

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE  
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA

ANALISIS DE MOVIMIENTOS RIGIDOS POR INTERFEROMETRIA  
DE HOLOGRAMA CON APLICACION AL  
CONTROL DE LINEALIDAD

T E S I S  
MAESTRIA EN CIENCIAS

RICARDO VILLAGOMEZ TAMEZ

RESUMEN de la tesis presentada por RICARDO VILLAGOMEZ TAMEZ como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en OPTICA. Ensenada Baja California, México. Febrero de 1985.

ANALISIS DE MOVIMIENTOS RIGIDOS POR INTERFEROMETRIA DE HOLOGRAMA CON APLICACION AL CONTROL DE LINEALIDAD.

Resúmen aprobado por:

  
H. en C. Martín L. Celaya B.  
Director de Tesis.

En el presente trabajo se presenta un estudio teórico y experimental de movimientos rígidos tridimensionales, utilizando la técnica de la interferometría de holograma.

El análisis experimental de movimientos se realiza para objetos con superficie plana difusora. El sistema de observación es considerado como una lente delgada afocada sobre la superficie del objeto.

El estudio teórico parte de la ecuación de difracción obteniendo una expresión para la distribución de intensidad en el plano imagen del sistema de observación. Esta expresión está en términos de la función de autocorrelación de las distribuciones de amplitud complejas del objeto antes y después de moverse. Esta función de autocorrelación nos da información de la visibilidad ó contraste de las franjas de interferencia. El análisis de esta función demuestra que el contraste de las franjas varíe en forma alternante, es decir,

se presenta inversión de contraste bajo ciertas condiciones de observación.

Así mismo la expresión para la distribución de intensidad depende de un factor que nos da información de la forma geométrica de las franjas de interferencia. Para el análisis de la forma geométrica de las franjas, se analiza la diferencia de camino geométrico de puntos homólogos sobre la superficie antes y después de moverse.

A partir de la expresión para la diferencia de camino geométrico, obtenida para cada tipo de movimiento, es posible cuantificar la magnitud del desplazamiento.

La verificación experimental se realizó y se obtienen resultados satisfactorios.

Finalmente se propone un sistema óptico, un interferómetro holográfico, que es sensible principalmente a movimientos de traslación. Este sistema se propone en base a la teoría y bajo ciertas condiciones de trabajo. Estas condiciones se presentan con detalle en el presente trabajo.

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE EDUCACION SUPERIOR  
EN ENSENADA B. C.

DIVISION DE FISICA APLICADA

DEPARTAMENTO DE OPTICA

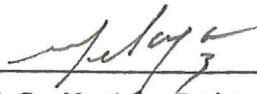
ANALISIS DE MOVIMIENTOS RIGIDOS POR  
INTERFEROMETRIA DE HOLOGRAMA CON APLICACION AL  
CONTROL DE LINEALIDAD

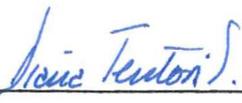
TESIS

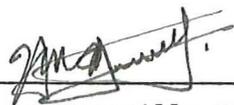
que presenta RICARDO VILLAGOMEZ TAMEZ como un requisito  
parcial para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS

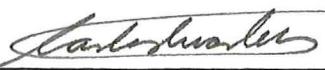
febrero 8, 1985.

TESIS APROBADA PARA SU DEFENSA POR:

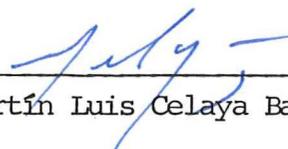
  
\_\_\_\_\_  
M.C. Martín Luis Celaya Barragán, Director del Comité

  
\_\_\_\_\_  
M.C. Diana Tentori Santacruz, Miembro del Comité

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Héctor Escamilla Taylor, Miembro del Comité

  
\_\_\_\_\_  
M.C. Carlos Duarte Muñoz, Miembro del Comité

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Luis Enrique Celaya Salcido, Jefe del Departamento de Optica

  
\_\_\_\_\_  
M.C. Martín Luis Celaya Barragán, Director de la División de Física Apli-  
cada

  
\_\_\_\_\_  
M.C. Gilberto Gaxiola Castro, Director Académico Interino

Tesis presentada en Febrero 8 de 1985

## DEDICATORIA

A mis padres Paula y Ramón

quienes con su amor siempre están al pendiente de  
mis pasos.

A mis hermanos Elvia y Héctor

mis compañeros y amigos de toda la vida.

A mi esposa Adriana

quien tan humildemente me da su amor.

A mis hijos Jessica y Abraham

quienes son el motivo de mi vida.

## AGRADECIMIENTOS

A mi director de tesis M. en C. Martín L. Celaya B. y a mi asesor M. en C. Diana Tentori S. por el apoyo que me brindaron en el desarrollo de éste trabajo.

En forma especial a mis maestros y compañeros de estudios así como a todo el personal de la División de Física Aplicada que de una u otra forma contribuyó para la realización de mis estudios.

A los miembros de mi comité de tesis M. en C. Diana Tentori S., Dr. Héctor Escamilla T. y M. en C. Carlos Duarte M. por la revisión y crítica de mi trabajo.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada B.C. y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

## CONTENIDO

I	INTRODUCCION.	1
I.1	DESCRIPCION BASICA DE LA HOLOGRAFIA.	4
I.2	INTERFEROMETRIA DE HOLOGRAMA.	13
I.3	INTERFEROMETRIA DE HOLOGRAMA DE TIEMPO REAL	14
I.4	INTERFEROMETRIA DE HOLOGRAMA DE DOBLE EXPOSICION.	17
I.5	REQUERIMIENTOS DE COHERENCIA EN FUENTES DE LUZ PARA LA FORMACION DE HOLOGRAMAS.	18
I.6	PATRON DE MOTEADO.	22
II	INTRODUCCION.	26
II.1	ANALISIS DE LA DISTRIBUCION DE INTESIDAD EN EL PLANO IMAGEN.	28
II.2	ANALISIS DE LOS TIPOS DE MOVIMIENTOS SUFRIDOS POR EL OBJETO.	37
II.3	TRASLACION PURA EN PLANO.	39
II.4	TRASLACION PURA LONGITUDINAL.	40
II.5	ROTACION PURA EN PLANO.	41
II.6	INCLINACION RESPECTO AL EJE Y DEL OBJETO.	47

II.7	ANALISIS DE LA FORMA GEOMETRICA DE LAS FRANJAS.	52
III	INTRODUCCION.	74
III.1	INTERFEROGRAMAS DE MOVIMIENTOS RIGIDOS TRIDIMENSIONALES.	74
III.2	ANALISIS DE ERROR EN LA MEDICION DE LOS PARAMETROS.	81
IV	INTERFEROMETRO HOLOGRAFICO PARA LA VERIFICACION DE MOVIMIENTOS RECTILINEOS MICROMETRICOS.	99
	CONCLUSIONES.	111
	LITERATURA CITADA.	112

## LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
1	Holograma elemental con ondas planas. a) Grabación del patrón de interferencia. b) Difracción de una onda plana por el holograma.	5
2	Esquema de la grabación holográfica de un frente de onda general.	6
3	Geometría generalizada para la grabación de un holograma fuera del eje.	11
4	Grabación holográfica convencional de la onda objeto.	14
5	Representación gráfica de las ondas objeto, $O(X)$ y $O'(X)$ reconstruida y directamente transmitida, en un interferómetro holográfico.	16
6	Geometría relacionada a la discusión de coherencia espacial de una fuente térmica.	19
7	Patrón de moteado de un objeto difusor reconstruido holográficamente.	23
8	Suma de cinco fasores aleatoriamente dirigidos y con igual longitud.	24
9	Diagrama en el que se muestra la geometría para el plano objeto y el sistema de observación.	29
10	a) Gráfica de la función de intensidad. b) Máximos de las funciones Bessel desplazadas una magnitud $D$ .	38

Figura		Página
11	Geometría para el análisis de rotación pura en plano.	41
12	Máximos desplazados de las funciones Bessel correspondientes a puntos homólogos del objeto.	45
13	Geometría de los planos objetos y de observación en el caso de inclinación.	47
14	Máximos de las funciones Bessel en presencia de inclinación.	51
15	Geometría para el análisis de la forma geométrica de las franjas de interferencia.	53
16	Geometría para el análisis de la diferencia de camino geométrico en el caso de inclinación.	66
17	Geometría para el análisis de la diferencia de camino geométrico en el caso de rotación pura en plano.	70
18	Interferogramas para el caso de traslación pura en plano. a) $\rho = 1.25$ cm, b) $\rho = 0.625$ cm, c) $\rho = 0.3125$ cm y d) $\rho = 0.1563$ cm.	77
19	Interferogramas para el caso de traslación longitudinal. a) $\rho = 1.25$ cm, b) $\rho = 0.625$ cm, c) $\rho = 0.3125$ cm y d) $\rho = 0.1563$ cm.	78
20	Interferogramas para el caso de rotación pura en plano. a) $\rho = 1.25$ cm, b) $\rho = 0.625$ cm, c) $\rho = 0.3125$ cm y d) $\rho = 0.1563$ cm.	79
21	Interferogramas para el caso de inclinación. a) $\rho = 1.25$ cm, b) $\rho = 0.625$ cm, c) $\rho = 0.3125$ cm y d) $\rho = 0.1563$ cm.	80

Figura		Página
22	Variación del coeficiente $K_i(S)$ respecto a la distancia Fuente-Objeto.	85
23	Variación del coeficiente $K_z(\theta_i)$ para movimientos longitudinales.	87
24	Geometría para determinar el ángulo de iluminación $\theta_i$ .	88
25	Variación del coeficiente de error para $\theta_i$ en el caso de inclinación.	90
26	Variación del coeficiente $K(\theta_i)$ para el caso de rotación pura en plano.	91
27	Sistema óptico para el análisis de desplazamientos rígidos.	94
28	Geometría del arreglo para el interferómetro holográfico en la verificación de movimientos, puramente axiales, para monturas de traslación.	100
29	Diagramas que muestra la geometría del interferómetro en el caso cuando la fuente y el sistema de observación están en los focos de una elipse.	103
30	Interferogramas para el caso en que $S = 2H$ , para distintos valores de $\rho$ .	109
31	Interferogramas en el caso $S = H$ para distintos valores de $\rho$ .	110

LISTA DE TABLAS

Tabla		Página
I	Medición de la distancia $S$	86
II	Medición de la separación $\Delta x'$ entre las franjas de interferencia para el caso de traslaciones.	87
III	Medición de la separación entre las franjas para el caso de traslación pura en plano a lo largo del eje "y" del sistema.	92
IV	Valores experimentales del radio del patrón de franjas para desplazamiento axial.	95
V	Valores de la separación entre las franjas de interferencia en el caso de inclinación.	96
VI	Medición de la separación entre las franjas en el caso de rotación pura en plano.	97
VII	Valores del intervalo de trabajo del interferómetro holográfico en función del radio de la abertura del sistema de observación.	107

# ANALISIS DE MOVIMIENTOS RIGIDOS POR INTERFEROMETRIA DE HOLOGRAMA CON APLICACION AL CONTROL DE LINEALIDAD

## INTRODUCCION

En la actualidad existen laboratorios en los que se usan instrumentos mecánicos para la fabricación de instrumentos de precisión de uso industrial, tales como los microposicionadores y monturas de traslación lineal con movimiento micrométrico. El control de calidad de dichos instrumentos se lleva a cabo con sistemas apropiados de medición. Dentro de estas técnicas de medición se cuenta con la interferometría de holograma, la cual presenta la ventaja de que debido a su naturaleza tridimensional, es posible analizar movimientos tridimensionales con un solo sistema.

Ya que con la holografía se cuenta con la capacidad de almacenar información en tres dimensiones, se tiene con esto, la posibilidad de realizar medidas interferométricas que nos darán información, en este caso, de los tipos de movimientos realizados por un objeto, siendo éste un objeto difusor con superficie rugosa. A esta técnica se le conoce como interferometría de holograma.

En este trabajo se usa la interferometría de holograma como técnica de medición y se presenta la teoría de análisis

de movimientos rígidos tridimensionales, así como su verificación experimental y se propone una aplicación para la verificación de movimientos rectilíneos micrométricos axiales, i.e. sobre el eje óptico del sistema.

Para llevar a cabo esto, en el primer capítulo se hace una descripción básica de los principios de la holografía así como de la interferometría de holograma de una sola exposición y de doble exposición. En éste mismo capítulo se presentan los requerimientos de coherencia y la forma espectral de la fuente de luz que se utiliza en el sistema óptico, y también se presenta una breve descripción del problema de moteado (Speckle) que se tiene ya que el objeto bajo estudio tiene superficie rugosa.

El análisis general de la teoría para movimientos rígidos tridimensionales se presenta en el segundo capítulo, en el que se analizan las traslaciones ortogonales y rotaciones, es decir, rotación pura en plano e inclinación, partiendo de la ecuación de difracción de las imágenes de puntos homólogos del objeto antes y después de sufrir algún tipo de movimiento. La verificación experimental de lo predicho por la teoría general se presenta en el tercer capítulo y se presenta el análisis de error que introduce cada uno de los parámetros de relevancia en las expresiones matemáticas con el propósito de caracterizarlos y manejarlos adecuadamente en el estudio de los movimientos.

Una vez hecho el análisis y verificación de los

distintos movimientos se propone un sistema óptico, un interferómetro holográfico, que es principalmente sensible a movimientos laterales en un cierto intervalo de trabajo al efectuar un movimiento micrométrico rectilíneo axial, i.e. movimiento a lo largo del eje óptico del sistema. Finalmente se dan algunos comentarios y conclusiones.

## HOLOGRAFIA

### INTRODUCCION

En este capítulo se da inicialmente una descripción de los arreglos ópticos comúnmente usados para grabar y reconstruir hologramas. Esta discusión se limita al tipo de hologramas fuera de eje, en el cual, los haces de referencia y objeto inciden en el medio de grabado a diferentes inclinaciones. Posteriormente, se discuten los tipos de hologramas de Fresnel y Fraunhofer y se da una descripción de las técnicas de interferometría de holograma. (ref. 2) Finalmente se presentan los requerimientos de coherencia en fuentes de luz para la formación de hologramas.

#### 1) DESCRIPCION BASICA DE LA HOLOGRAFIA

Conceptualmente la forma más simple de un holograma fuera de eje es aquel en el que se graba un objeto puntual infinitamente distante, de tal suerte que la onda objeto en el plano del medio de grabación sea una onda plana. Si la onda de referencia también es una onda plana, que incide en el medio de grabado formando un ángulo respecto a la onda objeto, el holograma consistirá en una serie de franjas de

interferencia de Young, siendo estas franjas rectas e igualmente espaciadas. Ya que el holograma consiste en una serie de bandas claras y opacas alternadas se puede ver que se trata de una rejilla, de tal modo que si se hace incidir un haz de luz colimado (frente de onda plano), ver figura 1, la luz transmitida consistirá de: una onda plana de orden cero viajando en la misma dirección que el haz incidente, mas dos ondas de orden uno. Siendo uno de estos órdenes la onda reconstruida del objeto, y el otro orden su complejo conjugado. Los órdenes de difracción mayores a éstos se omiten ya que su distribución de irradiancia es muy débil para un patrón de interferencia de dos haces que varían sinusoidalmente.

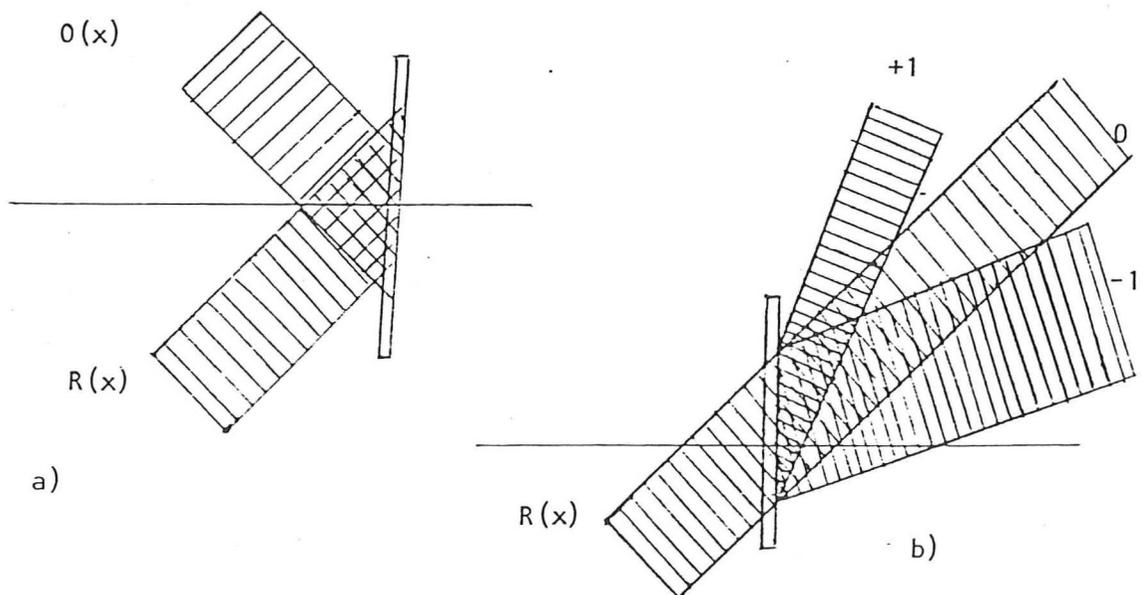


FIGURA 1 Holograma elemental con ondas planas a) grabación del patrón de interferencia. b) difracción de una onda plana por el holograma.

Se puede describir el grabado de un holograma de un objeto mucho más complicado (frente de onda objeto de forma arbitraria), ver figura 2, considerando que la onda objeto está constituida por la superposición infinita de frentes de ondas planas de diferente amplitud y frecuencia, de tal forma que al interferir con una onda de referencia plana, se forme una superposición de franjas de interferencia de Young, con diferentes frecuencias e inclinaciones, de manera que al ser iluminado en el proceso de reconstrucción las envolventes formadas por todos los ordenes  $\pm 1$  para cada rejilla, constituyen la onda objeto reconstruida y su conjugado.

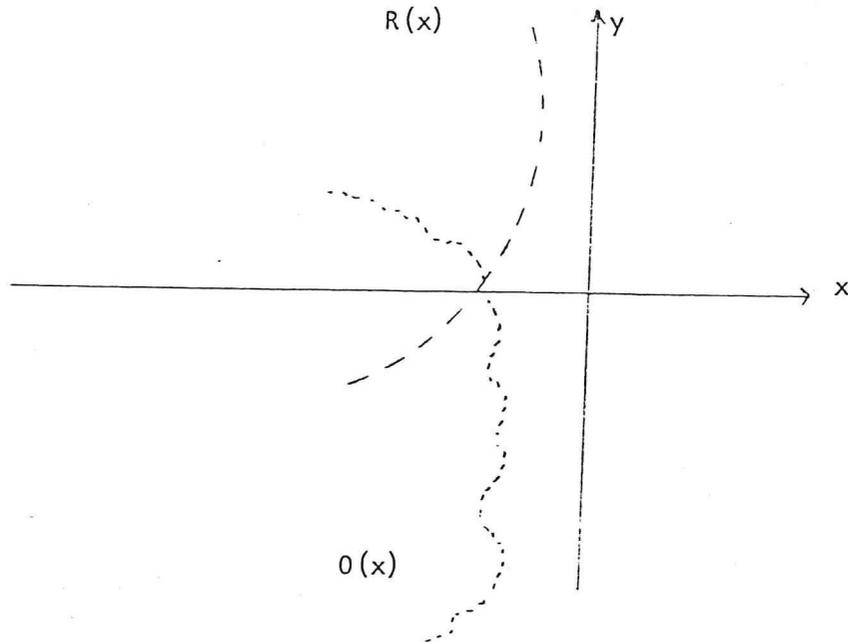


FIGURA 2 Esquema de la grabación holográfica de un frente de onda general.

Sea  $O$  una onda monocromática proveniente del objeto hacia el medio de grabado  $H$ , y sea  $R$  una onda coherente con  $O$ . Las correspondientes distribuciones de amplitudes complejas pueden expresarse de la siguiente forma (ref 2):

$$O(x, y) = O_0(x, y) \exp[-i\psi_0(x, y)] \quad , \quad (1)$$

y

$$R(x, y) = R_0(x, y) \exp[-i\psi_R(x, y)] \quad . \quad (2)$$

Para hacer un holograma se debe grabar la onda incidente sobre un medio fotosensible ( usualmente una emulsión fotográfica de alta resolución ), de tal forma que la onda incidente sea posteriormente reconstruída.

Para hacer esto es necesario grabar la amplitud y la fase de  $O$ , haciéndolo con la ayuda del haz de referencia  $R$ . El campo total sobre  $H$  será  $O + R$ . Así mismo, se requiere que la intensidad sobre el medio de grabado sea uniforme de tal manera que responda al valor  $|O + R|^2$  para la intensidad.

Considerando que el holograma posee una cierta amplitud de transmitancia  $t(x)$  la cual se expresa en función de la exposición  $E(x)$ , se tiene que:

$$t(x) = f[ E(x) ] \quad . \quad (3)$$

Desarrollando esta función en series de Taylor y despreciando los ordenes mayores al cuadrático, se tiene que:

$$t(x) = E_0 + \beta E(x) \quad , \quad (4)$$

donde  $E_0$  es una constante y  $\beta$  es una constante dada por la curva característica de la transmitancia graficada contra la exposición.

Considerando que  $E_0$  es un ruido de fondo sobre el holograma, y sustituyendo  $E = |O + R|^2$  en la ecuación 4 se tiene que :

$$t(x) = \beta E(x) \quad ,$$

ó bien

$$t(x) = \beta [ |O|^2 + |R|^2 + O^*R + OR^* ] \quad , \quad (5)$$

donde los asteriscos denotan complejos conjugados.

Si el holograma se ilumina con un haz similar al de referencia, el campo transmitido por el holograma será:

$$\Psi(x) = R(x)t(x) \quad ,$$

6

$$\Psi(x) = \beta R[|O|^2 + |R|^2] + \beta O|R|^2 + \beta O^*R^2 \quad ,$$

6

$$\Psi(x) = \Psi_1(x) + \Psi_2(x) + \Psi_3(x) \quad . \quad (6)$$

Si  $R(x)$  es suficientemente uniforme, es decir, tal que  $|R|^2$  sea aproximadamente constante sobre todo el holograma, el segundo término  $\Psi_2(x)$  es igual al producto de una constante y la onda objeto  $O$ , es decir,  $\Psi_2(x) = (Cte)O$ , siendo una réplica exacta de la onda objeto original.  $\Psi_2(x)$  es una onda que posee todas las propiedades de la onda objeto original y puede formar una imagen del objeto.

En la expresión obtenida para el campo transmitido, ecuación 6, puede apreciarse la analogía que existe entre este campo y el producido por el holograma de la rejilla de difracción obtenida anteriormente. Considerando que la onda compleja  $O$ , de la figura 2, está compuesta por muchas ondas planas con amplitudes y direcciones diferentes y considerando también a  $R$  como una onda plana, se tiene que cada onda plana que forma la onda objeto, interfiere con  $R$  formando una

rejilla ( como en la figura 1 ), por lo que el holograma puede ser visto como un gran numero de rejillas superpuestas. Cuando el holograma es iluminado con  $R(x)$  solamente, cada una de estas rejillas produce una onda plana difractada de primer orden de amplitud y fase tal que la envolvente de todas estas ondas planas constituye la onda objeto  $O$ . De esta manera puede verse que  $\Psi_2(x)$  es la onda difractada de orden uno,  $\Psi_1(x)$  expresa la onda del orden cero y  $\Psi_3(x)$  es la onda difractada de orden menos uno. Con esto se tiene que la onda objeto puede ser separada y analizada independientemente.

En el arreglo que se muestra en la figura 3, se tiene el sistema cartesiano de referencia que se usará. Este sistema está centrado sobre el medio fotosensible, coincidiendo en el plano  $x-y$  con el plano del holograma. El haz de referencia proviene de una fuente puntual colocada en  $(X, Y, Z)$  y el objeto está definido por la superficie  $S$ , cuyos puntos están dados con las coordenadas  $(X_0, Y_0, Z_0)$ .

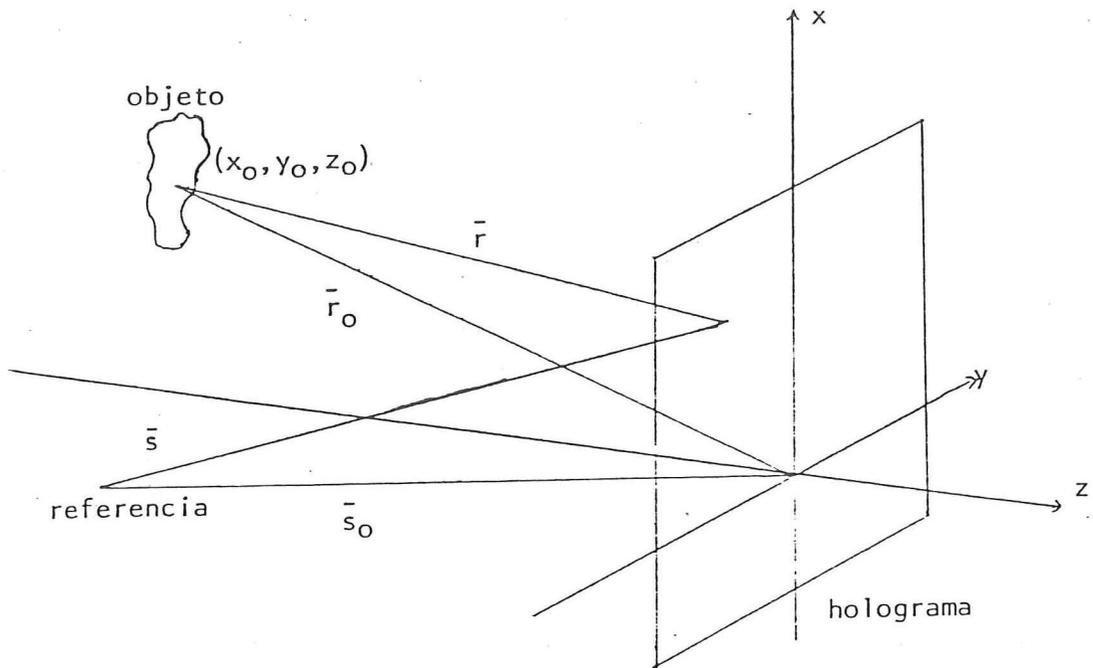


FIGURA 3 Geometría generalizada para la grabación de un holograma fuera de eje.

Denotando como  $F(x_0, y_0, z_0)$  a la distribución de amplitud de la luz en el objeto, se tiene que, ya que la perturbación causada por el objeto  $O(x, y, z)$  en el plano del holograma es la suma de las ondas esféricas correspondientes a cada punto sobre el objeto,  $O(x, y, z)$  puede ser escrita como:

$$O(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x_0, y_0) h(x-x_0, y-y_0) dx_0 dy_0, \quad (7)$$

en donde la ecuación 7 se conoce como la integral de difracción, donde

$$h(x-x_0, y-y_0) = (-i/2\lambda) [\exp(ikr)/r] (\hat{n} \cdot \hat{r}) ,$$

donde el término  $-i$  se debe al desfase de  $\pi/2$  de las ondas secundarias (Principio de Huygens), el término  $(\hat{n} \cdot \hat{r})$  es un factor de inclinación que indica una dirección preferencial de las ondas y (ref 10):

$$r = [(x_0-x)^2 + (y_0-y)^2 + (z_0-z)^2]^{1/2} . \quad (8)$$

La onda de referencia está dada por:

$$R(x, y, z) = R_0(x, y, z) [\exp(iks)/s] , \quad (9)$$

donde

$$s = [(x_R-x)^2 + (y_R-y)^2 + (z_R-z)^2]^{1/2} . \quad (10)$$

Considerando que  $z_0^2 \gg (x_0^2 + y_0^2)$ , en la expresión para  $r$ , esta puede desarrollarse en serie de Taylor, teniendo para  $z = 0$  :

$$r = z_0 + (x_0^2 + y_0^2)/2z_0 + (x^2 + y^2)/2z_0 - (xx_0 + yy_0)/z_0 + \dots . \quad (11)$$

Si en la expresión 11 se consideran los términos

cuadráticos para  $x_0$  y  $y_0$ , se hablará de hologramas de Fresnel, y cuando se considera que:

$$(2\pi/\lambda)[(x_0^2 + y_0^2)/2z_0] \ll 2\pi ,$$

es decir, si se desprecian los términos cuadráticos, se tienen hologramas de Fraunhofer.

## 2) INTERFEROMETRIA DE HOLOGRAMA

La interferometría de Holograma es una innovación fundamental donde se presenta la aplicación de los conceptos de Interferencia y Holografía.

La interferometría convencional puede usarse para hacer mediciones muy precisas sobre superficies altamente pulidas. La interferometría de holograma extiende esta posibilidad al permitir mediciones sobre superficies tridimensionales de forma arbitraria. De esta manera un objeto complejo puede ser examinado interferométricamente usando interferometría de holograma, debido a la naturaleza tridimensional de esta técnica.

Los métodos usados en la interferometría de holograma son: Interferometría de tiempo real y doble exposición.

## 3) INTERFEROMETRIA DE HOLOGRAMA DE TIEMPO- REAL

Para entender el proceso básico, se considera un holograma de una onda objeto  $O(x)$  grabada como se muestra en la figura 4.

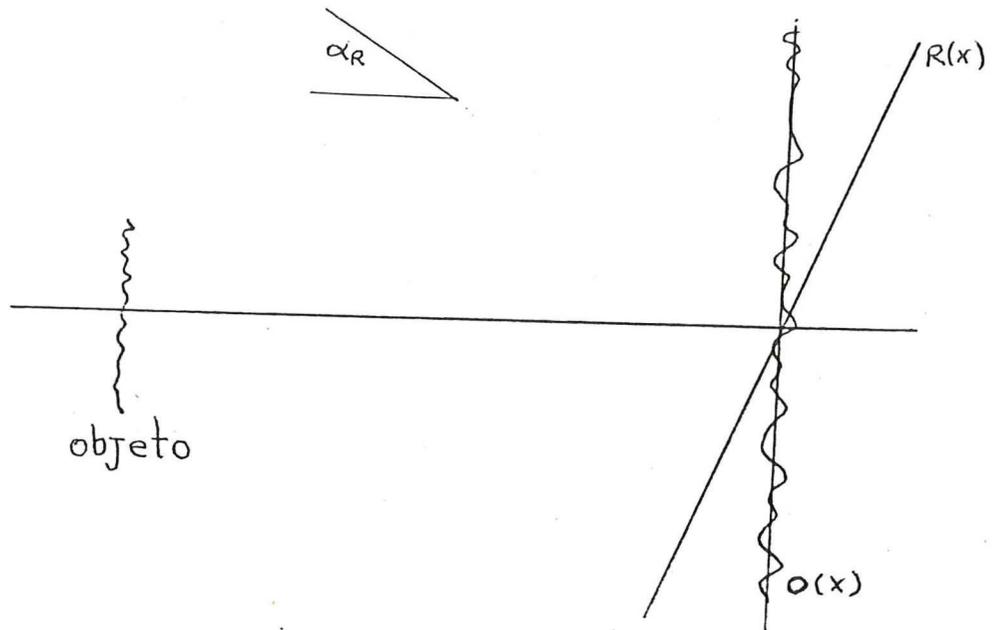


FIGURA 4 Grabación holográfica convencional de la onda objeto.

La onda objeto en el plano del holograma se denota por:

$$O(x) = O_0(x) \exp[-i\psi_0(x)] \quad . \quad (12)$$

La onda de referencia está dada por:

$$R(x) = R_0(x) \exp[-i\psi_R(x)] \quad , \quad (13)$$

Suponiendo que la exposición y el revelado son tales que la amplitud de transmitancia final es  $|H(x)|^2$  donde  $H(x) = O(x) + R(x)$  y suponiendo también que después del revelado, se coloca el holograma exactamente en la misma posición que ocupó durante la exposición, se tiene que, al iluminarlo con una onda de la forma:

$$C(x) = O'(x) + R(x) \quad , \quad (14)$$

donde  $O'(x)$  significa que se ilumina el holograma con el objeto aún en su lugar, y  $O'(x)$  es similar a  $O(x)$  solamente defasada una pequeña cantidad en su distribución de fase. Por lo que:

$$O'(x) = O_0(x) \exp[-i\psi_{O'}(x)] \quad . \quad (15)$$

La distribución de irradiancia consistirá entonces en una serie de franjas de interferencia cuya localización está definida por el lugar geométrico dado por:

$$\psi_{O'}(x) - \psi_O(x) = \text{constante} \quad , \quad (16)$$

donde una franja oscura está en:

$$\Psi'_0(x) - \Psi_0(x) = (2m + 1)(\pi/2) \quad |m|=1,2,\dots,$$

en la figura 5 se tiene esquemáticamente los dos frentes de onda interfiriendo, siendo  $O(x)$  el frente de onda reconstruido y  $O'(x)$  el frente de onda directamente transmitido.

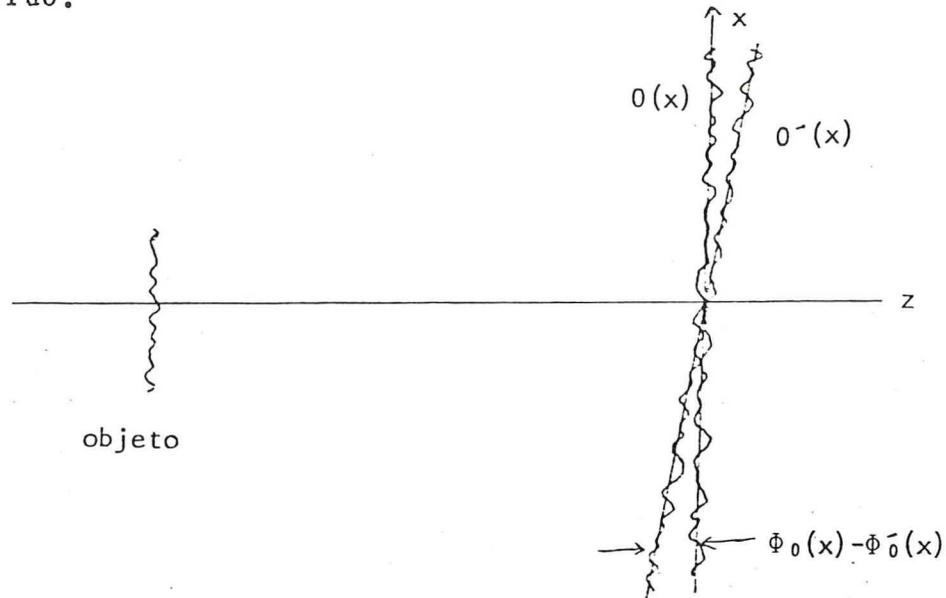


FIGURA 5 Representación gráfica de las ondas objeto,  $O(x)$  y  $O'(x)$  reconstruida y directamente transmitida, en un interferómetro holográfico.

En la interferometría de tiempo real, si la imagen holográfica y el objeto, coinciden en su posición, es posible poner bajo tensiones al objeto, deformándolo ó desplazarlo y así compararlo con el original. De esto se tiene que el camino óptico, de un punto de observación a cualquier punto de la superficie desplazada, cambiará relativamente su

distancia de su punto correspondiente sobre la superficie de la imagen holográfica. Los rayos de luz coherentes esparcidos de una misma área del objeto y de su imagen, desplazados, pero con la misma microestructura, producen un cambio relativo en la fase de los rayos que viajan de la fuente de luz hacia el plano de observación. Este cambio de fase ocasiona un sistema de franjas de interferencia características de la deformación de la superficie del objeto. De esta manera, se tiene que en cuanto ocurra un cambio en el objeto, simultáneamente se puede observar un cambio en el sistema de franjas. Debido a esto es el nombre de Interferometría de Holograma de tiempo real.

#### 4) INTERFEROMETRIA DE HOLOGRAMA DE DOBLE EXPOSICION

La interferometría de holograma de doble exposición es similar a la iterferometría de tiempo real, obteniendo así mismo una grabación tridimensional de fenómeno de interferencia. .

La diferencia básica entre las dos técnicas está en el hecho de que en el holograma de doble exposición se detiene en su grabación permanente el cambio de la forma del objeto entre las exposiciones. Las dos ondas que interfieren pueden ser reconstruídas con un arreglo separado, sin la necesidad de colocar con alta precisión la placa holográfica.

## 5) REQUERIMIENTOS DE COHERENCIA EN FUENTES DE LUZ PARA LA FORMACION DE HOLOGRAMAS

Generalmente las fuentes de luz utilizadas para la formación de hologramas son los láseres dado que cumplen con los requisitos de coherencia necesarios para realizar grabaciones y reconstrucciones holográficas. En esta parte se discute, en forma breve, los requisitos de extensión y emisión espectral de las fuentes de luz de tal forma que cumplan los requerimientos de coherencia espacial (lateral) y temporal (longitudinal) .

En general las fuentes de luz distintas al láser no son suficientemente coherentes espacialmente. Para incrementar la coherencia espacial de dichas fuentes, es necesario reducir su extensión finita. Para tomar un criterio útil de la coherencia espacial se considera el teorema de Van Cittert-Zernike. El grado complejo de coherencia, el cual describe la correlación de vibraciones de un punto fijo  $P_2$ , y otro  $P_1$  con posición variable, en un plano iluminado por una fuente primaria extendida cuasi-monocromática, es igual a la amplitud compleja normalizada en el correspondiente punto  $P_1$  en un cierto patrón de difracción centrado en  $P_2$ . Este patrón de difracción puede ser obtenido al reemplazar la fuente por una abertura de la misma forma y tamaño. La

distribución de amplitud sobre el frente de onda en la abertura es proporcional a la distribución de intensidad a través de la fuente. Ver figura 6.

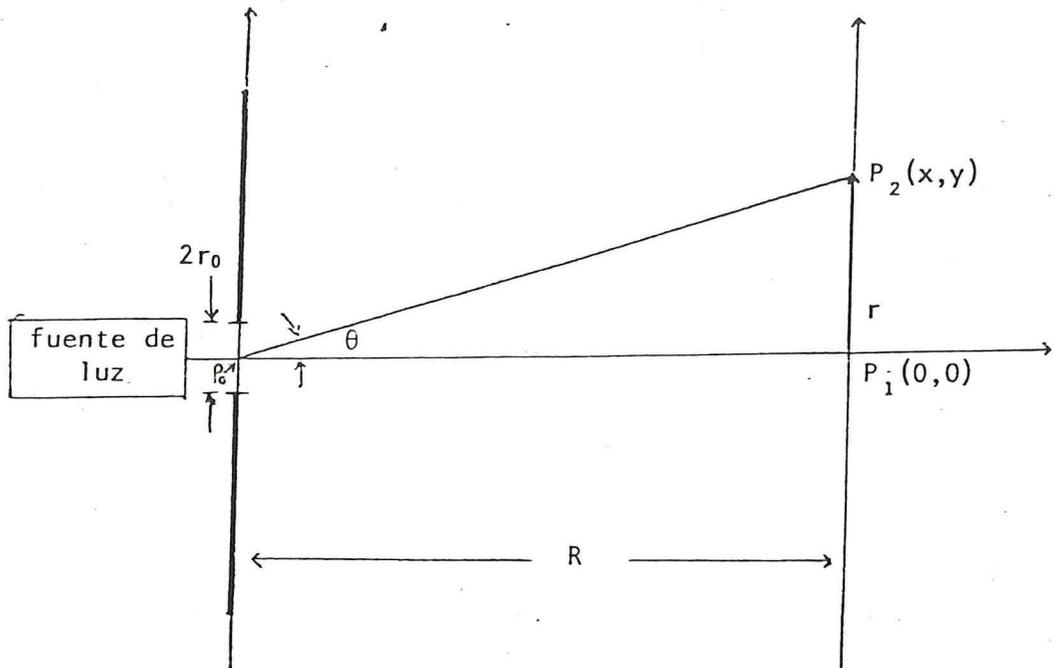


FIGURA 6 Geometría relacionada a la discusión de coherencia espacial de una fuente térmica.

Por el teorema de Van Cittert-Zernike, el grado complejo de coherencia  $|\mu_s|$  puede expresarse como la magnitud de la transformada de Fourier normalizada de la distribución de intensidad sobre la abertura en  $P_0$  (ver figura 6). Matemáticamente se tiene:

$$|\mu_s| = \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty} I(x', y') \exp[2\pi i(\zeta x' + \eta y')] dx' dy'}{\iint_{-\infty}^{+\infty} I(x', y') dx' dy'} \quad , \quad (17)$$

donde  $\zeta = x/\lambda R$  y  $\eta = y/\lambda R$  y  $\lambda$  es la longitud de onda media de la radiación emitida por la fuente. La validez de este teorema depende básicamente de que las dimensiones lineales de la fuente (abertura en  $P_0$ ) y la distancia entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$  sean pequeños comparados con la separación  $R$  entre los planos que los contienen.

Si se asume que la apertura en  $P_0$  tiene simetría circular de radio  $r_0$ , al integrar la ecuación 17 se tiene:

$$|\mu_s| = \frac{J_1(2\pi \nu r_0)}{\pi \nu r_0} \quad , \quad (18)$$

donde  $J_1$  es la función Bessel de primer orden y tiene un valor máximo de uno. La frecuencia espacial  $\nu$  está dada como  $\nu = (\zeta^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}} \simeq \theta/\lambda$ . Considerándose esto, se tiene que el grado complejo de coherencia espacial puede escribirse como:

$$|\mu_s| = \frac{J_1(2\pi r_0 \theta / R)}{\pi r_0 \theta / R} \quad (19)$$

Un criterio práctico, aunque no general, es el considerar que se tiene coherencia espacial completa cuando  $|\mu_s| > 0.8$ , con esto se puede calcular el valor de  $r_0$ , es decir, de la extensión que debe tener la fuente de iluminación teniendo así la coherencia espacial adecuada.

La coherencia temporal (longitudinal) de una fuente de luz está determinada por la pureza espectral de su radiación. Una fuente de luz láser presenta "buena" coherencia temporal y es por esto que éstos son ampliamente usados para la holografía.

La ecuación 19 relaciona el grado de coherencia espacial de la luz entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$  de la figura 6 y depende de las coordenadas de esos puntos únicamente como una función del ángulo  $\theta$  entre los rayos de luz que pasan de la fuente extendida a cada punto. Ahora se considera el caso en que los puntos  $P_1$  y  $P_2$  están separados a lo largo de un mismo rayo de luz que viene de la fuente. En este caso  $\theta = 0$  y  $|\mu_s| = 1$  de tal forma que el grado complejo de coherencia depende solo del retraso en tiempo  $\tau$ .

El retraso o diferencia en tiempo  $\tau$  puede ser expresado en términos de la diferencia de camino óptico  $\Delta l = c\tau$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz. La longitud de coherencia se

define como  $\Delta l_h = c\tau_h$  de tal forma que  $|\mu_T(\tau)| > 0.8$ .

La formación de hologramas requiere que la diferencia de camino óptico entre la fuente, cualquier par de puntos y el medio de grabado sea menor que  $\Delta l_h$ . Para determinar la longitud de coherencia de la fuente se debe graficar  $|\mu_T(\tau)|$  en función de  $\tau$ , esto puede hacerse escribiendo la expresión del grado complejo de coherencia en términos de la frecuencia temporal  $f$  e introduciendo el espectro de potencia de la fuente, de tal forma que :

$$|\mu_T(\tau)| = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varnothing(f) \exp[2\pi if] df}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varnothing(f) df} \quad , \quad (20)$$

donde  $\varnothing(f)$  es el espectro de potencia.

Resumiendo se tiene que el grado complejo de coherencia espacial esta directamente ligado con la transformada de Fourier de la función de intensidad de la fuente, y el grado complejo de coherencia temporal esta determinado por la transformada de Fourier del espectro de potencia del emisor.

## 6) PATRON DE MOTEADO ( SPECKLE )

El problema de los patrones de moteado (speckle) está directamente relacionado con la observación de objetos

difusores iluminados con luz coherente. Para analizar el problema se supone un objeto con superficie rugosa, un difusor, iluminado por un haz de luz colimado y coherente. En la superficie del objeto se tendrá una modulación aleatoria de fase, sobre la onda plana emergente. La forma de visualizar este proceso es el considerar la superficie como una superposición de rejillas de fase con orientaciones y frecuencias aleatorias.

La amplitud compleja de la luz sobre la superficie del objeto presenta sólo variaciones de fase, mientras que en cualquier otro plano del campo se tendrán fluctuaciones tanto en fase como en amplitud en función de las coordenadas espaciales. Esto se debe principalmente a la interferencia de las ondas planas coherentes y difractadas, con direcciones aleatorias, en la superficie del objeto. En la figura 7 se muestra una fotografía del patron de moteado al iluminar un objeto difusor.

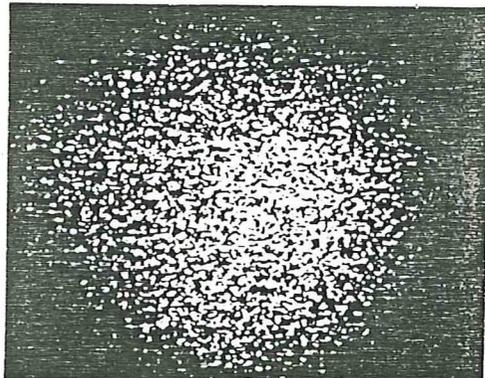


FIGURA 7 Patron de moteado de un objeto difusor reconstruido holográficamente.

La amplitud compleja  $a$  en cualquier punto, es la suma de las amplitudes complejas de todas las ondas planas interfiriendo de modo que :

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad (21)$$

Las amplitudes complejas pueden ser representadas por vectores llamados Fasores. La longitud del fasor es proporcional a la amplitud y el ángulo de fasor es proporcional a la fase de la correspondiente amplitud compleja. La figura 8 ilustra gráficamente la suma de cinco amplitudes complejas con igual longitud.

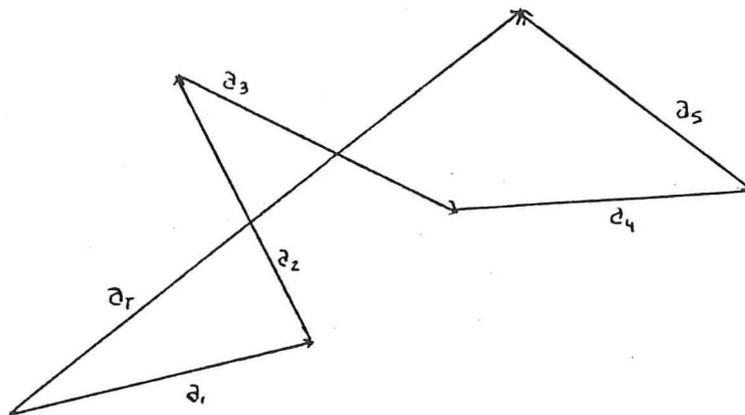


FIGURA 8 Suma de cinco fasores aleatoriamente dirigidos y con igual longitud.

Supóngase que la superficie del objeto difracta uniformemente en todas las direcciones de tal forma que las

longitudes de los fasores sean todos iguales. La variación en la amplitud  $a$  de la amplitud compleja resultante  $a = a \exp(i\theta)$  depende únicamente de las fases, es decir, de los ángulos de los fasores individuales sumados en cada punto. La amplitud compleja  $a$  es una función aleatoria de la posición y conduce a un patrón de moteado como se muestra en la figura 7.

## TEORIA DE MOVIMIENTOS RIGIDOS

## INTRODUCCION

En la medida de desplazamientos pequeños una técnica muy útil debido a su alta sensibilidad es la interferometría de holograma. En los últimos años se ha realizado mucho trabajo para encontrar técnicas que permitan tanto el obtener mediciones precisas como para entender el fenómeno de interferencia debido a la reflexión de superficies difusas, en interferometría de holograma (ref. 5). Los problemas encontrados en general, son los siguientes:

a) Necesidad de realizar varias observaciones a diferentes ángulos para poder diferenciar el tipo de movimiento que sufrió el objeto bajo estudio (diferentes tipos de movimientos pueden dar igual tipo de franjas).

b) La localización de las franjas en el espacio y su relación con la perturbación sufrida por el objeto bajo estudio hace necesario realizar una serie de consideraciones que dificultan el análisis.

Respecto al punto a, se ha desarrollado una serie de métodos que van desde la construcción de sistemas de más de un holograma, hasta la realización de un holograma con diferentes haces de referencia. En lo que respecta al punto b, se han desarrollado métodos como el de Carl Stetson (ref.

5) en el cual introduce su teorema de proyección para hacer coincidir las franjas que se localizan a miles de longitudes de onda del objeto, con las perturbaciones sufridas por el objeto mismo. Este estudio esta basado en la observación de las franjas de interferencia en un plano para el cual su contraste es uno. Con esta consideración se tiene una independencia del tamaño del ángulo sólido que capta la lente del sistema de observación i.e. es independiente de la abertura numérica del sistema.

En este trabajo se hace un análisis utilizando teoría de difracción en la cual el sistema de observación está en foco sobre la superficie del objeto bajo estudio. Este análisis se realiza para objetos planos de superficie rugosa (reflexión difusa) y se considera el sistema de observación una lente delgada. Se analiza la correlación de los frentes de onda del objeto antes y después de haber sufrido la perturbación y se encuentra que dicha correlación depende además del tipo de movimiento que haya sufrido el objeto, y del arreglo utilizado para realizar el experimento, de la abertura del sistema óptico con que se observa. En este desarrollo se encuentra una variación del contraste de las franjas con la abertura del sistema óptico, diferente para cada tipo de movimiento, esto permite diferenciar los distintos tipos de movimientos, observando a lo largo de una misma dirección (aunque se requiera una observación para cada variación del diámetro de la abertura del sistema). Este

trabajo conduce también a la misma expresión para analizar la forma geométrica de las franjas de interferencia, encontrada por otros autores (ref. 6) tomando la diferencia de caminos ópticos entre los puntos homólogos del objeto antes y después de perturbarse, con respecto al vértice de la lente con que se observa.

#### 1) ANALISIS DE LA DISTRIBUCION DE INTENSIDAD EN EL PLANO IMAGEN

Considerando que los dos frentes de onda bajo estudio provienen de un mismo objeto superpuesto utilizando holografía de doble exposición.

La diferencia entre los dos frentes de onda se debe al desplazamiento sufrido por el objeto, haciendo referencia a la geometría de la figura 9, el plano objeto está colocado a una distancia  $H_0$  enfrente de una lente positiva. La distribución de amplitud compleja sobre el objeto está dada por  $O(X_0, Y_0)$ .

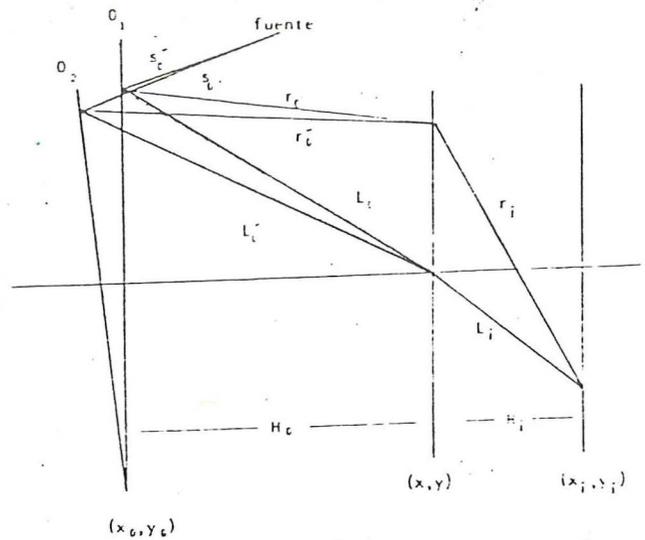


FIGURA 9 Diagrama en el que se muestra la geometría para el plano objeto y el sistema de observación.

A una distancia  $H_i$  detrás de la lente se forma su imagen. La distribución de amplitud en ese plano estará dada por  $V_i(X_i, Y_i)$ . Considerando una lente delgada con una distancia focal  $f$ , el campo  $V_i(X_i, Y_i)$  está dado por la siguiente integral de superposición:

$$V_i(x_i, y_i) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} O_i(x_i, y_i) P(x, y) \expi[r_o + r_i - \left(\frac{x^2 + y^2}{2f}\right)] dx dy dx_o dy_o, \quad (22)$$

donde  $P(x, y)$  es la función de pupila generalizada con radio  $\rho$ , dada como:

$$P(X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 + y^2 < \rho^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (23)$$

y

$$r_0 = [H_0^2 + (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

y

$$r_i = [H_i^2 + (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{\frac{1}{2}} .$$

La ecuación 22 puede resolverse considerando la aproximación de Fresnel, esto es, considerando que:

$$[r_0 r_i]^{-1} \simeq [H_0 H_i]^{-1} ,$$

y despreciando los términos de orden mayor que dos en el desarrollo en serie de Taylor para  $r_0$  y  $r_i$ , el exponente de la ecuación 22 queda de la siguiente forma:

$$r_0 + r_i - \frac{x^2 + y^2}{2f} = L_0 + L_i - 1/H_0 \left[ \left( x_0 + \frac{x_i}{m} \right) x + \left( y_0 + \frac{y_i}{m} \right) y \right] , \quad (25)$$

donde se ha considerado que la lente delgada satisface la relación:

$$1/f = 1/H_0 + 1/H_i \quad , \quad (26)$$

y donde  $m=(H_i/H_0)$  es la amplificación del sistema óptico, y

$$L_0 = (x_0^2 + y_0^2 + H_0^2)^{\frac{1}{2}} \quad (27)$$

$$L_i = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{\frac{1}{2}} \quad .$$

Los términos  $L_0$  y  $L_i$  se obtienen reorganizando los términos correspondientes en el desarrollo en series de Taylor de  $r_0$  y  $r_i$  respectivamente.  $L_0$  es la distancia de un punto sobre el objeto al vértice anterior de la lente, y  $L_i$  es la distancia del vértice posterior al correspondiente punto imagen. Integrando la ecuación 22 sobre la abertura del sistema óptico (ver ref 1) la distribución de amplitud en el plano imagen está dada por:

$$V_1(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{+\infty} G_1(x_0, y_0) \exp[ik(L_0+L_i)] [2J_1(\pi a)/\pi a] dx_0 dy_0 \quad , \quad (28)$$

donde

$$a = (2\rho/\lambda H_0) [(x_0 + \frac{x_i}{m})^2 + (y_0 + \frac{y_i}{m})^2]^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (29)$$

Similarmente para el frente de onda reflejado sobre el mismo objeto , después de que éste ha experimentado un desplazamiento rígido , la distribución de amplitud sobre el objeto está dada por  $O_2(x_0, y_0)$ , teniendo así que la distribución de amplitud en el plano imagen estará dada por:

$$V_2(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{+\infty} O_2(x'_0, y'_0) \exp[ik(L'_0 + L'_i)] [2J_1(\pi a')/\pi a'] dx'_0, dy'_0, \quad (30)$$

donde

$$a' = [2\rho/\lambda H_0]R', \quad (31)$$

dónde

$$R' = \left\{ [(x_0 + f_x)(1 - [f_z/H_0]) + (\frac{x_i}{m})]^2 + [(y_0 + f_y)(1 - [f_z/H_0]) + (\frac{y_i}{m})]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (32)$$

siendo  $f_x$ ,  $f_y$  y  $f_z$  las magnitudes de los movimientos en los tres ejes ortogonales.

La distribución de intensidad debido a la superposición de los dos frentes de onda en el plano imagen está dada como:

$$\langle (V_1 + V_2)(V_1 + V_2)^* \rangle = \langle |V_1|^2 \rangle + \langle |V_2|^2 \rangle + \langle V_1 V_2^* \rangle + \langle V_1^* V_2 \rangle$$

(33)

El primer término cruzado está dado por:

$$\langle V_1 V_2^* \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle O_1(x_0, y_0) O_2^*(x'_0, y'_0) \rangle \exp[ik(L_0 + L'_0)] [2J_1(\pi a)/\pi a] [2J_1(\pi a')/\pi a'] dx_0 dy_0 dx'_0 dy'_0$$

(34)

Suponiendo que el objeto tiene una superficie rugosa y que satisface la propiedad estadística (ref.7):

$$\langle O_1(x_0, y_0) O_2^*(x'_0, y'_0) \rangle = \langle \tilde{O}_1(x_0, y_0) \tilde{O}_2^*(x_0, y_0) \rangle \delta(x_0 - x'_0, y_0 - y'_0)$$

(35)

donde  $\tilde{O}_k(x'_0, y'_0)$  es el valor de  $O_k(x_0, y_0)$  suavizado con respecto a la rugosidad de la superficie, y  $\delta(x_0 - x'_0, y_0 - y'_0)$  es la función delta de Dirac.

Dado que la superficie reflectora es la misma antes y después de sufrir el movimiento, las correspondientes distribuciones de amplitud sólo diferirán de un factor de fase dado por:

$$O_1 = O_2 \exp[ik(S_0 - S'_0)] \quad , \quad (36)$$

donde  $S_0$  y  $S'_0$  son las distancias entre la fuente puntual y la superficie del objeto antes y después de sufrir el desplazamiento. Bajo esta consideración se tiene que: (ref 1)

$$\begin{aligned} \langle O_1 O_2^* \rangle &= \langle O_1 O_1^* \rangle \exp[ik(S_0 - S'_0)] \\ &= \langle |O_1|^2 \rangle \exp[ik(S_0 - S'_0)] \quad . \end{aligned} \quad (37)$$

Sustituyendo en la ecuación 34 se tiene que:

$$\langle V_1 V_2^* \rangle = \iint_{-\infty}^{+\infty} \langle |O_1|^2 \rangle \exp[i\phi(x_0, y_0)] [2J_1(\pi a)/\pi a] [2J_1(\pi a')/\pi a'] dx_0 dy_0 \quad , \quad (38)$$

en donde:

$$\phi(x_0, y_0) = (2\pi/\lambda)[S'_0 - S_0 + L'_0 - L_0] \quad , \quad (39)$$

es la diferencia de fase entre dos rayos que emergen de la fuente puntual al vértice de la lente delgada después de ser reflejados en el mismo punto sobre la superficie reflectora antes y después del movimiento.

De la ecuación 36 se tiene que:

$$\langle |O_1|^2 \rangle = \langle |O_2|^2 \rangle = I_0 \quad , \quad (40)$$

donde  $I_0$  es constante si se tiene iluminación uniforme sobre la superficie del plano objeto.

De manera que sustituyendo la ecuación 40 en la ecuación 38, se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle V_1 V_2^* \rangle + \langle V_1^* V_2 \rangle = \\ \iint_{-\infty}^{+\infty} \langle |O_1|^2 \rangle [\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)] [2J_1(\pi a)/\pi a] \\ [2J_1(\pi a')/\pi a'] dx_0 dy_0 \quad , \quad (41) \end{aligned}$$

ó bien

$$\begin{aligned} \langle V_1 V_2^* \rangle + \langle V_1^* V_2 \rangle = \\ 2 I_0 \iint_{-\infty}^{+\infty} \cos\theta [2J_1(\pi a)/\pi a] [2J_1(\pi a')/\pi a'] dx_0 dy_0 \quad , \quad (42) \end{aligned}$$

de donde el factor  $\cos\theta$  puede sacarse de la integral ya que es una función que varía suavemente comparada con las funciones Bessel. De manera que, sustituyendo la ecuación 42 en la ecuación 33, se tendrá que la distribución de intensidad debido a la superposición de los dos frentes de onda, estará dada por:

$$\langle (V_1+V_2)(V_1+V_2)^* \rangle = 2I_0[1 + \gamma \cos\theta] \quad , \quad (43)$$

donde

$$\gamma = \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty} [2J_1(\pi a)/\pi a][2J_1(\pi a')/\pi a'] dx_0 dy_0}{\iint_{-\infty}^{+\infty} [2J_1(\pi a)/\pi a]^2 dx_0 dy_0} \quad , \quad (44)$$

es la visibilidad de las franjas, que da el grado de correlación entre los dos patrones de Speckle en el plano imagen del sistema, y el  $\cos\theta$  da la forma geométrica de las franjas de interferencia.

## 2) ANALISIS DE LOS TIPOS DE MOVIMIENTOS SUFRIDOS POR EL OBJETO

Los tipos de movimientos que se analizan en el presente trabajo son:

- a) Traslación pura en plano.
- b) Traslación pura longitudinal.
- c) Rotación pura en plano.
- d) Inclinação respecto al eje "y" del objeto.

Del análisis de los argumentos de las funciones Bessel, de la función de correlación  $\gamma$ , es posible obtener información de la sensibilidad de este método, los factores  $a$  y  $a'$  de los argumentos de estas funciones Bessel dependen de  $H_0$  y  $\rho$ , i.e. de la abertura numérica del sistema y  $a'$  también es función de las cantidades  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_z$ . La variación de estos parámetros producen variaciones en el grado de correlación entre los patrones de Speckle.

La función Bessel con argumento  $\pi a$  tiene un máximo cuando  $a = 0$ , i.e. para  $(x_0, y_0) = (\frac{x_i}{m}, \frac{y_i}{m})$  y su primer cero cuando  $a=1.22$  i.e. para todos los puntos en el círculo de radio  $r$  dado como:

$$r = 0.61\lambda H_0 / \rho \quad (45)$$

El primer máximo de la función Bessel con argumento  $\pi a'$  esta desplazada respecto al máximo de la otra función y este desplazamiento depende de las cantidades  $f_x$ ,  $f_y$ , y  $f_z$ . Esta función tiene su primer cero en  $a'=1.22$ .

Los puntos  $(x_0, y_0)$  que satisfacen  $a=a'=1.22$  están localizados en círculos desplazados una distancia  $D$  que dependerá de la magnitud del desplazamiento, es decir, de las cantidades  $T_x$ ,  $T_y$ , y  $T_z$ , y cuyo radio será función de la abertura numérica del sistema, es decir, de  $H_0$  y  $\rho$ . Ver figura 10.

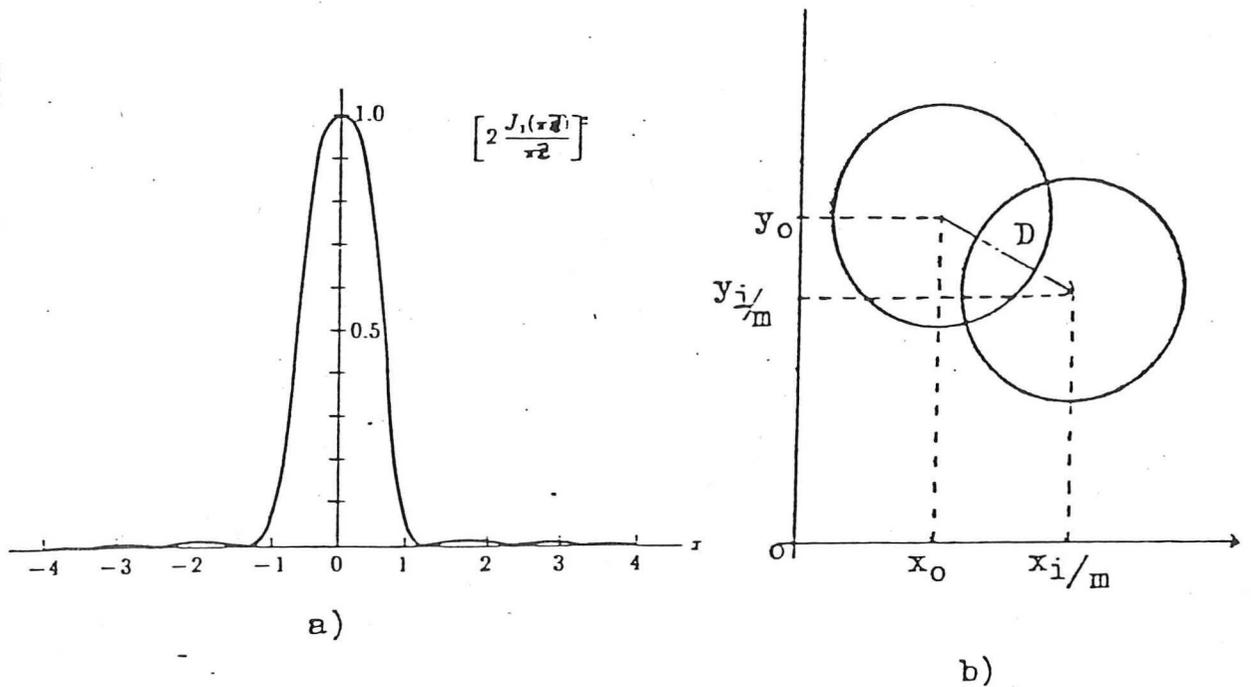


FIGURA 10

a) Gráfica de la función de intensidad. b) Máximos de las funciones Bessel desplazados una magnitud  $D$ .

La correlación normalizada entre dos funciones Bessel de primer orden es otra función Bessel, (ref. 7) de modo que la función  $\gamma$  puede tomar valores positivos y negativos variando el radio de la abertura del sistema óptico ó variando algún otro parámetro, teniendo así un contraste invertido en el patrón de franjas de interferencia.

### 3) TRASLACION PURA EN PLANO

Considerando que la superficie reflejante i.e. el objeto, ha sufrido un desplazamiento transversal dado por:

$$D = \{ T_x^2 + T_y^2 \}^{\frac{1}{2}}, \quad (46)$$

donde  $T_x$  y  $T_y$  son las componentes del desplazamiento en las direcciones  $x_0$  y  $y_0$  respectivamente, tenemos de las ecuaciones 31, 32 y 29 que:

$$a' = (2\rho/\lambda H_0) \left[ \left( x_0 + \frac{x_i}{m} + T_x \right)^2 + \left( y_0 + \frac{y_i}{m} + T_y \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (47)$$

donde  $T_x = f_x$ ,  $T_y = f_y$  y:

$$a = (2\rho/\lambda H_0) \left[ \left( x_0 + \frac{x_i}{m} \right)^2 + \left( y_0 + \frac{y_i}{m} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (48)$$

En este caso la función con argumento  $\pi a'$  tendrá su

máximo valor cuando  $(x_0, y_0) = -(\frac{x_i}{m} + T_x, \frac{y_i}{m} + T_y)$  y su primer cero para los puntos sobre el círculo de radio  $0.61\lambda H_0/\rho$ , centrado en ese punto.

#### 4) TRASLACION PURA LONGITUDINAL

De la ecuación para  $a'$  se tiene que : si  $f_x=f_y=0$  y  $f_z=0$ , i.e. se tiene traslación pura longitudinal.

$$a' = (2\rho/\lambda H_0) \left\{ (x_0 - x_0 \frac{f_z}{H_0} + \frac{x_i}{m})^2 + (y_0 - y_0 \frac{f_z}{H_0} + \frac{y_i}{m})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\delta$$

$$a' \simeq (2\rho/\lambda H_0) \left\{ (x_0 + \frac{x_i}{m} - \frac{x_i f_z}{m H_0})^2 + (y_0 + \frac{y_i}{m} - \frac{y_i f_z}{m H_0})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (49)$$

De la ecuación 49, se tiene que la separación entre los máximos de las funciones Bessel estará dado como:

$$|S| = (f_z/H_0) \left[ \left( \frac{x_i}{m} \right)^2 + \left( \frac{y_i}{m} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (50)$$

$$|S| = (f_z/H_0) \left| \left( \frac{P_i}{m} \right) \right| \quad (51)$$

donde  $\left| \left( \frac{P_i}{m} \right) \right|$  es la distancia del centro de coordenadas a un punto  $P_i$  sobre la superficie reflectora, en el plano imagen.

De manera que la máxima separación de los máximos principales de las funciones Bessel dependerá del valor  $\left| \left( \frac{P_i}{m} \right) \right|$ , significando esto que el contraste del patrón de

franjas decrecerá radialmente teniendo su máximo contraste en el centro del patrón, es decir, sobre el eje óptico del sistema.

### 5) ROTACION PURA EN PLANO

Para este tipo de movimiento se considera la geometría que se muestra en la figura 11, en donde  $x_0$  y  $y_0$  son las coordenadas del objeto bajo estudio y la rotación dado por el ángulo  $\alpha$  es respecto al eje  $z'$ .

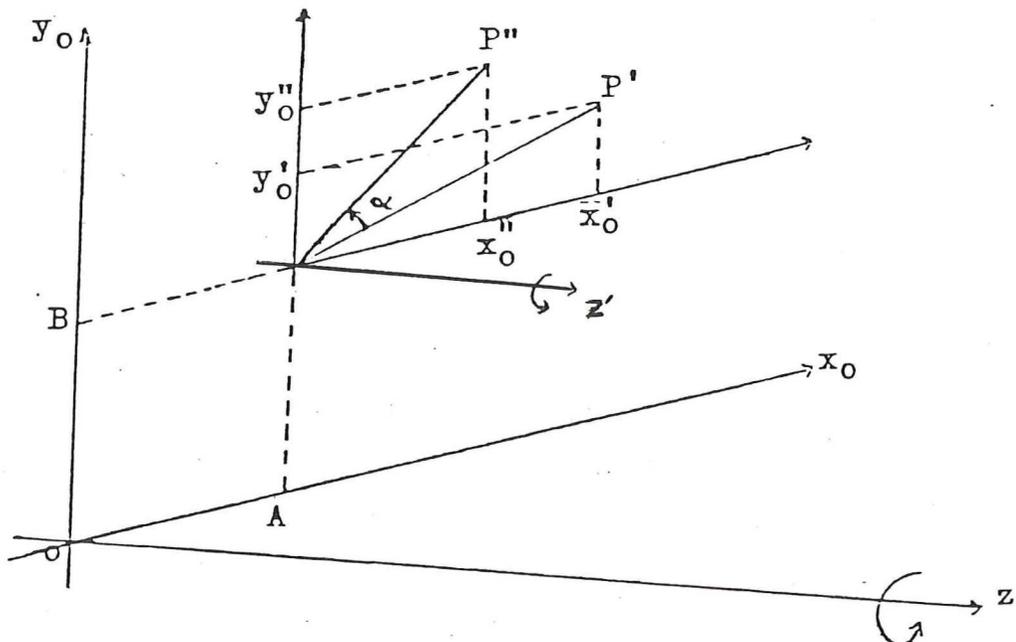


FIGURA 11 Geometría para el análisis de rotación pura en plano.

De la geometría se tiene que:

$$x'' = x'_0 \cos \alpha - y'_0 \sin \alpha \quad , \quad (52)$$

y similarmente

$$y_0'' = y'_0 \cos \alpha - x'_0 \sin \alpha \quad . \quad (53)$$

Considerando el movimiento de rotación en contra del movimiento de las manecillas del reloj, es decir, hacia las  $x$ 's negativas, se tiene que las cantidades  $f_x$ ,  $f_y$  y  $f_z$  que definen el movimiento, están dadas por:

$$f_x = x_0' - x'_0 \quad : \quad f_y = y_0' - y'_0 \quad : \quad f_z = 0 \quad . \quad (54)$$

Sustituyendo la ecuación 53 en la 54 se tiene:

$$f_x = -x'_0 + x'_0 \cos \alpha - y'_0 \sin \alpha \quad ,$$

y

$$f_y = -y'_0 + x'_0 \sin \alpha + y'_0 \cos \alpha \quad ,$$

y dado que

$$x_0 = A + x'_0 \quad ,$$

y

$$y_0 = B + y'_0 \quad ,$$

se tiene que

$$f_x = A - x_0 + (x_0 - A)\cos\alpha - (y_0 - B)\sin\alpha, \quad (55)$$

y

$$f_y = B - y_0 + (x_0 - A)\sin\alpha + (y_0 - B)\cos\alpha, \quad (56)$$

de la ecuación 31 y 32 para  $a'$  se tiene, al sustituir las ecuaciones anteriores para  $f_x$  y  $f_y$ :

$$\begin{aligned} (x_0 + f_x + \frac{x_i}{m})^2 + (y_0 + f_y + \frac{y_i}{m})^2 = \\ (\frac{x_i}{m} + A)^2 + (\frac{y_i}{m} + B)^2 + (x_0 - A)^2 \\ + (y_0 - B)^2 + 2(x_0 - A)a_x' + 2(y_0 - B)a_y' \end{aligned} \quad , (57)$$

donde

$$a_x' = [(\frac{x_i}{m}) + A]\cos\alpha + [(\frac{y_i}{m}) + B]\sin\alpha$$

y

$$a_y' = -[(\frac{x_i}{m}) + A]\sin\alpha + [(\frac{y_i}{m}) + B]\cos\alpha,$$

de modo que

$$\left(x_0 + f_x + \frac{x_i}{m}\right)^2 + \left(y_0 + f_y + \frac{y_i}{m}\right)^2 = \left(x_0 - A + a_x'\right)^2 + \left(y_0 - B + a_y'\right)^2, \quad (58)$$

así que

$$a' = (2\rho/\lambda H_0) \left\{ (x_0 - A + a_x')^2 + (y_0 - B + a_y')^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (59)$$

Esta ecuación puede ser reescrita como:

$$a' = (2\rho/\lambda H_0) \left\{ (x_0 - a_x)^2 + (y_0 - a_y)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (60)$$

donde

$$a_x = A - a_x' \quad \text{y} \quad a_y = B - a_y',$$

así que, al obtener el producto de las funciones Bessel en el integrando de la función de correlación se tiene que los máximos están localizados en  $\left(\frac{x_i}{m}, \frac{y_i}{m}\right)$  y  $\left(\frac{x_i}{m} + a_x, \frac{y_i}{m} + a_y\right)$  como muestra en la figura 12.

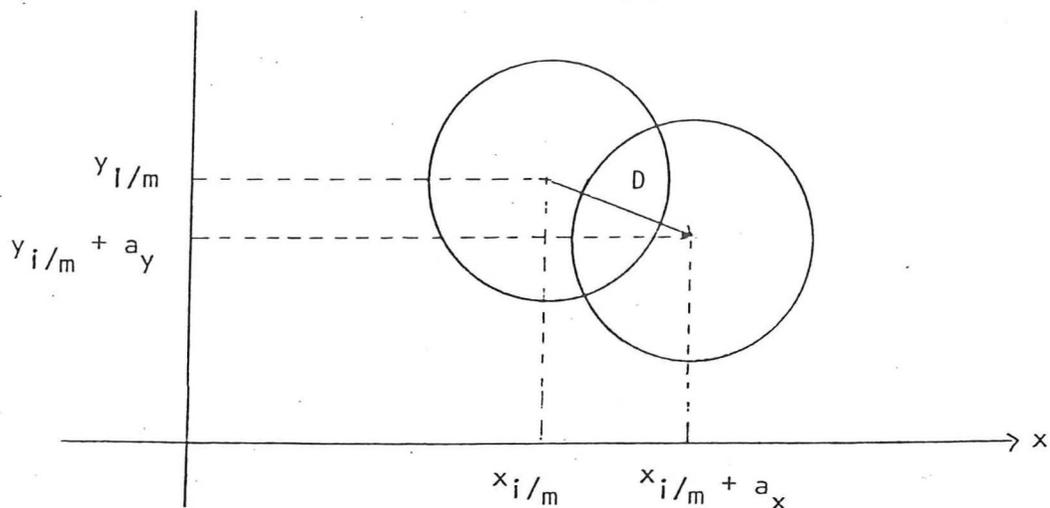


FIGURA 12 Máximos desplazados de las funciones Bessel correspondientes a puntos homólogos del objeto.

Para un eje  $y$  un ángulo de rotación dados, la separación entre los máximos está dada por:

$$\bar{D} = D_x i + D_y j \quad , \quad (61)$$

de donde

$$D = \{D_x^2 + D_y^2\}^{\frac{1}{2}} \quad , \quad (62)$$

y

$$D_x = \left(\frac{x_i}{m}\right) + a_x \quad : \quad D_y = \left(\frac{y_i}{m}\right) + a_y \quad ,$$

por lo que

$$D_x = \left[ \frac{x_i}{m} + A \right] (1 - \cos \alpha) - \left[ \frac{y_i}{m} + B \right] \sin \alpha \quad , \quad (63)$$

y

$$D_y = \left[ \frac{y_i}{m} + B \right] (1 - \cos \alpha) + \left[ \frac{x_i}{m} + A \right] \sin \alpha. \quad (64)$$

Sustituyendo las ecuaciones 63 y 64 en la 62 y desarrollando las operaciones se tiene que:

$$D = \left\{ 2(1 - \cos \alpha) \left[ \left( \frac{x_i}{m} + A \right)^2 + \left( \frac{y_i}{m} + B \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (65)$$

obteniendo así la separación entre los máximos de las funciones Bessel. El primer cero de ambas funciones Bessel corresponden al valor de  $a = a' = 1.22$  localizados en círculos de radio  $r$  dado por la ecuación 45, desplazados por una cantidad  $D$  dada por la ecuación 65.

El radio  $r$  cambiará dependiendo de la variación del radio de la abertura del sistema. Esto significa que la función de correlación normalizada  $\gamma$  de los dos frentes de onda toma valores positivos y negativos para ciertos valores de  $r$  y para algún valor de  $r > D$  tomará valores de cero. Continuando así en forma oscilante hasta que la correlación sea prácticamente cero, es decir, cuando  $2r < D$ . Esto significa que para algunos valores del radio de la abertura del sistema se obtiene un contraste invertido. En particular para rotación en plano, las franjas rectas del patrón de interferencia tienen anillos de contraste invertidos centrados en el eje de rotación. El radio de dichos anillos cambiará según varíe el radio de la abertura del sistema.

## 6) INCLINACION RESPECTO AL EJE Y DEL OBJETO

En este tipo de movimiento se considera la geometría que muestra en la figura 13.

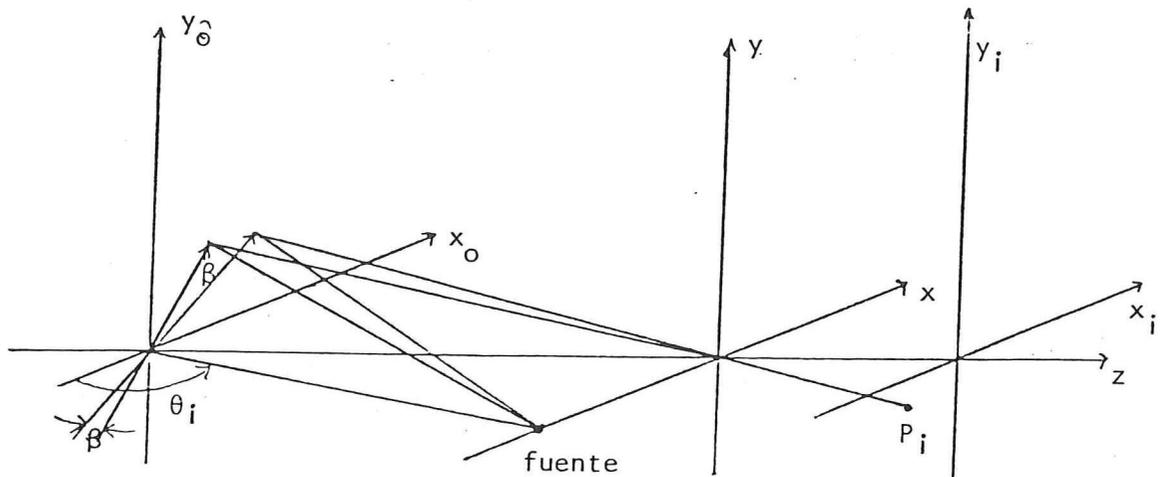


FIGURA 13 Geometría de los planos objeto y de observación en el caso de inclinación respecto al eje "y" del objeto.

Considerando que el movimiento que sufrió el objeto está dado por:

$$f_x = x_0 - x'_0 = x_0(\cos\beta - 1)$$

$$f_y = 0$$

$$f_z = -x_0 \sin\beta$$

(66)

se tiene de la ecuación 31 que:

$$a' = (2\rho/\lambda H_0) \left[ \left( x_0 + f_x + \frac{x_i}{m} - \frac{x_i f_z}{m H_0} \right)^2 + \left( y_0 + \frac{y_i}{m} - \frac{y_i f_z}{m H_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (67)$$

y sustituyendo las ecuaciones 66 en la 67 se tiene

$$a' = (2\rho/\lambda H_0) \left\{ \left[ x_0 \left( \cos\beta - \frac{x_i \sin\beta}{m H_0} \right) + \frac{x_i}{m} \right]^2 + \left[ y_0 \left( 1 - \frac{x_i \sin\beta}{m H_0} \right) + \frac{y_i}{m} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (68)$$

y considerando movimientos pequeños de  $\beta$  de modo que  $\sin\beta \ll \cos\beta$  y  $\frac{x_i}{m} (\sin\beta/H_0) \ll \cos\beta$  se tiene:

$$a' = (2\rho/\lambda H_0) \left\{ \left( x_0 \cos\beta + \frac{x_i}{m} \right)^2 + \left( y_0 + \frac{y_i}{m} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (69)$$

ó bien

$$a' = (2\rho/\lambda H_0) \left\{ x_0^2 + 2Cx_0 + Dy_0^2 + 2Ey_0 + F \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (70)$$

donde:

$$A = \cos^2\beta$$

$$C = \left( \frac{x_i}{m} \right) \cos\beta$$

$$D = 1$$

$$E = \frac{y_i}{m}$$

$$F = P_i^2 = \left( \frac{x_i}{m} \right)^2 + \left( \frac{y_i}{m} \right)^2$$

De donde reescribiendo la ecuación 70 se obtiene:

$$a' = \left[ \left( \frac{x_0 \cos \beta + \frac{x_i}{m}}{\lambda H_0 / 2\rho} \right)^2 + \left( \frac{y_0 + \frac{y_i}{m}}{\lambda H_0 / 2\rho} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (71)$$

ó bien

$$a'^2 = \left( \frac{x_0 \cos \beta + \frac{x_i}{m}}{\lambda H_0 / 2\rho} \right)^2 + \left( \frac{y_0 + \frac{y_i}{m}}{\lambda H_0 / 2\rho} \right)^2. \quad (72)$$

De manera que el primer mínimo de la función Bessel con argumento  $a'$  será cuando  $a'=1.22$  de modo que

$$(1.22)^2 = \left( \frac{x_0 \cos \beta + \frac{x_i}{m}}{\lambda H_0 / 2\rho} \right)^2 + \left( \frac{y_0 + \frac{y_i}{m}}{\lambda H_0 / 2\rho} \right)^2, \quad (73)$$

con lo que se obtiene la siguiente expresión:

$$\left( \frac{x_0 + (x_i / m \cos \beta)}{0.61 \lambda H_0 / \rho \cos \beta} \right)^2 + \left( \frac{y_0 + \frac{y_i}{m}}{0.61 \lambda H_0 / \rho} \right)^2 = 1, \quad (74)$$

que es la ecuación de una elipse con centro

$$(h, k) = -\left(x_i/m \cos \beta, \frac{y_i}{m}\right) \quad (75)$$

y semi-ejes

$$a = \frac{0.61\lambda H_0}{\rho \cos \beta}, \quad b = \frac{0.61\lambda H_0}{\rho} \quad (76)$$

de manera que los máximos de las funciones Bessel están separados una cantidad dada por (ecuación 61)

$$\bar{D} = D_x i + D_y j, \quad \text{donde } D_x = \left[ \left(\frac{x_i}{m}\right) - \left(\frac{x_i}{m}\right) (\cos \beta)^{-1} \right] \quad \text{y} \\ D_y = 0, \quad \text{así que:}$$

$$\bar{D} = D_x = \left(\frac{x_i}{m}\right) [1 - (\cos \beta)^{-1}] \quad .$$

El primer cero de la función Bessel con argumento  $\pi$  está localizado en un círculo con radio  $r = (0.61\lambda H_0)/\rho$  centrado en  $\left(\frac{x_i}{m}, \frac{y_i}{m}\right)$  y el primer cero de la función  $\pi'$  está localizado en una elipse con centro  $(h, k)$  y semi ejes  $a$  y  $b$  dados por las ecuaciones 75 y 76 respectivamente, ver figura 14.

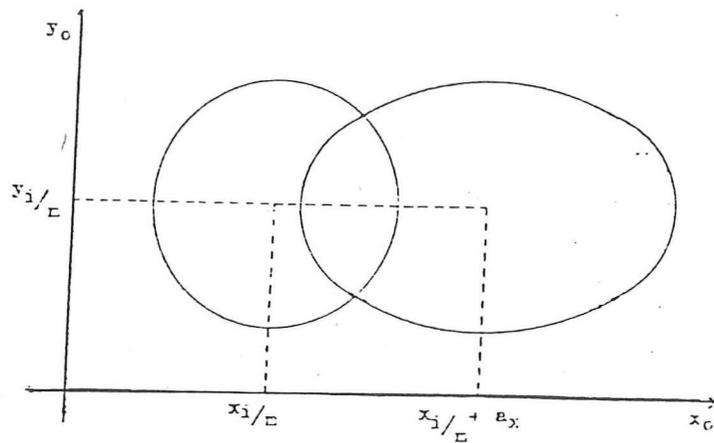


FIGURA 14 Máximos de las funciones Bessel en presencia de inclinación.

Como se puede ver en la figura 14 el contraste de las franjas deberá ser cero cuando la separación entre los máximos sea mayor que la suma de el radio  $r$  del círculo y el semi-eje  $a$  del elipse.

Esto implica que se debe cumplir la siguiente relación:

$$\frac{x_i}{m} = - \left[ \frac{(0.61\lambda H_0)(1 + \cos\beta)}{(\rho)(1 - \cos\beta)} \right]$$

y como  $\beta$  es pequeño, el objeto deberá ser muy grande para que se aprecie el efecto. Por lo tanto se puede decir que el contraste de las franjas no depende del radio de la abertura del sistema para el caso de inclinación.

## 7) ANALISIS DE LA FORMA GEOMETRICA DE LAS FRANJAS DE INTERFERENCIA PARA TRASLACIONES Y ROTACIONES

En esta parte se presenta el análisis de la forma geométrica de las franjas de interferencia para traslaciones y rotaciones y se llega a las relaciones matemáticas de las magnitudes de los distintos desplazamientos en función de la separación de las franjas de interferencia, (ver ref 6).

La diferencia de fase introducida por el desplazamiento rígido que sufrió el objeto está dada como:

$$\phi = (2\pi/\lambda) [ S'_0 - S_0 + \Pi'_0 - \Pi_0 ] \quad , \quad (77)$$

donde  $(S'_0 - S_0 + \Pi'_0 - \Pi_0)$  es la diferencia de camino geométrico del punto P a P' sobre la superficie del objeto antes y después del movimiento rígido. El vector de desplazamiento  $\bar{D}$  que va de P a P' está dado, en general, como:

$$\bar{D} = D_x i + D_y j + D_z k \quad , \quad (78)$$

donde  $D_x$ ,  $D_y$  y  $D_z$  son las componentes del vector  $\bar{D}$  en cada una de las direcciones ortogonales, i.e en las direcciones de los vectores unitarios  $i$ ,  $j$ ,  $k$ . Para cuantificar la magnitud del vector  $\bar{D}$  en el caso general de

rotaciones y traslaciones se analiza la diferencia de camino geométrico considerando la geometría de la figura 15.

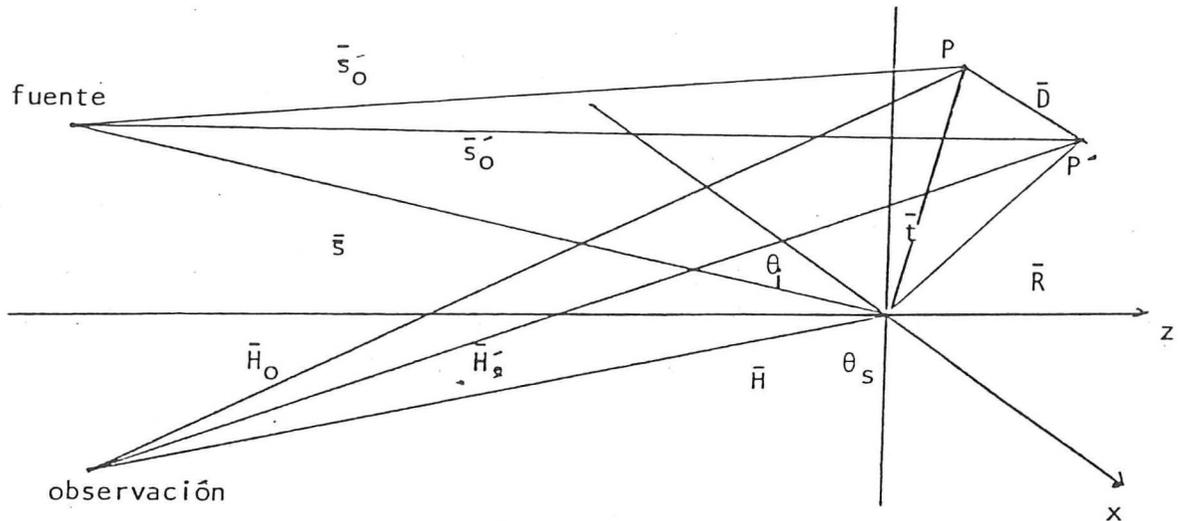


FIGURA 15 Geometría para el análisis de la forma geométrica de las franjas de interferencia.

De la ecuación 77 se tiene que la diferencia de camino geométrico está dada como:

$$\Delta = ( S'_0 - S_0 + H'_0 - H_0 ) \quad , \quad (79)$$

donde  $S'_0$  y  $S_0$  son las distancias de la fuente puntual a un punto  $P(x_0, y_0)$  sobre la superficie del objeto antes y después de moverse,  $H'_0$  y  $H_0$  son las distancias de un punto  $P(x_0, y_0)$  sobre la superficie del objeto antes y después de moverse al punto de observación, que en este caso es al vértice anterior de la lente del sistema de observación.

De la figura 15 se tiene que:

$$\bar{S}'_0 = \bar{S} - \bar{t} \quad , \quad (80)$$

donde  $\bar{t}$  es un vector en el plano  $(x, y)$  y está dado como:

$$\bar{t} = t_x i + t_y j \quad . \quad (81)$$

De la ecuación 80 se tiene que:

$$S_o'^2 = (\bar{S} - \bar{t})^2 = S^2 - 2(\bar{S} \cdot \bar{t}) + t^2 \quad . \quad (82)$$

Similarmente

$$S_o'^2 = (\bar{S} - \bar{R})^2 = S^2 - 2(\bar{S} \cdot \bar{R}) + R^2 \quad , \quad (83)$$

donde  $\bar{R} = \bar{D} + \bar{t}$ , de manera que la ecuación 83 puede reescribirse como:

$$S_o'^2 = S^2 - 2(\bar{S} \cdot \bar{D}) - 2(\bar{S} \cdot \bar{t}) + 2(\bar{D} \cdot \bar{t}) + D^2 + t^2 \quad . \quad (84)$$

En forma análoga se tiene que  $H_o'$  y  $H_o$  están dadas por:

$$H_o'^2 = H^2 - 2(\bar{H} \cdot \bar{t}) + t^2 \quad (85)$$

y

$$H'_0{}^2 = H^2 - 2(\bar{H} \cdot \bar{D}) - 2(\bar{H} \cdot \bar{t}) + 2(\bar{D} \cdot \bar{t}) + D^2 + t^2 \quad (86)$$

tomando las raíces cuadradas en ambos miembros de la ecuación 86, 85, 84 y 83 las magnitudes  $S'_0$ ,  $S_0$ ,  $H'_0$  y  $H_0$  están dadas como:

$$S_0 = S \left\{ 1 - \left[ \frac{2(\bar{S} \cdot \bar{t})}{S^2} - \frac{t^2}{S^2} \right] \right\}^{1/2} \quad (87)$$

$$S'_0 = S \left\{ 1 - \left[ \frac{2(\bar{S} \cdot \bar{D})}{S^2} + \frac{2(\bar{S} \cdot \bar{t})}{S^2} - \frac{2(\bar{D} \cdot \bar{t})}{S^2} - \frac{D^2}{S^2} - \frac{t^2}{S^2} \right] \right\}^{1/2} \quad (88)$$

$$H_0 = H \left\{ 1 - \left[ \frac{2(\bar{H} \cdot \bar{t})}{H^2} - \frac{t^2}{H^2} \right] \right\}^{1/2} \quad (89)$$

y

$$H'_0 = H \left\{ 1 - \left[ \frac{2(\bar{H} \cdot \bar{D})}{H^2} + \frac{2(\bar{H} \cdot \bar{t})}{H^2} - \frac{2(\bar{D} \cdot \bar{t})}{H^2} - \frac{D^2}{H^2} - \frac{t^2}{H^2} \right] \right\}^{1/2} \quad (90)$$

Desarrollando en serie de Taylor las radicales de las ecuaciones 87, 88, 89 y 90, y despreciando los términos de grado mayor o igual al tercero se tiene que:

$$S_0 = S - \frac{S}{2} \left[ \frac{2(\bar{S} \cdot \bar{t})}{S^2} - \frac{t^2}{S^2} \right] - \frac{S}{8} \left[ \frac{2(\bar{S} \cdot \bar{t})}{S^2} - \frac{t^2}{S^2} \right]^2 \quad (91)$$

$$S'_0 = S - \frac{S}{2} \left[ \frac{2(\bar{S} \cdot \bar{D})}{S^2} + \frac{2(\bar{S} \cdot \bar{t})}{S^2} - \frac{2(\bar{D} \cdot \bar{t})}{S^2} - \frac{D^2}{S^2} - \frac{t^2}{S^2} \right] - \frac{S}{8} \left[ \frac{2(\bar{S} \cdot \bar{D})}{S^2} + \frac{2(\bar{S} \cdot \bar{t})}{S^2} - \frac{2(\bar{D} \cdot \bar{t})}{S^2} - \frac{D^2}{S^2} - \frac{t^2}{S^2} \right]^2 \quad (92)$$

$$H'_O = H - \frac{H}{2} \left[ \frac{2(\bar{H} \cdot \bar{t})}{H^2} - \frac{t^2}{H^2} \right] - \frac{H}{8} \left[ \frac{2(\bar{H} \cdot \bar{t})}{H^2} - \frac{t^2}{H^2} \right]^2 \quad (93)$$

y

$$H'_O = H - \frac{H}{2} \left[ \frac{2(\bar{H} \cdot \bar{D})}{H^2} + \frac{2(\bar{H} \cdot \bar{t})}{H^2} - \frac{2(\bar{D} \cdot \bar{t})}{H^2} - \frac{D^2}{H^2} - \frac{t^2}{H^2} \right] - \frac{H}{8} \left[ \frac{2(\bar{H} \cdot \bar{D})}{H^2} + \frac{2(\bar{H} \cdot \bar{t})}{H^2} - \frac{2(\bar{D} \cdot \bar{t})}{H^2} - \frac{D^2}{H^2} - \frac{t^2}{H^2} \right]^2 \quad (94)$$

Restando la ecuación 91 a la 92 y la ecuación 93 a la 94 se tiene que:

$$S'_O - S_O = -\frac{(\bar{S} \cdot \bar{D})}{S} + \frac{(\bar{D} \cdot \bar{t})}{S} + \frac{D^2}{2S} + \frac{S}{8} \left[ \frac{2(\bar{S} \cdot \bar{t})}{S^2} - \frac{t^2}{S^2} \right]^2 - \frac{S}{8} \left[ \frac{2(\bar{D} \cdot \bar{S})}{S^2} + \frac{2(\bar{S} \cdot \bar{t})}{S^2} - \frac{2(\bar{D} \cdot \bar{t})}{S^2} - \frac{D^2}{S^2} - \frac{t^2}{S^2} \right]^2 \quad (95)$$

y

$$H'_O - H_O = -\frac{(\bar{H} \cdot \bar{D})}{H} + \frac{(\bar{D} \cdot \bar{t})}{H} + \frac{D^2}{2H} + \frac{H}{8} \left[ \frac{2(\bar{H} \cdot \bar{t})}{H^2} - \frac{t^2}{H^2} \right]^2 - \frac{H}{8} \left[ \frac{2(\bar{H} \cdot \bar{D})}{H^2} + \frac{2(\bar{H} \cdot \bar{t})}{H^2} - \frac{2(\bar{D} \cdot \bar{t})}{H^2} - \frac{D^2}{H^2} - \frac{t^2}{H^2} \right]^2 \quad (96)$$

Ahora como la diferencia de camino geométrico está dado por la suma de las ecuaciones 95 y 96 se tiene que  $\Delta$  de la ecuación 79 puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\Delta = & \left( \frac{1}{S} + \frac{1}{H} \right) \left[ (\bar{D} \cdot \bar{t}) + \frac{D^2}{2} \right] - \bar{D} \cdot \left[ \frac{\bar{S}}{S} + \frac{\bar{H}}{H} \right] + \frac{S}{8} \left[ \frac{2(\bar{S} \cdot \bar{t})}{S^2} - \frac{t^2}{S^2} \right]^2 \\
& + \frac{H}{8} \left[ \frac{2(\bar{H} \cdot \bar{t})}{H^2} - \frac{t^2}{H^2} \right]^2 - \frac{S}{8} \left[ \frac{2(\bar{S} \cdot \bar{D})}{S^2} + \frac{2(\bar{S} \cdot \bar{t})}{S^2} - \frac{2(\bar{D} \cdot \bar{t})}{S^2} \right. \\
& \left. - \frac{D^2}{S^2} - \frac{t^2}{S^2} \right]^2 - \frac{H}{2} \left[ \frac{2(\bar{H} \cdot \bar{D})}{H^2} + \frac{2(\bar{H} \cdot \bar{t})}{H^2} - \frac{2(\bar{D} \cdot \bar{t})}{H^2} - \frac{D^2}{H^2} - \frac{t^2}{H^2} \right]^2, \quad (97)
\end{aligned}$$

Desarrollando los términos cuadráticos y agrupando, la ecuación 97 puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\Delta = & \left( \frac{1}{S} + \frac{1}{H} \right) \left[ (\bar{D} \cdot \bar{t}) + \frac{D^2}{2} \right] - \bar{D} \cdot \left[ \frac{\bar{S}}{S} + \frac{\bar{H}}{H} \right] \\
& - \frac{1}{2S^3} \left[ 2(\bar{S} \cdot \bar{t}) + (\bar{S} \cdot \bar{D}) - (\bar{D} \cdot \bar{t}) - t^2 - \frac{D^2}{2} \right] \left[ (\bar{D} \cdot \bar{S}) - (\bar{D} \cdot \bar{t}) - \frac{D^2}{2} \right] \\
& - \frac{1}{2H^3} \left[ 2(\bar{H} \cdot \bar{t}) + (\bar{H} \cdot \bar{D}) - (\bar{D} \cdot \bar{t}) - t^2 - \frac{D^2}{2} \right] \left[ (\bar{H} \cdot \bar{D}) - (\bar{D} \cdot \bar{t}) - \frac{D^2}{2} \right], \quad (98)
\end{aligned}$$

δ

$$\Delta = K_1 + K_2, \quad (99)$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  son los términos de primer y segundo orden en los desarrollos en serie, y están dados como:

$$K_1 = \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{H}\right) \left[ (\bar{D} \cdot \bar{t}) + \frac{D^2}{2} \right] - \bar{D} \cdot \left[ \frac{\bar{S}}{S} + \frac{\bar{H}}{H} \right] \quad (100)$$

y

$$K_2 = -\frac{1}{2S^3} \left[ 2(\bar{S} \cdot \bar{t}) + (\bar{S} \cdot \bar{D}) - (\bar{D} \cdot \bar{t}) - t^2 - \frac{D^2}{2} \right] \left[ (\bar{D} \cdot \bar{S}) - (\bar{D} \cdot \bar{t}) - \frac{D^2}{2} \right] \\ - \frac{1}{2H^3} \left[ 2(\bar{H} \cdot \bar{t}) + (\bar{H} \cdot \bar{D}) - (\bar{D} \cdot \bar{t}) - t^2 - \frac{D^2}{2} \right] \left[ (\bar{D} \cdot \bar{H}) - (\bar{D} \cdot \bar{t}) - \frac{D^2}{2} \right] \quad (101)$$

Considerando que la visibilidad de las franjas de interferencia entre el punto  $P(x, y)$  y el origen, se debe a la diferencia de trayectoria en  $P$ ,  $K(x, y)$  y la diferencia de trayectoria en el origen,  $K(0, 0)$  se tiene que:

$$\Delta = \Delta K_1 + \Delta K_2 \quad , \quad (102)$$

donde

$$\Delta K_1 = K_1(x, y) - K_1(0, 0) \quad (103)$$

y

$$\Delta K_2 = K_2(x, y) - K_2(0, 0) \quad , \quad (104)$$

de manera que las ecuaciones 100 y 101 pueden reescribirse como:

$$\Delta K_1 = \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{H}\right) (\bar{D} \cdot \bar{t}) \quad (105)$$

y

$$\begin{aligned} \Delta K_2 = & -\frac{1}{2S} \left[ 2(\bar{t} \cdot \frac{\bar{S}}{S})(\bar{D} \cdot \frac{\bar{S}}{S}) - \frac{2}{S}(\bar{t} \cdot \frac{\bar{S}}{S})(\bar{D} \cdot \bar{t}) - \frac{t^2}{S}(\bar{D} \cdot \frac{\bar{S}}{S}) + \frac{t^2}{S}(\bar{D} \cdot \bar{t}) \right] \\ & - \frac{1}{2H} \left[ 2(\bar{t} \cdot \frac{\bar{H}}{H})(\bar{D} \cdot \frac{\bar{H}}{H}) - \frac{2}{H}(\bar{t} \cdot \frac{\bar{H}}{H})(\bar{D} \cdot \bar{t}) - \frac{t^2}{H}(\bar{D} \cdot \frac{\bar{H}}{H}) + \frac{t^2}{H}(\bar{D} \cdot \bar{t}) \right] \quad (106) \end{aligned}$$

Considerando que  $(D \cdot t) \ll H^2$  y  $S^2$  la ecuación 106 puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \Delta K_2 = & -\frac{1}{2S} \left[ 2(\bar{t} \cdot \frac{\bar{S}}{S})(\bar{D} \cdot \frac{\bar{S}}{S}) \right] + \frac{t^2}{2S^2} (\bar{D} \cdot \frac{\bar{S}}{S}) \\ & - \frac{1}{2H} \left[ 2(\bar{t} \cdot \frac{\bar{H}}{H})(\bar{D} \cdot \frac{\bar{H}}{H}) \right] + \frac{t^2}{2H^2} (\bar{D} \cdot \frac{\bar{H}}{H}) \quad (107) \end{aligned}$$

En el caso de movimientos puros traslacionales en plano  $(x, y)$  la diferencia de camino geométrico estará dada por la ecuación 102, en el cual para este tipo de movimiento  $\Delta K_2 = 0$ , de modo que:

$$\Delta = \Delta K_1 = \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{H}\right) (D_x x + D_y y) \quad , \quad (108)$$

donde  $\bar{D} = D_x i + D_y j$  y  $\bar{t} = x i + y j$ , considerando desplazamiento a lo largo del eje  $x$  la ecuación 108 puede

reescribirse como:

$$\Delta = \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{H}\right) D_x x \quad , \quad (109)$$

y el lugar geométrico de las franjas estará dado cuando  $\Delta = (n+1/2)\lambda$  donde  $n$  es el orden de la franja de donde la magnitud  $D_x$  está dada como:

$$D_x = \left[ \frac{\lambda}{\left(\frac{1}{S} + \frac{1}{H}\right) \Delta x} \right] \quad . \quad (110)$$

De manera similar cuando se tiene desplazamiento puro en el eje  $y$ , es decir,  $D_x = 0$ , se tiene que:

$$D_y = \left[ \frac{\lambda}{\left(\frac{1}{S} + \frac{1}{H}\right) \Delta y} \right] \quad . \quad (111)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz y  $\Delta x$  y  $\Delta y$  son las separaciones entre franjas.

En el caso de traslación axial pura se tiene que  $\bar{D} \bar{t} = 0$  y la diferencia de camino geométrico dada por la ecuación 102 se escribe como:

$$\Delta = \Delta K_2 \quad , \quad (112)$$

ya que para este caso  $\Delta K_1 = 0$ . Reescribiendo la ecuación 112 se tiene :

$$\Delta = -\frac{1}{2S} \left[ 2(\bar{t} \cdot \frac{\bar{S}}{S}) (\bar{D} \cdot \frac{\bar{S}}{S}) \right] - \frac{1}{2H} \left[ 2(\bar{t} \cdot \frac{\bar{H}}{H}) (\bar{D} \cdot \frac{\bar{H}}{H}) \right] \\ + \frac{t^2}{2S^2} (\bar{D} \cdot \frac{\bar{S}}{S}) + \frac{t^2}{2H^2} (\bar{D} \cdot \frac{\bar{H}}{H}) \quad , \quad (113)$$

en este caso  $\bar{D} = D_z k$ ,  $\bar{S}/S = -\cos\theta_i i + \sin\theta_i k$ ,  $\bar{H}/H = \cos\theta_s i + \sin\theta_s k$  y  $\bar{t} = xi + yj$ .

Sustituyendo estos valores en la ecuación 113 se tiene que:

$$\Delta = -\left(\frac{1}{2S}\right) [2(x\cos\theta_i)(D_z \sin\theta_i)] + \left(\frac{x^2+y^2}{2S^2}\right) [D_z \sin\theta_i] \\ -\left(\frac{1}{2H}\right) [2(-x\cos\theta_s)(-D_z \sin\theta_s)] + \left(\frac{x^2+y^2}{2H^2}\right) [D_z \sin\theta_s] \quad (114)$$

$\delta$

$$\Delta = -\left(\frac{D_z}{2}\right) \left(\frac{\sin 2\theta_i}{S} + \frac{\sin 2\theta_s}{H}\right) x + \left(\frac{D_z}{2}\right) \left(\frac{\sin\theta_i}{S^2} + \frac{\sin\theta_s}{H^2}\right) (x^2 + y^2) \quad (115)$$

El lugar geométrico de las franjas estará dado cuando  $\Delta = (n+1/2)\lambda$ , donde  $n$  es el orden de la franja y  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz. Teniendo así que:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{Dz}{2}\right) \left(\frac{\sin\theta_i}{S^2} + \frac{\sin\theta_s}{H^2}\right) (x^2 + y^2) \\ & - \left(\frac{Dz}{2}\right) \left(\frac{\sin 2\theta_i}{S} + \frac{\sin 2\theta_s}{H}\right) x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \end{aligned} \quad (116)$$

ó bien

$$A(x^2 + y^2) + Bx = C \quad , \quad (117)$$

donde

$$A = \frac{Dz}{2} \left( \frac{\sin\theta_i}{S^2} + \frac{\sin\theta_s}{H^2} \right) \quad ,$$

$$B = - \frac{Dz}{2} \left( \frac{\sin 2\theta_i}{S} + \frac{\sin 2\theta_s}{H} \right) \quad ,$$

y

$$C = \left( n + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad .$$

La ecuación 117 es la ecuación de un círculo con centro en  $(-B/2A, 0)$  y radio  $R = (1/2A)[B^2 + 4AC]^{\frac{1}{2}}$ .

Ahora para el caso especular en que se tiene el patrón de círculos centrado en el origen  $(0,0)$  se tiene que :

$$(B/2A) = 0 \quad \text{es decir:} \quad \theta_i = -\theta_s \quad \text{y} \quad S = H \quad .$$

En este caso la ecuación de los círculos 117 se reescribe como:

$$x^2 + y^2 = (C/A') \quad , \quad (118)$$

donde

$$|A'| = (\sin\theta_i/S^2)|D_z| \quad ,$$

y el radio de los círculos estara determinado por :

$$R' = [C/|A'|]^{1/2} \quad , \quad (119)$$

y la magnitud del desplazamiento longitudinal estará dada como:

$$D_z = [(n+1/2)\lambda S^2]/[(\sin\theta_i)(x^2 + y^2)] \quad . \quad (120)$$

En el caso en que se observe en una posición diferente a la especular donde  $\theta_i = \theta_s$  se tienen círculos con centro en  $(-B/2A, 0)$  y radio  $R = (1/2A)[B^2 + 4AC]^{1/2}$  definidos por la ecuación 117. Si se tiene una posición de observación, a decir  $\theta_s = \pi/2$  y se desea tener círculos concéntricos al igual que en el caso de observación especular, se introduce un desplazamiento adicional en dirección al eje x, esto es ya que los círculos están centrados en  $(-B/2A, 0)$ .

La ecuación 116 se escribe como:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Dx = C \quad , \quad (121)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{D_z}{2} \left( \frac{\sin\theta_i}{S^2} + \frac{\sin\theta_s}{H^2} \right) \quad , \\ B &= -\frac{D_z}{2} \left( \frac{\sin 2\theta_i}{S} + \frac{\sin 2\theta_s}{H} \right) \quad , \end{aligned} \quad (122)$$

$$D = \left( \frac{1}{S} + \frac{1}{H} \right) D_x \quad ,$$

$$C = (n+1/2)\lambda \quad .$$

La ecuación 121 es la ecuación de la familia de círculos con centro en  $(-(B+D)/2A, 0)$  y radio  $R' = (1/2A)[(B+D)^2 + 4AC]^{1/2}$  ahora la condición para tener los círculos centrados para la posición de observación deseada se tiene que  $B+D$  sea igual con cero, es decir:

$$\left( \frac{1}{S} + \frac{1}{H} \right) D_x - \frac{D_z}{2} \left( \frac{\sin 2\theta_i}{S} + \frac{\sin 2\theta_s}{H} \right) = 0 \quad (123)$$

ó bien

$$D_x = \left[ \frac{\left( \frac{\sin 2\theta_i}{S} + \frac{\sin 2\theta_s}{H} \right)}{2 \left( \frac{1}{S} + \frac{1}{H} \right)} \right] D_z \quad . \quad (124)$$

Si  $H = 2S$  y  $\theta_s = \pi/2$  entonces la ecuación 124 puede

escribirse como:

$$D_x = [\sin 2\theta_i / 3] D_z \quad (125)$$

La ecuación 124 permite saber la magnitud del desplazamiento adicional en  $x$  en términos del desplazamiento longitudinal  $D_z$ . La ecuación 125 es en el caso particular donde  $\theta_s = \pi/2$  y la distancia del objeto al punto de observación es igual a dos veces la distancia del punto de iluminación al objeto, i.e.  $H = 2S$ .

En este caso particular, una vez introducido el desplazamiento  $D_x$  dado por la ecuación 125 en donde, teniendo  $\theta_s = \pi/2$  y  $H = 2S$ , i.e. círculos centrados en  $(0,0)$ , se tiene que la magnitud del desplazamiento longitudinal puede cuantificarse de la ecuación 121 y considerando la condición 125 se tiene que:

$$D_z = \frac{2(n+1/2)\lambda S^2}{[\sin\theta_i + 1/4]r^2} \quad (126)$$

donde  $r^2 = x^2 + y^2$ .

En la figura 16 se muestra la geometría para el caso de inclinación.

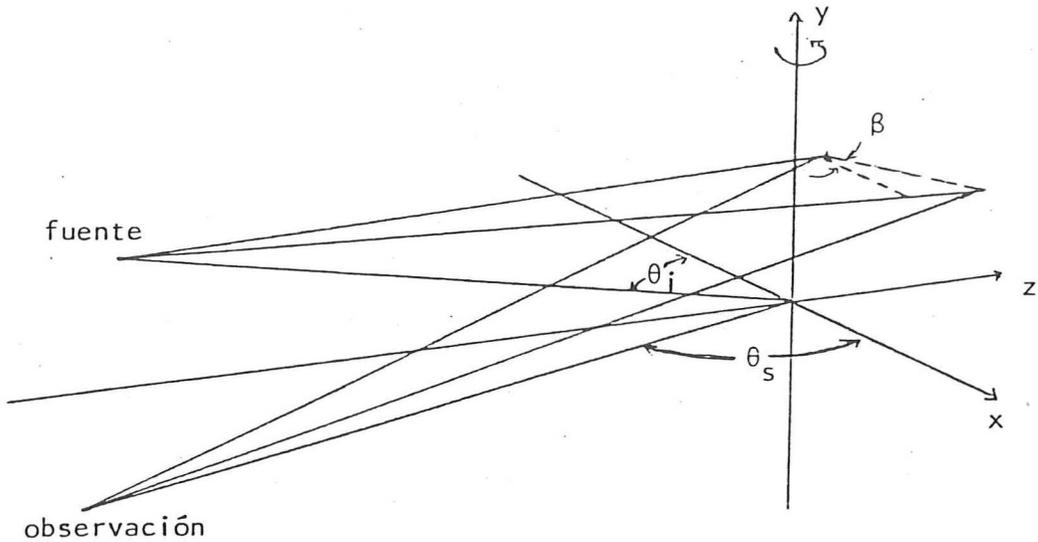


FIGURA 16 Geometría para el análisis de la diferencia de camino geométrico en el caso de inclinación.

En este caso, es decir, rotación respecto al eje "y" del sistema de coordenadas, se tiene que la diferencia de camino geométrico esta dada por la ecuación 102 como:

$$\Delta = \Delta K_1 + \Delta K_2 \quad , \quad (127)$$

en este caso  $\Delta K_2 = 0$  y la ecuación 127 puede escribirse como:

$$\Delta = \Delta K_1 = K_1(x, y) - K_1(0, 0) \quad , \quad (128)$$

donde  $K_1(x, y)$  esta dada por la ecuación 100 como:

$$K_1(x, y) = \left( \frac{1}{S} + \frac{1}{H} \right) \left[ (\bar{D} \cdot \bar{t}) + \frac{D^2}{2} \right] - \bar{D} \cdot \left[ \frac{\bar{S}}{S} + \frac{\bar{H}}{H} \right] \quad , \quad (129)$$

de manera que para el caso de inclinación la ecuación puede escribirse como:

$$\Delta = \left( \frac{1}{S} + \frac{1}{H} \right) \left[ (\bar{D} \cdot \bar{t}) + \frac{D^2}{2} \right] - \bar{D} \cdot \left[ \frac{\bar{S}}{S} + \frac{\bar{H}}{H} \right] \quad , \quad (130)$$

considerando para el caso de rotaciones que  $K_2(0,0) = 0$  y  $K_1(0,0) = 0$  ya que  $(\bar{D} \cdot \bar{t}) = 0$  en el origen de coordenadas.

De la geometría para el caso de inclinación se tiene que el vector de desplazamiento esta dado por:

$$\bar{D} = x_0(1 - \cos\beta)i - x_0 \sin\beta k \quad , \quad (131)$$

donde  $\beta$  es el ángulo de inclinación y

$$\bar{t} = xi + yj \quad (132)$$

$$\frac{\bar{S}}{S} = -\cos\theta_i i + \sin\theta_i k \quad (133)$$

y

$$\frac{\bar{H}}{H} = \cos\theta_s i + \sin\theta_s k \quad (134)$$

Sustituyendo las ecuaciones 131, 132, 133 y 134 en la ecuación 130 se tiene que la diferencia de camino esta dada como:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{H}\right) [x_0^2(1-\cos\beta) + (x_0^2/2)(1-\cos\beta)^2 \\
 &\quad + (x_0^2/2)(\sin^2\beta)] + x_0(1-\cos\beta)\cos\theta_i \\
 &\quad + x_0\sin\beta\sin\theta_i - x_0(1-\cos\beta)\cos\theta_s \\
 &\quad + x_0\sin\beta\sin\theta_s \qquad (135)
 \end{aligned}$$

δ

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{H}\right) [2x_0^2(1-\cos\beta)] + x_0(1-\cos\beta)\cos\theta_i \\
 &\quad + x_0\sin\beta\sin\theta_i - x_0(1-\cos\beta)\cos\theta_s \\
 &\quad + x_0\sin\beta\sin\theta_s \qquad (136)
 \end{aligned}$$

Considerando inclinaciones pequeñas, i.e.  $\beta \ll 1$  tal que  $1-\cos\beta \simeq 0$  y  $\sin\beta \simeq \beta$  la ecuación 136 puede ser escrita como:

$$\Delta = x_0\beta[\sin\theta_i + \sin\theta_s] \qquad (137)$$

ahora, el lugar geométrico de las franjas está dado como:

$$\Delta = (n+1/2)\lambda \qquad (138)$$

donde  $n$  es el orden de la franja.

Sustituyendo la ecuación 138 en la 137 se tiene que:

$$\Delta x_0\beta(\sin\theta_i + \sin\theta_s) = (n+1/2)\lambda \qquad (139)$$

donde  $\Delta x_0$  es el espesor de las franjas,  $\beta$  es el ángulo de inclinación,  $\theta_i$  es el ángulo de iluminación,  $\theta_s$  es el ángulo de observación y  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz.

De la ecuación 139 se tiene que el ángulo de inclinación está dado en función del espesor de las franjas como:

$$\beta = \frac{\lambda}{\Delta x_0 (\sin \theta_i + \sin \theta_s)} \quad (140)$$

Para el caso particular donde  $\theta_s = \pi/2$ , i.e. observación a lo largo del eje óptico del sistema, se tiene que:

$$\beta = \frac{\lambda}{\Delta x_0 (\sin \theta_i + 1)} \quad (141)$$

Para el caso en que el objeto presenta rotación pura en plano, ver figura 17, se tiene que la diferencia de camino geométrico introducido por este tipo de movimiento está dado como:

$$\Delta = K_1(X, Y) = \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{H}\right) \left[ (\bar{D} \cdot \bar{t}) + \frac{D^2}{2} \right] - D \cdot \left[ \frac{\bar{S}}{S} + \frac{\bar{H}}{H} \right] \quad (142)$$

En este caso, así como en el de inclinación, se tiene que  $\Delta K_2 = 0$  y que  $K_1(0,0) = 0$ .

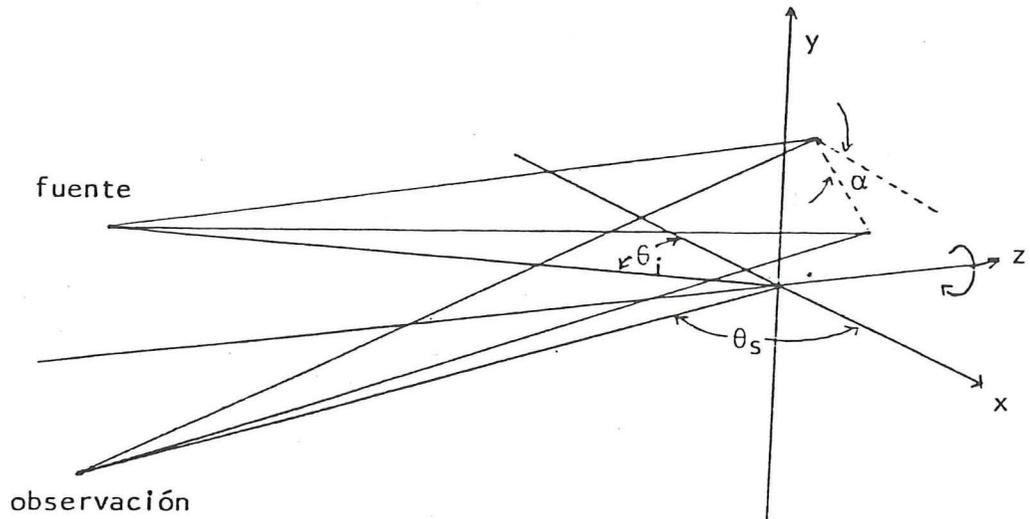


FIGURA 17 Geometría para el análisis de la diferencia de camino geométrico en el caso de rotación pura en plano.

El vector de desplazamiento  $\bar{D}$  está dado como, (ver figura 17):

$$\bar{D} = [x_0(1-\cos\alpha) - y_0\sin\alpha]i + [y_0(1-\cos\alpha) - x_0\sin\alpha]j, \quad (143)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de rotación y:

$$\bar{t} = x_i + y_j, \quad (144)$$

$$(\bar{S}/S) = (x_s/S)i + (y_s/S)j + (z_s/S)k, \quad (145)$$

$$(\bar{H}/H) = (x_h/H)i + (y_h/H)j + (z_h/H)k \quad , \quad (146)$$

donde  $x_s/S$ ,  $y_s/S$  y  $z_s/S$ , así como  $x_h/H$ ,  $y_h/H$  y  $z_h/H$  son cosenos directores de los vectores  $\bar{S}$  y  $\bar{H}$  respectivamente.

Sustituyendo en las ecuaciones 143, 144, 145 y 146 en la 142, se tiene que:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{H}\right) \{ (x_o^2 + y_o^2)(1 - \cos a) + [(x_o^2 + y_o^2)/2] \\ &\quad [ (1 - \cos a)^2 + \sin^2 a ] - 2x_o y_o (1 - \cos a) \sin a \} \\ &\quad - [x_o(1 - \cos a) - y_o \sin a][x_s/S] \\ &\quad + [y_o(1 - \cos a) - x_o \sin a][y_s/S] \\ &\quad - [x_o(1 - \cos a) - y_o \sin a][x_h/H] \\ &\quad + [y_o(1 - \cos a) - x_o \sin a][y_h/H] \quad . \end{aligned} \quad (147)$$

Considerando que el ángulo de rotación sea tal que se satisfaga la condición de que  $1 - \cos a \simeq 0$  y que  $\sin a \simeq a$  y considerando que el vector  $\bar{S}$  está en el plano x-z de manera que  $y_s = 0$ , la ecuación 147 puede ser reescrita como:

$$\Delta = y_o a [x_s/S] + y_o a [x_h/H] - x_o a [y_h/H] \quad . \quad (148)$$

Ahora si:

$$x_s/S = \cos \theta i \quad , \quad x_h/H = \cos \xi \quad y \quad y_h/H = \cos \eta \quad , \quad (149)$$

la ecuación 148 puede reescribirse sustituyendo 149 en 148 como:

$$\Delta = a\{y_0[\cos\theta_i + \cos\xi] - x_0\cos\eta\} \quad , \quad (150)$$

donde  $\xi$  es el ángulo que forma el vector  $\vec{H}$  con el eje x, y  $\eta$  es el ángulo que forma el vector  $\vec{H}$  con el eje y del sistema.

El lugar geométrico de las franjas está dado como:

$$a\{y_0[\cos\theta_i + \cos\xi] - x_0\cos\eta\} = (n+1/2)\lambda \quad , \quad (151)$$

donde esta expresión es la ecuación de familia de rectas con pendiente dada como:

$$m = \cos\eta/(\cos\theta_i + \cos\xi) \quad . \quad (152)$$

De la ecuación 151 se tiene que la magnitud de la rotación, i.e. del ángulo  $\alpha$ , está dado como:

$$\alpha = \lambda/[\Delta y_0[\cos\theta_i + \cos\xi] - \Delta x_0\cos\eta] \quad , \quad (153)$$

donde  $\Delta x_0$  es el espesor de las franjas en la dirección x,  $\Delta y_0$  es el espesor de las franjas en la dirección y,  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz,  $\xi$  es el ángulo que forma el vector  $\vec{H}$  con el eje x,  $\eta$  es el ángulo que forma el vector  $\vec{H}$ .

con el eje  $y$ , y  $\theta_i$  es el ángulo que forma el vector  $\vec{S}$  con el eje  $x$ .

En el caso particular en que  $\xi = \eta = \pi/2$ , i.e. se tiene observación sobre el eje  $z$  del sistema, se tiene que la ecuación 153 puede ser reescrita como:

$$a = \lambda / [\Delta y_0 \cos \theta_i] \quad , \quad (154)$$

teniendo franjas igualmente espaciadas perpendiculares al eje  $y$  del sistema.

## VERIFICACION EXPERIMENTAL Y ANALISIS DE ERROR

## INTRODUCCION

En esta parte se presenta la verificación experimental de lo predicho por la teoría, en lo que respecta a la variación del contraste de las franjas de interferencia y de la forma geométrica de éstas. También se presenta la corroboración teórico-experimental de la magnitud de los distintos desplazamientos a los que fué sometido el objeto bajo estudio, así mismo se presenta el análisis de error para cuantificar el error introducido en la medición de cada uno de los parámetros.

## 1) INTERFEROGRAMAS PARA MOVIMIENTOS RIGIDOS TRIDIMENSIONALES

La función  $\gamma$  (ecuación 44), que da información de la visibilidad de las franjas de interferencia, es la autocorrelación de dos funciones Bessel de primer orden, es decir,  $\gamma$  es una función Bessel de primer orden. Las funciones Bessel en el integrando de la ecuación 44 dependen de sus argumentos  $a$  y  $a'$  definidos por las ecuaciones 29 y 32.

En el análisis de la correlación de puntos homólogos de

la superficie del objeto, se tiene que  $a'$  depende de las cantidades  $f_x$ ,  $f_y$  y  $f_z$  que definen la magnitud del movimiento, así como de los distintos parámetros geométricos definidos por el arreglo óptico.

El parámetro de mayor relevancia en el estudio de la variación del contraste es el radio  $\rho$  de la abertura del sistema de observación.

La variación de  $\rho$  conduce a la variación del radio de los máximos principales de las funciones Bessel como puede verse en la ecuación 45.

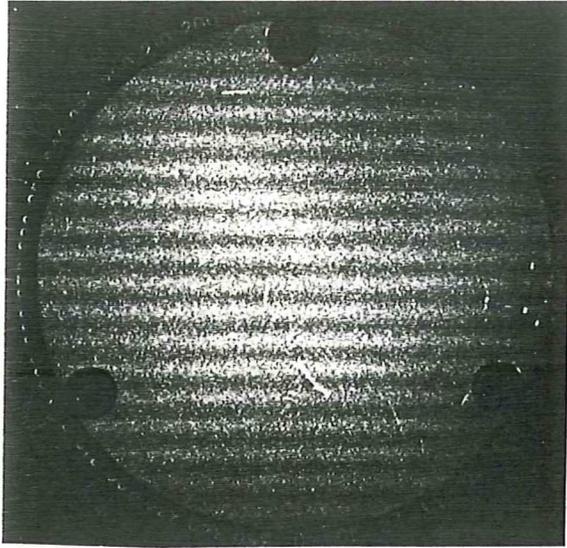
La función  $\gamma$  toma valores positivos, negativos y cero para ciertos valores de  $r$  (radio de los máximos de las funciones Bessel) hasta tener un valor de cero para el caso en que la autocorrelación sea prácticamente cero, es decir, cuando el valor de  $r$  es menor que un medio de la magnitud total del desplazamiento.

En la figura 18 se muestran los interferogramas obtenidos al efectuar un movimiento de traslación puro en plano. Las franjas son líneas rectas perpendiculares al eje sobre el cual se efectuó la traslación. Este tipo de franjas son una familia de rectas con igual espaciamento entre si definidas por las ecuaciones 110 y 111. El contraste de las franjas, en este caso, disminuye al aumentar el radio de la abertura, hasta obtener una inversión del contraste, como se puede ver en la figura 18.

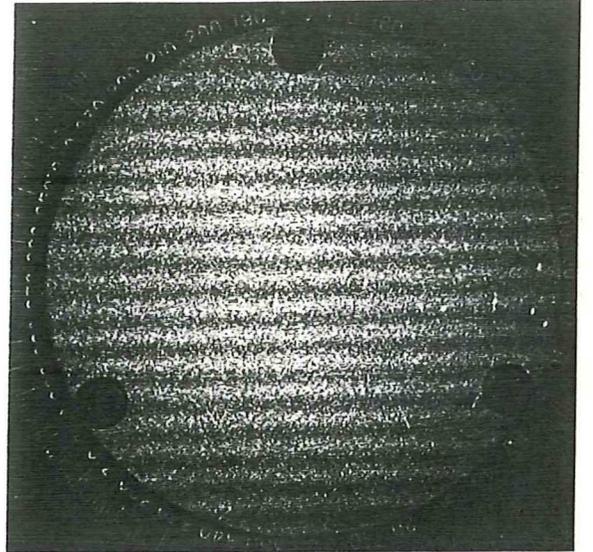
Para el caso de traslación pura longitudinal se tiene que el patrón de franjas son círculos concéntricos cuya posición depende básicamente de la posición del sistema de observación, como se presenta en la ecuación 117. En este caso se tiene que el contraste de las franjas varía uniformemente sobre toda la superficie del objeto, dependiendo del valor  $\frac{P_i}{m}$  como se tiene en la ecuación 51. En la figura 19 se tienen los interferogramas obtenidos en este tipo de movimiento.

En presencia de rotación pura en plano se tiene que el patrón de interferencia son franjas rectas con pendiente  $m$  dada por la ecuación 152. La variación del contraste para este tipo de movimiento se presenta en forma de anillos de inversión de contraste, estos anillos son concéntricos y su radio aumenta al disminuir  $\rho$ , teniendo así un alto contraste en el patrón de franjas. En la figura 20 se presentan los interferogramas obtenidos para éste tipo de movimiento y se observa la variación del contraste para diferentes valores de  $\rho$ .

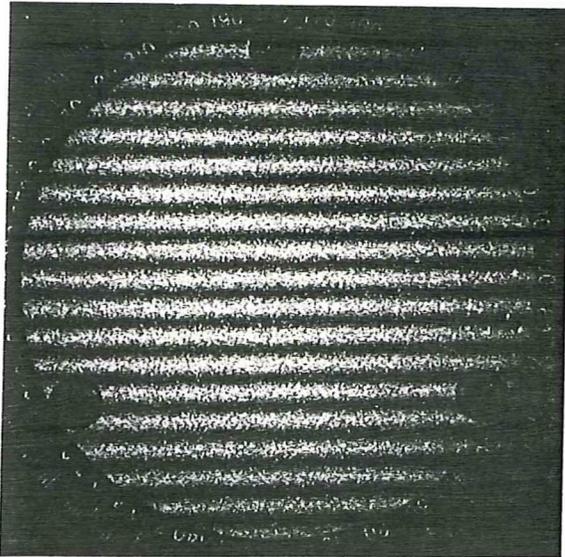
En la figura 21 se tienen los interferogramas obtenidos para el caso de inclinación y se puede ver que no existe variación en la visibilidad de las franjas al variar  $\rho$ .



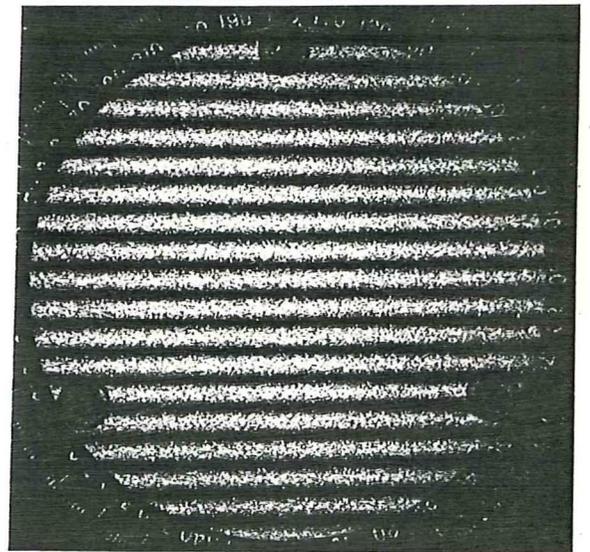
a)



b)

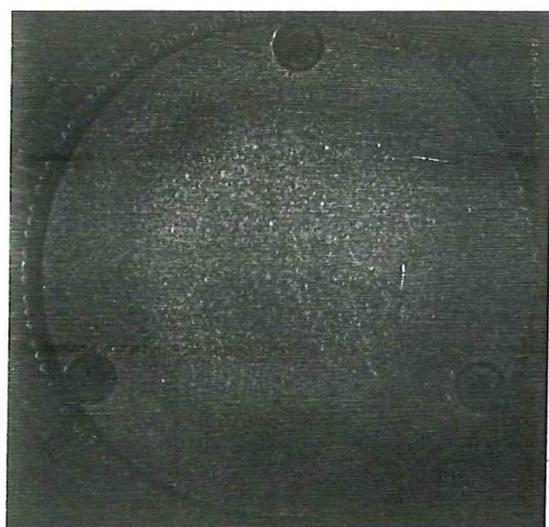


c)

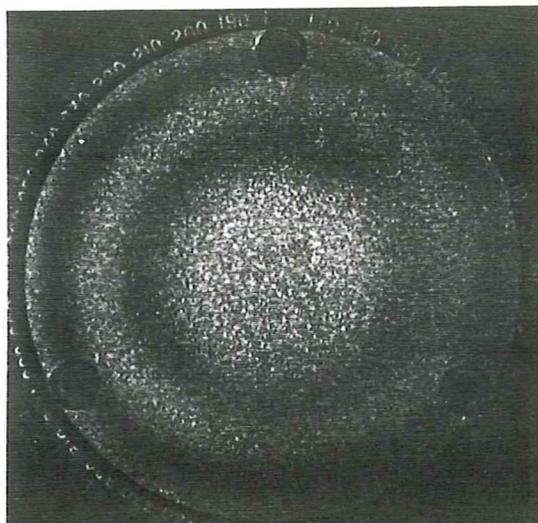


d)

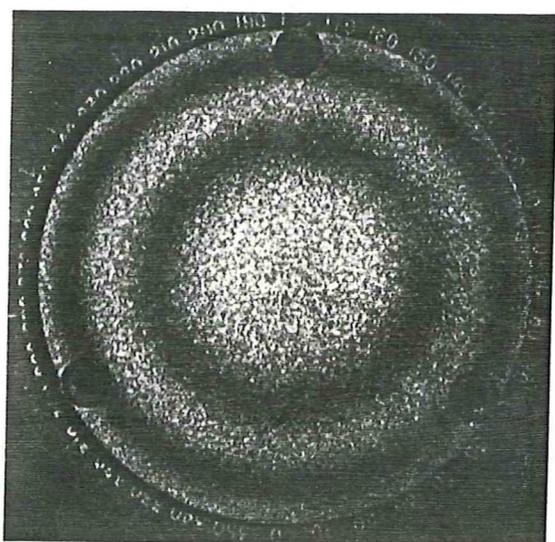
FIGURA 18 Interferogramas de traslación pura en plano para valores de a)  $\rho = 1.250$  cm., b)  $\rho = 0.625$  cm., c)  $\rho = 0.325$  cm. y d)  $\rho = 0.1563$  cm.



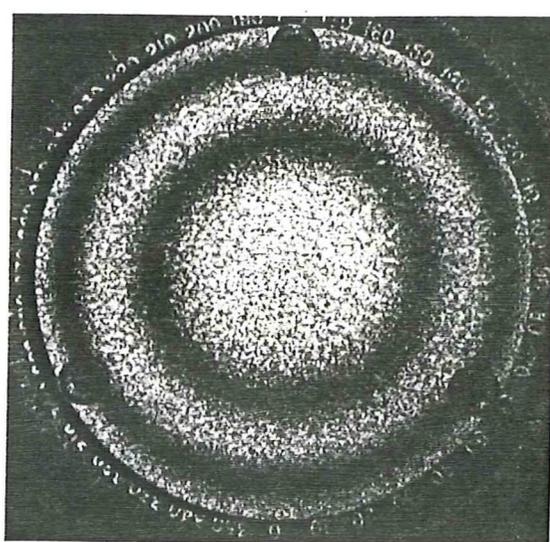
a)



b)

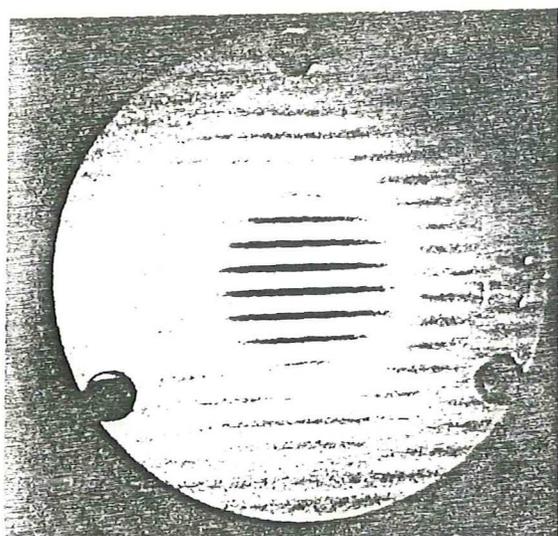


c)

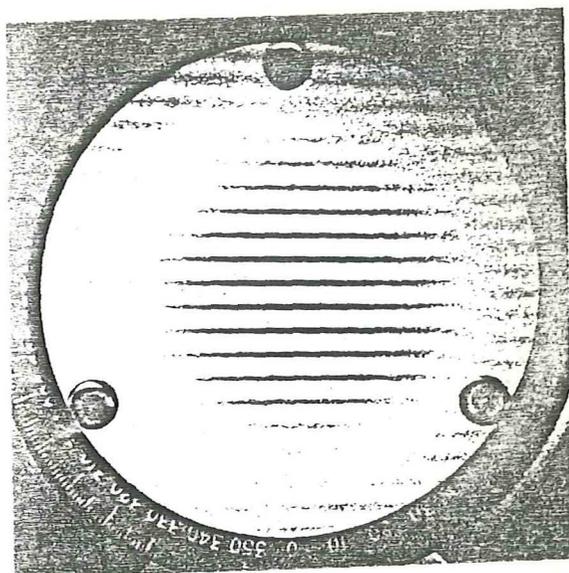


d)

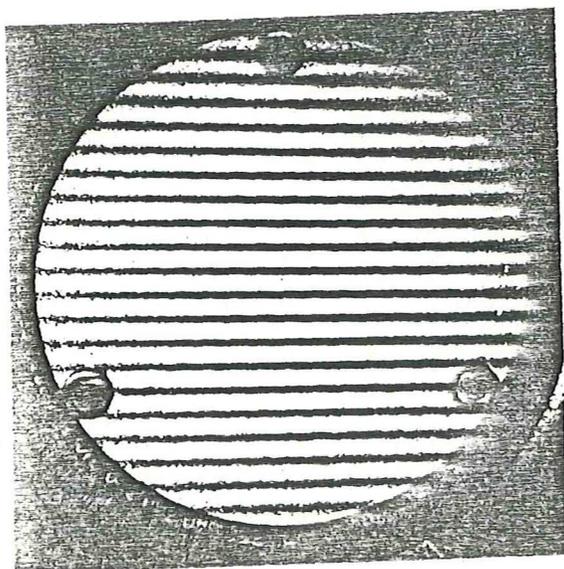
FIGURA 19 Interferogramas para el caso de traslación axial. a)  $\rho = 1.250$  cm., b)  $\rho = 0.625$  cm., c)  $\rho = 0.325$  cm., y d)  $\rho = 0.1563$  cm.



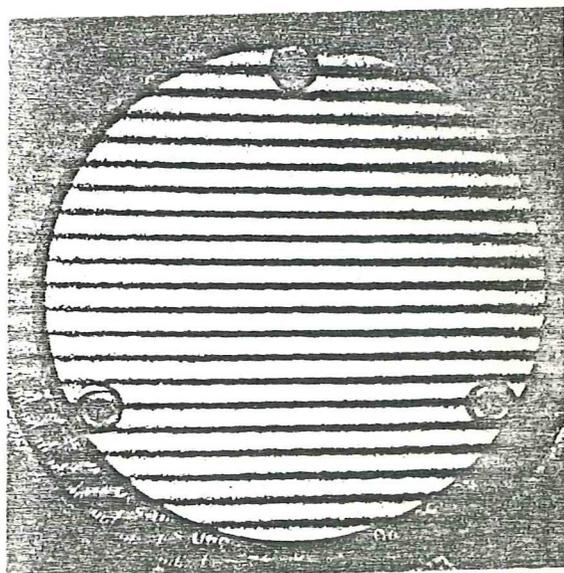
a)



b)

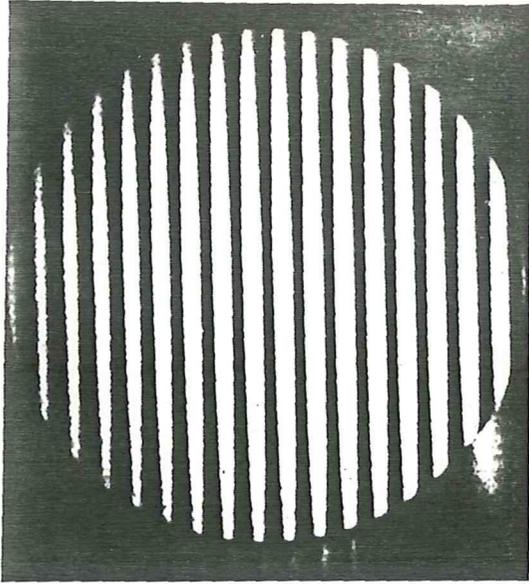


c)

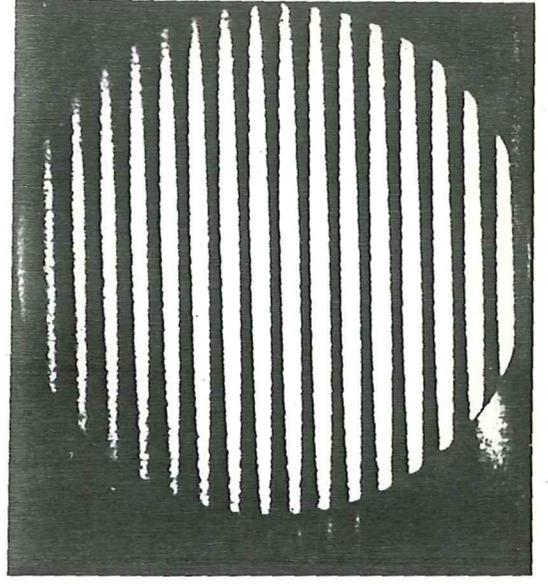


d)

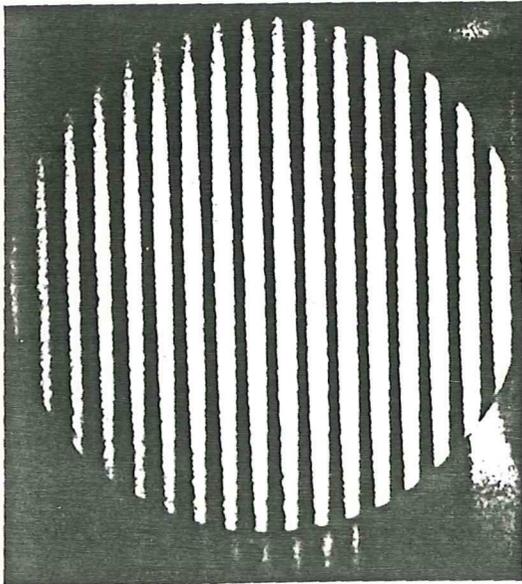
FIGURA 20 Interferogramas para el caso de rotación pura en plano. a)  $\rho = 1.125$  cm., b)  $\rho = 0.625$  cm., c)  $0.3125$  cm. y d)  $\rho = 0.1563$  cm.



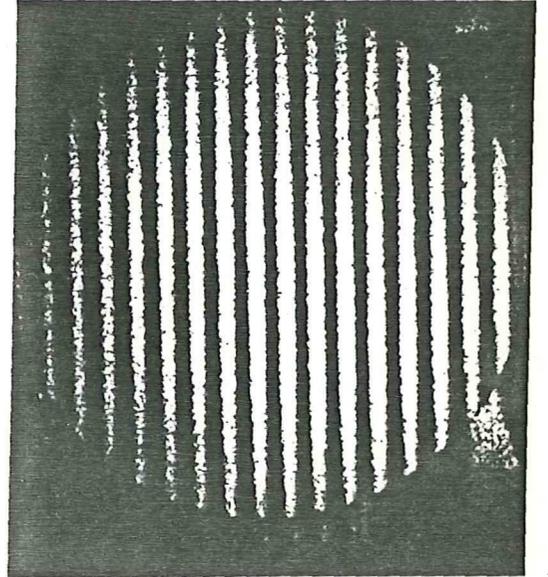
a)



b)



c)



d)

FIGURA 21

Interferogramas en presencia de inclinación. a)  $\rho = 1.125$  cm., b)  $\rho = 0.625$  cm., c)  $\rho = 0.3125$  cm. y d)  $\rho = 0.1563$  cm.

## 2) ANALISIS DE ERROR EN LA MEDICION DE LOS PARAMETROS

Se considera la función de error  $\delta f(x_1, x_2, x_3, \dots)$  dada como:

$$\delta f(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \delta x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) \delta x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) \delta x_3 + \dots \quad (155)$$

De la teoría para movimientos rígidos se tiene, para traslaciones y rotaciones, que la magnitud del movimiento está dada por las ecuaciones 110, 111, 126, 141 y 154, para el caso cuando  $H = 2S$ , como:

$$D_x = 2\lambda S / 3\Delta x \quad , \quad (156)$$

$$D_y = 2\lambda S / 3\Delta y \quad , \quad (157)$$

$$D_z = \frac{2\lambda S^2}{(\sin\theta_i + 1/4)\Delta(r^2)} \quad , \quad (158)$$

$$\beta = \frac{\lambda}{\Delta x (\sin\theta_i + 1)} \quad . \quad (159)$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\Delta y (\cos\theta_i)} \quad . \quad (160)$$

De la ecuación 155 y 156 se tiene que el error en la medición del desplazamiento  $D_x$  está dada por:

$$\delta D_x = D_x \delta S/S + D_x \delta \Delta x/\Delta x$$

ó

$$\delta D_x = D_x K_x(S) \delta S + D_x K_x(\Delta x) \delta \Delta x \quad , \quad (161)$$

y el error porcentual introducido por cada coeficiente será:

$$\varepsilon_x^S \% = K_x(S) \delta S \times 100 \quad (162)$$

y

$$\varepsilon_x^{\Delta x} \% = K_x(\Delta x) \delta \Delta x \times 100 \quad . \quad (163)$$

Así mismo para  $D_y$  se tiene de las ecuaciones 155 y 157

que:

$$\delta D_y = D_y \delta S/S + D_y \delta \Delta y/\Delta y$$

ó

$$\delta D_y = D_y K_y(S) \delta S + D_y K_y(\Delta y) \delta \Delta y \quad , \quad (164)$$

dando

$$\varepsilon_y^S \% = K_y(S) \delta y \times 100 \quad (165)$$

y

$$\varepsilon_y^{\Delta y} \% = K_y(\Delta y) \delta \Delta y \times 100 \quad . \quad (166)$$

Para el caso de desplazamiento longitudinal se tiene, de la ecuación 155 y 158, que el error para  $D_z$  está dado como:

$$\delta D_z = D_z \frac{2\delta S}{S} + D_z \frac{\delta \Delta(r^2)}{\Delta(r^2)} + D_z \frac{\cos \theta_i}{\sin i + 1/4} \delta \theta_i$$

$$\varepsilon_{\rho}^{\theta_i} \text{ \%} = K_{\rho}(\theta_i) \delta\theta_i \times 100 \quad (173)$$

Y para el caso de rotación pura en plano se tiene, de las ecuaciones 155 y 160, que la función de error está dada como:

$$\delta a = a(\delta\Delta y/\Delta y) + a \operatorname{tg}\theta_i \delta\theta_i$$

δ

$$\delta a = aK_{\alpha}(\Delta y) \delta\Delta y + aK_{\alpha}(\theta_i) \delta\theta_i \quad (174)$$

y los errores porcentuales están dados como:

$$\varepsilon_{\alpha}^{\Delta y} \text{ \%} = K_{\alpha}(\Delta y) \delta\Delta y \times 100 \quad (175)$$

y

$$\varepsilon_{\alpha}^{\theta_i} \text{ \%} = K_{\alpha}(\theta_i) \delta\theta_i \times 100 \quad (176)$$

En esta parte se analizan las variaciones de los coeficientes de error para cada tipo de movimiento y se presenta el orden de magnitud de cada uno de los errores porcentuales.

En general para traslaciones puras en plano se tiene que el coeficiente  $K_i(S)$  varía como se muestra en la figura 22.

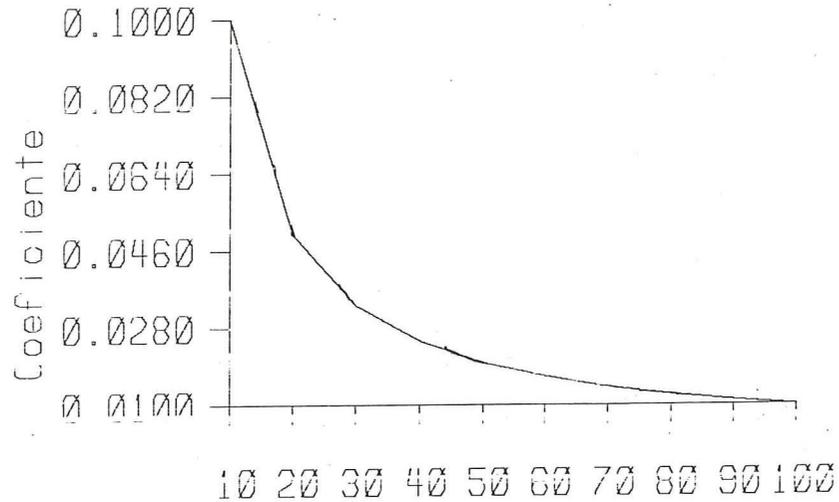


FIGURA 22 Variación del coeficiente  $K_i(S)$  respecto a la distancia Fuente-Objeto.

En la figura 22 se ve como para los valores de  $S$  entre 40 y 60 unidades el coeficiente  $K_i(S)$  es del orden de 0.02. El error en la medición para  $\delta S$  se tiene al tomar varias medidas de  $S$  como se muestra en la tabla I y se considera el error estadístico dado por:

$$\delta X = \sqrt{\frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{n}} \quad , \quad (177)$$

donde el valor de  $\delta S$  en este caso es del orden de décimos de unidad de manera que el error porcentual que se introduce al medir  $S$  es  $\varepsilon_x^S \approx (0.02)(0.04) \times 100 \approx 0.08 \%$ .

TABLA I Medición de la distancia S.

S	$\bar{S}$	$\delta\bar{S}$
51.10		
51.15	51.12	0.04
51.05		
51.15		
51.15		

De esta misma manera y para traslaciones puras en plano se tiene que el error introducido en la medición de la separación entre las franjas de interferencia está dado como  $\epsilon_x^S \% \simeq (2.4)(0.005) \times 100 \simeq 1.2 \%$ .

El error  $\delta\Delta x = 0.005$  se obtuvo haciendo varias mediciones de la separación entre las franjas de la figura 18d para desplazamiento lateral. Las mediciones se muestran en la tabla II. El factor de 2.4 es el valor del coeficiente  $K_x(\Delta x) = 1/\Delta x$  para  $\Delta x = 0.407$ .

TABLA II Medición del espesor  $\Delta x$  de las franjas de interferencia para el caso de traslacioes.

$\Delta X$	$\overline{\Delta X}$	$\delta \overline{\Delta X}$
0.405	0.407	0.005
0.410		
0.400		
0.405		
0.415		

De lo anterior se tiene que para desplazamientos en plano, el error que se tiene en la determinación de la magnitud del movimiento es aproximadamente del 2%.

Para desplazamiento longitudinal se analiza la variación del coeficiente de error para  $\theta_i$ , es decir,  $K_z(\theta_i)$  y se presenta la manera para determinar la variación  $\delta\theta_i$  en este caso, siendo el mismo procedimiento en la determinación de  $\delta\theta_i$  para el caso de rotaciones, ver figura 23.

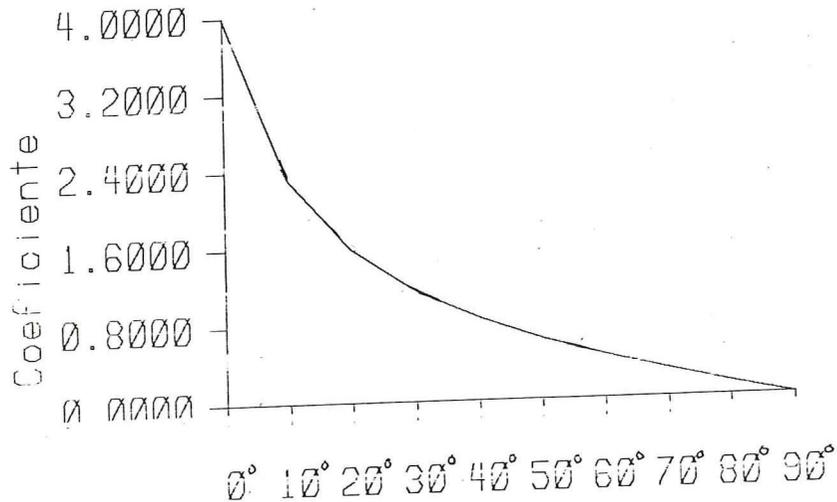


FIGURA 23 Variación del coeficiente  $K_z(\theta_i)$  para movimientos longitudinales.

De la figura 23 se puede apreciar que en el caso en que  $\theta_i$  es de  $90^\circ$  se tendrá una contribución nula de error en la medición del ángulo  $\theta_i$ , por lo que se considerarán únicamente los errores en la medición del patrón de franjas y de la medición de la distancia  $S$  (fuente-objeto).

En el arreglo experimental para este desplazamiento se tiene un ángulo de aproximadamente  $75^\circ$  y para este ángulo se tiene que el valor del coeficiente  $K_z(\theta_i)$  es de 0.21.

La determinación del error  $\delta\theta_i$  se basa principalmente en el hecho de que  $\theta_i$  puede expresarse en función de la distancia  $S$  como se muestra en la figura 24.

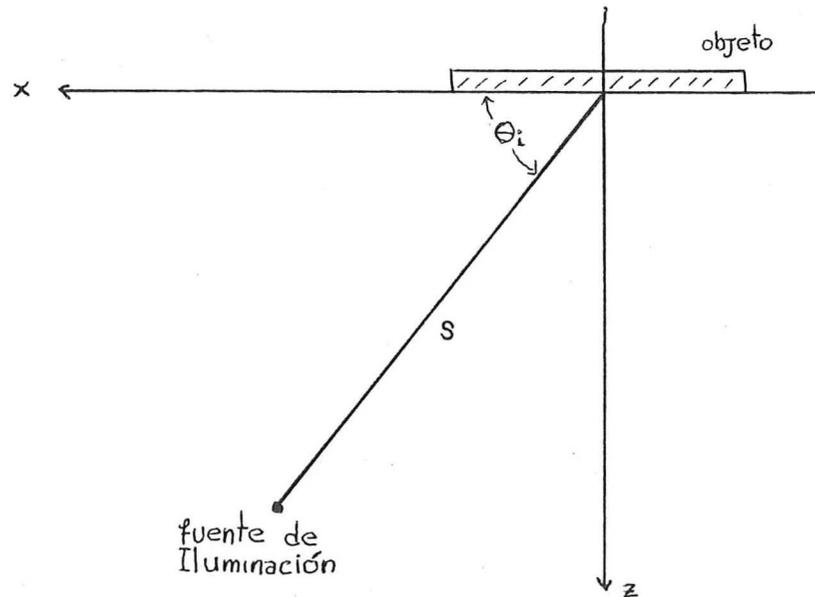


FIGURA 24 Geometría para determinar el ángulo de iluminación  $\theta_i$ .

De la figura 24 se tiene que:

$$\theta_i = \sin^{-1}(z/S) \quad , \quad (173)$$

de manera que  $\delta\theta_i$  está dada como:

$$\delta\theta_i = \frac{1}{\sqrt{1 - (Z/S)^2}} \left[ \frac{Z}{S^2} \delta S + \frac{1}{S} \delta Z \right] \quad . \quad (179)$$

En este caso  $S = 51$  cm. y  $Z = 49.3$  cm. de manera que  $\theta_i \simeq 75.17^\circ$  y  $\delta\theta_i = 0.015$  con  $\delta S = 0.1$  y  $\delta z = 0.1$ , de donde el error porcentual introducido por la medición de  $\theta_i$ , para este tipo de movimiento, está dado por  $\varepsilon_z^{\theta_i} \% = (0.21)(0.015) \times 100 = 0.315 \%$ . El coeficiente de error  $K_z(\Delta r)$ , para movimientos longitudinales, deberá ser medido con una precisión adecuada ya que de éste depende principalmente la precisión de la medición para  $D_z$ .

En el caso de inclinación se tiene de la ecuación 159 y 155 que el error introducido en la medición del ángulo  $\beta$  de inclinación, está dado por la ecuación 171 y los coeficientes de error dados por:  $K_\beta(\Delta x) = (\Delta x)^{-1}$ ,  $\delta \Delta x$ ,  $K_\beta(\theta_i) = \cos\theta_i / [\sin\theta_i + 1]$  y  $\delta\theta_i$ .

En la figura 25 se muestra la variación del coeficiente  $K_\beta(\theta_i)$  con el ángulo de iluminación  $\theta_i$ .

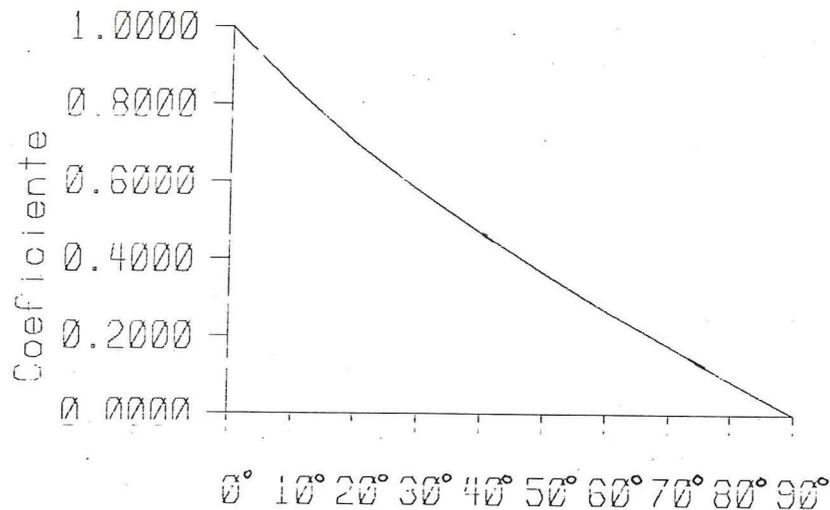


FIGURA 25 Variación del coeficiente de error para  $\theta_i$  en el caso de inclinación.

El error introducido por este coeficiente, multiplicado por la variación en la medición de  $\theta_i$ , es decir,  $\delta\theta_i$  medido como se muestra en la figura 24 y considerando las ecuaciones 178 y 179 para  $\theta_i$  y  $\delta\theta_i$  respectivamente, se tiene que  $\delta\theta_i = 0.02$  y de la figura 25  $K_\beta(76.77) \simeq 0.12$  de modo que:  $\varepsilon_\beta^{\theta_i} \% = (0.12)(0.02) \times 100 = 0.24 \%$ . En este caso  $S = 56.5$  cm. y  $Z = 55$  cm. y  $\theta_i = \sin^{-1}(z/S) = 76.77^\circ$ .

En el caso de rotación pura en plano se tiene, de la ecuación 174, que los coeficientes de error para de la separación entre las franjas  $\Delta y$  y el ángulo de iluminación  $\theta_i$  están dados como:  $K_\alpha(\Delta y) = (\Delta y)^{-1}$ ,  $\delta\Delta y$ ,  $K_\alpha(\theta_i) = \text{tg}\theta_i$  y  $\delta\theta_i$ .

La variación del coeficiente  $K_\alpha(\theta_i)$  se muestra en la figura 26 donde puede verse que en este caso el valor que toma es mayor a la unidad para el ángulo  $\theta_i = 75.17^\circ$ , siendo éste el mismo ángulo que para el caso de traslación

longitudinal determinado en la figura 24, con  $S = 51$  cm.,  $Z = 49.3$  cm. y  $\delta\theta_i = 0.015$ . donde este valor se obtiene de la ecuación 179.

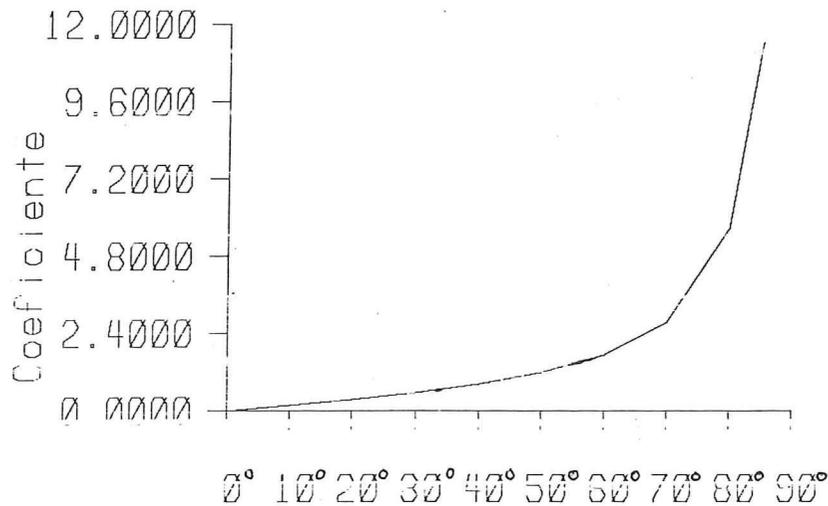


FIGURA 26 Variación del coeficiente  $K(\theta_i)$  para el caso de rotación pura en plano.

El error porcentual introducido en la medición de  $\alpha$  respecto al ángulo de iluminación será de:

$$\varepsilon_{\alpha}^{\theta_i} \% = (3.73)(0.015) \times 100 = 5.6 \%$$

Para este caso se propone, basado en la figura 26, una modificación en el arreglo geométrico, para el ángulo de iluminación, y se propone un ángulo  $\theta_i = 45^\circ$  para obtener un error porcentual de alrededor de 1.5 %.

Con el análisis anterior se tiene que el principal parámetro a medir es el espesor de las franjas de

interferencia, que como se ha visto con los demás parámetros, no se tiene un error porcentual grande o mayor del 1 %, a excepción del caso de rotación pura en plano en el que se tiene un error del 5.6 % en la medición del ángulo de iluminación, de manera que en general deberá medirse la separación entre las franjas con una exactitud que permita tener un error menor del 1 % para garantizar cierta exactitud en la medición de los desplazamientos.

En la tabla III se muestran las medidas de la separación  $\Delta y$  para desplazamientos transversales a lo largo del eje  $y$ .

TABLA III. Medición del espesor de las franjas para el caso de traslación pura en plano a lo largo del eje "y" del sistema.

$\Delta y_f$ : cm	$\overline{\Delta y_f}$	$\delta \Delta y_f$
0.425	0.42375	0.023
0.420		
0.420		
0.430		
0.425		
0.435		
0.415		
0.420		

Las mediciones del espesor  $\Delta y$  en la tabla III son tomadas de la figura 18d y medidas con un vernier calibrado.

La separación  $\Delta y_R$  real se obtiene mediante la expresión:

$$\Delta y_R = m \Delta y_F, \quad (180)$$

donde  $m$  es el factor de amplificación definido como:

$$m = d_R / d_F \quad , \quad (181)$$

donde  $d_R$  y  $d_F$  son los diámetros del objeto real y en la fotografía. En este caso  $d_F = 7.03$  cm. y  $d_R = 8.335$  cm. y  $m = 1.1856$ , de donde  $\Delta y_R = (1.1856)\Delta y_F$ , entonces:  $\Delta y_R = (1.1856)(0.42375) = 0.50241$  cm. Con este valor y haciendo uso de la ecuación 157, con  $S = 51$  cm. y  $\lambda = 0.6328$   $\mu\text{m}$ , se tiene que la magnitud del desplazamiento en  $y$  es de  $D_y = 0.428$   $\mu\text{m}$ . La fotografías fueron tomadas de un holograma de doble exposición en el cual, entre la primer y segunda exposición, el objeto se desplazó una magnitud  $D_y = 0.400$   $\mu\text{m}$ , que corresponden a 80 divisiones en el micrómetro fino de la montura Modelo ATS No. 303 de AEROTECH, INC. que se usó en el experimento. El arreglo experimental se muestra en la figura 27.

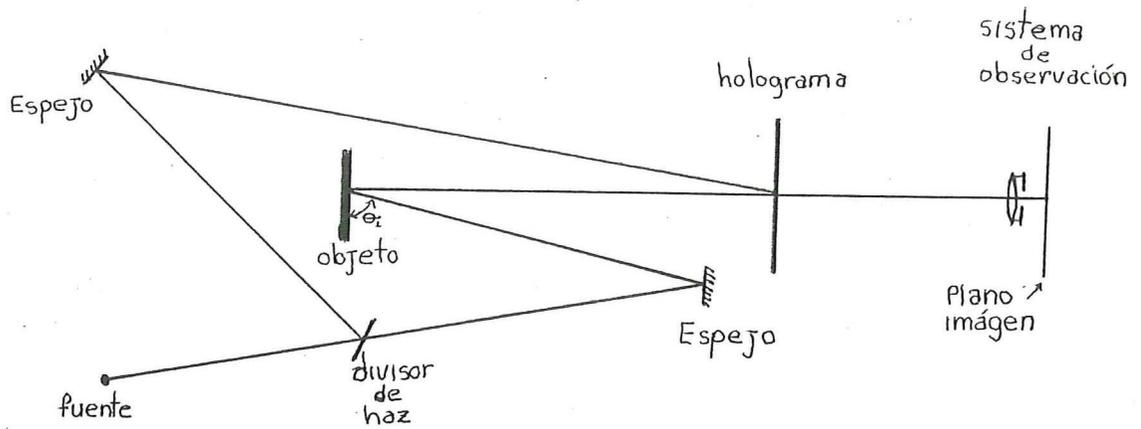


FIGURA 27 Sistema óptico utilizado para el análisis de desplazamientos rígidos.

En el caso del movimiento longitudinal se tiene, de la ecuación 158, que:

$$D_z = (0.3291) / [(1.2167) \Delta(r^2)] \quad (182)$$

donde  $S = 51$  cm.  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$  y  $\theta_i = 75.17^\circ$ .

En la tabla IV se muestran los valores para  $r'$  y  $r$  tomados de la figura 19d.

TABLA IV Valores experimentales del radio del patrón de franjas para desplazamiento axial.

$r'$ :cm.	$r$ :cm.	$\Delta(r^2) = r'^2 - r^2$	$\delta\Delta(r^2)$
2.30	1.30	3.586	0.014
2.31	1.30		
2.28	1.32		
2.30	1.29		
2.30	1.30		

Tomando el valor promedio para  $\Delta(r^2)$  de la tabla IV y considerando el factor de amplificación  $m$ , dado por la ecuación 181 donde en este caso  $d = 8.335$  cm. y  $d = 6.82$  cm., se tiene que  $m = 1.22$ . El radio real de los anillos de interferencia para este caso será  $\Delta(r^2) = m\Delta(r^2)$ , de modo que  $\Delta(r^2) = (1.22)(3.586) = 4.375$ , de donde sustituyendo este valor en la ecuación 182 se tiene que:  $D_z = 0.06180$  cm.

El valor experimental para el desplazamiento longitudinal que se realizó para grabar el holograma de doble exposición fué de 576 divisiones en el micrómetro fino de la montura AEROTECH.

Cada división corresponde a  $5 \times 10^{-5}$  cm., de manera que la magnitud del desplazamiento real del objeto es de  $D_z = 0.0288$  cm.

El error entre los valores, experimental y teórico, es o menor del 1%.

Considerando el error entre  $D_z$  y  $D_z$  como:

$$\delta D_z = \sqrt{\frac{\sum_i (D_{zi} - \bar{D}_z)^2}{n}} = 0.033 \text{ } \mu\text{m.}$$

Siendo este valor la precisión en la medición del desplazamiento.

Para la medición del ángulo de inclinación se toman las medidas de la separación entre las franjas de la figura 21d, los valores de  $\Delta x_\beta$ , su promedio y el error en la medición se muestran en la tabla V.

TABLA V Valores del espesor de las franjas de interferencia para el caso de inclinación.

$\Delta x_\beta$	$\bar{\Delta x}_\beta$	$\delta \bar{\Delta x}_\beta$
0.445	0.450	0.006123
0.440		
0.460		
0.455		
0.455		
0.450		
0.455		
0.450		

El espesor de las franjas reales están dadas por  $\Delta x_R = m \Delta x_F$ , donde  $m$  se obtiene de la ecuación 181,  $d_R = 9.9$  cm. y  $d_F = 7.88$  cm., por lo que  $m = 1.2563$  de manera que  $\Delta x_R = 0.5654$  cm.

Considerando este valor y sustituyendo en la ecuación 159 con  $\theta_i = 76.77^\circ$  se tiene que  $\beta = 5.6717 \times 10^{-5}$  rad.

El ángulo de rotación respecto al eje y que se efectuó

al tomar el holograma de doble exposición es de 10 divisiones al micrómetro fino, que corresponden a  $7.225 \times 10^{-5}$  rad., donde  $\delta\beta = 0.7766 \times 10^{-5}$  rad. y que corresponde al error teórico y experimental de 1.6 segundos de arco.

Para el caso de rotación pura en plano se toman los valores de la separación entre las franjas con la figura 20d.

Los valores se muestran en la tabla VI.

TABLA VI Medición del espesor de las franjas en el caso de rotación pura en plano.

$\Delta y$	$\overline{\Delta y}$	$\delta\overline{\Delta y}$
0.360	0.3625	0.0035
0.360		
0.365		
0.360		
0.365		
0.360		
0.370		
0.360		

Para este caso el factor de amplificación  $m$  es de:  $m = 1.208$ , donde  $d = 8.335$  cm. y  $d = 6.9$  cm., de manera que sustituyendo estos valores en la ecuación 180 se tiene que  $\Delta y_R = (1.208)(0.3625) = 0.4379$  cm.

Tomando este valor y sustituyéndolo en la ecuación 160 y considerando  $\theta_i = 75.17^\circ$  y  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m.}$ , la magnitud del ángulo de rotación será de  $\alpha = 5.646 \times 10^{-4}$  rad.

El ángulo de rotación en plano que se efectuó para

grabar el holograma de doble exposición fue de  $\alpha = 5.779 \times 10^{-4}$  rad., que corresponde a un error teórico-experimental de  $\delta\alpha_{r-E} = 0.0665 \times 10^{-4}$  rad., es decir,  $\delta\alpha = 1.372$  segundos de arco.

## 1) INTERFEROMETRO HOLOGRAFICO PARA LA VERIFICACION DE MOVIMIENTOS RECTILINEOS MICROMETRICOS

Existen instrumentos de mecánica fina tales como los microposicionadores y monturas mecánicas con movimientos lineales, es decir, movimientos sobre un eje, en los que se requiere que no efectúen otro tipo de movimiento al llevar a cabo su movimiento axial.

Una técnica clásica para verificar éste tipo de movimientos es la interferometría. En este caso se deben realizar tres medidas interferométricas para la verificación de los movimientos en los tres ejes ortogonales, es decir, los ejes x, y y z del sistema cartesiano de coordenadas.

En el presente trabajo se usa la interferometría de holograma de tiempo real con la que, debido a la naturaleza tridimensional de la holografía, solamente se requiere un sistema óptico para la verificación de los tres movimientos ortogonales, así como de movimientos de rotación en las tres posibles direcciones, es decir, rotación en plano e inclinaciones.

En los capítulos anteriores se presenta el análisis teórico y experimental de movimientos rígidos tridimensionales en los cuales se estudia con detalle la función de correlación de los frentes de onda difractados

por el objeto antes y después de sufrir algún tipo de movimiento, y se presentan las relaciones matemáticas con las que es posible cuantificar la magnitud del desplazamiento que sufrió el objeto.

En esta parte se presenta el análisis de un interferómetro holográfico de tiempo real que es sensible principalmente a las traslaciones ortogonales. El objetivo de este interferómetro es el determinar movimientos transversales no deseados al efectuar un movimiento de traslación pura axial. En la figura 28 se muestra la geometría del arreglo utilizado.

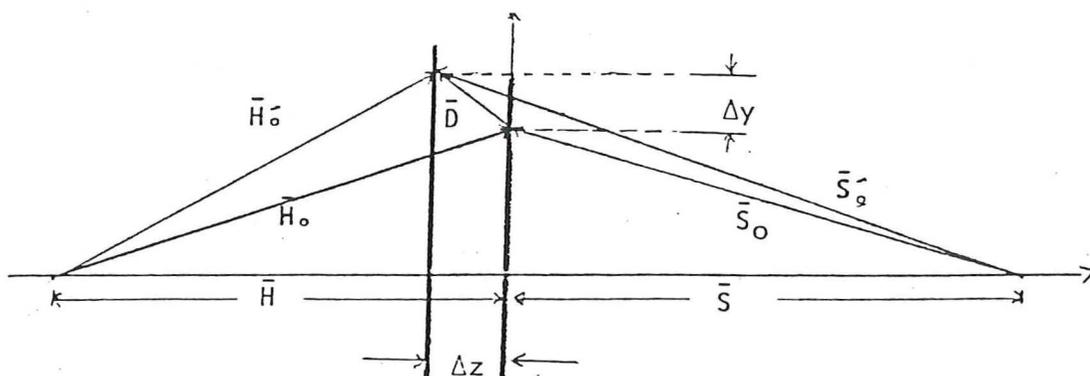


FIGURA 28 Geometría del arreglo para el interferómetro holográfico en la verificación de movimientos puramente axiales para monturas de traslación.

Las condiciones de trabajo de este interferómetro serán:

- Quando la distancia entre la fuente de iluminación y el objeto es igual a la distancia del objeto al sistema de observación, es decir, cuando  $S = H$ , siendo en este caso

sensible solamente a movimientos transversales y b) Cuando la distancia entre la fuente de iluminación y el objeto es diferente a la distancia del objeto al sistema de observación, es decir,  $S \neq H$ . En este caso se determina cuantitativamente el desplazamiento axial.

El análisis de la correlación entre puntos homólogos de la superficie es con el fin de tener una visibilidad aceptable en el patrón de franjas y así poder realizar adecuadamente las mediciones, y la diferencia de trayectoria óptica para determinar la forma geométrica de las franjas de interferencia. Con estos análisis se determina el intervalo de funcionamiento de este aparato.

La distribución de intensidad en el plano imagen está dada por la ecuación 43, del capítulo dos, como:

$$\langle (V_1 + V_2)(V_1 + V_2)^* \rangle = 2I_0(1 + \gamma \cos \theta), \quad (183)$$

donde  $\theta$  y  $\gamma$  están dadas por las ecuaciones 77 y 44 del capítulo dos.

Del análisis de la diferencia de camino óptico para desplazamientos transversales y longitudinales se tiene que el lugar geométrico de las franjas está dada por la suma de las ecuaciones 107 y 108 como:

$$\left(\frac{1}{S} + \frac{1}{H}\right)D_x x + \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{H}\right)D_y y + (D_z/2) \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{H^2}\right)(x_0^2 + y_0^2) = m\lambda \quad . \quad (184)$$

En esta ecuación se puede observar que cuando  $S = H$  el término que contiene a  $D_z$  desaparece, quedando únicamente los términos que contienen a  $D_x$  y a  $D_y$  con lo que se tiene, en este caso, sensibilidad para movimientos transversales, determinando así la magnitud del vector de desplazamiento  $\bar{D}$ .

En el caso en que  $S \neq H$  se puede determinar tanto el desplazamiento transversal como el longitudinal. Para movimientos puramente laterales la magnitud del vector de desplazamiento estará dado como:

$$\bar{D} = [ D_x^2 + D_y^2 ]^{\frac{1}{2}} \quad , \quad (185)$$

y para movimientos puramente axiales  $\bar{D}$  está dado por la ecuación 51 del capítulo dos, como:

$$|D| = \left( \frac{D_z}{H_0} \right) |P_0| \quad , \quad (186)$$

donde  $|P_0| = [x_0^2 + y_0^2]^{\frac{1}{2}}$ .

En ambos casos la distancia del máximo principal de las funciones Bessel al primer cero está dado por:

$$r = \frac{0.61\lambda H_0}{\rho} \quad , \quad (187)$$

como puede verse esta distancia es inversamente proporcional al radio de la abertura del sistema de observación. El

contraste de las franjas de interferencia puede cambiarse al variar el radio de la abertura ya que variando  $\rho$  varía la correlación de las dos funciones Bessel. Analizando los argumentos de estas funciones se ve como se pierde la correlación de los dos frentes de onda cuando se tienen diferencias de trayectorias ópticas aceptables. Con esta consideración se determina el intervalo de trabajo del interferómetro.

En la figura 29 se muestra el sistema cuando  $S = H$ , es decir, cuando la fuente y el vértice de la abertura de entrada del sistema de observación están en los focos de una elipse.

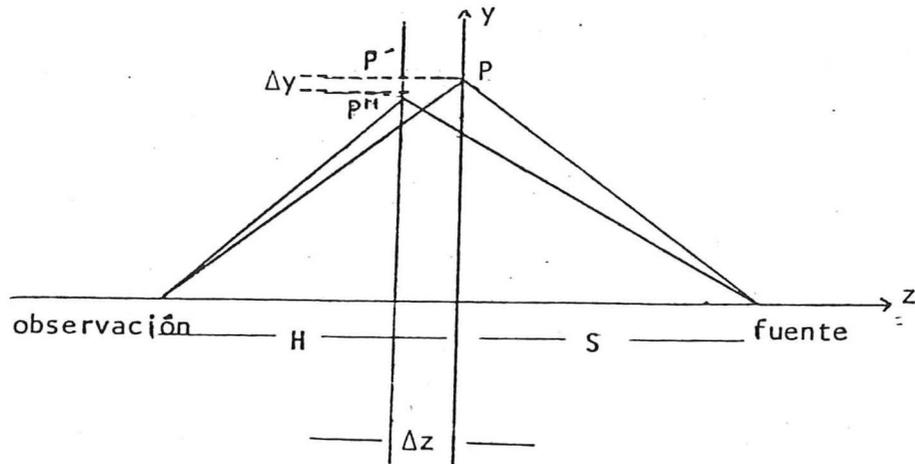


FIGURA 29 Diagrama que muestra la geometría del interferómetro en el caso cuando la fuente y el sistema de observación están en los focos de una elipse.

Por definición de la elipse se tiene que la diferencia de trayectoria, entre el punto P y cualquier otro punto P''

que esté sobre la curva, es cero. Para un desplazamiento longitudinal  $\Delta z$  del objeto, no se tendrán franjas de interferencia, si  $\Delta y$  es muy pequeño de tal manera que el punto  $P'$  esté muy cerca de la curva de la elipse. En este caso el sistema es insensible al movimiento longitudinal.

Para encontrar el intervalo en que se cumple esta condición, se deben comparar las diferencias de trayectorias ópticas con la cual se obtiene la primer franja de interferencia.

De la figura 29 se tiene que la diferencia de trayectoria óptica (OPD) entre los puntos  $P', P''$  y  $P', P$  es la misma y esta dada por:

$$OPD = sP' - sP'' + P'h - P''h = \overline{N_1P'} + \overline{N_2P'} \quad , \quad (188)$$

donde:

$$\overline{N_1P'} = \Delta y P [P^2 + (S - \Delta z)^2]^{\frac{1}{2}}$$

y

$$\overline{N_2P'} = \Delta y P [P^2 + (H + \Delta z)^2]^{\frac{1}{2}} \quad .$$

(189)

Considerando  $\Delta z \ll S$  y  $\Delta z \ll H$  y sustituyendo las ecuaciones 189 en la 188 se tiene que:

$$\Delta = \Delta y P \left[ \frac{1}{(P^2 + S^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(P^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad , \quad (190)$$

y tomando en cuenta que  $P^2 \ll S^2$  y que  $P^2 \ll H^2$ , la ecuación 190 se puede reescribir como:

$$\Delta = \Delta y P \left[ \left( \frac{1}{S} + \frac{1}{H} \right) \right] \quad (191)$$

El lugar geométrico de las franjas está dado como  $\Delta = (n+1/2)\lambda$ . En el caso en que se tenga la primer franja en el campo, es decir,  $n = 1$ , se tiene:

$$\Delta y = \frac{\lambda SH}{2P(S + H)} \quad (192)$$

y cuando se cumple la condición  $S = H$  se tiene:

$$\Delta y = \lambda H / 4P \quad (193)$$

De la figura 29 se tiene que los puntos  $P$  y  $P''$  tienen coordenadas  $(0, P)$  y  $(\Delta z, y)$  respectivamente de modo que  $P'' - P = (\Delta z, y) - (0, P) = (\Delta z, y - P)$ .

El punto  $P''$  debe cumplir con la ecuación de la elipse dada por:

$$(y/P)^2 + (\Delta z/H)^2 = 1 \quad (194)$$

de donde,  $y = (P/H) [H^2 - \Delta z^2]^{1/2}$ , de modo que  $|P''P|^2 = \Delta z^2 + \{P - (P/H)[H^2 - \Delta z^2]^{1/2}\}^2 = \Delta z^2 + \Delta y^2$ , así que:

$$\Delta y = P - y = P - P[1 - (\Delta z/H)^2]^{1/2} \quad (195)$$

Desarrollando en series de Taylor el radical de la ecuación 195, y despreciando los términos mayores al cuadrático, la ecuación 195 puede ser escrita como:

$$\Delta y \simeq P\Delta z^2/2H^2 \quad (196)$$

de donde

$$\Delta z = H(2\Delta y/P)^{1/2} \quad (197)$$

Sustituyendo el valor de  $\Delta y$  de la ecuación 193 en la 197, se tiene:

$$\Delta z = H(\lambda H/2P^2)^{1/2} \quad (198)$$

La separación entre los máximos de las funciones Bessel para movimiento longitudinal está dada como  $D = \Delta z(P/H)$ . Esta distancia no debe ser mayor que dos veces la distancia del máximo principal al primer mínimo de la función, es decir,  $D < 2r = 2(0.61\lambda H_0/\rho)$ . Esto es con el fin de que el máximo de una función coincida con el primer mínimo de la otra.

Del análisis anterior se tiene que  $\Delta z$ , para tener una correlación apropiada, debe ser:

$$\Delta z = \frac{1.22\lambda H_0^2}{P\rho} \quad (199)$$

La expresión 199 es la magnitud del intervalo de trabajo del interferómetro holográfico. En la tabla VII se muestran los distintos valores del intervalo  $\Delta z$  en función de los valores del radio  $\rho$  de la abertura del sistema de observación, en este caso  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ ,  $H_0 = 100 \text{ cm}$ . y  $P = 2.5 \text{ cm}$ .

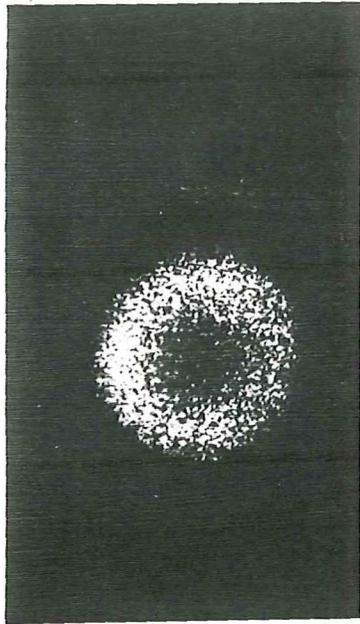
TABLA VII Valores del intervalo de trabajo para el interferómetro holográfico en función del radio de la abertura del sistema de observación.

$\rho:\text{cm}$	$\Delta Z:\text{cm}$
1.7857	0.173
1.2500	0.247
0.8929	0.346
0.6250	0.494
0.4464	0.694
0.3125	0.988
0.2273	1.358
0.1563	1.976

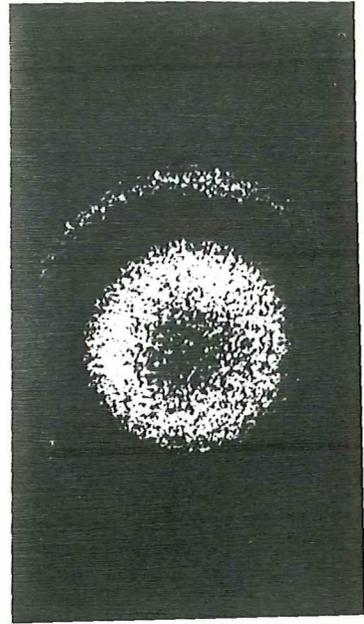
En este caso se tiene un intervalo mayor para valores pequeños de  $\rho$ , con los cuales se presenta un alto contraste en el patrón de franjas de interferencia, teniendo así

capacidad de cuantificar con mayor precisión las magnitudes de desplazamientos laterales no deseados al realizar el movimiento axial.

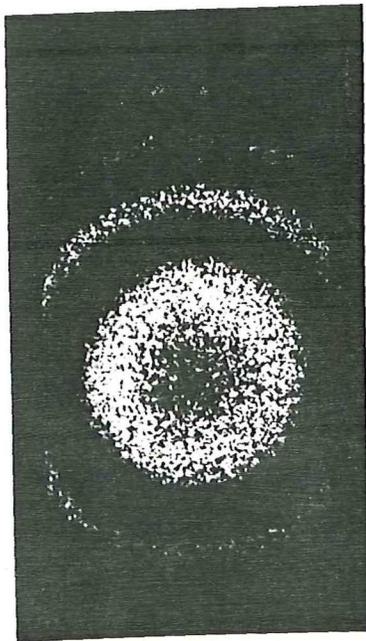
En la figura 30 se tiene el interferograma obtenido en el interferómetro para la posición  $S = 2H$  teniendo círculos concéntricos ya que se observa a lo largo del eje óptico. En la figura 31 se tiene que para la condición de observación  $S = H$  no se presentan franjas de interferencia, tal como se predice por la teoría.



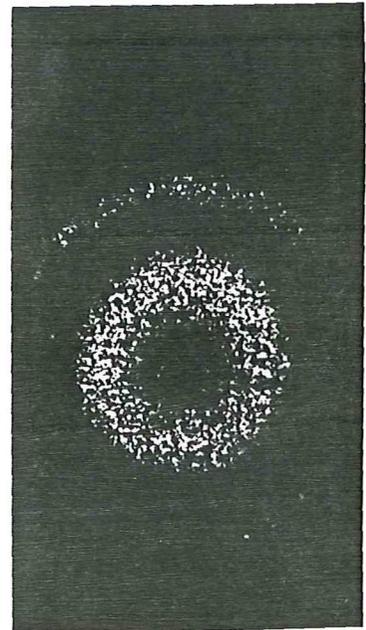
a)



b)



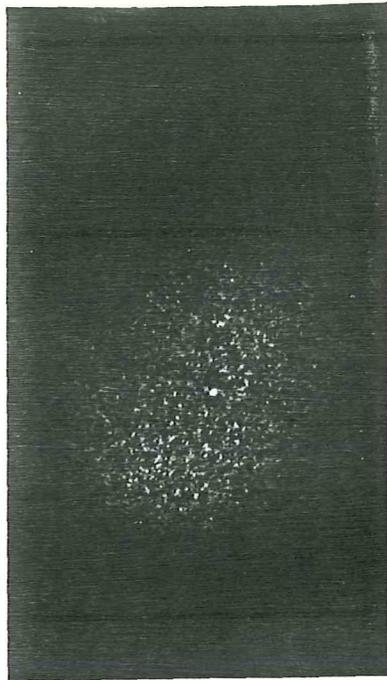
c)



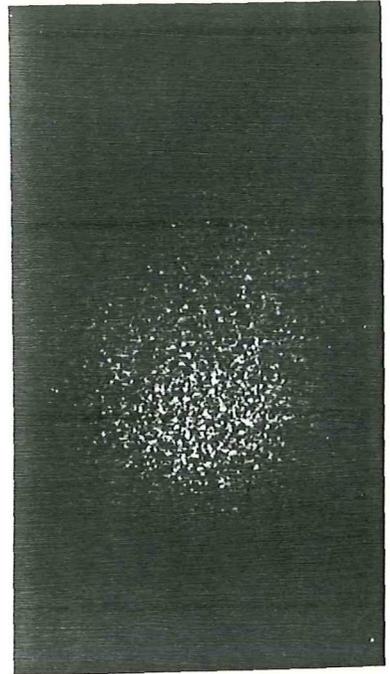
d)

FIGURA 30

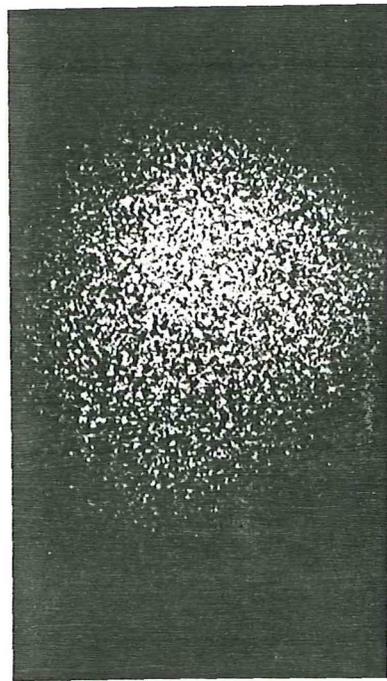
Interferogramas para el caso de  $S = 2H$  para distintos valores de  $\rho$ .



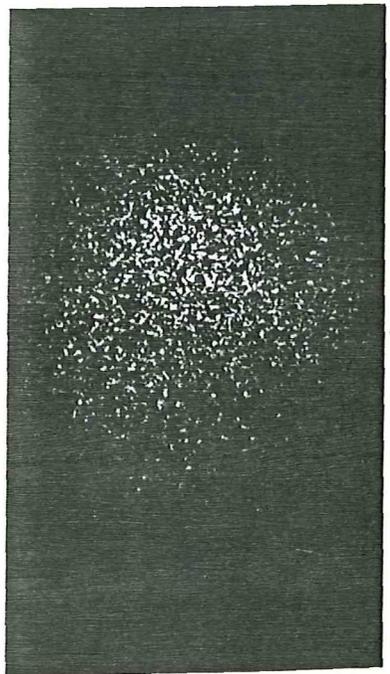
a)



b)



c)



d)

FIGURA 31

Interferogramas en el caso  $S = H$  para el cual no se tienen franjas de interferencia.

## CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha presentado un análisis riguroso de movimientos rígidos tridimensionales utilizando interferometría de holograma. Se han obtenido las expresiones matemáticas de la función de correlación de los patrones de speckle superpuestos holográficamente, así como las relaciones de los argumentos de las funciones Bessel, con el fin de estudiarlos adecuadamente para cada tipo de movimiento.

Los resultados obtenidos son muy satisfactorios ya que están en completo acuerdo con la teoría. Los errores teóricos y experimentales son muy pequeños, a decir, en general son menores del 5%.

Del análisis anterior se propuso un sistema, un interferómetro holográfico, cuya principal función es la de verificar movimientos puros longitudinales. Las condiciones de trabajo del aparato predichas por la teoría concuerdan con los resultados experimentales, y con esto se garantiza su funcionamiento.

LITERATURA CITADA

- 1 R. V. Tamez. Tesis de licenciatura, Nov. 3, 1983.
- 2 H. M. SMITH, Principles of Holography. Wiley Interscience (1969).
- 3 J. W. GOODMAN, Introduction to Fourier Optics. McGraw Hill N. Y.(1968), Caps. 2 y 5.
- 4 M. BORN , E. WOLF, Principles of Optics. Pergamon Press, (1980), Caps. 7 y 8.
- 5 K.A STETSON, Optik: 29, 386, Optik: 31, 579. (1970).
- 6 H.K. LIV , K.L. KURTZ, Optical Engineering, Vol 16 No. 2. 1977. N.L. HECHT, J.E. MIRANDI, D. LEWIS , R.L. FOSEK, Applied Optics Vol 11. 1973.
- 7 M. L. CELAYA B., Contraste de Franjas en Interferometría de holograma, IEEE, MEXICON 79.
- 8 M. CELAYA, D. TENTORI, L. CELAYA, Fringe Contrast Dependence on the Imaging System Aperture Stop in Hologram Interferometry J. OPT. SOS AM 60: 1478. (1979).
- 9 M. CELAYA , D. TENTORI, Analisis of Speckle Correlation in Hologram Interferometry to Distinguish Rigid Body Rotations, Applied Physics. 219. (1981).