

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias
en Ciencias de la Computación**

**Diseño óptimo de arreglos de antenas lineales en
fase con subarreglos**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Juan Luis Valle Peñuelas

Ensenada, Baja California, México

2019

Tesis defendida por

Juan Luis Valle Peñuelas

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Carlos Alberto Brizuela Rodríguez

Codirector de tesis

Dr. Marco Antonio Panduro Mendoza

Codirector de tesis

MC. José Luis Briseño Cervantes

Dr. Pedro Gilberto López Mariscal

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales



Dr. Ubaldo Ruiz López

Coordinador del Posgrado en Ciencias de la Computación

Dra. Rufina Hernández Martínez

Director de Estudios de Posgrado

Juan Luis Valle Peñuelas © 2019

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis

Resumen de la tesis que presenta Juan Luis Valle Peñuelas como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Ciencias de la Computación.

Diseño óptimo de arreglos de antenas lineales en fase con subarreglos

Resumen aprobado por:

Dr. Carlos Alberto Brizuela Rodríguez

Codirector de tesis

Dr. Marco Antonio Panduro Mendoza

Codirector de tesis

Los arreglos de antenas en fase han ganado popularidad en los últimos años debido a sus diversas aplicaciones en tecnologías móviles 5G. Una de las principales limitantes en la fabricación de los arreglos en fase es el precio de los componentes electrónicos desfasadores que alimentan a los elementos de antena. Esto motiva la búsqueda de diseños de arreglos que permitan la reducción del número de desfasadores sin alterar las prestaciones del arreglo de manera significativa. En este trabajo se realiza una comparación entre una búsqueda exhaustiva de diseños de arreglos y la búsqueda basada en inteligencia de enjambres. Se implementaron dos métodos para mejorar las prestaciones de soluciones óptimas bajo una formulación del problema, estos métodos consisten en la redefinición del problema para incluir variables como la separación entre los elementos de antena, las excitaciones de fase del arreglo, o una combinación de ambas. Adicionalmente, se presenta un nuevo diseño de arreglo reconfigurable inspirado en trabajos previos, que permite intercambiar las líneas de alimentación de los subarreglos para conmutar entre dos secuencias óptimas utilizando un mismo arreglo, manteniendo un valor fijo de ancho de haz, pero variando el ángulo de escaneo entre $\theta = 3^\circ$ y $\theta = 10^\circ$. Con este trabajo se muestra que, a pesar de que la aplicación de métodos de búsqueda exhaustiva aseguran una solución óptima, estos son inviables en espacios de soluciones de gran tamaño, por ello el uso de metaheurísticas se presenta como una alternativa viable para la exploración parcial de espacios de búsqueda con hasta 2.815×10^{14} opciones de diseño, debido a que la búsqueda exhaustiva no es factible en espacios mayores a 8×10^9 soluciones, considerando un tiempo de ejecución máximo de seis meses en un equipo de cómputo de escritorio actual.

Palabras clave: Arreglo de antenas, Arreglo reconfigurable, Desfasador, Metaheurística evolutiva, Optimización multi-objetivo, Subarreglo.

Abstract of the thesis presented by Juan Luis Valle Peñuelas as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Computer Science.

Optimal design of linear phased antenna arrays with subarrays

Abstract approved by:

Dr. Carlos Alberto Brizuela Rodríguez

Thesis Co-Director

Dr. Marco Antonio Panduro Mendoza

Thesis Co-Director

Phased antenna arrays are currently increasing their popularity among applications related to 5G communication networks. One of the main disadvantage of phased antenna array's fabrication is the high cost of phase shifters, electronic devices that supply amplitude and phase to antenna elements. This situation motivates the search of array designs that allow phase shifter reduction without altering considerably the array's performance. This research presents a comparison between exhaustive search and a search based on swarm intelligence. Two different approaches were implemented in order to improve the performance of optimal designs under a certain problem formulation, these methods consist in a reformulation of the problem to include variables such as the separation between antenna elements, the phase excitations of the array, or both. Furthermore, a new reconfigurable array design is proposed to commute between two different optimal designs using the same antenna array and maintaining a fixed first-null beamwidth, varying the scan angle between $\theta = 3^\circ$ and $\theta = 10^\circ$. This work shows that although exhaustive search methods guarantee an optimal design, these approaches are unfeasible for large-size search spaces. Therefore, the use of swarm optimization is a feasible alternative by partially enumerating the solution spaces with up to 2.815×10^{14} different design options which are unfeasible for exhaustive methods that cannot handle search spaces with more than 8×10^9 designs, considering a maximum execution time of six months employing current desktop computer systems.

Keywords: Antenna array, Evolutionary computing, Multi-objective optimization, Phase shifter, Reconfigurable array, Subarray

Dedicatoria

A mis padres.

Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por darme la oportunidad de formarme como maestro en ciencias.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría/doctorado. No. de becario: 634068. Esta tesis de investigación fue apoyada por el proyecto (CONACYT Fronteras de la Ciencia) con número de convenio 2016-01-1680.

Al personal del Departamento de Ciencias de la Computación de CICESE por todo el apoyo brindado.

Al Departamento de Telecomunicaciones de CICESE por abrirme las puertas para realizar un trabajo de investigación en codirección con dicho departamento.

A mis directores de tesis y sinodales por sus observaciones y consejos para generar un trabajo de calidad.

A mis compañeros estudiantes por sus consejos y sugerencias para realizar este trabajo.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	ix
Lista de tablas	xiv
Capítulo 1. Introducción	
1.1. Antecedentes y motivación	1
1.2. Objetivos	3
1.2.1. Objetivo general	3
1.2.2. Objetivos específicos	3
1.3. Organización de la tesis	4
Capítulo 2. Marco Teórico	
2.1. Arreglos de antenas lineales	8
2.1.1. Vector de dirección	10
2.1.2. Factor de arreglo	11
2.1.3. Patrón de radiación	11
2.1.4. Ancho de haz de primer nulo (FNBW) y nivel de lóbulo lateral (SLL)	13
2.1.5. Amplitudes de corriente	14
2.2. Arreglos de antenas en fase	16
2.3. Computación Evolutiva	17
2.3.1. Particle Swarm Optimization (PSO)	20
2.4. Optimización multi-objetivo	22
2.4.1. Dominancia y optimalidad de Pareto	23
Capítulo 3. Definición del Problema	
3.1. Separación entre elementos de antena	25
3.2. Agrupación de elementos de antena por subarreglos	28
3.3. Espacios de búsqueda	31
3.3.1. Restricciones en subarreglos	32
3.3.2. Composiciones de números enteros	33
3.4. Ventanas de amplitudes de corriente	37
3.5. Variación de las excitaciones de fase	38
3.6. Funciones objetivo	38
3.6.1. Problema de optimización mono-objetivo de arreglos de ante- nas lineales en fase con subarreglos	40
3.6.2. Problema de optimización mutli-objetivo de arreglos de ante- nas lineales en fase con subarreglos	42

Tabla de contenido (continuación)

3.7.	Trabajo previo relevante	44
3.7.1.	Computación evolutiva aplicada al diseño de arreglos de antenas	45
3.7.2.	Optimización multi-objetivo de arreglos de antenas lineales	46
3.7.3.	Panorama actual	47
Capítulo 4. Metodología		
4.1.	Ordenamiento lexicográfico	49
4.2.	Optimización exhaustiva	51
4.2.1.	Optimización mono-objetivo con restricciones	51
4.2.2.	Optimización mono-objetivo sin restricciones	52
4.3.	Optimización multi-objetivo	53
4.3.1.	Enfoque evolutivo: problema de optimización multi-objetivo	54
4.3.2.	Subarreglos por distribución probabilística	57
4.3.3.	Indicador de densidad	60
4.4.	Técnicas adicionales de optimización	62
4.4.1.	Separación uniforme de antenas	62
4.4.2.	Agrupaciones de fases	63
4.4.3.	Discretización de fases	64
Capítulo 5. Resultados		
5.1.	Optimización exhaustiva	66
5.1.1.	Experimento 1: optimización mono-objetivo con restricciones	66
5.1.2.	Experimento 2: optimización exhaustiva sin restricciones	68
5.2.	Metaheurísticas evolutivas	69
5.2.1.	Experimento 3: optimización multi-objetivo sin restricciones	69
5.3.	Patrones de diseño	70
5.3.1.	Experimento 4: ordenamiento de subarreglos por distribución probabilística	70
5.3.2.	Experimento 5: indicador de densidad	73
5.3.3.	Experimento 6: generación de población y mutación por composiciones	76
5.4.	Técnicas adicionales de optimización	79
5.4.1.	Experimento 7: variación de la separación uniforme entre elementos	80
5.4.2.	Experimento 8: asignación de fases	81
Capítulo 6. Discusión		
6.1.	Estrategias de búsqueda de soluciones	85
6.2.	Búsqueda asistida por patrones de diseño	88
6.3.	Técnicas adicionales de optimización	93
6.4.	Perspectivas de investigación	93

Tabla de contenido (continuación)

Capítulo 7. Conclusiones

7.1. Sumario	96
7.2. Conclusiones	97

Literatura citada	99
------------------------------------	----

Lista de figuras

Figura	Página
1. Sistema de transmisión y recepción de ondas electromagnéticas en el espacio libre (traducido de Kraus <i>et al.</i> (2006)).	6
2. Regiones de campos radiados. Región de campo cercano reactivo r_{rnf} (<i>reactive near-field</i>). Región de campo cercano radiativo r_{Fnl} (<i>Fresnel zone</i>). Región de campo lejano r_{ff} (<i>far-field</i>) (traducido de Kraus <i>et al.</i> (2006)).	7
3. Representación de un arreglo de antenas con geometría lineal (traducido de Visser (2006)).	8
4. Representación de una red sumadora. El patrón de radiación de N elementos de antena es evaluado en S_i para posteriormente ser añadido a la suma total de patrones (traducido de Visser (2006)).	9
5. Patrón de radiación de un arreglo de antenas lineal con apertura de $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, la línea horizontal punteada de color azul corresponde al nivel de los lóbulos secundarios en dB.	12
6. Atributos importantes de un patrón de radiación (Extraído de Balanis (2012)).	13
7. Ejemplo de diferentes ventanas de amplitudes de corriente para un arreglo lineal conformado por 8 subarreglos, mostrado en la Tabla 1. La alimentación con corriente uniforme (Rectangular) es equivalente a un circuito que carece de atenuadores.	15
8. Arreglo de antenas lineal en fase con componentes desfasadores y atenuadores variables. La suma de amplitudes y excitaciones de fase se encuentra representada por el factor de arreglo $AF(\theta)$ (traducido de Stutzman y Thiele (2012)).	16
9. Efectos del cambio de signo del ángulo de escaneo θ , que produce en consecuencia un cambio de signo en el vector de dirección $\psi_i \in \Psi$, denotado en radianes, para los casos de: $n = 6, d = \lambda/2, a) \theta = 30^\circ, b) \theta = -30^\circ$	18
10. Espacio de criterios con nueve diferentes soluciones. Los valores de rendimiento son dados por los criterios o funciones objetivo f_1, f_2 , utilizando la ecuación (16). Las soluciones de color verde (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) componen un frente de aproximación de Pareto que contiene a las mejores soluciones encontradas durante la búsqueda. En este ejemplo, el desempeño de la solución s_4 es mejor que las soluciones s_8, s_9 , o que cualquier otra solución contenida en el área de color verde.	22
11. Ilustración de un frente de Pareto. Los ejes x y y representan a dos objetivos en conflicto sujetos a restricciones. La calidad de las soluciones es representada por los valores de x y y (asumiendo maximización). El punto A domina a B y a todos los puntos en el área gris. A y C no se dominan entre ellos. La línea representa al conjunto de Pareto del que forma parte el punto A . Las soluciones superiores al frente, como es el caso de D , son no factibles. (traducido de Eiben y Smith (2008)).	24
12. Diagrama esquemático de un arreglo de antenas lineal en fase representado por una secuencia de enteros $s = [4, 2, 3, 1]$	26

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
13. Patrones de radiación del arreglo lineal $s = [2, 3, 1, 4, 2, 3, 4]$ mostrado en la Figura 14. En donde se utiliza una separación uniforme de (a) $d = \lambda/2$, y (b) $d = \lambda$ con la aparición en éste último de lóbulos secundarios (<i>grating lobes</i>) en <i>broadside</i> ($\theta = 0^\circ$).	27
14. Arreglo de antenas lineal en fase con secuencia $s = [2, 3, 1, 4, 2, 3, 4]$, y separación uniforme de $d = \lambda/2$	29
15. Comparación entre patrones de radiación de un arreglo lineal (a) $s = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$, con un arreglo (b) $s = [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]$. Aumentar la cantidad de elementos de antena produce una reducción del FNBW, así como de la radiación aleadaña al lóbulo principal.	30
16. Ejemplo de reducción de espacios de búsqueda al decrementar la cantidad de tamaño j de subarreglos K_j . En este caso $n = 10$, para los tamaños de los espacios de soluciones de $m_1 = 4^{10} = 1,048,576$ (gris), $m_2 = 3^{10} = 59,049$ (rosa), $m_3 = 2^{10} = 1,024$ (azul).	33
17. Composiciones de $n = 4$ particionado en $k = 4$ subconjuntos. Entonces, $C_4(4) = 35$ es la cantidad de particiones o subproblemas de tamaño m con soluciones de N elementos de antena. En color azul claro se muestran cuatro subproblemas que comparten la misma cantidad de elementos de antena ($N = 11$), pero pueden contar con un número diferente de soluciones.	34
18. Función que representa la distribución de porcentajes del espacio de búsqueda S de tamaño m de la Figura 17. Se muestra que el porcentaje de soluciones del espacio S (17.19%) cuando $N = 10$ corresponde a la parte central de la lista de $m = 4^4$ elementos ordenados lexicográficamente, que comprende el intervalo [41.4%, 58.6%] de la lista con 44 soluciones.	35
19. Número de composiciones $C_4(4) = 35$ para $n = 4$, y $k = 4$. Cada una de las composiciones puede ser vista como un subproblema de menor dimensión, con restricciones irrepetibles para los subarreglos K_j en el arreglo.	36
20. Composiciones $C_4(n)$ para los casos de $n = 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27$. Se observa que, en todos los casos, el mayor porcentaje de las soluciones son formadas por el valor de N localizado en la mitad del intervalo M mostrado en la ecuación (25).	36
21. Representación de los centros de fase del arreglo lineal de la Figura 14. Los n centros de fase son asociados a los elementos de antena en N	37
22. Ejemplo de diferentes amplitudes de corriente suministradas al arreglo $s = [2, 3, 1, 4, 2, 3, 4]$ de la Figura 13. Las dos imágenes superiores muestran el patrón de radiación del circuito cuando sus respectivas amplitudes de corriente de las imágenes inferiores son aplicadas.	39

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
23. Comparación entre cuatro diferentes soluciones del conjunto S utilizando la función objetivo $f_1(s)$. La solución s_1 supera al resto debido a que $f_1(s_1) < f_1(s_4) < f_1(s_3) < f_1(s_2)$. Donde $s_1 = [3, 2, 1, 2, 4]$, $s_2 = [4, 1, 1, 1, 4]$, $s_3 = [1, 4, 1, 2, 4]$, $s_4 = [1, 1, 3, 2, 1]$	41
24. Comparación entre cuatro diferentes soluciones del conjunto S utilizando la función objetivo $f_2(s)$. En esta ocasión la solución s_3 supera al resto debido a que $f_2(s_3) < f_2(s_1) < f_2(s_2) < f_2(s_4)$. Donde $s_1 = [3, 2, 1, 2, 4]$, $s_2 = [4, 1, 1, 1, 4]$, $s_3 = [1, 4, 1, 2, 4]$, $s_4 = [1, 1, 3, 2, 1]$	42
25. Comparación entre cuatro diferentes soluciones del conjunto S . A diferencia de las Figuras 23 y 24, ahora se utiliza una función de minimización multi-objetivo $z = (f_1(s), f_2(s))$. Esto hace que exista más de una solución candidata (s_1, s_3) para resolver el problema. Donde $s_1 = [3, 2, 1, 2, 4]$, $s_2 = [4, 1, 1, 1, 4]$, $s_3 = [1, 4, 1, 2, 4]$, $s_4 = [1, 1, 3, 2, 1]$	43
26. Logo del frente de Pareto obtenido en el caso: $n = 9$, $N' = \{1, 2, 3, 4\}$, $\theta = 0^\circ$, $d = \lambda/2$. Los subarreglos se encuentran representados por $A = 1$, $C = 2$, $G = 3$, $T = 4$, el tamaño de las letras indica el aumento o la disminución de la probabilidad que tiene cada subarreglo de aparecer en una posición i de la secuencia (software: https://weblogo.berkeley.edu/).	58
27. Ejemplo de una matriz de frecuencia de posición PFM denotada por M con dimensiones $(N' \times n) = (4 \times 6)$. El frente de Pareto se encuentra dado por \mathbf{P}^* que contiene seis soluciones candidatas.	58
28. Visualización de la función de densidad mostrada en la Tabla 6, utilizando un arreglo lineal con secuencia $s = [4, 1, 1, 3, 1, 2, 4, 1, 1, 1, 4]$, $v = 3$, $n = 11$	62
29. Excitaciones de fase de un arreglo $s = [2, 3, 1, 4, 2, 3, 4]$, con $N = 19$. En color azul, se observan las fases dadas por los centros de fase D_i del caso base. En color rojo, se muestra la corrección por medio de la discretización de fases utilizando la tabla de verdad de un desfasador de 6-bits. En color amarillo, utilizando un desfasador de 5-bits. En color verde, utilizando un desfasador de 4-bits.	64
30. Patrones de radiación con variación en la resolución de los desfasadores, con el mismo código de colores de la gráfica mostrada en la Figura 29, que muestra un cambio en el rendimiento del arreglo relacionado a la discretización de los valores de excitación de fase que alimentan a los elementos de antena.	65

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
31. Frentes de Pareto del problema <i>sin restricciones</i> (4^n) para los casos $6 \leq n \leq 12$, con separación entre elementos de $d = \lambda/2$, y ángulo de escaneo a 0° (<i>broadside</i>). La calidad de las soluciones incrementa con el aumento en el número de subarreglos en el arreglo.	69
32. Indicadores de densidad de las soluciones $s_1^* = [4, 3, 4, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 4]$ y $s_1 = [3, 2, 2, 2, 3, 4, 2, 3, 2, 3, 3, 2]$ (el orden de los elementos en la solución s_1 se encuentra invertido).	73
33. Indicadores de densidad de las secuencias: En azul, $s_{11} = [4, 2, 3, 4, 4, 3, 4]$. En rojo, $s_{12} = [4, 2, 1, 4, 4, 3, 2, 4]$. En amarillo, $s_{13} = [4, 1, 1, 3, 4, 4, 1, 2, 4]$, En verde, $s_{14} = [4, 1, 1, 1, 2, 4, 4, 2, 1, 4]$	74
34. Indicadores de densidad de las secuencias: En azul, $s_{21} = [4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 2]$. En verde, $s_{22} = [4, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 3]$. En rojo, $s_{23} = [3, 3, 1, 4, 2, 2, 2, 3, 3, 2]$, En café, $s_{24} = [3, 2, 2, 4, 2, 2, 2, 3, 2, 3]$	75
35. Porcentajes correspondientes a la posición de una composición con índice c dentro de su respectiva distribución de subproblemas para los casos $6 \leq n \leq 12$ con $\theta = 0^\circ$	76
36. Distribuciones de subproblemas para los algoritmos: SMP SO (azul), PDF-SMP SO (rojo).	77
37. Frentes aproximados de Pareto consolidados durante treinta corridas de los algoritmos: SMP SO (azul), y PDF-SMP SO (rojo).	79
38. Frente aproximado de Pareto (APF) de los datos presentados en la Tabla 19.	81
39. Pendientes de fase de la solución candidata $s = [3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 3]$, en los casos: $d = 0.45\lambda$ (azul), $d = \lambda/2$ (rojo), y $d = 0.55\lambda$ (amarillo).	82
40. Incremento progresivo en la cantidad de soluciones candidatas por frente de Pareto, para los casos $6 \leq n \leq 12$, con ángulo de escaneo $0^\circ \leq \theta \leq 9^\circ$	87
41. Modificaciones necesarias para pasar de una solución de tamaño n , a una solución de tamaño $n + 1$, manteniendo un número fijo de elementos de antena $N = 24$. La <i>descomposición</i> de subarreglos es mostrada por los recuadros de color rojo, mientras que los recuadros azules representan un intercambio en la posición de dos subarreglos (<i>swap</i>).	90
42. Dos pares de soluciones (a-b y c-d) que comparten el mismo número de elementos de antena $N = 25$	91
43. Modelo de arreglo de antenas lineal-reconfigurable propuesto en esta investigación, que permite cambiar entre ángulos de escaneo (3° ó 10°), manteniendo un valor virtualmente fijo de FNBW (≈ 0.1485 rad.). Los <i>bloques</i> representan partes del arreglo que no necesitan ser modificadas.	94

44. Patrones de radiación de las soluciones mostradas en la Tabla 43. En rojo:
 $s_r = [4, 2, 3, 4, 2, 4, 3, 4, 4, 4]$. En azul: $s_a = [4, 2, 3, 4, 4, 2, 4, 4, 3, 4]$ 95

Lista de tablas

Tabla	Página
1.	Amplitudes de corriente (<i>weights</i>) de diferentes funciones de ventana para un arreglo lineal de 8 elementos (traducido de Allen y Ghavami (2005)). 14
2.	Componentes del algoritmo de optimización por enjambre de partículas PSO (traducido de Eiben y Smith (2008)). 21
3.	Configuración inicial de parámetros del ejemplo mostrado en la Figura 14. 29
4.	Crecimiento del tamaño (m_1) de los espacios de búsqueda con <i>restricciones</i> 52
5.	Crecimiento del tamaño de los espacios de búsqueda con las restricciones de la Tabla 4 (m_1) y sin restricciones (m_2). 53
6.	Indicador de densidad para la secuencia $s = [4, 1, 1, 3, 1, 2, 4, 1, 1, 1, 4]$ con $v = 3$, $n = 11$. Se obtiene un vector de densidades $Q \in [0.25, 1]^{11}$. 61
7.	Tabla de verdad de un desfasador convencional (HMC647ALP6E de Analog Devices). Cualquier combinación de los estados generará un desfasamiento aproximadamente igual a la suma de los bits seleccionados. 63
8.	Crecimiento del tiempo computacional proporcional al aumento de tamaño de los espacios de búsqueda. 67
9.	Diseños óptimos globales de los espacios con índice 1, 2, y 3 de la Tabla 8. 67
10.	Soluciones óptimas globales del enfoque mono-objetivo (SLL), para los casos <i>sin restricciones</i> de $6 \leq n \leq 12$, con ángulo de escaneo de $\theta = 12^\circ$ 68
11.	Soluciones con rendimiento similar. La solución óptima s_1^* del Experimento 1, y la solución s_1 extraída de un APF generado por el algoritmo SMP SO en 100,000 iteraciones. 70
12.	Matriz PPM resultante de los casos $6 \leq n \leq 10$, para $n = 11$, y con ángulo de escaneo a <i>broadside</i> $\theta = 0^\circ$. En negritas se muestra la mayor probabilidad de encontrarse un subarreglo K_j en la posición i del arreglo. 71
13.	Configuración del Experimento 4. 71
14.	Resultados de hipervolumen para cuarenta corridas de los algoritmos, utilizando la configuración de la Tabla 13, a excepción de PDF-SMP SO* con población de 150 individuos, y PDF-SMP SO** con población de 200 individuos. 72
15.	Cuatro soluciones con $N = 24$, elegidas de los frentes de Pareto del intervalo $7 \leq n \leq 10$, con ángulo de escaneo a <i>broadside</i> $\theta = 0^\circ$ 74

Lista de tablas (continuación)

Tabla	Página
16.	Cuatro soluciones candidatas con $N = 25$, extraídas del frente de Pareto del caso $n = 10$, $\theta = 10^\circ$ 75
17.	Configuración del Experimento 6. 77
18.	Resultados del Experimento 6. 78
19.	Frente aproximado de Pareto obtenido por el algoritmo SMPSO, con variación en la separación uniforme entre elementos de antena utilizando la solución óptima $s_{op} = [3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 3]$ del caso $K_2 = 6, K_3 = 6, n = 12, \theta = 12^\circ$ 80
20.	Razón de cambio promedio en SLL, FNBW, y separación (λ), de las soluciones en la Tabla 19. 81
21.	Se realizaron ocho procedimientos diferentes, variando el orden de ejecución de los algoritmos de optimización de separación y fases, además del cambio entre los tipos de valores de fase (reales o teóricos). 84
22.	Soluciones óptimas ($s_{f_1}^*, s_{f_2}^*$) de dos problemas distintos, con una misma configuración en $n = 12, \theta = 12^\circ, d = \lambda/2$. Se observa un compromiso entre SLL ($s_{f_1}^*$) y FNBW ($s_{f_2}^*$) al cambiar la función objetivo del enfoque mono-objetivo. 86
23.	Secuencias <i>espejo</i> (s_f, s_b) del caso $n = 11, \theta = 0^\circ, d = \lambda/2$. Se observa una discrepancia de rendimiento en SLL de ± 0.03 dB entre soluciones. 89
24.	Soluciones óptimas de los frentes de Pareto para los casos $n = 10, N = 34, \theta = 3^\circ$ (s_a), y $\theta = 10^\circ$ (s_r). 94

Capítulo 1. Introducción

En este documento se presenta un trabajo de investigación orientado principalmente a la reducción de componentes electrónicos desfasadores presentes en los arreglos de antenas lineales en fase, mediante la optimización de parámetros de diseño en su síntesis.

1.1. Antecedentes y motivación

Los arreglos de antenas son agrupamientos de elementos de antena en un plano, los cuales han sido utilizados desde mediados del siglo XX para construir diversas aplicaciones como: radares, satélites, comunicaciones móviles, sensores, entre otras. Inicialmente, los arreglos de antenas lineales en fase consideraban un componente desfasador por elemento de antena, haciendo de estos, dispositivos altamente exclusivos y costosos. A finales del siglo XX, algunos trabajos comienzan a considerar el agrupamiento de diferentes números de elementos de antena, presentados por Goffer *et al.* (1994) como *subarreglos*, que surgen con la intención de reducir la cantidad de componentes desfasadores en el circuito, sin causar repercusiones significativas en el rendimiento de operación del arreglo. Otros trabajos posteriores como el de Mailloux (2001), se enfocaron en variar la cantidad de elementos de antena por agrupación, generando de esta forma una enorme cantidad de combinaciones posibles.

Posteriormente, se comienzan a dar las primeras aplicaciones de metaheurísticas evolutivas al problema de diseño de arreglos lineales, como se menciona en (Boeringer y Werner, 2004) (Khodier y Christodoulou, 2005) (Panduro *et al.*, 2006). Sin embargo, estas se enfocan en la optimización del rendimiento mediante cambios en las amplitudes de corriente y fase, sin contemplar directamente una reducción de componentes desfasadores. De manera alterna, surgen otros trabajos dirigidos a comprobar la existencia de un compromiso entre funciones objetivo de rendimiento en arreglos de antenas, como el trabajo mostrado por Panduro *et al.* (2005), que expone el compromiso entre dos métricas de rendimiento operacional mediante la introducción de un enfoque multi-objetivo, y el uso de metaheurísticas evolutivas.

La introducción de restricciones en los agrupamientos de elementos de antena permite reducir la cantidad de desfasadores en el arreglo, esto se logra mediante algunas

técnicas mostradas por Avser *et al.* (2016), lo que permite realizar una exploración exhaustiva en algunos espacios de búsqueda, asegurando una solución óptima por búsqueda. Sin embargo, lo anterior genera que se descarte una gran cantidad de soluciones que podrían resultar con prestaciones favorables, o contar con parámetros de diseño que permitan adecuarse a las demandas específicas en un caso particular del problema. Además, otras investigaciones introducen la variación autónoma de las amplitudes de corriente de los elementos de antena (Banerjee y Dwivedi, 2016), popularmente conocido como *beamforming*, para direccionar la radiación emitida por el haz principal hacia virtualmente cualquier ángulo de escaneo.

Una de las principales motivaciones para la reducción del número de desfasadores en arreglos de antenas en fase radica en el costo de fabricación de los mismos. Considere el siguiente ejemplo: el departamento de diseño eléctrico de una compañía automotriz propone el diseño de un arreglo de antenas lineal en fase, que elimina un elemento desfasador de un diseño previamente implementado en varios de sus modelos. El dispositivo desfasador utilizado en estos arreglos es un *HMC1133LP5E* de Analog Devices, con un costo aproximado de 100 dólares americanos al momento de escribir este documento. Si la producción del número de unidades fuera de medio millón al año, se estaría efectuando un ahorro en el costo de fabricación de todas las unidades de aproximadamente cincuenta millones de dólares anuales.

La motivación para mejorar el rendimiento de los arreglos de antena en fase se debe a la creciente necesidad de utilizar espectros de frecuencias concentradas en las bandas *UHF* y *EHF* (redes 5G). El empleo de ondas milimétricas se encuentra en ascenso, por lo que es necesario mejorar la emisión de energía y el direccionamiento de la radiación electromagnética de manera eficiente para que las pérdidas por propagación sean minimizadas; además de que se genere un direccionamiento apropiado del haz electromagnético principal y se reduzcan de manera simultánea las interferencias en SLL causadas por otros equipos, generando tiempos de latencia por debajo de 1ms (*Internet táctil*), como se menciona en (Agiwal *et al.*, 2016).

A pesar de que las búsquedas exhaustivas, como la propuesta por Avser *et al.* (2016), permiten garantizar la optimización de la solución encontrada, se requiere de la ampliación del espacio de soluciones para permitir encontrar algunas soluciones con mejores prestaciones. Sin embargo, la exploración de espacios más amplios con

técnicas exhaustivas se vuelve inviable, por lo que es necesario el uso de enfoques alternativos como las metaheurísticas evolutivas, que permitan exploraciones parciales de los espacios utilizando un número predeterminado de iteraciones, asegurando con esto un tiempo de ejecución viable para realizar la búsqueda.

1.2. Objetivos

Los objetivos de esta investigación se muestran a continuación. Por una parte se encuentra el objetivo general, que estipula de manera concreta el propósito de este trabajo, mientras que los objetivos específicos muestran las metas a lograr de manera conjunta para cumplir con el objetivo general.

1.2.1. Objetivo general

Implementar algoritmos evolutivos para el diseño óptimo de arreglos de antenas lineales agrupadas en fase para la minimización de la amplitud de los lóbulos laterales, el ancho de haz principal y la cantidad de componentes desfasadores.

1.2.2. Objetivos específicos

- Implementar y evaluar algunos casos del trabajo presentado en (Avser *et al.*, 2016) utilizando: a) un algoritmo exhaustivo de optimización mono-objetivo, b) un algoritmo exhaustivo de optimización multi-objetivo, c) un algoritmo evolutivo de optimización multi-objetivo.
- Diseñar, implementar y evaluar un algoritmo evolutivo de optimización multi-objetivo basado en la distribución probabilística de subarreglos en soluciones óptimas provenientes de casos de menor complejidad.
- Diseñar e implementar un nuevo indicador visual (*indicador de densidad*) para la identificación de patrones de diseño en arreglos de antenas lineales.
- Diseñar, implementar y evaluar un algoritmo evolutivo de optimización multi-objetivo basado en la resolución parcial de un problema de gran tamaño, resolviendo problemas de menor complejidad (subproblemas).

- Implementar y evaluar otras técnicas de optimización de diseños, utilizando un algoritmo evolutivo de optimización multi-objetivo que considere variaciones en la separación uniforme de los elementos de antena y en las excitaciones de fase de los subarreglos.
- Diseñar un arreglo de antenas lineal reconfigurable, que permita una reconfiguración parcial en la cantidad de elementos de antena en subarreglos específicos, por medio de la conmutación entre las líneas de alimentación.

1.3. Organización de la tesis

En el Capítulo 2 se abordan los conceptos básicos de teoría de antenas, destacando la descripción del funcionamiento de los arreglos de antenas lineales en fase. Además, se mencionan otras características importantes como la variación de la separación uniforme entre elementos de antena, así como de las excitaciones de fase proporcionadas por los desfasadores para direccionar la radiación emitida por el arreglo. Adicionalmente, se muestran conceptos importantes de computación evolutiva y sus antecedentes en la optimización de parámetros de diseño en arreglos de antenas; de igual manera, se presenta la optimización multi-objetivo del diseño de arreglos dado un compromiso entre dos funciones objetivo de rendimiento.

En el Capítulo 3 se describe de manera formal el problema de diseño de arreglos de antenas lineales en fase, orientado principalmente a la reducción de componentes desfasadores. Además, se presenta el estado del arte así como algunas estrategias implementadas con anterioridad para resolver el problema. Una de las principales dificultades en esta investigación corresponde a la cantidad de combinaciones que se pueden generar considerando dos factores: el número de elementos de antena que puede contener cada subarreglo y la cantidad de subarreglos en el arreglo.

En el Capítulo 4 se describe la metodología adoptada para llevar a cabo los experimentos correspondientes. La metodología se divide de manera general en tres apartados: el primero de ellos se basa en las diferentes estrategias empleadas para la búsqueda de soluciones. El segundo enfoque estudia la existencia de patrones de diseño, formados a partir de la distribución estratégica de los subarreglos, favoreciendo un caso particular del problema. El tercer enfoque muestra unas técnicas adicionales

de optimización que son aplicadas una vez que se cuenta con una solución candidata que resuelva el problema.

En el Capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos en cada uno de los experimentos siguiendo el orden de la metodología del Capítulo 4. En esta sección se muestra una gran cantidad de tablas y figuras, con la intención de mejorar la comprensión de los capítulos posteriores. Los resultados más importantes se encuentran dirigidos a la reducción del tiempo computacional requerido para la búsqueda de soluciones, también al uso de información adicional para la creación de búsquedas asistidas por patrones de diseño que expliquen las distribuciones estratégicas de subarreglos en determinados casos del problema.

En el Capítulo 6 se discuten los resultados obtenidos en el Capítulo 5, para generar inferencias a partir de la comparación entre diferentes enfoques y casos del problema. Se proponen diferentes líneas de investigación futuras como desenlace de este trabajo, orientadas principalmente a la aplicación de técnicas de reconocimiento de patrones para el diseño de los arreglos de antena lineales. Otra parte de la investigación a futuro es el diseño de arreglos de antenas lineales *reconfigurables*, que puedan cambiar la cantidad de elementos por subarreglo utilizando conmutadores de radiofrecuencia en las líneas de alimentación, adaptándose a una variación del ángulo de escaneo θ .

En el Capítulo 7 se muestran las conclusiones de este trabajo, a partir de la explicación e interpretación de los resultados obtenidos. Este capítulo se encuentra dividido en tres secciones principales: la primera se encuentra orientada a la explicación del crecimiento del tamaño de los espacios de búsqueda de soluciones, donde se obtienen conclusiones relacionadas a las formas en que pueden ser construídos los espacios de búsqueda, así como de los enfoques para la comparación y selección de soluciones. La segunda se relaciona con el análisis de la búsqueda de patrones de diseño en arreglos de antenas lineales *favorables* para un determinado caso del problema. Por último, se habla sobre las conclusiones de las técnicas adicionales de optimización, que permiten la variación de la separación uniforme entre elementos de antena y el uso de fases reales generadas por componentes desfasadores digitales de n -bits.

Capítulo 2. Marco Teórico

Una antena es un medio utilizado para transmitir o recibir ondas electromagnéticas formadas por energía radiante que se propaga a través del espacio libre. Estas ondas de radio son producidas por un sistema eléctrico compuesto de una fuente de alimentación de corriente alterna, una línea de transmisión de material conductor, y uno o varios elementos de antena. De acuerdo con Balanis (2012), la radiación electromagnética generada por las antenas se aglomera en paquetes de energía radiante con diferentes formas geométricas, generadas por la suma de los patrones de radiación que son emitidos por los elementos de antena de manera constructiva o destructiva entre sí.

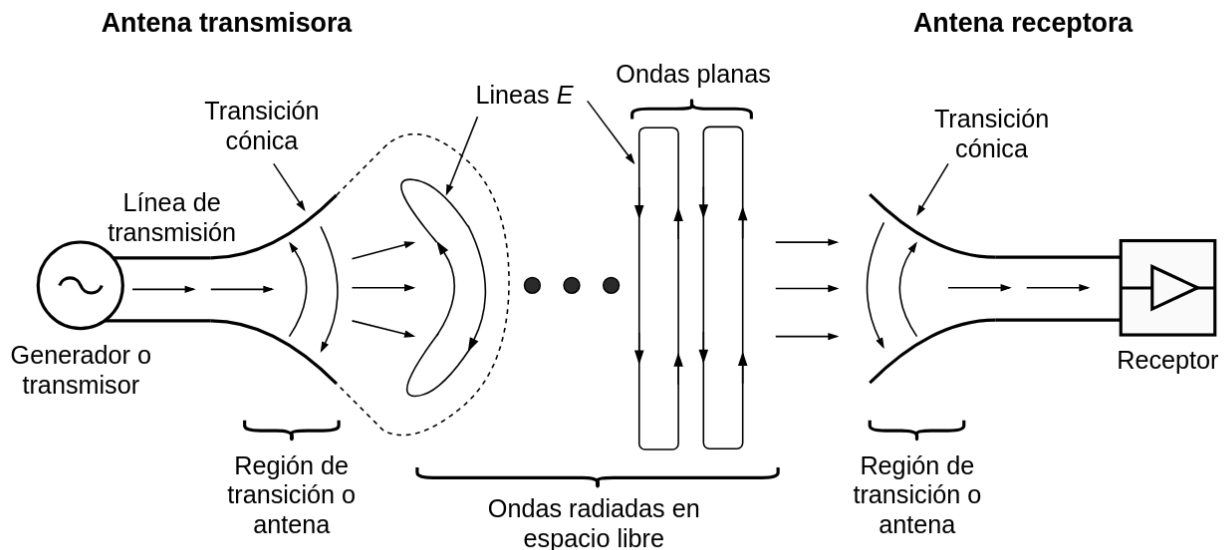


Figura 1. Sistema de transmisión y recepción de ondas electromagnéticas en el espacio libre (traducido de Kraus *et al.* (2006)).

Kraus *et al.* (2006) mencionan que una antena transmisora consiste de: un generador o transmisor, una línea de transmisión, y una región de transición para generar paquetes de energía radiante en forma de ondas planas que se propagan a través del espacio. Éstas pueden ser recibidas por una antena receptora compuesta de: un circuito receptor, una línea de transmisión, y una región de transición como se muestra en la Figura 1.

El espectro electromagnético corresponde a la de frecuencia f de la radiación electromagnética con su respectiva longitud de onda λ ; suponiendo que v (velocidad de la luz) es constante en $f = v/\lambda$, se puede calcular la frecuencia a partir de una longitud de onda constante, y viceversa. Considere que solo existe una pequeña porción del espectro electromagnético que puede ser visible por el ojo humano, ésta se encuentra localizada en el intervalo de aproximadamente $400 \leq \lambda \leq 700$ nm (750 - 429 THz). En consecuencia, las ondas de radio ($10 \leq \lambda \leq 100$ m) entre otros tipos de ondas electromagnéticas resultan ser invisibles al ojo humano.

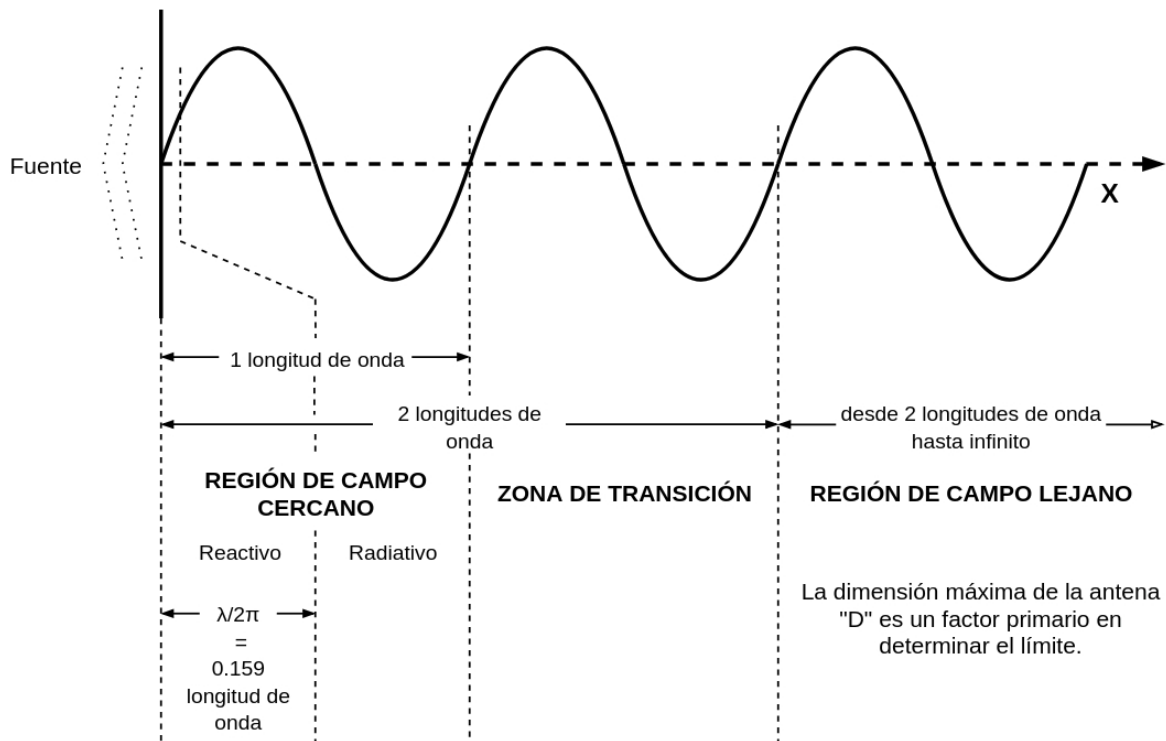


Figura 2. Regiones de campos radiados. Región de campo cercano reactivo r_{rnf} (*reactive near-field*). Región de campo cercano radiativo r_{Fnl} (*Fresnel zone*). Región de campo lejano r_{ff} (*far-field*) (traducido de Kraus et al. (2006)).

Considere el siguiente ejemplo, las ondas de radio que conforman el espectro de frecuencias extremadamente altas (EHF) pertenecen al intervalo de $30 \leq f \leq 300$ GHz. Estas son mejor conocidas como *ondas milimétricas*, debido a que su longitud de onda se encuentra definida por $1 \leq \lambda \leq 10$ mm; ésta región del espectro electromagnético de suma importancia para el desarrollo de esta investigación debido a su asignación para aplicaciones de tecnologías móviles 5G (Agiwal et al., 2016).

2.1. Arreglos de antenas lineales

Los arreglos de antenas son agrupaciones de elementos de antena (radiadores) distribuidos estratégicamente en un plano. Las geometrías de las agrupaciones pueden variar entre lineales, planares, circulares, entre otras formas geométricas regulares e irregulares; adicionalmente, los elementos de antena pueden contar con diferentes formas geométricas irregulares, aumentando con esto la complejidad en el cálculo del diseño (Krivosheev *et al.*, 2015).

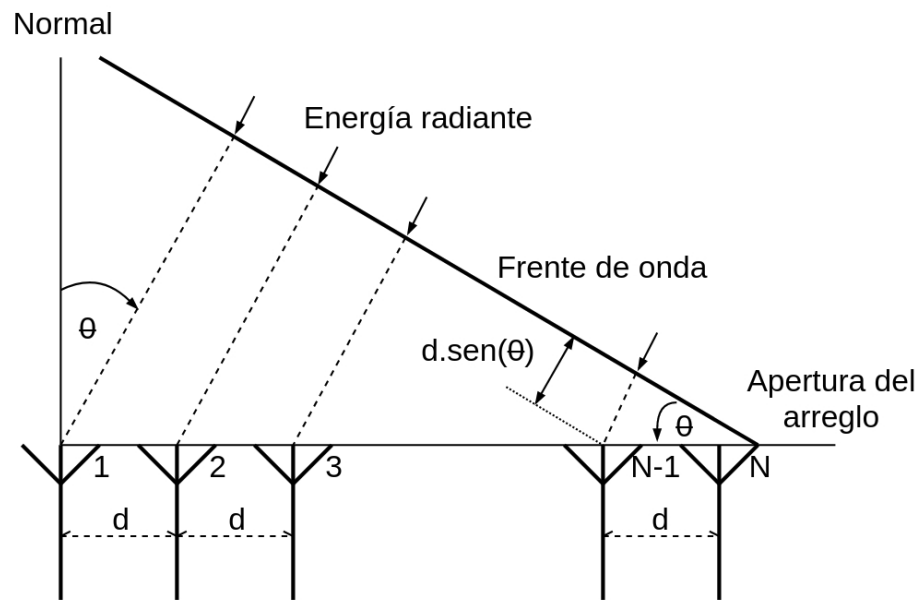


Figura 3. Representación de un arreglo de antenas con geometría lineal (traducido de Visser (2006)).

Se conoce como arreglo de antenas lineal a la agrupación de elementos de antenas que forman una línea recta como se muestra en la Figura 3, produciendo un haz electromagnético perpendicular a dicho eje (*broadside*). Los elementos de antena que conforman el arreglo cuentan con una separación d , que puede ser uniforme o en algunos casos no-uniforme (Panduro *et al.*, 2006). Sin embargo, para situaciones prácticas, los arreglos de antenas lineales son compuestos generalmente por radiadores con geometrías simétricas, posicionados a una separación equidistante entre sí.

Las señales complejas recibidas por los elementos de antena del arreglo $S_i(\theta)$ para $i = 1, 2, \dots, N$, son definidas por:

$$S_i(\theta) = S_e(\theta) a_i e^{jk_0(N-i)d \sin(\theta)}. \quad (1)$$

En donde $k_0 = 2\pi/\lambda$ representa el número de onda (*wave number*), N denota el número de elementos de antena, θ corresponde al ángulo de llegada de las señales, y ψ_i como la fase progresiva del i -ésimo elemento en (2). El patrón de radiación de un elemento individual es denotado por $S_e(\theta)$, mientras que a_i corresponde a la amplitud de corriente suministrada en el i -ésimo elemento de antena (Visser, 2006).

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^N S_i(\theta) = S_e(\theta) \sum_{i=1}^N e^{jk_0(N-i)d \sin(\theta)} \quad (2)$$

La respuesta total del arreglo se encuentra definida por la adición de las señales complejas de cada elemento de antena como es mostrado en la Figura 4, en donde se observa una red sumadora de patrones de radiación individuales representados por cada uno de los elementos en S_i .

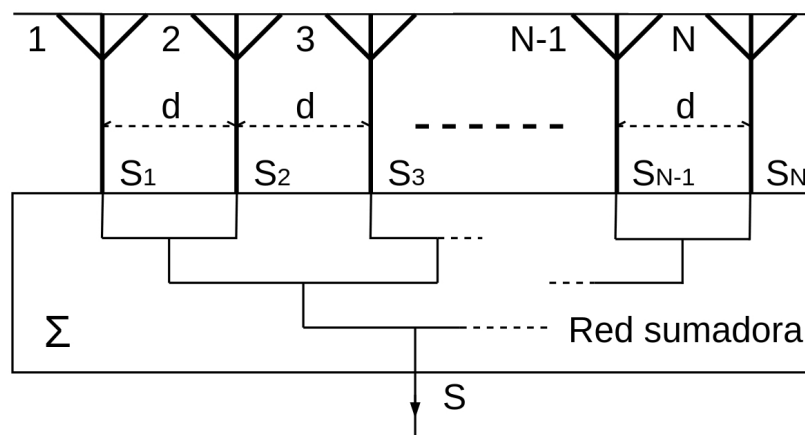


Figura 4. Representación de una red sumadora. El patrón de radiación de N elementos de antena es evaluado en S_i para posteriormente ser añadido a la suma total de patrones (traducido de Visser (2006)).

El valor total de la red sumadora corresponde a $S(\theta)$, y se encuentra dado por el producto entre el factor de elemento S_e , y el factor de arreglo S_a dado por (2), tal que:

$$S(\theta) = S_e S_a = S_e AF(\theta). \quad (3)$$

En otras palabras, el factor de arreglo ($AF(\theta, s)$) describe la radiación emitida por la configuración de parámetros del arreglo como la distancia entre elementos de antena, o los valores de excitación de fase y amplitud del circuito; mientras que el factor de elemento describe las propiedades radiativas de cada uno de los elementos de antena de manera individual, en donde la forma geométrica de los elementos se relaciona directamente con dichas propiedades. Este trabajo se enfoca únicamente en el estudio del factor de arreglo del circuito.

2.1.1. Vector de dirección

Cuando el direccionamiento del arreglo de antenas es diferente de *broadside*, es necesario implementar variaciones de los valores de fase progresiva para el i -ésimo elemento de antena en el arreglo. Estos valores de fase se encuentran dados por el vector de dirección Ψ de tamaño N , que contiene a la i -ésima fase progresiva calculada por:

$$\psi_i = -2\pi d k_i \sin(\theta) \quad (4)$$

en donde k_i representa la separación entre el centro de fase del primer elemento del arreglo (de izquierda a derecha), con respecto al centro de fase del i -ésimo subarreglo del circuito. Cualquier alteración en el vector de dirección de la ecuación (4) para cualquier i producirá un cambio que se verá reflejado en el patrón de radiación total del arreglo.

2.1.2. Factor de arreglo

El factor de arreglo permite caracterizar la energía radiante de campo lejano en un plano bidimensional. Este representa el patrón de radiación en la región de campo lejano (*far-field*) de N radiadores isotrópicos, lo que significa contar con N elementos de antena que emiten la misma cantidad de radiación electromagnética hacia cualquier dirección del espacio libre (Balanis, 2012). El factor de arreglo es dado por:

$$AF(\theta) = \sum_{i=1}^N a_i e^{jk_0(N-i)d \sin(\theta+\psi_i)}, \quad (5)$$

en donde a_i representa una función de excitación (*tapering*) que define la amplitud de corriente suministrada a cada elemento i en el arreglo de antenas lineal, mientras que ψ_i es el i -ésimo elemento del vector de dirección Ψ , lo que implica que en el caso de *broadside*, el vector de dirección es igual a:

$$\theta = 0^\circ \iff \forall \psi \in \Psi : \psi = 0. \quad (6)$$

2.1.3. Patrón de radiación

El patrón de radiación permite representar de manera gráfica las propiedades de radiación de la antena en un espacio vectorial; en el mejor de los casos, gran parte de la radiación electromagnética emitida por el arreglo se encuentra concentrada en un haz electromagnético principal (*Major lobe*), rodeado por regiones de menor intensidad. De acuerdo con Stutzman y Thiele (2012), el patrón de radiación es una representación gráfica de las propiedades de radiación de una antena en la región de campo lejano r_{ff} (*far-field*) que forma parte de las regiones de campos radiados en:

$$r_{rnf} < 0.62 \sqrt{\frac{D^3}{\lambda}} < r_{Fnl} < \frac{2D^2}{\lambda} < r_{ff}, \quad (7)$$

donde D corresponde a la longitud de la antena, y que describe el espacio en donde el campo eléctrico \mathbf{E} y el campo magnético \mathbf{H} coexisten respecto a una dirección de

observación \mathbf{r} con una velocidad de propagación \mathbf{v} , tal y como se muestra en la Figura 2. Los campos cercanos reactivo r_{rnf} y radiativo r_{Fnl} no serán tomados en cuenta en el desarrollo de este trabajo.

Visser (2006) menciona que para graficar el patrón de radiación se emplea una escala logarítmica (dB) para mostrar información adicional sobre los lóbulos laterales que de otra manera no podría ser observada empleando una escala lineal. El patrón de radiación está dado por:

$$\{20 \log |AF(\theta)| \mid \theta \in [-\pi, \pi]\}. \quad (8)$$

En la Figura 5 se puede observar el patrón de radiación de un arreglo de antenas lineal con escaneo a *broadside* ($\theta = 0^\circ$).

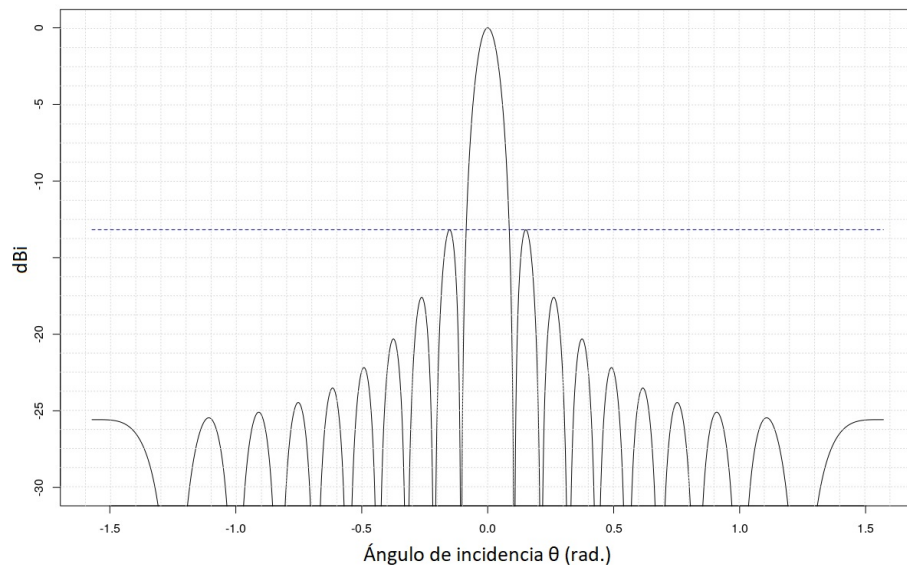


Figura 5. Patrón de radiación de un arreglo de antenas lineal con apertura de $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, la línea horizontal punteada de color azul corresponde al nivel de los lóbulos secundarios en dB.

En el patrón de radiación se observa la formación de lóbulos de radiación, que de acuerdo con Balanis (2012), corresponden a una porción del patrón de radiación que es acotada por regiones con relativamente baja intensidad de radiación (nulos). Un lóbulo principal corresponde a un haz electromagnético que contiene la dirección de la máxima radiación emitida, mientras que un nulo es prácticamente lo opuesto. Otras

maneras de representar el patrón de radiación es por medio de gráficos polares o esféricos, sin embargo, para propósitos de este trabajo se decide utilizar una gráfica lineal con el propósito de representar los patrones de radiación en dos dimensiones.

2.1.4. Ancho de haz de primer nulo (FNBW) y nivel de lóbulo lateral (SLL)

El ancho de haz de primer nulo (FNBW) es el valor angular que acota la apertura del lóbulo principal en un plano cartesiano como es mostrado en la Figura 6, este valor se encuentra acotado por dos nulos dentro de un plano dado por $\Theta = [-\pi/2, \pi/2]$, que representa los valores del eje horizontal del plano. En Balanis (2012) se describe el FNBW para arreglos de antenas en fase como:

$$\text{FNBW} \approx \left| 2 \left(\sin^{-1} \left[\sin \theta - 0.443 \frac{\lambda}{L_{tot}} \right] - \sin^{-1} \left[\sin \theta + 0.443 \frac{\lambda}{L_{tot}} \right] \right) \right|, \quad (9)$$

donde θ describe la dirección del lóbulo principal, λ es la longitud de onda, y L_{tot} la longitud del arreglo.

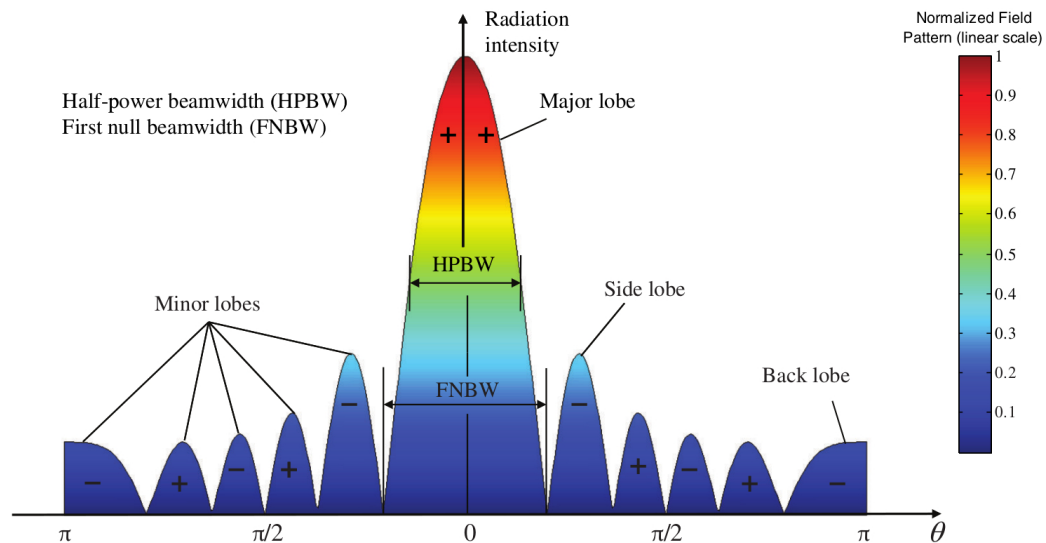


Figura 6. Atributos importantes de un patrón de radiación (Extraído de Balanis (2012)).

El nivel de lóbulo lateral (SLL), también conocido como lóbulo menor (*minor lobe*), corresponde a la amplitud máxima que alcanza la radiación aleadaña al haz principal. Estos lóbulos menores se encuentran acotados por dos puntos en donde la presencia de radiación electromagnética es nula (*nulls*) (Balanis, 2012). Suponiendo que existen dos puntos nulos $p_i, p_d \in \Theta$ que acotan la anchura del haz principal, el SLL puede ser calculado por:

$$\text{SLL} = \text{máx}(20 \log |AF(\theta_i)|, 20 \log |AF(\theta_d)|) \quad (10)$$

donde θ_i, θ_d representan los valores en radianes de la ubicación de los niveles máximos de lóbulos laterales en los intervalos $\theta_i \in [-\pi/2, p_i]$, y $\theta_d \in [p_d, \pi/2]$, entonces:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_i < p_i < p_d < \theta_d \leq \frac{\pi}{2} \quad (11)$$

2.1.5. Amplitudes de corriente

Una manera común de reducir el valor de SLL está dada por la manipulación de las amplitudes de corriente que alimentan a los elementos de antena. Existe una diversidad amplia de funciones de ventana que actúan en la señal como filtros espaciales, reduciendo la radiación emitida por los lóbulos laterales. Considere que de acuerdo con (5), existe un vector de amplitudes de corriente a_i para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, en donde n representa el número de subarreglos en el circuito.

Tabla 1. Amplitudes de corriente (*weights*) de diferentes funciones de ventana para un arreglo lineal de 8 elementos (traducido de Allen y Ghavami (2005)).

Ventana	1	2	3	4	5	6	7	8
Rectangular	1	1	1	1	1	1	1	1
Barlett	0	0.2857	0.5714	0.8571	0.8571	0.5714	0.2857	0
Blackman	0	0.0905	0.4592	0.9204	0.9204	0.4592	0.0905	0
Triangular	0.1250	0.3750	0.6250	0.8750	0.8750	0.6250	0.3750	0.1250
Hamming	0.0800	0.2532	0.6424	0.9544	0.9544	0.6424	0.2532	0.0800
Hanning	0.1170	0.4132	0.7500	0.9698	0.9698	0.7500	0.4132	0.1170

La variación de la corriente generada por amplificadores o atenuadores en el circuito produce en consecuencia un cambio en el comportamiento del patrón de radiación final del arreglo. Algunas de las funciones de ventana más comunes mencionadas por Allen y Ghavami (2005) son: Rectangular, Barlett, Blackman, Chebychev, Hamming, Hanning, Kaiser y Triangular, mostradas en la Figura 7. Además, existen otras técnicas contemporáneas que emplean redes de alimentación adaptables, capaces de ajustar sus parámetros de acuerdo a las necesidades del circuito.

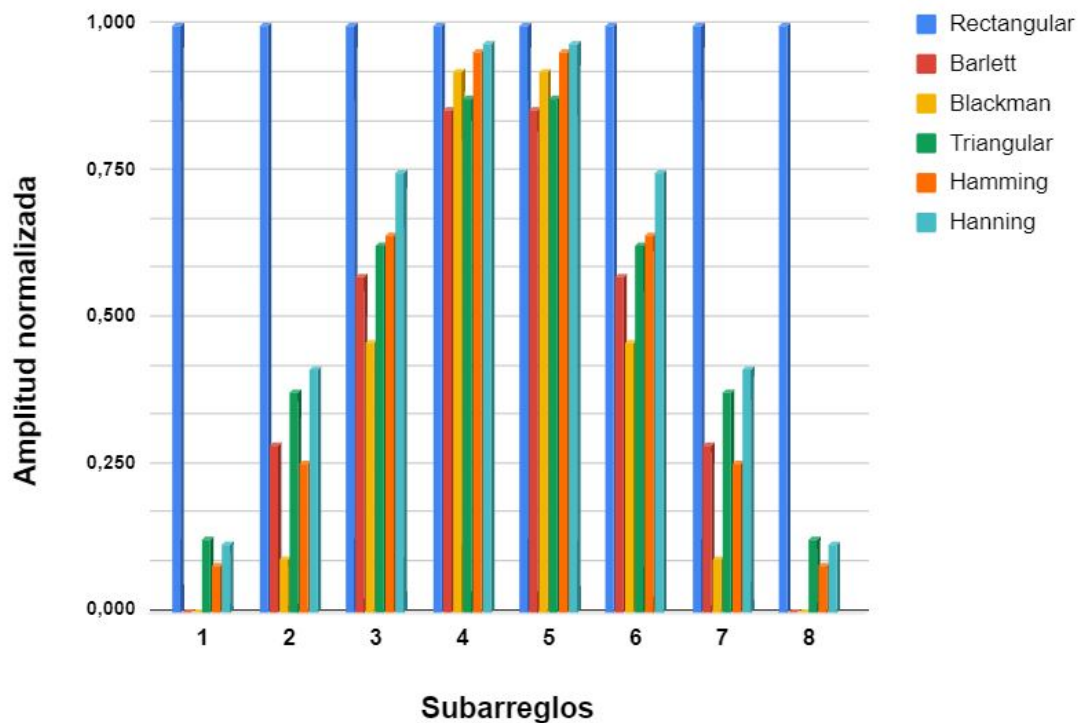


Figura 7. Ejemplo de diferentes ventanas de amplitudes de corriente para un arreglo lineal conformado por 8 subarreglos, mostrado en la Tabla 1. La alimentación con corriente uniforme (Rectangular) es equivalente a un circuito que carece de atenuadores.

Adicionalmente, el circuito puede contar con una red de alimentación que podría variar entre múltiples topologías conocidas (ej. *interleaved*, *random feeding*, *interwoven* (Abbaspour-Tamijani y Sarabandi, 2003) (Avser et al., 2016) (Avser et al., 2018)), esto se logra con la incorporación de otros elementos al circuito de potencia como amplificadores o atenuadores.

2.2. Arreglos de antenas en fase

El direccionamiento dinámico de un haz electromagnético (*lóbulo principal*) se logra mediante la introducción de componentes electrónicos de desfaseamiento al circuito, que compone, en el mejor de los casos, la mayor parte de la radiación emitida por el arreglo de antenas en su patrón de radiación. En la Figura 8 se muestra un ejemplo de arreglo de antenas lineal con desfases, y amplificadores o atenuadores de corriente representados por resistores variables.

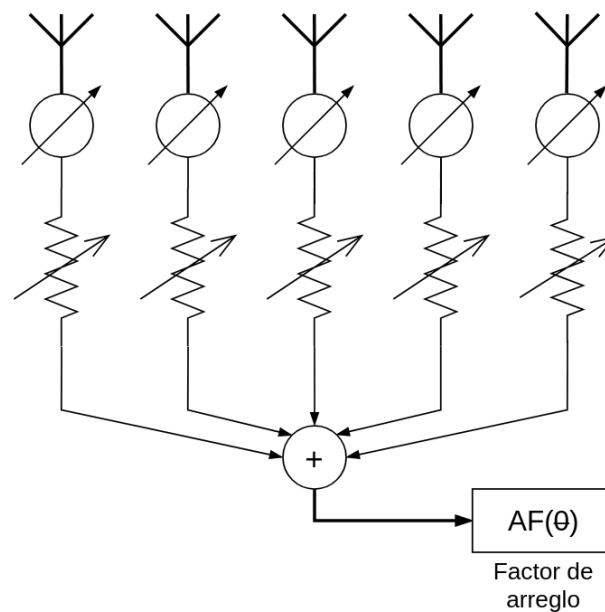


Figura 8. Arreglo de antenas lineal en fase con componentes desfases y atenuadores variables. La suma de amplitudes y excitaciones de fase se encuentra representada por el factor de arreglo $AF(\theta)$ (traducido de Stutzman y Thiele (2012)).

Existen otras técnicas que pueden ser utilizadas para lograr el direccionamiento dinámico del haz electromagnético de un arreglo sin utilizar componentes desfases, como es el caso del direccionamiento con retardadores de tiempo (*time-delay phase shifting*), el cual varía la longitud de las líneas de alimentación del circuito; así como la multiplexación entre elementos de antena orientados en diferentes direcciones (*beam switching*) (Stutzman y Thiele, 2012). Sin embargo, estas técnicas son por lo general de mayor complejidad y menos populares que el uso de componentes desfases.

Los desfasadores electrónicos (*phase shifters*) permiten cambiar la fase de la línea de alimentación de uno o varios elementos de antena de manera progresiva, esto con la intención de manipular el direccionamiento de un haz electromagnético al generar radiación constructiva y destructiva hacia ciertas direcciones angulares (Stutzman y Thiele, 2012). Estos componentes pueden ser digitales o analógicos, los primeros proveen direcciones angulares discretas, mientras que los analógicos permiten un ajuste a prácticamente cualquier valor de fase.

En la Figura 9 se muestra un arreglo de antenas lineal en fase, formado por seis elementos de antena conectados a un desfasador de manera independiente, el cual debe ajustarse a los valores reales calculados por medio del vector de dirección descrito en la ecuación (4), a partir del valor del ángulo de escaneo θ . Es por esto que se genera un problema relacionado con la resolución de los desfasadores para representar de manera apropiada la discretización de los valores reales del vector de dirección Ψ . En los siguientes capítulos se muestra la importancia de la resolución de los desfasadores respecto al patrón de radiación del arreglo.

2.3. Computación Evolutiva

El cómputo evolutivo es una rama de la computación que se inspira en los procesos naturales de la evolución darwiniana para la creación de algoritmos que imitan estos comportamientos. Eiben y Smith (2008) mencionan que el cómputo evolutivo puede ser visto como la simulación de un ecosistema con una población de individuos (soluciones) que compiten para sobrevivir y reproducirse, con la finalidad de mejorar con el incremento generacional. Se introduce el término de aptitud para poder cuantificar la realización de los logros individuales de las soluciones para denotar su rendimiento, y así elegir a aquellas que tengan los mejores atributos.

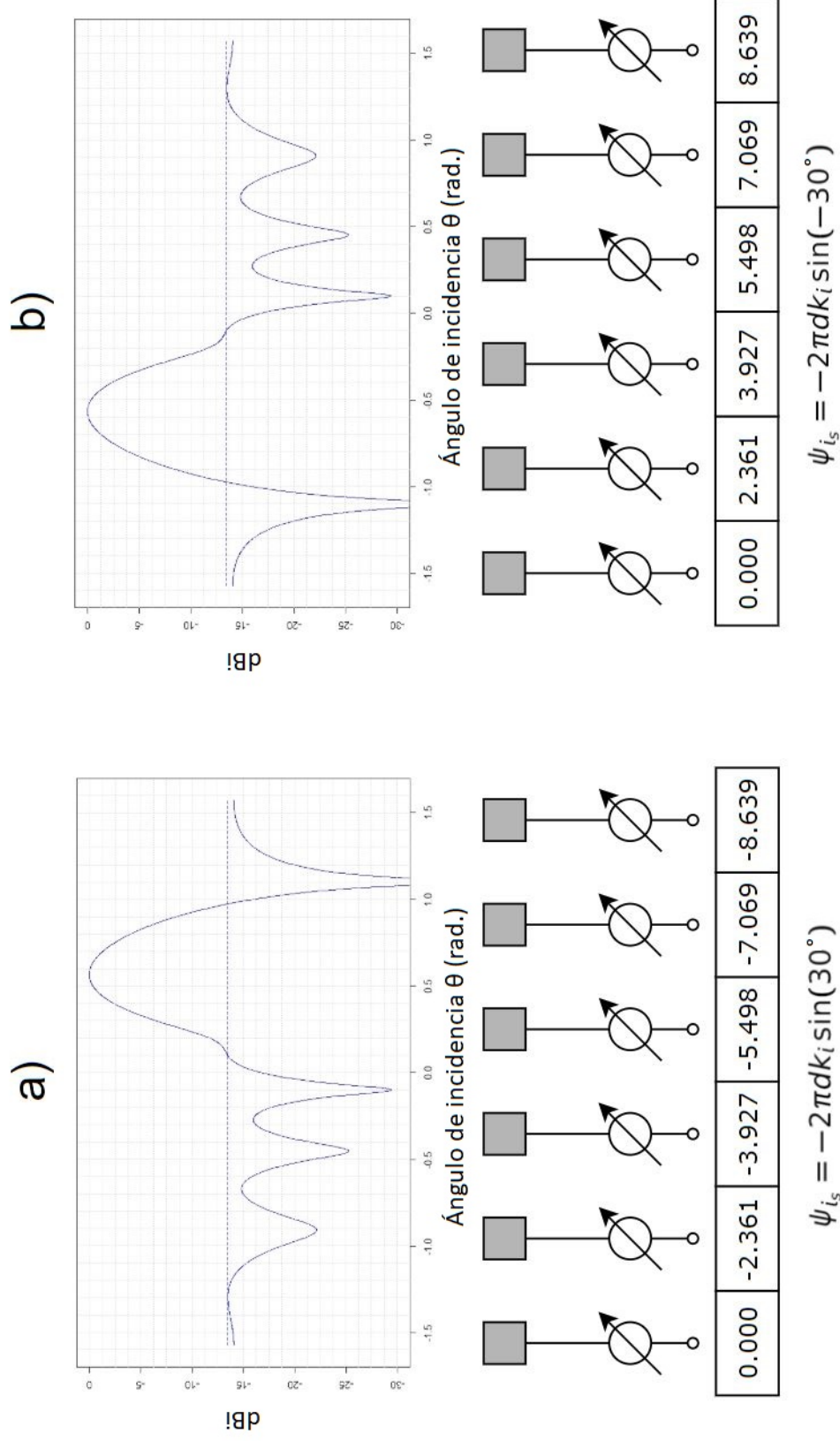


Figura 9. Efectos del cambio de signo del ángulo de escaneo θ , que produce en consecuencia un cambio de signo en el vector de dirección $\psi_i \in \Psi$, denotado en radianes, para los casos de: $n = 6$, $d = \lambda/2$, a) $\theta = 30^\circ$, b) $\theta = -30^\circ$.

Algoritmo 1: Esquema general de un algoritmo evolutivo en pseudocódigo (traducido de (Eiben y Smith, 2008))

Result: Archivo con soluciones.

```
1 INICIALIZAR población con soluciones candidatas aleatorias;
2 EVALUAR a cada candidato;
3 while (gen < maxGen) do
4     SELECCIONAR padres;
5     RECOMBINACIÓN con pares de padres;
6     MUTAR a la generación resultante;
7     EVALUAR a un nuevo candidato;
8     SELECCIONAR individuos para la siguiente generación;
9     gen++;
10 end
```

En el Algoritmo 1 se muestra el pseudocódigo de la estructura básica de un algoritmo evolutivo. En la línea 1, una población de individuos con diferentes atributos aleatorios es inicializada (soluciones), imitando las condiciones aleatorias presentes en la naturaleza. La línea 2 se encarga de evaluar la aptitud de los individuos para elegir a aquellos que sean los más aptos para sobrevivir. Las líneas 3-10 muestran un ciclo que generalmente corresponde al número de generaciones o una condición de paro para evitar estancamiento después de un gran número de generaciones.

Durante este ciclo generacional se comienza por seleccionar un par de soluciones que servirán como padres, como se muestra en la línea 4, para posteriormente generar nuevas semillas por medio de la recombinación entre padres en la línea 5. En la línea 6 se implementa una mutación del genotipo de la solución, la cual puede mejorar en algunos casos el rendimiento de la solución. En la línea 7, se mide el rendimiento de la solución después del proceso de mutación para seleccionar en la línea 8 a los individuos más aptos que sobreviven hacia la siguiente generación.

2.3.1. Particle Swarm Optimization (PSO)

De acuerdo con Blum y Li (2008), el algoritmo evolutivo de optimización por enjambre de partículas (*PSO*) es un algoritmo que se encuentra inspirado en el comportamiento social de las parvadas o los cardúmenes. Originalmente, propuesto por Kennedy y Eberhart (1995) el algoritmo PSO carece de operador de cruzamiento (*crossover*), y su mutación se encuentra definida por una suma de vectores dada por:

$$\bar{x}'_i = \bar{x}_i + \bar{v}'_i \quad (12)$$

$$\bar{v}'_i = w \cdot \bar{v}_i + \varphi_1 \cdot (\bar{p}_i - \bar{x}_i) + \varphi_2 \cdot (\bar{p}_g - \bar{x}_i) \quad (13)$$

donde $\varphi_1 = c_1 R_1$, y $\varphi_2 = c_2 R_2$; siendo R_1 y R_2 dos funciones que son compuestas de manera individual por un vector de números reales aleatorios tomados de una distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$. c_1 y c_2 corresponden a los coeficientes de aceleración que también son llamados: *tasa de aprendizaje de la influencia personal* c_1 y la *tasa de aprendizaje de la influencia social* c_2 .

$$\bar{p}_i = \begin{cases} \bar{x}_i & \text{if } f(\bar{x}_i) < f(\bar{p}_i) \\ \bar{p}_i & \text{otherwise} \end{cases} \quad (14)$$

En otras palabras, cada una de las soluciones es representada por un conjunto de vectores formado por $\langle \bar{x}_i, \bar{v}_i, \bar{p}_i \rangle$, que como mencionan Eiben y Smith (2008), estos valores mutan durante cada ciclo evolutivo o iteración para convertirse en los valores $\langle \bar{x}'_i, \bar{v}'_i, \bar{p}'_i \rangle$ utilizando (12), (13) y (14).

Algoritmo 2: Optimización por enjambre de partículas (PSO), suponiendo maximización (traducido de (Blum y Li, 2008)).

Result: Archivo con soluciones.

```

1 INICIALIZAR enjambre con soluciones aleatorias;
2 while (gen < maxGen) do
3   for each partícula i do
4     if  $f(\mathbf{x}_i) > f(\mathbf{p}_i)$  then
5        $\mathbf{p}_i \leftarrow \mathbf{x}_i$ ;
6     end
7      $\mathbf{p}_g = \text{máx}(\mathbf{p}_{\text{vecinos}})$ ;
8     ACTUALIZAR VELOCIDAD;
9     ACTUALIZAR POSICIÓN;
10  end
11  gen++;
12 end

```

El Algoritmo 2 es una representación del funcionamiento de un algoritmo PSO de propósito general. En la línea 1 se inicializa la población con atributos aleatorios. Las líneas 2-12 representan el ciclo generacional que se repetirá durante *maxGen* iteraciones. En la línea 3 se muestra un ciclo que toma a cada una de las partículas numeradas por *i*. Las líneas 4-6 realizan una comparación de desigualdad entre una función objetivo *f* evaluada en \bar{x}_i y \bar{p} , que de cumplirse, \bar{p}_i tomaría el valor de \bar{x}_i en la línea 5. La línea 7 se encarga de asignar un nuevo máximo global conocido como líder. Las líneas 8 y 9 actualizan las velocidades (13) y posiciones (12) de las partículas, respectivamente. En la línea 11 se incrementa el contador generacional.

Tabla 2. Componentes del algoritmo de optimización por enjambre de partículas PSO (traducido de Eiben y Smith (2008)).

Representación	Vector de números reales
Recombinación	Ninguna
Mutación	Suma de vectores de velocidad
Selección de padres	Determinista (cada padre crea descendiente por mutación)
Selección de sobrevivientes	Generacional (descendiente reemplaza a padre)

2.4. Optimización multi-objetivo

Los problemas de optimización multi-objetivo, de acuerdo con Coello *et al.* (2007), son aquellos en donde se cuenta con un vector de variables de decisión que satisfacen ciertas restricciones, y optimizan funciones vectoriales cuyos elementos representan a las funciones objetivo. Estas funciones son una manera de representar de manera matemática un criterio de rendimiento, y se encuentran regularmente en conflicto. A raíz de esto, se puede obtener como resultado de la búsqueda a más de una solución que resulte adecuada para resolver el problema de optimización.

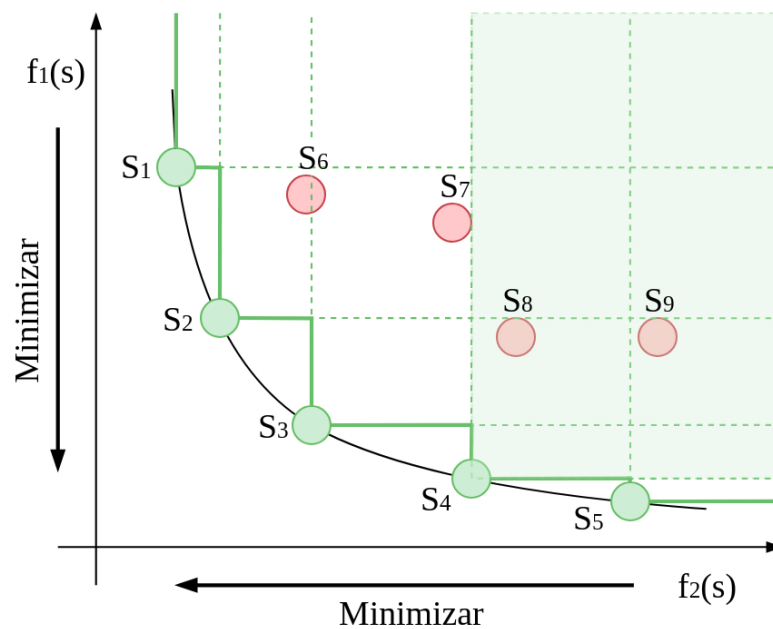


Figura 10. Espacio de criterios con nueve diferentes soluciones. Los valores de rendimiento son dados por los criterios o funciones objetivo f_1, f_2 , utilizando la ecuación (16). Las soluciones de color verde (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5) componen un frente de aproximación de Pareto que contiene a las mejores soluciones encontradas durante la búsqueda. En este ejemplo, el desempeño de la solución S_4 es mejor que las soluciones S_8, S_9 , o que cualquier otra solución contenida en el área de color verde.

En la Figura 10 se muestran nueve soluciones evaluadas en un espacio de criterios de rendimiento. Las soluciones de color verde componen un frente de aproximación de Pareto (APF), que consiste de una lista con las mejores soluciones obtenidas hasta cierta iteración m del algoritmo de optimización multi-objetivo. Se debe evitar confusión entre un APF y un frente de Pareto **PF***, ya que éste último es la proyección de las mejores soluciones en un espacio de soluciones determinado.

2.4.1. Dominancia y optimalidad de Pareto

Eiben y Smith (2008) introducen el concepto de dominancia para elegir la mejor solución de la comparación entre dos soluciones, las cuales cuentan con alguna métrica que permite definir el rendimiento de las soluciones. Se dice que una solución domina a otra cuando el puntaje de todos los objetivos de la solución dominante son iguales o mayores (maximización) que los objetivos de la solución dominada, y por lo menos existe un objetivo en donde sea estrictamente mayor. El símbolo \succeq denota la dominancia entre soluciones, entonces, se dice que A domina a B cuando:

$$A \succeq B \iff (\forall i \in \{1, \dots, n\} a_i \geq b_i) \wedge (\exists i \in \{1, \dots, n\} a_i > b_i) \text{ (maximización)}, \quad (15)$$

$$A \succeq B \iff (\forall i \in \{1, \dots, n\} a_i \leq b_i) \wedge (\exists i \in \{1, \dots, n\} a_i < b_i) \text{ (minimización)}. \quad (16)$$

Se le conoce como conjunto óptimo de Pareto \mathbf{P}^* al conjunto de soluciones $x \in S$ que son *no dominadas* entre sí. Esto significa que para resolver un problema de optimización multi-objetivo, es necesario encontrar las soluciones que componen dicho conjunto \mathbf{P}^* , en donde el criterio de paro o convergencia del algoritmo se logra una vez que todas las soluciones no dominadas son encontradas.

$$\mathbf{P}^* = \{x \mid \nexists y \in S : y \succeq x\} \quad (17)$$

El frente de Pareto \mathbf{PF}^* contiene a las mejores soluciones de manera global de un conjunto óptimo de Pareto \mathbf{P}^* , de tal manera que:

$$\mathbf{PF}^* := \{u = F(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{P}^*\}, \quad (18)$$

donde $F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}))$ corresponde al vector de funciones objetivo en el problema.

En la Figura 11 se muestran cuatro soluciones (A, B, C, D) con dos objetivos en conflicto (x, y). En este caso, para determinar dominancia entre soluciones se utiliza la ecuación (15) por ser un problema de maximización de ambos objetivos. El frente de

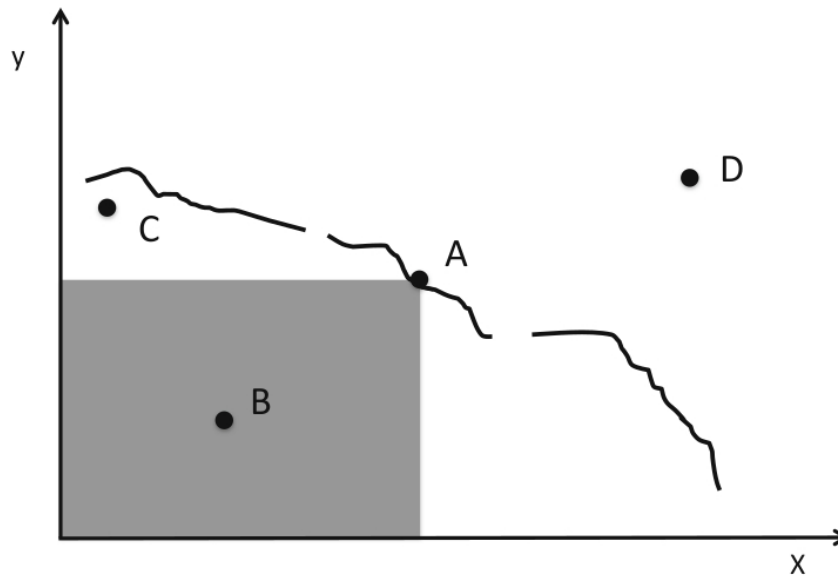


Figura 11. Ilustración de un frente de Pareto. Los ejes x y y representan a dos objetivos en conflicto sujetos a restricciones. La calidad de las soluciones es representada por los valores de x y y (asumiendo maximización). El punto A domina a B y a todos los puntos en el área gris. A y C no se dominan entre ellos. La línea representa al conjunto de Pareto del que forma parte el punto A . Las soluciones superiores al frente, como es el caso de D , son no factibles. (traducido de Eiben y Smith (2008)).

Pareto **PF*** se encuentra compuesto únicamente por la solución A , que domina a todas las soluciones dentro del recuadro gris. Debido a que se trata de un problema de maximización, resulta imposible contar con soluciones que dominen a las soluciones que forman el frente **PF***, por lo que esto implica que dichas soluciones son inexistentes o *no factibles*. A pesar de que la solución C no es dominada por A , existen otras soluciones que componen el frente de Pareto que son dominantes; por ello, la solución C al igual que B y D , no forman parte del frente.

Capítulo 3. Definición del Problema

En este capítulo se presenta la definición del problema de diseño de arreglos de antenas lineales en fase, en el que se busca encontrar diferentes diseños que resulten adecuados para su implementación en escenarios particulares. Esto se obtiene mediante técnicas de optimización de parámetros directamente relacionados con las prestaciones individuales de cada diseño, representadas por el factor de arreglo (5) del circuito.

De acuerdo con Balanis (2012), algunos de los parámetros de diseño que resultan evidentes son: la separación entre los elementos de antena o la forma geométrica de las antenas. Las principales variables de diseño empleadas en esta investigación son las siguientes:

- Agrupaciones de elementos de antena en subarreglos.
- Separación uniforme entre elementos de antena, representada como una función de la longitud de onda λ .
- Variaciones de fase de las excitaciones de los subarreglos.

3.1. Separación entre elementos de antena

Uno de los parámetros de diseño más importantes es la separación entre los elementos de antena. De acuerdo con Visser (2006), para evitar la aparición de *grating lobes* o lóbulos secundarios, se requiere que la desigualdad

$$d \leq \lambda/2, \tag{19}$$

se cumpla. La separación d es mostrada en la Figura 12.

Sin embargo, las consecuencias del acoplamiento mutuo (*mutual coupling*) pueden entrar en efecto una vez que $d < \lambda/2$ (Balanis, 2012). Recordemos que el acoplamiento mutuo es el fenómeno que se produce cuando dos elementos de antena se encuentran tan cercanos entre sí que la energía incidente a uno o ambos elementos es dispersada hacia diferentes direcciones, ocasionando comportamientos indeseados en el arreglo

e incrementando la complejidad del análisis y diseño.

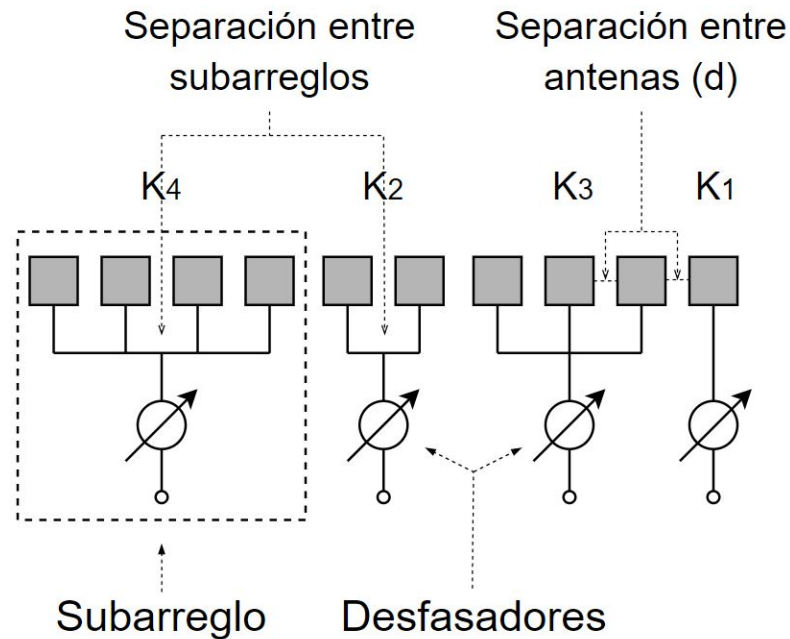


Figura 12. Diagrama esquemático de un arreglo de antenas lineal en fase representado por una secuencia de enteros $s = [4, 2, 3, 1]$.

En este trabajo se decide utilizar una separación uniforme entre elementos de antena de $d = \lambda/2$, que es una función de la longitud de onda λ dependiente de la frecuencia operacional del arreglo de antenas. Esta distancia uniforme será utilizada para todos los experimentos, a excepción del Experimento 7 del Capítulo 5, en donde se utiliza optimización multi-objetivo para variar la distancia uniforme dentro de un intervalo definido por $0.45\lambda \leq d \leq 0.5\lambda$.

Se fija una distancia constante de $d = \lambda/2$ para convertir el problema a uno de enfoque combinatorio, en donde el objetivo es encontrar las diferentes combinaciones que pueden ser generadas utilizando subarreglos con diferentes números de elementos de antena agrupados sobre una línea recta. Las variaciones en el acomodo de los subarreglos en el arreglo propician un cambio en los valores del factor de arreglo (5), mejorando o empeorando el rendimiento del circuito.

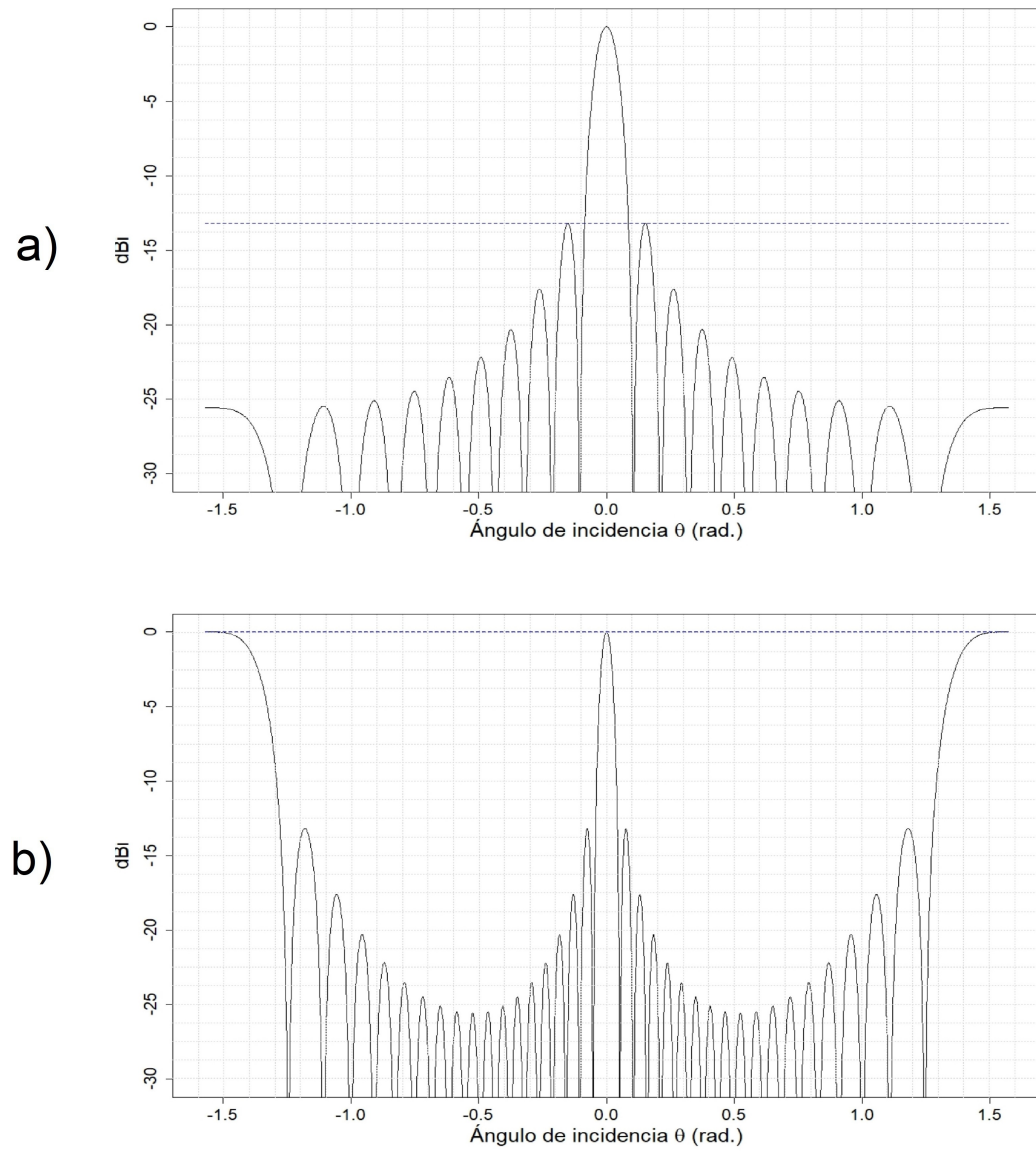


Figura 13. Patrones de radiación del arreglo lineal $s = [2, 3, 1, 4, 2, 3, 4]$ mostrado en la Figura 14. En donde se utiliza una separación uniforme de (a) $d = \lambda/2$, y (b) $d = \lambda$ con la aparición en éste último de lóbulos secundarios (*grating lobes*) en *broadside* ($\theta = 0^\circ$).

3.2. Agrupación de elementos de antena por subarreglos

La introducción de subarreglos al problema de optimización del diseño permite reducir la cantidad de desfases utilizados al agrupar elementos de antena en subconjuntos que comparten una misma red de alimentación. De acuerdo con Visser (2006), los subarreglos contribuyen de manera adicional a la reducción de lóbulos laterales y lóbulos traseros, al mismo tiempo, el ancho de haz de primer nulo (FNBW) es reducido debido al incremento de la longitud del arreglo L_{tot} en (9).

Si se considera que un diseño de arreglo de antenas con geometría lineal puede ser representado por una secuencia de números enteros positivos, que denotan los subarreglos del circuito. Sea K_j la cantidad de subarreglos con j elementos de antena, que se encuentran presentes en el arreglo de antenas lineal; entonces, la cantidad de desfases utilizados por el circuito se encuentra definida por la suma de todos los subarreglos K_j , es decir,

$$n = \sum_{j \in N'} K_j. \quad (20)$$

Donde N' representa el conjunto de números enteros con los valores que puede tomar j , tal que $j \geq 1$, siendo $j \in \mathbb{N}$. Como es mostrado por Avser *et al.* (2016), se requiere que $j \leq 4$ para evitar la aparición de lóbulos laterales en el espacio visible, que pueden llegar a ser de igual amplitud que el haz principal (*grating lobes*), generando un incremento considerable en SLL. Entonces, la cardinalidad $|N'|$ representa la cantidad de diferentes tamaños de subarreglos permisibles para el diseño del arreglo; el número de elementos de antena utilizados en el arreglo está dado por:

$$N = \sum_{j \in N'} K_j \cdot j. \quad (21)$$

Considere el siguiente ejemplo ilustrativo sobre el diseño de arreglos de antenas lineales. En la Figura 14 se muestra un arreglo de antenas lineal con secuencia $s = [2, 3, 1, 4, 2, 3, 4]$, de lo que se puede inferir que el conjunto N' de tamaños permisibles de subarreglos está compuesto por $N' = \{1, 2, 3, 4\}$. El número de desfases

es calculado utilizando la ecuación (20), que para este caso, $n = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = 1 + 2 + 2 + 2 = 7$, mientras que el número de elementos de antenas mostrado en la ecuación (21) es dado por $N = (1 \cdot 1) + (2 \cdot 2) + (2 \cdot 3) + (2 \cdot 4) = 19$. De manera alternativa, el número de elementos de antena N puede ser calculado a partir de la suma de los números enteros que forman la secuencia s .

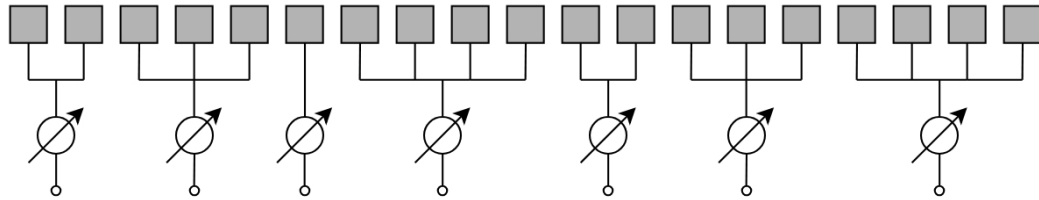


Figura 14. Arreglo de antenas lineal en fase con secuencia $s = [2, 3, 1, 4, 2, 3, 4]$, y separación uniforme de $d = \lambda/2$.

Como se mencionó en el Capítulo 2, cada uno de los diseños contiene beneficios particulares definidos por su factor de arreglo (5) que varía de manera consecuente a los parámetros de diseño elegidos. En el ejemplo de la Figura 14, la configuración inicial corresponde al número de subarreglos K_j presentes en el arreglo, y la separación uniforme entre elementos de antena dada por d . Otros parámetros adicionales se encuentran definidos de manera implícita y pueden ser calculados a partir de la información brindada por la secuencia. Algunos de estos son: la cantidad de elementos de antena N , el conjunto de tamaños de subarreglos N' , y la cantidad de desfasadores n .

Tabla 3. Configuración inicial de parámetros del ejemplo mostrado en la Figura 14.

N'	K_1	K_2	K_3	K_4	n	d	N
{1, 2, 3, 4}	1	2	2	2	7	$\lambda/2$	19

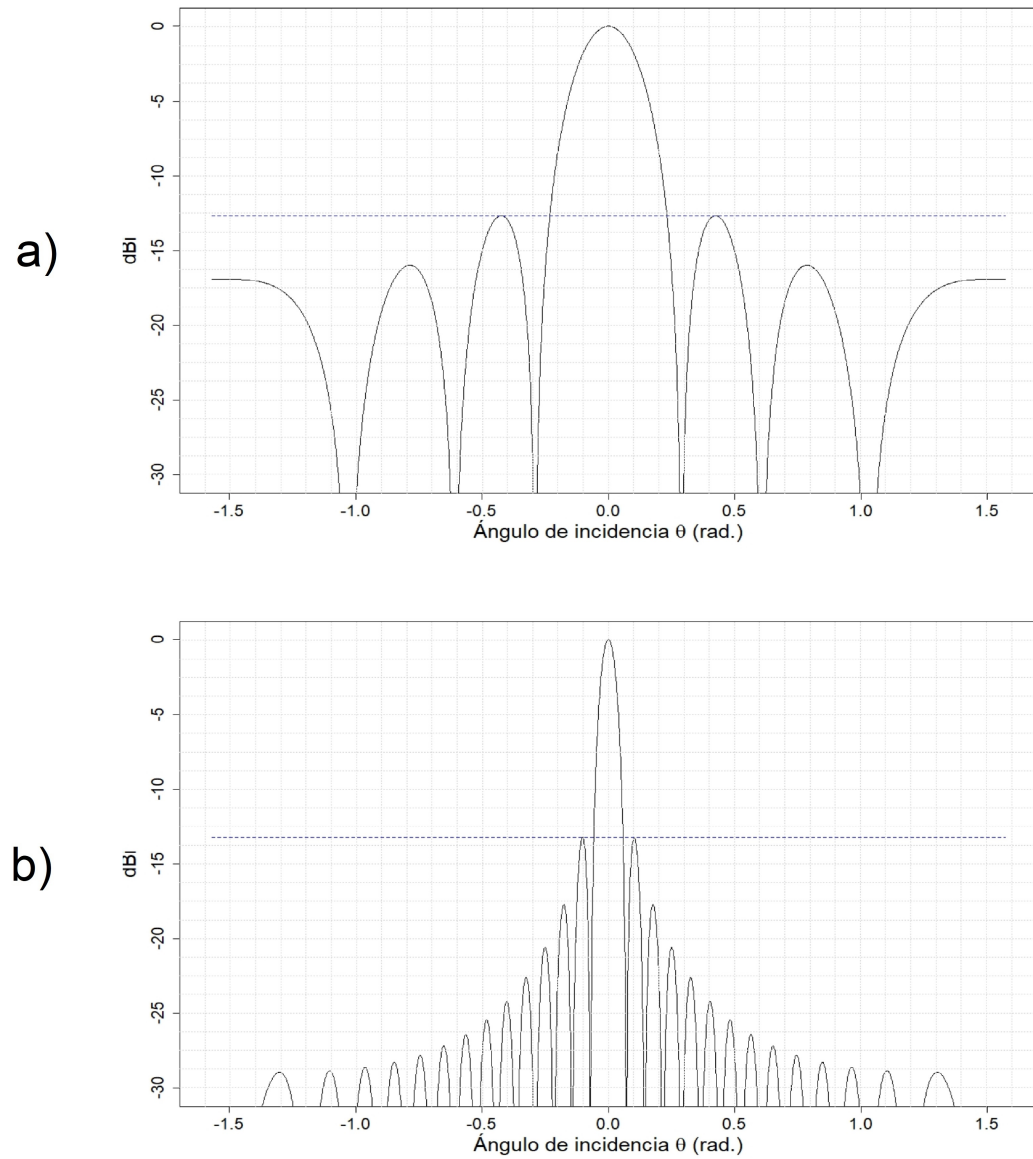


Figura 15. Comparación entre patrones de radiación de un arreglo lineal (a) $s = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$, con un arreglo (b) $s = [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]$. Aumentar la cantidad de elementos de antena produce una reducción del FNBW, así como de la radiación aleadaña al lóbulo principal.

3.3. Espacios de búsqueda

La configuración de las variables: K_j , el conjunto N' , y la cantidad de subarreglos n , determinan las características singulares de cada uno de los espacios de búsqueda de soluciones. Uno de los principales problemas de este trabajo de tesis es el crecimiento desmedido de los espacios de búsqueda a raíz del aumento en la cantidad de posibles combinaciones. Tomando en cuenta los tamaños de los subarreglos dados por j para K_j , tal que

$$j \in N' = \{1, 2, 3, 4\} \quad (22)$$

entonces, es posible calcular el número total de soluciones contenidas en un espacio ordenado de manera lexicográfica, solo si se consideran los casos en donde $|N'| \geq 2$, donde se tiene que el número total de posibles combinaciones m en el espacio de soluciones S está dado por:

$$m = |N'|^n. \quad (23)$$

En el caso de subarreglos con tamaño uniforme, se puede inferir que

$$|N'| = 1 \implies m = 1, \quad (24)$$

donde se tiene un espacio de soluciones con solo una secuencia, formada por un vector de n números enteros, cada uno de tamaño j . Entonces, el intervalo que contiene los valores permisibles de elementos de antena en las secuencias puede ser calculado a partir de:

$$M = [(\text{mín}(N') \cdot n), (\text{máx}(N') \cdot n)]. \quad (25)$$

3.3.1. Restricciones en subarreglos

Un conjunto de n -tuplas es generado en orden lexicográfico dado un número fijo de subarreglos permitidos en el circuito. El tamaño del conjunto S está dado por m en (26), tal que K_j corresponde al número de subarreglos de tamaño j contenidos en el arreglo, mientras que n representa la cantidad de subarreglos como se muestra en (20). A esto se le conoce como *restricción* del número máximo permitible de subarreglos de tamaño K_j que pueden formar parte del arreglo.

$$m = \frac{n!}{\prod_{j \in N' \subset \mathbb{N}} (K_j)!} \quad (26)$$

En la Figura 14 se puede observar un diseño de arreglo lineal con restricciones mostrado en un diagrama esquemático. Las restricciones se encuentran definidas por $K_1 = 1$, $K_2 = 2$, $K_3 = 2$, y $K_4 = 2$, tal que la suma de todos los subarreglos es $n = 7$ de acuerdo con (20). Considere que las restricciones permiten reducir el espacio de búsqueda de manera significativa, ya que calculando la cantidad de soluciones m en (26) para el caso con *restricciones* se tiene que $m = 630$, mientras que en el caso *sin restricciones* (en los valores que puede tomar K_j) en donde $N' = \{1, 2, 3, 4\}$, el tamaño del espacio de búsqueda para $n = 7$ está dado por $m = 4^7 = 16,384$.

De manera más formal, considere que el número permisible de elementos de antena que puede conformar los subarreglos se encuentra definido por los número enteros del conjunto $N' = \{1, 2, 3, 4\}$. Las restricciones antes mencionadas se encuentran denotadas por un subconjunto $N'' \subset N'$ con cardinalidad definida por $2 \leq |N''| \leq 3$, dicho subconjunto contiene los pares o ternas de tamaños j en K_j . La finalidad de las restricciones es reducir el tamaño del espacio de búsqueda al formar subproblemas que son, por consecuencia, de menor dificultad. En la Figura 16 se muestra un ejemplo de reducción de tamaño del espacio de búsqueda para el caso de $n = 10$, con $N' = \{1, 2, 3, 4\}$; en donde se crean dos subconjuntos propios del conjunto N' , definidos por $A = \{2, 3, 4\}$, y $B = \{3, 4\}$, tal que $B \subset A \subset N'$, y $|B| < |A| < |N'|$.

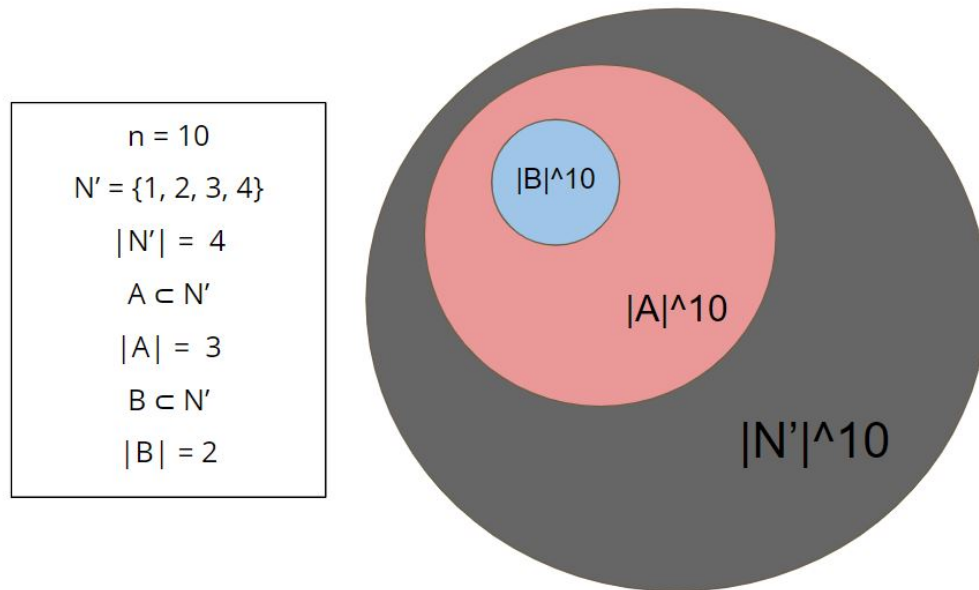


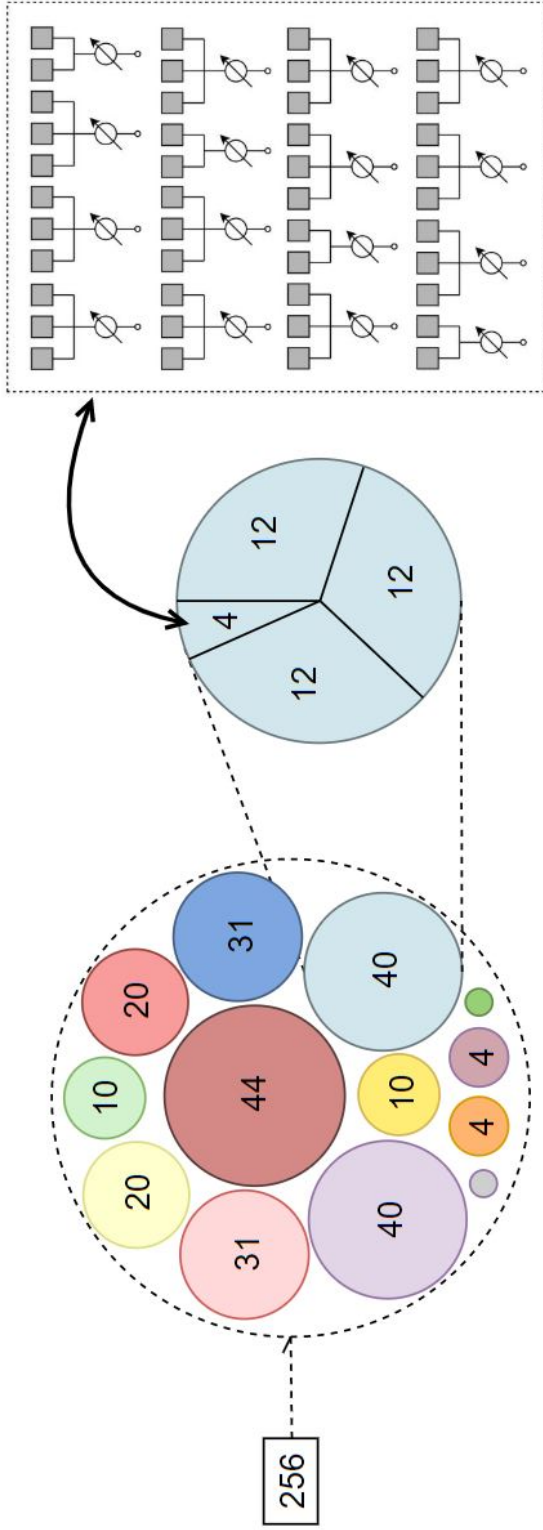
Figura 16. Ejemplo de reducción de espacios de búsqueda al decrementar la cantidad de tamaño j de subarreglos K_j . En este caso $n = 10$, para los tamaños de los espacios de soluciones de $m_1 = 4^{10} = 1,048,576$ (gris), $m_2 = 3^{10} = 59,049$ (rosa), $m_3 = 2^{10} = 1,024$ (azul).

3.3.2. Composiciones de números enteros

Las composiciones $C_k(n)$ (Quaintance, 2015) corresponden al número total de particiones de un entero n en k subconjuntos, de tal manera que se cumpla con la ecuación (20) para $N' = \{1, 2, 3, 4\}$, tal que $k = |N'|$. Entonces, se tiene que la cantidad de composiciones del número n en k subconjuntos es dada por:

$$\begin{aligned}
 C_k(n) &= \binom{n+k-1}{k-1} \\
 &= \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}.
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

De tal manera que la cantidad de combinaciones incrementa en función de la cantidad de subarreglos, así como de la diversidad de tamaños permisibles de elementos de antena por subarreglo K_j .



n	Ck(n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	N	
4	K1	4	3	2	3	1	2	3	0	1	2	2	0	1	1	2	0	1	0	1	2	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
	N'	0	1	2	0	3	1	0	4	2	0	1	3	1	2	0	2	0	3	1	0	1	2	0	1	0	1	2	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
	{1,2,3,4}	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	1	2	0	1	2	3	0	1	0	3	1	2	0	4	2	0	1	3	1	0	2	0	1	0	0	0
	Ck(n)	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	2	0	1	1	2	0	1	2	2	1	2	3	2	3	3	4	4	
		N																																				
	N	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	35	[4, 16]			
		%																																				
	m	1	4	6	4	4	12	4	1	12	6	12	4	12	12	6	4	4	24	6	4	12	12	12	1	12	6	12	4	12	4	6	4	4	1	256		
		0,39%	1,56%	3,91%	7,81%	12,11%	15,63%	17,19%	15,63%	12,11%	12,11%	7,81%	3,91%	1,56%	0,39%	100,00%																						

Figura 17. Composiciones de $n = 4$ particionado en $k = 4$ subconjuntos. Entonces, $C_4(4) = 35$ es la cantidad de particiones o subproblemas de tamaño m con soluciones de N elementos de antena. En color azul claro se muestran cuatro subproblemas que comparten la misma cantidad de elementos de antena ($N = 11$), pero pueden contar con un número diferente de soluciones.

La Figura 17 muestra la división de un espacio $m = 4^4$ en $C_4(4) = 35$ particiones, cada una formada por un vector de enteros que representa la cantidad de subarreglos K_j en la secuencia. Estos vectores (*restricciones*) son utilizados para crear espacios de búsqueda de soluciones acotados por una restricción única de subarreglos K_j permisibles en el arreglo. Los múltiples espacios de búsqueda resultantes pueden ser visualizados como subproblemas de menor tamaño, con soluciones que comparten una misma cantidad de elementos de antena N , lo que resulta de gran utilidad cuando se desea encontrar soluciones con valores constantes de FNBW.

En la Figura 18 se observa que el mayor porcentaje de los espacios de soluciones (aproximadamente 17%), se encuentran compuestos por secuencias con $N = 10$, por lo que es importante mencionar que esta cantidad de elementos de antena se encuentra en la mitad del intervalo $[4, 16]$, con los números de elementos de antena permisibles en las secuencias. En la Figura 19 se muestra el número de soluciones por composición o subproblema, en donde la restricción $K_1, K_2, K_3, K_4 = 1$ genera el mayor número de soluciones con $m_{19} = 24$. En este caso, de acuerdo con la ecuación (26), el mayor número de soluciones es dado por $m = n!$.

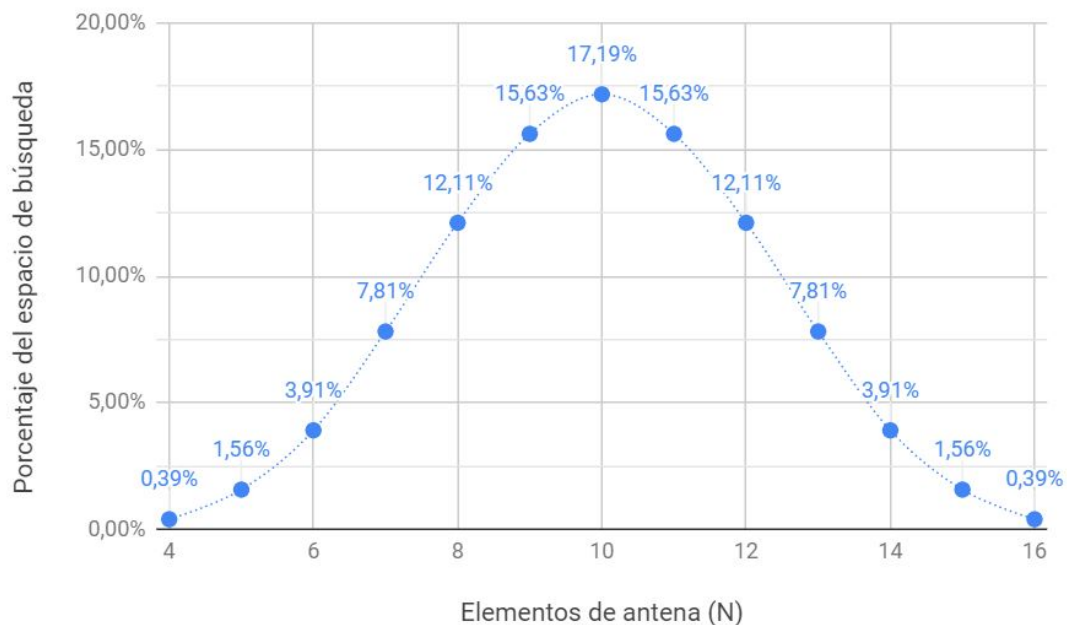


Figura 18. Función que representa la distribución de porcentajes del espacio de búsqueda S de tamaño m de la Figura 17. Se muestra que el porcentaje de soluciones del espacio S (17.19%) cuando $N = 10$ corresponde a la parte central de la lista de $m = 4^4$ elementos ordenados lexicográficamente, que comprende el intervalo $[41.4\%, 58.6\%]$ de la lista con 44 soluciones.

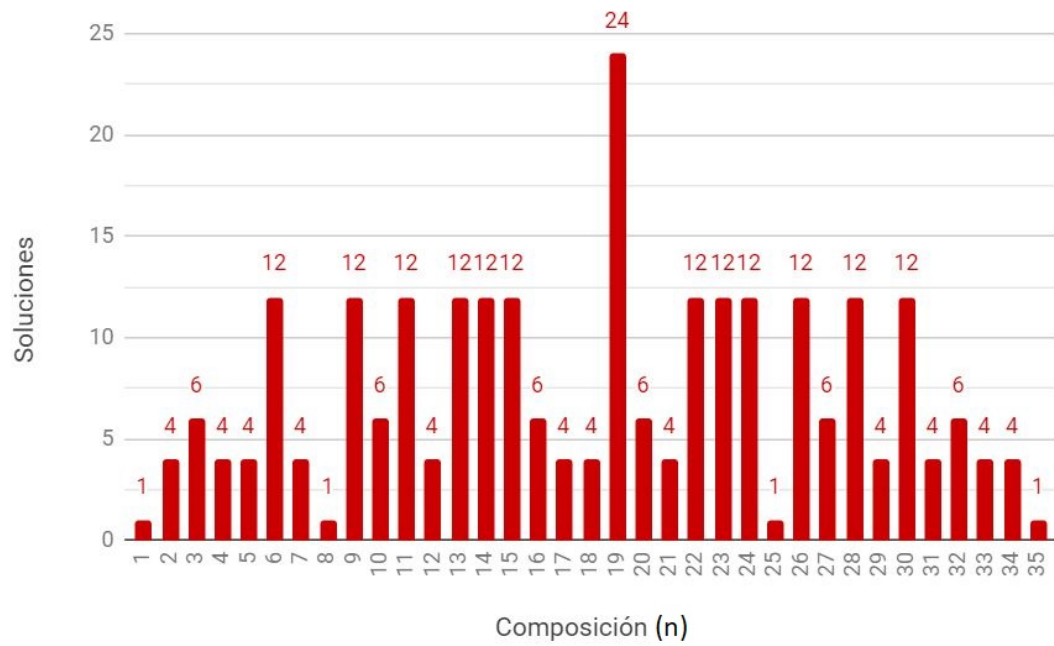


Figura 19. Número de composiciones $C_4(4) = 35$ para $n = 4$, y $k = 4$. Cada una de las composiciones puede ser vista como un subproblema de menor dimensión, con restricciones irrepetibles para los subarreglos K_j en el arreglo.

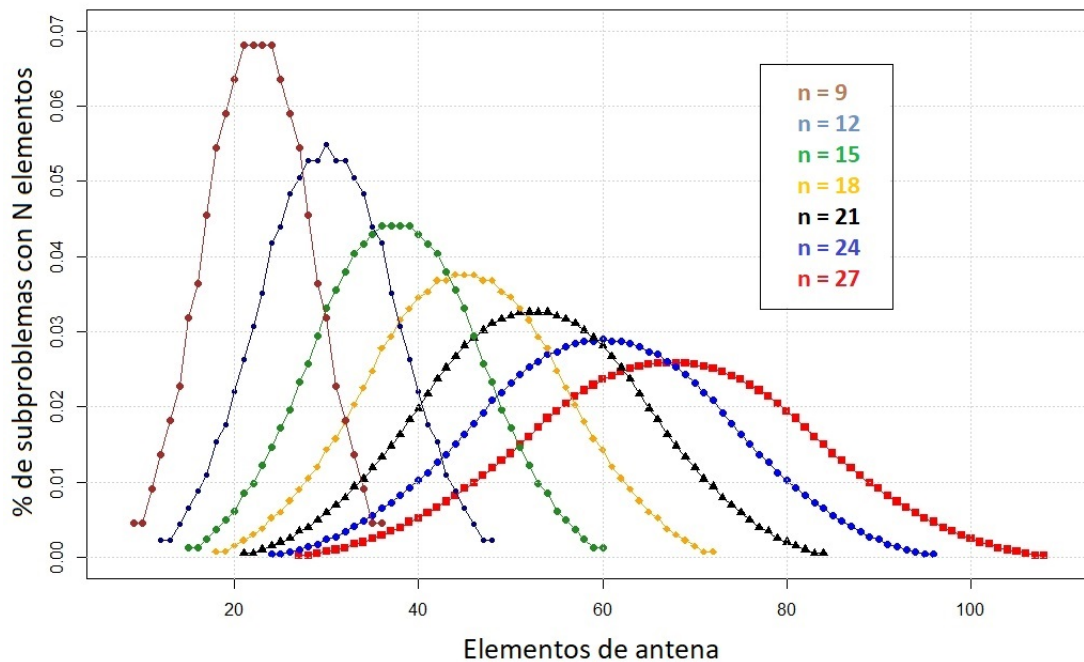


Figura 20. Composiciones $C_4(n)$ para los casos de $n = 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27$. Se observa que, en todos los casos, el mayor porcentaje de las soluciones son formadas por el valor de N localizado en la mitad del intervalo M mostrado en la ecuación (25).

3.4. Ventanas de amplitudes de corriente

En el Capítulo 2 se menciona que las ventanas de amplitudes de corriente son funciones que operan como filtros digitales para reducir el SLL a través de la reducción o el incremento de corriente en lugares específicos del arreglo (Allen y Ghavami, 2005), a diferencia de una amplitud de corriente uniforme, en donde todos los subarreglos son alimentados por la misma cantidad de corriente.

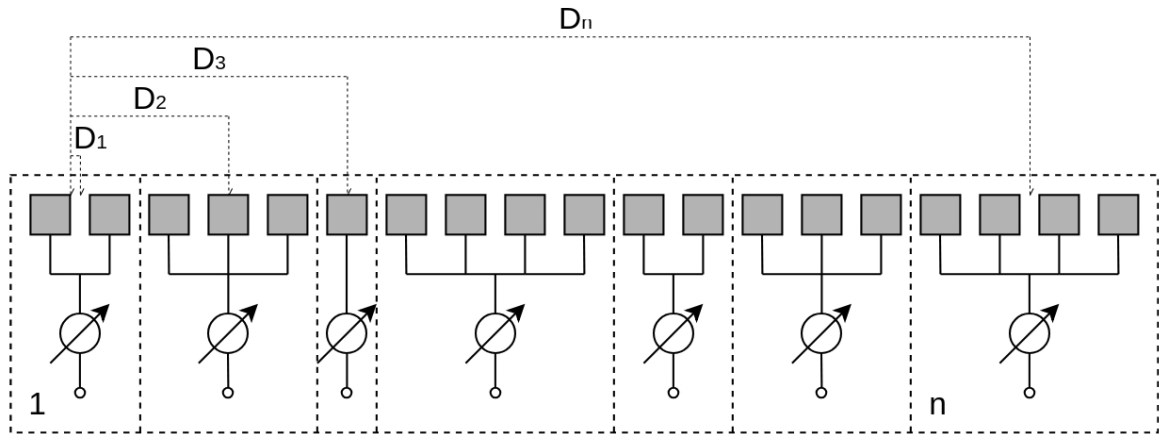


Figura 21. Representación de los centros de fase del arreglo lineal de la Figura 14. Los n centros de fase son asociados a los elementos de antena en N .

En Avser *et al.* (2016), se define como centro de fase a la separación entre el primer elemento de antena del arreglo, de izquierda a derecha, con respecto a la posición central de cada subarreglo. Para esta investigación se decide utilizar una ventana de amplitudes de corriente de coseno alzado (*raised cosine window*) definida por

$$W(D_i) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos^2 \left(\pi \left(\frac{D_i}{L_{tot}} - \frac{3}{2} \right) \right) \right), \quad (28)$$

donde D_i representa el centro de fase del i -ésimo subarreglo en el circuito para $i = 1, 2, \dots, n$; mientras que $L_{tot} = D_n$ corresponde a la separación entre el primer elemento y el último centro de fase del n -ésimo subarreglo como se muestra en la Figura 21.

El centro de fase del subarreglo i se asigna a los elementos de antena que pertenecen al subarreglo; entonces, existe un vector \mathbf{v}_k de tamaño del número total de elementos de antena N , que contiene números reales positivos representando los centros de fase D_i asignados a cada uno de los elementos de antena para $i = 1, 2, \dots, N$. Las amplitudes de corriente se encuentran representadas en (5) por a_i , por lo que $a_i = W(D_i)$.

En la Figura 22 se muestra un ejemplo de los cambios en el patrón de radiación causados por las amplitudes de corriente uniformes en comparación con la ventana de coseno alzado para el arreglo mostrado en la Figura 21. A pesar de que existe un aumento de 0.56 radianes de FNBW, la ventana de coseno alzado permite una reducción de SLL de 8.25 dB con respecto al caso de la amplitud de corriente uniforme.

3.5. Variación de las excitaciones de fase

En los arreglos de antenas lineales con desfasadores, es posible el escaneo del haz electromagnético principal en los valores $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ con la variación de las excitaciones de fase discretas provistas por los desfasadores (Visser, 2006). Estos valores de fase son dados por el vector de dirección (*steering vector*) denotado por

$$\psi_i = -\frac{2\pi}{\lambda}(n-i)D_i \sin(\theta) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (29)$$

en el factor de arreglo (5), donde n representa la cantidad de desfasadores, i el número de subarreglo, D_i el i -ésimo centro de fase de subarreglo, y θ el ángulo de escaneo. Este vector de dirección se encuentra dado de manera predeterminada por los centros de fase de los subarreglos D_i , sin embargo, es posible la variación de estos valores de manera dinámica para mejorar el rendimiento del arreglo.

3.6. Funciones objetivo

Los objetivos del problema funcionan como medidas de rendimiento para los diferentes diseños de arreglos de antenas lineales. En este trabajo se utilizan dos funciones objetivo (f_1, f_2) que corresponden al SLL (f_1) y FNBW (f_2), definidos en (Panduro

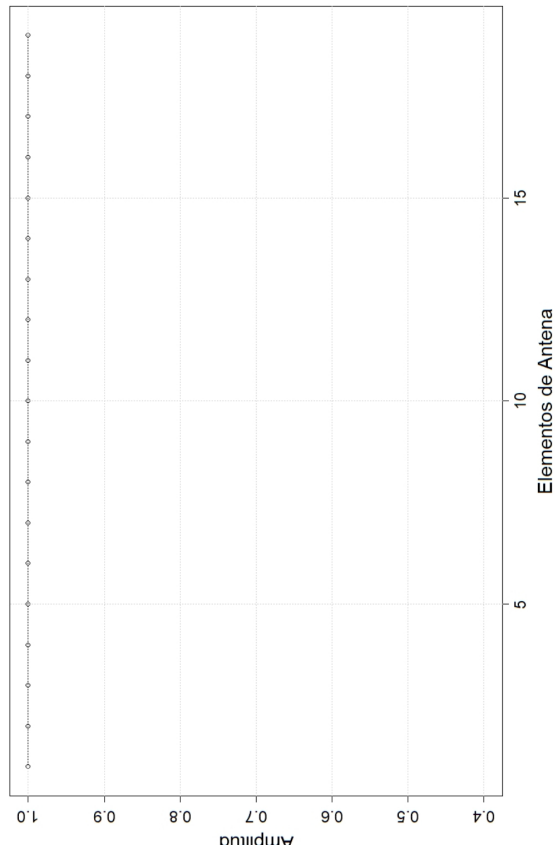
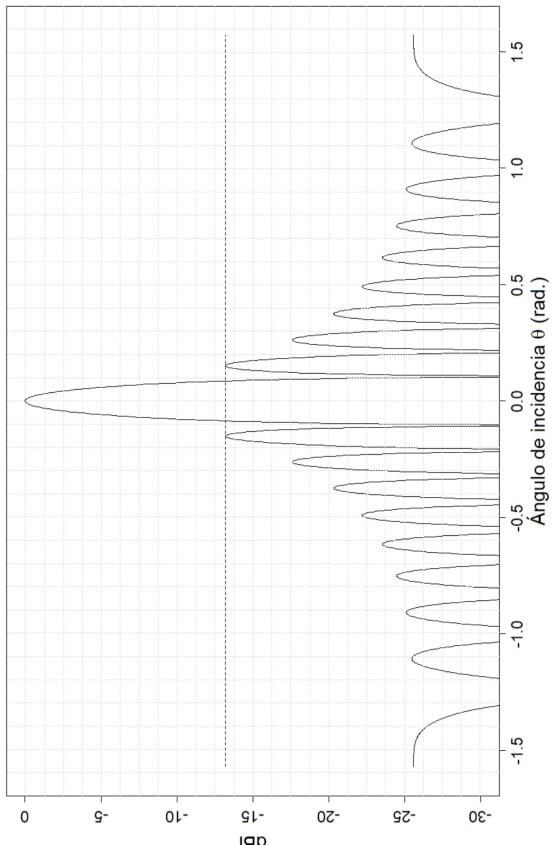
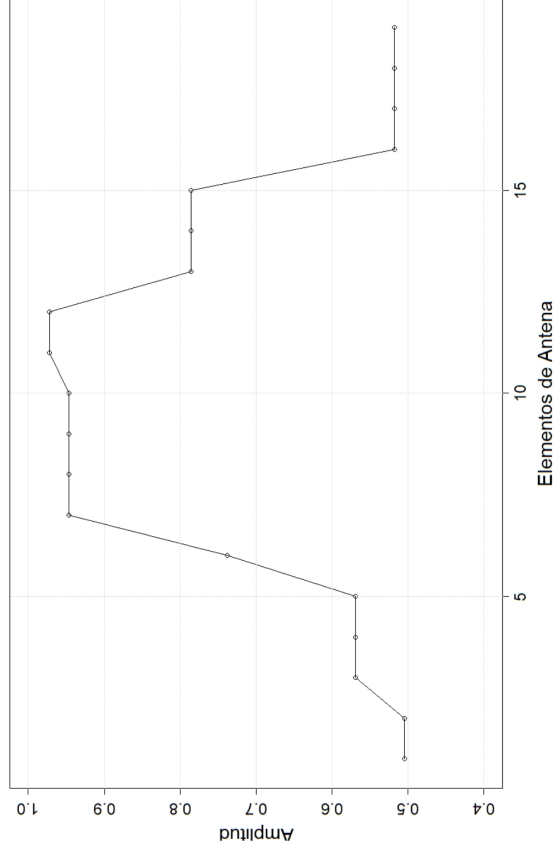
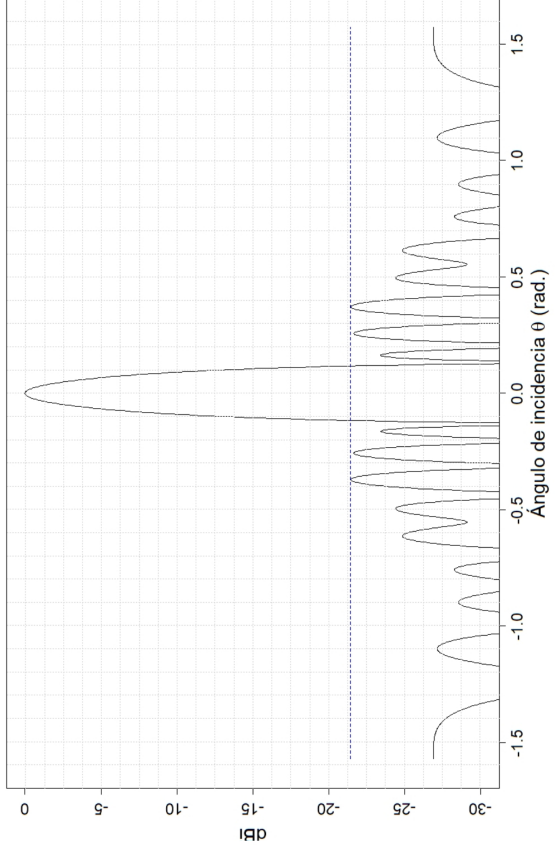


Figura 22. Ejemplo de diferentes amplitudes de corriente suministradas al arreglo $s = [2, 3, 1, 4, 2, 3, 4]$ de la Figura 13. Las dos imágenes superiores muestran el patrón de radiación del circuito cuando sus respectivas amplitudes de corriente de las imágenes inferiores son aplicadas.

et al., 2005). Estas funciones objetivo permitirán evaluar el rendimiento de múltiples secuencias s para determinar las mejores tomando en cuenta uno o más objetivos.

3.6.1. Problema de optimización mono-objetivo de arreglos de antenas lineales en fase con subarreglos

Sea $S \subset \mathbb{N}^n$ el espacio de búsqueda que contiene a las n -tuplas o secuencias $s \in S$, donde n es igual a la cantidad de desfasadores, mientras que s_i para $i = 1, 2, \dots, m$ representa una solución contenida en un espacio de soluciones S de tamaño m . Sea f_1 una función de correspondencia entre una secuencia s y su respectivo nivel de lóbulo lateral (SLL), tal que

$$f_1 : S \rightarrow \mathbb{R} \mid f_1(s) \leq 0; \forall s \in S. \quad (30)$$

Dado un valor de ancho de haz de primer nulo θ_n (FNBW), y la posición de los dos primeros nullos contiguos al haz principal (p_i, p_d) , se define la región ocupada por el FNBW como $\Theta_n \in [p_i, p_d]$, que representa la apertura total en radianes del lóbulo principal. Se desea encontrar el valor máximo calculado por el factor de arreglo (5) normalizado, a lo largo de la región $\Theta = [-\pi/2, \pi/2]$ exentando la región ocupada por el FNBW, por lo tanto, se tiene que $\Theta_n \subset \Theta$, y la diferencia de conjuntos $\Theta \setminus \Theta_n$ representa la región que contiene al mínimo SLL dado por $f_1(s)$, de tal manera que

$$f_1(s) = \max_{\theta \in \Theta \setminus \Theta_n} (20 \log |AF(\theta, s)|). \quad (31)$$

Para efectos de esta investigación se decide utilizar el SLL como el criterio que determina el rendimiento de los diseños. Por lo tanto, se desea encontrar una n -tupla s^* dentro de un espacio de búsqueda S que genere el menor SLL denotado por $f_1(s^*)$, tal que la desigualdad definida por (32) se cumpla. Se debe destacar que la solución s^* corresponderá a una solución óptima global.

$$f_1(s^*) \leq f_1(s); \forall s \in S \quad (32)$$

Comparando el valor de la función objetivo entre las 4 soluciones diferentes mostradas en la Figura 23, se puede elegir a s_1 como la solución con el mejor valor de rendimiento, tomando en cuenta (32). De esta manera se pueden descartar otras soluciones con valores de SLL mayores que el reportado por s_1 .

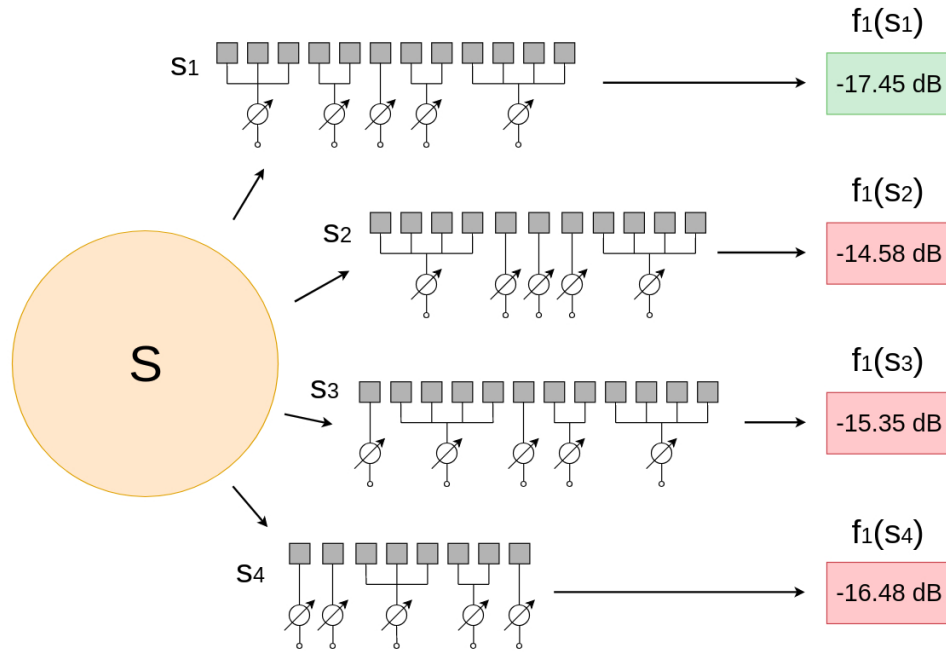


Figura 23. Comparación entre cuatro diferentes soluciones del conjunto S utilizando la función objetivo $f_1(s)$. La solución s_1 supera al resto debido a que $f_1(s_1) < f_1(s_4) < f_1(s_3) < f_1(s_2)$. Donde $s_1 = [3, 2, 1, 2, 4]$, $s_2 = [4, 1, 1, 1, 4]$, $s_3 = [1, 4, 1, 2, 4]$, $s_4 = [1, 1, 3, 2, 1]$.

Ahora considere que existe una función de correspondencia f_2 entre una secuencia s , y su respectivo valor de ancho de haz de primer nulo θ_n (FNBW) de acuerdo con la ecuación (9), de tal manera que

$$f_2 : S \rightarrow \mathbb{R} \mid f_2(s) > 0; \forall s \in S. \quad (33)$$

Este valor comprende la región entre los dos primeros nulos contiguos al haz principal, y puede ser visualizado como la apertura total en radianes del lóbulo principal en un plano cartesiano. Considere la apertura del arreglo en el intervalo $\Theta = [-\pi/2, \pi/2]$, en donde p_i y p_d representan los valores en radianes de los nulos contiguos al haz electromagnético principal. Siendo θ el ángulo de escaneo, se tiene que

$$f_2(s) = |p_i| + |p_d|, \text{ donde } (p_i < \theta < p_d). \quad (34)$$

Sea f_2 una función de correspondencia entre una n -tupla s con su respectivo valor de FNBW dado por $f_2(s)$, existe una n -tupla s^* que satisface

$$f_2(s^*) \leq f_2(s); \forall s \in S, \quad (35)$$

dando pauta a la existencia de otra medida de rendimiento adicional al SLL. En la Figura 24 se observa que ahora, de entre las secuencias analizadas, la solución s_3 es la mejor solución bajo el criterio f_2 .

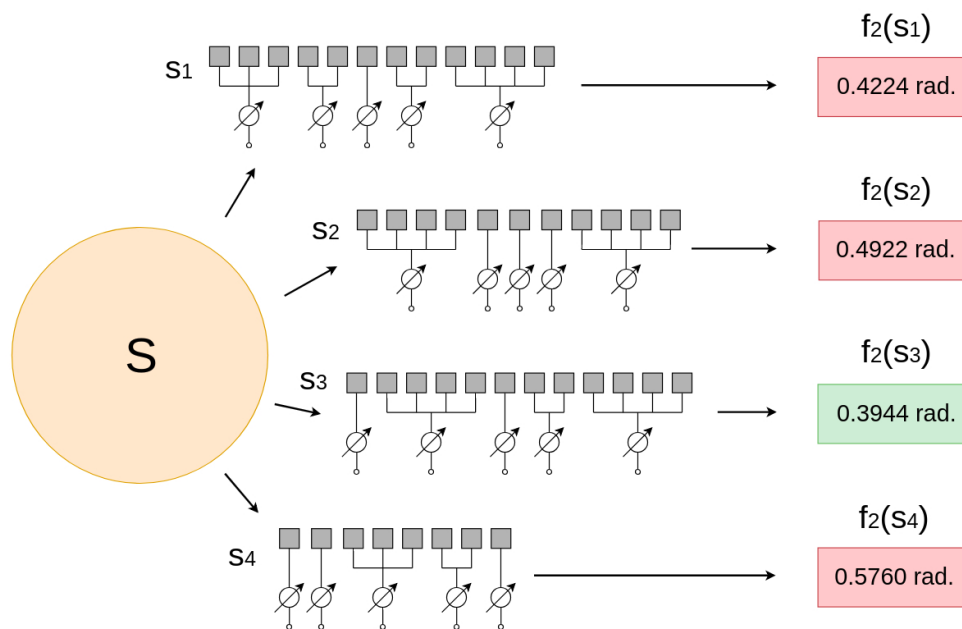


Figura 24. Comparación entre cuatro diferentes soluciones del conjunto S utilizando la función objetivo $f_2(s)$. En esta ocasión la solución s_3 supera al resto debido a que $f_2(s_3) < f_2(s_1) < f_2(s_2) < f_2(s_4)$. Donde $s_1 = [3, 2, 1, 2, 4]$, $s_2 = [4, 1, 1, 1, 4]$, $s_3 = [1, 4, 1, 2, 4]$, $s_4 = [1, 1, 3, 2, 1]$

3.6.2. Problema de optimización multi-objetivo de arreglos de antenas lineales en fase con subarreglos

Es posible generar una función vectorial de minimización \mathbf{z} cuyos componentes son las funciones f_1 y f_2 , de tal manera que estos dos objetivos cuenten con la misma

importancia al momento de realizar la evaluación de rendimiento entre soluciones. En la ecuación (36) se muestra una función de minimización, que persigue la minimización de ambos objetivos de manera simultánea para generar una lista con las mejores soluciones utilizando el principio de dominancia descrito en el Capítulo 2.

$$\underset{s \in S}{\text{minimizar}} \mathbf{z} = (f_1(s), f_2(s)). \quad (36)$$

En consecuencia, es posible la generación de un frente de Pareto con una o más soluciones que poseen el mismo grado de importancia, por lo que todas ellas pueden ser factibles de implementar. Sin embargo, la solución seleccionada para la fabricación del arreglo dependerá estrictamente de los requerimientos operacionales de la aplicación.

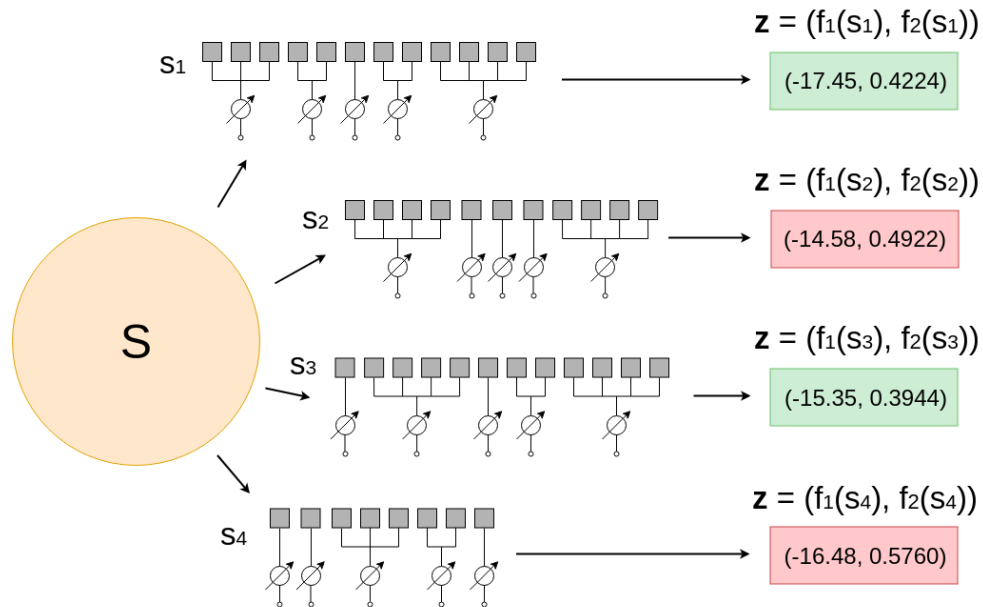


Figura 25. Comparación entre cuatro diferentes soluciones del conjunto S . A diferencia de las Figuras 23 y 24, ahora se utiliza una función de minimización multi-objetivo $\mathbf{z} = (f_1(s), f_2(s))$. Esto hace que exista más de una solución candidata (s_1, s_3) para resolver el problema. Donde $s_1 = [3, 2, 1, 2, 4]$, $s_2 = [4, 1, 1, 1, 4]$, $s_3 = [1, 4, 1, 2, 4]$, $s_4 = [1, 1, 3, 2, 1]$.

3.7. Trabajo previo relevante

Algunas técnicas iniciales que permitían la reducción de SLL se encuentran relacionadas con la variación de las amplitudes de corriente suministrada a cada uno de los subarreglos por la red de alimentación. De acuerdo con Haupt (1985), se puede reducir el SLL utilizando técnicas de ahusamiento (*tapering*) o ensanchamiento de haz por amplitudes de corriente; lo que permite incrementar el direccionamiento angular del haz principal y minimizar al mismo tiempo la generación de señales indeseables para el sistema.

A pesar de que estas técnicas mejoraban considerablemente el patrón de radiación del arreglo de antenas, no se enfocaban en reducir el número de componentes desfasadores, por lo que el alto costo de fabricación los convertía en dispositivos escasos y exclusivos. Las primeras aplicaciones carecían de optimización por heurísticas evolutivas debido a que aún no se contaba con un amplio desarrollo en el área, y las capacidades computacionales disponibles tampoco favorecían esta situación.

Fue hasta mediados de los noventa en que se comienzan a popularizar las técnicas de diseño no uniforme. Goffer *et al.* (1994) presentan la idea de variar el número de elementos que conforman a cada subarreglo, esto para obtener mejores características en el patrón de radiación del arreglo; este método agregaba la designación de un elemento desfasador por subarreglo e incluía componentes retardadores de tiempo en la red de alimentación. Estos subarreglos eran de tamaño aleatorio dentro de un intervalo de enteros, dividiendo 128 elementos de antena en subgrupos, formando de esta manera una secuencia s de números enteros del intervalo $2 \leq K_j \leq 6$.

Mailloux (2001) utiliza diferentes casos del problema en donde el tamaño de los subarreglos varía al igual que la cantidad de subarreglos utilizados. En un caso se emplean 16 subarreglos cada uno con 32 elementos de antena ($K_{32} = 16$), para un total de $N = (K_{32} \cdot 32) = (16 \cdot 32) = 512$ elementos de antena. Algo que tienen en común las investigaciones anteriores es la cantidad de elementos de antena que se utilizan para conformar los arreglos. Esto debido a dos razones principales, la primera se encuentra relacionada con la longitud del arreglo, mientras que la segunda corresponde al número de posibles combinaciones que pueden conformarse si se trata de subarreglos con diferentes tamaños.

Posteriormente, otros enfoques comienzan a surgir utilizando un número menor de elementos de antena por subarreglos. De acuerdo con Avser *et al.* (2016) se pueden utilizar ciertas restricciones en los tamaños permitibles de subarreglos en las secuencias para minimizar el tamaño del espacio de soluciones. De esta manera, se calculan todas las soluciones de manera exhaustiva, seleccionando aquellas que maximicen el rendimiento operacional.

3.7.1. Computación evolutiva aplicada al diseño de arreglos de antenas

A principios del siglo XXI comienzan a surgir aplicaciones de heurísticas por computación evolutiva para la optimización de distintos parámetros, lo que permitió mejorar SLL, FNBW, directividad, entre otras características importantes. En Boeringer y Werner (2004) se realiza la comparación entre dos heurísticas evolutivas distintas que optimizan parámetros de amplitud, fase, y pesos complejos. Sin embargo, como es mencionado en el artículo, los costos computacionales para optimización electromagnética continuaban siendo elevados.

Otros trabajos realizados a mediados de la primera década del siglo XXI también incorporaban computación evolutiva como herramienta de optimización. Algunos de ellos agregaban nuevas técnicas de supresión de haz con la colocación de nulos en el patrón de radiación, lo que permitía eliminar radiación indeseada en una determinada dirección angular. En Khodier y Christodoulou (2005) se plantea el uso de un algoritmo de optimización basado en enjambre de partículas (PSO) para controlar la dirección de la colocación de nulos junto con la optimización de la posición de los elementos.

Es importante mencionar que una de las heurísticas evolutivas que sería empleada con mayor frecuencia desde este punto hasta la actualidad es la optimización por enjambre de partículas. De acuerdo con la literatura, esta técnica era relativamente fácil de implementar, además de que contaba con un corto tiempo de convergencia. Otras heurísticas evolutivas que serían incluidas posteriormente son análogas a PSO: *firefly*, *ant colony optimization*, *bee colony optimization*, *wind driven* mostradas por Zaman *et al.* (2012), y Goudos *et al.* (2016).

En la segunda década del siglo XXI se introducen nuevos métodos de reducción del nivel de lóbulo lateral utilizando técnicas de direccionamiento de nulos. En (Singh

et al., 2010) se muestra una nueva heurística evolutiva basada en modelos matemáticos que buscan explicar la evolución, migración, y extinción de algunas especies utilizando una geografía de islas. Este trabajo expone resultados proclamados como mejores que los obtenidos anteriormente con PSO para reducción de SLL.

Trabajos posteriores continuaban con la optimización por inteligencia de enjambre como es presentado por Zaman *et al.* (2012) y Singh *et al.* (2013), sin embargo, otros métodos no evolutivos eran utilizados a la par para la optimización del diseño. En un trabajo realizado por Xiong *et al.* (2013), se logra encontrar una solución al problema de partición de subarreglos con geometrías irregulares utilizando el algoritmo X de Knuth (Knuth, 2000).

La modificación de las amplitudes de potencia continuaba siendo un tema de gran interés, tal que nuevas técnicas fueron agregadas para complementar los resultados obtenidos en trabajos anteriores; algunas de estas técnicas se basaron en el traslape de la red de alimentación de los subarreglos como es mencionado por Xiong *et al.* (2015). En este mismo tiempo se comienza a utilizar la optimización con heurísticas evolutivas aplicadas a la asignación de los elementos de antena en geometrías de mayor complejidad. Surgieron casos en donde la cantidad de elementos en los subarreglos era uniforme a diferencia de la separación entre los subarreglos, como se ilustra en el trabajo de Krivosheev *et al.* (2015). En cambio, otros trabajos apuntaban a una cantidad irregular de elementos por subarreglo pero con distancias uniformes como es mencionado por Rocca *et al.* (2015).

3.7.2. Optimización multi-objetivo de arreglos de antenas lineales

Panduro *et al.* (2005) proponen el primer modelo de optimización multi-objetivo para el diseño de un arreglo de antenas lineal. En donde se utiliza un algoritmo genético para encontrar una curva compromiso entre FNBW y SLL en arreglos lineales con separaciones uniforme y no uniforme. Además de lo anterior, se realizaron simulaciones con variaciones en la distancia y las excitaciones de fase.

3.7.3. Panorama actual

En la actualidad, las técnicas de optimización por metaheurísticas evolutivas continúan vigentes, tal que se pueden encontrar una gran variedad de métodos computacionales para optimización de parámetros como la distancia entre elementos y las dimensiones del subarreglo mostrado en Saleem *et al.* (2016). Adicionalmente, surgen otros enfoques que tratan de combinar diferentes técnicas para crear mejores prestaciones. El trabajo realizado por Wang (2018) nos muestra una fusión de técnicas como *adaptive beamforming* con la división de subarreglos utilizando un algoritmo genético de optimización multiobjetivo.

En la última década han aparecido técnicas como la conformación de haz adaptiva (*adaptive beamforming*), que permite direccionar el haz principal de manera autónoma ajustando pesos en las configuraciones del arreglo como es presentado por Banerjee y Dwivedi (2016). Además del surgimiento de las antenas reconfigurables en respuesta a los últimos avances tecnológicos en sistemas integrados, tal y como se muestra por Costantine *et al.* (2015); estas permiten cambiar su topología de manera dinámica y adaptable a los requerimientos del entorno.

En este trabajo se implementan metaheurísticas evolutivas para la exploración de diferentes espacios de soluciones que contienen diseños de arreglos de antenas lineales con rendimiento favorable, que de otra manera podrían resultar inalcanzables con la implementación de métodos exactos en términos de recursos computacionales requeridos para la ejecución de las búsquedas correspondientes. Al encontrar una técnica que mejore el tiempo de ejecución de la búsqueda de soluciones, se pueden plantear instancias del problema con mayor diversidad en términos de adición de nuevos parámetros de diseño al proceso de optimización.

Capítulo 4. Metodología

Este capítulo se describe la metodología utilizada para el desarrollo de los experimentos correspondientes a esta investigación, los cuales se encuentran divididos en tres enfoques distintos. Primero se aborda el problema utilizando métodos exactos para realizar una búsqueda exhaustiva de soluciones, en espacios de búsqueda formados por medio de *restricciones*, o *sin restricciones*. Esto permite obtener soluciones óptimas para cada ejecución del algoritmo de búsqueda a cambio de un tiempo computacional relativamente alto.

La segunda parte de los experimentos corresponde a un enfoque que emplea algoritmos evolutivos para la búsqueda de soluciones en espacios de búsqueda *sin restricciones*, donde se utiliza un algoritmo de optimización multi-objetivo basado en cúmulo de partículas presentado por Nebro *et al.* (2009) denominado SMPPO. Posteriormente, se propone la modificación del algoritmo SMPPO para la generación de la población de manera asistida, por medio de patrones de diseño extraídos del análisis de las soluciones óptimas obtenidas en problemas con dimensiones computables.

Por último, la tercera parte de los experimentos muestran algunas técnicas adicionales de optimización, que son aplicadas a soluciones candidatas u óptimos globales obtenidos previamente. A pesar de la existencia de enfoques alternos de optimización, en esta investigación se decide implementar este proceso de optimización una vez que la búsqueda de soluciones candidatas ha concluído. Algunas de estas técnicas son: la variación de la separación uniforme entre los elementos de antena, y la manipulación estratégica de los valores que componen a la *pendiente de fase*, dada por el vector de dirección del arreglo en la ecuación (29).

Se espera que con el desarrollo de la siguiente metodología se puedan demostrar dos puntos muy importantes. Por una parte, las ventajas que tienen las metaheurísticas evolutivas sobre los métodos exactos en problemas intratables, como resultan ser algunos casos del problema *sin restricciones*. Adicionalmente, se planea demostrar la existencia de un patrón de diseño mediante el análisis de soluciones óptimas obtenidas en problemas de menor dimensión, para crear estrategias de búsqueda en espacios de mayor tamaño.

4.1. Ordenamiento lexicográfico

En el contexto de matemática combinatoria, particularmente en el ordenamiento de conjuntos, se le conoce como ordenamiento lexicográfico al acomodo de los elementos de una lista de tamaño $l = 1, 2, \dots, m$, de tal manera que, si los elementos que componen a las secuencias formaran un número entero de n cifras, existe una secuencia s_l para $1 \leq l \leq |S|$ que es mayor que todas las secuencias antecesoras a ella, y menor que todas las secuencias sucesoras en la lista, tal que:

$$\{ \forall s \in S : s_{l-1} < s_l < s_{l+1} \mid 2 \leq l \leq |S| - 1 \}. \quad (37)$$

La línea 1 del Algoritmo 3 acepta como entrada una secuencia con índice l para generar una secuencia sucesora con índice $l + 1$ ordenada de manera lexicográfica, tal que $s_l < s_{l+1}$ como se muestra en la ecuación (37), para componer una lista ordenada de tamaño $l = 1, 2, \dots, m$. El Algoritmo 3 funciona únicamente para el caso con *restricciones*, que limitan la presencia de los subarreglos K_j que componen a las secuencias ($|N'| > 1$). Por ejemplo, para el caso de $n = 4$, $K_2 = 2$, $K_3 = 2$, se obtienen las secuencias:

$$2233 < 2323 < 2332 < 3223 < 3232 < 3322, \quad (38)$$

que forman una lista de tamaño $m = (4!/4) = 6$ de acuerdo con la ecuación (26).

Algoritmo 3: Ordenamiento lexicográfico (Nayuki, 2018)

Entrada: Secuencia de n números enteros del caso con *restricciones* ($|N'| > 1$).

Salida: Secuencia ordenada de manera lexicográfica respecto a su antecesora, como se muestra en la ecuación (37).

```

1 array = secuencia antecesora en la lista;
2  $i = n - 1$ ;
3 while  $i \geq 0$  &&  $array[i - 1] \geq array[i]$  do
4   |  $i--$ ;
5 end
6 if  $i \leq 0$  then
7   | return 0;
8 end
9  $j = array.size() - 1$ ;
10 while  $array[j] \leq array[i - 1]$  do
11   |  $j--$ ;
12 end
13  $temp = array[i - 1]$ ;
14  $array[i - 1] = array[j]$ ;
15  $array[j] = temp$ ;
16  $j = array.size() - 1$ ;
17 while  $i < j$  do
18   |  $temp = array[i]$ ;
19   |  $array[i] = array[j]$ ;
20   |  $array[j] = temp$ ;
21   |  $i++$ ;
22   |  $j--$ ;
23 end
24 return array;

```

Por otra parte, en el ordenamiento lexicográfico del caso *sin restricciones*, las soluciones se generan utilizando un contador que incrementa cada dígito de manera ascendente utilizando los valores en N' , cumpliendo con la ecuación (37). Suponiendo que $n = 4$ y $N' = \{1, 2, 3\}$, todas las posibles combinaciones son dadas por $m = 3^4 = 81$, de acuerdo con la ecuación (23). La primera secuencia en la lista es representada por $s_1 = [1, 1, 1, 1]$, mientras que la última secuencia en la lista corresponde a $s_{81} = [3, 3, 3, 3]$. El ordenamiento lexicográfico del espacio de soluciones está

dado por:

$$1111 < 1112 < 1113 < 1121 < \dots < 3323 < 3331 < 3332 < 3333. \quad (39)$$

El número de elementos de antena se encuentra relacionado con la posición de cada secuencia en la lista ordenada de tal manera que, para el ejemplo anterior, el intervalo con los diferentes valores que puede tomar N corresponde al intervalo $[4, 12]$. En contraste con el caso basado en *restricciones*, donde el valor de N es constante.

Algunas de las ventajas de esta implementación es una reducción considerable en la cantidad de combinaciones y en el tiempo computacional de los algoritmos de búsqueda, además de contar con la certeza de encontrar una solución óptima en un espacio conocido. Sin embargo, en esta investigación se demuestran algunas desventajas del uso de *restricciones*, como la pérdida de un gran número de soluciones candidatas, ya que algunos espacios de búsqueda se convierten en irrastreables para los algoritmos exactos.

4.2. Optimización exhaustiva

En la siguiente sección se describe un enfoque basado en la búsqueda exhaustiva de soluciones, partiendo desde una perspectiva mono-objetivo utilizando solamente un número real para medir el rendimiento de las soluciones. Para efectos de esta investigación se decide utilizar el valor de SLL como el primer objetivo de los problemas de optimización mono-objetivo, denotado por $f_1(s)$ en la ecuación (30). Posteriormente, se introduce un caso adicional del problema que añade una segunda función objetivo al problema de optimización; este segundo objetivo es el valor de FNBW dado por $f_2(s)$ como se muestra en la ecuación (33).

4.2.1. Optimización mono-objetivo con restricciones

El punto de partida es el análisis de aplicaciones previas de algoritmos exhaustivos desde una perspectiva mono-objetivo, esto significa encontrar una manera de parametrizar el rendimiento de cada diseño de arreglo utilizando solamente un valor

numérico. Avser *et al.* (2016) utilizan el valor de SLL para encontrar una secuencia óptima global s^* , que produzca a su vez un ángulo máximo de escaneo para θ .

Tabla 4. Crecimiento del tamaño (m_1) de los espacios de búsqueda con *restricciones*.

índice	K_2	K_3	K_4	n	m_1
1	4	4	4	12	34,650
2	5	5	5	15	756,756
3	6	6	6	18	17,153,136
4	7	7	7	21	399,072,960
5	8	8	8	24	9,465,511,770

La secuencia óptima es obtenida a partir de la exploración de los espacios de búsqueda con índices 1, 2 y 3 mostrados en la Tabla 4, para esto se anticipa que el cálculo exhaustivo de los óptimos globales en algunos casos del problema no será factible, como en los índices 4 y 5, debido al tiempo computacional requerido para sus evaluaciones. Sin embargo, una aproximación al tiempo de ejecución total del algoritmo de búsqueda en espacios de gran tamaño puede ser estimada utilizando el tiempo promedio que tarda el algoritmo en evaluar una muestra de dicho espacio que sea de tamaño computable.

4.2.2. Optimización mono-objetivo sin restricciones

En el siguiente caso se desea mejorar la diversidad de los diseños al aumentar el tamaño de los espacios de búsqueda de soluciones, esto se logra removiendo las restricciones en la cantidad de subarreglos de tamaño K_j que forman los arreglos. El tamaño del espacio de soluciones se encuentra definido por $m = |N'|^n$, donde $n \in \mathbb{N}$, y $1 \leq j \leq 4$ (ver sección 3.2), como es mostrado en la ecuación (22). Por lo tanto, el tamaño del espacio de búsqueda crece exponencialmente con el número de subarreglos n en el arreglo. En la Tabla 5 se muestra el crecimiento del tamaño de los espacios de soluciones de manera progresiva para este caso del problema.

En la búsqueda exhaustiva con *restricciones* (ver sección 3.3.1), se desea encontrar una solución óptima global s^* utilizando un valor de rendimiento definido por $f_1(s^*)$ que produzca el menor SLL de entre todas las posibles soluciones del espacio de búsqueda, como se muestra en la ecuación (32). Se espera de antemano que la solución

óptima tiende a conformarse por la menor cantidad de elementos de antena con las que se puede formar una secuencia, de acuerdo con los parámetros de diseño. Esto es debido a que en la literatura se menciona que el incremento en el número de elementos de antena produce una reducción de FNBW a costa de un incremento en SLL (Panduro *et al.*, 2006), por lo que un menor número de elementos causa un incremento en el FNBW de acuerdo con la ecuación (9), reduciendo a su vez el valor del SLL.

Tabla 5. Crecimiento del tamaño de los espacios de búsqueda con las restricciones de la Tabla 4 (m_1) y sin restricciones (m_2).

índice	n	m_1	$m_2 = 4^n$
1	12	34,650	16,777,216
2	15	756,756	1,073,741,824
3	18	17,153,136	6.872×10^{10}
4	21	399,072,960	4.398×10^{12}
5	24	9,465,511,770	2.815×10^{14}

En la Tabla 5 se puede observar una gran diferencia entre el tamaño de los espacios de búsqueda del caso con *restricciones* (m_1), y los espacios de búsqueda del caso *sin restricciones* (m_2). Suponiendo que el cálculo de rendimiento de una solución para cualquiera de los dos casos del índice 4 es de ≈ 2 ms, la exploración del espacio m_1 tomaría aproximadamente 9 días, mientras que el espacio de soluciones m_2 tardaría 279 años en ser totalmente explorado.

4.3. Optimización multi-objetivo

Como se ha mencionado anteriormente, el enfoque multi-objetivo permite demostrar la existencia de un compromiso entre dos funciones de rendimiento, generando con ellas una medida de rendimiento conjunta. Esto produce la creación de un frente aproximado de Pareto (APF), que contiene a más de una solución candidata adecuada para resolver el problema. A continuación, se muestra la metodología que introduce el uso de metaheurísticas evolutivas para resolver el problema de optimización multi-objetivo de parámetros de diseño de arreglos de antenas.

4.3.1. Enfoque evolutivo: problema de optimización multi-objetivo

A diferencia del método exhaustivo, el siguiente enfoque implementa un caso del problema *sin restricciones* utilizando un algoritmo evolutivo de optimización multi-objetivo (SMPSO) (Nebro *et al.*, 2009) para la búsqueda; generando de esta manera un APF empleando los valores de SLL y FNBW como funciones objetivo. Se busca de esta manera crear un conjunto de soluciones no dominadas que resulten equitativamente factibles entre sí en términos de la dominancia de Pareto mostrada en la ecuación (16).

Algoritmo 4: Speed-constrained Multi-objective Particle Swarm Optimization (SMPSO) de Nebro *et al.* (2009), suponiendo minimización de ambos objetivos.

Entrada: Tamaño de la población, $maxGen$, número de variables n , número de funciones objetivo f .

Salida: Archivo con líderes.

```

1 Inicializar(Enjambre);
2 Inicializar(ArchivoConLideres);
3 gen = 0;
4 while (gen < maxGen) do
5     for each partícula p ∈ Enjambre do
6         CalcularVelocidad(p);
7         ActualizarPosición(p);
8         Mutación(p);      // tasa de mutacion: 1/n
9         Evaluación(p);
10        Actualizar(ArchivoConLideres);
11        Actualizar(MemoriaDeParticulas);
12    end
13    gen++;
14 end
15 return ArchivoConLideres;
```

En las líneas 1 y 2 del Algoritmo 4 se inicializa un *enjambre* de partículas, y un archivo con las soluciones líderes. La línea 3 inicializa el contador generacional o de iteraciones del algoritmo. Las líneas 4-14 representan un ciclo *while* que será ejecutado mientras el número de iteraciones actuales del algoritmo (gen) sea menor que el número total de generaciones del algoritmo ($gen < maxGen$). La línea 6 calcula la ve-

locidad de la partícula utilizando la ecuación (13). En la línea 7 se actualiza la posición de la partícula por medio de la ecuación (12).

La mutación de la partícula se realiza en la línea 8 del algoritmo, empleando un operador de mutación polinomial PM descrito en (Deb y Goyal, 1996). Este operador de mutación pretende simular una distribución de mutaciones de una solución con variables de decisión binarias que utilizan una mutación por *bit-flip* o cambio de bit, pero esta vez utilizando valores reales; al igual que el índice SBX (Deb y Agrawal, 1995), el índice PM favorece obtener descendientes relativamente cercanos al padre.

Algoritmo 5: Adaptación del algoritmo SMPSO al problema de diseño de arreglos lineales en fase.

Entrada: $n, N', \theta, d, f_1, f_2$.

Salida: Archivo con el frente aproximado de Pareto (APF).

```

1 Inicializar(Enjambre);
2 Inicializar(APF);
3 gen = 0;
4 while (gen < maxGen) do
5     for each solución s ∈ Enjambre do
6         CalcularVelocidad(s);
7         ActualizarPosición(s);
8         Mutación(s);
9         Calcular z = (f1(s), f2(s));           // variables: s, n, N', θ, d
10        APF ← DominanciaDePareto(s);         // minimizar z = (f1(s), f2(s))
11        Actualizar(APF);
12    end
13    gen++;
14 end
15 return APF;
```

De manera más precisa, el operador de mutación PM designa un *valor vecino* utilizando una distribución de probabilidad polinomial, cuyo valor actual (subarreglo con índice i) corresponde a su media, mientras que su varianza es una función del índice de distribución x . Se introduce un factor de perturbación dado por: $\delta = (c-p)/\Delta_{max}$, donde Δ_{max} corresponde a una constante que representa la máxima perturbación permisible en el valor del subarreglo i en la secuencia *padre* (p), mientras que c corresponde al

valor mutado, empleando una distribución de probabilidad que depende del factor de perturbación $\mathcal{P}(\delta) = 0.5(n + 1)(1 - |\delta|)^n$. Esta distribución de probabilidad es válida en el intervalo $\delta \in (-1, 1)$, posteriormente, una variable aleatoria u es generada en el intervalo $(0, 1)$, que se utiliza en el cálculo de un factor de perturbación $\hat{\delta}$.

El factor de perturbación $\hat{\delta}$ es dado por:

$$\hat{\delta} = \begin{cases} (2u)^{\frac{1}{x+1}} - 1 & \text{if } u < 0.5 \\ 1 - [2(1-u)]^{\frac{1}{x+1}} & \text{if } u \geq 0.5 \end{cases} \quad (40)$$

donde x corresponde al índice de distribución, con un valor predeterminado de $x = 20$ en SMPSO. Por lo tanto, el nuevo valor mutado es calculado por: $c = p + \hat{\delta}\Delta_{max}$.

En la línea 9 se realiza la evaluación de rendimiento de la partícula. La línea 10 actualiza el archivo con las partículas líderes por medio de la dominancia de Pareto, dada por la ecuación (16) suponiendo minimización, mientras que la línea 12 actualiza la memoria de las partículas en el enjambre para conocer a los nuevos líderes. La línea 15 del algoritmo regresa un archivo con las mejores soluciones encontradas en *maxGen* iteraciones.

El Algoritmo 5 muestra la adaptación del algoritmo SMPSO de Nebro *et al.* (2009) al problema de diseño de arreglos de antenas lineales. Este acepta como entrada: la cantidad de subarreglos n , los tamaños permitidos de subarreglos N' , el ángulo de escaneo θ , la separación uniforme entre elementos de antena d , y las dos funciones objetivo (f_1, f_2) que componen una función multi-objetivo z . Y entrega como salida un archivo con las mejores soluciones encontradas en *maxGen* iteraciones, denominado *frente aproximado de Pareto* o APF.

Las líneas 1 y 2 del Algoritmo 5 inicializan la población de manera aleatoria, con una distribución de probabilidad uniforme para todos los subarreglos K_j que pueden componer el arreglo, con probabilidad de $1/|N'| \forall j \in N'$ de aparecer en la posición $i = 1, 2, \dots, n$ de la secuencia. Posteriormente, se construye un APF utilizando la ecuación (16). Dentro del ciclo formado por las líneas 4-14, se ejecutan diferentes operaciones para cada solución s del enjambre.

El cálculo de la velocidad y la posición se realiza en las líneas 6 y 7. La mutación se implementa en la línea 8. El proceso de mutación de las soluciones depende del uso de *restricciones* en el problema, para el caso *sin restricciones*, la mutación se realiza utilizando un operador de mutación polinomial PM (Deb, 2001). En cambio, en el caso con *restricciones*, se utiliza la función *swap* para el intercambio de posiciones entre dos subarreglos, uno de ellos corresponde al índice de la secuencia en donde se realiza la mutación con probabilidad de $1/n$, mientras que el otro índice es elegido de manera aleatoria.

Una vez que se realiza la mutación de las secuencias, se evalúa la función multi objetivo $z = (f_1(s), f_2(s))$, que denota el compromiso entre SLL y FNBW de la secuencia. En la línea 10 se emplea la dominancia de Pareto para minimizar z , posteriormente se determina si la solución se agrega al APF, mismo que se actualiza en la línea 11. Una vez concluido el ciclo de las líneas 4-14, la salida del algoritmo regresa un APF con las soluciones candidatas.

4.3.2. Subarreglos por distribución probabilística

En el siguiente apartado se describe una variante para la generación de la población en la implementación del Algoritmo 5, utilizando un caso del problema *sin restricciones*. A diferencia de los casos anteriores, en donde la población se genera en orden lexicográfico o con probabilidad uniforme, ahora se utiliza una distribución de probabilidad no uniforme para determinar la probabilidad que tiene un subarreglo K_j de aparecer en una posición específica de la secuencia para los índices $i = 1, 2, \dots, n$.

La idea principal de este enfoque surge de un problema reconocido en el área de bioinformática referido como la *búsqueda de motivos*, que consiste en el alineamiento de un número finito de secuencias de ADN, ARN o proteínas, representadas por cadenas de símbolos; con la finalidad de encontrar una secuencia (motivo) por medio del consenso entre secuencias en una tabla, emitiendo aquel símbolo con el mayor porcentaje de aparición en cada columna i de la tabla. Una representación visual que permite identificar a una secuencia motivo a partir de una lista de secuencias se conoce como *logo*, que permite mostrar gráficamente el porcentaje de emisión de un símbolo en términos de su tamaño en cada índice i del logo.

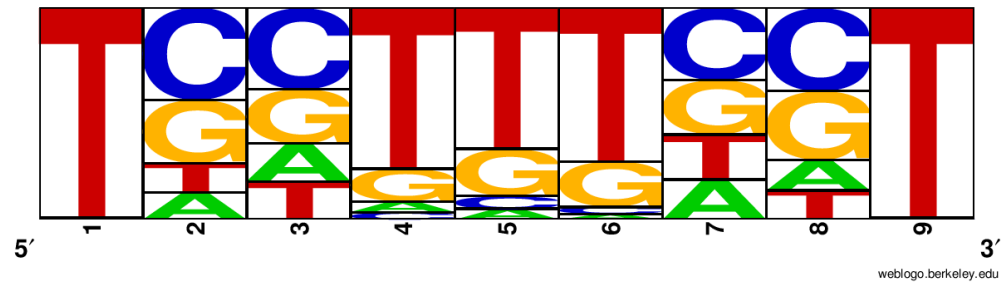


Figura 26. Logo del frente de Pareto obtenido en el caso: $n = 9$, $N' = \{1, 2, 3, 4\}$, $\theta = 0^\circ$, $d = \lambda/2$. Los subarreglos se encuentran representados por $A = 1$, $C = 2$, $G = 3$, $T = 4$, el tamaño de las letras indica el aumento o la disminución de la probabilidad que tiene cada subarreglo de aparecer en una posición i de la secuencia (software: <https://weblgo.berkeley.edu/>).

A raíz de las observaciones de los logos, como el que se muestra en la Figura 26, se desea obtener información adicional sobre la posible existencia de patrones de diseño para casos determinados del problema. Para esto se propone calcular una matriz de pesos por posición (PWM), o simplemente matriz de perfiles (Jones *et al.*, 2004). Ésta matriz se construye a partir del cálculo de dos matrices, conocidas como matriz de frecuencia de posición (PFM), y matriz de probabilidad de posición (PPM), siendo esta última el primer objetivo del experimento.

$$\mathbf{P}^* = \begin{matrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_4 \\ \mathbf{s}_5 \\ \mathbf{s}_6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 27. Ejemplo de una matriz de frecuencia de posición PFM denotada por M con dimensiones $(|N'| \times n) = (4 \times 6)$. El frente de Pareto se encuentra dado por \mathbf{P}^* que contiene seis soluciones candidatas.

Se plantea un caso del problema exhaustivo con enfoque multi-objetivo para generar las secuencias que se alinearán en una tabla, las cuales son obtenidas a partir

del cálculo del frente de Pareto para cada uno de los casos dados por el intervalo $6 \leq n \leq 12$, a un ángulo de escaneo $\theta = 0^\circ$. Considerando que el tamaño de los subarreglos K_j se encuentra delimitado por $1 \leq j \leq 4$, la matriz PFM se construye contando las ocurrencias de j en la columna i formada por el alineamiento de las secuencias, por lo tanto, las dimensiones de la PFM se encuentran definidas por $|N'| \times n$. Siendo $N' = \{1, 2, 3, 4\}$, mientras que n representa la longitud de las secuencias.

Una vez obtenida la matriz PFM (M) se procede a calcular la matriz PPM (M'), que consiste en la división de todos los elementos de M entre la longitud de las secuencias dada por n , entonces $M' = M/n$. La principal ventaja de la matriz PPM es mostrar la probabilidad que tienen los subarreglos de aparecer en una posición específica del arreglo en un caso particular. En la ecuación (41) se muestra un ejemplo del cálculo de los valores de la matriz PPM utilizando la información del ejemplo ilustrado en la Figura 27.

$$\begin{aligned}
 M' &= \frac{M}{n} \\
 &= \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.17 & 0.00 & 0.00 & 0.17 \\ 0.00 & 0.50 & 0.66 & 0.67 & 0.67 & 0.17 \\ 0.50 & 0.33 & 0.17 & 0.33 & 0.33 & 0.66 \\ 0.50 & 0.17 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{41}$$

Se desea realizar el procedimiento anterior para cada caso en $6 \leq n \leq 11$, con el propósito de entrenar un modelo de aprendizaje estadístico para predecir un patrón de diseño en casos de mayor tamaño. En esta investigación, se estudia únicamente

el caso para la predicción de diseño cuando $n = 12$, con escaneo a *broadside* $\theta = 0^\circ$. Para esto se modela una función de probabilidad a partir de los datos obtenidos por los casos de menor tamaño, que será utilizada para asistir el proceso de mutación de las secuencias.

4.3.3. Indicador de densidad

Con la finalidad de parametrizar la distribución de los subarreglos a través del arreglo, se propone un nuevo método para obtener un vector de números reales que contenga información implícita sobre el ordenamiento estratégico de los subarreglos. Para esto se introduce un indicador de densidad de elementos de antena por desfasador, basado en el indicador del promedio de elementos de antenas por desfasador mostrado en (Avser *et al.*, 2016).

El indicador consiste de una ventana de tamaño v , equivalente al redondeo de la tercera parte del número de subarreglos en la secuencia definido por:

$$v = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{3} \rfloor & \text{if } (\frac{n}{3} - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor) < \frac{1}{2} \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{if } (\frac{n}{3} - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor) \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (42)$$

La ventana será desplazada $n - v + 1$ veces a través del arreglo, recorriéndose una posición a la derecha de la secuencia comenzando desde el índice $i = 1$, que corresponde a la primera casilla de la parte izquierda de la ventana. En cada recorrimiento se realiza el cálculo del promedio de los subarreglos contenidos en la ventana por medio de:

$$q_{i, \dots, i+v-1} = \frac{\sum_{k=i}^{i+v-1} s[k]}{v \cdot \text{máx}(N')} \mid 1 \leq i \leq (n - v + 1), \quad (43)$$

donde $q_{i, \dots, i+v-1}$ representa el valor de densidad para los índices comprendidos por el intervalo de enteros $[i, i + v - 1]$, $s[k]$ representa la cantidad de elementos de antena en el i -ésimo subarreglo de la secuencia s , y máx corresponde a una función que regresa el máximo número entero en N' .

La motivación para el uso de este indicador reside en la información generada para conocer la cantidad de *influencia* que tienen los subarreglos aledaños con respecto a un determinado subarreglo posicionado en el índice $i = 1, 2, \dots, n$ del arreglo. Considere que existe un vector de números reales $Q \in \mathbb{R}^n$, tal que:

$$\forall q_i \in Q : \frac{\text{mín}(N')}{\text{máx}(N')} \leq q_i \leq 1 \mid i = 1, 2, \dots, n, \quad (44)$$

en donde $\text{mín}(N')$ y $\text{máx}(N')$ representan dos funciones que regresan el entero mínimo o máximo del conjunto N' .

Un ejemplo del cálculo del indicador de densidad es mostrado en la Tabla 6 para la secuencia $s = [4, 1, 1, 3, 1, 2, 4, 1, 1, 1, 4]$, con una ventana de tamaño $v = 3$. En este caso, el primer promedio de elementos (q_1, q_2, q_3) comprende a los índices $i = 1, 2, 3$, que es mostrado en la primera fila de la tabla como $(4 + 1 + 1)/(3 \cdot 4) = 0.500$. El valor final de q_i es calculado por el promedio de los valores presentes en cada columna i , de tal manera que, cuando $i = 3$, $q_3 = (0.500 + 0.417 + 0.417)/3 = 0.444$, como se ilustra en la Tabla 6.

Tabla 6. Indicador de densidad para la secuencia $s = [4, 1, 1, 3, 1, 2, 4, 1, 1, 1, 4]$ con $v = 3$, $n = 11$. Se obtiene un vector de densidades $Q \in [0.25, 1]^{11}$.

4	1	1	3	1	2	4	1	1	1	4
0.500	0.500	0.500								
	0.417	0.417	0.417							
		0.417	0.417	0.417						
			0.500	0.500	0.500					
				0.583	0.583	0.583				
					0.583	0.583	0.583			
						0.500	0.500	0.500		
							0.250	0.250	0.250	
								0.500	0.500	0.500
0.500	0.458	0.444	0.444	0.500	0.555	0.555	0.444	0.417	0.375	0.500

De acuerdo con la ecuación (44), los valores que puede tomar q_i para este caso se encuentran acotados por el intervalo $[0.25, 1]$. La Figura 28 ilustra la función de densidad generada por los datos de la Tabla 6, donde se observa que la distribución de los subarreglos genera una función particular e irrepetible. Se cree que los cambios de pendiente de la función de densidad contienen la información necesaria para conocer

la distribución estratégica de los subarreglos.

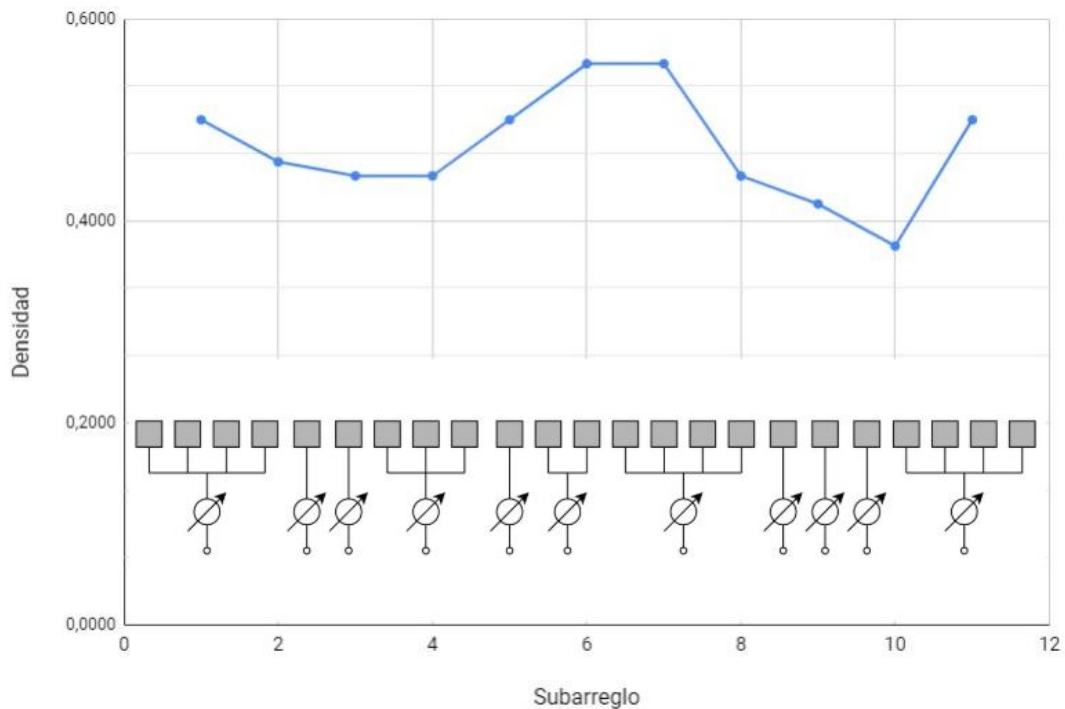


Figura 28. Visualización de la función de densidad mostrada en la Tabla 6, utilizando un arreglo lineal con secuencia $s = [4, 1, 1, 3, 1, 2, 4, 1, 1, 1, 4]$, $v = 3$, $n = 11$.

4.4. Técnicas adicionales de optimización

Una vez que se determinan los mejores diseños con la implementación de los enfoques mencionados, otras técnicas adicionales son utilizadas para optimizar el rendimiento de las soluciones. Algunas de ellas comprenden la variación de la separación entre elementos de antena, las amplitudes de corriente suministrada a los subarreglos, así como los valores de excitación de fase de los desfasadores.

4.4.1. Separación uniforme de antenas

Los elementos de antena del arreglo se encuentran separados espacialmente de manera uniforme por una distancia $d = c\lambda$ en donde c representa una constante con un valor adecuado de $1/2$, como es mencionado ampliamente en la literatura (Stutzman y Thiele, 2012). El motivo principal para elegir este valor se encuentra relacionado con

los efectos de acoplamiento mútuo que se manifiestan cuando dos o más elementos de antena se encuentran en una posición cercana entre sí.

La intención es aplicar este proceso de optimización a una solución óptima global obtenida a partir de una búsqueda exhaustiva mono-objetivo en un espacio de soluciones ordenado de manera lexicográfica, con una separación uniforme de $\lambda/2$. La solución óptima global se utiliza posteriormente como entrada de un algoritmo evolutivo multi-objetivo encargado de generar un frente de Pareto con el compromiso entre SLL y FNBW realizando variaciones en la distancia d dentro de un intervalo de número reales dado por $0.45\lambda \leq d \leq \lambda/2$.

4.4.2. Agrupaciones de fases

Los arreglos de antenas lineales en fase, que utilizan desfasadores digitales en su circuito, operan con valores de fase discretos definidos por las tablas de verdad de los desfasadores de r -bits. Lo que significa que un desfasador de 6-bits permite una resolución de $2^6 = 64$ diferentes valores de fase. Debido a esto, los valores reales de fase del subarreglo deben ser discretizados, reemplazando el valor de fase real por el valor discreto más cercano a la tabla de verdad del desfasador, como se muestra en la Tabla 7.

Tabla 7. Tabla de verdad de un desfasador convencional (HMC647ALP6E de Analog Devices). Cualquier combinación de los estados generará un desfasamiento aproximadamente igual a la suma de los bits seleccionados.

Bit 1	Bit 2	Bit 3	Bit 4	Bit 5	Bit 6	Desfase (grados)
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	5.625
0	1	0	0	0	0	11.25
0	0	1	0	0	0	22.5
0	0	0	1	0	0	45.0
0	0	0	0	1	0	90.0
0	0	0	0	0	1	180.0
1	1	1	1	1	1	354.375

Algunas técnicas que se enfocan en reducir la cantidad de desfasadores utilizados por el arreglo de antenas se encuentran relacionadas con las asignaciones de las excitaciones de fase de los subarreglos. Existen casos en donde las soluciones contienen dos o más subarreglos que cuentan con valores de fase cercanos entre sí, por

lo que estos podrían compartir la misma red de alimentación de fase, sin afectar el rendimiento del arreglo de manera considerable.

Para reducir la cantidad de desfasadores utilizados por el circuito se introduce el siguiente método que consiste en localizar valores de excitaciones de fase cuya diferencia sea menor a la de una cota establecida, una vez que esto se cumpla, se pueden generar nuevas redes de alimentación para los subarreglos que permitan compartir un mismo valor de fase entre dos o más subarreglos del circuito.

4.4.3. Discretización de fases

Existen circunstancias en donde la baja resolución de los desfasadores produce cambios considerables en el patrón de radiación del arreglo, debido a que los valores reales de fase no logran ser aproximados de manera adecuada. Sin embargo, los desfasadores de mayor resolución permiten, en algunos casos, mejorar el rendimiento del arreglo en contraste con el uso de los valores de fase reales obtenidos por los centros de fase D_i , o con el uso de desfasadores de menor resolución.

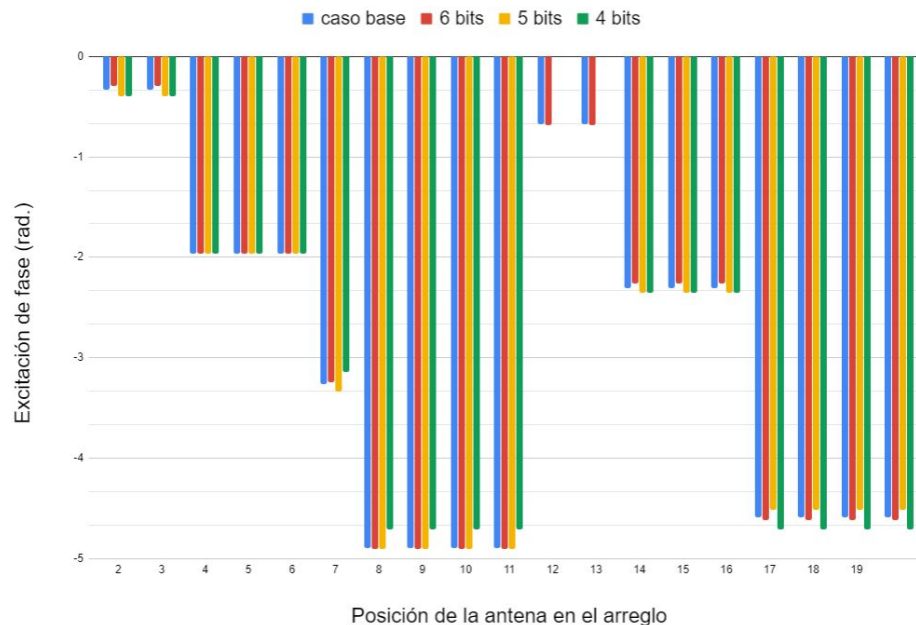


Figura 29. Excitaciones de fase de un arreglo $s = [2, 3, 1, 4, 2, 3, 4]$, con $N = 19$. En color azul, se observan las fases dadas por los centros de fase D_i del caso base. En color rojo, se muestra la corrección por medio de la discretización de fases utilizando la tabla de verdad de un desfasador de 6-bits. En color amarillo, utilizando un desfasador de 5-bits. En color verde, utilizando un desfasador de 4-bits.

En la Figura 29 se muestran los valores de fase de la secuencia $s = [2, 3, 1, 4, 2, 3, 4]$ (Figura 14), con ángulo de escaneo $\theta = 12$, y distancia uniforme de $d = \lambda/2$. Se observan algunas discrepancias entre las excitaciones de fase de los cuatro casos mostrados en la imagen, debido a la resolución de los desfasadores, que afecta las prestaciones de los arreglos como es mostrado en la Figura 30, en donde el desfasador de 6-bits mejora el rendimiento del arreglo en SLL sobre el caso base (fases teóricas del arreglo con separación de $d = \lambda/2$).

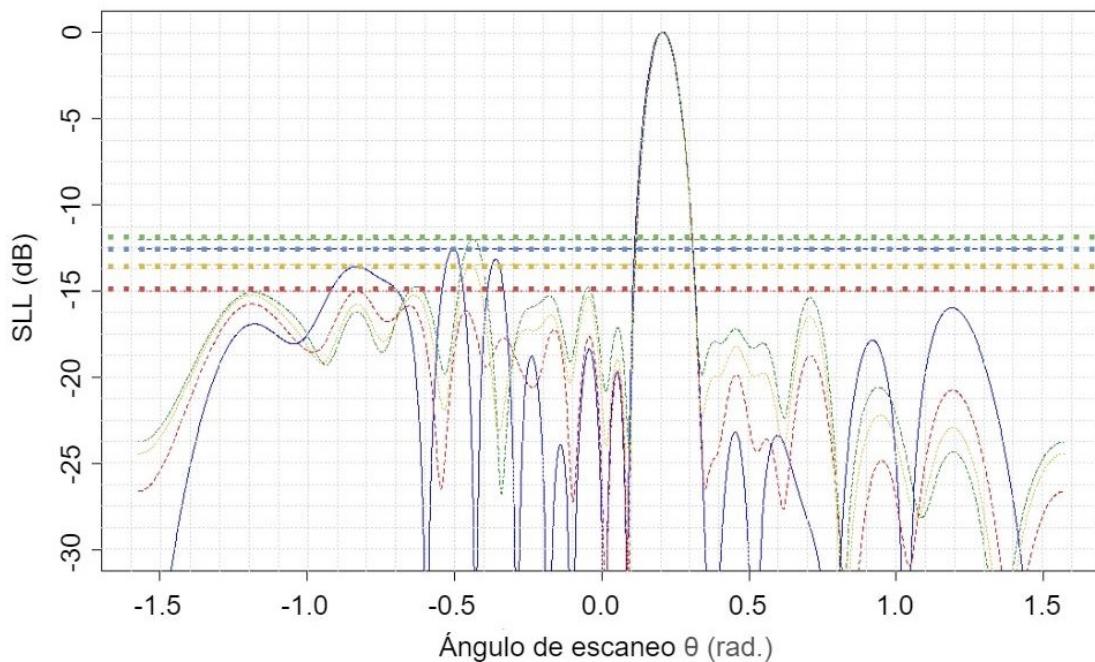


Figura 30. Patrones de radiación con variación en la resolución de los desfasadores, con el mismo código de colores de la gráfica mostrada en la Figura 29, que muestra un cambio en el rendimiento del arreglo relacionado a la discretización de los valores de excitación de fase que alimentan a los elementos de antena.

Capítulo 5. Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos a partir de la implementación de la metodología descrita en el Capítulo 4. Se utilizó un sistema de cómputo i5-2410M-2.30GHz de 4 núcleos y 8 GB de memoria RAM para la ejecución de los algoritmos de búsqueda y optimización mencionados en este capítulo. El tiempo de ejecución de las evaluaciones de rendimiento para cada diseño de arreglo incrementa de manera progresiva con el número de subarreglos en el circuito dado por n .

5.1. Optimización exhaustiva

La primera parte de los resultados se obtiene de la ejecución de un algoritmo de búsqueda exhaustiva para diferentes casos del problema. Las *restricciones* designadas para realizar el Experimento 1 son mencionadas en (Avser *et al.*, 2016). Posteriormente, en el Experimento 2 se analizan otros espacios explorados de manera exhaustiva, que a diferencia del primer experimento, ahora se utiliza un enfoque multi-objetivo para calcular los frentes aproximados de Pareto (APF) correspondientes al criterio del problema *sin restricciones* mencionado en el Capítulo 4.

5.1.1. Experimento 1: optimización mono-objetivo con restricciones

El algoritmo de ordenamiento (Nayuki, 2018) presentado en el Capítulo 3, fue programado en Java para generar una lista de secuencias en orden lexicográfico de tamaño m en la ecuación (26). Esto es, restringir la cantidad máxima de elementos de antena j que componen a cada subarreglo K_j presente en la secuencia. El algoritmo de búsqueda exhaustiva evalúa cada una de las secuencias en tiempo t , y encuentra un óptimo global s^* empleando una función mono-objetivo (32) para un tiempo total de ejecución (*exec*) mostrado en la Tabla 8.

En algunos casos, el tamaño del espacio de soluciones es demasiado grande para ser explorado por completo, lo que lleva a estimar el tiempo de ejecución mediante evaluaciones parciales del espacio de búsqueda utilizando muestras del tiempo de ejecución de 5,000 evaluaciones de rendimiento; posteriormente, se obtiene un promedio del tiempo de ejecución requerido por cada secuencia para poder calcular una aproximación al tiempo computacional real de la búsqueda.

Tabla 8. Crecimiento del tiempo computacional proporcional al aumento de tamaño de los espacios de búsqueda.

índice	K_2	K_3	K_4	n	m	t (ms)	exec (hrs)
1	4	4	4	12	34,650	15.5	0.15
2	5	5	5	15	756,756	19.1	4.03
3	6	6	6	18	17,153,136	28.8	136.99
4	7	7	7	21	399,072,960	≈ 37.5	$\approx 3,532.01$
5	8	8	8	24	9,465,511,770	≈ 45.5	$\approx 119,633.55$

Posteriormente, se realizaron corridas del algoritmo de búsqueda exhaustiva para los espacios con índice 1, 2, y 3 de la Tabla 8, utilizando los parámetros de diseño $d = \lambda/2$ y $\theta = 12^\circ$. De estas ejecuciones, se obtuvieron los óptimos globales mostrados en la Tabla 9, utilizando la función mono-objetivo $f_1(s^*)$ para SLL, donde el valor de la función de rendimiento de las soluciones óptimas mejora conforme n incrementa su valor, a costa de una disminución de ancho de haz (FNBW), lo que puede ser interpretado como un compromiso entre ambas funciones objetivo.

Tabla 9. Diseños óptimos globales de los espacios con índice 1, 2, y 3 de la Tabla 8.

índice	Óptimo global (s^*)	SLL (dB)	FNBW (rad)
1	[4, 3, 4, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 4]	-13.61	0.156
2	[2, 3, 3, 4, 2, 4, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 4, 4, 3]	-14.45	0.119
3	[3, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 4, 4, 3]	-15.18	0.098

La búsqueda exhaustiva aplicada al espacio con índice 1 mostrado en la Tabla 8 resulta en un óptimo global $s_1^* = [4, 3, 4, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 4]$ con SLL de $f_1(s_1^*) = -13.61$ dB para un tiempo total de ejecución de 8.98 min. En el espacio de soluciones con índice 2 se produce un óptimo global $s_2^* = [2, 3, 3, 4, 2, 4, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 4, 4, 3]$ con SLL de $f_1(s_2^*) = -14.45$ dB, con un tiempo de ejecución aproximado de 4 horas. Finalmente, la exploración del espacio con índice 3 resulta en un óptimo global $s_3^* = [3, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 4, 4, 3]$ con SLL de $f_1(s_3^*) = -15.18$ dB y tiempo de ejecución de 2.53 días.

5.1.2. Experimento 2: optimización exhaustiva sin restricciones

El siguiente experimento consiste en calcular de manera exhaustiva los frentes de Pareto de los casos $m = 4^n$ para el intervalo $6 \leq n \leq 12$, con una separación uniforme de $d = \lambda/2$, y ángulo de escaneo de $\theta = 12^\circ$; la razón de que se establezca el límite $n \leq 12$ se debe al incremento del tiempo computacional en la ejecución del algoritmo para los casos cuando $n \geq 13$. Se dice que no existe *restricción* en el número de posibles subarreglos K_j de tamaño $1 \leq j \leq 4$ que pueden formar parte del arreglo, considerando que $n = \sum K_j$. Tomando en cuenta un solo valor de rendimiento (SLL) del enfoque mono-objetivo, se obtiene una solución óptima global por caso, como se muestra en la Tabla 10.

Tabla 10. Soluciones óptimas globales del enfoque mono-objetivo (SLL), para los casos *sin restricciones* de $6 \leq n \leq 12$, con ángulo de escaneo de $\theta = 12^\circ$.

n	Óptimo global (s^*)	SLL (dB)	FNBW (rad)
6	[1, 1, 1, 1, 1, 1]	-14.50	0.780
7	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]	-15.76	0.691
8	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2]	-17.17	0.576
9	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2]	-18.47	0.518
10	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2]	-19.54	0.471
11	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2]	-20.44	0.431
12	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2]	-20.47	0.398

Se realizaron los respectivos cálculos del caso *sin restricciones*, esta vez desde una perspectiva multi-objetivo con los valores de SLL y FNBW en conflicto. Se utilizaron los casos del intervalo $6 \leq n \leq 12$ con un ángulo de escaneo a *broadside* $\theta = 0^\circ$, para obtener de esta manera siete frentes de Pareto (ver sección 4.2.2), mostrados en la Figura 31. Se calcularon un total de ciento doce frentes de Pareto variando los ángulos de escaneo en el intervalo $0^\circ \leq \theta \leq 15^\circ$, mismos que serán utilizados en experimentos posteriores como información adicional para los algoritmos de búsqueda de soluciones.

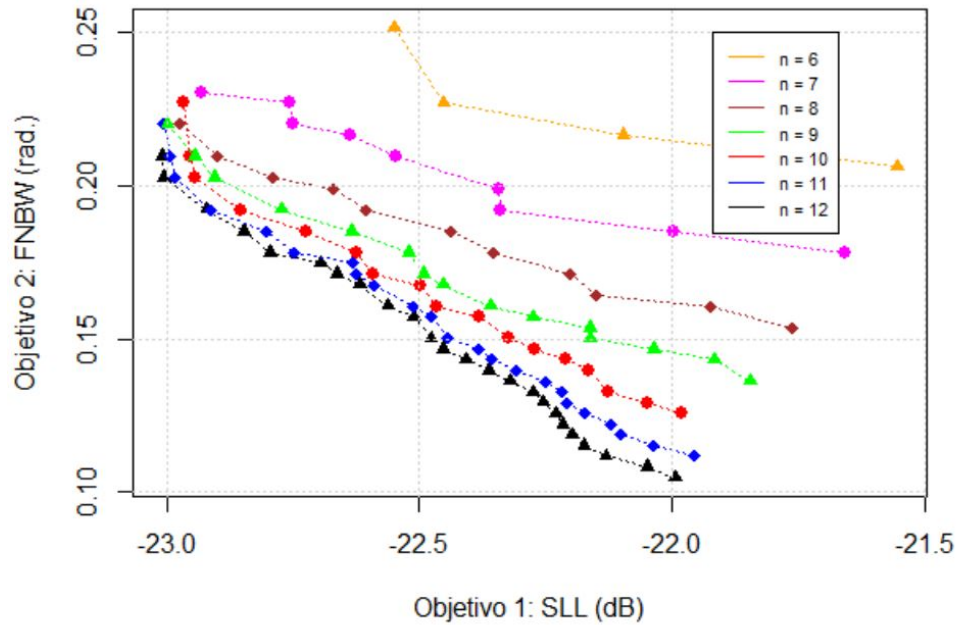


Figura 31. Frentes de Pareto del problema *sin restricciones* (4^n) para los casos $6 \leq n \leq 12$, con separación entre elementos de $d = \lambda/2$, y ángulo de escaneo a 0° (*broadside*). La calidad de las soluciones incrementa con el aumento en el número de subarreglos en el arreglo.

5.2. Metaheurísticas evolutivas

En la siguiente sección se introduce una biblioteca de cómputo evolutivo para optimización multi-objetivo escrita en Java (*MOEA Framework*), donde se modifica la implementación de una versión del algoritmo de optimización SMPSO para adaptarlo al problema de diseño de arreglos lineales. En la primera parte, se analiza el caso *sin restricciones* desde un enfoque multi-objetivo evolutivo; posteriormente, se utilizan los frentes de Pareto generados en el Experimento 2 para interpolar una función que describa la distribución probabilística de los subarreglos en los frentes, empleando una matriz PPM definida en la sección 4.3.2 del Capítulo 4. Por último, se realizan experimentos con una nueva herramienta visual para buscar información implícita en la distribución de los elementos de antena en los subarreglos.

5.2.1. Experimento 3: optimización multi-objetivo sin restricciones

Considere un espacio de búsqueda de tamaño $m = 4^{12}$ que contiene todas las posibles combinaciones de 12-tuplas (caso *sin restricciones*). Un algoritmo evolutivo de

optimización multi-objetivo (SMPSO) fue ejecutado en un tiempo de 26.75 min. durante 100,000 iteraciones. Para ilustrar la *no-dominancia* entre soluciones, la solución $s_1 = [2, 3, 3, 2, 3, 2, 4, 3, 2, 2, 2, 3]$ fue seleccionada del frente aproximado de Pareto (APF) satisfaciendo $f_1(s_1) \leq f_1(s_1^*)$. Ambas soluciones (s_1 y s_1^*) reportaron el mismo valor de FNBW de 0.1571 rad., sin embargo, la solución s_1^* domina débilmente a s_1 , con un valor de SLL de -13.607 dB para s_1^* , en contraste con -13.595 dB para s_1 , a expensas de una diferencia de 5 antenas por diseño, como se muestra en la Tabla 11.

Tabla 11. Soluciones con rendimiento similar. La solución óptima s_1^* del Experimento 1, y la solución s_1 extraída de un APF generado por el algoritmo SMPSO en 100,000 iteraciones.

Secuencia	SLL (dB)	FNBW (rad.)	N	K_2	K_3	K_4	m
$s_1 = [2, 3, 3, 2, 3, 2, 4, 3, 2, 2, 2, 3]$	-13.60	0.157	31	6	5	1	5,544
$s_1^* = [4, 3, 4, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 4]$	-13.61	0.157	36	4	4	4	34,650

5.3. Patrones de diseño

La siguiente serie de experimentos se enfoca en demostrar la existencia de un patrón de diseño en arreglos de antenas lineales. Esta idea surge a partir de la creación de los *logos* mostrados en la Figura 26 de la sección 4.3.2 del Capítulo 4, planteando la posibilidad de que exista un ordenamiento estratégico que favorezca las prestaciones del arreglo dado un conjunto de parámetros de diseño específicos. Se planea demostrar lo anterior con el uso de herramientas visuales que permitan la identificación de distribuciones de subarreglos *favorables*, y la influencia que tienen los subarreglos aledaños a un punto específico del arreglo, denotado por el índice i .

5.3.1. Experimento 4: ordenamiento de subarreglos por distribución probabilística

En este experimento se generan secuencias de números enteros siguiendo un *patrón de diseño* estratégico, obtenido a partir del análisis de las distribuciones de subarreglos en soluciones candidatas que forman los frentes de Pareto del intervalo $6 \leq n \leq 10$, calculados en el Experimento 2. Para lograr esto, se calcula una matriz PPM presentada en la ecuación (41) (ver sección 4.3.2), por cada uno de los frentes de Pareto con ángulo de escaneo en el intervalo $0^\circ \leq \theta \leq 12^\circ$, y separación uniforme de

$$d = \lambda/2.$$

En el caso de *broadside* $\theta = 0^\circ$, se tomaron cinco matrices PPM generadas utilizando el intervalo $6 \leq n \leq 10$, las cuales fueron escaladas por medio de los cambios de pendiente de las funciones de probabilidad, obtenidas al graficar los valores de las matrices PPM. Posteriormente, se calculó un promedio de las matrices escaladas para consolidar una sola matriz PPM del caso $n = 11$, que será utilizada para determinar la probabilidad de mutación de los subarreglos durante las iteraciones del algoritmo evolutivo.

Tabla 12. Matriz PPM resultante de los casos $6 \leq n \leq 10$, para $n = 11$, y con ángulo de escaneo a *broadside* $\theta = 0^\circ$. En negritas se muestra la mayor probabilidad de encontrarse un subarreglo K_j en la posición i del arreglo.

	i										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
K_1	0.01	0.18	0.18	0.12	0.08	0.06	0.08	0.12	0.18	0.18	0.01
K_2	0.01	0.29	0.53	0.20	0.14	0.01	0.14	0.20	0.53	0.29	0.01
K_3	0.01	0.33	0.23	0.12	0.09	0.06	0.09	0.12	0.23	0.33	0.01
K_4	0.97	0.20	0.06	0.56	0.69	0.87	0.69	0.56	0.06	0.20	0.97

El algoritmo evolutivo de optimización multi-objetivo SMPSO utiliza un operador de mutación descrito en (Deb, 2001) denominado PM, mismo que cuenta con una probabilidad de mutación de $1/n$ por subarreglo. Este operador se encuentra diseñado para elegir un nuevo valor de subarreglo con base en una distribución gaussiana, que genera un nuevo valor relativamente cercano al valor mutado. A diferencia de la distribución gaussiana, se propone utilizar las distribuciones de probabilidad dadas por la matriz PPM de la Tabla 12, que permiten generar una distribución de probabilidad *dinámica* asociada directamente a una posición particular del arreglo en i .

Tabla 13. Configuración del Experimento 4.

n	θ	d	Población	Iteraciones	Semillas
11	0°	$\lambda/2$	100	10,000	40

Se introduce el operador de mutación PDF (*Probability-Density Function*), que sus-

tituye al operador PM en el algoritmo SMPSO de Nebro *et al.* (2009), para crear una variante orientada al problema investigado (PDF-SMPSO); adicionalmente, se decide mantener la probabilidad de mutación por subarreglo de $1/n$, lo que implica la alteración promedio de $1/n$ subarreglos en la solución a mutar. En la Tabla 13 se muestra la configuración inicial de los algoritmos evolutivos que serán utilizados en este experimento, a excepción de algunos casos previamente especificados en donde se incrementa la población del algoritmo.

Tabla 14. Resultados de hipervolumen para cuarenta corridas de los algoritmos, utilizando la configuración de la Tabla 13, a excepción de PDF-SMPSO* con población de 150 individuos, y PDF-SMPSO** con población de 200 individuos.

	Hipervolumen					
	NSGA-II	MOEA/D	SMPSO	PDF-SMPSO	PDF-SMPSO*	PDF-SMPSO**
Min.	0.5042	0.3844	0.5664	0.5871	0.5617	0.5776
Med.	0.5860	0.5530	0.5910	0.5909	0.5929	0.5932
Max.	0.5922	0.5831	0.5949	0.5959	0.5954	0.5954
	Distancia Generacional					
	NSGA-II	MOEA/D	SMPSO	PDF-SMPSO	PDF-SMPSO*	PDF-SMPSO**
Min.	0.0012	0.0044	0.0008	0.0007	0.0005	0.0007
Med.	0.0039	0.0141	0.0029	0.0028	0.0021	0.0016
Max.	0.0114	0.0341	0.0091	0.0035	0.0098	0.0076
	Indicador Epsilon Aditivo					
	NSGA-II	MOEA/D	SMPSO	PDF-SMPSO	PDF-SMPSO*	PDF-SMPSO**
Min.	0.0169	0.0448	0.0164	0.0107	0.0109	0.0164
Med.	0.0618	0.1379	0.0388	0.0342	0.0305	0.0191
Max.	0.2918	0.0341	0.0989	0.0643	0.1096	0.0738
	Spacing					
	NSGA-II	MOEA/D	SMPSO	PDF-SMPSO	PDF-SMPSO*	PDF-SMPSO**
Min.	0.0145	0.0224	0.0136	0.0207	0.0138	0.0196
Med.	0.0242	0.0378	0.0255	0.0274	0.0256	0.0256
Max.	0.0316	0.1191	0.0348	0.0320	0.0334	0.0347

En la Tabla 14 se muestran los resultados comparativos de cuatro algoritmos evolutivos de optimización multi-objetivo utilizados para este caso del problema. Los algoritmos son: NSGA-II (Deb *et al.*, 2002), MOEA/D (Zhang y Li, 2007), SMPSO (Nebro *et al.*, 2009), y PDF-SMPSO (variación de SMPSO utilizando el operador de mutación PDF). En algunos casos, se decide aumentar la población de 100 individuos, a 150 (PDF-SMPSO*) ó 200 (PDF-SMPSO**); lo anterior para evitar un fenómeno conocido como *convergencia prematura* del algoritmo, reduciendo de esta manera la presencia de *presión selectiva* en la población (Eiben y Smith, 2008).

5.3.2. Experimento 5: indicador de densidad

En el siguiente experimento se introduce una herramienta visual denominada: *indicador de densidad*, con el propósito de generar información adicional sobre la distribución estratégica de los subarreglos dado un caso del problema, como es mencionado en el Capítulo 4. La primera parte de este experimento consiste en elegir dos soluciones con valores de rendimiento similares, con la finalidad de calcular sus respectivos indicadores de densidad para visualizar la distribución de los subarreglos en el arreglo.

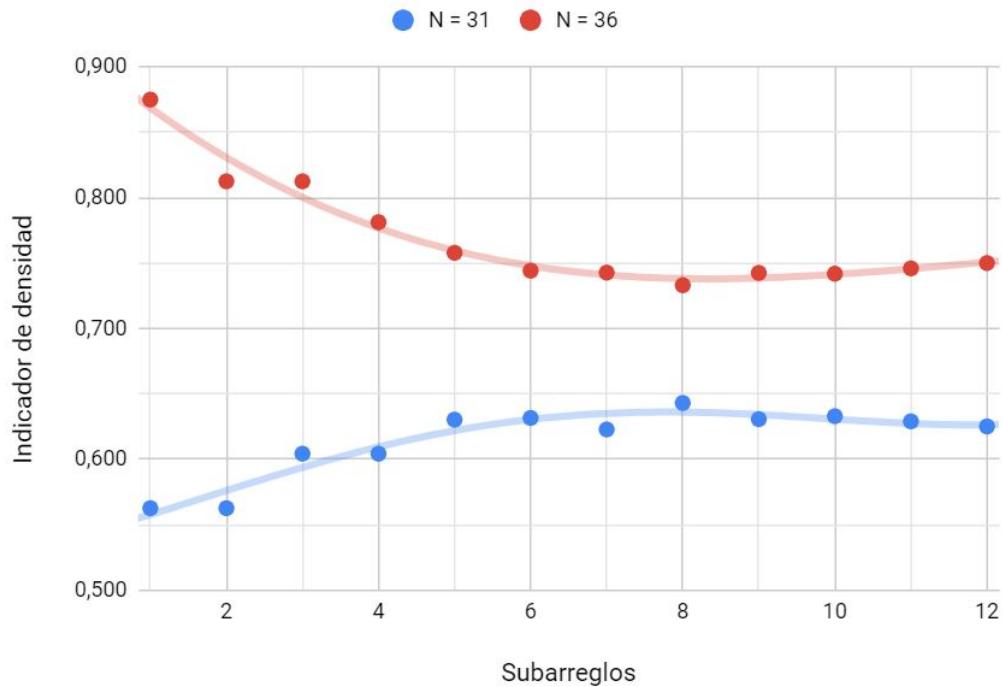


Figura 32. Indicadores de densidad de las soluciones $s_1^* = [4, 3, 4, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 4]$ y $s_1 = [3, 2, 2, 2, 3, 4, 2, 3, 2, 3, 3, 2]$ (el orden de los elementos en la solución s_1 se encuentra invertido).

Las soluciones elegidas corresponden a s_1^* y s_1 mostradas en la Tabla 11 del Experimento 3, con una variación de $0.01 \pm$ dB de SLL, un mismo valor de FNBW, y una diferencia de cinco elementos de antena por arreglo. Por cuestiones de visualización, se decide invertir el orden de los subarreglos en la solución s_1 , debido a que en (Avser *et al.*, 2016) se menciona una supuesta igualdad de rendimiento en secuencias espejo (secuencias con subarreglos ordenados de manera inversa). En la Figura 32 se muestran los indicadores de densidad obtenidos para las soluciones s_1^* y s_1 .

Tabla 15. Cuatro soluciones con $N = 24$, elegidas de los frentes de Pareto del intervalo $7 \leq n \leq 10$, con ángulo de escaneo a *broadside* $\theta = 0^\circ$.

Índice	n	Solución candidata	SLL (dB)	FNBW (rad)
11	7	[4, 2, 3, 4, 4, 3, 4]	-22.55	0.2094
12	8	[4, 2, 1, 4, 4, 3, 2, 4]	-22.90	0.2094
13	9	[4, 1, 1, 3, 4, 4, 1, 2, 4]	-22.94	0.2094
14	10	[4, 1, 1, 1, 2, 4, 4, 2, 1, 4]	-22.95	0.2094

En la siguiente parte se eligen cuatro soluciones de los frentes de Pareto obtenidos en el Experimento 2 (ver sección 5.1.2), con el criterio $N = 24$. Estas soluciones producen el mismo valor de FNBW, con variaciones en la cantidad de subarreglos n y SLL. En la Tabla 15 se muestran cuatro soluciones candidatas que pertenecen al intervalo $7 \leq n \leq 10$, con ángulo de escaneo a *broadside* $\theta = 0^\circ$. En la Figura 33 se muestran los indicadores de densidad de las cuatro soluciones, con líneas de tendencia generadas por una interpolación polinómica de grado 4 de los puntos generados por el indicador. El grado del polinomio fue elegido de manera arbitraria, como aquel que genera una mejor muestra visual de las distribuciones entre los grados 2, 3, 4 y 5.

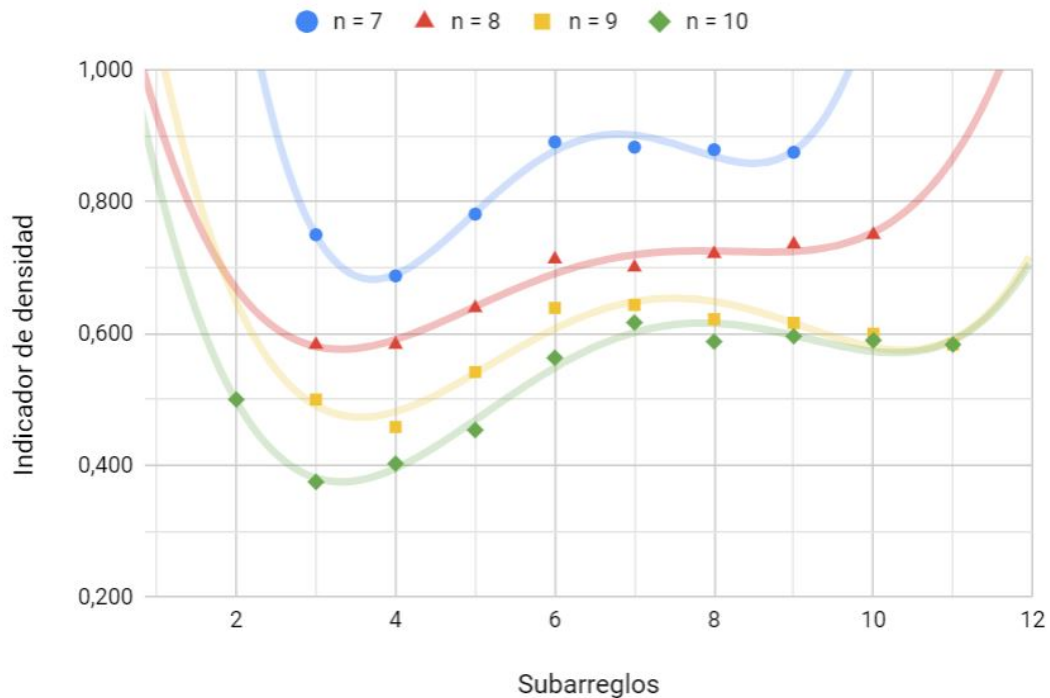


Figura 33. Indicadores de densidad de las secuencias: En azul, $s_{11} = [4, 2, 3, 4, 4, 3, 4]$. En rojo, $s_{12} = [4, 2, 1, 4, 4, 3, 2, 4]$. En amarillo, $s_{13} = [4, 1, 1, 3, 4, 4, 1, 2, 4]$, En verde, $s_{14} = [4, 1, 1, 1, 2, 4, 4, 2, 1, 4]$.

Tabla 16. Cuatro soluciones candidatas con $N = 25$, extraídas del frente de Pareto del caso $n = 10$, $\theta = 10^\circ$.

Índice	Solución candidata	SLL (dB)	FNBW (rad)
21	[4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 2]	-16.18	0.2147
22	[4, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 3]	-16.02	0.2094
23	[3, 3, 1, 4, 2, 2, 2, 3, 3, 2]	-15.80	0.2025
24	[3, 2, 2, 4, 2, 2, 2, 3, 2, 3]	-15.60	0.2007

Posteriormente, se eligieron cuatro soluciones del frente de Pareto del caso $n = 10$, con ángulo de escaneo de $\theta = 10^\circ$, y $N = 25$. A pesar de contar con la misma cantidad de antenas en las cuatro soluciones, se pueden observar variaciones en los valores de FNBW, con un cambio promedio entre soluciones de aproximadamente ± 0.19 dB en SLL. En la Figura 34 se muestran cuatro indicadores de densidad de las soluciones mostradas en la Tabla 16, con una línea de tendencia generada por una interpolación polinómica de grado 4. Se puede observar que existen dos pares de soluciones con líneas de tendencia similares (s_{21} - s_{22} , y s_{23} - s_{24}).

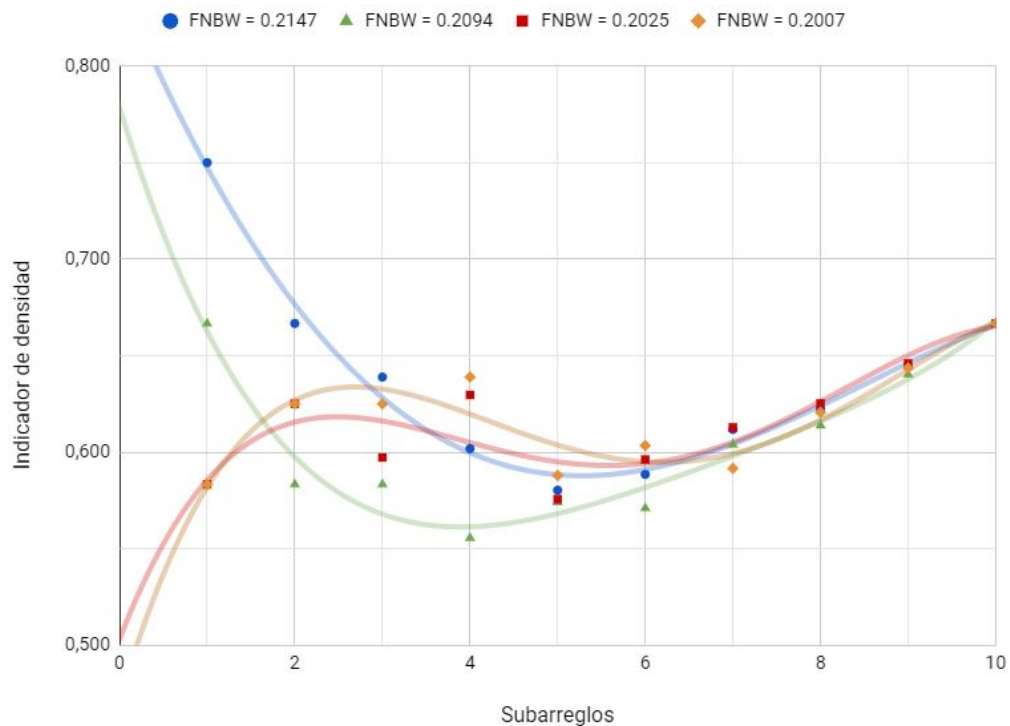


Figura 34. Indicadores de densidad de las secuencias: En azul, $s_{21} = [4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 2]$. En verde, $s_{22} = [4, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 3]$. En rojo, $s_{23} = [3, 3, 1, 4, 2, 2, 2, 3, 3, 2]$, En café, $s_{24} = [3, 2, 2, 4, 2, 2, 2, 3, 2, 3]$.

5.3.3. Experimento 6: generación de población y mutación por composiciones

En la primera parte de este experimento se utilizan los frentes de Pareto del caso *sin restricciones* para $6 \leq n \leq 12$, con ángulo de escaneo a *broadside* $\theta = 0^\circ$. Se utiliza un algoritmo contador de subarreglos K_j para calcular las restricciones K_1 , K_2 , K_3 , y K_4 que forman los espacios de búsqueda contenedores de las secuencias candidatas. La intención es encontrar la posición a la que corresponde cada uno de los espacios de soluciones dentro de su respectiva distribución de subproblemas (composiciones) mostrados en la sección 3.3.2 del Capítulo 3. El porcentaje correspondiente a la posición de las composiciones en la distribución es calculado por $(c/C_k(n)) \cdot 100$, donde c corresponde a la c -ésima composición en la distribución, y $C_k(n)$ al número de composiciones de n subarreglos con k restricciones por distribución.

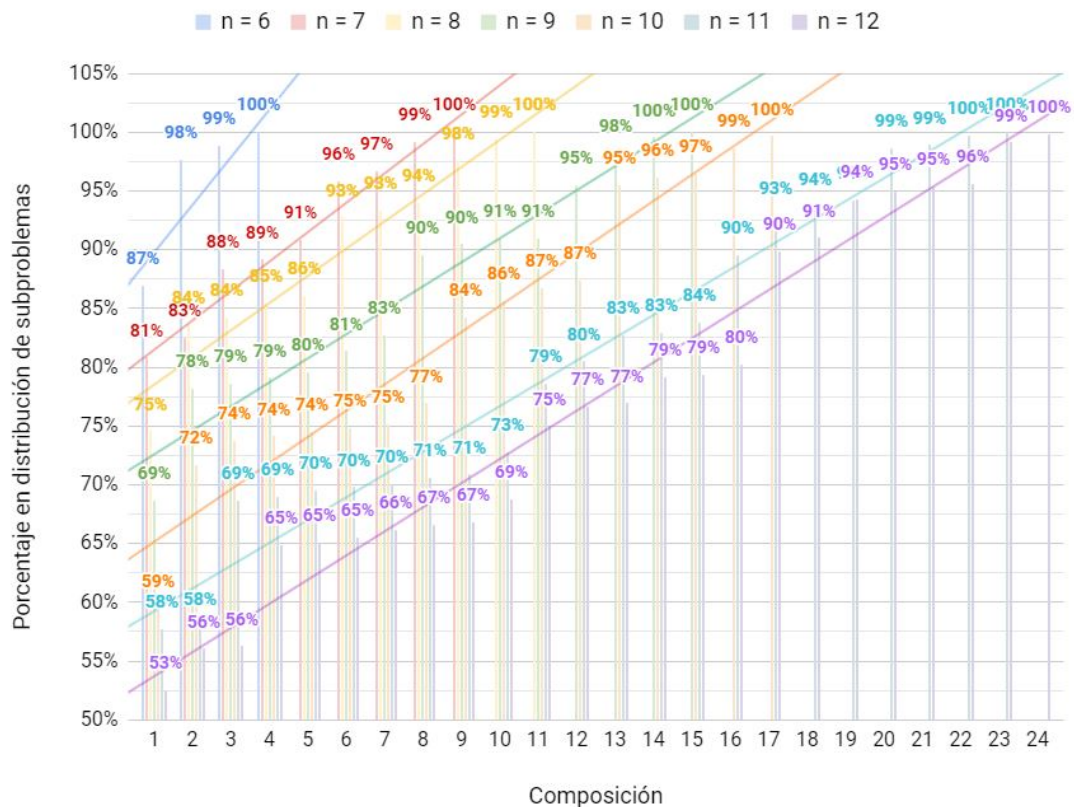
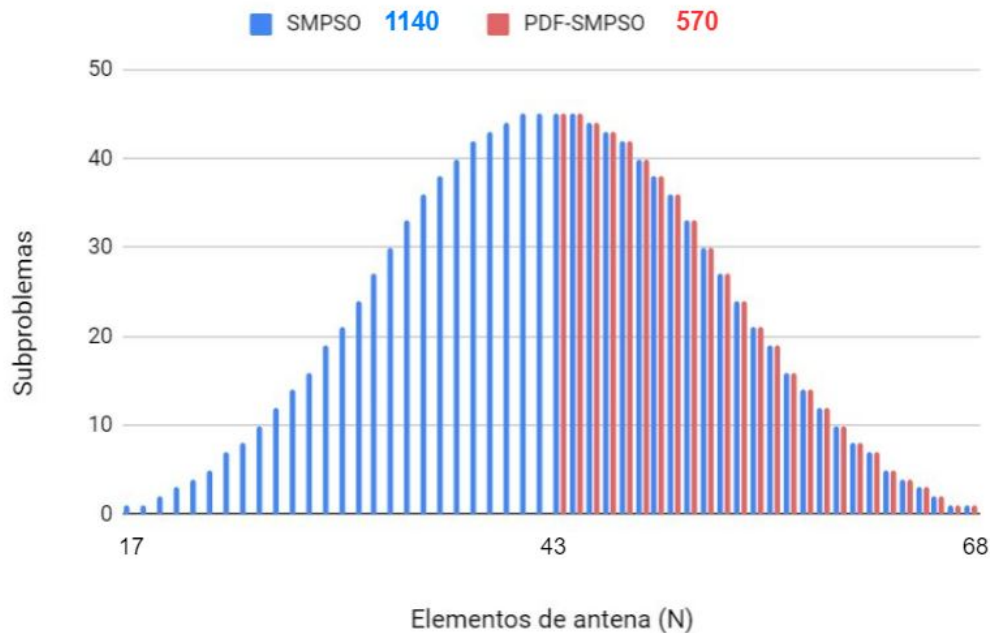


Figura 35. Porcentajes correspondientes a la posición de una composición con índice c dentro de su respectiva distribución de subproblemas para los casos $6 \leq n \leq 12$ con $\theta = 0^\circ$.

Tabla 17. Configuración del Experimento 6.

n	θ	d	Población	Iteraciones	Semillas
17	0°	$\lambda/2$	100	20,000	30

Se determina que las soluciones candidatas provienen de los espacios de búsqueda localizados en el intervalo [50%, 100%] de las distribuciones de subproblemas, como se muestra en la Figura 35. Se decide modificar el operador de mutación PDF presentado en el Experimento 4 con el propósito de dotar al algoritmo con información adicional sobre el problema, permitiendo *guiar* la búsqueda al determinar los subarreglos K_j permisibles en los arreglos. A diferencia del algoritmo SMPSO, donde la probabilidad de los subarreglos K_j es uniforme, el algoritmo PDF-SMPSO utiliza una lista de composiciones de tamaño $C_k(n)/2$, que es empleada para generar soluciones apegadas a las restricciones de la lista. En otras palabras, las soluciones del algoritmo SMPSO pueden contar con $M = [17, 68]$ elementos de antena, mientras que el algoritmo PDF-SMPSO permite soluciones con $M = [43, 68]$ elementos de antena. La configuración de parámetros iniciales del experimento se muestra en la Tabla 17.

**Figura 36.** Distribuciones de subproblemas para los algoritmos: SMPSO (azul), PDF-SMPSO (rojo).

En la Figura 36 se muestra la distribución de subproblemas utilizados por el algoritmo de optimización SMPSO (azul), y el algoritmo PDF-SMPSO (rojo), con una diferencia de quinientos setenta subproblemas. Por lo tanto, el algoritmo PDF-SMPSO utiliza solamente las restricciones en K_j que pertenecen al intervalo $43 \leq N \leq 68$, tal que $N = \sum_{j \in N'} (K_j \cdot j)$, mientras que el algoritmo SMPSO explora espacios de soluciones en el intervalo $17 \leq N < 43$, generando soluciones *desfavorables*, para este caso del problema ($\theta = 0^\circ$) donde las mejores soluciones tienden a conformarse por lo menos de $N = N_{max}/2$ elementos de antena.

Tabla 18. Resultados del Experimento 6.

	Hipervolumen		Distancia Generacional	
	SMPSO	PDF-SMPSO	SMPSO	PDF-SMPSO
Min.	0.5299	0.6460	0.02143	0.0161
Med.	0.5712	0.6725	0.03233	0.0210
Max.	0.6119	0.7007	0.1219	0.0367
	Indicador Épsilon Aditivo		Spacing	
	SMPSO	PDF-SMPSO	SMPSO	PDF-SMPSO
Min.	0.0911	0.007	0.0105	0.0055
Med.	0.1765	0.0588	0.0215	0.0176
Max.	0.2354	0.0709	0.1288	0.0289

En la Tabla 18 se muestran los resultados del experimento, donde se observa que el algoritmo PDF-SMPSO es superior al algoritmo SMPSO en todos los indicadores utilizados por las pruebas de rendimiento y significancia estadística que brindan las librerías de *MOEA Framework*; con los valores de hipervolumen (máx: $0.6725 > 0.5712$), distancia generacional (mín: $0.0210 < 0.0323$), indicador de épsilon aditivo (mín: $0.0588 < 0.1765$), y spacing (mín: $0.0176 < 0.0215$). En la Figura 37 se muestran dos frentes aproximados de Pareto consolidados, producto de las treinta corridas de cada algoritmo, conteniendo la misma cantidad de soluciones candidatas por APF consolidado (16 soluciones).

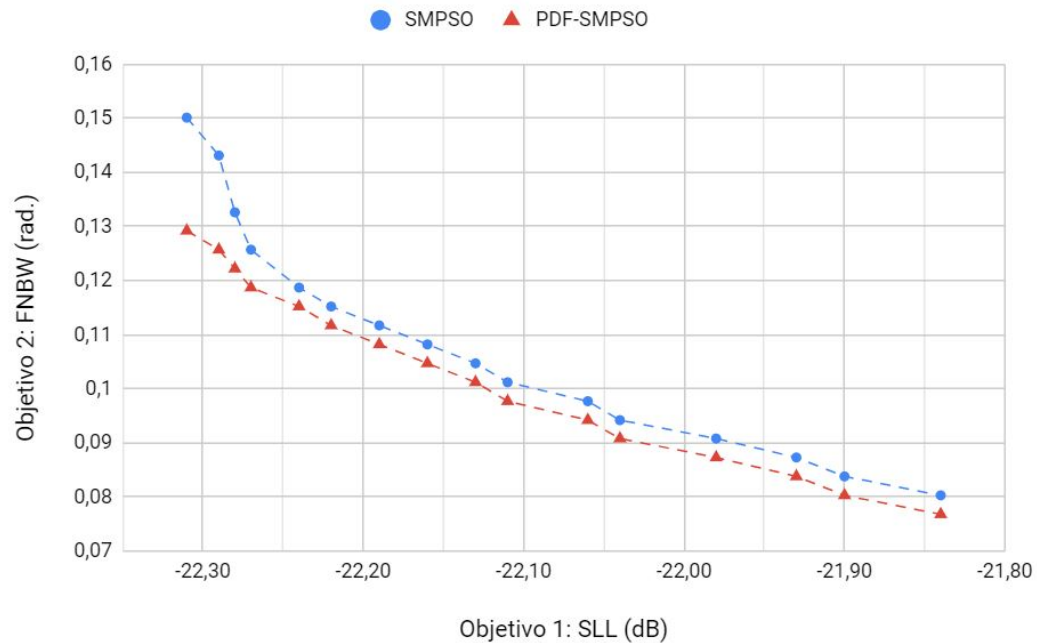


Figura 37. Frentes aproximados de Pareto consolidados durante treinta corridas de los algoritmos: SMPSO (azul), y PDF-SMPSO (rojo).

5.4. Técnicas adicionales de optimización

En la siguiente sección se desea mejorar el rendimiento en SLL de una secuencia óptima del problema dado por: $d = \lambda/2$, $n = 12$, $K_2 = 6$, $K_3 = 6$, $\theta = 12^\circ$; esto se logra mediante un cambio en la formulación del problema, permitiendo una variación de la separación de elementos en el intervalo $[0.45\lambda, \lambda/2]$, manteniendo fijos el resto de los parámetros y $s_{op} = [3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 3]$. A pesar de que esto puede generar efectos indeseados de *acoplamiento mutuo*, como se menciona en (Balanis, 2012), se propone que puedan existir algunas excepciones dentro del intervalo $[0.45\lambda, \lambda/2]$. Posteriormente, se utilizan otros procedimientos para optimizar los valores de las excitaciones de fase de la misma secuencia. Adicionalmente, se realiza la optimización de la distancia y de las excitaciones de fase del arreglo, alternando entre el orden de ejecución de los algoritmos de optimización de distancia y fase.

5.4.1. Experimento 7: variación de la separación uniforme entre elementos

Para realizar el siguiente experimento se elige la solución óptima obtenida por un algoritmo mono-objetivo (SLL) de búsqueda exhaustiva, del espacio con restricciones $K_2 = 6$, $K_3 = 6$, $m = 924$, $\theta = 12^\circ$ y $d = \lambda/2$. Esta solución es representada por la secuencia $s_{op} = [3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 3]$ con SLL = -14.189 dB y FNBW = 0.175 radianes. De la cual, se optimiza el valor de la separación uniforme entre elementos de antena dentro del intervalo $0.45\lambda \leq d \leq \lambda/2$. Con esto, se reducen las variables utilizadas por el algoritmo evolutivo, pasando de n variables de decisión a un solo número real.

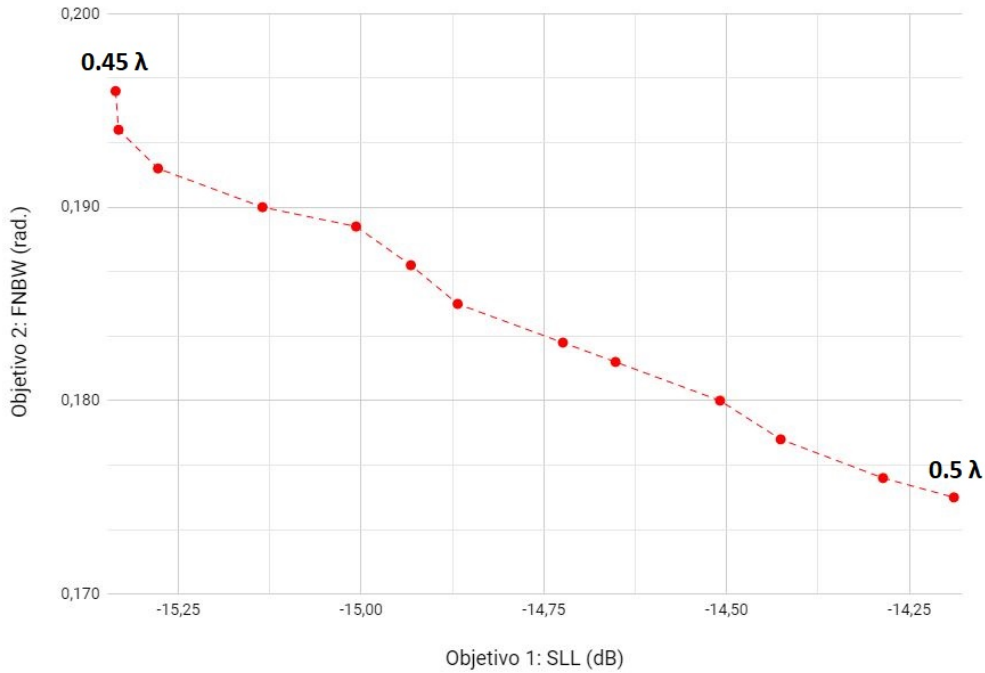
Tabla 19. Frente aproximado de Pareto obtenido por el algoritmo SMPSO, con variación en la separación uniforme entre elementos de antena utilizando la solución óptima $s_{op} = [3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 3]$ del caso $K_2 = 6$, $K_3 = 6$, $n = 12$, $\theta = 12^\circ$.

Índice	SLL (dB)	FNBW (rad.)	λ
1	-15.336	0.196	0.45
2	-15.332	0.194	0.45017
3	-15.278	0.192	0.45260
4	-15.135	0.190	0.45907
5	-15.077	0.189	0.46171
6	-14.932	0.187	0.46834
7	-14.868	0.185	0.47127
8	-14.724	0.183	0.47800
9	-14.652	0.182	0.48134
10	-14.509	0.180	0.48807
11	-14.426	0.178	0.49197
12	-14.286	0.176	0.49860
13	-14.189	0.175	0.5

En la Tabla 19 se muestra un APF generado utilizando un algoritmo evolutivo de optimización multi-objetivo SMPSO. Se puede observar que existe una estrecha relación entre SLL, FNBW, y la separación de los elementos de antena. Sin embargo, a pesar de que el mejor valor de SLL es obtenido cuando $d = 0.45\lambda$, es necesario tomar en cuenta los efectos de *acoplamiento mutuo* mencionados en (Balanis, 2012). En la Figura 38 se muestra el APF obtenido durante 40,000 iteraciones del algoritmo de optimización SMPSO, donde se observa una variación promedio por solución de ± 0.098 dB en SLL, y ± 0.0018 rad. en FNBW, a raíz de un cambio promedio en la separación uniforme de $\pm 0.0046\lambda$, como se muestra en la Tabla 20.

Tabla 20. Razón de cambio promedio en SLL, FNBW, y separación (λ), de las soluciones en la Tabla 19.

SLL (dB)	FNBW (rad.)	λ
± 0.098	± 0.0018	± 0.0046

**Figura 38.** Frente aproximado de Pareto (APF) de los datos presentados en la Tabla 19.

5.4.2. Experimento 8: asignación de fases

En el siguiente experimento se realizan variaciones en las excitaciones de fase de los subarreglos de una solución óptima del problema definido por: $d = \lambda/2$, $n = 12$, $K_2 = 6$, $K_3 = 6$, $\theta = 12^\circ$; esto se logra mediante un cambio en la formulación del problema, manteniendo todos los parámetros de diseño a excepción de las pendientes de fase (vector de dirección Ψ) de las soluciones, definidas por (29), utilizando en esta ocasión los valores de fase discretos proveídos por desfasadores digitales de n -bits, dentro de un intervalo de valores permitidos por la *tabla de verdad* en las especificaciones del componente electrónico. Otra variación del problema se relaciona a la combinación de la optimización de la separación entre elementos de antena y la optimización de la pendiente de fase, manteniendo los parámetros $n = 12$, $K_2 = 6$, $K_3 = 6$, $\theta = 12^\circ$ y $s_{op} = [3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 3]$.

En la Figura 39 se observan las pendientes de fase dadas por el vector de dirección del arreglo, que en este caso se encuentran relacionadas con la variación de la separación uniforme entre elementos de antena. El caso convencional (rojo), considera una separación de $d = \lambda/2$ respaldada ampliamente por la literatura en (Stutzman y Thiele, 2012) (Balanis, 2012) (Visser, 2006). Adicionalmente, se calculan las pendientes de fase de los casos $d = 0.45\lambda$ (azul), y $d = 0.55\lambda$ (amarillo), para formar el intervalo $[0.45\lambda, 0.55\lambda]$, que es utilizado por el algoritmo de optimización de pendientes de fase, para cambiar los valores de excitación de fase del arreglo.

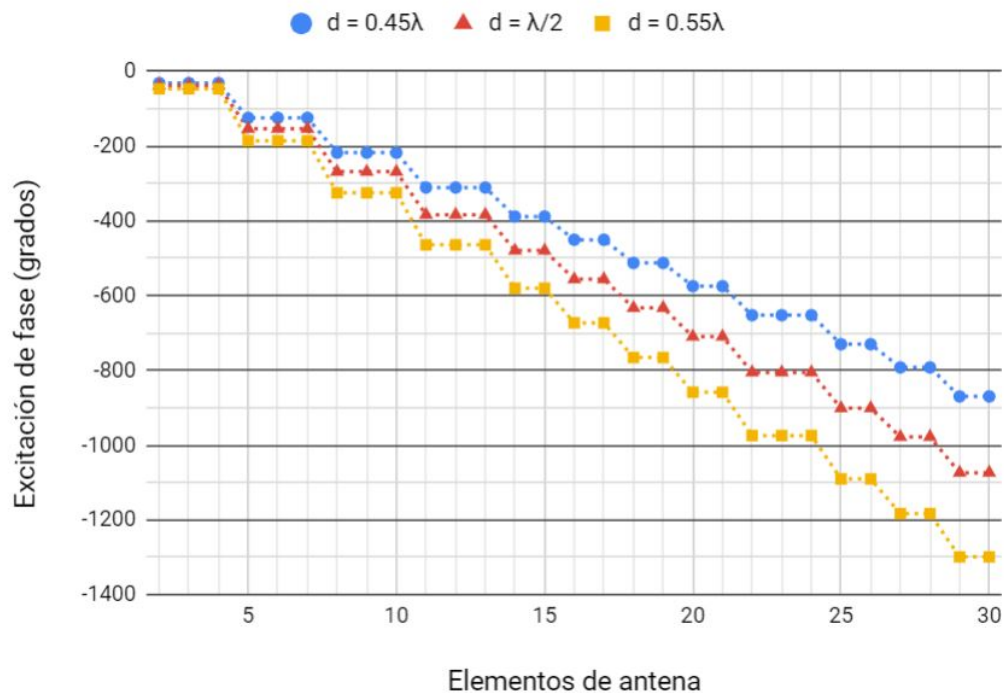


Figura 39. Pendientes de fase de la solución candidata $s = [3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 3]$, en los casos: $d = 0.45\lambda$ (azul), $d = \lambda/2$ (rojo), y $d = 0.55\lambda$ (amarillo).

Como se muestra en la Tabla 21, se diseñan diferentes metodologías de optimización que consisten en cambiar el orden de ejecución de los algoritmos de optimización de distancias y fases, así como de los tipos de excitaciones de fase (real o teórica). La solución con mejor rendimiento en FNBW se presenta con la optimización de la separación en $d = 0.45\lambda$. En cuanto a mejoras en SLL, existen tres casos que sobresalen del resto; el primero de ellos consiste en la optimización de la separación, seguida de la optimización de fases teóricas.

El segundo caso es la optimización simultanea de las excitaciones de fase y la separación, lo que significa que se contemplan dos variables de decisión para este caso: la distancia, y un vector de fases aleatorio dentro de los límites (azul y amarillo en Figura 39) producidos en el intervalo $[0.45\lambda, \lambda/2]$. Por último, se encuentra el caso donde se optimiza primeramente la separación, y posteriormente, los valores de la pendiente de fase utilizando los valores reales que brinda un componente desfasador convencional de 6-bits.

Tabla 21. Se realizaron ocho procedimientos diferentes, variando el orden de ejecución de los algoritmos de optimización de separación y fases, además del cambio entre los tipos de valores de fase (reales o teóricos).

	Óptimo global	Optimización de separación	Optimización de fases	Optimización de 1: separación - 2: fases
d	$\lambda/2$	0.45 λ	$\lambda/2$	0.45 λ
FNBW	0.1745	0.1955	0.1763	0.1937
SLL	-14.510	-15.336	-14.615	-15.767
	Optimización de 1: fases - 2: separación	Optimización simultanea de fases y separación	Optimización simultanea de fases reales y separación	Optimización de 1: separación - 2: fases reales
d	0.45 λ	0.45 λ	0.45 λ	0.45 λ
FNBW	0.1937	0.1937	0.1955	0.1937
SLL	-15.654	-15.733	-15.431	-15.826

Capítulo 6. Discusión

Este capítulo se presenta un análisis de los resultados mostrados en el Capítulo 5.

6.1. Estrategias de búsqueda de soluciones

Los resultados de los experimentos 1, 2 y 3, muestran los diferentes enfoques de búsqueda que pueden ser utilizados por los algoritmos; recordemos que, por una parte se encuentra el enfoque exhaustivo, que consiste en encontrar una solución óptima global considerando un solo valor objetivo (SLL) como métrica de rendimiento. En contraste, la búsqueda multi-objetivo basada en el uso de metaheurísticas evolutivas, permite la exploración parcial de otros espacios de soluciones de mayor tamaño, distinguiéndose de los métodos exactos por su capacidad de obtener buenas soluciones en un tiempo razonable, a expensas de perder la garantía de optimalidad de las soluciones encontradas.

En el Experimento 1 se logra replicar el trabajo expuesto por Avser *et al.* (2016), que genera preguntas respecto a la diversidad que se puede obtener en los diseños mediante el uso de *restricciones*, en términos de los agrupamientos de subarreglos. Una de las ventajas que tiene el enfoque exhaustivo en el caso con *restricciones* es asegurar una solución óptima global con una cantidad fija de elementos de antenas N . Sin embargo, en este enfoque, algunos casos del problema resultan inalcanzables a raíz de la omisión de $C_k(n) - 1$ espacios de búsqueda; debido a que las *restricciones* de los subarreglos K_j en el arreglo corresponden a una sola composición o subproblema del caso *sin restricciones*.

Se puede inferir que el aumento en el tamaño del arreglo produce en consecuencia un incremento en la calidad de las soluciones óptimas globales, tomando en cuenta el valor de SLL como único indicador de rendimiento. Una de las ventajas de contar con un número fijo de K_j subarreglos para el intervalo $1 \leq j \leq 4$ es asegurar un valor fijo en FNBW cuando $\theta = 0^\circ$ de acuerdo con (9), así como de una longitud constante del arreglo lineal. Otro punto adicional es la diferencia del crecimiento asintótico en los tamaños de los espacios de soluciones, ya que para los casos donde $n < 27$, el caso con *restricciones* con tamaño dado por (26), genera un espacio de soluciones de menor tamaño respecto al caso *sin restricciones* con $m = 4^n$.

Los resultados del Experimento 2 muestran una de las principales desventajas del trabajo replicado, ya que al remover las restricciones de los subarreglos, se permite mejorar la diversidad de los diseños en términos de los parámetros de diseño y rendimiento como: SLL, FNBW y la cantidad de elementos de antena N . Sin embargo, el enfoque mono-objetivo (SLL) del caso *sin restricciones* produce soluciones conformadas por una cantidad mínima (o muy cercana al mínimo) de elementos de antena en el arreglo, como se muestra en la Tabla 10 de la sección 5.1.2. En contraste, el enfoque mono-objetivo (FNBW) produce una solución óptima con una cantidad máxima de N elementos de antena.

Tabla 22. Soluciones óptimas ($s_{f_1}^*$, $s_{f_2}^*$) de dos problemas distintos, con una misma configuración en $n = 12$, $\theta = 12^\circ$, $d = \lambda/2$. Se observa un compromiso entre SLL ($s_{f_1}^*$) y FNBW ($s_{f_2}^*$) al cambiar la función objetivo del enfoque mono-objetivo.

Secuencia	SLL (dB)	FNBW (rad.)	N
$s_{f_1}^* = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2]$	-20.47	0.398	13
$s_{f_2}^* = [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]$	-2.75	0.105	48

Por esto, un aspecto importante por mencionar es la presencia del compromiso entre SLL y FNBW mencionado en (Panduro *et al.*, 2005). Esto se logra al contrastar una solución obtenida con el mejor valor de SLL ($s_{f_1}^*$), con la solución que genera el mejor valor de FNBW ($s_{f_2}^*$), mostradas en la Tabla 22. Adicionalmente, el Experimento 2 muestra que la cantidad de soluciones en los frentes de Pareto tiende a incrementar en conjunto con el ángulo de escaneo del arreglo (θ). En la Figura 40, se muestra la cantidad de soluciones en los frentes de Pareto para los casos del intervalo $6 \leq n \leq 12$, donde se observa que, conforme el ángulo de escaneo se aleja de *broadside* ($\theta \neq 0$), la cantidad de soluciones en los frentes de Pareto incrementa proporcionalmente al cambio en θ .

El Experimento 3 presenta un método alternativo a la búsqueda exhaustiva de soluciones en espacios que contienen un gran número de soluciones (m), como es el caso del problema *sin restricciones*. El algoritmo evolutivo implementado (SMPSO) realizó una exploración parcial controlada por un número fijo de 100,000 iteraciones o *generaciones poblacionales*, lo que permite realizar una búsqueda factible en términos del tiempo computacional requerido, ya que se tiene control sobre el tiempo de eje-

cución total del algoritmo. De acuerdo con los resultados mostrados en la Tabla 11 de la sección 5.2.1, se puede inferir que existe un número desconocido de soluciones que pueden contar con valores de rendimiento similares, pero con variaciones en otros parámetros de diseño como la cantidad de elementos de antena.

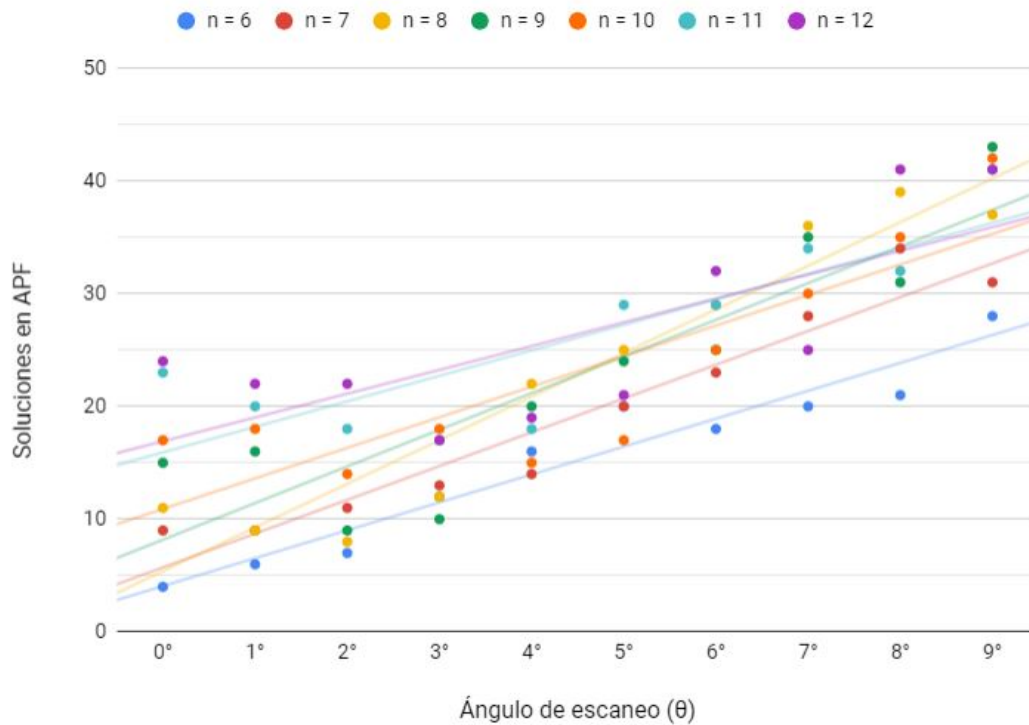


Figura 40. Incremento progresivo en la cantidad de soluciones candidatas por frente de Pareto, para los casos $6 \leq n \leq 12$, con ángulo de escaneo $0^\circ \leq \theta \leq 9^\circ$.

En la Tabla 11 se muestran las soluciones $s_1^* = [4, 3, 4, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 4]$ y $s_1 = [3, 2, 2, 2, 3, 4, 2, 3, 2, 3, 3, 2]$, que presentan valores de rendimiento similares con una diferencia en SLL de ± 0.01 dB entre soluciones. El espacio de soluciones de donde proviene la solución s_1^* es 625 % más grande que el espacio de la solución s_1 , debido a la diferencia en el tamaño m en (26), relacionado al tamaño de la composición o subproblema dado por las *restricciones* de subarreglos permitidos en las secuencias (ver sección 3.3.2). De esta manera, se mejora el tiempo de ejecución de la búsqueda exhaustiva para s_1 , con aproximadamente 1.43 min. respecto a 9 min. con s_1^* . Adicionalmente, el número de elementos de antena varía entre soluciones en un número de cinco elementos ($s_1 : N = 31$, $s_1^* : N = 36$), generando una situación imposible de suceder en el caso con *restricciones*.

6.2. Búsqueda asistida por patrones de diseño

La contribución visual generada por el alineamiento de secuencias y la representación de estas secuencias en los *logos* mostrados en la sección 4.3.2, permiten que se puedan observar algunos indicios sobre la existencia de patrones de diseño. Los cuales, cambian junto con los parámetros de diseño como el ángulo de escaneo θ , o la cantidad de subarreglos en la secuencia. En los experimentos 4, 5 y 6, fueron utilizadas diferentes herramientas visuales para detectar distribuciones *favorables* de subarreglos para casos específicos del problema, con el propósito de utilizar información adicional para mejorar la eficiencia de los algoritmos de búsqueda y optimización.

En el Experimento 4 se generan cinco matrices PPM a partir de la información obtenida en el Experimento 2 de la sección 5.2.1, donde se toman los frentes de Pareto del intervalo $6 \leq n \leq 10$ con ángulo de escaneo a *broadside* $\theta = 0^\circ$. De estas matrices se produce una aproximación a una posible matriz PPM de un caso de mayor tamaño ($n = 11$), con el propósito de agilizar la búsqueda de soluciones, guiando al algoritmo a crear soluciones con una distribución probabilística no-uniforme basada en un posible patrón de diseño.

Los algoritmos de optimización multi-objetivo presentados en la Tabla 14 de la sección 5.3.1 muestran diferentes indicadores de rendimiento que posicionan al algoritmo SMPSO como el mejor del experimento, a pesar de que el algoritmo PDF-SMPSO cuenta con información adicional sobre una distribución *favorable* de los subarreglos en casos de menor tamaño. Estos cambios (en PDF-SMPSO) solamente se ven reflejados con el aumento de la población inicial del algoritmo, sin embargo, las ganancias obtenidas son marginales, por lo que se presenta la necesidad de modificar algunos aspectos de este experimento, e intentar nuevamente con un método distinto.

En este experimento se puede observar que la representación de las funciones de probabilidad que conforman a las cinco matrices PPM, funcionan como una especie de indicador visual para la identificación de patrones de diseño. A pesar de ello, surge un punto importante relacionado a las soluciones *espejo*, y las afirmaciones presentadas en (Avser *et al.*, 2016) sobre la igualdad de rendimiento entre dos soluciones de este tipo. Lo anterior se menciona debido a que en este experimento, se muestra poca diferencia en relación al rendimiento real de las soluciones *espejo* durante la construcción

de la matriz PPM del caso $n = 11$; lo que podría causar diferencia estadística no significativa entre los algoritmos SMPSO y PDF-SMPSO, al producir soluciones *dominadas* como s_b de la Tabla 23.

Tabla 23. Secuencias *espejo* (s_f, s_b) del caso $n = 11$, $\theta = 0^\circ$, $d = \lambda/2$. Se observa una discrepancia de rendimiento en SLL de ± 0.03 dB entre soluciones.

Secuencia	SLL (dB)	FNBW (rad.)
$s_f = [4, 2, 1, 2, 4, 4, 3, 1, 1, 1, 4]$	-22.80	0.185
$s_b = [4, 1, 1, 1, 3, 4, 4, 2, 1, 2, 4]$	-22.77	0.185

El experimento 5 se divide en tres partes importantes: la primera consiste en la comparación entre dos soluciones (secuencias $s_1^* = [4, 3, 4, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 4]$, y $s_1 = [3, 2, 2, 2, 3, 4, 2, 3, 2, 3, 3, 2]$), que comparten el mismo valor de FNBW, y una diferencia marginal de ± 0.01 dB en SLL, presentadas en la Tabla 11 de la sección 5.2.1 del Capítulo 5. Los arreglos de antenas cuentan con diferentes longitudes, debido a una diferencia de cinco elementos de antena por diseño, lo que causa un desplazamiento en el eje vertical del indicador azul respecto al rojo, mostrados en la Figura 32 de la sección 5.3.2.

En esta parte se observan dos funciones con patrones de diseño denominados *inversos*, lo que muestra que la función de color azul tiende a contener una menor cantidad de elementos de antena en la mitad izquierda del arreglo, cuando $i \in [1, \lfloor n/2 \rfloor]$, respecto a la mitad derecha ($i \in [\lceil n/2 \rceil, n]$). En contraste con el indicador color rojo, que de manera inversa, contiene la mayor cantidad de elementos de antena en el intervalo $[1, \lfloor n/2 \rfloor]$. Se puede inferir que existe más de un patrón de diseño que puede llevar a generar soluciones con un rendimiento aceptable, además de mostrar diversidad en los parámetros de diseño, que permitan seleccionar una solución adecuada para una aplicación con demandas específicas (número mínimo de N).

En la segunda parte del experimento, se comparan cuatro soluciones que discrepan en el número de subarreglos (n), pero que contienen la misma cantidad de elementos de antena con $N = 24$, mostradas en la Tabla 15. En la Figura 33, la posición de las curvas de las soluciones desciende en el plano conforme n incrementa de tamaño, debido al aumento de cuatro elementos en la cantidad máxima de elementos de antena N_{max} por subarreglo añadido al arreglo ($N_{max} \in M : N_{max} = 4 \cdot n$), lo que cambia la *resolución*

de los indicadores de densidad. Esto significa que, cada vez que se incrementa n en una unidad, se requiere la inserción de un subarreglo con un elemento de antena (para mantener a $N = 24$), a partir de la *descomposición* de un subarreglo K_j para $j > 1$, lo que decreta el promedio de elementos de antena por arreglo (N/N_{max}).

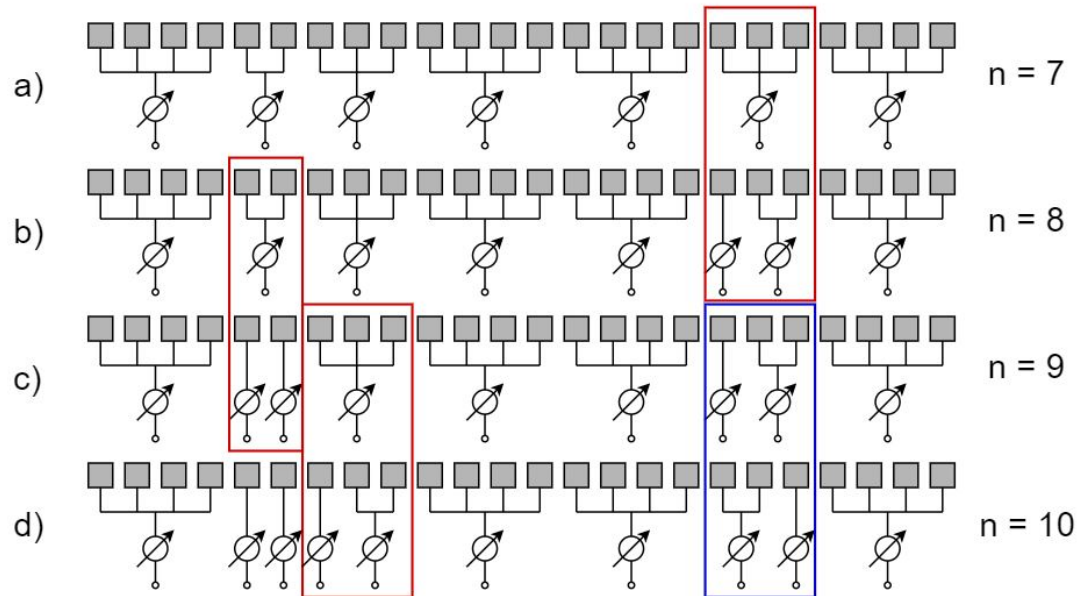


Figura 41. Modificaciones necesarias para pasar de una solución de tamaño n , a una solución de tamaño $n + 1$, manteniendo un número fijo de elementos de antena $N = 24$. La *descomposición* de subarreglos es mostrada por los recuadros de color rojo, mientras que los recuadros azules representan un intercambio en la posición de dos subarreglos (*swap*).

En la Figura 41 se muestran los pasos requeridos para insertar un subarreglo en la secuencia, sin alterar la cantidad de elementos de antena N . Considerando el orden de los incisos: a, b, c, d, con $N = 24$, se cree que es posible conformar una secuencia de tamaño $(n + 1)$ a partir de una secuencia de tamaño n , mediante la inserción de subarreglos. Considere que para formar la secuencia b) a partir de la secuencia a), es necesaria la inserción (recuadro rojo) de un subarreglo en el índice $i = 9$ de la secuencia a). Con lo anterior, ocurre un fenómeno que denominaremos *descomposición de subarreglos*, tal que $K_3 \equiv K_1 + K_2$; de igual manera, para pasar de la solución b) con $n = 8$, a la solución c) con $n = 9$, se requiere de una inserción de subarreglo en el índice $i = 2$ del arreglo b), entonces $K_2 \equiv K_1 + K_1$.

Por último, se genera un caso especial para convertir la secuencia c) en la secuencia d), donde se requiere una *descomposición*, además de un *swap* en el arreglo.

Primeramente, se intercambian los subarreglos 7 y 8 de la secuencia c) (*swap*), para posteriormente realizar la *descomposición* del subarreglo $i = 3$ de la secuencia c), representada por $K_3 \equiv K_1 + K_2$. Un aspecto importante a considerar es una mejora mínima en SLL conforme el arreglo aumenta de tamaño, mostrado en la Tabla 15 de la sección 5.3.2, lo que permite conocer el verdadero *costo-beneficio* en relación con la ganancia en dB por desfasador añadido al circuito, para un valor constante de N .

En la siguiente parte del experimento, se eligen dos pares de soluciones de un APF con $n = 10$ y $\theta = 10^\circ$, que comparten la misma cantidad de subarreglos y de elementos de antena. Se decide agrupar las cuatro soluciones en dos pares, debido a que dichos pares comparten *indicadores de densidad* similares, lo que podría explicar la razón de obtener un rendimiento favorable, considerando que se trata de soluciones *no-dominadas* entre sí. Además, se presenta un caso del problema en donde una cantidad constante en N elementos de antena no asegura un valor fijo de FNBW, como se muestra en la Figura 34 de la sección 5.3.2.

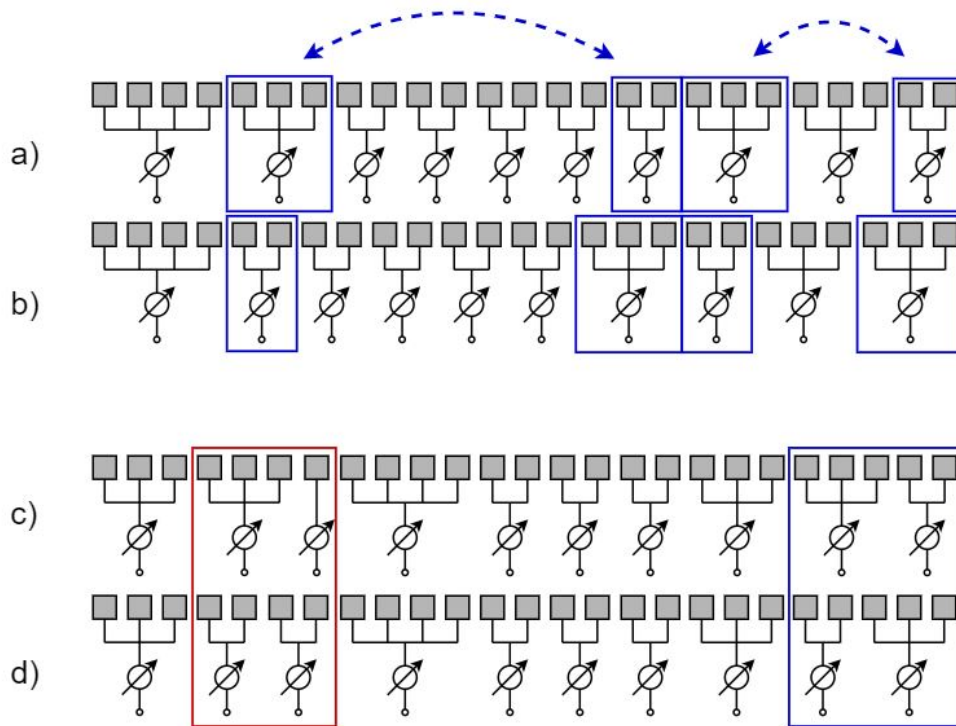


Figura 42. Dos pares de soluciones (a-b y c-d) que comparten el mismo número de elementos de antena $N = 25$.

La Figura 42 muestra dos pares de soluciones candidatas (a-b, c-d) de un frente de Pareto, que comparten un mismo número de elementos de antena con $N = 25$, así como de una misma cantidad de n subarreglos. La agrupación por pares se genera de acuerdo a la similitud de los *indicadores de densidad* reportados por estas soluciones en la Figura 34 (ver sección 5.3.2). Los diseños de las soluciones en el primer par de secuencias (a-b) difieren por dos *swaps* o intercambios de subarreglos. A diferencia del par (c-d), que difiere en un *swap*, y en una *descomposición* de subarreglos, pero esta vez sin agregar un nuevo subarreglo a la secuencia, tal que $K_3 + K_1 \equiv K_2 + K_2$.

Los resultados de este experimento plantean la idea de contar con *bloques* de subarreglos que resultan favorables para múltiples soluciones con un número fijo de elementos de antena y subarreglos, que a partir de una solución candidata, se puedan crear otras soluciones con variaciones en algunos *bloques* de subarreglos en la secuencia. Por ejemplo, en la Figura 42 las soluciones a) y b) comparten los mismos *bloques* en $i \in \{1 \cup [3, 6] \cup 9\}$. A diferencia de las secuencias c) y d), que comparten solamente dos *bloques* en $i \in \{1 \cup [4, 8]\}$. Estos cambios de *bloques* entre soluciones genera una pequeña variación en los valores de rendimiento en SLL y FNBW, manteniendo un compromiso entre las funciones objetivo ($z_a = (-16.18, 0.2147)$, $z_b = (-16.02, 0.2094)$), y ($z_c = (-15.80, 0.2025)$, $z_d = (-15.60, 0.2007)$).

El Experimento 6 expone una manera de brindar información adicional al algoritmo de búsqueda para elegir diferentes *restricciones* que cumplan con un número mínimo (o máximo) de elementos de antena en el arreglo. La Tabla 18 de la sección 5.3.3, muestra una ventaja significativa del algoritmo PDF-SMPSO sobre el algoritmo SMPSO en todos los indicadores utilizados, misma que se refleja en la prueba de significancia estadística ejecutada por las librerías de *MOEA Framework*. Sin embargo, la verdadera significancia será determinada por el diseñador dependiendo de la criticidad del rendimiento en la aplicación.

En la Figura 35 de la sección 5.3.3, se puede observar que existen algunas regiones de la distribución de subproblemas que mantienen una posición relativamente cercana entre sí, conforme se incrementa la cantidad de subarreglos en la secuencia. Esto podría tratarse de un comienzo para la identificación de secciones de subproblemas en la distribución que se encuentren directamente relacionados a los parámetros de diseño de las secuencias. Al conocer las regiones *favorables* de subproblemas en la

distribución, se podría asegurar una búsqueda eficiente, y dirigida especialmente a tratar el problema en cuestión.

6.3. Técnicas adicionales de optimización

En el Experimento 7 se puede observar que la disminución de la separación entre elementos de antena puede mejorar el SLL, incrementando el FNBW. Sin embargo, es altamente recomendable por la literatura que se mantenga una separación uniforme de $d \geq \lambda/2$ para evitar efectos de acoplamiento mútuo entre elementos de antena contiguos entre sí. Para contar con una mejor certeza sobre el funcionamiento del arreglo, y sobre la existencia del fenómeno de acoplamiento mútuo, se recomienda la implementación de una simulación electromagnética por medio de *software* especializado, de las soluciones teóricas obtenidas en este experimento.

El Experimento 8 demuestra que, a pesar de la obtención de una solución óptima global en un caso exhaustivo mono-objetivo, esta puede mejorar su rendimiento con la variación de la separación entre elementos de antena, y la variación de la pendiente de fase del arreglo. Los resultados muestran que la mejor manera de aplicar este método es, realizar una optimización de la separación uniforme, seguida de una optimización de la pendiente de fase utilizando los valores reales de un desfaseador de 6-bits, lo cual se muestra en la Figura 30 de la sección 4.4.3 del Capítulo 4. Otra técnica adicional que podría brindar resultados positivos es la optimización de las separaciones de manera *no-uniforme*, como es mencionado en (Krivosheev *et al.*, 2015).

6.4. Perspectivas de investigación

En referencia a los experimentos 4, 5, 6, y 7, se proponen futuras investigaciones enfocadas en el estudio de la distribución estratégica de los subarreglos en el arreglo, con la finalidad de encontrar una función de interpolación general para cualquier tamaño n del arreglo, dado un ángulo de escaneo θ . Se cree que esto se puede lograr de diferentes maneras, una de ellas corresponde al estudio de los cambios de pendiente en las funciones que interpolan los puntos generados por los *indicadores de densidad*, para mostrar la distribución de los elementos.

Otra de las propuestas para futuras investigaciones es la creación de un circuito

reconfigurable que permita la reconfiguración de la secuencia para un determinado caso del problema. En la Figura 43 se muestra un circuito prototipo que permite la conmutación de las líneas de alimentación entre las soluciones mostradas en la Tabla 24. Estas soluciones fueron elegidas con el criterio de contar con un valor de FNBW marginalmente similar, con una diferencia de ± 0.003 rad. entre soluciones.

Tabla 24. Soluciones óptimas de los frentes de Pareto para los casos $n = 10$, $N = 34$, $\theta = 3^\circ$ (s_a), y $\theta = 10^\circ$ (s_r).

Secuencia	SLL (dB)	FNBW (rad.)	θ	Señal lógica
$s_r = [4, 2, 3, 4, 2, 4, 3, 4, 4, 4]$	-12.82	0.150	10°	0
$s_a = [4, 2, 3, 4, 4, 2, 4, 4, 3, 4]$	-21.76	0.147	3°	1

Se propone un diseño de circuito reconfigurable inspirado en (Costantine *et al.*, 2015), mostrado en la Figura 43. Esta muestra la importancia de la identificación de *bloques* de subarreglos que pueden ser utilizados en más de una solución para producir nuevas soluciones con rendimiento similar, partiendo de la modificación de una secuencia base que demuestre previamente un rendimiento favorable. En la Figura 44 se observan los patrones de radiación de las soluciones mostradas en la Tabla 24, donde la conmutación entre soluciones se realiza con el uso de una señal lógica de 1-bit. Se plantea la posibilidad de contar con más de una conmutación entre soluciones, que permitiría el uso de más de un par de soluciones que compartan una misma cantidad de *bloques* de subarreglos.

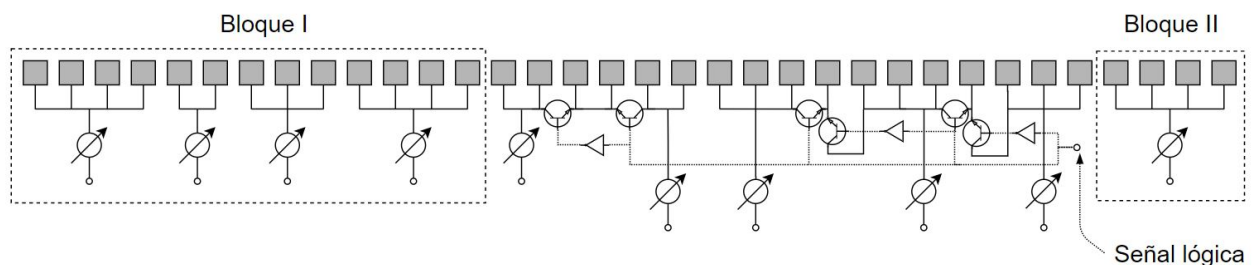


Figura 43. Modelo de arreglo de antenas lineal-reconfigurable propuesto en esta investigación, que permite cambiar entre ángulos de escaneo (3° ó 10°), manteniendo un valor virtualmente fijo de FNBW (≈ 0.1485 rad.). Los *bloques* representan partes del arreglo que no necesitan ser modificadas.

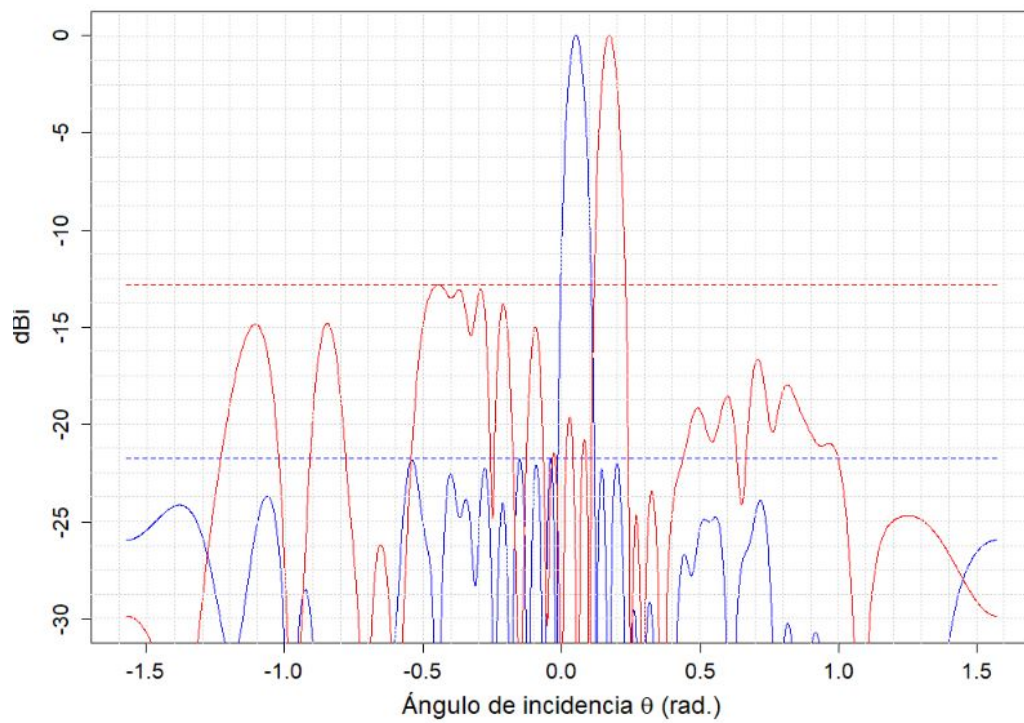


Figura 44. Patrones de radiación de las soluciones mostradas en la Tabla 43. En rojo: $s_r = [4, 2, 3, 4, 2, 4, 3, 4, 4, 4]$. En azul: $s_\alpha = [4, 2, 3, 4, 4, 2, 4, 4, 3, 4]$.

Capítulo 7. Conclusiones

A continuación se presenta un resumen y las conclusiones de esta investigación.

7.1. Sumario

Se realizó la búsqueda exhaustiva de soluciones con un enfoque mono-objetivo (SLL) en tres espacios de búsqueda mencionados en (Avser *et al.*, 2016), conocido en esta investigación como el caso con *restricciones*. Posteriormente, se realizó la búsqueda exhaustiva en un espacio de búsqueda *sin restricciones*, utilizando el mismo enfoque mono-objetivo, pero esta vez alternando entre las funciones objetivo de SLL y FNBW. Después, se implementó un algoritmo evolutivo de optimización multi-objetivo para lograr la exploración de espacios de búsqueda *sin restricciones* que resultan inalcanzables para los métodos exactos.

Se presentó un nuevo operador de mutación (PDF) basado en la distribución probabilística de los subarreglos en casos de menor tamaño, para asistir al algoritmo de búsqueda con la creación de las secuencias en casos de mayor tamaño. Se presentó un nuevo indicador visual para identificar distribuciones estratégicas de subarreglos, suponiendo que existe una relación entre la optimalidad de las soluciones con las distribuciones estratégicas de los subarreglos. Adicionalmente, se implementó una estrategia de búsqueda asistida por *restricciones* favorables para un caso del problema, también denominados subproblemas o composiciones.

Algunas técnicas adicionales de optimización fueron implementadas para mejorar las prestaciones de soluciones, que son óptimas para un caso del problema, perdiendo optimalidad a cambio de una mejora en SLL. Esta se logra con la optimización de la separación uniforme entre los elementos de antena, los cambios en las excitaciones de fase de la solución, o una combinación entre las dos anteriores. Adicionalmente, se propuso un nuevo diseño de arreglo reconfigurable inspirado en trabajos previos, que permite cambiar la configuración de los subarreglos entre dos soluciones óptimas.

7.2. Conclusiones

- En el caso de *broadside* $\theta = 0^\circ$, el valor de FNBW se relaciona directamente con la cantidad de elementos de antena en el arreglo. Cuando $\theta \neq 0^\circ$, existen discrepancias entre los valores de FNBW de dos o más soluciones que comparten el mismo número N de elementos de antena.
- El caso exhaustivo con *restricciones* disminuye la cantidad de soluciones en el espacio de búsqueda, lo que mejora el tiempo computacional de la búsqueda, además de asegurar una solución óptima y un valor constante de N elementos de antena en todas las soluciones.
- La búsqueda exhaustiva de soluciones no es factible en espacios de búsqueda con tamaño aproximadamente mayor a $m > 8 \times 10^9$, considerando un tiempo de ejecución máximo de seis meses.
- El uso de metaheurísticas evolutivas permite la exploración parcial de espacios de búsqueda de tamaño $m = 2.815 \times 10^{14}$, que resultan inalcanzables para los algoritmos exhaustivos.
- El enfoque de optimización mono-objetivo genera un *sesgo* en el caso *sin restricciones*, debido a que las soluciones tienden a conformarse por una mínima (SLL) o máxima (FNBW) cantidad de elementos de antena, dependiendo de la función objetivo utilizada.
- El enfoque de optimización multi-objetivo permite la obtención de un frente de aproximación de Pareto APF con múltiples soluciones candidatas. Lo que se interpreta como un incremento en la *diversidad* de las soluciones (diferente: SLL, FNBW, N , N' y K_j).
- El *indicador de densidad* propuesto permite representar de una manera eficiente la distribución de los subarreglos en el arreglo.
- Existe más de un patrón de diseño en soluciones candidatas para algunos casos del problema. Se desconoce si existen problemas con soluciones que expresen un mismo patrón de diseño de manera general.

- Existe más de una solución que puede brindar virtualmente el mismo rendimiento operacional, variando parámetros de diseño como la cantidad de elementos de antena en el arreglo.
- En la mayoría de los casos, las soluciones *espejo* resultan con valores de rendimiento similares en FNBW, pero diferentes en SLL, por lo que una de ellas es débilmente dominada (es peor en $f_1(s)$) por su secuencia *espejo*.
- Es posible construir una secuencia de tamaño $(n+1)$ partiendo de una secuencia de tamaño n , por medio de la inserción de subarreglos, manteniendo una cantidad constante de elementos de antena.
- En algunos casos del problema exhaustivo *sin restricciones*, se puede contar con más de una solución que contenga una distribución de subarreglos similar (*indicador de densidad*).
- Algunos *bloques* de subarreglos resultan favorables para más de una solución, por lo que se puede partir de una solución inicial para generar otras soluciones con valores de rendimiento similares, al modificar algunas partes del arreglo.
- Existen partes de una distribución de subproblemas o composiciones que resultan desfavorables para algunos casos del problema, por lo que su omisión en la búsqueda de soluciones mejora la eficiencia del algoritmo de búsqueda.
- La reducción de la separación entre elementos de antena mejora el SLL de la solución, a expensas de un incremento en FNBW.
- La optimización de la pendiente de fase del arreglo mejora el rendimiento de la solución en SLL a expensas de una reducción mínima (error) en el ángulo de escaneo.
- El incremento en la resolución de los desfasadores de n -bits mejora de manera progresiva el rendimiento en SLL de la solución candidata.

Literatura citada

- Abbaspour-Tamijani, A. y Sarabandi, K. (2003). An affordable millimeter-wave beam-steerable antenna using interleaved planar subarrays. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **51**(9): 2193–2202.
- Agiwal, M., Roy, A., y Saxena, N. (2016). Next generation 5g wireless networks: A comprehensive survey. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, **18**(3): 1617–1655.
- Allen, B. y Ghavami, M. (2005). *Adaptive array systems: fundamentals and applications*. John Wiley & Sons.
- Avser, B., Pierro, J., y Rebeiz, G. M. (2016). Random feeding networks for reducing the number of phase shifters in limited-scan arrays. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **64**(11): 4648–4658.
- Avser, B., Frazita, R. F., y Rebeiz, G. M. (2018). Interwoven feeding networks with aperture sinc-distribution for limited-scan phased arrays and reduced number of phase shifters. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **66**(5): 2401–2413.
- Balanis, C. A. (2012). *Antenna theory: analysis and design*. Wiley-Interscience.
- Banerjee, S. y Dwivedi, V. V. (2016). Performance analysis of adaptive beamforming using particle swarm optimization. En: *Industrial and Information Systems (ICIIS), 2016 11th International Conference on*. IEEE, pp. 242–246.
- Blum, C. y Li, X. (2008). Swarm intelligence in optimization. En: *Swarm intelligence*. Springer, pp. 43–85.
- Boeringer, D. W. y Werner, D. H. (2004). Particle swarm optimization versus genetic algorithms for phased array synthesis. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, **52**(3): 771–779.
- Coello, C. A. C., Lamont, G. B., Van Veldhuizen, D. A., et al. (2007). *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*, Vol. 5. Springer.
- Costantine, J., Tawk, Y., Barbin, S. E., y Christodoulou, C. G. (2015). Reconfigurable antennas: Design and applications. *Proceedings of the IEEE*, **103**(3): 424–437.
- Deb, K. (2001). *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*, Vol. 16. John Wiley & Sons.
- Deb, K. y Agrawal, R. B. (1995). Simulated binary crossover for continuous search space. *Complex systems*, **9**(2): 115–148.
- Deb, K. y Goyal, M. (1996). A combined genetic adaptive search (geneas) for engineering design. *Computer Science and informatics*, **26**: 30–45.
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., y Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. *IEEE transactions on evolutionary computation*, **6**(2): 182–197.
- Eiben, A. y Smith, J. (2008). Introduction to evolutionary computing (natural computing series).
- Goffar, A. P., Kam, M., y Herczfeld, P. R. (1994). Design of phased arrays in terms of random subarrays. *IEEE transactions on Antennas and Propagation*, **42**(6): 820–826.

- Goldberg, D. E. y Holland, J. H. (1988). Genetic algorithms and machine learning. *Machine learning*, **3**(2): 95–99.
- Goudos, S. K., Kalialakis, C., y Mittra, R. (2016). Evolutionary algorithms applied to antennas and propagation: A review of state of the art. *International Journal of Antennas and Propagation*, **2016**.
- Haupt, R. (1985). Reducing grating lobes due to subarray amplitude tapering. *IEEE transactions on antennas and propagation*, **33**(8): 846–850.
- Haupt, R. L. (2007). Optimized weighting of uniform subarrays of unequal sizes. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **55**(4): 1207–1210.
- Hayt, W. H., Buck, J. A., et al. (1981). *Engineering electromagnetics*, Vol. 6. McGraw-Hill New York.
- Jones, N. C., Pevzner, P. A., y Pevzner, P. (2004). *An introduction to bioinformatics algorithms*. MIT press.
- Kennedy, J. y Eberhart, R. (1995). Particle swarm optimization (pso). En: *Proc. IEEE International Conference on Neural Networks, Perth, Australia*. pp. 1942–1948.
- Khodier, M. M. y Christodoulou, C. G. (2005). Linear array geometry synthesis with minimum sidelobe level and null control using particle swarm optimization. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **53**(8): 2674–2679.
- Knuth, D. E. (2000). Dancing links. *arXiv preprint cs/0011047*.
- Kraus, J. D., Marhefka, R. J., y Khan, A. S. (2006). *Antennas and wave propagation*. Tata McGraw-Hill Education.
- Krivosheev, Y. V., Shishlov, A. V., y Denisenko, V. V. (2015). Grating lobe suppression in aperiodic phased array antennas composed of periodic subarrays with large element spacing. *IEEE Antennas and propagation Magazine*, **57**(1): 76–85.
- Lee, W.-S., Khang, S.-T., Oh, K.-S., y Yu, J.-W. (2013). Design methodology for phased subarray antennas with optimized element phase control. En: *Microwave Conference (EuMC), 2013 European*. IEEE, pp. 1659–1662.
- Mailloux, R. J. (2001). A low-sidelobe partially overlapped constrained feed network for time-delayed subarrays. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **49**(2): 280–291.
- Maneiro-Catoira, R., Brégains, J., García-Naya, J. A., y Castedo, L. (2017). Time modulated arrays: from their origin to their utilization in wireless communication systems. *Sensors*, **17**(3): 590.
- Nebro, A. J., Durillo, J. J., Garcia-Nieto, J., Coello, C. C., Luna, F., y Alba, E. (2009). Sm-pso: A new pso-based metaheuristic for multi-objective optimization. En: *2009 IEEE Symposium on Computational Intelligence in Multi-Criteria Decision-Making (MCDM)*. IEEE, pp. 66–73.
- Panduro, M. A., Covarrubias, D. H., Brizuela, C. A., y Marante, F. R. (2005). A multi-objective approach in the linear antenna array design. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, **59**(4): 205–212.

- Panduro, M. A., Brizuela, C. A., Covarrubias, D., y Lopez, C. (2006). A trade-off curve computation for linear antenna arrays using an evolutionary multi-objective approach. *Soft Computing*, **10**(2): 125–131.
- Panduro, M. A., Reyna, A., y Camacho, J. (2009). Design of scannable linear arrays with amplitude and phase optimisation for maximum side lobe level reduction. *International Journal of Electronics*, **96**(3): 323–329.
- Quaintance, J. (2015). *Combinatorial Identities for Stirling Numbers: The Unpublished Notes of HW Gould*. World Scientific.
- Rocca, P., Mailloux, R., y Toso, G. (2015). Ga-based optimization of irregular subarray layouts for wideband phased arrays design. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, **14**: 131–134.
- Saleem, S., Ahmed, M., Rafique, U., y Ahmed, U. (2016). Optimization of linear antenna array for low sll and high directivity. En: *Multi-Topic Conference (INMIC), 2016 19th International*. IEEE, pp. 1–6.
- Singh, S. K., Chandrudu, V. B., y Mahanti, G. (2013). Synthesis of linear array antenna for fixed level of side lobe level and first null beam width using particle swarm optimization. En: *Communications and Signal Processing (ICCSP), 2013 International Conference on*. IEEE, pp. 275–279.
- Singh, U., Kumar, H., y Kamal, T. S. (2010). Linear array synthesis using biogeography based optimization. *Progress In Electromagnetics Research*, **11**: 25–36.
- Stutzman, W. L. y Thiele, G. A. (2012). *Antenna theory and design*. John Wiley & Sons.
- Van Veen, B. D. y Buckley, K. M. (1988). Beamforming: A versatile approach to spatial filtering. *IEEE assp magazine*, **5**(2): 4–24.
- Visser, H. J. (2006). *Array and phased array antenna basics*. John Wiley & Sons.
- Wang, D. (2018). The subarray division for the phase array radar. En: *Autonomous Systems: Sensors, Vehicles, Security, and the Internet of Everything*. International Society for Optics and Photonics, Vol. 10643, p. 1064311.
- Xiong, Z.-Y., Xu, Z.-H., Chen, S.-W., y Xiao, S.-P. (2013). Subarray partition in array antenna based on the algorithm x. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, **12**: 906–909.
- Xiong, Z.-Y., Xu, Z.-H., Song, D., y Xiao, S.-P. (2015). On the weighting optimisation of the antenna with overlapped subarrays architecture. *IET Microwaves, Antennas & Propagation*, **9**(10): 1035–1044.
- Zaman, M. A., Matin, A., et al. (2012). Nonuniformly spaced linear antenna array design using firefly algorithm. *International Journal of Microwave Science and Technology*, **2012**.
- Zhang, Q. y Li, H. (2007). Moea/d: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. *IEEE Transactions on evolutionary computation*, **11**(6): 712–731.