)$$

$$\lambda_v^{1/2} \frac{\partial v}{\partial t} + 2u = \alpha \lambda_v^{1/2} \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v + \lambda_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (B3b)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = 0 \quad (B3c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) = 0. \quad (B3d)$$

El parámetro λ_v es pequeño en todos los casos de interés geofísico, siendo un parámetro conveniente para hacer una expansión perturbativa de las ecuaciones. En la expansión, a primer orden y primera corrección, los términos que involucran segundas derivadas respecto a z desaparecen; entonces se necesitan soluciones de capa límite para satisfacer la condición de frontera en el fondo ($z = 0$).

Siguiendo el tratamiento de Holton (1965), se buscan soluciones en la forma:

$$(u, v, w, p) = (u^I, v^I, w^I, p^I)(r, z, t) + (u^b, v^b, w^b, p^b)(r, \zeta, t) \quad (B4)$$

donde los supraíndices I y b representan los campos en el interior y en la capa de frontera, respectivamente. Aquí ζ es la coordenada contraída $z = \lambda_v^{1/2} \zeta$, y para $\zeta \sim 0(1)$ se tiene que la capa de frontera es precisamente la capa de Ekman. En lo que sigue y por conveniencia en la escritura se sustituye p' por p .

Usando el formalismo de arriba, se expanden los campos como:

$$f(r, z, t) = \sum f_n^I(r, z, t) \lambda_v^{n/2} + \sum f_n^b(r, \zeta, t) \lambda_v^{n/2} \quad (B5)$$

donde $f(r, z, t)$ representa cualquiera de los campos y todos los coeficientes $f_n^b(r, \zeta, t)$ tienden a cero como ζ tiende a infinito (al interior del fluido).

B1. Problema en el interior.

Primeramente se examinan las ecuaciones válidas para el fluido en el interior $0 < z \leq z_s$.

Introduciendo la expansión (B5) en las ecuaciones (B3) y recolectando los términos de primer orden, se tiene:

$$v_o^I = \frac{\partial p_o^I}{\partial r}$$

$$u_o^I = 0$$

$$\frac{\partial p_o^I}{\partial z} = 0$$

$$w_o^I = 0.$$

Este resultado no es sorprendente, ya que al tomar las escalas fué un requisito exigido. Las ecuaciones representan el diagnóstico geostrófico e hidrostático, indicando que la presión es verticalmente uniforme

$$p_o^I = \eta_o \tag{B6}$$

y el campo de velocidad es puramente horizontal, $\partial v_o^I / \partial z = 0$ y $w_o^I = 0$.

Las ecuaciones que dictan la evolución se obtienen a primera corrección de la expansión, así a $O(\lambda_v^{1/2})$, se tiene:

$$\frac{\partial v_o^I}{\partial t} + 2u_1^I = \alpha \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v_o^I \quad (B7a)$$

$$\frac{\partial w_1^I}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_1^I) = 0 \quad (B7b)$$

o

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_o^I) \right] = 2 \frac{\partial w_1^I}{\partial z} + \alpha \nabla^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_o^I) \right] \quad (B7c)$$

estableciendo que la razón de cambio de la vorticidad a primer orden, es debido al estiramiento de los tubos de vórtices paralelo al eje de rotación y al flujo horizontal de ésta por difusión.

La circulación radial y vertical entran al problema a primera corrección, $O(\lambda_v^{1/2})$ y así queda claro que la escala para la velocidad radial, y por lo tanto para la velocidad vertical, es $U = \lambda_v^{1/2} V$.

Para completar el problema es necesario considerar las condiciones en las fronteras horizontales, para ello se necesitan soluciones de capa límite para satisfacer la condición de no deslizamiento en el fondo y la condición cinemática en la superficie libre, que serán vistas a continuación.

B2. Problema en la capa límite. Solución de Ekman.

Expandiendo las ecuaciones (B3) para $\zeta \sim O(1)$ se obtiene que el balance en la capa de frontera a primer orden, después de sustraer las componentes del interior, es :

$$\frac{\partial^2 u_o^b}{\partial \zeta^2} + 2v_o^b = 0 \quad (B8a)$$

$$\frac{\partial^2 v_o^b}{\partial \zeta^2} - 2u_o^b = 0 \quad (B8b)$$

$$\frac{\partial p_o^b}{\partial \zeta} = 0 \quad (B8c)$$

$$\frac{\partial w_1^b}{\partial \zeta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_o^b) = 0. \quad (B8d)$$

El campo de presión es hidrostático, luego, el gradiente de presión está dado por su valor en el interior. El perfil de velocidad en la capa de Ekman se obtiene al resolver las ecuaciones (B8a, b), sujeto a las condiciones de frontera $u_o = v_o = w_o = 0$ en $z = 0$. En la coordenada contraída estas condiciones se expresan como:

$$u_o^b = 0$$

$$v_o^b = -v_o^I$$

$$w_1^b = -w_1^I$$

en $\zeta = 0$, y en el límite $\zeta \rightarrow \infty$, $u_o^b, v_o^b, w_1^b \rightarrow 0$.

El resultado es :

$$u_o^b = -v_o^I \exp(-\zeta) \sin \zeta$$

$$v_o^b = -v_o^I \exp(-\zeta) \cos \zeta.$$

Entonces, la evolución de los campos en la capa de Ekman está completamente determinada por el campo de velocidad azimutal en el interior $v_o^I(r, t)$. Con este resultado, integrando respecto a ζ la ecuación (B8d) desde $\zeta = 0$ hasta $\zeta \rightarrow \infty$, se obtiene la velocidad del bombeo de Ekman es igual a la mitad de la vorticidad relativa, a primer orden, del fluido en el interior:

$$w_1^I = \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_o^I) = w_E \quad \text{en } z = 0. \quad (B9)$$

La expresión (B9) es la condición de frontera en el fondo.

Veamos ahora como obtener la condición de frontera en superficie; para esto aplicamos la condición cinemática en una frontera material:

$$\frac{D}{Dt} S = 0$$

donde el operador D/Dt está definido en (2) y $S(r, z, t) = 0 = z - \eta(r, t)$ es la ecuación que define la superficie. Utilizando las escalas definidas en este apéndice, el operador (2) se expresa en forma adimensional como

$$R_o w \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} - R_o u \frac{\partial}{\partial r}. \quad (B10)$$

Aplicando (B10) a la ecuación de la superficie libre dada por (A4) se tiene:

$$w_s = \frac{F}{2} \frac{\partial \eta}{\partial t} + R_o F u \frac{\partial \eta}{\partial r} \quad (B11)$$

que para el caso lineal, $R_o \ll 1$, se reduce a

$$w_s = \frac{F}{2} \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (B12)$$

Utilizando (B9) y (B11) se puede integrar la ecuación de continuidad (B7b), desde el fondo ($z = 0$) hasta la superficie (A4), obteniéndose

$$F \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_1^I (1 + F R_o \eta)) = 2 w_E. \quad (B13)$$

Resumiendo, las ecuaciones linealizadas que rigen la evolución del vórtice son:

$$v_o^I = \frac{\partial \eta_o}{\partial r} \quad (B14a)$$

$$\frac{\partial v_o^I}{\partial t} + 2 u_1^I = \alpha \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v_o^I \quad (B14b)$$

$$F \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_1^I) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_o^I) \quad (B14c)$$

donde se ha utilizado (B6).

Los primeros términos en las ecuaciones de movimiento que aparecen si R_o tiene un valor significativo, se obtienen al sustituir

$$u = \lambda_v^{1/2} u_1^I + \dots$$

$$v = v_o + \lambda_v^{1/2} v_1^I + \dots$$

$$w = \lambda_v^{1/2} w_1^I + \dots$$

$$p = p_o + \lambda_v^{1/2} p_1^I + \dots$$

$$\eta = \eta_o + \lambda_v^{1/2} \eta_1^I + \dots$$

en el sistema (B2). Luego de recolectar los términos de $O(1)$, se tiene:

$$R_o \frac{v_o^{I2}}{r} + v_o^I = \frac{\partial \eta_o}{\partial r} \quad (B15a)$$

$$\frac{\partial v_o^I}{\partial t} + 2u_1^I \left(\frac{R_o}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_o^I) + 1 \right) = \alpha \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v_o^I \quad (B15b)$$

$$F \frac{\partial \eta_o}{\partial t} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_1^I (1 + F R_o \eta_o)) = 2w_E. \quad (B15c)$$

En este modelo, aunque aparecen los términos alineales, el bombeo de Ekman, w_E , definido por (B9), se calculó suponiendo $R_o \ll 1$, esto es, la velocidad del bombeo está relacionada linealmente a la vorticidad del fluido en el interior, es decir, del fluido en la misma posición radial. Esto último no debe ser cierto si $R_o = O(1)$; sin embargo, Maas (1993) calcula la velocidad alineal del bombeo de Ekman utilizando una expansión, en términos de R_o , de las ecuaciones en la capa de frontera, y señala que, aun para $R_o = 0.45$, la corrección no altera mucho los resultados que se obtuvieron para la evolución de la velocidad azimutal, cuando fué utilizada la relación lineal dada por (B9). Esto hace pensar que el sistema (B15),

junto con (B9), se puede utilizar para describir la evolución de vórtices relativamente fuertes.

A continuación se escribe la forma dimensional del sistema (B15):

$$\frac{v^2}{r} + fv = g \frac{\partial \eta}{\partial r}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) + fu = v_h \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru\eta) + \frac{H}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) = \left(\frac{v_v}{2f} \right)^{1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv)$$

donde se han eliminado los subíndices y se ha utilizado (B9) con dimensiones. La forma dimensional del sistema lineal utilizado en el trabajo se obtiene directamente de estas ecuaciones si se eliminan los términos alineales.

La ecuación para la energía total, se obtiene al multiplicar la primera ecuación del sistema por hu , la segunda por hv , donde $h = H + \eta$ es la profundidad total del fluido y la tercera ecuación por $g\eta$. Sumando el resultado, se obtiene:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (hB\vec{u}) = hvv_v \frac{\partial \omega}{\partial r} + B\delta\omega$$

donde

$E = (hv^2 + g\eta^2)/2$ es la energía total del sistema y

$B = v^2/2 + g\eta$ es la función de Bernoulli.

Aquí se ha utilizado $\delta = (v_v/2f)^{1/2}$, el grosor de la capa de Ekman del fondo, $D^2v = \partial\omega/\partial r$ y que $\nabla \cdot \vec{u} = (1/r)\partial/\partial r(ru)$.

Un rasgo distintivo de la energía total del sistema es que solo la velocidad azimutal contribuye a la energía cinética, siendo nulo el aporte de la velocidad radial.

También para completar, se presenta la ecuación lineal de vorticidad potencial, en forma dimensional, que equivale a la ecuación (19) del texto, esta es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\omega - \frac{f\eta}{H} \right) = - \left(\frac{fv_v}{2H^2} \right)^{1/2} \omega + v_h \nabla^2 \omega$$

B3. Solución de la ecuación que dicta la evolución de la velocidad azimutal.

El sistema (B14) se puede combinar para obtener una ecuación que dicta la evolución de la velocidad azimutal. Esta es dada por la ecuación (13b) del texto y es

$$\frac{\partial}{\partial t} [D^2v - Fv] = \alpha D^4v - D^2v. \quad (B16)$$

Se busca una solución de la ecuación (B16) por separación de variables, la cual se representa en la forma

$$v(r, t) = R(r)T(t). \quad (B17)$$

Sustituyendo (B17) en la ecuación (B16) se obtiene

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \left[\frac{\alpha D^4 - D^2}{D^2 - F} \right] R = -\gamma^2$$

con $\gamma^2 = cte > 0$. Así se tiene que la solución para el problema en el tiempo es una que decae $T \sim \exp(-\gamma^2 t)$ y la ecuación para el espacio es

$$[\alpha D^4 - D^2 + \gamma^2 D^2 - F] R = 0.$$

Este operador se puede factorizar en

$$[\alpha D^2 + \beta] [D^2 + k^2] R = 0$$

donde β y k^2 son constantes tales que

$$\beta k^2 = -\gamma^2 F$$

y

$$\alpha k^2 + \beta = \gamma^2 - 1.$$

La solución de $[D^2 + k^2] R = 0$ es

$$R(r) = J_1(kr)$$

siempre que $k > 0$.

Entonces,

$$v(r, t) = J_1(kr) \exp(-\gamma^2 t)$$

es solución (B16) si se escoge

$$\gamma^2 = \frac{\alpha k^4 + k^2}{k^2 + F}.$$

Por lo tanto

$$v(r, t) = \int_0^{\infty} T_o(k) \exp\left[-\frac{\alpha k^4 + k^2}{k^2 + F} t\right] J_1(kr) dk$$

para cualquier función arbitraria $T_o = T_o(k)$, es un subconjunto del conjunto de soluciones de la ecuación diferencial (B16). Este es el subconjunto apropiado que logra satisfacer las condiciones de frontera, a saber, $v = v(r, t)$ sea acotada en todo el espacio y decaiga a cero con $r \rightarrow \infty$.

La forma dimensional de esta última ecuación es

$$v(r, t) = \int_0^{\infty} T_o(k) J_1(kr) \exp[-S_n t] dk$$

con

$$S_n = \frac{(fv_v/2H^2)^{1/2} k^2 + v_h k^4}{k^2 + f^2/gH}$$

donde $T_o(k)$ tiene unidades de velocidad por distancia y k de inverso de distancia.

APENDICE C. MODELO DE GRAVEDAD REDUCIDA.

Como se mencionó en el capítulo tres, una de las fuertes limitantes para aplicar el modelo a remolinos oceánicos es que las escalas horizontales de éstos son muy pequeñas respecto al radio de deformación de Rossby barotrópico. McWilliams (1985) señala escalas horizontales típicas de 20-50 km para vórtices en el Mediterráneo, Vukovich y Crissman (1986) en un trabajo de 12 años de datos de satélite en el Golfo de México, reportan un diámetro promedio de remolinos de 150 km y Auer (1987) de 129 km para remolinos que se desprenden de la Corriente del Golfo.

Por otro lado, la estructura vertical de dichos remolinos alcanzan amplitudes del orden de los cien metros, y difícilmente logran sentir la presencia del fondo, excepto, claro está, cuando en su migración chocan con la plataforma, como ocurre en el Golfo de México (ver, por ejemplo, Lewis y Kirwan 1985) o en la costa este de los Estados Unidos (Joyce 1991).

Por estas razones, una aproximación más apropiada para estudiar la evolución de vórtices aislados, es el modelo de gravedad reducida. Este considera una capa activa de fluido sobre una de mayor densidad, de profundidad infinita, en reposo (ver, por ejemplo, Nof 1981, 1983, Smith y Reid 1982, Davey y Killworth 1984, Cushman-Roisin et. al. 1990, entre otros).

El modelo que a continuación se presenta se obtiene al considerar $v_v = 0$ y al escalar el sistema (1) utilizando la escala de tiempo difusivo en lugar de la escala de tiempo de Ekman, ya que en este caso $T_v = \infty$. Aunque las ecuaciones derivadas anteriormente son para una capa con densidad constante que se extiende hasta el fondo, éstas son las mismas para el

modelo de gravedad reducida, excepto por: la gravedad es sustituida por la gravedad aparente $g' = g \Delta\rho/\rho$, con $\Delta\rho$ la diferencia de densidad de la capa inferior a la superior, η es el grosor de la capa activa y no existe ni capa ni bombeo de Ekman, pues la capa activa se desliza sin fricción sobre la capa inerte.

Al igual que en el apéndice anterior, partiendo del sistema (A5), en este caso se puede ver fácilmente que: (i) si se considera $\delta \ll 1$, (ii) se elimina la viscosidad vertical, $v_v = 0$ ($\lambda_v = 0$), (iii) se utiliza la escala difusiva para el tiempo

$$\tau = T_h = \frac{L^2}{\nu_h} = 2f^{-1}\lambda_h^{-1}$$

y (iv) se expanden los campos utilizando (B5), pero ahora sólo en el interior (no hay capa de frontera) en base al parámetro (pequeño) λ_h .

Con todo lo anterior, las ecuaciones que dictan la evolución de un vórtice en el modelo de gravedad reducida son:

$$R_o \frac{v^2}{r} + v = \frac{\partial \eta}{\partial r} \quad (C1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2u \left(\frac{R_o}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + 1 \right) = \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v \quad (C1b)$$

$$F \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru(1 + FR_o \eta)) = 0. \quad (C1c)$$

Donde ahora, al integrar la ecuación de continuidad, se utiliza la condición cinemática, (B11), tanto en la superficie como en la interfase. Si $R_o \ll 1$, el sistema que rige la evolución del vórtice es:

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial r} \quad (C2a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2u = \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v \quad (C2b)$$

$$F \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) = 0 \quad (C2c)$$

Estas ecuaciones son las planteadas en (12) con $\alpha = 1$ y sin la contribución del bombeo de Ekman. Una esquematización del modelo se presenta en la figura 10.

Combinando el sistema (C2) se obtiene una ecuación que rige la evolución de la interfase

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla^2 \eta - F\eta] = \nabla^4 \eta \quad (C3a)$$

y para la velocidad azimutal se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} [D^2 v - Fv] = D^4 v \quad (C3b)$$

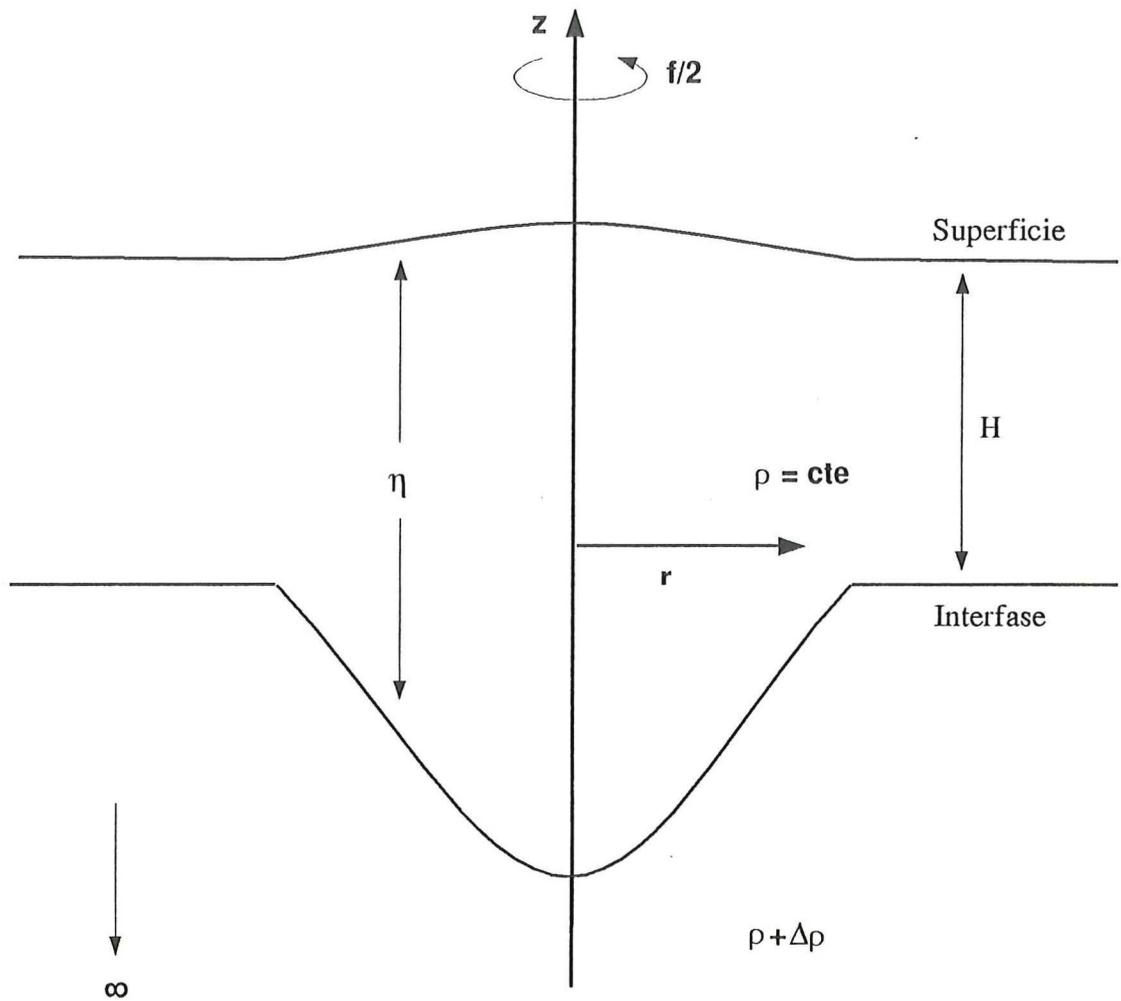


Fig. 12. Diagrama esquemático del modelo de gravedad reducida.

Las soluciones en este caso son:

$$\eta(r, t) = \int_0^{\infty} \hat{\eta}_o(k) J_0(kr) \exp\left[-\frac{k^4}{k^2 + F} t\right] dk \quad (C4a)$$

para la interface, η , con $\hat{\eta}_o(k)$ dado por (15b); y

$$v(r, t) = \int_0^{\infty} \hat{v}_o(k) J_1(kr) \exp\left[-\frac{k^4}{k^2 + F} t\right] k dk \quad (C4b)$$

para la velocidad azimutal, v , con $\hat{v}_o(k)$ dado por (14b).

Estas ecuaciones (C3a,b) y sus soluciones correspondientes (C4a, b), fueron obtenidas por Mied (1989) en su estudio de decaimiento de vórtices de mesoescala para el caso lineal.

En este modelo, el parámetro que mide la importancia de la deformación de la capa activa es $F = (L/L_r)^2$, donde ahora $L_r = (g'H)^{1/2}/f$ es el radio de deformación de Rossby baroclínico y H es la profundidad de la capa activa en ausencia del vórtice.

Es bueno señalar que, dadas las escalas utilizadas para obtener el sistema que rige la evolución del vórtice, el modelo (22) sólo es aplicable a remolinos cuasigeostróficos de mesoescala ($L \sim L_r$ y $\eta \ll H$, Kamenkovich et al. 1986). Para analizar la validez del modelo de gravedad reducida ver Chassignet y Cushman-Roisin (1991).