CENTRO DE INVESTIGACION
CIENTIFICA Y DE
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA

ESTUDIO DE ESTRUCTURAS HEXAPORTALES APLICABLES A ANALIZADORES DE REDES DE MICROONDAS

TESIS
DOCTOR EN CIENCIAS

ALEJANDRO DUENAS JIMENEZ

ENSENADA,BAJA CALIFORNIA,MEXICO.JUNIO DE 1993.

RESUMEN de la tesis que Alejandro Dueñas Jiménez presenta como requisito parcial para obtener el grado de DOCTOR EN CIENCIAS en FISICA APLICADA con opción en ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES. Ensenada, Baja California, México. Octubre de 1993.

ESTUDIO DE ESTRUCTURAS HEXAPORTALES APLICABLES A ANALIZADORES DE REDES DE MICROONDAS

Resumen aprobado: _____
Dr. Arturo Serrano Santoyo
Director de tesis

En este estudio se ha desarrollado una metodología de síntesis de estructuras hexa o *n*-portales simétricas cerradas, que son útiles para la integración de reflectómetros y analizadores de redes en hiperfrecuencias.

La técnica hace uso de consideraciones de simetría para obner la matriz de dispersión de cada junta en particular.

La matriz de dispersión es entonces transformada a matriz de admitancias para establecer las características de ambas y permitir la concepción de algoritmos de búsqueda sistemática.

Luego, con el método generalizado de sínteis por ramas aquí propuesto, se obtienen dos juntas planas de anillo y una triangular no plana que pueden utilizarse para configurar redes hexaportales compuestas.

Tres programas de computadora interactivos realizan la búsqueda de las matrices de dispersión y admitancias de estas juntas.

TESIS DEFENDIDA POR: **ALEJANDRO DUÑAS JIMENEZ**

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITE:

DR. ARTURO SERRANO SANTOYO.- Director del Comité

DR. FRANCISCO JAVIER MENDIETA JIMENEZ.- Miembro de Comité

DR. ENRIQUE GOMEZ TREVIÑO.- Miembro del Comité

DR. ROBERTO MACHORRO MEJIA.- Miembro del Comité

DR. MANUEL MIRABAL GARCIA.-Miembro de Comité

M.C. JAIME SANCHEZ GARCIA.- Jefe Depto. Electrónica y Telecomunicaciones

DR. LUIS EDUARDO CALDERON AGUILERA.- Director de Estudios de Posgrado

5 DE OCTUBRE DE 1993

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA
Y DE EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA

DIVISION DE FISICA APLICADA

DEPARTAMENTO DE ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES

ESTUDIO DE ESTRUCTURAS HEXAPORTALES APLICABLES A ANALIZADORES DE REDES DE MICROONDAS

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisistos necesarios para obtener el grado de Doctor en Ciencias presenta:

ALEJANDRO DUEÑAS JIMENEZ

Ensenada, B. C., México, Octubre de 1993

DEDICATORIA

CON TODO MI AMOR A MI ESPOSA

Y A MIS HIJOS

Angélica del Rocío,

Alejandro y Rocío

AGRADECIMIENTOS

A MI TUTOR

Dr. Arturo Serrano Santoyo

(Una vez más, por su direcciòn)

A LOS MIEMBROS DE MI COMITE DE TESIS

Dr. Francisco Javier Mendieta Jiménez

Dr. Enrique Gòmez Treviño

Dr. Roberto Machorro Mejía

Dr. Manuel Mirabal García

(Por su asesoría)

A MI AMIGOS Y COLEGAS DEL CICESE

(Por su camaradería)

A TODO EL PERSONAL ACADEMICO, TECNICO Y DE SERVICIOS GENERALES DEL CICESE

(Por su ayuda)

AL CONACYT

(Por su apoyo económico)

CONTENIDO

		Página
I.	INTRODUCCION	1
I.1	*Origen del estudio*	1
I.2	*Antecedentes históricos*	9
I.3	*Objetivo del estudio*	13
I.4	*Estructura del trabajo*	14
II.	CONCEPTO BASICO Y CRITERIOS DE DISEÑO	16
II.1	*El acoplador de seis puertos*	16
II.2	*Especificaciones del hexapuerto*	17
III.	REPRESENTACION MATRICIAL	21
III.1	*Matriz de dispersión*	21
III.2	*Modelo matemático de una estructura conocida*	25
IV.	METODO DE SINTESIS	34
IV.1	*Matriz de admitancias*	34
IV.2	*Algoritmos de búsqueda*	36
IV.2.1	*Algoritmo de búsqueda riguroso (autovalores-elementos)*	37
IV.2.2	*Algoritmo de búsqueda simple (elementos-autovalores)*	41
IV.3	*Síntesis de diferentes juntas pentaportales de anillo*	42

CONTENIDO (Continuación)

		Página
V.	SINTESIS DE UN HEXAPUERTO COMO REFELECTOMETRO	48
V.1	*Redes hexaportales compuestas*	48
V.2	*Análisis del acoplador direccional hexaportal*	56
V.3	*Junta de Purcell*	61
V.4	*Derivación de los números q y las constantes A-H*	66
VI.	CONCLUSIONES	70
VI.1	*Resultados*	70
VI.2	*Aportaciones*	71
VI.3	*Perspectivas*	72
VI.4	*Recomendaciones*	73
LITERATURA CITADA		75
APENDICE A	Teoría de la reflectometría con *n*-puertos	78
A.1	*Modelo lineal de un n-puerto*	78
A.2	*Relaciones funcionales entre P y Γ para la síntesis*	84
A.3	*Relaciones funcionales entre P y Γ para la calibración con un parámetro intermedio*	85
A.4	*Relaciones funcionales entre P y Γ para la medición de impedancia en tiempo real*	88
A.5	*Relaciones funcionales entre P y Γ para la calibración con tres parámetros intermedios*	89
A.6	*Conclusiones del apéndice*	91

CONTENIDO (Continuación)

		Página
APENDICE B	Listados de los programas para la búsqueda de matrices de dispersión y admitancias	94
APENDICE C	Publicaciones asociadas al estudio	105

LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
1	Configuración básica de un analizador de redes hexaportal dual.	10
2	Relación de los vectores v e i con los vectores a y b en una línea de transmisión con impedancia característica Z_C.	17
3	Localización de Γ_{CG} en el círculo unitario.	20
4	Junta pentaportal en estrella.	25
5	Diagrama de los elementos de la matriz **S** de una junta pentaportal simétrica de anillo.	43
6	Diagrama de los autovalores relacionados a los elementos de la Fig. 5.	43
7	Juntas pentaportales de anillo para los elementos de las matrices de admitancias. (a) y (b) Ec. (56). (c) Ecs. (61) y (62).	47
8	Geometría de un acoplador direccional hexaportal.	55
9	Dependencia de la frecuencia de Re[P].	57
10	Dependencia de la frecuencia de Im[P].	58
11	Dependencia de la frecuencia de $\|P\|$.	58
12	Dependencia de la frecuencia de arg[P].	59
13	Dependencia de la frecuencia de Re[Q].	59
14	Dependencia de la frecuencia de Im[Q].	60
15	Dependencia de la frecuencia de $\|Q\|$.	60
16	Dependencia de la frecuencia de arg[Q].	61
17	Junta de Purcell.	61
18	Acoplador direccional hexaportal de la Fig. 8 con los puertos cambiados.	64

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura		Página
19	Esquema de un reflectòmetro configurado con la interconexiòn de dos acopladores direccionales hexaportales.	65
20	Alternativa del circuito de la Fig. 19.	66
21	N-puerto lineal arbitrario.	78
22	Reflectòmetro de cuatro puertos para la mediciòn del coeficiente de reflexiòn en el DBP (Γ_{CG}). Γ_M es la relaciòn vectorial de los voltajes en los brazos laterales de los acopladores direccionales.	87

LISTA DE TABLAS

Tabla		Página
I	Tabla de multiplicación para el grupo de operadores de simetría de la estrella.	26
II	Tabla de multiplicación para el grupo de operadores de simetría de la junta de Purcell.	62

ESTUDIO DE ESTRUCTURAS HEXAPORTALES APLICABLES A ANALIZADORES DE REDES DE MICROONDAS

I. INTRODUCCION

I.1 Origen del estudio

Aunque la misma descripciòn circuital básica se aplica tanto a la electrònica de altas frecuencias como a la de bajas, las técnicas de mediciòn de microondas representan una disciplina casi completamente separada comparada con las mediciones en baja frecuencia.

Lo anterior se debe a que los modelos matemáticos que se utilizan para representar a los circuitos de frecuencia elevada no se pueden fundamentar en condiciones iguales o similares a las que se usan para los de baja frecuencia. En circuitos eléctricos o electrònicos de hasta 100 MHz, los bien conocidos parámetros *Y*, *Z* o *H* (modelos para elementos concentrados) basados en condiciones de circuito corto y circuito abierto funcionan adecuadamente. En circuitos de alta frecuencia, sin embargo, donde los campos electromagnéticos juegan un papel fundamental, tales condiciones son difíciles o imposibles de obtener y además, dichos campos se ven afectados al tratar de introducir un circuito corto o un circuito abierto o más aùn, una punta de prueba de un instrumento de mediciòn.

La inserciòn de cualquiera de estas tres discontinuidades en un plano terminal (de referencia) dado de una guía de onda,

destruiría el postulado de uniformidad al cual debe su existencia la teoría de circuitos de microondas.

No obstante, si se evita conectar puntas de prueba u otros medios de muestreo en el plano terminal, y se hacen mediciones en posiciones alejadas o remotas a dicho plano utilizando guías de onda de "gran" longitud y conectores de precisión, el postulado se preserva.

Como resultado de todo esto, se evidencia el hecho de que la estructura del equipo de hiperfrecuencias es enteramente diferente al de bajas frecuencias, ya que en el primero se trabaja con medios de transmisión (guías de onda, líneas de transmisión, etc.) y ondas electromagnéticas viajeras, y en el segundo; con voltajes y corrientes y las mencionadas condiciones de circuito corto y circuito abierto.

Así pues, de estos hechos se puede concluir que para todo grupo de investigación en microondas, resulta imprescindible un laboratorio de frecuencias elevadas que cuente con equipo especializado.

Sin embargo, esta necesidad indispensable es muchas veces difícil de satisfacer, dado el elevado costo de los instrumentos de medición de microondas y considerando las condiciones actuales de recursos económicos limitados.

En este contexto una alternativa que permita realizar en parte instrumentación para la investigación y la enseñanza sería muy apropiada.

El concepto de reflectometría de seis [Hoer, 1972; Engen 1972] o *n* puertos que involucra principalmente tecnología de circuitos distribuidos híbridos pasivos (combinadores/divisores de potencia - separadores de señal - acopladores de impedancia [Dueñas-Jiménez, 1986]), es una opción viable a emprenderse para substituir parcialmente algunos circuitos comerciales costosos.

De esta manera, en instituciones de educación superior (Universidades e Institutos Tecnológicos), centros de investigación (Centros SEP-CONACYT) e institutos de tecnología, estándares y metrología (Centro Nacional de Metrología-CENAM), se podrían integrar a menor costo y con alta fiabilidad, reflectómetros y analizadores de redes para ondas centimétricas, milimétricas y submicrométricas.

El sistema automático básico de medición en microondas cuyo instrumento principal es el Analizador de Redes Automático (ARA), esta constituido por los siguientes equipos:

- Generador de barrido o sintetizador de frecuencias

- Frecuencímetro (opcional)

- Atenuadores

- Desfasadores

- Conmutadores

- Filtros

- Línea de comunicación común (ducto de propósito general GPIB IEEE Standard 488)

- Controlador/procesador (minicomputadora o computadora personal con interfaz IEEE-488 y su programación para interpretar lenguajes de alto nivel como Basic, Fortran, Turbo-Pascal, C, etc.)

El ARA a su vez se divide en tres secciones compuestas por las opciones que a continuación se indican:

Sección de separación de señal

- Acoplador direccional dual (conectado como reflectómetro o como divisor de potencia)

- Red de dos hexapuertos (conectados como reflectómetros de seis puertos)

- Puente y divisor de potencia

- Sondas de alta impedancia

Sección de detección de señal

- Receptor escalar de banda ancha para medir sólo las magnitudes los parámetros de dispersión (sin conversión de frecuencia)

- Receptor vectorial de banda angosta para medir las magnitudes y fases de los parámetros de dispersión (con conversión de frecuencia a típicamente 278 GHz)

- Medidores de potencia con múltiples detectores

Sección de visualización de señal

- Visualizador de Bode

- Visualizador polar

- Visualizador de impedancia (Carta de Smith)

- Impresora-graficadora

- Graficador X-Y

Con todos estos antecedentes y refiriéndose a la sección de separación de señal, es entonces posible incidir en la con-

cepción y construcción de redes de dos hexapuertos para la integración de ARAs como una alternativa de substitución a los instrumentos comerciales heterodinos.

Algunas de las ventajas y desventajas más evidentes de los sistemas analizadores de redes estructurados con reflectómetros de seis puertos son las siguientes:

VENTAJAS

- Uso de detectores de potencia (magnitud) simples, tales como diodos, bolómetros o termistores.

- Sólo una fuente o generador de barrido es necesaria.

- El uso de diodos como detectores permite prescindir de la amplificación de la señal del generador.

- No es necesaria la conversión de frecuencia ni el mezclado o modulación por lo que no se requieren fuente de frecuencia intermedia (FI) ni detectores de fase. La fase se obtiene de los datos de magnitud medidos.

- La precisión se debe principalmente a la linealidad y resolución de los detectores de potencia y no a su intervalo dinámico. Con termistores se compara a la de los comerciales heterodinos.

- No es necesario utilizar brazos o cables flexibles entre los reflectómetros y el bipuerto en medición.

- Técnicas de autocalibración se pueden aplicar fácilmente utilizando sólo un stándar de calibración, cuando no se requiere determinar los ángulos de fase de los parámetros S_{12} y S_{21}.

- No es necesaria la recalibración inmediata.

- Muestran gran estabilidad.

- Pueden trabajar a frecuencias más altas. Hasta las bandas de la óptica con circuitería apropiada.

- No requieren componentes de precisión.

- Son capaces de medir los cuatro parámetros S en una sola inserción lo cual elimina los errores de conmutación y reconexión.

- Son relativamente fáciles de automatizar.

- Son más pequeños y portátiles y pueden integrarse con una alta calidad.

- Son fáciles de reproducir.

- Generan un modelo exacto.

- Se construyen en redundancia lo cual genera sistemas sobredeterminados.

DESVENTAJAS

- La técnica está limitada a un intervalo dinámico interno de 50 a 60 dB con una posible extensión hasta 100 dB.

- Cuando se usan termistores como detectores es necesario ampli amplificar la señal del generador hasta rebasar la mínima se- señal detectable. Esto hace necesario el uso de filtros para eliminar armónicas (señales espurias).

- No generan lecturas en tiempo real.

- Sólo se pueden hacer mediciones en ancho de banda para los pa rámetros de reflexión (utilizando cartas de amplitud y fase [Kaliouby, 1984]).

En la actualidad la técnica hexaportal de medición de microondas ofrece diversas áreas abiertas a la investigación entre las que se pueden citar las siguientes:

- Desarrollo de técnicas para producir lecturas en tiempo real.

- Implementación a cada vez más altas frecuencias donde el uso de mezcladores representa un problema.

- Modelado del comportamiento de diferentes diodos para ampliar su potencial de precisión como detectores en el ámbito de un hexapuerto.

- Diseño de redes hexaportales.

- Calibración y análisis de error.

- Aplicación a mediciones pulsadas.

I.2 Antecedentes históricos

La posibilidad de utilizar estructuras combinadoras/divisoras de potencia o arreglos de las mismas como reflectómetros de *n* puertos para la medición de microondas, es un concepto que comienza a cobrar fuerza en los años setentas con la aparición del analizador de redes de dos hexapuertos (Fig. 1) [Hoer, 1977].

Aunque el concepto ya había sido puesto en práctica con la estructuración del reflectómetro de barrido de cuatro puertos, la conformación del reflectómetro sintonizado generalizado (g)

[Engen, 1959, 1960] y la integración de medidores de impedancia [Engen, 1964; Kenderessy, 1966], no es sino hasta la decada de los setentas en que aparece un estudio profundo sobre las aplicaciones y los criterios de diseño de los reflectómetros de seis puertos actuando solos y de la configuración de dos en una estructura analizadora de redes [Hoer, 1972; Engen, 1972, 1977a, 1977b].

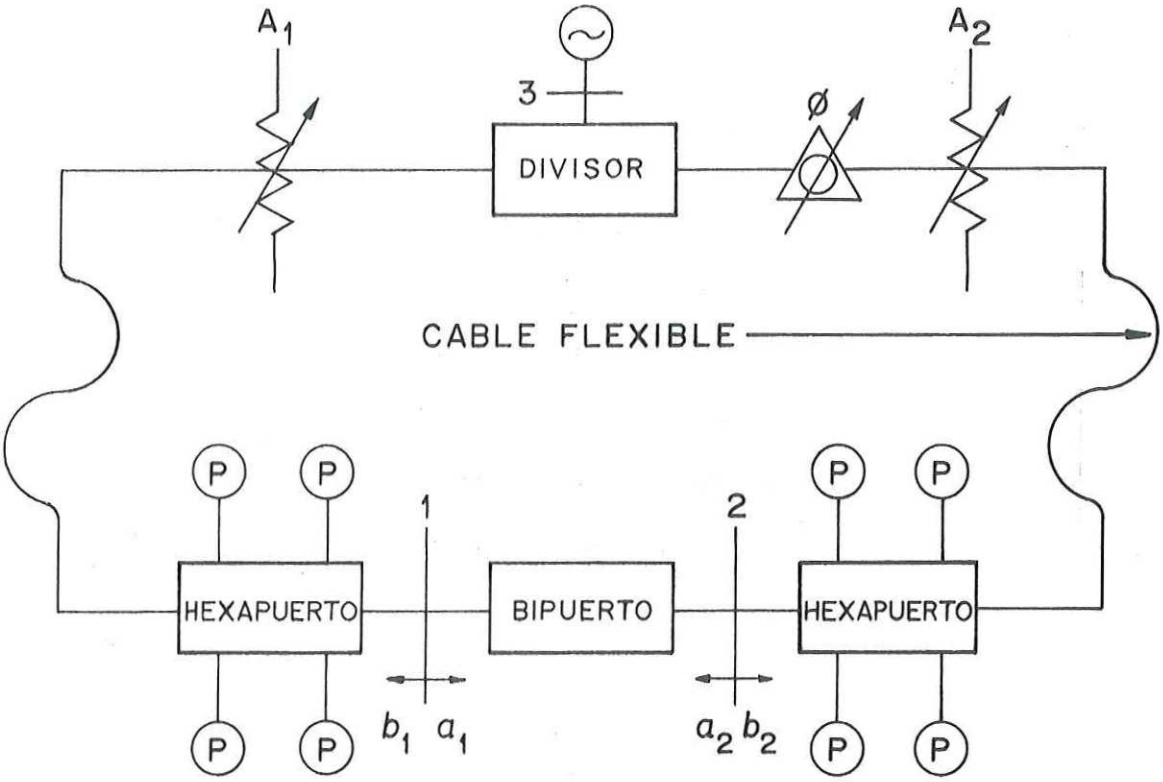

Figura 1. Configuración básica de un analizador de redes hexaportal dual.

En un principio, debido a la complejidad que representa la detección de fase en hiperfrecuencias, las técnicas de medición se enfocaron principalmente a la obtención de respuestas de vol

taje (como cantidad derivada) o potencia en magnitud. Dos ejemplos de esta técnicas son la popular línea ranurada y el reflectòmetro de cuatro puertos.

La primera de ellas permite la evaluación de la magnitud del coeficiente de reflexión en la carga $|\Gamma_{ca}|$ a través de la relación de la respuesta máxima a la respuesta mínima, y de la fase por comparación de la posición de las mínimas de la carga misma y de un circuito corto. Esta técnica sin embargo, no lleva por sí misma a la información de potencia.

El reflectòmetro por su parte en su forma más elemental, permite la caracterización de potencia y $|\Gamma_{ca}|$ pero no proporciona la información de fase.

Posteriormente, con el fin de obtener la fase de manera directa, se propusieron mediciones extras de las magnitudes de voltaje o potencia. Una técnica muy conocida presentada por Samuel (1947), es la que hace uso de la línea ranurada con derivaciones (de varias tomas) la cual permite la medición de Γ_{ca} en magnitud y fase con el uso de detectores adicionales.

Todas esta técnicas sin embargo, generan errores debido a imperfecciones en los componentes del sistema (e. g. directividad finita en los acopladores direccionales, ruido y no linealidadd en los detectores, etc.) lo cual da como resultado incertidumbres en las lecturas finales.

La precisión de estos sistemas de medición depende entonces de que tan bien se cumplen las especificaciones de diseño.

Con el advenimiento del reflectòmetro sintonizado, algunos

de estos errores se eliminaron y un funcionamiento más cercano a lo ideal fue logrado a expensas de introducir sensibilidad a la frecuencia y un gasto mayor de tiempo en el ajuste de los parámetros del sistema.

Luego, con la aparición de los esquemas de detección de fase por conversión de frecuencia, la sintonía se hizo innecesaria y se obtuvo también una reducción substancial en los errores, sin embargo, en estos sistemas los procesos de conversión de frecuencia son complicados y se hace necesario contar con una fuente muy estable en frecuencia con lazo de amarre de fase.

Con la llegada para finales de los años sesentas, de los sistemas automatizados basados en técnicas digitales, y cuya introducción comercial fue en los años setentas, los analizadores de redes automáticos hacen su aparición. En esta misma época se introdujo un giro en la estrategia de medición. A sabiendas de que el trabajo dedicado a la obtención de estructuras con características cercanas al ideal no era compensado por los resultados, se decidió dejar a un lado el diseño y construcción de instrumentos y sistemas con especificaciones muy rigurosas, trabajando en cambio con estructuras imperfectas en las que se reconocen sus fallas y se eliminan a posteriori por minimización y corrección de errores en la calibración y en las mediciones.

Dentro de estos sistemas se reconocen dos esquemas:

- Analizadores de redes heterodinos

- Analizadores de redes de dos hexapuertos

La diferencia fundamental entre estos equipos radica en la sección de separación de señal. Los primeros utilizan una estructura cuatriportal constituida por un acoplador direccional dual conectado como un reflectómetro para las mediciones de reflexión, y como un divisor de potencia para las de transmisión [Anón., 1987], en tanto que en los segundos se usan configuraciones duales de hexapuertos o *n*-puertos. Además, los primeros heterodinan la señal para obtener su fase utilizando técnicas complicadas que resultan el factor predominante en el aumento de costo de tales aparatos.

I.3 Objetivo del estudio

Con lo planteado anteriormente, y en ese marco de referencia, se propone el estudio, evaluación y diseño de estructuras hexaportales originales.

Se propone además, el análisis de redes hexaportales compuestas (combinaciones de varios *n*-puertos) estructuradas bien por los hexapuertos originales, bien por otro tipo de *n*-puertos tales como divisores de potencia (Wilkinson), híbridos de cuadratura, híbridos de 180°, etc.

Con esta perspectiva, el objetivo de este estudio es obtener estructuras que cumplan con los criterios de diseño de hexa

puertos o *n*-puertos aplicables a Analizadores de Redes de Microondas generando un método de análisis y síntesis a través de una representación matricial con parámetros de impedancia, admitancia o dispersión.

I.4 Estructura del trabajo

En las páginas precedentes se han descrito los aspectos que motivaron este estudio, se ha dado una breve reseña de la evolución de las técnicas de medición en hiperfrecuencias y se ha discutido el propósito de este trabajo. Considerando lo ahí expuesto, la distribución que se ha dado a este documento es la siguiente:

En el capítulo II se presentan el concepto básico de medición y los criterios de diseño establecidos por las especificaciones de un hexapuerto como reflectómetro.

La representación matricial de estructuras simétricas obtenida a través de las teorías de ecuaciones de autovalores y de grupos, y el modelo matemático particular de una junta pentaportal se tratan en el capítulo III.

En el capítulo IV, dedicado al método de síntesis, se establecen las características de las matrices de dispersión y de admitancias, se conciben algunos algoritmos para la búsqueda sistemática de éstas y se sintetizan tres juntas pentaportales de anillo.

La síntesis y el análisis de una junta acopladora de seis

puertos, la síntesis de la junta de Purcell, la interconexión de dos juntas para formar redes hexaportales compuestas y la derivación de los números y constantes complejas que definen estas redes son conceptos que se cubren en el capítulo V.

En el capítulo VI destinado a las conclusiones, se discuten los resultados obtenidos, se destacan las contribuciones del estudio y se presentan algunas tendencias de investigación.

El modelo lineal de un *n*-puerto y varias relaciones funcionales entre los parámetros de potencia y coeficiente de reflexión se desarrollan en el apéndice A.

En el apéndice B se presentan los listados de los programas para la búsqueda de matrices de pentapuertos de anillo, con algoritmo riguroso (ESA5A) y con algoritmo simple (ESA5E), y de haxapuertos triangulares, con algoritmo simple (ES2T6E).

Por último, en el apéndice C se incorporan las publicaciones asociadas a este estudio.

II. CONCEPTO BASICO Y CRITERIOS DE DISEÑO

II.1 El acoplador de seis puertos

Como se mencionó en el capítulo anterior, los complicados procesos de mezclado en el intervalo de microondas, necesarios para obtener la fase, elevan el costo de los analizadores de redes hasta niveles no fácilmente accesibles.

Lo anterior motivó a que se buscara alguna técnica alternativa para obtener la fase sin recurrir a la heterodinación.

Desde los primeros estudios de trigonometría cuando se aprende la ley de los cosenos, se sabe que al contar con todas las magnitudes de los lados de un triángulo es posible obtener sus ángulos (fases) internos. Esta fue la idea básica que utilizó Hoer (1972) para presentar el enfoque de medición que utiliza un acoplador de seis puertos y que se desarrolló para dar lugar al hoy poderoso analizador de redes de dos hexapuertos.

Los diagramas de la Fig. 2 muestran la relación que guardan el voltaje v y la corriente i en una línea de transmisión (con impedancia característica Z_C en el plano de referencia indicado) respecto a la amplitud compleja a de la onda incidente de voltaje y a la amplitud compleja b de la onda reflejada de voltaje.

La medición de la magnitud de cualesquiera tres de los cuatro vectores (números complejos) v, iZ_C, a y b determina completamente todas las partes del parelelogramo incluyendo los ángulos de fase. Los ángulos de fase se calculan usando la ley de

los cosenos. Si se mide la magnitud de los cuatro vectores, la sensibilidad en la medición de los ángulos cercanos a 0 y 180° se incrementa grandemente, muchos cálculos se simplifican y la medición redundante proporciona una prueba de la precisión.

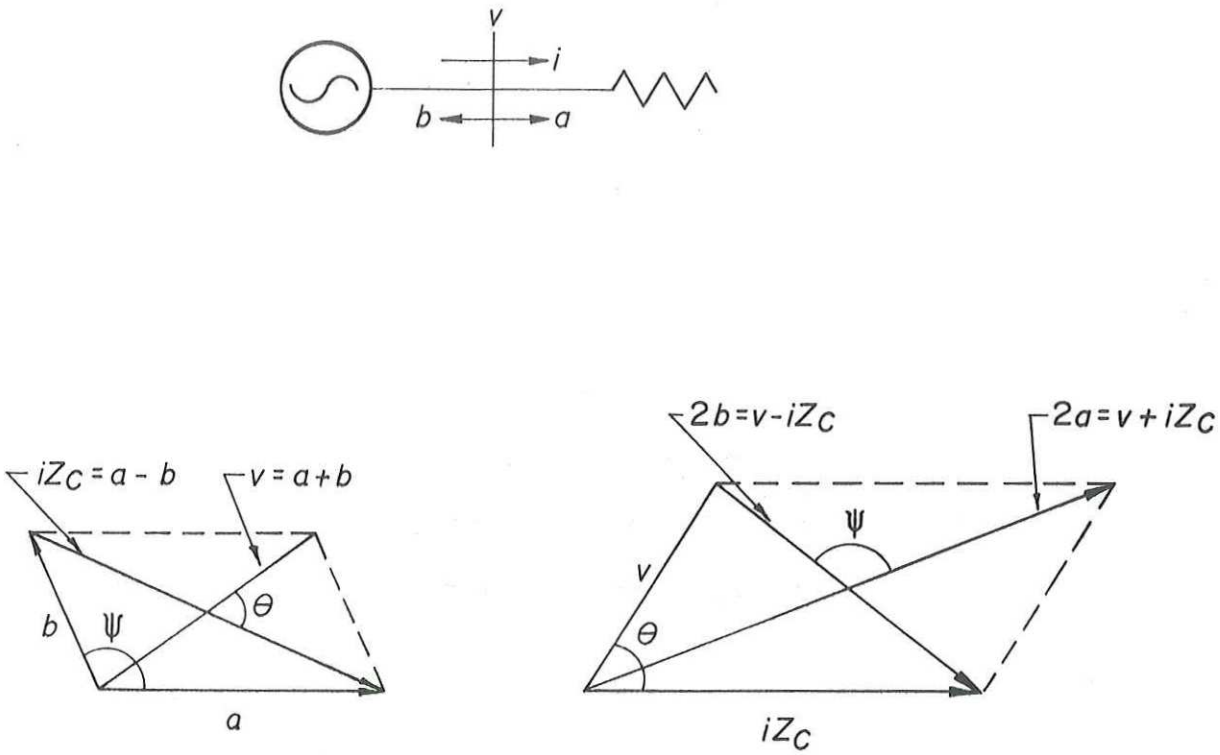

Figura 2. Relación de los vectores *v* e *i* con los vectores *a* y *b* en una línea de transmisión con impedancia Z_C.

II.2 Especificaciones del hexapuerto

Engen (1987, 1977a) da las siguientes condiciones (ideales) para el buen funcinamiento de un hexapuerto como reflectómetro:

- Acoplamiento perfecto entre el generador y el hexapuerto ($\Gamma_G = 0$, donde Γ_G es el coeficiente de reflexión en el generador.

- Utilización de un puerto para la lectura directa de la potencia incidente en el dispositivo bajo prueba (DBP) (el valor de alguna constante, A, C, E, o G igual a cero y el de las otras, determinado principalmente por la geometría de la estructura separadora de señal utilizada según se indica más adelante).

- Distrubución simétrica de los números complejos q alrededor del origen del plano Γ_{CG} (i. e., separados 120° uno de otro).

- Magnitud de los números q entre 0.5 y 1.5 (en la vecindad de cualquiera de éstos) evitando valores próximos a 1.

Estas restricciones están asociadas a un grupo de ecuaciones que describen tres círculos en el plano complejo y cuya intersección proporciona el coeficiente de reflexión (ver apéndice A, sección *A.2*).

Tales ecuaciones están dadas de la siguiente manera:

$$|\Gamma_{CG} - q_3|^2 = \frac{|D|^2}{|A|^2} \frac{P_3}{P_4}, \qquad (1)$$

$$|\Gamma_{CG} - q_5|^2 = \frac{|D|^2}{|E|^2} \frac{P_5}{P_4}, \tag{2}$$

$$|\Gamma_{CG} - q_6|^2 = \frac{|D|^2}{|G|^2} \frac{P_6}{P_4}, \tag{3}$$

donde Γ_{CG} es el coeficiente de reflexión en la carga o DBP, q_3, q_5 y q_6 son los centros de los círculos, A, E y G son constantes complejas, D es una constante de proporcionalidad y, P_3, P_4, P_5 y P_6 son lecturas de potencia.

Los valores q_3, q_5, q_6 y A, D, E, G se determinan por los elementos de la matriz del hexapuerto (los cuales describen la geometría o topología de la estructura hexaportal) y por las condiciones de acoplamiento del generador, los sensores de potencia y las terminaciones que pudiera tener en algunos puertos según su estructura.

La Fig. 3 muestra la localización de Γ_{CG} en el círculo unitario ($|\Gamma_{CG}| = 1$).

Las condiciones mencionadas indican que el hexapuerto debe contar con un puerto para la lectura directa de la potencia incidente en el DBP, y tres que proporcionen una división igual de potencia con 0° y 120° de diferencia de fase cuando la red esté acoplada.

Así pues, es necesario encontrar o proponer una estructura hexaportal que cumpla con estas características.

Dado que las juntas n-portales simétricas muestran una mayor simplicidad para su análisis y síntesis, y proporcionan un

campo promisorio para la investigación, este estudio se ha enfocado exclusivamente hacia este tipo de estructuras.

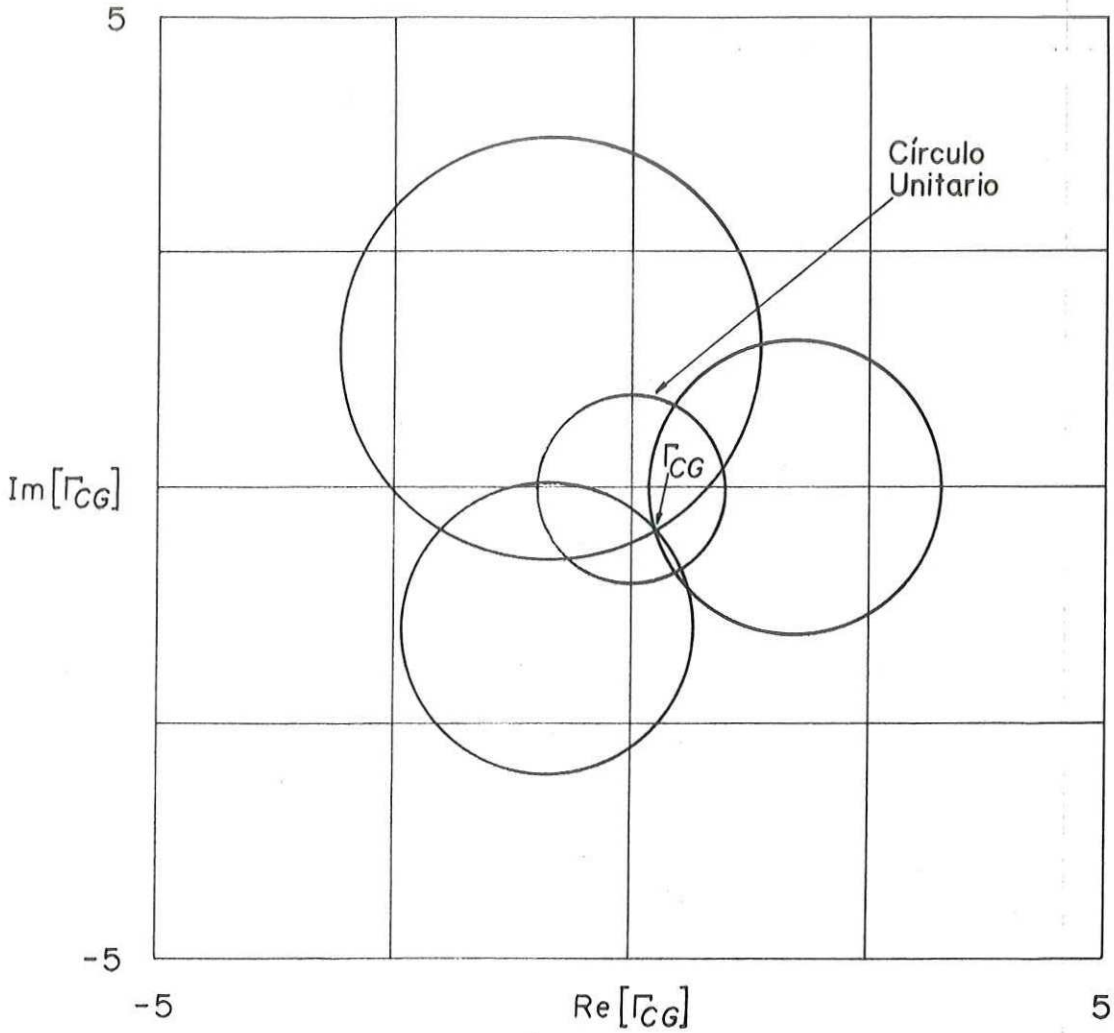

Figura 3. Localización de Γ_{CG} en el círculo unitario.

III. REPRESENTACION MATRICIAL

III.1 Matriz de dispersión

Algunos formalismos que han probado ser útiles para obtener el modelo matemático o representación matricial que determina las características de acoplamiento de juntas simétricas, se encuentran en la teoría de ecuaciones de autovalores y la teoría de grupos [Dicke, 1948b].

Asimismo, ciertas propiedades de redes y sus importantes consecuencias, las cuales se deben tener siempre en cuenta como una ayuda para deducir el comportamiento de este tipo de juntas, son las siguientes:

- Simetría ⟶ Partición

- Linealidad ⟶ Superposición

- Reciprocidad ⟶ Simetría

- Sin pérdidas ⟶ Unitariedad

Usando estos formalismos y teniendo en cuenta las propiedades anteriores, la técnica general para obtener la matriz de dispersión S de estructuras simétricas se puede describir de la siguiente manera:

Por consideraciones de simetría, es posible encontrar para una estructura simétrica dada, sus operadores de simetría (reflexión en un plano, reflexión o rotación en un eje, reflexión en un punto o inversión e identidad), los cuales asociados a sus reglas de multiplicaión forman un grupo.

Un teorema del álgebra matricial establece que si dos matrices **P** y **Q** conmutan y la ecuación de autovalores de **P** dada por $\mathbf{P}\mathbf{a}_j = p_j\mathbf{a}_j$ no contiene degeneraciones, entonces $\mathbf{a}_j$ es también un autovector de **Q** [Dicke, 1948b].

Otro teorema, que se aplica a la matriz **S** y a sus correspondientes de inmitancia (admitancia **Y** e impedancia **Z**), establece que si $\mathbf{P}\mathbf{a}_j = p_j\mathbf{a}_j$, entonces $f(\mathbf{P})\mathbf{a}_j = f(p_j)\mathbf{a}_j$ (donde $f(\mathbf{P})$ es una función racional de **P**) y por tanto, las matrices **S**, **Y** y **Z** tienen autovectores comunes dado que **S** puede ser expresada como una función de **Y** o **Z** por medio de las siguientes transformaciones bilineales matriciales [Newcomb, 1966a]:

$$\mathbf{S} = (\mathbf{I} - \mathbf{Y})(\mathbf{I} + \mathbf{Y})^{-1}, \tag{4}$$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{Z} - \mathbf{I})(\mathbf{Z} + \mathbf{I})^{-1}, \tag{5}$$

donde **I** denota la matriz unidad.

Asimismo, las relaciones entre los autovalores de **S** y **Y** y **S** y **Z** dadas por

$$s_j = \frac{1 - y_j}{1 + y_j}, \tag{6}$$

$$s_J = \frac{z_J - 1}{z_J + 1}, \qquad (7)$$

son transformaciones de Möbius (bilineales) que se pueden obtener por transformaciones sencillas (translación, rotación, dilatación y reciprocidad) según se indica en [Pantoja-Rangel, 1993].

Por otra parte, un grupo Abeliano es aquel en el que todos sus elementos conmutan entre si, sin embargo, un grupo no Abeliano puede contener subgrupos Abelianos.

Si en un grupo existen operadores de simetría que conmuten con la matriz **S**, y las soluciones de las ecuaciones de Maxwell obtenidas por una transformación de reflexión satisfacen las condiciones de frontera de la junta, entonces los autovectores de estos operadores son también los de la matriz **S** y es posible por diagonalización encontrar las relaciones entre los elementos de la matriz **S** y sus autovalores, de la siguiente manera:

Tres teoremas del álgebra matricial establecen que [Dicke, 1948b]:

- Cualquier vector *n*-dimensional puede ser expresado como una combinación lineal de n vectores linealmente independientes.

- Si **P** es real y simétrica, todos sus autovalores son reales y sus autovectores se pueden seleccionar como rea-

$$s_J = \frac{z_J - 1}{z_J + 1}, \tag{7}$$

son transformaciones de Möbius (bilineales) que se pueden obtener por transformaciones sencillas (translación, rotación, dilatación y reciprocidad) según se indica en [Pantoja-Rangel, 1993].

Por otra parte, un grupo Abeliano es aquel en el que todos sus elementos conmutan entre si, sin embargo, un grupo no Abeliano puede contener subgrupos Abelianos.

Si en un grupo existen operadores de simetría que conmuten con la matriz **S**, y las soluciones de las ecuaciones de Maxwell obtenidas por una transformación de reflexión satisfacen las condiciones de frontera de la junta, entonces los autovectores de estos operadores son también los de la matriz **S** y es posible por diagonalización encontrar las relaciones entre los elementos de la matriz **S** y sus autovalores, de la siguiente manera:

Tres teoremas del álgebra matricial establecen que [Dicke, 1948b]:

- Cualquier vector n-dimensional puede ser expresado como una combinación lineal de n vectores linealmente independientes.

- Si **P** es real y simétrica, todos sus autovalores son reales y sus autovectores se pueden seleccionar como rea-

III.2 Modelo matemático de una estructura conocida

Para ilustrar aquí la aplicación de la técnica general de representación matricial y en el siguiente capítulo la del método de síntesis, se obtendrá el modelo matemático de una estructura conocida como la estrella. Del modelo de ésta y a través de la síntesis, se generará una estructura en anillo (dual) que en conexión con un acoplador direccional simple, forma un hexapuerto que cumple con las especificaciones de Engen.

La Fig. 4 muestra la geometría de la estrella.

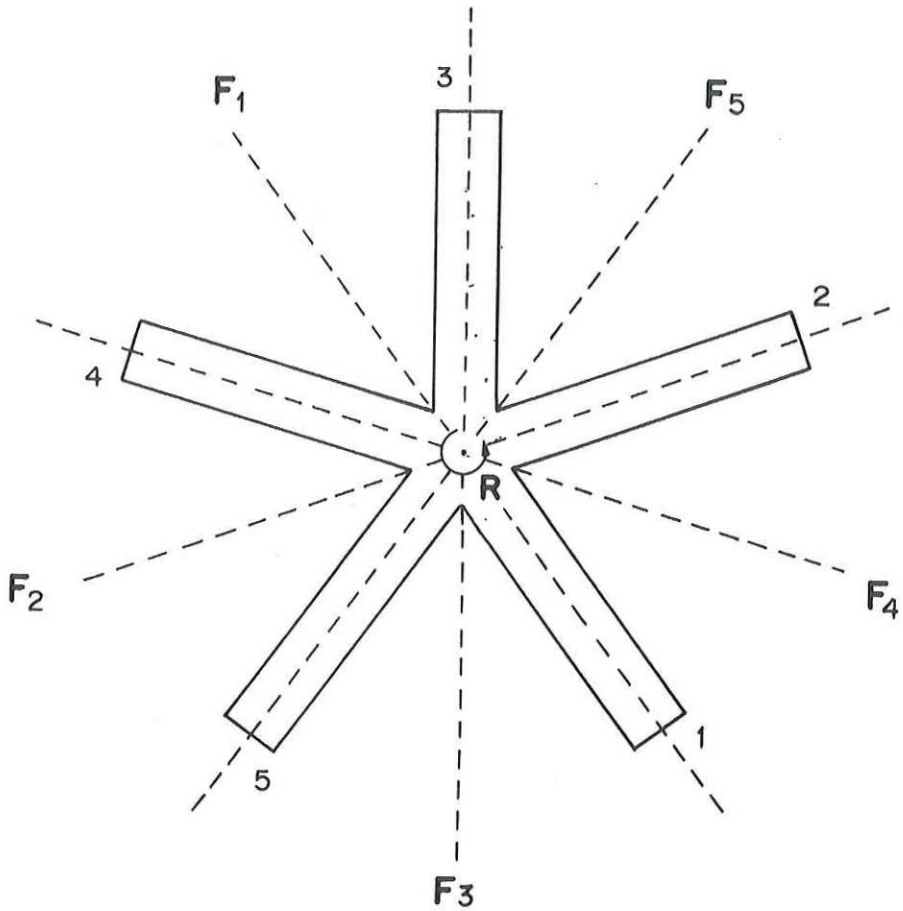

Figura 4. Junta pentaportal en estrella.

Esta estructura contiene cinco planos de simetría y un eje de simetría quíntuple (intersección de los cinco planos de simetría). Los operadores de simetría de reflexión en un plano están designados por F_1 a F_5 y los de reflexión o rotación alrededor del eje quíntuple por R_1 (72°), R_2 (144°), R_3 (216°), R_4 (288°) e I (360°).

Estos diez operadores forman un grupo cuya tabla de multiplicación es la siguiente:

Tabla I. Tabla de multiplicación para el grupo de operadores de simetría de la estrella.

	I	R_1	R_2	R_3	R_4	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
I	I	R_1	R_2	R_3	R_4	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
R_1	R_1	R_2	R_3	R_4	I	F_3	F_4	F_5	F_1	F_2
R_2	R_2	R_3	R_4	I	R_1	F_5	F_1	F_2	F_3	F_4
R_3	R_3	R_4	I	R_1	R_2	F_2	F_3	F_4	F_5	F_1
R_4	R_4	I	R_1	R_2	R_3	F_4	F_5	F_1	F_2	F_3
F_1	F_1	F_4	F_2	F_5	F_3	I	R_2	R_4	R_1	R_3
F_2	F_2	F_5	F_3	F_1	F_4	R_3	I	R_2	R_4	R_1
F_3	F_3	F_1	F_4	F_2	F_5	R_1	R_3	I	R_2	R_4
F_4	F_4	F_2	F_5	F_3	F_1	R_4	R_1	R_3	I	R_2
F_5	F_5	F_3	F_1	F_4	F_2	R_2	R_4	R_1	R_3	I

De una inspección de la tabla anterior, se puede ver que R_1 y F_1 son geradores del grupo i. e., cualquier elemento del grupo puede ser generado como un producto de uno o más términos en R_1 y F_1.

En forma matricial, R_1 y F_1 están dados por

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Ahora bien, expresando a los vectores de voltaje y corriente (voltajes y corrientes en cada puerto) por

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

y operando sobre ellos con $\mathbf{R}_1$ se tiene que

$$\mathbf{R}_1\mathbf{e} = \mathbf{e}', \tag{14}$$

$$\mathbf{R}_1\mathbf{i} = \mathbf{i}', \tag{15}$$

donde

$$\mathbf{e}' = \begin{bmatrix} e_5 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{i}' = \begin{bmatrix} i_5 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}.$$

Estos voltajes y corrientes transformados, son nuevas soluciones permisibles dado que la estructura geométrica es invariante bajo la reflexión $\mathbf{R}_1$ y por tanto la solución transformada también satisface las condiciones de frontera originales de la junta.

Así, para la matriz $\mathbf{Z}$ de la junta se tiene que

$$\mathbf{e} = \mathbf{Z}\mathbf{i}, \tag{16}$$

y para la solución transformada,

$$\mathbf{e}' = \mathbf{Z}\mathbf{i}'. \tag{17}$$

Combinando ambas resulta que

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R}_1\mathbf{e} &= \mathbf{Z}\mathbf{R}_1\mathbf{i}, \\ \mathbf{R}_1\mathbf{Z}\mathbf{i} &= \mathbf{Z}\mathbf{R}_1\mathbf{i}, \\ (\mathbf{R}_1\mathbf{Z} - \mathbf{Z}\mathbf{R}_1)\mathbf{i} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

y puesto que esta ecuación es válida para cualquier vector de corriente $\mathbf{i}$, entonces

$$\mathbf{R}_1\mathbf{Z} - \mathbf{Z}\mathbf{R}_1 = 0. \tag{19}$$

Por el desarrollo anterior y la relación existente entre Y, Z y S, se asegura que aun sin conocer la matriz S ésta conmutará con el operador R_1 y por tanto tendrán autovectores comunes si R_1 no contiene degeneraciones.

Así pues, si la ecuación de autovalores de R_1 es dada por

$$R_1 a_k = r_k a_k, \tag{20}$$

sus autovalores estarán dados por

$$\left.\begin{array}{ll} & r_1 = 1, \\ r_2 = \exp(j\emptyset_1), & r_3 = \exp(j\emptyset_2), \\ r_4 = \exp(j\emptyset_3), & r_5 = \exp(j\emptyset_4), \end{array}\right\} \tag{21}$$

donde

$$\emptyset_1 = \frac{2}{5}\pi, \qquad \emptyset_2 = \frac{4}{5}\pi,$$

$$\emptyset_3 = \frac{6}{5}\pi, \qquad \emptyset_4 = \frac{8}{5}\pi,$$

y sus autovectores por

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ r_5 \\ r_4 \\ r_3 \\ r_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ r_4 \\ r_2 \\ r_5 \\ r_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ r_3 \\ r_5 \\ r_2 \\ r_4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Puesto que $\mathbf{R}_1$ no contiene degeneraciones, entonces sus autovectores serán también los de $\mathbf{S}$.

Ahora bien, si la ecuación de autovalores de $\mathbf{S}$ es dada por

$$\mathbf{S}\mathbf{a}_k = s_k\mathbf{a}_k, \tag{23}$$

y se opera con $\mathbf{F}_1$ sobre $\mathbf{a}_k$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{S}(\mathbf{F}_1\mathbf{a}_k) = s_k(\mathbf{F}_1\mathbf{a}_k), \tag{24}$$

entonces,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{F}_1\mathbf{a}_1 &= \mathbf{a}_1, \\ \mathbf{F}_1\mathbf{a}_2 &= \mathbf{a}_5, \\ \mathbf{F}_1\mathbf{a}_3 &= \mathbf{a}_4, \\ \mathbf{F}_1\mathbf{a}_4 &= \mathbf{a}_3, \\ \mathbf{F}_1\mathbf{a}_5 &= \mathbf{a}_2, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

y substituyendo estos valores en la ecuación anterior se tiene que

$$\left.\begin{aligned} s_2 &= s_5, \\ s_3 &= s_4, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

lo cual indica que S tiene una doble degeneración.

Ahora, puesto que los autovectores a_k no son ortogonales entre si, por combinaciones lineales de a_2 con a_5 y a_3 con a_4, se puede seleccionar un conjunto en que lo sean y donde además sean linealmente independientes, reales y normalizados a la longitud unitaria.

El conjunto siguiente tiene estas características:

$$\left.\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{(5)^{1/2}} a_1, \\
b_2 &= \frac{1}{(10)^{1/2}} (a_2 + a_5), \\
b_3 &= \frac{1}{(10)^{1/2}} (a_3 + a_4), \\
b_4 &= \frac{j}{(10)^{1/2}} (a_3 - a_4), \\
b_5 &= \frac{j}{(10)^{1/2}} (a_2 - a_5).
\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Así por diagonalización, de la Ec. (9) se tiene que

$$S = ULU^T,$$

donde

$$U = \begin{bmatrix} 0.447 & 0.632 & 0.632 & 0.0 & 0.0 \\ 0.447 & 0.195 & -0.512 & 0.732 & 0.602 \\ 0.447 & -0.512 & 0.195 & -0.602 & 0.732 \\ 0.447 & -0.512 & 0.195 & 0.602 & -0.732 \\ 0.447 & 0.195 & -0.512 & -0.732 & -0.602 \end{bmatrix} \tag{28}$$

y

$$L = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_2 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Y finalmente resulta que

$$S = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \delta & \delta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \delta & \delta \\ \delta & \beta & \alpha & \beta & \delta \\ \delta & \delta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \delta & \delta & \beta & \alpha \end{bmatrix}, \tag{30}$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{5}(s_1 + 2s_2 + 2s_3), \tag{31}$$

$$\beta = \frac{1}{5}[s_1 + (r_2 + r_5)s_2 + (r_3 + r_4)s_3], \tag{32}$$

$$\delta = \frac{1}{5}[s_1 + (r_3 + r_4)s_2 + (r_2 + r_5)s_3]. \tag{33}$$

Con la obtención de la relaciones funcionales entre los elementos de la matriz de dispersión y sus autovalores, y las transformaciones entre parámetros (dispersión-inmitancia), matrices de parámetros y autovalores de matrices, se logra una representación total de cada estructura en particular para así proceder a la síntesis.

IV. METODO DE SINTESIS

IV.1 Matriz de admitancias

Aunque la matriz de parámetros S puede ser sintetizada de manera directa, su tratamiento a través de sus equivalentes de inmitancia resulta una forma más conveniente [Newcomb, 1966b].

Un método simple y directo mediante la matriz de admitancias es el conocido como síntesis por ramas [Dicke, 1948b; Altman, 1964].

Este método puede conducir a redes planas de varias o una malla como las estructuras en anillo.

Así por ejemplo, para la estructura pentaportal en estrella, se puede buscar una equivalente de anillo (dual), basándose en las propiedades de redes antes descritas, las cuales establecen algunas condiciones que las matrices de dispersión y admitancias de esta junta deben cumplir.

Las condiciones generales son las siguientes:

- La matriz de dispersión debe ser unitaria, por lo que su correspondiente de admitancias tendrá su parte real igual a cero, i. e., la red no contendrá elementos resistivos.

- La matriz de admitancias de la red pentaportal de anillo sin pérdidas equivalente debe tener la siguiente forma:

$$Y_R = j \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & 0 & 0 & Y_{15} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} \\ Y_{51} & 0 & 0 & Y_{54} & Y_{55} \end{bmatrix}. \qquad (34)$$

Para el caso más simple la diagonal principal es de ceros lo cual indica que no tendrá "stubs" o tramos de compensación y que los elementos de interconexión serán secciones de línea de transmisión de 1/4 ó 3/4 de longitud de onda para j y $-j$ respectivamente.

- Si la diagonal principal no es de ceros (caso general) la matriz se debe partir de la siguiente manera para separar los tramos de compensación.

$$Y_R = j \begin{bmatrix} Y_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{55} \end{bmatrix}$$

$$+ j \begin{bmatrix} 0 & Y_{12} & 0 & 0 & Y_{15} \\ Y_{21} & 0 & Y_{23} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{32} & 0 & Y_{34} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{43} & 0 & Y_{45} \\ Y_{51} & 0 & 0 & Y_{54} & 0 \end{bmatrix}. \qquad (35)$$

Si se busca el caso general con los elementos de la diagonal principal diferentes de cero, entonces se deben tomar las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{array}{c} Y_{13} = Y_{14} = Y_{24} = Y_{25} = Y_{31} = Y_{35} = 0, \\ Y_{41} = Y_{42} = Y_{52} = Y_{53} = 0 \end{array}\right\} \qquad (36)$$

y

$$\left.\begin{array}{ll} Y_{12} = Y_{21}, & Y_{23} = Y_{32}, \\ Y_{34} = Y_{43}, & Y_{45} = Y_{54}, \end{array}\right\} \qquad (37)$$

dada la simetría de la matriz Y_R.

Si se busca el caso más simple, entonces además de las anteriores se deben de tomar las siguientes:

$$Y_{11} = Y_{22} = Y_{33} = Y_{44} = Y_{55} = 0, \qquad (38)$$

o bien tomar las de simetría y las condiciones para las submatrices de conexión, esto es;

$$\left.\begin{array}{c} Y_{13} = Y_{14} = Y_{24} = Y_{25} = Y_{31} = Y_{35} = 0, \\ Y_{41} = Y_{42} = Y_{52} = Y_{53} = 0. \end{array}\right\} \qquad (39)$$

IV.2 Algoritmos de búsqueda

Los criterios de diseño establecen que el hexapuerto debe tener un puerto para la lectura directa de la potencia incidente en el DBP y tres con una división igual de potencia y una diferencia de fase relativa de 0 y 120°.

Con un acoplador direccional para medir la potencia incidente en el DBP y suponiendo un pentapuerto bien acoplado, una forma sistemática de obtener los elementos de la matriz **S** o sus autovalores relacionados para una junta de anillo, se puede encontrar en los siguientes algoritmos [Dueñas-Jiménez, 1992].

IV.2.1 Algoritmo de búsqueda riguroso (autovalores-elementos)

Con las condiciones de la matriz de admitancias ya establecidas, y las relaciones entre los elementos de la matriz de dispersión y sus autovalores ya definidas, una forma de concebir un algoritmo de búsqueda sistemática, se da por la consideración de unitariedad de la matriz de dispersión (lo cual implica que los autovalores de la misma tendrán amplitud unitaria) y por la aplicacion de desplazamientos $\exp(-j\theta)$ (donde θ es la longitud eléctrica) en los planos de referencia de la estructura original pero que mantengan la simetría. Las perturbaciones simétricas generadas por estos desplazamientos corresponden a rotaciones de los autovalores de magnitud unitaria a través de ángulos de fase arbitrarios [Helszajn, 1975a].

Con los desplazamientos se obtiene una nueva matriz **S** (con diferentes elementos y autovalores) que puede corresponder a una matriz **Y** que represente una red más simple desde un punto de vista topológico.

Estos desplazamientos equivalen a una transformación que se representa matricialmente de la siguiente manera [Dicke, 1948a; Collin, 1966]:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \exp(-j\theta_1) & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-j\theta_2) & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \exp(-j\theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & \exp(-j\theta_4) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & \exp(-j\theta_5) \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Esta transformación es permisible si transforma a una matriz simétrica y unitaria a otra de iguales carcaterísticas, resultando que

$$\mathbf{S}' = \mathbf{DSD}, \tag{41}$$

donde

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} \end{bmatrix} \tag{42}$$

y

$$\mathbf{S}' = \begin{bmatrix} \exp(-j2\theta_1)S_{11} & \exp[-j(\theta_1 + \theta_2)]S_{12} & \cdots\cdots \\ \exp[-j(\theta_2 + \theta_1)]S_{21} & \exp(-j2\theta_2)S_{22} & \cdots\cdots \\ \exp[-j(\theta_3 + \theta_1)]S_{31} & \exp[-j(\theta_3 + \theta_2)]S_{32} & \cdots\cdots \\ \exp[-j(\theta_4 + \theta_1)]S_{41} & \exp[-j(\theta_4 + \theta_2)]S_{42} & \cdots\cdots \\ \exp[-j(\theta_5 + \theta_1)]S_{51} & \exp[-j(\theta_5 + \theta_2)]S_{52} & \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

$$
\begin{array}{lll}
\exp[-j(\theta_1 + \theta_3)]S_{13} & \exp[-j(\theta_1 + \theta_4)]S_{14} & \cdots\cdots \\
\exp[-j(\theta_2 + \theta_3)]S_{23} & \exp[-j(\theta_2 + \theta_4)]S_{24} & \cdots\cdots \\
\exp(-j2\theta_3)S_{33} & \exp[-j(\theta_3 + \theta_4)]S_{34} & \cdots\cdots \\
\exp[-j(\theta_4 + \theta_3)]S_{43} & \exp(-j2\theta_4)S_{44} & \cdots\cdots \\
\exp[-j(\theta_5 + \theta_3)]S_{53} & \exp[-j(\theta_5 + \theta_4)]S_{54} & \cdots\cdots
\end{array}
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
\exp[-j(\theta_1 + \theta_5)]S_{15} \\
\exp[-j(\theta_2 + \theta_5)]S_{25} \\
\exp[-j(\theta_3 + \theta_5)]S_{35} \\
\exp[-j(\theta_4 + \theta_5)]S_{45} \\
\exp(-j\theta_5)S_{55}
\end{array}
\right] , \qquad (43)
$$

y si $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta$ lo cual indica un desplazamiento igual en todos los planos de referencia;

$$
\mathbf{S}' = \exp(-j2\theta) \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} \end{bmatrix} . \qquad (44)
$$

Ahora bien, por la diagonalización de **S**, la conversión de la matriz de parámetros de dispersión a parámetros de admitancia estaría dada por la siguiente ecuación:

$$
\mathbf{Y} = (\mathbf{I} - \mathbf{ULU}^T)(\mathbf{I} + \mathbf{ULU}^T)^{-1} . \qquad (45)
$$

Separando las partes real e imaginaria, el primer factor del miembro del lado derecho se puede expresar de la siguiente manera:

$$
(\mathbf{A} + j\mathbf{B}), \qquad (46)
$$

donde

$$A = I - U\mathrm{Re}(L)U^T \tag{47}$$

y

$$B = -U\mathrm{Im}(L)U^T. \tag{48}$$

Asimismo, el segundo factor sin invertir puede ser dado por

$$(E + jF), \tag{49}$$

donde

$$E = I + U\mathrm{Re}(L)U^T \tag{50}$$

y

$$F = U\mathrm{Im}(L)U^T. \tag{51}$$

Luego, de la ecuación de la matriz identidad se tiene que

$$(E + jF)(C + jD) = I, \tag{52}$$

donde $(C + jD)$ es la inversa de $(E + jF)$.

Y por tanto resulta que

$$Y = (A + jB)(C + jD), \tag{53}$$

y de la condicion de unitariedad antes mencionada,

$$\left.\begin{aligned} AC - BD &= 0, \\ AD + BC &= Y. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Estas últimas ecuaciones junto con las relaciones que describen las formas simple y general (Ecs. 34 y 35) de la matriz de admitancias, son usadas como comparadores para encontrar los autovalores que las satisfacen.

IV.2.2 Algoritmo de búsqueda simple (elementos-autovalores)

El algoritmo anterior es una forma rigurosa en la que se encuentran los autovalores de la matriz **S** y a partir de éstos, los valores de los elementos que la conforman.

Otro algoritmo más simple se puede concebir para la búsqueda de las posibles posiciones en un diagrama polar de $|\beta| = |\delta| = 0.5$ (Ec. 30), con una diferencia de fase relativa de 120° a condición de que $\alpha = 0$ y que aseguren las formas simple y general de la matriz de admitancias.

Una vez cumplidas las condiciones impuestas a las matrices de la estructura *n*-portal, los valores de los elementos de la matriz **S** o sus autovalores relacionados serán conocidos y algunas redes equivalentes podrán ser encontradas.

Si la aplicación de los *n*-puertos es como acopladores direccionales o como circuladores ideales, por ejemplo, sus puertos siempre estarán terminados en cargas acopladas y $(n - 1)$ redes equivalentes podrán ser encontradas [Helszajn, 1975b]. Si la aplicación es como separadores de señal en reflectómetros, donde el DBP puede ser una carga acoplada, un circuito corto, un circuito abierto o una admitancia cualesquiera, entonces múltiples redes posibles pueden ser halladas de las cuales las fí-

sicamente realizables deben ser elegidas.

Programas de computadora que consideran los algoritmos simple y riguroso y que han sido escritos en lenguaje FORTRAN 77 se encuentran en el apéndice B.

IV.3 Síntesis de diferentes juntas pentaportales de anillo

Un conjunto de elementos de la matriz de la Ec. (30) (Fig. 5), que logran todas las condiciones del algoritmo de búsqueda simple y que han sido obtenidos con el programa ESA5E del apéndice B es el siguiente:

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0.25 - j0.433, \qquad \delta = -0.5.$$

Substituyendo estos valores directamente en las Ecs. (31)-(33), el conjunto de autovalores relacionados (Fig. 6) es el siguiente:

$$s_1 = -0.5 - j0.866, \qquad s_2 = 0.963 - j0.268,$$
$$s_3 = -0.713 + j0.7.$$

Transformando de S a Y para los valores de α, β y δ, la matriz de admitancias del pentapuerto de anillo resulta:

$$\mathbf{Y}_R = j \begin{bmatrix} \sigma & \tau & \mu & \mu & \tau \\ \tau & \sigma & \tau & \mu & \mu \\ \mu & \tau & \sigma & \tau & \mu \\ \mu & \mu & \tau & \sigma & \tau \\ \tau & \mu & \mu & \tau & \sigma \end{bmatrix}, \tag{55}$$

donde $\sigma = -0.577$, $\tau = 1.155$ y $\mu = 0$.

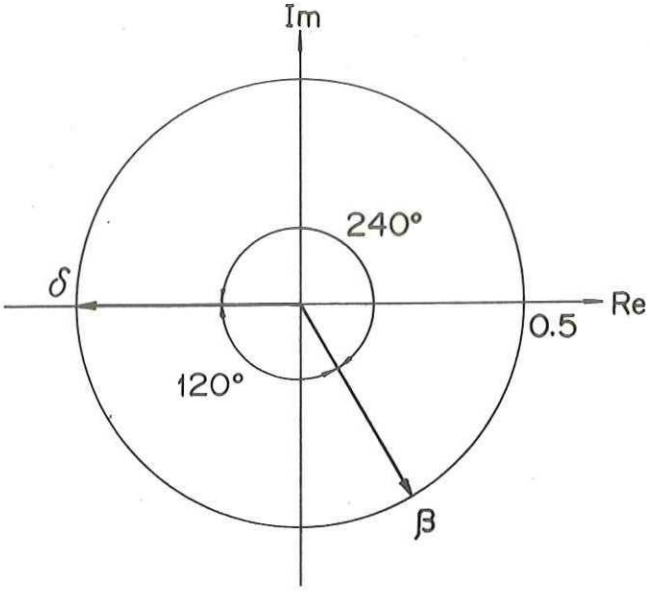

Figura 5. Diagrama de los elementos de la matriz S de una junta pentaportal simétrica de anillo.

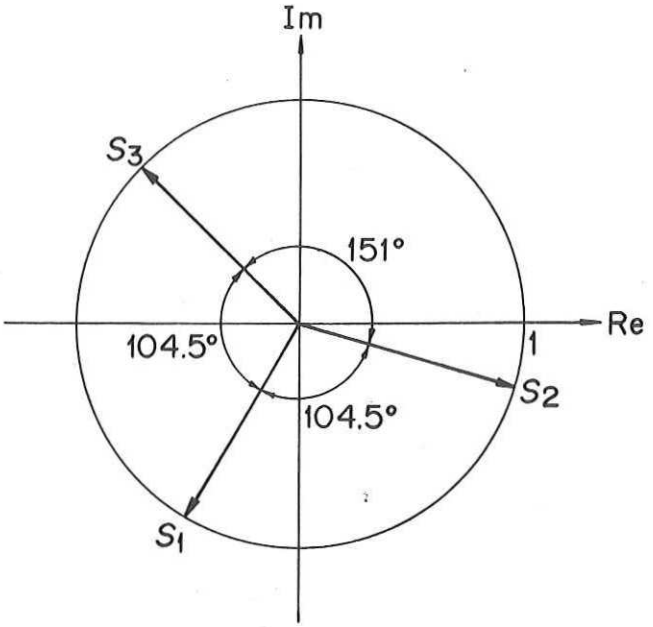

Figura 6. Diagrama de los autovalores relacionados a los elementos de la Fig. 5.

Esta matriz se puede partir en cinco de la siguiente forma:

$$Y_R = j\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ j\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \tag{56}$$

donde $a = 0.289$ y $b = 1.155$.

De esta matriz se puede observar que hay cinco submatrices de segundo orden, las cuales representan la interconexión entre puertos y están dadas de la siguiente manera:

$$Y_{12} = Y_{23} = Y_{34} = Y_{45} = Y_{15}, \tag{57}$$

donde

$$Y_{12} = j\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}. \tag{58}$$

Igualando Y_{12} con la matriz de admitancias de una sección de línea de transmisión sin pérdidas dada en general por

$$Y_{LTSP} = j \begin{bmatrix} -Y_C \dfrac{1}{\tan \beta l} & Y_C \dfrac{1}{\operatorname{sen} \beta l} \\ Y_C \dfrac{1}{\operatorname{sen} \beta l} & -Y_C \dfrac{1}{\tan \beta l} \end{bmatrix}, \tag{59}$$

se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} Y_C \frac{1}{\tan \theta} + a &= 0 \\ Y_C \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} - b &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

donde Y_C es la admitancia característica y $\beta l = \theta$.

Resolviendo el sistema se tiene que

$$Y_C = 1.118, \qquad \theta = 75.51°.$$

Otros valores posibles son

$$Y_C = 1.118, \qquad \theta = 284.49°,$$

donde el nuevo valor de θ se obtiene de la resta del anterior a 2π e indica que son elementos largos con mayor sensibilidad a la frecuencia (ver capítulo V, sección *V.1*).

La matriz de la Ec. (55) también se puede partir en dos de la siguiente forma:

$$Y_{R1} = j \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \tag{61}$$

$$Y_{R2} = j \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 & b \\ b & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & b \\ b & 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}, \tag{62}$$

donde $c = -0.577$.

La primera representa susceptancias inductivas en paralelo (tramos de línea de transmisión en paralelo y en circuito corto (Y_C =0.577, θ = 45°) conectados a cada puerto, y la segunda secciones de línea de transmisión (Y_C =1.155, θ = 90°) entre puertos contiguos.

La Fig. 7 muestra las tres juntas de anillo obtenidas con los valores anteriores. Las tres son físicamente posibles, sin embargo, debido a los tramos en corto, la junta de la Fig. 7c no encuentra una realización práctica en circuitería de microcinta.

Es importante anotar que puesto que en la matriz Y_R el elemento μ es igual a cero, la junta será una red plana y por tanto, se puede concluir que con el fin de simplificar cualquier otra junta n-portal de anillo, el elemento de sus diagonales superiores e inferiores debe ser igual a cero en su matriz correspondiente.

Finalmente, cabe destacar que las juntas de las Figs. 7a y 7c ya antes habían sido sintetizadas por un método basado en la obtención de una admitancia equivalente que reduce un problema n-portal a uno uniportal [Hansson, 1983].

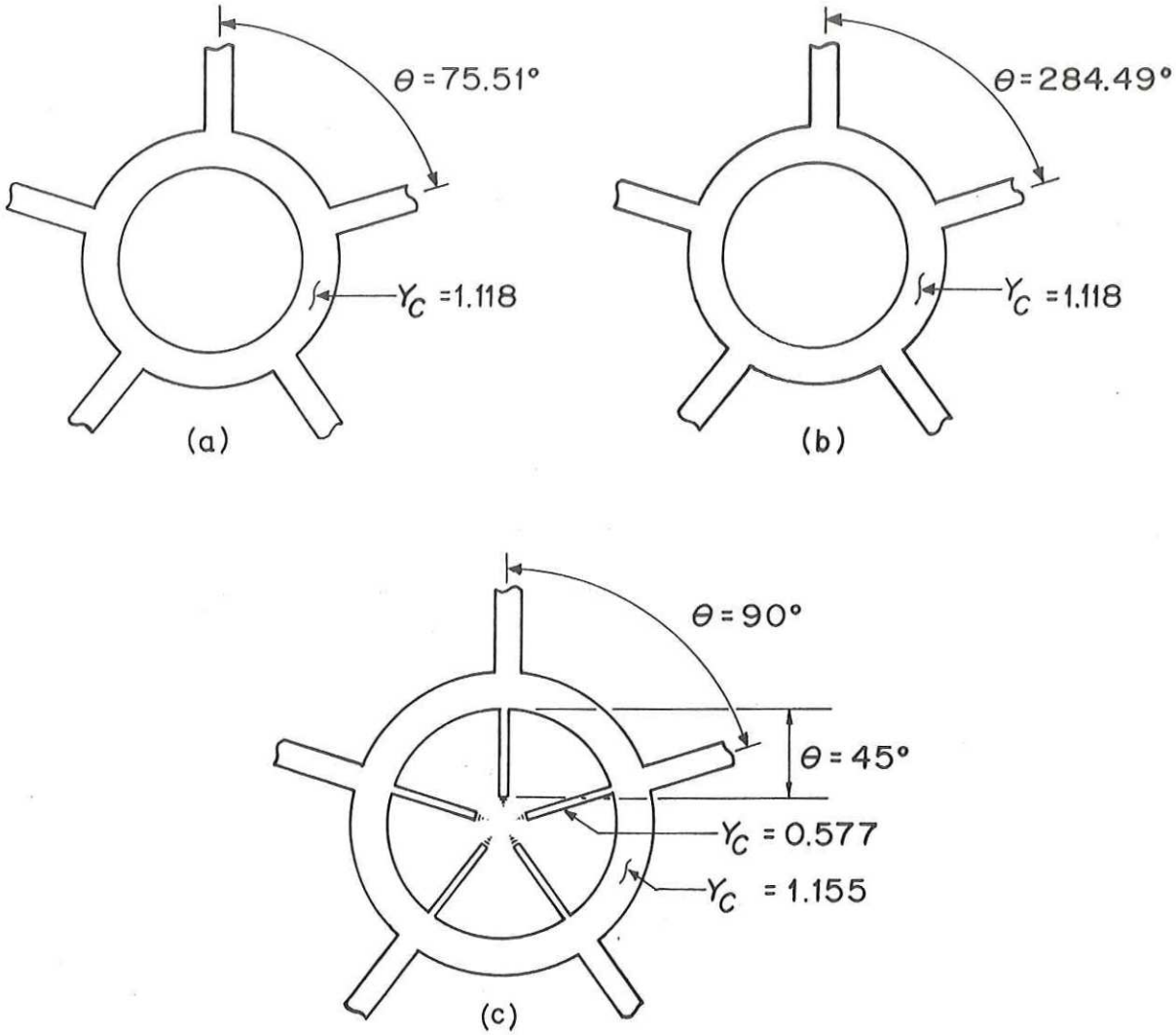

Figura 7. Juntas pentaportales de anillo para los elementos de las matrices de admitancias. (a) y (b) Ec. (56). (c) Ecs. (61) y (62).

V. SINTESIS DE UN HEXAPUERTO COMO REFLECTOMETRO

V.1 Redes Hexaportales compuestas

En la síntesis el objetivo es encontrar redes simples o compuestas que cumplan con las condiciones mencionadas en los capítulos II y IV, que den el ancho de banda requerido en las especificaciones de diseño y que además introduzcan pocas pérdidas por inserción.

Dobrowolsky (1982), propuso dos redes compuestas por dos acopladores direccionales hexaportales que satisfacen los criterios de diseño establecidos por Engen.

La matriz de dispersión de tal tipo de juntas está dada de la siguiente manera:

$$S_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{63}$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{j}{2}, \tag{64}$$

$$\beta = \frac{-1}{\sqrt{3}}. \tag{65}$$

Esta matriz también se puede obtener con el programa ES2T6E del apéndice B, el cual es una variación a seis puertos del algoritmo de búsqueda simple del programa ESA5E y donde las posibles posiciones deben ser para $|\alpha| = |\beta| = 0.577$ con una diferencia de fase relativa de 120°.

Utilizando las siguientes transformaciones bilineales matriciales:

$$Y_A = (I - S_A)(I + S_A)^{-1}, \tag{66}$$

$$Z_A = (I + S_A)(I - S_A)^{-1}, \tag{67}$$

las matrices de admitancias e impedancias de un acoplador direccional hexaportal son

$$Y_A = j \begin{bmatrix} \sigma & \tau & \tau & \mu & 0 & 0 \\ \tau & \sigma & \tau & 0 & \mu & 0 \\ \tau & \tau & \sigma & 0 & 0 & \mu \\ \mu & 0 & 0 & \sigma & \tau & \tau \\ 0 & \mu & 0 & \tau & \sigma & \tau \\ 0 & 0 & \mu & \tau & \tau & \sigma \end{bmatrix}, \tag{68}$$

$$Z_A = j \begin{bmatrix} \sigma & \tau & \tau & \epsilon & 0 & 0 \\ \tau & \sigma & \tau & 0 & \epsilon & 0 \\ \tau & \tau & \sigma & 0 & 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 & 0 & \sigma & \tau & \tau \\ 0 & \epsilon & 0 & \tau & \sigma & \tau \\ 0 & 0 & \epsilon & \tau & \tau & \sigma \end{bmatrix}, \tag{69}$$

donde $\sigma = 0.577$, $\tau = -1.155$, $\mu = -2$ y $\epsilon = 2$.

De estas matrices se puede observar que se tienen 36 funciones de red, 6 de acceso y 30 de transferencia (de circuito

corto o de circuito abierto). Tomando la matriz de admitancias, estas funciones de red se pueden sintetizar con 9 elementos distribuidos, haciendo la partición que a continuación se indica [Dueñas-Jiménez, 1993].

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y}_A = {} & j\begin{bmatrix} \delta & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} \delta & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& + j\begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & \tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau & \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& + j\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix} \\
& + j\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & \delta \end{bmatrix} \\
& + j\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & \tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & \delta \end{bmatrix}, \qquad (70)
\end{aligned}
$$

donde $\delta = \sigma/3$.

Asimismo, de esta matriz se puede observar que hay nueve submatrices de segundo orden, las cuales representan la interconexión entre puertos y están dadas de la siguiente manera:

$$Y_{12} = Y_{13} = Y_{23} = Y_{45} = Y_{46} = Y_{56}, \tag{71}$$

$$Y_{14} = Y_{25} = Y_{36}, \tag{72}$$

donde

$$Y_{12} = j \begin{bmatrix} \delta & \tau \\ \tau & \delta \end{bmatrix},$$

$$Y_{14} = j \begin{bmatrix} \delta & \mu \\ \mu & \delta \end{bmatrix}.$$

Cada una de estas submatrices tiene la forma de una matriz de admitancias de una sección de línea de transmisión sin pérdidas dada por la Ec. (59). Igualando (71) y (72) con (59), se obtienen los dos sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} Y_C \frac{1}{\tan\theta} + \delta &= 0 \\ Y_C \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \tau &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

$$\left.\begin{aligned} Y_C \frac{1}{\tan\theta} + \delta &= 0 \\ Y_C \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \mu &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (74)$$

Resolviendo (73) se tiene que

$$Y_C = 1.139, \qquad \theta = 279.569^\circ,$$

y de (74) resulta que

$$Y_C = 1.991, \qquad \theta = 275.509^\circ.$$

Estos elementos son largos (alrededor de tres cuartos de longitud de onda, i. e., $\theta \simeq 270^\circ$) lo cual desde un punto de vista práctico hace que sean más sensibles a la frecuencia y sea preferible tratar de encontrar una estructura con secciones de línea de transmisión que tengan $\theta \simeq 90^\circ$.

La búsqueda se puede realizar considerando que un criterio de diseño establece que los tres números q deben estar separados 120° uno de otro, lo cual indica que los elementos de la matriz **S** pueden tomar indistintamente uno el valor de otro puesto que siempre tendrán la misma magnitud y una fase relativa de 120°. Asimismo, existe la posibilidad de encontrar una simplificación cuando se desplazan los planos de referencia en la junta según se indica en [Dicke, 1948b].

Intercambiando los valores de α y β, y desplazando los planos de referencia un tercio de longitud de onda (120°) hacia afuera, la matriz de dispersión de la Ec. (78) se convierte en la siguiente:

$$S_{AN} = \exp[-j2(120^\circ)] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & P & Q & Q \\ 0 & 0 & 0 & Q & P & Q \\ 0 & 0 & 0 & Q & Q & P \\ P & Q & Q & 0 & 0 & 0 \\ Q & P & Q & 0 & 0 & 0 \\ Q & Q & P & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{75}$$

donde $P = \beta$ y $Q = \alpha$.

Aplicando como antes la transformación de la Ec. (66), la nueva matriz de admitancias resulta ser:

$$Y_{AN} = -j \begin{bmatrix} \sigma & \tau & \tau & \mu & 0 & 0 \\ \tau & \sigma & \tau & 0 & \mu & 0 \\ \tau & \tau & \sigma & 0 & 0 & \mu \\ \mu & 0 & 0 & \sigma & \tau & \tau \\ 0 & \mu & 0 & \tau & \sigma & \tau \\ 0 & 0 & \mu & \tau & \tau & \sigma \end{bmatrix}. \tag{76}$$

Nuevamente, esta matriz se puede partir en nueve submatrices que representen dos secciones de línea de transmisión diferentes para la interconexión entre puertos, y obtener de la igualación de éstas con la matriz de la Ec. (59) los dos sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} Y_C \frac{1}{\tan\theta} - \delta &= 0 \\ Y_C \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \tau &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

$$\left.\begin{aligned} Y_C \frac{1}{\tan\theta} - \delta &= 0 \\ Y_C \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \mu &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

Resolviendo (77) se tiene que

$$Y_C = 1.139, \qquad \theta = 80.431°,$$

y de (78) resulta que

$$Y_C = 1.991, \qquad \theta = 84.491°.$$

Es importante observar que en las primeras y segundas soluciones de (73) y (77), y de (74) y (78), la suma de las θs es de 360°, lo cual indica que para encontrar la red con secciones de línea de transmisión cortas, basta con restar estos valores de 2π, sin embargo, el desarrollo anterior es necesario para fundamentar esta afirmación.

Con estos últimos valores, el arreglo para los elementos constituyentes de la junta se muestra en la Fig. 8.

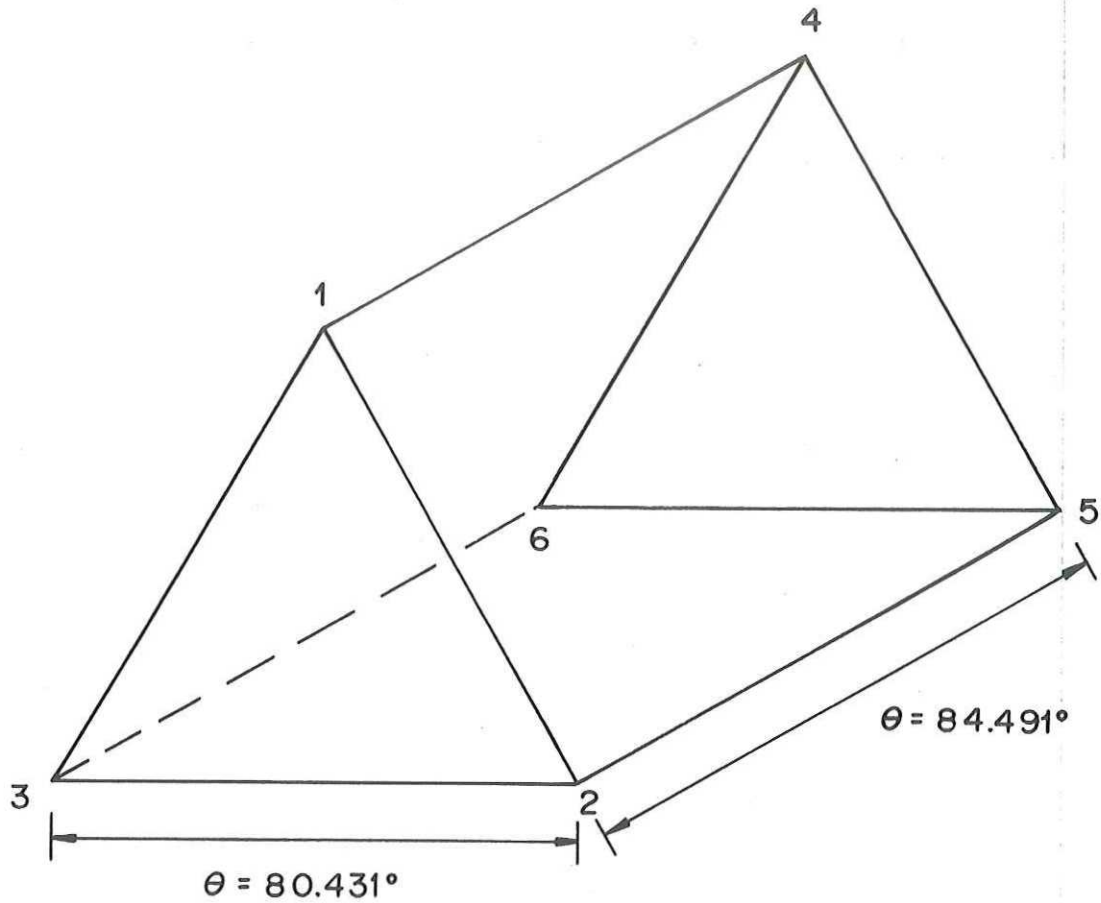

Figura 8. Geometría de un acoplador direccional hexaportal.

Desafortunadamente esta topología es aún complicada (en tres dimensiones) por lo que la configuración de las redes propuestas por Dobrowolsky sería prácticamente irrealizable en circuitería de microcinta.

Sin embargo, este circuito se puede considerar como el dual (delta-estrella) del propuesto por Boyd (1962) y una construcción similar a la reportada por él se puede realizar en línea de cinta o triplaca.

V.2 Anàlisis del acoplador direccional hexaportal

Una forma simple de analizar la topología de la Fig. 8, es a través del graficado de las partes real e imaginaria, y de la magnitud y argumento de los elementos de su matriz de dispersión vs. la frecuencia (o βl) para el valor de diferencia de fase (ϕ = 120°) [Boyd, 1962].

La matriz S_{AN} tiene sólo dos elementos diferentes (P y Q) y su dependencia de la frecuencia está dada por las siguientes ecuaciones:

$$P = \frac{1}{3}(-2S_{12PAR} - S_{12IMPAR}), \tag{79}$$

$$Q = \frac{1}{3}(S_{12PAR} - S_{12IMPAR}), \tag{80}$$

donde

$$S_{PAR} = \frac{(a-c)^2 - b^2 - 1 - 2j(a-c)}{[(a-c)^2 - b^2 - 1]^2 + 4(a-c)^2} \begin{bmatrix} e & f \\ f & e \end{bmatrix},$$

$$S_{IMPAR} = \frac{(a-d)^2 - b^2 - 1 - 2j(a-d)}{[(a-d)^2 - b^2 - 1]^2 + 4(a-d)^2} \begin{bmatrix} g & f \\ f & g \end{bmatrix},$$

y

$$a = \frac{\cot \beta l}{\cos \Phi}, \qquad b = \frac{1}{\cos \Phi \operatorname{sen} \beta l},$$

$$c = \tan \Phi \tan \frac{\beta l}{2}, \qquad d = -\tan \Phi \cot \frac{\beta l}{2},$$

$$e = (a - c)^2 + 1 - b^2, \qquad f = 2jb,$$

$$g = (a - d)^2 + 1 - b^2.$$

Así, de las Ecs. (79) y (80), las gráficas para P y Q se dan en las Figs. 9-16.

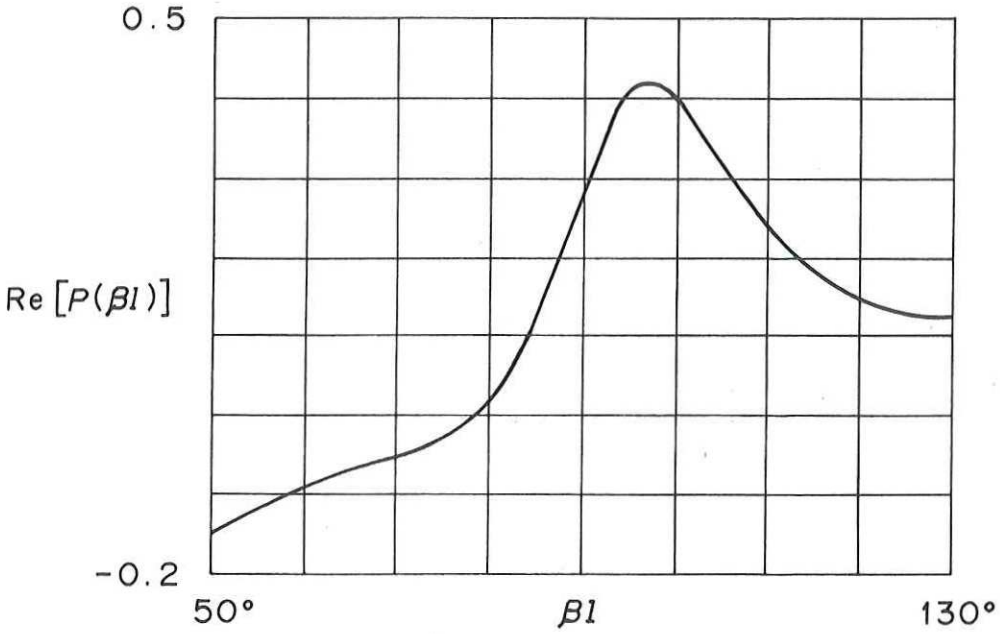

Figura 9. Dependencia de la frecuencia de Re[P].

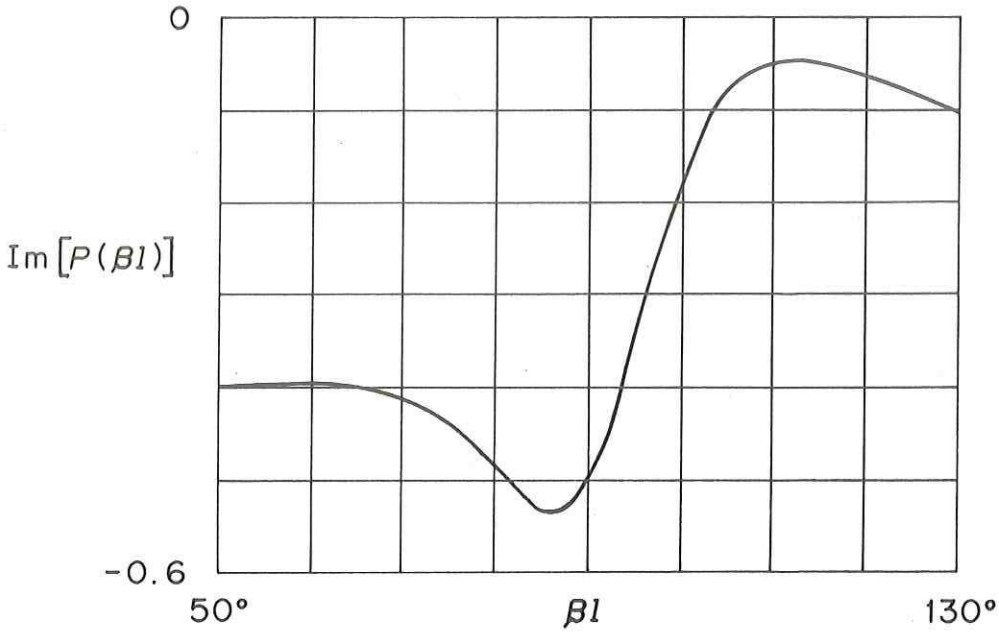

Figura 10. Dependencia de la frecuencia de Im[P].

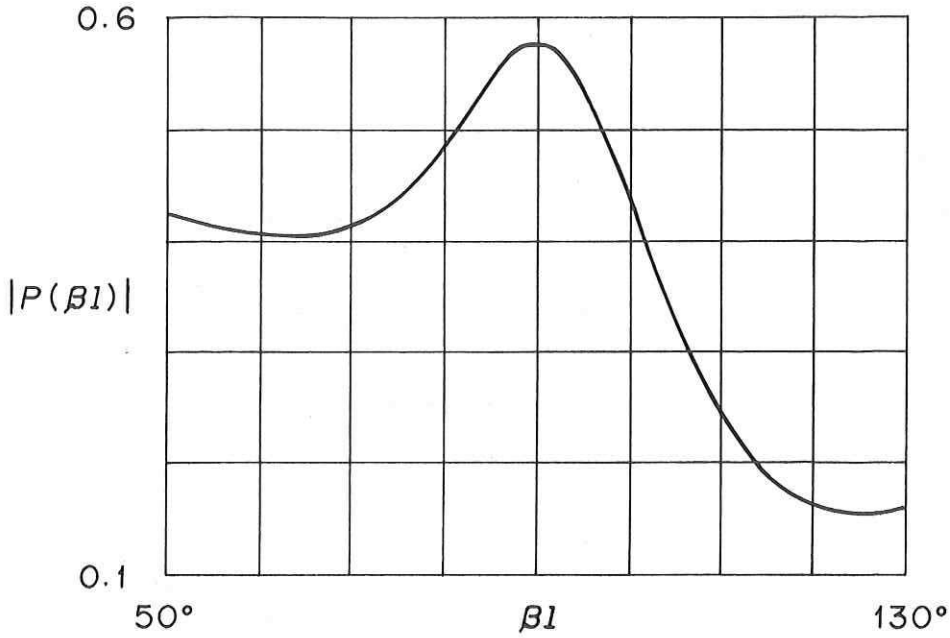

Figura 11. Dependencia de la frecuencia de $|P|$.

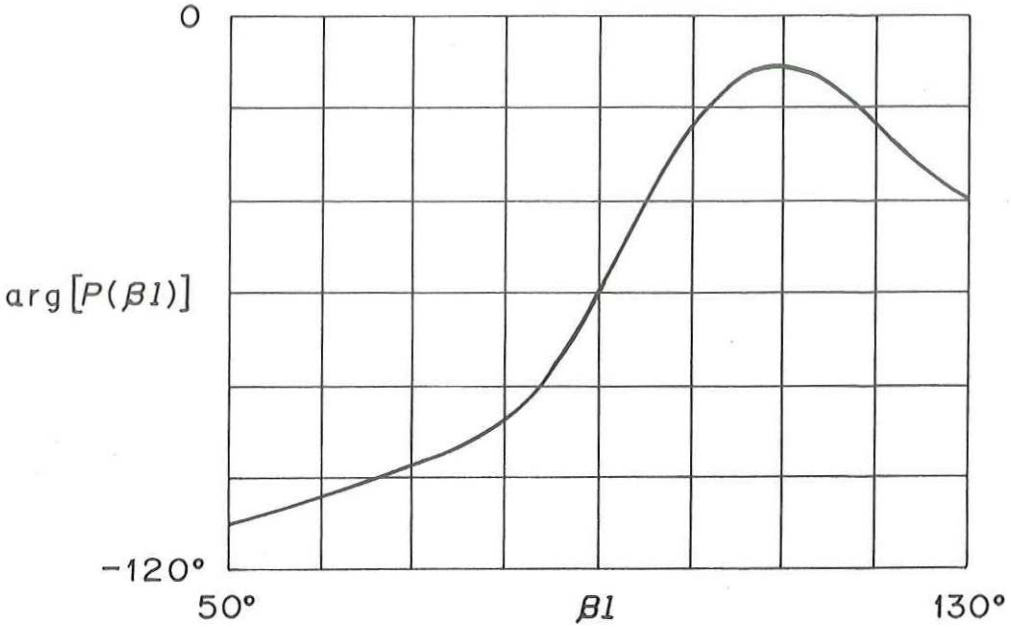

Figura 12. Dependencia de la frecuencia de arg[P].

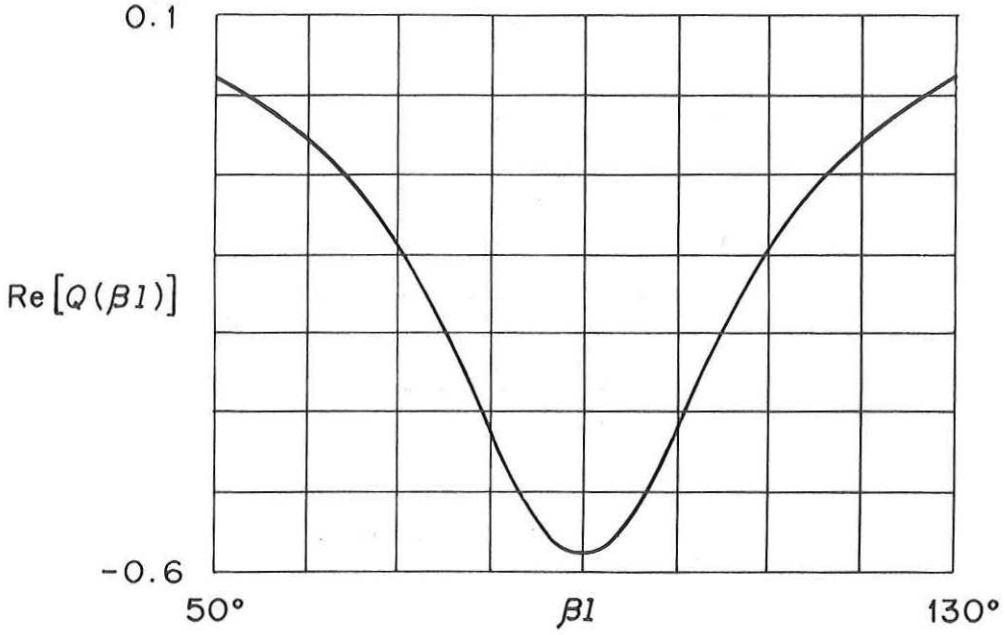

Figura 13. Dependencia de la frecuencia de Re[Q].

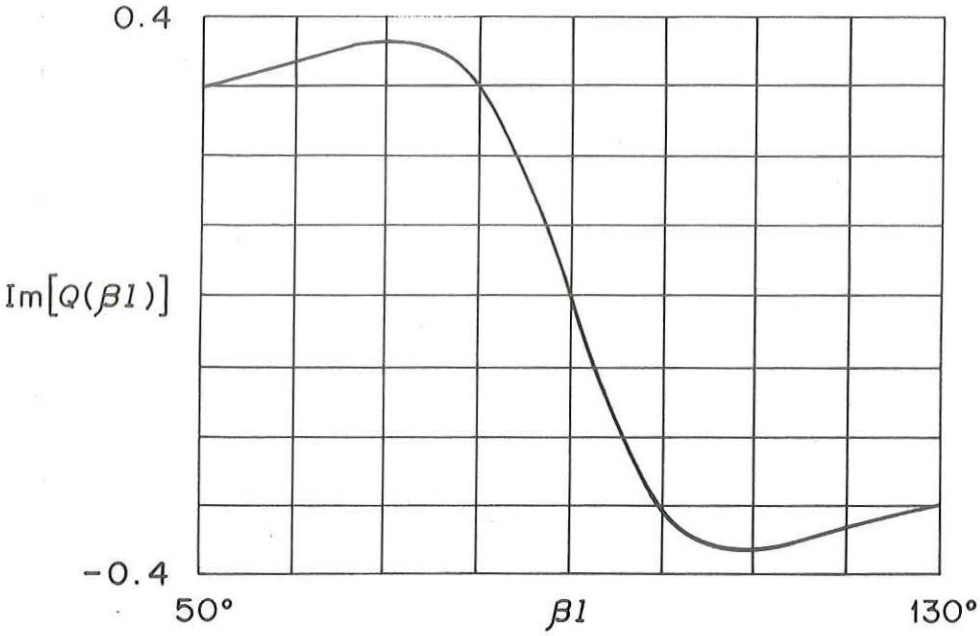

Figura 14. Dependencia de la frecuencia de Im[Q].

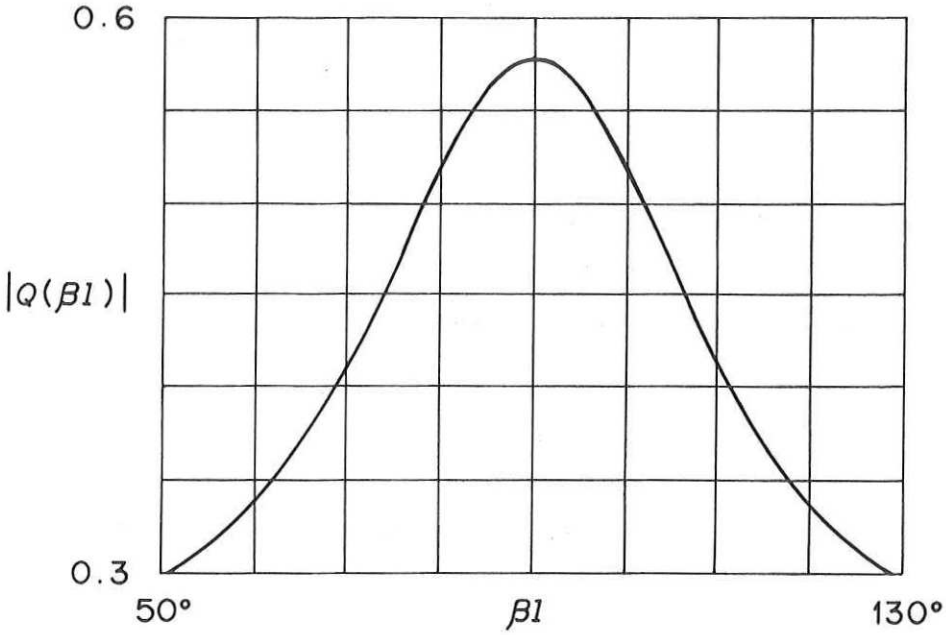

Figura 15. Dependencia de la frecuencia de |Q|.

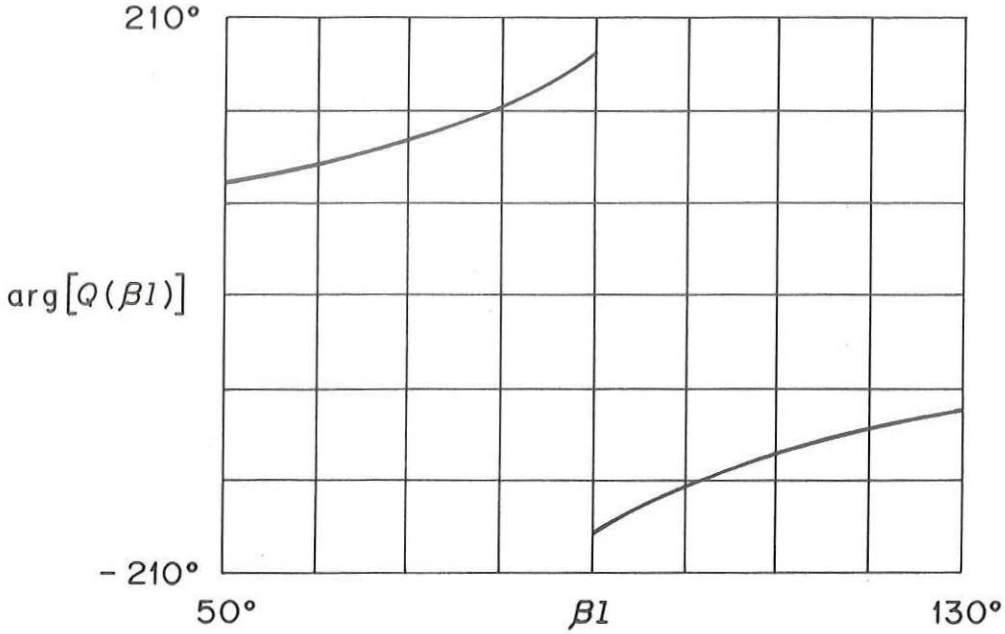

Figura 16. Dependencia de la frecuencia de arg[Q].

V.3 Junta de Purcell

La Fig. 17 muestra la geometría de una estructura conocida como la junta de Purcell [Dicke, 1948b].

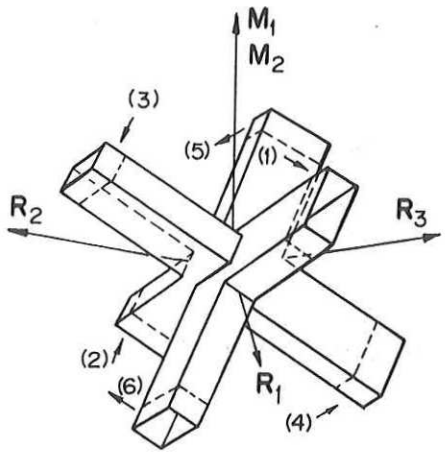

Figura 17. Junta de Purcell.

Esta estructura no tiene planos de simetría pero contiene tres ejes de simetría simples y un eje de simetría triple. Los seis operadores de rotación son I (360°), R_1 (180°), R_2 (180°), R_3 (180°) y, M_1 (120°) y M_2 (240°) en el sentido de las manecillas del reloj.

Este grupo de operadores tiene la siguiente tabla de multiplicación:

Tabla II. Tabla de multiplicación para el grupo de operadores de simetría de la junta de Purcell.

I	R_1	R_2	R_3	M_1	M_2
R_1	I	M_1	M_2	R_2	R_3
R_2	M_2	I	M_1	R_3	R_1
R_3	M_1	M_2	I	R_1	R_2
M_1	R_3	R_1	R_2	M_2	I
M_2	R_2	R_3	R_1	I	M_1

R_1 Y M_1 son generadores del grupo de orden 6, y hay tres subgrupos de orden 2 y uno de orden 3.

Realizando un desarrollo similar al que se hizo para la estructura en estrella, se arriba a la siguiente matriz de dispersión representativa:

$$S_P = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \Phi & \delta & \Phi & \delta \\ \beta & \alpha & \delta & \Phi & \delta & \Phi \\ \Phi & \delta & \alpha & \beta & \Phi & \delta \\ \delta & \Phi & \beta & \alpha & \delta & \Phi \\ \Phi & \delta & \Phi & \delta & \alpha & \beta \\ \delta & \Phi & \delta & \Phi & \beta & \alpha \end{bmatrix}, \qquad (81)$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{6}(s_1 + s_2 + 2s_3 + 2s_4), \tag{82}$$

$$\beta = \frac{1}{6}(s_1 - s_2 + 2s_3 - 2s_4), \tag{83}$$

$$\Phi = \frac{1}{6}(s_1 + s_2 - s_3 - s_4), \tag{84}$$

$$\delta = \frac{1}{6}(s_1 - s_2 - s_3 + s_4). \tag{85}$$

Una forma de obtener de esta matriz la división de potencia y la diferencia de fase relativa entre puertos requeridas, es suponiendo que la junta está acoplada ($\alpha = 0$) y que $\Phi = 0$.

Así, con $\alpha = 0$ y $\Phi = 0$, resulta que

$$\beta = \frac{1}{3}(s_1 + 2s_3),$$

$$\delta = \frac{1}{3}(s_1 - s_3),$$

o que

$$1 \geq |\beta| \geq \frac{1}{3},$$

$$0 \leq |\delta| \leq \frac{2}{3},$$

puesto que $|s_1| = |s_3| = 1$.

Aplicando como antes la transformaciòn bilineal matricial dada por

$$Y_F = (I - S_F)(I + S_F)^{-1}, \tag{86}$$

la matriz de admitancias resultante es

$$Y_F = j \begin{bmatrix} \sigma & \mu & \tau & 0 & \tau & 0 \\ \mu & \sigma & 0 & \tau & 0 & \tau \\ \tau & 0 & \sigma & \mu & \tau & 0 \\ 0 & \tau & \mu & \sigma & 0 & \tau \\ \tau & 0 & \tau & 0 & \sigma & \mu \\ 0 & \tau & 0 & \tau & \mu & \sigma \end{bmatrix}, \tag{87}$$

donde $\sigma = 0.577$, $\mu = -2$ y $\tau = -1.155$.

La síntesis de esta matriz nos lleva a una estructura como la de la Fig. 8 pero con la numeraciòn de puertos cambiada segùn se muestra en la Fig. 18.

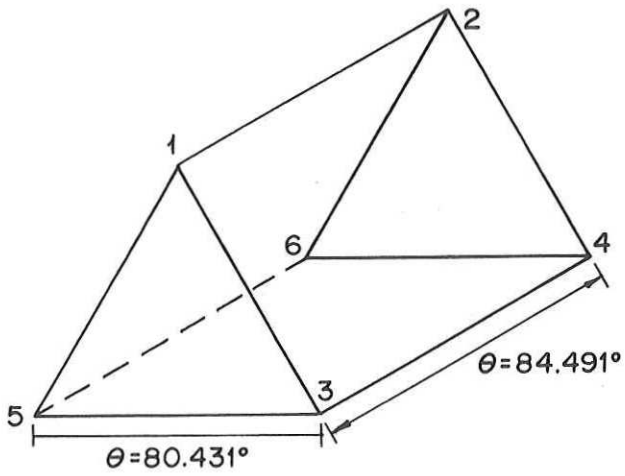

Figura 18. Acoplador direccional hexaportal de la Fig. 8 con los puertos cambiados.

Así pues, el desarrollo anterior indica que para el caso de $\alpha = 0$ y $\Phi = 0$, la junta de Purcell se comporta como un acoplador direccional hexaportal y por tanto con la interconexión de dos de estas estructuras se puede obtener un reflectómetro en guía de onda que cumple con las especificaciones de Engen.

Dos formas de interconectar bien estas estructuras en guía de onda o bien las de triplaca similares a las de Boyd, se muestran en las Figs. 19 y 20 [Dobrowolsky, 1982].

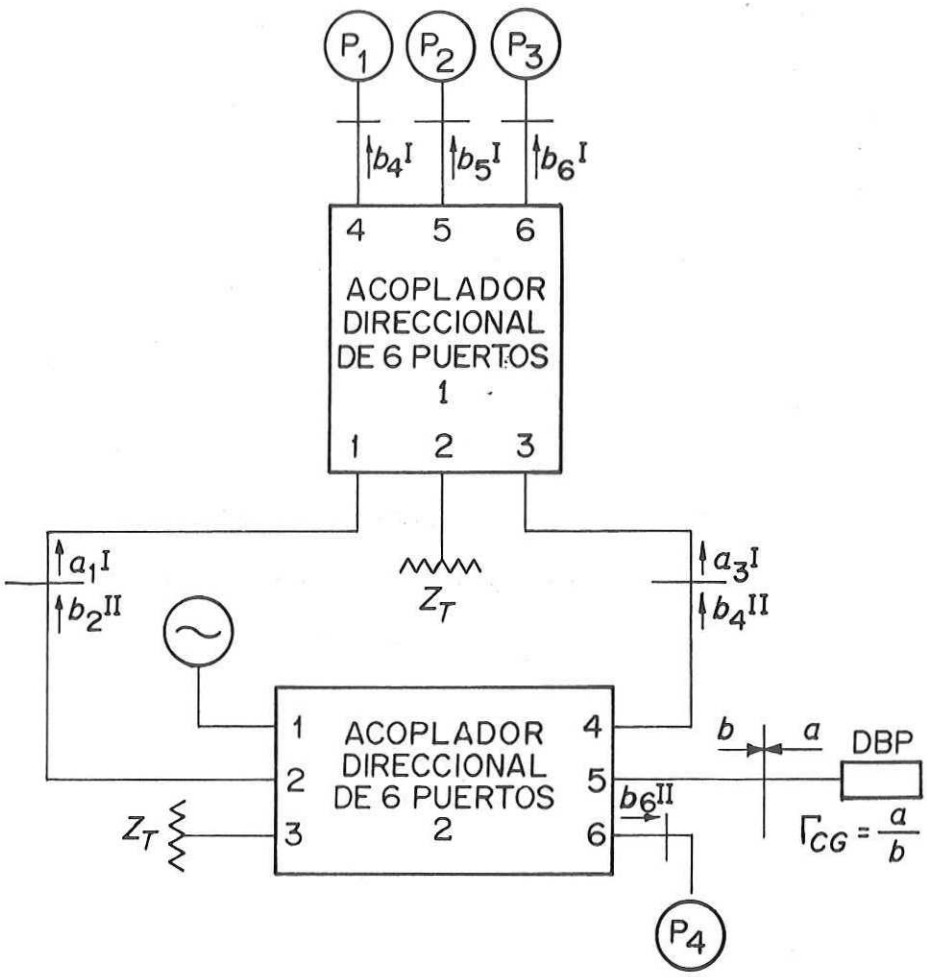

Figura 19. Esquema de un reflectómetro configurado con la interconexión de dos acopladores direccionales hexaportales.

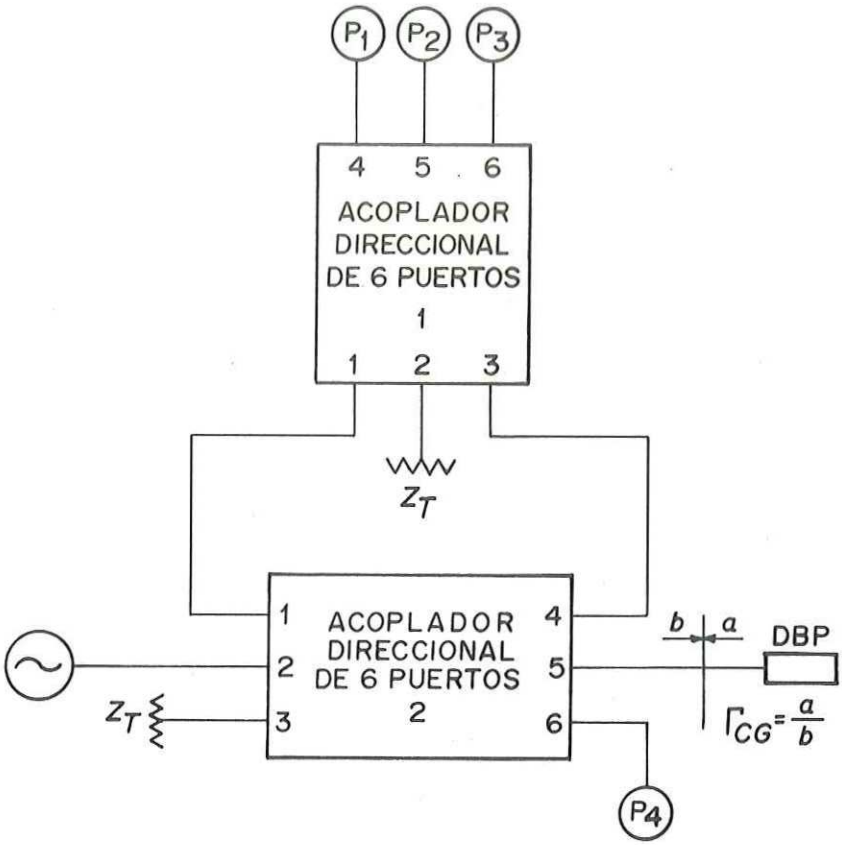

Figura 20. Alternativa del circuito de la Fig. 19.

V.4 Derivación de los números q y las constantes A-H

Suponiendo un funcionamiento ideal para la red hexaportal compuesta de la Fig. 19, i. e., acoplamiento perfecto en los puertos del generador, los sensores de potencia, las terminaciones (Z_T = 50 Ω) y las interconexiones entre los acopladores hexaportales, los valores de sus números y constantes complejas se pueden deducir de la siguiente manera:

De la matriz de dispersión de los acopladores de seis puertos expresada por la Ec. (63) y dado que

$$a_4^{I} = a_5^{I} = a_6^{I} = a_6^{II} = 0, \tag{88}$$

$$a_2^{I} = a_3^{II} = 0, \tag{89}$$

$$a_2^{II} = a_4^{II} = 0, \tag{90}$$

se tiene que

$$b_4^{I} = \alpha^{I} a_1^{I} + \beta^{I} a_3^{I}, \tag{91}$$

$$b_5^{I} = \beta^{I} a_1^{I} + \beta^{I} a_3^{I}, \tag{92}$$

$$b_6^{I} = \beta^{I} a_1^{I} + \alpha^{I} a_3^{I}, \tag{93}$$

$$b_6^{II} = \beta^{II} a_1^{II}. \tag{94}$$

Asimismo, de la Fig. 19 se tiene que

$$a_1^{I} = b_2^{II} = \alpha^{II} a_5^{II}, \tag{95}$$

$$a_3^{I} = b_4^{II} = \alpha^{II} a_1^{II}, \tag{96}$$

$$a_5^{II} = a = b\Gamma_{ca} \tag{97}$$

y

$$\left.\begin{aligned} b_5^{II} &= b = \beta^{II} a_1^{II}, \\ a_1^{II} &= \frac{b}{\beta^{II}}. \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

Sustituyendo estos valores en las Ecs. (91)-(94) resulta que

$$b_4{}^{x} = \alpha^{x}\alpha^{xx} b\Gamma_{CG} + \beta^{x}\alpha^{xx}\frac{b}{\beta^{xx}}$$

$$= \alpha^{x}\alpha^{xx} b\left(\Gamma_{CG} + \frac{\beta^{x}}{\beta^{xx}\alpha^{x}}\right), \tag{99}$$

$$b_5{}^{x} = \beta^{x}\alpha^{xx} b\Gamma_{CG} + \beta^{x}\alpha^{xx}\frac{b}{\beta^{xx}}$$

$$= \beta^{x}\alpha^{xx} b\left(\Gamma_{CG} + \frac{1}{\beta^{xx}}\right), \tag{100}$$

$$b_6{}^{x} = \beta^{x}\alpha^{xx} b\Gamma_{CG} + \alpha^{x}\alpha^{xx}\frac{b}{\beta^{xx}}$$

$$= \beta^{x}\alpha^{xx} b\left(\Gamma_{CG} + \frac{\alpha^{x}}{\beta^{xx}\beta^{x}}\right), \tag{101}$$

$$b_6{}^{xx} = \beta^{xx}\frac{b}{\beta^{xx}} = b. \tag{102}$$

Comparando estas últimas ecuaciones con las Ecs. (114)-(117) del apéndice A, finalmente se tiene que

$$A = \alpha^{x}\alpha^{xx}, \qquad B = \frac{\beta^{x}\alpha^{xx}}{\beta^{xx}}, \qquad C = 0, \qquad D = 1,$$

$$E = \beta^{x}\alpha^{xx}, \qquad F = \frac{\beta^{x}\alpha^{xx}}{\beta^{xx}}, \qquad G = \beta^{x}\alpha^{xx}, \qquad H = \frac{\alpha^{x}\alpha^{xx}}{\beta^{xx}}$$

y

$$q_3 = -\frac{B}{A} = -\frac{\beta^{x}}{\beta^{xx}\alpha^{x}}, \qquad q_5 = -\frac{F}{E} = -\frac{1}{\beta^{xx}},$$

$$q_6 = -\frac{H}{G} = -\frac{\alpha^{x}}{\beta^{xx}\beta^{x}}.$$

Con los valores de los elementos de la matriz S_A del acoplador direccional hexaportal, se puede comprobar que estos números y constantes satisfacen los criterios de diseño. Así, con interconexiones comunes de dos o más juntas (serie, paralelo o casacada), o específicas como en este caso, es posible obtener estructuras hexaportales que ofrezcan un mejor ancho de banda para una frecuencia de operación determinada. Sin embargo, dado que no se pueden obtener simultáneamente un gran ancho de banda y pequeñas pérdidas por inserción, es deseable obtener una estructura de pocas juntas o de junta única que cumpla con un compromiso preestablecido entre estos dos parámetros. De esta manera, con la aplicación del método de síntesis por ramas, existe la posibilidad de obtener una topología óptima si se encuentra una matriz de admitancias simple.

VI. CONCLUSIONES

VI.1 Resultados

Se ha presentado la generalización del método por ramas para la síntesis de estructuras *n*-portales cerradas. El método sintetiza matrices de impedancia o admitancia que se obtienen de la matriz de dispersión a través de una transformación bilineal. A su vez, la matriz de dispersión de una estructura simétrica dada se obtiene utilizando formalismos como la teoría de ecuaciones de autovalores y la teoría de grupos.

Se ha aplicado el método generalizado a la matriz de admitancias de una estructura conocida y se ha obtenido su dual. Tanto la estructura original como su dual son aplicables en la integración de reflectómetros de 6 puertos y analizadores de redes.

Se ha presentado también, a manera de apéndice, una descripción coherente y unificada de la funciones univaluadas de variable compleja, que se derivan de la representación *n*-portal generalizada que se hace para la estructura separadora de señal. Estas funciones son transformaciones bilineales que relacionan por una parte a los autovalores de las matrices de dispersión y de admitancia, y de dispersión e impedancia (ver capítulo III, sección *III.1*), y por otra, a los parámetros de potencia y coeficiente de reflexión, y coeficiente de reflexión e impedancia.

VI.2 Aportaciones

Una inspección de los resultados obtenidos permite destacar algunas aportaciones en el campo de estudio como son las siguientes:

- Establecimiento de las condiciones generales para la síntesis de estructuras simétricas cerradas en dos dimensiones (anillo).

- Concepción de algoritmos de búsqueda sistemática de matrices de dispersión y admitancias.

- Generalización del método de síntesis por ramas a secciones de línea de transmisión de cualquier longitud eléctrica.

- Obtención de redes equivalentes planas y no planas (triangulares delta-estrella en tres dimensiones) físicamente realizables.

- Obtención de estructuras duales al aplicar el método generalizado de síntesis por ramas.

- Derivación de las relaciones funcionales entre los parámetros P y Γ y Γ y Z expresadas a través de transformaciones particulares de la general de Möbius que pueden

ser obtenidas como el producto de transformaciones parciales sencillas.

VI.3 Perspectivas

La caracterización de dispositivos pasivos y activos que operan en la región de las ondas milimétricas (como las guías de onda dieléctricas y los transistores de alta movilidad electrónica, HEMT por sus siglas en inglés) utilizando analizadores de redes heterodinos, ha sido posible gracias a la introducción de conversores de frecuencia que cubren las bandas Q, U, V, E y W (de 33 a 110 GHz). Sin embargo, dada la complejidad de la conversión en estas frecuencias y puesto que en las áreas donde estos dispositivos tienen una mayor aplicación (e. g. las telecomunicaciones) la tendencia es a ir hacia frecuencias más elevadas, los instrumentos de medición del futuro tendrán que estar basados en un concepto de reflectometría y transferometría hexa o *n*-portal ampliamente desarrollado y no heterodino.

Actualmente el concepto de reflectometría hexaportal ha madurado a un grado tal en que sus aplicaciones como un sistema de medición confiable van desde la biomedicina (potencia) [Hoer, 1981], hasta la óptica (ondas submicrométricas) [Zhang, 1991].

No obstante, la obtención de nuevas estructuras separadoras de señal de junta única, con ancho de banda amplio y pocas pérdidas por inserción, que puedan ser utilizadas como el núcleo de reflectómetros hexa o *n*-portales, es un reto que perma-

nece en investigación.

En este contexto, el método generalizado de síntesis por ramas aquí presentado, constituye una herramienta fundamental para la búsqueda de juntas *n*-portales simétricas y cerradas que cumplan con estas características.

Por otra parte, con la aparición de circuitos hexaportales monolíticos, aplicables como controladores de fase [Bergeault, 1992] o como reflectómetros/analizadores de redes [Solomon, 1992], se da el primer paso hacia la integración total de los sistemas de medición en hiperfrecuencias.

VI.4 Recomendaciones

El concepto de reflectometría hexa o *n*-portal tiene sus raíces en lo que fue el "National Bureau of Standards" (NBS) y que hoy se llama "National Institute os Standards and Technology" (NIST) en Boulder, Colorado, E. U. A.

De esta manera, los reflectómetros hexaportales nacen y se desarrollan en principio, en el seno de una institución de tecnología, estándares y metrología, donde surgieron y se les imprimieron características tan significativas como las siguientes:

- Simplicidad en su construcción, operación y calibración.

- Exactitud y precisión superiores.

- Posibilidad de calibración con estándares poco disipativos.

- Calibración estable prolongada.

Estas características los hacen muy apropiados para su utilización en instituciones de diversa índole, donde pueden ser integrados desde su versión más elemental para propósitos de docencia, hasta su versión más sofisticada para propósitos de certificación de estándares como un instrumento patrón o de referencia.

Así pues, con la experiencia ganada luego de la realización de este trabajo, se puede inicar ya la integración de un sistema mínimo para propósitos de enseñanza e investigación.

Esto resulta muy oportuno dado el interés y necesidad que de este tipo de sistemas tienen instituciones como el recien creado CENAM, o el CICESE que actualmente emprende investigación y desarrollo para las telecomunicaciones en ondas milimétricas y submicrométricas.

Finalmente, una vez integrado este primer sistema se podría ofrecer como prototipo para instituciones de investigación y educación superior y trabajar con él mismo en la búsqueda y optimización de técnicas de calibración, automatización y análisis de error.

LITERARTURA CITADA

Altman, J. L. 1964. Microwave Circuits. D. Van Nostrand. Princeton, N. J. pp. 149-161.

Anon. 1987. Vector Measurements of High Frecuency Networks. Seminar, Hewlett Packard., San Diego Cal. pp. 1.5-1.6.

Balabanian, N. y T. A. Bickart. 1972. Teoría de Redes Eléctricas. Editorial Reverté. Barcelona. p. 30.

Bergeault, E., B. Huyart, Y. Delisle y R. G. Bosisio. 1992. A MMIC Six-Port Reflectometer. En: IEEE 35th Midwest Symp. on Circuit and Systems Dig. Washington, D. C. Agosto de 1992. pp. 1485-1488.

Boyd, C. R. 1962. On a Class of Multiple-Line Directional Couplers. IRE Trans. on MTT-10(7): 287-294.

Collin, R. E. 1966. Foundations for Microwave Engineering. McGraw-Hill. New York, N. Y. pp. 170-176.

Dicke, R. H. 1948a. General Microwave Circuit Theorems. p. 149. En: Principles of Microwave Circuits (C. G. Montgomery, R. H. Dicke y E. M. Purcell, Eds.). McGraw-Hill. New York, N. Y. 486 pp.

Dicke, R. H. 1948b. The Symmetry of Waveguide Junctions. pp. 401-479. En: Principles of Microwave Circuits (C. G. Montgomery, R. H. Dicke y E. M. Purcell, Eds.). McGraw-Hill. New Yor, N. Y. 486 pp.

Dobrowolsky, J. A. 1982. Improved Six-Port Circuit for Complex Reflection Coefficient Measurements. Electronics Letters. 18(17): 748-750.

Dueñas-Jiménez, A. y A. Serrano-Santoyo. 1986. Directional Coupler Design Graphs for Parallel Coupled Lines and Interdigitated 3 dB Couplers. RF Design, 9(2): 62-64.

Dueñas-Jiménez, A., A. Serrano-Santoyo y F. J. Mendieta. 1992. On the Synthesis of Some Ring Junctions for Six-Port Measurement Applications. Microwave and Optical Technology Letters. 5(11): 559-563.

Dueñas-Jimenez, A., F. J. Mendieta y A. Serrano-Santoyo. 1993. Síntesis Directa de un Hexapuerto Como Reflectómetro. Revista de Ingeniería, UNAM. México. 54(1): 43-49.

Engen, G. F. y R. W. Beatty. 1959. Microwave Reflectometer Techniques. IRE Trans. on MTT-7(7): 351-355.

Engen, G. F. 1960. A Transfer Instrument for the Intercomparison of Microwave Power Meters. IRE Trans. on IM-9(3): 202-208.

Engen, G. F. 1964. A Variable Impedance Power Meter, and Adjustable Reflection Coefficient Standard. J. Res. Nat. Bur. Stand. 68C(1): 7-24.

Engen, G. F. y C. A. Hoer. 1972. Application of an Arbitrary 6-Port Junction to Power-Measurement Problems. IEEE Trans. on IM-21(4): 470-474.

Engen, G. F. 1977a. The Six-Port Reflectometer: An Alternative Network Analyzer. IEEE Trans. on MTT-25(12): 1075-1080.

Engen, G. F. 1977b. An improved Circuit for Implementing the Six-Port Technique of Microwave Measurements. IEEE Trans. on MTT-25(12): 1080-1083.

Engen, G. F. 1978. Calibrating the Six-Port Reflectometer by Means of Sliding Terminations. IEEE Trans. on MTT-26(12): 951-957.

Engen, G. F. 1987. On-Line Accuracy Assessment for the Dual Six-Port ANA: Background and Theory. IEEE Trans. on IM-36(2): 501-506.

Hansson, E. R. B. y G. P. Riblet. 1983. An Ideal Six-Port Network Consisting of a Matched Reciprocal Lossless Five-Port and a Perfect Directional Coupler. IEEE Trans. on MTT-31 (3): 284-288.

Helszajn, J. 1975a. Nonreciprocal Microwave Junctions and Circulators. John Wiley & Sons. New York, N. Y. pp. 31-59.

Helszajn, J. 1975b. Nonreciprocal Microwave Junctions and Circulators. John Wiley & Sons. New York, N. Y. pp. 65/131-132.

Hoer, C. A. 1972. The Six-Port Coupler: A New Approach to Measuring Voltage, Current, Power, Impedance, and Phase. IEEE Trans. on IM-21(4): 466-470.

Hoer, C. A. 1977. A Network Analyzer Incorporating Two Six-Port Reflectometers. IEEE Trans. on MTT-25(12): 1070-1074.

Hoer, C. A. 1981. A High-Power Dual Six-Port Automatic Network Analyzer Used in Determining Biological Effects of Rf and Microwave Radiation. IEEE Trans. on MTT-29(12): 1356-1364.

Kaliouby, L. y R. G. Bosisio. 1984. A New Method for Six-Port Swept Frecuency Automatic Network Analysis. IEEE Trans. on MTT-32(12): 1678-1682.

Kaliouby, L. y R. G. Bosisio. 1987. A New Transformed Smith Chart for Real-Time Impedance Measurement Using the Six-Port Concept. IEEE Trans. on IM-36(2): 493-495.

Kenderessy, M. 1966. Hungarian Test Equipment works well, but weirdly, mentions an Automatic Impedance Meter, consisting of five directional couplers and three detectors, developed by M. Kenderessy of the Hungarian Research Institute for Telecommunications. "News" in Microwaves.

Newcomb, R. W. 1966a. Linear Multiport Synthesis. McGraw-Hill. New York, N. Y. pp. 49-57.

Newcomb, R. W. 1966b. Linear Multiport Synthesis. McGraw-Hill. New York, N. Y. p. 199.

Pantoja-Rangel, R., A. Dueñas-Jiménez, S. Cervantes-Peterson y R. A. Cantoral-Uriza. 1993. Generación del Gráfico de Smith Usando Elementos de la Geometría Moderna. Revista Mexicana de Física. 39(2): 329-341.

Samuel, A. L. 1947. An Oscilloscope Method of Presenting Impedance on the Reflection Coefficient Plane. Proc. IRE. 35(11): 1279-1283.

Solomon, M. N., P. S. Weitzman, C. P. McClay y H. M. Cronson. 1992. A Monolithic Six-Port Module. IEEE Microwave and Guided Wave Letters. 2(8): 334-336.

Speciale, R. A. 1981. Projective Matrix Transformations in Microwave Network Theory. En: IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig. Los Angeles, Cal. Junio de 1981. pp. 510-512.

Yeo, S. P. y A. L. Ang. 1988. Alternative Approach to the Calibration of Six-Port Reflectometers Using Four Standards. IEE Proceedings Pt. H. 135(5): 353-355.

Zhang, Y., G. Colef, Y. Li y G. Eichmann. 1991. Six-Port Optical Reflectometer. IEEE Trans. on IM-40(5): 869-871.

APENDICE A

TEORIA DE LA REFLECTOMETRIA CON *N*-PUERTOS

A.1 Modelo lineal de un n-puerto

En el capítulo I se mencionó que la diferencia fundamental entre los reflectòmetros o analizadores de redes heterodinos y los hexaportales se encuentra en la secciòn de separaciòn de señal. La estructura separadora de señal de los primeros es de cuatro puertos, mientras que la de los segundos es de seis como su nombre lo indica. De hecho, un reflectòmetro puede ser estructurado con una junta de cuatro o más puertos según los requerimientos y especificaciones de diseño y por tanto resulta más conveniente hacer una descripciòn *n*-portal generalizada para la estructura separadora de señal.

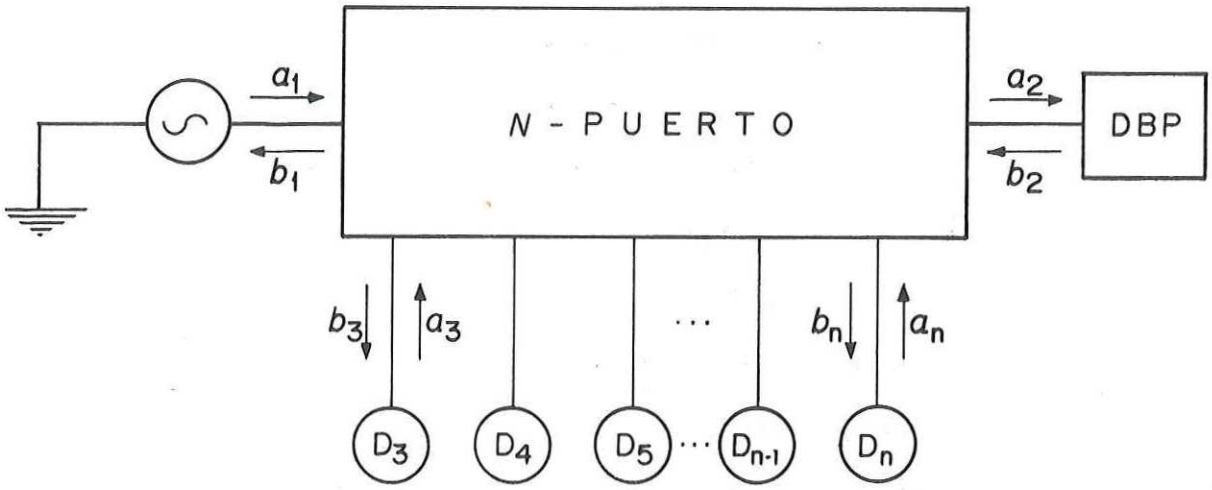

Figura 21. *N*-puerto lineal arbitrario.

La Fig. 21 muestra un n-puerto lineal arbitrario con un generador, n detectores de potencia y el DBP conectados a sus puertos. Las ondas incidente y reflejada en cada puerto designadas por a_i y b_i (i = 1,....n) respectivamente están relacionadas por

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}, \tag{103}$$

donde

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}$$

y $\mathbf{S}$ es la matriz de dispersión nxn del n-puerto.

Designando a el coeficiente de reflexión en los detectores D_j por Γ_j, se tiene que

$$\Gamma_j = \frac{a_j}{b_j}, \tag{104}$$

y substituyendo esta ecuación en la Ec. (103), resulta que

$$b_i = S_{i1}a_1 + S_{i2}a_2 + \sum_{j=3}^{n} S_{ij}\Gamma_j b_j; \tag{105}$$

para i = 1 y 2,

$$0 = S_{i1}a_1 + S_{i2}a_2 + \sum_{\substack{j=3 \\ i \neq j}}^{n} S_{ij}\Gamma_j b_j + (S_{ii}\Gamma_i - 1)b_i; \qquad (106)$$

para $i = 3, \ldots . n$

las cuales representan un sistema de $2n-2$ ecuaciones con $2n$ variables que puede ser resulto para cualesquiera $2n-2$ variables en función de las dos restantes.

Las Ecs. (105) y (106) pueden ser expresadas en forma matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{b}' = \mathbf{S}'\mathbf{a}', \qquad (107)$$

donde

$$\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}' = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

y $\mathbf{S}'$ es la matriz de dispersión modificada dada por

$$\mathbf{S}' = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13}\Gamma_3 & S_{14}\Gamma_4 & . & \ldots\ldots \\ S_{21} & S_{22} & S_{23}\Gamma_3 & S_{24}\Gamma_4 & . & \ldots\ldots \\ S_{31} & S_{32} & S_{33}\Gamma_3 - 1 & S_{34}\Gamma_4 & . & \ldots\ldots \\ S_{41} & S_{42} & S_{43}\Gamma_3 & S_{44}\Gamma_4 - 1 & S_{45}\Gamma_5 & \ldots\ldots \\ . & . & . & S_{54}\Gamma_4 & . & \ldots\ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots\ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots\ldots \\ S_{n1} & S_{n2} & S_{n3}\Gamma_3 & S_{n4}\Gamma_4 & . & \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & S_{1n}\Gamma_n \\ \cdot & \cdot & S_{2n}\Gamma_n \\ \cdot & \cdot & S_{3n}\Gamma_n \\ \cdot & \cdot & S_{4n}\Gamma_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & S_{nn}\Gamma_n - 1 \end{matrix} \Bigg] . \qquad (108)$$

Si la $2n$-2 ecuaciones son independientes, la matriz S' es no singular (lo cual sucede en la práctica) y por tanto S' puede ser invertida para dar

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V} &= (\mathbf{S}')^{-1}, \\ \mathbf{a}' &= \mathbf{V}\mathbf{b}'. \end{aligned}\right\} \qquad (109)$$

Desarrollando la Ec. (109) se tiene que

$$a_i = V_{i1}b_1 + V_{i2}b_2; \text{ para } i = 1 \text{ y } 2, \qquad (110)$$

$$b_i = V_{i1}b_1 + V_{i2}b_2; \text{ para } i = 3, \ldots . n, \qquad (111)$$

donde V_{ij} (j = 1 y 2) son los elementos de la matriz V.

De la Ec. (110) y para i = 2 dado que el DBP se encuentra conectado al puerto 2 de la Fig. 21, se tiene que

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= V_{21}b_1 + V_{22}b_2, \\ b_1 &= \frac{a_2 - V_{22}b_2}{V_{21}}. \end{aligned}\right\} \qquad (112)$$

Substituyendo b_1 en la Ec. (111) resulta que

$$b_i = I_i a_2 + J_i b_2; \text{ para } i = 3, \ldots . n, \tag{113}$$

donde

$$I_i = \frac{V_{i1}}{V_{21}}$$

y

$$J_i = V_{i2} - \frac{V_{22} V_{i1}}{V_{21}}; \text{ para } i = 3, \ldots . n.$$

Así, utilizando la nomenclatura empleada por Engen (1977a), para un hexapuerto se tiene que

$$b_3 = I_3 a_2 + J_3 b_2 = A a_2 + B b_2 = A b_2 (\Gamma_2 + B/A), \tag{114}$$

$$b_5 = I_5 a_2 + J_5 b_2 = E a_2 + F b_2 = E b_2 (\Gamma_2 + F/E), \tag{115}$$

$$b_6 = I_6 a_2 + J_6 b_2 = G a_2 + H b_2 = G b_2 (\Gamma_2 + H/G), \tag{116}$$

$$b_4 = I_4 a_2 + J_4 b_2 = C a_2 + D b_2 = C b_2 (\Gamma_2 + D/C), \tag{117}$$

donde $\Gamma_2 = a_2/b_2$, $B/A = -q_3$, $F/E = -q_5$ y $H/G = -q_6$.

De las Ecs. (113)-(117), cuatro formulaciones para la transformación entre los parámetros de potencia (P) y coeficiente de reflexión (Γ), obtenidas a través de factorizaciones diferentes de las constantes A-H, se expresan en las siguientes secciones.

La primera es una transformación bilineal que se reduce a una lineal al hacer una aproximación (constante $C = 0$) para minimizar la dependencia que tienen los números q de Γ. En esta transformación se factorizan las constantes A-H y los números q de tal forma que permiten, a través de la síntesis, encontrar sus valores de acuerdo a los criterios de Engen. Esta transformación ha sido utilizada además en la obtención de cartas de amplitud y fase [Kaliouby, 1984] para mediciones de Γ en ancho de banda y tiempo real.

La segunda es una transformación útil para la calibración que se efectúa en dos pasos introduciendo el parámetro complejo w (P-w, w-Γ) [Engen, 1978]. La transformación P-w reduce el comportamiento del reflectómetro de seis puertos al de uno de cuatro puertos y es conocida como la "reducción de seis a cuatro puertos". En esta primera transformación se determinan cinco de los once parámetros necesarios para la calibración del hexapuerto. La transformación w-Γ es también bilineal y describe la operación de un reflectómetro de cuatro puertos en el que se determinan los seis parámetros restantes.

La tercera es una transformación que ha sido utilizada para mediciones de impedancia (Z) en tiempo real introduciendo en la transformación P-Γ la transformación Γ-Z [Kaliouby, 1987].

Finalmente, la cuarta es también una transformación útil para la calibración en la que se separa a las constantes A-H en tres escalares y cuatro complejas para dar lugar a los once parámetros de calibración dependientes de la frecuencia y cuyos

valores son determinados por la estructura y componentes del sistema [Engen, 1987; Yeo, 1988].

Todas las transformaciones bilineales utilizadas se definen como funciones univaludas de variable compleja [Speciale, 1981].

A.2 Relaciones funcionales entre P y Γ para la síntesis

Combinando los valores absolutos de las Ecs. (113) y (117), la relación entre las diferentes lecturas de potencia y Γ_2 (Fig. 21) se expresa mediante la transformación bilineal siguiente:

$$\overline{P}_k = \left| \frac{I_k a_2 + J_k b_2}{C a_2 + D b_2} \right| = \left| \frac{I_k \Gamma_2 + J_k}{C \Gamma_2 + D} \right|; \qquad (118)$$

para k = 3, 5 y 6,

donde $\overline{P}_k = (P_k/P_4)^{1/2}$ es la raíz cuadrada de la potencia en los puertos 3, 5 y 6 normalizada a la potencia en el puerto 4.

Asimismo, de las Ecs. (114)-(116), las respuestas de potencia en los puertos 3, 5 y 6 forman el sistema de ecuaciones siguiente:

$$P_3 = |b_3|^2 = |Aa_2 + Bb_2|^2 = |A|^2 |b_2|^2 |\Gamma_2 - q_3|^2, \qquad (119)$$

$$P_5 = |b_5|^2 = |Ea_2 + Fb_2|^2 = |E|^2 |b_2|^2 |\Gamma_2 - q_5|^2, \qquad (120)$$

$$P_6 = |b_6|^2 = |Ga_2 + Hb_2|^2 = |G|^2 |b_2|^2 |\Gamma_2 - q_6|^2. \qquad (121)$$

La solución de este sistema para Γ_2, representa un proble-

ma de geometría tridimensional que puede ser resuelto en forma más conveniente en dos dimensiones.

Así, si en la ecuación de la potencia en el puerto 4 dada por

$$P_4 = |b_4|^2 = |Ca_2 + Db_2|^2, \tag{122}$$

se introduce una aproximación considerando a la constante C igual a cero y luego se divide a las Ecs. (119)-(121) entre ésta, se obtiene en términos de mediciones de potencia relativa, el sistema en dos dimensiones (plano complejo) de tres ecuaciones dado por

$$|\Gamma_2 - q_3|^2 = \left|\frac{D}{A}\right|^2 \frac{P_3}{P_4}, \tag{123}$$

$$|\Gamma_2 - q_5|^2 = \left|\frac{D}{E}\right|^2 \frac{P_5}{P_4}, \tag{124}$$

$$|\Gamma_2 - q_6|^2 = \left|\frac{D}{G}\right|^2 \frac{P_6}{P_4}. \tag{125}$$

A.3 Relaciones funcionales entre P y Γ para la calibración con un parámetro intermedio

Una forma conveniente de resolver el problema de la calibración se logra efectuando la transformación P-Γ en fracciones. Introduciendo un parámetro intermedio, la transformación se puede separar en dos partes la primera de las caules se plantea a continuación.

En la sección *A.1* se ha demostrado que las Ecs. (105) y (106) representan un sistema que puede ser resuelto en función de cualesquiera dos de sus variables componentes. De esta manera, el sistema se puede resolver en términos de b_3 y b_4 resultando que

$$P_5 = |b_5|^2 = |Kb_3 + Lb_4|^2, \tag{126}$$

$$P_6 = |b_6|^2 = |Mb_3 + Nb_4|^2. \tag{127}$$

Ahora bien, por definición

$$P_3 = |b_3|^2, \tag{128}$$

$$P_4 = |b_4|^2. \tag{129}$$

Así, relacionando a las Ecs. (126)-(128) con la Ec. (129), de nueva cuenta se tiene un sistema en dos dimensiones de tres ecuaciones dado por

$$\frac{P_3}{P_4} = |w|^2, \tag{130}$$

$$\frac{P_5}{P_4} = \Phi|w - w_1|^2, \tag{131}$$

$$\frac{P_6}{P_4} = \emptyset|w - w_2|^2, \tag{132}$$

donde $w = b_3/b_4$, $w_1 = -L/K$ con $\arg w_1 = 0$, $w_2 = -N/M$, $\Phi = |K|^2$ y $\emptyset = |M|^2$.

Resolviendo este sistema para w, la segunda parte se puede formular con las Ecs. (114) y (117) para obtener la transformación bilineal siguiente:

$$w = \frac{b_3}{b_4} = \Gamma_M = \frac{w_3\Gamma_{CG} + w_4}{w_5\Gamma_{CG} + 1}, \qquad (133)$$

donde $w_3 = A/D$, $w_4 = B/D$, $w_5 = C/D$.

Esta transformación representa la relación entre el coeficiente de reflexión verdadero en la carga Γ_{CG} y el coeficiente de reflexión de lectura de medición "descalibrado" Γ_M observado en un reflectómetro de cuatro puertos imperfecto (Fig. 22). Este sistema de medición está compuesto de dos acopladores direccionales en cascada y un voltímetro vectorial (detector de relación compleja) conectado a sus brazos laterales.

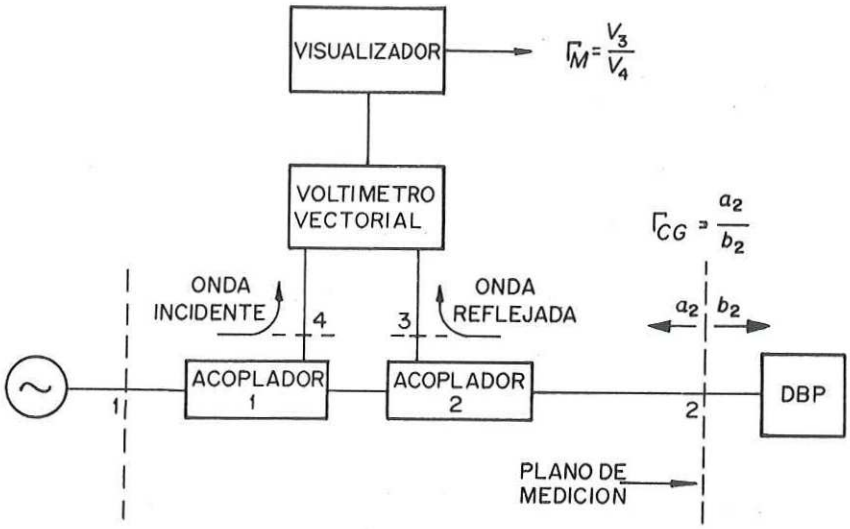

Figura 22. Reflectómetro de cuatro puertos para la medición del coeficiente de reflexión en el DBP (Γ_{CG}). Γ_M es la relación vectorial de los voltajes en los brazos laterales de los acopladores direccionales.

A.4 Relaciones funcionales entre P y Γ para medicion de impedancia en tiempo real

Relacionando los valores absolutos cuadrados de las Ecs. (114)-(116) con el valor absoluto cuadrado de la Ec. (117), se obtienen para los puertos 3, 5 y 6 de la Fig. 21 y en términos de potencia normalizada, las siguientes transformaciones:

$$\frac{P_3}{P_4} = \left|\frac{A}{C}\right|^2 \left|\frac{\Gamma_2 + B/A}{\Gamma_2 + D/C}\right|^2 , \tag{134}$$

$$\frac{P_5}{P_4} = \left|\frac{E}{C}\right|^2 \left|\frac{\Gamma_2 + F/E}{\Gamma_2 + D/C}\right|^2 , \tag{135}$$

$$\frac{P_6}{P_4} = \left|\frac{G}{C}\right|^2 \left|\frac{\Gamma_2 + H/G}{\Gamma_2 + D/C}\right|^2 , \tag{136}$$

Introduciendo en éstas la transformación Γ-Z la cual ha sido ampliamente tratada como una particular de la general de Möbius [Pantoja-Rangel, 1993], las transformaciones entre P y Z quedan dadas por

$$\frac{P_3}{P_4} = \left|\frac{A}{C}\right|^2 \left|\frac{\dfrac{Z-1}{Z+1} + B/A}{\dfrac{Z-1}{Z+1} + D/C}\right|^2 , \tag{137}$$

$$\frac{P_5}{P_4} = \left|\frac{E}{C}\right|^2 \left|\frac{\dfrac{Z-1}{Z+1} + F/E}{\dfrac{Z-1}{Z+1} + D/C}\right|^2 , \tag{138}$$

$$\frac{P_3}{P_4} = \left|\frac{G}{C}\right|^2 \left|\frac{\dfrac{Z-1}{Z+1} + H/G}{\dfrac{Z-1}{Z+1} + D/C}\right|^2 . \tag{139}$$

Estas relaciones representan una carta de Smith elipsoidal proyectada en los planos P_3/P_4, P_5/P_4 o P_3/P_4, P_6/P_4 y sobre la que se pueden leer las partes real e imaginaria de Z en tiempo real.

A.5 Relaciones funcionales entre P y Γ para la calibración con tres parámetros intermedios

De la Ec. (118) y para Γ_i (i = 0, 1, 2 y 3) correspondiente a cuatro estándares de calibración diferentes y conocidos (una carga acoplada, y tres terminaciones de reactancia variable una de ellas en circuito corto) se tiene que

$$\frac{P_k}{P_4} = |B_k| \left|\frac{A_k\Gamma_i + 1}{A_4\Gamma_i + 1}\right|^2 , \tag{140}$$

donde $A_k = I_k/J_k$, $A_4 = C/D$ y $|B_k| = |J_k/D|^2$ para k = 3, 5 y 6.

Las cuatro constantes complejas A_3, A_4, A_5 y A_6 y las tres escalares $|B_3|$, $|B_5|$ y $|B_6|$ constituyen los once parámetros rea

les que se requiere determinar.

Para $\Gamma_o = 0$ (carga acoplada), las constantes escalares son iguales a las relaciones de potencia P_k/P_4 sensadas por los detectores.

Para

$$\Gamma_i = \exp[j(\pi - \emptyset_i)]; \text{ con } i = 1,\ 2 \text{ y } 3 \tag{141}$$

y con $\emptyset_1 = 0$, $\emptyset_2 = \emptyset_1 + 2\pi/3$ y $\emptyset_3 = \emptyset_1 - 2\pi/3$, las constantes complejas se obtienen como sigue.

Substituyendo la Ec. (141) en la Ec. (140) resulta que

$$\frac{1}{R_{ki}}\left|A_k - \exp(j\emptyset_i)\right| = x_i; \text{ para } k = 3,\ 4,\ 5 \text{ y } 6 \text{ e } i = 1,\ 2 \text{ y } 3, \tag{142}$$

donde x_1, x_2 y x_3 son tres parámetros intermedios que no dependen del valor de k, y donde

$$R_{ki} = \left|\frac{1}{|B_k|}\left(\frac{P_k}{P_4}\right)_i\right|^{1/2}, \tag{143}$$

esto es, la raíz cuadrada de la relación obtenida al dividir la lectura P_k/P_4 tomada con $\Gamma = \Gamma_i$ (i = 1, 2 y 3) entre la lectura tomada con $\Gamma_o = 0$. Cabe destacar que para $k = 4$ (puerto de potencia de referencia o normalización), las R_{4i} (i = 1, 2 y 3) se normalizan a 1.

Una vez más, la Ec. (142) representa un sistema en dos dimensiones de doce ecuaciones que describen cada una un círculo

en el plano complejo A_k. Para cada valor de k se asocian tres círculos cuya intersección común proporciona las constantes A_k.

A.6 Conclusiones del apéndice

En las secciones anteriores se han mostrado diversas formulaciones de la relación entre la potencia y el coeficiente de reflexión útiles para la síntesis, la calibración y la medición en ancho de banda y tiempo real.

Las diferentes factorizaciones de las constantes A-H y la separación en partes de las transformaciones, muestran la viabilidad de obtener técnicas de calibración simplificadas donde no se haga necesario determinar los once parámetros de calibración simultáneamente [Engen, 1978; Yeo, 1988].

Esto sugiere la posibilidad de utilizar transformaciones parciales simples como las de translación, rotación, dilatación y reciprocidad para lograr una combinación de técnicas de calibración que facilite la obtención de los once parámetros mencionados.

Todas las transformaciones bilineales utilizadas en las secciones anteriores son particulares de la general de Möbius la cual se puede obtener como el producto de no más de siete transformaciones de los tipos sencillos [Pantoja-Rangel 1993].

La transformación general de Möbius está dada por

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \tag{144}$$

y se puede expresar en términos de su determinante matricial ($\delta = ad - bc$) de la siguiente manera:

Multiplicando por c/c la Ec. (144) se tiene que

$$W = \frac{1}{c}\,\frac{acz + bc}{cz + d} \tag{145}$$

y sumando y restando el término ad al numerador, resulta que

$$w = \frac{1}{c}\,\frac{acz + ad - ad + bc}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{\delta}{c}\,\frac{1}{cz + d} \tag{146}$$

y con c compleja,

$$w = \frac{a}{c} + \underbrace{\underbrace{\underbrace{\left|\frac{\delta}{c}\right| \underbrace{\exp(j\sigma)\,\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{|c|\exp(j\epsilon)z + d}}_{\mathbf{R}_\epsilon}}_{\mathbf{D}_{|c|}}}_{\mathbf{T}_d}}_{\mathbf{R}}}_{\mathbf{R}_\sigma}}_{\mathbf{D}_{|\delta/c|}}}_{\mathbf{T}_{a/c}} \tag{147}$$

De esta ecuación, partiendo de derecha a isquierda, se pue

den observar las siete transformaciones simples que la componen, esto es

$$G = w = T_{a/c}D_{|\delta/c|}R_{\sigma}RT_{d}D_{|c|}R_{\epsilon}, \tag{148}$$

o bien

$$G = \begin{bmatrix} 1 & a/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\delta/c| & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(j\sigma) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |c| & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(j\epsilon) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{149}$$

donde G es un grupo de operadores de transformación.

APENDICE B

LISTADOS DE LOS PROGRAMAS PARA LA BUSQUEDA DE MATRICES DE DISPERSION Y ADMITANCIAS

```
C***ESTRUCTURAS SIMETRICAS DE ANILLO EN  MICROONDAS***C
C*****************************************************C
C        PROGRAMA PARA LA BUSQUEDA DE MATRICES        C
C  DE ESTRUCTURAS PENTAPORTALES SIMETRICAS DE ANILLO  C
C                (ALGORITMO  RIGUROSO)                C
C   A L E J A N D R O   D U E N A S   J I M E N E Z   C
C            COLIMA, COLIMA AGOSTO DE 1991            C
C*****************************************************C
      COMPLEX AI(20,20),AL(20,20),G(20,20),H(20,19),TEMP
      DIMENSION A(20,20),AS(20,19),AST(20,20),C(20,20)
     &,D(20,20),E(20,20),Q1(20,39),R1(20,20),U1(20,20)
     &,V1(20,20),Q2(20,20),R2(20,20),U2(20,20),V2(20,20)
     &,W(20,20),X(20,20),PAR1(20),PAR2(20),PAR3(20)
     &,PAR4(20),TER1(20),TER2(20),TER3(20),TER4(20)
      CHARACTER*10 FNAME
      WRITE(*,*)'*************************************'
      WRITE(*,*)'*    E      S      A      5      A    *'
      WRITE(*,*)'*      ESTRUCTURAS PENTAPORTALES      *'
      WRITE(*,*)'*        SIMETRICAS DE  ANILLO        *'
      WRITE(*,*)'*        BUSQUEDA DE  MATRICES        *'
      WRITE(*,*)'*       CON ALGORITMO  RIGUROSO       *'
      WRITE(*,*)'*    COLIMA, COLIMA AGOSTO DE 1991    *'
      WRITE(*,*)'*      ALEJANDRO DUENAS  JIMENEZ      *'
      WRITE(*,*)'*************************************'
      WRITE(*,1)
    1 FORMAT(' DAME EL ORDEN DE LA MATRIZ S:  ')
      READ(*,*) N
      NP1=N+1
      M=N+N
      PI=3.141592654D0
      WRITE(*,*)'NOMBRE DEL ARCHIVO DE LA MATRIZ'
      WRITE(*,2)
    2 FORMAT(' DE AUTOVECTORES DE S?  ')
      READ(*,3) FNAME
    3 FORMAT(A)
      OPEN(3,FILE=FNAME)
      READ(3,4) ((AS(I,J),J=1,N),I=1,N)
    4 FORMAT(5F7.3)
      DO 5 K=1,N
      DO 5 I1=1,N
    5 AST(K,I1)=AS(I1,K)
      CLOSE(3,STATUS='KEEP')
      WRITE(*,36)
   36 FORMAT(/' DAME LOS VALORES INICIALES DE LAS THETAS',
     &        ' EN GRADOS:  ')
      READ(*,*) THEGI1,THEGI2,THEGI3
      THERI1=THEGI1*PI/180.0D0
      THERI2=THEGI2*PI/180.0D0
      THERI3=THEGI3*PI/180.0D0
      WRITE(*,6)
    6 FORMAT(' DAME LOS INCREMENTOS DE LAS THETAS EN GRADOS:  ')
```

```
      READ(*,*) THEG1,THEG2,THEG3
      THER1=THEG1*PI/180.0D0
      THER2=THEG2*PI/180.0D0
      THER3=THEG3*PI/180.0D0
      WRITE(*,7)
    7 FORMAT(' DAME EL NUMERO DE ITERACIONES PARA CADA THETA:  ')
      READ(*,*) IT1,IT2,IT3
      THETAR1=THERI1
      DO 8 J1=1,IT1
      THETAR2=THERI2
      DO 80 K1=1,IT2
      THETAR3=THERI3
      DO 800 L1=1,IT3
      DO 10 I2=1,N
      DO 10 J2=1,N
      IF(I2-J2) 12,11,12
   11 AI(J2,I2)=CMPLX(1.0D0,0.0D0)
      IF(I2.EQ.1) AL(J2,I2)=CMPLX(COS(THETAR1),SIN(THETAR1))
      IF(I2.EQ.2) AL(J2,I2)=CMPLX(COS(THETAR2),SIN(THETAR2))
      IF(I2.EQ.3) AL(J2,I2)=CMPLX(COS(THETAR3),SIN(THETAR3))
      IF(I2.EQ.4) AL(J2,I2)=CMPLX(COS(THETAR3),SIN(THETAR3))
      IF(I2.EQ.5) AL(J2,I2)=CMPLX(COS(THETAR2),SIN(THETAR2))
      GO TO 10
   12 AI(J2,I2)=CMPLX(0.0D0,0.0D0)
      AL(J2,I2)=AI(J2,I2)
   10 CONTINUE
      DO 13 K2=1,N
      DO 13 L2=1,N
      Q1(K2,L2)=0.0D0
      R1(K2,L2)=0.0D0
      DO 13 I3=1,N
      PAR1(I3)=AS(K2,I3)*REAL(AL(I3,L2))
      Q1(K2,L2)=Q1(K2,L2)+PAR1(I3)
      PAR2(I3)=AS(K2,I3)*AIMAG(AL(I3,L2))
   13 R1(K2,L2)=R1(K2,L2)+PAR2(I3)
      DO 14 J3=1,N
      DO 14 K3=1,N
      U1(J3,K3)=0.0D0
      V1(J3,K3)=0.0D0
      DO 14 L3=1,N
      PAR3(L3)=Q1(J3,L3)*AST(L3,K3)
      U1(J3,K3)=U1(J3,K3)+PAR3(L3)
      PAR4(L3)=R1(J3,L3)*AST(L3,K3)
   14 V1(J3,K3)=V1(J3,K3)+PAR4(L3)
C     IF(U1(1,1).LT.-0.0005.OR.U1(1,1).GT.0.0005) GO TO 33
C     IF(V1(1,1).LT.-0.0005.OR.V1(1,1).GT.0.0005) GO TO 33
      SM=SQRT((U1(1,1))**2+(V1(1,1))**2)
      IF(SM.GT.0.0005) GO TO 33
      DO 15 I4=1,N
      DO 15 J4=1,N
      A(I4,J4)=AI(I4,J4)-U1(I4,J4)
```

```
      E(I4,J4)=AI(I4,J4)+U1(I4,J4)
   15 G(I4,J4)=CMPLX(E(I4,J4),V1(I4,J4))
      DO 16 K4=NP1,M
      DO 16 L4=1,N
      IF(K4-N-L4) 18,17,18
   17 G(L4,K4)=CMPLX(1.0D0,0.0D0)
      GO TO 16
   18 G(L4,K4)=CMPLX(0.0D0,0.0D0)
   16 CONTINUE
   19 IF(REAL(G(1,1)).EQ.0.0.AND.AIMAG(G(1,1)).EQ.0.0) GO TO 20
      GO TO 23
   20 I5=M-N
      DO 21 J5=2,I5
      IF(REAL(G(1,J5)).EQ.0.0.AND.AIMAG(G(1,J5)).EQ.0.0) GO TO 21
      DO 22 K5=1,M
      TEMP=G(1,K5)
      G(J5,K5)=G(1,K5)
   22 G(1,K5)=TEMP
      GO TO 23
   21 CONTINUE
      WRITE(*,*)'LA MATRIZ ES SINGULAR'
      GO TO 33
   23 DO 24 L5=2,M
      DO 24 I6=2,N
   24 H(I6-1,L5-1)=G(I6,L5)-G(1,L5)*G(I6,1)/G(1,1)
      DO 25 J6=2,M
   25 H(N,J6-1)=G(1,J6)/G(1,1)
      M=M-1
      DO 26 K6=1,M
      DO 26 L6=1,N
   26 G(K6,L6)=H(K6,L6)
      IF(M-N) 19,27,19
   27 DO 28 I7=1,N
      DO 28 J7=1,N
      C(I7,J7)=REAL(G(I7,J7))
   28 D(I7,J7)=AIMAG(G(I7,J7))
      DO 29 K7=1,N
      DO 29 L7=1,N
      Q2(K7,L7)=0.0D0
      R2(K7,L7)=0.0D0
      U2(K7,L7)=0.0D0
      V2(K7,L7)=0.0D0
      DO 29 I8=1,N
      TER1(I8)=A(K7,I8)*C(I8,L7)
      Q2(K7,L7)=Q2(K7,L7)+TER1(I8)
      TER2(I8)=-V1(K7,I8)*D(I8,L7)
      R2(K7,L7)=R2(K7,L7)+TER2(I8)
      TER3(I8)=A(K7,I8)*D(I8,L7)
      U2(K7,L7)=U2(K7,L7)+TER3(I8)
      TER4(I8)=-V1(K7,I8)*C(I8,L7)
   29 V2(K7,L7)=V2(K7,L7)+TER4(I8)
```

```
      DO 30 J8=1,N
      DO 30 K8=1,N
      W(J8,K8)=Q2(J8,K8)-R2(J8,K8)
   30 X(J8,K8)=U2(J8,K8)+V2(J8,K8)
      ICOMP=0
      DO 34 II=2,N
   34 IF(X(II,1).LT.0.002.AND.X(II,1).GT.-0.002) ICOMP=ICOMP+1
      IF(ICOMP.LT.2) GO TO 33
      THETAG1=THETAR1*180.0D0/PI
      THETAG2=THETAR2*180.0D0/PI
      THETAG3=THETAR3*180.0D0/PI
      WRITE(*,*)' '
      WRITE(*,9) THETAG1,THETAG2,THETAG3
    9 FORMAT(' >S1 =',F8.3,3X,'>S2 =',F8.3,3X,'>S3 =',F8.3)
      WRITE(*,35)
   35 FORMAT(/'                    REAL DE "Y"                ',
     &        '                    IMAGINARIO DE "Y"')
      DO 31 L8=1,N
   31 WRITE(*,32) (W(L8,I9),I9=1,N),(X(L8,J9),J9=1,N)
   32 FORMAT(10F8.3)
      WRITE(*,37)
   37 FORMAT(/'_____________________________________________',
     &'_____________________________________________')
   33 M=N+N
  800 THETAR3=THETAR3+THER3
   80 THETAR2=THETAR2+THER2
    8 THETAR1=THETAR1+THER1
      STOP
      END
```

```
C***ESTRUCTURAS SIMETRICAS DE ANILLO EN  MICROONDAS***C
C*****************************************************C
C        PROGRAMA PARA LA BUSQUEDA DE MATRICES        C
C  DE ESTRUCTURAS PENTAPORTALES SIMETRICAS DE ANILLO  C
C                (ALGORITMO  SIMPLE)                  C
C   A L E J A N D R O   D U E N A S   J I M E N E Z   C
C          COLIMA, COLIMA SEPTIEMBRE DE 1991          C
C*****************************************************C
      COMPLEX AI(20,20),G(20,20),H(20,19),S(20,20),TEMP
      DIMENSION A(20,20),C(20,20),D(20,20),E(20,20)
     &,Q2(20,20),R2(20,20),U2(20,20),V2(20,20),W(20,20)
     &,X(20,20),TER1(20),TER2(20),TER3(20),TER4(20)
      WRITE(*,*)'*************************************'
      WRITE(*,*)'*    E      S      A      5      E    *'
      WRITE(*,*)'*      ESTRUCTURAS PENTAPORTALES      *'
      WRITE(*,*)'*        SIMETRICAS DE  ANILLO        *'
      WRITE(*,*)'*        BUSQUEDA DE  MATRICES        *'
      WRITE(*,*)'*        CON ALGORITMO  SIMPLE        *'
      WRITE(*,*)'*  COLIMA, COLIMA SEPTIEMBRE DE 1991  *'
      WRITE(*,*)'*      ALEJANDRO DUENAS  JIMENEZ      *'
      WRITE(*,*)'*************************************'
      WRITE(*,1)
    1 FORMAT(' DAME EL ORDEN DE LA MATRIZ S:  ')
      READ(*,*) N
      NP1=N+1
      M=N+N
      PI=3.141592654D0
      WRITE(*,36)
   36 FORMAT(' DAME LOS VALORES INICIALES DE THETA EN GRADOS:  ')
      READ(*,*) THEGI1,THEGI2
      THERI1=THEGI1*PI/180.0D0
      THERI2=THEGI2*PI/180.0D0
      WRITE(*,6)
    6 FORMAT(' DAME EL INCREMENTO DE THETA EN GRADOS:  ')
      READ(*,*) THEG1
      THER1=THEG1*PI/180.0D0
      WRITE(*,7)
    7 FORMAT(' DAME EL NUMERO DE ITERACIONES:  ')
      READ(*,*) IT1
      THETAR1=THERI1
      THETAR2=THERI2
      DO 10 I2=1,N
      DO 10 J2=1,N
      IF(I2-J2) 12,11,12
   11 AI(J2,I2)=CMPLX(1.0D0,0.0D0)
      S(J2,I2)=CMPLX(0.0D0,0.0D0)
      GO TO 10
   12 AI(J2,I2)=CMPLX(0.0D0,0.0D0)
   10 CONTINUE
      DO 8 J1=1,IT1
      DO 13 K2=1,N-1
```

```
      S(K2,K2+1)=CMPLX(0.5D0*COS(THETAR1),0.5D0*SIN(THETAR1))
   13 S(K2+1,K2)=S(K2,K2+1)
      S(1,N)=CMPLX(0.5D0*COS(THETAR1),0.5D0*SIN(THETAR1))
      S(N,1)=S(1,N)
      DO 14 J3=1,N-2
      S(J3,J3+2)=CMPLX(0.5D0*COS(THETAR2),0.5D0*SIN(THETAR2))
   14 S(J3+2,J3)=S(J3,J3+2)
      DO 80 K3=1,N-3
      S(K3,K3+3)=CMPLX(0.5D0*COS(THETAR2),0.5D0*SIN(THETAR2))
   80 S(K3+3,K3)=S(K3,K3+3)
      DO 15 I4=1,N
      DO 15 J4=1,N
      A(I4,J4)=AI(I4,J4)-REAL(S(I4,J4))
      E(I4,J4)=AI(I4,J4)+REAL(S(I4,J4))
   15 G(I4,J4)=CMPLX(E(I4,J4),AIMAG(S(I4,J4)))
      DO 16 K4=NP1,M
      DO 16 L4=1,N
      IF(K4-N-L4) 18,17,18
   17 G(L4,K4)=CMPLX(1.0D0,0.0D0)
      GO TO 16
   18 G(L4,K4)=CMPLX(0.0D0,0.0D0)
   16 CONTINUE
   19 IF(REAL(G(1,1)).EQ.0.0.AND.AIMAG(G(1,1)).EQ.0.0) GO TO 20
      GO TO 23
   20 I5=M-N
      DO 21 J5=2,I5
      IF(REAL(G(1,J5)).EQ.0.0.AND.AIMAG(G(1,J5)).EQ.0.0) GO TO 21
      DO 22 K5=1,M
      TEMP=G(1,K5)
      G(J5,K5)=G(1,K5)
   22 G(1,K5)=TEMP
      GO TO 23
   21 CONTINUE
      WRITE(*,*)'LA MATRIZ ES SINGULAR'
      GO TO 33
   23 DO 24 L5=2,M
      DO 24 I6=2,N
   24 H(I6-1,L5-1)=G(I6,L5)-G(1,L5)*G(I6,1)/G(1,1)
      DO 25 J6=2,M
   25 H(N,J6-1)=G(1,J6)/G(1,1)
      M=M-1
      DO 26 K6=1,M
      DO 26 L6=1,N
   26 G(K6,L6)=H(K6,L6)
      IF(M-N) 19,27,19
   27 DO 28 I7=1,N
      DO 28 J7=1,N
      C(I7,J7)=REAL(G(I7,J7))
   28 D(I7,J7)=AIMAG(G(I7,J7))
      DO 29 K7=1,N
      DO 29 L7=1,N
```

```
      Q2(K7,L7)=0.0D0
      R2(K7,L7)=0.0D0
      U2(K7,L7)=0.0D0
      V2(K7,L7)=0.0D0
      DO 29 I8=1,N
      TER1(I8)=A(K7,I8)*C(I8,L7)
      Q2(K7,L7)=Q2(K7,L7)+TER1(I8)
      TER2(I8)=-AIMAG(S(K7,I8))*D(I8,L7)
      R2(K7,L7)=R2(K7,L7)+TER2(I8)
      TER3(I8)=A(K7,I8)*D(I8,L7)
      U2(K7,L7)=U2(K7,L7)+TER3(I8)
      TER4(I8)=-AIMAG(S(K7,I8))*C(I8,L7)
   29 V2(K7,L7)=V2(K7,L7)+TER4(I8)
      DO 30 J8=1,N
      DO 30 K8=1,N
      W(J8,K8)=Q2(J8,K8)-R2(J8,K8)
   30 X(J8,K8)=U2(J8,K8)+V2(J8,K8)
      ICOMP=0
      DO 34 II=2,N
   34 IF(X(II,1).LT.0.002.AND.X(II,1).GT.-0.002) ICOMP=ICOMP+1
      IF(ICOMP.LT.2) GO TO 33
      THETAG1=THETAR1*180.0D0/PI
      THETAG2=THETAR2*180.0D0/PI
      WRITE(*,*)' '
      WRITE(*,9) THETAG1,THETAG2
    9 FORMAT(' >BETA =',F8.3,3X,'>DELTA =',F8.3)
      WRITE(*,35)
   35 FORMAT(/'                    REAL DE "Y"              ',
     &        '                    IMAGINARIO DE "Y"')
      DO 31 L8=1,N
   31 WRITE(*,32) (W(L8,I9),I9=1,N),(X(L8,J9),J9=1,N)
   32 FORMAT(10F8.3)
      WRITE(*,37)
   37 FORMAT(/'_____________________________________________',
     &'_____________________________________________')
   33 M=N+N
      THETAR1=THETAR1+THER1
    8 THETAR2=THETAR2+THER1
      STOP
      END
```

```
C***ESTRUCTURAS SIMETRICAS TRIANGULARES EN MICROONDAS***C
C*********************************************************C
C          PROGRAMA PARA LA BUSQUEDA DE MATRICES          C
C  DE ESTRUCTURAS HEXAPORTALES SIMETRICAS TRIANGULARES    C
C                   (ALGORITMO  SIMPLE)                   C
C    A L E J A N D R O   D U E N A S   J I M E N E Z      C
C             COLIMA, COLIMA  OCTUBRE DE 1991             C
C*********************************************************C
      COMPLEX AI(20,20),G(20,20),H(20,19),S(20,20),TEMP
      DIMENSION A(20,20),C(20,20),D(20,20),E(20,20)
     &,Q2(20,20),R2(20,20),U2(20,20),V2(20,20),W(20,20)
     &,X(20,20),TER1(20),TER2(20),TER3(20),TER4(20)
      WRITE(*,*)'*************************************'
      WRITE(*,*)'*   E     S     2     T     6     E   *'
      WRITE(*,*)'*      ESTRUCTURAS  HEXAPORTALES      *'
      WRITE(*,*)'*       SIMETRICAS TRIANGULARES       *'
      WRITE(*,*)'*        BUSQUEDA DE  MATRICES        *'
      WRITE(*,*)'*   COLIMA, COLIMA OCTUBRE DE  1991   *'
      WRITE(*,*)'*      ALEJANDRO DUENAS  JIMENEZ      *'
      WRITE(*,*)'*************************************'
      WRITE(*,1)
    1 FORMAT(' DAME EL ORDEN DE LA MATRIZ S:  ')
      READ(*,*) N
      NP1=N+1
      M=N+N
      PI=3.141592654D0
      WRITE(*,36)
   36 FORMAT(' DAME LOS VALORES INICIALES DE THETA EN GRADOS:  ')
      READ(*,*) THEGI1,THEGI2
      THERI1=THEGI1*PI/180.0D0
      THERI2=THEGI2*PI/180.0D0
      WRITE(*,6)
    6 FORMAT(' DAME EL INCREMENTO DE THETA EN GRADOS:  ')
      READ(*,*) THEG1
      THER1=THEG1*PI/180.0D0
      WRITE(*,7)
    7 FORMAT(' DAME EL NUMERO DE ITERACIONES:  ')
      READ(*,*) IT1
      THETAR1=THERI1
      THETAR2=THERI2
      DO 10 I2=1,N
      DO 10 J2=1,N
      IF(I2-J2) 12,11,12
   11 AI(J2,I2)=CMPLX(1.0D0,0.0D0)
      GO TO 10
   12 AI(J2,I2)=CMPLX(0.0D0,0.0D0)
   10 CONTINUE
      DO 13 K2=1,N-3
      DO 13 L2=1,N-3
      S(K2,L2)=CMPLX(0.0D0,0.0D0)
   13 S(K2+3,L2+3)=CMPLX(0.0D0,0.0D0)
```

```
      DO 8 J1=1,IT1
      DO 14 J3=1,N-3
      DO 14 K3=N-2,N
      IF(K3-J3.NE.3) GO TO 80
      S(J3,K3)=CMPLX(0.577D0*COS(THETAR1),0.577D0*SIN(THETAR1))
      S(K3,J3)=S(J3,K3)
      GO TO 14
 80   S(J3,K3)=CMPLX(0.577D0*COS(THETAR2),0.577D0*SIN(THETAR2))
      S(K3,J3)=S(J3,K3)
 14   CONTINUE
      DO 15 I4=1,N
      DO 15 J4=1,N
      A(I4,J4)=AI(I4,J4)-REAL(S(I4,J4))
      E(I4,J4)=AI(I4,J4)+REAL(S(I4,J4))
 15   G(I4,J4)=CMPLX(E(I4,J4),AIMAG(S(I4,J4)))
      DO 16 K4=NP1,M
      DO 16 L4=1,N
      IF(K4-N-L4) 18,17,18
 17   G(L4,K4)=CMPLX(1.0D0,0.0D0)
      GO TO 16
 18   G(L4,K4)=CMPLX(0.0D0,0.0D0)
 16   CONTINUE
 19   IF(REAL(G(1,1)).EQ.0.0.AND.AIMAG(G(1,1)).EQ.0.0) GO TO 20
      GO TO 23
 20   I5=M-N
      DO 21 J5=2,I5
      IF(REAL(G(1,J5)).EQ.0.0.AND.AIMAG(G(1,J5)).EQ.0.0) GO TO 21
      DO 22 K5=1,M
      TEMP=G(1,K5)
      G(J5,K5)=G(1,K5)
 22   G(1,K5)=TEMP
      GO TO 23
 21   CONTINUE
      WRITE(*,*)'LA MATRIZ ES SINGULAR'
      GO TO 33
 23   DO 24 L5=2,M
      DO 24 I6=2,N
 24   H(I6-1,L5-1)=G(I6,L5)-G(1,L5)*G(I6,1)/G(1,1)
      DO 25 J6=2,M
 25   H(N,J6-1)=G(1,J6)/G(1,1)
      M=M-1
      DO 26 K6=1,M
      DO 26 L6=1,N
 26   G(K6,L6)=H(K6,L6)
      IF(M-N) 19,27,19
 27   DO 28 I7=1,N
      DO 28 J7=1,N
      C(I7,J7)=REAL(G(I7,J7))
 28   D(I7,J7)=AIMAG(G(I7,J7))
      DO 29 K7=1,N
      DO 29 L7=1,N
```

```
      Q2(K7,L7)=0.0D0
      R2(K7,L7)=0.0D0
      U2(K7,L7)=0.0D0
      V2(K7,L7)=0.0D0
      DO 29 I8=1,N
      TER1(I8)=A(K7,I8)*C(I8,L7)
      Q2(K7,L7)=Q2(K7,L7)+TER1(I8)
      TER2(I8)=-AIMAG(S(K7,I8))*D(I8,L7)
      R2(K7,L7)=R2(K7,L7)+TER2(I8)
      TER3(I8)=A(K7,I8)*D(I8,L7)
      U2(K7,L7)=U2(K7,L7)+TER3(I8)
      TER4(I8)=-AIMAG(S(K7,I8))*C(I8,L7)
   29 V2(K7,L7)=V2(K7,L7)+TER4(I8)
      DO 30 J8=1,N
      DO 30 K8=1,N
      W(J8,K8)=Q2(J8,K8)-R2(J8,K8)
   30 X(J8,K8)=U2(J8,K8)+V2(J8,K8)
      ICOMP=0
      DO 34 II=2,N
   34 IF(X(II,1).LT.0.002.AND.X(II,1).GT.-0.002) ICOMP=ICOMP+1
      IF(ICOMP.LT.2) GO TO 33
      THETAG1=THETAR1*180.0D0/PI
      THETAG2=THETAR2*180.0D0/PI
      WRITE(*,*)' '
      WRITE(*,9) THETAG1,THETAG2
    9 FORMAT(' >ALFA =',F8.3,3X,'>BETA =',F8.3)
      WRITE(*,35)
   35 FORMAT('                    REAL DE "Y"')
      DO 31 L8=1,N
   31 WRITE(*,32) (W(L8,I9),I9=1,N)
      WRITE(*,38)
   38 FORMAT('                  IMAGINARIO DE "Y"')
      DO 39 J9=1,N
   39 WRITE(*,32) (X(J9,K9),K9=1,N)
   32 FORMAT(10F8.3)
      WRITE(*,37)
   37 FORMAT(/'_____________________________________________',
     &'_____________________________________________')
   33 M=N+N
      THETAR1=THETAR1+THER1
    8 THETAR2=THETAR2+THER1
      STOP
      END
```

APENDICE C

PUBLICACIONES ASOCIADAS AL ESTUDIO

ON THE SYNTHESIS OF SOME RING JUNCTIONS FOR SIX-PORT MEASUREMENT APPLICATIONS

A. Dueñas-Jiménez
Centro de Investigación en Ciencias Básicas
Universidad de Colima
Apartado Postal 2-1694
28000 Colima, Colima, México

A. Serrano-Santoyo and F. J. Mendieta
Departamento de Electrónica y Telecommunicaciones
Centro de Investigación Científica
y de Educación Superior de Ensenada
Apartado Postal 2732
22800 Ensenada B. C., México

KEY TERMS

Six-port, branching synthesis, signal separator, reflectometer, network analyzer

ABSTRACT

The article presents a methodology to generalize the branching synthesis method for synthesizing symmetrical ring structures with transmission-line section branches of any electrical length. The procedure is applied to a five-port junction which, in connection with a directional coupler, forms a six-port for measurement applications.
© 1992 John Wiley & Sons, Inc.

1. INTRODUCTION

Six-port reflectometry [1, 2] is a well-known concept that has brought a prolific field of research. To date the microwave measurement six-port technique offers several open study areas, such as

1. Development of techniques to yield real-time display.
2. Implementation at higher frequencies avoiding the problematic use of mixers.
3. Modeling of diode behavior to enhance their accuracy potential as detectors in the six-port environment.

4. Design of six-port networks.
5. Calibration and error analysis.
6. Applications to pulsed measurements.

Regarding six-port networks, in 1981 Riblet and Hansson [3] presented a six-port like a reflectometer that complied with the design criteria of Engen [4]. In 1983 the same authors [5] proposed a synthesis method for the five-port used in their configuration, and based on an equivalent admittance that reduces an n-port problem to a one-port problem.

An alternative technique is presented here based on an extension of the branching synthesis method which is suited to be applied to that and other junctions.

2. BRANCHING SYNTHESIS

The branching synthesis method [6] which is applied to transmission line section branches of odd multiples of quarter-wavelength (90°) can be generalized to sections of any electrical length (θ) by equalization of the interconnection submatrices between ports with the matrix of a lossless transmission line section. From the equalization of impedance or admittance matrices a nonlinear system of equations is obtained and can be easily solved.

The admittance matrix of an n-port can be obtained from the scattering one by using the ubiquitous matrix bilinear transformation given by

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{I} + \mathbf{S})^{-1}, \tag{1}$$

where $\mathbf{I}$ denotes the unity matrix.

Some formalisms that are useful to obtain the scattering matrix of symmetrical junctions are found in the theory of eigenvalue equations and the group theory. The group multiplication table of symmetry operators for the Star junction [6] and that for the symmetrical five-port ring proposed by Hansson and Riblet are equal, and hence these structures have the same relations between S-matrix entries and eigenvalues given by

$$\alpha = \tfrac{1}{5}(s_1 + 2s_2 + 2s_3), \tag{2}$$

$$\beta = \tfrac{1}{5}[s_1 + (r_2 + r_5)s_2 + (r_3 + r_4)s_3], \tag{3}$$

$$\delta = \tfrac{1}{5}[s_1 + (r_3 + r_4)s_2 + (r_2 + r_5)s_3], \tag{4}$$

where

$$r_1 = 1, \quad r_2 = \exp(j\phi_1), \quad r_3 = \exp(j\phi_2), \quad r_4 = \exp(j\phi_3), \quad r_5 = \exp(j\phi_4),$$

and

$$\phi_1 = \tfrac{2}{5}\pi, \quad \phi_2 = \tfrac{4}{5}\pi, \quad \phi_3 = \tfrac{6}{5}\pi, \quad \phi_4 = \tfrac{8}{5}\pi.$$

The scattering matrix of these junctions has the following form:

$$\mathrm{S} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \delta & \delta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \delta & \delta \\ \delta & \beta & \alpha & \beta & \delta \\ \delta & \delta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \delta & \delta & \beta & \alpha \end{bmatrix}. \tag{5}$$

The design criteria state that the six-port must have one port for a direct measurement of the incident power on the device under test (DUT), three with equal power division, and a relative phase difference of 0° and 120°.

With a directional coupler to measure the incident power on the DUT and assuming a well-matched five-port, a systematic form to obtain the S-matrix entries or their related eigenvalues of a ring junction can be found in the following algorithms.

2.1 S Matrix Eigenvalues Entries Rigorous Searching Algorithm. Since the five-port ring junction is assumed to be lossless, the admittance matrix must be only imaginary and have the following form:

$$\mathbf{Y} = j\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & 0 & 0 & Y_{15} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} \\ Y_{51} & 0 & 0 & Y_{54} & Y_{55} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

where the entries of the main diagonal could be zero. The configuration of this matrix shows that there exists a connection only between contiguous ports, and hence corresponds to a closed or ring structure.

If the entries of the main diagonal are different from zero, the matrix can be partitioned to obtain the following one:

$$\mathbf{Y} = j\begin{bmatrix} Y_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{55} \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 0 & Y_{12} & 0 & 0 & Y_{15} \\ Y_{21} & 0 & Y_{23} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{32} & 0 & Y_{34} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{43} & 0 & Y_{45} \\ Y_{51} & 0 & 0 & Y_{54} & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Thus, considering the arrangement of the matrices of (6) and (7) and the unitary condition of the scattering matrix, a searching algorithm can be obtained by applying shifts on the junction reference planes. The symmetric perturbations caused by these shifts correspond to rotations of the unit amplitude eigenvalues through arbitrary phase angles [7].

Then, by diagonalization of the scattering matrix and using the transformation given by (1), we have:

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{I} - \mathbf{ULU}^T)(\mathbf{I} + \mathbf{ULU}^T)^{-1} \tag{8}$$

where $\mathbf{U}$ is a real and orthogonal matrix having for its columns the eigenvectors of $\mathbf{S}$. $\mathbf{L}$ is a diagonal matrix with the eigenvalues of $\mathbf{S}$ along its main diagonal, and $\mathbf{U}^T$ is the transpose of $\mathbf{U}$.

Separating the real and imaginary parts of (8), the first factor of the right-side member can be expressed as

$$(\mathbf{A} + j\mathbf{B}), \tag{9}$$

where

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{U}\,\mathrm{Re}(\mathbf{L})\mathbf{U}^T$$

and,

$$\mathbf{B} = -\mathbf{U}\,\mathrm{Im}(\mathbf{L})\mathbf{U}^T$$

Likewise, the second factor before inverting can be given by

$$(\mathbf{E} + j\mathbf{F}), \tag{10}$$

where

$$\mathbf{E} = \mathbf{I} + \mathbf{U}\,\mathrm{Re}(\mathbf{L})\mathbf{U}^T$$

and

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}\,\mathrm{Im}(\mathbf{L})\mathbf{U}^T.$$

Therefore, from the identity matrix equation this becomes:

$$(\mathbf{E} + j\mathbf{F})(\mathbf{C} + j\mathbf{D}) = \mathbf{I}. \tag{11}$$

where $(\mathbf{C} + j\mathbf{D})$ is the inverse of $(\mathbf{E} + j\mathbf{F})$. Hence

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{A} + j\mathbf{B})(\mathbf{C} + j\mathbf{D}). \tag{12}$$

and from the unitary condition,

$$\mathbf{AC} - \mathbf{BD} = 0, \tag{13}$$

$$\mathbf{AD} + \mathbf{BC} = \mathbf{Y}. \tag{14}$$

Thus, the quest is for eigenvalues that satisfy these two last equations and the matrix forms of (6) or (7).

2.2. S-matrix Entries Eigenvalues Simple Searching Algorithm. In this case, the quest is for the possible positions in a polar diagram of $|\beta| = |\delta| = 0.5$ with a relative phase difference of 120° provided $\alpha = 0$ and assuring the forms of (6) or (7).

A set of entries (Figure 1) which achieve all these conditions is given by

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0.25 - j0.433, \qquad \delta = -0.5.$$

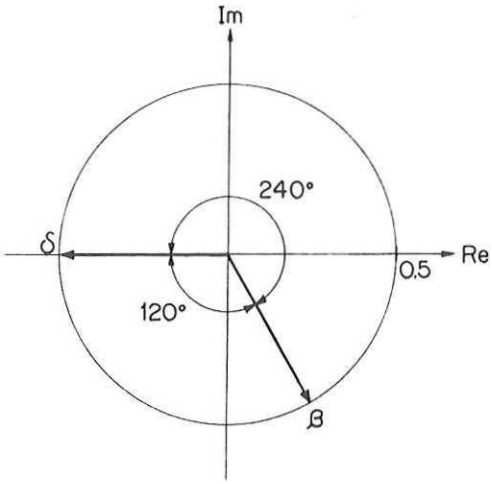

Figure 1 S-matrix entries diagram of the symmetrical five-port ring junction

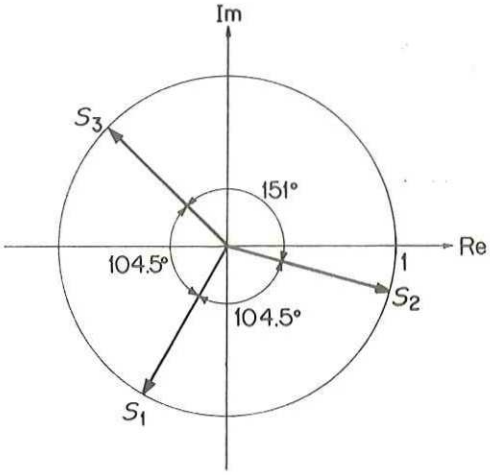

Figure 2 Eigenvalue diagram of the symmetrical five-port ring junction

Substituting these values directly in Eqs. (2)–(4), the set of related eigenvalues (Figure 2) is the following one:

$$s_1 = -0.5 - j0.866, \qquad s_2 = 0.963 - j0.268, \qquad s_3 = -0.713 + j0.7.$$

Transforming from **S** to **Y** for the α, β, and δ values, the admittance matrix of the five-port ring becomes:

$$\mathbf{Y}_r = j\begin{bmatrix} \sigma & \tau & \mu & \mu & \tau \\ \tau & \sigma & \tau & \mu & \mu \\ \mu & \tau & \sigma & \tau & \mu \\ \mu & \mu & \tau & \sigma & \tau \\ \tau & \mu & \mu & \tau & \sigma \end{bmatrix}, \tag{15}$$

where $\sigma = -0.577$, $\tau = 1.155$, and $\mu = 0$.

This matrix can be partitioned into five in the following form:

$$\mathbf{Y}_r = j\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ j\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$
$$+ j\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \tag{16}$$

where $a = -0.289$ and $b = 1.155$.

From this matrix it can be observed that there are five submatrices of second order which represent the interconnections between ports and are given in the following manner:

$$\mathbf{Y}_{12} = \mathbf{Y}_{23} = \mathbf{Y}_{34} = \mathbf{Y}_{45} = \mathbf{Y}_{15}, \tag{17}$$

where

$$\mathbf{Y}_{12} = j\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Equating $\mathbf{Y}_{12}$ with the admittance matrix of a lossless transmission line section given in general by

$$\mathbf{Y}_{1,T1,} = j\begin{bmatrix} -Y_0\dfrac{1}{\tan\beta l} & Y_0\dfrac{1}{\sin\beta l} \\ Y_0\dfrac{1}{\sin\beta l} & -Y_0\dfrac{1}{\tan\beta l} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

the following system of equations is obtained:

$$\begin{aligned} Y_0\frac{1}{\tan\theta} + a &= 0 \\ Y_0\frac{1}{\sin\theta} - b &= 0 \end{aligned} \tag{20}$$

where $\theta = \beta l$.

Solving this system, we obtain that

$$Y_0 = 1.118, \qquad \theta = 75.458°.$$

Also, the matrix (15) can be partitioned into two in the following form:

$$\mathbf{Y}_{r1} = j\begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \tag{21}$$

$$\mathbf{Y}_{r2} = j\begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 & b \\ b & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & b \\ b & 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

where $c = -0.577$.

The former represents shunt inductive susceptances (shunt short-circuited transmission line stubs, $Y_0 = 0.577$, $\theta = 45°$) connected to each port, and the latter transmission-line sections ($Y_0 = 1.155$, $\theta = 90°$) between each port. All these values are in agreement with those obtained by the equivalent admittance concept of Hansson and Riblet. Figure 3 shows the two ring junctions obtained with these values. Both structures are physically possible; however, because of the short stubs, the second one will provide nonpractical realization in microstrip circuitry.

It is important to note that with the shift of the reference planes a new **S** matrix is obtained with different entries and eigenvalues that can give rise to a **Y** matrix that represents a simple junction from a topological point of view. Besides, since in the $\mathbf{Y}_r$ matrix the μ entry is equal to zero, the junction will be a planar network and hence, it can be concluded that

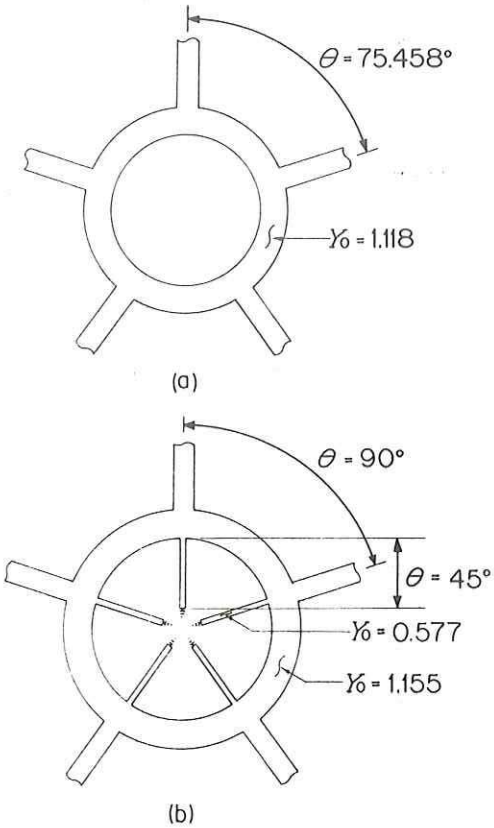

Figure 3 Five-port ring junctions for the admittance matrix entries. (a) $a = -0.289$, $b = 1.155$. (b) $b = 1.155$, $c = -0.577$

in order to simplify any other ring n-port junction, the entry of its upper and lower diagonals in the corresponding matrix must be equal to zero.

Finally, Hansson and Riblet proposed a perfect directional coupler to complete the six-port and to perform a direct measurement of the power incident to the DUT. Elsewhere Colef, Ettenberg, and Karmel [8] proposed a Wilkinson power divider with the same purpose. These two junctions, likewise the 180° hybrid ring and others, can be synthesized using the method itself [9] or with an extension of it.

3. CONCLUSIONS

A simple mathematical formalism has been presented for the synthesis of some n-port junctions. The simplicity and validity of the method were proved with application to the well-known five-port ring junction which in turn has proved the usefulness and practicality in the network analyzer and reflectometer implementation process.

ACKNOWLEDGMENT

This work was supported in part by SEP under Grant No. 91-06-001-08 and CONACYT, Mexico.

REFERENCES

1. C. A. Hoer, "The Six-Port Coupler: A New Approach to Measuring Voltage, Current, Power, Impedance, and Phase," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, Vol. IM-21, 1972, pp. 466–470.
2. G. F. Engen and C. A. Hoer, "Application of an Arbitrary Six-Port Junction to Power-Measurement Problems," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, Vol. IM-21, 1972, pp. 470–474.
3. G. P. Riblet and E. R. B. Hansson, "The Use of a Matched Symmetrical Five-Port Junction to Make Six-Port Measurements," *1981 IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest*, Los Angeles, pp. 151–153.
4. G. F. Engen, "The Six-Port Reflectometer: An Alternative Network Analyzer," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-25, 1977, pp. 1075–1080.
5. E. R. B. Hansson and G. P. Riblet, "An Ideal Six-Port Network Consisting of a Matched Reciprocal Lossless Five-Port and a Perfect Directional Coupler," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-31, 1983, pp. 284–288.
6. C. G. Montgomery, R. H. Dicke, and E. M. Purcell, *Principles of Microwave Circuits*, McGraw-Hill, New York, 1948.
7. J. Helszajn, *Nonreciprocal Microwave Junctions and Circulators*, Wiley, New York, 1975.
8. G. Colef, M. Ettenberg, and P. R. Karmel, "Performance of an Integrated Six-Port Reflectometer Operated with Pulsed Signals," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, Vol. IM-39, 1990, pp. 189–194.
9. J. A. G. Malherbe, *Microwave Transmission Line Couplers*, Artech House, Norwood, MA, 1988.

Received 5-11-92

Microwave and Optical Technology Letters, 5/11, 559–563
© 1992 John Wiley & Sons, Inc.
CCC 0895-2477/92/$4.00

SINTESIS DIRECTA DE UN HEXAPUERTO COMO REFLECTOMETRO

A. Dueñas-Jiménez, Centro de Investigación en Ciencias Básicas, Universidad de Colima, Col.
F.J. Mendieta y A. Serrano-Santoyo, Depto. de Electrónica y Telecomunicaciones,
Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, B.C.

RESUMEN

Este documento reporta la aplicación del método de síntesis por ramas para la realización de un hexapuerto como reflectómetro. Una descripción detallada de los criterios de diseño, los pasos para la síntesis y las propiedades de la matriz que representa la junta a sintetizar, es dada de manera clara y sencilla. Asimismo, un análisis de la topología del arreglo que permite plantear la realizabilidad de la red es llevado a cabo.

I. INTRODUCCION

En 1977 Engen [1], estableció los fundamentos de operación, las propiedades y los criterios de diseño de hexapuertos como reflectómetros para la integración de analizadores de redes de microondas. A partir de entonces, y hasta la fecha, se ha dado un avance substancial en aspectos como la automatización, la calibración, el análisis de error, el diseño de estructuras mejoradas, etc.

Hoy en día el concepto ha madurado a un grado tal en que sus aplicaciones como un sistema de medición confiable van desde la biomedicina (potencia),[2] hasta las telecomunicaciones y óptica (ondas milimétricas y más allá).[3]

La diferencia fundamental entre los analizadores de redes hexaportales y los comerciales heterodinos radica en la sección de separación de señal. Estos últimos utilizan una estructura cuatriportal constituida por un acoplador direccional dual conectado como un reflectómetro para las mediciones de reflexión, y como un divisor de potencia para las de transmisión, en tanto que en los primeros se usan configuraciones duales de hexapuertos o n-puertos.

En lo que se refiere a estructuras, ha habido varias propuestas, desde las de un circuito o junta única de ancho de banda limitado [4], pasando por las geometrías caprichosas optimizadas [5], hasta las de ancho de banda multioctava en línea de cinta con una combinación de varios elementos [6].

En este trabajo se presenta un método de síntesis directa de estructuras a partir de los criterios de Engen, utilizando la matriz de parámetros de dispersión S y su conversión a matriz de parámetros de inmitancia Y o Z para llegar a una estructura única o a una compuesta. Asimismo, una vez que se obtiene una red que cumple con los requisitos establecidos, se hace un análisis de ésta para variaciones en frecuencia de los elementos de la matriz que la describe.

Antes de pasar a la síntesis es conveniente citar cuatro palabras claves y sus consecuencias, a decir:

- simetría ⇒ partición
- linealidad ⇒ superposición
- reciprocidad ⇒ simetría
- sin pérdidas ⇒ unitariedad

II. SINTESIS

2.1 Preliminares

Engen [7], [1], da las siguientes condiciones (ideales) para el buen funcionamiento de un hexapuerto como reflectómetro:

- Acoplamiento perfecto entre el generador y el hexapuerto ($\Gamma_g = 0$).
- Utilización de un puerto para la lectura directa de la potencia incidente en el dispositivo bajo prueba (A, C, E, o G igual a cero).
- Distribución simétrica de los números complejos q alrededor del origen del plano Γ_{cg} (i. e., separados 120° uno de otro).
- Magnitud del números q entre 0.5 y 1.5 (en la vecindad de cualquiera de éstos) evitando valores próximos a 1.

Estas restricciones están asociadas a un grupo de ecuaciones que describen tres círculos en el plano complejo cuya intersección proporciona el coeficiente de reflexión. Tales ecuaciones están dadas de la siguiente manera:

$$|\Gamma_{cg} - q_1|^2 = \frac{|K_4|^2}{|K_1|^2}\frac{P_1}{P_4} \quad (1)$$

$$|\Gamma_{cg} - q_2|^2 = \frac{|K_4|^2}{|K_2|^2}\frac{P_2}{P_4} \quad (2)$$

$$|\Gamma_{cg} - q_3|^2 = \frac{|K_4|^2}{|K_3|^2}\frac{P_3}{P_4} \quad (3)$$

donde, Γ_{cg} es el coeficiente de reflexión en la carga o dispositivo bajo prueba, q_1, q_2, y q_3 son los centros de los círcu-

los, K_1, K_2 y K_3 son constantes complejas, K_4 es unaconstante de proporcionalidad y, P_1, P_2, P_3 y P_4 son lecturas de potencia.

Los valores q_1, q_2, q_3 y K_1, K_2, K_3, K_4 son determinados por los elementos de la matriz del hexapuerto, los cuales describen la geometría o topología del circuito.

En la **Fig. 1** se muestra la localización de Γ_{cg}.

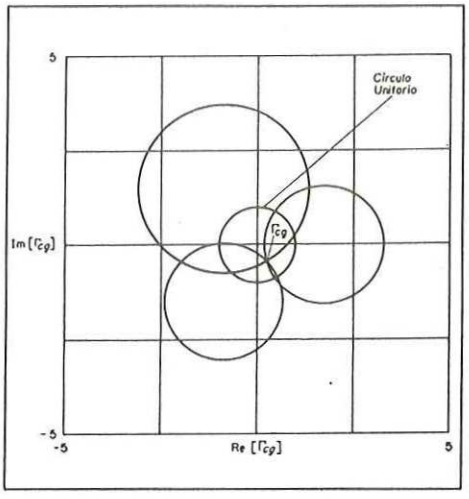

Figura 1. Localización de Γ_{cg}

En la síntesis el objetivo es encontrar una red simple o compuesta que cumpla con las condiciones mencionadas y que además de un buen ancho de banda introduciendo pocas pérdidas por inserción. Dobrowolsky [8], propuso dos redes compuestas por dos acopladores direccionales hexaportales que satisfacen los criterios de diseño establecidos por Engen.

La matriz de dispersión de tal tipo de juntas está dada de la siguiente manera:

$$S_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

donde,

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{j}{2} \quad (5)$$

$$\beta = \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad (6)$$

La matriz de parámetros S puede ser sintetizada de manera directa, sin embargo, su tratamiento a través de sus equivalentes de inmitancia resulta una forma más conveniente como se verá más adelante. Cada uno de sus elementos transformados (inmitancias) representa una función de red de acceso o de transferencia, y la síntesis se aplica a arreglos de las de acceso y de las de transferencia por separado o a arreglos de ambas que describan submatrices de redes. Los pasos para la síntesis se pueden resumir de la siguiente manera:

- Conversión de parámetros de dispersión a parámetros de inmitancia.
- Síntesis por submatrices utilizando el método por ramas.

Antes de efectuar el primer paso, algunas de las propiedades de la matriz a sintetizar pueden ser recalcadas.

Con referencia a las palabras claves y sus consecuencias, para la cuarta de ellas de la (ec. 4) se tiene que:

$$\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \beta\beta^* = 1 \quad (7)$$

$$\alpha\beta^* + \beta\alpha^* + \beta\beta^* = 0 \quad (8)$$

* Denota el complejo conjugado

lo cual indica que se trata de una red sin pérdidas y portanto no contendrá elementos resistivos. Asimismo, la unitariedad de la matriz implica que sus autovalores tendrán amplitud unitaria.

La matriz es además simétrica (tercera) por lo que la red será recíproca. La primera y segunda palabras claves tienen que ver con el análisis, y si la red es realizable con elementos lineales, la segunda de ellas tendrá su consecuencia. Si la red resultante es además simétrica geométricamente hablando, la primera también la tendrá.

De igual manera, cabe destacar que una matriz es en si misma un operador que convierte un vector en otro, siendo tal transformación una rotación, una reflexión, o una inversión.

Así pues, un estudio del determinante de la matriz y de algunas de sus normas puede ser útil ya que geométricamente el determinante expresa el cambio producido por la transformación y algebráicamente suministra un criterio para que la transformación sea invertible conduciendo al concepto de polinomio característico (o autopolinomio). Las normas por su parte, dan una medida de la magnitud de la matriz (no de su orden), siendo de particular interés la norma euclídea y la llamada norma espectral que está directamente relacionada con sus autovalores.

La teoría de ecuaciones de autovalores, es un formalismo apropiado para obtener la matriz de dispersión de juntas simétricas.

2.2 Síntesis con elementos distribuidos

Utilizando las siguientes transformaciones bilineales matriciales;

$$Y_A = (U - S_A)(U + S_A)^{-1} \qquad (9)$$

$$Z_A = (U + S_A)(U - S_A)^{-1} \qquad (10)$$

donde U denota la matriz unidad, las matrices de admitancias e impedancias de un acoplador direccional hexaportal son:

$$Y_A = j\begin{pmatrix} \sigma & \tau & \tau & \mu & 0 & 0 \\ \tau & \sigma & \tau & 0 & \mu & 0 \\ \tau & \tau & \sigma & 0 & 0 & \mu \\ \mu & 0 & 0 & \sigma & \tau & \tau \\ 0 & \mu & 0 & \tau & \sigma & \tau \\ 0 & 0 & \mu & \tau & \tau & \sigma \end{pmatrix} \qquad (11)$$

$$Z_A = j\begin{pmatrix} \sigma & \tau & \tau & e & 0 & 0 \\ \tau & \sigma & \tau & 0 & e & 0 \\ \tau & \tau & \sigma & 0 & 0 & e \\ e & 0 & 0 & \sigma & \tau & \tau \\ 0 & e & 0 & \tau & \sigma & \tau \\ 0 & 0 & e & \tau & \tau & \sigma \end{pmatrix} \qquad (12)$$

donde, $\sigma = 0.577$, $\tau = -1.155$, $\mu = -2$ y $\varepsilon = 2$.

De estas matrices se puede observar que se tienen 36 funciones de red, 6 de acceso y 30 de transferencia (de circuito corto o de circuito abierto). Tomando la matriz de admitancias, estas funciones de red se pueden sintetizar con 9 elementos distribuidos, haciendo la partición que a continuación se indica.

$$Y_A = j\begin{pmatrix} \delta & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + j\begin{pmatrix} \delta & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ j\begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + j\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & \tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau & \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ j\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + j\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

$$+ j\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + j\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

$$+ j\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & \tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & \delta \end{pmatrix} \qquad (13)$$

donde $\delta = \sigma/3$.

De esta matriz se puede observar que hay nueve submatrices de segundo orden las cuales representan la interconexión entre puertos y están dadas de la siguiente manera:

$$Y_{12} = Y_{13} = Y_{23} = Y_{45} = Y_{46} = Y_{56} \qquad (14)$$

$$Y_{14} = Y_{25} = Y_{36} \qquad (15)$$

donde,

$$Y_{12} = j\begin{pmatrix} \delta & \tau \\ \tau & \delta \end{pmatrix}$$

$$Y_{14} = j\begin{pmatrix} \delta & \mu \\ \mu & \delta \end{pmatrix}$$

Cada una de estas submatrices tiene la forma de una matriz de admitancias de una sección de línea de transmisión sin pérdidas dada en general por:

$$Y_{LSTP} = j\begin{pmatrix} -Y_C \dfrac{1}{\tan \beta l} & Y_C \dfrac{1}{\operatorname{sen} \beta l} \\ Y_C \dfrac{1}{\operatorname{sen} \beta l} & -Y_C \dfrac{1}{\tan \beta l} \end{pmatrix} \qquad (16)$$

igualando (14) y (15) con (16), se obtienen los dos sistemas de ecuaciones no lineales siguientes:

$$Y_C \frac{1}{\tan\theta} + \delta = 0$$
$$Y_C \frac{1}{sen\,\theta} - \tau = 0 \qquad (17)$$

$$Y_C \frac{1}{\tan\theta} + \delta = 0$$
$$Y_C \frac{1}{sen\,\theta} - \mu = 0 \qquad (18)$$

donde $\theta = \beta l$

La solución de estos sistemas da la admitancia característica Y_c y la longitud eléctrica θ de las dos secciones de línea de transmisión con que se realizan los elementos de interconexión.

Resolviendo (17) se tiene que:

$$Y_c = 1.139; \quad \theta = 279.569°$$

y de (18) resulta que:

$$Y_c = 1.991; \quad \theta = 275.509°$$

Estos elementos son largos (alrededor de tres cuartos de longitud de onda, i. e., $\theta \cong 270°$) lo cual desde un punto de vista práctico hace que sean más sensitivos a la frecuencia y sea preferible tratar de encontrar una estructura con secciones de línea de transmisión que tengan $\theta \approx 90°$.

La búsqueda [9] se puede realizar considerando que un criterio de diseño establece que los tres números q deben estar separados 120° uno de otro, lo cual indica que los elementos de la matriz S pueden tomar indistintamente uno el valor de otro puesto que siempre tendrán la misma magnitud y una fase relativa de 120°. Asimismo, existe la posibilidad de encontrar una simplificación cuando se desplazan los planos de referencia en la junta según se indica en [10].

Intercambiando los valores de α y β, y desplazando los planos de referencia un tercio de longitud de onda (120°) hacia afuera, la matriz de dispersión de la Ec. (4) se convierte en la siguiente:

$$S_{AN} = \exp[-j2(120°)] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & P & Q & Q \\ 0 & 0 & 0 & Q & P & Q \\ 0 & 0 & 0 & Q & Q & P \\ P & Q & Q & 0 & 0 & 0 \\ Q & P & Q & 0 & 0 & 0 \\ Q & Q & P & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (19)$$

donde $P = \beta$ y $Q = \alpha$

Aplicando como antes la transformación de la Ec. (9), la nueva matriz de admitancias resulta ser:

$$Y_{AN} = -j \begin{pmatrix} \sigma & \tau & \tau & \mu & 0 & 0 \\ \tau & \sigma & \tau & 0 & \mu & 0 \\ \tau & \tau & \sigma & 0 & 0 & \mu \\ \mu & 0 & 0 & \sigma & \tau & \tau \\ 0 & \mu & 0 & \tau & \sigma & \tau \\ 0 & 0 & \mu & \tau & \tau & \sigma \end{pmatrix} \qquad (20)$$

Nuevamente, esta matriz se puede partir en nueve submatrices que representen dos secciones de línea de transmisión diferentes para la interconexión entre puertos, y obtener de la igualación de éstas con la matriz de la Ec. (16) los dos sistemas de ecuaciones siguientes:

$$Y_C \frac{1}{\tan\theta} - \delta = 0$$
$$Y_C \frac{1}{sen\,\theta} + \tau = 0 \qquad (21)$$

$$Y_C \frac{1}{\tan\theta} - \delta = 0$$
$$Y_C \frac{1}{sen\,\theta} + \mu = 0 \qquad (22)$$

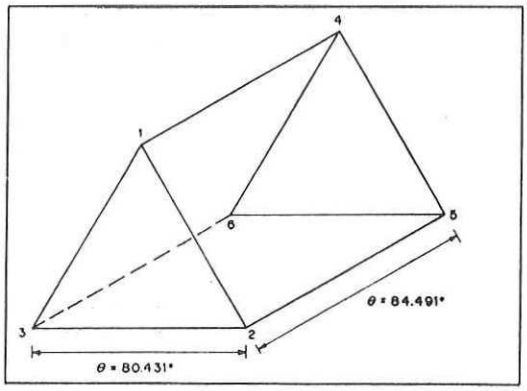

Fig. 2. Geometría de un acoplador direccional hexaportal.

Resolviendo (21) se tiene que:

$$Y_c = 1.139; \quad \theta = 80.431°$$

y de (22) resulta que:

$$Y_c = 1.991 \quad \theta = 84.491°$$

Es importante observar que en las soluciones de (17) y (21), y de (18) y (22), la suma de las θs es 360°, lo cual indica

que para encontrar la red con secciones de línea de transmisión cortas, basta con restar estos valores de 2π, sin embargo, el desarrollo anterior es necesario para fundamentar esta afirmación. Con estos últimos valores, el arreglo para los elementos constituyentes de la junta se muestra en la **Fig. 2**

Infortunadamente, esta topología es aún complicada (en tres dimensiones) por lo que la configuración de las redes propuestas por Dobrowolsky sería prácticamente irrealizable en circuitería de microcinta. Sin embargo, este circuito se puede considerar como el dual (delta-estrella) del propuesto por Boyd [11] y una construcción similar a la reportada por él se puede realizar en línea de cinta o triplaca.

III. ANALISIS

Una técnica simple para el análisis de la topología de la **Fig. 2**, es el gráficado de las partes real e imaginaria y de la magnitud y argumento de los elementos de su matriz de dispersión vs. la frecuencia (o βl) para el valor de diferencia de fase ($\emptyset$ = 120°) [11].

La matriz S_{AN} tiene sólo dos elementos diferentes (P y Q) y su dependencia de la frecuencia está dada por las siguientes ecuaciones:

$$P = \frac{1}{3}(-2S_{12PAR} - S_{12IMPAR}) \tag{23}$$

$$Q = \frac{1}{3}(S_{12PAR} - S_{12IMPAR}) \tag{24}$$

donde

$$S_{PAR} = \frac{(a-c)^2 - b^2 - 1 - 2j(a-c)}{[(a-c)^2 - b^2 - 1]^2 + 4(a-c)^2} \begin{bmatrix} e & f \\ f & e \end{bmatrix}$$

$$S_{IMPAR} = \frac{(a-d)^2 - b^2 - 1 - 2j(a-d)}{[(a-d)^2 - b^2 - 1]^2 + 4(a-d)^2} \begin{bmatrix} g & f \\ f & g \end{bmatrix}$$

y;

$$a = \frac{\cot \beta l}{\cos \phi}, \qquad b = \frac{1}{\cos \phi \ \operatorname{sen} \beta l}$$

$$c = \tan \phi \ \tan\frac{\beta l}{2}, \qquad d = -\tan \phi \ \cot \frac{\beta l}{2}$$

$$e = (a-c)^2 + 1 - b^2, \qquad f = 2jb$$

$$g = (a-d)^2 + 1 - b^2$$

Así, de las ecuaciones (23) y (24) las gráficas para P y Q se dan en las **Figs. 3-10**

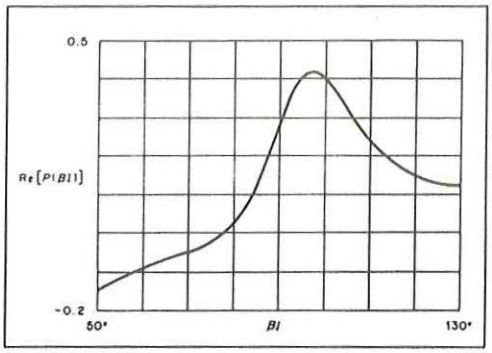

Figura 3. Dependencia de la frecuencia de Re [P]

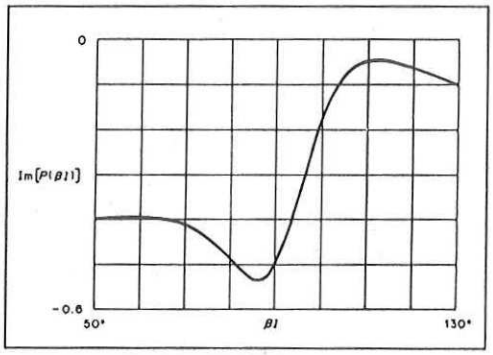

Figura 4. Dependencia de la frecuencia de Im[P]

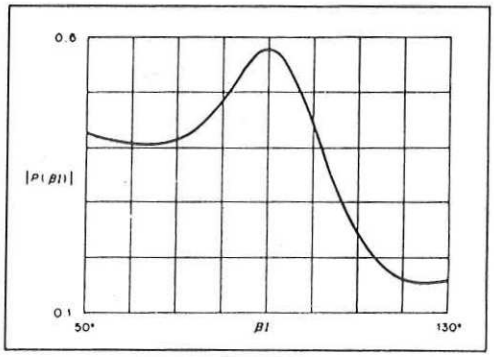

Figura 5. Dependencia de la frecuencia de | P |

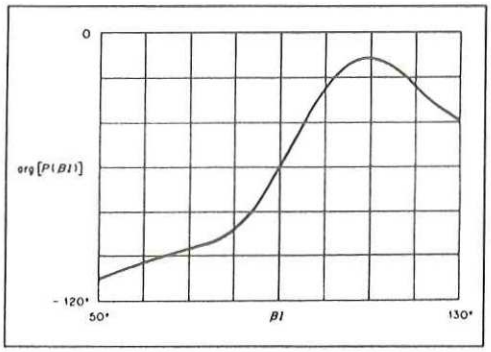

Figura 6. Dependencia de la frecuencia de arg[P]

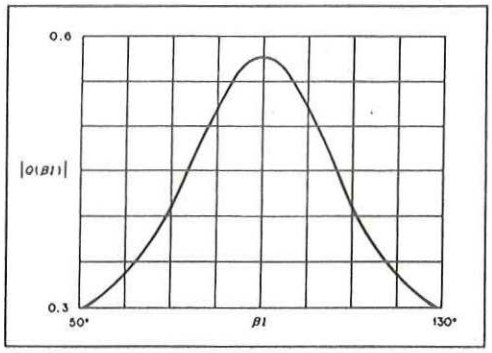

Figura 9. Dependencia de la frecuencia de | Q |

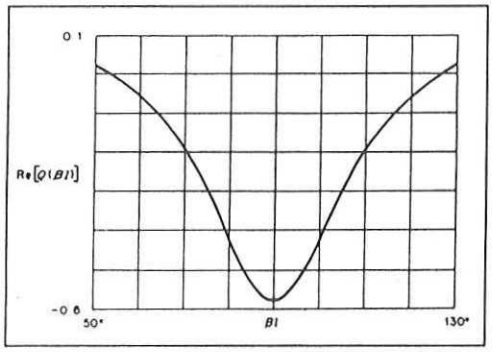

Figura 7. Dependencia de la frecuencia de Re [Q]

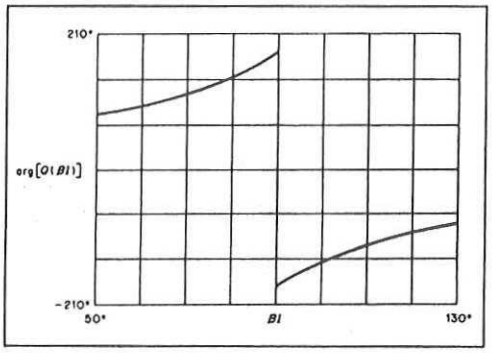

Figura 10. Dependencia de la frecuencia de arg [Q]

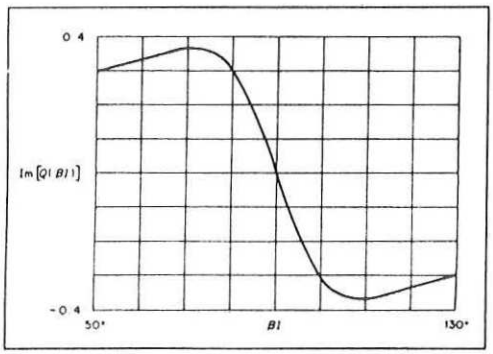

Figura 8. Dependencia de la frecuencia de Im [Q]

IV. CONCLUSIONES

Una visión general de la filosofía de diseño y análisis de redes hexaportales para su aplicación como separadores de señal en la integración de reflectómetros y analizadores de redes ha sido presentada. La aplicación del método de síntesis por ramas muestra la posibilidad de obtención de una topología óptima si se encuentra una matriz de admitancias simple. Gráficas que muestran la dependencia en frecuencia de la red sintetizada para variaciones en la longitud eléctrica de los elementos que la componen han sido dadas.

REFERENCIAS

[1] G. F. Engen, *«The six-port reflectometer: An alternative network analyzer»* IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-25, pp. 1075-1080, Dec. 1977.

[2] C. A. Hoer, *«A high-power dual six-port automatic network analyzer used in determining biological effects of RF and microwave radiation»* , IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-29, pp. 1356-1364, Dec. 1981.

[3] M. P. Weidman, *«A semiauto mated six port for measuring millimeter-wave power and complex reflection coefficient»* , IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-25, pp. 1083-1085, Dec. 1977.

[4] N. A. El-Deeb, *«The calibration and performance of a micro strip six-port reflectometer»* , IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-31, pp. 509-514, July 1983.

[5] M. Malkomes, G. Kadisch, and H. J. Schmitt, *«Optimized microstrip ring star 5-ports for broadband 6-port measurement applications»* , in IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig., pp. 472-474, 1984.

[6] S. H. Li and R. G. Bosisio, *«Analysis and optimized circuit design of six-port reflectometers»*,Acta Electron. Sinica, vol. 11, no. 2, Mar. 1983.

[7] G. F. Engen, *«On-line accu-racy assessment for the dual six-port ANA: Background and Theory»*, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. IM-36, pp. 501-506, June 1987.

[8] J. A. Dobrowolsky, *«Improved six-port circuit for complex reflection coefficient measurements»*, Electron. Lett., vol. 18, pp. 748-750, Aug. 1982.

[9] A. Dueñas-Jiménez, A. Serrano-Santoyo, and F. J. Mendieta, *«On the synthesis of some ring junctions for six-port measurement applications»*, to be published in the Microwave and Optical Tech. Lett., vol. 5, Oct. 1992.

[10] C. G. Montgomery, R. H. Dicke, and E. M. Purcell, *«Principles of Microwave Circuits»*. New York: McGraw-Hill, 1948. Capítulo 12.

[11] C. R. Boyd, *«On a class of multiple-line directional couplers»* IRE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-10, pp. 287-294, July 1962

*Trabajo parcialmente apoyado por la DGICSA-SESIC-SEP (Convenio No.: 91-06-001-08) y el CONACYT.

Generación del gráfico de Smith usando elementos de la geometría moderna*

R. PANTOJA-RANGEL
Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán
Carretera al Fresnito Km. 3 1/2
49000 Cd. Guzmán, Jal., México

A. DUEÑAS-JIMÉNEZ
Centro de Investigación en Ciencias Básicas, Universidad de Colima
Apartado postal 2-1694, 28000 Colima, Col., México

S. CERVANTES-PETERSON
Instituto Tecnológico de Monterrey, Campus Guadalajara
Av. Hidalgo 1995, 44100 Guadalajara, Jal., México

Y

R.A. CANTORAL-URIZA
Sección de Matemática Educativa, Departamento de Investigaciones Educativas
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Apartado postal 14-740, 07000 México, D.F., México

Recibido el 30 de agosto de 1991; aceptado el 17 de noviembre de 1992

RESUMEN. Este artículo describe el uso de algunos elementos de la geometría moderna en el plano complejo, tales como la geometría de círculos, la geometría de inversión y la razón cruzada para obtener la transformación de Möbius que define el coeficiente de reflexión en función de la impedancia normalizada y de esta manera, a partir de estos elementos generar el gráfico de Smith.

ABSTRACT. This paper describes the use of some modern geometry elements in the complex plane, including the geometry of circles, geometry of inversion and the cross ratio, to obtain the Möbius transformation which defines the reflection coefficient as a function of the normalized impedance, and in this way, using these elements, construct the Smith chart.

PACS: 84.30.Ey

1. INTRODUCCIÓN

El diagrama o carta de Smith que fue concebido por P.H. Smith y reportado en 1939 [1] como una ayuda gráfica para solucionar problemas de impedancia relacionados con líneas de transmisión y guías de onda, ha permanecido actual como un ábaco de evaluación gráfica eficiente y directo. Su principal virtud radica en la posibilidad de obtener cualquier

*Trabajo parcialmente apoyado por DGIT-DGICSA-SESIC-SEP y CONACYT.

valor de impedancia-admitancia, coeficiente de reflexión o relación de onda estacionaria, en el plano complejo $|\Gamma| \leq 1$ (elementos pasivos), dada la relación de transformación bilineal-conformal que existe entre estos tres parámetros.

En general, la construcción de esta carta se inicia con la separación de las partes real e imaginaria en la relación de transformación para obtener los círculos ortogonales que la conforman. En este trabajo se expone una visión diferente que discute su generación a partir de la ecuación general del círculo en el plano complejo, involucrando conceptos de la geometría moderna que dan una perspectiva global de las bondades de la transformación. A continuación se tratan la geometría de círculos, la geometría de inversión y la razón cruzada para fundamentar la transformación de Möbius en que se basa la construcción del ábaco de Smith.

2. GEOMETRÍA DE CÍRCULOS

La ecuación

$$az\bar{z} + bz + c\bar{z} + d = 0 \tag{1}$$

representa en el plano complejo un círculo (de radio finito, infinito y cero) si a y d son reales y b y c complejos conjugados. En función del centro α y el radio r, este círculo se expresa como

$$|z - \alpha|^2 = r^2. \tag{2}$$

Expresando (2) en función de z y $\bar{z}$ e igualando los coeficientes de la expresión resultante con (1), se tiene que

$$b = -a\bar{\alpha}, \tag{3}$$

$$c = -a\alpha, \tag{4}$$

$$d = a(\alpha\bar{\alpha} - r^2), \tag{5}$$

donde $^-$ denota el complejo conjugado.

Introduciendo el cambio de variable lineal homogéneo $z = z_1/z_2$ y haciendo uso de notación matricial, la Ec. (1) se puede escribir como

$$P^T C \bar{P} = 0, \tag{6}$$

donde ^{T} denota la transpuesta y

$$P = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

El determinante asociado a C es

$$|C| = ad - bc = -a^2 r^2. \tag{7}$$

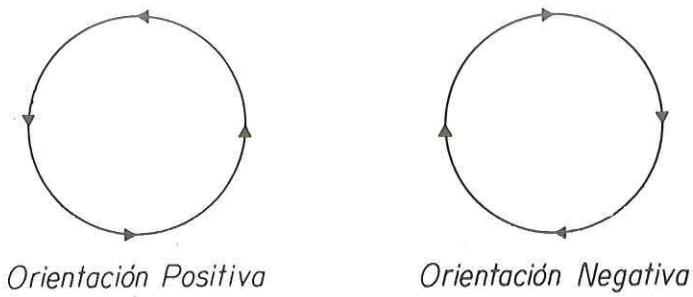

FIGURA 1. Orientación del círculo.

Dependiendo de los valores de a, r y $|C|$, el círculo puede ser real, imaginario, recta, punto o la Ec. (1) no tiene solución. En otras palabras, la Ec. (1) es:

—Un círculo real si $a \neq 0$, $r^2 > 0$ y $|C| < 0$.

—Un círculo imaginario si $a \neq 0$, $r^2 < 0$ y $|C| > 0$.

—Un punto si $a \neq 0$, $r = 0 \Rightarrow |C| = 0$.

—Una recta si $a = 0$ y $|C| < 0$.

Definiendo la orientación del círculo como positiva si $a > 0$ y negativa si $a < 0$ según se muestra en la Fig. 1, sean C_1 y C_2 dos matrices linealmente independientes, representativas de dos círculos orientados positivamente y cuyos determinantes asociados son $|C_1|$ y $|C_2|$.

C_1 y C_2 generan una familia de círculos representada por

$$C_f = n_1 C_1 + n_2 C_2, \tag{8}$$

donde n_1 y n_2 son reales y cuyo determinante asociado es

$$|C_f| = n_1^2 |C_1| + n_2^2 |C_2| + 2 n_1 n_2 |C_{12}|, \tag{9}$$

para el cual

$$2|C_{12}| = a_1 d_2 + a_2 d_1 - b_1 c_2 - b_2 c_1, \tag{10}$$

donde a_1, b_1, c_1, d_1 y a_2, b_2, c_2, d_2 son los elementos de las matrices C_1 y C_2, respectivamente.

Asimismo, sean α_1, r_1 y α_2, r_2 el centro y el radio de los círculos C_1 y C_2, respectivamente, ϕ el ángulo que forman las tangentes en los puntos de intersección de los círculos y δ la distancia entre los centros de los círculos como se indica en la Fig. 2.

Entonces, con

$$\delta^2 = |\alpha_1 - \alpha_2|^2, \tag{11}$$

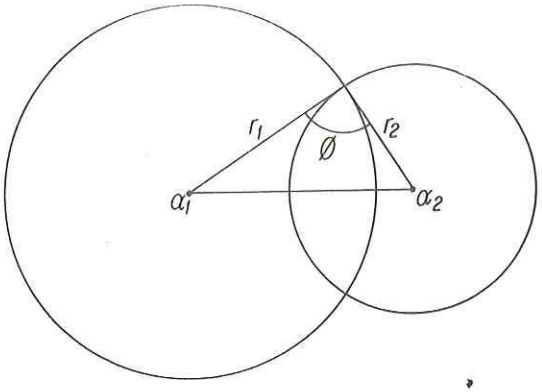

FIGURA 2. Círculos correspondientes a C_1 y C_2.

de las Ecs. (3), (4) y (5) y de la ley de los cosenos con el coseno negativo por la orientación positiva de los círculos, la Ec. (10) en función de a_1, a_2 y r_1, r_2, resulta

$$\cos\phi = -\frac{|C_{12}|}{(|C_1||C_2|)^{1/2}}. \tag{12}$$

Suponiendo que C_1 y C_2 son círculos reales, entonces $|C_1| < 0$ y $|C_2| < 0$ y el término del lado derecho de la Ec. (12) toma diferentes valores que hacen que el ángulo ϕ pueda o no existir dentro del intervalo permitido para la función coseno. Los casos posibles de como se ubican los círculos C_1 y C_2 se dan en [2].

Cuando se cumple que $-1 \leq \cos\phi \leq 1$, los círculos tienen puntos comunes de contacto y dos familias de círculos en este intervalo son las siguientes:

—Para $|\cos\phi| = 1$, los círculos son tangentes interna y externamente, dependiendo del valor de ϕ y de la distancia entre los centros α_1 y α_2; y puesto que se suponen reales, entonces C_{fp} es la familia de círculos reales llamada parabólica que se muestra en la Fig. 3a.

—Para $|\cos\phi| < 1$, los círculos tienen dos puntos de contacto y la forma cuadrática de la Ec. (9) es negativa dando como resultado la familia C_{fe} llamada elíptica que se muestra en la Fig. 3b.

Un caso particular de esta familia se da para $|\cos\phi| = 0$. En esta situación los círculos son ortogonales ya que $\phi = \pi/2$ y por lo tanto $|C_{12}| = 0$. Otra forma de determinar que los círculos son ortogonales es demostrar que la traza de $C_1C_2^{-1} = 0$ donde C_2^{-1} es la inversa de C_2 [2].

Para $|\cos\phi| > 1$, se da otra familia de círculos que no se intersectan como se muestra en la Fig. 3c. Esta familia se denota por C_{fh} y es llamada hiperbólica. En este caso la forma cuadrática de la Ec. (9) es indefinida y la familia puede contener círculos reales, círculos imaginarios y dos diferentes círculos puntuales.

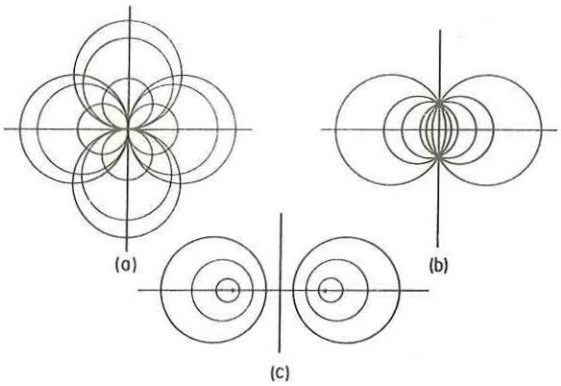

FIGURA 3. Familias de círculos. (a) Parabólica; (b) elíptica; (c) hiperbólica.

3. GEOMETRÍA DE INVERSIÓN, RAZÓN CRUZADA Y TRANSFORMACIÓN DE MÖBIUS

3.1. Geometría de inversión

La geometría de inversión [2,3], se basa en el teorema siguiente [2]:

Sea

$$C_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}$$

un círculo y z un punto que no está sobre el círculo ni coincide con su centro, entonces existe uno y sólo un punto $z^* \neq z$ tal que es común a todos los círculos que pasan por z y que son ortogonales a C_0.

Del planteamiento de la inversión en el plano complejo, y de su demostración dada en la Ref. [2], se obtiene z^* en función de $\bar{z}$ y de a_0, b_0, c_0 y d_0, o en función de $\bar{z}$, el centro α_0 y el radio r_0, es decir,

$$z^* = -\frac{c_0\bar{z} + d_0}{a_0\bar{z} + b_0}, \tag{13}$$

$$z^* = \alpha_0 + \frac{r_0^2}{\bar{z} - \bar{\alpha}_0}. \tag{14}$$

Al igual que en la geometría moderna, la inversión en el plano complejo es una transformación circular e isogonal, salvo que $\phi^* = -\phi$ (* denota el inverso).

3.2. Razón cruzada

La razón doble [2,3] en el plano real está definida por cuatro puntos alineados A, B, C y D como

$$(ABCD) = \frac{AC/AD}{BC/BD}. \tag{15}$$

En el plano complejo y de manera similar, se define la razón cruzada para cuatro puntos z_1, z_2, z_3 y z_4 (tres de los cuales son diferentes) y se representa por

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)/(z_1 - z_4)}{(z_2 - z_3)/(z_2 - z_4)}. \tag{16}$$

Algunas propiedades de la Ec. (15) se conservan para la Ec. (16). Entre ellas:

—La razón cruzada se mantiene constante si los puntos se rotan cíclicamente.

—Si $(z_1, z_2; z_3, z_4) = \tau$ (con τ real), entonces z_1, z_2, z_3 y z_4 son concíclicos. En particular si $\tau = -1$, la razón cruzada es una división armónica sobre un círculo ya que los puntos se hallan separados armónicamente.

Otra característica importante es que si z_k^* son los inversos de z_k ($k = 1, 2, 3, 4$), entonces

$$(z_1^*, z_2^*; z_3^*, z_4^*) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2; \bar{z}_3, \bar{z}_4). \tag{17}$$

3.3. Transformación de Möbius

La transformación de Möbius está dada por

$$w = G(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{18}$$

donde z, incluyendo el punto al infinito, pertenece al plano complejo.

La matriz asociada a esta transformación es la siguiente:

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{19}$$

cuyo determinante distinto de cero es

$$\Delta = |G| = ad - bc. \tag{20}$$

La transformación de Möbius es un mapeo del plano z sobre el plano w, donde al polo $z_\infty = -d/c$ le corresponde $w = \infty$.

El conjunto de operadores de transformación o elementos de transformación, con el producto definido por

$$w = G_2[G_1(z)], \tag{21}$$

forma un grupo, donde G_2 y G_1 son dos operadores matriciales asociados a dos transformaciones.

Algunos tipos sencillos de transformaciones de Möbius son los siguientes:

—Traslación

$$w = z + b, \qquad T_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

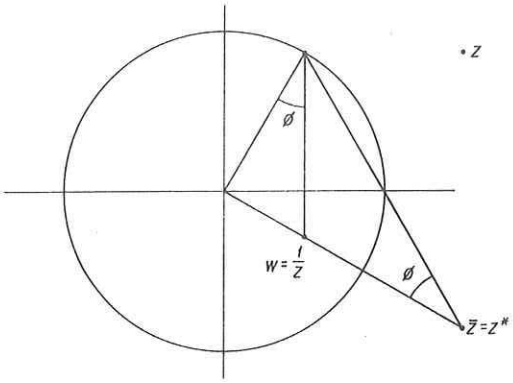

FIGURA 4. Recíproco de z.

—Rotación

$$w = \exp(j\theta)z, \qquad R_\theta = \begin{pmatrix} \exp(j\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

donde j es el operador imaginario.

—Dilatación (expansión o compresión)

$$w = kz, \quad k > 0, \qquad D_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

—Reciprocidad

$$w = 1/z, \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Estos tipos sencillos se obtienen como el producto de dos inversiones y un ejemplo de esto se muestra a continuación con la llamada recíproco de z.

Sean la recta $jz - j\bar{z} = 0$ y el círculo $z\bar{z} - 1 = 0$ los círculos de inversión C_0 y C_1, respectivamente, según se muestra en la Fig. 4.

Respecto a C_0 el inverso es $z^* = \bar{z}$ y respecto a C_1, $w = 1/\bar{z}^*$ por lo que $w = 1/\bar{z}^* = 1/z$.

De igual manera, la transformación general de Möbius se puede expresar como

$$\begin{aligned} w &= \frac{a}{c} - \frac{\Delta}{c}\frac{1}{cz+d} \\ &= \frac{a}{c} + \left|\frac{\Delta}{c}\right| \exp(j\sigma)\frac{1}{|c|\exp(j\epsilon)z + d}. \end{aligned} \tag{26}$$

El escribir de esta manera la Ec. (18), permite determinar que toda transformación de Möbius se puede obtener como el producto de no más de siete transformaciones de los tipos sencillos, es decir,

$$G = T_{a/c} D_{|\Delta/c|} R_\sigma R T_d D_{|c|} R_\epsilon. \tag{27}$$

En particular, la transformación

$$w = \frac{z-1}{z+1}, \tag{28}$$

se obtiene como

$$G = T_1 D_2 R_\pi R T_1; \tag{29}$$

o bien,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-j\pi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Asimismo, cabe destacar que la transformación de Möbius es conformal (los valores verdaderos de los ángulos se preservan en la transformación) y además circular, es decir, transforma círculos reales en círculos reales y círculos imaginarios en círculos imaginarios, siendo un caso particular el de círculos de radio infinito vistos como rectas.

Por otra parte, esta transformación mantiene constante a la razón cruzada, esto es, si z_1, z_2, z_3 y z_4 pertenecen al plano z siendo tres de éstos diferentes y

$$w_1 = G(z_1), \quad w_2 = G(z_2), \quad w_3 = G(z_3), \quad w_4 = G(z_4);$$

entonces, se cumple que

$$(w_1, w_2; w_3, w_4) = (z_1, z_2; z_3, z_4). \tag{31}$$

Así pues, si se hace $z = z_1$, la razón cruzada es una representación de la transformación de Möbius que se determina solucionando para w en términos de z, esto es

$$(w, w_2; w_3, w_4) = (z, z_2; z_3, z_4), \tag{32}$$

donde los puntos fijos de la transformación se determinan por medio de la ecuación

$$z = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{33}$$

o bien,

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0. \tag{34}$$

4. ABACO DE SMITH

La carta de Smith encuentra su mayor aplicación en la electrónica de altas frecuencias (microondas), donde los parámetros de estudio más relevantes son la transmisión y la

reflexión en guías de onda y líneas de transmisión simples o como componentes estas últimas de circuitos y sistemas.

Una reflexión en una línea de transmisión puede ser descrita por una serie de parámetros relacionados entre sí y que están compuestos por las siguientes variables conocidas o medibles:

—Las partes real e imaginaria de la impedancia o admitancia normalizadas a la impedancia característica.

—El módulo y la fase del coeficiente de reflexión de voltaje.

—La relación de onda estacionaria y la posición de uno de sus mínimos.

Las ecuaciones de relación son las siguientes:

$$Z_{cgn} = \frac{Z_{cg}}{Z_c} = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}, \tag{35}$$

$$\Gamma = \frac{Z_{cgn}-1}{Z_{cgn}+1}, \tag{36}$$

$$ROEV = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}, \tag{37}$$

donde Z_{cgn} es la impedancia de carga Z_{cg} normalizada a la impedancia característica Z_c, Γ es el coeficiente de reflexión de voltaje en la carga y $ROEV$ es la relación de onda estacionaria de voltaje.

Cabe destacar que Γ puede ser definido en cualquier posición si se toma a la sección de línea de transmisión o guía de onda desde la carga como parte de ésta o se considera el desplazamiento o distancia desde la misma dado por $e^{-2j\beta l}$ (donde β es la constante de fase).

Asimismo, es posible la medición de la impedancia por medio de una carta de Smith transformada que relaciona a la Ec. (36) con varias lecturas de potencia [4].

La relación entre Γ y Z_{cgn} dada por la Ec. (36) es una transformación de Möbius [Ec. (28)]. Para elementos pasivos es de interés el mapeo del semiplano $jZ - j\bar{Z} \geq 0$ en el círculo unitario $|\Gamma| \leq 1$ (Fig. 5). La transformación lleva los puntos $Z_{cgn1} = 0$, $Z_{cgn2} = 1$ y $Z_{cgn3} = \infty$ a $\Gamma_1 = -1$, $\Gamma_2 = 0$ y $\Gamma_3 = 1$ respectivamente y tiene como puntos fijos a $Z_{cgn} = \pm j$.

Igualando las partes reales e imaginarias de la Ec. (36) y eliminando una a la vez las correspondientes a la impedancia (resistencia R y reactancia X también normalizadas a Z_c), se obtienen en la notación compleja de la Ec. (1), las siguientes ecuaciones:

$$\Gamma\bar{\Gamma} - \frac{R}{R+1}\Gamma - \frac{R}{R+1}\bar{\Gamma} + \frac{R-1}{R+1} = 0, \tag{38}$$

$$\Gamma\bar{\Gamma} + \frac{-X+j}{X}\Gamma + \frac{-X-j}{X}\bar{\Gamma} + 1 = 0. \tag{39}$$

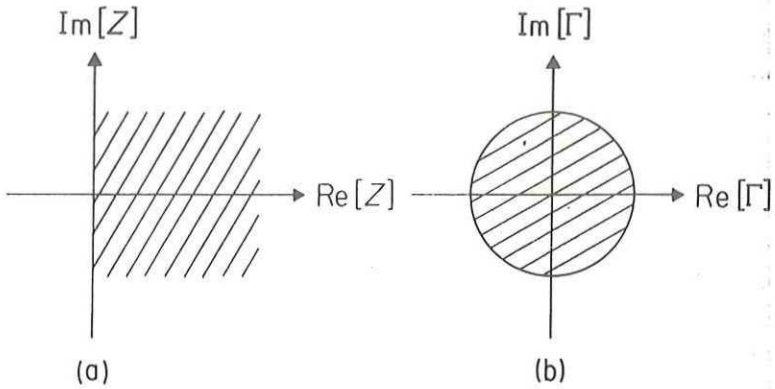

FIGURA 5. Mapeo de (a) $jZ - j\bar{Z} \geq 0$ en (b) $|\Gamma| \leq 1$.

La Ec. (38) representa un círculo cuya matriz hermitiana es

$$C_R = \begin{pmatrix} 1 & -R/(R+1) \\ -R/(R+1) & (R-1)/(R+1) \end{pmatrix}, \tag{40}$$

cuyo determinante es

$$|C_R| = \frac{R-1}{R+1} - \frac{R^2}{(R+1)^2} = \frac{-1}{(R+1)^2} < 0, \tag{41}$$

y cuyo valor indica que se trata de un círculo real.

Para determinar a qué familia de círculos pertenece, se eligen $R_1 = 0$ y $R_2 = 1$ como valores para los elementos de las matrices C_{R1} y C_{R2}, respectivamente, resultando que

$$C_{R1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $|C_{R1}| = -1$, y

$$C_{R2} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $|C_{R2}| = -1/4$.

Así, de las Ecs. (10) y (12), $\cos\phi = \pm 1$ por lo que $\phi = 0$ o $\phi = \pi$.

Ahora bien, para eliminar la ambigüedad del signo, de la Ec. (11) se obtiene la distancia entre los centros de los círculos y de su valor se determina que es el positivo el que le corresponde.

Con los datos anteriores se concluye que la familia de círculos es la parabólica y que tiene como punto común a $\Gamma = 1$. La familia se genera con C_{R1} y C_{R2} y es la transformación

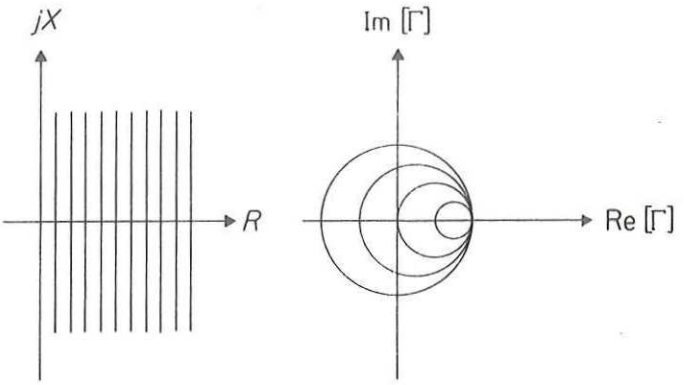

FIGURA 6. Transformación del hemiplano derecho.

del hemiplano derecho compuesto por rectas paralelas al eje imaginario, es decir $R =$ constante según se muestra en la Fig. 6.

De igual manera, la Ec. (39) representa un círculo con la siguiente matriz hermitiana:

$$C_X = \begin{pmatrix} 1 & -1 + \frac{j}{X} \\ -1 - \frac{j}{X} & 1 \end{pmatrix} \tag{42}$$

Asimismo, su determinante,

$$|C_X| = -1/X^2, \tag{43}$$

indica que se trata de un círculo real.

Escogiendo $X_1 = 1$ y $X_2 = 1/2$ para determinar la familia a la que pertenece, se tiene que

$$C_{X1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 + j \\ -1 - j & 1 \end{pmatrix}, \tag{44}$$

cuyo determinante es $|C_{X1}| = -1$, y

$$C_{X2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 + 2j \\ -1 - 2j & 1 \end{pmatrix}, \tag{45}$$

cuyo determinante es $|C_{X2}| = -4$.

Nuevamente, de las Ecs. (10) y (12), $\cos\phi = \pm 1$ y al igual que en el caso anterior, es el signo positivo el que le corresponde, o sea, $\phi = 0$. Por todo esto, la familia es de nuevo parabólica con el punto común $\Gamma = 1$.

Como se mencionó antes, el mapeo es sólo para elementos pasivos donde $R \geq 0$, pero X puede tener cualquier valor, por lo que:

—Si $X > 0$, la transformación se da en el hemiplano superior, compuesto por semirrectas paralelas al eje real.

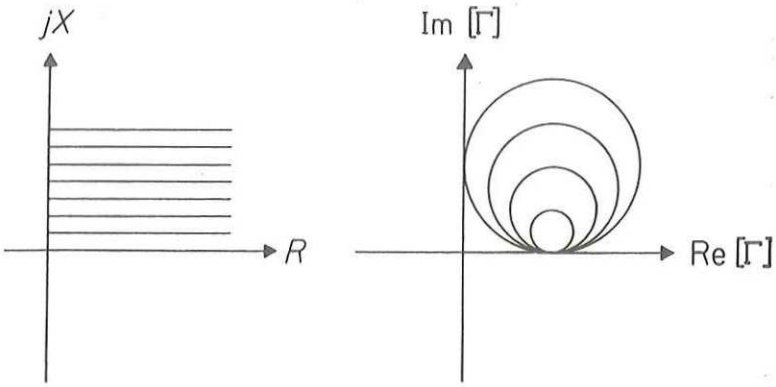

FIGURA 7. Transformación del hemiplano superior.

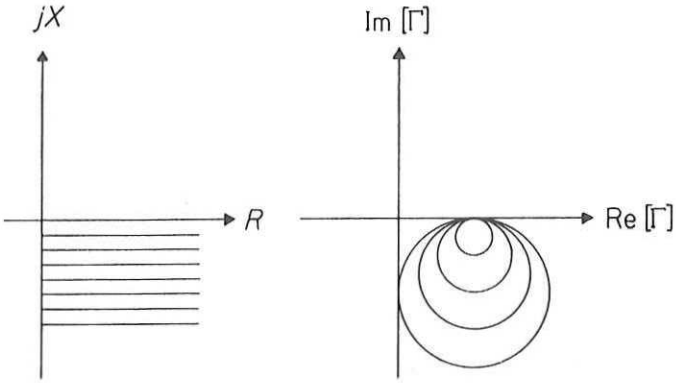

FIGURA 8. Transformación del hemiplano inferior.

—Si $X < 0$, la transformación se da en el hemiplano inferior, compuesto igualmente por semirrectas paralelas al eje real.

Para ambos casos, la familia de círculos se genera con C_{X1} y C_{X2}. Las Figs. 7 y 8 muestran la transformación en estos hemiplanos. Con la sobreposición de los tres hemiplanos (derecho, superior e inferior) se obtiene la carta de Smith según se muestra en la Fig. 9.

Finalmente, los diferentes conceptos que han sido utilizados para el desarrollo de este trabajo, se pueden englobar de manera general en temas fundamentales como la geometría moderna y la transformación conformal, los cuales sustentan la construcción del ábaco de Smith. Una serie de libros y publicaciones que tratan uno o varios de estos temas y que representan una fuente de consulta indispensable, son los de las Refs. [5] a [16].

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se han descrito los principios básicos de geometría de variable compleja necesarios para entender la generación del gráfico de Smith. Los conceptos tratados dan una perspectiva que permite ampliar la aplicación de la transformación de Möbius en el tratamiento de problemas que involucran parámetros en hiperfrecuencias, tales como la

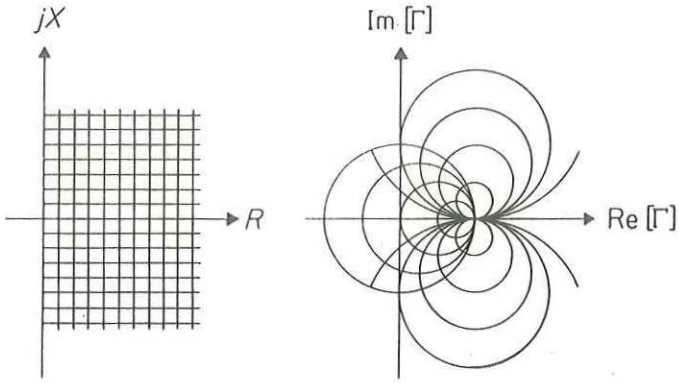

FIGURA 9. Sobreposición de los hemiplanos derecho, superior e inferior.

impedancia y la potencia. Asimismo, este trabajo, proporciona un punto de referencia para el análisis de la currícula actual en las carreras profesionales del área eléctrica y electrónica.

REFERENCIAS

1. P.H. Smith, *Electronics* **12** (1939) 29 y **17–1** (1944) 130.
2. H. Schwerdtfeger, *Geometry of Complex Numbers*, Dover Publications Inc., New York (1979).
3. R. Pantoja-Rangel, "Usos de la Variable Compleja y su Geometría en la Electrónica (Propuesta de Modificación a los Planes de Estudio en la Licenciatura en Ingeniería Electrónica)". Tesis de Maestría, Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV, IPN, México (1989).
4. L. Kaliouby, and R.G. Bosisio, *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **36** (1987) 493.
5. R. Bonola, *Non-Euclidean Geometry*, Dover Publications Inc., New York (1955).
6. H. Eves, *Estudio de las Geometrías*, Ed. UTHEA, México (1969).
7. G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, New York (1970).
8. H. S. M. Coxeter, *Fundamentos de Geometría*, Limusa Wiley, México (1971).
9. D. Pedoe, *Circles*, Dover Publications Inc., New York (1971).
10. L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill ISE, Japan (1979).
11. J.L. Altman, *Microwave Circuits*, D. Van Nostrand, New York (1964), Chapter 1, p. 17.
12. R.E. Collin, *Foundations for Microwave Engineering*, McGraw-Hill, New York (1966), Chapter 5, p. 203.
13. M. Soutif, *Vibrations, propagation, diffusion*, Dunod Université, Paris (1970), Chap. V, p. 130.
14. K.C. Gupta, *Microwaves*, Wiley Eastern Limited, New Delhi (1979), Chapter 2, p. 14.
15. P.F. Combes, *Transmission en espace libre et sur les lignes*, Dunod Université, Paris (1983), Chap. X, p. 151.
16. C.G. Montgomery, R.H. Dicke, and E.M. Purcel, *Principles of Microwave Circuits*, Peter Peregrinus, London (1987), Chapter 3, p. 71.