

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA

UN ESQUEMA NO-LINEAL DE INVERSION DE
DATOS SISMICOS, CON REFERENCIA A MEDIOS
BI-DIMENSIONALES LATERALMENTE
HETEROGENEOS

T E S I S
MAESTRIA EN CIENCIAS

José C. V. Traslósheros H.

RESUMEN de la Tesis de José Carlos Víctor Traslósneros
Hernández, presentada como requisito parcial para la obtención
del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en GEOFISICA con opción en
SISMOLOGIA. Ensenaca, Baja California, México. Abril de
1987.

UN ESQUEMA NO-LINEAL DE INVERSION DE DATOS SISMICOS,
CON REFERENCIA A MEDIOS BI-DIMENSIONALES
LATERALMENTE HETEROGENEOS.

Resumen aprobado por: _____



Dr. Cecilio Rebollos E.

Director de Tesis

Se plantea un esquema de inversión no-lineal de tiempos
de viaje en medios lateralmente heterogéneos.

Los tiempos de viaje se obtienen por trazado de rayos
en medios bi-dimensionales con variaciones de velocidad en
ambas coordenadas. El medio se discretiza en regiones
triangulares, asignando valores de velocidad en los vértices.
Los gradientes de velocidad en cada triángulo pueden tener
componentes en dos dimensiones. El problema es linearizado
utilizando un desarrollo en derivadas parciales. Enseguida,
se aplica un algoritmo iterativo para invertir el sistema
usando un método de mínimos cuadrados regularizado.

La efectividad de todo el esquema de inversión no-lineal de tiempos de viaje, se prueba generando e invirtiendo datos sintéticos. La técnica usada en este trabajo demuestra ser adecuada para el problema bi-dimensional y mejora la resolución de aproximaciones tradicionales, en que se divide el medio en bloques rectangulares homogéneos. Con éste método la convergencia es rápida, generalmente no es necesario ir mas allá de la tercera iteración.

El esquema se aplica a datos reales tomados en terrenos de la planta termoeléctrica Mérida II, en Mérida, Yucatán. El objetivo del estudio es localizar zonas someras de baja velocidad (0 - 15 metros de profundidad). Un sondeo típico comprende un área de 30 X 30 metros, explorada por medio de un arreglo de 15 fuentes y 12 receptores. Las trayectorias sísmicas cubren adecuadamente la zona de interés.

Los resultados finales se muestran en mapas de velocidad de ondas sísmicas. Se dan valores de resolución y barras de error. Las zonas de baja velocidad se pueden interpretar como zonas cársticas. Las estimaciones de velocidad son compatibles con datos de perforaciones de pozos.

El esquema no-lineal es aplicable directamente a datos de pozos y a datos de refracción y reflexión sísmica.

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y

EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA

DIVISION DE CIENCIAS DE LA TIERRA

DEPARTAMENTO DE SISMOLOGIA

"Un esquema no-lineal de inversión de datos sísmicos,
con referencia a medios bi-dimensionales
lateralmente heterogéneos."

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para
obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS presenta:

José Carlos Víctor Traslosheros Hernández.

Ensenada, B.C. Abril de 1987.

Quiero escribir, pero me sale espuma,
quiero decir muchísimo y me atollo;
no hay cifra hablada que no sea suma,
no hay pirámide escrita sin cogollo.

Quiero escribir, pero me siento puma,
quiero laurearme, pero me encebollo;
no hay voz hablada que no llegue a bruma,
no hay dios ni hijo de dios, sin desarrollo.

INTENSIDAD Y ALTURA de
César Vallejo
(poeta peruano)

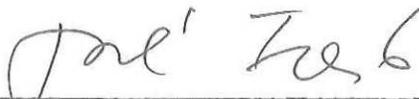
TESIS APROBADA PARA SU DEFENSA POR:



Dr. Cecilio Rebollar Bustamante, Director del Comité.



Dr. Luis Munguía Orozco, Miembro del Comité.



Dr. José Frez Cárdenas, Miembro del Comité.



Dr. José Luis Ochoa de la Torre, Miembro del Comité.



Dr. Luis Munguía Orozco, Jefe del Departamento de Sismología.



M.C. Francisco Suárez Vidal, Director de la División de Ciencias de la Tierra.



M.C. Cuauhtémoc Nava Button, Director Académico Interino.

Tesis presentada en Abril 23, 1987.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Cecilio Rebollar por su dirección, apoyo y confianza durante la realización de éste trabajo.

Al Dr. Juan Madrid por compartir conocimientos e ideas que hicieron posible el estudio.

Al Dr. José Frez distinguido maestro, por sus enseñanzas y asesoría constante.

Al Dr. Alfonso Reyes por sus consejos, y por su apoyo en momentos difíciles en los que en verdad se necesita de un amigo.

Al M. C. Francisco Suárez por su apoyo y sus consejos.

A la Oc. Ma. Elena Zavala por su invaluable ayuda en la impresión de la tesis.

CONTENIDO

	Pá g i n a

I INTRODUCCION.	1
I.1 ANTECEDENTES.	3
I.2 OBJETIVOS.	6
II TEORIA.	9
II.1 PLANTEAMIENTO.	9
II.2 PROBLEMA DIRECTO.	10
II.3 DERIVADAS PARCIALES.	14
II.4 CALCULO DE RESIDUOS.	20
II.5 PROBLEMA INVERSO.	24
III IMPLEMENTACION DEL PROGRAMA.	38
III.1 DESCRIPCION.	38
III.2 ESTRUCTURA.	43

CONTENIDO (Cont.)

	Página

IV EXPERIMENTOS NUMERICOS.	48
IV.1 DATOS SINTETICOS.	48
IV.2 EJEMPLOS.	49
IV.3 DISCUSION.	65
IV.4 CONCLUSIONES.	70
V APLICACION A DATOS REALES.	73
V.1 EXPERIMENTO TIPICO.	73
V.2 ANTECEDENTES GEOLOGICOS.	78
V.3 ANALISIS DE DATOS.	80
V.4 RESULTADOS Y DISCUSION.	86
VI CONCLUSIONES.	126
VII LITERATURA CITADA.	130

LIBIA LE FIGULAS

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
1 a)	Región triangular.	12
1 b)	Rotación del sistema (x, y).	12
1 c)	El tiempo de viaje es función de θ .	12
2 a)	D_{α} - Lado opuesto al vértice V_3 . ($\gamma_{\alpha}^a - \gamma_L$) distancia entre D_{α} y P_0 o P_1 .	15
2 b)	El rayo "ve" el parámetro - V_L en su recorrido por los triángulos A, B, C y D.	15
2 c)	El frente de onda se considera plano entre dos puntos muy cercanos.	15
3)	Filtro estabilizador normalizado con $\lambda = (\alpha/\lambda^2)$, $\mu = (1/1+\lambda^2)$, $\nu =$ eigenvalor y $\alpha =$ factor de estabilización.	29
4)	Diagrama de flujo general.	42
5)	Diagrama de flujo del esquema de inversión no-lineal.	44
6)	Diagrama de flujo del problema inverso.	45
7 a)	Modelo 1 - M1 - usado para producir datos sintéticos. 16 parámetros. Base de baja velocidad.	50
7 b)	Modelo 2 - M2 - 25 parámetros. 2LV.	50
7 c)	Modelo 3 - M3 - 49 parámetros. 2LV.	51
8 a 18)	Ejemplos sintéticos. Historia de convergencia.	54 a 64
19)	Configuración fuente - receptor.	74
20)	Sismogramas típicos. Sección CM1. Fuentes No. 6 y 7. Tendido horizontal.	75
21)	Proyección del rayo sobre la superficie.	77
22)	Formación de cavernas en calizas por disolución.	79

LISTA DE FIGURAS (Cont.)

FIGURA		Página
23)	Se muestran las soluciones a) discretizada y b) discretizada y suavizada.	81
24)	El espectro de amplitud muestra un pico entre las frecuencias ($4 \times 10^2 - 5 \times 10^2$) Hz.	83
25)	Análisis de residuales. $V=2.5$ Km./seg. es el modelo inicial mas apropiado.	85
26 a)	Normas de residuales y solución para diferentes número de eigenvalores. Iteración cero, sección CM1-121 parámetros.	90
26 b)	Normas de residuales para diferentes iteraciones.	90
27 a)	Sección CM1-121. Mapa de velocidades.	92
27 b)	Barreos CM-2 y CM-3. Columnas litológicas.	92
28 a)	Sección CM1-121. Todos los eigenvalores.	94
28 b)	Sección CM1-121. Los eigenvalores arriba del nivel de ruido son significativos.	94
29 a)	Sección CM1-121. Solución obtenida con los seis primeros picos (eigenvalores significativos). $\alpha = 0$.	95
29 b)	Sección CM1-121. Solución obtenida con todos los valores significativos. $\alpha = 10$.	95
29 c)	Sección CM1-121, solución obtenida con todos los eigenvalores significativos. $\alpha = 0$.	96
30 a)	Sección CM1-49 parámetros.	98
30 b)	Sección CM1-25 parámetros.	98
30 c)	Sección CM1-16 parámetros.	99

LISTA DE FIGURAS (Cont.)

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
31)	Residuales de tiempo de viaje. Sección CM1-121.	101
32)	Eigenvectores V. Sección CM1-121.	103
33)	Eigenvectores U. Sección CM1-121.	104
34 a 36)	Matrices de resolución CM1-121, CM1-49 y CM1-25.	106, 107 , 108
37 a 39)	Matrices de correlación CM1-121, CM1-49 y CM1-25.	110, 111 , 112
40)	Nivel relativo de distribución de error. Secciones CM1-121, 49 y 25.	113
41)	Contornos de velocidad. Sección CM2-121 parámetros.	117
42)	Contornos de velocidad. Sección GVAP-121 parámetros.	119
43)	Sección TAC-49 parámetros.	120
44 a)	Secciones TBN1-3 y TBN2-3. Soluciones obtenidas con 49 parámetros.	122
44 b)	Sección TBN1-3, con 121 parámetros.	123
45)	Secciones TBN1-4 y TBN2-4. Soluciones obtenidas con 49 parámetros.	125

LISTA DE TABLAS

<u>Tabla</u>		<u>Página</u>
1)	Síntesis de Métodos de Inversión de datos y aplicaciones.	7
2)	Rutinas usadas en la solución del problema directo.	39
3)	Rutinas usadas en la solución del problema inverso.	41
4)	Cuadro sinóptico que describe los ejemplos numéricos.	52
5)	Comparación entre ejemplos.	66
6)	Síntesis de resultados.	120.

"Un esquema no-lineal de inversión de datos sísmicos,
con referencia a medios bi-dimensionales
lateralmente heterogéneos."

I INTRODUCCION

La técnica de tomografía (del griego tomos = rebanada) se inició en medicina con el procedimiento mediante el cual pueden obtenerse imágenes tridimensionales de órganos internos del cuerpo humano, usando la información de secciones bi-dimensionales de rayos-X o ultrasonido. También es aplicada en medicina nuclear, astronomía y geofísica.

En sismología la imagen de una estructura física puede obtenerse con la información de tiempos de viaje de ondas P. Estos datos son integrales de línea de la función incógnita. Se trata de una relación entre observaciones e incógnitas que en el caso de medios heterogéneos, es no-lineal, aunque puede linealizarse usando un desarrollo en derivadas parciales. En este trabajo se usa una expresión analítica para las derivadas tomada de Madria (1986). El sistema lineal formado se invierte usando un método de mínimos cuadrados regularizado

(Frez, 1986).

El problema linealizado es resuelto en un esquema iterativo. En cada iteración se obtiene una nueva estimación de la estructura bi-dimensional de velocidades sísmicas, minimizando la diferencia entre los tiempos de viaje medidos de los sismogramas y los tiempos de viaje que se generan trazando rayos sísmicos en el modelo en turno. Para el trazado de rayos se usa el método de la "aproximación circular" (Madrid y Traslosheros, 1983).

En este trabajo se ha implementado un programa interactivo capaz de resolver el problema directo e inverso rápidamente y de graficar los resultados en cada iteración. Los datos de entrada al proceso son: tiempos de viaje observados y un modelo inicial de velocidades. El modelo inicial puede ser lateralmente heterogéneo si se cuenta con información previa, ya sea geológica o geofísica.

El método es aplicado a datos de transmisión de ondas, tomados del experimento realizado en el área de la Planta Termoeléctrica Mérida II.

Las señales sísmicas son analizadas con el fin de estimar la longitud de onda predominante. Este dato da idea acerca de la escala de la malla de discretización, así como de la longitud característica de las heterogeneidades laterales

que es posible reconocer.

Los resultados son presentados en mapas de velocidades de ondas sísmicas, haciendo un estudio de la estabilidad, resolución y errores en las estimaciones. La indeterminación y la no unicidad pueden estudiarse numéricamente.

I.1 ANTECEDENTES

Existen en la literatura varios trabajos que tratan el problema de estimar estructura bi-dimensional de velocidades de ondas sísmicas. Todos estos estudios plantean métodos iterativos para la inversión de ecuaciones integrales. El planteamiento de las ecuaciones puede ser lineal o no-lineal.

El planteamiento lineal es el más frecuentemente usado, como en Aki (1977), Dines y Lytle (1979) y Neumann (1981). Si el planteamiento es no-lineal generalmente puede ser linearizado. Una vez obtenida la relación lineal entre datos e incógnitas se procede a la estimación, como en Thurber (1981).

Los métodos de inversión del sistema lineal en los métodos tomográficos son numéricos y pueden clasificarse en dos grupos. El primero es llamado "ART" cuyas siglas traducidas al español, significan técnica de reconstrucción algebraica. El segundo es conocido como "SIRT" que quiere decir técnica de reconstrucción iterativa simultánea.

ART es conveniente usarlo cuando se tiene un gran número de observaciones y de incógnitas. El método resuelve ecuación por ecuación, examinando las trayectorias una por una, de tal modo que se tiene un nuevo modelo con cada rayo resuelto. De esta forma no es necesario almacenar toda la matriz de coeficientes en la computadora.

La técnica SIRT consiste en invertir toda la matriz de coeficientes. La aplicación de SIRT es adecuada en el caso en que la matriz de coeficientes del sistema lineal puede guardarse en la memoria, y cuando exista la posibilidad de plantear un esquema recursivo que resuelva un sistema de grandes dimensiones en varios pasos.

ART ha sido aplicado por Gordon (1974), Dines y Lytle (1979) y Mc. Mehan (1983). SIRT es la técnica más frecuentemente usada, como ejemplo se citan los trabajos resumidos en Aki (1977); Thurber (1981); Spencer y Gubbins (1980); Neumann (1981); Bishop y col. (1985).

Se puede hacer otra clasificación de trabajos, tomando como base la forma de discretizar el medio físico, que pueden ser de tres tipos: regiones rectangulares homogéneas, discretización nodal y representación continua.

En el primer grupo se encuentra el trabajo de Gordon (1974), los resumidos en Aki (1977), Dines y Lytle (1979) y Neumann (1981) entre otros.

Todos los autores mantienen en común las siguientes consideraciones: (1) eliminar refracción crítica en discontinuidades laterales; (2) no considerar la curvatura de los rayos debida a variaciones de la velocidad.

Representantes del segundo tipo de discretización, son Thurber (1981); Bishop y col. (1985); quienes discretizan el medio, asignando valores de velocidad en los nodos de una red. Entre ellos hay ciertas diferencias en cuanto a la solución del trazado de rayos y en el planteamiento del problema inverso. El primer autor plantea un problema no-lineal y calcula numéricamente las derivadas parciales. Bishop y col. (1986) resuelven la trayectoria encontrando las componentes del gradiente de velocidad en las dos coordenadas y luego trazando una aproximación a la trayectoria circular en cada región de la red, planteando el problema en forma lineal.

El tercer grupo de autores representa el medio en forma continua, como Menke (1985), que usa para la estimación la técnica de Backus-Gilbert.

Todos estos métodos se han aplicado a: datos de transmisión de ondas (Neumann, 1981); a datos de refracción sísmica (Aki, 1977), (Neumann, 1981); a reflexión sísmica (Neumann, 1981), (Bishop y col., 1985) y a relocalización de hipocentros, (Spencer y Gubbins, 1980) y (Thurber, 1981).

En el presente trabajo se hace un planteamiento no lineal, una discretización nodal y se invierte el sistema usando SIRT. En la Tabla (1) se esquematizan los diferentes métodos.

I.2 OBJETIVOS

Los objetivos del trabajo pueden resumirse en los siguientes puntos:

TABLA 1. Síntesis de métodos de Inversión de datos y aplicaciones.

PLANTEAMIENTO	DISCRETIZACION	METODO DE INVERSION	APLICACION	REFERENCIAS
No lineal (Cálculo de derivadas parciales)	REGIONES RECTANGULARES HOMOGENEAS	ART	TRANSMISION DE ONDAS	-Gordon (1974) P1-D1-I1-A3
		I1	A1	-Aki (1977) P1-D1-I2-A(2,3)
P1	D1	SIRT	REFLEXION	-Dines y Lytle (1979) P1-D1-I1-A(2,3)
Lineal	NODAL		I2	A2
	D2		REFRACCION	-Spencer y Gubbins (1980) P2-D3-I2-A(3,4)
P2	REPRESENTACION CONTINUA		A3	-Neumann (1981) P1-D1-I2-A(2,3,4)
	D1		RELOCALIZACION DE HIPOCENTROS	-Mc. Mehan (1983) P1-D1-I1-A(1,3)
			A4	-Menke (1985) P2-D3-I2-A(1,3)
				-Bishop y col. (1985) P1-D2-I2-A2
				-ESTE TRABAJO P1-D2-I2-A1

a) Plantear un esquema no-lineal de inversión de tiempos de viaje de ondas sísmicas, para obtener estructura de velocidades en dos dimensiones.

b) Realizar un programa interactivo, que resuelva el problema directo e inverso rápidamente y que permita observar los resultados en una misma sesión.

c) Validar el método de inversión, produciendo e invirtiendo datos sintéticos.

d) Aplicar el método a datos reales, estudiar su efectividad y compararlo con uno mas tradicional.

II TEORIA

II.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La definición del residual para una observación de tiempo de viaje es:

$$r = t_o - t_c \quad \dots\dots(1)$$

donde t_o es el tiempo de viaje observado y t_c el tiempo calculado, al trazar el rayo en un modelo de velocidades.

El problema consiste en perturbar el modelo inicial de velocidades para producir un cambio en el tiempo de viaje δt_c , que satisfaga la ecuación:

$$t_o - (t_c + \delta t_c) \simeq 0 \quad \dots\dots(2)$$

Se está tratando un problema no-lineal, que necesita ser resuelto en un esquema iterativo. Usando un desarrollo de Taylor a primer orden. El cambio en tiempo de viaje teórico puede relacionarse a cambios en los parámetros de

velocidad dado por

$$\delta t_c = \sum_{i=1}^N \frac{\partial t}{\partial v_k} \delta v_k \quad \dots\dots(3)$$

donde $\frac{\partial t}{\partial v_k}$ es la derivada parcial de tiempo de viaje respecto de la k-ésima velocidad, δv_k es el cambio deseado en v_k y N es el número de incógnitas que resultan de la discretización.

Combinando las ecuaciones (1), (2) y (3) el sistema toma la forma:

$$r_i = \sum_{k=1}^N \frac{\partial t}{\partial v_k} \delta v_k \quad \dots\dots(4)$$

el índice i varía entre $1 \leq i \leq M$, donde M es el número de observaciones.

II.2 PROBLEMA DIRECTO

En las tres secciones siguientes se sigue el modo de análisis de Madrid (1986).

El medio heterogéneo puede discretizarse con algún

tipo de figura geométrica, como rectángulos o triángulos. Usar triángulos tiene ciertas ventajas, como es el hecho de que en cada localidad triangular lateralmente heterogénea la velocidad de propagación puede definirse usando la fórmula de interpolación lineal:

$$v(x, z) = v_0 + xb_1 + yb_2. \quad \dots(5)$$

Conociendo los valores de la velocidad en los vértices de los triángulos (v_1, v_2, v_3), se obtienen los valores de v_0 , b_1 y b_2 resolviendo el sistema (de 3×3):

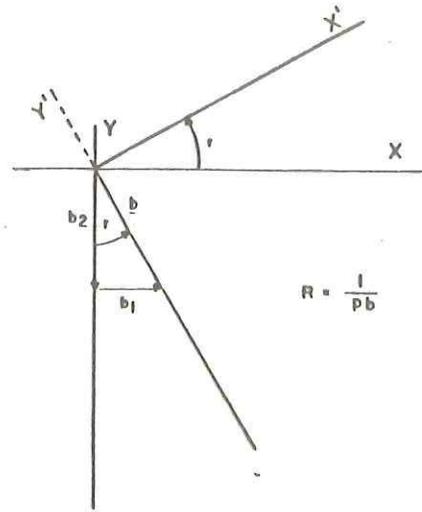
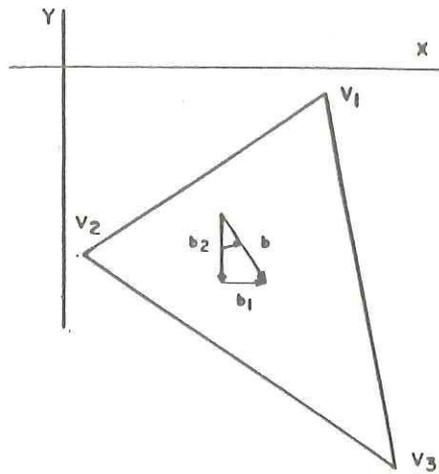
$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} \quad \dots(6)$$

por la regla de Cramer.

El vector gradiente de velocidad tiene componentes b_1 y b_2 :

$$\nabla v = (b_1, b_2) \quad \dots(7)$$

Si una localidad triangular donde $b_1 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$ se orienta de modo que la dirección del gradiente coincida con el eje vertical, mediante la rotación (ver Figura (1))

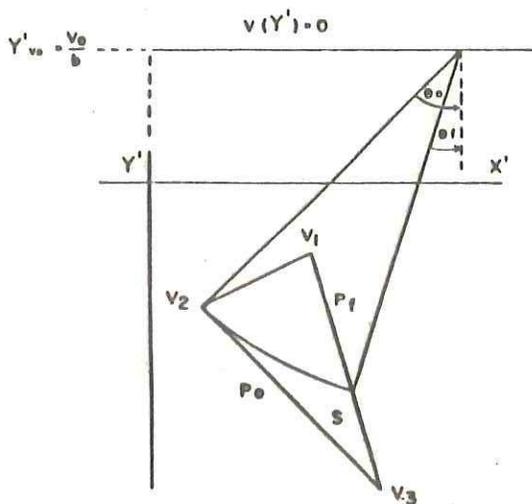


b) Rotación del sistema (X,Y)

$$V(X,Y) = V_0 + b_1 X + b_2 Y$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

a) Región triangular



$$T = \int \frac{ds}{v} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{R d\theta}{v}$$

$$T = \frac{l}{b} \left[\ln \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right) \right]_{\theta_0}^{\theta_1}$$

c) El tiempo de viaje es función de b y θ

Fig. 1

$$x' = x \cos r + y \sin r \quad \dots\dots(8)$$

$$y' = -x \sin r + y \cos r,$$

en el nuevo sistema (x', y') la velocidad varía linealmente con la coordenada (y') . (Nótese que la coordenada (y) puede ser profundidad o la otra coordenada horizontal).

Entonces la trayectoria del rayo es un arco de circunferencia y el tiempo de viaje en la localidad triangular es:

$$\Delta t = \frac{1}{|V_w|} \ln \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad \dots\dots(9)$$

Las intersecciones del rayo sísmico con los lados del triángulo se encuentran resolviendo una ecuación cuadrática.

Este método es llamado "aproximación circular" y se usa en este trabajo para obtener los tiempo de viaje calculados (t_c) (Madrid y Traslosheros, 1983). El procedimiento requiere muy poco tiempo de computación en comparación con integraciones numéricas.

II.3 DERIVADAS PARCIALES.

La expresión analítica de las derivadas parciales para el problema bi-dimensional fue obtenida por Madrid (1986), usando un método de perturbación.

De la expresión general para el tiempo de viaje en un triángulo particular,

$$t_{\Delta} = \int_0^f \frac{\partial s}{v(x,y)} \quad \dots\dots(10)$$

se perturba la velocidad en uno de los vértices del triángulo, por ejemplo v_3 (Figura 2), ocasionando a su vez una perturbación en el tiempo de viaje δt .

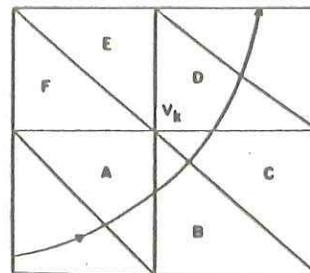
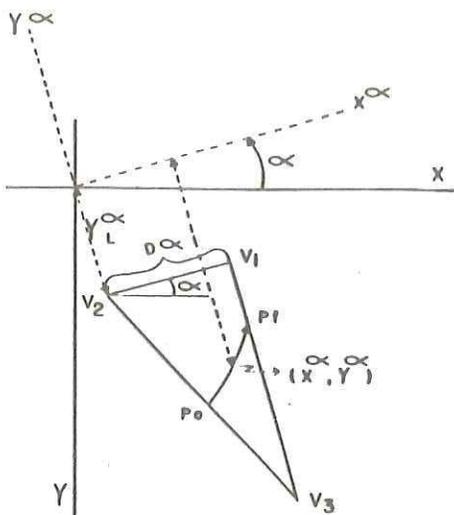
La derivada parcial de tiempo de viaje en un triángulo, respecto de v_3 es:

$$\frac{\partial t_{\Delta}}{\partial v_3} = \int_0^f \frac{\partial}{\partial v_3} \left(\frac{1}{v(x,y)} \right) ds \quad \dots\dots(11)$$

donde:

$$\frac{\partial}{\partial v_3} \left(\frac{1}{v} \right) = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial v}{\partial v_3} \quad \dots\dots(12)$$

Una expresión para $\frac{\partial v}{\partial v_3}$ se encuentra derivando la ecuación (5) respecto de v_3 para la trayectoria original



$$\frac{\partial T}{\partial V_k} = \sum_{j=A, B, C, D} \frac{\partial}{\partial V_k} \Delta T_j$$

a) $T_{\Delta} = \int_{P_0}^{P_f} \frac{ds}{v(x, y)}$

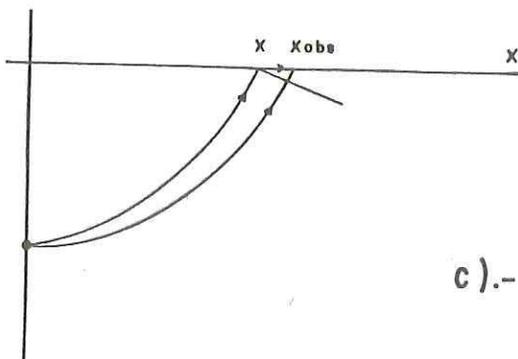
$$\frac{\partial T_{\Delta}}{\partial V_3} = \int_{P_0}^{P_f} \left(\frac{\partial v}{\partial V_3} \right) \frac{ds}{v^2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial V_3} &= \frac{\partial v_0}{\partial V_3} + x \frac{\partial b_1}{\partial V_3} + \frac{\partial b_2}{\partial V_3} \\ \frac{\partial v}{\partial V_3} &= \frac{D\alpha}{A} (Y_L^{\alpha} - Y^{\alpha}); A = \text{doi} [] \\ \frac{ds}{v^2} &= \frac{1}{b} dq'; \quad \mu = (p', q'); \quad q' = \left(\frac{1}{v^2} - p'^2 \right) \end{aligned} \right. \rightarrow \text{LADO OPUESTO AL VÉRTICE - } V_3$$

DISTANCIA ENTRE $D\alpha$ y P_0 o P_f .

$$\frac{\partial T_{\Delta}}{\partial V_3} = \left(\frac{D\alpha}{bA} \right) \int_{P_0}^{P_f} (Y_L^{\alpha} - Y^{\alpha}) dq'$$

$$\frac{\partial T_{\Delta}}{\partial V_3} = - \left(\frac{D\alpha}{bA} \right) \left\{ \cos(\alpha - r) [T_{\Delta}]_{P_0}^{P_f} - p' [X^{\alpha}]_{P_0}^{P_f} + \left[q' (Y_L^{\alpha} - Y^{\alpha}) \right]_{P_0}^{P_f} \right\}$$



$$p = \frac{dT}{dX}$$

$$T_c = \int_{X_p}^{X_{obs}} p(X) dX = \int_{X_p}^{X_{obs}} \left[p_0 + \frac{\partial p}{\partial X} (X - X_p) \right] dX$$

$$T_c = p(X_{obs} - X_p) + \frac{p^2}{2q'V_3} (X_{obs} - X_p)^2$$

c).- El frente de onda se considera plano entre dos puntos muy cercanos.

Figura N° 2

$$\frac{\partial v}{\partial v_3} = \frac{\partial v_0}{\partial v_3} + x \frac{\partial b_1}{\partial v_3} + y \frac{\partial b_2}{\partial v_3} \quad \dots\dots(13)$$

Los valores v_0 , b_1 y b_2 se obtienen resolviendo el sistema (6). Derivando con respecto de v_3 , resulta:

$$\frac{\partial v_0}{\partial v_3} = \frac{A}{D} \quad \text{donde } A = (x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial v_3} = \frac{B}{D} \quad \text{donde } B = (y_1 - y_2) \quad \dots\dots(14)$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial b_2}{\partial v_3} = \frac{C}{D} \quad \text{donde } C = (x_2 - x_1),$$

$$D = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

Sustituyendo las igualdades anteriores en (13), se encuentra que $\frac{\partial v}{\partial v_3}$ es función solamente de las coordenadas espaciales

$$\frac{\partial v}{\partial v_3} = \frac{1}{D} [H(x, y)]$$

$$\text{y} \quad H(x, z) = A + Bx + Cy$$

Volviendo a la ecuación (11), vemos que ahora

$$\frac{\partial t_A}{\partial v_3} = - \frac{1}{D} \int_0^f H(x, y) \frac{\sigma s}{v^2} \quad \dots\dots(15)$$

La integral anterior puede expresarse en una forma más conveniente haciendo

$$\frac{\partial s}{v^2} = \frac{1}{q'v} dy' .$$

Usando las relaciones $ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ y $(\frac{p'}{q'}) = (\frac{dx}{dy}) = \tan i$, donde p' y q' son componentes del vector de lentitud $u = (p', q')$ en el sistema rotado

$$p' = p \cos r + q \operatorname{sen} r$$

.....(16)

$$q' = -p \operatorname{sen} r + q \cos r.$$

Además, si derivamos q' respecto de v obtenemos

$$\frac{dq'}{dv} = - \frac{1}{q'v^3}$$

y

$$\frac{\partial s}{v^2} = \frac{dq'}{dv} dy' = \frac{1}{b} dq'$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (15), la integración es directa.

La ecuación (11) queda

$$\frac{\partial t_{\Delta}}{\partial v_3} = - \frac{1}{Db} \int_0^f H(x', y') dq' \quad \dots\dots(17)$$

y expresando H en términos de x' y y':

$$H(x', y') = A + x'E + y'F$$

donde

$$E = (\cos r B + \operatorname{sen} r C)$$

$$F = (\cos r C - \operatorname{sen} r B),$$

se integra (17) por partes, resultando

$$\frac{\partial t_{\Delta}}{\partial v_3} = - \frac{1}{Db} \{ [H(x', y') q']_0^f - \int_0^f q' \frac{dH}{dy'} dy' \} \quad \dots\dots(18)$$

La expresión para

$$\frac{dH}{dy'} = \frac{p'}{q'} E + F \quad \text{y la función } \tau = \int_0^f q' dy' = T - p'x',$$

(donde T es el tiempo de viaje en la localidad triangular) se sustituyen en (18) para obtener el término integral que resulta ser:

$$p' E[y]_0^f + F[T - p'x']_0^f$$

Finalmente, la fórmula para las derivadas parciales es:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial v_3} = - \frac{1}{D_b} \{ H(x', y') q' \}_0^f - p' [y' E - x' F]_0^f - F[T]_0^f \} \dots (19)$$

Es posible construir expresiones muy similares para los vértices 1 y 2, (ver Figura (2 a)), en general se tiene una expresión válida para cualquiera de los vértices de un Triángulo.

Para construir un elemento de la matriz de derivadas parciales, debemos considerar la contribución de todos los triángulos que comparten el mismo vértice, y que son cruzados por el rayo i (Figura 2 b).

En el ejemplo ilustrado en la figura (2 b), el rayo cruza los triángulos (A, B, C, D) que comparten el k -ésimo vértice, por ello es que el cambio en el tiempo de viaje debido a una perturbación en la velocidad - V_k está dado por

$$\frac{\partial t}{\partial v_k} = \sum_{i=A, B, C, D} \frac{\partial (\Delta t)_i}{\partial v_k} \dots (20)$$

II.4 CALCULO DE RESIDUALES.

Para calcular los residuales de las observaciones tomadas (x_o, y_o) , es necesario conocer los tiempos observados (t_o) , los cuales se leen de las trazas sísmicas, además de t_c que se calculan en el modelo inicial.

El problema es calcular t_c exactamente en el punto (x_o, y_o) , lo que ha sido resuelto por varios autores en diferentes formas.

En este trabajo, se utiliza el procedimiento diseñado por Madrid (1986), que usa el método de tiro. En este método se traza un número mínimo de rayos y se selecciona aquél que se encuentra más cercano al punto (x_o, y_o) . Puede suceder que el punto seleccionado (x_c, y_c) sea exactamente el de observación. Pero también puede ser que (x_c, y_c) se encuentre razonablemente cerca del punto (x_o, y_o) , Figura (2 c).

Si esto último ocurre, puede aplicarse una corrección al tiempo de viaje de modo que:

$$t_c(x_o, y_o) = t_c(x_c, y_c) + C_t \quad \dots\dots(21)$$

En la Figura (2 c), se muestra que el frente de onda toca primero el punto (x_c, y_c) y necesita viajar un tiempo adicional (C_t) para llegar a (x_o, y_o) .

El signo de la corrección depende del ángulo de incidencia del rayo y de la posición del punto (x_c, y_c) respecto de (x_o, y_o) .

Suponiendo que el frente de onda es plano (Figura 2 c), el tiempo de viaje está dado por:

$$t(x, y) = \int p \, dx + \int q \, dy \quad \dots\dots(22)$$

si $y = \text{cte.}$

$$t(x, y=\text{cte}) = \int p \, dx \quad \dots\dots(23)$$

y si $x = \text{cte.}$ entonces

$$t(x=\text{cte}, y) = \int q \, dy \quad \dots\dots(24)$$

El primer caso implicaría que las observaciones se han tomado a lo largo de una línea de $y=\text{cte.}$ y C_t dependería de x , $(C_t(x))$. En el segundo caso C_t dependería de y , $(C_t(y))$.

Todos los rayos se caracterizan por sus componentes

del vector de frenamiento (p_i, q_i) al iniciar la trayectoria y (p_f, q_f) al finalizarla. Si se conociera la distribución de $p_f(x, y=\text{cte.})$ sería sencillo encontrar $C_t(x)$.

No conocemos $p_f(x)$ ni $q_f(y)$ pero se pueden obtener aproximaciones, usando un desarrollo de Taylor a primer orden:

$$p(x) = p(x_c) + \frac{\partial p}{\partial x} (x - x_c) \quad \dots\dots(25)$$

$$y \quad q(y) = q(y_c) + \frac{\partial q}{\partial y} (y - y_c)$$

Sustituyendo estas expresiones en (23) y (24)

$$C_t(x) = \int_{x_c}^{x_0} [p(x_c) + \frac{\partial p}{\partial x} (x - x_c)] dx \quad \dots\dots(26)$$

e integrando

$$C_t(x) = p(x_0 - x_c) + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (x - x_c)^2 \quad \dots\dots(27)$$

$$C_t(y) = q(y_0 - y_c) + \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial y} (y - y_c)^2.$$

Quedan solamente por obtener las expresiones para $\frac{\partial p}{\partial x}$ y $\frac{\partial q}{\partial y}$. Para ésto consideremos que en el punto final el vector de frenamiento está dado por (p'_f, q'_f) en el sistema local o (p_f, q_f) en el sistema externo.

La componente del vector de frenamiento en el sistema externo está dado por:

$$P_f = p'_i \cos r - q'_f \sin r \quad \dots\dots(28)$$

Nótese que se puede usar p'_i o p'_f pues en el sistema local donde el gradiente es vertical, p' es constante a lo largo de la trayectoria, en cambio q' sí varía y su cambio a lo largo de ésta es:

$$q'_f = q'_o + \frac{\partial q'}{\partial y'} dy' \quad \dots\dots(29)$$

a primer orden. $(\frac{\partial q'}{\partial y'})$ es obtenida derivando $u(p', q')$ respecto de y' :

$$\frac{\partial q'}{\partial y'} = \frac{b}{q'v^3} \quad \dots\dots(30)$$

combinando (28), (29) y (30)

$$P_f = p_i + \left(\frac{b}{q'v^3}\right) \sin^2 r dx - \left(\frac{b}{q'v^3}\right) \sin r \cos r dy,$$

de aquí se obtiene finalmente:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{b^2}{q'v^3b}$$

y

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = - \frac{b^2}{q'v^3b}$$

Estas derivadas parciales se sustituyen en (27) para encontrar el valor de la corrección deseada. Desde luego suponiendo que los puntos de observación y de cálculo se encuentran suficientemente cercanos.

II.5 EL PROBLEMA INVERSO

En geofísica se trabaja con mediciones tomadas en la superficie de la tierra, que traen consigo información del interior de ésta que es inaccesible a la observación directa.

El problema inverso se refiere a la inversión de los datos y a la inversión del operador que relaciona datos con incógnitas.

El término inversión de datos se aplica a problemas patológicos de estimación que tienen solución, pero ésta no es ni única ni estable.

La inversión del operador depende de un criterio de optimización que tome en cuenta lo que se sabe de los errores en las mediciones.

El sistema lineal que se quiere invertir es

$$\delta t = A \delta v + e \quad \dots\dots(31)$$

δt son los residuales de tiempo de viaje, A es el operador lineal (que suaviza las fluctuaciones de v), δv es la perturbación en velocidad y (e) es el vector de errores en las mediciones. Los errores en las observaciones enmascaran las fluctuaciones de (v) .

Criterio de estimación

Es necesario estabilizar eligiendo un criterio de estimación que, con sentido físico resuelva estadísticamente la incompatibilidad de los datos y entregue soluciones no-únicas estables.

Para invertir el sistema (31), se propone un criterio que garantiza que la diferencia entre soluciones de iteración a iteración será mínima.

Se minimiza el funcional:

$$\min \{ \|t - A\hat{v}_i\|^2 C_t^{-1} + \alpha \| \hat{v}_i - \hat{v}_{i-1} \|^2 C_{v_{i-1}}^{-1} \} \quad \dots\dots(32)$$

donde $\|r\|_{C_t^{-1}}^2 = r^T C_t^{-1} r$ y r^T es el transpuesto de r , el índice i corresponde a las iteraciones. El funcional es la suma de la norma cuadrática de los residuales y la norma de la solución.

Los cambios en la solución de iteración a iteración serán pequeños porque el estimador se ha construido con un factor de peso y estabilización. De aquí que surge la necesidad de una solución inicial lo más cercana posible a la solución real, y éste es uno de los puntos críticos del método.

El término que incluye la norma de la solución, está escalado por un factor de estabilización. Cuando $\alpha=0$ se tiene el caso mínimo cuadrático estándar.

La matriz de covariancia del error de la solución inicial ($C_{V_{i-1}}$) es una matriz de peso que puede funcionar como matriz de estabilización. Los elementos de la diagonal principal idealmente representan los errores y correlación de la solución inicial, son los cuadrados de las desviaciones estándar de cada incógnita.

La norma de los residuales está a su vez ponderada con la matriz de covariancia de los errores de observación (C_t). Esta matriz puede ser diagonal, indicando que los errores no

están relacionados entre sí. Esto se aplica a C_t y a $C_{v_{i-1}}$. Cuando los errores están correlacionados, entonces la matriz de covariancia de errores en la observación no es diagonal.

Resolviendo (32) se obtiene la ecuación normal:

$$-A^T C_t^{-1} (t - A\hat{v}_i) + \alpha C_{v_{i-1}}^{-1} (\hat{v}_i - \hat{v}_{i-1}) = 0 \quad \dots\dots(33)$$

de donde se obtiene la solución mínimo cuadrática regularizada

$$\delta\hat{v}_i = (A^T C_t^{-1} A + \alpha C_{v_{i-1}}^{-1})^{-1} A^T C_t^{-1} r_i \quad \dots\dots(34)$$

donde $r_i = t_{\text{obs}} - t_{\text{cal}_i}$ es el residual, $\delta\hat{v} = \hat{v}_i - \hat{v}_{i-1}$ es la perturbación a la solución anterior y el índice i corresponde a la iteración.

La matriz que se invierte tiene un término adicional a la solución mínimo cuadrática estándar que produce una estabilización del sistema, la cual se puede aumentar o disminuir manipulando $C_{v_{i-1}}$ y α .

La descomposición en valores singulares

Si expresamos la solución δv_i en términos de la descomposición en valores singulares de $A = U \lambda V^T$, tenemos:

$$\delta v_i = \sum_{j,k}^{n,m} \frac{\lambda_j v_{ij} u_{kj} t_k}{(\lambda_j^2 + \alpha)} \quad \dots\dots (35)$$

(Frez, 1986), donde n es el número de valores singulares distintos de cero y m el número de observaciones. La ecuación anterior y la (34) son equivalentes si es que se usan todos los eigenvalores en la estimación.

Estabilización

La ecuación (35) representa la solución mínimo cuadrática estándar multiplicada por un filtro de altas frecuencias

$$\text{Filtro}(\alpha) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \alpha} \quad \dots\dots (36)$$

Figura 3. Este filtro debe aplicarse estudiando la variación de la solución con diferentes valores de α , entonces se escoge

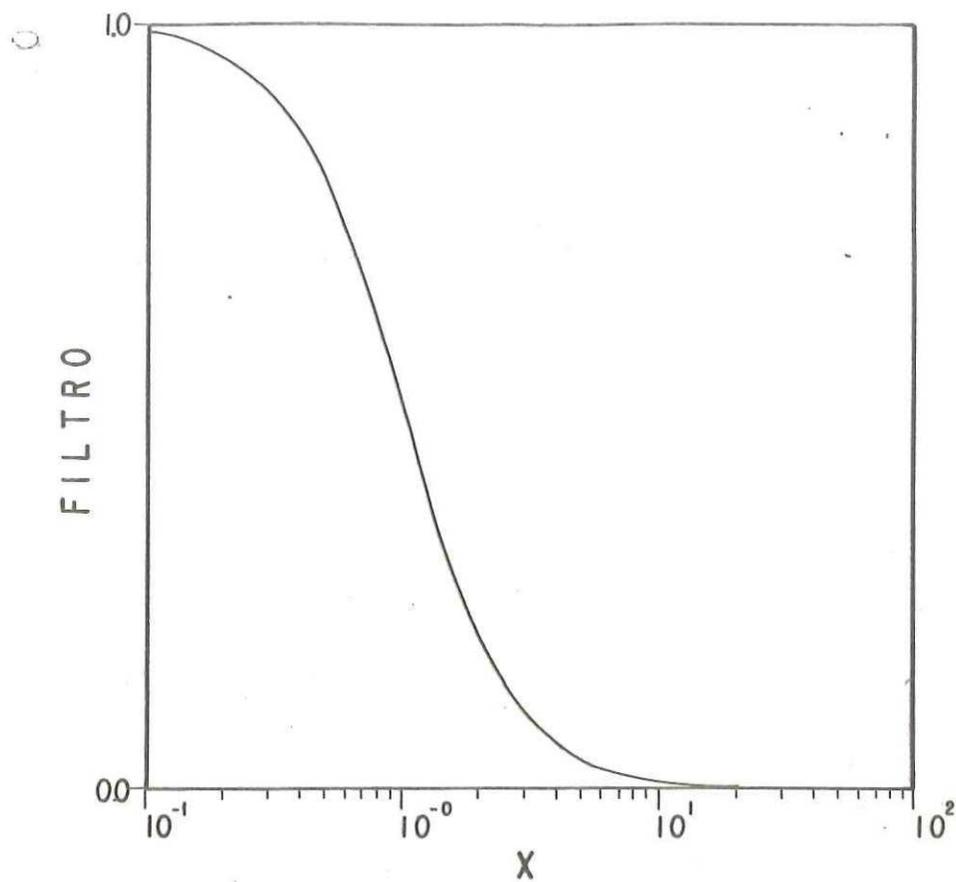


FIG.3.- Filtro estabilizador normalizado con

$$X = (\lambda / \alpha)^{1/2}, f = \frac{X^2}{X^2 + 1}$$

λ = eigenvalor

α = factor de estabilización

la solución que mejor satisfaga la información adicional y que además produzca residuales aleatorios. No existe un criterio infalible para elegir α , se encuentra generalmente por prueba y error.

Generalmente, el problema de estimación de velocidades es inestable, pues los datos casi siempre tienen mucho error y las observaciones son insuficientes. Por lo tanto, no hay resolución a detalles en la estructura.

Puede conseguirse una buena estimación con ayuda del filtro estabilizador (ecuación 36) o rompiendo correlaciones entre incógnitas, e inclusive, reduciendo el número de incógnitas vía la matriz de covariancias de la solución inicial.

El problema de discretización

Cuando la discretización es demasiado fina, muchos de los incógnitas resultantes son redundantes. Esta redundancia causa inestabilidad en la solución. La inestabilidad proviene entonces también de redundancia en incógnitas. Se quiere un estimador estable que tenga sentido físico. Para lograr una buena estimación se eliminan redundancias, se pasa de sistemas

indeterminados a determinados, se optimiza la resolución y se rompen correlaciones.

Las observaciones

Es importante también en la estimación contar con un gran número de observaciones, tomando en cuenta la relación inversa que existe entre la raíz cuadrada del número de observaciones y el valor del error en las estimaciones:

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}$$

Esto nos dice que conforme incluimos más y más información, llegará el punto en que el error en las estimaciones ya no disminuye significativamente.

Los errores en las observaciones

Estos errores no se conocen, sin embargo debido a la gran cantidad de factores físicos y humanos que intervienen en las mediciones, se considera que los errores son aleatorios.

Es importante también tratar de estimar el nivel de ruido en las observaciones, pues si los datos contienen un alto porcentaje de ruido el problema se hace muy inestable.

En algunos problemas se cuenta con argumentos físicos que permiten defender modelos de error, de éste modo pueden proponerse modelos que, de alguna forma, den más peso a algunas observaciones que se consideren significativas.

Matriz de resolución

La resolución se define como:

$$R = H A \quad \dots\dots(37)$$

donde H es el pseudo-inverso del operador A , de modo que:

$$\delta \hat{v} = R \delta v + H e.$$

Cuando $R = I$, la resolución es óptima y la única fuente de error proviene del término de propagación de errores de la observación. Este es el caso del estimador mínimo cuadrático estándar, sin embargo, esta solución en el caso sísmológico casi nunca tiene validez física.

Cuando la resolución es diferente de la matriz identidad, se tiene el estimador mínimo cuadrático estabilizado, que tiene además del error de las observaciones, el error debido a la estimación del operador $H(a)$. El estudio de las familias de soluciones dependientes de a puede llevarnos a escoger una estimación con sentido físico.

Matriz de covariancias de errores en la solución

La expresión para la matriz de covariancias de errores en la solución se obtiene a partir de la hipótesis de que la solución es insesgada, es decir

$$E(v \text{ m. c.}) = v \quad \text{si} \quad E(e) = 0$$

donde $E(\)$ es el operador valor esperado, v es la solución real y e contiene los errores en las observaciones.

La matriz de covariancia se define como:

$$C_{vv} = E [(v \text{ m. c.} - v) (v \text{ m. c.} - v)^T]$$

Escribiendo:

$$v = H A v + H e$$

y restando x en ambos lados

$$v - v = (HA - I) v + H e$$

multiplicando por el transpuesto y aplicando el operador valor esperado, se obtiene:

$$C_{VV} = (HA - I) C_{V_{i-1}} (HA - I)^T + H C_t^{-1} H^T \quad \dots\dots(38)$$

Que es la matriz de covariancias de los errores en las estimaciones.

El primer término de la expresión se refiere al error de resolución y el segundo término a la propagación de errores de las observaciones.

Matriz de correlación

Por otro lado, la matriz de correlación se obtiene como:

$$P_{ij} = C_{ij} / s_i s_j \quad \dots\dots(39)$$

donde s_i y s_j son las variancias de los incógnitas, que normalizan la matriz de covariancia. Este resultado permite observar el grado de correlación lineal entre las incógnitas.

Si algunas incógnitas se encuentran correlacionadas con una cuya resolución es mala, se contaminan también. Para romper estas correlaciones es necesario diseñar adecuadamente la matriz de covariancias de la solución inicial

Barras de error de las estimaciones

La diagonal de la matriz de covariancias contiene las variancias del error en cada uno de los parámetros, que da los errores de la solución.

El compromiso ESTABILIDAD - RESOLUCION

La solución mínimo-cuadrática estándar (SMCE) es insesgada y de resolución óptima. Pero generalmente en la vida real los problemas inversos son inestables.

Si se quiere una solución que sea estable será necesario aplicar un filtro regularizante o estabilizador sobre SMCE. Esta nueva solución filtrada, es sesgada, su resolución es $R \neq I$.

La resolución no tiene ya la forma de un delta de Kronecker, ahora tiene la forma de una campana cuya anchura es la longitud de resolución.

Al minimizar la longitud de la resolución y hacerla tender a una función delta, se llega a la zona de inestabilidad acercándonos a SMCE.

He ahí el compromiso entre estabilidad y resolución, que es necesario pactar hechando mano de algún criterio con sentido físico.

Los métodos regularizados y la matriz de error-covariancia

Los métodos regularizados son, por lo tanto sesgados y no es posible obtener la covariancia de los errores en la solución.

En éstos casos es necesario incluir aquellos términos

que resulten de considerar inválida la hipótesis de-que la
soluciones inicial y final son incesgadas.

III IMPLEMENTACION DEL PROGRAMA

III.1 DESCRIPCION

Se contruyó un programa interactivo, formado con cuatro paquetes de subrutinas, cuyas funciones son: (1) resolver el problema directo, (2) formar las derivadas parciales, (3) resolver el problema inverso y (4) graficado.

En todas las subrutinas se usan variables de doble presición (excepto en las de graficado) que en la PRIME-750 trabaja con catorce cifras significativas.

Los arreglos bi-dimensionales se tratan como vectores, de este modo, se optimiza el funcionamiento del algoritmo.

El paquete correspondiente a la solución del problema directo (Madrid y Traslosheros, 1986) consta de 8 subrutinas cuyas funciones se resumen en la Tabla (2), las

TABLA 2. Rutinas usadas en la solución del problema directo.

SUBROUTINAS	ENTRADA	SALIDA	FUNCION
MODEL	-Modelo nodal de velocidades	-Gradiente de velocidad en cada triángulo V , b y b . -Angulos de rotación de cada triángulo.	-General el modelo.
RESET	-Parámetros de fuente y receptor.	-parámetros Iniciales (p,q).	-Inicializa las trayectorias.
PATH	-Parámetros del triángulo en turno.	-Tiempo de viaje en el triángulo actual.	-Tiempo de viaje a.
QUAD	-Parámetros de la circunferencia.	-Interacción de la circunferencia que representa la trayectoria con un lado del triángulo.	-Traza el rayo.
CHKLYR	-Parámetros del triángulo en turno.		-Ve en que capa el triángulo actual.
TRANS	-Angulos del rayo.	-Dirección del rayo en la nueva capa.	-Reflexión, refracción en discontinuidades.
CORREC	-Parámetros de corrección del tiempo de viaje.	-Residuales.	-Corregir residuales.
SELTRA	-Coordenadas de receptores. -Coordenadas de todos los rayos	-Trayectorias seleccionadas.	-Selección de trayectorias.

funciones de éstas son: Trazar las trayectorias, seleccionar aquellas que estén mas cerca de los puntos de observación y corregir los tiempos de viaje teóricos para obtener residuales con la mayor exactitud posible.

La formación de derivadas parciales se hace al tiempo de resolver el problema directo, las subrutinas se llaman COMPAR y PARCIAL. La función de COMPAR es buscar las incógnitas que "ve" un rayo en particular y acumular las derivadas parciales siguiendo la fórmula (20). PARCIAL calcula el valor de la derivada parcial.

El paquete de inversión consta de varias subrutinas cuyas funciones se resumen en la Tabla (3). Este paquete fué escrito y probado por Frez (1986) y usa la descomposición en valores singulares en el caso regularizado. Este subprograma tiene capacidad para resolver sistemas lineales de dimensiones bastante grandes (dependiendo de la computadora que se use).

TABLA 3. Rutinas usadas en la solución del problema Inverso.

SUBROUTINA	ENTRADA	SALIDA	FUNCION
INVATA	<ul style="list-style-type: none"> -Matriz de derivadas parciales. -Vector de residuales. -Matriz de covariancias de la solución. -Errores en observaciones. -Modelo en turno. -Número de mediciones. -Número de incógnitas. -Número de eigenvalores. -Factor de estabilización. 	<ul style="list-style-type: none"> -Nueva solución. 	<ul style="list-style-type: none"> -Estimación.
CHOL	<ul style="list-style-type: none"> -Matriz de covariancias de la solución. (Matriz simétrica positiva - definida) 	<ul style="list-style-type: none"> -Descomposición triangular de ésta. 	<ul style="list-style-type: none"> -Aplica descomposición de Cholensky a la matriz de covariancias de la solución. (En caso de que sea no diagonal).
EHOUS	<ul style="list-style-type: none"> -La matriz PTP, donde P es A normalizada con los errores en la observación y en solución. 	<ul style="list-style-type: none"> -PTP reducida a una matriz tridiagonal. 	<ul style="list-style-type: none"> -Tridiagonalizar
BISECT	<ul style="list-style-type: none"> -Matriz tridiagonal. 	<ul style="list-style-type: none"> -Eigenvalores. 	<ul style="list-style-type: none"> -Encontrar eigenvalores.
TINVIT	<ul style="list-style-type: none"> -Matriz tridiagonal. 	<ul style="list-style-type: none"> -Eigenvectores de la m. tridiagonal. 	<ul style="list-style-type: none"> -Calcula eigenvectores de m. tridiagonal.
TRBAK1	<ul style="list-style-type: none"> -PTP 	<ul style="list-style-type: none"> -Eigenvectores de PTP. 	<ul style="list-style-type: none"> -Calcula eigenvectores de PTP.
VFC2	<ul style="list-style-type: none"> -Eigenvectores derechos e izquierdos de la descomposición. -Eigenvalores. -Factor de estabilización. 	<ul style="list-style-type: none"> -Solución. -Residuales lineales. -M. de Covariancias. -M. Resolución. -M. de Correlación. -Barras de error 	<ul style="list-style-type: none"> -Construcción de la solución.

DIAGRAMA DE FLUJO GENERAL

Como se trata de un problema no lineal, el programa sigue el patrón:

Modelo	<u>problema directo</u>	<u>Derivadas</u>
inicial	Resuelto con el	<u>Parciales</u>
	modelo en	Simultáneo
	turno.	con el problema
		directo.
		<u>Problema</u>
		<u>Inverso</u>
Nueva	<u>Criterio de</u>	Nueva,
iteración	<u>convergencia</u>	solución.

FIN

Figura 4

Diagrama de flujo
general.

El paquete de graficado tiene por objeto darle versatilidad al programa, permitiendo al operador observar los resultados de iteración en iteración.

El programa principal es capaz de resolver el problema directo, formar la matriz de derivadas parciales, invertir el sistema lineal, mostrar diagramas de rayos, además de graficar las estimaciones, residuales lineal y no-lineal, las matrices de resolución e información, así como la discretización triangular.

Este programa puede ser aplicado a datos de pozos, datos de transmisión de ondas y refracción o reflexión sísmica.

III.2 ESTRUCTURA DEL PROGRAMA

La estructura del programa y las interacciones de los diferentes subprogramas se muestran en el diagrama de flujo (Figuras (5 y 6)).

El programa se alimenta con el modelo inicial

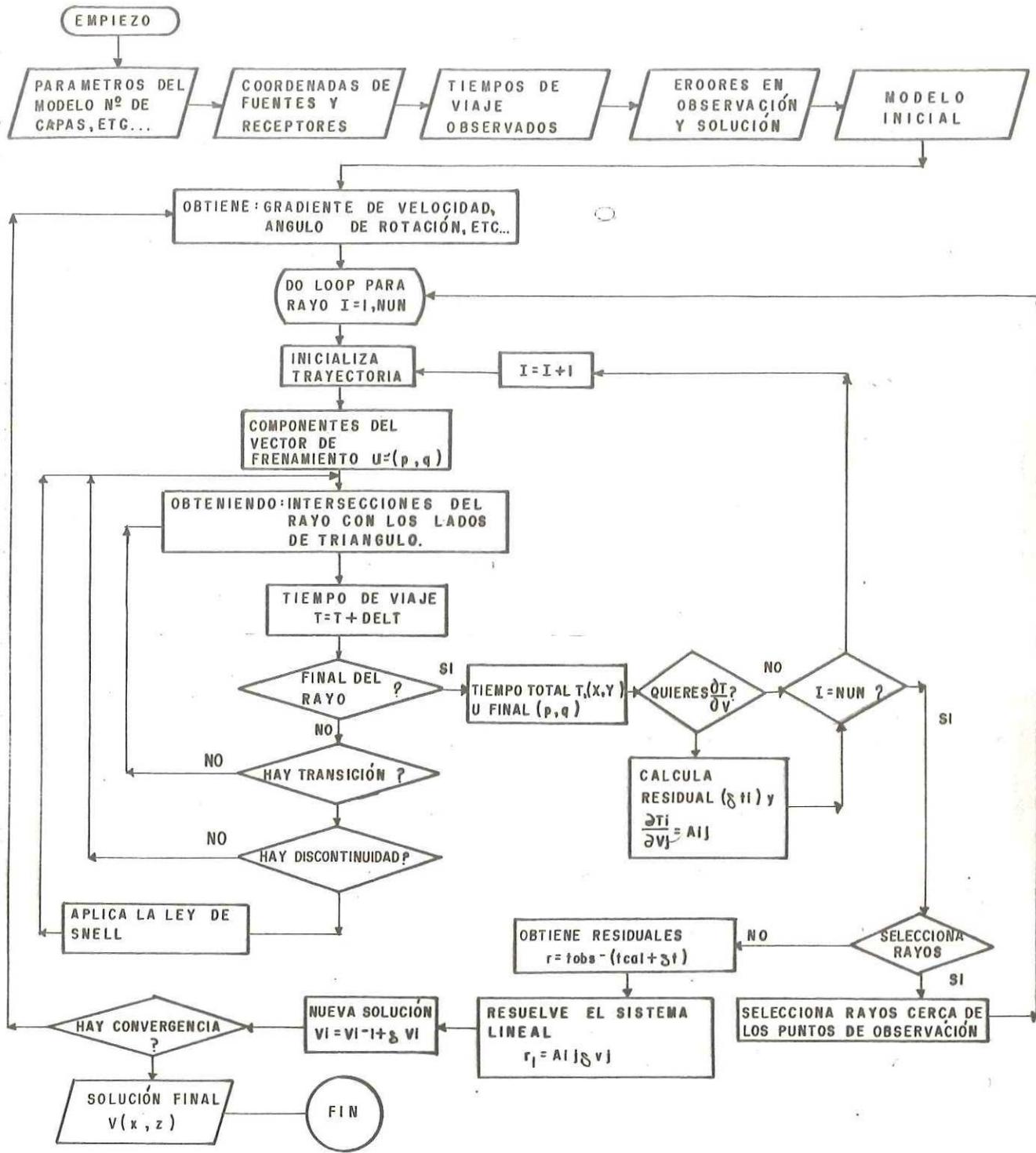


FIG.5. Diagrama de flujo del esquema de inversion no lineal.

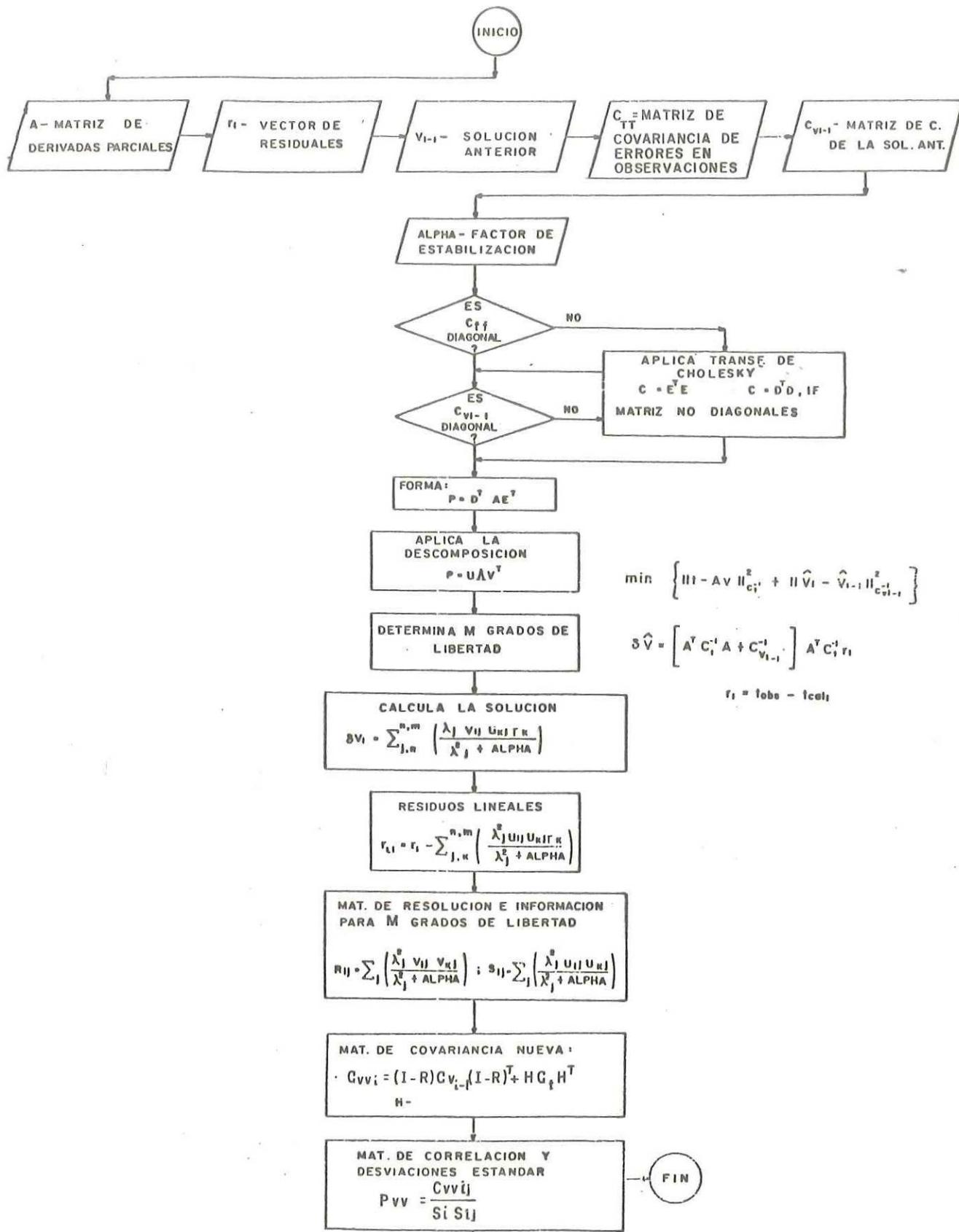


Fig. 6. Diagrama de flujo del problema inverso.

de velocidades, con los parámetros del modelo, número de fuentes y receptores, datos observados y una estimación de las matrices de covariancias de errores en las observaciones y de la matriz de covariancias de la solución inicial.

Se obtienen las trayectorias, los residuales y las derivadas parciales en el modelo en turno. Con esta información, se obtiene el nuevo modelo. Se aplica, entonces, un criterio de convergencia, que si se cumple, pondrá fin al proceso, de otro modo se continuará con la siguiente iteración (Figura 5).

La Figura (6) muestra el diagrama de flujo correspondiente al problema inverso. Los datos de entrada son, el vector de residuales iniciales, la matriz de derivadas parciales, la solución en turno, el factor de estabilización y las matrices de covariancia de los errores de observación y de la solución inicial.

La matriz de derivadas parciales se pesa con los errores en la observación, y con los errores de la estimación inicial (matriz P). Se forma entonces la matriz PTP se obtienen sus eigenvectores y eigenvalores para construir la primera solución (normalizada). Posteriormente, se calcula la resolución, la nueva matriz

de covariancias de errores en la estimación y la matriz de correlación, todo normalizado. Estos resultados se obtienen después en sus unidades originales.

IV EXPERIMENTOS NUMERICOS

Antes de procesar los datos de campo, es necesario investigar la eficiencia de la metodología descrita, para lo cual, se ha elaborado una serie de modelos cuyas características permiten explorar el comportamiento del método en diferentes condiciones.

IV.1 DATOS SINTETICOS

Se producen datos sintéticos trazando rayos en modelos lateralmente heterogéneos, con zonas de baja velocidad y se toman como datos "reales".

MODELOS USADOS EN LOS EXPERIMENTOS.

Se presentan los modelos usados para simular el "medio real" que produce "observaciones".

Son tres modelos con 16, 25 y 49 parámetros

(velocidades), los cuales se numeran por renglones, de izquierda a derecha.

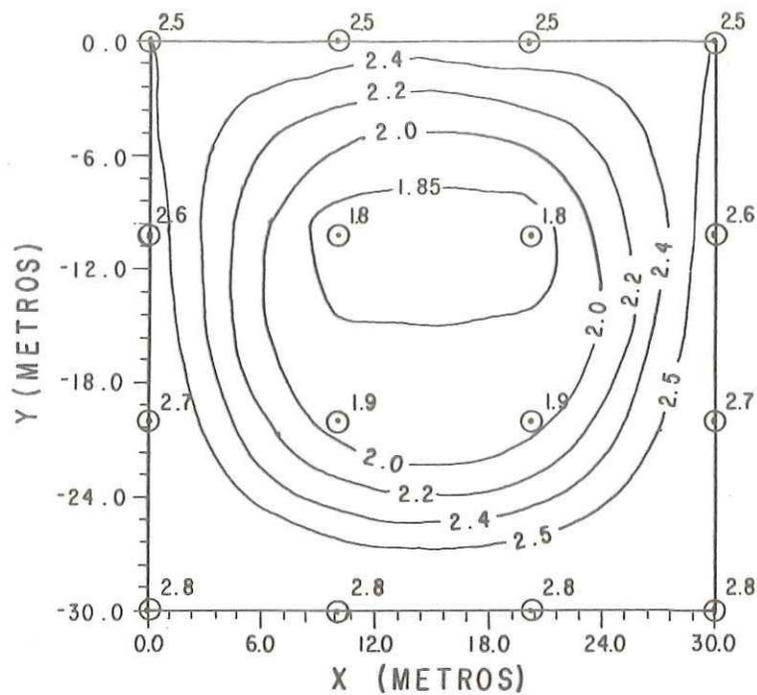
Los modelos "reales", que incluyen una zona de baja velocidad, se muestran en la figura (7), donde aparece también la discretización triangular y los valores de velocidad en los nodos.

El método de inversión se prueba utilizando como datos de entrada los tiempos de viaje sintéticos y se evalúa la convergencia a la solución sintética.

IV.2 EJEMPLOS

Se elaboran ocho experimentos ignorando el ruido, lo que implica que se supone mediciones perfectas. Se trata de analizar el método en los siguientes aspectos: (1) efectos de borde, (2) diferente cantidad de información, (3) diferentes modelos iniciales, (4) discretización diferente, (5) la presencia del ruido en las observaciones.

En la Tabla (4) puede verse una descripción de los experimentos, donde se puede ver el número de fuentes y



a) Modelo 1 - M1 - usado para producir datos sintéticos. 16 parámetros zona de baja velocidad.

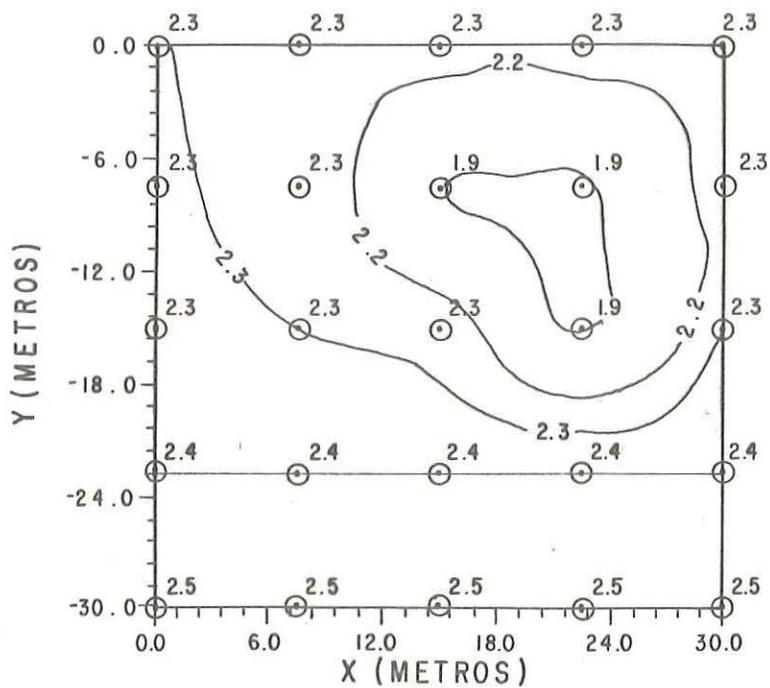


FIG. 7. b) Modelo 2 - M2 , 25 parámetros 2BV.

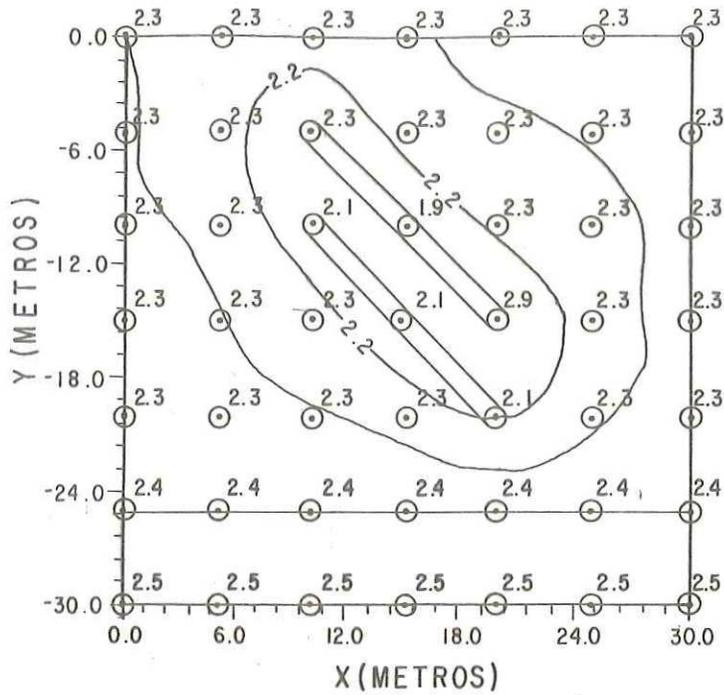


FIG. 7. c) Modelo 3-M3-, 49 parámetros ZBV.

TABLA 4. Cuadro sinóptico que describe los ejemplos numéricos.

Ejemplos	No. de fuentes en x	No. de fuentes en y	No. de receptores en x	No. de receptores en y	No. de Incógnitas	No. de datos	Modelo	Porcentaje de eigenvalores filtrados	Matriz de covariancia	Ruido
1	3	3	3	3	4	18	M1	25%	-	-
2	3	3	3	3	16	18	M1	90 %	-	-
3	6	6	6	6	16	72	M1	90 %	-	-
4	6	6	6	6	25	72	M2	90 %	-	-
5	6	6	6	6	25	72	M2	90 %	-	-
6	6	6	6	6	25	72	M2	90 %	-	-
7	6	6	6	6	49	72	M3	90 %	-	-
8	6	6	6	6	16	72	M2	90 %	-	-
9	6	6	6	6	49	72	M2	90 %	-	-
10	6	6	6	6	49	72	M3	90 %	poco error a s = .01 r	los márgenes x = 0.
11	6	6	6	6	49	72	M3	99 %	del modelo s = .05 r	x = 0.

(*) NOTA: Este porcentaje disminuye en cada iteración pues el factor de estabilización ALPHA cambia como $ALPHA (I) = SQRT (ALPHA (I-1))$ donde I es la iteración.

receptores, el número de incógnitas, el número de datos, el modelo, el factor de estabilización usado, la matriz de covariancias diagonal y el error aleatorio en los datos.

Las figuras que describen la historia de convergencia muestran los diagramas de rayos, gráficas de residuales en cada una de las direcciones horizontales, la discretización triangular y los valores de velocidad en la red nodal, Figuras (8 a 19). En la figura (8) se puede ver una figura típica amplificada.

En los dos últimos ejemplos se contamina el vector de datos sintéticos con ruido gaussiano con promedio cero y desviación estándar

$$\sigma = x \bar{r}$$

donde \bar{r} es el valor promedio del ruido.

Se construyen dos vectores de observaciones, el primero con $x=0.01$ y el segundo con $x=0.05$. A continuación se presenta una discusión de los resultados de éstos experimentos.

ITERACION NO. 2

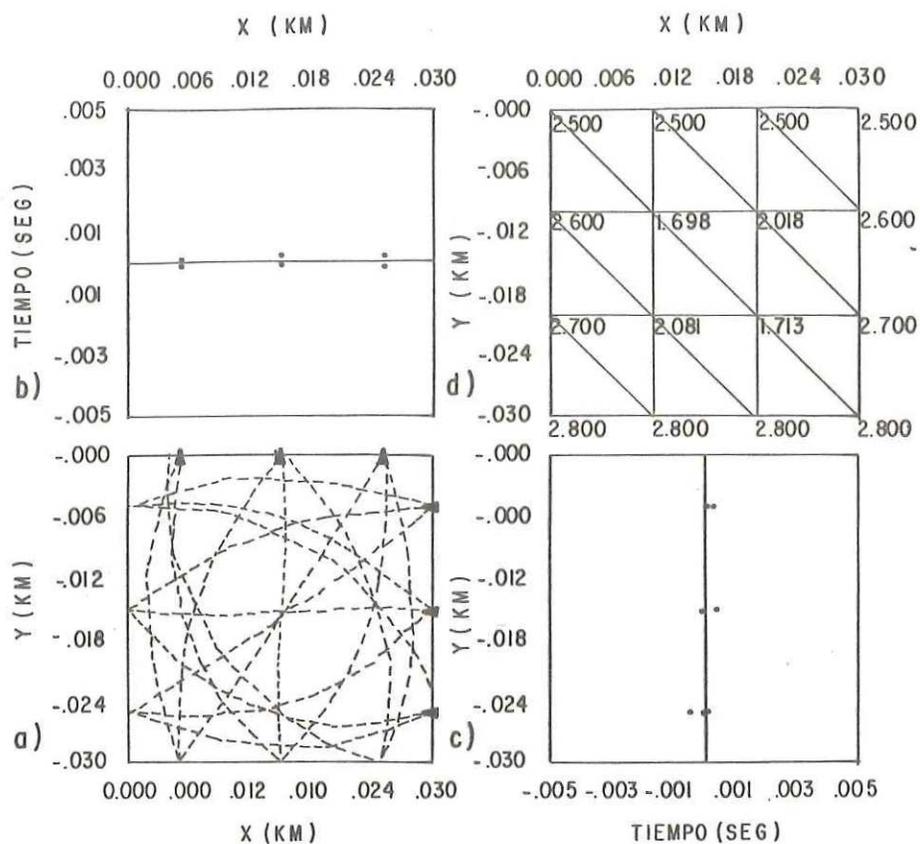


FIG. 8. FIGURA TIPICA .

a).- Diagrama de rayos.

b).- Residuales de tiempo de viaje para los receptores sobre $(x, y=0)$.

c).- Residuales de tiempo de viaje para los receptores sobre $(x=30, y)$

d).- Velocidades estimadas en los nodos de la red triangular.

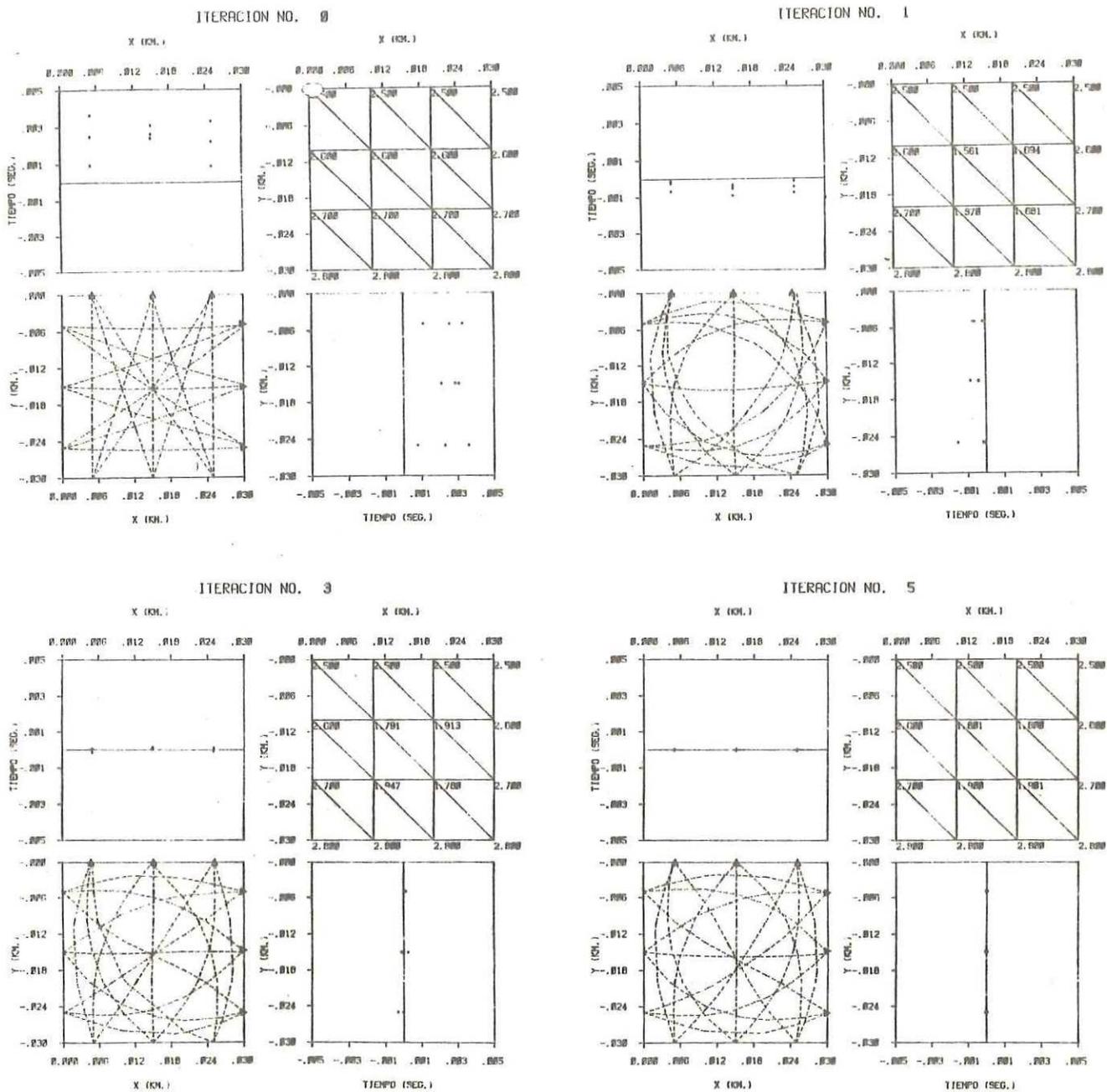
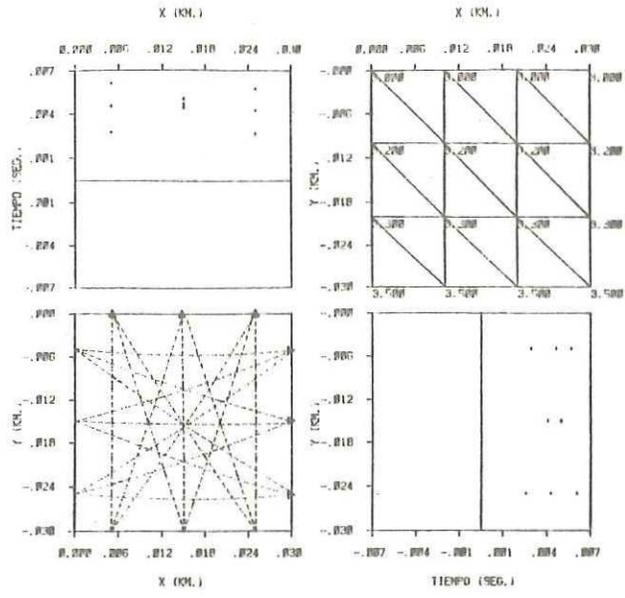
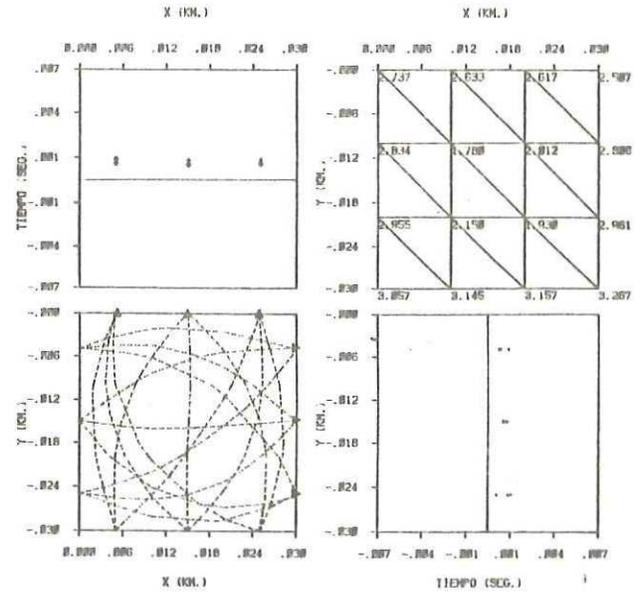


Fig. 9. El ejemplo 1 consta de 18 datos y 4 incógnitas a estimar (centro del modelo). Tres iteraciones son suficientes para obtener una buena solución.

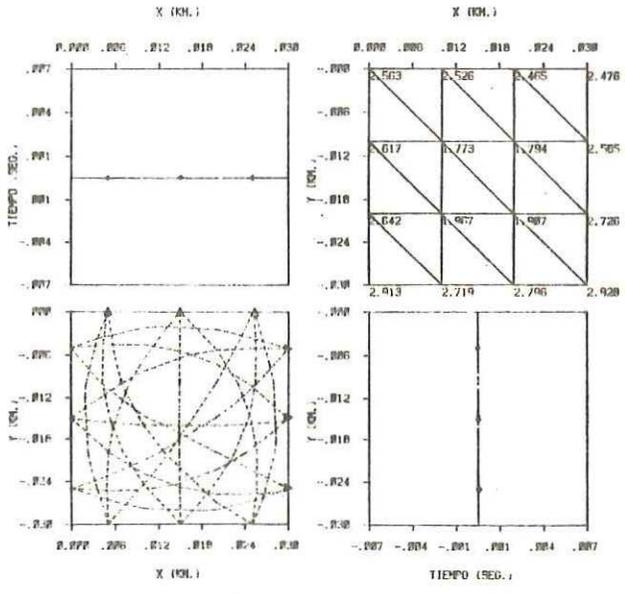
ITERACION NO. 0



ITERACION NO. 1



ITERACION NO. 3



ITERACION NO. 7

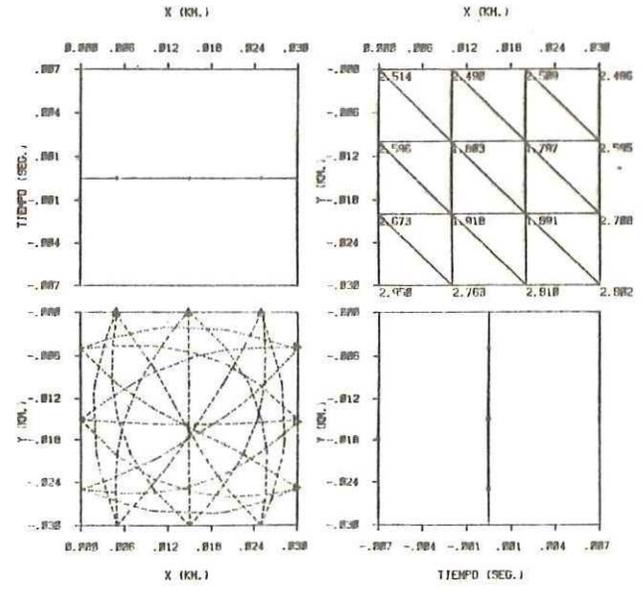


Fig. 10. Ahora se estiman los 16 parámetros de velocidad.

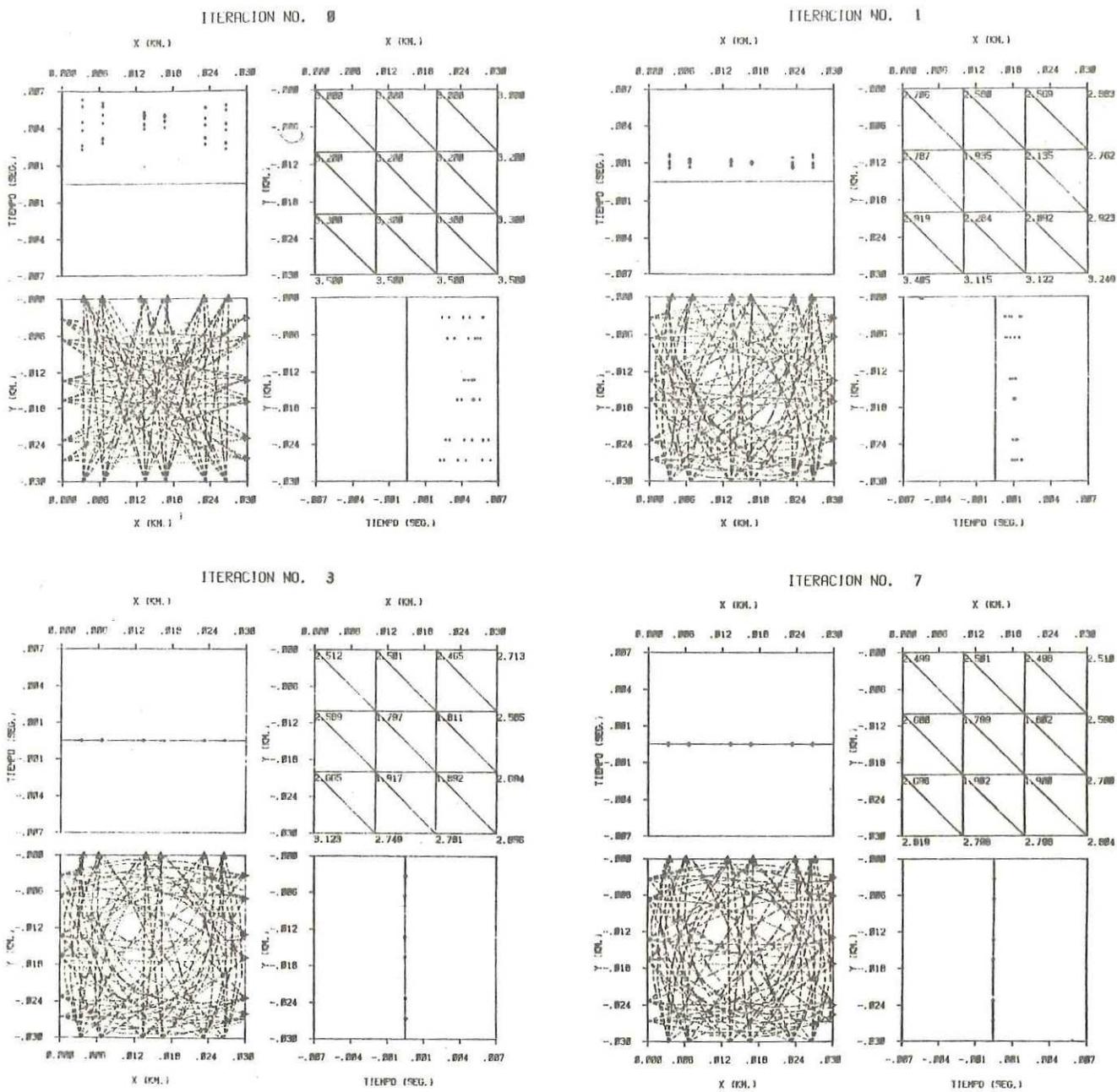


Fig. II. Ejemplo 3, se estiman 16 parámetros con 72 datos.

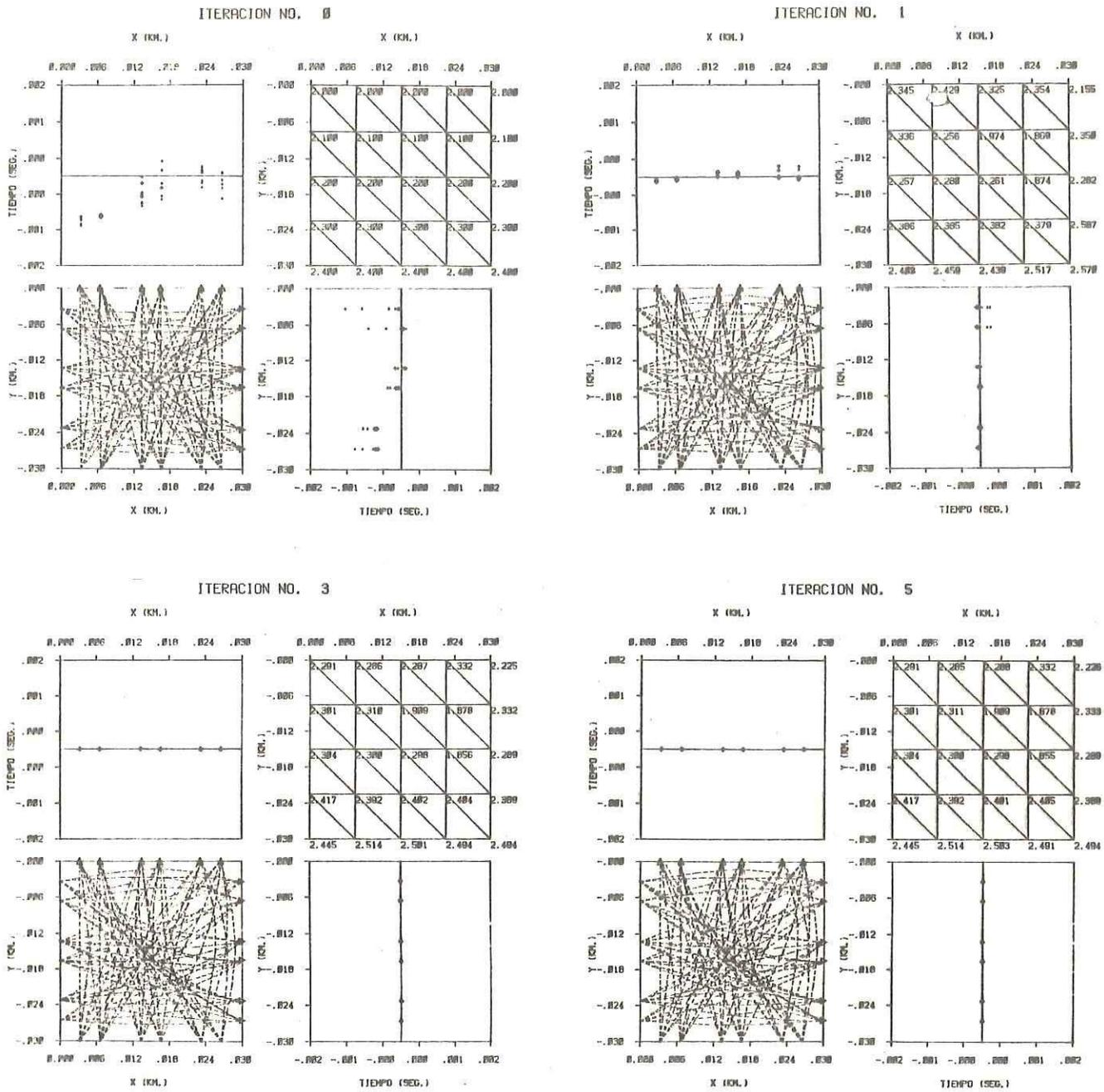


Fig.12. Ejemplo 4, se estiman 25 parametros con 72 datos.

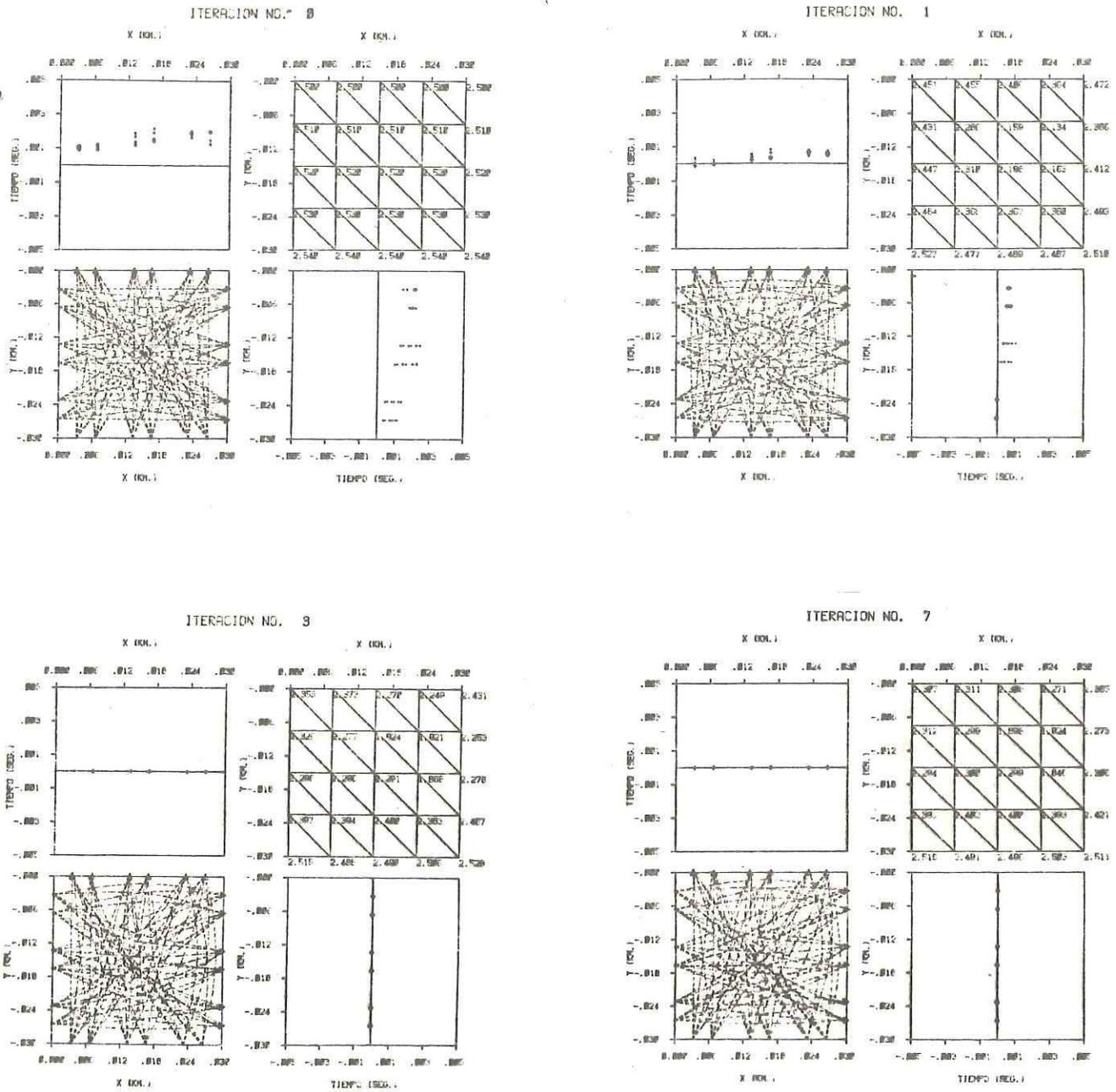
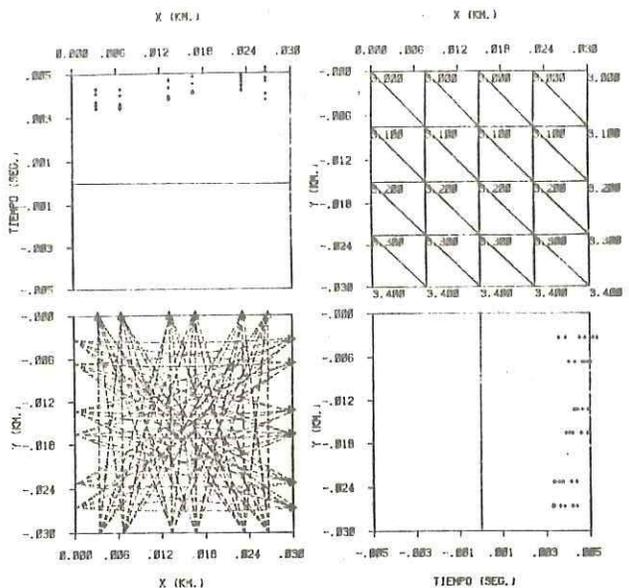
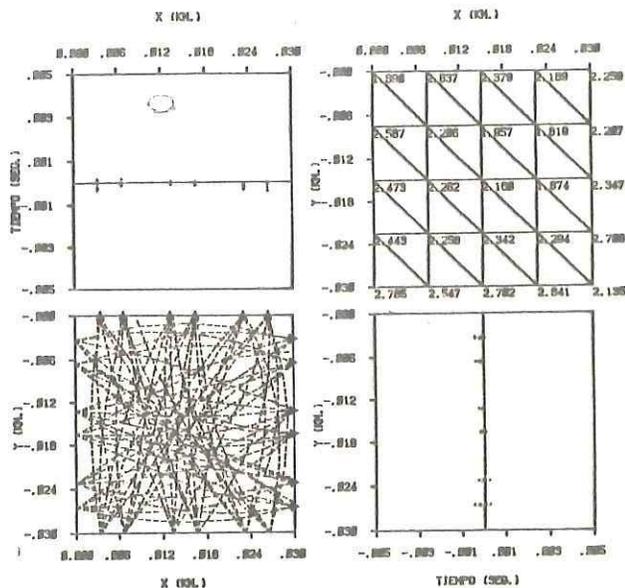


Fig. 13. Ejemplo 5, igual que 4 pero con un modelo inicial diferente.

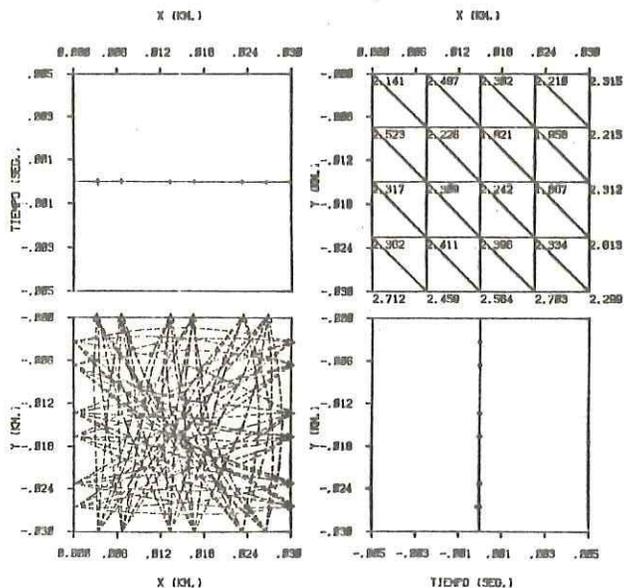
ITERACION NO. 0



ITERACION NO. 2



ITERACION NO. 3



ITERACION NO. 7

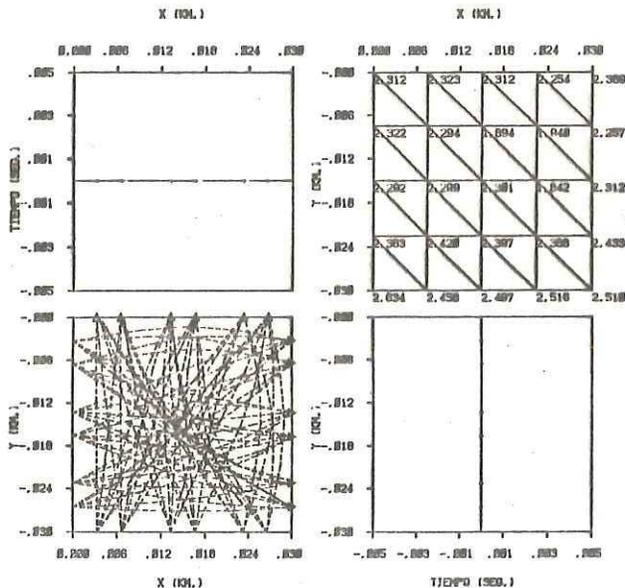


Fig. 14. Ejemplo 6, igual que el 4 pero con modelo inicial diferente.

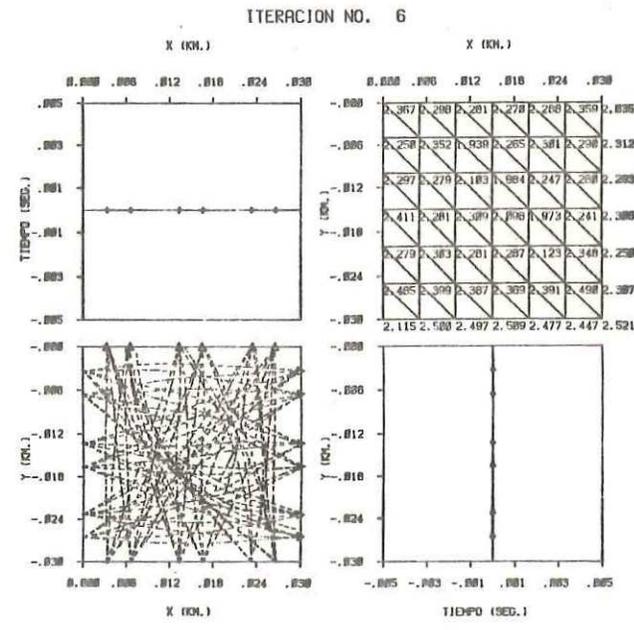
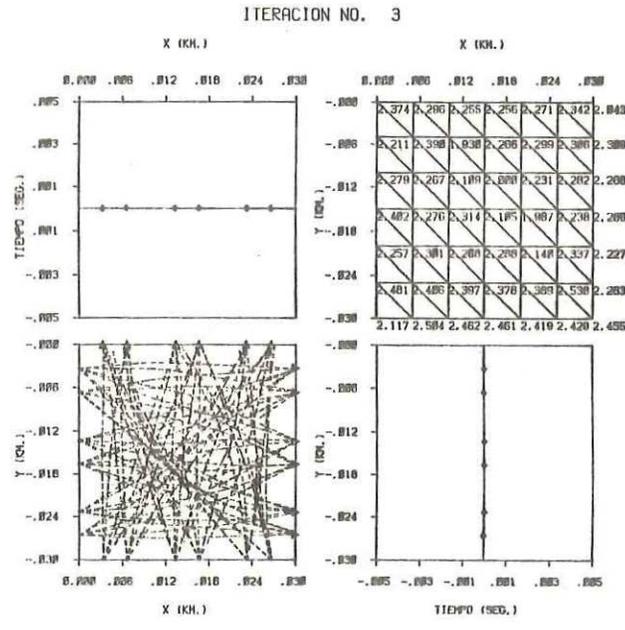
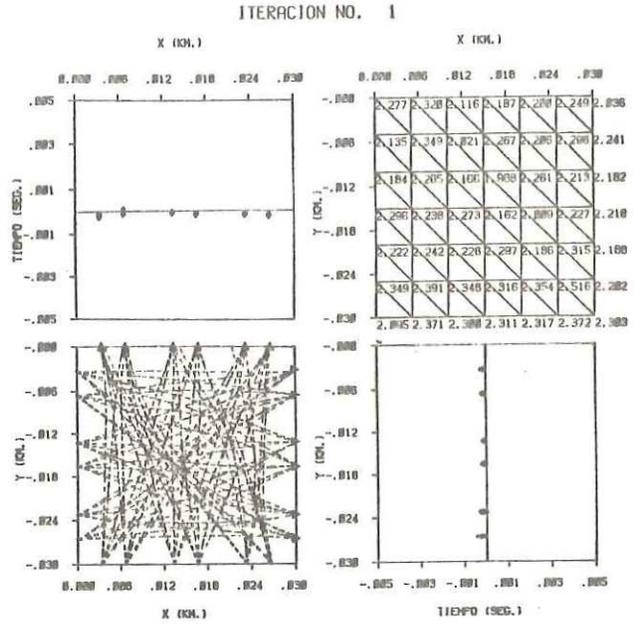
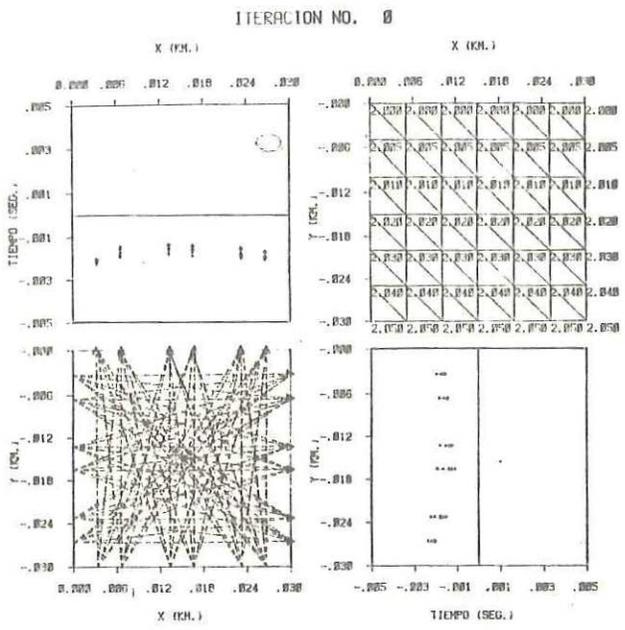


Fig. 15. Ejemplo 7, se estiman 49 incógnitas con 72 datos.

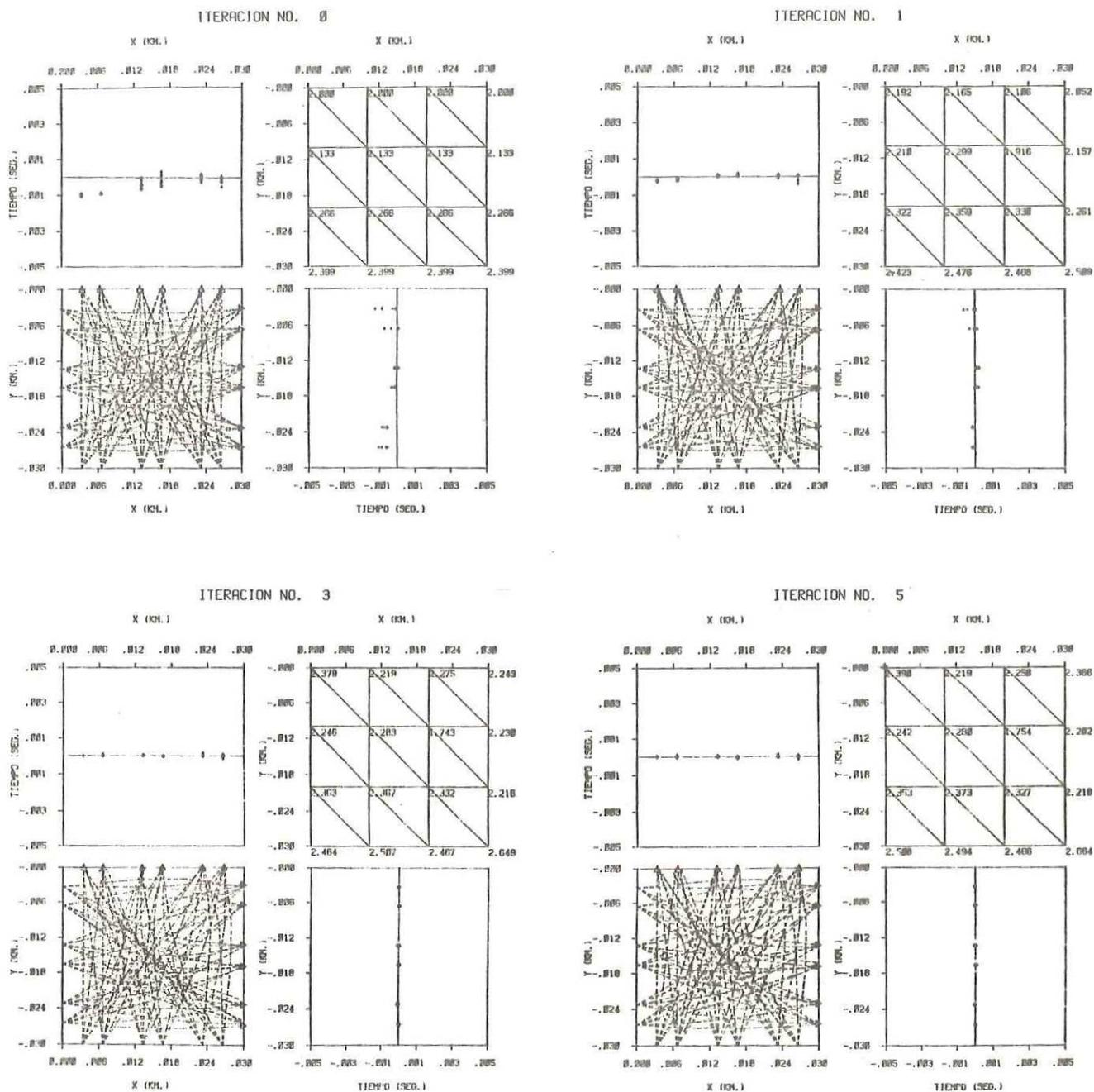


Fig. 16. Ejemplo 8, se usa la información del ejemplo 4, pero se discretiza con menos puntos de los necesarios (25).

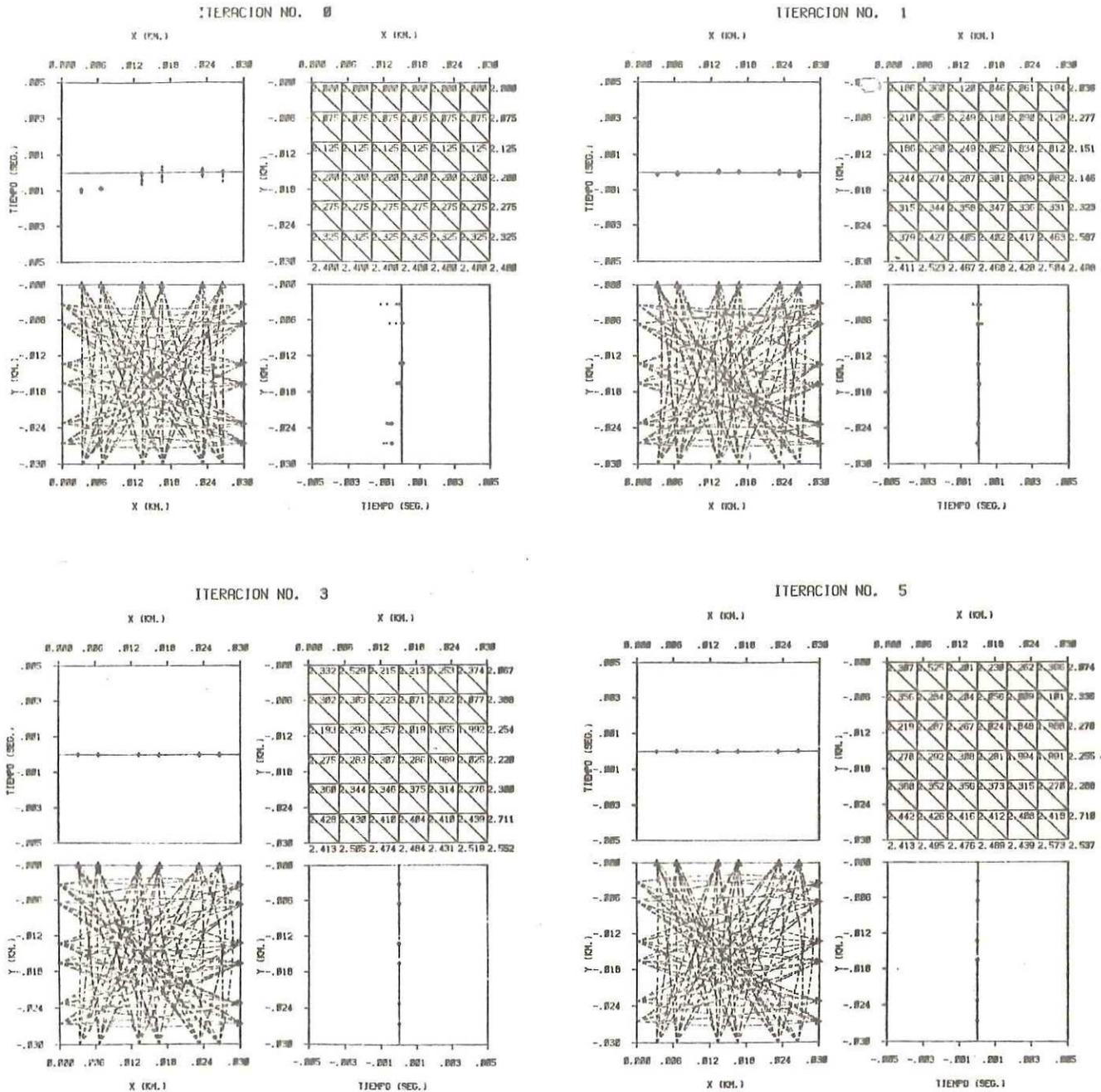


Fig. 17 Ejemplo 9, se usa la información del ejemplo 4, pero se discretiza con más puntos de los necesarios (49).

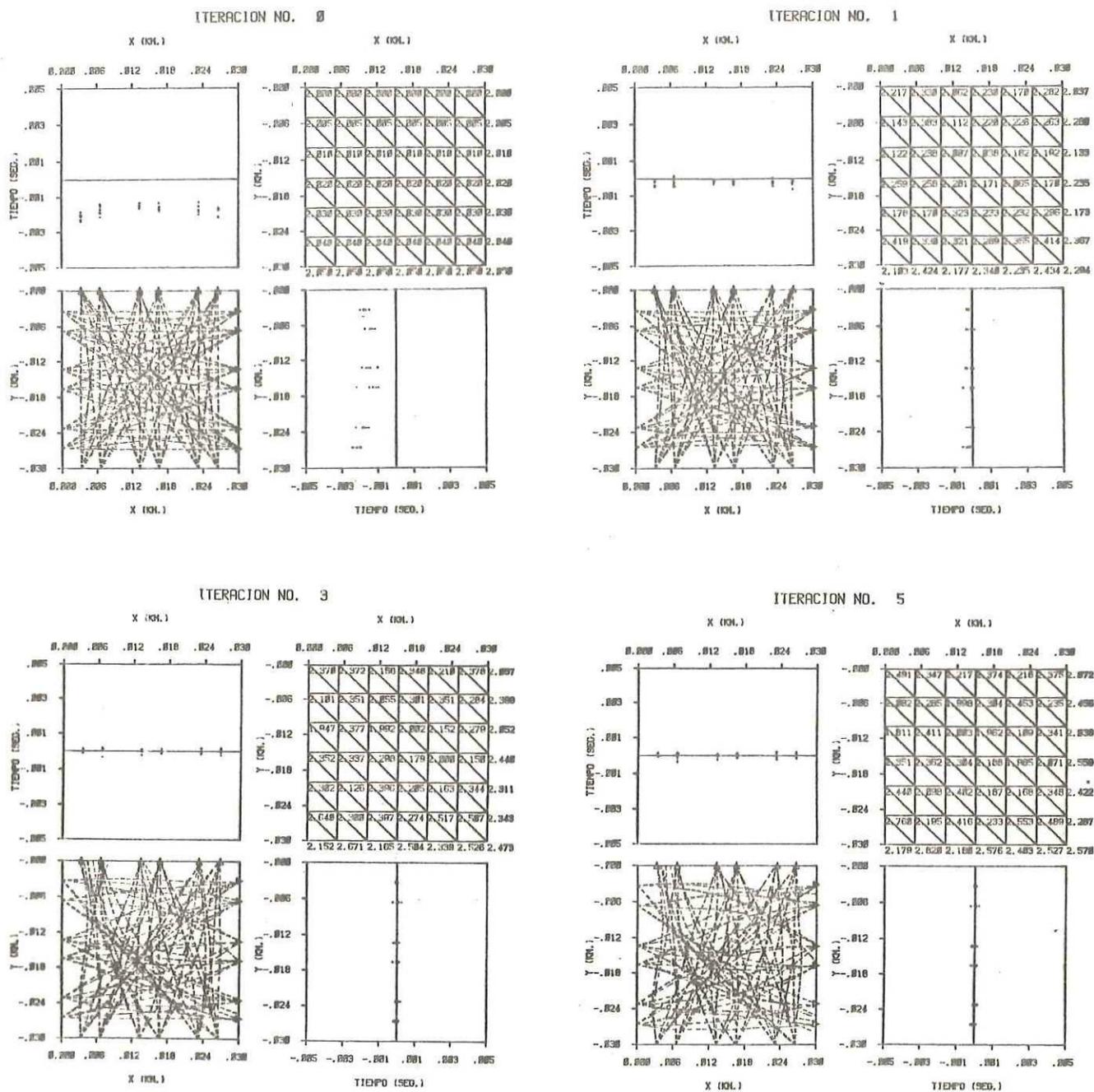


Fig. 18. Ejemplo 10, se estiman 49 parámetros, con la información del ejemplo 7 contaminado con ruido gaussiano.

IV.3 DISCUSION

Hay que analizar ahora los resultados de los experimentos numéricos, discutiendo aquellos temas en base a los cuales se prueba el método.

La Tabla (5) muestra los ejemplos que es necesario comparar para estudiar cada tema. En la sección (1) efectos de borde, es analizado el comportamiento del método al estimar incógnitas sobre los bordes del modelo. Las "observaciones" son generadas con el modelo M1. Puede verse que estimando incógnitas del centro del modelo la solución es exacta. Sin embargo, al incluir en la estimación los parámetros sobre los márgenes del modelo, éstos no se resuelven bien (ejemplos 1 y 2). Esto es debido a que los parámetros sobre los márgenes son "vistos" por un número menor de rayos, por lo tanto su resolución es menor. Esto afecta también a los parámetros del centro, por correlaciones entre los parámetros. Sin embargo la estimación en el ejemplo (2) es aceptable.

Los puntos sobre los márgenes que tienen menor resolución se encuentran en la esquina superior derecha y en la esquina inferior izquierda, pues están aislados de los demás. Le siguen los puntos en la esquina superior

TABLA 5. Comparación entre ejemplos.

TEMAS	COMPARACION DE EJEMPLOS
(1) efectos de borde.	1 y 2
(2) diferente cantidad de información.	2 y 3
(3) distintos modelos iniciales.	4, 5 y 6
(4) discretización del modelo.	4, 8 y 9
(5) presencia del ruido en las observaciones.	7 y 10

izquierda -y la esquina inferior derecha, pues éstos comparten dos triángulos solamente los puntos restantes sobre las márgenes comparten 3 triángulos y se resuelven todavía mejor. Por último los puntos en el centro, comparten 6 triángulos y se resuelven óptimamente, un sólo rayo puede "ver" varias veces la misma incógnita.

(B) En los ejemplos (2 y 3) se estudia el efecto de incluir mas datos en la inversión. Los datos sintéticos son generados con el modelo M1.

En los ejemplos (2 y 3) en que se incluyen 18 y 72 datos respectivamente, la estimación de estructura es mejor si incluimos más información. La solución en el ejemplo (3) es exacta a la cuarta iteración.

Entre más información se usa mejor es la estimación. Es cierto que no toda la información es buena, es decir, no toda representa información independiente.

(C) En los ejemplos (4, 5 y 6) se ha tomado el mismo modelo M2 para generar la información. El modelo inicial es diferente en estos ejemplos. En el ejemplo (4) los residuales son negativos y muy pequeños. Los ejemplos (5 y 6) tienen modelos iniciales que arrojan residuales positivos y de mayor magnitud. Para el modelo inicial más alejado del real, son necesarias más de 3 iteraciones para

obtener la solución exacta. En general, si el modelo inicial se encuentra muy alejado del real, serán necesarias más iteraciones para lograr una solución casi exacta.

(D) Se quiere saber también, qué sucede cuando un medio se discretiza con muy poco detalle y por el contrario cuando se discretiza redundantemente.

La información utilizada en estos ejemplos se obtiene con el modelo M2. Es posible hacer una buena estimación de la estructura de velocidades del modelo M2 si utilizamos el número apropiado de incógnitas. El ejemplo (4) muestra como una discretización adecuada (con 25 incógnitas) permite recuperar exactamente la estructura de velocidades.

Cuando se discretiza con una red nodal con un paso grande, se pierde el detalle fino de la estructura. EL ejemplo (8) muestra un ejemplo de ésta situación pues se ha discretizado con 16 parámetros de velocidad. La estimación no es satisfactoria pues la estructura que se recupera tiene solamente las características globales, se ha perdido el detalle.

El ejemplo (9) muestra una discretización redundante. La estimación de la estructura de velocidades muestra la zona de baja velocidad, pero con ciertos

detalles que son producto de la inestabilidad inducida por la redundancia en incógnitas. El factor de estabilización utilizado filtra el 90 % de los eigenvalores.

(E) Los ejemplos (7, y 10) muestran el efecto del error en las observaciones. El modelo usado para producir los datos sintéticos es el M3.

En el ejemplo (7) los datos no tienen ruido, por lo tanto la solución es bastante buena. En el ejemplo (10) los datos se ha contaminado con ruido gaussiano con promedio cero y desviación estandar σ_1 (ver Tabla (4)) Entonces el problema se vuelve inestable, es necesario buscar un factor de estabilización del orden de los primeros eigenvalores. Aparecen zonas de baja velocidad inexistentes. La solución tiene errores que son el resultado de la propagación de errores de observación. No podemos hablar de una solución única sino de una región donde la solución es válida.

Si se contaminan los datos con ruido gaussiano con promedio cero y desviación estándar σ_2 , el problema se hace muy inestable, para hacer una estimación buena es necesario hacer un diseño bien estudiado de la matriz de covariancias de la solución inicial.

IV.4 CONCLUSIONES

(A) Los puntos sobre las márgenes del modelo tienen menor resolución porque son muestradas pobremente por los rayos. La manera de hacer que los parámetros mal resueltos afecten lo menos posible a otros elementos de la solución, es diseñar una matriz de covariancias que rompa las correlaciones existentes.

En la Tabla 5. puede verse como al incluir en la estimación los parámetros de los márgenes del modelo, se hace necesario filtrar más del 90 % de los eigenvalores en la primera iteración. Así la nueva solución se acercará a la solución final sin oscilar fuertemente. En la siguiente iteración puede cambiarse el factor de estabilización de modo que se incluyan cada vez más eigenvalores en la solución.

(B) Incluir más información en la estimación es en principio benéfico, sin embargo mucha información dependiente puede causar problemas de estabilidad.

Además, podría suceder que recabar mucha información fuera incosteable, en tal caso, los experimentos en la vida real deben diseñarse de tal forma que se recabe únicamente

información independiente.

(C) El escoger un modelo inicial adecuado es muy importante. Para ésto puede hacerse un análisis de residuales previo a la inversión, estudiando el comportamiento de éstos, hasta conseguir que el modelo produzca residuales distribuidos al azar al rededor del nivel nulo. Esto garantiza una convergencia más rápida.

(D) Si se discretiza un modelo con menos puntos de los necesarios la resolución será deficiente. Si por el contrario se discretiza con más puntos de los necesarios el problema se hará inestable (por redundancia en las incógnitas), apareciendo heterogeneidades inexistentes.

(E) La presencia de ruido en las observaciones hace inestable el problema. Si el nivel de ruido es muy alto el problema es terriblemente inestable y se hará necesario incluir sólo unos cuantos eigenvalores (menos del 10%) los demás filtrarlos continuamente, con un filtro de alta frecuencia (ecuación (36)).

Para garantizar una buena inversión de datos, es necesario planear los experimentos en la vida real, de modo que se tenga conocimiento de las frecuencias y longitudes de las ondas en el medio. Esto nos da una idea clara de la longitud característica de las heterogeneidades laterales

reconocibles. Con estos datos se hará una discretización adecuada del medio que no sea redundante ni deficiente.

V APLICACION A DATOS-REALES

V.1 EXPERIMENTO TIPICO

Los experimentos fueron diseñados por investigadores de la C.F.E., de acuerdo con el método propuesto por Neumann (1981).

La configuración fuente a receptor se muestra en la Figura (19). Las explosiones (graficadas con asterisco) son detonadas secuencialmente sobre el eje ($x=0, y$) y registradas en un cordón de receptores (graficados con triángulos) en ($x=30, y$). La secuencia de explosiones se repite sobre el eje ($x, y=0$ mts.) con una línea de detectores en ($x, y=30$ mts.).

Cada explosión es registrada en cada receptor de modo que se obtiene un muestreo denso del medio. Se registra la componente vertical en geófonos del tipo Mark, guardando la señal en analógico.

La Figura (20) muestra un ejemplo de los registros obtenidos.

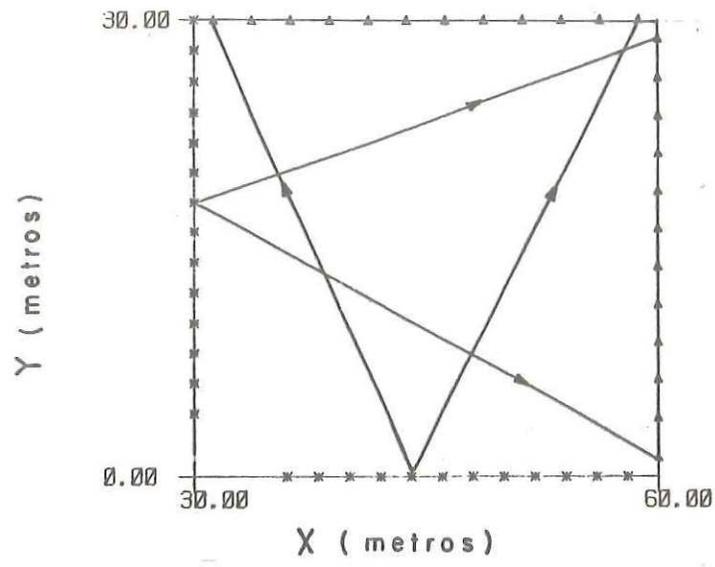
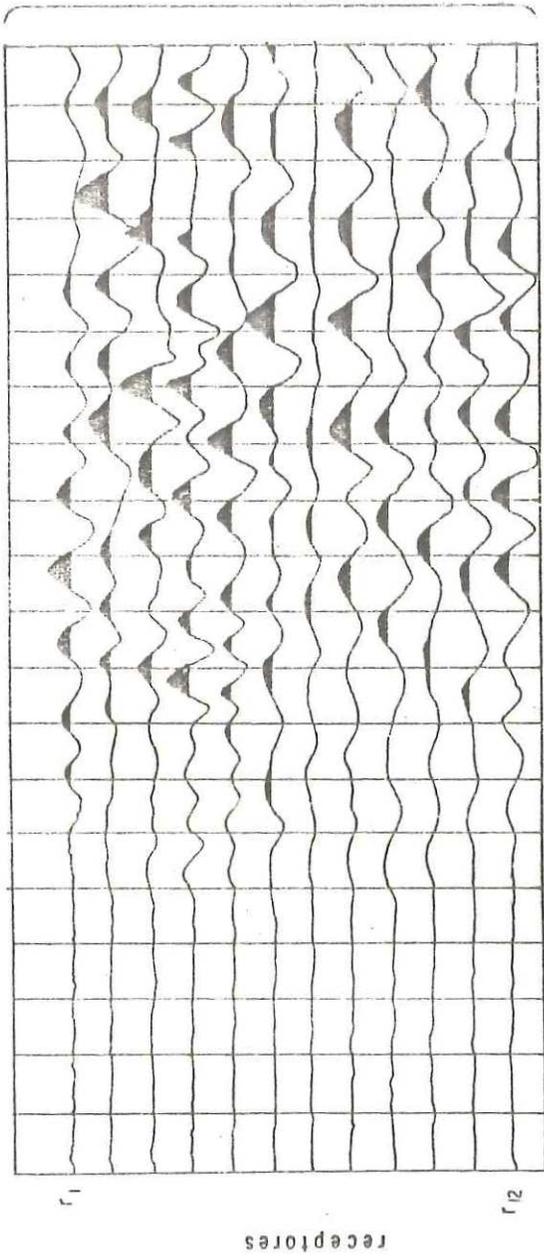


Fig. 19. Configuración fuente — receptor

a) Fuente No.6



b) Fuente No.7

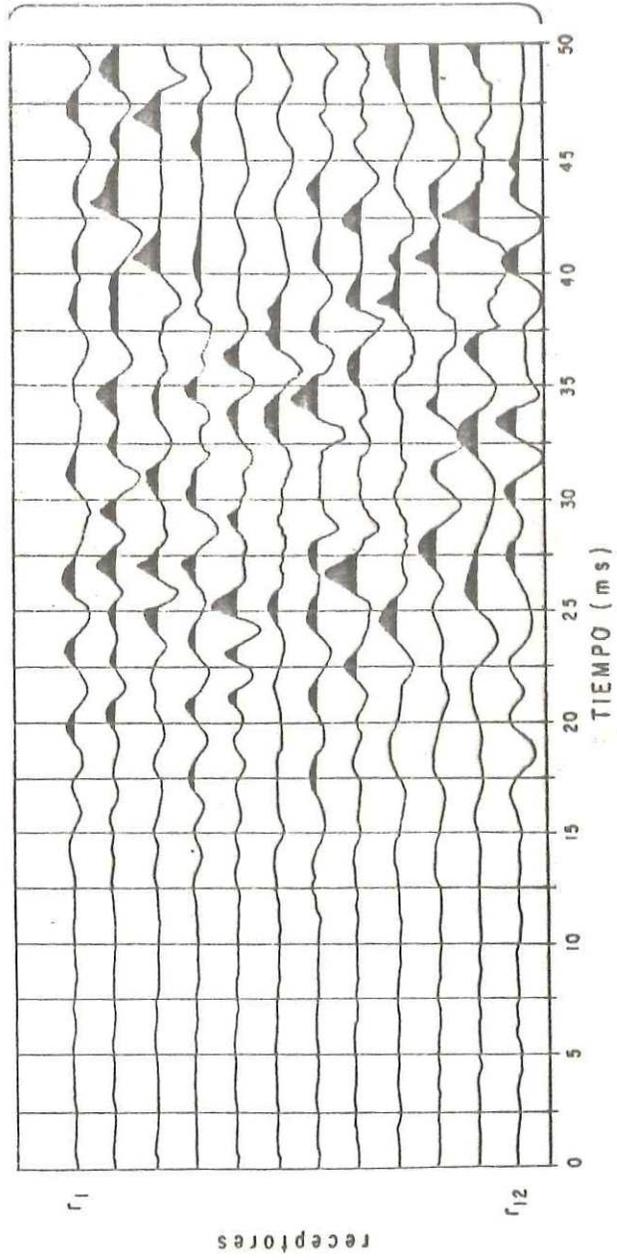


FIG.20. Sismogramas típicos.
Sección C.M.1.
Fuente No.6 y 7.
Tendido Horizontal.

○

PROPAGACION DE LAS ONDAS EN EL MEDIO REAL

Se trabaja con los primeros arribos, los cuales pueden ser rayos que se van por la superficie, o bien, rayos que viajan por el interior de las capas litológicas. Si el medio fuera homogéneo el primer arribo sería el rayo superficial. Pero si el medio es heterogéneo verticalmente, el primer arribo puede ser un rayo que hace fondo. La profundidad de penetración del rayo que hace fondo, depende de la distancia de la fuente al receptor y de la distribución espacial de velocidades.

Las trayectorias teóricas calculan la proyección del rayo sobre la superficie (en el plano (x,y)), y las anomalías en tiempo de viaje se deben a heterogeneidades distribuidas en el medio.

El rayo viaja en el medio tri-dimensional y nosotros vemos su proyección sobre el plano (x, y) , como se ilustra en la Figura (21).

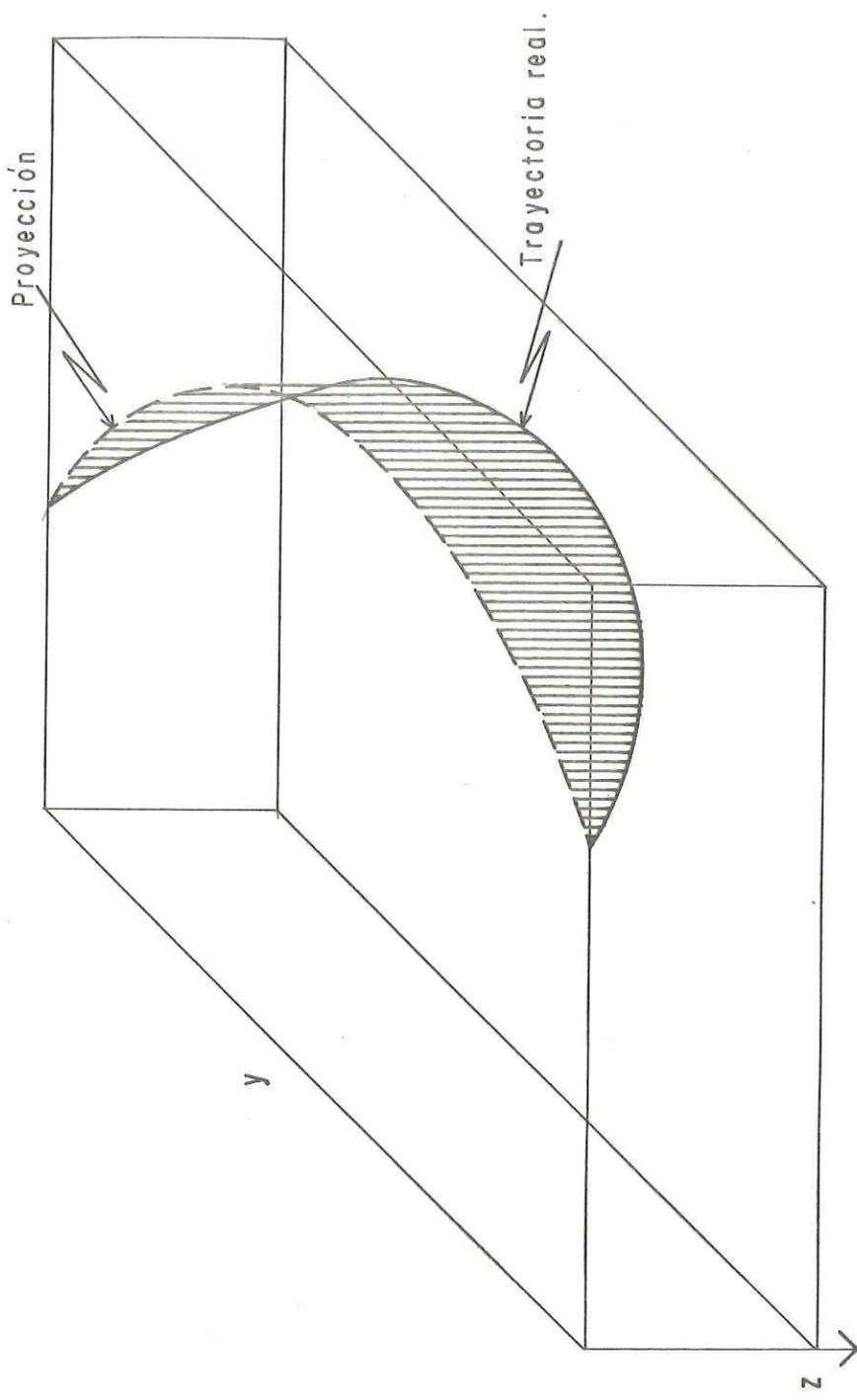


FIG.21. Proyección del rayo sobre la superficie.

V.2-ANTECEDENTES GEOLOGICOS

La península de Yucatán es una planicie formada por sedimentos marinos del Terciario, constituida por calizas, dolomitas y otras rocas calcáreo-arcillosas. Pertenece geológicamente a América del Norte, formando la Llanura costera del Atlántico Norte junto con la planicie costera del golfo de México.

Su formación data del Cenozoico Superior y fue originada por levantamientos epirogénicos sucesivos (Buterlin, 1958). Hubo hundimientos y levantamientos en el Mioceno Inferior, Mioceno Superior y Plioceno, en la época actual probablemente hubo una emersión.

Las calizas son granulosas, blanquecinas y deleznales, llamadas "SAS'KAB". Existen afloramientos que contienen un promedio de 93 % de carbonato de calcio y 1 % de carbonato de magnesio.

Las cavernas en las calizas se forman por disolución. El agua de la lluvia se filtra por las fracturas y disuelve el carbonato de calcio (Figura(21)). Estos huecos dan lugar al fracturamiento, y en algunos casos al derrumbe de la bóveda cárstica.

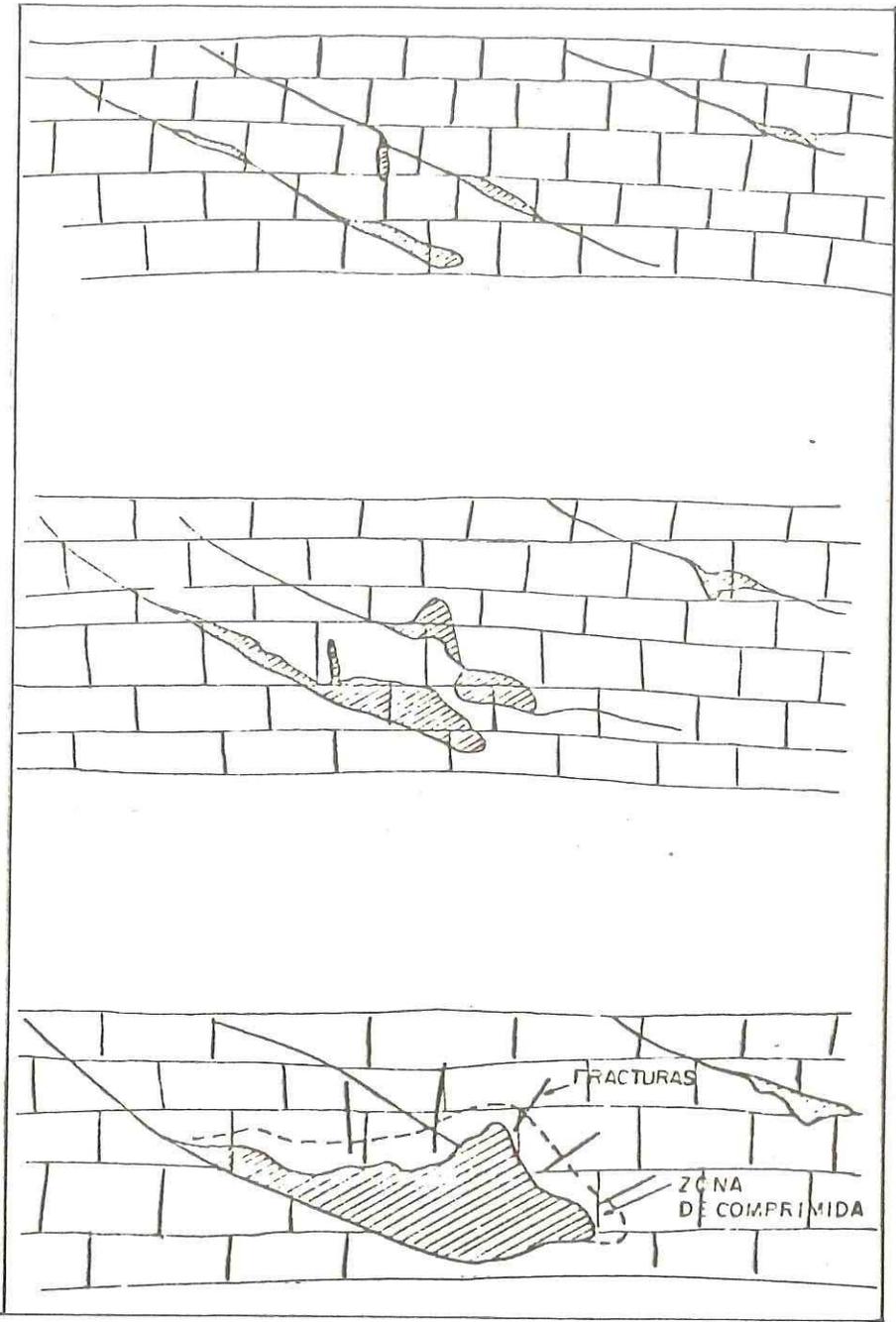


Fig. 22. Formación de cavernas en calizas por disolución.

Se pretende detectar estas cavidades en el área de la planta termoeléctrica Mérida II, para prevenir daños a las estructuras. Es necesario considerar que las anomalías en velocidad pueden deberse no solo a la presencia de cavernas en la caliza, sino también a mineralización, arcillosidad y a lentes de arena. Así, las anomalías detectadas pueden comprobarse por medio de otros métodos geofísicos o usando barrenos.

V.3 ANALISIS DE DATOS

Es conveniente hacer un análisis del contenido de frecuencias en las señales registradas y así tener conocimiento de las longitudes de onda predominantes.

La Figura (23 a) muestra un ejemplo de los registros digitalizados (hasta donde fue posible). En la gráfica (23 b) se ven las trazas suavizadas con un spline sobrepuesta a las digitalizadas, indicando con una flecha el tiempo del primer arribo.

En los registros que muestran más de un ciclo, se midió directamente de la gráfica un período central

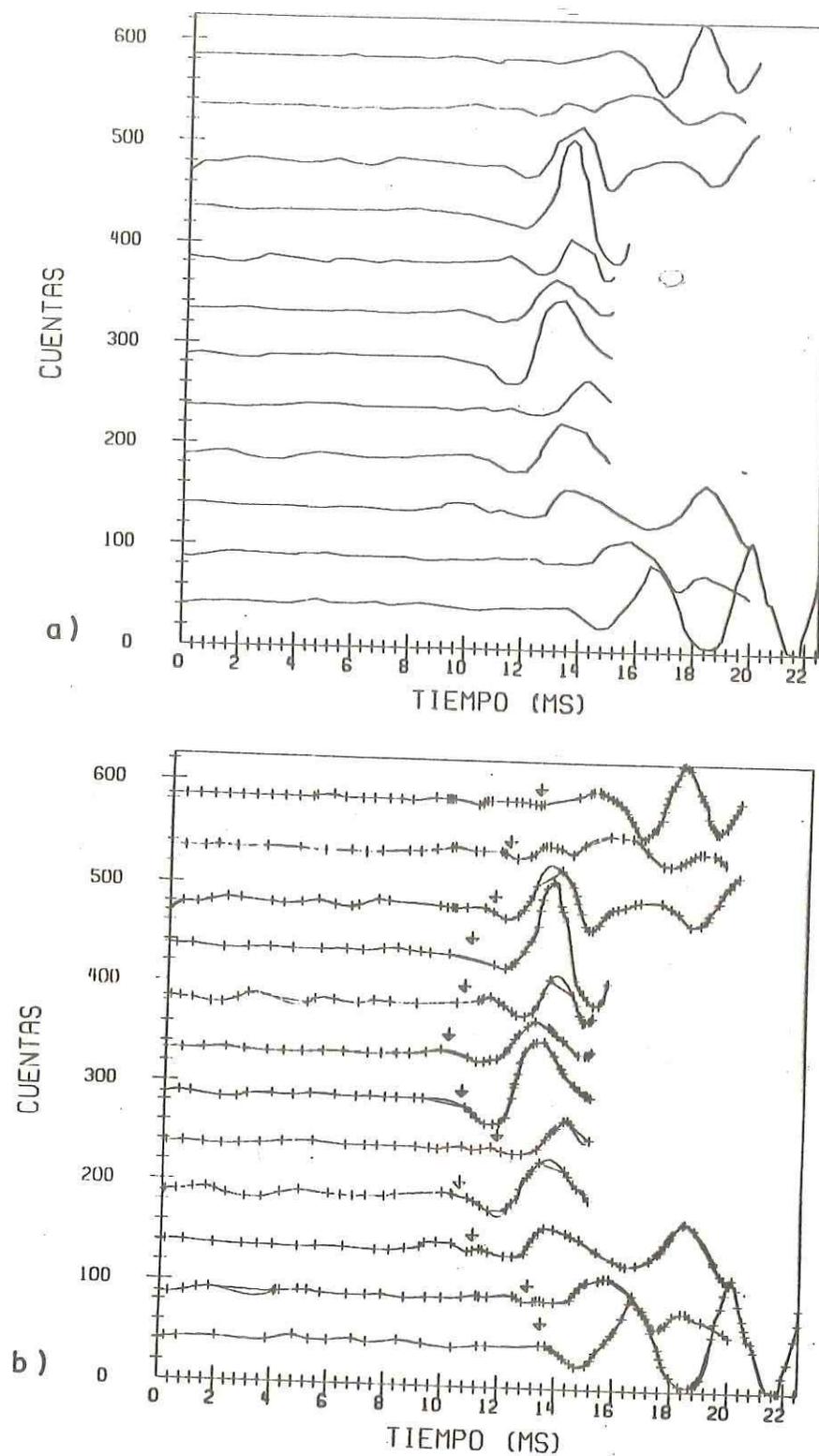


Fig. 23. Se muestran las señales.
a) discretizada
b) discretizada y suavizada.

$T=2.7 \pm .2$ ms. y se determinó la longitud de onda predominante de la relación $\lambda=vT$. El valor de $\lambda=6.75 \pm 0.5$ m. se obtuvo considerando una velocidad promedio $v=2500$ m/seg.

Por otro lado el espectro de amplitud de la señal (Figura(24)) presenta un pico entre las frecuencias $f_1=400$ htz y $f_2=500$ htz que corresponden a un período central $T=2.25 \pm .25$ ms. Nuevamente de la fórmula $\lambda=vT$ se encuentra una longitud de onda predominante $\lambda=5.625 \pm 0.625$ m.

En el capítulo IV.3 se dieron argumentos acerca de la importancia de contar con esta información antes de la inversión. La longitud característica de los bloques en la discretización, debe ser del orden de la longitud de onda ($\lambda \sim 6$ m.) La longitud característica de las heterogeneidades reconocibles (L c.h.r) tendrá que ser mayor que λ .

Con este criterio, se evita la discretización deficiente o redundante, que trae consigo mala resolución o inestabilidad, respectivamente.

ANALISIS DE RESIDUALES

Se discute también acerca de la importancia de hacer un análisis de residuales previo a la inversión. Se prueba

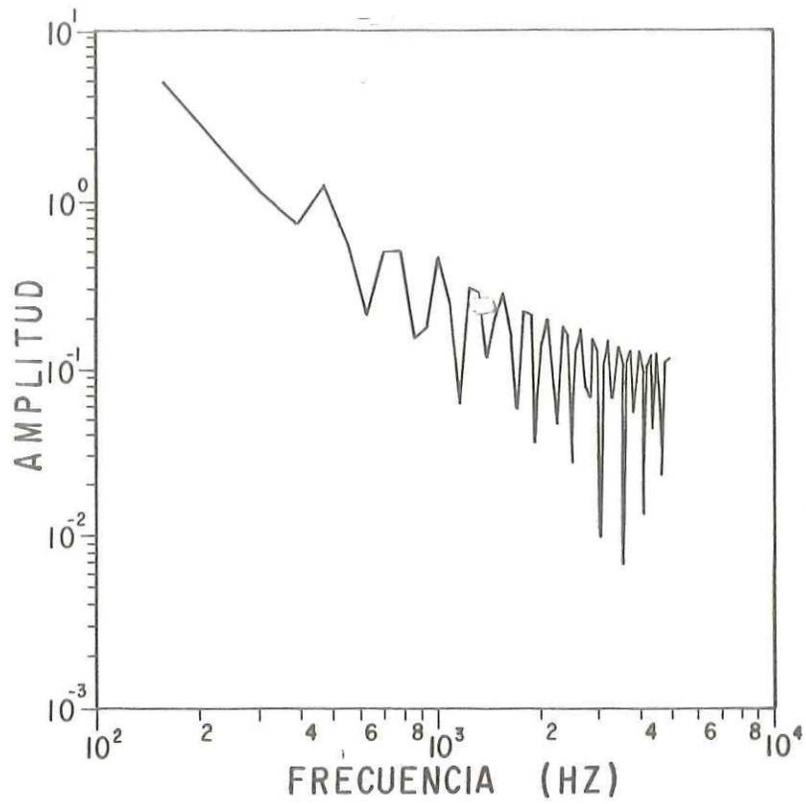
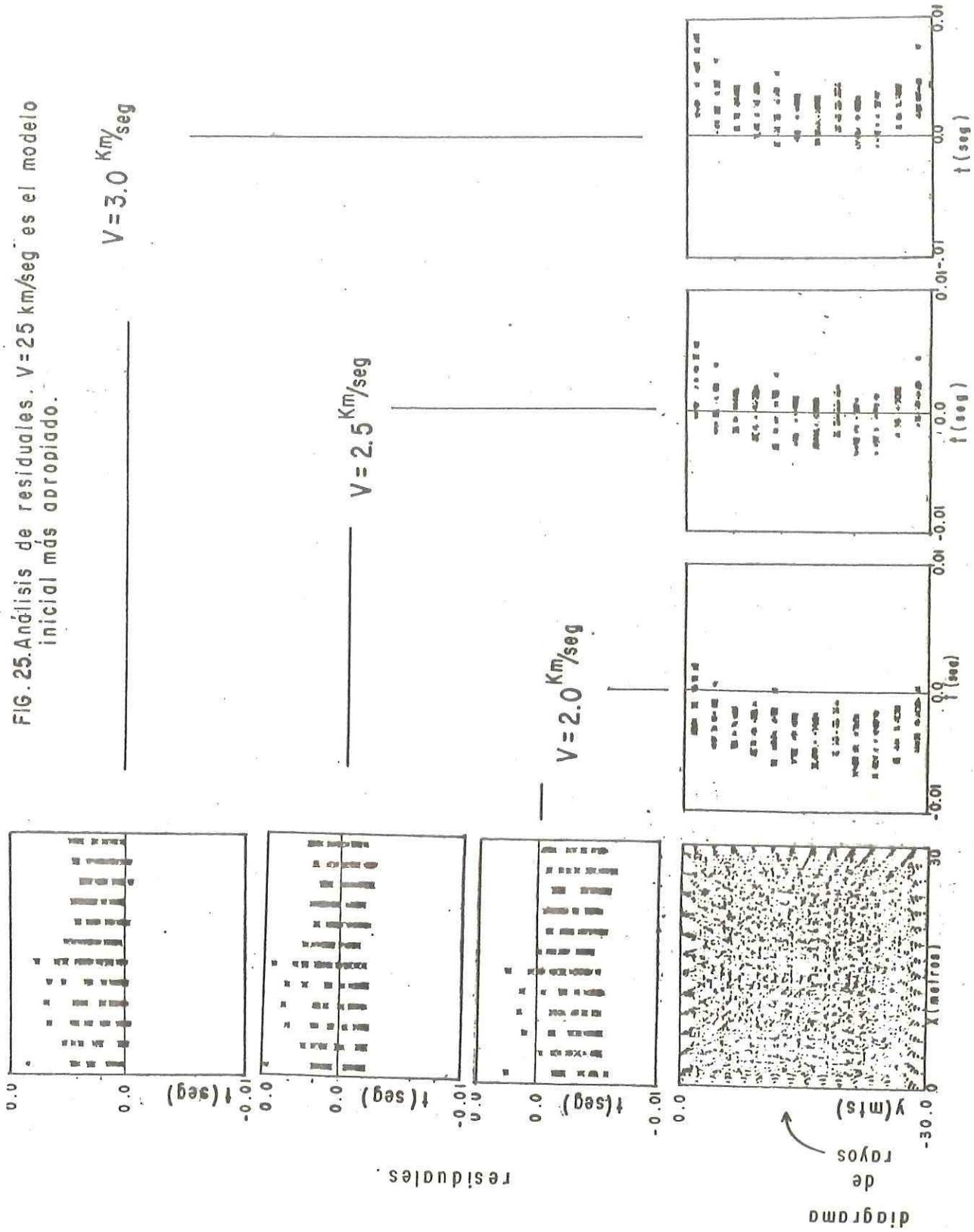


FIG. 24. El espectro de amplitud muestra un pico entre las frecuencias $(4 \times 10^2 - 5 \times 10^2)$ Hz.

diferentes modelos de velocidad hasta conseguir que los residuales sean incesgados. Esto garantiza que el modelo inicial se encuentra cerca del real, y también una rápida convergencia a una solución incesgada.

En la Figura (25), se muestra el comportamiento de los residuales con diferentes modelos iniciales. La velocidad que entrega residuales más incesgados es $v=2.5$ Km/seg.

FIG. 25. Análisis de residuales. $V = 25 \text{ km/seg}$ es el modelo inicial más apropiado.



residuales de tiempo de viaje.

V.4 RESULTADOS Y DISCUSION

El esquema de inversión de tiempos de viaje en medios bi-dimensionales con heterogeneidad lateral ha sido descrito y probado con datos sintéticos en el capítulo anterior. Se presentan ahora los resultados de una aplicación del esquema a datos reales. Las observaciones fueron llevadas a cabo por la Comisión Federal de Electricidad.

El procesamiento de datos reales se realiza como ya se ha discutido, haciendo un análisis previo de las frecuencias contenidas en las señales sísmicas para identificar la longitud de onda predominante, y así discretizar adecuadamente.

La longitud de onda predominante estimada, $\lambda = 6.25 \pm .625$ mts., de las señales sísmicas del experimento da idea sobre la longitud característica de las heterogeneidades laterales reconocibles.

Como ya se ha discutido en la sección de análisis de datos conviene usar una red nodal con un paso $L \sim \lambda$, pues las heterogeneidades laterales que se pueden resolver son del orden de $L_c \sim 3 \lambda$. Discretizando de este modo el

problema se estabiliza, pues al discretizarse con más parámetros de los necesarios habrá redundancia en incógnitas y, por otro lado, si se discretiza con menos parámetros se pierde el detalle que sí es posible ver.

Una vez que este análisis nos indica las escalas de la malla para la discretización, se procede a analizar el comportamiento de los residuales con diferentes modelos iniciales de velocidad homogénea hasta que éstos se encuentren distribuidos al azar alrededor del nivel nulo. Así es posible conseguir que el modelo inicial lleve la información del comportamiento más global de la estructura de velocidades.

Queda por determinar el problema de estimar el nivel de ruido de los datos. Los errores no se conocen y solamente se puede aventurar un valor promedio, basándose en el error en el cronometraje de la explosión y en el error en la lectura de tiempos de viaje. El error estimado promedio en los datos es ± 1.5 ms.

Se procesaron ocho secciones tomadas en el área donde está construída la planta termoeléctrica Mérida II:

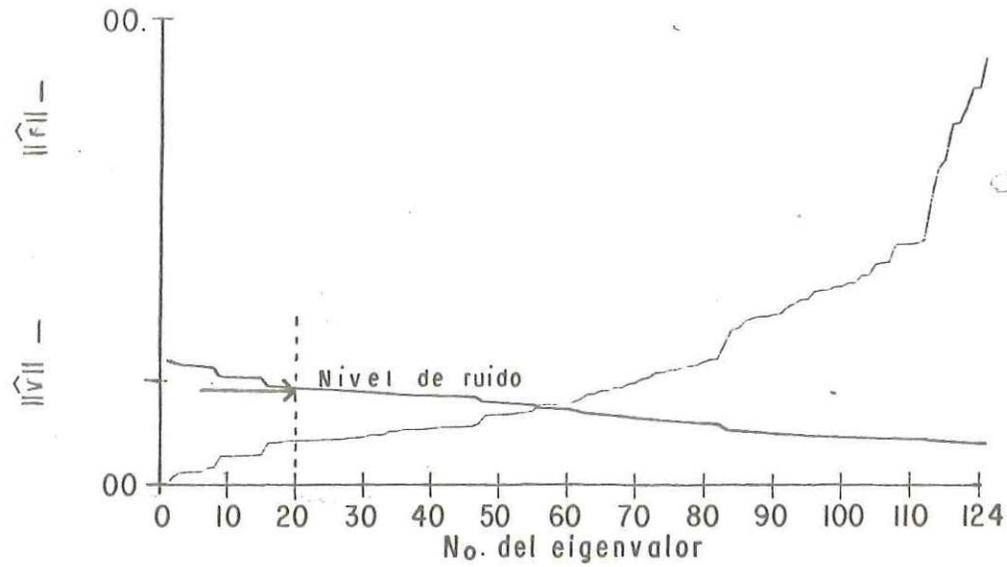
1	Casa de Máquinas - 1
CH1	
2	Casa de Máquinas - 2
CH2	
3	Generadores de Vapor
GVAP	
4	Tanque de Almacenamiento
TAC	
5	Torres de enfriamiento
TEN1-3	
6	Torres de enfriamiento
TEN2-3	
7	Torres de enfriamiento
TEN1-4	
8	Torres de enfriamiento
TEN2-4	

SECCION - CH1Estabilidad

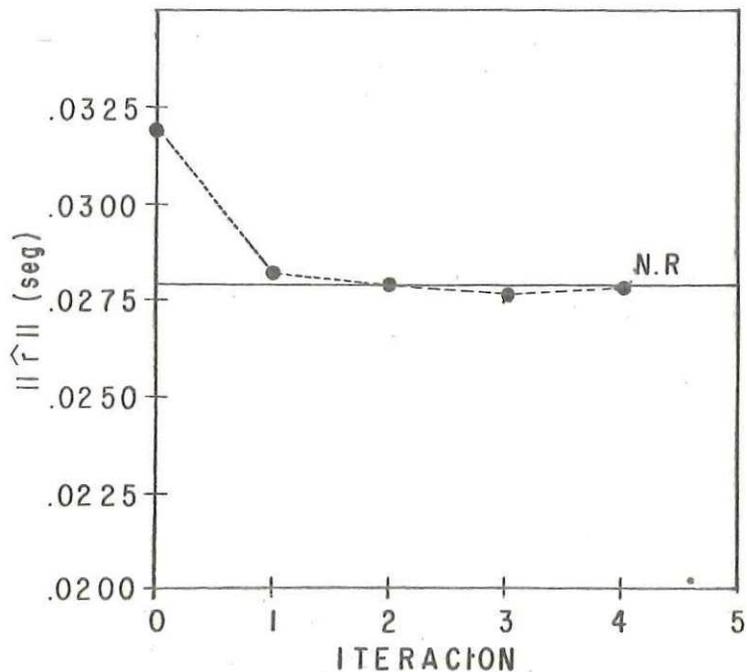
Se analiza la estabilidad del problema, observando la Figura (26 a) donde se grafica la norma del vector de solución y la norma del vector de residuales lineales como función del índice del eigenvalor. Es posible ver cuando la norma de la solución cambia bruscamente y cuando se mantiene estable, así como cuando empieza a diverger. También, se aprecia que la norma de los residuales se mantiene a un mismo nivel en ciertas regiones y sigue disminuyendo conforme se incluye en la estimación un mayor número de eigenvalores.

Esta gráfica puede dar una idea de cuantos eigenvalores conviene incluir en la solución, así como del valor del factor de estabilización α . Es necesario enseguida probar diferentes valores de α hasta conseguir estabilidad y un ajuste adecuado de los datos.

El nivel de ruido estimado mostrado en la Figura (26 a) es rebasado por la norma de los residuales por los diez



a) Norma de residuales $\|\hat{r}\|$ y norma de solución $\|\hat{v}\|$ para diferentes numero de eigenvalores. Iteracion cero, Sección CMI-121 parametros.



b) Norma de residuales para diferentes Iteraciones.

FIG.-.26.

primeros eigenvalores. El α que hace estable la solución filtra más del 90 % de los eigenvalores. Este valor se mantiene fijo de iteración en iteración.

La convergencia a la solución se muestra en la Figura (26 b) y por lo general 2 o 3 iteraciones son suficientes para que la norma de los residuales quede dentro del nivel de error.

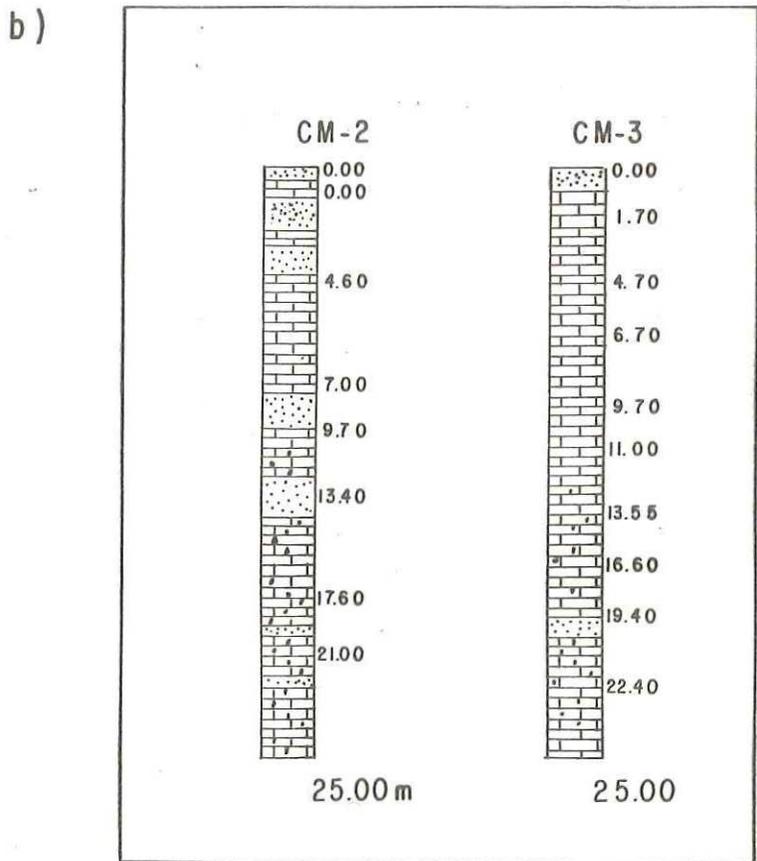
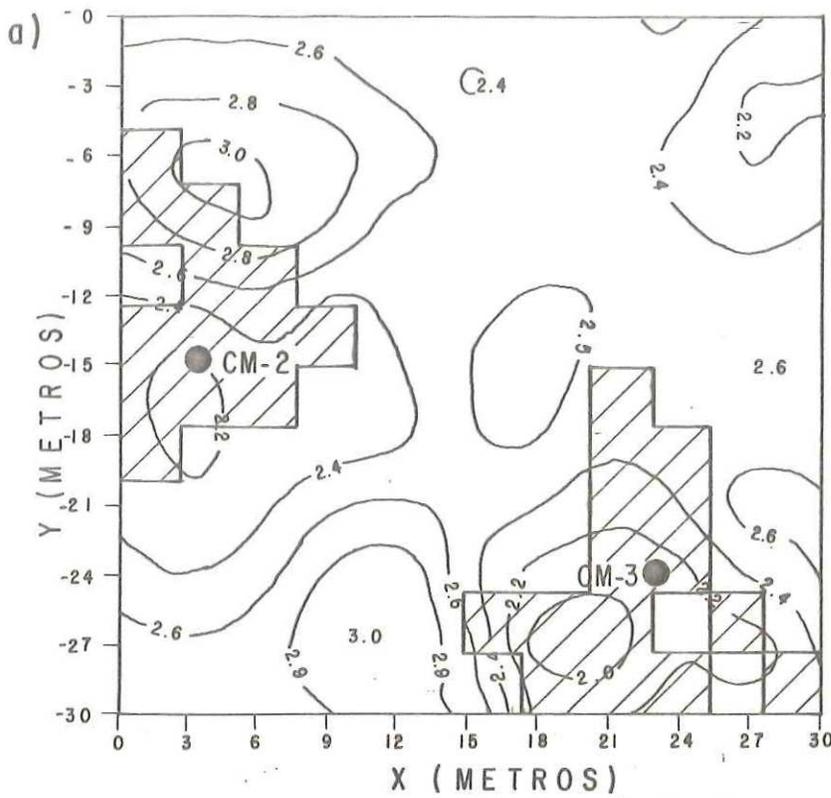
La solución obtenida se muestra en la Figura (27) donde podemos ver que la sección consta de dos zonas de baja velocidad y otras tres de alta velocidad.

D.V.S. y estabilidad

En la Figura (28 a), se ha graficado la proyección del vector solución, v^T_x , y la proyección del vector de datos (residuales iniciales), u^T_y .

La proyección v^T_x comienza a diverger cuando se considera más del 50 % de los elementos de la D.V.S., coincidiendo con un salto en los eigenvalores.

Pueden obtenerse tres soluciones equivalentes a la



BARRENOS
CM-2 y CM-3

Columnas
Litologicas.

FIG. 27.

FIG. 27.

de la Figura (27), considerando en los cálculos solo aquellos eigenvalores para los cuales los picos espectrales rebasan claramente el nivel de error (Figura 28 b). La primera solución se construye con los seis primeros picos que sobrepasan el nivel de error (Figura 29 a) y las otras incluyendo todos los picos espectrales que rebasan el nivel de error.

La comparación de las tres soluciones indica coincidencia en las principales características globales. Puede concluirse que con los primeros seis picos espectrales puede construirse la solución.

El problema es bastante inestable, muy probablemente debido a un alto nivel de ruido en los datos y entonces no es posible resolver características finas del medio. Además el contenido de frecuencias de las señales sísmicas indica que la longitud de onda predominante no permite resolver características finas.

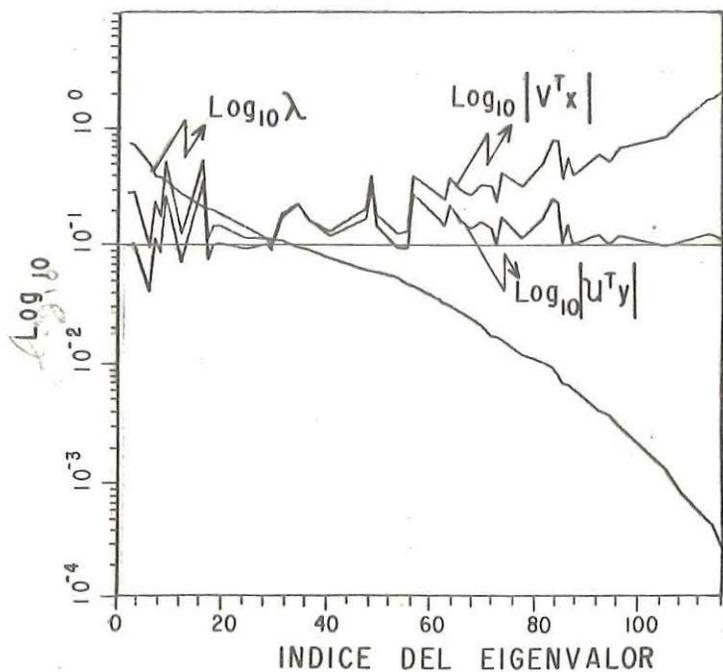
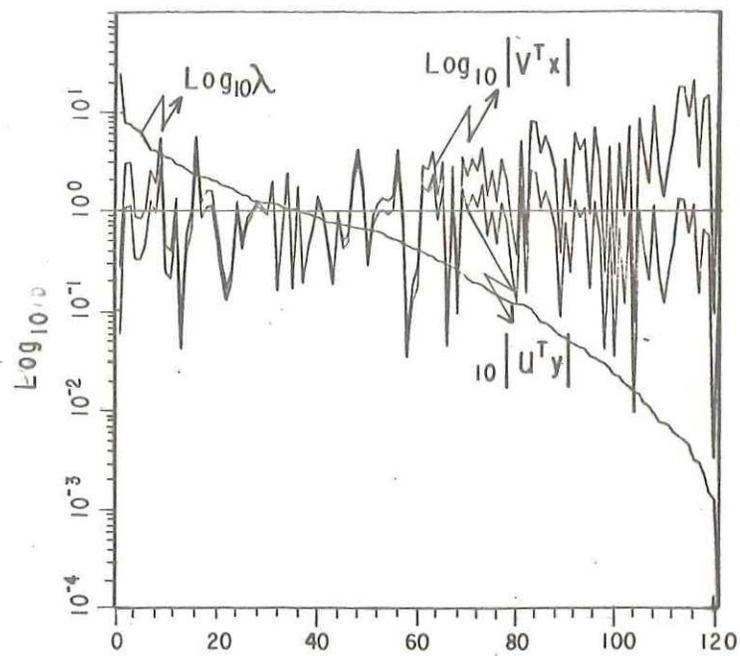
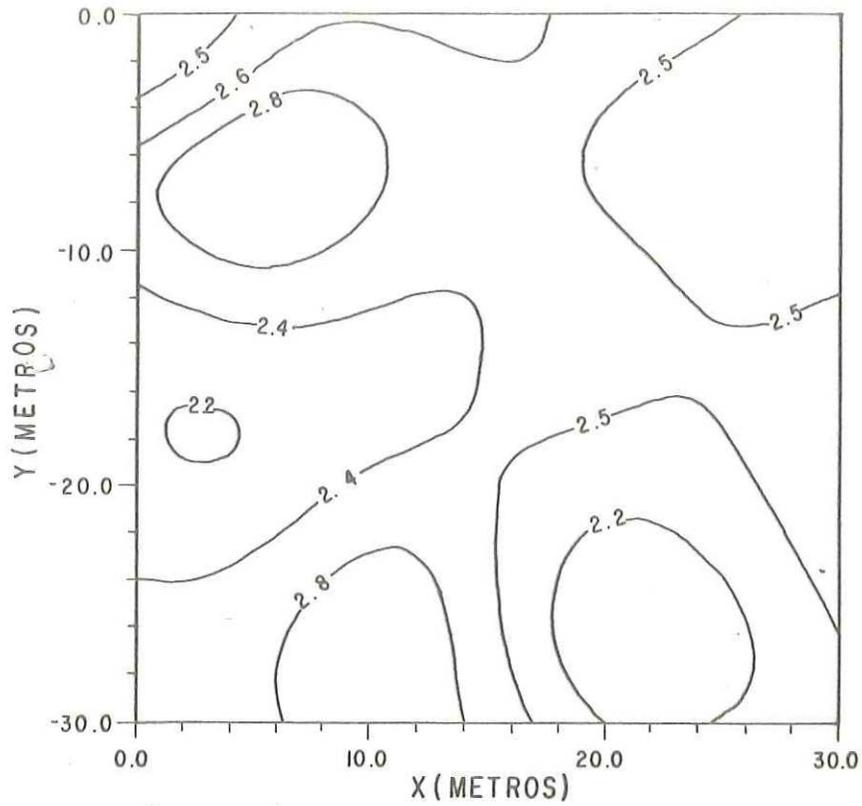


FIG. 28. a). Sección CMI-121 Todos los eigenvalores.
b). Sección CMI-121. Los eigenvalores arriba del nivel de ruido son significativos.



a). Sección CMI-121, Solución obtenida con los 6 primeros picos (eigenvalores significativos). $\alpha = 0.0$

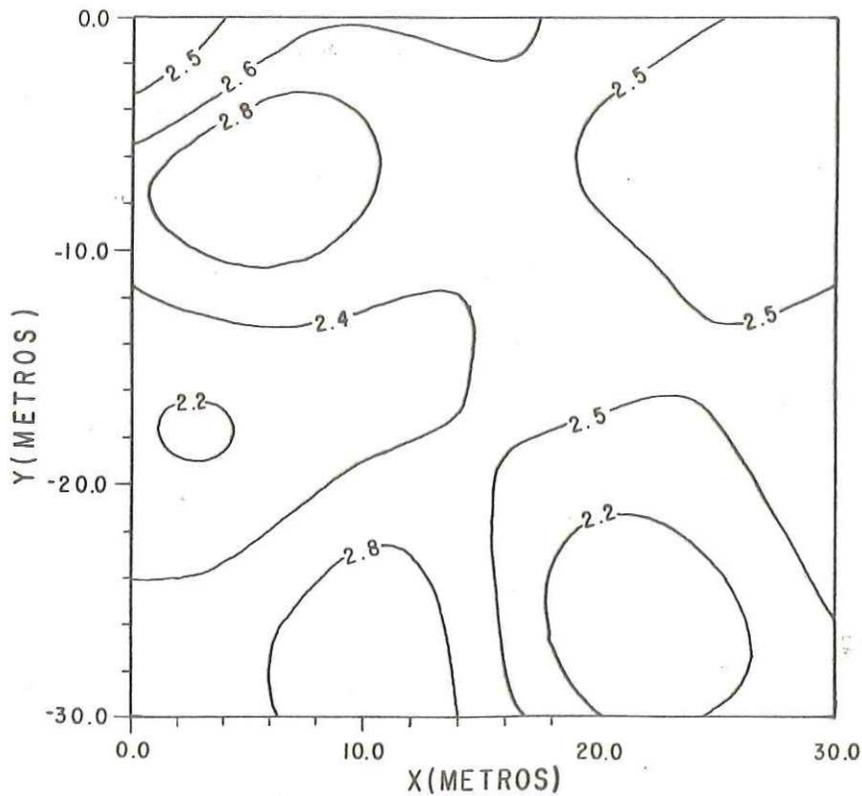


FIG.29 b). Sección CMI-121, Solución obtenida con todos los eigenvalores significativos, $\alpha = 10.0$

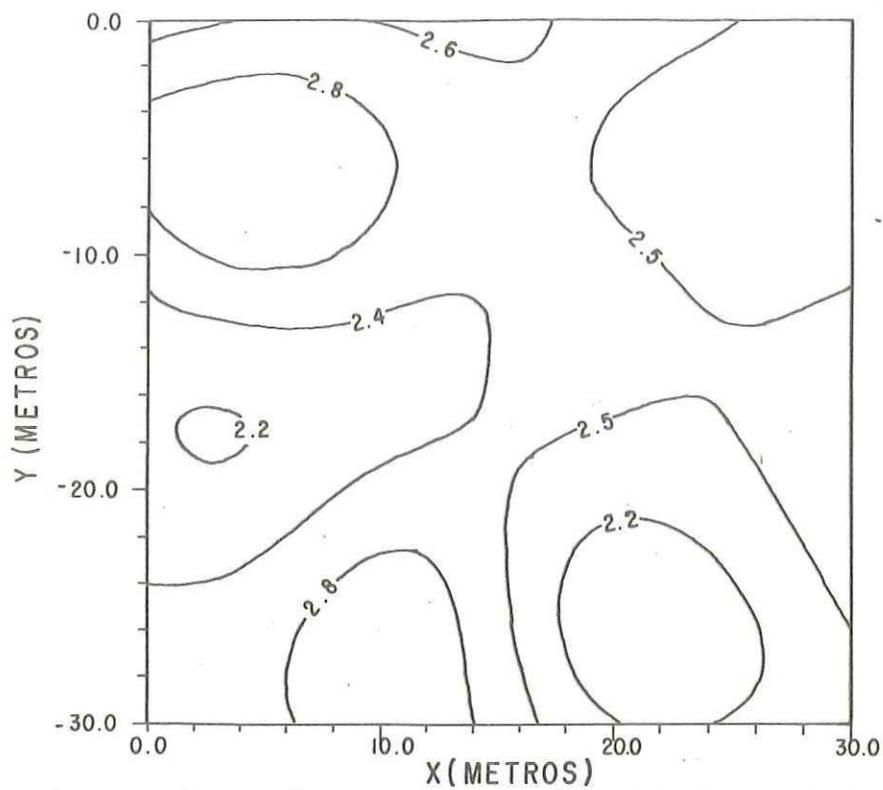
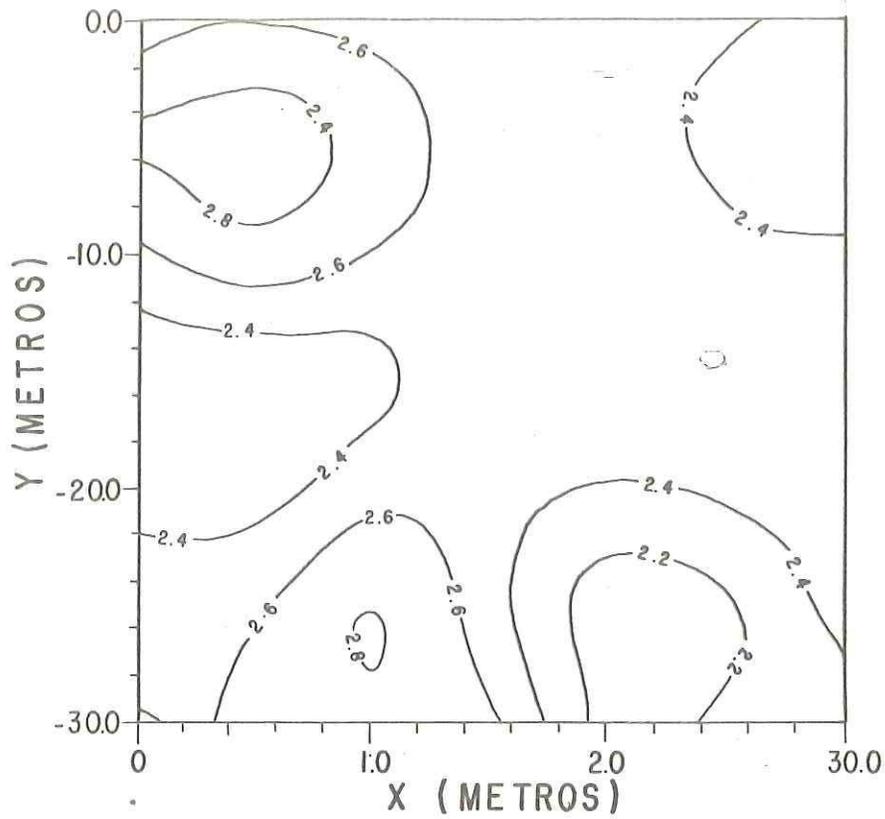


FIG.29c). Sección CMI-121, solución obtenida en todos los eigenvalores significativos $\alpha=0.0$

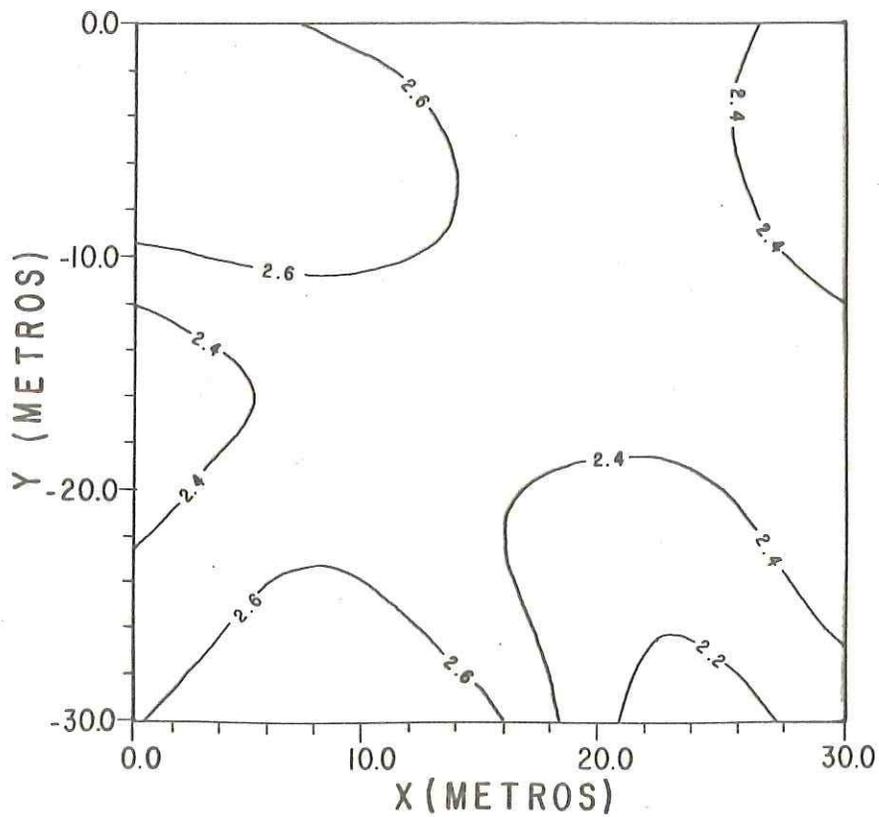
Discretización

Por otro lado se ha realizado un análisis de soluciones ensayando diferentes discretizaciones del medio con paso $L = 7.5, 5.0$ y 3.0 m., que dan 25, 49 y 121 incógnitas de velocidad respectivamente. Esto se hace con el objeto de reconocer las verdaderas heterogeneidades laterales y discriminar aquellas que sean efecto de inestabilidad.

Comparando las Figuras (27), (30 a), (30 b) y (30 c), para 121, 49, 25 y 16 parámetros respectivamente, se observa que los contornos de velocidad señalan zonas de baja y alta velocidad que no cambian sus características globales. Las posiciones relativas de las zonas de baja velocidad y los valores de velocidad promedio se mantienen fijos. Sin embargo, si hacemos caso al análisis de frecuencias y a la estimación de longitud de onda predominante, llegaremos a la conclusión de que el detalle que se observa en la Figura (27), es muy probablemente espurio pues los datos no contienen información que permita resolver detalles de 3 metros (121 parámetros). Todo parece indicar que el valor estimado de longitud de onda predominante es el que realmente contienen las señales.



a) Sección CMI - 49 parámetros.



b) Sección CMI-25 parámetros.

FIG. 30.

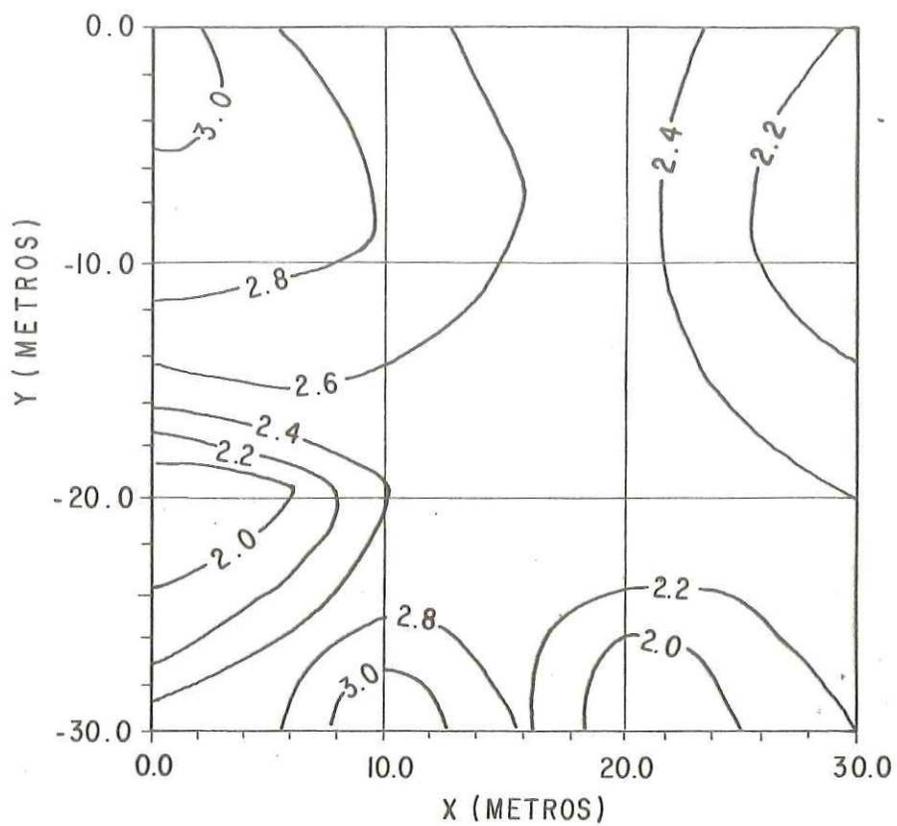


FIG.30.c Sección CMI-16 parametros.

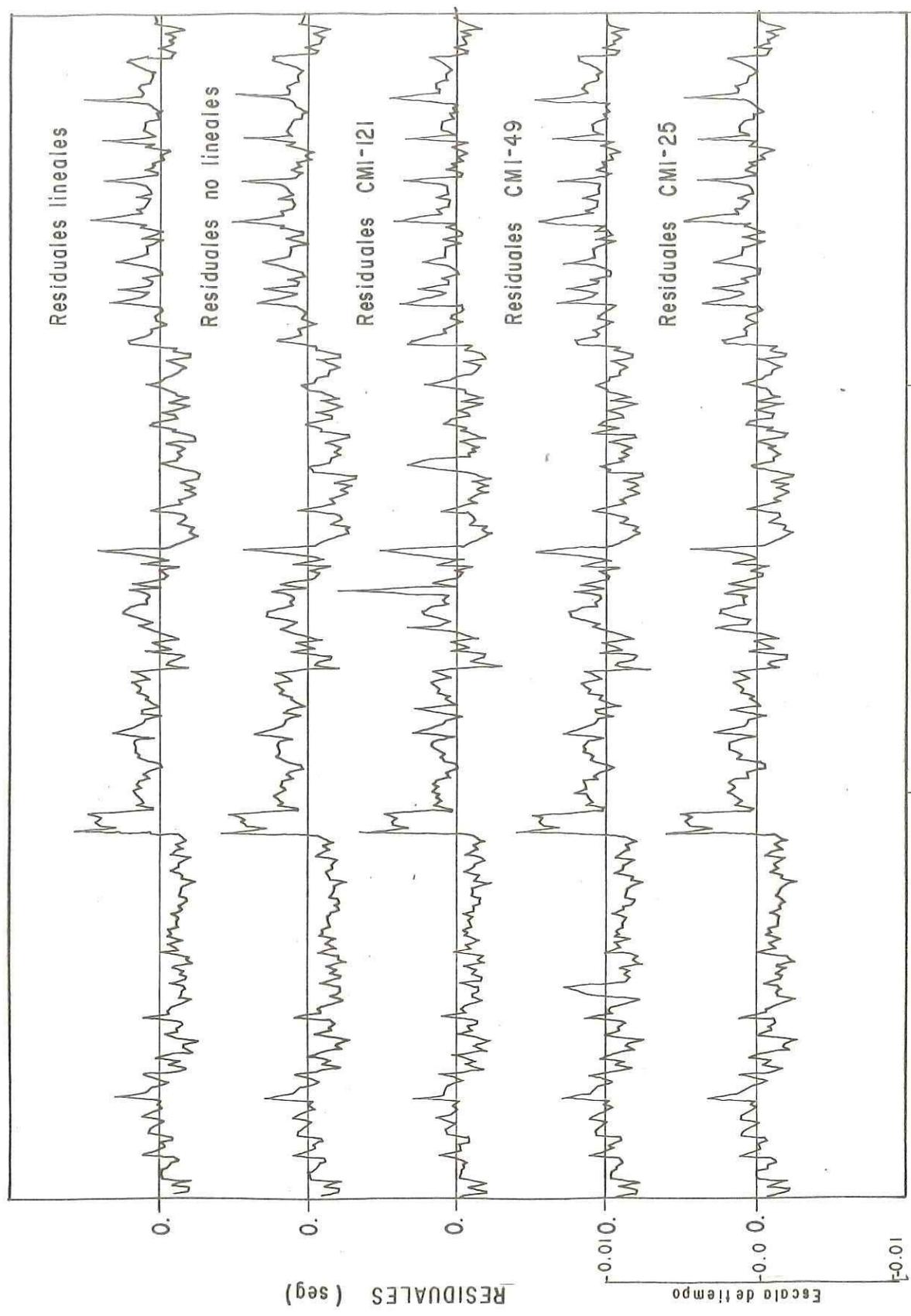
Las soluciones anteriormente expuestas son el resultado de haber estudiado cada problema y también el haber estudiado sistemáticamente las soluciones para diferentes valores del factor de estabilización α . La solución seleccionada es desde luego aquella que presenta estabilidad, buena resolución y sentido físico.

Residuales

Los residuales de tiempo de viaje se muestran en la Figura (31), las gráficas a) y b) corresponden a los residuales lineales y no-lineales respectivamente, antes de la primera iteración.

Los residuales que arroja el modelo escogido se muestran en c), d) y e) para los modelos CM1-121, CM1-49 y CM1-25. Los residuales no muestran un comportamiento al azar, las tendencias de los residuales originales se conservan en los finales. Estas tendencias se deben muy probablemente a efectos de zonas de alta y baja velocidad, que no han sido completamente disminuídas.

Los residuales en la mitad derecha de la gráfica (corresponden al tendido 2 ver Figura 19.) muestran picos



348

240

120

NUMERO DE OBSERVACIONES

FIG. 31. Residuales de tiempo de viaje. Sección CMI-121.

con un período de 12 observaciones. Estos picos corresponden al primero y/o último geófono del tendido. Probablemente se deban a errores en la lectura de los sismogramas, o a un error sistemático en el equipo.

Eigenvectores V y U

Otro argumento más en favor de la selección de una discretización poco fina (por ejemplo 25 o 49 parámetros), puede obtenerse de la gráfica de eigenvectores V_i de la descomposición (Figura 32). El eigenvector para el cual $\lambda = \alpha$ es el segundo, éste modo tiene prácticamente la longitud de onda que es posible resolver. La longitud del modo es de 11 parámetros lo que equivale a una distancia de 30 metros, es decir, nuevamente se reafirma el hecho de que se tiene resolución espacial solo para características globales del medio.

Por otro lado se observan en la Figura (33) los eigenvectores U_i , que presentan oscilaciones de alta frecuencia superpuestas a los modos principales, con una longitud de onda de 12 observaciones.

La longitud de onda de la oscilación superpuesta al

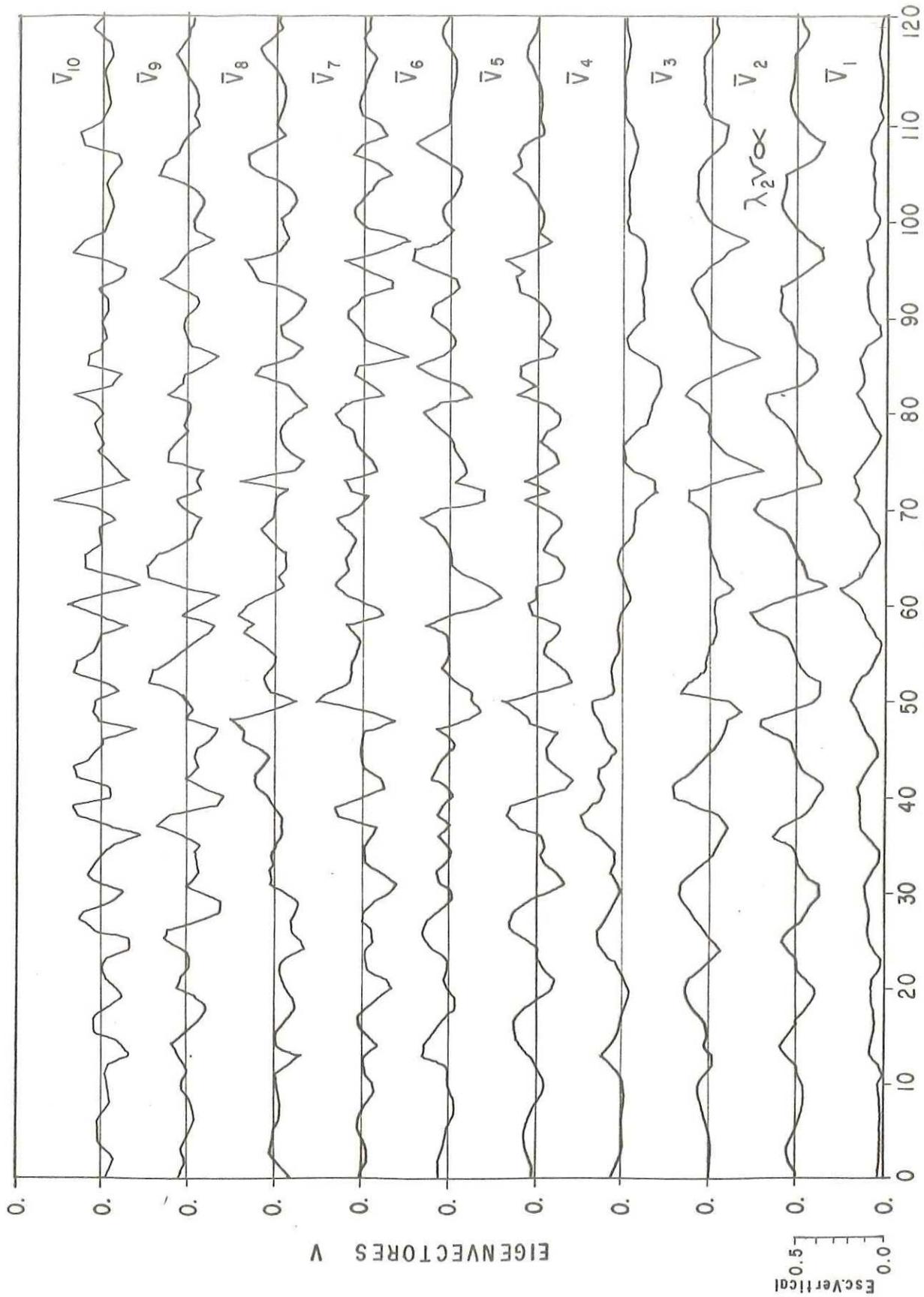


FIG. 32. Eigenvectores V :Sección CMI-121

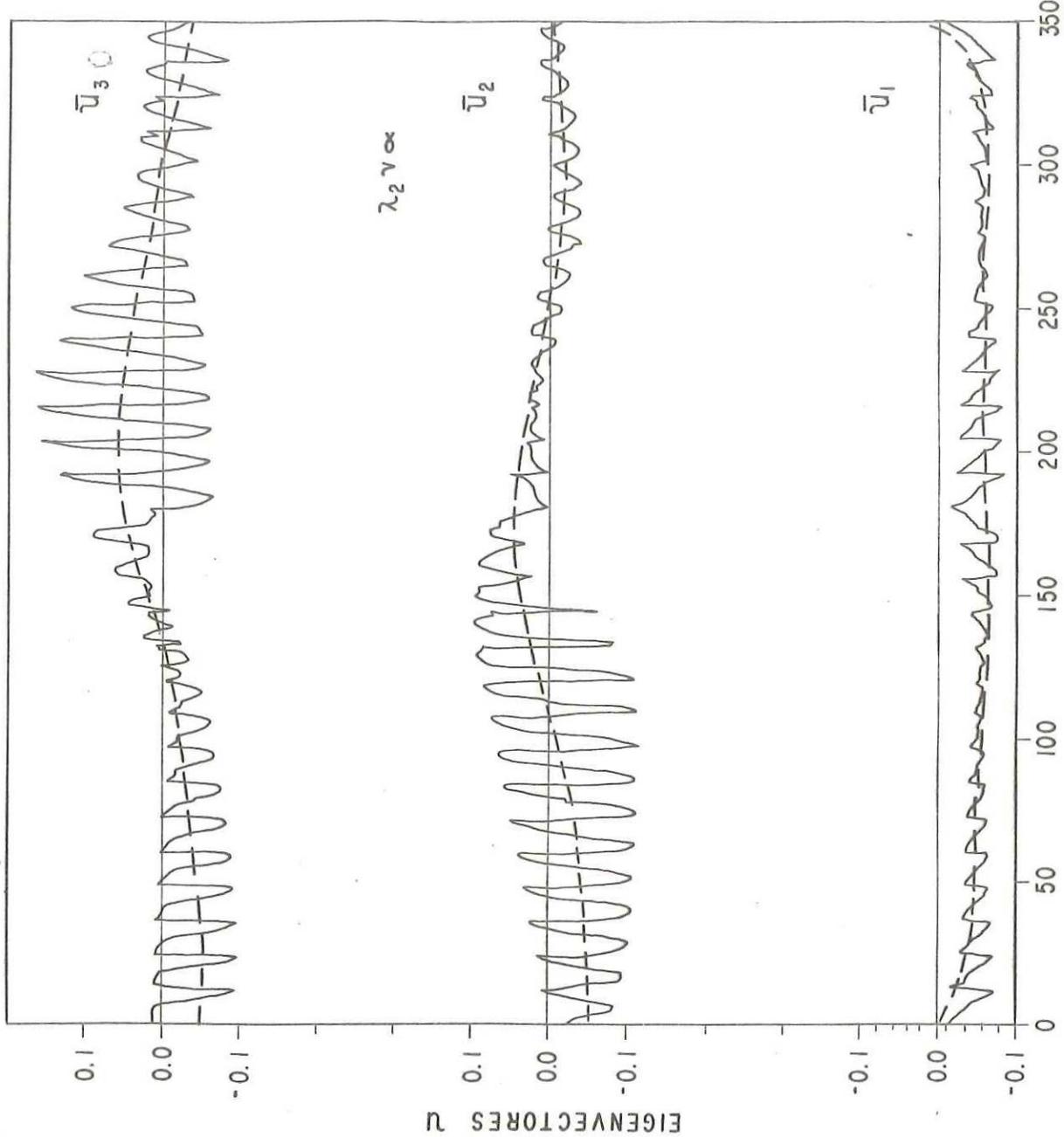


FIG. 33. Eigenvectores \bar{u} . Sección CMI-121.

modo principal es de 12 observaciones que corresponden a los doce geófonos de cada explosión.

Resolución

En las Figuras (34), (35) y (36) se tienen gráficas de matrices de resolución para la sección CM1-121, CM1-49 y CM1-25. El comportamiento cualitativo de la resolución es de una matriz de bandas, la distancia entre las bandas es de 11 parámetros (Figura 34). Sobre la diagonal de la matriz también pueden verse ciclos de 11 parámetros, cuyos máximos corresponden a parámetros localizados en el centro del modelo y los mínimos a parámetros situados sobre los márgenes del modelo. Los puntos del centro del modelo son muestreados por un mayor número de rayos y es por esto que se encuentran mejor resueltos. Las bandas arriba y abajo de la diagonal corresponden a correlaciones con parámetros situados arriba y abajo del parámetro central. Para el caso de 49 y 25 parámetros encontramos comportamientos similares.

La banda central incluye las correlaciones con los parámetros que están a derecha e izquierda de una incógnita dada.

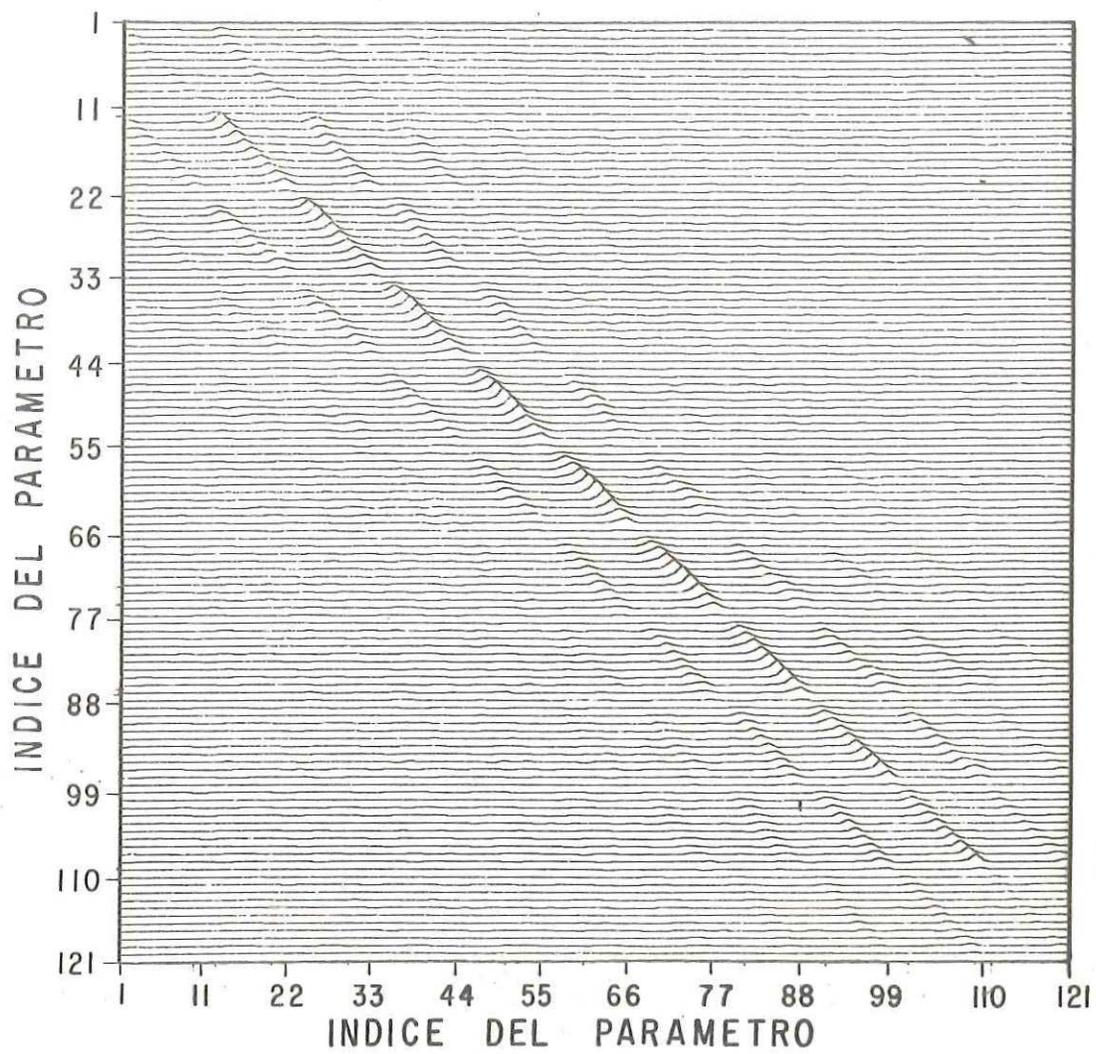


FIG.34. Matriz de resolución, Sección CMI-121

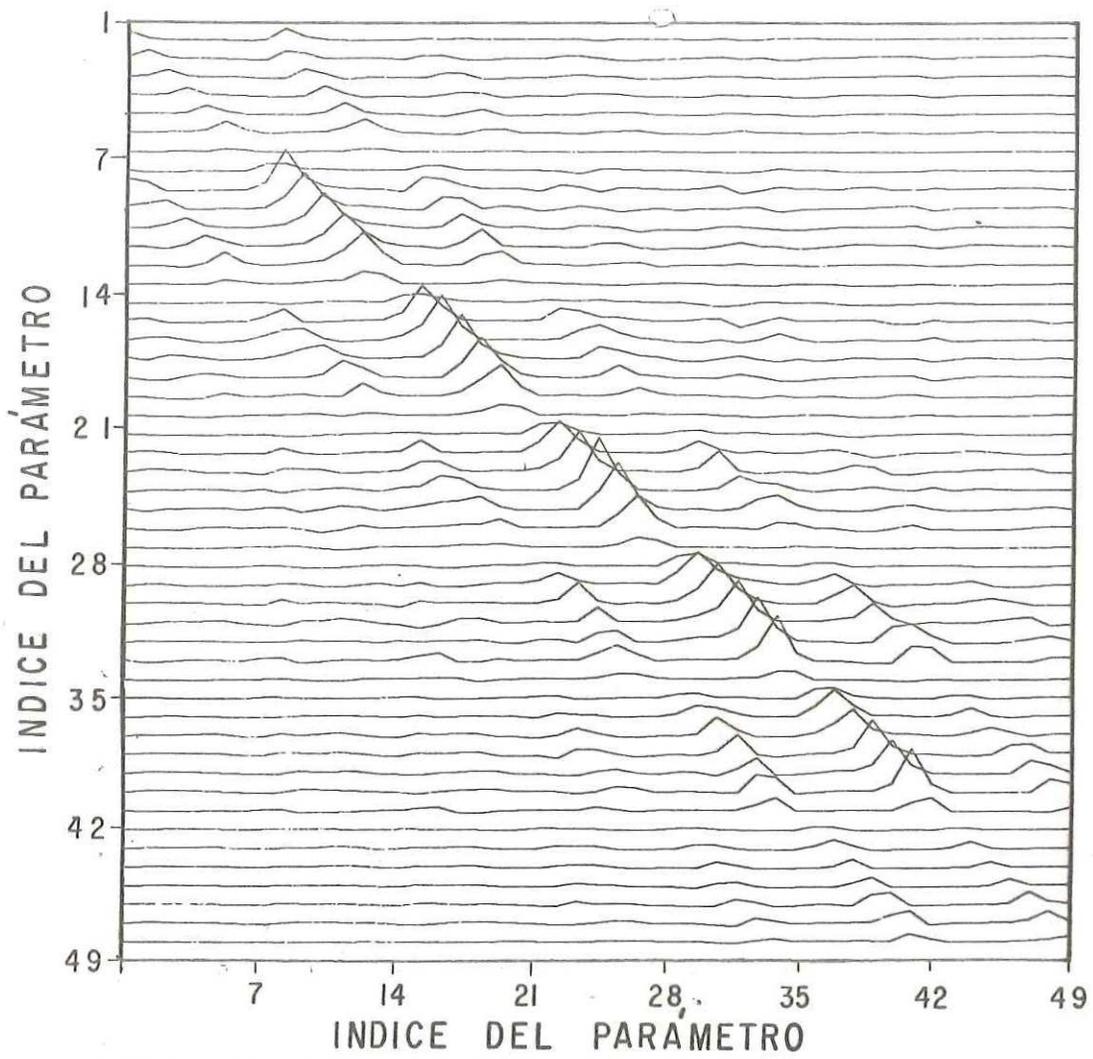


FIG.35. Matriz de resolución, Sección CMI-49

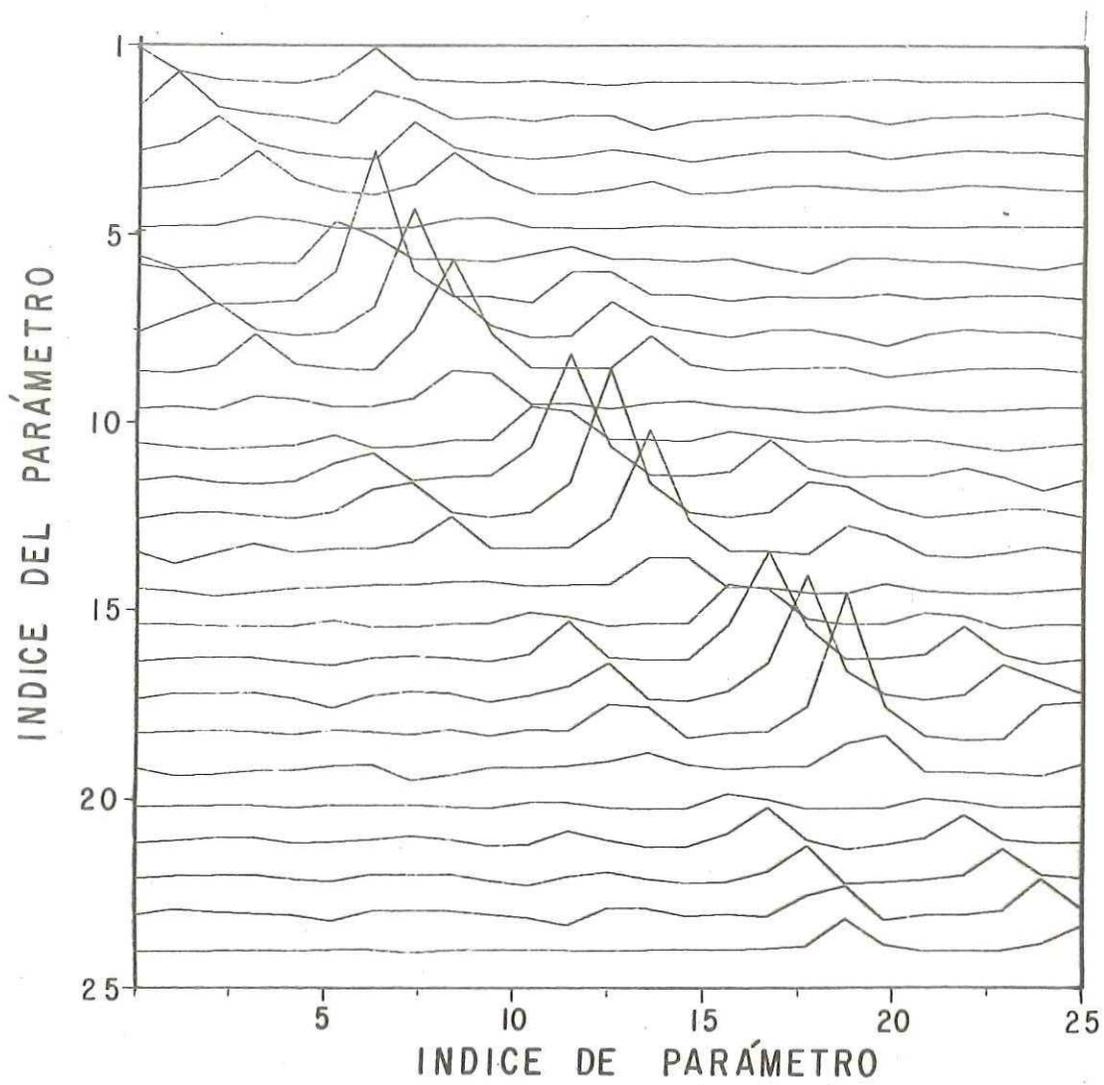


FIG.36. Matriz de resolución, Sección CMI-25

Correlación

Las matrices de correlación para CM1-121, -49 y -25, se muestran en las Figuras (37), (38) y (39). Puede verse que éstas matrices presentan bandas que tienen ciclos que corresponden a la discretización, las bandas arriba y abajo de la banda central, corresponden a correlaciones entre incógnitas arriba y abajo de una incógnita.

Barras de error

Por último en la Figura (40) se muestran las barras de error obtenidas para estas soluciones CM1-121, -49 y -25. Como es ya bien sabido en el caso de mínimos cuadrados regularizados, las soluciones obtenidas, si bien son estables, son sesgadas. Este hecho, destruye la validez de la expresión para la covariancia, puesto que ésta es obtenida en base a la hipótesis de que los estimadores inicial y final son insesgados. El error en la solución reportado incluye solamente las contribuciones del

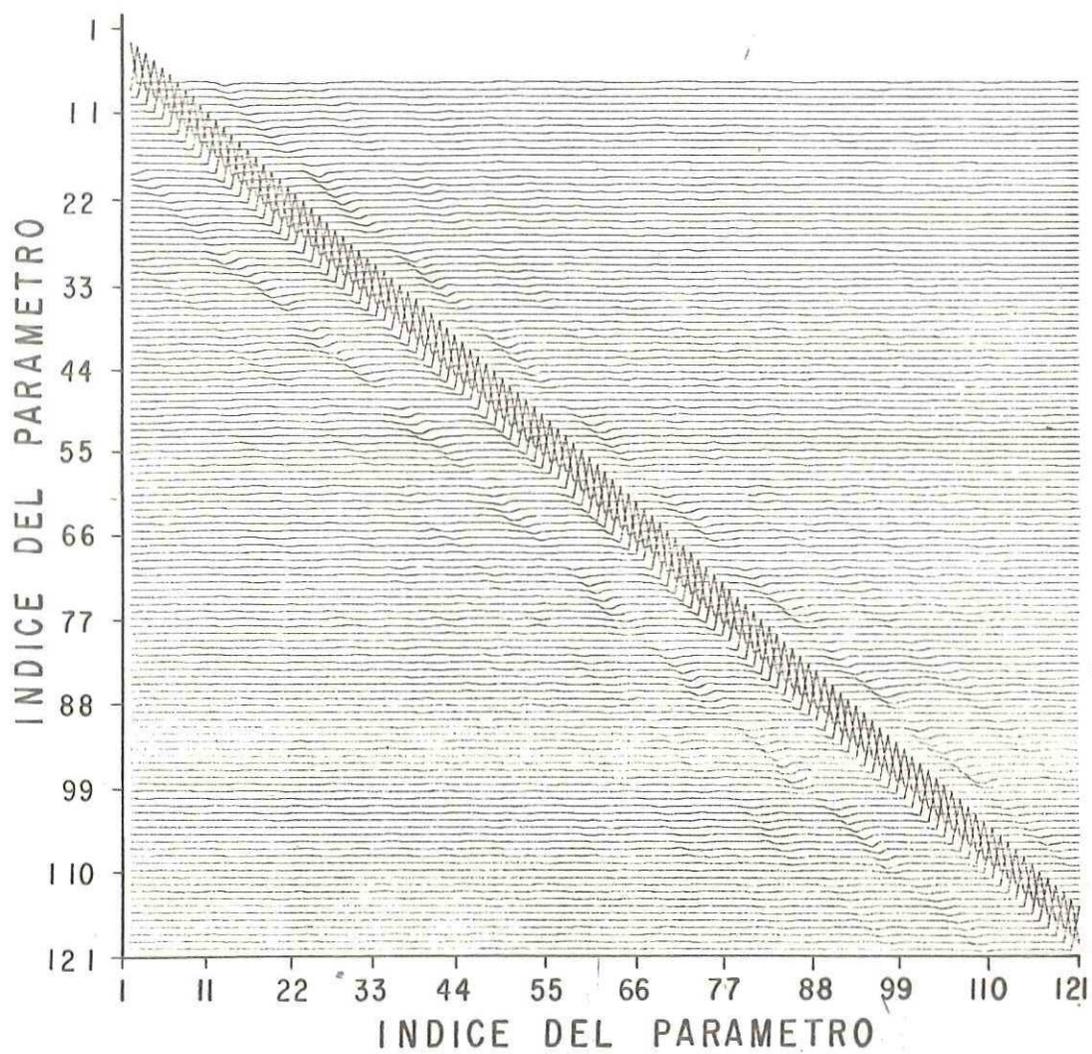


FIG.37. Matriz de correlación. Sección-121

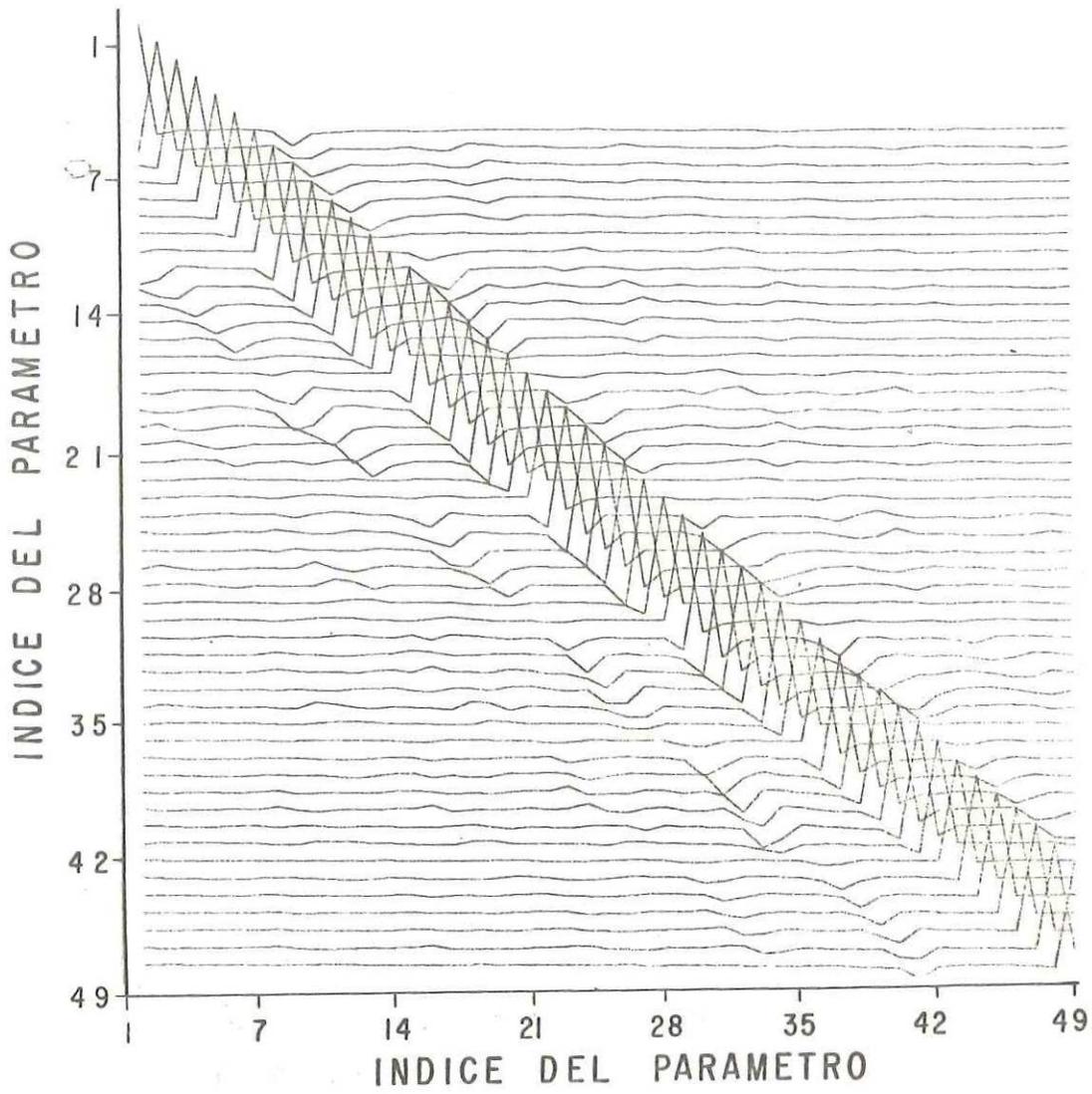


FIG.38. Matriz de correlación. Sección CMI - 49

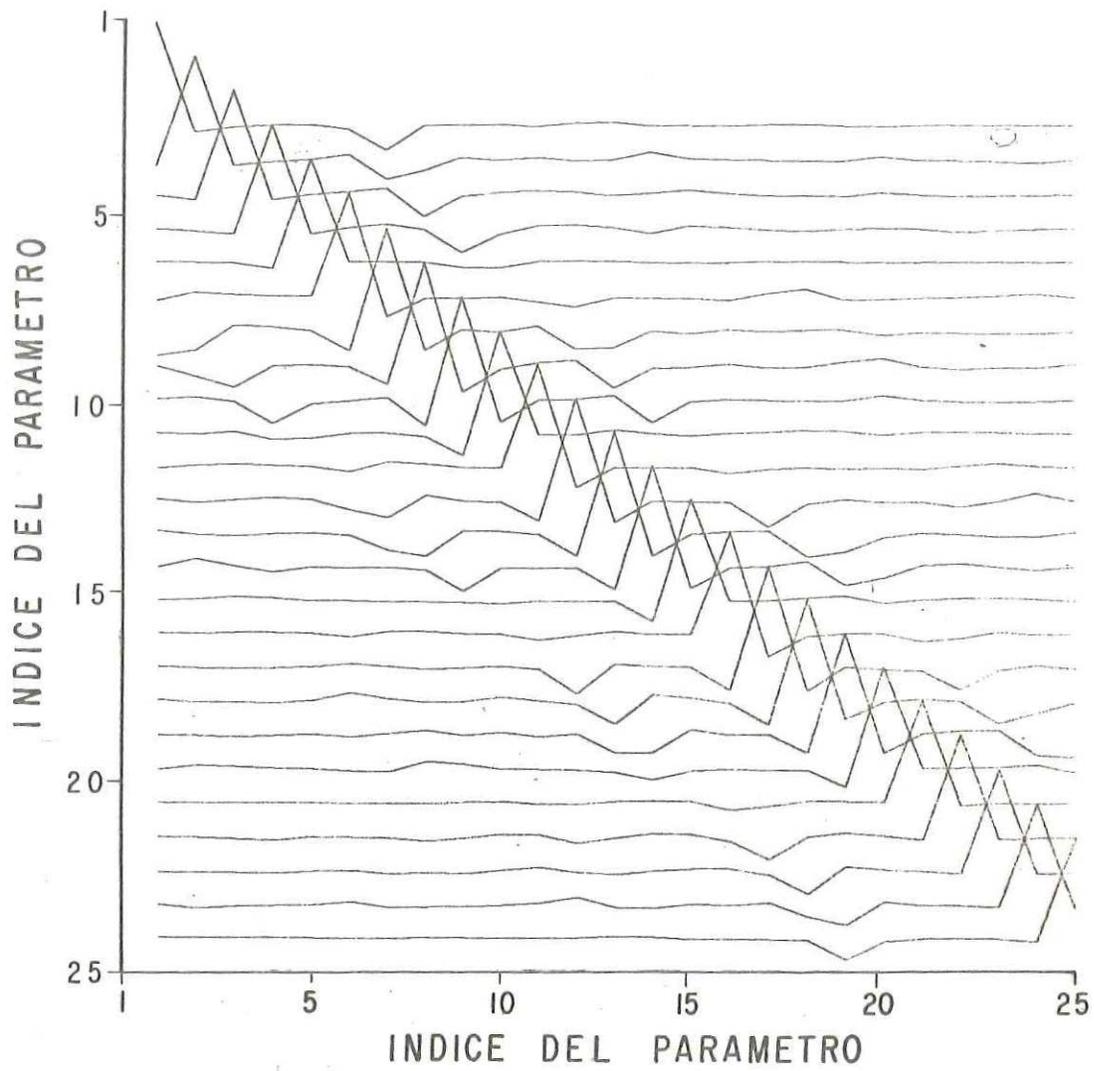


FIG.39. Matriz de correlación. Sección CMI - 25

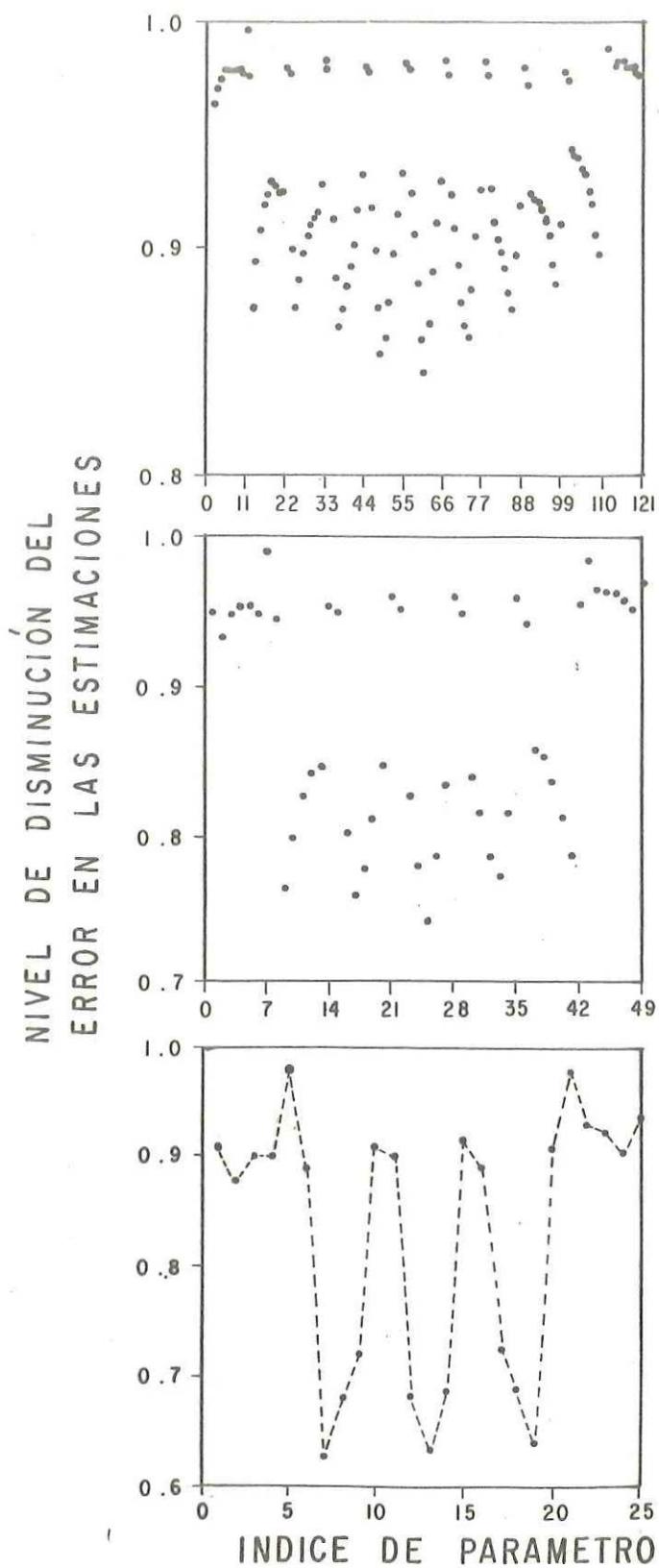


FIG.40 . Nivel relativo de disminución de error . Secciones CM1-121, 49 y 25.

error debido a resolución y el error debido a la propagación de errores desde las observaciones.

El nivel de disminución de error muestra máximos y mínimos, que corresponden a incógnitas que se encuentran en los márgenes del modelo o en el centro de éste, respectivamente.

Comparación con el estudio de Aranda y otros (1985)

Estos autores usan el método descrito por Neumann (1981), discretizando el medio en bloques rectangulares homogéneos. Los resultados obtenidos por Aranda y otros (1985) se superponen en la sección CM1-121 Figura 27 a). Los autores mencionados no reportan los valores de velocidad, solamente dan el contraste entre velocidades altas y bajas, las zonas de baja velocidad se muestran en la gráfica como la zona sombreada.

Al comparar las soluciones, puede verse que las soluciones coinciden en sus características globales. Sin embargo, la solución reportada por Aranda y otros (1985) muestra características finas de la estructura de velocidades, su red de discretización consta de 144

incógnitas. Estos detalles de la estructura son muy probablemente efectos de inestabilidad.

La localización de los barrenos CM-2 y CM-3 se muestra en la Figura 27 a) y las columnas litológicas encontradas en los barrenos en la Figura 27 b). Puede verse que éstas zonas de baja velocidad corresponden en el pozo CM-2 a lentes de arena, y en el pozo (CM-3) a un engrosamiento de la capa de sedimento superficial.

SECCION - CM2

La sección CM2 fue procesada con 121 parámetros de velocidad y con un factor de estabilización que filtra un 90 % de los eigenvalores.

Las velocidades en el medio circundante no son altas, pero se encuentra una zona de velocidades particularmente bajas (Figura 41). Los tiempos observados en ésta sección son significativamente mayores que los de la sección CM1, no obstante que se encuentran contiguas y que son de las mismas dimensiones. Una explicación a esto podría ser el hecho de que la capa de sedimento más superficial de baja velocidad se hace más grueso en ésta sección CM2. También podría deberse a un error sistemático en el registro de las señales.

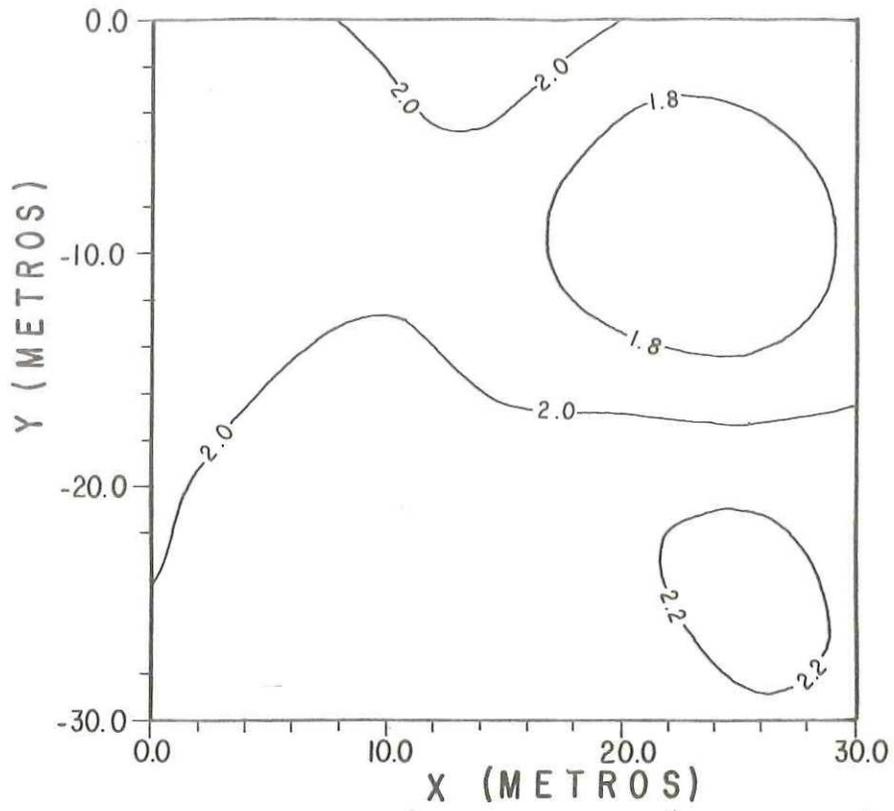


FIG.41. Contornos de velocidad. Sección CM2-121 parámetros.

SECCION - GVAP

Para obtener esta sección se utilizó nuevamente un factor de estabilización que filtra el 90 % de los eigenvalores. Se usaron 49 parámetros para discretizar el medio, que son suficientes para reconocer las características globales de la estructura de velocidades.

El mapa de velocidad muestra una zona de baja velocidad, Figura (42).

SECCION - TAC

Nuevamente la solución se obtuvo filtrando el 90 % de los eigenvalores. Se usaron 49 parámetros para discretizar.

Los contornos de velocidad muestran velocidades altas (2.5 - 3.0 Km/seg), Figura (43).

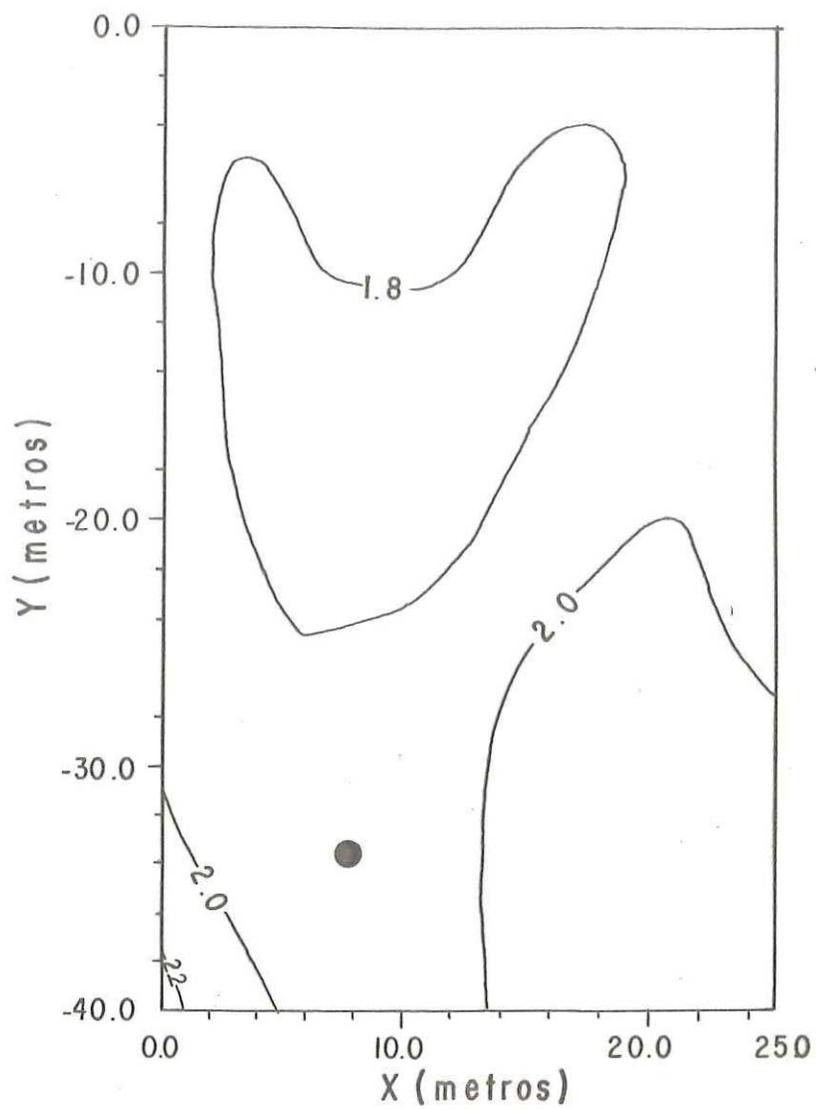


FIG.42.Contornos de velocidad.Sección GVAP 1-121
parámetros.

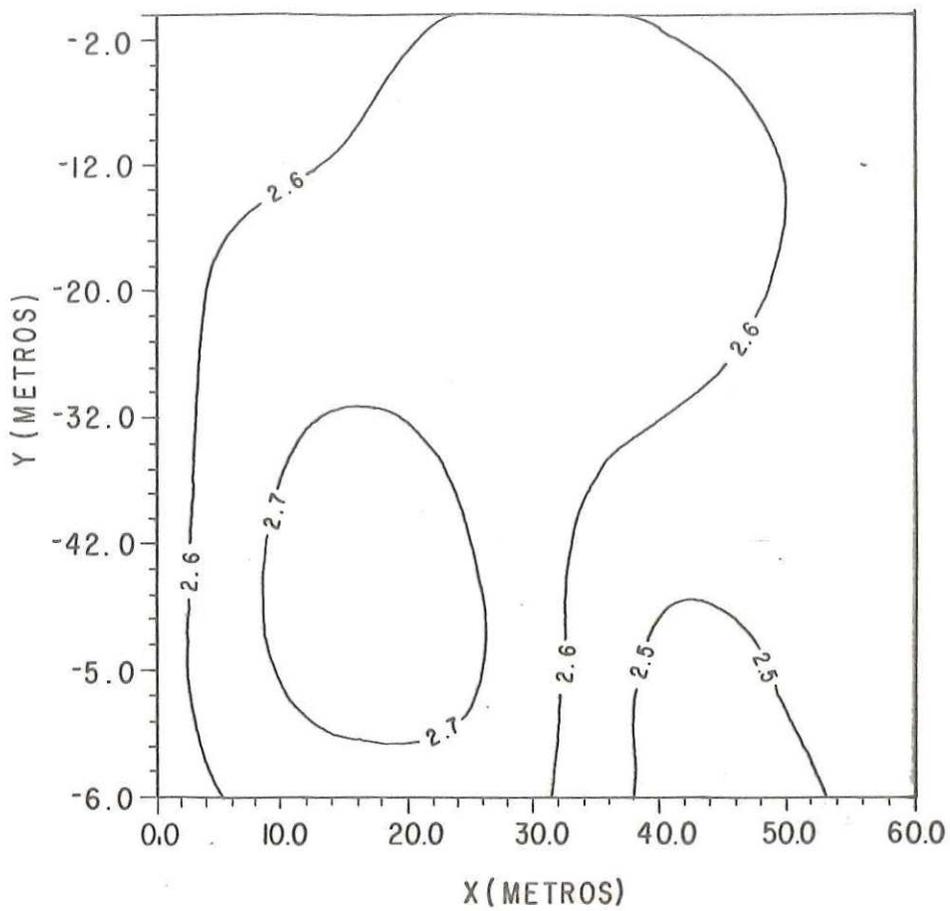


FIG. 43. Sección TAC-49 parámetros.

SECCIONES TEN1-3 y TEN2-3

Estas secciones están situadas una junto a la otra y tienen las mismas dimensiones. Ambas se obtuvieron filtrando el 90 % de los eigenvalores. Se utilizó una red nodal de 49 puntos para discretizar el medio.

Los contornos de velocidad muestran zonas de baja velocidad en ambas secciones, hay también regiones de velocidad alta, con velocidades que varían entre 2.5 - 2.8 km/seg. Figura (44 a).

La sección TEN1-3 se proceso nuevamente con 121 parámetros, solamente para comprobar que muchas de las incógnitas son redundantes y que con sólo 49 parámetros es posible identificar las principales características globales del medio, Figura (44 b).

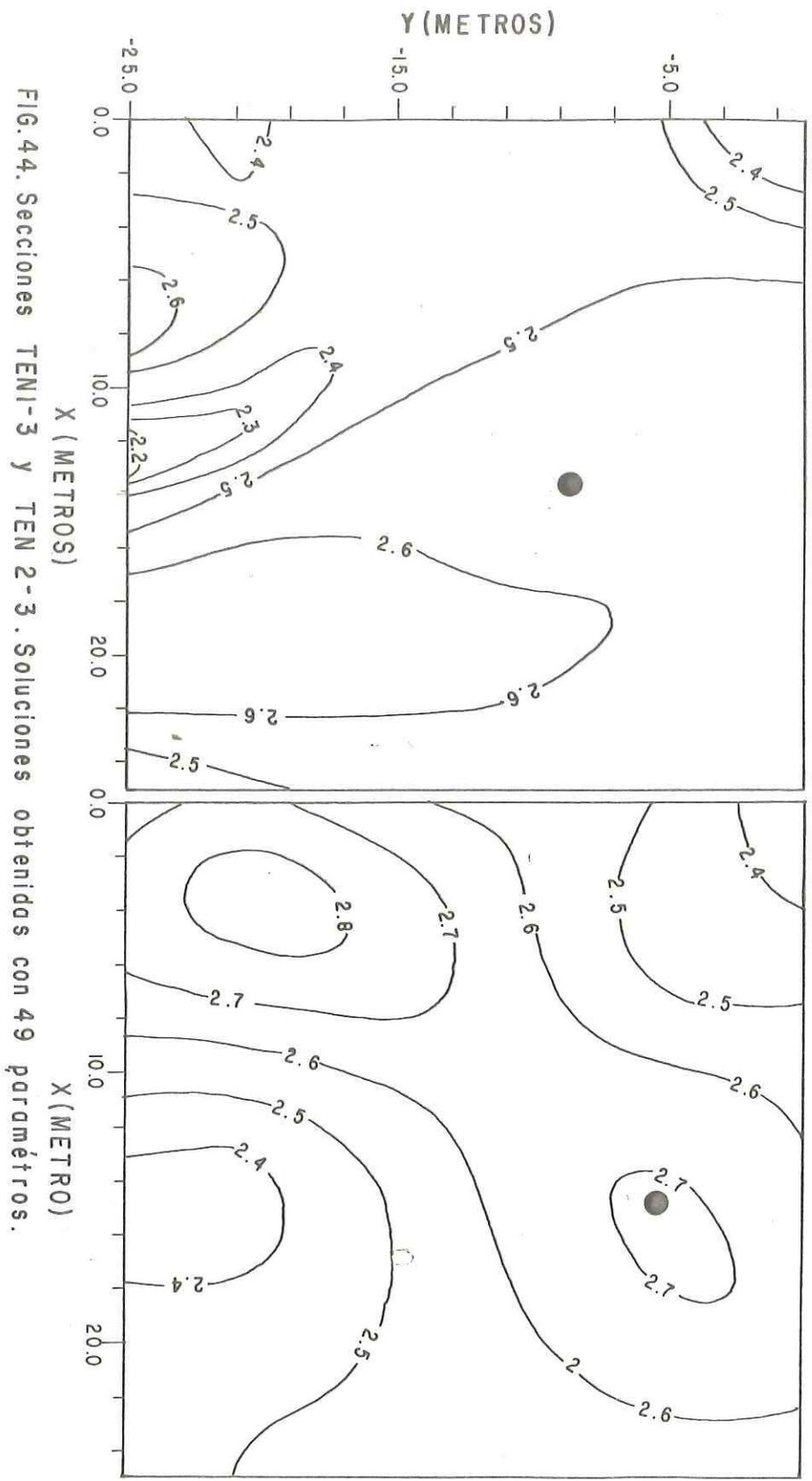


FIG.44. Secciones TENI-3 y TEN 2-3. Soluciones obtenidas con 49 parámetros.

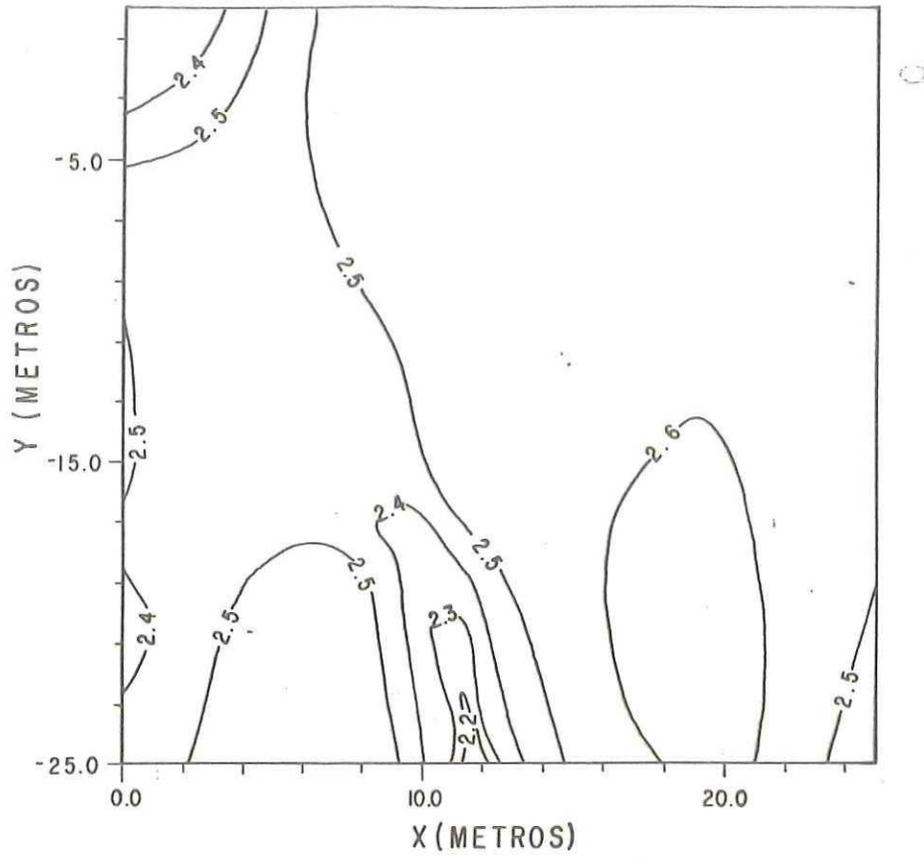


FIG.44 a). Sección TEN1-3 con 121 parámetros

SECCIONES TEN1-4 Y TEN2-4

Estas son también secciones contiguas, las cuales se obtuvieron filtrando el 90 % de los eigenvalores. Discretizando con 49 parámetros se obtienen las características globales del medio.

Los contornos de velocidad indican una zona de baja velocidad en la primera sección, con velocidades altas alrededor. La sección adyacente muestra velocidades altas que varían entre 2.5 y 2.8 km/seg. Figura (45).

Síntesis de resultados

En la Tabla 6. se muestra una síntesis de los resultados. Se observan tres secciones que claramente son de alta velocidad y no presentan zonas de baja velocidad. Cinco de las secciones sí presentan zonas de baja velocidad y aunque no se pueden resolver detalles estructurales, sin embargo, las características globales como son la posición de la zona de baja velocidad y el contraste de velocidades sí pueden obtenerse.

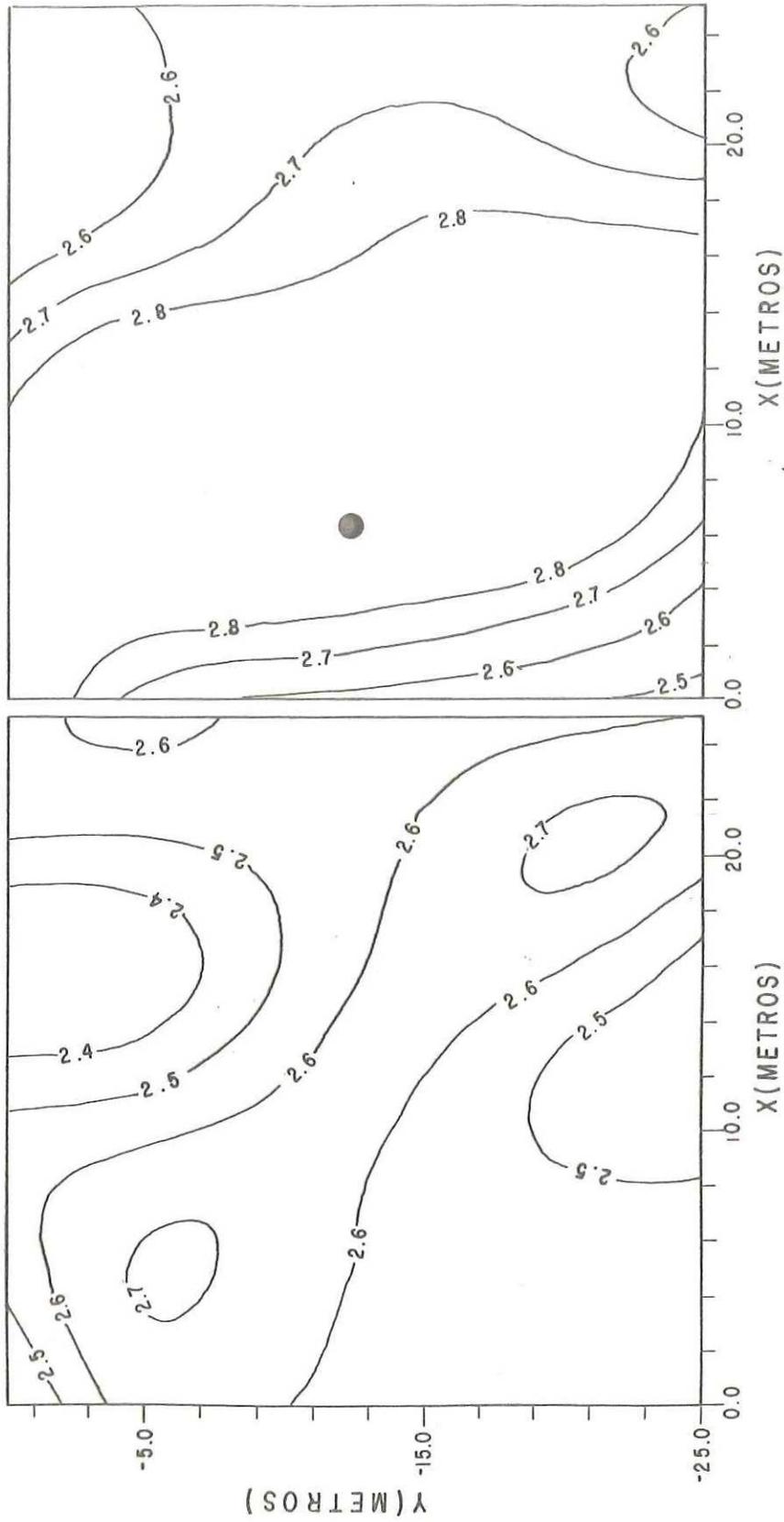


FIG.45.Secciones TEN1-4 y TEN2-4. Soluciones obtenidas con 49 parámetros

TABLA 6. Síntesis de resultados.

Sección	Porcentaje de eigenvalores filtrados.	No. de parámetros	ZBV	ZAV
1 - CM1	90 % de los eigenvalores	121, 49, 25, 16	*	
2 - CM2	"	121	*	
3 - GVAP	"	121	*	
4 - TAC	"	49		*
5 - TEN1-3	"	49, 121	*	
6 - TEN2-3	"	49	*	
7 - TEN1-4	"	49		*
8 - TEN2-4	"	49		*

VI CONCLUSIONES

Podemos resumir las principales conclusiones en los siguientes párrafos:

a) Se ha planteado un esquema no lineal de inversión de tiempos de viaje de ondas sísmicas en medios bi-dimensionales.

b) El problema directo, el cálculo de derivadas parciales y el problema inverso, son resueltos con métodos computacionalmente eficientes. Estos bloques se concatenan en un programa interactivo que muestra gráficamente resultados, que permiten estudiar la estabilidad, residuales, resolución, correlaciones, barras de error, etc. en una misma sesión, haciendo muy eficiente el proceso.

c) Inicialmente, se prueba el esquema con datos sintéticos, diseñando experimentos numéricos que permiten analizar el método en el proceso de estimación.

d) Se ha aplicado el método de inversión de tiempos de viaje a datos reales. Un análisis del contenido de frecuencias en las señales sísmicas, da idea de la escala de

la malla de discretización. Además, el análisis de los residuales permite iniciar el proceso con un modelo adecuado.

El problema resulta ser muy inestable, debido al efecto combinado de los parámetros de los márgenes del modelo, del alto nivel de error en los datos observados (las lecturas de tiempos de viaje de primeros arribos no resultan muy claras, en ocasiones son aventuradas) ya que las señales sísmicas no continen las frecuencias necesarias para resolver el detalle fino de la estructura.

Después de un análisis exhaustivo de la estabilidad y residuales se puede afirmar que las características globales de la estructura de velocidades de ondas sísmicas sí pueden describirse en cada una de las secciones procesadas y que se pueden resolver heterogeneidades laterales del orden de 10 metros.

e) Los resultados obtenidos en este trabajo se han comparado con los de Aranda y otros (1985) y en general los resultados son consistentes entre sí y con los datos de perforación con barrenos.

Es de hacerse notar que con el método tradicional que emplean Aranda y otros (1985) puede identificarse solamente contrastes de velocidad puesto que se discretiza con bloques de velocidad homogénea. En el presente trabajo, se obtienen

gradientes laterales de velocidad que permiten reportar una distribución espacial de velocidades más significativa.

Es importante también hacer notar que Aranda y otros (1986) utilizan discretizaciones muy finas del medio (más o menos 4 veces más que en este trabajo), por lo que probablemente la estimación de sus soluciones lleva mucho tiempo de computadora. Su discretización es demasiado redundante, las soluciones que presentan tienen detalles estructurales que son producto de inestabilidad.

f) Realmente es indispensable tener una idea clara de la resolución espacial que se necesita, antes de proceder a un experimento de este tipo. Diseñar el experimento cuidando que las señales registradas contengan frecuencias de acuerdo a la resolución espacial deseada. Después, es necesario hacer el análisis de residuales.

g) Este método permite estudiar la resolución para detalles estructurales, como se ha comprobado en la sección de experimentos numéricos. Se piensa que con datos que provengan de un experimento diseñado con todas las previsiones ya mencionadas, se podrían optimizar los resultados.

h) El programa se ha aplicado a datos de transmisión de ondas, pero también es aplicable directamente al caso de reflexión y refracción de ondas.

VII LITERATURA CITADA

- Aki, K. 1977. Three dimensional seismic velocity anomalies in the lithosphere, *Journal of Geophysics*, p. 43, 235-242.
- Backus, G. y F. Gilbert. 1970. Uniqueness in the inversion of gross earth data, *Phil. Trans. Roy. Soc. A.*, p. 266, 123-132.
- Bishop, T. N., Bube K. P., Cutler R. T., Langan R. T., Love P. L., Resnick J. R., Shuey R. T., Spindler D. A. and Wyld H. W. 1985. Tomographic determination of velocity and depth in laterally varying media. *Geophysics*, Vol. 50, No. 6.
- Buterlin, J. 1958. Reconocimiento geológico preliminar del territorio de Quintana Roo. *Bol. Asoc. Mex. Geol. Petrol.* X: 9-10. México, D.F.
- Dines, K. A., y R. J. Lytle. 1979. Computerized Geophysical Tomography, *Proceedings of the IEEE*, Vol. 67, No. 7.
- Frez, J. D. 1986. Apuntes del curso de Teoría de Inversión, C.I.C.E.S.E.
- Goraon, R., R. Bender, and G. T. Herman. 1970. Algebraic reconstruction of an object from projections. *J. Theor. Biol.*, p. 29, 471-481.
- Madrid, J. A. y Traslosheros C. 1983. Un modelo sísmico preliminar del campo geotérmico de Cerro Prieto Baja California Norte. *Geof. Int.* Vol. 22-4.
- Neumann, G. 1981. Determination of Lateral Inhomogeneities in reflection seismics by inversion of travelttime residuals, *Geophysical Prospecting*, p. 29, 161-177.

- Madrid, J. A. 1986. New formulae for linear travel time inversion in 2-D heterogeneous media. Theory and results. *Geofisica Internacional*, Vol. 25, No. 3, p. 361-382.
- Mc. Mechan, G. A. 1983. Seismic tomography in boreholes, *Geophys. J. Roy. ast. Soc.*, p. 74, 601-612.
- Menke, W. 1984. The resolving power of cross-borehole tomography. *Geophys. Res. Letters*, Vol. II, No. 2, p. 105-108.
- Spencer, C. y Gubbins D. 1980. Travel-time inversion for simultaneous earthquake location and velocity structure determination in laterally varying media, *Geophys. J. R. ast. Soc.*, p. 63, 95-116.
- Thurber, C. H. 1981. Earth structure and earthquake locations in the Coyote Lake area, central California, Ph. D. thesis, Mass. Inst. of Technol., Cambridge.