

**CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA**

**INVERSION DE DATOS DE POLARIZACION INDUCIDA
PARA MEDIOS UNIDIMENSIONAL QUE PRESENTAN
BAJO CONTRASTES DE RESISTIVIDAD**

**T E S I S
MAESTRIA EN CIENCIAS**

Zulma H. Garcia Lagunas

RESUMEN de la tesis de Zulma Haydee García Lagunas,
presentada como requisito parcial para la obtención del grado
de Maestro en Ciencias en GEOFISICA con opción en GEOFISICA
DE EXPLORACION. Ensenada, Baja California, México.
Noviembre de 1985.

INVERSION DE DATOS DE POLARIZACION INDUCIDA PARA MODELOS
UNIDIMENSIONALES QUE PRESENTAN BAJOS CONTRASTES
DE RESISTIVIDAD

Resumen aprobado por:



Dr. Enrique Gómez Treviño
Director de Tesis

Se elaboró un programa para invertir datos sintéticos de polarización inducida (PI) considerando modelos unidimensionales que presentan bajos contrastes en la resistividad.

Se implementó un programa que genera datos sintéticos de PI para las diferentes configuraciones electródicas, con separaciones múltiples de electrodos.

En este trabajo se considera el problema en forma

discreta, como una aproximación al caso continuo. El problema inverso se plantea en forma lineal, ya que se elimina la dependencia con la profundidad, al considerar capas lo suficientemente pequeñas. Se consideraron los criterios algebraicos de estimación de mínimos cuadrados y mínima longitud para los casos sobredeterminado y bajo determinado.

De las pruebas realizadas con datos sintéticos, se concluye que la solución inversa mediante el operador de mínima norma es satisfactoria, para los modelos que presentan cambios suaves en la polarizabilidad del medio.

En los casos en que existen cambios bruscos de polarizabilidad, se determinan soluciones aproximadas y se recomienda utilizar la aproximación no lineal, que permitirá ajustar a los datos un número de capas pequeño. Para reducir el número de iteraciones se podría tomar como modelo inicial un modelo obtenido en base a la aproximación lineal.

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA

DIVISION DE CIENCIAS DE LA TIERRA

DEPARTAMENTO DE GEOFISICA DE EXPLORACION

INVERSION DE DATOS DE POLARIZACION INDUCIDA PARA MODELOS
UNIDIMENSIONALES QUE PRESENTAN BAJOS CONTRASTES EN
RESISTIVIDAD

TESIS

QUE PARA CUBRIR PARCIALMENTE LOS REQUISITOS NECESARIOS
PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS PRESENTA

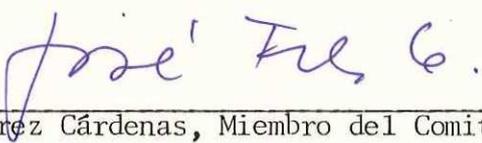
ZULMA RAYDEE GARCIA LAGUNAS

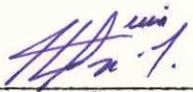
Ensenada, Baja California Noviembre de 1985

TESIS APROBADA PARA SU DEFENSA POR:

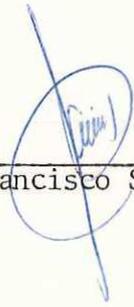

Dr. Enrique Gómez Treviño, Director del Comité


M.C. Raymundo Vega Aguilar, Miembro del Comité


Dr. José Frez Cárdenas, Miembro del Comité


M.C. José Luis Briseño Cervantes, Miembro del Comité


Dr. Mario Martínez García, Jefe del Departamento de Geofísica de Exploración


M.C. Francisco Suárez Vidal, Director de la División de Ciencias de la Tierra


M.C. Cuauhtémoc Nava Button, Director Académico Interino

Tesis presentada en Noviembre 29, 1985

DEDICATORIA

A mis padres

A mis hermanos

A Fernando

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Enrique Gómez Treviño por haber dirigido esta tesis, por su gran interés, su valiosa asesoría y apoyo en todo momento.

A los miembros de mi comité de tesis: M. en C. José Luis Briseño Cervantes, M en C. José Manuel Romo Jones, Dr. José Frez Cárdenas y al M. en C. Raymundo Vega Aguilar por sus sugerencias y comentarios.

A mis amigos por su gran ayuda.

Al CONACyT

Al CICESE

CONTENIDO

I	INTRODUCCION	1
II	PROBLEMA DIRECTO DE PI	5
II.1	INTRODUCCION	5
II.2	TECNICAS DE MEDICION	8
II.3	FORMULACIONES PARA PI	13
II.4	FORMULACION MATEMATICA DE PI PARA MEDIOS ESTRATIFICADOS	16
III	FORMULACION AL PROBLEMA INVERSO	25
III.1	INTRODUCCION	25
III.2	FORMULACION ANALITICA AL PROBLEMA INVERSO	26
III.3	LA INVERSA GENERALIZADA	30
III.4	TRATAMIENTO DEL PROBLEMA INVERSO	39
IV	ELABORACION DEL PROGRAMA	42
V	ANALISIS Y DISCUSION DE RESULTADOS	49
V.1	OPTIMIZACION DEL MUESTREO	49
V.2	ESTABILIDAD Y SOLUCION DEL PROBLEMA	68
V.3	PROBLEMA INVERSO SIN RUIDO	75
V.4	PROBLEMA INVERSO CON RUIDO	76
VI	CONCLUSIONES	87
	LITERATURA CITADA	89
	APENDICE A	92
	APENDICE B	100

LISTA DE FIGURAS

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
2.2.1	Método de PI en el dominio del tiempo, de la frecuencia y de la fase.	10
2.3.1	Modelo del subsuelo con contraste en resistividad y cargabilidad.	15
2.4.1	Sistema de medición de PI para un modelo del subsuelo con capas horizontales.	17
2.4.2	Disposición electródica utilizada para el arreglo Polo-Polo.	21
2.4.3	Disposición electródica utilizada para el arreglo Schlumberguer.	22
2.4.4	Disposición electródica utilizada para el arreglo Wenner.	23
2.4.5	Disposición electródica utilizada para el arreglo Dipolo-Dipolo.	24
5.1.1	Cargabilidades a parentes para el arreglo Schlumberguer. Se utiliza el modelo 1 con el conjunto de aberturas electródicas D3.	51
5.1.2	Cargabilidades aparentes para el arreglo Schlumberguer. Se utiliza el modelo 1 con el conjunto de aberturas electródicas D1.	52

<u>Figura</u>	<u>Página</u>
5.1.3 Cargabilidades aparentes para el arreglo Schlumberguer. Se utiliza el modelo 1 con el conjunto de aberturas electródicas D2.	53
5.1.4 Cargabilidad real y solución inversa, modelo 1. Se utiliza el arreglo Schlumberguer con el conjunto de aberturas electródicas D3.	55
5.1.5 Cargabilidad real y solución inversa, modelo 1. Se utiliza el arreglo Schlumberguer con el conjunto de aberturas electródicas D1.	56
5.1.6 Cargabilidad real y solución inversa, modelo 1. Se utiliza el arreglo Schlumberguer con el conjunto de aberturas electródicas D2.	57
5.1.8 Valor de la función chitarcuadrada al aumentar el número de eigenvalores en la solución. Se utiliza el modelo 1.	58
5.1.8 Cargabilidades aparentes para el arreglo Wenner. Se utiliza el modelo 3 con el conjunto de aberturas D3.	59
5.1.9 Cargabilidades aparentes para el arreglo Wenner. Se utiliza el modelo 3 con el conjunto de aberturas D1.	60

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
5.1.10	Cargabilidades aparentes para el arreglo Wenner. Se utiliza el modelo 3 con el conjunto de aberturas D2.	61
5.1.11	Cargabilidad real y solución inversa, se utiliza el arreglo Wenner con las aberturas D3. Modelo 3.	62
5.1.12	Cargabilidad real y solución inversa, se utiliza el arreglo Wenner con las aberturas D1. Modelo 3.	63
5.1.13	Cargabilidad real y solución inversa, se utiliza el arreglo Wenner con las aberturas D2. Modelo 3.	64
5.1.14	Valor de la función chi-cuadrada al aumentar el número de eigenvalores en la solución. Se utiliza el modelo 2.	66
5.1.15	Comportamiento típico de la función chi-cuadrada al sumtar el número de capas en en el modelo. Modelo 2, arreglos Wenner y Schlumberguer.	67
5.2.1	Curvas típicas de la función chi-cuadrada al aumentar el número de eigenvalores.	69
5.2.2	Desviación estándar para la solución inversa. Modelo 2, se utiliza el arreglo Wenner con aberturas D1.	71

<u>Figura</u>	<u>Página</u>
5.2.3 Filas de resolución para el modelo 2.	72
5.2.4 Desviación estándar para la solución inversa. Modelo 2, se utiliza el arreglo Wenner con aberturas D1.	73
5.2.5 Filas de resolución para el modelo 1.	74
5.3.1 Curvas típicas del valor de la norma del residuo del modelo real e inverso al aumentar el número de eigenvalores.	77
5.4.1 Cargabilidades aparentes para el arreglo Wenner. Se utiliza el modelo 4, con el conjunto de aberturas D1.	79
5.4.2 Cargabilidad real y solución inversa, Modelo 3, se utiliza el arreglo Wenner con el conjunto de aberturas D1.	80
5.4.3 Valor de la función chi-cuadrada al aumentar el número de eigenvalores en la solución. Modelo 3.	81
5.4.4 Filas de resolución para el modelo 4.	82
5.4.5 Cargabilidad real y solución inversa, Modelo 4, se utiliza el arreglo Schlumberguer, se consideran 7 eigenvalores en la solución.	84
5.4.6 Cargabilidad real y solución inversa, Modelo 4, se utiliza el arreglo Schlumberguer, se consideran 17 eigenvalores en la solución.	85

5.4.7 Filas de resolución para el modelo 4, se
utiliza el arreglo Schlumberger.

I.- INTRODUCCION

El método de Polarización Inducida (PI) es uno de los métodos eléctricos de prospección geofísica. El método está basado en un fenómeno estimulado por corriente eléctrica y es observado como un decaimiento de voltaje en los materiales del subsuelo.

La principal aplicación práctica del método consiste en la búsqueda de depósitos minerales y su principal ventaja es la capacidad de detectar, bajo situaciones favorables, la presencia de muy pequeñas cantidades de minerales. La magnitud de la respuesta de PI generalmente se incrementa con la superficie de la mineralización y entonces el método es una técnica particularmente útil en áreas de mineralización diseminada donde otros métodos de exploración geofísica son menos efectivos. Ejemplos sobre este tipo de aplicaciones pueden encontrarse en textos sobre Prospección Geofísica (Orellana, 1974; Telford, 1975 y otros).

Por otro lado Vacquier y otros (1957) y Frische y Butlar (1959), estudiaron la posibilidad de utilizar PI como una herramienta auxiliar para exploración de agua subterránea. Desde entonces, una serie de investigadores Rokitianski (1957), Marshall y Madden (1959), Keevil y Ward (1962), Anderson y Keller (1964) y Oyilvi y Kuzmina (1972), han

estudiado los varios aspectos del efecto de membrana de PI sobre un medio arena-arcilla y sobre la posibilidad de utilizar el método como una herramienta para la exploración de agua subterránea. Actualmente los sondeos de PI pueden ser realizados en combinación con sondeos de resistividad para una mejor resolución de las formaciones del subsuelo (Roy y Elliot, 1980).

En cuanto a la forma de interpretar los sondeos de PI, ésta se hace generalmente utilizando curvas patrón. Este método de interpretación es simple, rápido y suficientemente exacto, pero tiene la desventaja de que no han sido publicadas muchas curvas maestras para PI. El conjunto más completo de curvas ha sido compilado por Elliot (1978). En cuanto a técnicas automáticas de inversión, estas no han sido utilizadas en interpretación de sondeos de Polarización Inducida.

Sin embargo, Pelton, Rijo y Swift (1978) aplican métodos de inversión para el caso de modelos bidimensionales. Desafortunadamente cada inversión requiere de una gran cantidad de cálculos para resolver el problema directo entonces, para obtener velocidad y costos razonables es esencial reducir el tiempo de cálculo para el problema directo. Pelton y otros (1978) almacenan respuestas de modelos en bancos de datos que contengan soluciones para el

intervalo de combinaciones de parámetros esperados. Una vez que el banco de datos ha sido creado, es posible obtener soluciones al problema inverso con un menor costo de tiempo de cómputo.

El objetivo del presente trabajo es la elaboración de un programa de inversión de datos de PI para modelos unidimensionales que presenten poco contraste en resistividad y considerando la cargabilidad como una función arbitraria de la profundidad. La solución al problema directo está basada en los resultados de Elliot y Lauritsen (1977), Gómez Treviño (1984) y De la Garza Guajardo (1984).

Si el problema inverso se plantea en términos de un subsuelo estratificado donde los espesores y las cargabilidades del medio aparecen como incógnitas, la formulación conduce a un problema no lineal.

Por otro lado, si la inversión se plantea en términos de una función arbitraria de cargabilidad con la profundidad, se elimina la dependencia con la profundidad considerando capas lo suficientemente pequeñas y se obtiene un problema lineal. En éste trabajo se seguirá ésta última alternativa.

Las convenciones utilizadas referente a la notación serán las siguientes: los escalares serán referidos con

letra cursiva y letras griegas minúsculas (ej. $\rho, \mathcal{F}, \mathcal{L}, \phi, \lambda, \rho$), los vectores (considerados siempre como matrices columna) por letras minúsculas (ej. a, c, p, x) y las matrices u operadores por letras mayúsculas (ej. F, L, Λ, B).

El capítulo II comprenderá la formulación matemática para el problema directo de PI, el capítulo III la formulación inversa, en el capítulo IV se considerará la elaboración del programa, el capítulo V tratará el análisis de la inversión y el capítulo VI consistirá de las conclusiones.

II.- PROBLEMA DIRECTO DE POLARIZACION INDUCIDA

II.1.- INTRODUCCION

El efecto de PI está relacionado con fenómenos electroquímicos y electrocinéticos que aparecen cuando se hace fluir corriente eléctrica por los materiales del subsuelo.

Los fenómenos electroquímicos son aquellos que tratan con los cambios y reacciones químicas producidas por la electricidad, y los electrocinéticos estudian los efectos de la electricidad en movimiento. Ambos y especialmente sus interacciones combinadas son importantes para entender el fenómeno de PI, a continuación se señalan los aspectos más sobresalientes.

Existe una diferencia de potencial a través de un electrodo de metal y un electrolito, aún cuando no fluya corriente a través de la interface y es debido a la existencia de una capa de iones presente en la solución cercana a el sólido (capa fija).

Esta capa de iones crea una capacitancia cuando sus efectos eléctricos se toman junto con los electrones cercanos

a la superficie o iones dentro del sólido. En la solución, la capa difusa que sigue a la capa fija, está esencialmente conectada a esta última electrostáticamente, por tal motivo cuando fluye corriente las resistividades de las rocas son menores que las predichas por la ley de Archie.

Una desviación del voltaje de equilibrio en un electrodo se conoce como polarización de electrodo, y tal desviación en las rocas es debido a reacciones interfaciales electroquímicas y a acumulaciones iónicas en el fluido de los poros cercanos a las superficies de incrustaciones minerales metálicas. Estas acumulaciones iónicas se oponen al flujo de corriente que las crea y se dice que polarizan la interface.

Los iones en el estrato difuso, los cuales disminuyen exponencialmente con la distancia, pueden tener el mismo signo u opuesto que aquellos en el estrato fijo, dependiendo de la densidad de corriente y la dirección del flujo.

La presencia de un estrato doble, que consiste de un estrato fijo y un electrodo cargado, influenciará la conducción a través de la interface causando una capacitancia, la cual está en serie con la capacitancia del estrato difuso y que será aproximadamente independiente de la frecuencia para altos valores de ésta y viceversa. El decaimiento de potencial a través de la capa difusa se conoce

como potencial z .

Otro factor que influye para la PI es la polarización de membrana, la cual es superficialmente parecida a la polarización de electrodo, pero ninguna reacción química toma lugar en la interface sólido-líquido.

En esta polarización debido a la diferencia de movilidad de los iones dentro del conductor electrolítico se crean acumulaciones iónicas, entonces los gradientes de concentración así desarrollados se oponen al flujo de corriente causando un efecto polarizante.

La principal diferencia entre la polarización de membrana y de electrodo es la magnitud de la respuesta, pues el efecto de membrana es mucho menor por lo general.

La polarización se entiende entonces que se crea por exceso de acumulaciones iónicas en las interfaces, y este mecanismo reduce la cantidad de flujo de corriente. Las reacciones electroquímicas y carga de difusión influyen grandemente en la magnitud de la polarización.

Cuando el flujo de corriente cesa, por acción de las fuerzas de la ley de Coulomb, entre los iones que intervinieron en el proceso de polarización, comienzan a

regresar a sus posiciones de equilibrio.

Esta relajación constituye un flujo de carga que puede ser medido como potencial de polarización que decae en un tiempo t el cual es medido en el método de prospección de Polarización Inducida.

En realidad, las reacciones electroquímicas exactas y las condiciones de movilidad y difusión de iones no son todavía bien conocidas en el sistema natural. Aún cuando el fenómeno de PI es básicamente electroquímico, los sistemas son realmente muy complejos para ser representados por un conjunto de reacciones químicas y termodinámicas, por tanto, es conveniente utilizar analogías macroscópicas simplificadas, como circuitos eléctricos, ecuaciones de difusión, etc.

II.2 TECNICAS DE MEDICION

Las configuraciones electródicas que se utilizan en sondeos de PI son: Wenner, Schlumberguer, Polo-Polo y Dipolo-Dipolo. Como en el método de resistividad, los sondeos se llevan a cabo a través de un incremento gradual en la separación de electrodos.

Los sondeos de PI se realizan normalmente en 2 dominios diferentes: en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia (o dominio de la fase).

DOMINIO DEL TIEMPO

En el dominio del tiempo se hace fluir corriente a través de las formaciones de la tierra para polarizar el medio, la corriente es entonces interrumpida y corriente despolarizante empieza a fluir disminuyendo ésta con el tiempo.

El decaimiento de voltaje puede ser significativo en un intervalo de algunos minutos a algunas horas y la duración del pulso puede ser de algunos segundos a algunos minutos con cambios alternantes en la polaridad (fig. 2.2.1.A).

La razón del voltaje primario V_p , antes de la interrupción de la corriente, al voltaje secundario V_s inmediatamente después de la interrupción, es una propiedad física del medio y se conoce como la cargabilidad del medio η .

Para eludir acoplamiento electromagnético y capacitivo, así como otros ruidos, se introducen tiempos de retardo del

orden de 50-500 msec en el circuito de medición.

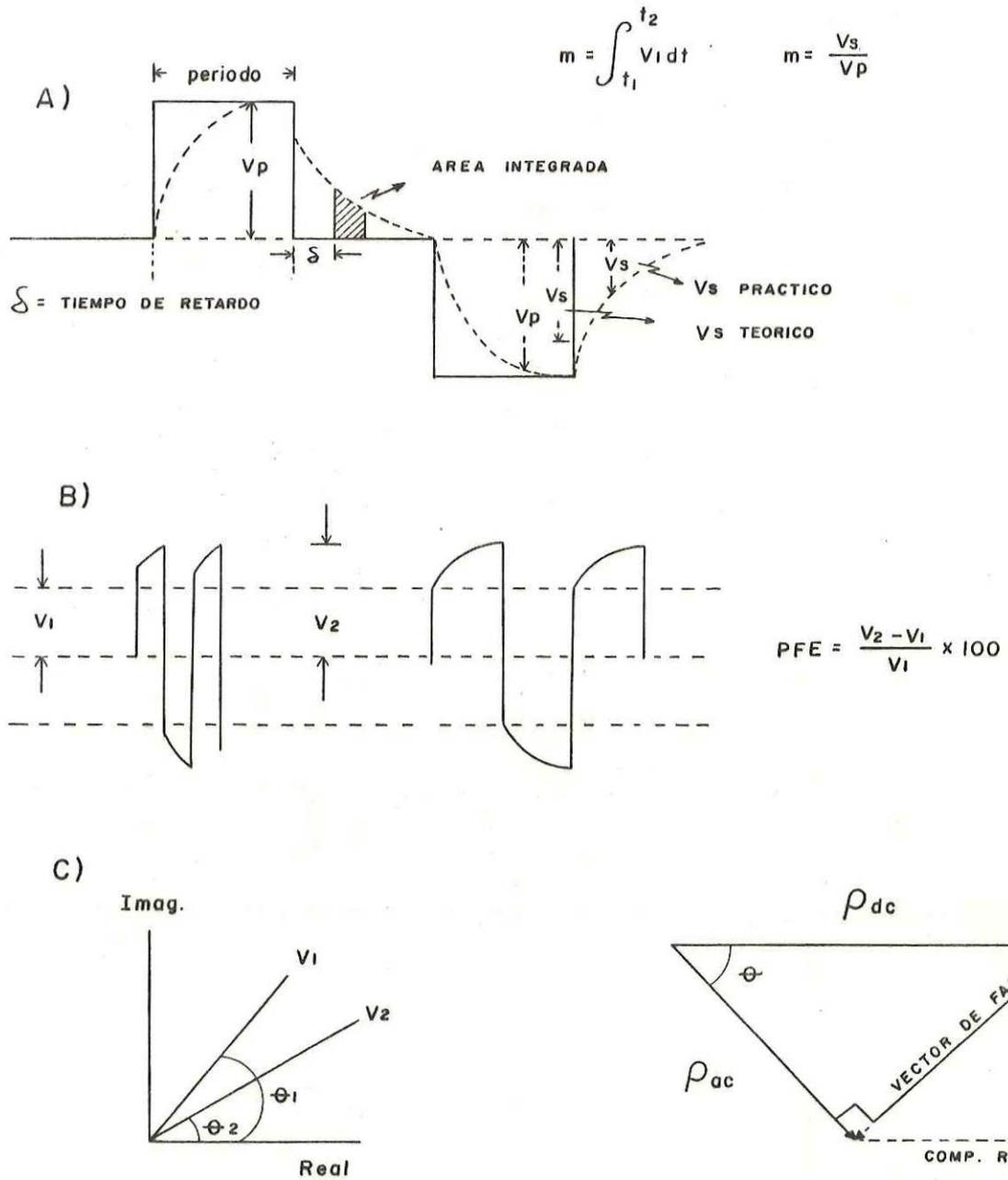


Fig. 2.2.1.- Metodo de ρI , (A) Dominio del tiempo, (B) Dominio de la frecuencia y (C) Dominio de la fase.

La polarizabilidad o cargabilidad de un medio se puede expresar en milisegundos integrando el área bajo la curva de decaimiento sobre un cierto intervalo de tiempo, o en forma adimensional considerando la razón del voltaje de polarización un instante después del período de tiempo de retardo al voltaje primario.

METODO EN EL DOMINIO DE FRECUENCIA

En lo que respecta al método de PI, el subsuelo se comporta como una combinación de resistores y capacitores imperfectos.

El comportamiento de PI en el subsuelo es similar y/o análogo a la carga y descarga de un capacitor. La impedancia de un capacitor cambia con la frecuencia y la razón del cambio de ésta depende del valor de la capacitancia. Este es el punto de partida del método de PI en este dominio.

En el dominio de la frecuencia (fig. 2.2.1.B), dos frecuencias muy bajas y ampliamente separadas se eligen para operar (ej. 0.5 y 5 Hz), las frecuencias mayores son eludidas para eliminar el acoplamiento electromagnético.

Los datos en el dominio de la frecuencia se expresan en

la forma de efecto de frecuencia porcentual y se define como

$$PFE = \frac{(\rho_{dc} - \rho_{ac}) 100}{\rho_{ac}} \quad (2.2.1)$$

donde ρ_{dc} y ρ_{ac} son respectivamente las resistividades en las frecuencias menor y mayor.

La resistividad de una formación del subsuelo se expresa como

$$\rho = K \frac{\Delta V}{I} \quad (2.2.2)$$

cuando se obtiene a través de configuraciones electródicas estándar. Controlando K e I (factor geométrico y la corriente) simultáneamente, se puede calibrar ρ para ser proporcional a ΔV , es decir

$$PFE = \frac{(V_2 - V_1) 100}{V_2} \quad (2.2.3)$$

Backer (1974) desarrolló la interpretación de datos de sondeos de PI en el dominio de la frecuencia y calculó curvas maestras para casos de 2 estratos. Nadie más ha tratado de interpretar sondeos de PI en el dominio de la frecuencia.

METODO EN EL DOMINIO DE LA FASE

En el dominio de la frecuencia de PI, los dos voltajes V_1 y V_2 de las dos frecuencias diferentes no están en la misma fase y tendrán una rotación distinta del vector voltaje en el dominio de la fase, así, el ángulo de rotación de la fase será una medida de polarizabilidad. Los valores del ángulo de fase pueden ser correlacionados con datos en tiempo o en el dominio de la frecuencia.

La técnica de campo de instrumentación e interpretación se encuentra en desarrollo y no han sido reportados sondeos de PI para problemas de subsuelo estratificado.

II.3 FORMULACIONES PARA PI

La cargabilidad observada en la superficie del subsuelo η_a , la cual es un efecto indirecto de las cargabilidades de los diferentes estratos η_i , puede considerarse como promedio o media ponderada de éstos. Esta cargabilidad, denominada aparente, es la cargabilidad del subsuelo si éste se considera como un medio homogéneo e isotrópico.

Entonces, para conocer las cargabilidades del medio en función de las mediciones superficiales es necesario conocer

la relación que existe entre éstas.

Existen soluciones analíticas para la cargabilidad aparente observada que corresponden a geometrías simples y para las cuales es posible plantear la solución como un problema de valores en la frontera. Si se consideran modelos más complicados, se hace necesario utilizar métodos numéricos para resolver las ecuaciones correspondientes.

Los métodos más usuales son: método de elementos finitos (Coggon, 1971), el método de diferencias finitas (Geoscience 1965) y el método de ecuaciones integrales (Snyder, 1976).

La formulación matemática más utilizada para la cargabilidad aparente es la formulación planteada por Seigel (1959). Seigel demostró que la expresión para la respuesta de PI está fundamentalmente representada por una distribución de volúmenes dipolares de partículas conductoras.

Supongamos un semiespacio homogéneo con resistividad y cargabilidad cero, a una cierta profundidad se encuentra inmerso en ese semiespacio un material de dimensiones finitas con resistividad ρ' y cargabilidad N diferente de cero como se muestra en la fig. (2.3.1).

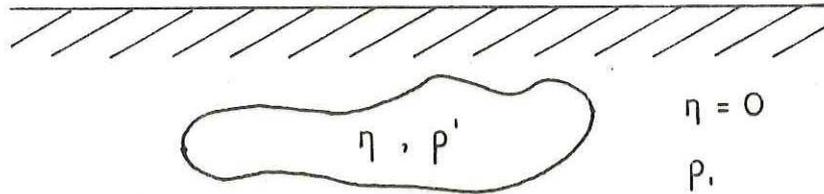


Fig. 2.3.1 Modelo del subsuelo con contraste en resistividad η y cargabilidad ρ .

La polarizabilidad aparente η_a observada en la superficie de la tierra dependerá de la posición de los electrodos r , de la polarizabilidad η , del contraste en resistividad y de la profundidad y geometría del material polarizable.

Según la formulación de Seigel, η_a puede escribirse como:

$$\eta_a = \eta \frac{\partial (\ln \rho_a)}{\partial (\ln \rho')} \quad (2.3.1)$$

es decir, η_a es proporcional a η a través de un factor que depende de todos los demás parámetros.

En la práctica se mide η_a y ρ_a a lo largo de perfiles en la superficie de la tierra, de estas mediciones se

inferen los parámetros del modelo.

El problema de modelar polarización inducida está entonces íntimamente relacionado con el problema de modelar resistividad aparente.

Si se representa a las resistividades de los diferentes medios por ρ , las polarizabilidades o cargabilidades por η , las posiciones de los diversos electrodos por r y por g la geometría de los diferentes medios se puede escribir η_a y ρ_a como:

$$\eta_a = F (\kappa, g, \rho, \eta) \quad (2.3.2.a)$$

y

$$\rho_a = F (\kappa, g, \rho) \quad (2.3.2.b)$$

La solución al problema de modelado matemático consiste entonces en calcular ρ_a y η_a para valores particulares de r , ρ , η y g .

II.4 FORMULACION MATEMATICA DE PI PARA MEDIOS ESTRATIFICADOS

Se utiliza la formulación de Seigel para obtener una expresión para la polarizabilidad aparente en un medio en que la polarizabilidad varía solamente con la profundidad.

Se toma como modelo inicial un subsuelo compuesto por capas horizontales y se harán tender a cero los espesores de las capas.

El modelo de capas horizontales, homogéneas e isotrópicas se muestra en la figura (2.4.1) en la cual se representa por ρ el conjunto de resistividades, por t el conjunto de espesores, por η el conjunto de polarizabilidades y por r el conjunto de separaciones electródicas que caracterizan al sistema de medición.

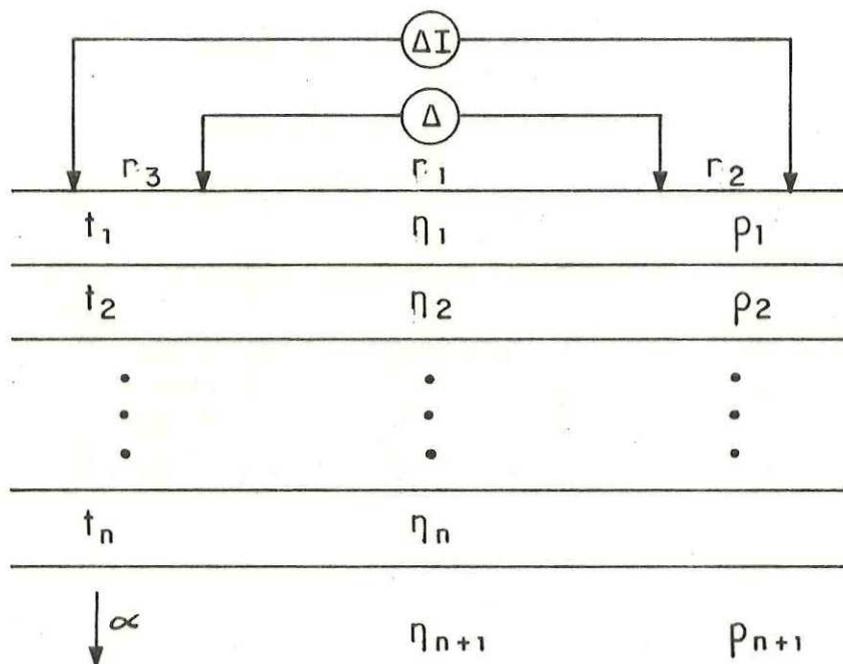


Fig. 2.4.1 Sistema de medición para un modelo del subsuelo de capas horizontales. I es la corriente, V la diferencia de potencial, t son espesores, η las cargabilidades y ρ resistividades.

De acuerdo a la formulación de Seigel se puede escribir η_a como:

$$\eta_a (t, \eta, \rho, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i}{\rho_a} \frac{\partial \rho_a}{\partial \rho_i} \eta_i \quad (2.4.1)$$

La dependencia de η_a con los parámetros r y de los espesores t está implícita a través de ρ_a .

La ecuación (2.4.1) puede generalizarse para medios continuos (Gómez Treviño, 1984). Para esto se hace tender a infinito el número de capas a la vez que los espesores tienden a cero. De esta manera el semiespacio queda dividido en un número infinito de capas de espesores infinitesimales.

Para este caso

$$\eta_a = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ t \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i}{\rho_a} \frac{\partial \rho_a}{\partial \rho_i} \eta_i \quad (2.4.2)$$

y dado que ρ_a depende implícitamente de t_i , para t_i muy pequeño se tiene que

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial \rho_i} = G(z_i) (z_{i+1} - z_i) \quad (2.4.3)$$

la constante de proporcionalidad dependerá de la profundidad a la cual se encuentra la i -ésima capa por lo que se puede escribir

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial \rho_i} = G(z_i) (z_{i+1} - z_i) \quad (2.4.4)$$

donde $G(z_i)$ representa la constante de proporcionalidad para la capa que se encuentra a una profundidad z_i .

Sustituyendo (2.4.4) en la ecuación (2.4.2) se tiene

$$\eta_a = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta z_i \rightarrow 0}} \sum \frac{\rho_i}{\rho_a} G(z_i) \eta_i \Delta z_i \quad (2.4.5)$$

y reemplazando z_i por z , ρ_i por $\rho(z)$ y η_i por $\eta(z)$ esta ecuación puede escribirse como

$$\eta_a = \int_0^{\infty} \frac{\rho(z)}{\rho_a} G(z) \eta(z) dz \quad (2.4.6)$$

La ecuación anterior es ahora aplicable al caso de dependencia arbitraria de la cargabilidad η como función de la profundidad. La función $G(z)$ representa la derivada generalizada (derivada de Frechet) de ρ_a con respecto a $\rho(z)$.

Cuando la resistividad es aproximadamente constante, η_a puede calcularse como

$$\eta_a = \int_0^{\infty} G(z) \eta(z) dz \quad (2.4.7)$$

En este caso $G(z)$ solo depende de la profundidad y la

expresión (2.4.7) representa una ecuación integral lineal. El problema inverso consiste entonces en obtener $\eta(z)$ a partir de η_a la cual es una función de la separación de los electrodos y de los parámetros del modelo.

En este trabajo representaremos $G(z)$ mediante una función escalonada, esto es, asumiremos que es constante en pequeños intervalos de profundidad. En este caso η_{aj} puede expresarse como:

$$\eta_{aj} = \sum B_{ij} \eta_i \quad (2.4.8)$$

donde

$$B_{ij} = \int_{z_i}^{z_{i+1}} G_j(z) dz \quad (2.4.9)$$

Las expresiones de estos coeficientes para los arreglos a utilizar serán dadas a continuación. Estas expresiones están basados en los resultados de Elliot y Lauritsen (1977) y Gómez Treviño y de la Garza Guajardo (1984).

Arreglo Polo-Polo: En este arreglo los dos electrodos (polos) uno de corriente y uno de potencial se separan sucesivamente sobre una línea al efectuar las mediciones como se muestra en la fig.(2.4.2) y para este caso los coeficientes son:

$$B_{ij} = \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{4z\kappa}{(\kappa^2 + 4z^2)^{3/2}} dz \quad (2.4.10)$$

6

$$B_i = \frac{\kappa}{(\kappa^2 + 4z_{i-1}^2)^{1/2}} - \frac{\kappa}{(\kappa^2 + 4z_i^2)^{1/2}} \quad (2.4.11)$$

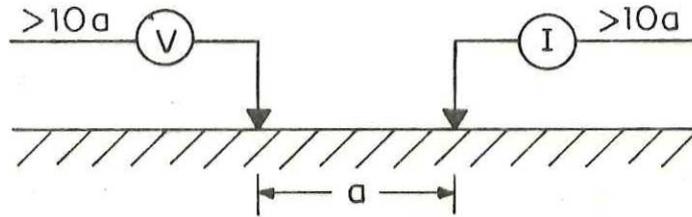


Fig. 2.4.2 Disposición electródica utilizada para el arreglo Polo - Polo. V es la diferencia de potencial e I la corriente.

Arreglo Schlumberguer: En este arreglo los electrodos de corriente se separan sucesivamente y los electrodos de potencial se mantienen fijos para mediciones sucesivas de la cargabilidad aparente (fig.2.4.3).

Los electrodos se encuentran sobre una línea recta y los coeficientes están dados por

$$B_i = \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{12z\kappa^3}{(\kappa^2 + 4z^2)^{5/2}} dz \quad (2.4.12)$$

que al integrar se obtiene

$$B_i = \frac{\kappa^3}{(\kappa^2 + 4z_{i-1}^2)^{3/2}} - \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + 4z_i^2)^{3/2}} \quad (2.4.13)$$

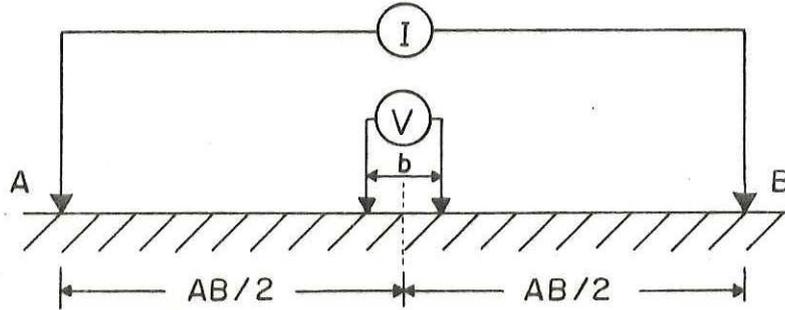


Fig. 2.4.3 Disposición electródica utilizada para el arreglo Schlumberger. V es la diferencia de potencial, I la corriente y κ es un factor constante.

Arreglo Wenner: Es un arreglo simétrico igualmente espaciado en el cual se separan sucesivamente los electrodos para efectuar las mediciones fig. (4.2.4). Los coeficientes para este arreglo están dados por

$$B_i = \int_{z_i}^{z_{i+1}} 8za \left(\frac{1}{(a^2 + 4z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(4a^2 + 4z^2)^{3/2}} \right) dz \quad (2.4.14)$$

que resolviendo la integral se reducen a

$$B_i = \frac{2a}{(a^2 + 4z_{i-1}^2)^{1/2}} - \frac{2a}{(a^2 + 4z_i^2)^{1/2}} - \frac{2a}{(4a^2 + 4z_{i-1}^2)^{1/2}} + \frac{2a}{(4a^2 + 4z_i^2)^{1/2}} \quad (2.4.15)$$

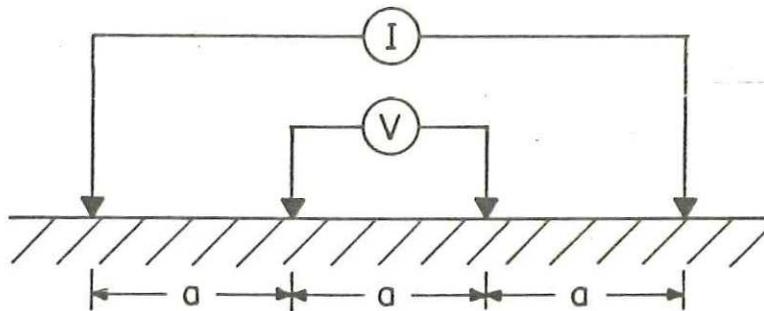


Fig. 2.4.4 Disposición electródica utilizada para el arreglo Wenner. V es la diferencia de potencial e I la corriente.

Arreglo Dipolo- Dipolo: En este arreglo un dipolo (un par de electrodos) envía corriente dentro del subsuelo y el otro sirve para medir la diferencia de potencial, éstos dipolos se van separando para mediciones sucesivas de cargabilidad.

El par de dipolos es usualmente colineal (fig. 2.4.5), pero otras orientaciones son posibles, los coeficientes de peso para este arreglo son:

$$B_i = \frac{an(n+1)(n+z)}{2} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \left(\frac{4z}{\{(na)^2 + 4z^2\}^{3/2}} + \frac{4z}{\{(n+2)a^2 + 4z^2\}^{3/2}} - \frac{8z}{\{((n+1)a)^2 + 4z^2\}^{3/2}} \right) dz \quad (2.4.16)$$

y resolviendo la integral

$$\begin{aligned}
 B_i = & \frac{an(n+1)(n+2)}{2} \left\{ \frac{1}{((na)^2 + 4z_{i-1}^2)^{1/2}} - \frac{1}{((na)^2 + 4z_i^2)^{1/2}} \right. \\
 & - \frac{1}{((n+2)a^2 + 4z_i^2)^{1/2}} - \frac{2}{(((n+1)a)^2 + 4z_{i-1}^2)^{1/2}} \\
 & \left. + \frac{1}{((n+2)a^2 + 4z_{i-1}^2)^{1/2}} + \frac{2}{(((n+1)a)^2 + 4z_i^2)^{1/2}} \right\}
 \end{aligned}$$

(2.4.17)

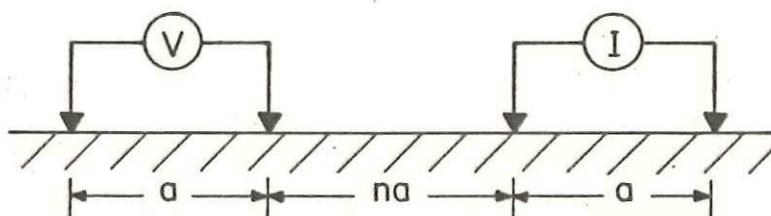


Fig. 2.4.5 Disposicion electroda utilizada para el arreglo Dipolo - Dipolo. V es la diferencia de potencial, I la corriente y n es un factor constante.

III.- FORMULACION AL PROBLEMA INVERSO

III.1 INTRODUCCION

Muchos problemas involucran la estimación de un número de parámetros incógnitas, los cuales tienen relaciones lineales o quasi-lineales para un conjunto de datos experimentales. Los datos están contaminados por errores aleatorios, pueden ser insuficientes para determinar las incógnitas, redundantes o todo a la vez.

El problema inverso se formula como una ecuación matricial mal propuesta y se establecen criterios generalés para construir una matriz inversa (Wiggins, 1972). La solución al problema se define entonces en términos de un conjunto de eigenvectores generalizados de la matriz que relaciona las observaciones con las incógnitas.

Para establecer la solución es posible elegir el número de eingevalores necesarios para optimizar la resolución proveniente de los datos, el error esperado en la solución, el ajuste a los datos, la proximidad a la solución para una función arbitraria de cargabilidad o alguna combinación de lo anterior. Debido a la no-unicidad de la solución se establecen los criterios clásicos de mínima norma y mínimos

cuadrados.

III.2 FORMULACION ANALITICA DEL PROBLEMA INVERSO

Se desea determinar un conjunto de cargabilidades de las capas η_j , $j=1, \dots, m$, de un conjunto de cargabilidades aparentes η_{ai} $i=1, \dots, n$. Estas cargabilidades aparentes están funcionalmente relacionadas a η_j en una forma conocida, que para el caso del presente trabajo puede escribirse como

$$\eta_{ai} = B(\kappa, z) \eta_j \quad (3.2.1)$$

La cargabilidad aparente es función de las cargabilidades individuales de las capas y los coeficientes correspondientes al arreglo electródico utilizado. La dependencia con la profundidad se elimina al considerar capas delgadas. También se elimina la dependencia en ρ debido a que se consideran pequeños contrastes en la resistividad. La técnica de inversión consiste de las siguientes operaciones:

1.-Obtener la relación funcional para predecir datos teóricos dado un modelo particular.

2.-Linealizar la relación, en caso de que ésta no lo

sea.

3.-Asumir un conjunto de parámetros del modelo inicial los cuales el método inverso inicialmente utiliza para realizar el ajuste entre los datos observados y teóricos en la región de la solución inicial.

En cuanto al punto 2 se tiene lo siguiente:

LINEALIZACION: La ecuación (3.2.1) puede ser una ecuación lineal, esto es, las cargabilidades del medio contenidas en el vector p , pueden estar relacionadas al vector de cargabilidades aparentes η_a por la ecuación matricial

$$\eta_a = a^t p \quad (3.2.2)$$

donde el vector a (a^t es la transpuesta de a) es un vector de coeficientes, los cuales se obtienen de la solución del problema directo y están dados por (2.4.10 - 2.4.16).

Para el caso en que se consideren varias cargabilidades aparentes η_a (contenidas en el vector c), se puede escribir

$$c = A p \quad (3.2.3)$$

donde A es la matriz de coeficientes.

Entonces, dado c como dato observado, A obtenida del problema directo y de la existencia de la inversa de A (denotada por A^{-1}), pueden encontrarse directamente los parámetros del subsuelo por medio de

$$p = A^{-1} c \quad (3.2.4)$$

Si el sistema de ecuaciones no es lineal, un método comúnmente utilizado para generar un sistema de ecuaciones lineales es el desarrollo de la función en una serie de Taylor. La expansión se realiza alrededor de algún punto p^0 en el espacio de los parámetros incógnitas de dimensión m y en algún punto x^0 en el espacio de los parámetros conocidos, de dimensión n . Despreciando todos los términos mayores que el primero, se obtiene

$$G(x^0, p) = G(x^0, p^0) + \sum_{j=1}^m (p_j - p_j^0) \left. \frac{\partial G(x, p)}{\partial p_j} \right|_{\substack{p=p^0 \\ x=x^0}} \quad (3.2.5)$$

donde p_j es el j -ésimo parámetro incógnita y entonces la ecuación anterior puede escribirse como

$$\Delta G(x^0, p) = \sum_{j=1}^m \Delta p_j \left. \frac{\partial G(x, p)}{\partial p_j} \right|_{\substack{p=p^0 \\ x=x^0}} \quad (3.2.6)$$

donde

$$\Delta G(x^0, p) = G(x^0, p) - G(x^0, p^0) \quad (3.2.7)$$

$$\Delta p_j = p_j - p_j^0 \quad j=1, \dots, M \quad (3.2.8)$$

Si se escribe (3.2.7) para n puntos en el espacio x , se obtiene un sistema de n ecuaciones e igualando a los datos teóricos se puede escribir

$$\Delta G = A \Delta p \quad (3.2.9)$$

donde

$$\Delta G_i = G_i(x^i, p) - G_i(x^i, p^0) \quad i=1, \dots, N \quad (3.2.10)$$

Esto es, A es una matriz $n \times m$ cuyos elementos son

$$A_{ij} = \left. \frac{\partial G_i(x, p)}{\partial p_j} \right|_{\substack{x=x_i \\ p=p^0}} \quad (3.2.11)$$

ΔG es el vector columna de las diferencias entre los y los valores teóricos calculados. Por otro lado Δp es el vector columna de las diferencias entre los parámetros supuestos p^0 y los parámetros verdaderos p .

Una solución de ese sistema lineal debería conducirnos a la determinación de los parámetros verdaderos. Sin embargo el sistema de ecuaciones actualmente representa una relación no lineal, ya que las derivadas de orden mayor a uno existen pues a pesar de que se ha decidido ignorarlas, su contribución aún cuando es pequeña no es despreciable, así en

este caso se requiere de varias iteraciones para obtener una mejor estimación de los parámetros del modelo.

III.3 LA INVERSA GENERALIZADA

Se ha descrito ya en el punto III.2 una de las formas de linealizar el problema, entonces se puede encontrar la solución del sistema de ecuaciones como

$$p = H g \quad (3.3.1)$$

donde p y g corresponden a Δp y ΔG si se ha linealizado el sistema y donde H es un operador matricial.

Si multiplicamos a ambos lados de (3.2.5) por HA obtenemos

$$H A p = H g \quad (3.3.2)$$

lo cual implica que $HA = Im$ de (3.3.1-2) y donde Im es la matriz identidad $m \times m$.

En el caso particular en que A es una matriz cuadrada $m \times m$ no singular, entonces H es simplemente igual a A^{-1} , pero si el sistema es indeterminado o sobredeterminado la inversa generalizada es, para el caso de mínimos cuadrados

$$H = (A^t A)^{-1} A^t \quad (3.3.3)$$

ó, para el caso de mínima longitud _____
(3.3.4)

$$H = A^t (A A^t)$$

Se formulará ahora la solución para el problema inverso utilizando el concepto de la inversa natural desarrollado por Penrose (1955) y Lanczos (1961).

El problema se trata como un problema de eigenvalores y el sistema $n \times m$ se extiende para incluir el sistema adjunto como

$$A V = U \Lambda \quad (3.3.5)$$

y

$$A^t U = V \Lambda \quad (3.3.6)$$

donde Λ es la matriz diagonal de los eigenvalores (λ 's) de A , mientras que U y V son matrices de eigenvectores asociados con los parámetros y las observaciones respectivamente.

Por el teorema de descomposición de matrices (Lanczos 1961) se puede escribir

$$\bar{A} = U \Lambda V^t \quad (3.3.7)$$

donde U es la matriz $n \times m$ cuyas columnas son los eigenvectores u_i , V es la matriz $m \times m$ cuyas columnas son los eigenvectores

vi y Λ es la matriz cuyos elementos diferentes de cero son los eigenvalores λ localizados en la diagonal.

La inversa natural dada por Lanczos (1961) es:

$$H = V \Lambda^{-1} U^t \quad (3.3.8)$$

La ventaja de definir H de acuerdo a (3.3.8) se hace patente si existe dependencia lineal entre algunas filas o columnas de A.

El rango q de A es

$$q \leq \min \{m, n\} \quad (3.3.9)$$

y si existe dependencia lineal entre las filas de A se obtendrán eigenvalores cero o muy pequeños, lo cual tendrá como consecuencia la singularidad de la matriz H.

Para evadir la singularidad de H se pueden eliminar los eigenvalores nulos o muy pequeños, entonces H se define como:

$$H_q = V_q \Lambda_q^{-1} U_q^t \quad (3.3.10)$$

donde H_q es la inversa natural mxn de rango reducido y el subíndice q indica que solo los q eigenvalores diferentes

de cero y sus eigenvectores asociados en U y V se consideran.

Los eigenvalores no nulos que son muy pequeños, al incluirlos conducen a una gran varianza en la determinación de las incógnitas, por lo cual pueden omitirse también.

El omitir eigenvalores tiene como consecuencia que

$$H_q A \neq Im \quad (3.3.11)$$

es decir, la solución encontrada \hat{p} es la aproximación a p .

El operador H será una buena matriz inversa si satisface los siguientes criterios:

a) $HA=Im$, la matriz identidad $m \times m$. Esto es una medida de la unicidad de la solución, puesto que puede existir una solución única solo si $HA=Im$

b) La incertidumbre en p no es tan grande, i.e., la varianza de \hat{p} es pequeña.

Backus y Gilbert (1968) señalaron que para sistemas bajo-determinados, el producto matricial HA tiene un significado físico relacionado con el establecimiento de las

propiedades de unicidad de las soluciones, es decir

$$\hat{p} = R p \quad (3.3.12)$$

donde

$$R = H A \quad (3.3.13)$$

La matriz R mapea el conjunto entero de soluciones p dentro del vector \hat{p} . Cualquier elemento de \hat{p} digamos \hat{p}_k , se puede interpretar como el resultado del producto de la k -ésima fila de R con algún vector que satisface

$$c = A p \quad (3.3.14)$$

La matriz R es entonces una matriz cuyas filas son "ventanas" a través de las cuales se puede "ver" la solución general p y obtener un resultado único.

Si R es la matriz identidad, la solución \hat{p} es única y cada elemento se resuelve perfectamente.

Si R es una matriz aproximadamente diagonal, cada elemento \hat{p}_i es una suma ponderada de valores próximos \hat{p}_j , para alguna solución de (3.3.14).

Así, el grado en que la matriz R se aproxima a la identidad es una medida de que tan buena es la solución obtenida de los datos. Las filas de R son llamados 'kernels' de resolución.

En forma similar, Wiggins (1972) mostró que para un sistema sobredeterminado, el producto $S=AH$ es una medida de la independencia de los datos. La matriz S se denomina matriz densidad de información.

Debido a la no unicidad de la solución se necesita elegir un criterio de estimación para obtener la solución de las incógnitas. En el presente trabajo se utiliza el criterio de mínima longitud, es decir, se minimiza

$$|x^t x| \text{ sujeto a } y = A x \quad (3.3.15)$$

que para el caso sobredeterminado se reduce a:

$$\text{mín } \|y - A x\|^2 \quad (3.3.16)$$

La minimización será más severa sobre los valores mayores. Lo que debería suceder es que los datos más exactos tuvieran más peso, esto puede hacerse ponderando el problema con la matriz de errores en los datos, es decir

$$\sigma \eta_a = \sigma A \eta \quad (3.3.17)$$

con lo cual la solución al problema es función de los valores y vectores característicos

$$\eta'_a = A' \eta = U' \lambda' V'^t \eta \quad (3.3.18)$$

y donde V' , λ' y U' se obtienen de la descomposición espectral de la matriz A' .

Con respecto a la varianza de los parámetros del modelo, Jackson (1972) ha demostrado que se puede asumir los datos estadísticamente independientes y con varianza unidad si se hacen las transformaciones apropiadas. De aquí que la varianza pueda expresarse como

$$\text{Var}(\eta_k) = \sum_{j=1}^q \frac{v_{ij}^2}{\lambda'^2} \quad (3.3.19)$$

si se consideran q eigenvectores.

Esta varianza será finita, pero debido a que algunos eigenvalores diferentes de cero pueden ser muy pequeños, la varianza puede ser demasiado grande.

Un camino sensible para controlar la varianza (Wiggins, 1971) es construir la inversa H considerando solo los q' eigenvalores mayores, donde $q' \leq q$ y q es el número de eigenvalores con los cuales la solución se ajusta

óptimamente a los datos.

Lo anterior es equivalente a considerar los eigenvalores cero si son menores que algún valor límite determinado (i.e., se supone que q es menor de lo que realmente es).

El valor límite puede ser tal que

$$\sum_{j=1}^q \left(\frac{V_{ij}}{\lambda_j} \right)^2 < t_k \quad (3.3.20)$$

para todos los λ_j y t_k es la máxima varianza aceptable para p . El efecto de reducir q es degradar la resolución y la densidad de información.

Para sistemas los cuales son fundamentalmente indeterminados, la capacidad de hacer alguna interpretación confiable del modelo p puede ser limitada, ya sea por falta de resolución o por la gran varianza obtenida.

Sorprendentemente, las conclusiones más importantes pueden frecuentemente ser hechas en base a un modelo el cual se ajusta a los datos muy pobremente, aún cuando existan soluciones exactas. Esto es debido a que las soluciones no son únicas y por que los operadores inversos, los cuales las generan, pueden depender fuertemente de las características pobremente determinadas de los datos.

Se pueden utilizar los mismos q' eigenvectores para construir cada fila de H , sin embargo es útil ~~notar~~ que la varianza del k -ésimo parámetro del modelo depende solo sobre el parámetro de la k -ésima fila de H . Entonces se puede construir una inversa fila por fila y establecer el compromiso entre la varianza y la resolución para cada fila según:

$$\pi_k = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{q'} V'_{kj} V'_{ij} - \delta_{ki} \right)^2 \quad (3.3.22)$$

y

$$\text{var}(\hat{p}_k) = \sum_{j=i}^{q'} \left(\frac{V'_{jk}}{\lambda'_j} \right)^2 \quad (3.3.23)$$

donde el entero q' puede ser una función de k . Este punto de vista permite examinar cada parámetro del modelo individualmente.

Si formamos un modelo estimando independientemente cada valor de \hat{p} por medio de este esquema, es muy probable que el modelo no se ajustará a los datos. Esto no es una seria consecuencia si realmente los valores \hat{p} tienen un significado intrínseco, el cual es útil en la interpretación eventual del problema.

Por otro lado si se desea una solución confiable, se puede incrementar los valores de $q'(k)$ a expensas de incrementar la varianza para los valores \hat{p} (Wiggins, 1972). Este criterio se utilizará en el presente trabajo para

encontrar la solución.

III.4 TRATAMIENTO DEL PROBLEMA INVERSO

En la sección anterior se presentó la forma en que pueden encontrarse los parámetros incógnitas según (3.3.1).

En caso de que el problema se trate como continuo, el análisis es de acuerdo al cálculo de variaciones. En cambio, si las observaciones e incógnitas se consideran discretas, se utiliza el criterio de máximos y mínimos.

En este trabajo se considera el problema en forma discreta como una aproximación al problema continuo y existen dos formas en que puede plantearse el problema.

Como se mencionó antes la estimación de la cargabilidad aparente depende esencialmente de la cargabilidad de las capas y de las profundidades y espesores de estas. Si en el problema se consideran capas muy pequeñas, se elimina la dependencia con la profundidad. Los parámetros incógnitas a estimar son las cargabilidades n_i . El problema se plantea entonces como

$$y = A x \quad (3.4.1)$$

donde el vector y es el vector de las cargabilidades aparentes observadas en la superficie, x es el vector que contiene las cargabilidades de los diferentes estratos. La matriz A es la matriz de coeficientes B_{ij} que correspondan, según el arreglo que se esté utilizando y los cuales se evalúan en profundidades fijadas con anterioridad.

Si en el problema se consideran capas más gruesas, de tal forma que la dependencia en la profundidad no puede ser ignorada, el problema se plantea en forma de incrementos. Los vectores de (3.4.1) contendrán los siguientes elementos: el vector y consistirá de los incrementos de las observaciones de cargabilidad aparente, el vector x los incrementos de las cargabilidades de los diferentes estratos y los incrementos de las profundidades de estos, es decir

$$x^t = (\Delta\eta_1, \Delta\eta_2, \dots, \Delta z_1, \dots, \Delta z_n) \quad (3.4.2)$$

La matriz A contiene las derivadas parciales de las cargabilidades aparentes con respecto a la cargabilidad del i -ésimo estrato o i -ésima profundidad, es decir:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_{a_1}}{\partial \eta_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \eta_{a_1}}{\partial z_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \eta_{a_n}}{\partial \eta_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \eta_{a_n}}{\partial z_n} \end{bmatrix} \quad (3.4.3)$$

La forma utilizada en la solución del problema que se plantea en el presente trabajo es como el primer caso expuesto.

En esta forma de tratar el problema, no es necesario postular un modelo inicial, ni se requiere de varias iteraciones.

IV.- ELABORACION DEL PROGRAMA

El programa elaborado se utiliza para realizar la inversión de datos de PI para los casos sobredeterminado, bajo determinado y bien determinado, los criterios algebraicos de estimación serán el de mínimos cuadrados y el de mínima longitud.

Estos criterios están relacionados a través del lema de inversión de matrices, así, el programa se desarrolló para el caso de mínima norma, ya que en general el problema es bajo-determinado, pero en el caso de que el sistema sea sobredeterminado el algoritmo se reduce al caso de mínimos cuadrados.

A continuación se expondrá el algoritmo que sigue el programa para calcular la solución.

La solución para el caso de mínima norma es

$$x_{m\ell} = A^t (A A^t)^{-1} y \quad (4.1.1)$$

donde la matriz A es la matriz de coeficientes dados por (2.4.10-2.4.16) según sea el arreglo electródico utilizado, $x_{m\ell}$ es el vector de incógnitas y el vector de observaciones es y.

Si se hace la descomposición en valores singulares de acuerdo con

$$A A^t U = \lambda^2 V \quad (4.1.2)$$

$$A^t A V = \lambda^2 V \quad (4.1.3)$$

y se sustituye la descomposición (3.3.10) se puede escribir (4.1.1) como

$$x_{m\ell} = V \Gamma U^t (\Gamma^2)^{-1} y \quad (4.1.4)$$

aprovechando la semiortogonalidad de U y V.

Entonces en notación indicial y reacomodando el orden de la multiplicación, respetando las reglas del algebra de matrices (4.1.4) queda como

$$x_{m\ell} = \sum_j \frac{u_j^t y}{\lambda_j} v_j \quad (4.1.5)$$

donde v_j son los vectores fila de V y u_j son los vectores columna de U.

El programa utilizado funciona de la siguiente forma:

1.- Resuelve el problema directo para obtener la matriz

que relaciona las observaciones con las incógnitas.

2.- Se calculan los datos de PI y se perturban éstos con ruido gaussiano para simular las condiciones reales que se tienen en el campo.

3.- Se calcula AA^t y de aquí se encuentran los eigenvalores del problema adjunto.

4.- Se calculan los correspondientes eigenvectores U y se ordenan los eigenvalores en forma decreciente.

5.- Se obtienen los eigenvectores de V por (3.3.5-6) según

$$V^t = \Gamma^{-1} U^t A \quad (4.1.6)$$

6.- La solución se encuentra por ciclos, agregando en cada ciclo la información que contine el j -ésimo eigenvalor.

7.- Se analiza el valor de la función χ^2 al aumentar el número de eigenvalores, la cual está expresada como

$$\chi^2 = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} (y_i^o - y_i^c)^2 \quad (4.1.7)$$

donde y_i^o y y_i^c son las cargabilidades aparentes observadas y las calculadas con el modelo inverso respectivamente.

8.- Se calcula la matriz de covarianza de los parámetros del modelo como

$$C = V \Lambda^{-2} V^t \quad (4.1.8)$$

9.- Se obtienen los coeficientes de correlación, los cuales están dados como

$$P_{ij} = \frac{C_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (4.1.10)$$

donde σ_k es la desviación estándar del k-ésimo parámetro incógnita.

10.- Se calcula la resolución como

$$R = V V^t \quad (4.1.9)$$

El encontrar la solución inversa por medio de ciclos permite el estudio simultáneo de la estabilidad del sistema, ya que en el caso de que éste sea inestable (existencia de eigenvalores pequeños), la solución presentará fuertes oscilaciones y la norma del vector de residuos entre las cargabilidades aparentes observadas y las calculadas por la solución encontrada en la inversión, presentará oscilaciones crecientes.

Si el problema no es estable es posible omitir los eigenvalores que causan la inestabilidad, el número de

eigenvalores utilizados proporcionará los grados de libertad del sistema. Si se consideran errores en los datos, entonces se normalizará previamente la matriz A para obtener la solución como (3.3.19).

La matriz de coeficientes, con la cual se resolverá el problema inverso, se obtiene como (2.4.10-2.4.17) de la solución del problema directo, según sea el arreglo electródico utilizado.

Estos coeficientes son estándar para invertir cualquier modelo, el programa los genera o bien puede crearse un banco de coeficientes, que usará el programa con el fin de optimizar el tiempo de cómputo.

Los coeficientes se consideran estándar debido a que éstos solo dependen de la geometría del arreglo electródico y de la profundidad de las capas del modelo. La desventaja de establecer previamente las profundidades de las capas disminuye si las capas son lo suficientemente pequeñas, por lo que se considera un mayor número de ellas. Posteriormente se discutirá el número óptimo de éstas.

Si se van a invertir datos reales, el programa genera la matriz de coeficientes que relaciona las observaciones con las incógnitas y se realiza la inversión de la forma

anteriormente expuesta.

En seguida se muestra el diagrama de flujo del programa considerando la generación de datos sintéticos así como la inversión.

El listado del programa se muestra en el apéndice A, así como una salida de éste en el apéndice B.

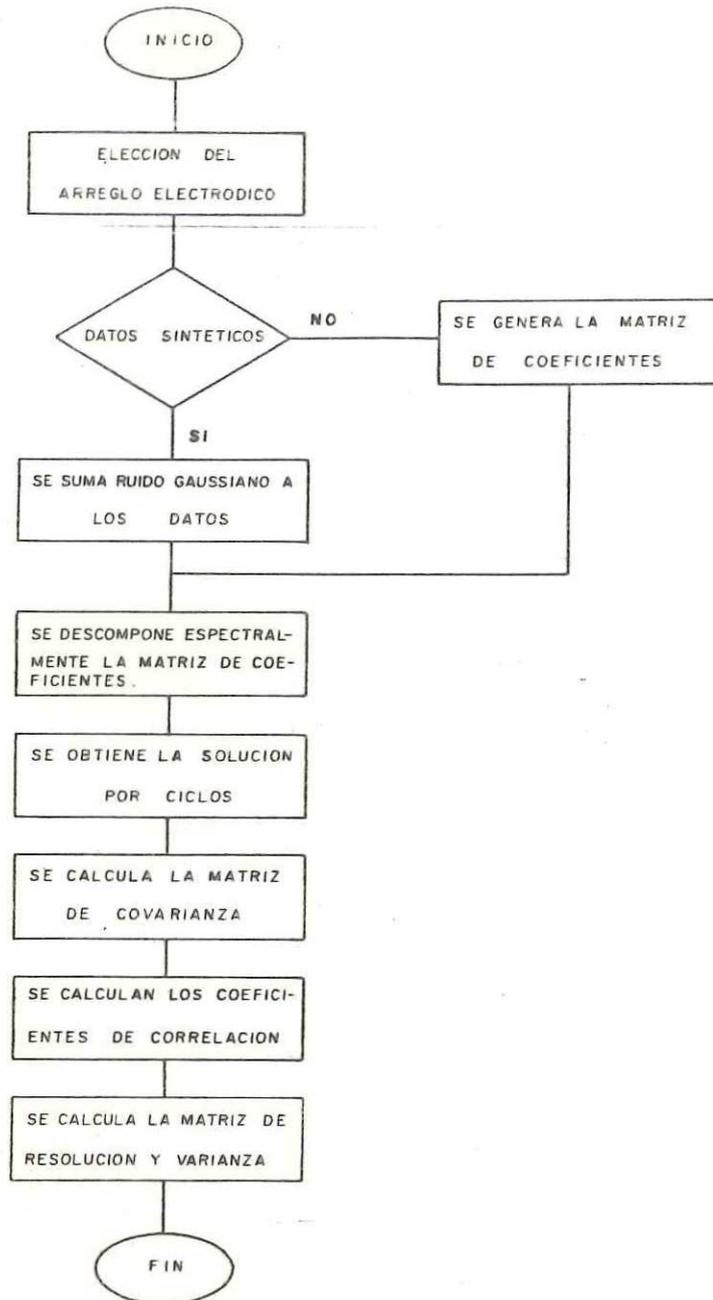


DIAGRAMA I.- DIAGRAMA DE BLOQUES DEL PROGRAMA DE INVERSION DE DATOS DE POLARIZACION INDUCIDA.

V.- ANALISIS Y DISCUSION DE RESULTADOS

V.1.- OPTIMIZACION DEL MUESTREO

Una vez que se han elegido los modelos del subsuelo a invertir, se presenta la estimación de los siguientes parámetros que son decisivos para optimizar la solución entregada por la inversión:

1.- El número de mediciones necesarias para muestrear bien la curva de polarizabilidad aparente.

2.- La forma de muestrear la función incongnita, es decir considerando el tipo de variación lineal, etc.

3.- El número de capas con las cuales se ha de modelar el subsuelo.

Con respecto al primer punto cabe hacerse la pregunta siguiente: ¿puede la adquisición de más datos incrementar significativamente la resolución a cierta profundidad?

Para responder a esta pregunta se analizaron 3 conjuntos de aberturas de electrodos los cuales son propuestos por Gosh y Oidenburg (1978) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= 5, 10, 20, 40, \dots \\
 D_2 &= 5, 5\sqrt{2}, 10, \dots \\
 D_3 &= 5, 5\sqrt{10}
 \end{aligned}
 \tag{5.1.1}$$

Se generaron datos sintéticos para este conjunto de aberturas de electrodos. Se consideraron modelos en los cuales la solución por el método es muy próxima a los parámetros reales del modelo y para aquellos en que esto no sucede.

En ambos casos se observa que las aberturas electródicas óptimas, son aquellas generadas por el factor de dos (D1). Este factor está acotado ya que utilizando más mediciones (D3) o menos (D2) la solución empeora.

Para ilustrar lo anterior se muestra un caso crítico, en el cual la solución no es muy próxima a los parámetros reales del modelo. El modelo 1 de cargabilidad del subsuelo considerado es una función escalón.

Las figuras (5.1.1-5.1.3) muestran las siguientes curvas de cargabilidades aparentes utilizando el arreglo Schlumberger: (a) las obtenidas al resolver el problema directo, (b) las perturbadas con ruido gaussiano y (c) las

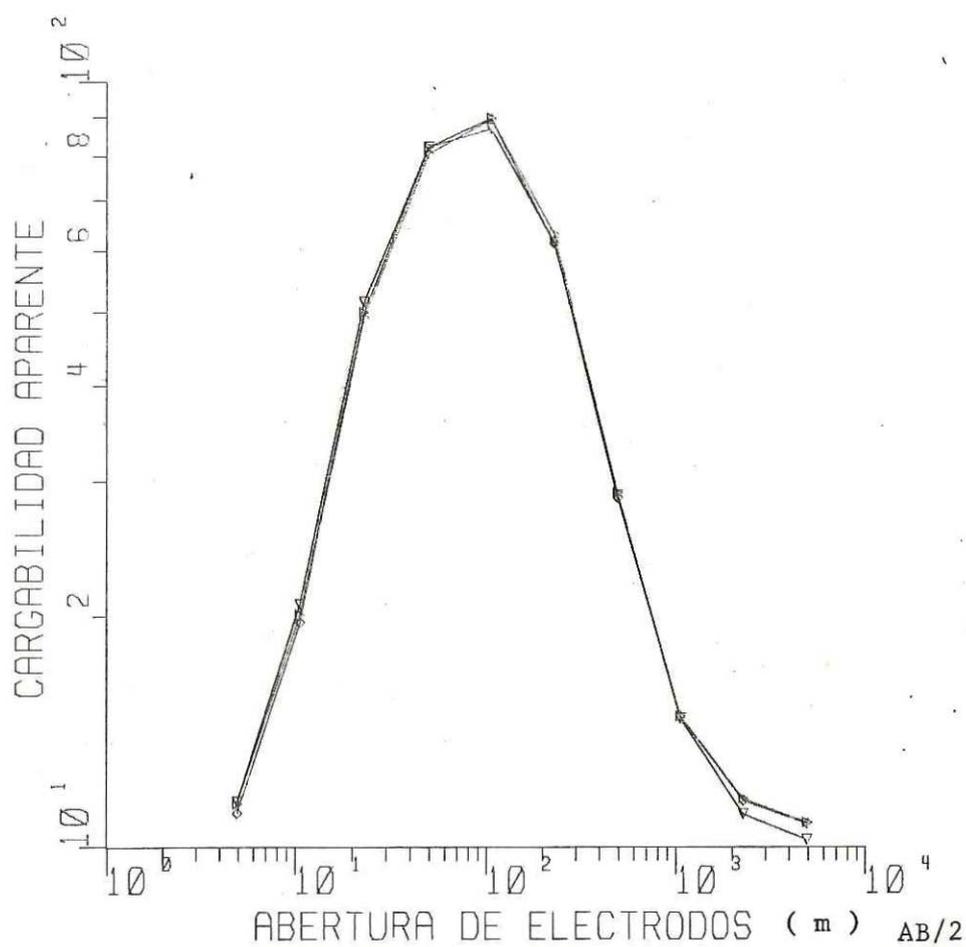


Fig. 5.1.1.- Cargabilidad aparente: a) Sintética (\diamond), b) Per-turbada con ruido (∇), c) Teórica (\blacktriangleright); modelo 1. Se utiliza el arreglo Schlumberguer con el conjunto de aberturas electrónicas D_3 .

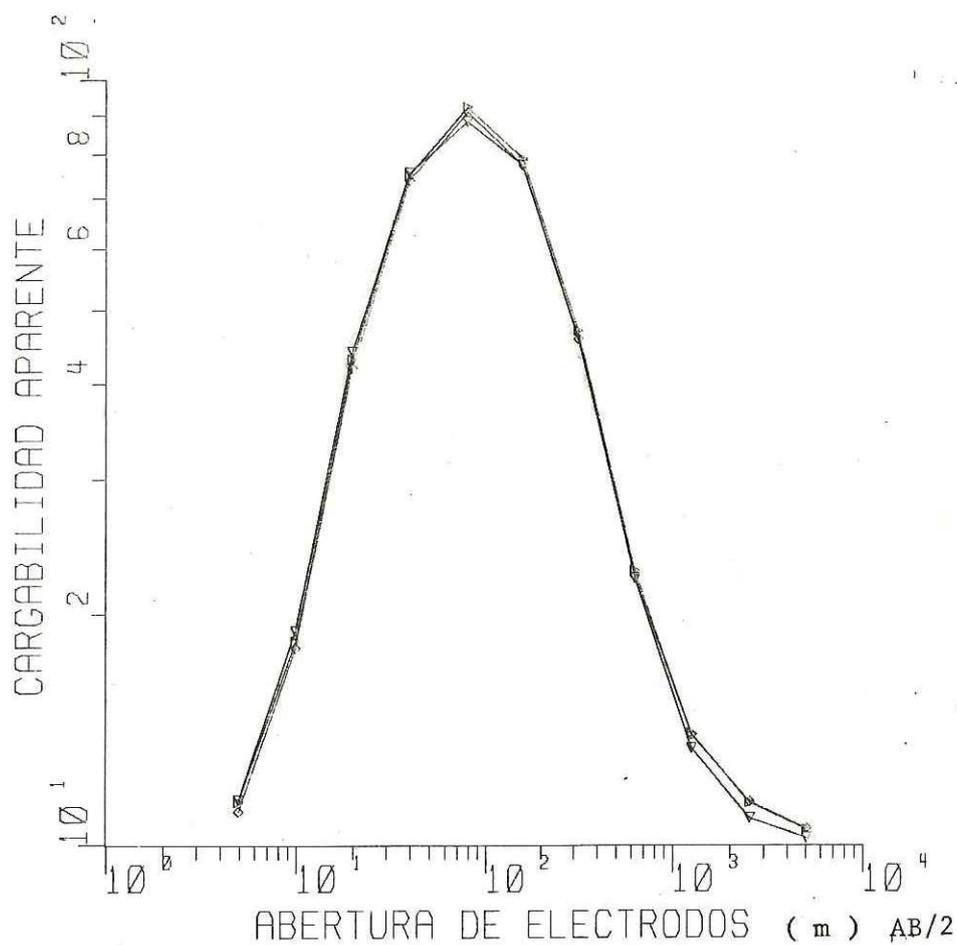


Fig. 5.1.2.- Cargabilidad aparente: a) Sintética (\diamond), b) Perturbada con ruido (∇), c) Teórica (\triangleright); modelo 1. Se utiliza el arreglo Schlumberguer con el conjunto de aberturas electrónicas D_1 .

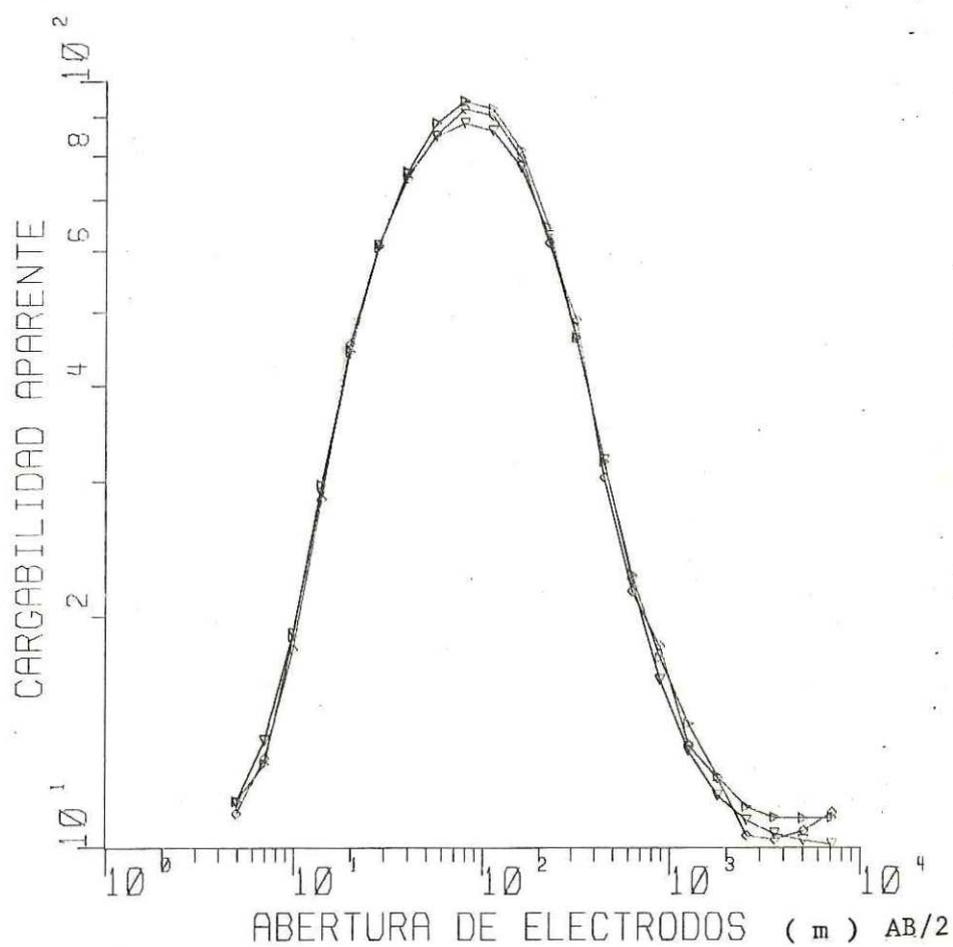


Fig. 5.1.3.- Cargabilidad aparente: a) Sintética (\diamond), b) Perturbada con ruido (∇), c) Teórica (\triangleright); modelo 1. Se utiliza el arreglo Schlumberguer, con el conjunto de aberturas electródicas D_2 .

obtenidas con el modelo inverso calculado.

Las soluciones obtenidas en la inversión se muestran en las figs. (5.1.4-5.1.6).

En ellas puede observarse que la solución que más se aproxima al modelo original es aquella en la que se consideran las aberturas de electrodos D1. Esto se ve más claramente en la fig. (5.1.7), que muestra el comportamiento de la función χ^2 al aumentar el número de eigenvalores considerados en la solución. Se observa que el valor de χ^2 es mínimo para el conjunto de aberturas D1.

Otro ejemplo del mismo comportamiento se observa en las figuras (5.1.8-5.1.10), las cuales muestran las cargabilidades aparentes para el arreglo Wenner: (a) de la solución del problema directo, (b) las perturbadas con ruido gaussiano y (c) las obtenidas con el modelo inverso calculado.

Las figuras (5.1.11-5.1.13) muestran el modelo real y la solución entregada por la inversión.

En estas gráficas puede observarse que el método inverso entrega una solución más próxima al modelo original. Esto es debido a que el método resuelve mejor los modelos que

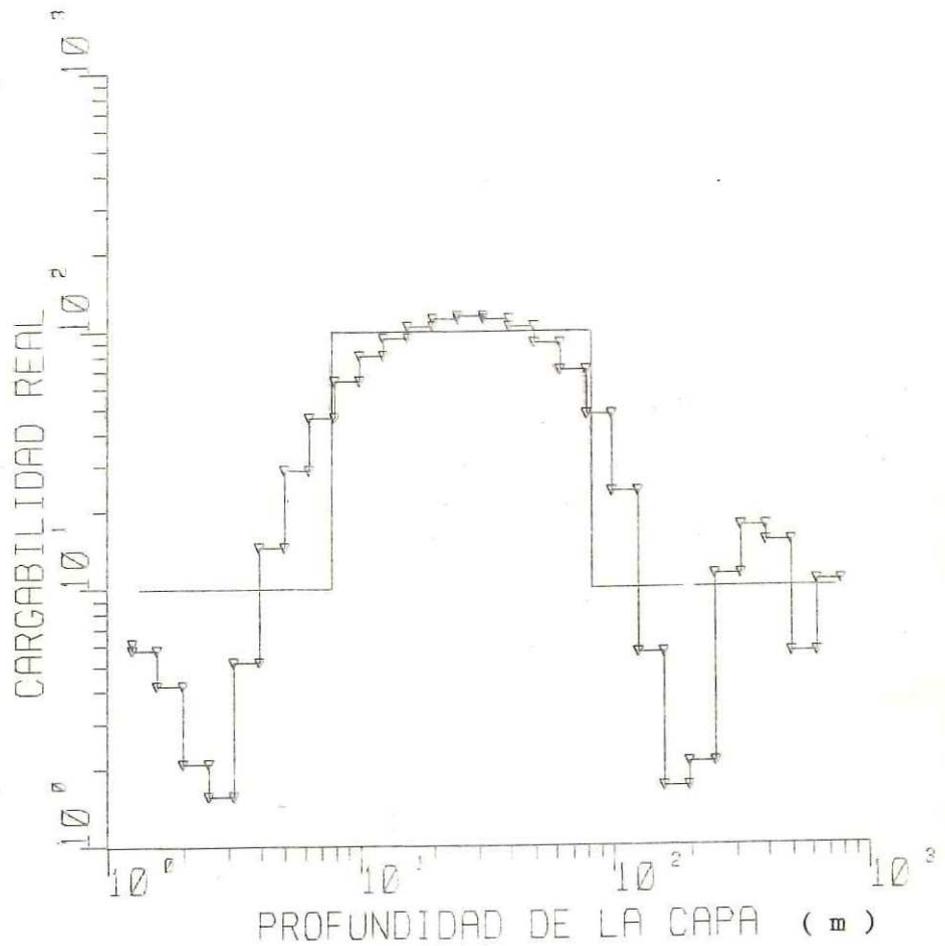


Fig. 5.1.4.- Cargabilidad real y solución inversa obtenida, modelo 1. Se utiliza el arreglo Schlumberger con el conjunto de aberturas electródicas D_3 .

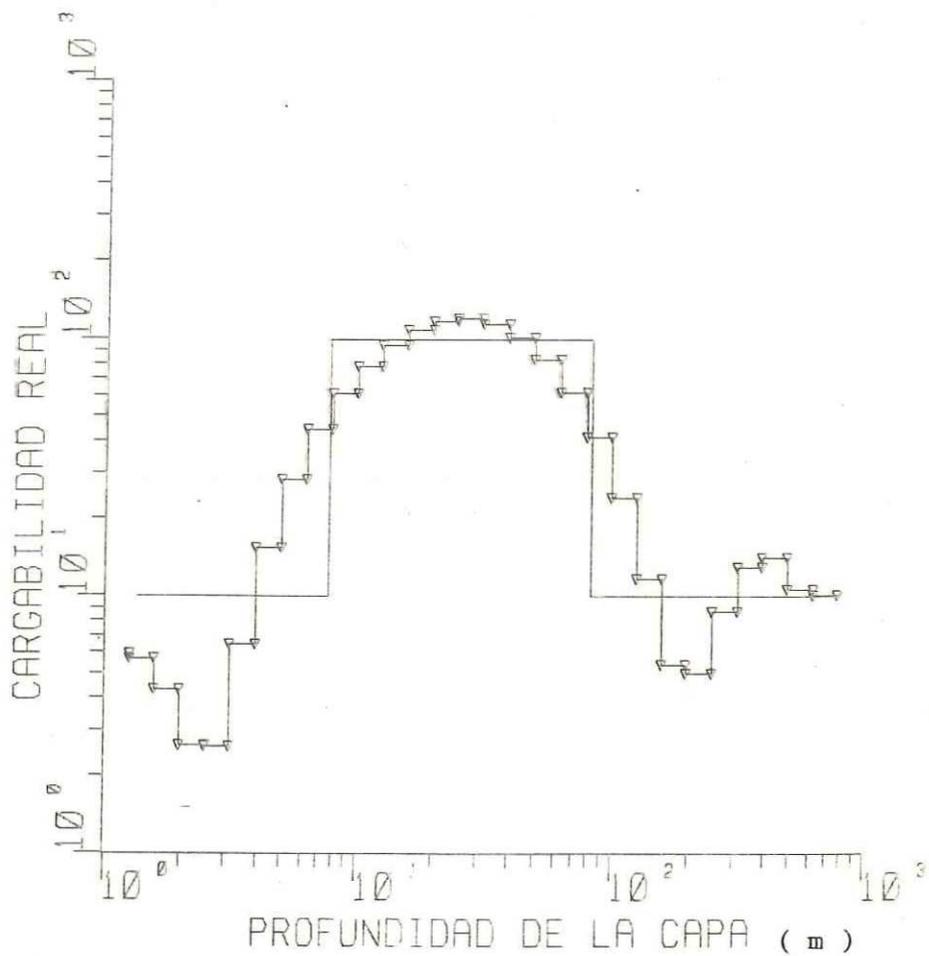


Fig. 5.1.5.- Cargabilidad real y solución inversa obtenida, modelo 1. Se utiliza el arreglo Schlumberger con el conjunto de aberturas electrónicas D_1 .

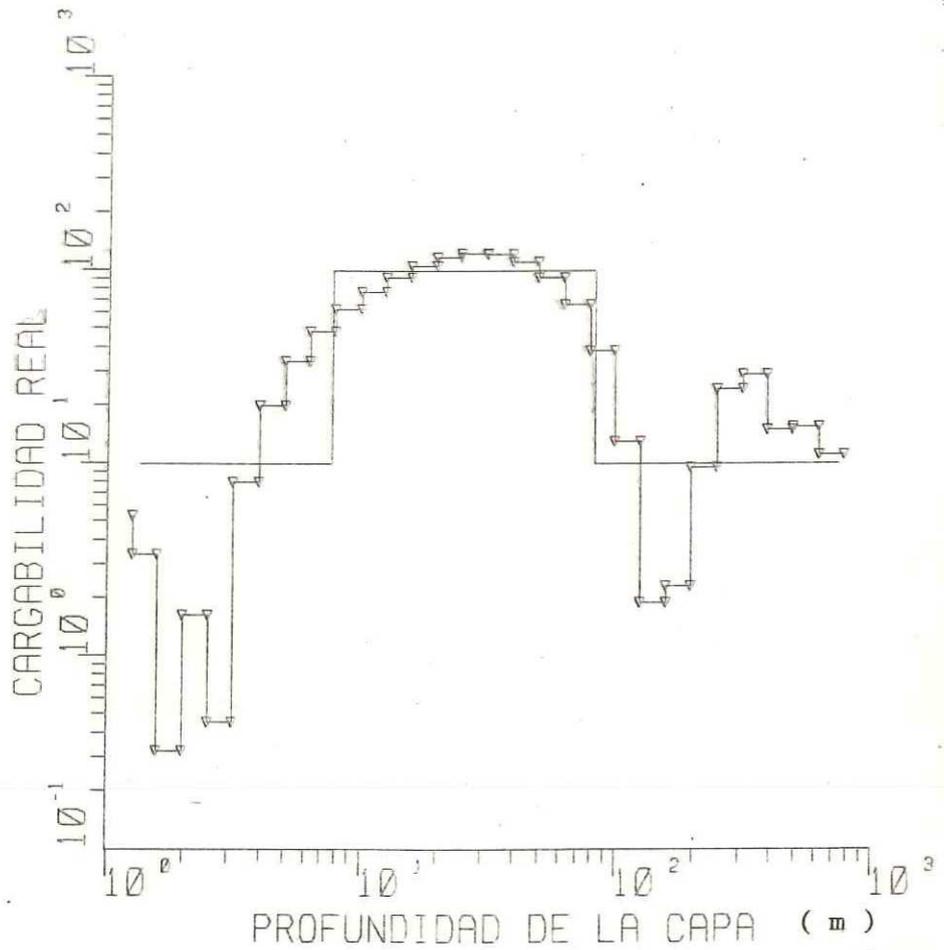


Fig. 5.1.6.- Cargabilidad real y solución inversa obtenida, modelo 1. Se utiliza el arreglo Schlumberger con el conjunto de aberturas electrónicas D_2 .

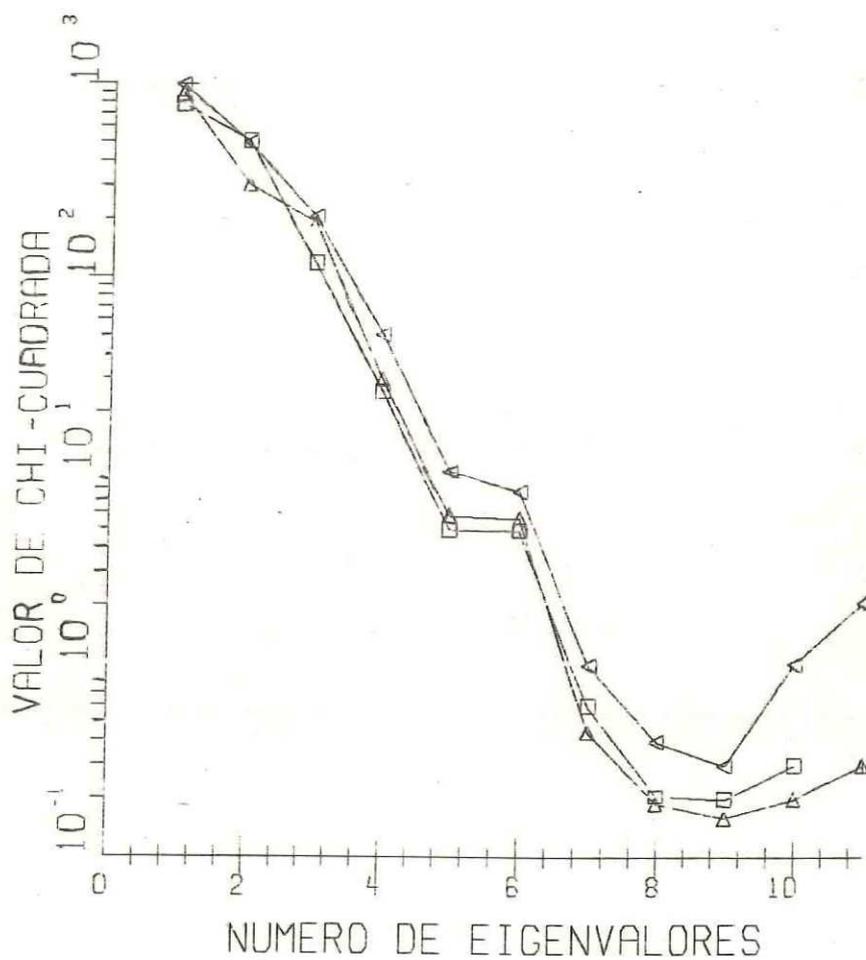


Fig. 5.1.7.- Valor de la función chi-cuadrada al aumentar el número de eigenvalores en la solución. Se utiliza el modelo 1 con los conjuntos de aberturas electrónicas: D_1 (Δ), D_2 (\square) y D_3 (∇).

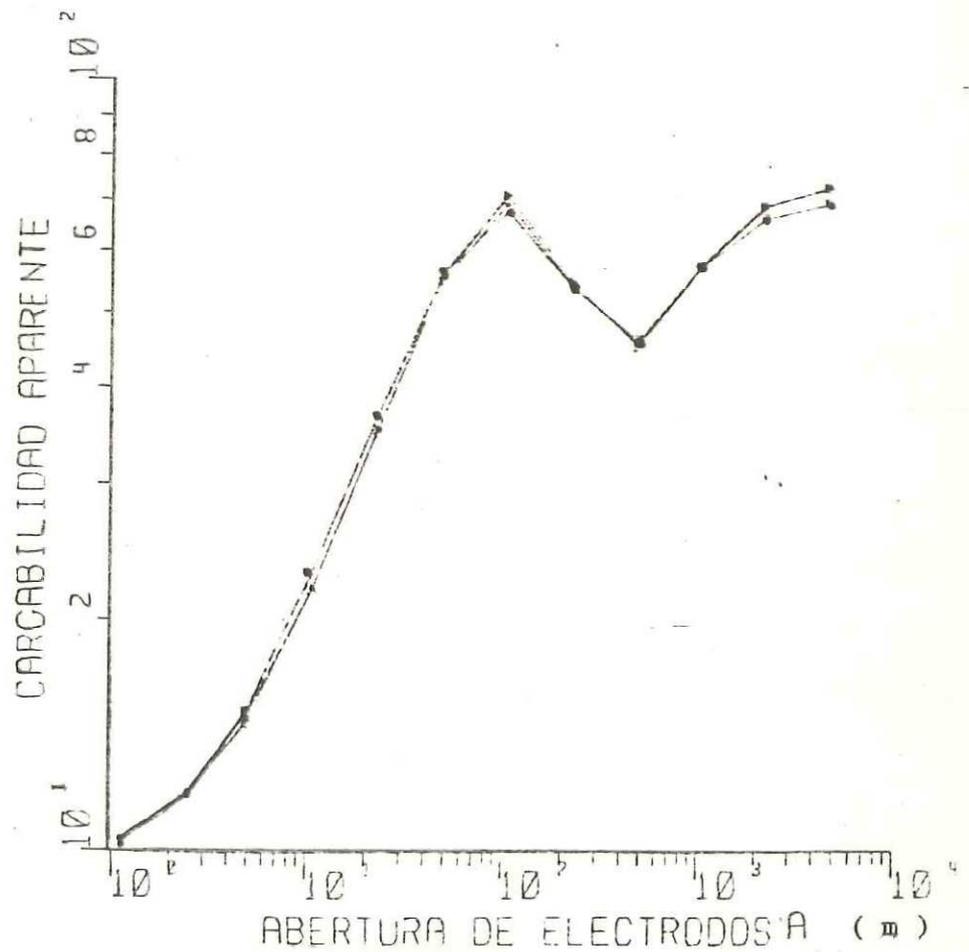


Fig. 5.1.8.- Cargabilidad aparente: a) Sintética (◇), b) Perturbada con ruido (▽), c) Teórica; modelo 3. Se utiliza el arreglo Wenner con el conjunto de aberturas electrónicas D_3 .

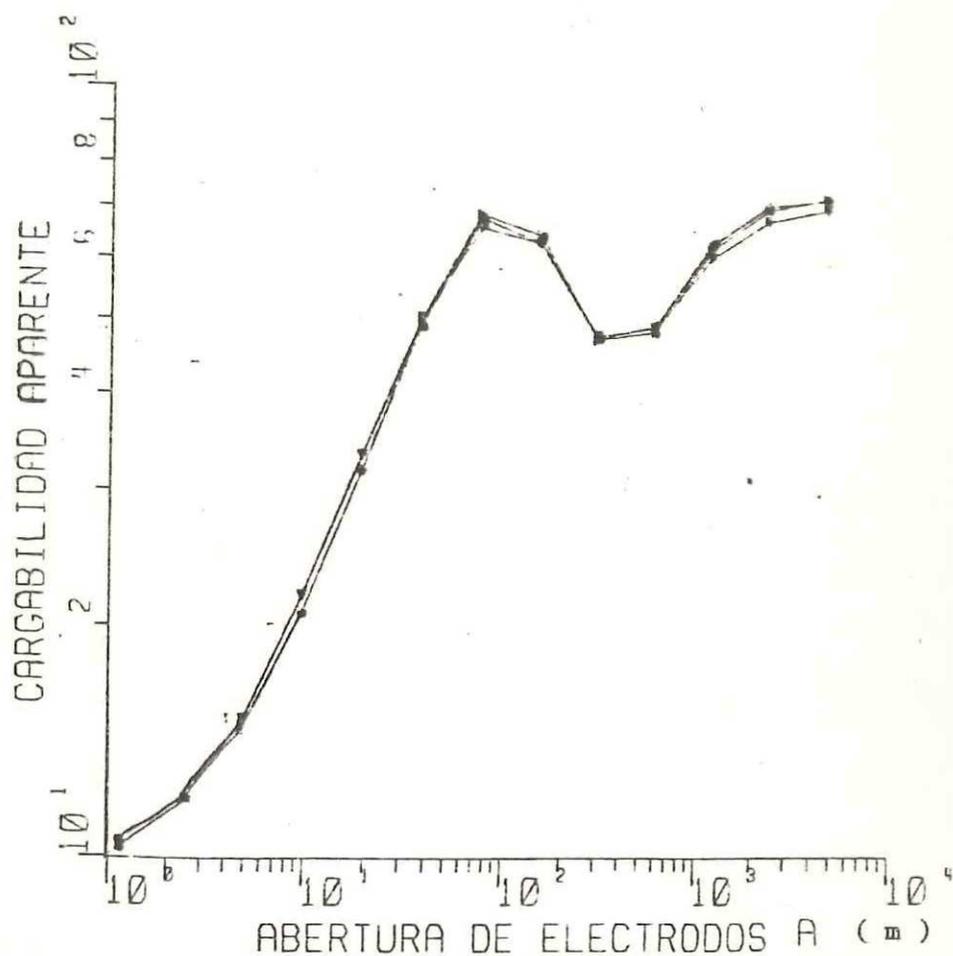


Fig. 5.1.9.- Cargabilidad aparente: a) Sintética (\diamond), b) Perturbada con ruido (\triangleright), c) Teórica; modelo 3. Se utiliza el arreglo Wenner con el conjunto de aberturas electródicas D_1 .

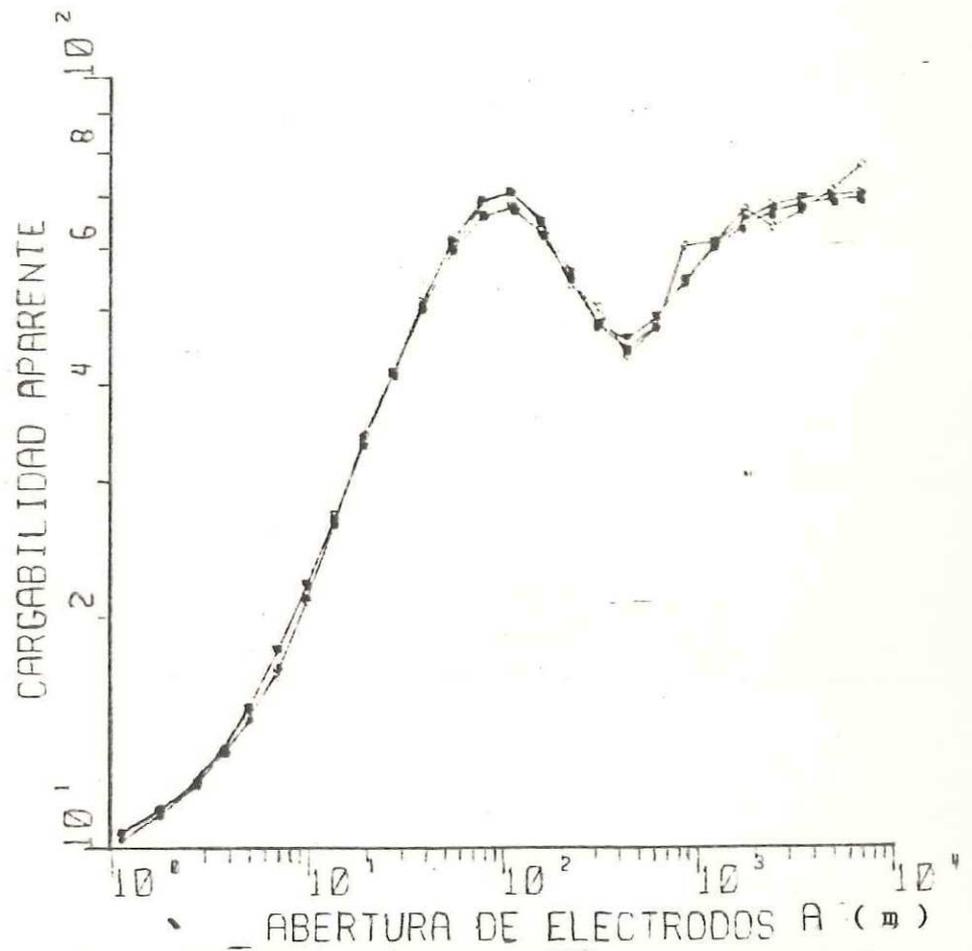


Fig. 5.1.10.-Cargabilidad aparente: a) Sintética (\circ), b) Perturbada con ruido (\triangleright), c) Teórica; modelo 3. Se utiliza el arreglo Wenner con el conjunto de aberturas electrónicas D_2 .

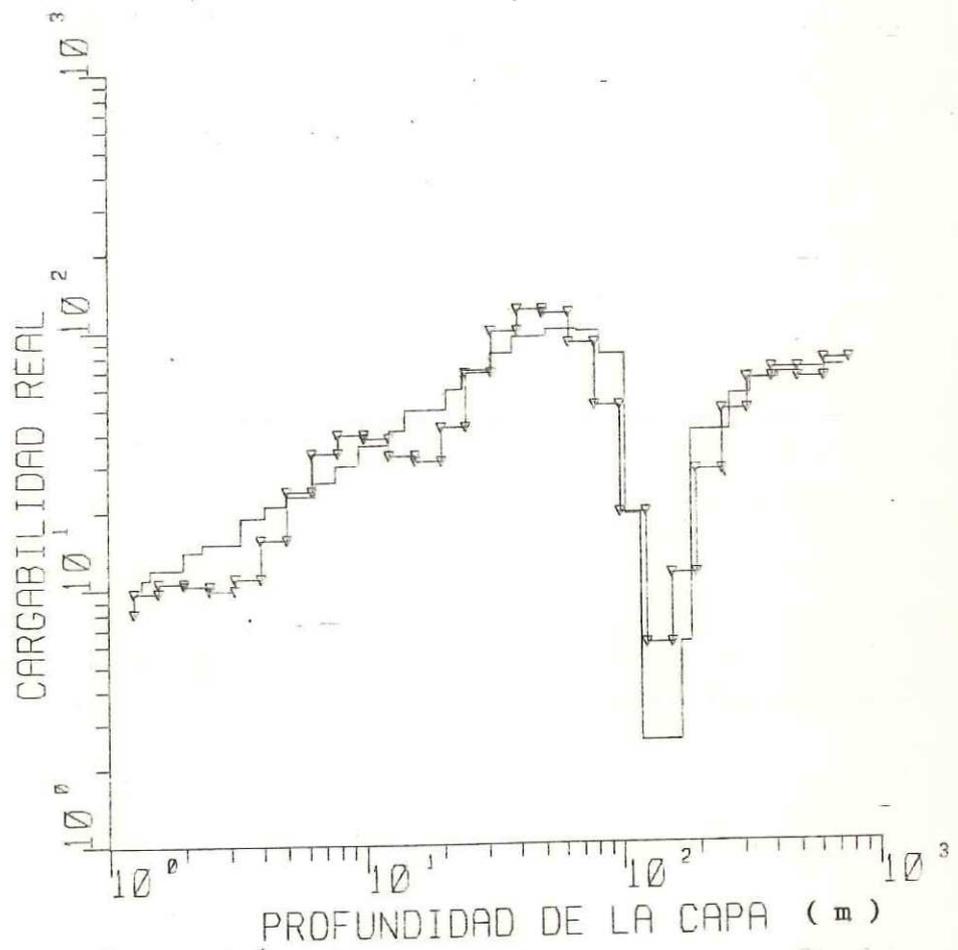


Fig. 5.1.11.- Cargabilidad real y solución inversa obtenida, modelo 3. Se utiliza el arreglo Wenner con el conjunto de aberturas electrónicas D_3 .

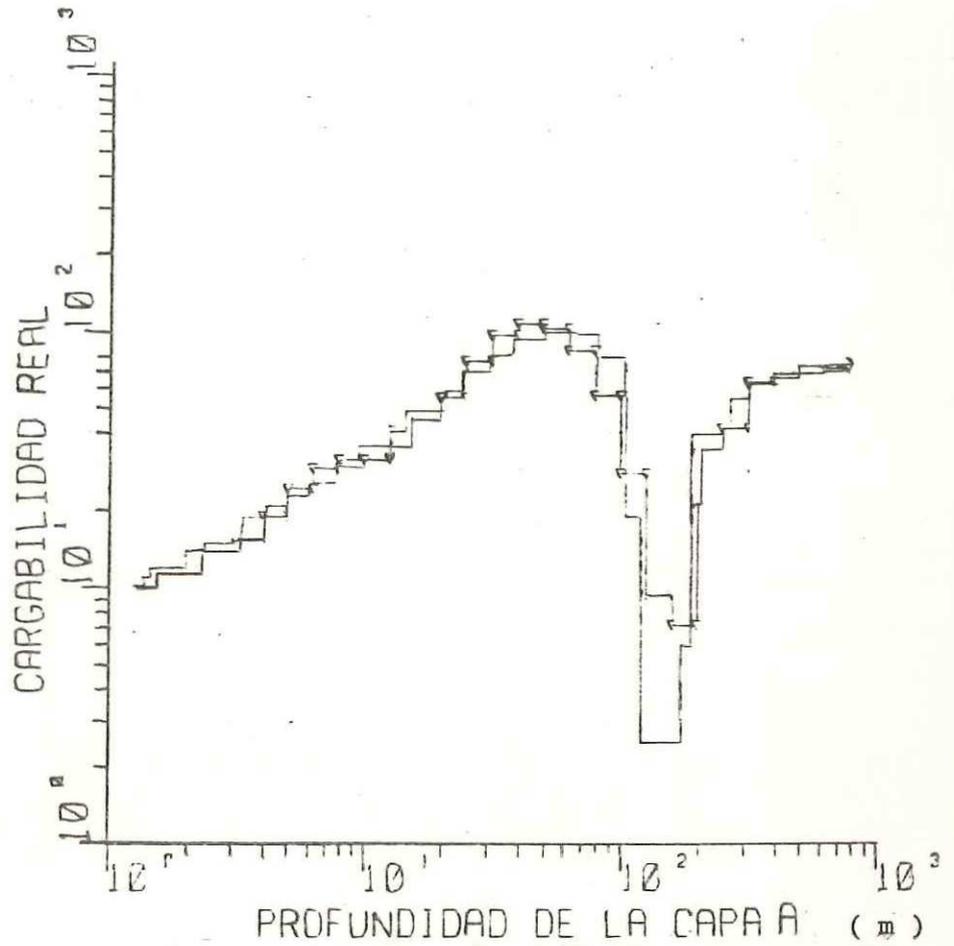


Fig. 5.1.12.- Cargabilidad real y solución inversa obtenida, modelo 3. Se utiliza el arreglo Wenner con el conjunto de aberturas electrónicas D_1 .

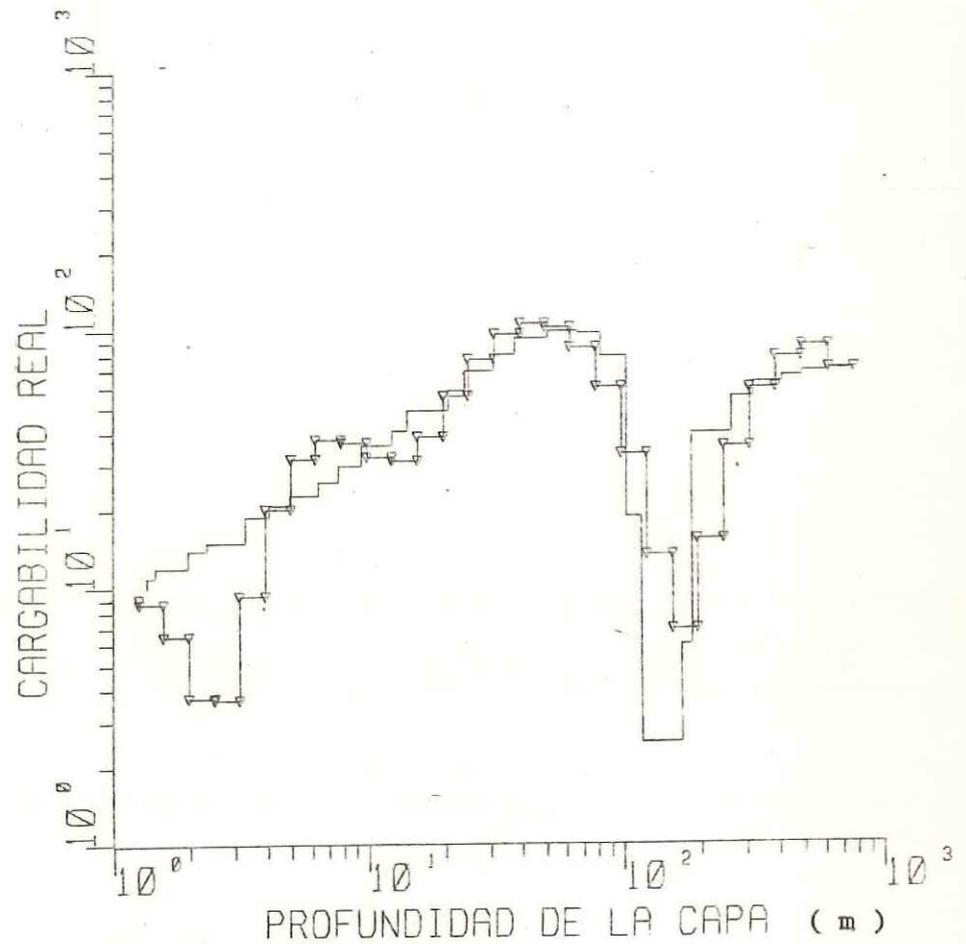


Fig. 5.1.13.- Cargabilidad real y solución inversa obtenida, modelo 3. Se utiliza el arreglo Wenner con el conjunto de aberturas electrónicas D_2 .

presentan funciones suaves de PI. La figura (5.1.14) muestra el valor de la función χ^2 para las soluciones encontradas. Se observa nuevamente que el óptimo conjunto de aberturas de electrodos es D1.

En el establecimiento de la forma en que se consideran las capas se presentan varias alternativas. Por ejemplo, las capas pueden considerarse de espesores constantes, ir creciendo o disminuyendo con la profundidad, etc. En este trabajo se considerará que crecen logarítmicamente con la profundidad, ya que es posible resolver una capa cercana a la superficie, pero no cuando ésta es más profunda.

En la estimación del número de capas óptimo para resolver el problema inverso se invirtieron varios modelos, para los diferentes arreglos electródicos, con diferente número de capas.

Se observó que al considerar más de 30 capas el mejoramiento en la solución no es redituable, en el sentido de que el mejoramiento en la solución es pequeño al aumentar el número de éstas comparado con el aumento en el tiempo de cómputo para obtener la solución. La figura (5.1.15) muestra una curva típica de este comportamiento.

De lo anterior se establece que el número de capas que

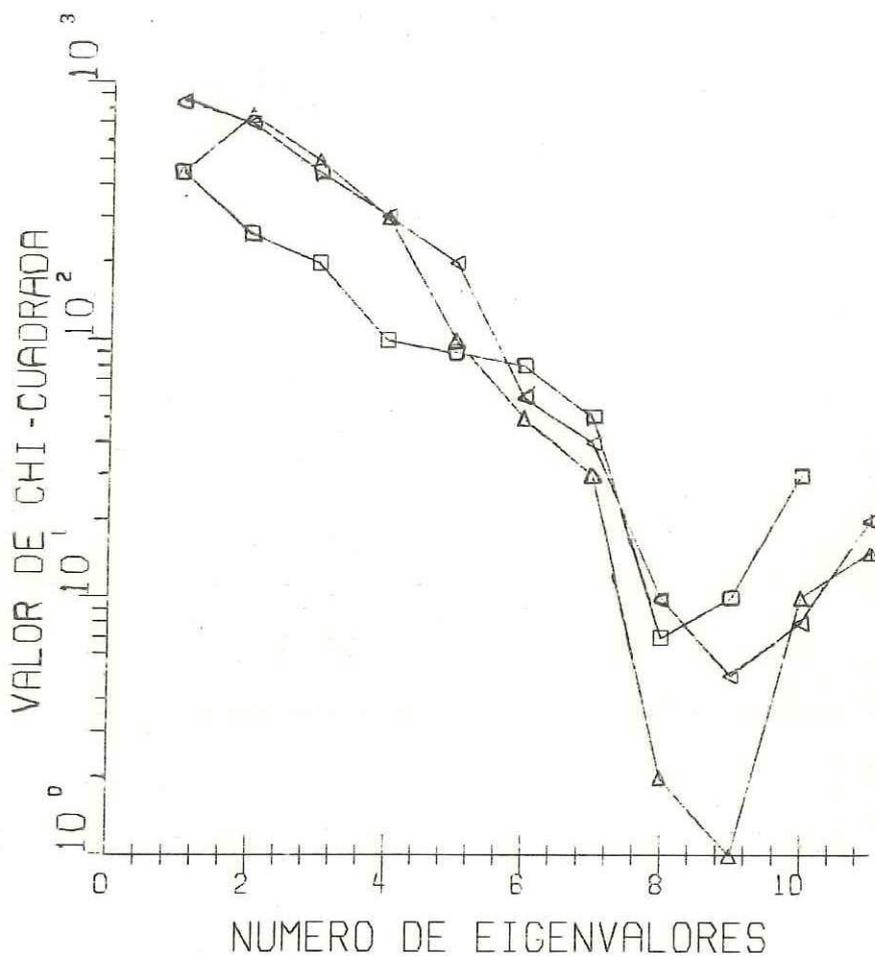


Fig. 5.1.14.- Valor de la función chi-cuadrada al aumentar el número de eigenvalores en la solución. Se utiliza el modelo 2 con los conjuntos de aberturas electrónicas: D_1 (Δ), D_2 (\square) y D_3 (∇).

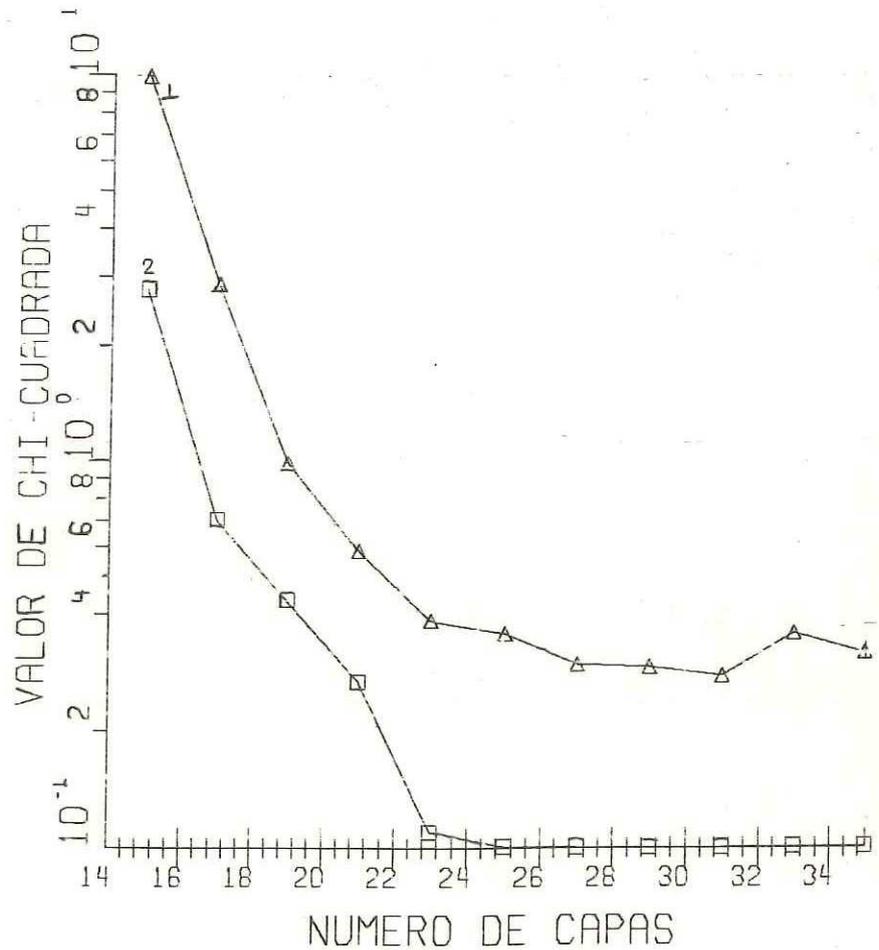


Fig. 5.1.15.- Comportamiento típico de la función chi-cuadrada al aumentar el número de capas en el modelo. Se utiliza el modelo 2 con el arreglo We--
nner y el modelo 1 con el arreglo Schlumberguer.

se utilizará será de 30 con lo cual se optimiza el tiempo de cómputo.

V.2 ESTABILIDAD Y SOLUCION DEL PROBLEMA

La estabilidad del problema es bastante buena, si en el problema no se consideran errores observacionales. Esto se debe a que el valor de la función χ^2 siempre disminuye al aumentar el número de eigenvalores, aún cuando el conjunto de aberturas electródicas no sea el óptimo. Por lo tanto, en este caso en la solución se consideran todos los eigenvectores calculados. En la figura (5.2.1) se muestra un comportamiento típico de lo anterior.

El considerar errores observacionales afecta la estabilidad del problema. En tal caso, existe una disminución en el valor de la función χ^2 al agregar un cierto número de eigenvalores en la solución, después de los cuales se observa un incremento gradual de ésta.

Lo anterior puede observarse en las figuras (5.1.7 y 5.1.14) las cuales muestran la función χ^2 para los modelos 1 y 2, con respecto al número de eigenvalores considerados en la solución, para los diferentes conjuntos de aberturas electródicas.

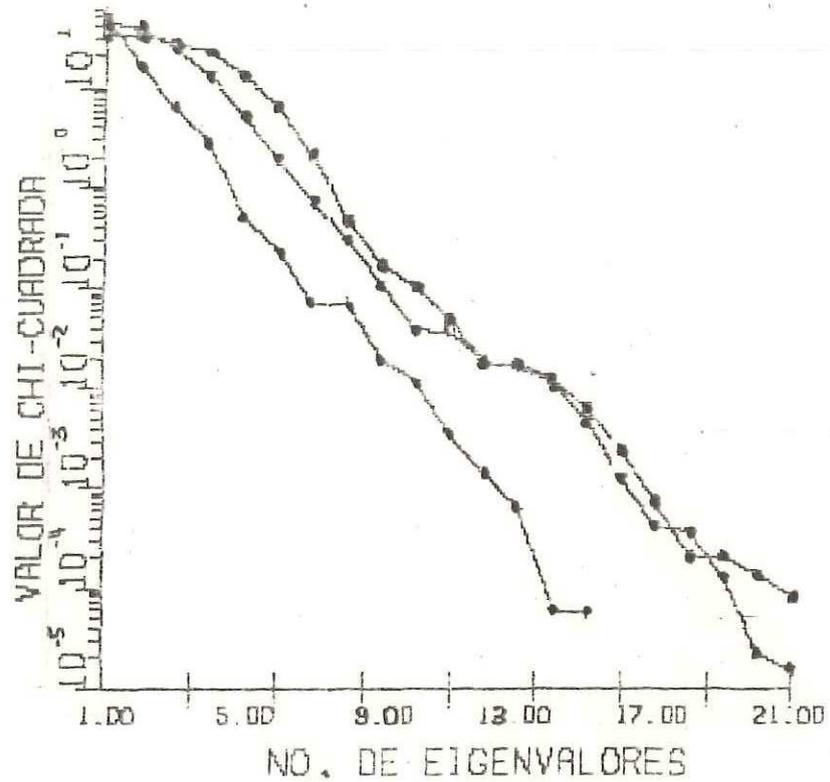


Fig. 5.2.1.- Curvas típicas de la función chi-cuadrada al aumentar el número de eigenvalores en la solución. No se consideran errores en las observaciones.

Al elegir la solución inversa óptima debería establecerse un compromiso entre la resolución y la varianza de la solución. Sin embargo, como el sistema de ecuaciones del presente trabajo es esencialmente indeterminado, la capacidad de hacer una interpretación confiable del modelo es limitada. Es decir, al tratar de establecer el compromiso la solución es muy pobre, ya sea por falta de resolución o por la gran varianza obtenida.

Lo anterior puede observarse en las figuras (5.1.14 y 5.2.2), en las cuales se muestra como mejora la solución al aumentar la varianza (obtenida como porcentaje del k-ésimo parámetro) para el modelo 2 utilizando el arreglo Wenner. En la fig. (5.2.3) se muestran algunas filas de la matriz de resolución correspondientes.

Un ejemplo similar se muestra en las figuras (5.1.7 y 5.2.4), para el modelo 1, utilizando el arreglo Schlumberguer. En la fig. (5.2.5) se muestran algunas filas de resolución para este modelo.

Como la varianza del k-ésimo parámetro del modelo depende solo sobre la k-ésima fila de H, se puede construir una inversa fila por fila. No obstante, el modelo no se ajustará a los datos (Wiggins, 1972). Por tal motivo se considerará como modelo óptimo aquel en que la función χ^2

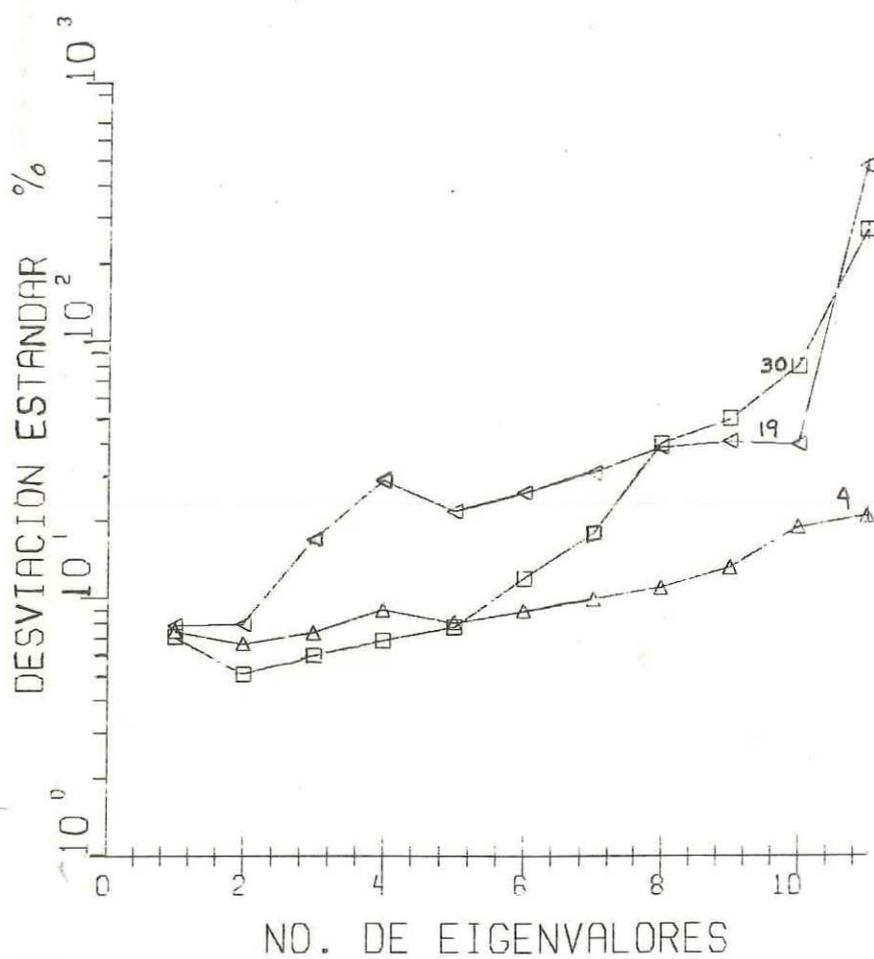


Fig. 5.2.2.- Desviación estándar de la solución inversa obtenida para los parámetros 4,19 y 30. Modelo 2, se utiliza el arreglo Wenner con el conjunto de a berturas electródicas D_1 .

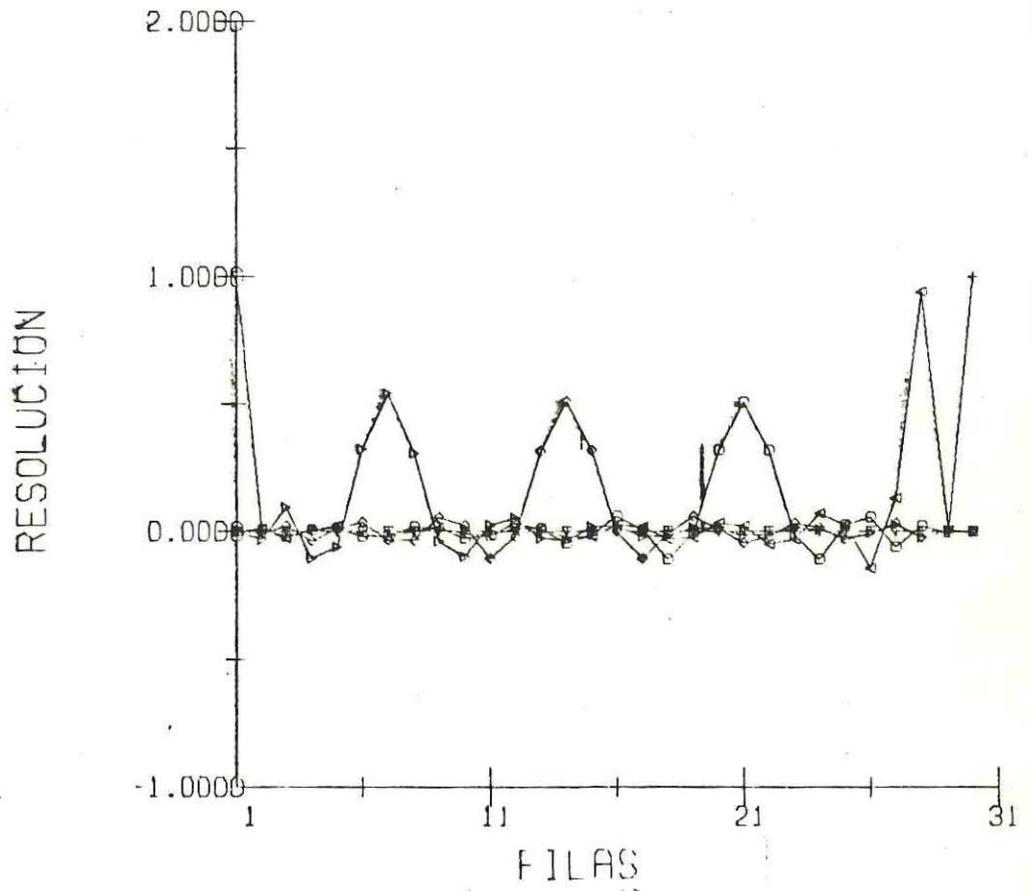


Fig. 5.2.3.- Filas de resolución para el modelo 2. Se utiliza el arreglo Wenner con el conjunto de aberturas electródicas D_1 . Se consideran 11 eigenvalores en la solución.¹

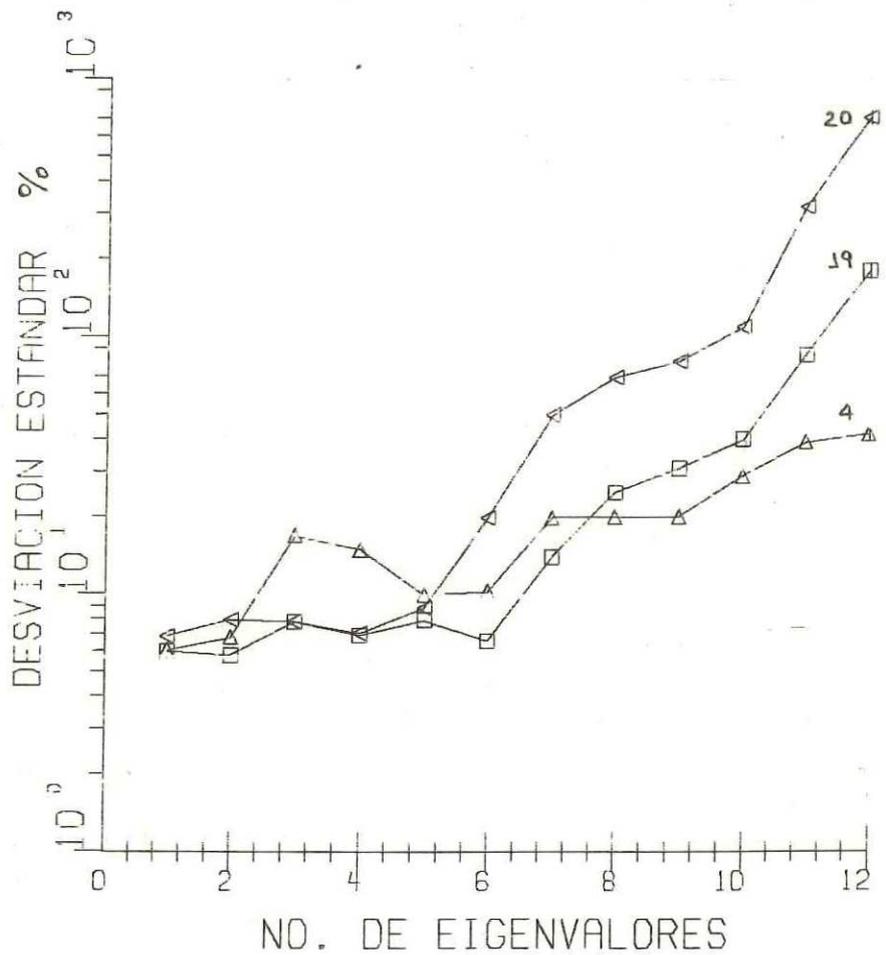


Fig. 5.2.4.- Desviación estándar de la solución inversa obtenida para los parámetros 4, 19 y 30. Modelo 1, se utiliza el arreglo Schlumberguer con el conjunto de aberturas electrónicas D_1 .

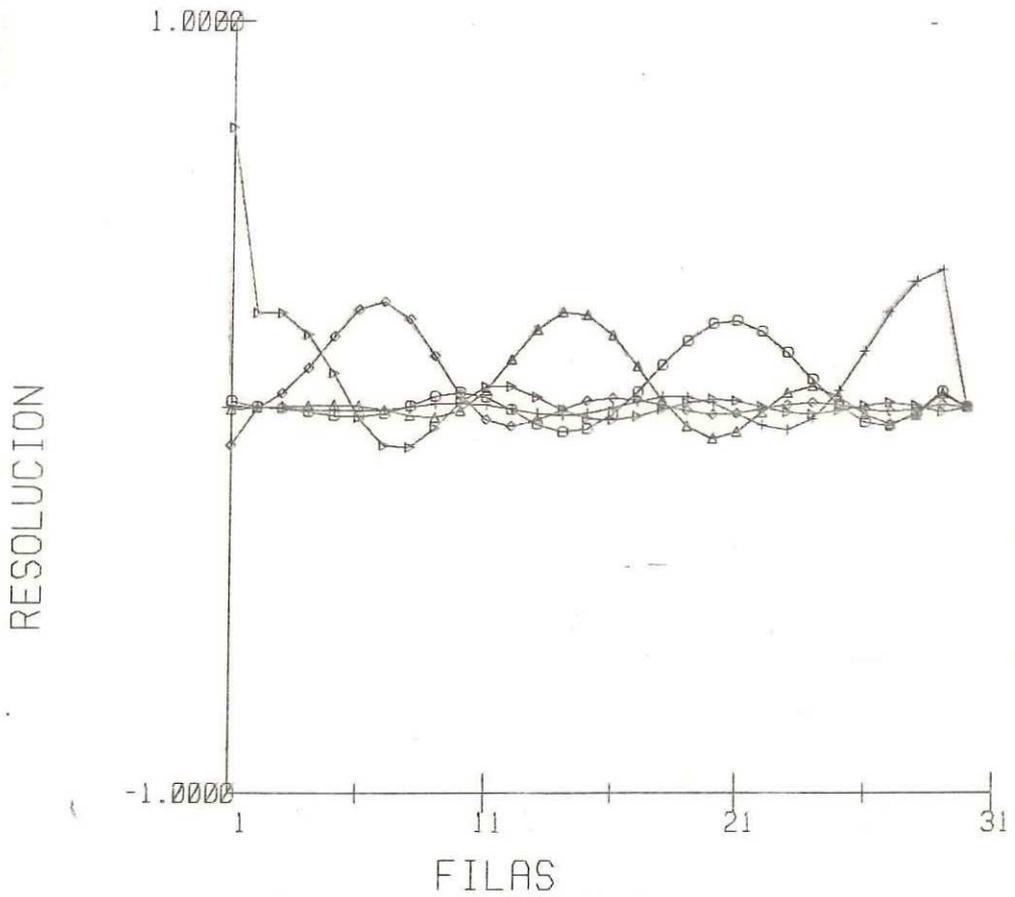


Fig. 5.2.5.- Filas de resolución para el modelo 1 .
 Se utiliza el arreglo Schlumberguer con el conjunto
 de aberturas electrónicas D_1 . Se consideran 11 ei--
 genvalores en la solución.

es mínima.

V.3 PROBLEMA INVERSO SIN RUIDO

Para analizar el problema inverso se generan datos sintéticos de PI, para diferentes modelos y arreglos electródicos en los cuales no se consideran errores en los datos. Esto se hace con el fin de analizar la estabilidad del problema así como la razón de convergencia de la solución.

Los modelos analizados se clasifican de la siguiente forma:

- 1.- Curvas que presentan contrastes suaves de PI.
- 2.- Curvas que presentan contrastes fuertes de PI.

En la inversión de los dos tipos de curvas, la estabilidad del problema es bastante buena -pues el valor de la función χ^2 obtenida como (4.1.7) al aumentar el número de eigenvalores en la solución, siempre disminuye.

De lo anterior se concluye que pueden incluirse en la solución todos los eigenvectores. Sin embargo, la contribución de éstos después de un cierto valor ya no es significativa. En la fig. 5.3.1 se observa que el valor de la norma del residuo del modelo real e inverso al aumentar el número de eigenvalores en la solución siempre disminuye.

Si las curvas invertidas presentan contrastes suaves de PI, el método converge a la solución correcta, sin embargo al resolver las curvas del tipo 2, se observa que la solución no converge al valor verdadero de las incógnitas, ya que la solución tiende a seguir contrastes suaves de PI.

V.4 PROBLEMA INVERSO CON RUIDO

En este caso se generan datos sintéticos de PI para los diferentes arreglos electródicos y diferentes modelos del subsuelo. Se perturban estos datos con ruido aleatorio gaussiano para simular errores observacionales.

Se invierten los dos tipos de modelos clasificados en V.3. Se observa que las soluciones obtenidas por el método utilizado tienden a presentar contrastes suaves de PI en las capas consecutivas (figuras 5.1.4-5.1.6).

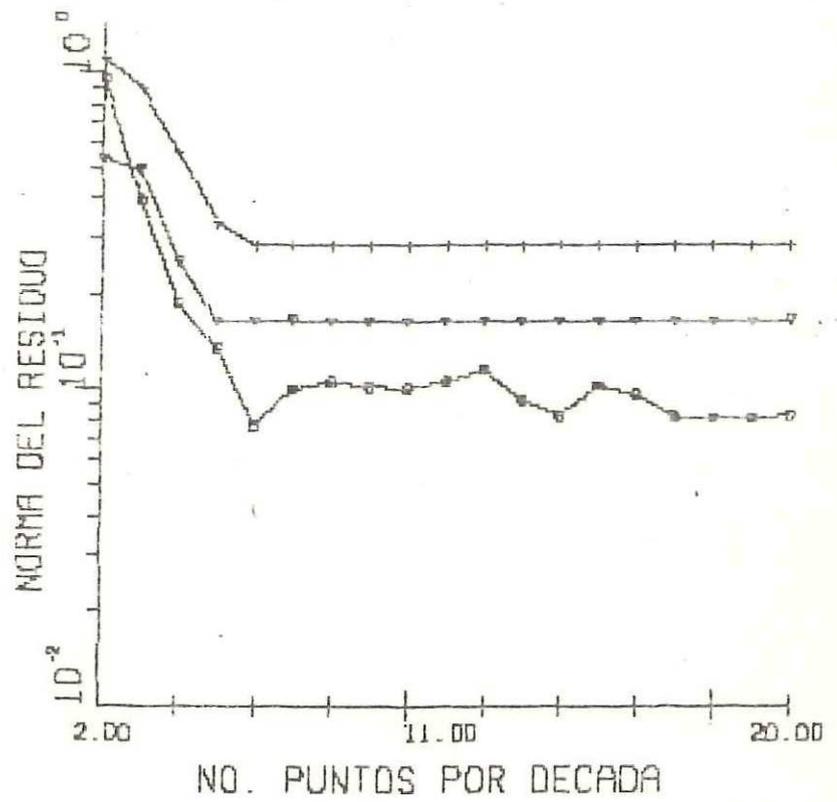


Fig. 5.3.1.- Curvas típicas del valor de la Norma del Residuo del modelo real e inverso, al aumentar el número de eigenvalores en la solución.

La solución para modelos que presentan una función de cargabilidad del medio suave es mejor que para aquellos en los cuales éste no se cumple. La solución se encuentra por ciclos, agregando en cada ciclo un valor característico, y considerando como solución óptima aquella en que el valor de la función χ^2 es mínimo.

El valor de la función χ^2 con respecto al número de eigenvalores considerados en cada ciclo, disminuye hasta un cierto valor. Después su valor aumenta, de aquí que el problema no es estable.

Para ilustrar este caso se considerará un ejemplo típico de la inversión. La figura (5.4.1) muestra una curva de cargabilidad aparente invertida la cual se perturbó con ruido gaussiano con promedio cero y desviación estándar del 5 por ciento de los datos para simular errores observacionales. La figura (5.4.2) muestra el modelo real e invertido en la cual puede verse el buen ajuste en la solución. La figura (5.4.3) muestra la curva de la función χ^2 , con respecto al número de eigenvalores considerados en la solución, y la fig. (5.4.4) muestra el comportamiento de diferentes filas de la matriz de resolución.

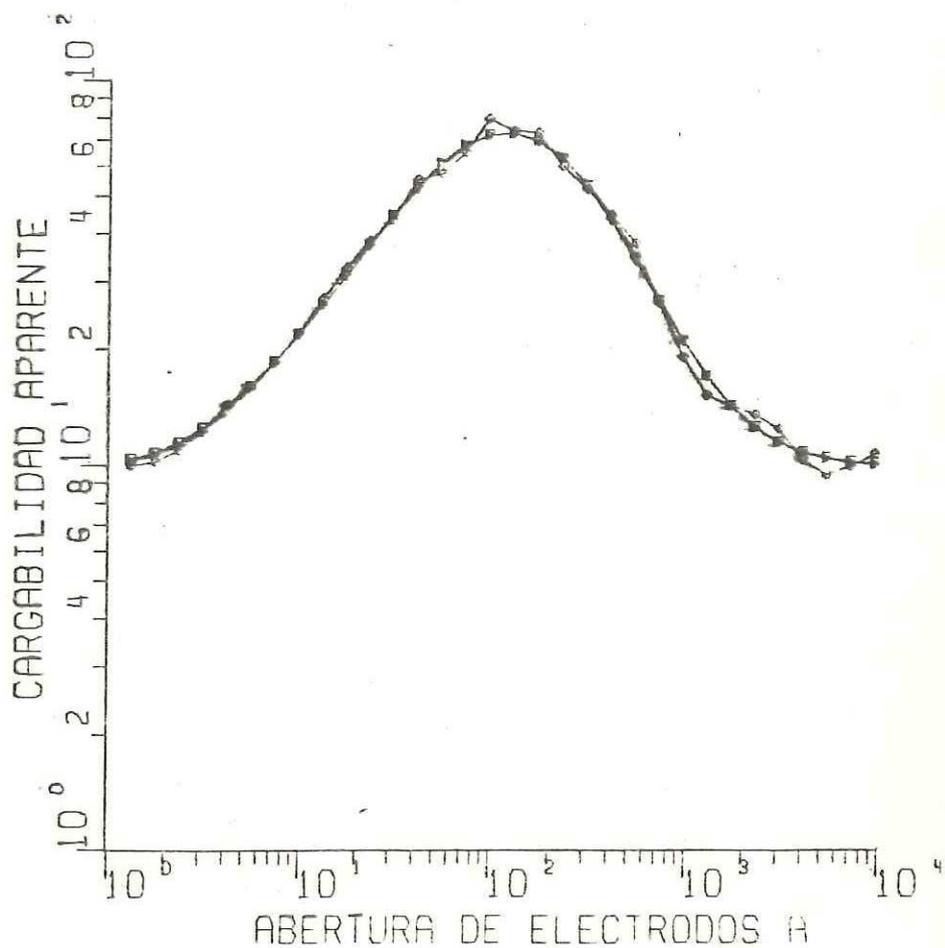


Fig. 5.4.1.- Cargabilidad aparente: a) Sintética (\circ), b) Perturbada con ruido (\triangleright), c) Teórica; modelo 4. Se utiliza el arreglo Wenner con el conjunto de aberturas electródicas D_1 .

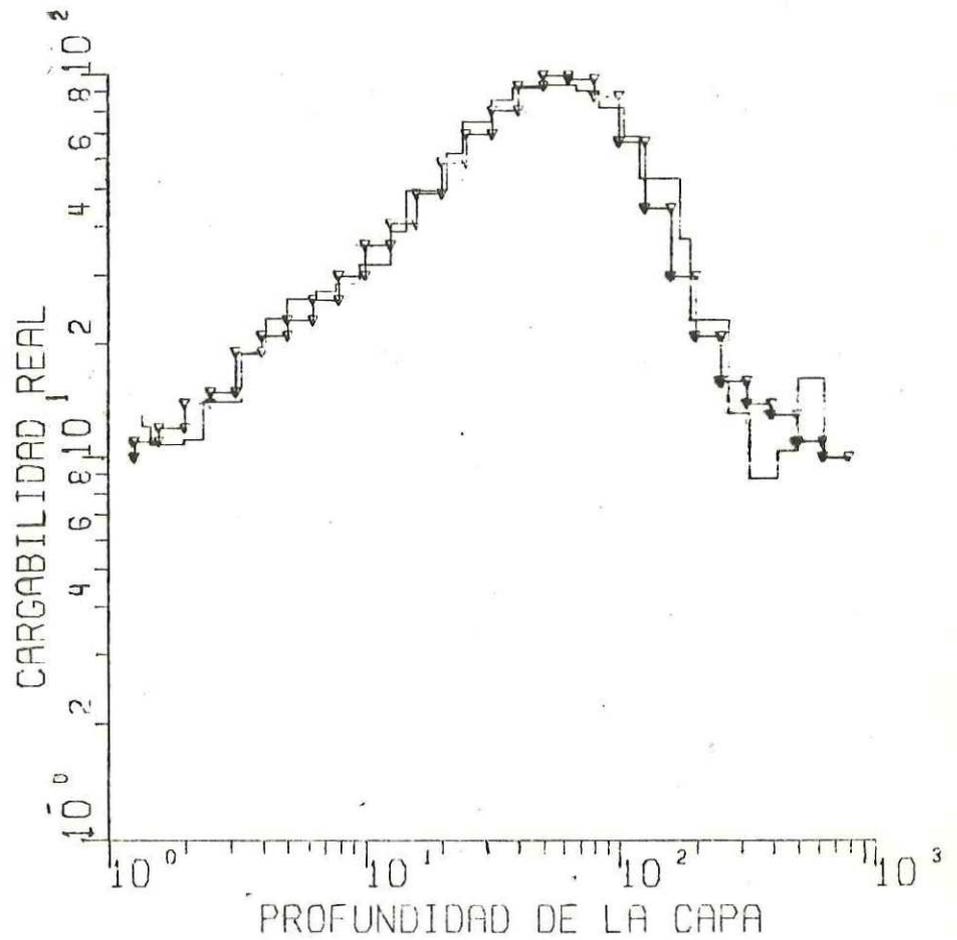


Fig. 5.4.2.- Cargabilidad real y solución inversa obtenida, modelo 3. Se utiliza el arreglo Wenner con el conjunto de aberturas electrónicas D_1 .

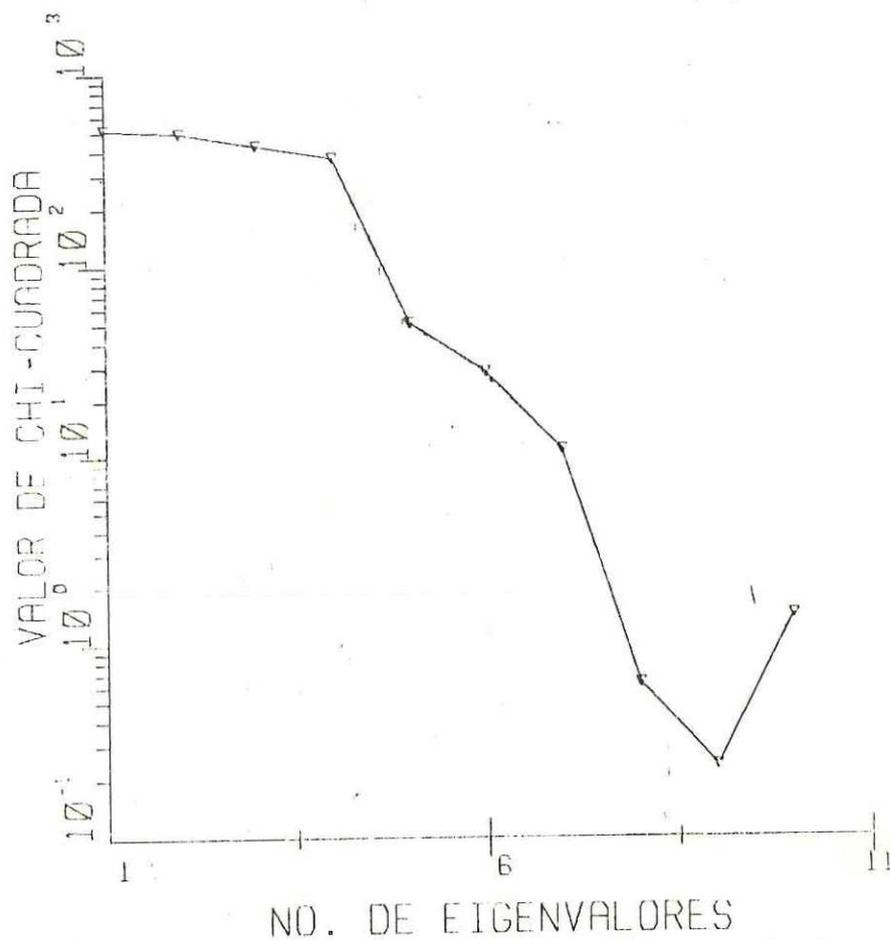


Fig. 5.4.3.- Valor de la función chi-cuadrada al aumentar el número de eigenvalores en la solución. Se utiliza el modelo 3 con el arreglo Wenner.

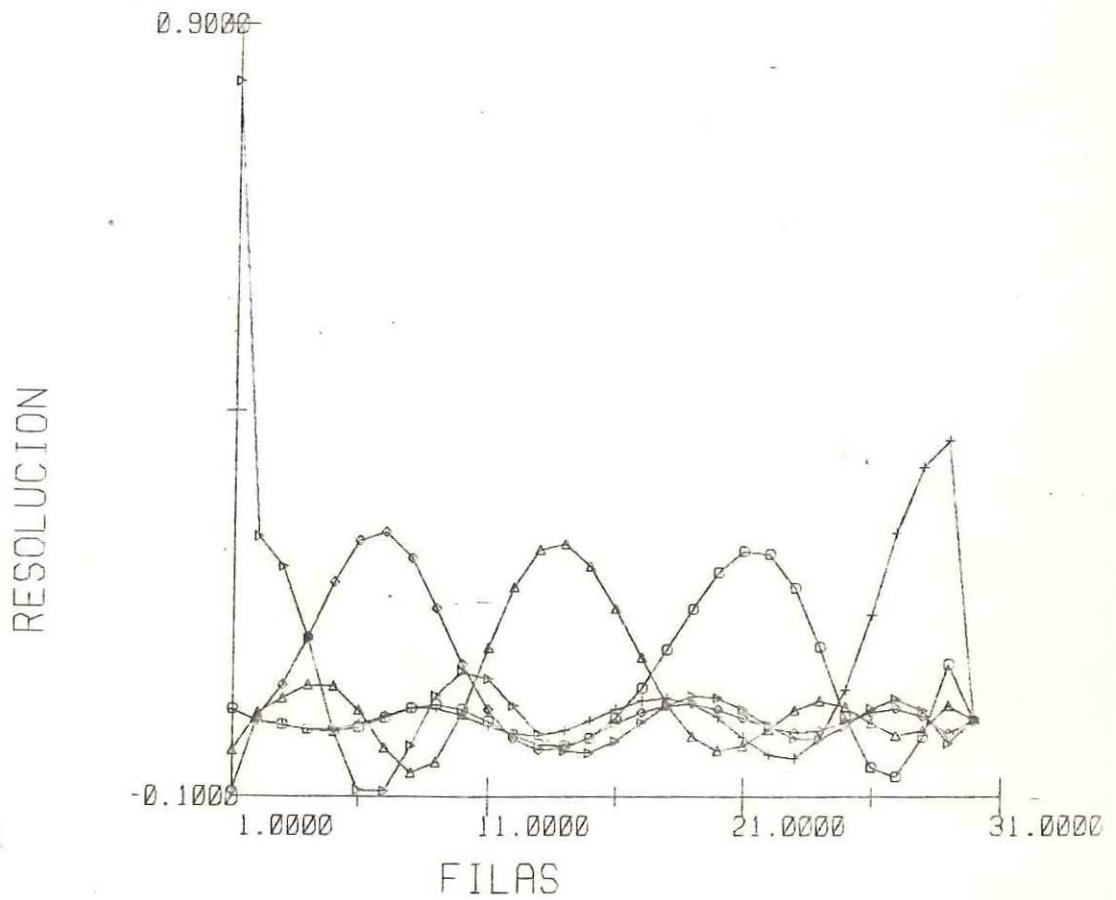


Fig. 5.4.4.- Filas de resolución para el modelo 4. Se utiliza el arreglo Wenner con el conjunto de aberturas electrónicas D_1 . Se consideran 10 eigenvalores.

El tomar como solución óptima aquella en que el valor de la función x^2 es mínima no es recomendable en todos los casos, pues podría suceder que se sobreajusten los datos. En tal caso, la solución debería ser aquella en que el ajuste sea comparable al porcentaje de error considerado en los datos.

La fig. 5.4.5 muestra el modelo inverso ajustado y el modelo verdadero considerando un 10 de error en los datos, en ésta puede observarse que el modelo inverso obtenido es satisfactorio.

La fig. 5.4.6 muestra el modelo real e inverso, en ésta puede observarse que el modelo inverso obtenido es malo, esto es debido a que los datos se están sobreajustando. La fig. 5.4.7 muestra la tercera fila de la matriz de resolución considerando diferente número de eigenvalores en la solución.

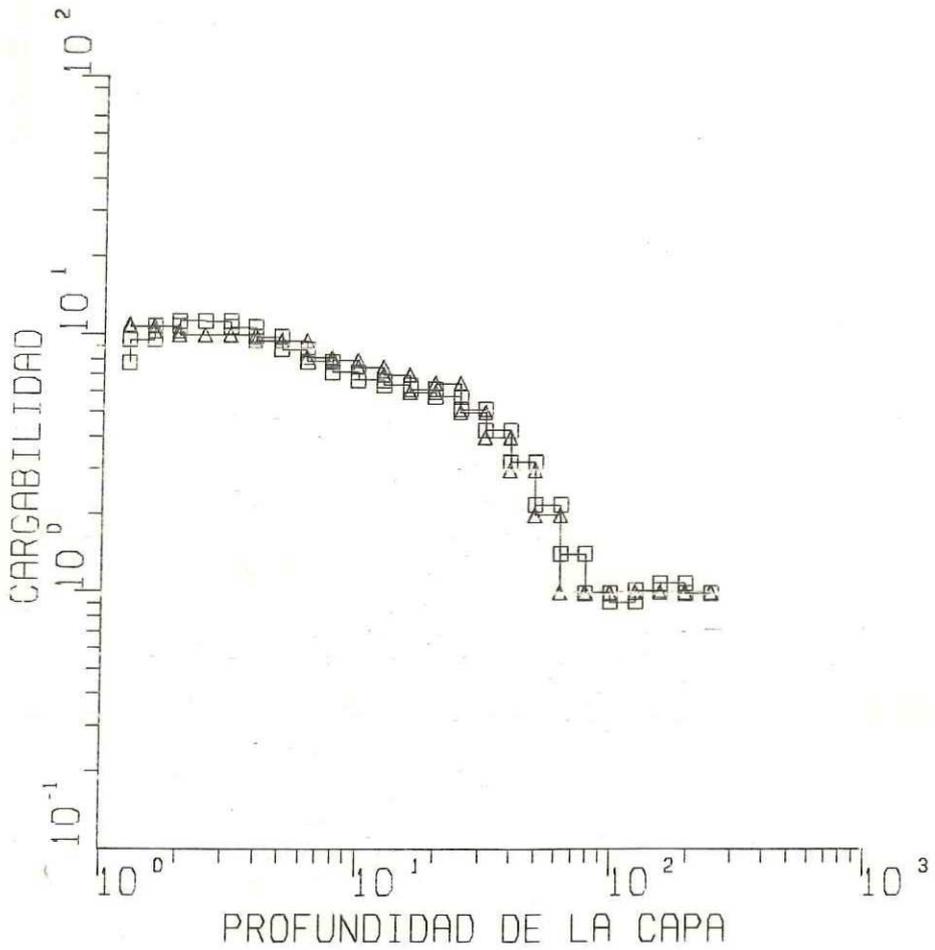


Fig. 5.4.6.- Modelo real (Δ) y solución inversa (\square) obtenida. Se consideran 17 eigenvalores en la solución. Se utiliza el arreglo Schlumberguer. Modelo 4.

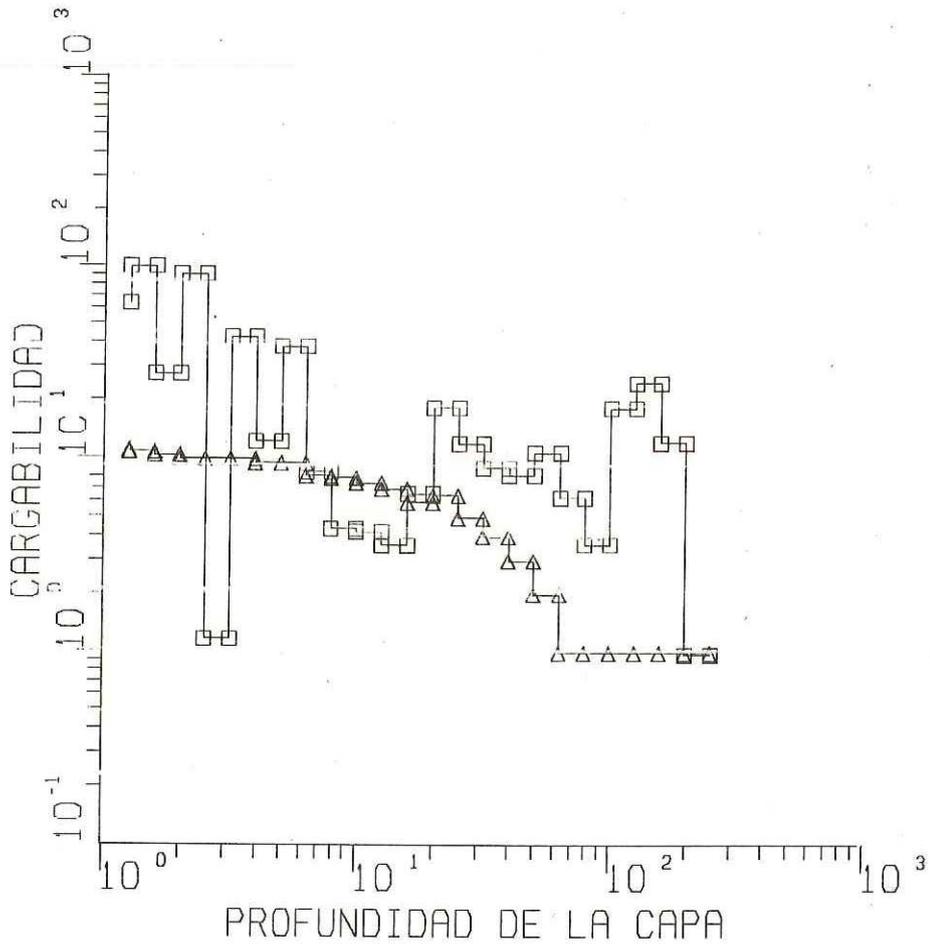


Fig. 5.4.5.- Modelo real (Δ) y solución inversa (\square) obtenida. Se consideran 7 eigenvalores en la solución. Se utiliza el arreglo Schlumberger. Modelo 4.

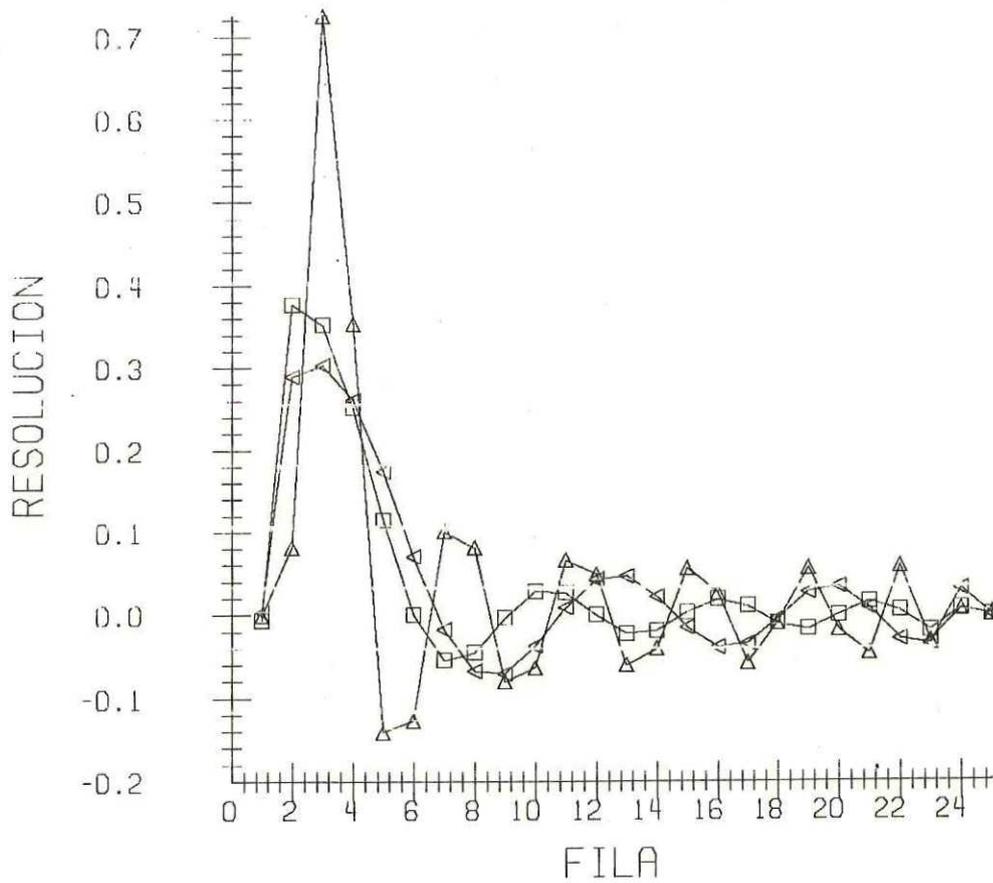


Fig. 5.4.7.- Tercera fila de la matriz de resolución para el modelo 4. Se utilizan en la solución: a) 5 eigenvalores (▽), b) 7 eigenvalores (□) y c) 17 eigenvalores (△).

VI.-CONCLUSIONES

Se implementó un programa para generar curvas teóricas de PI para las configuraciones electródicas Schlumberguer, Wenner, Polo-Polo y Dipolo-Dipolo para modelos unidimensionales. Se consideran modelos que presentan bajos contrastes en la resistividad.

Se desarrolló un programa de inversión de datos de PI para el mismo tipo de modelos del subsuelo en diferentes arreglos con separaciones múltiples de electrodos. Se consideraron los criterios algebraicos de estimación de mínimos cuadrados y mínima longitud para los casos sobre determinado y bajo determinado.

De las pruebas realizadas con datos sintéticos de PI se concluye lo siguiente:

No existe una diferencia significativa en los conjuntos de aberturas electródicas que se probaron para realizar las observaciones en la superficie, sin embargo se observa que es mejor el conjunto D2, pues la resolución obtenida es mejor que para aquellas—aberturas en que la densidad de las mediciones aumenta o disminuye.

En los casos considerados, se observa que los espesores

de las capas óptimas son aquellos que corresponden a un cuarto de su profundidad.

Tomando en cuenta los errores observacionales el problema es inestable, por lo que se consideran solo algunos eigenvalores en la solución.

El criterio utilizado para obtener la solución es considerar como óptima aquella en que la función χ^2 de las observaciones es mínima si el porcentaje de ajuste de ajuste en los datos es aproximado al porcentaje de error considerado en éstos.

La solución inversa mediante el operador de mínima norma es satisfactoria para los modelos que presentan cambios suaves en la polarizabilidad del medio. Para aquellos en que existen cambios bruscos de polarizabilidad se determinan soluciones aproximadas. Para estos casos se recomienda utilizar la formulación no lineal que permitiría ajustar a los datos un número pequeño de capas. Para reducir el número de iteraciones se podría tomar como modelo inicial un modelo obtenido en base a la aproximación lineal.

LITERATURA CITADA

De la Garza Guajardo., 1984. Solución al problema de PI para un medio. estratificado en polarizabilidad y resistividad Tesis de Licenciatura, U.A.N.L.

Elliot, C. L. and Luristsen, E., 1977 Induced Polarization Response of a Horizontally multilayered Earth with no Resistivity Contrast, Geophysical Prospecting Vol. 25, 76-95.

Frez C. José . 1983 Teoría de Inversión de Datos Geofísicos Notas, CICESE.

Gómez Treviño E., 1984. Soluciones asintóticas al problema directo de resistividad y polarización Inducida F.C.F.M., UANL.

Jackson David D., 1973 Geophys. J. R. astr. Soc. Vol 35 PP. 121-136; Marginal Solutions to Quasi-Linear Inverse Problems in Geophysics The Edgehog Method.

- Jackson D. D., 1972. Interpretation of Inaccurate, Insufficient and Inconsistent Data Geophys. J. R. Astr. Soc., PP. 28, 97-109.
- Lanczos, C. Numerical 1961. Differential Operators Ed. Van Nostrand.
- Misac N. Nabighian and Charles L. Elliot. Negative Induced Polarization Effects From Layered Media Geophysics Vol 41. No. 64, PP. 1236-1255.
- Noble Ben, W. Bawel James 1977. Applied Linear Algebra Ed. Prentice-Hall Inc. Oldenburg D. W., 1978. The Interpretation of Direct Current Current Resistivity Measurements Geophysics. Vol. 43 No.3, PP. 610-625.
- Patra H. P. y K. Mallik 1979. Geosounding Principles. 2 Ed. Elsevier.
- Peltron W. H. Pelton, L. Rijo, and c.m. Swift, Jr., 1978 Inversion of two-dimensional Resistivity And induced polarization Data Geophysics, Vol. 43, No. 4, PP. 788-803.

Seigel Harold O. Mathematical, Formulation and Type Curves For Induced Polarization. Geophysics , Vo l 24, No. 3, PP. 547-565.

Ward S. H. , B. D. Smith, W. E. Glenns, L Rijo, and J. R. Inman, Jr. Statistical Evaluation of Electrical Sounding Methods. Part II: Applied Electromagnetic Depth Sounding Geophysics, Vol. 41, No. 64, PP. 1222-1235.

Z. Der, R. Massé, and M. Landisman 1970 Effects of Observational Error on the Resolution of Surface Waves at Intermediate Distances Journal of Geophysical Research Vol. 75, No. 17.


```

      ZR(1)=ZR(1)*.05*Z(1)
      ENDDO
      WRITE(6,142)
      WRITE(6,143)(ZR(1),I=1,MEAS)
C   SE SUMA RUIDO A Z *****
      DO IZ=1,MEAS
        ZR(IZ)=Z(IZ)+ZR(IZ)
      ENDDO
      ZR(1)=0.00 00
      WRITE(6,36)
      WRITE(6,689)(ZR(1),I=1,MEAS)
C   SE GENERAN DATOS REALES *****
      CALL DIR(R,ZR,N)
      CALL WRITEC(Y,N,6)
      DO I=1,N
        Y(I)=Y(I)
      ENDDO
      CALL TNOUR('QUIERES RUIDO EN Y: ',20)
      READ(1,*)IRU
      IF (IRU.EQ.0) THEN
        CONTINUE
      ELSE
        CALL TNOUR('DESVIACION STANDARD EN Y: ',20)
        READ(1,*)DESY
        CALL RUIDOG(3,0.0,DESY,UN,1,N,YR)
        DO I=1,N
          DES(I)=0.00 00
          Y(I)=Y(I)+DESY*YR(I)
        ENDDO
        WRITE(6,157)
        WRITE(6,143)(YR(I),I=1,N)
C   SE SUMA RUIDO A Y *****
        DO I=1,N
          Y(I)=Y(I)+YR(I)
        ENDDO
        WRITE(6,23)
        CALL WRITEC(Y,N,6)
      ENDIF
      ENDIF
      CALL TNOUR('QUIERES LA MATRIZ I ',20)
      READ(1,*)IRI
      IF (IRI.EQ.0) THEN
        CONTINUE
      ELSE
        WRITE(6,74)
        CALL WRITEC(C,NK1,6)
      ENDIF
      DO JN=1,MEAS
        EX(JN) = 1.00 00
      ENDDO
      WRITE(6,29)
      CALL WRITEC(CX,MEAS,6)
      DO NI = 1,N
        IF (IRU.EQ.0) THEN
          CY(NI)=1.00 00
        ELSE
          CY(NI)=PCYNY(NI)/100.0
        ENDIF
      ENDDO
      WRITE(6,18)
      CALL WRITEC(CY,N,6)
      DO I=1,N
        CY(I)=1.00 00/CY(I)
        Y(I)=Y(I)*CY(I)
      ENDDO
      CALL GOIR(CY,C,N,MEAS)
      IR=H
      DO J=1,MEAS
        DO I=1,N
          IK=IR+1
          LL(I)=LL(I)+X(I)*Y(I)
        ENDDO
      ENDDO
      IF (NESC.EQ.0) THEN
        CONTINUE
      ELSE
        WRITE(6,15)
        DO I=1,N
          WRITE(6,17)(C(I+NK1-I-1),I=1,MEAS)
        ENDDO
      ENDIF
C   CALL DGMAT(C,A,N,MEAS)
      OUTPUT THE INPUT.
      IF (NESC.EQ.0) THEN
        CONTINUE
      ELSE
        WRITE(7,110)
        DO I=1,N
          WRITE(7,115) I,(A(I+(JKJ-J))/2),J=1,N)
        ENDDO
      ENDIF
C   ENDIF
C
C   THIS SECTION IS MAINLY COPIED FROM EISPACK SAMPLE PROGRAM
C   PAGE 2.3.34.
C
C   FIRST, REDUCE THE MATRIX A TO A TRIDIAGONAL MATRIX.
C   EHOUSS IS USED INSTEAD OF TRED1.
C
C   CALL EHOUSS(A,D,E,E2)
C
C   ESTIMATE UPPER BOUND FOR THE LARGEST EIGENVALUE OF A BY
C   USING GERSGORIN THEOREM. REF. LANCZOS(1957), 'APPLIED
C   ANALYSIS', PRENTICE-HALL, P. 182. SEE, ALSO, WILKINSON(1965)
C   'THE ALGEBRAIC EIGENVALUE ANALYSIS', OXFORD, P. 71.
C
      U=0.05*(E(2))
      CU=0(1)+U
      DO I=2,N
        X1=U

```

```

      IF(1.EQ.N) THEN
        CU=DMAX1(D(1)+(X1+U),CU)
      ELSE
        U=DABS(E(I+1))
        CU=DMAX1(D(1)+(X1+U),CU)
      ENDIF
    ENDDO
  C
  C      CL AND CU PRODUCE A NUMERICAL CUT OFF TO AVOID NUMERICAL
  C      INSTABILITIES AND SAVE SOME COMPUTING TIME.
  C
  CL=CU*1.0D-10
  IF(CL.LT.SMLAMB) CL=SMLAMB
  EPS1=0.0D 0
  C
  DO 1=1,NEIG
    W(1)=0.0D 0
    IND(1)=0.0
  ENDDO
  C
  C      WRITE (6,7) CU,CL
  C      COMPUTE EIGENVALUES OF TRIDIAGONAL MATRIX .
  C
  C      CL CAN BE MODIFIED INSIDE SUBROUTINE BISECT IN ORDER TO
  C      INCLUDE WITH CU NO MORE THAN NEIGEN EINGENVALUES.
  C
  CALL BISECT(D,E,E2,W,IND,RV4,RV5)
  C
  IF(1.EPR.NE.0) GO TO 99999
  IF(N.EQ.0) GO TO 00000
  C
  C      COMPUTE EIGENVECTORS OF TRIDIAGONAL MATRIX.
  C
  CALL TINVT(D,E,E2,W,IND,VA,RV4,RV5,RV6,RV7,RV8)
  C
  IF(1.ERR.NE.0) GO TO 99999
  C
  C      COMPUTE EIGENVECTORS OF A.
  C
  CALL TRBAK1(A,VA)
  C
  C      ARRANGE EIGENVALUES BY DECREASING VALUES. USE SAME ORDER FOR
  C      CORRESPONDING EIGENVECTORS.
  C
  IM=NKM
  JM=-M
  MHALF=M/2
  DO 1=1,MHALF
    IU=IM-JM
    IW=IM+JM
    TEMP=W(I)
    W(I)=W(M-I+1)
    W(M-I+1)=TEMP
    DO J=1,M
      VA(J)=VA(IU+J)
      VA(IU+J)=VA(IW+J)
      VA(NM(I)+J)=D(J)
    ENDDO
  ENDDO
  C
  C      WRITE THE M EIGENVALUES AND CORRESPONDING EIGENVECTORS
  C      OF A
  C
  IF(NESC.EQ.0) THEN
    CONTINUE
  ELSE
    WRITE(7,230) CL,CU,M
  C
    NX=-N
    DO 1=1,M
      NX=NX+N
      WRITE(7,235)1,W(1)
      CALL WRITEC(VA(NX+1),N,7)
    ENDDO
  C
    CALL DGMATAC(VA,UTU,N,M)
    WRITE(7,407)
    WRITE(7,4) (UTU(I),I=1,MSYM)
  C      CALL DGMATAC(VA,UTU,N,M)
  C      ENDIF
  IF(NESC.GT.0) THEN
    CONTINUE
  ELSE
    WRITE(7,410)M
    WRITE(7,411)
    CALL WRITECC(W,M,7)
  ENDIF
  CALL JFC2(VA,W,C,V,M,N,MEAS)
  L=MMEAS
  IF(NESC.EQ.0) THEN
    CONTINUE
  ELSE
    WRITE(7,302)
    WRITE(7,4) (V(1),I=1,NKI)
  ENDIF
  303  ISH=M
  DO 1=1,MEAS
    DO 105=1,MEAS
      ISA=ISA+1
      COEF1(ISA)=0.0D 00
      COV(ISA)=0.0D 00
    ENDDO
    X(1)=0.0D 00
  ENDDO
  JJ=0
  KK=0
  149  DO 244 J=1,M
    IF(NUM.NE.0)GO TO 236

```



```

R2=TNDR(I-1)
CH2=CHI(I-1)
IF(R1.LT.R2.AND.R1.LT.PMIN)NUM=I
IF(CH1.LT.CH2.AND.CH1.LT.CMIN)NUMC=I
IF(CH1.LT.CH2.AND.CH1.LT.CMIN)CMIN=CH1
IF(R1.LT.R2.AND.R1.LT.PMIN)PMIN=R1
ENDDD
CALL DGMART(V,VVT,MEAS,NUMC)
CALL DGMART(VA,UUT,N,NUMC)
CALL GEN(UUT,UUTG,N)
CALL GEN(VVT,VVTG,MEAS)
IF(NESC.EQ.0)GO TO 16666
WRITE(7,155)
XXX=MEAS*MEAS
DO I=1,MEAS
  WRITE(7,17)(VVTG(I+MEAS*(J-1)),J=1,MEAS)
ENDDD
16666 CONTINUE
CALL TNOUR('QUIERES GRAFICAS: ',10)
READ(1,N)NGRA
IF(NGRA.GT.0) THEN
  N=NUMC
  WRITE(1,1112)NUMC
  WRITE(1,1113)NUM
  GO TO 303
  J=0
  DO I=1,MEAS
    I=I+1
    ZDAT(J)=Z(I)
    ZRDAT(J)=ZR(I)
    IF(I.EQ.MEAS) THEN
      CONTINUE
    ELSE
      J=J+1
      ZDAT(J)=Z(I)
      ZRDAT(J)=ZR(I)
    LNDIF
  ENDD
  XDAT(1)=X(1)
  XODAT(1)=XO(1)
  J=1
  DO I=2,MEAS
    J=J+1
    XDAT(J)=X(I)
    XODAT(J)=XO(I)
    J=J+1
    XDAT(J)=XO(I)
  ENDD
  MEASD=MEAS/I-1
  WRITE(9,3610)(ZDAT(I),XDAT(I),I=1,MEASD)
  WRITE(9,3610)(ZRDAT(I),XODAT(I),I=1,MEASD)
  WRITE(9,3610)(RC(I),YC(I),I=1,N)
  WRITE(9,3610)(RC(I),YTC(I),I=1,N)
  WRITE(9,3610)(RC(I),YDC(I),I=1,N)
390 CONTINUE
CALL TNOUR('FILAS NUMERO: ',13)
READ(1,N)NF
IF(NF.LU.0)GO TO 4000
WRITE(11,391)(J,VVTG(NF+MEAS*(J-1)),J=1,MEAS)
GO TO 390
C
C CALCULA LA VARIANZA DEL MODELO
C
4000 CONTINUE
ENDIF
DO 4025 K=1,N
  RR(K)=0.0D 0
  JJ=K+MEAS*(K-1)
  DO 4070 J=1,MEAS
    IF(JJ.EQ.KK) THEN
      RR(K)=(VVTG(KK)-1.0D 00)*K*2+RR(K)
    ELSE
      RR(K)=UUTG(KK)*K*2+RR(K)
    ENDIF
  ENDD
  ENDD
  DO 4041 K=1,N
    SS(K)=0.0D 00
    JJ=K+N*(K-1)
    DO 4042 J=1,N
      KK=K+N*(J-1)
      IF(JJ.EQ.KK) THEN
        SS(K)=(UUTG(KK)-1.0D 00)*K*2+SS(K)
      ELSE
        SS(K)=UUTG(KK)*K*2+SS(K)
      ENDD
    ENDD
  ENDD
  WRITE(6,4040)NUMC
  WRITE(6,4080)K,RR(K),K=1,MEAS
  WRITE(6,4080)K,SS(K),K=1,N)
  CALL SRCH*(K,CLOS,ARCH3,0,2,ITYPE,ICODE)
  CALL SRCH*(K,CLOS,ARCH4,0,3,ITYPE,ICODE)
  CALL SRCH*(K,CLOS,ARCH2,0,4,ITYPE,ICODE)
  CALL SRCH*(K,CLOS,ARCH1,0,1,ITYPE,ICODE)
C
C CALL TNOUR('QUIERES NUEVOS CALCULOS : ',26)
READ(1,N)NCC
IF(NCC.EQ.1)GO TO 159
CALL EXIT
C
C THERE IS NOT EIGENVALUES IN (CL,CU)
C
88888 WRITE(7,88100) CL,CU
CALL SRCH*(K,CLOS,ARCH3,0,2,ITYPE,ICODE)
CALL SRCH*(K,CLOS,ARCH4,0,3,ITYPE,ICODE)
CALL SRCH*(K,CLOS,ARCH2,0,4,ITYPE,ICODE)
CALL SRCH*(K,CLOS,ARCH1,0,1,ITYPE,ICODE)
CALL TNOUR('QUIERES NUEVOS CALCULOS : ',26)
READ(1,N)NCC
IF(NCC.EQ.1)GO TO 159
CALL EXIT
C

```



```

IF (IIV) 20,10,19
19 CALL DDPDIP(C,PA,R,Z,P,L,N,G)
GO TO 23
16 CALL TNOUC' QUIERES EL ARREGLO POLO-POLO : ',32)
READ(1,M) IH
IF (IH) 20,20,21
21 CALL POLOP(C,PA,R,Z,P,L,N,G)
C23 WRITE(6,9)
C29 FORMAT(10X, 'POLARIZABILIDAD APARENTE')
C23 WRITE(6,10) (PA(K),K=1,L)
C18 FORMAT(5D16.4)
C WRITE(6,88)
C88 FORMAT(10X,'MATRIZ G(I)',/)
C WRITE(6,10) (G(I),I=1,MM)
29 CONTINUE
20 RETURN
END
SUBROUTINE SCHLUM(C,PA,R,Z,P,L,N,G)
DIMENSION C(1),PA(1),R(1),Z(1),P(1),G(1)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
NN=N-1
DO 7 K=1,L
SUM = 0.0 D00
DO 1 I=1,NN
A=(R(K)XX3)/(R(K)XX2+4.0 D00X(Z(1)XX2.0))XX1.5
M=I+1
B=(R(K)XX3)/(R(K)XX2+4.0 D00X(Z(N)XX2.0))XX1.5
C(I)=A-B
1 SUM=SUM+P(I)X(C(I))
C(N)=(R(K)XX3)/(R(K)XX2+4.0 D00X(Z(N)XX2.0))XX1.5
CP=C(N)XP(N)
SUM=SUM+CP
PA(K)=SUM
56 DO 57 I=1,N
LL=K+(I-1)XL
57 G(LL)=C(I)
CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE HENNER(C,PA,R,Z,P,L,N,G)
DIMENSION C(1),PA(1),R(1),Z(1),P(1),G(1)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
TRACE 7
NN=N-1
DO 7 V=1,I
SUM = 0.00 D00
DO 1 I=1,NN
A=R(K)X(C(2.0)/(R(K)XX2.0+4.0 D00X(Z(1)XX2.0))XX0.5)+
K(1.00 D00/(R(K)XX2.0+Z(1+1)XX2.0))XX0.5)
B=R(K)X(C(2.0)/(R(K)XX2.0+4.0 D00X(Z(1+1)XX2.0))XX0.5)+
K(1.00 D00/(R(K)XX2.0+Z(1)XX2.0))XX0.5)
C(I)=A-B
1 SUM=SUM+P(I)X(C(I))
C(N)=Z(2.00 D00X(R(K)XX2.0+4.0 D00X(Z(1)XX2.0))XX0.5)+
Z(CR(K)/(R(K)XX2.0+Z(N)XX2.0))XX0.5)
C IF (I.R.NE.0)GO TO 56
CP = C(N)XP(N)
SUM=SUM+CP
PA(K)=SUM
56 DO 57 I=1,N
LL=K+(I-1)XL
57 C(I)=C(I)
CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE DDPDIP(C,PA,R,Z,P,L,N,G)
DIMENSION C(1),PA(1),R(1),Z(1),P(1),G(1)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
A=200.0 D00
NN=N-1
DO 7 K=1,L
SUM=0.0 D00
DO 1 I=1,NN
R1=R(K)+1.0 D00
R2=R(K)+2.0 D00
KH=R(K)XH
Z1=Z(1)XZ(1)
Z2=Z(1+1)XZ(1+1)
P1A=R1XA
R2A=R2XA
ZN=Z(N)XZ(N)
B=1.0 D00/(RAKRA+4.0 D00XZ1Z)XX0.5
GC=1.0 D00/(RAKRA+4.0 D00XZ2Z)XX0.5
H=2.0 D00/(RIAKR1A+4.0 D00XZ1Z)XX0.5
E=2.0 D00/(RIAKR1A+4.0 D00XZ2Z)XX0.5
F=1.0 D00/(R2AKR2A+4.0 D00XZ1Z)XX0.5
GG=1.0 D00/(R2AKR2A+4.0 D00XZ2Z)XX0.5
IF=61E1F
HN=CC+D+GG
HM=HP+HN
O=(R1R2XRRA)/2.0 D00
C(1)=OMHH
1 SUM=SUM+C(1)XP(1)
O=1.0 D00/(RAKRA+4.0 D00XZN)XX0.5
S=1.0 D00/(R2AKR2A+4.0 D00XZN)XX0.5
T=2.0 D00/(RIAKR1A+4.0 D00XZN)XX0.5
C(N)=(O+S-T)XO
CP=C(N)XP(N)
SUM=SUM+CP
PA(K)=SUM
57 DO 57 I=1,N
LL=K+(I-1)XL
57 G(LL)=C(I)
CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE POLOP(C,PA,R,Z,P,L,N,G)
DIMENSION C(1),PA(1),R(1),Z(1),P(1),G(1)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
NN=N-1
DO 7 K=1,L
SUM = 0.0 D00
DO 1 I=1,NN

```

```
A=R(K)/(R(K)*H*2.0+4.0*(Z(I)*H*2.0))**0.5
B=R(K)/(R(K)*H*2.0+4.0*(Z(I+1)*H*2.0))**0.5
C(I)=A-B
1 SLN=SUM(P(I)*C(I))
C(N)=R(K)/(R(K)*H*2.0+4.0*(Z(N)*H*2.0))**0.5
CF=C(N)*P(N)
SLN=SUM+CF
PF(K)=SUM
DC 57 I1=1,N
LL=K+(I1-1)*ML
57 G(LL)=C(I1)
7 CONTINUE
RETURN
END
```

APENDICE B

SE CALCULAN		17EIGENVALORES			
EIGEN VALORES					
0.7907D 03	0.1223D 02	0.2232D 01	0.2078D 01	0.7219D 00	
0.3041D 00	0.1215D 00	0.4306D-01	0.1432D-01	0.4484D-02	
0.1317D-02	0.3020D-03	0.1015D-03	0.2734D-04	0.6759D-05	
0.1436D-05	0.5426D-06				
VALOR DE LOS PARAMETROS		XXXXXXXXXX CICLO NUMERO	1	XXXXXXXXXXXX	
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	
0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0004	
0.0006	0.0010	0.0015	0.0024	0.0024	
0.0036	0.0054	0.0081	0.0118	0.0118	
0.0168	0.0232	0.0310	0.0481	0.0481	
1.1735					
XXXXXXXXXX DESVIACION STANDARD XXXXXXXXX					
0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01
0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01
0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01
0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01
0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01
0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01	0.3026D 01
NORMA DEL RESIDUO:		0.1133D 01			
NORMA DE XRES:		0.1514D 01			
VALOR DE CHI:		0.2108D 04			
XXXXXXXXXX CICLO NUMERO		2	XXXXXXXXXXXX		
VALOR DE LOS PARAMETROS					
0.0080	0.0037	0.0054	0.0080	0.0080	
0.0119	0.0177	0.0263	0.0391	0.0391	
0.0578	0.0852	0.1247	0.1812	0.1812	
0.2609	0.3726	0.5235	0.7245	0.7245	
0.9809	1.2948	1.6573	2.0498	2.0498	
2.4309	2.7448	2.9275	2.9360	2.9360	
0.8659					
XXXXXXXXXX DESVIACION STANDARD XXXXXXXXX					
0.4477D 01	0.4477D 01	0.4477D 01	0.4477D 01	0.4477D 01	0.4477D 01
0.4477D 01	0.4477D 01	0.4477D 01	0.4477D 01	0.4477D 01	0.4477D 01
0.4475D 01	0.4474D 01	0.4473D 01	0.4472D 01	0.4471D 01	0.4470D 01
0.4469D 01	0.4460D 01	0.4465D 01	0.4462D 01	0.4458D 01	0.4450D 01
0.4457D 01	0.4450D 01	0.4450D 01	0.4450D 01	0.4450D 01	0.4450D 01
NORMA DEL RESIDUO:		0.1155D 01			
NORMA DE XRES:		0.1492D 01			
VALOR DE CHI:		0.1611D 04			
XXXXXXXXXX CICLO NUMERO		3	XXXXXXXXXXXX		
VALOR DE LOS PARAMETROS					
19.8340	3.0270	2.7503	2.4438		
2.1476	1.9125	1.7526	1.6786		
1.6903	1.7085	1.9673	2.7227		
2.5464	2.9339	3.3446	2.7413		
4.0405	4.1703	4.0300	3.5702		
7.7556	1.6506	0.4206	-0.7519		
1.0056					
XXXXXXXXXX DESVIACION STANDARD XXXXXXXXX					
0.2939D 01	0.2936D 01	0.2954D 01	0.2950D 01	0.2924D 01	0.2924D 01
0.2913D 01	0.2896D 01	0.2873D 01	0.2843D 01	0.2808D 01	0.2808D 01
0.2768D 01	0.2725D 01	0.2678D 01	0.2628D 01	0.2576D 01	0.2576D 01
0.2574D 01	0.2477D 01	0.2452D 01	0.2310D 01	0.2249D 01	0.2249D 01
0.2440D 01	0.2405D 01	0.2354D 02	-0.2250D 02	0.2011D 01	0.2011D 01
NORMA DEL RESIDUO:		0.6078D 00			
NORMA DE XRES:		0.1143D 01			
VALOR DE CHI:		0.4570D 03			
XXXXXXXXXX CICLO NUMERO		4	XXXXXXXXXXXX		
VALOR DE LOS PARAMETROS					
17.3374	2.6976	2.4800	2.2628		
2.0500	1.9243	1.8749	1.9245		
7.0765	7.9167	1.7014	7.1600		
3.7202	4.3509	4.9883	5.5734		
5.9688	6.0305	5.6002	4.6157		
3.0448	1.0358	-1.1310	-3.0973		
1.0214					
XXXXXXXXXX DESVIACION STANDARD XXXXXXXXX					
0.3742D 01	0.3578D 01	0.3459D 01	0.3294D 01	0.3089D 01	0.3089D 01
0.2896D 01	0.2808D 01	0.2900D 01	0.3141D 01	0.3434D 01	0.3434D 01
0.2782D 01	0.2624D 01	0.2612D 01	0.2410D 01	0.2110D 01	0.2110D 01
0.4117D 01	0.4039D 01	0.3897D 01	0.3676D 01	0.3398D 01	0.3398D 01
0.3748D 01	0.1398D 02	-0.2050D 02	-0.1023D 02	0.3624D 01	0.3624D 01
NORMA DEL RESIDUO:		0.5360D 00			
NORMA DE XRES:		0.1113D 01			
VALOR DE CHI:		0.3720D 03			
XXXXXXXXXX CICLO NUMERO		5	XXXXXXXXXXXX		
VALOR DE LOS PARAMETROS					
14.5601	3.4734	3.9109	4.4210		
5.8817	5.6816	6.4447	7.2227		
7.9967	6.6852	9.1807	9.4142		
9.2730	8.7297	7.7063	6.2609		
4.4890	2.5749	0.0335	-0.3633		
0.0070	0.0125	1.5908	3.0452		
0.3485					
XXXXXXXXXX DESVIACION STANDARD XXXXXXXXX					
0.4505D 01	0.3054D 01	0.3017D 01	0.3242D 01	0.3571D 01	0.3571D 01
0.2877D 01	0.4101D 01	0.4232D 01	0.4277D 01	0.4247D 01	0.4247D 01
0.4149D 01	0.3986D 01	0.3763D 01	0.3500D 01	0.3346D 01	0.3346D 01
0.3714D 01	0.5686D 01	0.1188D 02	0.4083D 02	-0.0898D 02	-0.0898D 02
-0.3493D 02	0.1249D 04	0.1745D 02	0.1362D 02	0.4255D 01	0.4255D 01
NORMA DEL RESIDUO:		0.2340D 00			
NORMA DE XRES:		0.6616D 00			
VALOR DE CHI:		0.6616D 02			
XXXXXXXXXX CICLO NUMERO		6	XXXXXXXXXXXX		
VALOR DE LOS PARAMETROS					
12.6088	5.0693	6.2673	7.4664		
8.5584	9.5131	10.2299	10.6453		
10.6893	10.3429	9.5867	8.4747		
7.1147	5.6833	4.3309	3.2631		
2.5896	2.3417	2.4135	2.5773		
2.5248	1.9923	0.0860	-0.6456		
1.0088					
XXXXXXXXXX DESVIACION STANDARD XXXXXXXXX					
0.5721D 01	0.4876D 01	0.5587D 01	0.6021D 01	0.6178D 01	0.6178D 01
0.6092D 01	0.5798D 01	0.5334D 01	0.4760D 01	0.4213D 01	0.4213D 01
0.4819D 01	0.4692D 01	0.6486D 01	0.9235D 01	0.1247D 02	0.1247D 02
0.1473D 02	0.1423D 02	0.1314D 02	0.1681D 02	0.2030D 02	0.2030D 02
0.2019D 02	0.1596D 02	0.3342D 02	-0.1207D 03	0.4087D 01	0.4087D 01

NORMA DEL RESIDUO: 0.97820-01
 NORMA DE XRES: 0.41460 00
 VALOR DE CHI: 0.15870 02

XXXXXXXXXX CICLO NUMERO 7 XXXXXXXXXXXX

VALOR DE LOS PARAMETROS

11.5295	6.8002	0.5659	9.9707
10.9005	11.3297	11.2127	10.6165
9.6524	8.5055	7.3480	6.3604
5.6631	5.2991	5.1478	5.0429
4.7273	4.0186	2.8923	1.5682
0.4606	0.0000	0.5070	2.0274
0.9838			

XXXXXXXXXX DESVIACION STANDARD XXXXXXXX

0.70360 01	0.97300 01	0.10080 02	0.97360 01	0.00930 01
0.75170 01	0.40870 01	0.53490 01	0.64350 01	0.90180 01
0.11710 02	0.13020 02	0.12000 02	0.10210 02	0.11790 02
0.15420 02	0.17380 02	0.16250 02	0.15140 02	0.40020 02
0.10960 03	0.10770 04	0.53290 02	0.59400 02	0.42610 01

NORMA DEL RESIDUO: 0.54440-01
 NORMA DE XRES: 0.25950 00
 VALOR DE CHI: 0.65960 01

XXXXXXXXXX CICLO NUMERO 8 XXXXXXXXXXXX

VALOR DE LOS PARAMETROS

11.2177	7.8233	5.5596	10.7922
11.3463	11.2907	10.7085	9.0023
0.7038	7.0649	7.1507	6.6911
6.3963	6.1520	5.7647	5.1483
4.2477	3.2121	2.1904	1.4104
0.3931	0.9150	1.0135	1.0030
0.9095			

XXXXXXXXXX DESVIACION STANDARD XXXXXXXX

0.02750 01	0.20080 02	0.18080 02	0.14570 02	0.10350 02
0.75610 01	0.95350 01	0.13790 02	0.16490 02	0.15670 02
0.12650 02	0.14440 02	0.20270 02	0.22660 02	0.19250 02
0.15420 02	0.25330 02	0.42940 02	0.52240 02	0.47580 02
0.11940 03	0.16540 03	0.70400 02	0.17210 03	0.43440 01

NORMA DEL RESIDUO: 0.31470-01
 NORMA DE XRES: 0.16250 00
 VALOR DE CHI: 0.61550 01

XXXXXXXXXX CICLO NUMERO 9 XXXXXXXXXXXX

VALOR DE LOS PARAMETROS

11.2046	7.9497	9.6621	10.0309
11.3233	11.2105	10.6071	9.7240
0.7650	7.9137	7.2499	6.7026
6.4306	6.1215	5.6774	5.0653
4.2223	3.2534	2.2855	1.4868
0.9832	0.0186	0.9306	1.1821
0.9891			

XXXXXXXXXX DESVIACION STANDARD XXXXXXXX

0.95250 01	0.41030 02	0.30020 02	0.17500 02	0.11350 02
0.17930 02	0.23750 02	0.22040 02	0.17220 02	0.20940 02
0.31720 02	0.33080 02	0.25000 02	0.25430 02	0.40010 02
0.44650 02	0.33390 02	0.51290 02	0.10690 03	0.12530 02
0.12630 03	0.32300 03	0.21630 03	0.21730 03	0.11330 01

NORMA DEL RESIDUO: 0.51650-01
 NORMA DE XRES: 0.17520 00
 VALOR DE CHI: 0.61530 01

XXXXXXXXXX CICLO NUMERO 10 XXXXXXXXXXXX

VALOR DE LOS PARAMETROS

11.7807	2.7878	6.8654	11.3436
14.4946	15.0764	12.0600	9.0196
5.4410	4.1057	5.2773	0.0704
9.3740	9.4239	6.3278	2.5427
0.5194	1.4744	4.0944	5.2823
2.8325	-1.7691	-3.1786	4.4223
0.9808			

XXXXXXXXXX DESVIACION STANDARD XXXXXXXX

0.10450 02	0.22910 03	0.60520 02	0.17380 02	0.24910 02
0.30360 02	0.27030 02	0.25990 02	0.67620 02	0.10250 03
0.55490 02	0.33110 02	0.41030 02	0.40770 02	0.37530 02
0.13760 03	0.00370 03	0.17110 03	0.75770 02	0.0710 02
0.01480 02	-0.21640 03	-0.15140 03	0.10220 03	0.45650 01

NORMA DEL RESIDUO: 0.48840-01
 NORMA DE XRES: 0.69910 00
 VALOR DE CHI: 0.52700 01

XXXXXXXXXX CICLO NUMERO 11 XXXXXXXXXXXX

VALOR DE LOS PARAMETROS

11.4664	7.2484	7.0750	9.1039
11.1161	13.2039	13.8919	12.1168
0.2566	4.3511	2.0885	4.9446
0.9368	11.4316	9.5868	3.9733
-1.3423	-1.8062	-2.9890	7.7567
5.9173	-2.5495	-7.2701	6.7637
0.7724			

XXXXXXXXXX DESVIACION STANDARD XXXXXXXX

0.12410 02	0.16530 03	0.60270 02	0.59970 02	0.76340 02
0.47340 02	0.30150 02	0.61240 02	0.07450 02	0.39060 02
0.22530 03	0.15300 03	0.52050 02	0.52100 02	0.01150 02
0.12020 03	-0.44330 03	-0.43580 03	0.13380 03	0.92430 02
0.12470 03	-0.16550 03	-0.14400 03	0.10320 03	0.46750 01

NORMA DEL RESIDUO: 0.49190-01
 NORMA DE XRES: 0.82030 00
 VALOR DE CHI: 0.50760 01

XXXXXXXXXX CICLO NUMERO 12 XXXXXXXXXXXX

VALOR DE LOS PARAMETROS

11.9283	-2.6932	9.0898	16.0888
16.9436	11.5709	6.6517	6.4254
9.6766	11.4105	0.4003	3.2088
1.0154	6.6410	12.4646	11.2170
1.6500	-6.0140	-3.6200	0.7118
13.4359	-0.7216	-16.2635	10.7639
0.9724			

XXXXXXXXXX DESVIACION STANDARD XXXXXXXX

0.13990 02	-0.02550 03	0.57970 02	0.92610 02	0.01980 02
0.60210 02	0.21450 03	0.20290 03	0.79580 02	0.12250 03
0.14590 03	0.25800 03	0.70340 03	0.16290 03	0.76070 02
0.12090 03	0.49480 03	-0.10030 03	-0.36120 03	0.04850 02
0.11890 03	-0.75460 03	-0.12250 03	0.95430 02	0.47770 01

NORMA DEL RESIDUO: 0.47750-01
 NORMA DE XRES: 0.14310 01
 VALOR DE CHI: 0.47950 01

XXXXXXXXXX CICLO NUMERO				13	XXXXXXXXXX
VALOR DE LOS PARAMETROS					
11.9007	-1.0037	8.6261			16.0093
16.0304	12.2401	7.2719			6.2579
8.9296	10.9002	0.0200			3.9523
1.9430	5.9035	11.0031			11.5023
2.4224	-6.6024	-4.3302			0.2023
14.0743	-0.1774	-17.1746			11.0905
0.9721					
XXXXXXXXXX DESVIACION STANDARD XXXXXXXX					
0.16250 02	0.21400 04	0.20070 03		0.20170 03	0.05040 02
0.20260 03	0.36100 03	0.22900 03		0.30900 03	0.18670 03
0.21920 03	0.70100 03	0.76040 03		0.43050 03	0.19150 03
0.15350 03	0.11710 04	-0.19690 03		-0.66140 03	0.20490 03
0.19770 03	-0.11330 05	-0.72140 03		0.13900 03	0.40630 01
NORMA DEL RESIDUO: 0.47710-01					
NORMA DE XRES: 0.14340 01					
VALOR DE CHI: 0.47940 01					
XXXXXXXXXX CICLO NUMERO				14	XXXXXXXXXX
VALOR DE LOS PARAMETROS					
11.7240	6.3736	1.0129			9.6184
20.9574	20.3759	7.7735			-1.4675
3.9726	15.0798	16.5026			3.1527
-6.1736	2.6641	10.6733			17.4432
-2.2030	-14.1060	-1.3419			16.5399
11.1110	-0.0012	-0.4145			0.4701
0.9735					
XXXXXXXXXX DESVIACION STANDARD XXXXXXXX					
0.19070 02	0.10190 04	0.50090 04		0.54500 03	0.14290 03
0.20220 03	0.34020 03	-0.34960 04		0.10570 04	0.23500 03
0.31910 03	0.09350 03	-0.07250 03		0.11360 04	0.26190 03
0.23960 03	-0.10000 04	-0.34900 03		-0.25690 04	0.33450 03
0.30220 03	-0.66530 03	-0.00320 03		0.26910 03	0.49400 01
NORMA DEL RESIDUO: 0.47100-01					
NORMA DE XRES: 0.10950 01					
VALOR DE CHI: 0.47670 01					
XXXXXXXXXX CICLO NUMERO				15	XXXXXXXXXX
VALOR DE LOS PARAMETROS					
11.2569	33.0477	-34.1597			-3.7241
49.1367	-0.1455	-12.7023			-20.9701
15.7740	14.4500	17.0200			25.1022
-10.1693	31.9446	29.0238			-9.6452
-16.2356	11.5144	12.4527			-10.0030
3.5205	24.5436	-31.6541			14.1797
0.9706					
XXXXXXXXXX DESVIACION STANDARD XXXXXXXX					
0.24570 02	0.34130 03	-0.30060 03		-0.10010 04	0.20060 03
0.22330 03	-0.59000 03	-0.37990 03		0.37230 03	0.23000 03
0.41810 03	-0.40340 03	0.54740 03		0.33260 03	0.24920 03
-0.10690 04	-0.39250 03	0.00790 03		0.47440 03	-0.10100 04
0.12100 04	0.52930 03	-0.33200 03		0.21320 03	0.50620 01
NORMA DEL RESIDUO: 0.46160 01					
NORMA DE XRES: 0.40920 01					
VALOR DE CHI: 0.46750 01					
XXXXXXXXXX CICLO NUMERO				16	XXXXXXXXXX
VALOR DE LOS PARAMETROS					
11.0164	57.7474	-79.3107			4.2716
35.0029	27.9117	-19.0100			-04.1087
50.5720	45.0204	-19.5174			-29.0790
20.1072	35.1663	-0.2952			-10.0525
12.1576	7.9150	-14.0199			2.4694
24.5104	6.2510	-10.0014			10.0000
0.9720					
XXXXXXXXXX DESVIACION STANDARD XXXXXXXX					
0.30190 02	0.37560 03	-0.46020 03		0.21010 04	0.35360 03
0.32040 03	-0.50900 03	-0.43320 03		0.54110 03	0.23200 03
0.13070 04	0.00370 03	0.11000 04		0.31010 03	0.27010 05
-0.95350 03	0.10420 04	0.13300 04		-0.14690 04	0.60740 04
0.60050 03	-0.43170 04	-0.10960 04		0.37900 03	0.53200 01
NORMA DEL RESIDUO: 0.45530-01					
NORMA DE XRES: 0.71020 01					
VALOR DE CHI: 0.46750 01					
XXXXXXXXXX CICLO NUMERO				17	XXXXXXXXXX
VALOR DE LOS PARAMETROS					
10.0570	64.4200	100.0140			27.2272
91.5426	1.1697	-42.0705			12.2414
30.0713	0.5744	-4.3913			4.2366
3.6204	6.6199	10.3401			11.9519
-0.9604	-0.2300	10.7191			6.3047
-3.6336	10.2551	-24.6937			12.1401
0.9721					
XXXXXXXXXX DESVIACION STANDARD XXXXXXXX					
0.30500 02	0.34150 03	-0.30040 03		0.57660 03	0.33650 03
0.17400 03	-0.67000 03	0.10400 04		0.74140 04	0.26900 04
-0.61120 04	0.51420 04	0.70700 04		0.20920 04	0.13900 04
0.13620 04	-0.20770 04	-0.16790 04		0.24100 04	0.23040 04
-0.62710 04	0.16550 04	-0.70270 03		0.34020 03	0.53440 01
NORMA DEL RESIDUO: 0.45340 01					
NORMA DE XRES: 0.60270 01					
VALOR DE CHI: 0.46500 01					
VALOR DE LOS PARAMETROS					

1 EL NUMERO DE MEDICIONES ES = 32
 SMLAMB, THE SMALLEST EIGENVALUE OF PTP ALLOWED IS: 1.00D-08
 NEIG IS: 32
 MEAS, EL NUMERO DE CAPAS ES: 25
 EL VAR DE ETA ES: 1.00D-09

CARGABILIDADES DEL MODELO INICIAL

11.0000	11.0000	10.0000	10.4000
10.0000	10.0000	10.0000	9.5000
9.5000	8.2000	8.0000	7.5000
7.0000	6.0000	6.5000	5.0000
4.0000	3.0000	2.0000	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

PROFUNDIDADES DE LAS CAPAS DEL MODELO INICIAL

0.0000	1.2590	1.5850	1.9950
2.5120	3.1620	3.9810	5.0120
6.3100	7.9430	10.0000	12.5900
15.8500	19.9500	25.1200	31.6200
39.8100	50.1200	63.1000	79.4300
100.0000	125.9000	158.5000	199.5000
251.2000			

ABERTURA DE ELECTRODOS

0.13330 01	0.17780 01	0.23710 01	0.31620 01	0.42170 01
0.56230 01	0.74990 01	0.10000 02	0.13330 02	0.17700 02
0.23710 02	0.31620 02	0.42170 02	0.56230 02	0.74990 02
0.10000 03	0.13330 03	0.17780 03	0.23710 03	0.31620 03
0.42170 03	0.56230 03	0.74990 03	0.10000 04	0.13340 04
0.17780 04	0.23710 04	0.31620 04	0.42170 04	0.56230 04
0.74990 04	0.10000 05			

CARGABILIDAD APARENTE

0.10970 02	0.10930 02	0.10860 02	0.10750 02	0.10580 02
0.10360 02	0.10100 02	0.97720 01	0.93760 01	0.89000 01
0.92490 01	0.72330 01	0.70540 01	0.63060 01	0.54840 01
0.46080 01	0.37360 01	0.29450 01	0.22950 01	0.18170 01
0.14940 01	0.12910 01	0.11680 01	0.10950 01	0.10540 01
0.10310 01	0.10170 01	0.10100 01	0.10050 01	0.10030 01
0.10020 01	0.10010 01			

RUIDO EN Y

0.0396630	0.7994409	-0.8496401	-0.0829407	-0.6912943
0.5069753	0.9539112	-0.0677053	0.2151436	-0.2251355
-0.1313296	-0.0475996	-0.6263272	0.2192767	-0.2104915
0.0247674	0.1896441	0.0773165	0.1719211	0.0025159
0.0564781	-0.0618957	0.1029840	-0.0589704	0.0802086
0.0206845	0.0523516	-0.0030602	0.0144315	-0.0465346
0.0571195	0.0570870			

CARGABILIDADES PERTURBADAS APARENTES

0.10930 02	0.11730 02	0.10010 02	0.10660 02	0.98890 01
0.10870 02	0.10450 02	0.97040 01	0.95910 01	0.86750 01
0.72170 01	0.70530 01	0.04200 01	0.00210 01	0.00270 01
0.45840 01	0.35470 01	0.30210 01	0.24670 01	0.19000 01
0.15510 01	0.12290 01	0.12710 01	0.10370 01	0.11350 01
0.10590 01	0.10700 01	0.10070 01	0.10200 01	0.95660 00
0.96640 01	0.94870 01			

VALOR DE CX

0.10000 01	0.10000 01	0.10000 01	0.10000 01	0.10000 01
0.10000 01	0.10000 01	0.10000 01	0.10000 01	0.10000 01
0.10000 01	0.10000 01	0.10000 01	0.10000 01	0.10000 01
0.10000 01	0.10000 01	0.10000 01	0.10000 01	0.10000 01

VALOR DE CY

0.10930 01	0.11730 01	0.10010 01	0.10660 01	0.98890 00
0.10870 01	0.10450 01	0.97040 00	0.95910 00	0.86750 00
0.72170 00	0.70530 00	0.04200 00	0.00250 00	0.00270 00
0.45840 00	0.35470 00	0.30210 00	0.24670 00	0.19000 00
0.15510 00	0.12290 00	0.12710 00	0.10370 00	0.11350 00
0.10590 00	0.10700 00	0.10070 00	0.10200 00	0.95660 01
0.96640 01	0.94870 01			