



RESUMEN de la Tesis de Jorge Fujioka Rojas presentada como requisito parcial para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS en FISICA APLICADA con opción en FISICA DE MATERIALES. Ensenada, Baja California, México. Agosto de 1993.

ECUACIONES Y SISTEMAS CUASI-LINEALES  
EN LA DESCRIPCION DE TRANSITORIOS ELECTRICOS  
EN SEMICONDUCTORES Y AISLANTES

Resumen aprobado por:



---

Dr. Héctor Riveros Rotge  
Director de Tesis

En este trabajo se calculan los transitorios eléctricos que se producen al aplicar súbitamente una corriente constante a través de un material semiconductor o aislante, o bien al interrumpir abruptamente la corriente. Se estudian seis casos particulares:

- 1) cuando la corriente es transportada por ambos tipos de portadores de carga (electrones y hoyos), existe recombinación directa entre hoyos y electrones, y no existen trampas en el material, ni se consideran efectos difusivos,
- 2) cuando la corriente es transportada por un sólo tipo de portadores de carga,
- 3) cuando tenemos sistemas con simetría cilíndrica,
- 4) cuando tenemos simetría esférica,
- 5) cuando existen trampas en el material,
- 6) cuando incluimos efectos difusivos.

Excepto en el último caso, la estructura fundamental de los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan los transitorios estudiados, corresponde a lo que los matemáticos denominan "sistemas cuasi-lineales de primer orden estrictamente hiperbólicos". En el sexto y último caso, en cambio, los transitorios están descritos por una ecuación de Burgers inhomogénea, la cual es una ecuación parabólica no lineal de segundo orden. En todos los casos se encuentran soluciones analíticas para los transitorios, las cuales nos permiten conocer:

- a) cómo evoluciona el campo eléctrico dentro del material como función de la posición y el tiempo,
- b) cómo varían las densidades de los portadores de carga (electrones y hoyos) dentro del material,
- c) cómo son los transitorios de voltaje,
- d) a qué velocidad avanzan los frentes de portadores de carga que son inyectados al material,
- e) cuánto tiempo tarda en alcanzarse un estado estacionario,
- f) cómo puede obtenerse la movilidad de los portadores de carga a partir de este tipo de transitorios.

TESIS DEFENDIDA POR: **JORGE FUJIOKA ROJAS**  
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITE:



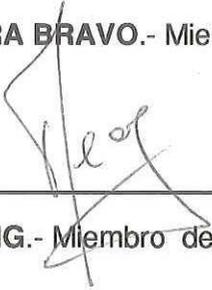
---

**DR. HECTOR RIVEROS ROTGE.-** Director del Comité



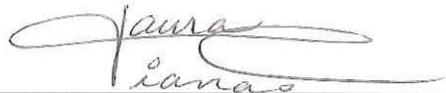
---

**DR. ENRIQUE CABRERA BRAVO.-** Miembro de Comité



---

**DR. YUNNY MEAS VONG.-** Miembro del Comité



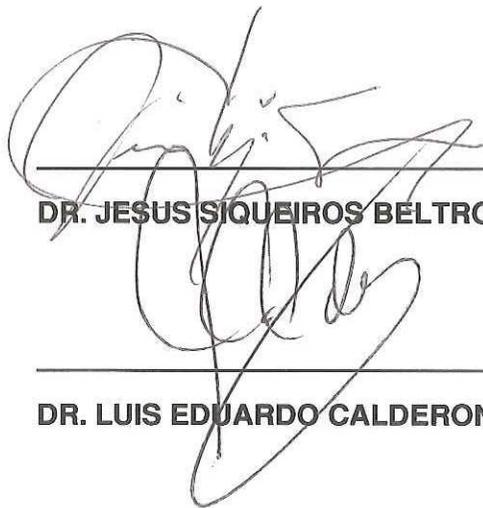
---

**DRA. LAURA VIANA CASTRILLON.-** Miembro del Comité



---

**DR. ENRIQUE GOMEZ TREVIÑO.-** Miembro de Comité



---

**DR. JESUS SIQUEIROS BELTRONES.-** Coordinador del Posgrado en Física de Materiales

---

**DR. LUIS EDUARDO CALDERON AGUILERA.-** Director de Estudios de Posgrado

12 DE AGOSTO DE 1993

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA  
Y DE EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA

DIVISION DE FISICA APLICADA  
DEPARTAMENTO DE FISICA DE MATERIALES

ECUACIONES Y SISTEMAS CUASI-LINEALES  
EN LA DESCRIPCION DE TRANSITORIOS ELECTRICOS  
EN SEMICONDUCTORES Y AISLANTES

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios  
para obtener el grado de DOCTOR EN CIENCIAS presenta:

JORGE FUJIOKA ROJAS

Ensenada, Baja California, México. Agosto de 1993.

## AGRADECIMIENTOS

Para la elaboración de esta tesis recibí la ayuda de numerosas personas.

1. En primer lugar está **Héctor Riveros**, quien me dirigió esta tesis, y quien siempre me ha ayudado de manera absolutamente eficaz, silenciosa y desinteresada. A él le debo no solamente el haber podido elaborar este trabajo, sino también el haber tenido la oportunidad de ingresar y permanecer en el IFUNAM, lo cual le agradezco infinitamente.
2. Les agradezco también a **Enrique Cabrera**, **Yunny Meas** y **Enrique Gómez**, el haber aceptado formar parte de mi comité de tesis, y el haberle dedicado su tiempo y atención a la revisión de este trabajo.
3. De manera especial quiero agradecerle a **Laura Viana**, quien también formó parte de mi comité de tesis, el haberme ayudado a mejorar significativamente este trabajo.
4. Con mucho agrado les agradezco también a **Gilberto Flores** y a **Marcos Moshinsky** su ayuda en la resolución del problema considerado en la sección II.6.1 de este trabajo.
5. A **Miguel José Yacamán** le agradezco sinceramente el haberme animado a inscribirme en el programa de doctorado del CICESE.

## AGRADECIMIENTOS (Continuación)

6. Les estoy también muy agradecido a muchas personas de Ensenada:

Ernesto Cota	Margarita Jáuregui	Alma Georgina Navarrete
Héctor Echavarría	Leonardo Morales	Jesús Siqueiros
Roberto Machorro	Manuel Yamada	

quienes me ayudaron en todos los trámites relacionados con esta tesis, sin haberme conocido previamente.

7. Me da también alegría tener la oportunidad de agradecerles a Martha González, Pablo Carrasco y Rafael Puentes, la ayuda que siempre he recibido de ellos, y su siempre constante amabilidad hacia mí.

8. También quiero darles las gracias a los demás miembros de la biblioteca:

Catalina Naumis	Isidro Galindo	Cristina Reyes
Edith Jiménez	Marcela Romero	Verónica Camargo
María de la Luz Vela	Rosalba Presa	

quienes siempre me han ayudado cuando lo he necesitado.

9. Gracias también a Armando Vázquez, quien siempre me orientó sobre los trámites a realizar en el CICESE, los informes que presentar, y las fechas en las cuales presentarlos.

10. Finalmente, les agradezco a Lilia Martínez, Luis Aguilar y Alfonso Pérez el haberme ayudado con la impresión y las figuras de este trabajo.

## CONTENIDO

	<u>Página</u>
I INTRODUCCION	1
I.1 Antecedentes acerca de los estudios realizados sobre transitorios eléctricos en semiconductores y aislantes	1
I.2 Transitorios producidos por la aplicación súbita de una corriente constante. Tema y objetivos del presente trabajo	6
I.3 Suposiciones físicas y características del sistema considerado en este trabajo	8
I.4 Aspectos matemáticos	16
I.4.1 Sobre las ecuaciones de arrastre y difusión	16
I.4.2 Sobre las ecuaciones de balance	20
I.4.3 Sobre las condiciones iniciales y de frontera	23
I.5 Descripción del presente trabajo	25
II RESULTADOS ANALITICOS Y NUMERICOS	29
II.1 Sistemas con ambos tipos de portadores de carga	29
II.1.1 El sistema de ecuaciones	29
II.1.2 Curvas características	34
II.1.3 Aproximación a un estado estacionario	52
II.2 Transitorios de carga y descarga con una sola clase de portadores	69
II.2.1 Transitorio de carga	69
II.2.2 Transitorio de descarga	76
II.3 El problema con simetría cilíndrica	82
II.3.1 Transitorio de carga	82
II.3.2 Transitorio de descarga	91

## CONTENIDO (Continuación)

	<u>Página</u>
II.4 El problema con simetría esférica	96
II.4.1 Transitorio de carga	96
II.4.2 Transitorio de descarga	104
II.5 El sistema con trampas	107
II.5.1 Transitorio de carga	107
II.5.2 Transitorio de descarga	118
II.6 El sistema con difusión	122
II.6.1 Transitorio de carga	122
II.6.2 Transitorio de descarga	136
III DISCUSION	139
APENDICE A	152
APENDICE B	156
LITERATURA CITADA	159

## LISTA DE FIGURAS

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
1.	Curvas características que delimitan las regiones: $R_1$ (donde no han llegado todavía los hoyos y electrones inyectados por los electrodos), $R_2$ (donde los únicos portadores libres son electrones), $R_3$ (donde los únicos portadores libres son hoyos), y $R_4$ (donde coexisten ambos tipos de portadores). El caso (a) corresponde a una velocidad de recombinación infinita ( $C_r = \infty$ ), y el caso (b) a un valor finito de $C_r$ . En ambos casos $v_n = 8/7$ , $v_p = 6/7$ , y $J_o = -1$ .	38
2.	Frentes de avance de electrones (curvas continuas) y hoyos (curvas discontinuas) para $J_o = -1$ , y diferentes valores de las movilidades adimensionales: (a) $v_n = v_p = 1$ , (b) $v_n = 11/7$ , $v_p = 3/7$ , y (c) $v_n = 7/4$ , $v_p = 1/4$ .	43
3.	Densidad de electrones a lo largo de la característica $\alpha = \text{cte.}$ que separa las regiones $R_3$ y $R_4$ , para distintos valores de la constante de recombinación $C_r$ (los valores de $C_r$ se indican junto a las curvas).	49
4.	Función de distribución de Fermi-Dirac para varios valores de la temperatura.	51
5.	Evolución temporal del campo eléctrico a lo largo de la recta $x = 1/2$ , para $v_n = v_p = -J_o = 1$ , y $C_r = 0$ .	54
6.	Distribución espacial del campo eléctrico en el instante $t_m$ , en el que los electrones y los hoyos se encuentran por primera vez (curva A), y en el estado estacionario (curva B). Ambas curvas corresponden al caso en que $v_n = v_p = C_r = -J_o = 1$ .	64

## LISTA DE FIGURAS (Continuación)

<u>Figura</u>	<u>Página</u>
7. Comparación de la evolución temporal del campo eléctrico a lo largo de la recta $x = 1/2$ para $\nu_n = \nu_p = -J_o = 1$ , y diferentes valores de $C_r$ .	66
8. Curvas de nivel de la superficie $E(x,t)$ en la ausencia de trampas y difusión, para $J_o = -1$ . La parábola punteada corresponde al frente de avance de los electrones.	79
9. Curvas de nivel de la superficie $n(x,t)$ en la ausencia de trampas y difusión, para $J_o = -1$ . La parábola punteada corresponde al frente de avance de los electrones.	80
10. Transitorios de voltaje creciente y decreciente, en la ausencia de trampas y difusión, para $J_o \approx -1$ .	81
11. Transitorios de voltaje con electrodos cilíndricos coaxiales, para diferentes valores de la corriente total, en el límite en el cual $r_1 = 0$ .	88
12. Dependencia radial del campo eléctrico con electrodos cilíndricos coaxiales, en diferentes momentos durante el transitorio de descarga, para $I_o = -2\pi L$ y $r_1 = 0$ .	94
13. Transitorios de voltaje creciente y decreciente, con electrodos cilíndricos coaxiales, para $I_o = -2\pi L$ y $r_1 = 0$ .	95
14. Distribución estacionaria del campo eléctrico con electrodos esféricos concéntricos, para $I_o = -6\pi$ y diferentes valores del radio interior $r_1$ .	99

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
15.	Transitorio de voltaje con electrodos esféricos concéntricos, para diferentes valores de la corriente total, en el límite en el cual $r_1 = 0$ .	102
16.	Dependencia radial del campo eléctrico con electrodos esféricos concéntricos, en diferentes momentos durante el transitorio de descarga, en el límite en el cual $r_1 = 0$ .	106
17.	Comportamiento del parámetro A como función del nivel energético de las trampas para 6 distintos valores de la densidad de trampas. El valor de $N'$ (en $\text{cm}^{-3}$ ) se indica junto a cada curva. En todas las curvas se consideró que $N_c = 8.4 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$ , $T = 300^\circ \text{K}$ , y $g = 2$ .	117
18.	Funciones $Ai(z)$ y $Ai'(z)$ .	127

## LISTA DE TABLAS

Tabla

Página

- I. Algunos semiconductores y aislantes que aceptan contactos óhmicos, así como los materiales apropiados, en cada caso, para formar el cátodo y el ánodo.

10,11

**ECUACIONES Y SISTEMAS CUASI-LINEALES  
EN LA DESCRIPCION DE TRANSITORIOS ELECTRICOS  
EN SEMICONDUCTORES Y AISLANTES**

**I INTRODUCCION**

**I.1 Antecedentes acerca de los estudios realizados sobre transitorios eléctricos en semiconductores y aislantes**

Los transitorios eléctricos en semiconductores y aislantes comenzaron a estudiarse a principios de la década de los 50, cuando el avance en la electrónica producido por el descubrimiento del transistor en 1948 por Shockley, Bardeen y Brattain, hizo posible la observación y medición de este tipo de transitorios. De hecho, Shockley mismo fue de los primeros que utilizaron, en 1951, la medición de transitorios eléctricos en cristales de germanio para calcular la movilidad de los portadores de carga en el material (Haynes y Shockley 1951). Durante los años siguientes, la movilidad de los portadores de carga en selenio amorfo fue también determinada por medio de transitorios eléctricos (Spear 1957, 1960).

Las descripciones teóricas de los transitorios comenzaron más tarde, en la década de los 60. El artículo que abrió las puertas para la investigación teórica sobre transitorios en semiconductores y aislantes fue el artículo de Many y Rakavy (1962):

*Theory of Transient Space-Charge-Limited Currents in Solids  
in the Presence of Trapping.*

En este artículo Many y Rakavy calcularon la forma de los transitorios de corriente que se originan al aplicar súbitamente un voltaje constante a través de un material aislante.

A partir del trabajo de Many y Rakavy se empezaron a estudiar muchos aspectos de los transitorios eléctricos en semiconductores y aislantes. Una revisión bibliográfica muestra que conforme ha ido avanzando el tiempo la investigación sobre transitorios ha ido tocando los siguientes temas (mencionados en orden cronológico):

- 1) Los transitorios producidos por la doble inyección de electrones y hoyos dentro de semiconductores ("double injection transients") se empezaron a estudiar, mediante aproximaciones un tanto drásticas, por Baron, Marsh y Mayer en 1966.
- 2) Transitorios de corriente limitados por una capacidad finita del electrodo inyector para suministrar portadores de carga al material ("electrode-limited transients") fueron estudiados por Weisz, Cobas, Trester y Many en 1968.
- 3) Los transitorios en sistemas compuestos se empezaron a estudiar en 1970, cuando Batra, Schechtman y Seki analizaron los transitorios de corriente en un sistema dieléctrico/semiconductor.
- 4) El efecto que tiene la difusión de los portadores de carga en la forma de los transitorios de corriente en aislantes fue estudiada numéricamente por Rosental y Lember en 1970.
- 5) Un estudio más detallado de los transitorios de corriente en aislantes en los cuales se inyectan simultáneamente electrones y hoyos ("double injection transients") es presentado en 1971 por Gill y Batra.
- 6) Transitorios de corriente en los cuales se impone como condición de

frontera que la densidad de portadores se mantenga constante en ambos extremos del material, mientras se aplica súbitamente un voltaje constante a través del mismo, fueron estudiados por Rosental en 1973.

- 7) Transitorios con electrodos que bloquean el paso de los portadores de carga (i.e., "blocking electrodes") fueron estudiados por Franceschetti y Macdonald en 1979.
- 8) Transitorios en capacitores del tipo metal/óxido/semiconductor ("MOS capacitors") fueron estudiados por Churchill, Holmstrom y Collins en 1979.
- 9) El efecto de los procesos de captura y recombinación de portadores en transitorios de corriente fotoinducidos fue estudiado por Hughes y Sokel en 1981 y 1982.
- 10) Simulaciones de experimentos de tiempo de vuelo ("time-of-flight experiments") fueron realizados por Shapiro y Bar-Yam en 1988, y por Misiakos y Lindholm en 1989.
- 11) Transitorios en dieléctricos producidos por la incidencia de un haz de electrones que penetran en el material generando pares electrón-hoyo fueron estudiados por Arkhipov, Rudenko y Sessler en 1991.

En todos estos estudios los transitorios eléctricos son descritos mediante modelos que heredan, en mayor o menor grado, la estructura fundamental del modelo elaborado por Many y Rakavy en 1962. Estos modelos parten de leyes de conservación básicas (ecuaciones de balance), las ecuaciones de la electrodinámica clásica, y de ecuaciones para la captura y recombinación de portadores similares a las que dedujeron inicialmente Shockley y Read en 1952.

En la literatura estos modelos frecuentemente son llamados "modelos de arrastre y difusión" ("drift-diffusion models"), o bien "modelos hidrodinámicos", ya que en ellos se tiende a visualizar el movimiento de los

portadores de carga como si se tratara (hasta cierto punto) del movimiento de un fluido.

Los modelos hidrodinámicos son, sin duda, el tipo de modelos más utilizados para estudiar la forma de los transitorios eléctricos en semiconductores y aislantes. Existen, sin embargo, otras dos clases de modelos que también han sido empleados para estudiar transitorios en semiconductores y aislantes, y que no son descendientes del modelo de Many y Rakavy: (i) los modelos que se basan en la técnica de Monte Carlo, y (ii) los modelos que parten de la ecuación de Boltzmann.

Los modelos basados en la técnica de Monte Carlo consisten en una simulación del movimiento de un conjunto de electrones dentro del material. Cada electrón, a lo largo de su viaje, sufre una serie de colisiones contra distintos centros dispersores. El tiempo de vuelo entre dos colisiones sucesivas, así como el mecanismo de dispersión con el que se encontrará, son elegidos al azar. Modelos de este tipo son usados tanto para estudiar transitorios (Pan 1992; Zhou *et al.* 1989; Yoon *et al.* 1988), como para estudiar estados estacionarios (Xu y Shur 1987; Al-Omar y Krusius 1987; Van de Roer y Widdershoven 1986).

Los modelos que emplean la ec. de Boltzmann se basan en la suposición de que el movimiento de los electrones en un semiconductor o un aislante puede ser descrito por la ec. de Boltzmann, aún cuando esta ecuación fue construida originalmente para describir el movimiento de las moléculas en un gas lo suficientemente diluido para que la trayectoria media libre sea mucho mayor que las dimensiones de las moléculas, y lo suficientemente denso para que la trayectoria media libre sea mucho menor que las dimensiones del recipiente que contiene al gas. Actualmente la ec. de Boltzmann es muy usada para estudiar las

propiedades de semiconductores y aislantes. Sin embargo, esta ecuación es usada principalmente para estudiar propiedades de los materiales en estados estacionarios, y raras veces para estudiar los transitorios (Kunhardt *et al.* 1988), ya que frecuentemente no se calcula la dependencia en el tiempo de la función de distribución  $f(r,v,t)$ , sino que se presupone de antemano que dicha dependencia es exponencial, utilizando la aproximación conocida en inglés como "relaxation-time approximation" (Baranger y Wilkins 1984, 1987; Bringer y Schön 1988; Azoff 1988), o bien desde un principio se supone que la función de distribución es independiente del tiempo (Hammar 1973).

Tanto los modelos que emplean la técnica de Monte Carlo, como aquéllos que parten de la ec. de Boltzmann, son usados, principalmente, para estudiar el comportamiento de dispositivos electrónicos de dimensiones extremadamente pequeñas ("submicron devices"). En tales circunstancias el transporte de los portadores de carga dentro del material es cualitativamente diferente del transporte a través de un material de mayores dimensiones, ya que aparece la posibilidad de que los portadores de carga atraviesen el material sin sufrir ninguna colisión, dando lugar a un nuevo tipo de mecanismo de transporte, conocido como "transporte balístico". Cuando este nuevo tipo de transporte entra en juego, los modelos hidrodinámicos tradicionales ya no describen apropiadamente el comportamiento del material, y es en estos casos cuando los modelos basados en la técnica de Monte Carlo o en la ec. de Boltzmann han resultado de utilidad.

Después de este rápido panorama del trabajo realizado hasta ahora en la descripción de transitorios eléctricos en semiconductores y aislantes, pasaremos a definir el tema y objetivos del presente trabajo.

## I.2 Transitorios producidos por la aplicación súbita de una corriente constante. Tema y objetivos del presente trabajo

En la sección anterior presentamos una lista con algunos de los principales temas que han sido estudiados mediante modelos hidrodinámicos. Observando esta lista podemos apreciar que las investigaciones sobre transitorios cubren temas muy diversos, y no resulta fácil detectar elementos que sean comunes a esta multiplicidad de estudios. Sin embargo, una revisión más cuidadosa de los modelos desarrollados para describir transitorios eléctricos en semiconductores y aislantes, revela que la mayor parte de estos modelos analizan transitorios de corriente producidos de diversas maneras (Many y Rakavy 1962; Baron *et al.* 1966; Weisz *et al.* 1968; Batra *et al.* 1970; Rosental y Lember 1970; Gill y Batra 1971; Rosental 1973; Franceschetti y Macdonald 1979; Misiakos y Lindholm 1989; Kao y Hwang 1981, pag. 337). A diferencia de esto, los trabajos de investigación sobre transitorios de voltaje son sumamente escasos (Haynes y Shockley 1951; Batra *et al.* 1970; Martini *et al.* 1972), aún cuando en la industria electrónica la medición de transitorios de voltaje es sumamente utilizada para caracterizar y medir el tiempo de respuesta de todo tipo de transistores (1970 *Preferred Semiconductors and Components Catalog from Texas Instruments*). Este desequilibrio se debe, en parte, a que en estado sólido es más usual controlar los voltajes y medir las corrientes resultantes, que proceder al revés. Sin embargo, quienes tengan alguna familiaridad con los estudios realizados sobre transitorios eléctricos a través de celdas electroquímicas, tendrán muy presente que para extraer información sobre un sistema podemos proceder de cualquiera de las dos formas: estimulando al sistema mediante un voltaje controlado y midiendo el transitorio

resultante de corriente, o bien estimulando al sistema mediante una corriente controlada y registrando el transitorio resultante de voltaje (Bard y Faulkner 1980, caps. 5, 6 y 7; Vassos y Ewing 1983, caps. 7 y 9).

Conociendo, pues, que los transitorios eléctricos producidos por cambios controlados de corriente han sido poco estudiados en el pasado, en el presente trabajo calcularemos los transitorios que se producen cuando aplicamos súbitamente una corriente constante a través de un semiconductor o un aislante colocado entre dos electrodos, así como los transitorios que se producen cuando interrumpimos abruptamente la corriente.

El objetivo del trabajo consiste en encontrar de manera analítica cómo evoluciona el sistema a lo largo de estos transitorios. Esto significa que deseamos encontrar:

- (a) cómo evoluciona el campo eléctrico dentro del material como función de la posición y el tiempo,
- (b) cómo varían las densidades de los portadores de carga (electrones y hoyos) como funciones de la posición y el tiempo,
- (c) cómo son los transitorios de voltaje,
- (d) a qué velocidad avanzan los frentes de los portadores de carga que son inyectados dentro del material a través de los electrodos,
- (e) cuánto tiempo tarda en alcanzarse un estado estacionario,
- (f) cómo podríamos obtener la movilidad de los portadores de carga a partir de este tipo de transitorios.

Nuestro objetivo es encontrar las respuestas a estas preguntas en varias situaciones diferentes, a saber:

- (i) cuando tenemos ambos tipos de portadores de carga (electrones y hoyos), sólo hay recombinación directa entre portadores, y no existen trampas en

- el material, ni se consideran efectos difusivos,
- (ii) cuando la corriente es transportada por un sólo tipo de portadores de carga,
  - (iii) cuando tenemos sistemas con simetría cilíndrica,
  - (iv) cuando tenemos simetría esférica,
  - (v) cuando existen trampas en el material,
  - (vi) cuando incluimos efectos difusivos.

Para alcanzar el objetivo propuesto describiremos el comportamiento de nuestro material mediante un modelo de tipo hidrodinámico. Las suposiciones específicas involucradas en este modelo, así como las características de los sistemas a los cuales este modelo podría aplicarse, se explicarán en la siguiente sección.

### I.3 Suposiciones físicas y características del sistema considerado en este trabajo

El sistema que estudiaremos en este trabajo es un semiconductor o bien un aislante, colocado entre dos electrodos planos, cilíndricos, o esféricos. Las características específicas del material se irán definiendo a lo largo de esta sección, conforme vayamos explicando qué suposiciones físicas introduciremos.

En primer lugar consideraremos que el espesor de nuestro material (i.e., la distancia entre ambos electrodos) podrá ser de milímetros, décimas de milímetro, o inclusive centésimas de milímetro (decenas de micras), pero no consideraremos películas más delgadas. Con esta suposición excluimos la posibilidad de tener transporte balístico de electrones (el cual se presenta

con espesores inferiores a una micra), y nos deja abierta la posibilidad de describir el transporte de carga en nuestro sistema mediante un modelo de tipo hidrodinámico.

A continuación supondremos que los contactos entre nuestro material y los electrodos encargados de inyectarle portadores de carga serán contactos óhmicos, es decir, contactos que tienen una impedancia muy pequeña en comparación a la impedancia completa del material colocado entre los electrodos (Kao y Hwang 1981, pags. 76-83; Rieout 1975). Esta suposición restringe la aplicabilidad del modelo que usaremos en este trabajo a aquellos materiales en los cuales es posible construir contactos óhmicos. Esta restricción, sin embargo, no es excesivamente severa, ya que la mayoría de los semiconductores de interés aceptan contactos óhmicos (Rhoderick y Williams 1988, sec. 5.5; Cohen *et al.* 1984; Rideout 1975; Sullivan y Eigler 1957). En la tabla I mostramos una lista de algunos semiconductores y aislantes en los cuales es posible hacer contactos óhmicos, así como los materiales apropiados, en cada caso, para formar el cátodo y el ánodo.

Tabla I. Algunos semiconductores y aislantes que aceptan contactos óhmicos, así como los materiales apropiados, en cada caso, para formar el cátodo y el ánodo.

Material	Cátodo	Anodo	Referencia
Si	Au-Sb	Au-In	(1)
	W-Ti	W-Ti	(2)
	Ni	Ni	(3)
GaAs	Au-Ge	Au-Ge	(1),(4)
	In-Au	In-Au	(4)
	Au-Sn	Au-Zn	(4)
	Au-Si		(4)
	Au-Te		(4)
Ge	Au-Sb	Au-In	(1)
GaP	Au-Sn	Au-Zn	(4)
	Au-Si	Au-Ge	(4)
InP	In, In-Te	In	(4)
	Ag-Sn		(4)
AlAs	In-Te	In-Te	(4)
	Au	Au	(4)
	Au-Ge	Au-Ge	(4)
	Au-Sn		(4)
CdS	In		(5)
	Ga		(5)
Antraceno	Solución evaporada de tetrahidrofurano con antraceno y sodio.	Au (evaporado o pasta)	(6),(7)
		Ag (evaporada o pasta)	(6)
		Al (evaporado)	(6)
		Pt (pasta)	(6)
	Na-K	Se-Te (evaporado)	(6)
		Cu+I (pasta)	(6)
	Fibras de carbón.	Cu <sub>2</sub> O - CuI (evaporado)	(6)
In (evaporado)		(6)	

Tabla I. (Continuación)

Material	Cátodo	Anodo	Referencia
Antraceno	Obleas de Si cubiertas con 20-40Å de SiO <sub>2</sub>	SnO <sub>2</sub>	(6)
Tetraceno	Na	Au	(7),(8)
	Ba	Pd	(7),(8)
Naftaleno	Ag (pasta)		(7)
I <sub>2</sub>		SnO <sub>2</sub>	(9)
Ge <sub>16</sub> As <sub>35</sub> Te <sub>28</sub> S <sub>21</sub>	Pt	Pt	(10)
	Pd	Pd	(10)
	Mo	Mo	(10)
	Sb	Sb	(10)

- (1) Rhoderick y Williams 1988, sec. 5.5  
 (2) Cohen et al. 1984  
 (3) Sullivan y Eigler 1957  
 (4) Rideout 1975  
 (5) Smith 1955  
 (6) Kao y Hwang 1981, pag.82, y referencias allí citadas  
 (7) Meter 1974, pag. 288  
 (8) Baessler, Herrmann, Riehl y Vaubel 1969  
 (9) Many, Weisz y Simhony 1962  
 (10) Wey 1976

En la tabla anterior podemos ver que los contactos óhmicos se pueden poner tanto en semiconductores cristalinos inorgánicos como el GaAs, como en semiconductores orgánicos como el antraceno (C<sub>14</sub>H<sub>10</sub>), en semiconductores amorfos como el vidrio Ge<sub>16</sub>As<sub>35</sub>Te<sub>28</sub>S<sub>21</sub>, o en aislantes cristalinos como el

iodo.

La siguiente suposición que haremos será que los niveles de energía de los electrones del material forman una estructura de bandas, tal como se considera dentro de la teoría de bandas para sólidos (Lindmayer y Wrigley 1965, cap. 6). Supondremos que la banda de valencia, esto es, la banda que contiene las energías de los electrones de valencia de los átomos que forman el material, está nítidamente separada de la siguiente banda de energías permitidas (la llamada banda de conducción) por una banda de energías prohibidas cuyos límites, superior e inferior, están claramente definidos. Esta suposición implica, en primer lugar, que estamos considerando que el material es un semiconductor o un aislante, ya que en un conductor no existe una banda prohibida que separe a la banda de valencia de la banda de conducción. En segundo lugar, implica que estamos pensando en un semiconductor o un aislante cristalino, ya que en los materiales amorfos la banda prohibida no tiene fronteras bien definidas (Spear 1988; Zallen 1983, sec. 5.6).

Supondremos también que el número de portadores generados térmicamente es despreciable en comparación al número de portadores de carga que se inyectarán al material a través de los electrodos. Esta suposición es válida en semiconductores cristalinos inorgánicos a bajas temperaturas, en aislantes cristalinos como el iodo o el azufre, y en semiconductores cristalinos orgánicos como el naftaleno ( $C_{10}H_8$ ), el antraceno ( $C_{14}H_{10}$ ), o el tetraceno ( $C_{18}H_{12}$ ), los cuales tienen bandas prohibidas bastante anchas (5.0 eV, 3.9 eV, y 2.8 eV, respectivamente). Es conveniente observar que el iodo y el azufre son cristales moleculares (Seitz 1940, pags. 72-75; Many *et al.* 1961; Gill *et al.* 1967; Cotton y Wilkinson 1972, pag. 424), al igual que el naftaleno, el antraceno y el tetraceno (Kao y Hwang 1981, sec. 1.1; Simon y André 1985, sec.

5.1).

Lo que nos resta ahora es precisar el tipo de procesos de captura y recombinación de portadores que consideraremos en este trabajo.

Cuando consideremos la inyección simultánea de hoyos y electrones al interior del material supondremos que el único mecanismo de recombinación entre ambos tipos de portadores de carga es la recombinación directa entre hoyos y electrones libres (denominada en inglés "band-to-band recombination"). Esta suposición es válida, por ejemplo, en el caso de los semiconductores orgánicos como el antraceno, el naftaleno y el tetraceno, en los cuales la recombinación directa entre hoyos y electrones libres puede inclusive ser observada directamente debido a la emisión de luz asociada al proceso de recombinación (Meier 1974, cap. 10, sec. III; Helfrich y Schneider 1966). Por otro lado, esta suposición no sería realista en el caso de semiconductores inorgánicos como el silicio o el germanio, o en el de aislantes como el  $\text{SiO}_2$  o el  $\text{PbO}$ , en los cuales la recombinación directa entre hoyos y electrones libres es mucho menor que la recombinación indirecta a través de centros de recombinación (Sokel y Hughes 1982; Hughes y Sokel 1981; Lindmayer y Wrigley 1965, sec. 8.5).

Por lo que respecta a la captura de portadores libres por parte de "trampas" (en inglés "trapping centres", o simplemente "traps") constituidas por impurezas o defectos de la red cristalina, consideraremos dos posibles situaciones: (i) cuando el efecto de las trampas puede ser despreciado, y (ii) cuando tenemos una distribución uniforme de trampas, correspondientes a un único nivel energético dentro de la banda prohibida. La primera situación se presenta cuando la corriente que hacemos pasar por el material es lo suficientemente grande para que el número de portadores inyectados al material sea mucho mayor que el número de trampas presentes en el

mismo. En el caso del antraceno, por ejemplo, esta situación se presenta si hacemos pasar una corriente de  $10 \text{ mA/cm}^2$  a través de un cristal de 1 mm de espesor de muy buena calidad. En tal caso el tiempo de tránsito de los electrones es aproximadamente de  $3 \mu\text{s}$  (Pott y Williams 1969), y la carga inyectada al material durante ese tiempo es aproximadamente de  $3 \times 10^{-8} \text{ C/cm}^2$ , lo cual equivale a  $10^{11}$  electrones/ $\text{cm}^2$ , que es una cantidad 2 órdenes de magnitud superior al número de trampas presentes en un cristal de buena calidad (Helfrich y Schneider 1966). Por otra parte, cuando utilizamos corrientes más bajas, la presencia de las trampas ya no puede ser despreciada, y es necesario considerar, además de su densidad, su nivel energético dentro de la banda prohibida del material. En este trabajo solamente consideraremos aquella situación en la cual las trampas están situadas en un único nivel energético dentro de la banda prohibida. Esta situación se presenta en semiconductores orgánicos como el naftaleno (Kao y Hwang 1981, pags. 173-174) y las ftalocianinas (Simon y André 1985, pag. 110; Kao y Hwang 1981, pags. 171-173), y en aislantes como el azufre (Gill *et al.* 1967), el yodo (Many *et al.* 1961), y el sulfuro de arsénico (Schein 1977). La característica común de todos estos materiales es que todos ellos forman cristales moleculares (Batra *et al.* 1970). En este tipo de materiales las movilidades de los portadores de carga son bastante bajas (Schein 1977; Batra *et al.* 1970), y es válido suponer que dichas movilidades son independientes del campo eléctrico (Kao y Hwang 1981, pag. 311).

Con esto finalizamos la descripción de las suposiciones físicas que incorporaremos al modelo (y sus variantes) que utilizaremos en este trabajo. En resumen, podemos decir que dichas suposiciones son las siguientes:

1) consideraremos que el espesor del material es superior a  $10 \mu\text{m}$ ,

- 2) supondremos que los contactos entre el material y los electrodos son contactos óhmicos,
- 3) supondremos que el modelo de bandas puede ser usado para describir el comportamiento de los portadores de carga en el material,
- 4) supondremos que el número de portadores generados térmicamente puede ser despreciado en comparación al número de electrones y hoyos inyectados al material a través de los electrodos,
- 5) supondremos que el único mecanismo de recombinación entre portadores es la recombinación directa (de banda a banda) de hoyos libres con electrones libres,
- 6) cuando consideremos la presencia de trampas en el material, supondremos que dichas trampas corresponden a un único nivel energético dentro de la banda prohibida, y que están uniformemente distribuídas en el espacio,
- 7) supondremos, finalmente, que las movilidades de ambos tipos de portadores (electrones y hoyos) son constantes.

Como hemos visto a lo largo de esta sección, estas suposiciones son aplicables a cristales moleculares orgánicos (semiconductores orgánicos) como el naftaleno, el antraceno, el tetraceno y las ftalocianinas, y a cristales moleculares inorgánicos (aislantes) como el iodo, el azufre, y el sulfuro de arsénico.

En la siguiente sección veremos cómo estas suposiciones influyen en la forma de las ecuaciones que emplearemos para describir los transitorios eléctricos en nuestro material.

## I.4 Aspectos matemáticos

En la sección anterior vimos que las suposiciones físicas que introdujimos son particularmente aplicables a cristales moleculares, tanto orgánicos como inorgánicos, tales como el naftaleno, el yodo, las ftalocianinas, el sulfuro de arsénico y el azufre (entre otros). En esta clase de materiales (y considerando cristales con espesores superiores a  $10 \mu\text{m}$ ) los transitorios eléctricos pueden describirse mediante modelos hidrodinámicos constituidos por ecuaciones de arrastre y difusión, ecuaciones de balance, y por la ley de Gauss para el campo eléctrico (Kao y Hwang 1981, sec. 5.5; Batra *et al.* 1970; Gill y Batra 1971). A continuación veremos la forma específica de las ecuaciones que emplearemos en este trabajo.

### I.4.1 Sobre las ecuaciones de arrastre y difusión

Como el lector recordará, según la teoría de bandas las energías permitidas para los electrones de un sólido cristalino están agrupadas en bandas de energías permitidas, separadas entre sí por bandas de energías prohibidas. La teoría de bandas nos dice, además, que la conducción de corrientes eléctricas no es posible en bandas totalmente vacías o totalmente llenas (Lindmayer y Wrigley 1965, sec. 6.2). El que una banda vacía no contribuya a la conducción eléctrica es claro, ya que no hay portadores de carga que conduzcan la corriente. En cambio, el que una banda llena no pueda conducir una corriente eléctrica ya no es tan obvio. La imposibilidad en este caso es de origen cuántico. En una banda totalmente llena todos y cada uno de

los niveles permitidos de energía están llenos, y por lo tanto, de acuerdo al principio de exclusión de Pauli, ninguno de estos niveles puede aceptar a ningún electrón adicional. Por lo tanto, cuando se aplica un campo eléctrico al material, aún cuando cada electrón sienta el deseo de acelerarse y ganar energía por efecto del campo, en una banda llena esto no es posible, ya que ninguno de los electrones de una banda llena puede pasar a un nivel de energía superior (dentro de la misma banda), por estar todos los niveles de la banda ya ocupados.

En el caso de un semiconductor o un aislante a temperatura ambiente, tanto la banda de conducción como la banda de valencia están parcialmente llenas, y por lo tanto ambas bandas pueden contribuir a la conducción de corrientes eléctricas.

La contribución de los electrones presentes en la banda de conducción al paso de una corriente eléctrica a través de un semiconductor o un aislante, es una cantidad  $J'_n$  que consta de dos términos: uno debido a la migración de los electrones por efecto del campo eléctrico, y otro debido a la difusión resultante de un gradiente de concentración. En términos matemáticos esto se expresa en la forma siguiente (Shapiro y Bar-Yam 1988; Sokel y Hughes 1982; Hughes y Sokel 1981):

$$J'_n = q\mu_n n' E' + qD'_n \frac{\partial n'}{\partial x'} \quad (1)$$

donde  $q$  es el valor absoluto de la carga electrónica,  $n'$  es la densidad de electrones en la banda de conducción,  $D'_n$  es el coeficiente de difusión de los electrones, y  $\mu_n$  es su movilidad. Podemos ver que la componente migratoria de  $J'_n$  (i.e., el primer término del miembro derecho) es la expresión puntual de la

ley de Ohm, y la componente difusiva tiene la forma normal de los flujos asociados a procesos de difusión ocasionados por gradientes de concentración (Haase 1969, pag. 304). En la terminología usada normalmente en los artículos sobre transporte eléctrico en semiconductores y aislantes, se dice que una ecuación de la forma (1) es una ecuación "de arrastre y difusión" (Sokel y Hughes 1982).

Por otra parte, la contribución a la corriente que fluye por un semiconductor o un aislante debida a los electrones de una banda de valencia parcialmente llena, se describe de una manera diferente, ya que el movimiento de estos electrones está fuertemente influenciado por el principio de exclusión de Pauli, cosa que no ocurre con los electrones de la banda de conducción. Recordemos que en el caso de una banda llena la corriente total que conduce la banda es nula, de manera que si sumamos las contribuciones a la densidad de corriente provenientes de cada uno de los electrones de la banda tendremos que:

$$\frac{1}{V} \sum_k (-q)v_k = 0 \quad (2)$$

donde  $V$  es el volumen de la región considerada, y  $v_k$  es la velocidad del  $k$ -ésimo electrón. Por otra parte, si quitáramos al  $i$ -ésimo electrón, la densidad de corriente de los restantes electrones sería igual a:

$$\frac{1}{V} \sum_{k \neq i} (-q)v_k$$

y de acuerdo a la ec. (2) podemos ver que esta cantidad satisface la igualdad siguiente (Omar 1975, pag. 234):

$$\frac{1}{V} \sum_{k \neq i} (-q)v_k = \frac{1}{V} (+q)v_i$$

Esta ecuación nos muestra que la corriente que conduce una banda en la que falta un electrón es igual a la corriente que produciría una sola partícula de carga  $+q$ , moviéndose con la velocidad con que se movería el electrón faltante (Rosenberg 1978, pag. 146). Esto nos permite expresar la corriente conducida por la banda de valencia en términos del movimiento de un conjunto de partículas ficticias de carga positiva, a las que denominamos "hoyos", que ocupan el lugar de los electrones faltantes en la banda. Dado que la banda de valencia está casi llena, el número de hoyos es relativamente pequeño, y su comportamiento puede describirse mediante una ecuación de arrastre y difusión de la forma siguiente (Shapiro y Bar-Yam 1988):

$$J'_p = q\mu_p p' E' - qD'_p \frac{\partial p'}{\partial x'} \quad (3)$$

donde  $p'$  es la densidad de hoyos,  $\mu_p$  su movilidad, y  $D'_p$  su coeficiente de difusión.

La densidad total de corriente que fluye por el material es la suma de las corrientes debidas a los electrones de la banda de conducción y a los hoyos de la banda de valencia, más un término adicional debido a la corriente de desplazamiento, es decir:

$$J' = J'_n + J'_p + \epsilon \frac{\partial E'}{\partial t'}$$

donde  $\epsilon$  es la permitividad del material, y  $J'_n$  y  $J'_p$  están dadas por las ecuaciones (1) y (3), respectivamente.

#### I.4.2 Sobre las ecuaciones de balance

En este trabajo consideraremos varios tipos de ecuaciones de balance para los portadores de carga.

El caso más sencillo que consideraremos es aquél en el cual la corriente que fluye por el material es conducida por un sólo tipo de portadores (electrones u hoyos), no existen trampas en el material, y la difusión de portadores puede ser despreciada. En este caso (y suponiendo que los portadores sean electrones), la ecuación de balance es simplemente:

$$\frac{\partial n'}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} (\mu_n n' E')$$

El suponer que la corriente es transportada por un sólo tipo de portadores de carga es una suposición factible. Tal situación se obtiene usualmente usando el mismo material para fabricar el cátodo y el ánodo (Meier 1974, pag. 288). De esta manera podemos hacer pasar corrientes transportadas únicamente por electrones, o únicamente por hoyos, a través de los semiconductores orgánicos como el antraceno, el tetraceno, y el naftaleno. El suponer que la difusión de los portadores puede ser despreciada es también una suposición razonable que ha sido utilizada para estudiar el comportamiento del antraceno y el iodo (Kao y Hwang 1981, pags. 348-351; Schilling y Schachter 1967). Por otra parte, el suponer que no hay trampas en el material sí es una suposición más fuerte. Sin embargo, como mencionamos en la sección I.3, tal situación se presenta cuando la corriente que hacemos pasar por el material es lo suficientemente grande para que el número de portadores inyectados al material sea mucho mayor que el número de trampas presentes en el mismo.

Consideraremos también el caso en el cual la corriente es conducida por un sólo tipo de portadores, no hay trampas en el material, pero sí tomamos en cuenta la difusión de los portadores. En ese caso, la ecuación de balance será la siguiente:

$$\frac{\partial n'}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( \mu_n n' E' + D'_n \frac{\partial n'}{\partial x'} \right)$$

Otro caso que también consideraremos en este trabajo es aquél en el cual la corriente es conducida por un sólo tipo de portadores (electrones), la difusión de los mismos puede ser despreciada, y tenemos trampas situadas en un único nivel energético dentro de la banda prohibida del material, y distribuidas uniformemente en el espacio. En este caso tendremos dos ecuaciones de balance. La primera es simplemente una ecuación de continuidad de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t'} (n' + m') = \frac{\partial}{\partial x'} (\mu_n n' E')$$

donde  $n'$  es la densidad de electrones libres de la banda de conducción, y  $m'$  es la densidad de electrones que han sido capturados en las trampas. La segunda ecuación nos da la velocidad de captura y liberación de electrones por parte de las trampas:

$$\frac{\partial m'}{\partial t'} = C [ n'(N' - m') - Lm' ]$$

En esta ecuación  $N'$  es la densidad de trampas,  $C$  es una constante de proporcionalidad asociada a la velocidad de captura de electrones, y  $L$  otra constante asociada a la velocidad de liberación de los electrones capturados por las trampas. La ecuación anterior nos dice que la velocidad de captura es

proporcional al número de electrones libres y al número de trampas desocupadas, y que la velocidad de liberación es proporcional al número de electrones atrapados. Ambas proporcionalidades son intuitivamente comprensibles, y fueron originalmente encontradas por Shockley y Read en 1952 (Kao y Hwang 1981, pag. 246; Shockley y Read 1952). Es posible obtener una expresión para la constante  $L$  en función del nivel energético de las trampas,  $E_t$ , si consideramos que en condiciones de equilibrio la densidad de electrones capturados por las trampas obedece la distribución de Fermi-Dirac (Kao y Hwang 1981, sec. 3.1), y suponemos que en el equilibrio podemos expresar la densidad de electrones libres en la banda de conducción mediante la distribución de Maxwell-Boltzmann (Lindmayer y Wrigley 1965, sec. 6.3). Con estas suposiciones podemos escribir:

$$m' = N' \left[ 1 + \exp\left(\frac{E_t - E_{Fn}}{kT}\right) \right]^{-1} \quad (\text{en el equilibrio})$$

$$n' = N_c \exp \left[ -\left(\frac{E_c - E_{Fn}}{kT}\right) \right] \quad (\text{en el equilibrio})$$

donde  $E_t$  es el nivel energético de las trampas,  $E_c$  la energía de la orilla inferior de la banda de conducción,  $E_{Fn}$  el nivel de Fermi para los electrones, y  $N_c$  la densidad efectiva de estados en la banda de conducción. Por otra parte, en condiciones de equilibrio la derivada  $\partial m' / \partial t'$  se anula, de manera que tenemos la igualdad:

$$n'(N' - m') = Lm' \quad (\text{en el equilibrio})$$

Sustituyendo en esta ecuación las expresiones dadas arriba para  $m'$  y  $n'$ , obtenemos:

$$L = N_c \exp \left[ -(E_c - E_t) / kT \right]$$

que era la expresión buscada para L en términos de  $E_c - E_t$ .

En este trabajo analizaremos también el caso en que la corriente eléctrica sea transportada por ambos tipos de portadores de carga (electrones y hoyos). Al estudiar este caso supondremos que no existen trampas ni centros de recombinación en la banda prohibida del material, y que la difusión de los portadores puede ser despreciada. En tal caso, las ecuaciones de balance para electrones y hoyos toman la forma:

$$\frac{\partial n'}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} (\mu_n n' E') - C_r' n' p'$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t'} = - \frac{\partial}{\partial x'} (\mu_p p' E') - C_r' n' p'$$

donde  $C_r'$  es la llamada constante de velocidad de recombinación. Estas ecuaciones expresan el hecho conocido (Kao y Hwang 1981, sec. 4.1.2) de que la velocidad de recombinación directa entre hoyos y electrones libres es proporcional al producto de las densidades de ambos portadores. Como mencionamos en la sección anterior, este tipo de recombinación se presenta en el caso de los semiconductores orgánicos como el naftaleno, el antraceno, y el tetraceno.

#### I.4.3 Sobre las condiciones iniciales y de frontera

Para obtener una solución particular de las ecuaciones de arrastre y

difusión y de las ecuaciones de balance, necesitamos especificar las condiciones iniciales y de frontera que deberán cumplirse.

Por lo que respecta a las condiciones iniciales, supondremos que inicialmente el material está descargado, de manera que en el instante inicial tendremos:

$$n'(x',0) = 0 \quad 0 \leq x' \leq d'$$

$$p'(x',0) = 0 \quad 0 \leq x' \leq d'$$

y por consiguiente también tendremos que:

$$E'(x',0) = 0 \quad 0 \leq x' \leq d'$$

siendo  $d'$  el espesor del material. Estas ecuaciones reflejan el hecho de que antes del instante  $t'=0$  no hemos inyectado portadores de carga dentro del material, y también reflejan la suposición de que en comparación con los números de electrones y hoyos que inyectaremos al material a través de los electrodos, el número de pares electrón-hoyo generados térmicamente puede ser despreciado.

Por lo que respecta a las condiciones de frontera, recordemos que en la sección I.3 indicamos que en este trabajo consideraremos que los contactos entre el material y los electrodos encargados de inyectarle portadores de carga son contactos óhmicos. Esto implica que el campo eléctrico en estos contactos será nulo, ya que precisamente un contacto óhmico puede definirse como un contacto en el cual la intensidad del campo eléctrico es cero, independientemente de la corriente que fluya por el material (Parmenter y Ruppel 1959; O'Dwyer 1968). Por lo tanto, como a lo largo de todo este trabajo

siempre supondremos que el cátodo (situado en  $x' = 0$ ) será un electrodo encargado de inyectarle electrones a la banda de conducción del material, deberá satisfacerse la condición de frontera:

$$E'(0, t') = 0 \quad t' \geq 0$$

Por otro lado, cuando el ánodo actúe como un electrodo inyector de hoyos a la banda de valencia del material, también deberemos considerar la condición e frontera:

$$E'(d', t') = 0 \quad t' \geq 0$$

Esta condición, sin embargo, no se exigirá en aquellos casos en que el ánodo no se utilice para inyectar hoyos al material, sino que actúe simplemente como una puerta de salida para los electrones que viajan en la banda de conducción del material.

### I.5 Descripción del presente trabajo

Tal como lo explicamos en la sección I.2, en este trabajo estudiaremos los transitorios eléctricos que se producen cuando aplicamos súbitamente una corriente constante a través de materiales semiconductores o aislantes (transitorios de carga), así como los transitorios que se producen cuando interrumpimos abruptamente la corriente (transitorios de descarga). Las particularidades de los materiales en los cuales estamos pensando se explicaron ya en la sección I.3.

Los resultados de este trabajo se presentan en el siguiente capítulo (cap.

II). Dicho capítulo está dividido en seis secciones, en las cuales consideraremos seis situaciones diferentes.

En la sección II.1 estudiaremos el transitorio de carga en un material en el cual la corriente es conducida por ambos tipos de portadores de carga, es decir, electrones y hoyos. En esta sección consideraremos que no hay trampas en el material, y que la difusión de portadores puede ser despreciada. Consideraremos también que hay recombinación directa entre hoyos y electrones libres. La estructura del sistema de ecuaciones que describe a este sistema físico se analizará en la sub-sección II.1.1. En la sub-sección II.1.2 encontraremos cómo evoluciona el campo eléctrico dentro del material, cómo varían las densidades de los portadores de carga, y a qué velocidad avanzan los frentes de portadores. Finalmente, en la sub-sección II.1.3 calcularemos cuál es el estado estacionario al cual llega el sistema, cuánto tiempo tarda en alcanzarse dicho estado, y cómo influye la recombinación de portadores en dicho tiempo.

Posiblemente el punto más interesante de la sección II.1 es que pone en evidencia que la estructura matemática fundamental para describir los transitorios eléctricos en semiconductores y aislantes es lo que los matemáticos denominan "sistemas hiperbólicos cuasi-lineales". Esto es importante, ya que el sólo hecho de conocer si el sistema es hiperbólico, parabólico, o elíptico, nos da una idea de la forma en que evoluciona el sistema. Por ejemplo:

- (i) en sistemas hiperbólicos los disturbios dentro del sistema físico se propagan con velocidad finita, a lo largo de curvas bien definidas en el plano  $x-t$ , conocidas como curvas características,
- (ii) en sistemas parabólicos usualmente hay una propagación instantánea de

información, de manera que un disturbio inicialmente puntual afecta instantáneamente a la totalidad del sistema (como sucede en el caso de la propagación de calor descrita por la ecuación de difusión normal),

(iii) en sistemas elípticos por lo general no hay evolución en el tiempo; describen situaciones estáticas, o en estado estacionario.

Además, desde el punto de vista matemático también es importante saber a qué categoría pertenecen las ecuaciones con las que vamos a trabajar, pues los métodos analíticos de solución son diferentes dependiendo si el sistema es hiperbólico, parabólico, o elíptico.

En las secciones II.2, II.3, y II.4 estudiaremos los transitorios de carga y descarga en sistemas con electrodos planos, cilíndricos, y esféricos, respectivamente. En estas secciones supondremos que la corriente eléctrica es transportada por un sólo tipo de portadores de carga, que no hay trampas en el material, y que la difusión de portadores puede ser despreciada. En cada una de estas tres secciones encontraremos la dependencia espacio-temporal del campo eléctrico, así como de la densidad de portadores de carga. Calcularemos también la forma de los transitorios de voltaje, y obtendremos expresiones para calcular la movilidad de los portadores a partir de la duración de los transitorios de carga.

En la sección II.5 estudiaremos los transitorios de carga y descarga en un sistema en el cual la corriente es transportada por un sólo tipo de portadores, y en el cual existen trampas situadas en un único nivel energético dentro de la banda prohibida del material. Mostraremos que también en este caso los transitorios eléctricos están descritos por un sistema hiperbólico cuasi-lineal, y hallaremos una solución aproximada para dicho sistema. Mediante esta solución obtendremos una expresión para calcular la movilidad de los

portadores de carga a partir de la duración del transitorio de carga. Esta expresión nos mostrará hasta qué punto, y bajo qué condiciones, es válido despreciar la presencia de trampas en el material.

Finalmente, en la sección II.6 estudiaremos los transitorios de carga y descarga en un sistema en el cual la corriente es transportada por un sólo tipo de portadores de carga, no hay trampas en el material, y la difusión de portadores sí es tomada en cuenta. En este caso, las ecuaciones que describen los transitorios de carga y descarga dejan de ser hiperbólicas, y se transforman en parabólicas. Resolviendo estas ecuaciones encontraremos la dependencia espacio-temporal del campo eléctrico durante los transitorios de carga y descarga. Hallaremos también una expresión para el campo eléctrico en el estado estacionario, y una expresión para el valor estacionario del voltaje. Esta última expresión nos mostrará hasta qué punto es válido despreciar la difusión de los portadores de carga.

## II RESULTADOS ANALITICOS Y NUMERICOS

### II.1 Sistemas con ambos tipos de portadores de carga

#### II.1.1 El sistema de ecuaciones

El sistema considerado en esta sección es un semiconductor sin trampas, colocado entre dos electrodos planos, separados una distancia  $d'$ . Consideraremos que los electrones son inyectados dentro de la banda de conducción del material por el electrodo de la izquierda (el cátodo), situado en  $x' = 0$ . En forma similar, consideraremos que los hoyos son inyectados dentro de la banda de valencia del material por el electrodo de la derecha (el ánodo), situado en  $x' = d'$ . Supondremos que el cátodo actúa como un contacto óhmico para el flujo de electrones, y el ánodo como un contacto óhmico para el flujo de hoyos. Además supondremos que el número de portadores generados térmicamente puede ser despreciado en comparación con el número de portadores inyectados por los electrodos. Por lo que respecta al proceso de recombinación entre portadores, en este trabajo sólo consideraremos el caso de la recombinación directa de banda a banda entre hoyos y electrones libres, en el cual no intervienen centros de recombinación. Finalmente, consideraremos que en el instante  $t' = 0$  una densidad de corriente constante  $J'_0 < 0$  es impuesta a través del material.

Con las suposiciones arriba mencionadas, las ecuaciones que gobiernan el flujo de portadores son la ecuación para la densidad de corriente total (Kao y Hwang 1981, pags. 360-361):

$$J'_o = q\mu_n n'E' + q\mu_p p'E' + \epsilon \frac{\partial E'}{\partial t'} \quad (4)$$

las ecuaciones de balance para electrones y hoyos:

$$\frac{\partial n'}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} (\mu_n n'E') - C'_r n'p' \quad (5)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial x'} (\mu_p p'E') - C'_r n'p' \quad (6)$$

y la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial E'}{\partial x'} = \frac{q}{\epsilon} (p' - n') \quad (7)$$

En estas ecuaciones  $q$  es el valor absoluto de la carga electrónica,  $\mu_n$  and  $\mu_p$  son los valores absolutos de las movilidades de hoyos y electrones,  $n'$  y  $p'$  son las densidades de electrones libres y hoyos libres,  $\epsilon$  es la permitividad (o constante dieléctrica),  $C'_r$  es la constante de recombinación directa de banda a banda, y  $E'$  es el campo eléctrico.

Ahora introduzcamos las siguientes variables adimensionales:

$$x = x'/d'$$

$$t = \left( \frac{\mu J'_u}{\epsilon d'} \right)^{1/2} t'$$

$$n = \left( \frac{\mu d'}{\epsilon J'_u} \right)^{1/2} qn'$$

$$p = \left( \frac{\mu d'}{\epsilon J'_u} \right)^{1/2} qp'$$

$$J_o = J'_o / J'_u$$

$$E = \left( \frac{\epsilon \mu}{d' J'_u} \right)^{1/2} E'$$

$$v_n = \mu_n / \mu$$

$$v_p = \mu_p / \mu$$

$$C_r = \frac{\epsilon}{q \mu} C'_r$$

donde  $J'_u$  es un valor característico (positivo) de la densidad de corriente, y  $\mu$  se ha definido como:

$$\mu = \frac{\mu_n + \mu_p}{2}$$

Con las variables adimensionales definidas arriba las ecuaciones básicas (1)-(4) toman la forma:

$$J_o = v_n n E + v_p p E + E_t \quad (8)$$

$$n_t = \frac{\partial}{\partial x} (v_n n E) - C_r n p \quad (9)$$

$$p_t = - \frac{\partial}{\partial x} (v_p p E) - C_r n p \quad (10)$$

$$E_x = p - n \quad (11)$$

donde los subíndices x y t indican las derivadas parciales respecto a esas variables. Estas ecuaciones fueron estudiadas primeramente por Gill y Batra (Gill y Batra 1971). Sin embargo, las condiciones de frontera que utilizaron estos autores fueron diferentes a las que se considerarán en este trabajo, lo

cual cambia totalmente la naturaleza del problema. En particular, Gill y Batra utilizaron una condición de voltaje constante, en lugar de la condición de corriente constante que utilizaremos aquí.

A partir de las ecuaciones (8)-(11) es posible probar que  $J_0$  es independiente de  $x$ . Una vez sabiendo esto, la ecuación (11) se transforma en una consecuencia obligada de las ecuaciones de evolución temporal (8)-(10). Por tal motivo, podemos momentáneamente olvidarnos de la ecuación (11), y concentrar nuestra atención en las ecuaciones de evolución temporal.

Las tres ecuaciones de evolución temporal (8)-(10) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) de primer orden, que puede ser escrito en la forma compacta:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} + B(U) = 0 \quad (12)$$

donde  $U$  y  $B(U)$  son los vectores columna:

$$U(x,t) = \begin{bmatrix} E(x,t) \\ n(x,t) \\ p(x,t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$B(U) = \begin{bmatrix} v_n nE + v_p pE - J_0 \\ C_{r,np} \\ C_{r,np} \end{bmatrix} \quad (14)$$

y  $A(U)$  es la matriz cuadrada:

$$A(U) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -v_n n & -v_n E & 0 \\ v_p p & 0 & v_p E \end{bmatrix} \quad (15)$$

Los sistemas cuasi-lineales de primer orden en dos dimensiones (una espacial y otra temporal), tales como el sistema (12), pueden ser clasificados en

parabólicos, elípticos, ultrahiperbólicos, hiperbólicos, y estrictamente hiperbólicos (Jeffrey 1977, cap. 2), dependiendo de los valores propios (eigenvalores) y vectores propios (eigenvectores) de la matriz  $A(U)$ . En nuestro caso los valores propios de  $A(U)$  son los siguientes:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\nu \frac{E}{n}, \quad \lambda_3 = \nu \frac{E}{p} \quad (16)$$

y los vectores propios son :

$$v_1 = \begin{bmatrix} E \\ -n \\ -p \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Podemos observar que en todos aquellos puntos  $(x,t)$  donde  $E \neq 0$  tenemos tres valores propios reales y distintos, y tres vectores propios linealmente independientes, lo cual implica que el sistema (12) constituye un sistema estrictamente hiperbólico (Jeffrey 1977, Richtmyer 1978, pags. 364-383).

Para obtener una solución particular del sistema (12) tenemos que especificar las condiciones iniciales y de frontera que se impondrán al sistema. Si consideramos que no se han inyectado portadores libres al material antes del instante  $t = 0$ , y tomamos en cuenta que el número de portadores libres generados térmicamente se considerará despreciable, tendremos las condiciones iniciales (Kao y Hwang 1981, pag. 361):

$$n(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (18)$$

$$p(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (19)$$

Además, como el estado inicial del material a partir del cual se iniciará el proceso de inyección de carga es un estado en el cual no se ha aplicado todavía

ningún campo eléctrico externo, tendremos la condición inicial adicional:

$$E(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (20)$$

Por otra parte, es bien conocido (Lampert y Mark 1970, pags. 36-37; Parmenter y Ruppel 1959; Many y Rakavy 1962; O'Dwyer 1968) que el hecho de considerar contactos óhmicos entre nuestros electrodos y el material nos permite considerar las condiciones de frontera:

$$E(0,t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (21)$$

$$E(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (22)$$

En la siguiente sección consideraremos lo referente a las curvas características del sistema (12).

### II.1.2 Curvas características

En el instante  $t = 0$ , cuando imponemos súbitamente una corriente constante a través del material, los electrones inyectados por el cátodo (situado en  $x=0$ ) comienzan a cruzar el material de izquierda a derecha (en dirección hacia el ánodo situado en  $x=1$ ), y los hoyos comienzan a cruzarlo en dirección opuesta. Conforme el tiempo avanza, los electrones y los hoyos se van acercando unos a otros, se encuentran, se superponen y se recombinan, y eventualmente alcanzan al electrodo opuesto a aquél del cual partieron. La evolución en el tiempo de este proceso se podrá apreciar claramente una vez que hayamos determinado las trayectorias en el plano  $(x,t)$  de los frentes de avance de electrones y hoyos.

Estas dos trayectorias son los frentes de onda de dos disturbios propagándose en el material, por lo cual esperamos que sean curvas características del sistema (12). En lo que sigue veremos que efectivamente tal es el caso.

Las curvas características del sistema (12) son las soluciones de las ecuaciones (Jeffrey 1977, Richtmyer 1978):

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(E), \quad i = 1, 2, 3 \quad (23)$$

donde los valores de  $\lambda_i(E)$  están dados en (13). Para  $i = 1$  las soluciones son simplemente las líneas rectas  $x = \text{constante}$ . Más adelante veremos que estas líneas pueden actuar como transportadoras de discontinuidades de la derivada parcial  $E_x$  en el caso límite en el cual  $C_r = \infty$ . Por otra parte, para obtener las soluciones de la ecuación (23) correspondientes a  $i = 2$  e  $i = 3$ , es necesario calcular primero el campo eléctrico  $E(x,t)$ , ya que los valores propios  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  son funciones de  $E(x,t)$ .

Empecemos por calcular el campo eléctrico  $E(x,t)$  en la porción de la franja  $S = \{ (x,t) \mid 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 \}$  en la cual  $p = 0$ . Que tal porción debe existir debe ser intuitivamente claro, ya que el frente de avance de los hoyos se propaga con una velocidad finita. Sobre esta porción de la franja  $S$  las ecuaciones (8) y (11) se simplifican, y pueden combinarse en una única ecuación diferencial parcial de primer orden para el campo eléctrico:

$$-v \frac{E E_x}{n} + E_t = J_o \quad (24)$$

Para obtener la solución de esta ecuación conviene visualizar a las variables  $x$ ,  $t$ , y  $E$  como a funciones de dos parámetros característicos  $s$  y  $\tau$ , y considerar las llamadas "ecuaciones características" (Jeffrey 1977, Zauderer

1983, pags. 37-39, 85-90):

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -\nu_n E \quad (25)$$

$$\frac{\partial t}{\partial s} = 1 \quad (26)$$

$$\frac{\partial E}{\partial s} = J_o \quad (27)$$

Estas ecuaciones deben resolverse conjuntamente con las condiciones iniciales:

$$x(0, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leq 0 \\ \tau, & \tau \geq 0 \end{cases} \quad (28)$$

$$t(0, \tau) = \begin{cases} -\tau, & \tau \leq 0 \\ 0, & \tau \geq 0 \end{cases} \quad (29)$$

$$E(0, \tau) = 0, \quad -\infty \leq \tau \leq \infty \quad (30)$$

que son simplemente una representación paramétrica de las condiciones iniciales y de frontera (20) y (21). Podemos ver que la solución de las ecuaciones características, junto con sus condiciones iniciales, es la siguiente:

$$E(s, \tau) = J_o s \quad (31)$$

$$x(s, \tau) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \nu_n J_o s^2 & \tau \leq 0 \\ -\frac{1}{2} \nu_n J_o s^2 + \tau & \tau \geq 0 \end{cases} \quad (32)$$

$$t(s, \tau) = \begin{cases} s - \tau & \tau \leq 0 \\ s & \tau \geq 0 \end{cases} \quad (33)$$

y de estas expresiones se sigue que la función  $E(x, t)$  tiene la forma:

$$E(x,t) = \begin{cases} J_o t, & (x,t) \in R_1 \\ -(-2J_o x/v_n)^{1/2}, & (x,t) \in R_2 \end{cases} \quad (34)$$

donde  $R_1$  y  $R_2$  son las regiones mostradas en la figura 1. La expresión anterior implica que la densidad de electrones libres es:

$$n(x,t) = \begin{cases} 0, & (x,t) \in R_1 \\ \left( -\frac{J_o}{2v_n x} \right)^{1/2}, & (x,t) \in R_2 \end{cases} \quad (35)$$

La solución de las ecuaciones características muestra que la frontera que separa las regiones  $R_1$  y  $R_2$  es el arco de parábola:

$$t = \left( -\frac{2x}{v_n J_o} \right)^{1/2}, \quad 0 \leq t \leq t_m \quad (36)$$

donde  $t_m$  es el instante (aún por determinarse) en que los frentes de electrones y hoyos se encuentran. Esta curva define la trayectoria que sigue el frente de electrones (para  $t < t_m$ ), y es, como esperábamos, una curva característica, ya que es solución de la ecuación (23) para  $i = 2$ .

Las demás fronteras que delimitan a las regiones  $R_1$  y  $R_2$  se determinarán un poco más adelante, pero desde ahora las podemos observar en la figura 1.

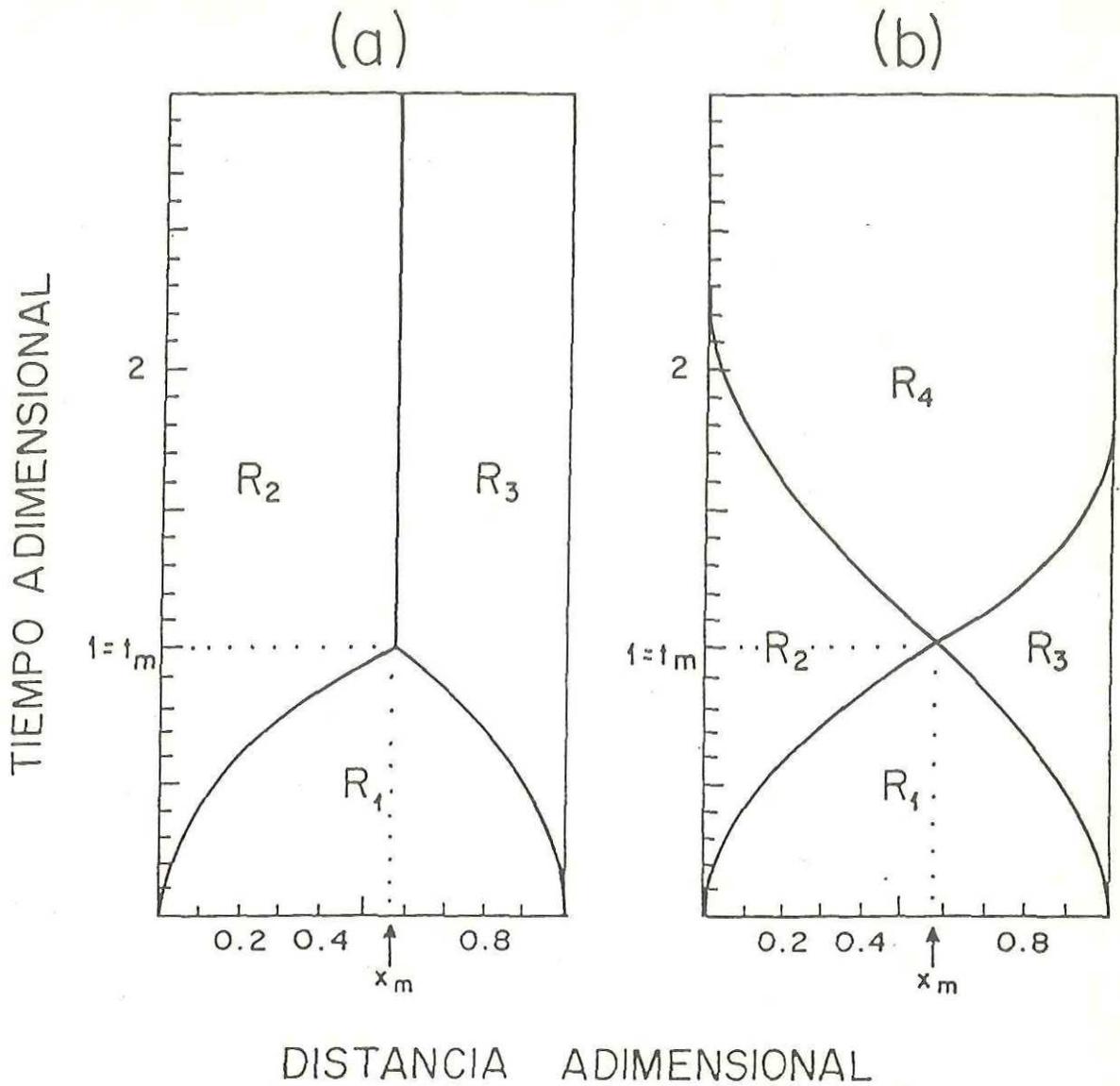


Figura 1. Curvas características que delimitan las regiones:  $R_1$  (donde no han llegado todavía los hoyos y electrones inyectados por los electrodos),  $R_2$  (donde los únicos portadores libres son electrones),  $R_3$  (donde los únicos portadores libres son hoyos), y  $R_4$  (donde coexisten ambos tipos de portadores). El caso (a) corresponde a una velocidad de recombinación infinita ( $C_r = \infty$ ), y el caso (b) a un valor finito de  $C_r$ . En ambos casos  $\nu_n = 8/7$ ,  $\nu_p = 6/7$ , y  $J_o = -1$ .

Procediendo en forma similar en la porción de la franja S en la cual  $n = 0$ , se encuentra que:

$$E(x,t) = \begin{cases} J_o t, & (x,t) \in R_1 \\ - \left[ -2J_o(1-x)/v_p \right]^{1/2}, & (x,t) \in R_3 \end{cases}, \quad (37)$$

y:

$$p(x,t) = \begin{cases} 0, & (x,t) \in R_1 \\ \left[ -\frac{J_o}{2v_p(1-x)} \right]^{1/2}, & (x,t) \in R_3 \end{cases}, \quad (38)$$

donde la solución de las ecuaciones características implica que la frontera entre las regiones  $R_1$  y  $R_3$  está dada por:

$$t = \left[ -\frac{2(1-x)}{v_p J_o} \right]^{1/2}, \quad 0 \leq t \leq t_m \quad (39)$$

Esta curva define la trayectoria que sigue el frente de hoyos (para  $t < t_m$ ), y es una curva característica, ya que es una solución de la ecuación (23) para  $i = 3$ .

De la intersección de las curvas (36) y (39) obtenemos que la posición  $x_m$  y el tiempo  $t_m$  en los cuales se encuentran los frentes de electrones y hoyos son:

$$x_m = \frac{1}{2} v_n = 1 - \frac{1}{2} v_p \quad (40)$$

$$t_m = (-J_o)^{-1/2} \quad (41)$$

Ahora la pregunta es: ¿qué pasa cuando se encuentran los hoyos y los electrones?. La respuesta a esta pregunta depende de la constante de recombinación  $C_r$ . Si la recombinación de hoyos y electrones fuera instantánea (i.e.  $C_r = \infty$ ), el flujo de electrones arribando al punto de encuentro  $(x_m, t_m)$  cancelaría exactamente al flujo de hoyos (independientemente de los valores de  $v_n$  y  $v_p$ ), y consecuentemente los frentes de electrones y hoyos permanecerían fijos en la posición  $x_m$ . En este caso el sistema estaría en estado estacionario a partir del instante  $t_m$ , y el campo eléctrico estacionario sería:

$$E(x) = \begin{cases} - (-2J_o x/v_n)^{1/2}, & 0 \leq x \leq x_m \\ - \left[ -2J_o (1-x)/v_p \right]^{1/2}, & x_m \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (42)$$

Podemos observar que  $E(x)$  es continua en  $x_m$ , pero la derivada  $E_x$  no lo es. Por lo tanto, en este caso límite la superficie  $E(x,t)$  tiene un doblez a lo largo de la recta  $x = x_m$ , para  $t \geq t_m$ , como se indica en la figura 1(a). La existencia de este doblez es posible únicamente debido a que las rectas  $x = \text{cte.}$  son curvas características del sistema (12), como ya hemos visto arriba.

Para valores más realistas de la constante  $C_r$  (i.e. valores finitos), después del instante  $t_m$  el frente de electrones penetrará en la zona ocupada por hoyos, e inversamente, el frente de hoyos penetrará en la zona ocupada por electrones. De esta manera una zona de coexistencia de hoyos y electrones (que denotaremos como  $R_4$ ) se formará, tal como se indica en la figura 1(b).

Las fronteras de la región  $R_4$  con las regiones  $R_2$  y  $R_3$  serán dos curvas características, de la misma forma que las fronteras de  $R_1$  con  $R_2$  y  $R_3$  son también curvas características. Para obtener la forma analítica de la frontera entre  $R_2$  y  $R_4$  podemos usar la expresión para  $E(x)$  válida en  $R_2$  para integrar la

ecuación característica (23) correspondiente al valor propio  $\lambda_3 = \nu_p E$ . De esta manera obtenemos que la frontera entre  $R_2$  y  $R_4$  es el arco de parábola:

$$t = \left(1 + \frac{\nu_n}{\nu_p}\right) t_m - \left(1 + \frac{\nu_n}{\nu_p}\right) x_m^{1/2} t_m x^{1/2}, \quad 0 \leq x \leq x_m \quad (43)$$

Esta característica define la trayectoria seguida por el frente de hoyos para  $t \geq t_m$ . Haciendo  $x = 0$  en esta ecuación vemos que el tiempo  $t_p$  al cual los primeros hoyos llegan al cátodo es:

$$t_p = \left(1 + \frac{\nu_n}{\nu_p}\right) t_m \quad (44)$$

Esta igualdad resulta más útil si la escribimos en términos de cantidades con dimensiones, es decir, en la forma:

$$t_p' = \frac{2}{\mu_p} \left( - \frac{\epsilon \mu d'}{J_o'} \right)^{1/2} \quad (45)$$

Escrita así, esta ecuación nos muestra cómo tendríamos que variar el espesor  $d'$  del material y/o la corriente  $J_o'$  aplicada al mismo, si deseáramos modificar el tiempo de tránsito  $t_p'$  del frente de hoyos.

Para obtener la forma analítica de la frontera entre  $R_3$  y  $R_4$  podemos proceder de forma similar, y usar la expresión para  $E(x)$  válida en  $R_3$  para integrar la ecuación característica (23) correspondiente al valor propio  $\lambda_2 = -\nu_n E$ . De esta forma encontramos que la frontera entre  $R_3$  y  $R_4$  está dada por la siguiente expresión:

$$t = \left(1 + \frac{\nu_p}{\nu_n}\right) t_m - \left(1 + \frac{\nu_p}{\nu_n}\right) (1-x_m)^{1/2} t_m (1-x)^{1/2}, \quad x_m \leq x \leq 1 \quad (46)$$

Esta característica define la trayectoria seguida por el frente de electrones

para  $t \geq t_m$ . Haciendo  $x = 1$  en esta ecuación vemos que el tiempo  $t_n$  al cual los primeros electrones llegan al ánodo es:

$$t_n = \left( 1 + \frac{v_p}{v_n} \right) t_m \quad (47)$$

Al igual que en el caso del movimiento de hoyos, esta ecuación se puede escribir con cantidades con dimensiones en la forma:

$$t_n' = \frac{2}{\mu_n} \left( - \frac{\epsilon \mu d'}{J_o'} \right)^{1/2} \quad (48)$$

Las ecuaciones (45) y (48) nos muestran que si modificamos la razón  $d'/J_o'$  en un factor  $n^2$ , ambos tiempos de tránsito  $t_p'$  y  $t_n'$  se modificarán en un factor  $n$ . De estas dos ecuaciones también podemos ver que la razón entre los tiempos de tránsito está dada, precisamente, por la razón inversa entre las movilidades:

$$\frac{t_p'}{t_n'} = \frac{\mu_n}{\mu_p} \quad (49)$$

Como en muchos casos prácticos se conocen las movilidades de los portadores, esta ecuación nos permite saber cuánto más tardará el frente de hoyos, comparado al de electrones, en cruzar el material.

Ahora, una vez conociendo las trayectorias completas de los frentes de electrones y hoyos, la evolución en el tiempo del proceso de inyección de portadores de carga dentro del material puede apreciarse con claridad. En la figura 2 podemos observar dichas trayectorias para diferentes valores de  $v_n$  y  $v_p$ .

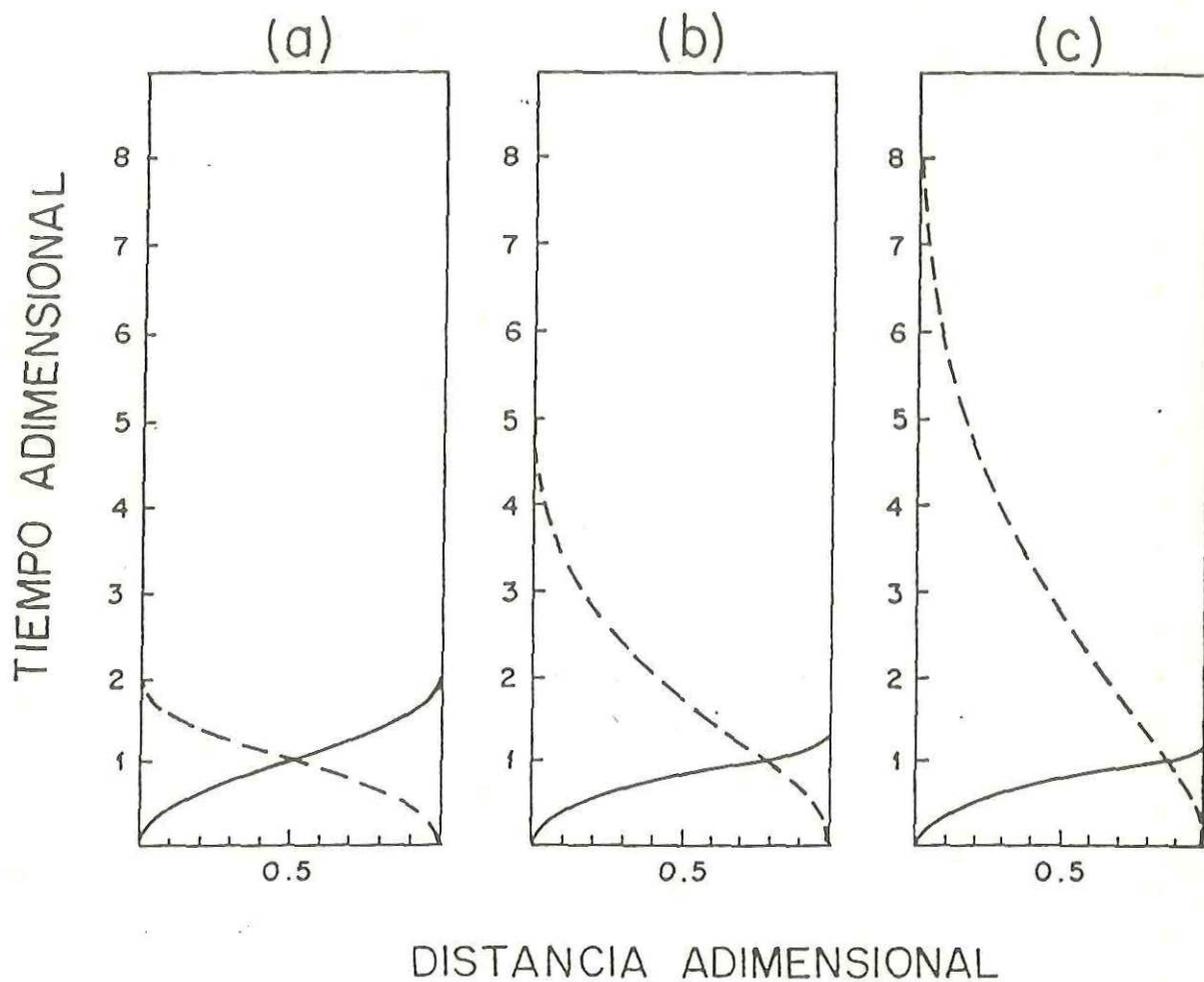


Figura 2. Frentes de avance de electrones (curvas continuas) y hoyos (curvas discontinuas) para  $J_0 = -1$ , y diferentes valores de las movilidades adimensionales: (a)  $\nu_n = \nu_p = 1$ , (b)  $\nu_n = 11/7$ ,  $\nu_p = 3/7$ , y (c)  $\nu_n = 7/4$ ,  $\nu_p = 1/4$ .

Para finalizar esta sub-sección quisiera aclarar una interrogante interesante, que me fue planteada originalmente por el Dr. Enrique Cabrera.

La interrogante es la siguiente: hemos visto que para todo valor finito de  $C_r$  (inclusive si  $C_r$  es muy grande) los frentes de avance de hoyos y electrones están dados por los arcos de parábola (43) y (46). En cambio, cuando  $C_r = \infty$  estos arcos de parábola se transforman abruptamente en la recta  $x = x_m$ . ¿Cómo es que tiene lugar este cambio, aparentemente discontinuo?

A continuación mostraremos que la respuesta a esta interrogante es que, si bien la forma de los frentes de avance de hoyos y electrones es independiente de  $C_r$  (para  $C_r$  finita), el número de hoyos que marchan a lo largo del frente de avance (43), así como el número de electrones que marchan a lo largo del frente de avance (46), sí son cantidades que dependen de  $C_r$ , y que tienden a cero conforme  $C_r$  tiende a infinito.

Para simplificar un poco el álgebra consideremos el caso particular en el cual  $\nu_n = \nu_p = -J_0 = 1$ . En tal caso las ecuaciones fundamentales (8)-(11) tienen la forma:

$$E_t + nE + pE + 1 = 0 \quad (50)$$

$$n_t = nE_x + En_x - C_r np \quad (51)$$

$$p_t = -pE_x - Ep_x - C_r np \quad (52)$$

$$E_x = p - n \quad (53)$$

Despejando a  $p$  de (53), y sustituyéndola en (50) y (51), obtenemos las dos ecuaciones siguientes:

$$E_t + EE_x + 0 + 0 + (2nE+1) = 0 \quad (54)$$

$$0 + (1-C_r)nE_x - n_t + En_x - C_r n^2 = 0 \quad (55)$$

que constituyen un sistema de la forma:

$$A_i E_t + B_i E_x + C_i n_t + D_i n_x + F_i = 0 \quad (i=1,2) \quad (56)$$

Courant y Friedrichs (Courant y Friedrichs 1948) muestran que un sistema de este tipo puede transformarse en el siguiente sistema de "ecuaciones características":

$$x_\alpha - \zeta_+ t_\alpha = 0 \quad (57)$$

$$x_\beta - \zeta_- t_\beta = 0 \quad (58)$$

$$TE_\alpha + (a\zeta_+ - S)n_\alpha + (K\zeta_+ - H)t_\alpha = 0 \quad (59)$$

$$TE_\beta + (a\zeta_- - S)n_\beta + (K\zeta_- - H)t_\beta = 0 \quad (60)$$

donde  $\zeta_+$  y  $\zeta_-$  son las soluciones de la ecuación:

$$a\zeta^2 - 2b\zeta + c = 0$$

en la cual:

$$a = [AC], \quad 2b = [AD] + [BC], \quad c = [BD]$$

con:

$$[XY] = X_1 Y_2 - X_2 Y_1$$

y:

$$T = [AB], \quad S = [BC], \quad K = [AF], \quad H = [BF]$$

En el caso particular del sistema (54)-(55) las 4 ecuaciones características tienen la forma:

$$x_{\alpha} - Et_{\alpha} = 0 \quad (61)$$

$$x_{\beta} + Et_{\beta} = 0 \quad (62)$$

$$(1-C_r)nE_{\alpha} + [-2C_rEn^2 + 2En^2 - (C_r-1)n]t_{\alpha} = 0 \quad (63)$$

$$(1-C_r)nE_{\beta} + 2En_{\beta} + [2En^2 - (C_r-1)n]t_{\beta} = 0 \quad (64)$$

Si ahora despejamos a  $t_{\beta}$  de (62), la sustituimos en (64), y luego multiplicamos la ecuación resultante por  $E/x_{\beta}$ , obtenemos:

$$(1-C_r)nEE_{\beta}/x_{\beta} + 2E^2n_{\beta}/x_{\beta} + (C_r-1)n - 2En^2 = 0 \quad (65)$$

y como (Zemansky 1968, pags. 39 y 283):

$$\frac{E_{\beta}}{x_{\beta}} = \left( \frac{\partial E}{\partial \beta} \right)_{\alpha} \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)_{\alpha} = \left( \frac{\partial E}{\partial x} \right)_{\alpha}$$

$$\frac{n_{\beta}}{x_{\beta}} = \left( \frac{\partial n}{\partial \beta} \right)_{\alpha} \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)_{\alpha} = \left( \frac{\partial n}{\partial x} \right)_{\alpha}$$

la ec. (65) toma la forma:

$$\frac{1}{2} (1-C_r)n \left( \frac{\partial E^2}{\partial x} \right)_{\alpha} + 2E^2 \left( \frac{\partial n}{\partial x} \right)_{\alpha} + (C_r-1)n - 2En^2 = 0 \quad (66)$$

Esta ecuación nos permite calcular los valores de  $n$  a lo largo de una curva característica  $\alpha = \text{cte.}$  si conocemos los valores del campo eléctrico sobre dicha característica.

Consideremos ahora la característica que define el frente de avance de los electrones para  $t \geq t_m = 1$ :

$$t = 2 - [2(1-x)]^{1/2}, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad (67)$$

Esta característica es precisamente una característica del tipo  $\alpha = \text{cte.}$ , pues la ec. (62) nos muestra que las curvas  $\alpha = \text{cte.}$  son tales que:

$$\left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)_{\alpha} = -\frac{1}{E} > 0$$

Sobre esta característica sabemos que el valor del campo eléctrico está dado por la expresión que aparece en la ec. (37):

$$E(x) = -[2(1-x)]^{1/2} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

de manera que sustituyendo esta expresión en la ec. (66) obtenemos:

$$(C_r - 1)n + 4(1-x) \left( \frac{\partial n}{\partial x} \right)_{\alpha} + (C_r - 1)n + 2[2(1-x)]^{1/2} n^2 = 0$$

y esta ecuación puede escribirse en la forma:

$$2u_x - \left( \frac{C_r - 1}{1-x} \right) u = \left( \frac{2}{1-x} \right)^{1/2} \quad (68)$$

donde hemos definido:

$$u = \frac{1}{n} \quad (69)$$

y la derivada parcial  $u_x$  que aparece en (68) se lleva a cabo manteniendo  $\alpha$  constante.

La ec. (68) puede resolverse por el método de variación de parámetros, y la solución que se encuentra es:

$$u(x) = k[2(1-x)]^{(1-C_r)/2} - \frac{1}{C_r} [2(1-x)]^{1/2} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

donde  $k$  es una constante. Sustituyendo esta expresión en (69), y tomando en cuenta que  $n(1/2)=1$ , obtenemos la densidad de electrones a lo largo de la característica (67) que separa a las regiones  $R_3$  y  $R_4$ :

$$n(x, C_r) = \frac{C_r}{(C_r + 1)[2(1-x)]^{(1-C_r)/2} - [2(1-x)]^{1/2}} \quad \frac{1}{2} \leq x < 1 \quad (70)$$

Esta expresión queda indeterminada si  $C_r = 0$ . Sin embargo, si definimos:

$$n(x, C_r=0) = \lim_{C_r \rightarrow 0} n(x, C_r)$$

y utilizamos la regla de L'Hopital para calcular este último límite, encontramos que:

$$n(x, C_r=0) = \frac{1}{[2(1-x)]^{1/2} - [2(1-x)]^{1/2} \ln[2(1-x)]^{1/2}} \quad \frac{1}{2} \leq x < 1 \quad (71)$$

El cálculo de la densidad de hoyos a lo largo del frente de avance (43) se haría de manera completamente análoga.

La expresión (70) muestra que aún cuando  $C_r$  sea muy grande, el valor de  $n(x, C_r)$  nunca se hace cero en el intervalo  $1/2 \leq x < 1$ . Esto implica que aún cuando  $C_r$  sea muy grande, sigue habiendo electrones que logran llegar hasta el frente de avance (67), lo cual corrobora la afirmación de Kao y Hwang (Kao y Hwang 1981, pag. 260) en el sentido de que el proceso de recombinación no es un obstáculo que impida que los hoyos y electrones completen su penetración dentro del material. Lo que sí ocurre, es que conforme  $C_r$  va creciendo, cada vez son menos los electrones que logran llegar hasta el frente de avance (67), como podemos observar en la figura 3.

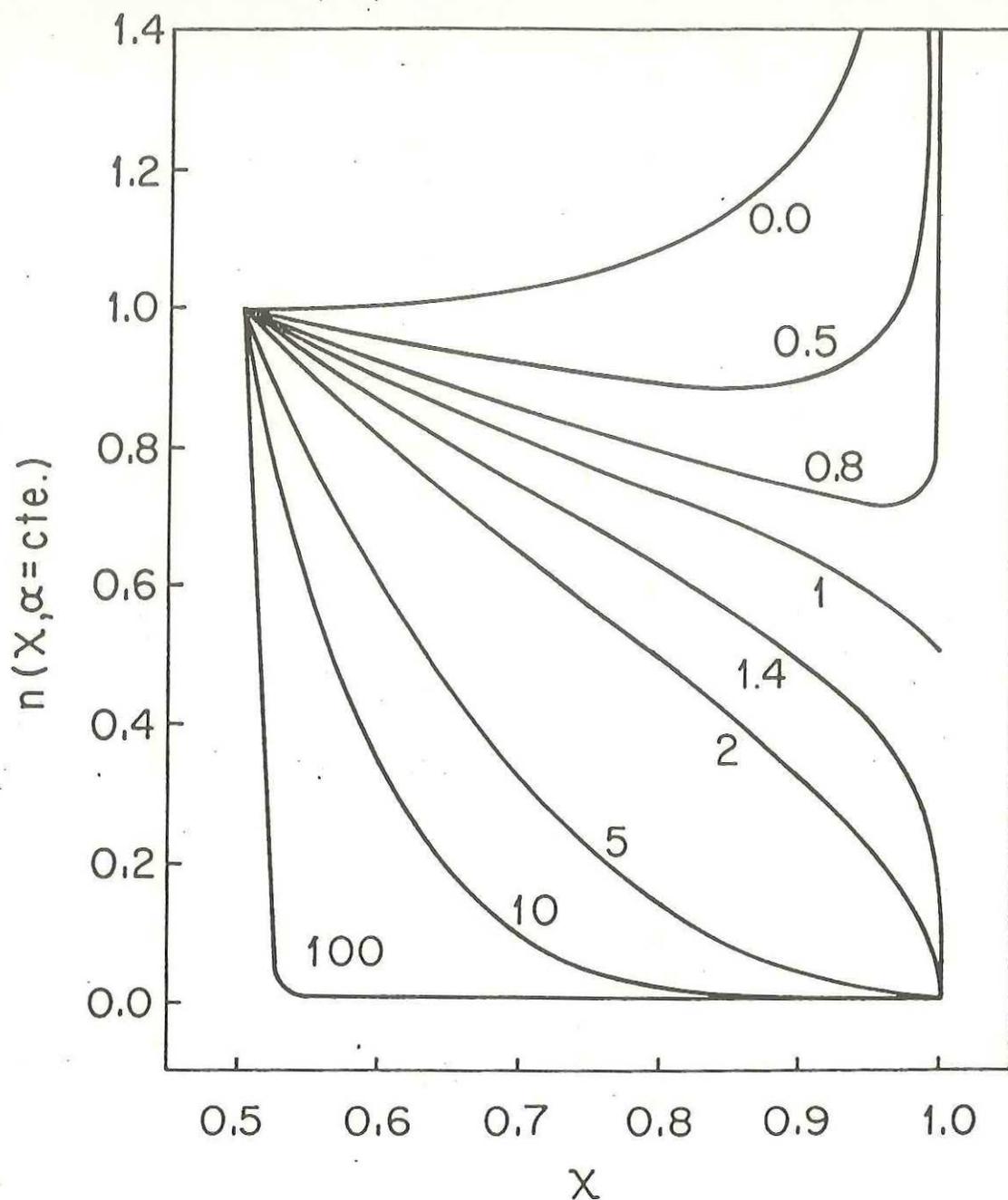


Figura 3. Densidad de electrones a lo largo de la característica  $\alpha=\text{cte.}$  que separa las regiones  $R_3$  y  $R_4$ , para distintos valores de la constante de recombinación  $C_r$  (los valores de  $C_r$  se indican junto a las curvas).

La figura 3 nos ayuda a comprender cómo es que aún cuando  $C_r$  sea mucho muy grande, el frente de electrones sigue llegando hasta la característica (67), pero en el límite  $C_r = \infty$  los electrones no avanzan más allá de  $x = 1/2$ . Esto nos explica por qué, en el límite  $C_r = \infty$ , los frentes de avance de hoyos y electrones dejan de ser los arcos de parábola (43) y (46), y se convierten en la recta  $x = x_m$ .

Desde un punto de vista meramente matemático, la aparición súbita de una discontinuidad en  $x = x_m$  está relacionado con el hecho bien conocido (aunque no por ello menos interesante) de que una sucesión de funciones continuas bien puede converger a una función discontinua. Un ejemplo bien conocido en física es la distribución de Fermi-Dírac:

$$f_T(E) = [\exp\{E-E_F\}/kT]^{-1} \quad (72)$$

Esta expresión nos determina una familia de curvas, cada una de las cuales corresponde a un valor determinado de la temperatura. Para toda  $T \neq 0$ , la ecuación (72) define una curva continua. Sin embargo, en el límite en que  $T$  tiende a cero, la expresión (72) tiende a una función discontinua:

$$\lim_{T \rightarrow 0} f_T(E) = \begin{cases} 1 & \text{para } E-E_F < 0 \\ 0 & \text{para } E-E_F > 0 \end{cases} \quad (73)$$

En la figura 4 podemos observar cómo la sucesión de funciones continuas  $f_T(E)$  tiende a la función discontinua (73) conforme  $T \rightarrow 0$ . Algo similar a esto es lo que ocurre con la densidad de electrones conforme  $C_r \rightarrow \infty$ .

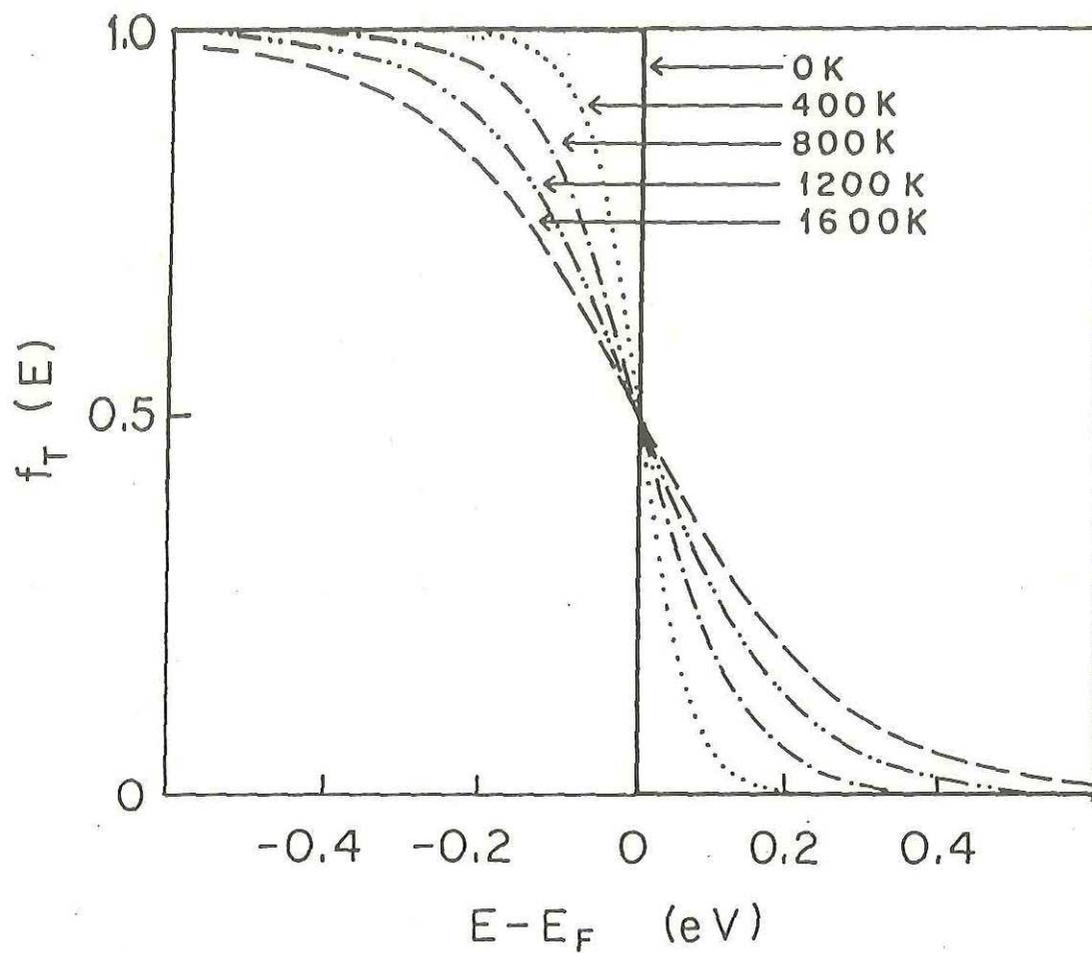


Figura 4. Función de distribución de Fermi-Dirac para varios valores de la temperatura.

### II.1.3 Aproximación a un estado estacionario

En la sección anterior obtuvimos la forma de la función  $E(x,t)$  en las regiones  $R_1$ ,  $R_2$ , y  $R_3$ , y también encontramos que las fronteras de la región  $R_4$  no dependen de la constante de recombinación  $C_r$ . En esta sección obtendremos alguna información sobre el comportamiento de la función  $E(x,t)$  en la región  $R_4$ .

La región de coexistencia  $R_4$  es una zona donde el campo eléctrico evoluciona hacia un estado estacionario. Este estado estacionario, así como el tiempo necesario para llegar a él, dependen de la constante de recombinación  $C_r$ . Ya hemos visto que en el caso límite en el que  $C_r = \infty$  un estado estacionario, dado por la expresión (42), se alcanza en el instante  $t_m$ . En el otro caso límite, en el cual  $C_r = 0$ , las ecuaciones de evolución temporal (8)-(10) se reducen a:

$$\nu_n nE + \nu_p pE = J_o$$

$$\nu_n nE = A$$

$$\nu_p pE = J_o - A$$

donde  $A$  es una constante que deberá ser determinada a partir de las condiciones de contorno. Substituyendo las dos últimas ecuaciones en la ecuación de Poisson (11), e integrando la ecuación resultante, encontramos que la solución estacionaria para el campo eléctrico necesariamente tiene la forma:

$$E^2(x) = 2 \left( \frac{J_o \nu_n - 2A}{\nu_n \nu_p} \right) x + B$$

donde  $B$  es otra constante. Si ahora imponemos las condiciones de frontera (21) y (22), llegamos al inesperado resultado de que la única solución estacionaria del sistema hiperbólico (8)-(11), consistente con las condiciones de frontera, es:

$$E(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Este estado no es alcanzado jamás por el sistema. Sin embargo, el sistema sí se aproxima asintóticamente a este estado, como se puede observar en el resultado numérico mostrado en la figura 5. La forma de calcular la curva mostrada en esta figura se explica en el apéndice A de este trabajo. Podemos, pues, decir que cuando  $C_r = 0$  el sistema alcanza un estado estacionario en  $t = \infty$ .

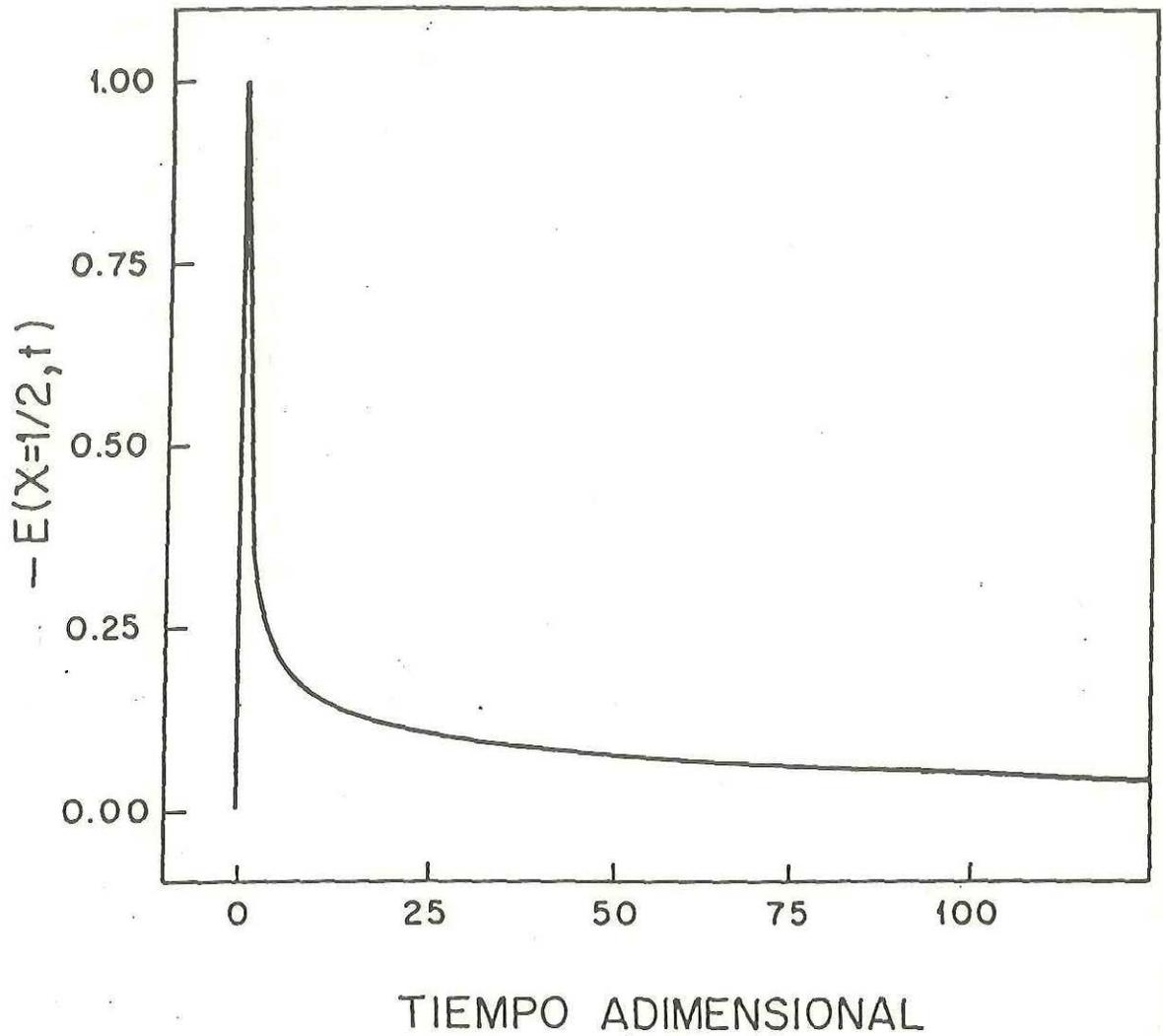


Figura 5. Evolución temporal del campo eléctrico a lo largo de la recta  $x = 1/2$ , para  $v_n = v_p = -J_o = 1$ , y  $C_r = 0$ .

Para valores intermedios de la constante de recombinación ( $0 < C_r < \infty$ ) es más difícil encontrar la solución estacionaria del sistema (8)-(11) consistente con las condiciones de frontera (21) y (22). En este trabajo analizaremos el caso particular en el cual  $C_r = \nu_n = 1$ . Para simplificar las fórmulas también supondremos, sin pérdida de generalidad, que  $J_0 = -1$ . Para esta elección de los parámetros, las ecuaciones (8), (9), y (11) implican que el estado estacionario está descrito por las ecuaciones:

$$E E_x + 2nE + 1 = 0 \quad (74)$$

$$E n_x - n^2 = 0 \quad (75)$$

las cuales pueden ser escritas en la forma:

$$E_x = -\frac{1}{E} - \frac{2}{u} \quad (76)$$

$$u_x = -\frac{1}{E} \quad (77)$$

con el cambio de variable:

$$n = \frac{1}{u} \quad (78)$$

A partir de las ecuaciones (77) y (78) puede verse que  $u(x)$  debe ser una función positiva y creciente. Además, de las ecs. (76) y (77) se sigue que:

$$\frac{dE}{du} = \frac{u + 2E}{u} \quad (79)$$

que es una ecuación de la forma:

$$\frac{dE}{du} = \frac{Au + BE}{Cu + DE} \quad (80)$$

la cual también puede escribirse en la forma:

$$P(u,E)du + Q(u,E)dE = 0$$

si definimos:

$$P(u,E) = Au + BE$$

$$Q(u,E) = -(Cu + DE)$$

La solución de una ecuación de la forma (80) está dada por (Davis 1962, pags. 36-39):

$$\ln(ku) = - \int \frac{Q(1,v)}{G(v)} dv$$

donde se han definido:

$$v = E/u$$

$$G(v) = P(1,v) + vQ(1,v) = A + (B-C)v - Dv^2$$

y k es una constante. En el caso particular de la ecuación (79) tenemos:

$$Q(1,v) = -1$$

$$G(v) = 1 + v$$

de manera que la solución de (79) está dada por:

$$\ln(ku) = \int \frac{dv}{1+v} = \ln(1+v) = \ln \left( 1 + \frac{E}{u} \right)$$

de donde:

$$E = ku^2 - u \quad (81)$$

Ahora vemos de qué signo debe ser la constante  $k$ .

Si  $k$  fuera cero las ecuaciones (81) y (77) implicarían que:

$$E(x) = -(2x)^{1/2}$$

lo cual no satisface la condición (22). Por lo tanto la constante  $k$  es distinta de cero.

Si exigimos que (81) satisfaga la condición (21) vemos que:

$$k u^2(0) - u(0) = 0$$

y esta ecuación se puede satisfacer de dos maneras:

(i) con  $u(0) = 0$

(ii) con  $u(0) = \frac{1}{k}$

Por otra parte, si exigimos que (81) satisfaga la condición (22), vemos que:

$$k u^2(1) - u(1) = 0$$

lo cual, nuevamente, puede satisfacerse de dos maneras:

(i) con  $u(1) = 0$

(ii) con  $u(1) = \frac{1}{k}$

Notemos ahora que (75) implica que  $n_x < 0$  para cualquier valor de  $x$ . Esto implica que  $n(0) > n(1)$  y, por consiguiente,  $u(0) < u(1)$ , lo cual sólo puede cumplirse si:

$$u(0) = 0 \quad (82)$$

y:

$$u(1) = \frac{1}{k} \quad (83)$$

Esta última ecuación implica que la constante  $k$  es positiva, ya que  $u(1)$  no puede ser negativa.

Busquemos ahora la forma de la función  $u(x)$ . Para ello sustituyamos la expresión (81) en la ecuación (77). Obtenemos así:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{u - ku^2}$$

lo cual implica que:

$$\int_{u(0)}^{u(x)} (u - ku^2) du = \int_0^x dx$$

Efectuando las integrales obtenemos una ecuación algebraica para  $u(x)$ :

$$u^3 - \frac{3}{2k} u^2 + \frac{3}{k} x = 0 \quad (84)$$

que es una ecuación de la forma:

$$u^3 + ru^2 + su + t = 0 \quad (85)$$

con:

$$r = -\frac{3}{2k}$$

$$s = 0$$

$$t = \frac{3}{k} x$$

Para resolver una ecuación de la forma (85) conviene introducir el cambio de variable:

$$u = y - \frac{r}{3} \quad (86)$$

con lo cual (85) se transforma en (Bronshtein y Semendyayev 1985):

$$y^3 + py + q = 0 \quad (87)$$

donde:

$$p = \frac{3s-r^2}{3}$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t$$

El comportamiento de la solución de la ecuación (87) depende del signo del discriminante:

$$D = \left( \frac{p}{3} \right)^3 + \left( \frac{q}{2} \right)^2$$

En el caso particular de la ecuación (84) este discriminante tiene el valor:

$$D = \frac{3x}{8k^2} \left( 6x - \frac{1}{k^2} \right) \quad (88)$$

Para que este discriminante conserve un mismo signo a lo largo de todo el intervalo  $0 < x < 1$  es necesario que:

$$\frac{1}{k^2} \geq 6$$

Suponiendo, pues, que esta desigualdad se cumple, la ecuación (88) nos dice que  $D < 0$  en todo el intervalo  $0 < x < 1$ , y esto implica que (87) tiene 3 soluciones reales, las cuales pueden expresarse en la forma (Sokolnikoff y Sokolnikoff 1941):

$$y_1 = 2\rho^{1/3} \cos\left(\frac{\phi}{3}\right) \quad (89)$$

$$y_2 = 2\rho^{1/3} \cos\left(\frac{\phi + 2\pi}{3}\right) \quad (90)$$

$$y_3 = 2\rho^{1/3} \cos\left(\frac{\phi + 4\pi}{3}\right) \quad (91)$$

donde se han definido:

$$\rho = \left(-\frac{p}{27}\right)^{1/2} \quad (92)$$

$$\cos(\phi) = -\frac{q}{2\rho} \quad (93)$$

En el caso particular de la ecuación (84) tenemos que:

$$p = -\frac{3}{4k^2}$$

$$q = -\frac{1}{4k^3} + \frac{3x}{k}$$

de manera que las expresiones (92) y (93) se convierten en:

$$\rho = \frac{1}{8k^3}$$

$$\cos(\phi) = 1 - 12k^2x$$

Introduciendo estas expresiones en las ecuaciones (89)-(91) vemos que las 3

posibles soluciones se pueden escribir en la forma:

$$y_l(x) = \frac{1}{k} \cos \left( \frac{\arccos(1-12k^2x) + z_l\pi}{3} \right)$$

donde  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 2$ , y  $z_3 = 4$ . Introduciendo esta expresión en (86) vemos que las tres posibles soluciones de la ecuación (84) son:

$$u_i(x) = \frac{1}{2k} + \frac{1}{k} \cos \left( \frac{\arccos(1-12k^2x) + z_i\pi}{3} \right) \quad (94)$$

Se puede comprobar por sustitución directa que esta expresión es solución de (84).

Ahora elegiremos los valores de  $k$  y  $z_i$  de manera que se cumplan las condiciones de frontera (82) y (83). La primera de estas condiciones nos dice que:

$$\frac{1}{2k} + \frac{1}{k} \cos \left( \frac{\arccos(1) + z_i\pi}{3} \right) = 0$$

lo cual implica que:

$$\cos \left( \frac{z_i}{3} \pi \right) = -\frac{1}{2}$$

Esta ecuación se satisface si  $z_i = z_2 = 2$ , o bien si  $z_i = z_3 = 4$ , pero excluye la posibilidad de que  $z_i$  sea igual a cero. Por otra parte, la condición (83) nos dice que:

$$\frac{1}{2k} + \frac{1}{k} \cos \left( \frac{\arccos(1-12k^2) + z_i\pi}{3} \right) = \frac{1}{k}$$

lo cual nos conduce a:

$$\cos \left( \frac{\arccos(1-12k^2) + z_i \pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \quad (95)$$

y esta ecuación implica que se debe cumplir una de las dos siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{3} \arccos(1-12k^2) + \frac{z_i \pi}{3} = \arccos \left( \frac{1}{2} \right) \quad (96)$$

$$\frac{1}{3} \arccos(1-12k^2) + \frac{z_i \pi}{3} = \arccos \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{4}{3} \pi \quad (97)$$

La primera de estas ecuaciones debe descartarse, ya que no se satisface ni para  $z_i = z_2 = 2$ , ni para  $z_i = z_3 = 4$ . Por otro lado, la ecuación (97) implica que:

$$1 - 12k^2 = \cos [(5-z_i)\pi]$$

lo cual, tanto si  $z_i = z_2 = 2$  como si  $z_i = z_3 = 4$ , nos conduce a la igualdad:

$$k^2 = \frac{1}{6}$$

Si ahora sustituimos este valor en (95) obtenemos la ecuación:

$$\cos \left( \frac{(z_i+1)}{3} \pi \right) = \frac{1}{2}$$

la cual excluye la posibilidad de que  $z_i$  fuera igual a 2. Vemos, pues, que el único de los tres posibles valores de  $z_i$  que es consistente con las condiciones (82) y (83) es:

$$z_i = z_3 = 4$$

Ahora, una vez conocidos los valores de  $k$  y  $z_i$ , podemos sustituír (94) (con  $i=3$ ) en (81) para obtener la forma del campo eléctrico en el estado estacionario. De esta forma encontramos que:

$$E(x) = -\frac{1}{4k} + \frac{1}{k} \cos^2 \left[ \frac{\arccos(1-12k^2x) + 4\pi}{3} \right] \quad (98)$$

En la figura 6 podemos ver la gráfica de esta función, en comparación con la gráfica del campo eléctrico existente en el instante  $t=t_m = 1$ , en el cual los hoyos y los electrones se encontraron por primera vez.

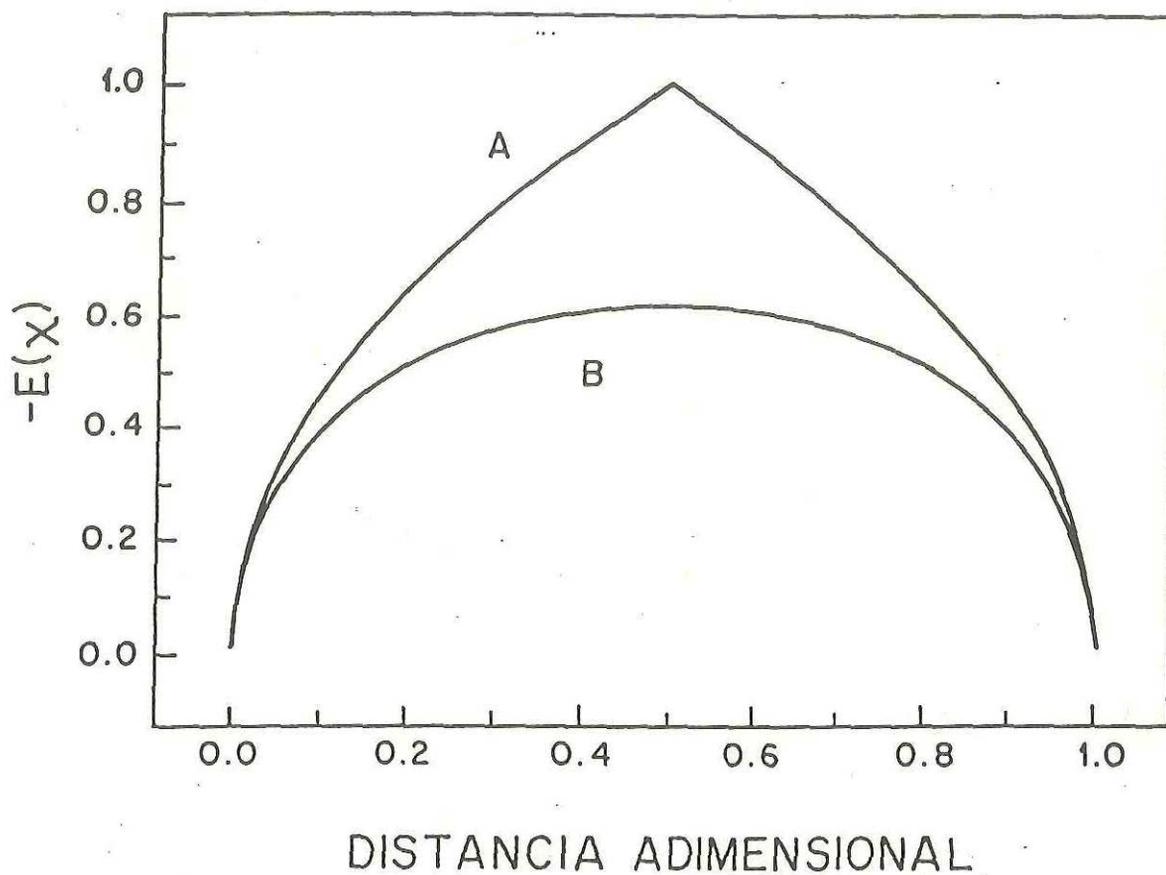


Figura 6. Distribución espacial del campo eléctrico en el instante  $t_m$ , en el que los electrones y los hoyos se encuentran por primera vez (curva A), y en el estado estacionario (curva B). Ambas curvas corresponden al caso en que  $\nu_n = \nu_p = C_r = -J_o = 1$ .

El hecho de que la curva que describe al campo eléctrico en el estado estacionario (curva B de la fig. 6) sea más aplanada (i.e. con valores absolutos de  $E_x$  menores) que la curva que describe al campo eléctrico en el instante  $t_m$ , en que hoyos y electrones se encontraron por primera vez, se debe a que en el estado estacionario los electrones han invadido el espacio antes ocupado sólo por hoyos, y viceversa, disminuyendo así la densidad total de carga, de manera que disminuye el valor absoluto de  $E_x$ , y por consiguiente la gráfica de  $E(x)$  se aplanan.

Para encontrar el tiempo que necesita el sistema para alcanzar el estado estacionario (98), se calculó numéricamente la evolución en el tiempo del campo eléctrico a lo largo de la recta  $x = 1/2$ . La forma en que se llevó a cabo el cálculo numérico se explica en el apéndice B de este trabajo. El resultado de dicho cálculo se muestra en la figura 7, en la cual podemos ver que el valor estacionario:

$$E\left(x = \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4k} \approx -0.61$$

se alcanza alrededor del instante  $t = 2.5$ . En esta figura podemos también observar los diferentes comportamientos del campo eléctrico para los tres valores de  $C_r$  que hemos considerado. Podemos observar que conforme el valor de  $C_r$  aumenta, también aumenta el valor estacionario del campo eléctrico. Esto se debe a que al aumentar la recombinación son menos los electrones que logran penetrar en la región anteriormente ocupada por hoyos (y viceversa), pues gran parte de los electrones se recombinan en la cercanía del punto  $x = x_m$  y no logran avanzar más. Como consecuencia, la densidad total de carga no disminuye tanto, y los valores absolutos de  $E_x$  y  $E(x)$  aumentan.

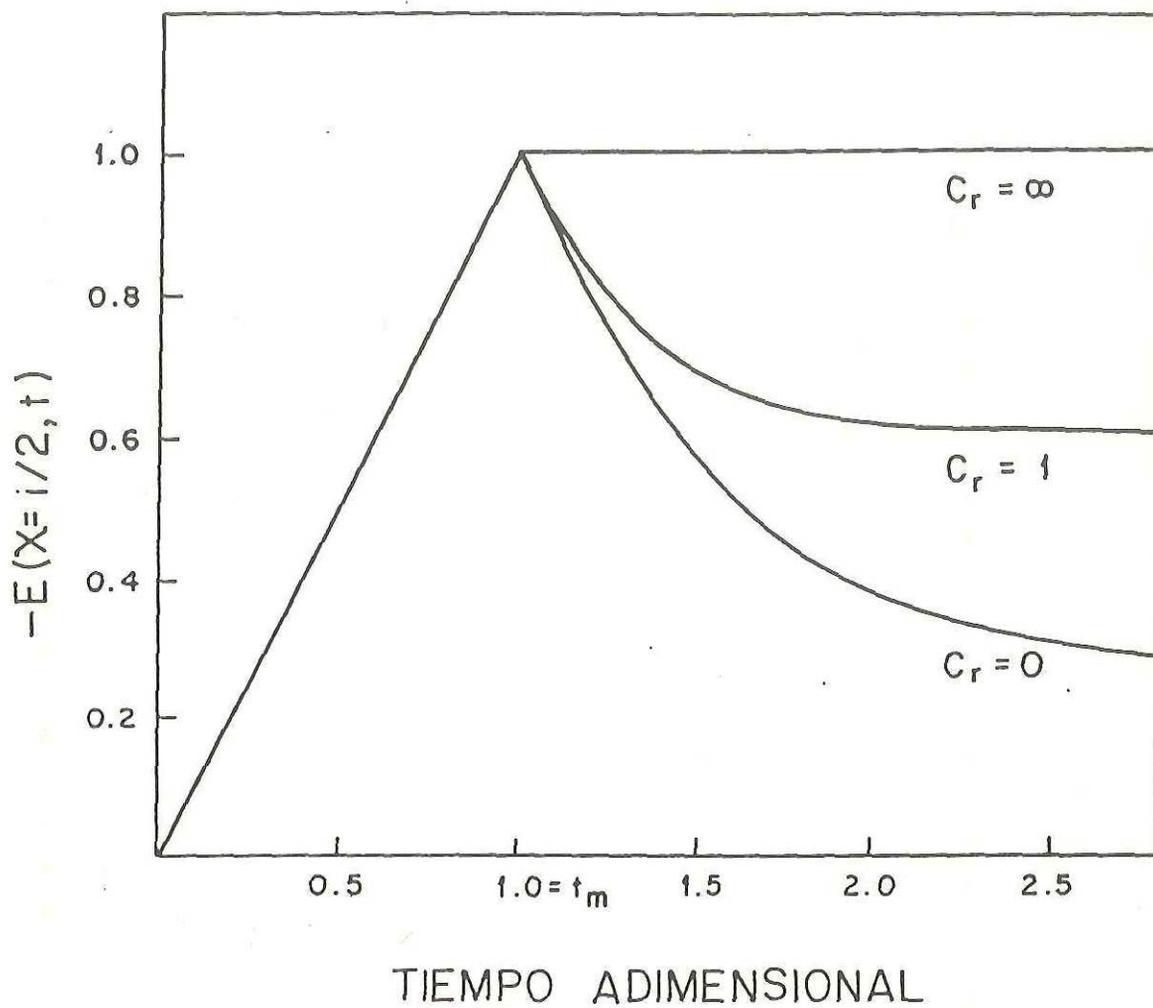


Figura 7. Comparación de la evolución temporal del campo eléctrico a lo largo de la recta  $x = 1/2$  para  $v_n = v_p = -J_o = 1$ , y diferentes valores de  $C_r$ .

Conociendo la forma del campo eléctrico en el estado estacionario es posible calcular el valor estacionario del voltaje:

$$V = - \int_0^1 E(x) dx$$

Efectuando esta integral se encuentra que en el estado estacionario:

$$V = V_o = \frac{1}{5k} \approx 0.49 \quad (99)$$

Podemos también ver que en el instante  $t = 1$  el valor del voltaje era:

$$V(t=1) = \int_0^{1/2} (2x)^{1/2} dx + \int_{1/2}^1 [2(1-x)]^{1/2} dx = \frac{2}{3} \quad (100)$$

Como era de esperarse, el valor del voltaje en el estado estacionario es menor que en el instante  $t_m$ , ya que como vimos en las figuras 6 y 7, la magnitud del campo eléctrico disminuye conforme nos acercamos al estado estacionario.

Desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas de los semiconductores, es útil saber qué tan alto es el pico de voltaje que se produce al iniciar la inyección de carga. De las ecs. (99) y (100) vemos que:

$$V(t=1) = \frac{10k}{3} V_o \approx 1.36 V_o \quad (101)$$

lo cual muestra que en este caso (cuando  $\nu_n = \nu_p = C_r = 1$ ) durante el transitorio inicial el voltaje llega a ser un 36% más alto que su valor estacionario. Este porcentaje será menor en el caso en que  $C_r > 1$  (y mayor en el caso contrario), ya que como vemos en la figura 7, cuanto mayor sea el valor de  $C_r$ , menos varía la magnitud del campo eléctrico después del instante  $t_m$ . Resulta, pues, útil recordar al regla: a mayor recombinación, picos de voltaje más pequeños (i.e.

más pequeños en comparación al valor estacionario del voltaje).

Hasta donde me es conocido, los resultados presentados a lo largo de las dos últimas sub-secciones (II.1.2 y II.1.3) son nuevos y no habían sido publicados con anterioridad.

## II.2 Transitorios de carga y descarga con una sola clase de portadores

### II.2.1 Transitorio de carga

A lo largo de las tres partes de la sección anterior (*i.e.*, en las sub-secciones II.1.1, II.1.2, y II.1.3) estudiamos lo que podríamos llamar "el transitorio de carga", producido al aplicar súbitamente una corriente constante a través de un material con ambos tipos de portadores.

En las dos partes que conforman esta sección veremos que en el caso de un material en el cual la corriente sea transportada por un sólo tipo de portadores (electrones), además del transitorio de carga, es posible también calcular en forma exacta el transitorio de descarga que se produce al interrumpir súbitamente la corriente.

Comencemos por calcular el transitorio de carga. El cálculo será esencialmente el mismo que presentamos en la sub-sección II.1.2, pero conviene analizarlo aquí nuevamente para que esta sección sea una unidad independiente de la sección anterior.

Consideremos, pues, a un semiconductor situado entre dos electrodos planos separados una distancia  $d'$ . Supondremos que los electrones son inyectados dentro de la banda de conducción del material por el electrodo de la izquierda (el cátodo), situado en  $x'=0$ . Supondremos que la unión entre el cátodo y el semiconductor actúa como un contacto óhmico para el flujo de electrones. En la frontera entre el ánodo y el semiconductor no impondremos ninguna condición especial. Tal es el procedimiento usual en este tipo de problemas (Lampert 1956). Sin embargo, conviene notar que al hacer ésto implícitamente se está introduciendo la suposición de que el movimiento de los electrones en la región

$0 < x' < d'$  no es perturbado por la presencia del ánodo en  $x' = d'$ . Consideraremos, además, que el número de portadores generados térmicamente es despreciable en comparación con el número de electrones inyectados por el cátodo. Finalmente, consideraremos que en el instante  $t' = 0$  una densidad de corriente constante  $J'_0 < 0$  es obligada a fluir a través del material.

Con las suposiciones anteriores, las ecuaciones que describen el flujo de electrones son:

$$J'_0 = q\mu n'(x', t') E'(x', t') + \varepsilon \frac{\partial E'}{\partial t'} \quad (102)$$

$$\frac{\partial E'}{\partial x'} = - \frac{q}{\varepsilon} n'(x', t') \quad (103)$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \mu n'(x', t') E'(x', t') \right] \quad (104)$$

donde  $q$ ,  $\varepsilon$ ,  $n'$ ,  $E'$ , y  $J'_0$  tienen el mismo significado que en la sub-sección II.1.1, y  $\mu$  es ahora el valor absoluto de la movilidad de los electrones. Notemos que las ecuaciones (102) y (104) pueden escribirse en la forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t'} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x'} + B(U) = 0 \quad (105)$$

donde  $U$  y  $B(U)$  son los vectores columna:

$$U = \begin{bmatrix} E'(x', t') \\ n'(x', t') \end{bmatrix} \quad (106)$$

$$B(U) = \begin{bmatrix} (q\mu n' E' - J'_0)/\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} \quad (107)$$

y  $A(U)$  es la matriz cuadrada:

$$A(U) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mu n' & -\mu E' \end{bmatrix} \quad (108)$$

Los valores propios de esta matriz son:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\mu E' \quad (109)$$

y los vectores propios son:

$$v_1 = \begin{bmatrix} E' \\ -n' \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (110)$$

Vemos, pues, que en todos aquellos puntos  $(x', t')$  en los que  $E' \neq 0$  tenemos dos valores propios reales y distintos, y dos vectores propios linealmente independientes, lo cual implica que el sistema (105) es un sistema cuasi-lineal estrictamente hiperbólico (Jeffrey 1977, cap. 2).

Usando las ecuaciones (103) y (104) se puede probar que  $J'_o$  es independiente de  $x'$ . Una vez conociendo esto es innecesario que consideremos a la ecuación (104), ya que ésta resulta ser una consecuencia obligada de las ecuaciones (102) y (103).

Siendo  $d'$  la separación entre los electrodos,  $J'_u$  un valor característico (positivo) de la densidad de corriente, y  $V'$  el voltaje entre ambos electrodos, podemos definir las siguientes cantidades adimensionales:

$$x = x'/d'$$

$$t = \left( \frac{\mu J'_u}{\varepsilon d'} \right)^{1/2} t'$$

$$n = \left( \frac{\mu d'}{\varepsilon J'_u} \right)^{1/2} qn'$$

$$J_0 = J'_0 / J'_u$$

$$E = \left( \frac{\varepsilon \mu}{d' J'_u} \right)^{1/2} E'$$

$$V = \frac{1}{d'} \left( \frac{\varepsilon \mu}{d' J'_u} \right)^{1/2} V'$$

Substituyendo estas variables en las ecuaciones (102) y (103) obtenemos las siguientes ecuaciones adimensionales:

$$J_0 = n(x,t) E(x,t) + \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -n(x,t)$$

Este par de ecuaciones puede transformarse en una única ecuación diferencial parcial de primer orden para el campo eléctrico adimensional:

$$-EE_x + E_t = J_0 \quad (111)$$

la cual deberá satisfacer las siguientes condiciones de contorno:

$$E(x,0) = 0 \quad x > 0 \quad (112)$$

$$E(0,t) = 0 \quad t > 0 \quad (113)$$

La ecuación (112) implica que la densidad de electrones libres es cero al tiempo  $t = 0$ , mientras que la ecuación (113) significa que hay un contacto óhmico en  $x = 0$  (Lampert y Mark 1970, pags. 36-37; Parmenter y Ruppel 1959; Many y Rakavy 1962; O'Dwyer 1968).

La ecuación (111) puede resolverse por el método de las características, tal como resolvimos la ecuación (24) en la sub-sección II.1.2. De esta forma se

encuentra que:

$$E(x,t) = \begin{cases} -(-2J_0 x)^{1/2} & x \leq -J_0 t^2/2 \\ J_0 t & x \geq -J_0 t^2/2 \end{cases} \quad (114)$$

y a partir de esta expresión se puede obtener la densidad de electrones libres:

$$n(x,t) = \begin{cases} (-J_0/2x)^{1/2} & x \leq -J_0 t^2/2 \\ 0 & x \geq -J_0 t^2/2 \end{cases} \quad (115)$$

Esta ecuación muestra que la curva característica:

$$t = \left( -\frac{2x}{J_0} \right)^{1/2} \quad (116)$$

es la trayectoria que sigue el frente de electrones. Por lo tanto, los primeros electrones llegan al ánodo (situado en  $x = 1$ ) en el instante:

$$t_0 = (-2/J_0)^{1/2} \quad (117)$$

y éste es también el instante en que se establece un estado estacionario.

A partir de la ecuación (114) podemos también obtener la variación en el tiempo del voltaje:

$$V(t) = - \int_0^1 E(x,t) dx \quad (118)$$

Calculando esta integral obtenemos:

$$V(t) = \begin{cases} -J_0 t - J_0^2 t^3/6 & t \leq t_0 \\ (-8J_0/9)^{1/2} & t \geq t_0 \end{cases} \quad (119)$$

Si usamos cantidades con dimensiones la ecuación anterior toma la forma:

$$V'(t') = \begin{cases} -\frac{J'_o d'}{\epsilon} t' - \frac{\mu J'^2_o}{6\epsilon^2} t'^3 & t \leq t'_o \\ V'_o & t \geq t'_o \end{cases} \quad (120)$$

donde tenemos:

$$t'_o = \left( -\frac{2\epsilon d'}{\mu J'_o} \right)^{1/2} \quad (121)$$

$$V'_o = \left( -\frac{8J'_o d'^3}{9\epsilon\mu} \right)^{1/2} \quad (122)$$

Esta última expresión es la ecuación de Mott y Gurney (Kao y Hwang 1981, pag. 151), y a partir de ella podemos obtener una expresión para la movilidad de los electrones:

$$\mu = -\frac{8}{9} \frac{J'_o d'^3}{\epsilon V'^2_o} \quad (123)$$

Esta ecuación nos permite calcular el valor de  $\mu$ , siempre y cuando conozcamos el valor de la permitividad  $\epsilon$ . Sin embargo, si no conocemos el valor de  $\epsilon$ , las ecuaciones (121) y (122) nos permiten construir la siguiente ecuación:

$$\mu = \frac{4}{3} \frac{d'^2}{V'_o t'_o} \quad (124)$$

y esta ecuación sí nos permite hallar el valor de  $\mu$  sin necesidad de conocer  $\epsilon$ , si medimos el tiempo  $t'_o$  que dura el transitorio de carga. Una vez encontrado el valor de  $\mu$ , podemos también obtener el de  $\epsilon$  usando la ec. (121) o la ec. (122).

La ecuación (124) es interesante porque difiere por el factor 4/3 de la expresión empleada normalmente para calcular movilidades en los experimentos convencionales de tiempo de vuelo (Borsenberger 1990; Schein *et al.* 1986). Esta

diferencia es debida a que en los experimentos convencionales de tiempo de vuelo puede suponerse que el campo eléctrico es uniforme dentro del material (Borsenberger 1990; Schein *et al.* 1986), mientras que en nuestro caso el campo eléctrico dista mucho de ser una constante, como puede verse en la ecuación (114).

Resultados similares a los que hemos obtenido en esta sub-sección fueron obtenidos también por Zahn, Tsang, y Pao al estudiar el movimiento de iones en flúidos dieléctricos (Zahn *et al.* 1974). Sin embargo, hasta donde me es conocido, la ecuación (124), que nos permite obtener el valor de la movilidad sin necesidad de conocer el de la permitividad del material, no había sido publicada con anterioridad.

### II.2.2 Transitorio de descarga

En la sub-sección anterior (sub-sec. II.2.1) encontramos que un estado estacionario se alcanza en el instante  $t_0$ , dado por la ec. (117). Ahora, en esta sub-sección, investigaremos qué pasa si la corriente se interrumpe súbitamente en un instante  $t_1$  posterior a  $t_0$ . Este transitorio de descarga está descrito por el siguiente problema de condiciones iniciales y de frontera:

$$-EE_x + E_t = 0 \quad (125)$$

$$E(x, t_1) = -(-2J_0 x)^{1/2} \quad x > 0 \quad (126)$$

$$E(0, t) = 0 \quad t > t_1 \quad (127)$$

Nuevamente este problema puede ser resuelto por el método de las características, tal como explicamos al resolver la ec. (24), y se encuentra que la solución es:

$$E(x, t) = -J_0(t-t_1) - \left[ -2J_0 x + J_0^2(t-t_1)^2 \right]^{1/2} \quad (128)$$

Para visualizar la forma de esta superficie es conveniente observar que las curvas de nivel en el plano  $x-t$ :

$$E(x, t) = E_0 \quad (E_0 = \text{constante})$$

son las rectas:

$$t = \left( -\frac{1}{E_0} \right) x + \left( t_1 - \frac{E_0}{2J_0} \right)$$

Por lo tanto, la superficie  $E(x, t)$  se estira siguiendo estas líneas, que son

precisamente las curvas características correspondientes al problema (125)-(127). En la figura 8 se muestran algunas de las curvas de nivel de la superficie  $E(x,t)$ .

A partir de la ec. (128) podemos también obtener la densidad de electrones libres:

$$n(x,t) = \frac{-J_o}{\left[-2J_o x + J_o^2 (t - t_1)^2\right]^{1/2}} \quad (129)$$

Las curvas de nivel de esta superficie:

$$n(x,t) = n_o \quad (n_o = \text{constante})$$

son los arcos de parábola:

$$x = \frac{-J_o}{2n_o^2} + \frac{J_o}{2} (t-t_1)^2$$

de modo que la superficie  $n(x,t)$  se contrae siguiendo estas líneas. En la figura 9 se muestran algunas de las curvas de nivel de la superficie  $n(x,t)$ .

Finalmente, el transitorio de voltaje puede ser obtenido introduciendo la expresión (128) en la ecuación (118). Calculando la integral obtenemos:

$$V(t) = J_o (t-t_1) - \frac{1}{3J_o} [-2J_o + J_o^2 (t-t_1)^2]^{3/2} - \frac{1}{3} J_o^2 (t-t_1)^3 \quad (130)$$

En la figura 10 podemos observar ambos transitorios de voltaje: el transitorio de carga dado por la ec. (119), y el transitorio de descarga dado por la ec. (130).

Resultados similares a los que hemos obtenido en esta sub-sección fueron también encontrados por Zahn, y Pao al estudiar el movimiento de iones en flúidos dieléctricos (Zahn y Pao 1975).

Los resultados de esta sección nos servirán de punto de comparación para que más adelante, al considerar la presencia de trampas en el material y la difusión de los portadores de carga, podamos evaluar qué tan importante es la influencia de estos factores.

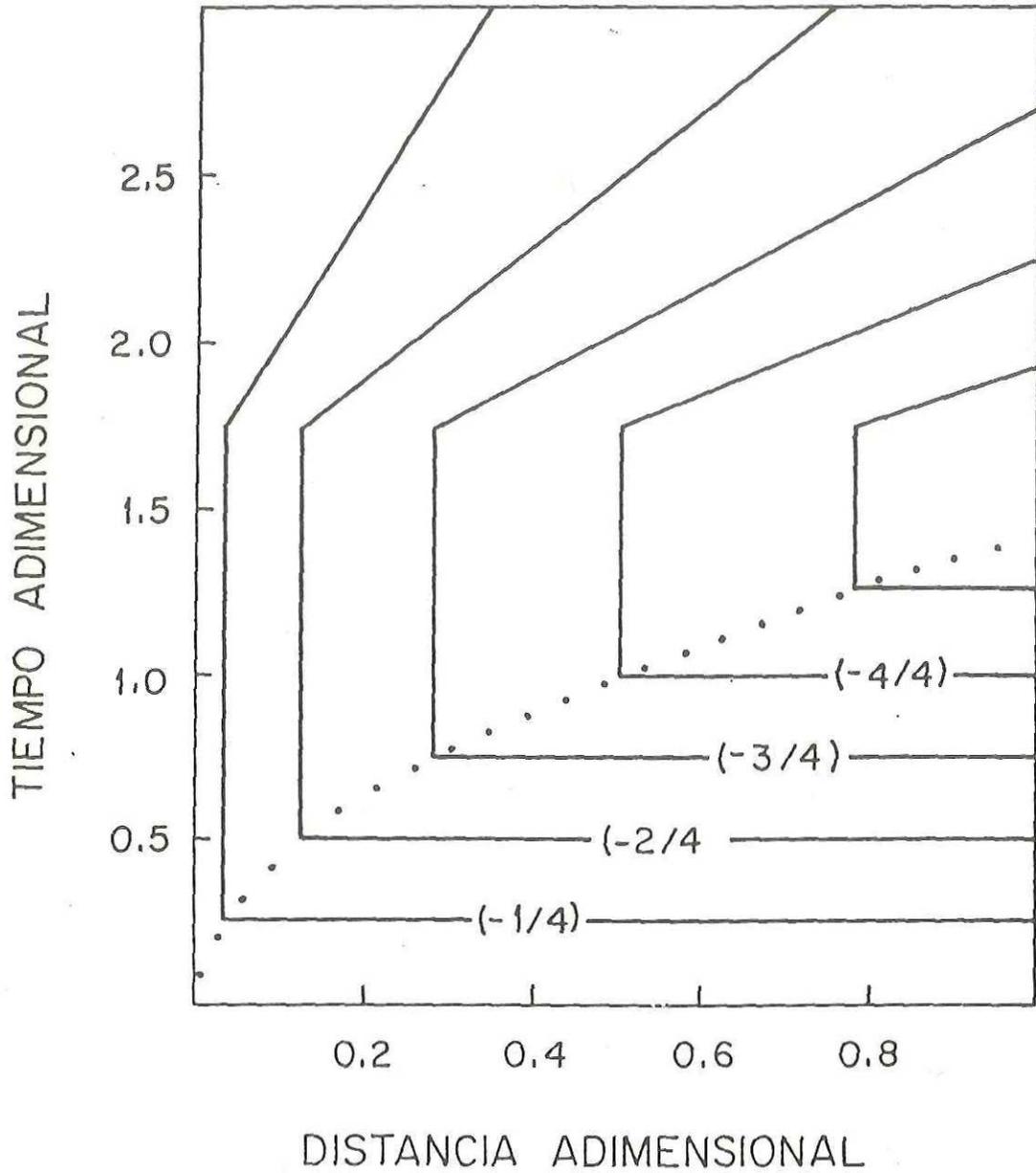


Figura 8. Curvas de nivel de la superficie  $E(x,t)$  en la ausencia de trampas y difusión, para  $J_0 = -1$ . La parábola punteada corresponde al frente de avance de los electrones.

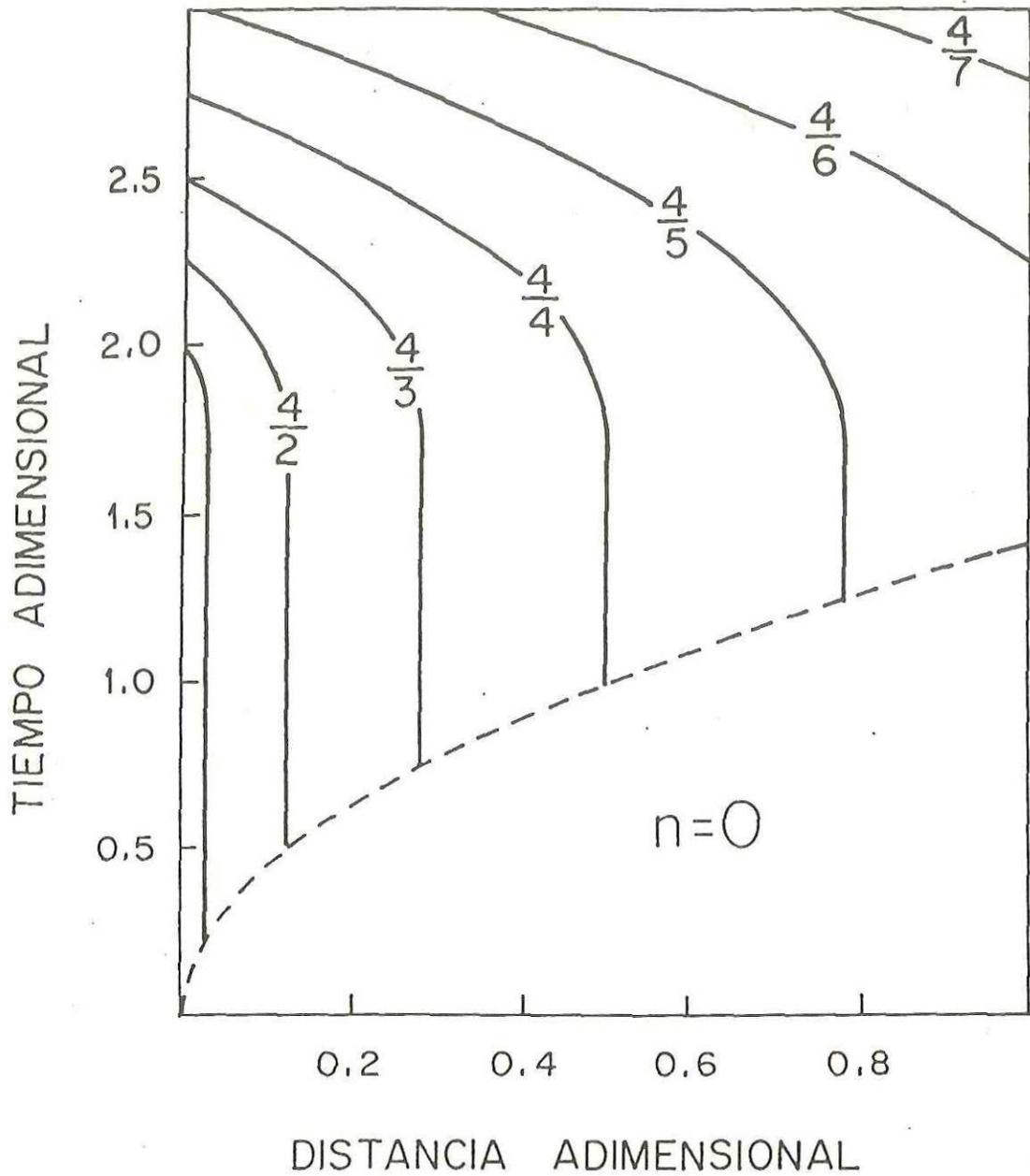


Figura 9. Curvas de nivel de la superficie  $n(x,t)$  en la ausencia de trampas y difusión, para  $J_0 = -1$ . La parábola punteada corresponde al frente de avance de los electrones.

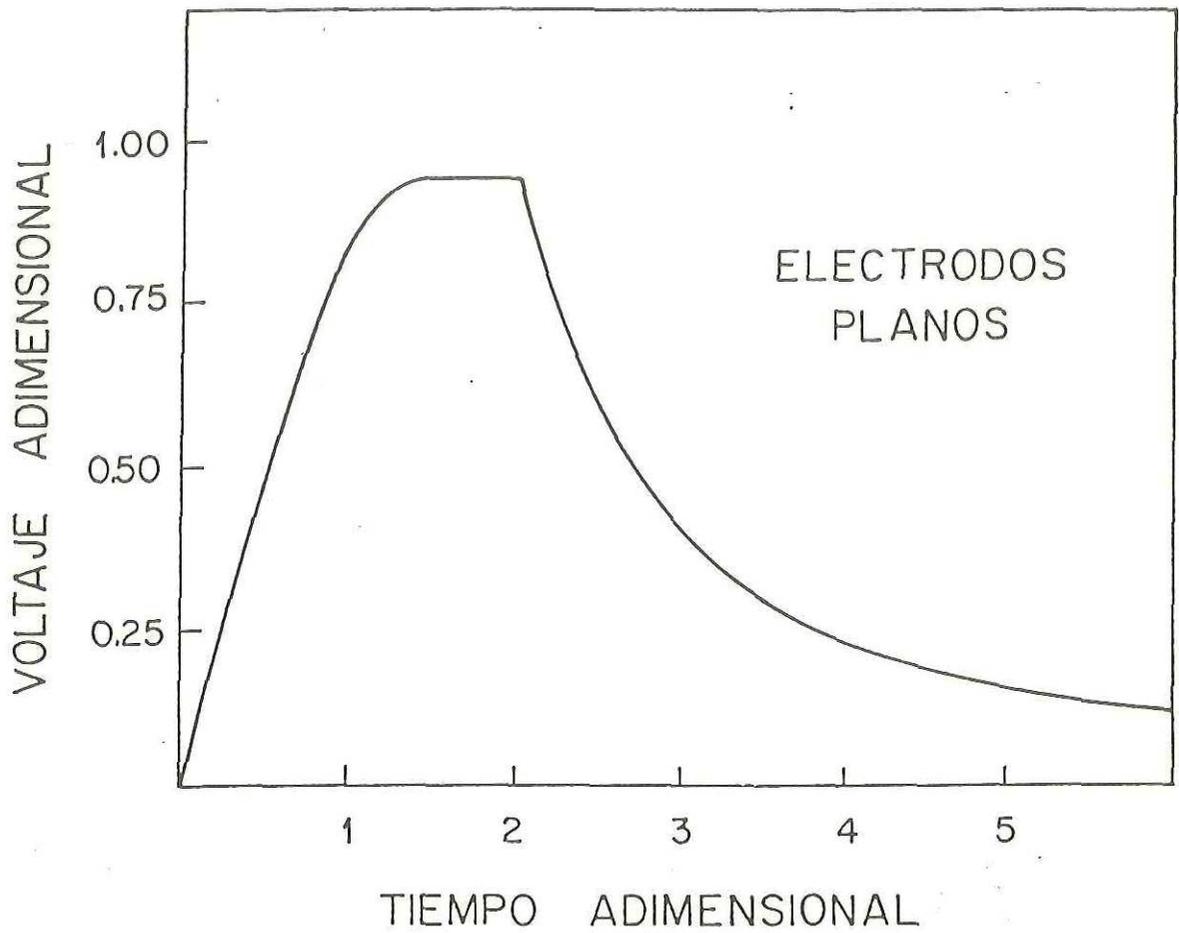


Figura 10. Transitorios de voltaje creciente y decreciente, en la ausencia de trampas y difusión, para  $J_0 = -1$ .

## II.3 El problema con simetría cilíndrica

### II.3.1 Transitorio de carga

Estudiaremos ahora la forma de los transitorios eléctricos en el caso en que tengamos simetría cilíndrica.

Consideremos, pues, a un semiconductor sin trampas, en el cual podamos despreciar la difusión de portadores, colocado entre dos electrodos cilíndricos coaxiales de radios  $r'_1$  y  $r'_2$  ( $r'_1 < r'_2$ ), y longitud  $L'$ . En este caso las ecuaciones que describen el flujo de electrones son las siguientes:

$$\frac{I'_o}{2\pi r'_1 L'} = q\mu n'(r',t') E'(r',t') + \epsilon \frac{\partial E'}{\partial t'} \quad (131)$$

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' E') = - \frac{q}{\epsilon} n'(r',t') \quad (132)$$

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} [q\mu r' n'(r',t') E'(r',t')] = q \frac{\partial}{\partial t'} n'(r',t') \quad (133)$$

Notemos que las ecs. (131) y (133) pueden escribirse en la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t'} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r'} + \mathbf{B}(\mathbf{U}) = 0 \quad (134)$$

donde  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{B}(\mathbf{U})$  son los vectores columna:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} E'(r',t') \\ n'(r',t') \end{bmatrix} \quad (135)$$

$$B(U) = \begin{bmatrix} (q\mu n' E' - I'_o / 2\pi r' L) / \epsilon \\ -\mu n' E' / r' \end{bmatrix} \quad (136)$$

y  $A(U)$  es la matriz cuadrada:

$$A(U) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mu n' & -\mu E' \end{bmatrix} \quad (137)$$

Podemos ver que la matriz (137) coincide con la matriz (108) que encontramos en la sección II.2, de manera que sus valores propios y vectores propios son los indicados en las ecs. (109) y (110). Esto implica que las ecuaciones (131) y (133) constituyen también un sistema cuasi-lineal estrictamente hiperbólico.

A partir de las ecs. (131)-(133) puede probarse que  $I'_o$  es independiente de  $r'$ . Una vez sabiendo esto no necesitamos considerar más a la ecuación (133), ya que ésta se vuelve una consecuencia obligada de las ecuaciones (131) y (132).

Si  $d'$  es la separación entre ambos electrodos,  $I'_u$  es un valor característico (positivo) de la corriente total, y  $V'$  es el voltaje entre ambos electrodos, podemos definir las siguientes cantidades adimensionales:

$$r = r' / d'$$

$$t = \left( \frac{\mu I'_u}{\epsilon d'^3} \right)^{1/2} t'$$

$$n = \left( \frac{\mu d'^3}{\epsilon I'_u} \right)^{1/2} qn'$$

$$I_o = I'_o / I'_u$$

$$E = \left( \frac{\epsilon \mu d'}{I_u'} \right)^{1/2} E'$$

$$V = \left( \frac{\epsilon \mu}{d I_u'} \right)^{1/2} V'$$

$$L = L'/d'$$

En términos de estas cantidades las ecuaciones (131) y (132) toman la forma:

$$\frac{I_o}{2\pi r L} = nE + \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE) = -n$$

A partir de estas ecuaciones podemos construir una única ecuación diferencial parcial para el campo eléctrico adimensional:

$$E \frac{\partial}{\partial r} (rE) - \frac{\partial}{\partial t} (rE) = - \frac{I_o}{2\pi L} \quad (138)$$

Ahora, si definimos:

$$u = rE \quad (139)$$

la ec. (138) toma la forma:

$$\frac{u}{r} u_r - u_t = - \frac{I_o}{2\pi L} \quad (140)$$

Si consideramos las condiciones de contorno:

$$u(r,0) = 0 \quad r_1 \leq r \leq r_2 \quad (141)$$

$$u(r_1, t) = 0 \quad 0 \leq t \quad (142)$$

que son condiciones análogas a las condiciones (112) y (113) que usamos con electrodos planos, y suponemos que  $I_o$  tiene un valor negativo constante, el problema de condiciones iniciales y de frontera (140)-(142) puede ser resuelto por el método de las características, y su solución es:

$$u(r, t) = \begin{cases} - \left[ - \frac{I_o}{2\pi L} (r^2 - r_1^2) \right]^{1/2} & t \geq f(r) \\ \frac{I_o}{2\pi L} t & t \leq f(r) \end{cases} \quad (143)$$

donde:

$$f(r) = \left[ - \frac{2\pi L}{I_o} (r^2 - r_1^2) \right]^{1/2} \quad (144)$$

La ecuación (143) implica que  $E(r, t)$  y  $n(r, t)$  tienen la forma:

$$E(r, t) = \begin{cases} - \left[ - \frac{I_o}{2\pi L} \left( \frac{r^2 - r_1^2}{r^2} \right) \right]^{1/2} & t \geq f(r) \\ \frac{I_o}{2\pi L} \frac{t}{r} & t \leq f(r) \end{cases} \quad (145)$$

$$n(r, t) = \begin{cases} - \frac{I_o}{2\pi L} \left[ - \frac{I_o}{2\pi L} (r^2 - r_1^2) \right]^{-1/2} & t \geq f(r) \\ 0 & t \leq f(r) \end{cases} \quad (146)$$

De la ec. (146) podemos ver que la curva  $t=f(r)$  describe la trayectoria seguida por el frente de electrones. Los primeros electrones llegan al ánodo (situado en

$r_2 = r_1 + 1$ ) en el instante:

$$t_o = f(r_1 + 1) = \left[ -\frac{2\pi L}{I_o} (2r_1 + 1) \right]^{1/2} \quad (147)$$

y a partir de ese momento el sistema se encuentra en estado estacionario.

La evolución temporal el voltaje puede obtenerse calculando la integral:

$$V(t) = - \int_{r_1}^{r_1 + 1} E(r, t) dr$$

y el resultado es:

$$V(t) = \begin{cases} -\frac{I_o}{2\pi L} t - r_1 \left( -\frac{I_o}{2\pi L} \right)^{1/2} \arctan \frac{1}{r_1} \left( -\frac{I_o}{2\pi L} \right)^{1/2} t \\ \quad - \frac{I_o}{2\pi L} t \ln \frac{r_1 + 1}{\left[ -\frac{I_o}{2\pi L} t^2 + r_1^2 \right]^{1/2}} & t \leq t_o \\ \left( -\frac{I_o}{2\pi L} \right)^{1/2} \left[ (2r_1 + 1)^{1/2} - r_1 \arccos \frac{r_1}{r_1 + 1} \right] & t \geq t_o \end{cases}$$

En el límite  $r_1 \rightarrow 0$  esta complicada expresión se reduce a:

$$V^*(t) = \begin{cases} -\frac{I_o}{2\pi L} t \left[ 1 - \ln \left( -\frac{I_o}{2\pi L} \right)^{1/2} t \right] & t \leq t_o^* \\ V_o^* & t \geq t_o^* \end{cases} \quad (148)$$

donde hemos definido:

$$V_o^* = \left( -\frac{I_o}{2\pi L} \right)^{1/2} \quad (149)$$

$$t_o^* = \left( -\frac{2\pi L}{I_o} \right)^{1/2} \quad (150)$$

Es interesante observar que:

$$V_o^* t_o^* = 1$$

lo cual muestra que si incrementamos el valor estacionario del voltaje, la duración del transitorio necesariamente disminuye. Este comportamiento puede observarse en la figura 11, donde la gráfica de  $V^*(t)$  se muestra para diferentes valores de  $I_o$ .

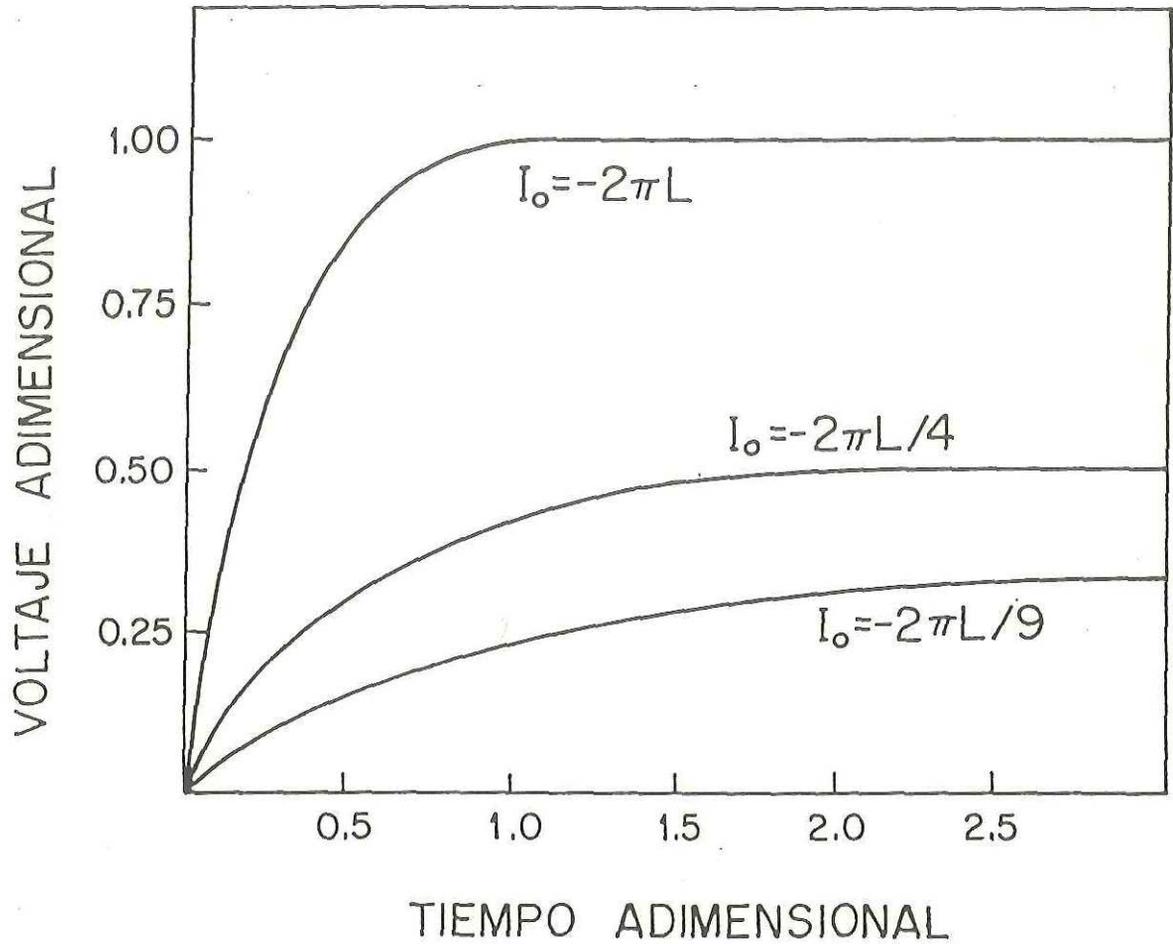


Figura 11. Transitorios de voltaje con electrodos cilíndricos coaxiales, para diferentes valores de la corriente total, en el límite en el cual  $r_1 = 0$ .

En términos de cantidades con dimensiones las ecuaciones (149) y (150) toman la forma:

$$V'_o = d' \left( - \frac{I'_o}{2\pi\epsilon\mu L'} \right)^{1/2} \quad (151)$$

$$t'_o = d' \left( - \frac{2\pi\epsilon L'}{\mu I'_o} \right)^{1/2} \quad (152)$$

y estas ecuaciones nos muestran que, a diferencia de lo que ocurría con electrodos planos, en el caso de electrodos cilíndricos (con el radio del electrodo interior igual a cero) tanto el valor estacionario del voltaje, como la duración del transitorio de carga, son directamente proporcionales al espesor radial del material. Además, de las ecs. (151) y (152) se encuentran las siguientes expresiones para la movilidad de los electrones:

$$\mu = - \frac{I'_o d'^2}{2\pi\epsilon L' V'^2_o} \quad (153)$$

$$\mu = \frac{d'^2}{V'^2_o t'^2_o} \quad (154)$$

La ec. (153) es el análogo a la ec. de Mott y Gurney (123), y nos permite obtener el valor de  $\mu$  si conocemos  $\epsilon$ . Por otra parte, la ec. (154) es el análogo a la ec. (124), y nos permite obtener el valor de  $\mu$  sin necesidad de conocer el de  $\epsilon$ . Una vez calculada  $\mu$ , podemos obtener también el valor de  $\epsilon$  mediante la ec. (151) o la ec. (152).

Es interesante observar que en este caso, al utilizar electrodos cilíndricos con  $r_1 \rightarrow 0$ , la ecuación (154) coincide con la expresión usada normalmente en los experimentos convencionales de tiempo de vuelo (Borsenberger

1990; Schein *et al.* 1986). Esta coincidencia no es un resultado trivial, pues ya vimos que en el caso de electrodos planos la ecuación (154) no es válida. La razón por la cual en el caso cilíndrico (con  $r_1 \rightarrow 0$ ) sí es válida la ec. (154), es que en este caso el campo eléctrico es uniforme en la zona ocupada por los portadores de carga inyectados por el cátodo, como podemos ver haciendo  $r_1 = 0$  en la ec. (145).

Resultados similares a los que hemos obtenido en esta sub-sección fueron también obtenidos por Zahn y Chatelon al estudiar el movimiento de iones en flúidos dieléctricos (Zahn y Chatelon 1977). Sin embargo, la obtención de la ec. (154), que nos permite hallar el valor de  $\mu$  en aquellos casos en que no conozcamos el valor de  $\epsilon$ , no había sido publicada con anterioridad.

### II.3.2 Transitorio de descarga

Consideremos ahora el transitorio de descarga en el límite  $r_1 \rightarrow 0$ . De las ecuaciones (138) y (145) podemos ver que este transitorio está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$E \frac{\partial}{\partial r} (rE) - \frac{\partial}{\partial t} (rE) = 0$$

$$E(r, t_1) = - \left( - \frac{I_o}{2\pi L} \right)^{1/2} \quad r > 0$$

$$E(0, t) = 0 \quad t \geq t_1$$

donde  $t_1$  es cualquier valor mayor que  $t_o^*$ . En términos de la variable  $u$ , definida por la ec. (139), este problema de condiciones iniciales y de frontera toma la forma:

$$\frac{u}{r} u_r - u_t = 0 \quad (155)$$

$$u(r, t_1) = -r \left( - \frac{I_o}{2\pi L} \right)^{1/2} \quad r > 0 \quad (156)$$

$$u(0, t) = 0 \quad t \geq t_1 \quad (157)$$

Este problema puede resolverse por el método de las características, en forma similar a como resolvimos la ec. (24). La solución, en términos de la función  $E(r, t)$ , es:

$$E(r,t) = E_s^2 \left( \frac{t - t_1}{r} \right) + E_s \left[ E_s^2 \left( \frac{t - t_1}{r} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \quad r > 0 \quad (158)$$

donde  $E_s$  es el valor estacionario del campo eléctrico, es decir:

$$E_s = - \left( - \frac{I_o}{2\pi L} \right)^{1/2}$$

En la figura 12 podemos observar la dependencia espacial de la función  $E(r,t)$  para diferentes valores de  $t$ . Para visualizar la superficie  $E(r,t)$  es también útil observar que, de acuerdo con la ec. (158), las curvas de nivel:

$$E(r,t) = E_o \quad (E_o = \text{constante})$$

son las líneas rectas:

$$t = \left( \frac{E_o}{2E_s^2} - \frac{1}{2E_o} \right) r + t_1$$

de manera que la superficie  $E(r,t)$  se estira siguiendo estas líneas.

El transitorio de voltaje puede obtenerse calculando la integral:

$$V(t) = - \int_0^1 E(r,t) dr$$

y el resultado es:

$$V(t) = -E_s^2 (t-t_1) - E_s [ E_s^2 (t-t_1)^2 + 1 ]^{1/2} \\ - E_s^2 (t-t_1) \ln \frac{E_s (t-t_1) - [ E_s^2 (t-t_1)^2 + 1 ]^{1/2}}{2 E_s (t-t_1)} \quad (159)$$

En la figura 13 podemos observar los transitorios de voltaje de carga y descarga, dados respectivamente por las ecs. (148) y (159).

Un problema similar al que hemos visto en esta sub-sección había sido analizado ya por Zahn y Chatelon al estudiar el movimiento de iones en flúidos dieléctricos (Zahn y Chatelon 1977) en forma algo distinta.

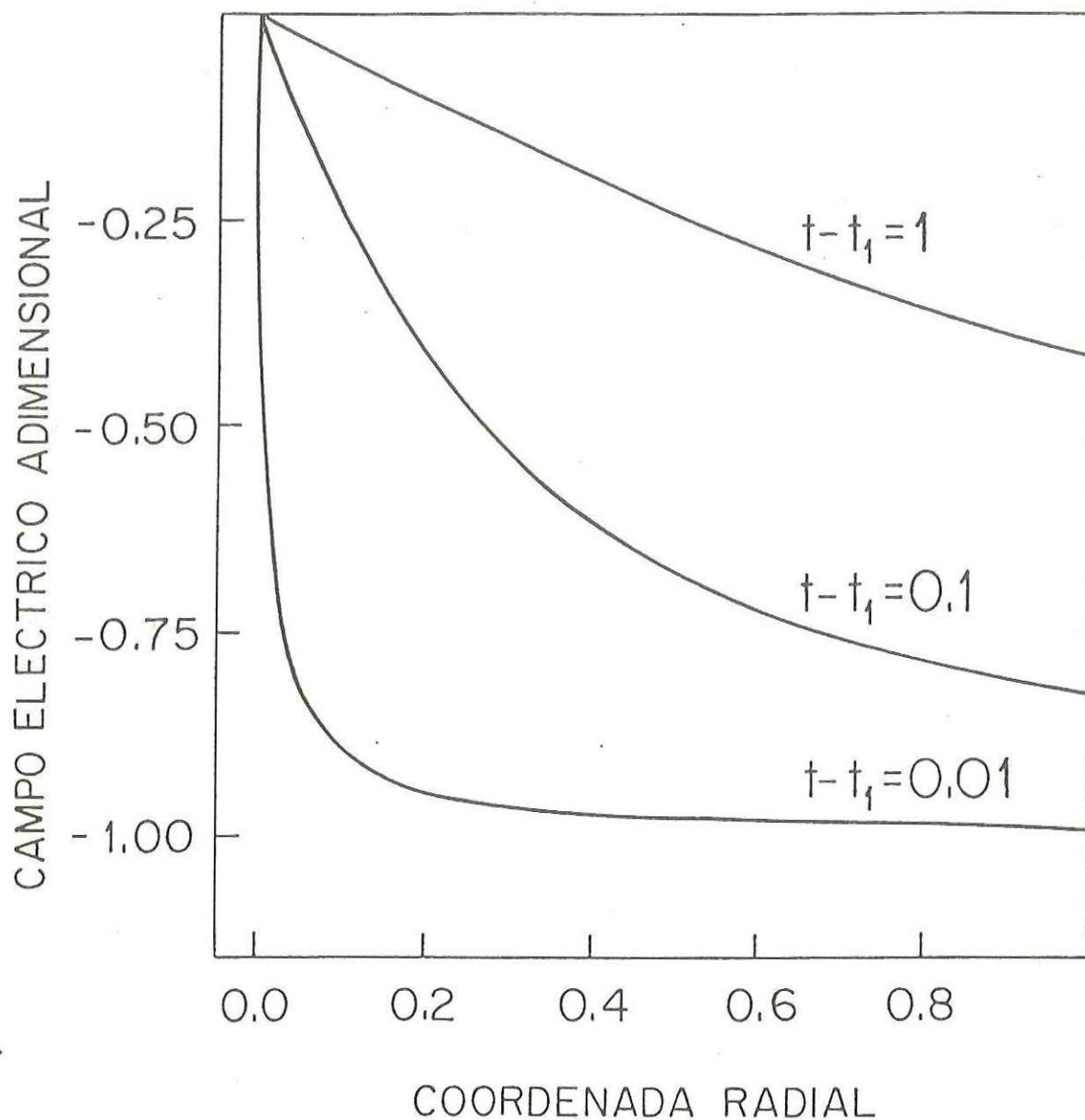


Figura 12. Dependencia radial del campo eléctrico con electrodos cilíndricos coaxiales, en diferentes momentos durante el transitorio de descarga, para  $I_0 = -2\pi L$  y  $r_1 = 0$ .

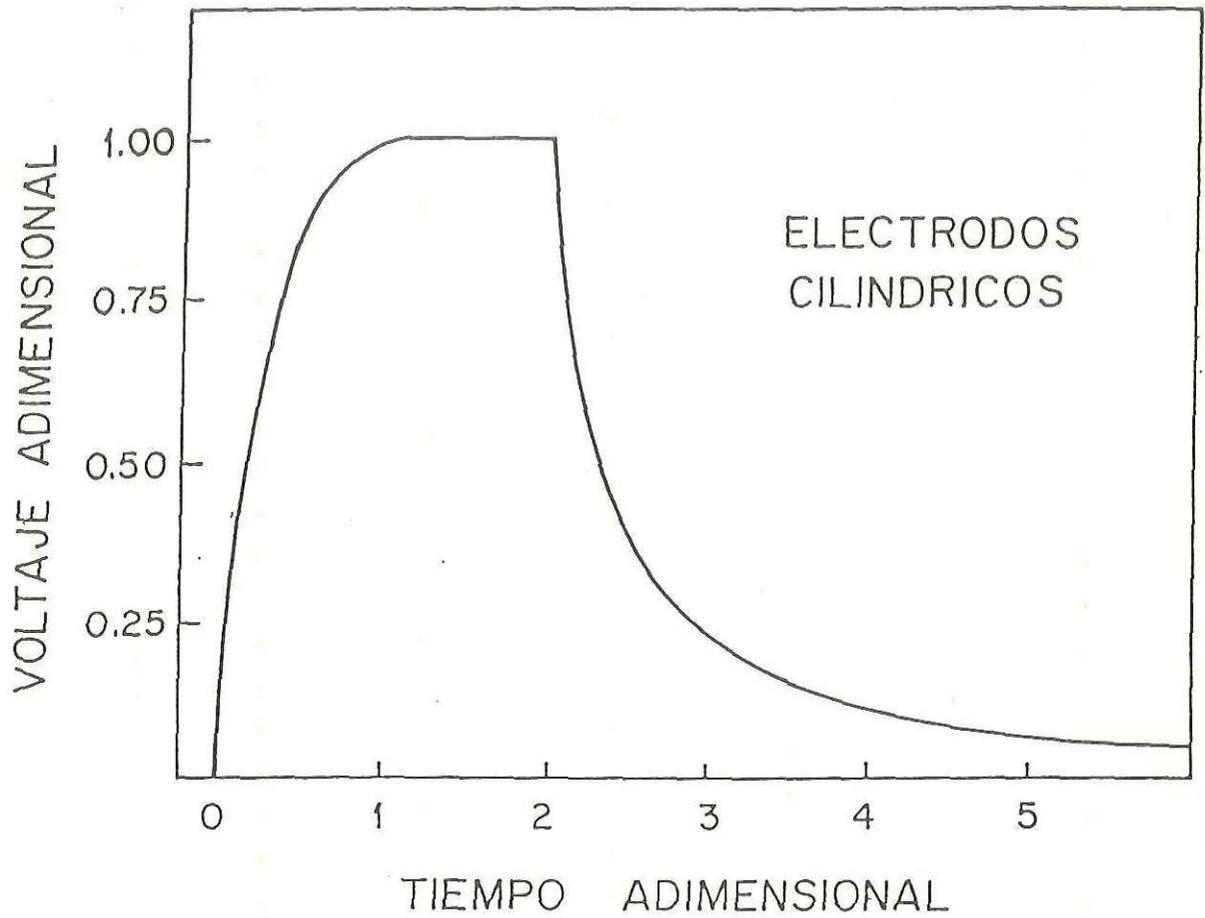


Figura 13. Transitorios de voltaje creciente y decreciente, con electrodos cilíndricos coaxiales, para  $I_o = -2\pi L$  y  $r_1 = 0$ .

## II.4 El problema con simetría esférica

### II.4.1 Transitorio de carga

Ahora consideremos el problema cuando tenemos simetría esférica. Las ecuaciones que describen el flujo de electrones a través de un semiconductor sin trampas, situado entre dos electrodos esféricos concéntricos de radios  $r'_1$  y  $r'_2 = r'_1 + d'$ , y en el cual podemos despreciar la difusión de electrones libres, son:

$$\frac{I'_o}{4\pi r'^2} = q\mu n'(r',t') E'(r',t') + \varepsilon \frac{\partial E'}{\partial t'} \quad (160)$$

$$\frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} (r'^2 E') = - \frac{q}{\varepsilon} n'(r',t') \quad (161)$$

$$\frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left[ r'^2 q\mu n'(r',t') E'(r',t') \right] = q \frac{\partial}{\partial t'} n'(r',t') \quad (162)$$

Análogamente a lo que encontramos en los casos con electrodos planos y cilíndricos (secciones II.2 y II.3), en el caso presente las ecuaciones (160) y (162) constituyen un sistema cuasi-lineal estrictamente hiperbólico. Por otra parte, a partir de las ecs. (160)-(162) es posible demostrar que  $I'_o$  no depende de  $r'$ . Una vez sabiendo esto ya no es necesario que tomemos en cuenta a la ec. (162), ya que ésta se convierte en una consecuencia obligada de las ecs. (160) y (161).

Si  $I'_u$  es un valor característico (positivo) de la corriente total, podemos definir las siguientes cantidades adimensionales:

$$r = r'/d'$$

$$t = \left( \frac{\mu I'_u}{\epsilon d'^3} \right)^{1/2} t'$$

$$n = \left( \frac{\mu d'^3}{\epsilon I'_u} \right)^{1/2} qn'$$

$$I_o = I'_o/I'_u$$

$$E = \left( \frac{\epsilon \mu d'}{I'_u} \right)^{1/2} E'$$

$$V = \left( \frac{\epsilon \mu}{d' I'_u} \right)^{1/2} V'$$

En términos de estas variables las ecs. (160) y (161) toman la forma:

$$\frac{I_o}{4\pi r^2} = nE + \frac{\partial E}{\partial t} \quad (163)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E) = -n \quad (164)$$

Estas ecuaciones pueden combinarse para obtener una única ecuación para el campo eléctrico:

$$\frac{I_o}{4\pi r^2} = -\frac{E}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E) + \frac{\partial E}{\partial t} \quad (165)$$

la cual, con el cambio de variable:

$$u = r^2 E \quad (166)$$

se transforma en:

$$\frac{u}{r^2} u_r - u_t = -\frac{I_o}{4\pi} \quad (167)$$

Las condiciones iniciales y de frontera para esta ecuación serán:

$$u(r,0) = 0 \quad r_1 \leq r \leq r_2 \quad (168)$$

$$u(r_1, t) = 0 \quad 0 \leq t \quad (169)$$

que son condiciones análogas a las condiciones (141) y (142) que usamos en el caso de electrodos cilíndricos.

Considerando a  $I_o$  como constante (negativa), el problema de condiciones iniciales y de frontera (167)-(169) puede resolverse por el método de las características. La solución de este problema, en términos de la función  $E(r,t)$ , es:

$$E(r,t) = \begin{cases} - \left[ -\frac{I_o}{6\pi} \left( \frac{r^3 - r_1^3}{r^4} \right) \right]^{1/2} & t \geq f(r) \\ \frac{I_o}{4\pi} \frac{t}{r^2} & t \leq f(r) \end{cases} \quad (170)$$

donde:

$$f(r) = \left[ \frac{2}{3} \left( -\frac{4\pi}{I_o} \right) (r^3 - r_1^3) \right]^{1/2} \quad (171)$$

En la figura 14 se puede observar el comportamiento de la función  $E(r,t)$  para  $t \geq f(r)$  y diferentes valores de  $r_1$ .

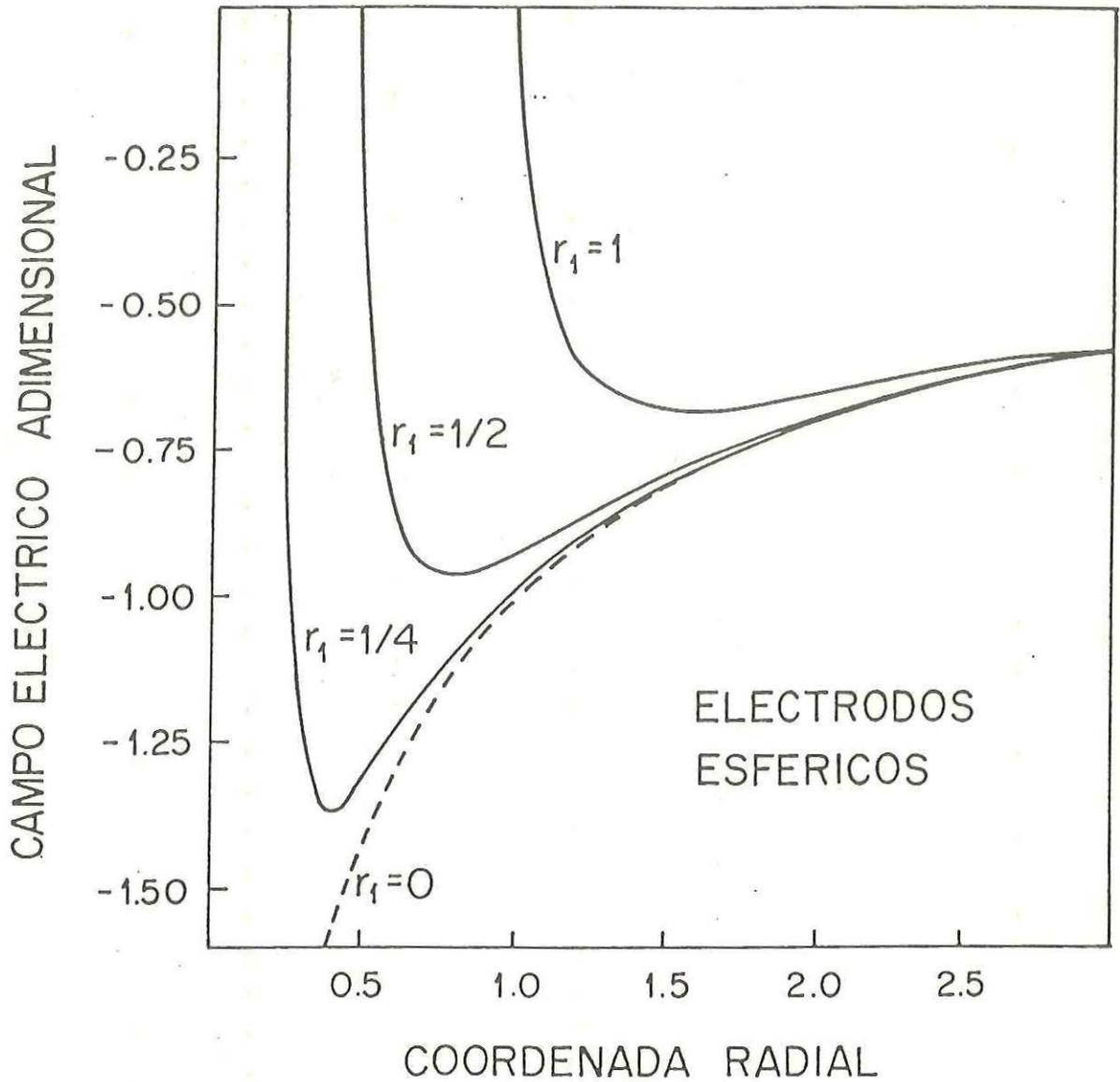


Figura 14. Distribución estacionaria del campo eléctrico con electrodos esféricos concéntricos, para  $I_0 = -6\pi$  y diferentes valores del radio interior  $r_1$ .

A partir de las ecs. (164) y (170) se encuentra que la densidad de electrones libres es:

$$n(r,t) = \begin{cases} -\frac{I_o}{4\pi} \left[ -\frac{I_o}{6\pi} (r^3 - r_1^3) \right]^{-1/2} & t \geq f(r) \\ 0 & t \leq f(r) \end{cases} \quad (172)$$

lo cual muestra que la curva  $t=f(r)$  es la trayectoria por la que avanza el frente de electrones. Los primeros electrones llegan al ánodo, situado en  $r_2 = r_1 + 1$ , en el instante:

$$t_o = f(r_1 + 1) = \left[ \frac{2}{3} \left( -\frac{4\pi}{I_o} \right) (3r_1^2 + 3r_1 + 1) \right]^{1/2} \quad (173)$$

y a partir de ese momento el sistema se encuentra en estado estacionario.

El transitorio de voltaje:

$$V(t) = - \int_{r_1}^{r_2} E(r,t) dr \quad (174)$$

no puede expresarse en términos de funciones elementales, ya que la integral (174) conduce en este caso a integrales elípticas. Por este motivo consideraremos la situación en el límite  $r_1 \rightarrow 0$ . En este límite el campo eléctrico toma la forma:

$$E^*(r,t) = \begin{cases} -\left( -\frac{I_o}{6\pi r} \right)^{1/2} & t \geq f^*(r) \\ \frac{I_o}{4\pi} \frac{t}{r^2} & t \leq f^*(r) \end{cases} \quad (175)$$

donde:

$$f^*(r) = \left( -\frac{8\pi r^3}{3I_o} \right)^{1/2} \quad (176)$$

y el estado estacionario se establece en el momento:

$$t_o^* = \left( -\frac{8\pi}{3I_o} \right)^{1/2} \quad (177)$$

Usando la expresión (175) se encuentra que el transitorio de voltaje está dado por:

$$V^*(t) = \begin{cases} \left( -\frac{3I_o}{2^{3/2}\pi} \right)^{2/3} t^{1/3} + \frac{I_o}{4\pi} t & t \leq t_o^* \\ V_o^* & t \geq t_o^* \end{cases} \quad (178)$$

donde:

$$V_o^* = \left( -\frac{2I_o}{3\pi} \right)^{1/2} \quad (179)$$

La gráfica de  $V^*(t)$  se muestra en la figura 15.

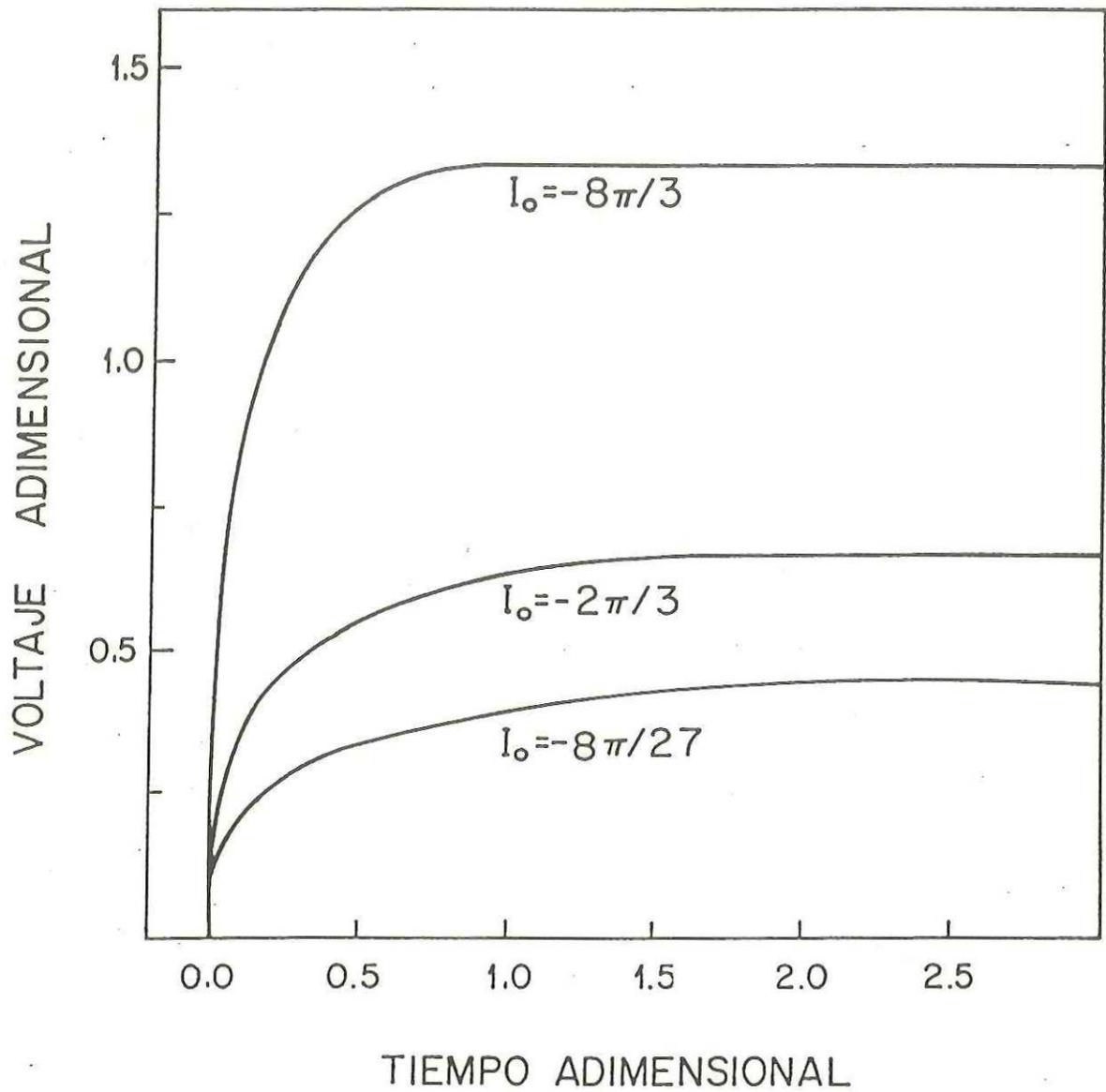


Figura 15. Transitorio de voltaje con electrodos esféricos concéntricos, para diferentes valores de la corriente total, en el límite en el cual  $r_1 = 0$ .

En términos de cantidades con dimensiones las ecs. (177) y (179) toman la forma:

$$-I'_o = \frac{3\pi}{2} \frac{\epsilon\mu}{d'} V_o'^2 \quad (180)$$

$$-I'_o t_o'^2 = \frac{8\pi}{3} \frac{\epsilon d'^3}{\mu} \quad (181)$$

y a partir de estas ecuaciones podemos obtener las dos siguientes expresiones para la movilidad de los electrones:

$$\mu = -\frac{2}{3} \frac{I'_o d'}{\pi \epsilon V_o'^2} \quad (182)$$

$$\mu = \frac{4}{3} \frac{d'^2}{V_o' t_o'^2} \quad (183)$$

La ec. (182) es el análogo a la ec. de Mott y Gurney (123), y nos permite hallar el valor de  $\mu$  si conocemos la permitividad del material. Por otra parte, la ec. (183) es análoga a las ecuaciones (124) y (154), y nos permite hallar el valor de  $\mu$  aún cuando desconozcamos el valor de  $\epsilon$ . Una vez encontrado el valor de  $\mu$ , podemos usar la ec. (180) o la ec. (181) para obtener también el valor de  $\epsilon$ .

Es interesante observar que en la ec. (183) vuelve a aparecer un factor  $4/3$ , tal como en el caso de electrodos planos. La presencia de este factor no es un resultado obvio, pues ya vimos que en el caso cilíndrico dicho factor no aparece.

Hasta donde me es conocido, los resultados presentados en esta sub-sección no habían sido publicados previamente.

#### II.4.2 Transitorio de descarga

Nuevamente, como en la sub-sección II.3.2, consideraremos el transitorio de descarga en el límite  $r_1 \rightarrow 0$ . De las ecuaciones (165) y (175) podemos ver que este transitorio está descrito por las ecuaciones:

$$\frac{E}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E) - \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

$$E(r, t_1) = - \left( -\frac{I_o}{6\pi r} \right)^{1/2} \quad r > 0$$

$$E(0, t) = 0 \quad t \geq t_1$$

donde  $t_1$  es cualquier valor mayor que  $t_o^*$ . En términos de la variable  $u$ , definida por la ec. (166), este problema se transforma en el siguiente:

$$\frac{u}{r^2} u_r - u_t = 0 \quad (184)$$

$$u(r, t_1) = - \left( -\frac{I_o}{6\pi} \right)^{1/2} r^{3/2} \quad r > 0 \quad (185)$$

$$u(0, t) = 0 \quad t \geq t_1 \quad (186)$$

Este problema puede ser resuelto usando el método de las características, tal como resolvimos la ec. (24), y la solución, en términos de la función  $E(r, t)$ , es:

$$E(r, t) = - \left( -\frac{I_o}{6\pi} \right)^{1/2} \left\{ -\frac{3}{2} \left( \frac{t - t_1}{r^2} \right) + \left[ \left( \frac{3}{2} \right)^2 \left( \frac{t - t_1}{r^2} \right)^2 + \frac{1}{r} \right]^{1/2} \right\} \quad (187)$$

La variación espacial de esta función, para diferentes valores de  $t$ , se muestra

en la figura 16.

En este caso el transitorio de voltaje no puede expresarse en términos de funciones elementales, ya que la integral de la función  $E(r,t)$  involucra una integral elíptica.

Hasta donde me es conocido, el resultado presentado en esta sub-sección no había sido publicado con anterioridad.

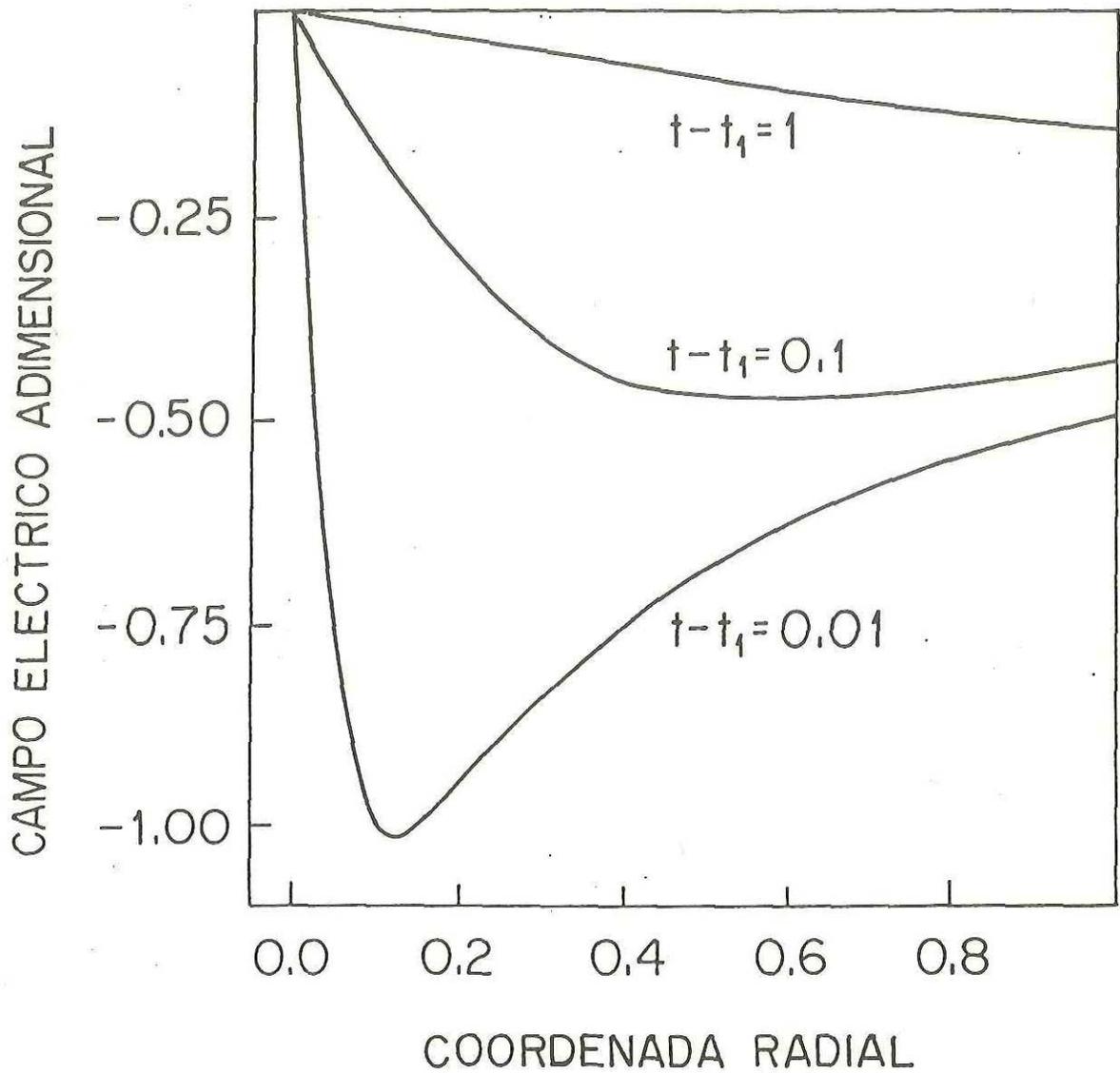


Figura 16. Dependencia radial del campo eléctrico con electrodos esféricos concéntricos, en diferentes momentos durante el transitorio de descarga, en el límite en el cual  $r_1 = 0$ .

## II.5 El sistema con trampas

### II.5.1 Transitorio de carga

En esta sección estudiaremos cómo influye la presencia de trampas en los transitorios eléctricos que se producen al aplicar o interrumpir súbitamente una corriente constante que fluye a través de nuestro material. Consideraremos a un semiconductor o un aislante en el que la corriente eléctrica es transportada por un único tipo de portadores de carga (electrones), y en el cual existen trampas distribuidas uniformemente en el espacio, y situadas en un único nivel energético. Si consideramos electrodos planos, las ecuaciones que describen el flujo de electrones son las siguientes (Kao y Hwang 1981, pag. 339):

$$J'_o = q\mu n'(x',t')E'(x',t') + \epsilon \frac{\partial E'}{\partial t'} \quad (188)$$

$$\frac{\partial E'}{\partial x'} = - \frac{q}{\epsilon} \left[ n'(x',t') - n'_o + m'(x',t') - m'_o \right] \quad (189)$$

$$\frac{\partial m'}{\partial t'} = C \left\{ n'(x',t') \left[ N' - m'(x',t') \right] - \frac{N_c}{g} \exp \left[ (E_t - E_c) / kT \right] m'(x',t') \right\} \quad (190)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left[ q\mu n'(x',t') E'(x',t') \right] = q \frac{\partial}{\partial t'} \left[ n'(x',t') + m'(x',t') \right] \quad (191)$$

donde  $J'_o$ ,  $q$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $n'$ , y  $E'$  tienen el mismo significado que en la sección II.2,  $n'_o$  es la densidad de electrones libres en condiciones de equilibrio térmico,  $m'$  es la densidad de electrones atrapados en las trampas,  $m'_o$  la densidad de electrones atrapados en equilibrio térmico,  $C$  el coeficiente de captura de electrones,  $N'$  la densidad de trampas,  $E_t$  el nivel energético en el cual se

encuentran las trampas,  $E_c$  el nivel energético en la orilla de la banda de conducción,  $N_c$  la densidad efectiva de estados en la banda de conducción, y  $g$  es el factor de degeneración de los estados que constituyen las trampas.

A partir de las ecuaciones (188), (189), y (191) se puede probar que  $J'_0$  no depende de  $x'$ . Una vez sabiendo esto no necesitamos considerar más a la ec. (191), ya que ésta se convierte en una consecuencia obligada de las ecs. (188) y (189).

Procediendo como Batra y Seki (Batra y Seki 1970), despreciaremos los valores de  $n'_0$  y  $m'_0$  en la ec. (189), e introduciremos la aproximación:

$$N' - m' \approx N'$$

en la ec. (190). Con estas suposiciones, las ecs. (189) y (190) toman la forma:

$$\frac{\partial E'}{\partial x'} = - \frac{q}{\varepsilon} \cdot [n'(x', t') + m'(x', t')] \quad (192)$$

$$\frac{\partial m'}{\partial t'} = CN'n'(x', t') - Cn'_1 m'(x', t') \quad (193)$$

donde hemos definido:

$$n'_1 = \frac{N_c}{g} \exp [(E_t - E_c) / kT] \quad (194)$$

Ahora, si definimos las variables adimensionales  $x$ ,  $t$ ,  $n$ ,  $J_0$ ,  $E$  y  $V$  exactamente en la misma forma que en la sección II.2, e introducimos las variables adimensionales adicionales:

$$m = \left( \frac{\mu d'}{\varepsilon J'_u} \right)^{1/2} qm'$$

$$N = \left( \frac{\varepsilon d'}{\mu J'_u} \right)^{1/2} CN'$$

$$n_1 = \left( \frac{\varepsilon d'}{\mu J'_u} \right)^{1/2} Cn'_1$$

las ecs. (188), (192) y (193) toman la forma:

$$J_o = nE + E_t \quad (195)$$

$$E_x = -n - m \quad (196)$$

$$m_t = Nn - n_1 m \quad (197)$$

Despejando  $n$  de la ec. (196), y substituyendo la expresión así obtenida en las ecs. (195) y (197), obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$E_t - EE_x + 0 - (Em + J_o) = 0 \quad (198)$$

$$m_t + NE_x + 0 + (N + n_1)m = 0 \quad (199)$$

las cuales constituyen un sistema de la forma:

$$U_t + AU_x + B = 0 \quad (200)$$

donde  $U$  y  $B$  son los vectores columna:

$$U = \begin{bmatrix} E \\ m \end{bmatrix} \quad (201)$$

$$B = \begin{bmatrix} -(Em + J_o) \\ (N + n_1)m \end{bmatrix} \quad (202)$$

y A es la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -E & 0 \\ N & 0 \end{bmatrix} \quad (203)$$

Tal como mencionamos en la sección II.1, los sistemas cuasi-lineales de la forma (200) se clasifican en parabólicos, elípticos, ultrahiperbólicos, hiperbólicos, y estrictamente hiperbólicos, de acuerdo con los valores y vectores propios de la matriz A(U). En el caso presente los valores propios de A(U) son:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -E \quad (204)$$

y los vectores propios son:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} E \\ -N \end{bmatrix} \quad (205)$$

Podemos ver que en aquellos puntos en que  $E \neq 0$  los dos valores propios son reales y distintos, y los vectores propios son linealmente independientes. Esto implica que el sistema (200) es un sistema cuasi-lineal estrictamente hiperbólico, y por lo tanto existen dos familias de curvas características, dadas por las soluciones de las ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(E) \quad (i = 1,2) \quad (206)$$

Para  $i=1$  las características son simplemente las rectas  $x=\text{const.}$  (tal como en la sección II.1). Para  $i=2$  las características no se pueden obtener hasta que se haya encontrado el campo  $E(x,t)$ , ya que  $\lambda_2$  depende de E.

Para resolver el sistema hiperbólico (198)-(199) es conveniente

transformar dicho sistema en un única ecuación para el campo eléctrico. Esto es posible gracias a que podemos obtener una expresión para  $m(x,t)$  en términos de  $E(x,t)$  resolviendo (199) por el método de variación de parámetros (Elsgolts 1977). De esta forma obtenemos:

$$m(x,t) = \left[ k(x) - \int_0^t N E_x e^{(N+n_1)t'} dt' \right] e^{-(N+n_1)t} \quad (207)$$

donde  $k(x)$  es una función arbitraria. Si consideramos la condición inicial:

$$m(x,0) = 0 \quad (208)$$

la función  $k(x)$  debe ser idénticamente cero, y por lo tanto:

$$m(x,t) = - N e^{-(N+n_1)t} \int_0^t E_x e^{(N+n_1)t'} dt' \quad (209)$$

Substituyendo esta expresión en la ec. (198) se obtiene la siguiente ecuación integrodiferencial no lineal:

$$E_t - E E_x - J_0 - N e^{-(N+n_1)t} E \int_0^t E_x e^{(N+n_1)t'} dt' = 0 \quad (210)$$

La solución particular de esta ecuación que nos interesa deberá satisfacer el mismo tipo de condiciones iniciales y de frontera que usamos en la sección II.1, es decir:

$$E(x,0) = 0 \quad x \geq 0 \quad (211)$$

$$E(0,t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (212)$$

Obtener la solución exacta de la ecuación (210) es un problema extremadamente

difícil. Por lo tanto, obtendremos una solución aproximada introduciendo dos aproximaciones. La primera aproximación es suponer que podemos sacar el factor  $E_x$  de la integral que aparece en (210), con lo cual tendremos que:

$$\int_0^t E_x e^{(N+n_1)t'} dt' = E_x \int_0^t e^{(N+n_1)t'} dt' \quad (213)$$

Esta ecuación es exacta en el caso en el cual no haya trampas en el material, y por lo tanto resulta una aproximación razonable en el caso con trampas. Introduciendo (213) en (210), y efectuando la integral, obtenemos:

$$E_t - \frac{n_1}{N+n_1} \left[ 1 + \frac{N}{n_1} e^{-(N+n_1)t} \right] EE_x = J_o \quad (214)$$

La segunda aproximación consiste en despreciar el segundo término que aparece en el paréntesis cuadrado de (214). Esta es una suposición razonable si suponemos, por ejemplo, que  $N' = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$  (Helfrich y Schneider 1966),  $E_t - E_c = -0.6 \text{ eV}$ ,  $g = 2$ , y  $N_c = 8.4 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$ , que es el doble de la densidad molecular del antraceno (Helfrich y Mark 1963; Meier 1974, pags. 396-397), pues en tal caso:

$$n_1' = \frac{1}{g} N_c \exp \left( \frac{E_t - E_c}{kT} \right) = 3.3 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3}$$

y por lo tanto:

$$\frac{N}{n_1} = \frac{N'}{n_1'} = 0.03$$

y al multiplicar este valor por el factor exponencial  $e^{-(N+n_1)t}$  obtenemos un valor aún más pequeño. Despreciando, pues, el segundo término del paréntesis

cuadrado de la ec. (214), obtenemos la ecuación:

$$EE_x - AE_t = -AJ_o \quad (215)$$

donde hemos definido:

$$A = 1 + N/n_1 \quad (216)$$

La ecuación (215), con las condiciones de contorno (211) y (212), puede resolverse por el método de las características, y el resultado que se encuentra es:

$$E(x,t) = \begin{cases} -(-2AJ_o x)^{1/2} & x \leq -J_o t^2 / 2A \\ J_o t & x \geq -J_o t^2 / 2A \end{cases} \quad (217)$$

Esta ecuación muestra que el estado estacionario se establece en el instante:

$$t_o = (-2A / J_o)^{1/2} \quad (218)$$

y que la trayectoria del frente de electrones está dada por la ecuación:

$$t = \left( -\frac{2Ax}{J_o} \right)^{1/2} \quad (219)$$

Comparando la ec. (218) con la ec. (117) de la sección II.2 podemos ver que la presencia de trampas retarda el establecimiento del estado estacionario, lo cual es intuitivamente comprensible.

El transitorio de voltaje puede obtenerse a partir de la ecuación (217). El resultado es:

$$V(t) = \begin{cases} -J_o t - J_o^2 t^3 / 6A & t \leq t_o \\ \left(-\frac{8}{9} AJ_o\right)^{1/2} & t \geq t_o \end{cases} \quad (220)$$

Comparando esta ecuación con la ec. (119) de la sección II.2 podemos ver que el valor estacionario del voltaje aumenta cuando hay trampas en el material. Esto es comprensible ya que la presencia de trampas dificulta el paso de los electrones, y es necesario un mayor voltaje para vencer estos obstáculos.

Al igual que en el caso sin trampas, podemos escribir la ec. (220) en términos de cantidades con dimensiones, en la forma:

$$V'(t') = \begin{cases} -\frac{J'_o d'}{\epsilon} t' - \frac{\mu J'_o{}^2}{6A\epsilon^2} t'^3 & t' \leq t'_o \\ V'_o & t' \geq t'_o \end{cases} \quad (221)$$

donde:

$$t'_o = \left( -\frac{2A\epsilon d'}{\mu J'_o} \right)^{1/2} \quad (222)$$

$$V'_o = \left( -\frac{8AJ'_o d'^3}{9\epsilon\mu} \right)^{1/2} \quad (223)$$

A partir de estas dos ecuaciones podemos obtener las siguientes expresiones para la movilidad de los electrones:

$$\mu = -\frac{8}{9} \frac{AJ'_o d'^3}{\epsilon V_o'^2} \quad (224)$$

$$\mu = \frac{4}{3} \frac{A d'^2}{V'_o t'_o} \quad (225)$$

Estas ecuaciones son análogas a las ecs. (123) y (124). La ec. (224) nos permite hallar el valor de  $\mu$  si conocemos el valor de  $\epsilon$ , y la ec. (225) nos permite calcular el valor de  $\mu$  aún si no conocemos el de  $\epsilon$ , si medimos el tiempo  $t'_o$  que dura el transitorio de carga, y conocemos (o medimos) el valor del parámetro A. Una vez conociendo el valor de  $\mu$  podemos también obtener el valor de  $\epsilon$  mediante la ec. (222) o la ec. (223).

Observando las ecs. (215)-(225) podemos ver que recuperamos los resultados obtenidos en el caso sin trampas si hacemos  $A = 1$ . Esto implica que la posibilidad de despreciar la presencia de trampas en el material depende críticamente del valor de A: si el valor de A es cercano a uno podremos despreciar las trampas, en caso contrario es necesario tomarlas en cuenta.

El valor de A, además de depender de la densidad de trampas  $N'$ , depende de la profundidad del nivel energético de éstas dentro de la banda prohibida, pues de la ec. (216), y de las definiciones de  $N$ ,  $n_1$  y  $n'_1$ , tenemos que:

$$A = 1 + g \frac{N'}{N_c} \exp \left( \frac{E_c - E_t}{kT} \right) \quad (226)$$

En la figura 17 podemos ver el comportamiento de A como función de  $E_c - E_t$ , para distintos valores de  $N'$ . Esta figura muestra que el valor de este parámetro tiende a uno conforme disminuye la profundidad energética de las trampas. Esto implica que las trampas superficiales ("shallow traps") influyen relativamente menos que las trampas profundas ("deep traps") en la forma de los transitorios.

Hemos mencionado arriba que la ec. (225) puede ser usada para calcular el

valor de la movilidad de los portadores, si medimos la duración del transitorio de carga, y conocemos el valor del parámetro A. En muchas ocasiones, sin embargo, el valor del parámetro A es desconocido. En tales casos podemos determinar su valor a partir del transitorio de descarga, como veremos en la próxima sub-sección

Hasta donde me es conocido, los resultados obtenidos en esta sub-sección no habían sido publicados con anterioridad.

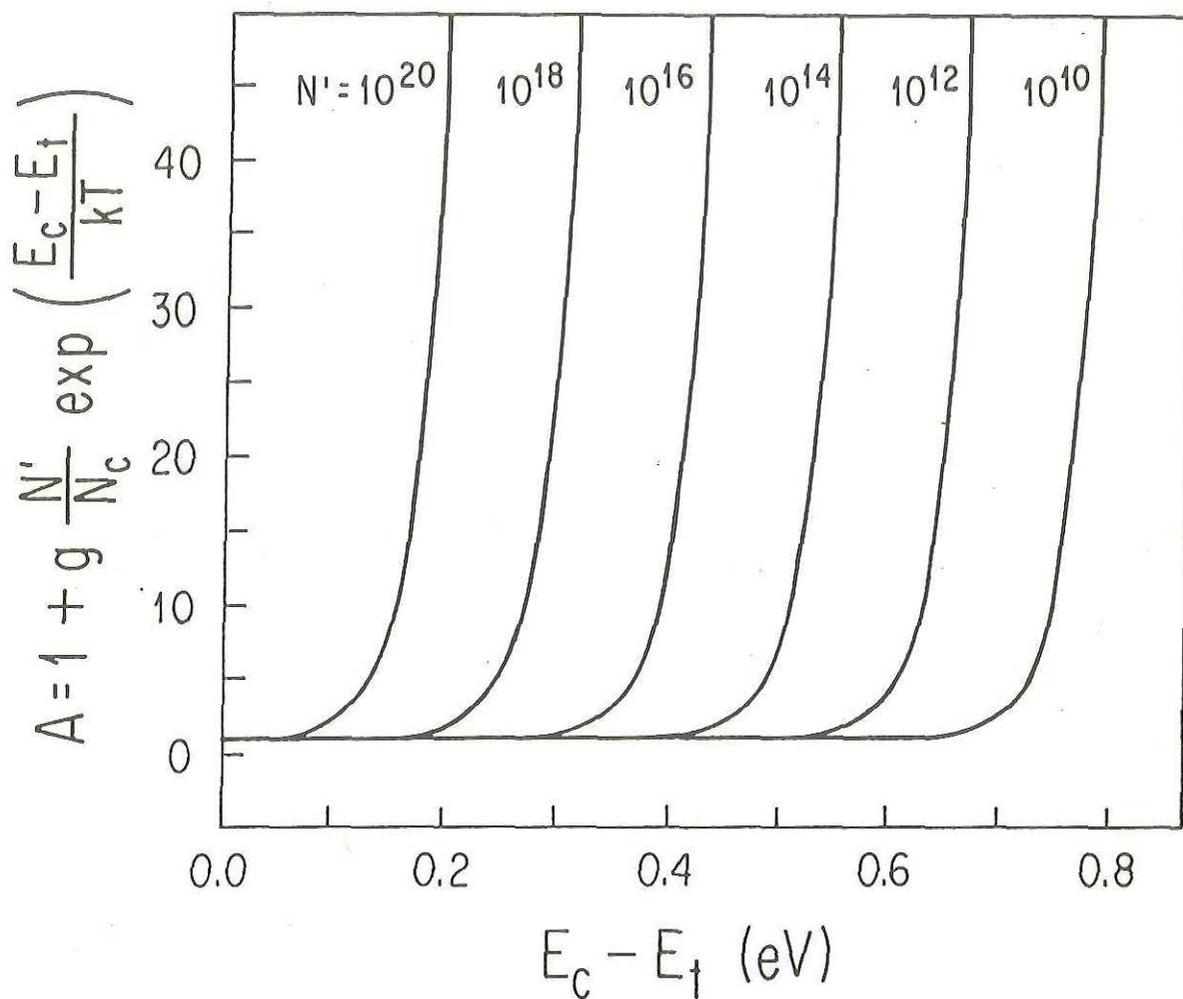


Figura 17. Comportamiento del parámetro A como función del nivel energético de las trampas, para seis distintos valores de la densidad de trampas. El valor de  $N'$  (en  $\text{cm}^{-3}$ ) se indica junto a cada curva. En todas las curvas se consideró que  $N_c = 8.4 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$ ,  $T = 300^\circ \text{K}$ , y  $g = 2$ .

### II.5.2 Transitorio de descarga

El transitorio de descarga está descrito por las ecuaciones:

$$E_t - EE_x + 0 + 0 - mE = 0 \quad (227)$$

$$0 + NE_x + m_t + 0 + (N+n_1)m = 0 \quad (228)$$

que es un sistema de la forma:

$$A_i E_t + B_i E_x + C_i m_t + D_i m_x + F_i = 0 \quad (i=1,2) \quad (229)$$

Procediendo igual que en el caso del sistema (54)-(55), el sistema (227)-(228) puede transformarse en un nuevo sistema de 4 ecuaciones características. Si hacemos la aproximación:

$$N + n_1 \approx n_1$$

en el último término de la ec. (228), lo cual es razonable porque típicamente los valores de  $N$  son mucho menores que los de  $n_1$ , las cuatro ecuaciones características del sistema (227)-(228) toman la forma:

$$\chi_\alpha = 0 \quad (230)$$

$$\chi_\beta + Et_\beta = 0 \quad (231)$$

$$NE_\alpha + Em_\alpha + n_1 mEt_\alpha = 0 \quad (232)$$

$$NE_\beta = 0 \quad (233)$$

De estas ecuaciones, las más interesantes son las ecs. (231) y (233). La ec.

(233) muestra que el campo eléctrico no depende de  $\beta$ . Por consiguiente:

$$E = E(\alpha)$$

lo cual implica que el campo eléctrico es constante al lo largo de las curvas  $\alpha = \text{constante}$ . Para hallar la forma de las curvas  $\alpha(x,t)=\text{const.}$  podemos usar la identidad:

$$\left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\alpha} \left( \frac{\partial t}{\partial \beta} \right)_{\alpha} = \left( \frac{\partial x}{\partial \beta} \right)_{\alpha}$$

para escribir la ec. (231) en la forma:

$$\left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)_{\alpha} = - \frac{1}{E(\alpha)}$$

Esta ecuación muestra que una curva  $t(x,\alpha=\text{cte.})$  tiene una pendiente constante igual a  $-1/E(\alpha)$ . Por lo tanto, las curvas  $\alpha(x,t)=\text{cte.}$  son rectas de pendiente  $-1/E(\alpha)$ . Esta información es suficiente para calcular la evolución del campo eléctrico durante el transitorio de descarga, partiendo de cualquier condición inicial  $E(x,t_1)$ . En particular, si  $t_0$  es el instante dado por la ec. (218),  $t_1 > t_0$ , y tomamos como condición inicial al campo eléctrico estacionario:

$$E(x,t_1) = -(-2AJ_0 x)^{1/2} \quad x \geq 0$$

el campo eléctrico durante el transitorio de descarga estará dado por una expresión de la forma:

$$E(x,t) = E(x-\delta, t_1) \quad x \geq 0, \quad t \geq t_1$$

donde el valor de  $\delta$  es tal que:

$$\frac{t-t_1}{\delta} = - \frac{1}{E(x-\delta, t_1)}$$

es decir:

$$\delta = AJ_o (t-t_1)^2 + \left[ (-AJ_o)^2 (t-t_1)^4 - 2AJ_o x (t-t_1)^2 \right]^{1/2}$$

A partir de las cuatro últimas ecuaciones se sigue que el campo eléctrico durante el transitorio de descarga es:

$$E(x, t) = - AJ_o (t-t_1) - \left[ -2AJ_o x + A^2 J_o^2 (t-t_1)^2 \right]^{1/2} \quad x \geq 0, \quad t \geq t_1 \quad (234)$$

y a partir de esta expresión podemos obtener el transitorio de voltaje:

$$V(t) = AJ_o (t-t_1) - \frac{1}{3AJ_o} \left[ -2AJ_o x + A^2 J_o^2 (t-t_1)^2 \right]^{3/2} - \frac{1}{3} A^2 J_o^2 (t-t_1)^3 \quad (235)$$

Al igual que en el caso de la ec. (130) esta función tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito.

Expresada en términos de cantidades con dimensiones, la ec. (235) toma la forma:

$$V'(t') = - \frac{AJ'_o d'}{\epsilon} (t' - t'_1) - \left( \frac{AJ'_o d'^3}{9\epsilon\mu} \right)^{1/2} \left[ - 2 + \frac{AJ'_o \mu}{\epsilon d'} (t' - t'_1)^2 \right]^{3/2} - \frac{\mu}{3} \left( \frac{AJ'_o}{\epsilon} \right)^2 (t' - t'_1)^3 \quad (236)$$

y esta ecuación implica que:

$$\left. \frac{dV'}{dt'} \right|_{t'=t'_1} = - \frac{AJ'_o d'}{\epsilon}$$

de manera que:

$$A = - \frac{\epsilon}{J'_0 d'} \left. \frac{dV'}{dt'} \right|_{t'=t'_1} \quad (237)$$

Esta ecuación nos muestra que el valor del parámetro A puede determinarse si medimos la pendiente  $dV'/dt'$  del transitorio de voltaje, en el instante  $t'_1$  en que se inicia el transitorio de descarga. Este resultado nos muestra que el transitorio de descarga nos da información adicional, que no era posible obtener de la sola medición del transitorio de carga. Una vez conociendo el valor del parámetro A podemos calcular la movilidad de los portadores mediante la ec. (225). Además, si conocemos el valor de A, la ec. (226) nos permite determinar el nivel energético de las trampas, si conocemos su densidad, o viceversa.

Hasta donde me es conocido, las expresiones que hemos encontrado en esta sub-sección para los transitorios de voltaje y campo eléctrico, así como la expresión (237) para el parámetro A, no habían sido publicadas con anterioridad.

## II.6 El sistema con difusión

### II.6.1 Transitorio de carga

Finalmente consideraremos las ecuaciones que describen el flujo de electrones en un semiconductor sin trampas, incluyendo la contribución debida a la difusión de los electrones. Dichas ecuaciones son:

$$J'_o = q\mu n'E' + qD' \frac{\partial n'}{\partial x'} + \epsilon \frac{\partial E'}{\partial t'} \quad (238)$$

$$\frac{\partial E'}{\partial x'} = - \frac{q}{\epsilon} n' \quad (239)$$

$$q \frac{\partial n'}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( q\mu n'E' + qD' \frac{\partial n'}{\partial x'} \right) \quad (240)$$

A partir de estas tres ecuaciones es posible demostrar que  $J'_o$  no depende de  $x'$ . Una vez sabiendo esto, la tercera de las tres ecuaciones arriba mostradas se vuelve una consecuencia obligada de las dos primeras, por lo cual ya no es necesario considerarla explícitamente.

Introduciendo las mismas variables adimensionales que utilizamos en la sección II.2, y definiendo un coeficiente de difusión adimensional:

$$D = \left( \frac{\epsilon}{J'_u \mu d'^3} \right)^{1/2} D'$$

las ecuaciones (238) y (239) toman la forma:

$$J_o = n(x,t) E(x,t) + D \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -n(x,t)$$

A partir de este aparentemente sencillo sistema de ecuaciones, se encuentra una ecuación interesante para el campo eléctrico:

$$E_t = DE_{xx} + EE_x + J_0 \quad (241)$$

Esta es una ecuación parabólica no lineal (Tijonov y Samarsky 1980, pags. 20-21), similar a la ecuación de Burgers (Hopf 1950), salvo por el término constante  $J_0$ . En lo que sigue obtendremos la solución particular de la ec. (241) consistente con las condiciones de contorno:

$$E(x,0) = 0 \quad x \geq 0 \quad (242)$$

$$E(0,t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (243)$$

que son las mismas condiciones de contorno que hemos utilizado en las secciones anteriores.

El parecido de la ec. (241) con la ec. de Burgers sugiere la aplicación de la transformación de Hopf-Cole (Hopf 1950):

$$E = 2D \frac{u_x}{u} \quad (244)$$

la cual implica que:

$$u(x,t) = u(0,t) \exp \left[ \frac{1}{2D} \int_0^x E(x',t) dx' \right] \quad (245)$$

Usando la transformación (244) la ecuación no lineal (241) se transforma en la ecuación lineal:

$$u_t = Du_{xx} + \frac{J_0}{2D} xu \quad (246)$$

y las condiciones de contorno (242)-(243) se transforman en:

$$u(x,0) = u_0 \quad (u_0 = \text{const.}) \quad x \geq 0 \quad (247)$$

$$u_x(0,t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (248)$$

Además, de la ec. (245) se sigue que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x,t) = 0 \quad t > 0 \quad (249)$$

Para obtener la solución del problema de contorno (246)-(249) empecemos por buscar las soluciones separables de la ec. (246) consistente con las condiciones de contorno (248)-(249). Sustituyendo, pues:

$$u(x,t) = f(x) g(t)$$

en la ec. (246), encontramos que  $f(x)$  y  $g(x)$  deben ser soluciones de las ecuaciones:

$$g_t + \nu g = 0 \quad (250)$$

$$f_{xx} + (s-rx) f = 0 \quad (251)$$

donde  $\nu$  es una constante, y  $r$  y  $s$  están definidas por las ecuaciones:

$$r = -J_0 / 2D^2 \quad (252)$$

$$s = \nu/D \quad (253)$$

La ecuación (250) se puede resolver inmediatamente, y su solución es:

$$g(t) = g(0) e^{-\nu t} \quad (254)$$

Por otra parte, para obtener la solución de (251) es conveniente introducir el cambio de variable:

$$z = r^{-2/3} (rx-s) \quad (255)$$

que transforma a (251) en la ecuación de Airy:

$$f_{zz} - zf = 0 \quad (256)$$

cuya solución general es una combinación lineal de las funciones de Airy:

$$f(z) = c_a Ai(z) + c_b Bi(z) \quad (c_a \text{ y } c_b \text{ const.}) \quad (257)$$

Por lo tanto, la solución de la ec. (251) es:

$$f(x) = c_a Ai(r^{1/3}x - \nu/Dr^{2/3}) + c_b Bi(r^{1/3}x - \nu/Dr^{2/3}) \quad (258)$$

Ahora bien, para que esta expresión satisfaga la condición (249) es necesario que  $c_b$  sea igual a cero. Por consiguiente  $f(x)$  se reduce a:

$$f(x) = c_a Ai(r^{1/3}x - \nu/Dr^{2/3}) \quad (259)$$

Si ahora imponemos la condición (248) vemos que deberá cumplirse la siguiente ecuación:

$$Ai'(-\nu/Dr^{2/3}) = 0 \quad (260)$$

donde  $Ai'(z)$  es la derivada de la función  $Ai(z)$ . Esta ecuación implica que el parámetro  $\nu$  sólo puede tomar los valores discretos  $\nu_n$  tales que:

$$-\frac{\nu_n}{Dr^{2/3}} = \lambda_n \quad (261)$$

donde  $\lambda_n$  es el n-ésimo cero de la función  $Ai'(z)$ . Tanto  $Ai(z)$  como  $Ai'(z)$  se pueden observar en la figura 18.

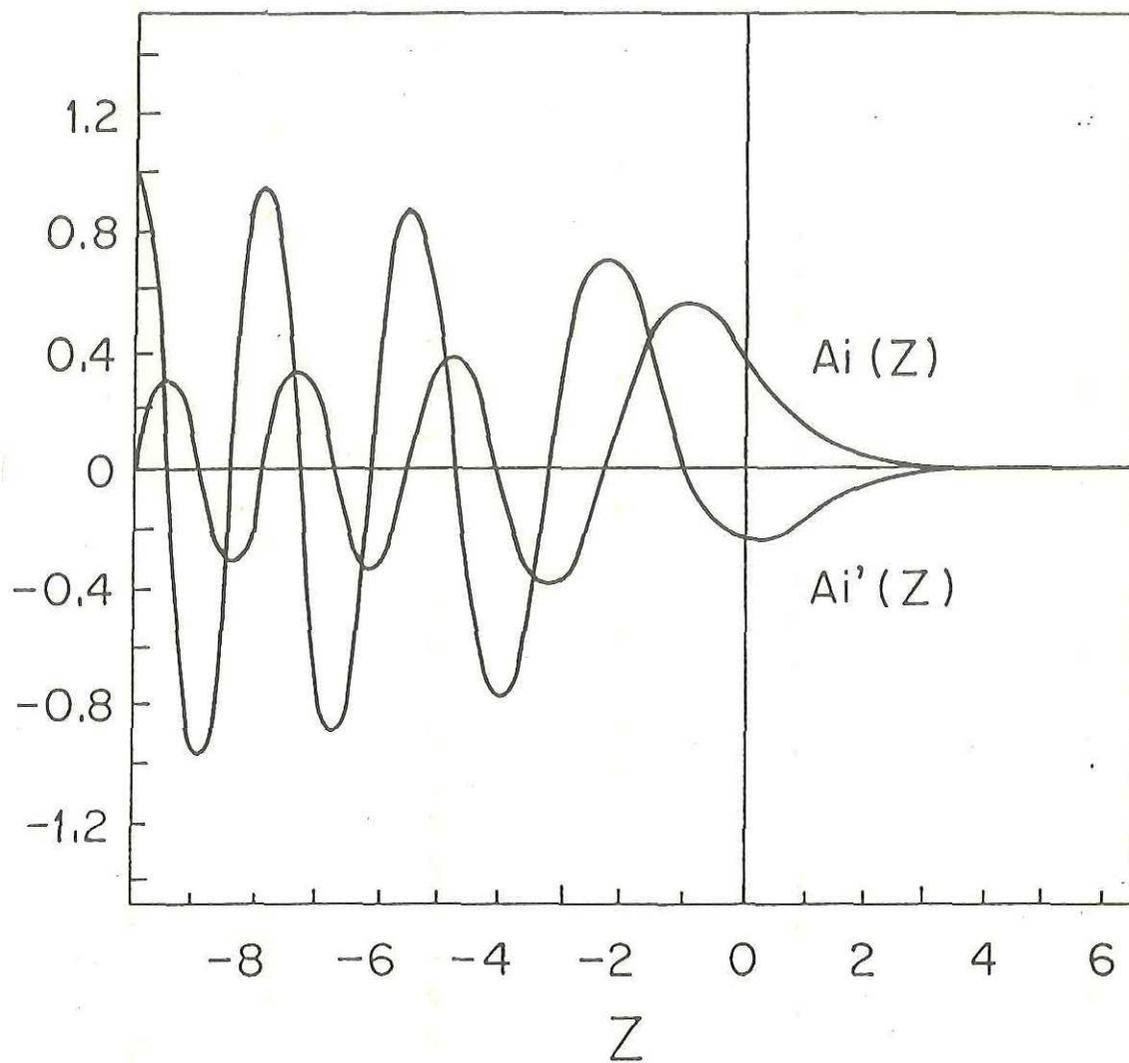


Figura 18. Funciones  $Ai(z)$  y  $Ai'(z)$ .

De las ecs. (254), (259), y (261) vemos que las soluciones separables de la ec. (246), consistentes con las condiciones de frontera (248)-(249), tienen la forma:

$$u_n(x,t) = c_n \exp(\lambda_n D r^{2/3} t) \text{Ai}(r^{1/3} x + \lambda_n) \quad (c_n = \text{cte.}) \quad (262)$$

y estas funciones nos permiten expresar la solución general de la ec. (246), consistente con las condiciones de frontera (248)-(249), en la forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(\lambda_n D r^{2/3} t) \text{Ai}(r^{1/3} x + \lambda_n) \quad (263)$$

Los coeficientes  $c_n$  se obtienen a partir de la condición inicial (247), la cual implica que:

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{Ai}(r^{1/3} x + \lambda_n) \quad (264)$$

A partir de esta ecuación podemos obtener los valores de los coeficientes  $c_n$  gracias a la propiedad de ortogonalidad de las funciones de Airy desplazadas (Titchmarsh 1962, pags. 90-92):

$$\int_0^{\infty} \text{Ai}(x+\lambda_n) \text{Ai}(x+\lambda_m) dx = -\lambda_m \text{Ai}^2(\lambda_m) \delta_{nm} \quad (265)$$

De esta forma obtenemos:

$$c_n = -\frac{r^{1/3} u_0}{\lambda_n \text{Ai}^2(\lambda_n)} \int_0^{\infty} \text{Ai}(r^{1/3} x' + \lambda_n) dx' \quad (266)$$

Con las ecuaciones (244), (263), y (266) podemos ya escribir la solución del

problema de contorno (241)-(243) en la forma:

$$E(x,t) = 2Dr^{1/3} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(\lambda_n Dr^{2/3}t) Ai'(r^{1/3}x + \lambda_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(\lambda_n Dr^{2/3}t) Ai(r^{1/3}x + \lambda_n)} \quad (267)$$

donde:

$$a_n = - \frac{1}{\lambda_n Ai^2(\lambda_n)} \int_0^{\infty} Ai(r^{1/3}x' + \lambda_n) dx' \quad (268)$$

La expresión (267) tiene un aspecto extremadamente complicado. Sin embargo, notemos que (267) puede escribirse en la forma:

$$E(x,t) = 2Dr^{1/3} \frac{a_1 Ai'(r^{1/3}x + \lambda_1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \exp[(\lambda_n - \lambda_1)Dr^{2/3}t] Ai'(r^{1/3}x + \lambda_n)}{a_1 Ai(r^{1/3}x + \lambda_1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \exp[(\lambda_n - \lambda_1)Dr^{2/3}t] Ai(r^{1/3}x + \lambda_n)} \quad (269)$$

Si ahora recordamos que los ceros  $\lambda_n$  de la función  $Ai'(z)$  son tales que  $\lambda_n - \lambda_1 \leq 0$  para  $n \geq 2$ , podremos ver que todos los términos de las dos sumatorias que aparecen en esta expresión tienden a cero conforme  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, en el límite cuando  $t \rightarrow \infty$ , la expresión para el campo eléctrico se reduce a:

$$E_0(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} E(x,t) = 2Dr^{1/3} \frac{Ai'(r^{1/3}x + \lambda_1)}{Ai(r^{1/3}x + \lambda_1)} \quad (270)$$

Para visualizar la forma de esta función podemos introducir las formas asintóticas de la función de Airy y su derivada (Abramowitz y Stegun 1965):

$$Ai'(z) = - \frac{1}{2} z^{1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) (0.564190) \quad (z > 10) \quad (271)$$

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) (0.564190) \quad (z > 10) \quad (272)$$

Substituyendo estas expresiones en la ec. (270) obtenemos la expresión asintótica:

$$E(x) = -2Dr^{1/3} (r^{1/3} x + \lambda_1)^{1/2} \quad (x > 10 r^{-1/3})$$

la cual, con ayuda de la ecuación (252), puede escribirse en la forma:

$$E(x) = -\left[-2J_0 x + \lambda_1 (-4DJ_0)^{2/3}\right]^{1/2} \quad \left[x > 10(-2D^2/J_0)^{1/3}\right] \quad (273)$$

Podemos ver que si  $D = 0$  esta expresión se reduce a la que obtuvimos en la sección II.2.

A partir de la ecuación (270) podemos ver que en el límite  $t \rightarrow \infty$  el valor del voltaje será:

$$V_0 = -2D \ln \frac{\text{Ai}(r^{1/3} + \lambda_1)}{\text{Ai}(\lambda_1)} \quad (274)$$

Para los valores típicos del parámetro  $r$  (que calcularemos adelante) la siguiente desigualdad se cumple:

$$r^{1/3} + \lambda_1 > 10 \quad (275)$$

de manera que el valor de  $\text{Ai}(r^{1/3} + \lambda_1)$  puede calcularse mediante la expresión asintótica (272). Por lo tanto, cuando se satisface la desigualdad (275), la ec.(274) puede aproximarse así:

$$V_0 = -2D \left[ \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} \ln(r^{1/3} + \lambda_1) - \frac{2}{3} (r^{1/3} + \lambda_1)^{3/2} + \ln(0.564190) - \ln(\text{Ai}(\lambda_1)) \right] \quad (276)$$

Notemos ahora que el parámetro adimensional  $r$  que aparece en esta ecuación puede escribirse, usando cantidades con dimensiones, en la forma:

$$r = - \frac{J'_o \mu d'^3}{2\epsilon D'^2} \quad (277)$$

y si tomamos en cuenta que la movilidad y el coeficiente de difusión están relacionados entre sí a través de la relación de Einstein (Lindmayer y Wrigley 1965, pag. 218):

$$\frac{\mu}{D'} = \frac{q}{kT} \quad (278)$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura absoluta, y  $q$  la carga elemental, entonces la ec. (277) puede escribirse en la forma:

$$r = - \frac{J'_o d'^3}{2\epsilon D'} \frac{q}{kT} \quad (279)$$

Si ahora recordamos que:

$$q = 1.60 \times 10^{-19} \text{C}$$

$$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{J/K}$$

consideramos como valores típicos:

$$d' = 10^{-3} \text{m} \quad (280)$$

$$T = 300\text{K} \quad (281)$$

$$J'_o = -10 \text{ mA/cm}^2 = -10^2 \text{ A/m}^2 \quad (282)$$

y usamos para  $\epsilon$  y  $D'$  los valores de la permitividad y el coef. de difusión de electrones en antraceno (Helfrich y Schneider 1966):

$$\epsilon = (3.4)\epsilon_o = 3.01 \times 10^{-11} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 \quad (283)$$

$$D' = \left( \frac{kT}{q} \right) (0.4 \text{ cm}^2/\text{Vs}) = 1.03 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad (284)$$

la ec. (279) implica que un valor típico para  $r$  es:

$$r = 6.3 \times 10^{10} \quad (285)$$

Por otra parte, del famoso manual de Abramowitz y Stegun (Abramowitz y Stegun 1965, pag. 478), tenemos que:

$$\lambda_1 = -1.01879 \quad (286)$$

$$\text{Ai}(\lambda_1) = 0.53565 \quad (287)$$

Usando los valores (285)-(287) podemos obtener los valores de los cinco términos que aparecen en el miembro derecho de (276), es decir:

$$\ln(0.5) = -0.69$$

$$\frac{1}{4} \ln(r^{1/3} + \lambda_1) = 2.07$$

$$\frac{2}{3} (r^{1/3} + \lambda_1)^{3/2} = 1.67 \times 10^5$$

$$\ln(0.564190) = -0.57$$

$$\ln(\text{Ai}(\lambda_1)) = -0.62$$

Estos valores nos muestran que de los cinco términos del miembro derecho de (276), sólo el tercero es importante. Por lo tanto, podemos aproximar esta ecuación en la forma:

$$V_o = \frac{4D}{3} (r^{1/3} + \lambda_1)^{3/2} \quad (288)$$

lo cual, con la ayuda de la ec. (252), puede escribirse en la forma:

$$V_o = \left[ \left( -\frac{8J_o}{9} \right)^{1/3} + \lambda_1 \left( \frac{4D}{3} \right)^{2/3} \right]^{3/2} \quad (289)$$

Dado que  $\lambda_1$  es negativa, este valor es menor que el valor estacionario del voltaje obtenido en el caso sin trampas ni difusión. Esto es razonable ya que la difusión ayuda a los electrones a cruzar el material, y por lo tanto un menor voltaje es necesario. Como era de esperarse, cuando  $D = 0$  la expresión (289) se reduce al valor estacionario mostrado en la ec. (119).

Si escribimos la ec. (289) en términos de cantidades con dimensiones obtenemos:

$$V'_o = \left[ \left( -\frac{8}{9} \frac{J'_o}{\epsilon\mu} \right)^{1/3} d' + \lambda_1 \left( \frac{4}{3} \frac{D'}{\mu} \right)^{2/3} \right]^{3/2} \quad (290)$$

El segundo término que aparece dentro del paréntesis cuadrado es la corrección debida a la difusión de portadores. Esta corrección es generalmente muy pequeña. En el caso del antraceno, por ejemplo, en el cual  $\mu$ ,  $\epsilon$  y  $D'$  tienen los valores dados en (278), (283) y (284), si consideramos que  $J'_o = -10 \text{ mA/cm}^2$  y que  $d' = 1 \text{ mm}$ , tendremos que:

$$\left( -\frac{8}{9} \frac{J'_o}{\epsilon\mu} \right)^{1/3} d' = 419.51 \text{ V}^{2/3} \quad (291)$$

$$\lambda_1 \left( \frac{4}{3} \frac{D'}{\mu} \right)^{2/3} = -0.11 \text{ V}^{2/3} \quad (292)$$

lo cual demuestra que en este caso la influencia que tiene la difusión de portadores es realmente despreciable.

Usando la ec. (278) podemos escribir a la ec. (290) en la forma:

$$V_o'^{2/3} = \left( -\frac{8}{9} \frac{J_o'}{\epsilon\mu} \right)^{1/3} d' + \lambda_1 \left( \frac{4}{3} \frac{kT}{q} \right)^{2/3} \quad (293)$$

y de aquí podemos despejar el valor de  $\mu$ , obteniéndose:

$$\mu = -\frac{8}{9} \frac{J_o' d'^3}{\epsilon \left[ V_o'^{2/3} - \lambda_1 (4kT/3q)^{2/3} \right]^3} \quad (294)$$

Esta ecuación nos permite calcular el valor de  $\mu$  si conocemos los valores de  $J_o'$ ,  $V_o'$ ,  $d'$  y  $\epsilon$ . Sustituyendo en esta ecuación los valores de  $d'$ ,  $J_o'$ ,  $\epsilon$  y  $V_o'^{2/3}$  dados en las ecs. (280), (282), (283) y (293), se puede ver que en el caso del antraceno la omisión del término  $\lambda_1 (4kT/3q)^{2/3}$ , proveniente de la difusión de los portadores de carga, altera el valor de  $\mu$  en menos del 1%. Esto muestra que en el antraceno es válido desprestigiar la difusión de los portadores de carga.

A diferencia de lo que pasó en las sub-secciones II.2.1, II.3.1, II.4.1, y II.5.1, en este caso no es posible encontrar una expresión que nos permita calcular la movilidad de los electrones en la cual no aparezca la permitividad del material. En las sub-secciones II.2.1, II.3.1, II.4.1, y II.5.1 pudimos construir expresiones para  $\mu$  en las cuales no interviniera  $\epsilon$ , auxiliándonos de las expresiones que nos daban la duración del transitorio de carga. En el caso presente esto no es posible ya que ahora, en rigor, el transitorio de carga tiene una duración infinita.

Recordemos que las ecuaciones (276) y (288)-(290) son aproximaciones que sólo son válidas si se cumple la desigualdad (275), la cual, usando cantidades con dimensiones, puede escribirse en la forma:

$$d' > (10-\lambda_1) \left( -\frac{2\epsilon D' kT}{q J_o'} \right)^{1/3} \quad (295)$$

En el caso en que  $T$ ,  $J_o'$ ,  $\epsilon$ , y  $D'$  tengan los valores indicados en (281)-(284),

esta desigualdad se transforma en:

$$d' > 2.8 \times 10^{-6} \text{ m}$$

lo cual nos hace ver que las aproximaciones (276) y (288)-(290) son perfectamente válidas para muestras con espesores superiores a  $10 \mu\text{m}$ .

Para finalizar esta sub-sección quisiéramos indicar que la ecuación de Burgers no homogénea (246) que hemos estudiado aquí fue también estudiada por Rosen (Rosen 1966). Sin embargo, el problema estudiado por Rosen es totalmente diferente, ya que considera condiciones de contorno distintas a las que hemos empleado nosotros, lo cual cambia totalmente la naturaleza del problema.

### II.6.2 Transitorio de descarga

El transitorio de descarga está descrito por la ecuación de Burgers:

$$E_t = DE_{xx} + EE_x \quad (296)$$

Como condición inicial tomaremos la forma del campo eléctrico dada por la ec.(270), es decir:

$$E(x, t_0) = 2D \frac{d}{dx} \ln Ai(r^{1/3}x + \lambda_1) \quad x \geq 0 \quad (297)$$

donde  $t_0$  es cualquier valor lo suficientemente grande para que las exponenciales que aparecen en (269) sean despreciables (usualmente será suficiente con tomar  $t_0 > 1$ ), y como condición de frontera consideraremos la misma condición usada en las secciones anteriores:

$$E(0, t) = 0 \quad t \geq t_0 \quad (298)$$

Introduciendo la transformación de Hopf-Cole:

$$E(x, t) = 2D \frac{\partial}{\partial x} \ln u(x, t) \quad (299)$$

el problema no lineal (296)-(298) se transforma en un problema lineal:

$$u_t = Du_{xx} \quad (300)$$

$$u(x, t_0) = u_0(x) \quad x \geq 0 \quad (301)$$

$$u_x(0, t) = 0 \quad t \geq t_0 \quad (302)$$

donde hemos definido:

$$u_0(x) = \text{Ai}(r^{1/3}x + \lambda_1) \quad (303)$$

La solución de un problema de contorno de la forma (300)-(302) es conocida (Tijonov y Samarsky 1963), y es igual a:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \int_0^\infty \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4D(t-t_0)}\right] \right\} u_0(\xi) d\xi \quad (304)$$

y por consiguiente el campo eléctrico durante el transitorio de descarga estará dado por:

$$E(x,t) = \frac{-\frac{1}{(t-t_0)} \int_0^\infty \left\{ (x-\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}\right] + (x+\xi) \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4D(t-t_0)}\right] \right\} u_0(\xi) d\xi}{\int_0^\infty \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4D(t-t_0)}\right] \right\} u_0(\xi) d\xi} \quad (305)$$

Esta expresión es muy complicada. Sin embargo, para tiempos muy grandes es posible hacer la aproximación:

$$\exp\left[-\frac{(x\pm\xi)^2}{4D(t-t_0)}\right] u_0(\xi) \approx u_0(\xi) \quad (306)$$

con lo cual (305) se reduce a:

$$E(x,t) = -\frac{x}{(t-t_0)} \quad (307)$$

Esta expresión muestra que para tiempos grandes las curvas de nivel:

$$E(x,t) = E_0 \quad (E_0 = \text{constante})$$

son las rectas:

$$t = \left( -\frac{1}{E_0} \right) x + t_0$$

lo cual es similar a lo que obtuvimos en la sub-sección III.2.2 al estudiar el transitorio de descarga sin trampas ni difusión (ver figura 8). Por otra parte, la expresión (307) implica que para tiempos suficientemente grandes para que (281) sea válida, el voltaje podrá aproximarse por la función:

$$V(t) = \frac{1}{2(t - t_0)}$$

Tal como podríamos esperar, esta última ecuación muestra claramente que el voltaje tiende a cero conforme el tiempo tiende a infinito.

### III DISCUSION

Los análisis que hemos presentado en el capítulo anterior sobre la forma de los transitorios eléctricos que se producen al aplicar (o interrumpir) súbitamente una corriente constante en un material semiconductor o aislante, con las características descritas en la sección I.3, han enriquecido nuestro conocimiento sobre este tipo de transitorios en varios aspectos.

En la sección II.1 se puso en evidencia que la estructura fundamental del sistema de ecuaciones que describe la evolución de los transitorios en un material en el cual la corriente es transportada por ambos tipos de portadores de carga (electrones y hoyos), es lo que los matemáticos denominan "un sistema cuasi-lineal de primer orden estrictamente hiperbólico". Este tipo de estructura implica que la dinámica del sistema está gobernada por la propagación de ondas a lo largo de curvas bien definidas en el plano  $x-t$ , conocidas como curvas características. Ahora bien, el problema con este tipo de sistemas, es que debido a la no linealidad, usualmente no es posible hallar la forma analítica de las curvas características, ya que para determinarlas es necesario conocer de antemano la solución del sistema. En el caso estudiado, sin embargo, el considerar que la corriente impuesta es constante, y la elección adecuada de las condiciones iniciales y de frontera, permitió obtener en forma exacta la forma analítica de las curvas características que definen el movimiento de los frentes de avance de electrones y hoyos en el material. Se encontró que la forma de dichas curvas características no depende de la velocidad de recombinación de hoyos y electrones, y que en lo que influye esta velocidad de recombinación es en la cantidad de portadores que logran ir avanzando a lo largo de estas curvas. Este resultado confirma la aseveración de

Kao y Hwang (Kao y Hwang 1981, pag. 260) en el sentido de que el proceso de recombinación no es un obstáculo que impida que los hoyos y los electrones completen su penetración dentro del material. El conocer las curvas características nos permitió obtener expresiones analíticas para los tiempos de tránsito de ambos frentes (ecs. 44, 45, 47 y 48), y estas expresiones nos revelaron la forma en que los tiempos de tránsito dependen de las movilidades de los portadores, de la permitividad del material, de su espesor, y de la corriente aplicada. Obtuvimos también la solución exacta del estado estacionario en el caso simétrico en que  $\nu_n \approx \nu_p$  (ec. 98 y fig. 6), y calculamos el tiempo que tarda el sistema en alcanzar dicho estado (fig. 7). Vimos, además, la forma en que la velocidad de recombinación influye en el tiempo que tarda el sistema en llegar al estado estacionario (fig. 7), y encontramos que la magnitud del campo eléctrico en el estado estacionario es menor, cuanto menor sea la recombinación entre hoyos y electrones. Esto es intuitivamente comprensible, ya que cuanto menor sea la recombinación, más electrones penetran en la zona inicialmente ocupada sólo por hoyos (y viceversa), de manera que la densidad total de carga disminuye, con la consiguiente disminución en la magnitud del campo eléctrico. Toda esta información, además de proveernos de expresiones analíticas para las trayectorias de los frentes de avance de los portadores (ecs. 36, 39, 43 y 46; y figs. 1 y 2), para los tiempos de tránsito (ecs. 44 y 47), para la forma del campo eléctrico dentro del material (ecs. 34 y 37), etc., nos permite tener una imagen bastante completa de lo que ocurre en el momento en que imponemos una corriente constante a través del material. Los resultados encontrados en esta primera sección del capítulo II fueron publicados en el número correspondiente a diciembre de 1991 del *European Journal of Physics* (Fujioka Rojas 1991).

En la sección II.2 encontramos la forma analítica del campo eléctrico (ecs. 114 y 128) y de la densidad de los portadores de carga (ecs. 115 y 129) durante los transitorios de carga y descarga en un sistema en el cual la corriente es transportada por un sólo tipo de portadores de carga, y en el que la presencia de trampas puede ser despreciada. El conocer la forma analítica del campo eléctrico es importante, ya que nos permitió obtener la forma analítica de los transitorios de voltaje (ecs. 119 y 130), así como una expresión para calcular la movilidad de los portadores a partir de la duración del transitorio de carga (ec. 124). Dicha expresión es interesante, ya que difiere por un factor de  $4/3$  de la expresión usada normalmente para calcular movilidades en los experimentos convencionales de tiempo de vuelo ("time-of-flight experiments"). Esta diferencia es debida a que en los experimentos convencionales de tiempo de vuelo es posible considerar que el campo eléctrico es uniforme dentro del material, cosa que no ocurre en el sistema considerado en la sección II.2

En las secciones II.3 y II.4 calculamos la forma de los transitorios en sistemas con simetrías cilíndrica y esférica. Al igual que en la sección II.2, consideramos el caso en que la corriente es transportada por un sólo tipo de portadores de carga, y en el que la presencia de trampas puede ser despreciada. Con ambas geometrías fue posible obtener la dependencia espacio-temporal del campo eléctrico durante los transitorios de carga (ecs. 145 y 170) y descarga (ecs. 158 y 187; y figs. 12 y 16), y a partir del campo eléctrico se calcularon la densidad de portadores (ecs. 146 y 172), y la forma analítica de los transitorios de voltaje (ecs. 148, 159 y 178; y figs. 11, 13 y 15). Además, en el caso en que el radio del electrodo interno tiende a cero, obtuvimos dos expresiones (una para el caso cilíndrico y otra para el esférico) que nos

permiten calcular la movilidad de los portadores a partir de la duración de los transitorios de carga (ecs. 154 y 183). La expresión encontrada en el caso cilíndrico (ec. 154) coincide con la expresión utilizada en los experimentos convencionales de tiempo de vuelo. Esta coincidencia es debida a que en el caso cilíndrico el campo eléctrico tiende a ser constante conforme el radio del electrodo interior tiende a cero (ec. 145). En el caso esférico, en cambio, el campo eléctrico no es uniforme, ni aún en el límite en el que el radio interior es cero (ec. 175). Por este motivo, en el caso esférico, la expresión para la movilidad de los portadores (ec. 183) contiene un factor adicional de  $4/3$ , tal como en el caso de electrodos planos (ec. 124).

Los análisis de las secciones II.2, II.3 y II.4 muestran la necesidad de conocer el campo eléctrico en el interior del material para poder determinar correctamente la expresión para la movilidad de los portadores como función de la duración del transitorio de carga. Si el campo eléctrico dentro del material no se calcula, podría darse el caso de que uno supusiera erróneamente que el campo fuera uniforme, y entonces, al tratar de obtener la movilidad de los portadores mediante la expresión usada normalmente en los experimentos convencionales de tiempo de vuelo, uno llegaría a un valor de la movilidad por debajo de su valor verdadero.

En la sección II.5 estudiamos el efecto que tiene la presencia de trampas en el material. Los transitorios están descritos, en este caso, por un nuevo sistema cuasi-lineal estrictamente hiperbólico (ecs. 198-199). A partir de este sistema pudimos obtener una solución aproximada para el campo eléctrico durante los transitorios de carga y descarga (ecs. 217 y 234), y esto nos permitió obtener la forma analítica de los transitorios de voltaje (ecs. 220 y 235). Obtuvimos una expresión que nos permite calcular la movilidad de los portadores

a partir de la duración del transitorio de carga (ec. 225). Esta expresión, sin embargo, involucra un parámetro —que hemos denotado por  $A$ — que depende de la densidad de trampas y del nivel energético de las mismas (ec. 226). Encontramos que el valor de este parámetro puede determinarse a partir de la pendiente inicial del transitorio de descarga (ec. 237), lo cual muestra la utilidad de registrar ambos transitorios: el de carga y el de descarga. Vimos que la presencia de trampas puede ser despreciada si el parámetro  $A$  tiene un valor cercano a uno. Vimos también que el valor de este parámetro tiende a uno conforme disminuye la profundidad energética de las trampas (fig. 17), lo cual indica que las trampas superficiales ("shallow traps") influyen menos que las trampas profundas ("deep traps") en la forma de los transitorios. Observamos también que el conocer el valor del parámetro  $A$ , además de sernos útil para calcular el valor de la movilidad de los portadores, nos permite determinar la densidad de trampas si conocemos su nivel energético, o viceversa, es decir, nos permite determinar el nivel energético de las trampas si conocemos su densidad.

Finalmente, en la sección II.6 consideramos el problema de calcular los transitorios de carga y descarga tomando en cuenta la contribución a la corriente debida a la difusión de los portadores de carga. Este problema es cualitativamente diferente a los anteriores, ya que la introducción de la difusión hace que el problema deje de ser hiperbólico y se convierta en parabólico. Y esta diferencia es importante. Debido a que el problema ya no es hiperbólico, en este caso ya no existen curvas características que definan el avance de los frentes de portadores de carga, y tampoco existe una expresión que nos dé la duración del transitorio de carga, ya que ahora el sistema tiende en forma asintótica al estado estacionario, por lo cual, en este caso, el

transitorio de carga tiene en principio una duración infinita. Encontramos que el transitorio de carga está descrito en este caso por una ecuación parabólica no lineal de 2° orden (ec. 241), similar a la de Burgers, pero que incluye un término constante que cambia totalmente la naturaleza de las soluciones. Al igual que en el caso de la ecuación de Burgers, en este caso la transformación de Hopf-Cole nos permite transformar nuestra ecuación original (no lineal) en una nueva ecuación que ya es lineal. Esta nueva ecuación, junto con sus correspondientes condiciones de frontera, pudo ser resuelta analíticamente, y su solución general queda expresada, en forma natural, como una combinación lineal de la base de funciones de Airy desplazadas,  $Ai(x+\lambda_n)$ , donde  $\lambda_n$  es el n-ésimo cero de la función  $Ai'(x)$ . Esta base es una base peculiar, que no aparece frecuentemente en física, y resulta, por lo tanto, un motivo de alegría el hallazgo de un modelo físico en el cual esta base surja de manera natural. La expresión encontrada para el campo eléctrico (ec. 269) es una expresión sumamente complicada que involucra a todo el conjunto de funciones de Airy desplazadas. Sin embargo, dicha expresión se reduce, en el estado estacionario, a una expresión muy compacta (la ec. 270) que únicamente involucra a la función  $Ai(x+\lambda_1)$  y a su derivada. A partir de esta expresión para el campo eléctrico estacionario pudimos obtener una expresión exacta para el valor estacionario del voltaje (ec. 274), y también una expresión aproximada (ec. 293) que nos permite calcular la movilidad de los portadores de carga si conocemos la permitividad del material, su espesor, la corriente aplicada, y el valor estacionario del voltaje. La expresión encontrada para la movilidad (ec. 294) nos permite cuantificar la importancia que tiene la difusión de portadores en el cálculo de la movilidad. Vimos, por ejemplo, que en el caso del antraceno, el omitir la corrección debida a la difusión altera el valor calculado de  $\mu$  en

menos del 1%, demostrando así que en este caso está justificado despreciar la difusión. La mayoría de los resultados obtenidos en la sección II.6, así como la mayoría de los resultados obtenidos en las cuatro secciones anteriores, fueron publicados en el número correspondiente al último trimestre de 1991 de la *Revista Mexicana de Física* (Fujioka Rojas y Riveros Rotgé 1991).

A lo largo de las seis secciones del capítulo II analizamos explícitamente 6 sistemas diferentes. Sin embargo, los resultados obtenidos en esas seis secciones nos dan los elementos necesarios para analizar y comprender resultados experimentales obtenidos en sistemas más complejos. Consideremos, por ejemplo, los resultados obtenidos por Helfrich y Schneider (Helfrich y Schneider 1965, 1966) al inyectar simultáneamente electrones y hoyos en cristales de antraceno de 5 mm de espesor, conteniendo tanto trampas para electrones, como trampas para hoyos. Helfrich y Schneider observaron que debido a la recombinación de electrones y hoyos, una zona de unos 2 mm de espesor adyacente al ánodo (el electrodo inyector de hoyos) emitía una brillante luz azul. A primera vista uno tendería a pensar que el hecho de que la zona luminosa estuviera cargada hacia uno de los electrodos sería consecuencia simplemente de una diferencia en la movilidad de hoyos y electrones. Sin embargo, resulta que en el antraceno (en la dirección del cristal que usaron Helfrich y Schneider para hacer pasar la corriente) la movilidad de los electrones es menor que la de los hoyos ( $\mu_n = 0.4 \text{ cm}^2/\text{Vs}$  y  $\mu_p = 0.8 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ ), lo cual produciría que la zona luminosa estuviera cercana al cátodo, contrariamente a lo observado. Por lo tanto, la posición de la zona luminosa no es explicable por la diferencia en las movilidades de hoyos y electrones. Tal como Helfrich y Schneider señalaron, el hecho de que la zona luminosa esté junto al ánodo indica la presencia de un número importante de trampas para

hoyos en el cristal. Sin embargo, aún cuando Helfrich y Schneider mencionaron que la densidad de trampas para hoyos debía ser muy grande, no dieron ninguna estimación de cuál podría ser su valor. Lo que sí reportaron es que la densidad de trampas para electrones en los cristales que utilizaron estaba entre  $10^{10}$  y  $10^{11}$   $\text{cm}^{-3}$ . A continuación veremos que combinando los resultados que obtuvimos en las secciones II.1, II.2 y II.5 de este trabajo, podemos estimar el orden de magnitud de la densidad de trampas para hoyos en antraceno.

Para calcular teóricamente la posición de la parte más brillante del cristal debemos ver cómo se modifica la ec. (40) —que nos da la posición  $x_m$  en que los frentes de electrones y hoyos se encuentran— en el caso en que existan en el material tanto trampas para hoyos, como trampas para electrones. Podemos recordar que el valor del punto  $x_m$ , dado por la ec. (40), se obtuvo de la intersección de las trayectorias de los frentes de electrones y hoyos dadas por las ecs. (36) y (39). Por otra parte, comparando las trayectorias de los frentes de avance para electrones encontradas en las secciones II.2 y II.5, y dadas por las ecs. (116) y (219), podemos ver que la presencia de las trampas se refleja en la aparición del parámetro A dentro del radical de la ec. (219). En la misma forma, cuando existen trampas tanto para electrones como para hoyos, las ecs. (36) y (39) se transformarán en:

$$t = \left( - \frac{2A_n x}{v_n J_o} \right)^{1/2} \quad 0 \leq t \leq t_m \quad \text{(frente de avance de electrones)} \quad (308)$$

$$t = \left( - \frac{2A_p (1-x)}{v_p J_o} \right)^{1/2} \quad 0 \leq t \leq t_m \quad \text{(frente de avance de hoyos)} \quad (309)$$

donde  $A_n$  y  $A_p$  estarán dadas por:

$$A_n = 1 + g_n \frac{N'_n}{N_c} \exp \left( \frac{E_c - E_{tn}}{kT} \right) \quad (310)$$

$$A_p = 1 + g_p \frac{N'_p}{N_v} \exp \left( \frac{E_{tp} - E_v}{kT} \right) \quad (311)$$

donde  $N'_n$  y  $N'_p$  son las densidades de las trampas para electrones y hoyos, respectivamente,  $E_{tn}$  y  $E_{tp}$  son los niveles energéticos de ambos tipos de trampas,  $g_n$  y  $g_p$  son los factores de degeneración de los estados que constituyen las trampas, y  $N_c$  y  $N_v$  son las densidades efectivas de estados en las bandas de conducción y de valencia, respectivamente. Igualando ahora las expresiones (308) y (309) obtenemos la nueva posición  $x_m$  en que se encuentran los frentes de electrones y hoyos cuando hay trampas, obteniéndose lo siguiente:

$$x_m = \frac{\nu_n A_p}{\nu_p A_n + \nu_n A_p} \quad (312)$$

ecuación que también puede escribirse en la forma:

$$A_p = \frac{\nu_p x_m}{\nu_n (1-x_m)} A_n = \frac{\mu_p x_m}{\mu_n (1-x_m)} A_n \quad (313)$$

Esta ecuación nos permitirá estimar el valor de  $A_p$ , ya que sabemos que  $\mu_n = 0.4 \text{ cm}^2/\text{Vs}$  y  $\mu_p = 0.8 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ . Sabemos además, por la observación de Helfrich y Schneider, que la parte central de la zona luminosa del cristal estaba a 4 mm del cátodo, y que el espesor del cristal era de 5 mm, por lo cual podemos considerar que un valor aproximado para  $x_m$  es  $x_m = 4/5$ . Helfrich y Schneider indican también que el valor de  $N'_n$  estaba entre  $10^{10}$  y  $10^{11} \text{ cm}^{-3}$ , por lo cual

consideraremos que  $N'_n = 5 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ . Sabemos, además, que la profundidad de las trampas para electrones en antraceno está entre 0.45 eV y 0.75 eV por debajo de la banda de conducción (Meier 1974, pags. 298, 300), por lo cual podemos asignarle a  $E_c - E_{tn}$  el promedio de estos valores, es decir,  $E_c - E_{tn} = 0.6 \text{ eV}$ . Por otra parte, se conoce que la primera banda de conducción del antraceno es una banda angosta (meier 1974, pag. 388), y debido a esto es posible considerar que el valor de la densidad efectiva de estados  $N_c$  es igual al doble de la densidad molecular del material (Meier 1974, pag. 396), es decir,  $N_c = 8.4 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$  (Helfrich y Mark 1963). Sustituyendo todos estos valores en las ecs. (310) y (313), y suponiendo que  $g_n = 2$ , obtenemos los siguientes valores para los parámetros  $A_n$  y  $A_p$ :

$$A_n = 1.15 \quad (314)$$

$$A_p = 9.20 \quad (315)$$

El hecho de que  $A_p$  sea mayor que  $A_n$  refleja claramente el hecho de que los hoyos se ven más afectados que los electrones por la presencia de las trampas.

Ahora, una vez habiendo determinado el valor de  $A_p$ , podemos utilizar la ec. (311) para calcular la densidad de trampas para hoyos  $N'_p$ . El valor de la densidad efectiva de estados en la banda de valencia es conocido, e igual a  $N_v = 4.1 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$  (Helfrich y Mark 1963). Por otra parte, aún cuando en el antraceno pueden existir varios niveles de trampas para hoyos, se ha observado (Schadt y Williams 1969) que el mayor número de trampas se encuentra a 0.2 eV de la banda de valencia, por lo que consideraremos que  $E_{tp} - E_v = 0.2 \text{ eV}$ . Por lo que respecta al factor de degeneración, supondremos que  $g_p = 2$ . Sustituyendo, pues, estos valores en la ec. (311) encontramos, finalmente, el valor estimado

para la densidad de trampas para hoyos en antraceno:

$$N'_p = 7 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3} \quad (316)$$

Experimentalmente se ha encontrado que el orden de magnitud de la densidad de trampas para hoyos en antraceno, situadas a 0.2 eV de la banda de valencia, es aproximadamente de  $10^{20} \text{ cm}^{-3}$  (Schadt y Williams 1969). Podemos, pues, ver que el valor de  $N'_p$  que obtuvimos mediante las trayectorias (308)-(309) y los parámetros (310)-(311), concuerdan de manera bastante satisfactoria con el valor encontrado experimentalmente. La diferencia entre ambos valores se debe, muy probablemente, a que el valor que tomamos para  $x_m$  no era del todo correcto. El valor de  $x_m = 4/5$  corresponde a la parte central de la zona luminosa del cristal. Sin embargo, en la fotografía que muestran Helfrich y Schneider en su artículo de 1965, puede observarse que la parte más brillante del cristal no está en el centro de la zona luminosa, sino mucho más cerca del ánodo. Suponiendo, pues, que la parte más brillante del cristal estuviera a 0.1 mm del ánodo (i.e., a 4.9 mm del cátodo), tendríamos para  $x_m$  el nuevo valor  $x_m = 4.9/5$ . Sustituyendo este resultado en la ec. (313) obtendríamos el nuevo valor  $A_p = 112.7$ , e introduciendo este resultado en la ec. (311) llegaríamos a que el valor estimado para  $N'_p$  sería:

$$N'_p = 9.8 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3} \quad (317)$$

que concuerda perfectamente con el valor encontrado experimentalmente.

El cálculo de la densidad de trampas para hoyos que acabamos de presentar arriba, así como la explicación concerniente a la posición de la zona luminosa observada en los cristales de antraceno, muestran cómo los resultados analíticos encontrados en este trabajo pueden ser de utilidad para explicar y

entender algunos resultados obtenidos experimentalmente, así como para calcular los valores de algunos parámetros desconocidos de los materiales. El ejemplo considerado arriba muestra, además, que los resultados analíticos que hemos obtenido pueden ser útiles no sólo para analizar e interpretar la forma de los transitorios de voltaje, sino también para analizar otros tipos de observaciones experimentales.

APENDICES

## APENDICE A

En la sección II.1.3 vimos que cuando  $C_r = 0$  la única solución estacionaria del sistema (8)-(11), consistente con las condiciones de frontera, es la solución  $E(x)=0$ . Para calcular qué tan rápido se aproxima el sistema a este estado, consideraremos el caso particular en que  $\nu_n = \nu_p = -J_o = 1$ . En este caso, eliminando a  $p$  mediante la ec. (11), podemos escribir a las ecs. (8) y (9) en la forma:

$$E_t + EE_x + 0 + 0 + (2nE+1) = 0$$

$$0 + nE_x - n_t + En_x + 0 = 0$$

que es un sistema de la forma (56) con:

$$A_1 = 1, \quad B_1 = E, \quad C_1 = 0, \quad D_1 = 0, \quad F_1 = 2nE+1,$$

$$A_2 = 0, \quad B_2 = n, \quad C_2 = -1, \quad D_2 = E, \quad F_2 = 0$$

Procediendo como explicamos en la sección II.1.2, nuestro sistema de dos ecuaciones puede transformarse en un nuevo sistema de 4 ecuaciones características, las cuales, en este caso, toman la forma:

$$x_\alpha - Et_\alpha = 0 \quad (\text{ec. que define las curvas } \beta=\text{cte.})$$

$$x_\beta + Et_\beta = 0 \quad (\text{ec. que define las curvas } \alpha=\text{cte.})$$

$$E_\alpha + (2nE+1)t_\alpha = 0$$

$$E_\beta + \frac{2E}{n} n_\beta + (2nE+1)t_\beta = 0$$

Si ahora usamos la ec. (11) para eliminar a  $n$ , podemos escribir a las ecs. (8) y (10) en la forma:

$$E_t - EE_x + 0 + 0 + (2pE+1) = 0$$

$$0 + pE_x + p_t + Ep_x + 0 = 0$$

que nuevamente es un sistema de la forma (56), y por consiguiente puede transformarse en el nuevo sistema:

$$x_\alpha - Et_\alpha = 0 \quad (\text{ec. que define las curvas } \beta = \text{cte.})$$

$$x_\beta + Et_\beta = 0 \quad (\text{ec. que define las curvas } \alpha = \text{cte.})$$

$$E_\alpha + \frac{2E}{p} p_\alpha + (2pE+1)t_\alpha = 0$$

$$E_\beta + (2pE+1)t_\beta = 0$$

Combinando las dos ecs. características que contienen a  $E_\beta$  obtenemos la ecuación:

$$n_\beta = n(p-n)t_\beta$$

Si ahora observamos que a lo largo de la recta  $x = 1/2$  deberá cumplirse (por simetría) que  $n = p$ , tendremos que:

$$n_\beta = 0 \quad (\text{para } x=1/2)$$

es decir:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} n(\alpha, \beta) = 0 \quad (\text{para } x=1/2)$$

La condición  $n = p$  también implica que a lo largo de la recta  $x = 1/2$  las ecs.

(8) y (9) se reducen a:

$$E_t = -2nE - 1 \quad (\text{para } x=1/2)$$

$$n_t = En_x \quad (\text{para } x=1/2)$$

Las tres últimas ecuaciones nos permiten calcular numéricamente cómo evolucionan los valores de  $E$  y  $n$  a lo largo de la recta  $x = 1/2$ , tal como explicaremos a continuación.

Supongamos que conocemos los valores de  $E$ ,  $n$ , y  $n_x$  en un punto  $P_1 = (x=1/2, t=t_1)$ . Entonces, mediante las dos últimas ecuaciones, podemos encontrar valores aproximados para  $E$  y  $n$  en un segundo punto  $P_2 = (x=1/2, t=t_1 + \Delta t)$ .

Veamos ahora cómo calcular un valor aproximado para  $n_x$  en  $P_2$ .

Consideremos un tercer punto  $P_3 = (x=1/2 + \Delta x, t=t_1 + \Delta t)$ , y elijamos el valor de  $\Delta x$  de manera que se cumpla la ecuación:

$$\Delta x + E(P_1)\Delta t = 0$$

es decir, de manera que se cumpla aproximadamente la ecuación:

$$x_\beta + Et_\beta = 0$$

Al haber escogido  $\Delta x$  de esta manera hemos logrado que  $P_1$  y  $P_3$  estén sobre una misma curva  $\alpha(x,t) = \text{cte.}$ , y por lo tanto aproximadamente tendremos que:

$$n(P_3) = n(P_1) + n_\beta(P_1)\Delta\beta$$

Pero sabemos que en  $P_1$  tenemos  $n_\beta = 0$ , así que aproximadamente tenemos que:

$$n(P_3) = n(P_1)$$

y conociendo  $n(P_3)$  podemos calcular un valor aproximado para  $n_x$  en  $P_2$  en la forma:

$$n_x(P_2) = \frac{n(P_3) - n(P_2)}{\Delta x}$$

En esta forma, a partir de los valores de  $E$ ,  $n$ , y  $n_x$  en un punto  $P_1 = (x=1/2, t=t_1)$ , podemos hallar los nuevos valores de  $E$ ,  $n$ , y  $n_x$  en el punto  $P_2 = (x=1/2, t=t_1 + \Delta t)$ . Repitiendo el procedimiento podemos calcular la evolución temporal de  $E$  y  $n$  a lo largo de la recta  $x = 1/2$ .

## APENDICE B

En la sección II.1.3 encontramos la forma estacionaria del campo eléctrico en el caso particular en el cual  $C_r = \nu_n = \nu_p = -J_o = 1$ . Para encontrar el tiempo que tarda el sistema en alcanzar el estado estacionario seguiremos un procedimiento similar al del apéndice A.

Eliminando a  $p$  mediante la ec. (11), y tomando en cuenta que  $C_r = \nu_n = \nu_p = -J_o = 1$ , podemos escribir a las ecs. (8) y (9) en la forma:

$$E_t + EE_x + 0 + 0 + (2nE+1) = 0$$

$$0 + 0 - n_t + En_x - n^2 = 0$$

que es un sistema de la forma (56). Procediendo como explicamos en la sección II.1.2, este sistema puede transformarse en las 4 ecuaciones características siguientes:

$$x_\alpha - Et_\alpha = 0$$

$$E_\alpha + (2nE+1)t_\alpha = 0$$

$$x_\beta + Et_\beta = 0$$

$$n_\beta + n^2 t_\beta = 0$$

Por otra parte, a lo largo de la recta  $x=1/2$  tenemos  $n=p$ , lo cual implica que sobre esa recta las ecs. (8) y (9) se reducen a:

$$E_t = -2nE - 1 \quad (\text{para } x=1/2)$$

$$n_t = En_x - n^2 \quad (\text{para } x=1/2)$$

Las 4 últimas ecuaciones nos permiten calcular numéricamente la evolución temporal de  $E$  y  $n$  a lo largo de la recta  $x=1/2$ , tal como explicaremos a continuación.

Supongamos que conocemos los valores de  $E$ ,  $n$ , y  $n_x$  en un punto  $P_1 = (x=1/2, t=t_1)$ . Entonces, mediante las dos últimas ecuaciones, podemos encontrar valores aproximados para  $E$  y  $n$  en un segundo punto  $P_2 = (x=1/2, t=t_1 + \Delta t)$ .

Ahora consideremos un tercer punto  $P_3 = (x=1/2 + \Delta x, t=t_1 + \Delta t)$ , y elijamos el valor de  $\Delta x$  de manera que se cumpla la ecuación:

$$\Delta x + E(P_1)\Delta t = 0$$

es decir, de manera que se cumpla aproximadamente la ecuación:

$$x_\beta + Et_\beta = 0$$

Escogiendo  $\Delta x$  de esta forma logramos que  $P_1$  y  $P_3$  estén aproximadamente sobre una misma curva  $\alpha(x,t)=cte.$ , y por lo tanto tendremos aproximadamente que:

$$n(P_3) = n(P_1) + n_\beta(P_1)\Delta\beta$$

Pero la ecuación característica para  $n_\beta$  nos dice que aproximadamente:

$$n_\beta\Delta\beta + n^2\Delta t = 0$$

de modo que:

$$n(P_3) = n(P_1) - n^2(P_1)\Delta t$$

Conociendo el valor de  $n(P_3)$  podemos hallar un valor aproximado para  $n_x$  en  $P_2$  en la forma:

$$n_x(P_2) = \frac{n(P_3) - n(P_2)}{\Delta x}$$

En esta forma, a partir de los valores de  $E$ ,  $n$ , y  $n_x$  en un punto  $P_1 =$

$(x=1/2, t=t_1)$ , podemos hallar los nuevos valores de  $E$ ,  $n$ , y  $n_x$  en el punto  $P_2 = (x=1/2, t=t_1 + \Delta t)$ . Repitiendo este procedimiento podemos calcular la evolución temporal de  $E$  y  $n$  a lo largo de la recta  $x=1/2$ .

## LITERATURA CITADA

- Abramowitz, M. e I. Stegun. 1965. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Inc., New York. 1046 pp.
- Al-Omar, A. y J.P. Krusius. 1987. *Self-consistent Monte Carlo study of high-field carrier transport in graded heterostructures*. J. Appl. Phys. 62 (9): 3825-3835.
- Arkhipov, V.I., A.I. Rudenko y G.M. Sessler. 1991. *Space-charge distribution in electron-beam charged dielectrics*. J. Phys. D24: 731-737.
- Azoff, E.M. 1988. *Semiclassical high-field transport equations for nonparabolic heterostructure degenerate semiconductors*. J. Appl. Phys. 64 (5): 2439-2446.
- Baessler, H., G. Herrmann, N. Riehl y G. Vaubel. 1969. *Space-charge-limited currents in tetracene single crystals*. J. Phys. Chem. Solids 30: 1579-1585.
- Baranger, H.U. y J.W. Wilkins. 1984. *Ballistic electrons in an inhomogenous submicron structure: Thermal and contact effects*. Phys. Rev. B30 (12): 7349-7351.
- Baranger, H.U. y J.W. Wilkins. 1987. *Ballistic structure in the electron distribution function of small semiconducting structures: General features and specific trends*. Phys. Rev. B36 (3): 1487-1502.
- Bard, A.J. y L.R. Faulkner. 1980. *Electrochemical Methods*. John Wiley and Sons, Inc., New York. 718 pp.
- Baron, R., O.J. Marsh y J.W. Mayer. 1966. *Transient response of double injection in a semiconductor of finite cross section*. J. Appl. Phys. 37 (7): 2614-2626.
- Batra, I.P., K.K. Kanazawa y H. Seki. 1970. *Discharge characteristics of photoconducting insulators*. J. Appl. Phys. 41, 3416-3422.

## LITERATURA CITADA (Continuación)

- Batra, I.P., B.H. Schechtman y H. Seki. 1970. *Transient space-charge-limited currents in photoconductor-dielctric structures*. Phys. Rev. B2 (6): 1592-1603.
- Borsenberger, P.M. 1990. *Hole transport in tri-p-tolylamine-doped bisphenol-A-polycarbonate*. J. Appl. Phys. 68 (12): 6263-6273.
- Bringer, A. y G. Schön. 1988. *Extended moment equations for electron transport in semiconducting submicron structures*. J. Appl. Phys. 64 (5): 2447-2455.
- Bronshtein, I.N. y K.A. Semendyayev. 1985. *Handbook of Mathematics*. Van Nostrand Reinhold Company, New York. 973 pp.
- Churchill, J.N., F.E. Holmstrom y T.W. Collins. 1979. *Dynamic model for e-beam irradiation of MOS capacitors*. J. Appl. Phys. 50 (6): 3994-4002.
- Cohen, S.S., M.J. Kim, B. Gorowitz, R. Saia y T.F. McNelly. 1984. *Direct W-Ti contacts to silicon*. Appl. Phys. Lett. 45 (4): 414-416.
- Cotton, F.A. y G. Wilkinson. 1972. *Advanced Inorganic Chemistry*. Interscience Publishers, Inc., New York. 1145 pp.
- Courant, R. y K.O. Friedrichs. 1948. *Supersonic Flow and Shock Waves*. Interscience Publishers, Inc., New York. 464 pp.
- Davis, H.T. 1962. *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*. Dover Publications, Inc., New York. 566 pp.
- Elsgolts, L. 1977. *Differential Equations and the Calculus of Variations*. Mir Publishers, Moscow. 440 pp.
- Franceschetti, D.R. y J.R. Macdonald. 1979. *Numerical analysis of electrical response: statics and dynamics of space-charge regions at blocking electrodes*. J. Appl. Phys. 50 (1): 291-302.

## LITERATURA CITADA (Continuación)

- Fujioka Rojas, J. 1991. *Quasilinear hyperbolic systems and characteristics in transient electrical conduction*. Eur. J. Phys. 12: 160-166.
- Fujioka Rojas, J. y H. Riveros Rotgé. 1991. *Nonlinear equations describing controlled-current transients in semiconductors and insulators*. Rev. Mex. de Física, 37 (4): 587-610.
- Gill, W.D. e I.P. Batra. 1971. *Transient optical double injection in insulators*. J. Appl. Phys. 42 (5): 2067-2073.
- Gill, W.D., G.B. Street y R.E. Macdonald. 1967. *Transport properties of vapor grown orthorhombic sulfur crystals*. J.Phys. Chem. Solids 28: 1517-1523.
- Haase, R. 1969. *Thermodynamics of Irreversible Processes*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts. 509 pp.
- Hammar, C. 1973. *Iterative method for calculating hot carrier distributions in semiconductors*. J. Phys. C6: 70-78.
- Haynes, J.R. y W. Shockley. 1951. *The mobility and life of injected holes and electrons in germanium*. Phys. Rev. 81 (5): 835-843.
- Helfrich, W. y P. Mark. 1963. *Eine Bestimmung der effektiven Zustandsdichte des Bandes für überschüssige Defektelektronen in Anthrazen*. Z. Physik 171: 527-536.
- Helfrich, W. y W.G. Schneider. 1965. *Recombination radiation in anthracene crystals*. Phys. Rev. Lett. 14 (7): 229-231.
- Helfrich, W. y W.G. Schneider. 1966. *Transients of volume-controlled current and of recombination radiation in anthracene*. J. Chem. Phys. 44 (8): 2902-2909.

## LITERATURA CITADA (Continuación)

- Hopf, E. 1950. *The partial differential equation:  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$* . Commun. Pure Appl. Math. 3: 201-230.
- Hughes, R.C. y R.J. Sokel. 1981. *Computation of photoconductivity in insulators in the space charge and recombination regime*. J. Appl. Phys. 52 (11): 6743-6748.
- Jeffrey, A. 1977. *Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves*. Pitman Publishing, London. 230 pp.
- Kao, K.C. y W. Hwang. 1981. *Electrical Transport in Solids*. Pergamon Press, Oxford. 663 pp.
- Kittel, C. 1956. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley and Sons, Inc., New York. 617 pp.
- Kunhardt, E.E., M. Cheng y C. Wu. 1988. *Nonequilibrium macroscopic models of carrier dynamics in a semiconductor*. J. Appl. Phys. 64 (3): 1220-1228.
- Lampert, M.A. 1956. *Simplified theory of space-charge-limited currents in an insulator with traps*. Phys. Rev. 103 (6): 1648-1656.
- Lindmayer, J. y Ch.Y. Wrigley. 1965. *Fundamentals of Semiconductor Devices*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey. 486 pp.
- Many, A. y G. Rakavy. 1962. *Theory of transient space-charge-limited currents in solids in the presence of trapping*. Phys. Rev. 126 (6): 1980-1988.
- Many, A., M. Simhony, S.Z. Weisz y J. Levinson. 1961. *Studies of photoconductivity in iodine single crystals*. J. Phys. Chem. Solids 22: 285-292.
- Many, A., S.Z. Weisz y M. Simhony. 1962. *Space-charge-limited currents in iodine single crystals*. Phys. Rev. 126 (6): 1989-1995.

## LITERATURA CITADA (Continuación)

- Martini, M., J.W. Mayer y K.R. Zanio. 1972. *Drift velocity and trapping in semiconductors: Transient charge technique*, p. 181-261. En: *Applied Solid State Science, Vol. 3* (R. Wolfe, ed.). Academic Press, New York. 403 pp.
- Meier, H. 1974. *Organic Semiconductors*, Verlag Chemie, Weinheim. 661 pp.
- Misiakos, K. y F.A. Lindholm. 1989. *Computer simulation and analytical models for the time-of-flight experiment in amorphous silicon thin films*. J. Appl. Phys. 65 (12): 4915-4923.
- O'Dwyer, J.J. 1968. *Theory of double charge ejection from a dielectric*. J. Appl. Phys. 39 (9): 4356-4359.
- Omar, M.A. 1975. *Elementary Solid State Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts. 669 pp.
- Pan, Y. 1992. *A two-dimensional ensemble Monte Carlo simulation of hole transport in heavily doped small n-type emitters*. J. Appl. Phys. 71 (4): 1823-1830.
- Parmenter, R.H. y W. Ruppel. 1959. *Two-carrier space-charge-limited current in a trap-free insulator*. J. Appl. Phys. 30 (10): 1548-1558.
- Pott, G.T. y D.F. Williams. 1969. *Low-temperature electron injection and space-charge-limited transients in anthracene crystals*. J. Chem. Phys. 51 (5): 1901-1906.
- Rhoderick, E.H. y R.H. Williams. 1988. *Metal-Semiconductor Contacts*. Clarendon Press, Oxford. 252 pp.
- Richtmyer, R.D. 1978. *Principles of Advanced Mathematical Physics*. Springer-Verlag, New York. 422 pp.
- Rideout, V.L. 1975. *A review of the theory and technology for ohmic contacts to*

## LITERATURA CITADA (Continuación)

- group III-V compound semiconductors*. Solid State Electron. 18: 541-550.
- Rosen, G. 1966. *Space-charge-limited currents in nonmetallic solids*. Phys. Rev. Lett. 17 (13): 692-693.
- Rosenberg, H.M. 1978. *The Solid State*. Clarendon Press, Oxford. 274 pp.
- Rosenberg, L.M. y M.A. Lampert. 1970. *Double injection in the perfect insulator: Further analytic results*. J. Appl. Phys. 41 (2): 508-521.
- Rosental, A. 1973. *Time dependence of space-charge conduction*. Phys. Lett. 46A (4): 270-272.
- Rosental, A. y L. Lember. 1970. *Current transients in the insulator determined by space charge and diffusion*. Phys. Stat. Sol. 39: 19-23.
- Schadt, M. y D.F. Williams. 1969. *Low-temperature hole injection and hole trap distribution in anthracene*. J. Chem. Phys. 50 (10): 4364-4368.
- Schein, L.B. 1977. *Temperature independent drift mobility along the molecular direction of  $As_2S_3$* . Phys. Rev. B15 (2): 1024-1034.
- Schein, L.B., A. Rosenberger. y S.L. Rice. 1986. *Hole transport in a molecularly doped polymer: p-diethylaminobenzaldehyde-diphenyl hydrazone in polycarbonate*. J. Appl. Phys. 60 (12): 4287-4292.
- Schilling, R.B. y H. Schachter. 1967. *Neglecting diffusion in space-charge-limited currents*. J. Appl. Phys. 38 (2): 841-844.
- Shapiro, F.R. y Y. Bar-Yam. 1988. *Transient current in a semiconductor with a barrier contact*. J. Appl. Phys. 64 (4): 2185-2188.
- Shockley, W. y W.T. Read. 1952. *Statistics of the recombination of holes and electrons*. Phys. Rev. 87 (5): 835-842.
- Simon, J. y J.-J. André. 1985. *Molecular Semiconductors*, Springer-Verlag,

## LITERATURA CITADA (Continuación)

- group III-V compound semiconductors*. Solid State Electron. 18: 541-550.
- Rosen, G. 1966. *Space-charge-limited currents in nonmetallic solids*. Phys. Rev. Lett. 17 (13): 692-693.
- Rosenberg, H.M. 1978. *The Solid State*. Clarendon Press, Oxford. 274 pp.
- Rosenberg, L.M. y M.A. Lampert. 1970. *Double injection in the perfect insulator: Further analytic results*. J. Appl. Phys. 41 (2): 508-521.
- Rosental, A. 1973. *Time dependence of space-charge conduction*. Phys. Lett. 46A (4): 270-272.
- Rosental, A. y L. Lember. 1970. *Current transients in the insulator determined by space charge and diffusion*. Phys. Stat. Sol. 39: 19-23.
- Schadt, M. y D.F. Williams. 1969. *Low-temperature hole injection and hole trap distribution in anthracene*. J. Chem. Phys. 50 (10): 4364-4368.
- Schein, L.B. 1977. *Temperature independent drift mobility along the molecular direction of  $As_2S_3$* . Phys. Rev. B15 (2): 1024-1034.
- Schein, L.B., A. Rosenberger y S.L. Rice. 1986. *Hole transport in a molecularly doped polymer: p-diethylaminobenzaldehyde-diphenyl hydrazone in polycarbonate*. J. Appl. Phys. 60 (12): 4287-4292.
- Schilling, R.B. y H. Schachter. 1967. *Neglecting diffusion in space-charge-limited currents*. J. Appl. Phys. 38 (2): 841-844.
- Shapiro, F.R. y Y. Bar-Yam. 1988. *Transient current in a semiconductor with a barrier contact*. J. Appl. Phys. 64 (4): 2185-2188.
- Shockley, W. y W.T. Read. 1952. *Statistics of the recombination of holes and electrons*. Phys. Rev. 87 (5): 835-842.
- Simon, J. y J.-J. André. 1985. *Molecular Semiconductors*, Springer-Verlag,

## LITERATURA CITADA (Continuación)

- Berlin. 288 pp.
- Smith, R.W. 1955. *Properties of ohmic contacts to cadmium sulfide single crystals*. Phys. Rev. 97 (6): 1525-1530.
- Sokel, R. y R.C. Hughes. 1982. *Numerical analysis of transient photoconductivity in insulators*. J. Appl. Phys. 53 (11): 7414-7424.
- Sokolnikoff, I.S. y E.S. Sokolnikoff. 1941. *Higher Mathematics for Engineers and Physicists*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York. 587 pp.
- Spear, W.E. 1957. *Transit time measurements of charge carriers in amorphous selenium films*. Proc. Phys. Soc. London B70: 669-675.
- Spear, W.E. 1960. *The hole mobility in selenium*. Proc. Phys. Soc. London 76: 826-832.
- Sullivan, M.V. y J.H. Eigler. 1957. *Electroless nickel plating for making ohmic contacts to silicon*. J. Electrochem. Soc. 104 (4): 226-230.
- Texas Instruments, Inc. 1969. *1970 Preferred Semiconductors and Components from Texas Instruments*. 696 pp.
- Tijonov, A.N. y A.A. Samarsky. 1980. *Ecuaciones de la Física Matemática*, Editorial Mir, Moscú. 768 pp.
- Titchmarsh, E.C. 1962. *Eigenfunction expansions, Vol. I*. Clarendon Press, Oxford. 203 pp.
- Van de Roer, T.G. y F.P. Widdershoven. 1986. *Ionized impurity scattering in Monte Carlo calculations*. J. Appl. Phys. 59 (3): 813-815.
- Vassos, B.H. y G.W. Ewing. 1983. *Electroanalytical Chemistry*, John Wiley and Sons, New York. 255 pp.
- Weisz, S.Z., A. Cobas, S. Trester y A. Many. 1968. *Electrode-limited and*

## LITERATURA CITADA (Continuación)

*space-charge-limited transient currents in insulators.* J. Appl. Phys. 39 (5): 2296-2302.

Wey, H.-Y. 1976. *Surface of amorphous semiconductors and their contacts with metals.* Phys. Rev. B13 (8): 3495-3505.

Xu, J. y M. Shur. 1987. *Ballistic transport in hot-electron transistors.* J. Appl. Phys. 62 (9): 3816-3820.

Yoon, K.S., G.B. Stringfellow y R.J. Huber. 1988. *Transient transport in bulk Ga<sub>0.47</sub>In<sub>0.53</sub>As/Al<sub>0.48</sub>In<sub>0.52</sub>As.* J. Appl. Phys. 63 (4): 1126-1129.

Zahn, M. y H. Chatelon. 1977. *Charge injection between concentric cylindrical electrodes.* J. Appl. Phys. 48 (5): 1797-1805.

Zahn, M. y S.-C. Pao. 1975. *Effects of step changes in excitation from a steady state on the transient electric field and space charge behavior for unipolar ion conduction. I. Step changes in current.* J. Electrostatics 1: 235-248.

Zahn, M., C.F. Tsang y S.-C. Pao. 1974. *Transient electric field and space-charge behavior for unipolar ion conduction.* J. Appl. Phys. 45 (6): 2432-2440.

Zallen, R. 1983. *The physics of amorphous solids.* John Wiley and Sons, Inc., New York. 304 pp.

Zauderer, E. 1983. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics.* John Wiley and Sons, Inc., New York. 779 pp.

Zemansky, M.W. 1968. *Heat and Thermodynamics,* McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo. 658 pp.

Zhou, X., T.Y. Hsiang y R.J.D. Miller. 1989. *Monte Carlo study of photogenerated carrier transport in GaAs surface space-charge fields.* J. Appl. Phys. 66

## LITERATURA CITADA (Continuación)

(7): 3066-3073.