

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias
en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en
Instrumentación y Control**

**Diseño de controladores para seguimiento de trayectorias en vehículos
aéreos de cuatro rotores**

Tesis
para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:
Jonathan Hirata Acosta

Ensenada, Baja California, México

2020

Tesis defendida por

Jonathan Hirata Acosta

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. César Cruz Hernández

Codirector de tesis

Dr. Javier Pliego Jiménez

Codirector de tesis

Dr. Rigoberto Martínez Clark

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Dr. Gustavo Olague Caballero



Dr. Daniel Saucedo Carvajal

Coordinador del Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dra. Rufina Hernández Martínez

Directora de Estudios de Posgrado

Jonathan Hirata Acosta © 2020

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis

Resumen de la tesis que presenta Jonathan Hirata Acosta como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

Diseño de controladores para seguimiento de trayectorias en vehículos aéreos de cuatro rotores

Resumen aprobado por:

Dr. César Cruz Hernández

Codirector de tesis

Dr. Javier Pliego Jiménez

Codirector de tesis

En el presente trabajo se aborda el problema del diseño de algoritmos de control para vehículos aéreos no tripulados, particularmente, de cuatro rotores, así como la generación de trayectorias de posición para dicho sistema. Los algoritmos de control se diseñaron utilizando los ángulos de Euler, matrices de rotación, así como el cuaternión unitario. En cuanto a las trayectorias, se generaron de forma empírica y usando polinomios de tercer orden para llevar al vehículo aéreo por ciertos puntos específicos en posición. Adicionalmente, se obtuvo el modelo matemático del sistema y se realizó un análisis del mismo que ayudó, en gran medida, al diseño de los algoritmos de control antes mencionados. Y por último, resaltar que los algoritmos de control junto con las trayectorias generadas fueron validados mediante simulaciones numéricas.

Palabras clave: Vehículos aéreos, Algoritmo de control, Trayectoria, Ángulos de Euler, Cuaternión unitario.

Abstract of the thesis presented by Jonathan Hirata Acosta as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Electronics and Telecommunications with orientation in Instrumentation and Control.

Controller design for trajectory tracking in four-rotor aerial vehicles

Abstract approved by:

Dr. César Cruz Hernández

Thesis Co-Director

Dr. Javier Pliego Jiménez

Thesis Co-Director

This project addresses the problem of the designing of control algorithms for unmanned aerial vehicles, particularly of four rotors, as well as the generation of position trajectories for such system. Control algorithms were designed using Euler's angles, rotation matrices, as well as unit quaternion. The trajectories, were empirically generated and using third order polynomials to take the aerial vehicle through certain specific points in a tridimensional space. In addition, the mathematical model of the system was obtained and an analysis was carried out which helped to the design of the control algorithms mentioned above. Finally, the control algorithms and the generated trajectories were validated by means of numerical simulations.

Keywords: Aerial vehicle, Control algorithm, Trajectory, Euler angles, Unit Quaternion.

Dedicatoria

A familia y amigos por su apoyo incondicional.

Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por brindarme el espacio para continuar con mi desarrollo académico.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría. No. de becario: 634521

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico a través de proyecto de investigación de ciencia básica CONACYT entre instituciones, "Sincronización de Sistemas Complejos y Algunas Aplicaciones", Ref. 166654 y Continuación (A1-S-31628).

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	viii
Lista de tablas	x
 Capítulo 1. Introducción	
1.1. Estado del arte	1
1.2. Planteamiento del problema	3
1.3. Antecedentes	3
1.4. Objetivos	5
1.4.1. Objetivo general	5
1.4.2. Objetivos específicos	5
 Capítulo 2. Preliminares	
2.1. Descripción de la orientación de un cuerpo rígido	6
2.1.1. Matrices de rotación	6
2.1.2. Ángulos de Euler	9
2.1.3. Cuaternión unitario	11
2.2. Sistemas en cascada	13
 Capítulo 3. Modelo matemático del cuadricóptero	
3.1. Aerodinámica del cuadricóptero	16
3.2. Ecuaciones de movimiento	18
 Capítulo 4. Generación de trayectorias para el seguimiento del cuadricóptero	
4.1. Problema de regulación	21
4.2. Modos de vuelo del cuadricóptero	23
4.3. Problema de seguimiento de trayectorias	24
 Capítulo 5. Algoritmos de control	
5.1. Control de posición	27
5.2. Error de orientación	28
5.3. Control de orientación basado en ángulos de Euler	30
5.3.1. Control usando el error en términos de la matriz de rotación	32
5.4. Control de orientación basado en el cuaternión unitario	33
5.5. Análisis de estabilidad del sistema en cascada	36

Tabla de contenido (continuación)

Capítulo 6. Resultados

Capítulo 7. Conclusiones

Literatura citada 62

Lista de figuras

Figura	Página
1. Sistemas de referencia asociados a un cuerpo rígido.	6
2. Ángulos de Euler.	9
3. Sistema en cascada.	14
4. Diagrama del cuadricóptero.	16
5. Trayectoria 1 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en ángulos de Euler (error convencional).	43
6. Trayectoria 1 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en ángulos de Euler (error en términos de matriz de rotación).	43
7. Trayectoria 1 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en cuaternión unitario.	44
8. Normas de los errores de posición en la trayectoria 1 ($\ \tilde{\mathbf{p}}_i\ $, con $i = 1, \dots, 3$).	45
9. Trayectoria 2 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en ángulos de Euler (error convencional).	46
10. Trayectoria 2 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en ángulos de Euler (error en términos de matriz de rotación).	47
11. Trayectoria 2 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en cuaternión unitario.	47
12. Normas de los errores de posición en la trayectoria 2 ($\ \tilde{\mathbf{p}}_i\ $, con $i = 1, \dots, 3$).	48
13. Trayectoria 3 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en ángulos de Euler (error convencional).	49
14. Trayectoria 3 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en ángulos de Euler (error en términos de matriz de rotación).	50
15. Trayectoria 3 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en cuaternión unitario.	50
16. Normas de los errores de posición en la trayectoria 3 ($\ \tilde{\mathbf{p}}_i\ $, con $i = 1, \dots, 3$).	51
17. Trayectoria 4 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en ángulos de Euler (error convencional).	52
18. Trayectoria 4 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en ángulos de Euler (error en términos de matriz de rotación).	53
19. Trayectoria 4 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en cuaternión unitario.	53
20. Normas de los errores de posición en la trayectoria 4 ($\ \tilde{\mathbf{p}}_i\ $, con $i = 1, \dots, 3$).	54
21. Puntos que forman la trayectoria polinomial 1.	56
22. Seguimiento del cuadricóptero de la trayectoria polinomial 1.	57
23. Puntos que forman la trayectoria polinomial 2.	58

24. Seguimiento de la trayectoria polinomial 2. 59

Lista de tablas

Tabla		Página
1.	Valores de los parámetros del sistema.	42
2.	Ganancias de los controladores.	42
3.	Media cuadrática (RMS) de error de posición ($\tilde{p}$), entrada de fuerza de empuje (T) y entrada τ para la trayectoria 1.	45
4.	Media cuadrática (RMS) de error de posición ($\tilde{p}$), entrada de fuerza de empuje (T) y entrada τ para la trayectoria 2.	48
5.	Media cuadrática (RMS) de error de posición ($\tilde{p}$), entrada de fuerza de empuje (T) y entrada τ para la trayectoria 3.	51
6.	Media cuadrática (RMS) de error de posición ($\tilde{p}$), entrada de fuerza de empuje (T) y entrada τ para la trayectoria 4.	54
7.	Parámetros utilizados para la generación de la trayectoria polinomial 1.	55
8.	Parámetros utilizados para la generación de la trayectoria polinomial 2.	57

Capítulo 1. Introducción

Los vehículos aéreos no tripulados han despertado un gran interés en años recientes debido a la gran variedad de tareas que pueden realizar, que van desde aplicaciones militares así como tareas de búsqueda, vigilancia y transporte. Para realizar dichas tareas es necesario una correcta planeación de trayectorias y un diseño de esquemas de control que garanticen el seguimiento de la mismas. Dado que los vehículos aéreos son sistemas no lineales y subactuados, el diseño de trayectorias y controladores para estos sistemas es un problema complejo, de gran interés y relevancia para la comunidad científica. En este capítulo se presenta un primer acercamiento al tema de los vehículos aéreos, su importancia, algunas aplicaciones, así como el planteamiento del problema a resolver y los objetivos de este trabajo de tesis.

1.1. Estado del arte

Un vehículo aéreo no tripulado (UAV: *Unmanned Aerial Vehicle*) es un vehículo controlado autónomamente o desde tierra, utilizando planes de vuelo programados. Las aplicaciones de este tipo de vehículos es cada día mayor en tareas que implican algún tipo de dificultad o riesgo para vehículos convencionales tripulados por personas, como son la detección de incendios, la identificación de manchas de petróleo en el mar, el seguimiento del tráfico, la inspección de líneas de tendido eléctrico, etc.

Ahora bien, uno de estos vehículos, por ejemplo, equipado con una cámara, puede ser considerado como un ojo en el cielo y obviamente, puede ser utilizado en muchas aplicaciones. Por tanto, introducir el uso de este tipo de vehículos en las distintas áreas como exploración, búsqueda, monitoreo, y muchas más, sería un recurso de gran ayuda.

Uno de los UAV más utilizados para dichas aplicaciones es el cuadricóptero, que es, básicamente, un helicóptero de cuatro rotores. Se trata de una aeronave de despegue y aterrizaje vertical. Sus principales características son la capacidad de vuelo estacionario, despegue vertical y aterrizaje en cualquier terreno. Los movimientos de desplazamiento y rotación se logran ajustando la velocidad angular de cada rotor.

Los intereses particulares de la comunidad científica se han visto atraídos por los cuadricópteros, debido a sus dos principales ventajas, que resaltan Liu *et al.* (2015), sobre los helicópteros convencionales:

- 1) No se requieren enlaces complejos de control mecánico para la actuación del rotor.

- 2) Para un tamaño de fuselaje determinado, la utilización de cuatro rotores garantiza que cada rotor individual de los cuadricópteros sea más pequeño que el rotor principal de los helicópteros convencionales.

El primer cuadricóptero reportado fue construido en 1907 por los hermanos Breguet. Sin embargo, sólo había un medio de control proporcionado al piloto que era un acelerador para que el motor cambiara la velocidad del rotor y por otra parte, la maniobrabilidad y desempeño de la máquina resultó ser muy pobre, según Madani y Benallegue (2006).

El control de vuelo de helicópteros no tripulados es un área que plantea problemas interesantes para los investigadores de control. La estrategia de control clásica para helicópteros supone un modelo lineal obtenido para un punto de operación particular. La aplicación de la teoría de control no lineal moderna puede mejorar el rendimiento del cuadricóptero y permitir el seguimiento de trayectorias y maniobras agresivas (Castillo *et al.*, 2005).

El cuadricóptero es un excelente vehículo volador que por ser un sistema no lineal resulta muy atractivo para investigar problemas de control automático, tecnología avanzada de sensores e informática. El vuelo autónomo plantea desafíos de investigación como el control inteligente de robots aéreos, la planificación de trayectorias tridimensionales (3D), la gestión del tráfico aéreo multivehículo y la prevención de colisiones. Dado que el cuadricóptero es dinámicamente inestable, se requieren algoritmos de control para su estabilización.

El algoritmo de control juega un papel importante en este caso, debido a que se trata con el problema de llevar al vehículo aéreo de una posición inicial a una posición final (regulación), o bien, que dicho vehículo sea capaz de seguir una trayectoria predefinida (seguimiento).

La planeación y diseño de trayectorias, en el caso de los cuadricópteros, es un problema complejo ya que implica enfrentarse a las limitaciones físicas de dichos vehículos no tripulados, limitaciones del entorno operativo y otros requisitos operativos (Chamseddine *et al.*, 2012). Los enfoques de la planificación de la trayectoria dependen del dominio de la aplicación: vigilancia, búsqueda y seguimiento, misión de rescate y monitoreo de desastres, etc. Existe una gran variedad de enfoques disponibles en la literatura y cada uno tiene sus propias ventajas.

Uno de los objetivos de la planificación de las trayectorias es reducir el consumo de energía conduciendo un sistema lo más rápido posible de una posición a otra. Sin embargo, se debe tener cuidado de no violar las limitaciones del sistema, ya que esto puede conducir al sistema en lazo cerrado a un

comportamiento inestable (Chamseddine *et al.*, 2012).

1.2. Planteamiento del problema

En el presente trabajo de tesis se plantea el problema de diseño de controladores para vehículos aéreos del tipo cuadricóptero así como la generación de trayectorias para evaluar su desempeño. Las trayectorias propuestas y los algoritmos de control se validarán mediante simulaciones numéricas.

1.3. Antecedentes

Existen distintos trabajos que tratan con vehículos aéreos no tripulados, los cuales van orientados a ser aplicados en los diferentes ámbitos sociales. Dichos trabajos han sido desarrollados haciendo uso de las distintas herramientas que nos brinda la ciencia y la tecnología. Algunos ejemplos de ello se presentan a continuación.

Uno de los vehículos aéreos no tripulados más importantes fue desarrollado en los Estados Unidos. La Universidad de Maryland, en College Park, fue el escenario de la presentación del modelo AD-150, un vehículo aéreo no tripulado desarrollado por American Dynamics Flight Systems. El AD-150 utiliza alta tecnología de propulsión que le permite despegar verticalmente, así como un control PID para realizar la transición hacia vuelo horizontal, y mantener una capacidad de velocidad aérea muy alta.

Por otra parte, el Instituto Tecnológico de Massachusetts está desarrollando el proyecto UAV SWARM Health Management Project, cuyo objetivo es la posibilidad de ejecutar misiones de larga duración con una flota de UAVs en un entorno dinámico. Dado que la batería de cada vehículo es limitada, se han de coordinar relevándose para ir a repostar sin descuidar la misión que estén llevando a cabo. Los vehículos operan de forma autónoma, y el sistema es controlado por un ser humano (Tahir *et al.*, 2019).

En este tipo de vehículos aéreos se han implementado técnicas de control tanto lineales como no lineales para lograr su vuelo autónomo. En cuanto a los trabajos que utilizan enfoques de control lineales, involucran modelos simplificados y linealizados alrededor de puntos de equilibrio. Estos controles han sido diseñados como sistemas SISO (single-input single-output) con PID (proportional integrative derivative) (Kim y Shim, 2003), así como sistemas MIMO (multiple-inputs multiple-outputs) con controladores LQR (linear quadratic regulators) (Shin *et al.*, 2005), al igual que controladores robustos H_∞ (Smerlas *et al.*, 1998). La principal desventaja de este tipo de controladores es que no considera los términos de

acoplamiento y las no linealidades, lo cual se refleja en el bajo rendimiento del sistema cuando se aleja de los puntos de equilibrio en los que fueron linealizados los modelos.

Para superar los inconvenientes de los controladores lineales, se han propuesto varios controladores no lineales para ser aplicados en este tipo de sistemas. Entre ellos se encuentran, linealización por retroalimentación (Koo y Sastry, 1998), modelo de control predictivo (Kim y Shim, 2003), dinámica inversa (Reiner *et al.*, 1995), control adaptable (Johnson y Kannan, 2005; Zhao *et al.*, 2014) y robusto (Liu *et al.*, 2015). Otros trabajos se han implementado, tal es el caso de Tayebi y McGilvray (2006) donde utilizan un algoritmo de control basado en la compensación de los pares de Coriolis y giroscópicos y el uso de una estructura de retroalimentación PD, donde la acción proporcional es en términos del vector-cuaternión y las dos acciones derivadas están en términos de la velocidad angular del fuselaje y la velocidad del vector-cuaternión.

Por otra parte, Raffo *et al.* (2010) proponen una estrategia integral de control robusto predictivo y no lineal para resolver el problema de seguimiento del vehículo aéreo de cuatro rotores, donde su idea principal es combinar las ventajas de la metodología de control predictivo para seguir una trayectoria predefinida de manera uniforme, haciendo uso de la teoría no lineal H_∞ para hacer frente a perturbaciones desconocidas.

Además, entre los esquemas de control más utilizados se encuentran: Backstepping y Modos deslizantes. Existen trabajos en los cuales se han implementado ambos métodos y validados mediante simulaciones numéricas, para finalizar implementádonse en una plataforma experimental, como es el caso de Bouabdallah y Siegwart (2005).

En otros trabajos se inclinan por la técnica de control de Backstepping, tal es el caso de Madani y Benallegue (2006), en el que se presenta el modelo dinámico del cuadricóptero y el diseño del control, así como la validación por simulación numérica, lo cual fue de gran ayuda para tener un primer acercamiento para el análisis del vehículo aéreo. También se han realizado trabajos basados en estas técnicas de control, como el realizado por Saif *et al.* (2012) donde propusieron un esquema de control en el que se redujeron los parámetros de control (ganancias) en un cincuenta por ciento.

Como se ha mencionado, ambas técnicas de control son las que se han implementado con mayor frecuencia en este tipo de vehículos, y como es de esperarse cada una posee sus ventajas y desventajas, como se muestran en (Swarup, 2014), donde se comparan ambas técnicas de control de manera numérica en cuanto al rendimiento del vehículo aéreo.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Diseñar algoritmos de control y generar trayectorias para vehículos aéreos de cuatro rotores.

1.4.2. Objetivos específicos

- Estudiar el modelo matemático del cuadricóptero.
- Estudiar trayectorias factibles de seguimiento para cuadricópteros.
- Diseñar algoritmos de control para las trayectorias seleccionadas.
- Validar mediante simulación numérica los esquemas de control propuestos.

Capítulo 2. Preliminares

En este capítulo se presentan algunas herramientas matemáticas para la descripción de la orientación de un cuerpo rígido en el espacio, así como las relaciones cinemáticas del cuerpo en rotación. Dichas herramientas serán utilizadas para la obtención del modelo matemático del cuadricóptero y el diseño de estrategias de control.

2.1. Descripción de la orientación de un cuerpo rígido

2.1.1. Matrices de rotación

Para describir la orientación de un cuerpo rígido en el espacio con respecto a un marco de referencia inercial $\Sigma_i = \{x_i, y_i, z_i\}$, se puede fijar un segundo marco de referencia al cuerpo $\Sigma_b = \{x_b, y_b, z_b\}$, tal y como se muestra en la figura 1.

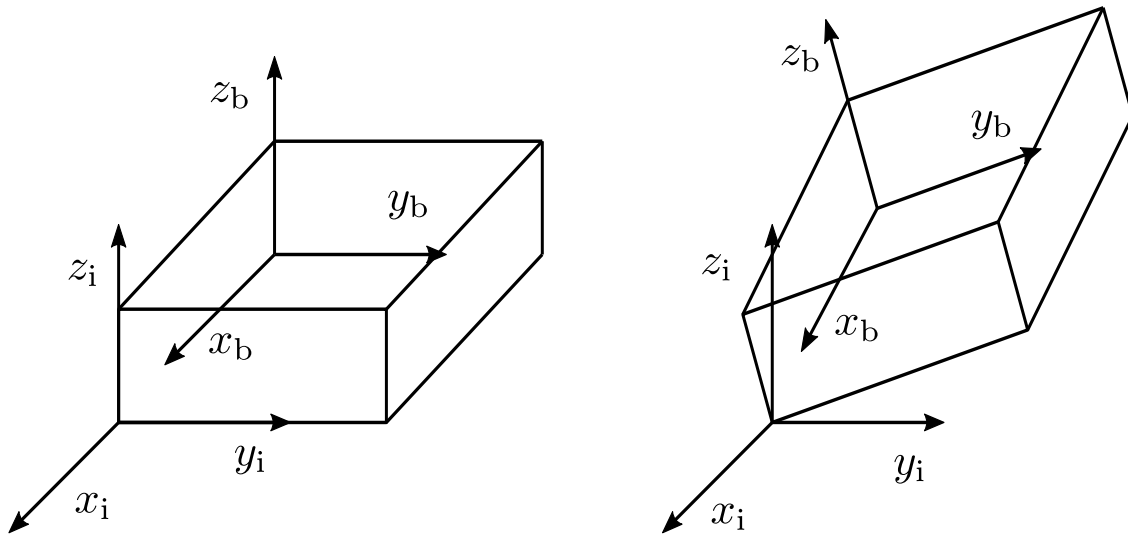


Figura 1. Sistemas de referencia asociados a un cuerpo rígido.

La orientación del cuerpo queda definida por las relaciones entre los vectores unitarios (x_i, y_i, z_i) y (x_b, y_b, z_b) , mediante

$$x_b^i = \begin{bmatrix} x_b \cdot x_i \\ x_b \cdot y_i \\ x_b \cdot z_i \end{bmatrix}, \quad y_b^i = \begin{bmatrix} y_b \cdot x_i \\ y_b \cdot y_i \\ y_b \cdot z_i \end{bmatrix}, \quad z_b^i = \begin{bmatrix} z_b \cdot x_i \\ z_b \cdot y_i \\ z_b \cdot z_i \end{bmatrix}, \quad (1)$$

donde los vectores $\mathbf{x}_b^i$, $\mathbf{y}_b^i$ y $\mathbf{z}_b^i$ son las proyecciones de los ejes del marco Σ_b sobre el marco de referencia inercial. En forma matricial se tiene

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \cdot \mathbf{x}_i & \mathbf{y}_b \cdot \mathbf{x}_i & \mathbf{z}_b \cdot \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_b \cdot \mathbf{y}_i & \mathbf{y}_b \cdot \mathbf{y}_i & \mathbf{z}_b \cdot \mathbf{y}_i \\ \mathbf{x}_b \cdot \mathbf{z}_i & \mathbf{y}_b \cdot \mathbf{z}_i & \mathbf{z}_b \cdot \mathbf{z}_i \end{bmatrix}. \quad (2)$$

La matriz $\mathbf{R}$ se llama *matriz de rotación* y describe la orientación del sistema de referencia Σ_b con respecto al marco de referencia inercial Σ_i . La matriz $\mathbf{R}$ también representa una transformación lineal y expresa cualquier vector de Σ_b con respecto a Σ_i . Así mismo, la matriz de rotación $\mathbf{R}$ presenta las siguientes propiedades (Spong *et al.*, 2006):

- Se forma por vectores ortonormales, por lo tanto se tiene

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}. \quad (3)$$

- Su determinante es igual a 1.

Las matrices de rotación pertenecen al grupo $SO(3)$ (*Special orthogonal*) definido como

$$SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}, \det(\mathbf{R}) = 1\}.$$

Por otra parte, la derivada de la matriz de rotación $\mathbf{R}$ está dada por:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega})\mathbf{R}, \quad (4)$$

donde $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^3$ es la *velocidad angular* expresada con respecto al marco de referencia inercial Σ_i y $\mathbf{S}(\cdot) \in \mathbb{R}^3$ es el *operador antisimétrico*, definido a continuación

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}) = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

para toda $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^3$.

El *operador antisimétrico* $\mathbf{S}(\cdot)$ presenta las siguientes propiedades (Spong *et al.*, 2006):

- Es un operador lineal,

$$\mathbf{S}(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{S}(\mathbf{a}) + \beta \mathbf{S}(\mathbf{b}), \quad (6)$$

para cualquier vector $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ que pertenecen a $\mathbb{R}^3$ y con escalares α y β .

- Para todos los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{p}$ que pertenezcan a $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{p} = \mathbf{a} \times \mathbf{p}. \quad (7)$$

- Dados $\mathbf{R} \in SO(3)$ y el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ se tiene

$$\mathbf{R}\mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}^T = \mathbf{S}(\mathbf{R}\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{R}^T\mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R} = \mathbf{S}(\mathbf{R}^T\mathbf{x}). \quad (8)$$

- Para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ se cumple:

$$\mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{S}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}\mathbf{y}^T - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{I}, \quad (9)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{y}) = \mathbf{y}\mathbf{x}^T - \mathbf{x}\mathbf{y}^T, \quad (10)$$

donde $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz identidad.

Sea $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}^T\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad angular expresada con respecto al marco de referencia fijo al cuerpo, tomando en cuenta la propiedad (8), la derivada de la matriz de rotación dada en (4) se puede expresar de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &= \mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega})\mathbf{R} \\ &= \mathbf{R}\mathbf{S}(\mathbf{R}^T\boldsymbol{\Omega}) \\ &= \mathbf{R}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \quad (11)$$

2.1.2. Ángulos de Euler

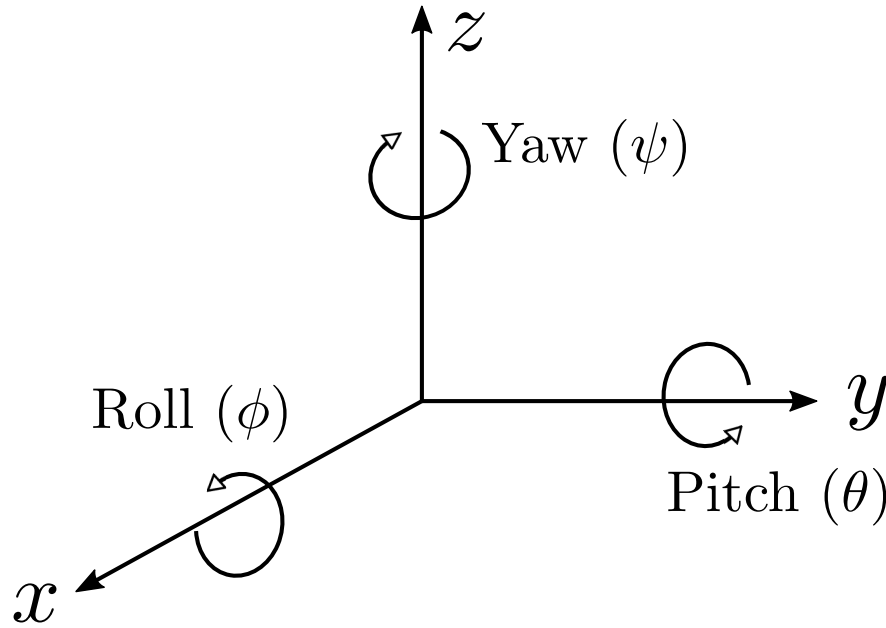


Figura 2. Ángulos de Euler.

Una forma simple de describir la orientación del cuadricóptero con respecto al marco inercial, y asimismo especificar a una matriz de rotación en términos de tres variables independientes, es usando los ángulos de Euler. Dichos ángulos se pueden observar en la figura 2.

Una matriz de rotación también puede describirse como el producto de una sucesión de rotaciones sobre un sistema de ejes coordenados principales tomando un orden específico (Spong *et al.*, 2006). Adoptando la convención de los ángulos de Euler XYZ , se obtiene la siguiente matriz de rotación

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{z,\psi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{x,\phi} = \begin{pmatrix} c_\psi c_\theta & c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\theta & c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi \\ s_\psi c_\theta & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\theta & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{pmatrix}, \quad (12)$$

donde $s_k = \sin(k)$, $c_k = \cos(k)$ con $k = \{\psi, \theta, \phi\}$.

En muchas ocasiones se tiene el problema inverso, es decir, dada una matriz de rotación $\mathbf{R}$ de la forma

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

se desea extraer los ángulos de Euler. Al igualar las ecuaciones (12) y (13) se obtiene:

$$\phi = \text{atan2}(r_{21}, r_{11}), \quad (14)$$

$$\theta = \text{atan2}(-r_{31}, \sqrt{1 - r_{31}^2}), \quad (15)$$

$$\psi = \text{atan2}(r_{32}, r_{33}). \quad (16)$$

Ángulos de Euler y velocidad angular

A continuación se obtendrá la relación cinemática entre la velocidad angular $\omega \in \mathbb{R}^3$ de un cuerpo en rotación y la derivada temporal de los ángulos de Euler $\dot{\zeta} = \text{col}(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$. Considérese las matrices de rotación básicas (Spong *et al.*, 2006):

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{pmatrix}, \mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix}, \mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

La derivada de la matriz de rotación dada en (12) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &= \mathbf{R}\mathbf{S}(\omega) \\ &= \mathbf{R}_z\mathbf{S}(\omega_z)\mathbf{R}_y\mathbf{R}_x + \mathbf{R}_z\mathbf{R}_y\mathbf{S}(\omega_y)\mathbf{R}_x + \mathbf{R}_z\mathbf{R}_y\mathbf{R}_x\mathbf{S}(\omega_x) \\ &= \mathbf{R}_z\mathbf{R}_y\mathbf{R}_x(\mathbf{R}_y\mathbf{R}_x)^T\mathbf{S}(\omega_z)\mathbf{R}_y\mathbf{R}_x + \mathbf{R}_z\mathbf{R}_y\mathbf{R}_x\mathbf{R}_x^T\mathbf{S}(\omega_y)\mathbf{R}_x + \mathbf{R}_z\mathbf{R}_y\mathbf{R}_x\mathbf{S}(\omega_x), \end{aligned} \quad (18)$$

utilizando la propiedad (8) resulta

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{R}\mathbf{S}((\mathbf{R}_y\mathbf{R}_x)^T\omega_z + \mathbf{R}_x^T\omega_y + \omega_x), \quad (19)$$

con $\omega_x = \text{col}(\dot{\phi}, 0, 0)$, $\omega_y = \text{col}(0, \dot{\theta}, 0)$, $\omega_z = \text{col}(0, 0, \dot{\psi})$. Entonces

$$\omega = \Psi(\zeta)\dot{\zeta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & c_\theta s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\theta c_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

con $\zeta = \text{col}(\phi, \theta, \psi)$. Por lo tanto, se puede deducir que

$$\dot{\zeta} = \Psi^{-1}\omega, \quad (21)$$

donde Ψ^{-1} es no singular $\forall \theta \neq \pi/2$.

2.1.3. Cuaternión unitario

Otra forma de describir la orientación de un cuerpo es utilizando el *cuaternión unitario* (Siciliano y Villani, 2012). Se trata de una representación que consta de cuatro parámetros, que se definen como

$$\mathcal{Q} = \{\eta, \epsilon\}, \quad (22)$$

donde η es la parte escalar y $\epsilon = \text{col}(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$ es la parte vectorial. Dicho cuaternión cumple la siguiente condición

$$\eta^2 + \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 = 1, \quad (23)$$

por lo cual es llamado cuaternión unitario. Ahora bien, la matriz de rotación en términos de los parámetros del cuaternión unitario se muestra a continuación (Siciliano *et al.*, 2010)

$$\mathbf{R} = (2\eta^2 - 1)\mathbf{I} + 2\epsilon\epsilon^T + 2\mathbf{S}(\epsilon), \quad (24)$$

o bien

$$\mathbf{R}(\eta, \epsilon) = \begin{pmatrix} 2(\eta^2 + \epsilon_x^2) - 1 & 2(\epsilon_x\epsilon_y - \eta\epsilon_z) & 2(\epsilon_x\epsilon_z + \eta\epsilon_y) \\ 2(\epsilon_x\epsilon_y + \eta\epsilon_z) & 2(\eta^2 + \epsilon_y^2) - 1 & 2(\epsilon_y\epsilon_z - \eta\epsilon_x) \\ 2(\epsilon_x\epsilon_z - \eta\epsilon_y) & 2(\epsilon_y\epsilon_z + \eta\epsilon_x) & 2(\eta^2 + \epsilon_z^2) - 1 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Algunas propiedades del cuaternión unitario son las siguientes:

- Elemento inverso

$$\mathcal{Q}^{-1} = \{\eta, -\epsilon\}. \quad (26)$$

- Aditividad

$$\mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2 = \{\eta_1 + \eta_2, \epsilon_1 + \epsilon_2\}. \quad (27)$$

- Multiplicación

$$\mathcal{Q}_1 * \mathcal{Q}_2 = \{\eta_1\eta_2 - \epsilon_1^T\epsilon_2, \eta_1\epsilon_2 + \eta_2\epsilon_1 + \epsilon_1 \times \epsilon_2\}. \quad (28)$$

- Elemento idéntico

$$\mathcal{Q} = \{1, \mathbf{0}\}. \quad (29)$$

Ecuaciones de propagación

A continuación se presentan las relaciones cinemáticas entre la velocidad angular de un cuerpo con respecto a la derivada temporal del cuaternión unitario, conocidas en la literatura como *ecuaciones de propagación*. Al derivar la ecuación (24) con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{\mathbf{R}} = 4\eta\dot{\eta}\mathbf{I} + 2\dot{\epsilon}\epsilon^T + 2\epsilon\dot{\epsilon}^T + 2\dot{\eta}\mathbf{S}(\epsilon) + 2\eta\mathbf{S}(\dot{\epsilon}) = \mathbf{R}\mathbf{S}(\omega). \quad (30)$$

Ahora bien, despejando $\mathbf{S}(\omega)$ de la ecuación anterior se tiene

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}. \quad (31)$$

Al realizar la multiplicación de matrices se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\omega) = & 8\eta^3\dot{\eta}\mathbf{I} - 4\eta\dot{\eta}\mathbf{I} + 8\eta\dot{\eta}\mathbf{I}\epsilon\epsilon^T - 8\eta^2\dot{\eta}\mathbf{I}\mathbf{S}(\epsilon) \\ & + 4\eta^2\dot{\epsilon}\epsilon^T\mathbf{I} - 2\dot{\epsilon}\epsilon^T\mathbf{I} + 4\dot{\epsilon}\epsilon^T\epsilon\epsilon^T - 4\eta\dot{\epsilon}\epsilon^T\mathbf{S}(\epsilon) \\ & + 4\eta^2\epsilon\dot{\epsilon}^T\mathbf{I} - 2\epsilon\dot{\epsilon}^T\mathbf{I} + 4\epsilon\dot{\epsilon}^T\epsilon\epsilon^T - 4\eta\epsilon\dot{\epsilon}^T\mathbf{S}(\epsilon) \\ & + 4\eta^2\dot{\eta}\mathbf{S}(\epsilon)\mathbf{I} - 2\dot{\eta}\mathbf{S}(\epsilon)\mathbf{I} + 4\dot{\eta}\mathbf{S}(\epsilon)\epsilon\epsilon^T - 4\eta\dot{\eta}\mathbf{S}(\epsilon)\mathbf{S}(\epsilon) \\ & + 4\eta^3\mathbf{S}(\dot{\epsilon})\mathbf{I} - 2\eta\mathbf{S}(\dot{\epsilon})\mathbf{I} + 4\eta\mathbf{S}(\dot{\epsilon})\epsilon\epsilon^T - 4\eta^2\mathbf{S}(\dot{\epsilon})\mathbf{S}(\epsilon). \end{aligned} \quad (32)$$

Usando las siguientes propiedades

$$\epsilon^T\epsilon = 1 - \eta^2, \quad (33)$$

$$\dot{\epsilon}^T\epsilon = \epsilon^T\dot{\epsilon} = -\eta\dot{\eta}, \quad (34)$$

$$\epsilon\epsilon^T = \mathbf{S}(\epsilon)\mathbf{S}(\epsilon) + \epsilon^T\epsilon\mathbf{I}, \quad (35)$$

$$\epsilon\dot{\epsilon}^T = \mathbf{S}(\dot{\epsilon})\mathbf{S}(\epsilon) + \epsilon^T\dot{\epsilon}\mathbf{I}, \quad (36)$$

$$\mathbf{S}(\epsilon)\epsilon = 0. \quad (37)$$

La ecuación (32) se puede escribir de la siguiente manera

$$\mathbf{S}(\omega) = 2\dot{\epsilon}\epsilon^T - 2\epsilon\dot{\epsilon}^T - 2\dot{\eta}\mathbf{S}(\epsilon) + 2\eta\mathbf{S}(\dot{\epsilon}). \quad (38)$$

Ahora bien, mediante la siguiente igualdad

$$\mathbf{y}\mathbf{x}^T - \mathbf{x}\mathbf{y}^T = \mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{y}), \quad (39)$$

la ecuación (38) se puede expresar de la siguiente forma

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{S}(\mathbf{S}(2\boldsymbol{\epsilon})\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) - \mathbf{S}(2\dot{\eta}\boldsymbol{\epsilon}) + \mathbf{S}(2\eta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}), \quad (40)$$

y por tanto

$$\boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon})\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - 2\dot{\eta}\boldsymbol{\epsilon} + 2\eta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (41)$$

Al multiplicar la ecuación (41) por $\boldsymbol{\epsilon}^T$ se obtiene

$$\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\omega} = -2\dot{\eta}, \quad (42)$$

de donde

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\omega}. \quad (43)$$

Para obtener la derivada temporal de la parte vectorial del cuaternión se multiplica la ecuación (41) por $\mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon})$, dando como resultado

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^T\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - 2\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + 2\eta\mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon})\dot{\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (44)$$

Usando las propiedades (33) y (34), y además despejando $2\mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon})\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ de (41), para después sustituirla en (44), se tiene

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{\omega} = \eta\boldsymbol{\omega} - 2\dot{\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (45)$$

Finalmente se obtiene

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\eta\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{\omega}}{2}. \quad (46)$$

Las ecuaciones cinemáticas (43) y (46) expresan la relación entre la derivada temporal del cuaternión y la velocidad angular del cuerpo.

2.2. Sistemas en cascada

En esta sección se describe una de las propiedades estructurales de los sistemas no lineales. Se trata de los *sistemas en cascada*, estudiados y analizados en (Sepulchre *et al.*, 2012), los cuales están formados

por dos subsistemas, que tienen como estados z y ξ , como se muestra en la figura 3 y están descritos por las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f(z, \xi), \\ \dot{\xi} &= a(\xi, u).\end{aligned}\tag{47}$$

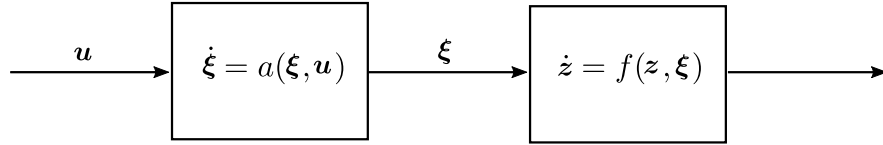


Figura 3. Sistema en cascada.

La primera característica de estos sistemas es que la entrada de control u sólo aparece en el subsistema ξ . Una caracterización adicional especifica las propiedades del subsistema y cómo pueden modificarse mediante la interconexión, que puede actuar como entrada de control o como una perturbación externa.

Para una descripción completa de los sistemas en cascada, no es suficiente identificar los subsistemas y sus propiedades de estabilidad. También es necesario caracterizar la naturaleza de la interconexión de dichos subsistemas.

En algunos casos la estabilización del subsistema ξ garantiza la estabilización del sistema completo en cascada. En la estabilización del subsistema ξ , que forma parte del sistema en cascada que se presenta a continuación:

$$\dot{z} = f(z) + \bar{\psi}(z, \xi),\tag{48}$$

$$\dot{\xi} = a(\xi, u),\tag{49}$$

el término de interconexión $\bar{\psi}$ actúa como una perturbación, la cual debe llevarse a cero sin desestabilizar el subsistema z . Un efecto potencial de desestabilización de $\bar{\psi}$ no es un obstáculo para lograr la estabilidad asintótica local.

Las siguientes suposiciones y proposición garantizan la estabilidad del sistema analizando el término de interconexión, y fueron tomadas de (Sepulchre *et al.*, 2012).

Suposición 1 Para el sistema en cascada descrito por (48)-(49) supóngase que:

- El punto de equilibrio $z = 0$ del subsistema $\dot{z} = f(z)$ es global y asintóticamente estable.
- Existe una entrada de control $u = k(\xi)$ tal que el subsistema $\dot{\xi} = a(\xi, k(\xi))$ tiene un punto de equilibrio global asintóticamente estable. ■

Suposición 2 El término de interconexión $\bar{\psi}(z, \xi)$ tiene un crecimiento lineal con respecto a z , es decir, existen dos funciones $\gamma_1(\cdot)$, $\gamma_2(\cdot)$ clase $\mathcal{K}$, diferenciables en $\xi = 0$, tal que

$$\|\bar{\psi}(z, \xi)\| \leq \gamma_1(\|\xi\|) \|z\| + \gamma_2(\|\xi\|). \quad (50)$$

■

Proposición 1 Supóngase que el término de interconexión $\bar{\psi}(z, \xi)$ satisface la Suposición 2 y además el subsistema $\dot{z} = f(z)$ tiene un punto de equilibrio exponencialmente estable con una función de Lyapunov W , la cual satisface las siguientes propiedades:

$$\alpha_1 \|z\|^2 \leq W(z) \leq \alpha_2 \|z\|^2, \quad \left\| \frac{\partial W}{\partial z} \right\| \leq \alpha_3 \|z\| \quad (51)$$

$$L_f W(z) \leq -\alpha_4 W(z), \quad \alpha_i > 0, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (52)$$

Entonces, las soluciones $z(t)$ de (48) se encuentran acotadas y convergen a cero para cualquier $\xi(t)$ que converge a cero. Además, con cualquier $u = k(\xi)$ que satisfaga la Proposición 1 para el sistema en cascada (48)-(49) se logra estabilidad globalmente asintótica de su punto de equilibrio $(z, \xi) = (0, 0)$. ■

Capítulo 3. Modelo matemático del cuadricóptero

En este capítulo se presenta el desarrollo matemático para la obtención de las ecuaciones de movimiento que describen el comportamiento del cuadricóptero.

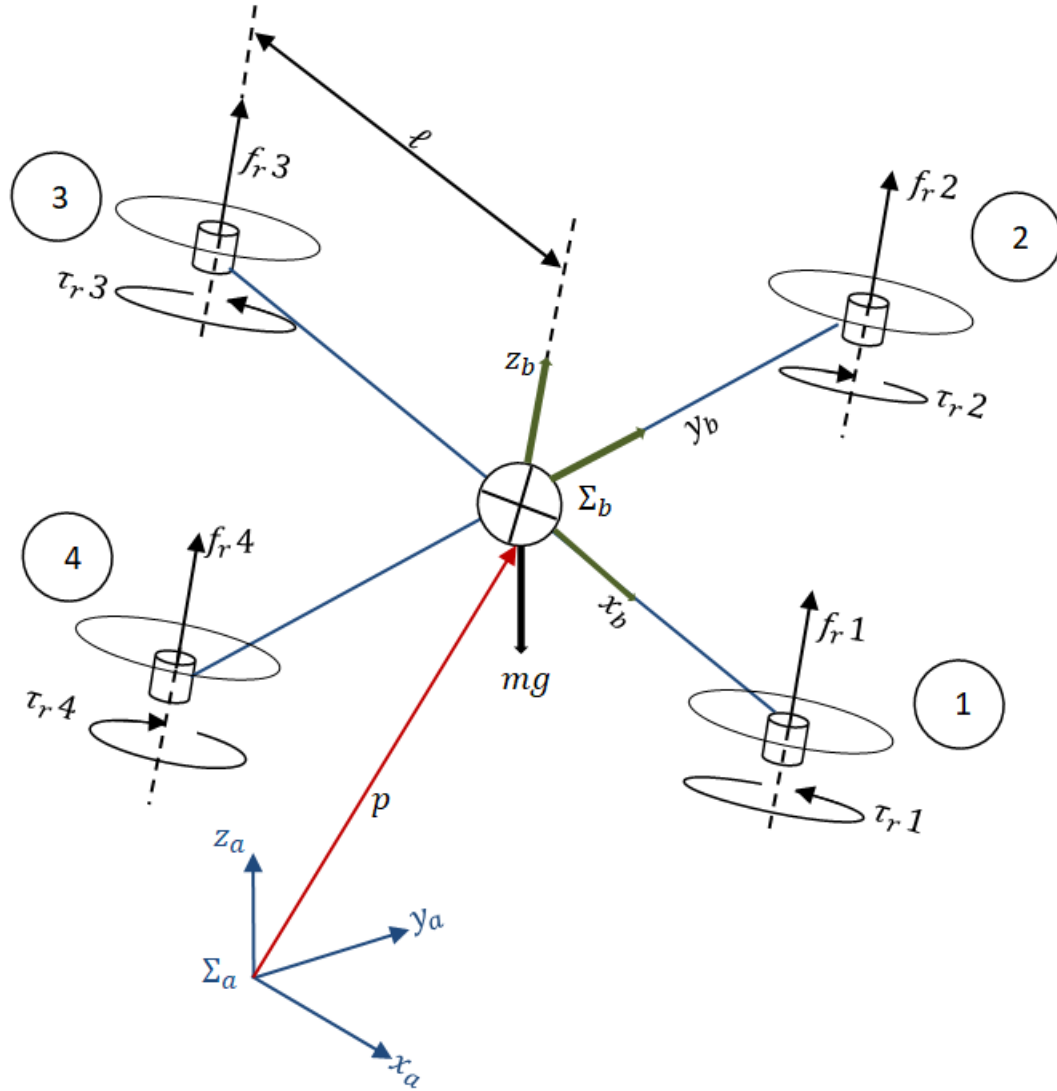


Figura 4. Diagrama del cuadricóptero.

3.1. Aerodinámica del cuadricóptero

Las entradas de control del cuadricóptero son las fuerzas y pares de empuje generadas por los cuatro rotores. Cada rotor genera una fuerza de empuje, que se expresa como lo muestran en su artículo Mahony *et al.* (2012), mediante la siguiente ecuación,

$$f_{ri} = C_T \omega_{ri}^2, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (53)$$

donde $C_T > 0$ es un coeficiente de empuje y ω_{ri} es la velocidad angular del rotor.

Por su parte, la fuerza total de empuje en el sistema está dada por

$$T = \sum_{i=1}^4 f_{ri} = \sum_{i=1}^4 C_T \omega_{ri}^2. \quad (54)$$

En cuanto al par generado por los rotores del sistema, se modela de la siguiente forma

$$\tau_{ri} = C_q \omega_{ri}^2, \quad (55)$$

donde $C_q > 0$ es el coeficiente del par, que al igual que el coeficiente de empuje depende de la geometría de la hélice y la densidad del aire.

El empuje total en el marco de referencia fijo al cuerpo se expresa como

$$\mathbf{f} = T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Ahora bien, los pares generados por las fuerzas aerodinámicas expresados con respecto al marco de referencia fijo al cuerpo están dados por

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_x + \boldsymbol{\tau}_y + \boldsymbol{\tau}_z, \quad (57)$$

donde (ver figura 4):

$$\boldsymbol{\tau}_x = \ell \mathbf{y}_b \times f_{r2} \mathbf{z}_b - \ell \mathbf{y}_b \times f_{r4} \mathbf{z}_b = \ell \begin{pmatrix} f_{r2} - f_{r4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \ell C_T \begin{pmatrix} \omega_{r2}^2 - \omega_{r4}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (58)$$

$$\boldsymbol{\tau}_y = \ell \mathbf{x}_b \times f_{r1} \mathbf{z}_b - \ell \mathbf{x}_b \times f_{r3} \mathbf{z}_b = \ell \begin{pmatrix} 0 \\ f_{r3} - f_{r1} \\ 0 \end{pmatrix} = \ell C_T \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{r3}^2 - \omega_{r1}^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (59)$$

y

$$\boldsymbol{\tau}_z = (\tau_{r2} + \tau_{r4} - \tau_{r1} \dots) \mathbf{z}_b = C_q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{r2}^2 + \omega_{r4}^2 - \omega_{r1}^2 - \omega_{r3}^2 \end{pmatrix}, \quad (60)$$

donde ℓ es la distancia del centro del cuadricóptero al centro de cada rotor.

Finalmente, al agrupar términos se obtiene la siguiente relación,

$$\begin{pmatrix} T \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_T & C_T & C_T & C_T \\ 0 & \ell C_T & 0 & -\ell C_T \\ -\ell C_T & 0 & \ell C_T & 0 \\ -C_q & C_q & -C_q & C_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{r1}^2 \\ \omega_{r2}^2 \\ \omega_{r3}^2 \\ \omega_{r4}^2 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Por último, el conjunto de fuerzas y pares expresados desde el marco de referencia inercial se escriben mediante

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{R}\mathbf{f} = T\mathbf{R}\mathbf{z}_a, \quad (62)$$

$$\boldsymbol{\tau}_a = \mathbf{R}\boldsymbol{\tau}. \quad (63)$$

3.2. Ecuaciones de movimiento

Sea $\mathbf{p}_a \in \mathbb{R}^3$ el vector de posición del centro de masa del cuadricóptero y $\mathbf{v}$ la velocidad lineal, ambas expresadas desde el marco de referencia inercial. La ecuación de Newton-Euler para el movimiento traslacional del centro de masa del cuadricóptero es

$$m\ddot{\mathbf{p}}_a = \mathbf{f}_a - mg\mathbf{z}_a = \mathbf{R}\mathbf{f} - mg\mathbf{z}_a, \quad (64)$$

donde m es la masa del cuadricóptero, g es la constante gravitacional y $\mathbf{z}_a = \text{col}(0, 0, 1)$. Por su parte, la ecuación de movimiento angular está dada por

$$\frac{d}{dt}\mathbf{h} = \boldsymbol{\tau}_a, \quad (65)$$

donde $\mathbf{h} = \mathbf{J}_i\boldsymbol{\Omega}$ es el momento angular y $\mathbf{J}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es el tensor de inercia calculado con respecto al sistema de referencia inercial. Nótese que la matriz $\mathbf{J}_i$ no es constante y debe calcularse para cada configuración que adopte el cuadricóptero durante su movimiento. Por lo tanto, se obtendrá una expresión equivalente a la ecuación (65).

Partiendo de que la energía cinética del sistema es igual calculada desde el marco de referencia fijo

y el inercial, se tiene,

$$\Omega J_i \Omega = \omega^T J \omega, \quad (66)$$

donde Ω y ω son respectivamente las velocidades angulares expresadas con respecto al marco inercial y el sistema de referencias fijo al cuerpo. El tensor de inercia J es una matriz constante, la cual se calcula con respecto al marco fijo del cuerpo. Tomando en cuenta

$$\Omega = R\omega \implies \omega = R^T \Omega, \quad (67)$$

se obtiene

$$\Omega^T J_i \Omega = (R^T \Omega)^T J R^T \Omega = \Omega^T R J R^T \Omega. \quad (68)$$

De la ecuación anterior, la relación entre los tensores de inercia es

$$J_i = R J R^T. \quad (69)$$

Ahora bien, tomando en cuenta (67) y (69) el momento angular se puede calcular de la siguiente manera

$$h = J_i \Omega = R J R^T R \omega = R J \omega. \quad (70)$$

Una vez obtenido el momento angular, se prosigue a derivar para encontrar los pares dinámicos en el sistema,

$$\dot{h} = \dot{R} J \omega + R J \dot{\omega} = R S(\Omega) J \omega + R J \dot{\omega} = \tau_a. \quad (71)$$

Al multiplicar la ecuación (71) por R^T , para expresar el vector $\dot{h}$ con respecto al marco de referencia fijo al cuerpo, se obtiene,

$$R^T \dot{h} = R^T S(\Omega) R J \omega + R^T R J \dot{\omega} = R^T \tau_a, \quad (72)$$

$$R^T \dot{h} = S(\omega) J \omega + J \dot{\omega} = \tau, \quad (73)$$

$$R^T \dot{h} = \omega \times J \omega + J \dot{\omega} = \tau. \quad (74)$$

Finalmente, las ecuaciones de movimiento que describen el comportamiento del cuadricóptero son

las siguientes:

$$m\ddot{\mathbf{p}}_a = T\mathbf{R}\mathbf{z}_a - mg\mathbf{z}_a, \quad (75)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}), \quad (76)$$

$$\dot{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}. \quad (77)$$

Una vez obtenido el modelo matemático del cuadricóptero, se debe tener en cuenta los siguientes aspectos:

- Las ecuaciones de movimiento angular que describen la orientación del cuerpo están desacopladas de la parte traslacional, siendo la primera un subsistema completamente actuado con $\boldsymbol{\tau}$ como entrada de control.
- Por su parte, la dinámica traslacional se presenta como un subsistema subactuado y que tiene como entrada de control al empuje total generado T .
- $\mathbf{R}\mathbf{z}_a$ es el término de acoplamiento entre ambos subsistemas y determina la dirección de la fuerza de empuje.
- Se puede observar también que la altura que alcanza el cuadricóptero puede controlarse por la fuerza total de empuje T , mientras que su posición en el plano cartesiano (x, y) se controla por su orientación (por ejemplo, los ángulos de Euler ϕ y θ).

Capítulo 4. Generación de trayectorias para el seguimiento del cuadricóptero

En este capítulo se aborda el problema de planeación de trayectorias para vehículos aéreos de cuatro rotores. Se presenta un análisis del modelo matemático que ayudará a encontrar aspectos importantes que se deben tomar en cuenta al diseñar trayectorias para este tipo de vehículos.

4.1. Problema de regulación

Una de las tareas básicas que el cuadricóptero puede realizar es mantenerse volando alrededor de un punto en el espacio tridimensional (punto de operación), o bien, desplazarse de un punto A a un punto B (por ejemplo, tareas de despegue o aterrizaje). Es decir, se trata de un *problema de regulación* o *estabilización* alrededor de un punto de operación. Por lo tanto, a continuación se obtienen los puntos de equilibrio del modelo matemático del cuadricóptero descrito en el capítulo 3.

Para el cálculo de los puntos de equilibrio del cuadricóptero, se tiene que $\ddot{\mathbf{p}}_a = \mathbf{0}$, por tanto resulta

$$\begin{aligned} T\mathbf{R}\mathbf{z}_a &= mg\mathbf{z}_a, \\ T\|\mathbf{R}\mathbf{z}_a\| &= mg\|\mathbf{z}_a\|, \end{aligned} \tag{78}$$

de donde se obtiene el valor de la magnitud de la fuerza de empuje en estado estacionario dada por

$$T = mg. \tag{79}$$

En estado estacionario la ecuación (76) se convierte en,

$$\mathbf{O} = \mathbf{R}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}), \tag{80}$$

donde $\mathbf{O}$ es una matriz de ceros de dimensión 3×3 . Puesto que la matriz de ceros de dimensión 3×3 no pertenece al grupo $SO(3)$, se concluye que en el equilibrio se tiene $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. Del análisis anterior y tomando en cuenta que, en estado estacionario, $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$ en (77) resulta $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$.

De la ecuación (78) se observa que la posición cartesiana $\mathbf{p} = \text{col}(x, y, z)$ no aparece de forma explícita, por lo que es posible concluir que cualquier punto en el espacio tridimensional es un punto de equilibrio.

Por su parte, para el subespacio de orientación se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathbf{z}_a &= \mathbf{z}_a, \\ \begin{pmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (81)$$

Como se puede observar, la matriz de rotación que satisface la ecuación anterior, es la matriz de rotación básica alrededor del eje z .

Puntos de equilibrio con ángulos de Euler

Si se adoptan los ángulos de Euler ZYX se tiene

$$\begin{pmatrix} c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi \\ s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi \\ c_\theta c_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (82)$$

Entonces, resolviendo las ecuaciones (82) para θ y ϕ , se tiene:

$$(c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi) = 0,$$

$$(c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi) = 0.$$

Al dividir entre c_ψ las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$s_\theta c_\phi + t_\psi s_\phi = 0,$$

$$s_\theta s_\phi - t_\psi c_\phi = 0.$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones:

$$s_\theta^2 c_\phi^2 + 2s_\theta c_\phi t_\psi s_\phi + t_\psi^2 s_\phi^2 = 0,$$

$$s_\theta^2 s_\phi^2 - 2s_\theta s_\phi t_\psi c_\phi + t_\psi^2 c_\phi^2 = 0.$$

Al agrupar términos y utilizar algunas identidades trigonométricas, resulta:

$$s_\theta^2 c_\phi^2 + t_\psi^2 s_\phi^2 = 0, \quad (83)$$

$$s_\theta^2 s_\phi^2 + t_\psi^2 c_\phi^2 = 0. \quad (84)$$

Ahora bien, sumando las ecuaciones (83) y (84) y agrupando términos semejantes se obtiene

$$s_\theta^2 + t_\psi^2 = 0.$$

Esta ecuación resultante, se cumple si los ángulos ϕ y θ son iguales a cero o múltiplos de π . Nótese que el ángulo ψ puede tomar cualquier valor. Este resultado concuerda con el resultado obtenido en (82). Del análisis anterior, se observa que el subsistema de posición tiene un número continuo de puntos de equilibrio o puntos de operación, sin embargo, el subespacio correspondiente a la orientación, el punto de operación no es arbitrario y sólo se tiene un grado de libertad.

4.2. Modos de vuelo del cuadricóptero

Como se mencionó en capítulos anteriores el cuadricóptero posee tres grados de libertad traslacionales (posición) y tres grados rotacionales (orientación) y solo cuenta con cuatro entradas de control. Dado que la dirección de la fuerza de empuje $T\mathbf{R}\mathbf{z}_a$ es función de la orientación de la aeronave no es posible diseñar una trayectoria para el subespacio de posición independiente del subespacio de orientación. Por tanto, podemos distinguir tres modos de vuelo principales (Kendoul *et al.*, 2010):

1. **Orientación:** en este modo de vuelo se controla la orientación del cuadricóptero, la trayectoria deseada puede estar en función de los ángulos de Euler, cuaterniones unitarios o directamente en términos de la matriz de rotación deseada. Este modo de vuelo también permite controlar la elevación o altura del vehículo.
2. **Posición:** este modo de vuelo permite controlar la posición del cuadricóptero permitiendo diseñar una trayectoria tridimensional. En este caso, la orientación deseada del vehículo está en función de la trayectoria cartesiana y la entrada de control para el subespacio de posición.
3. **Velocidad:** este modo es similar al modo posición, con la diferencia que el vehículo aéreo de cuatro rotores sigue un perfil de velocidad deseado. De igual manera, la orientación deseada es

una función del perfil de velocidad y la fuerza de empuje.

Maniobras de vuelo más complejas para el cuadricóptero se pueden realizar como una combinación de los modos de vuelo antes mencionados. Este trabajo se enfoca sólo en el modo de vuelo de posición.

4.3. Problema de seguimiento de trayectorias

Como se mencionó en la sección anterior, el problema de llevar el vehículo aéreo desde una posición inicial hasta una posición final, se puede abordar como un problema de control de regulación. Sin embargo, en muchas ocasiones se requiere que el vehículo aéreo realice el recorrido en un tiempo determinado, y además pase por puntos intermedios. Por tanto, la trayectoria deseada debe ser una función del tiempo. Las *trayectorias deseadas* se refieren a las funciones del tiempo que se encargarán, por medio de los algoritmos de control, de llevar al sistema al comportamiento que se desee. En este caso, se trata de trayectorias en posición para el cuadricóptero.

Se aborda el problema de generación de trayectorias que pasen a través de una secuencia de puntos, llamados puntos de vía.

Considérese un ejemplo simple para un camino específico de tres puntos, q_0 , q_1 y q_2 , tal que dichos puntos son alcanzados en los tiempos t_0 , t_1 y t_2 , respectivamente. Si, además, de esas restricciones se imponen otras de velocidad y aceleración, tanto iniciales como finales, se obtiene lo siguiente:

$$q(t_0) = q_0,$$

$$\dot{q}(t_0) = v_0,$$

$$\ddot{q}(t_0) = \alpha_0,$$

$$q(t_1) = q_1,$$

$$q(t_2) = q_2,$$

$$\dot{q}(t_2) = v_2,$$

$$\ddot{q}(t_2) = \alpha_2.$$

Dicha trayectoria podría ser generada usando un polinomio de sexto orden

$$q(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 + a_6t^6. \quad (85)$$

Una de las ventajas de usar este polinomio es que $q(t)$ es continuamente diferenciable, por tanto, no hay por qué preocuparse por discontinuidades en la velocidad y la aceleración. Sin embargo, para determinar los coeficientes de este polinomio, se tiene que resolver un sistema lineal de ecuaciones de dimensión siete. La clara desventaja de utilizar este enfoque es que si aumenta el número de puntos de la trayectoria, también se incrementa el grado del polinomio y por ende el número de coeficientes a calcular, haciendo más complejo al método cuando se usan más puntos para dicha trayectoria.

Una alternativa de usar un sólo polinomio de orden superior para generar una trayectoria completa, es usar un polinomio de orden inferior para generar segmentos de la trayectoria entre puntos vía adyacentes. Por ello, estos polinomios de orden inferior son usados para interpolar puntos de una trayectoria. Con este enfoque, se debe tener cuidado con las restricciones de velocidad y aceleración en los puntos de la trayectoria, donde se cambia de un polinomio a otro.

Para el primer segmento de la trayectoria, se supone que los tiempos iniciales y finales son t_0 y t_f , respectivamente, y las restricciones de velocidad inicial y final se proponen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} q(t_0) &= q_0; & q(t_f) &= q_1, \\ \dot{q}(t_0) &= v_0; & \dot{q}(t_f) &= v_1. \end{aligned} \tag{86}$$

El polinomio requerido para generar cada segmento de la trayectoria es el siguiente

$$q(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3, \tag{87}$$

donde:

$$a_0 = q_0, \tag{88}$$

$$a_1 = v_0, \tag{89}$$

$$a_2 = \frac{3(q_1 - q_0) - (2v_0 + v_1)(t_f - t_0)}{(t_f - t_0)^2}, \tag{90}$$

$$a_3 = \frac{2(q_0 - q_1) + (v_0 + v_1)(t_f - t_0)}{(t_f - t_0)^3}. \tag{91}$$

Una secuencia de movimientos puede ser establecida con la expresión anterior, usando las condiciones finales q_f, v_f como condiciones iniciales para el siguiente movimiento.

También, se proponen algunas trayectorias, que fueron generadas de manera empírica, y cuyo propósito fundamental es evaluar y comparar el desempeño de los algoritmos de control, que se diseñarán más

adelante en el capítulo 5 de esta tesis. Las trayectorias propuestas para el seguimiento del cuadricóptero son las siguientes:

■ **Trayectoria 1**

$$x_d = 3 \cos(2\pi t/10), \quad (92)$$

$$y_d = 3 \sin(2\pi t/10), \quad (93)$$

$$z_d = 8(1 - e^{-t/4}). \quad (94)$$

■ **Trayectoria 2**

$$x_d = 3 \cos(2\pi t/10), \quad (95)$$

$$y_d = 3 \sin(2\pi t/10), \quad (96)$$

$$z_d = 0.3 \cos(\pi t) + 6. \quad (97)$$

■ **Trayectoria 3**

$$x_d = \cos(\pi t/20) - \cos^2(\pi t/60), \quad (98)$$

$$y_d = \sin(\pi t/30) + \sin^3(\pi t/20), \quad (99)$$

$$z_d = 8(1 - e^{-t/4}). \quad (100)$$

■ **Trayectoria 4**

$$x_d = 3 \cos(2\pi t/10), \quad (101)$$

$$y_d = 3 \sin(2\pi t/10), \quad (102)$$

$$z_d = 3 \cos(2\pi t/10) + 6. \quad (103)$$

Capítulo 5. Algoritmos de control

Una vez visto la planeación de las trayectorias y obtenido el modelo matemático del cuadricóptero, en este capítulo se abordará el problema de diseño de los algoritmos de control para dicho sistema, con los cuales será posible el seguimiento de las trayectorias propuestas.

5.1. Control de posición

Para controlar la posición cartesiana del cuadricóptero solo se tiene una entrada de control, para resolver este problema considérese la entrada de control auxiliar

$$\mathbf{u} = T\mathbf{R}_d\mathbf{z}_a - mg\mathbf{z}_a, \quad (104)$$

donde $\mathbf{R}_d$ es la *matriz de rotación deseada*. Basándose en la dinámica traslacional y tomando en cuenta (104), las ecuaciones de movimiento traslacional pueden escribirse de la siguiente forma

$$m\ddot{\mathbf{p}}_a = T\mathbf{R}\mathbf{z}_a - mg\mathbf{z}_a + \mathbf{u} - \mathbf{u} \quad (105)$$

$$= T(\mathbf{R} - \mathbf{R}_d)\mathbf{z}_a + \mathbf{u}. \quad (106)$$

El objetivo de control es el diseño de la entrada $\mathbf{u}$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_d - \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} = \dot{\mathbf{p}}_d - \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}, \quad (107)$$

donde $\tilde{\mathbf{p}}$ es el error de posición y $\mathbf{p}_d$ es la posición deseada, la cual debe ser diferenciable al menos cuatro veces. Por su parte $T(\mathbf{R} - \mathbf{R}_d)\mathbf{z}_a$ es el término de acoplamiento, el cual se desvanece cuando $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_d$.

Para diseñar la ley de control auxiliar $\mathbf{u}$ no se considerará el término de interconexión $T(\mathbf{R} - \mathbf{R}_d)$ y se asumirá que existe una entrada de control τ para el subespacio de orientación que garantiza $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_d$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Considérese el siguiente subsistema

$$m\ddot{\mathbf{p}}_a = \mathbf{u}, \quad (108)$$

la entrada de control propuesta que garantiza el seguimiento de trayectorias en posición para el sistema descrito en (108), está dada por

$$\mathbf{u} = m\ddot{\mathbf{p}}_d + \mathbf{K}_v\dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{p}}, \quad (109)$$

donde K_v y K_p son matrices definidas positivas.

La dinámica en lazo cerrado para el subsistema de traslación, queda de la siguiente forma

$$\ddot{\tilde{\mathbf{p}}} + \frac{1}{m}K_v\dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \frac{1}{m}K_p\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{0}. \quad (110)$$

El sistema (110) tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable.

La entrada de control $\mathbf{u}$ es una entrada de control virtual, por lo que no es implementable. Sin embargo, será utilizada para calcular la fuerza de empuje T y la matriz de rotación deseada $\mathbf{R}_d$. De la ecuación (104) la fuerza de empuje se puede calcular como

$$T = \|\mathbf{u} + mg\mathbf{z}_a\|, \quad (111)$$

donde se ha utilizado $\|\mathbf{R}_d\mathbf{z}_a\| = 1$. En secciones posteriores se mostrará como obtener la orientación deseada a partir de la ecuación (104).

5.2. Error de orientación

Antes de presentar los algoritmos de control de orientación es necesario definir apropiadamente los errores de orientación y velocidad angular. Como se mencionó en el capítulo 2, la orientación de un cuerpo rígido en el espacio puede describirse por una matriz de rotación.

Primeramente, se considera a el marco de referencia deseado como $\Sigma_d = (\mathbf{x}_d, \mathbf{y}_d, \mathbf{z}_d)$ y a $\mathbf{R}_d(t) \in SO(3)$ como la matriz de rotación que define la orientación del marco Σ_d con respecto al marco inercial Σ_i .

En muchos esquemas de control el error se define como una diferencia entre el valor deseado y la variable a controlar, en este caso, el error de orientación se podría definir como $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_d(t) - \mathbf{R}$ donde el objetivo de control sería $\tilde{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{O}$. Sin embargo, se tienen dos problemas fundamentales con esta definición del error, $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_d(t) - \mathbf{R} \notin SO(3)$ y $\mathbf{O} \notin SO(3)$.

Una solución sencilla es utilizar una parametrización de la orientación, por ejemplo, los ángulos de Euler *roll*, *pitch* y *yaw* descritos en el capítulo 2. En este caso el error se puede definir de la siguiente manera

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}} \triangleq \boldsymbol{\zeta}_d - \boldsymbol{\zeta}, \quad (112)$$

donde ζ_d son los *ángulos deseados*. La derivada del error definido en (112) está dado por

$$\dot{\zeta} = \dot{\zeta}_d - \dot{\zeta}. \quad (113)$$

Con base en las relaciones cinemáticas presentadas en el capítulo 2 del error de velocidad angular está dado por

$$\tilde{\omega} = \omega_d - \omega = \Psi(\zeta_d)\dot{\zeta}_d - \Psi(\zeta)\dot{\zeta}, \quad (114)$$

donde $\omega_d \in \mathbb{R}^3$ es la *velocidad angular deseada* expresada con respecto al marco de referencia fijo al cuadricóptero. A pesar de la simplicidad del error de orientación definido en (112), se tiene una singularidad cuando el ángulo θ alcanza los noventa grados y la matriz $\Psi(\zeta)$ pierde rango. Para resolver este problema, el error de orientación se definirá en términos de la matriz de rotación.

El cuadricóptero alcanza la orientación deseada cuando los marcos de referencia Σ_b y Σ_d se alinean, es decir,

$$R = R_d(t) \implies R^T R_d = I. \quad (115)$$

Por tanto, una manera apropiada de definir el error de orientación es la siguiente

$$\tilde{R} = R^T R_d, \quad (116)$$

donde el objetivo de control es lograr que $\tilde{R} \rightarrow I$. Nótese que en este caso la matriz identidad si pertenece al grupo $SO(3)$. La matriz $\tilde{R}$ es la rotación que debe realizar el cuadricóptero para alcanzar la orientación deseada descrita por R_d , es decir, $\tilde{R}$ es una medida del error de orientación.

Al derivar la matriz de rotación dada en (116) se obtiene

$$\dot{\tilde{R}} = S(\tilde{\omega})\tilde{R} = S(R^T \Omega_d - R^T \Omega)\tilde{R}, \quad (117)$$

donde Ω_d es la velocidad angular deseada expresada con respecto al marco inercial. Por tanto, el error de velocidad angular está dado por

$$\tilde{\omega} = R^T \Omega_d - \omega = \tilde{R} \omega_d - \omega, \quad (118)$$

con $\Omega_d = R_d \omega_d$.

5.3. Control de orientación basado en ángulos de Euler

Para lograr que el cuadricóptero siga una trayectoria deseada en posición, es necesario que la orientación del vehículo se alinee con la orientación deseada. Si se adoptan los ángulos de Euler ZYX la ecuación (104) toma la siguiente forma

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} c_{\psi_d} s_{\theta_d} c_{\phi_d} + s_{\psi_d} s_{\phi_d} \\ s_{\psi_d} s_{\theta_d} c_{\phi_d} - c_{\psi_d} s_{\phi_d} \\ c_{\theta_d} c_{\phi_d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}. \quad (119)$$

Con esto, se pueden resolver las ecuaciones no lineales de (119) para obtener los ángulos θ_d y ϕ_d . Otro punto que hay que tener presente es que, como se vio anteriormente el ángulo ψ_d es arbitrario.

De la tercer fila de (119) se obtiene que

$$T = \frac{u_z + mg}{c_{\theta_d} c_{\phi_d}}. \quad (120)$$

Ahora bien, usando la primera y segunda fila de (119) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = (u_z + mg) \begin{pmatrix} c_{\psi_d} & s_{\psi_d}/c_{\theta_d} \\ s_{\psi_d} & -c_{\psi_d}/c_{\theta_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tan(\theta_d) \\ \tan(\phi_d) \end{pmatrix}. \quad (121)$$

Encontrando la solución para $\tan(\theta_d)$ y $\tan(\phi_d)$:

$$\tan(\theta_d) = \frac{1}{u_z + mg} (c_{\psi_d} u_x + s_{\psi_d} u_y), \quad (122)$$

$$\tan(\phi_d) = \frac{c_{\theta_d}}{u_z + mg} (s_{\psi_d} u_x - c_{\psi_d} u_y). \quad (123)$$

Ahora despejando los ángulos deseados

$$\theta_d = \tan^{-1} \left(\frac{1}{u_z + mg} (c_{\psi_d} u_x + s_{\psi_d} u_y) \right), \quad (124)$$

$$\phi_d = \tan^{-1} \left(\frac{c_{\theta_d}}{u_z + mg} (s_{\psi_d} u_x - c_{\psi_d} u_y) \right). \quad (125)$$

Una solución alternativa para calcular ϕ_d es la siguiente,

$$\tan(\phi_d) = \frac{s_{\phi_d}}{c_{\phi_d}} = \frac{c_{\theta_d}}{u_z + mg} (s_{\psi_d} u_x - c_{\psi_d} u_y). \quad (126)$$

Por tanto,

$$s_{\phi_d} = \frac{c_{\phi_d} c_{\theta_d}}{u_z + mg} (s_{\psi_d} u_x - c_{\psi_d} u_y) = \frac{1}{T} (s_{\psi_d} u_x - c_{\psi_d} u_y). \quad (127)$$

Resultando

$$\phi_d = \sin^{-1} \left(\frac{1}{T} (s_{\psi_d} u_x - c_{\psi_d} u_y) \right). \quad (128)$$

Una vez obtenidos los ángulos de Euler deseados, el siguiente paso es diseñar la ley de control para la dinámica rotacional. Considérese la ley de control dada por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J} \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}, \quad (129)$$

donde $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{R}^3$ es una nueva entrada de control. La dinámica en lazo cerrado está dada por

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}. \quad (130)$$

El objetivo de control es el diseño de dicha entrada $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\boldsymbol{\zeta}} = \boldsymbol{\zeta}_d - \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}} = \dot{\boldsymbol{\zeta}}_d - \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{0} \quad (131)$$

donde $\boldsymbol{\zeta} = \text{col}(\phi, \theta, \psi)$ y $\boldsymbol{\zeta}_d = \text{col}(\phi_d, \theta_d, \psi_d)$.

Tomando en cuenta las relaciones cinemáticas presentadas en el capítulo 2, la velocidad angular y su derivada con respecto al tiempo, pueden ser expresadas como función de $\boldsymbol{\zeta}$ y $\dot{\boldsymbol{\zeta}}$ como se muestra a continuación

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\zeta}) \ddot{\boldsymbol{\zeta}} + \dot{\boldsymbol{\Psi}}(\boldsymbol{\zeta}, \dot{\boldsymbol{\zeta}}) \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}. \quad (132)$$

Entonces si se diseña la entrada de control $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ de la siguiente manera

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\Psi}(\ddot{\boldsymbol{\zeta}}_d + \mathbf{K}_\omega \dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}} + \mathbf{K}_o \tilde{\boldsymbol{\zeta}}) + \dot{\boldsymbol{\Psi}} \dot{\boldsymbol{\zeta}}, \quad (133)$$

la dinámica en lazo cerrado está dada por

$$\ddot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}} + \mathbf{K}_\omega \dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}} + \mathbf{K}_o \tilde{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{0}. \quad (134)$$

Dicha dinámica tiene un punto de equilibrio asintótico y exponencialmente estable, $(\dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}, \tilde{\boldsymbol{\zeta}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

5.3.1. Control usando el error en términos de la matriz de rotación

El esquema de control presentado en la sección anterior tiene la desventaja de que el cuadricóptero no puede seguir trayectorias en el espacio tridimensional para las cuales el ángulo θ sea $\pi/2$ radianes. Para resolver este problema, en este apartado, se presenta un algoritmo de control basado en el error de orientación definido en (116). Los ángulos deseados y la matriz de rotación deseada se calculan del mismo modo que en la sección anterior.

Ahora bien, a la matriz de rotación $\tilde{\mathbf{R}}$ definida en (116) es posible extraer los ángulos de Euler ZYX denotados por $\tilde{\zeta}$, los cuales también contienen información del error de orientación, de tal forma que si $\tilde{\zeta} \rightarrow \mathbf{0}$ implica $\tilde{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{I}$. Es importante mencionar que el error de orientación $\tilde{\zeta}$ obtenido a partir de la matriz $\tilde{\mathbf{R}}$ no es equivalente al error definido en (112). Además, también se cumplen las siguientes relaciones cinemáticas:

$$\tilde{\omega} = \Psi(\tilde{\zeta})\dot{\tilde{\zeta}}, \quad (135)$$

$$\dot{\tilde{\omega}} = \Psi(\tilde{\zeta})\ddot{\tilde{\zeta}} + \dot{\Psi}(\tilde{\zeta}, \dot{\tilde{\zeta}})\dot{\tilde{\zeta}}. \quad (136)$$

Por otro lado, la derivada del error de velocidad angular dado en (118) está dada por

$$\dot{\tilde{\omega}} = \tilde{\mathbf{R}}\dot{\omega}_d + \mathbf{S}(\tilde{\omega})\omega - \dot{\omega}, \quad (137)$$

donde $\dot{\omega}_d \in \mathbb{R}^3$ es la *aceleración angular deseada*. Tomando en cuenta la ecuación anterior y las ecuaciones (130) y (135)-(137) se puede obtener la siguiente expresión

$$\Psi(\tilde{\zeta})\ddot{\tilde{\zeta}} + \dot{\Psi}(\tilde{\zeta}, \dot{\tilde{\zeta}})\dot{\tilde{\zeta}} = \tilde{\mathbf{R}}\dot{\omega}_d + \mathbf{S}(\tilde{\omega})\omega - \dot{\tau}. \quad (138)$$

En este caso, la ley de control propuesta es la siguiente,

$$\dot{\tau} = \tilde{\mathbf{R}}\dot{\omega}_d + \mathbf{S}(\tilde{\omega})\omega - \dot{\Psi}(\tilde{\zeta}, \dot{\tilde{\zeta}})\dot{\tilde{\zeta}} + \Psi(\tilde{\zeta}) \left(\mathbf{K}_\omega \dot{\tilde{\zeta}} + \mathbf{K}_o \tilde{\zeta} \right), \quad (139)$$

donde $\mathbf{K}_\omega \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $\mathbf{K}_o \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ son matrices simétricas definidas positivas. Al sustituir la ley de control (139) en (138) se obtiene la dinámica en lazo cerrado dada por

$$\ddot{\tilde{\zeta}} + \mathbf{K}_\omega \dot{\tilde{\zeta}} + \mathbf{K}_o \tilde{\zeta} = \mathbf{0}. \quad (140)$$

Utilizando esta alternativa, se amplía el margen de funcionamiento del sistema, debido a que en el caso anterior, el cuadricóptero no puede llegar a los 90 grados de inclinación, mientras que en este caso, lo que no puede llegar a los 90 grados es el error de orientación.

5.4. Control de orientación basado en el cuaternión unitario

Para evitar las singularidades que presentan los esquemas de control anteriores, en esta sección, se diseña un esquema de control basado en cuaterniones unitarios. En este caso, la dinámica del cuadricóptero está descrita por las siguientes ecuaciones:

$$m\ddot{\mathbf{p}}_a = T\mathbf{R}\mathbf{z}_a - mg\mathbf{z}_a, \quad (141)$$

$$\dot{\eta} = -\frac{\boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\omega}}{2}, \quad (142)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\eta \mathbf{I} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon})}{2} \boldsymbol{\omega}, \quad (143)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}. \quad (144)$$

En el diseño del algoritmo de control anterior, se encontraron las expresiones para calcular los ángulos de Euler deseados en base a la entrada de control $\mathbf{u}$ y las trayectorias cartesianas. De manera similar, se encontrarán las expresiones para calcular el cuaternión unitario deseado. Por lo que teniendo en cuenta la matriz (25), resulta

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 2(\epsilon_{xd}\epsilon_{zd} + \eta_d\epsilon_{yd}) \\ 2(\epsilon_{yd}\epsilon_{zd} - \eta_d\epsilon_{xd}) \\ 2(\eta_d^2 + \epsilon_{zd}^2) - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}. \quad (145)$$

En este caso, debido a que se tienen cuatro incógnitas y tres ecuaciones, por simplicidad se fijará una de dichas incógnitas con valor de cero, la cual será ϵ_{zd} .

Con ello resulta:

$$\eta_d = \sqrt{\frac{m(u_z + g)}{2T} + \frac{1}{2}}, \quad (146)$$

$$\epsilon_{xd} = -\frac{mu_y}{2T\eta_d}, \quad (147)$$

$$\epsilon_{yd} = \frac{mu_y}{2T\eta_d}, \quad (148)$$

$$\epsilon_{zd} = 0. \quad (149)$$

Por su parte la velocidad angular deseada está dada por

$$\boldsymbol{\omega}_d = 2 \begin{pmatrix} \eta_d \mathbf{I} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) \\ -\boldsymbol{\epsilon}_d^T \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_d \\ \dot{\eta}_d \end{pmatrix}, \quad (150)$$

donde $\dot{\eta}_d \in \mathbb{R}$ y $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_d \in \mathbb{R}^3$ son las derivadas temporales del cuaternión deseado, las cuáles se obtienen al derivar las ecuaciones (146)-(149). El error de orientación descrito por la matriz de rotación $\tilde{\mathbf{R}}$ se puede expresar en términos del cuaternión de la manera siguiente,

$$\tilde{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}^{-1} \mathcal{Q}_d = \{\tilde{\eta}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}\}. \quad (151)$$

Ahora bien, siguiendo con el diseño del control

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}\tilde{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \quad (152)$$

con lo cual, resulta la siguiente dinámica en lazo cerrado

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}. \quad (153)$$

El control auxiliar propuesto $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ basado en cuaterniones unitarios está dado por

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{K}_\omega \tilde{\boldsymbol{\omega}} + k_p \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (154)$$

donde $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ es el error de velocidad definido en (118), k_p es una constante positiva y $\mathbf{K}_\omega \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es una matriz definida positiva. Finalmente, la dinámica en lazo cerrado esta dada por:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} = -\mathbf{K}_\omega \tilde{\boldsymbol{\omega}} - k_p \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (155)$$

$$\dot{\tilde{\eta}} = -\frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}}{2}, \quad (156)$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} = \frac{\tilde{\eta} \mathbf{I} - \mathbf{S}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}})}{2} \tilde{\boldsymbol{\omega}}. \quad (157)$$

Es importante mencionar que a diferencia de los algoritmos de control basados en los ángulos de Euler, las ecuaciones en lazo cerrado descritas por (155)-(157) son ecuaciones no lineales y sus puntos de equilibrio son $(\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\eta}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}) = (\mathbf{0}, \pm 1, \mathbf{0})$.

Análisis de estabilidad

Para analizar el punto de equilibrio se propone la siguiente función de Lyapunov

$$V = k_p(\tilde{\eta} - 1)^2 + k_p\tilde{\epsilon}^T\tilde{\epsilon} + \frac{1}{2}\tilde{\omega}^T\tilde{\omega}. \quad (158)$$

Ahora bien, al derivar V resulta

$$\dot{V} = 2k_p(\tilde{\eta} - 1)\dot{\tilde{\eta}} + 2k_p\tilde{\epsilon}^T\dot{\tilde{\epsilon}} + \tilde{\omega}^T\dot{\tilde{\omega}}. \quad (159)$$

Entonces, al sustituir las ecuaciones (155)-(157) en la ecuación anterior anterior, la derivada de V queda de la siguiente manera

$$\dot{V} = -\tilde{\omega}^T\mathbf{K}_\omega\tilde{\omega}. \quad (160)$$

Como se puede ver $\dot{V}$ es semidefinida negativa, por tanto, el punto de equilibrio es estable. Para mostrar la estabilidad asintótica del origen se puede recurrir al teorema de LaSalle, como se muestra a continuación

$$\dot{V} = -\tilde{\omega}^T\mathbf{K}_\omega\tilde{\omega} = 0, \quad (161)$$

por tanto,

$$\tilde{\omega} = \mathbf{0} \implies \dot{\tilde{\omega}} = \mathbf{0}, \quad (162)$$

entonces de la ecuación (155) se puede deducir que $\tilde{\epsilon} = \mathbf{0}$. Por su parte, de la ecuación (23) se concluye que $\tilde{\eta} = \pm 1$. Por lo que, el sistema converge al máximo conjunto invariante descrito por

$$(\tilde{\omega}, \tilde{\eta}, \tilde{\epsilon}) = (\mathbf{0}, \pm 1, \mathbf{0}). \quad (163)$$

A continuación se mostrará que el punto $(\tilde{\omega}, \tilde{\eta}, \tilde{\epsilon}) = (\mathbf{0}, -1, \mathbf{0})$ es un punto de equilibrio inestable. Como se mostró anteriormente, la ecuación (158) es una función decreciente, por lo que, considerando dicho punto de equilibrio resulta

$$V_\infty = 4k_p. \quad (164)$$

Ahora bien, tomando una pequeña perturbación $\tilde{\eta} = -1 + \sigma$ en el punto de equilibrio con $\sigma > 0$; entonces se tiene que $\tilde{\epsilon}^T\tilde{\epsilon} = 2\sigma - \sigma^2$.

La función de Lyapunov con la perturbación queda de la siguiente forma

$$V_\sigma = 4k_p - 2\sigma k_p < V_\infty, \quad (165)$$

dado que (160) es decreciente, V nunca regresará a V_∞ , lo que indica que el punto de equilibrio es inestable (Siciliano *et al.*, 2010). Entonces se puede concluir que el sistema debe converger asintóticamente al punto de equilibrio $(\tilde{\omega}, \tilde{\eta}, \tilde{\epsilon}) = (0, 1, 0)$, lo que implica que el seguimiento de $\mathbf{R}_d$ y ω_d se ha logrado.

5.5. Análisis de estabilidad del sistema en cascada

En la sección anterior se presentaron los algoritmos de control de posición y orientación para lograr el seguimiento de trayectorias en vehículos aéreos de cuatro rotores. Dichos algoritmos de control se diseñaron de forma independiente para los subespacios de posición y orientación sin considerar el término de interconexión. En esta sección se presenta el análisis de estabilidad del sistema completo. Haciendo uso de las propiedades de sistemas en cascada descritos en el capítulo 2, se mostrará que el término de interconexión no desestabiliza el sistema.

Control basado en ángulos de Euler (Error convencional)

Considérese nuevamente las ecuaciones en lazo cerrado (110) y (134) y el término de acoplamiento $T(\mathbf{R} - \mathbf{R}_d) \mathbf{z}_a$. La dinámica en lazo cerrado del sistema completo está dado por

$$\ddot{\tilde{\mathbf{p}}} + \frac{1}{m} \mathbf{K}_v \dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \frac{1}{m} \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{p}} = T(\mathbf{R} - \mathbf{R}_d) \mathbf{z}_a, \quad (166)$$

$$\ddot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}} + \mathbf{K}_\omega \dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}} + \mathbf{K}_o \tilde{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{0}. \quad (167)$$

Para facilitar el análisis, la dinámica de los errores del subespacio de posición, se reescribe en variables de estado de la siguiente manera

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \bar{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x}, \tilde{\boldsymbol{\zeta}}), \quad (168)$$

donde $\mathbf{x} = \text{col}(\tilde{\mathbf{p}}, \dot{\tilde{\mathbf{p}}})$ y

$$\mathbf{A} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\frac{1}{m} \mathbf{K}_p & -\frac{1}{m} \mathbf{K}_v \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x}, \tilde{\boldsymbol{\zeta}}) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ T(\mathbf{R}(\boldsymbol{\zeta}_d - \tilde{\boldsymbol{\zeta}}) \mathbf{z}_a - \mathbf{R}_d(\boldsymbol{\zeta}_d) \mathbf{z}_a) \end{pmatrix}. \quad (169)$$

La norma del término de acoplamiento $\bar{\psi}(\mathbf{x}, \tilde{\zeta})$ satisface

$$\|\bar{\psi}(\mathbf{x}, \tilde{\zeta})\| = |T| \|\mathbf{R}\mathbf{z}_a - \mathbf{R}_d\mathbf{z}_a\| = \|\mathbf{u} - mg\mathbf{z}_a\| \|\mathbf{R}\mathbf{z}_a - \mathbf{R}_d\mathbf{z}_a\|. \quad (170)$$

Tomando en cuenta la ley de control (109), el término $\|\mathbf{u} + mg\mathbf{z}_a\|$ puede acotarse por arriba como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + mg\mathbf{z}_a\| &\leq m(\|\ddot{\mathbf{p}}_d\|_\infty + g) + \lambda_{\max}\{\mathbf{K}_v\} \|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\| + \lambda_{\max}\{\mathbf{K}_p\} \|\tilde{\mathbf{p}}\| \\ &\leq D + \sqrt{2}k_{vp}\|\mathbf{x}\|, \end{aligned} \quad (171)$$

donde $D \triangleq m(\|\ddot{\mathbf{p}}_d\|_\infty + g)$ y $k_{vp} \triangleq \max\{\lambda_{\max}\{\mathbf{K}_p\}, \lambda_{\max}\{\mathbf{K}_v\}\}$.

Para analizar el término $\|(\mathbf{R} - \mathbf{R}_d)\mathbf{z}_a\|$, considérese la siguiente definición

$$\mathbf{f}(\zeta) \triangleq \mathbf{R}\mathbf{z}_a = \begin{pmatrix} \cos(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi) + \sin(\psi)\sin(\phi) \\ \sin(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi) - \cos(\psi)\sin(\phi) \\ \cos(\theta)\cos(\phi) \end{pmatrix}, \quad (172)$$

de manera similar se tiene $\mathbf{f}(\zeta_d) = \mathbf{R}_d\mathbf{z}_a$. La función $\mathbf{f}(\zeta)$ es globalmente Lipschitz, por tanto, el término $\|(\mathbf{R} - \mathbf{R}_d)\mathbf{z}_a\|$ satisface la siguiente desigualdad

$$\|(\mathbf{R} - \mathbf{R}_d)\mathbf{z}_a\| = \|\mathbf{f}(\zeta) - \mathbf{f}(\zeta_d)\| \leq L\|\zeta - \zeta_d\| = L\|\tilde{\zeta}\|, \quad \forall \zeta, \zeta_d \in \mathbb{R}^3 \quad (173)$$

donde L es la constante de Lipschitz.

Tomando en cuenta (171) y (173) el término de interconexión satisface la suposición 2,

$$\|\bar{\psi}(\mathbf{x}, \tilde{\zeta})\| \leq \gamma_1(\|\tilde{\zeta}\|)\|\mathbf{x}\| + \gamma_2(\|\tilde{\zeta}\|), \quad (174)$$

con

$$\gamma_1(\|\tilde{\zeta}\|) = \sqrt{2}k_{vp}L\|\tilde{\zeta}\|, \quad \gamma_2(\|\tilde{\zeta}\|) = DL\|\tilde{\zeta}\|. \quad (175)$$

Por otra parte, dado que las matrices $\mathbf{K}_p$ y $\mathbf{K}_v$ se eligen tal que $\mathbf{A}$ sea Hurwitz, el punto de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ del subsistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es global exponencialmente estable con función de Lyapunov $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x}$,

donde $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ es solución de $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$, con $\mathbf{Q} > \mathbf{O}$. La función de Lyapunov V satisface:

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}\{\mathbf{P}\} \|\mathbf{x}\|^2 &\leq V \leq \lambda_{\max}\{\mathbf{P}\} \|\mathbf{x}\|^2, \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right\| &\leq 2\lambda_{\max}\{\mathbf{P}\} \|\mathbf{x}\|, \\ \dot{V} &\leq -\frac{\lambda_{\min}\{\mathbf{Q}\}}{\lambda_{\max}\{\mathbf{P}\}} V. \end{aligned}$$

En la sección anterior se diseñó τ tal que el punto de equilibrio $(\tilde{\zeta}, \dot{\tilde{\zeta}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ sea asintóticamente (exponencialmente) estable. Del análisis anterior, se concluye que la dinámica en lazo cerrado del sistema completo dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \bar{\psi}(\mathbf{x}, \tilde{\zeta}), \quad (176)$$

$$\ddot{\tilde{\zeta}} = -\mathbf{K}_\omega \dot{\tilde{\zeta}} - \mathbf{K}_o \tilde{\zeta}, \quad (177)$$

satisface las condiciones de la proposición 1, por lo tanto, el punto de equilibrio $(\mathbf{x}, \tilde{\zeta}, \dot{\tilde{\zeta}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ del sistema en cascada (176)-(177) es asintóticamente estable.

Control basado en ángulos de Euler (Error en términos de matrices de rotación)

A continuación se analiza la estabilidad del sistema (75)-(77) en lazo cerrado con los esquemas de control (109), (111), (129) y (139). Dado que la ley de control para el subespacio de posición es la misma que en el caso anterior, la dinámica en lazo cerrado presenta una estructura de un sistema en cascada similar a (176)-(177) y está dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \bar{\psi}(\mathbf{x}, \tilde{\zeta}), \quad (178)$$

$$\ddot{\tilde{\zeta}} = -\mathbf{K}_\omega \dot{\tilde{\zeta}} - \mathbf{K}_o \tilde{\zeta}, \quad (179)$$

donde $\tilde{\zeta}$ es el error de orientación obtenido de la matriz de rotación $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d$. En este caso, el término $\bar{\psi}(\mathbf{x}, \tilde{\zeta})$ puede expresarse de la siguiente manera

$$\bar{\psi}(\mathbf{x}, \tilde{\zeta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ T\mathbf{R}(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\zeta}))\mathbf{z}_a \end{pmatrix}. \quad (180)$$

Para mostrar la estabilidad del punto de equilibrio $(\mathbf{x}, \tilde{\zeta}, \dot{\tilde{\zeta}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ de (178)-(179) se puede

utilizar nuevamente la proposición 1. Del análisis anterior, para mostrar la estabilidad del origen es necesario mostrar que el término de acoplamiento satisface la suposición 2. En primer lugar se analizará el término $(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}})\mathbf{z}_a$, el cual está dado por

$$(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}})\mathbf{z}_a = \begin{pmatrix} -\cos(\tilde{\psi})\sin(\tilde{\theta})\cos(\tilde{\phi}) - \sin(\tilde{\psi})\sin(\tilde{\phi}) \\ -\sin(\tilde{\psi})\sin(\tilde{\theta})\cos(\tilde{\phi}) + \cos(\tilde{\psi})\sin(\tilde{\phi}) \\ 1 - \cos(\tilde{\theta})\cos(\tilde{\phi}) \end{pmatrix}. \quad (181)$$

Al calcular la norma 1 del vector dado en (181) se obtiene

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}})\mathbf{z}_a\|_1 = & |\cos(\tilde{\psi})\sin(\tilde{\theta})\cos(\tilde{\phi}) + \sin(\tilde{\psi})\sin(\tilde{\phi})| + |-\sin(\tilde{\psi})\sin(\tilde{\theta})\cos(\tilde{\phi}) + \\ & \cos(\tilde{\psi})\sin(\tilde{\phi})| + |1 - \cos(\tilde{\theta})\cos(\tilde{\phi})|. \end{aligned} \quad (182)$$

Tomando en cuenta que $|1 - \cos(\tilde{\theta})\cos(\tilde{\phi})| \leq |\tilde{\theta}| + |\tilde{\phi}|$ la ecuación anterior puede ser acotada por arriba de la siguiente manera

$$\|(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}})\mathbf{z}_a\|_1 \leq 2(|\tilde{\phi}| + |\tilde{\theta}| + |\tilde{\psi}|) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\tilde{\phi}| \\ |\tilde{\theta}| \\ |\tilde{\psi}| \end{pmatrix} \leq 2\sqrt{3}\|\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\|. \quad (183)$$

Finalmente, tomando en cuenta (171) y (183), el término de interconexión $\bar{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x}, \tilde{\boldsymbol{\zeta}})$ satisface la siguiente desigualdad

$$\|\bar{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x}, \tilde{\boldsymbol{\zeta}})\| = \|\mathbf{u} + mg\mathbf{z}_a\| \cdot \|\mathbf{R}(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}})\mathbf{z}_a\| \leq 2\sqrt{6}k_{vp}\|\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\|\|\mathbf{x}\| + 2\sqrt{3}D\|\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\|, \quad (184)$$

donde se ha utilizado $\|\mathbf{R}\| = 1$. Claramente $\|\bar{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x}, \tilde{\boldsymbol{\zeta}})\|$ satisface la suposición 2 con

$$\gamma_1(\|\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\|) = 2\sqrt{6}k_{vp}\|\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\|, \quad \gamma_2(\|\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\|) = 2\sqrt{3}D\|\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\|. \quad (185)$$

El sistema en cascada descrito por (178)-(179) satisface las condiciones de la proposición 1, por lo tanto, se concluye que el punto de equilibrio $(\mathbf{x}, \tilde{\boldsymbol{\zeta}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ es asintóticamente estable.

Control basado en cuaterniones unitarios

Finalmente, se analiza la estabilidad del sistema (75)-(77) en lazo cerrado con los algoritmos de control de posición (109) y de orientación (129) y (154). La dinámica en lazo cerrado está dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \bar{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}), \quad (186)$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} = \frac{1}{2}(\tilde{\eta}\mathbf{I} - \mathbf{S}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}))\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad (187)$$

$$\dot{\tilde{\eta}} = -\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^T\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad (188)$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} = -k_o\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{K}_\omega\tilde{\boldsymbol{\omega}}. \quad (189)$$

En secciones anteriores se mostró que el algoritmo de control de orientación (129) y (154) garantiza $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \rightarrow \mathbf{0}$ cuando $t \rightarrow \infty$ y que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un punto global exponencialmente estable del subsistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. De acuerdo con la proposición 1, para mostrar la estabilidad del punto de equilibrio $(\mathbf{x}, \tilde{\eta}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) = (\mathbf{0}, 1, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ de (186)-(189) solo es necesario demostrar que $\bar{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}})$ satisface la suposición 2.

De la ecuación (24), el término $(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}))\mathbf{z}_a$ está dado por

$$(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}))\mathbf{z}_a = 2 \begin{pmatrix} -\tilde{\epsilon}_x\tilde{\epsilon}_z - \tilde{\eta}\tilde{\epsilon}_y \\ -\tilde{\epsilon}_y\tilde{\epsilon}_z + \tilde{\eta}\tilde{\epsilon}_x \\ 1 - \tilde{\eta}^2 - \tilde{\epsilon}_z^2 \end{pmatrix}. \quad (190)$$

Al despejar $\tilde{\eta}^2$ de (23), se tiene $\tilde{\eta}^2 = 1 - \tilde{\epsilon}_x^2 - \tilde{\epsilon}_y^2 - \tilde{\epsilon}_z^2$. Al sustituir el resultado anterior en (190) se obtiene

$$(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}))\mathbf{z}_a = 2 \begin{pmatrix} -\tilde{\epsilon}_x\tilde{\epsilon}_z - \tilde{\eta}\tilde{\epsilon}_y \\ -\tilde{\epsilon}_y\tilde{\epsilon}_z + \tilde{\eta}\tilde{\epsilon}_x \\ \tilde{\epsilon}_x^2 + \tilde{\epsilon}_y^2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\eta} & -\tilde{\epsilon}_x \\ \tilde{\eta} & 0 & -\tilde{\epsilon}_y \\ \tilde{\epsilon}_x & \tilde{\epsilon}_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_x \\ \tilde{\epsilon}_y \\ \tilde{\epsilon}_z \end{pmatrix} = 2\mathbf{S}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_\eta)\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (191)$$

donde $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_\eta \triangleq \text{col}(\tilde{\epsilon}_y, -\tilde{\epsilon}_x, \tilde{\eta})$. Puesto que $\|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_\eta\| \leq \sqrt{\tilde{\eta}^2 + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^T\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} \leq 1$ y $\|\mathbf{S}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_\eta)\| = \|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_\eta\|$, la norma de (191) satisface

$$\|(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}})\mathbf{z}_a\| \leq 2\|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}\|. \quad (192)$$

Del análisis anterior, el término $\bar{\psi}(\mathbf{x}, \tilde{\epsilon}) = \text{col}(\mathbf{0}, T\mathbf{R}(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\epsilon}))\mathbf{z}_a)$ satisface la suposición 2, *i.e.*,

$$\|\bar{\psi}(\mathbf{x}, \tilde{\epsilon})\| \leq \gamma_1(\|\tilde{\epsilon}\|)\|\mathbf{x}\| + \gamma_2(\|\tilde{\epsilon}\|), \quad (193)$$

donde

$$\gamma_1(\|\tilde{\epsilon}\|) = 2\sqrt{2}k_{vp}\|\tilde{\epsilon}\|, \quad \gamma_2(\|\tilde{\epsilon}\|) = 2D\|\tilde{\epsilon}\|. \quad (194)$$

Por tanto, el origen del sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable.

Capítulo 6. Resultados

En este capítulo final, se presentan los resultados en simulaciones numéricas de los algoritmos de control diseñados y puestos a prueba con distintas trayectorias de posición. Para la realización de las simulaciones se utilizaron los valores de los parámetros que se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Valores de los parámetros del sistema.

Parámetro	Valor	Unidades
Masa (m)	0.650	kg
Longitud de brazo (ℓ)	0.23	m
Tensor de inercia en eje x (J_x)	7.5×10^{-3}	kgm ²
Tensor de inercia en eje y (J_y)	7.5×10^{-3}	kgm ²
Tensor de inercia en eje z (J_z)	1.3×10^{-2}	kgm ²
Gravedad (g)	9.8	m/s ²

Por su parte, las ganancias utilizadas en los controladores diseñados, se muestran en la tabla 2.

Tabla 2. Ganancias de los controladores.

Algoritmo de control	K_p	K_o	K_v	K_ω	k_p
Ángulos de Euler (error convencional)	$3.2I$	$490I$	$0.8I$	$3I$	-
Ángulos de Euler (error en términos de matriz de rotación)	$3I$	$360I$	$1.2I$	$3I$	-
Cuaternión unitario	$4I$	-	$1.5I$	$3I$	450

Seguimiento de la trayectoria 1

A continuación se presentan las gráficas de las trayectorias deseadas propuestas en cada uno de los algoritmos de control diseñados, así como las trayectorias ejecutadas por el cuadricóptero una vez que se le aplicaron dichos algoritmos de control.

En las figuras 5-7 se pueden observar las gráficas correspondientes a la trayectoria 1 después de aplicar los algoritmos de control diseñados. Las simulaciones fueron realizadas con las siguientes condiciones iniciales: para la posición $p_0 = (3 \ 0 \ 0)^T$ [m] y $\dot{p}_0 = \mathbf{0}$ [m/s], mientras que para la orientación, en el primero y segundo esquema: $\omega_0 = \mathbf{0}$ [rad/s] y $R_0 = I$ y para el tercero: $\eta_0 = 1$, $\epsilon_0 = (0 \ 0 \ 0)^T$ y $\omega_0 = \mathbf{0}$ [rad/s].

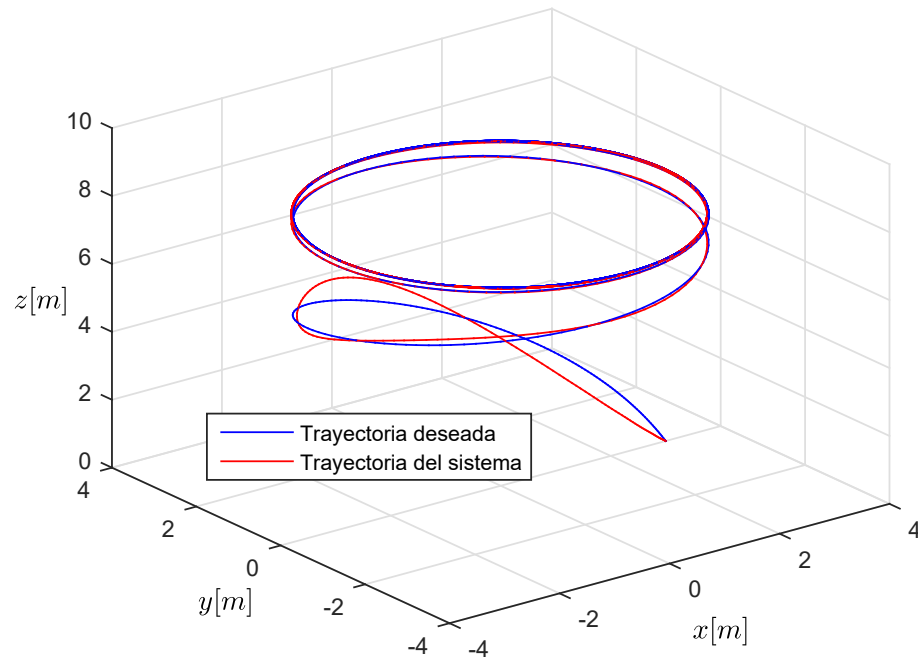


Figura 5. Trayectoria 1 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en ángulos de Euler (error convencional).

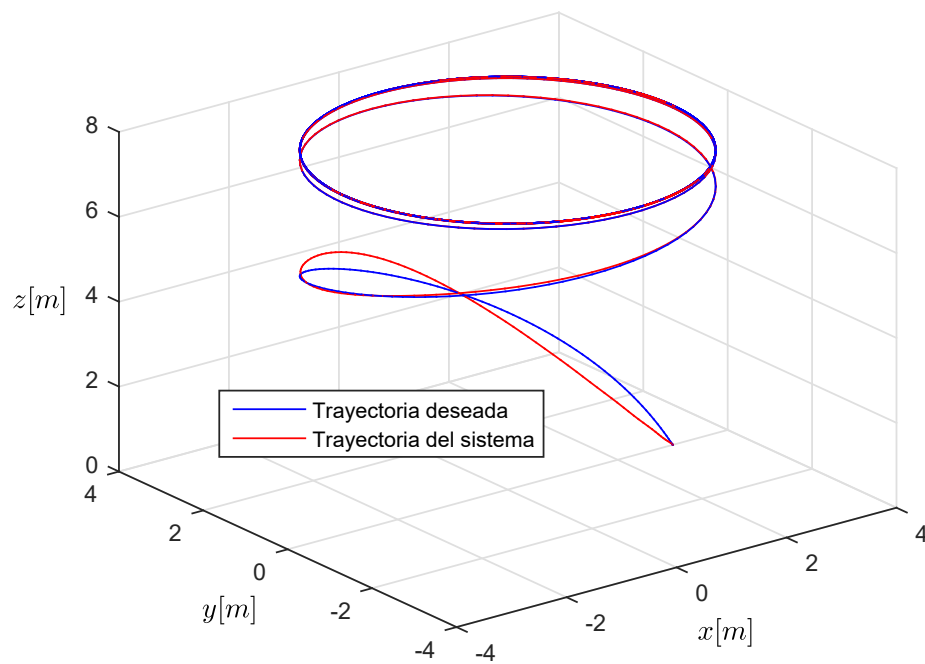


Figura 6. Trayectoria 1 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en ángulos de Euler (error en términos de matriz de rotación).

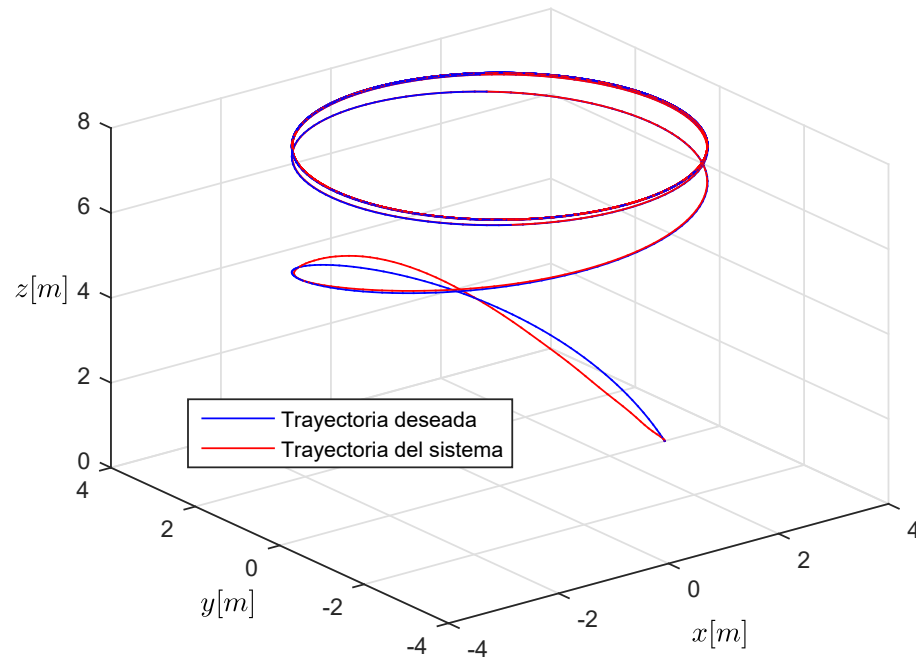


Figura 7. Trayectoria 1 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en cuaternión unitario.

Como es posible apreciar, en los tres casos se puede observar un seguimiento de trayectoria por el sistema, en terminos generales, alcanzado de una buena manera. Sin embargo, con el propósito de obtener un análisis más profundo, se calculó la norma del error en posición en cada uno de los esquemas de control, como se puede ver en la figura 8.

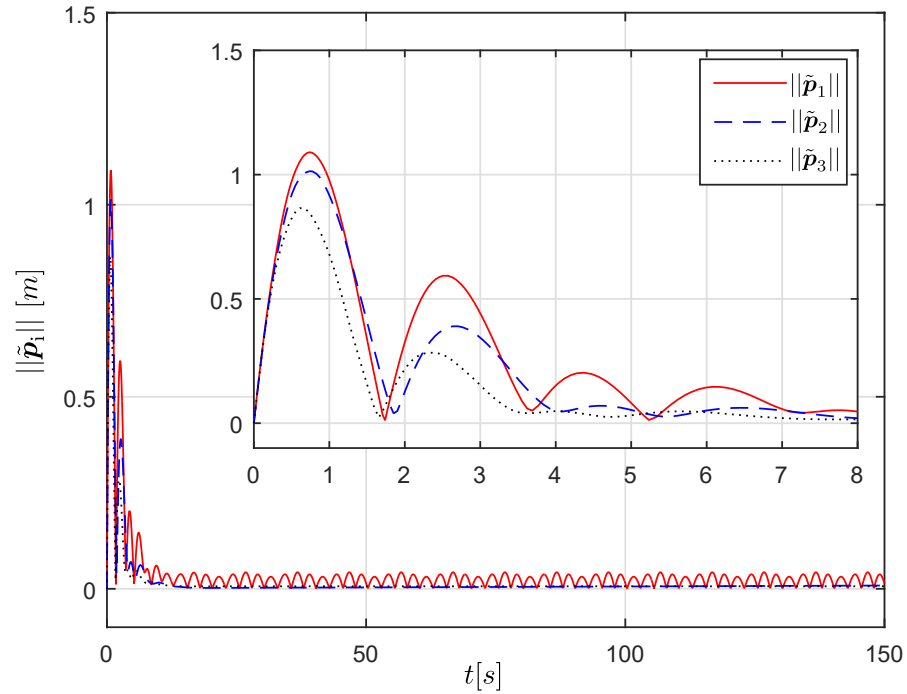


Figura 8. Normas de los errores de posición en la trayectoria 1 ($||\tilde{\mathbf{p}}_i||$, con $i = 1, \dots, 3$).

Se puede ver que en cuanto al error de posición, el primer esquema de control es el que tiene el peor desempeño, seguido por el segundo esquema, y siendo el esquema basado en el cuaternión unitario el del mejor desempeño en este aspecto.

Ahora bien, para lograr una comparación más completa del desempeño entre los enfoques de control con la trayectoria 1, se presenta la tabla 3 donde se muestran comparaciones en las entradas de control y el error de posición.

Tabla 3. Media cuadrática (RMS) de error de posición ($\tilde{\mathbf{p}}$), entrada de fuerza de empuje (T) y entrada τ para la trayectoria 1.

Algoritmo de control	$ \tilde{\mathbf{p}} $	T	$ \tau $
Ángulos de Euler (error convencional)	0.17	9.93	27.90
Ángulos de Euler (error en términos de matriz de rotación)	0.13	9.92	24.22
Cuaternión unitario	0.08	9.90	18.33

Al analizar la tabla anterior se puede concluir que para la trayectoria 1, el enfoque de control que tuvo el mejor desempeño en todos los aspectos comparados, fue el que se basó en el cuaternión unitario.

Seguimiento de trayectoria 2

En cuanto a la trayectoria 2 propuesta, las figuras 9-11 presentan los resultados que se obtuvieron cuando fueron aplicados los tres esquemas de control. Las simulaciones fueron realizadas con las siguientes condiciones iniciales: para la posición $\mathbf{p}_0 = (3 \ 0 \ 6.3)^T$ [m] y $\dot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{0}$ [m/s], mientras que para la orientación, en el primero y segundo esquema: $\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$ [rad/s] y $\mathbf{R}_0 = \mathbf{I}$, así como para el tercero: $\eta_0 = 1$, $\boldsymbol{\epsilon}_0 = (0 \ 0 \ 0)^T$ y $\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$ [rad/s].

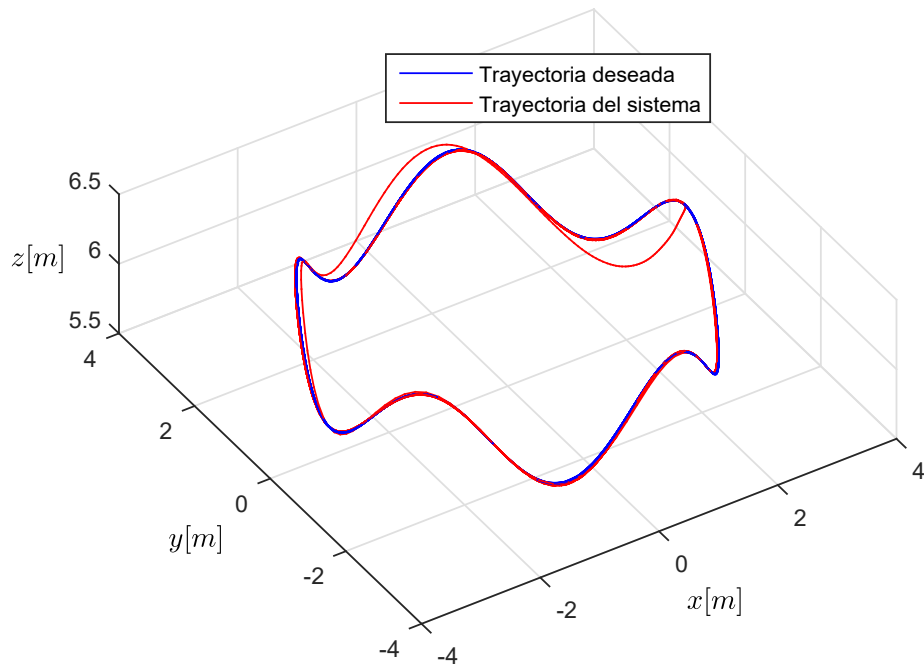


Figura 9. Trayectoria 2 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en ángulos de Euler (error convencional).

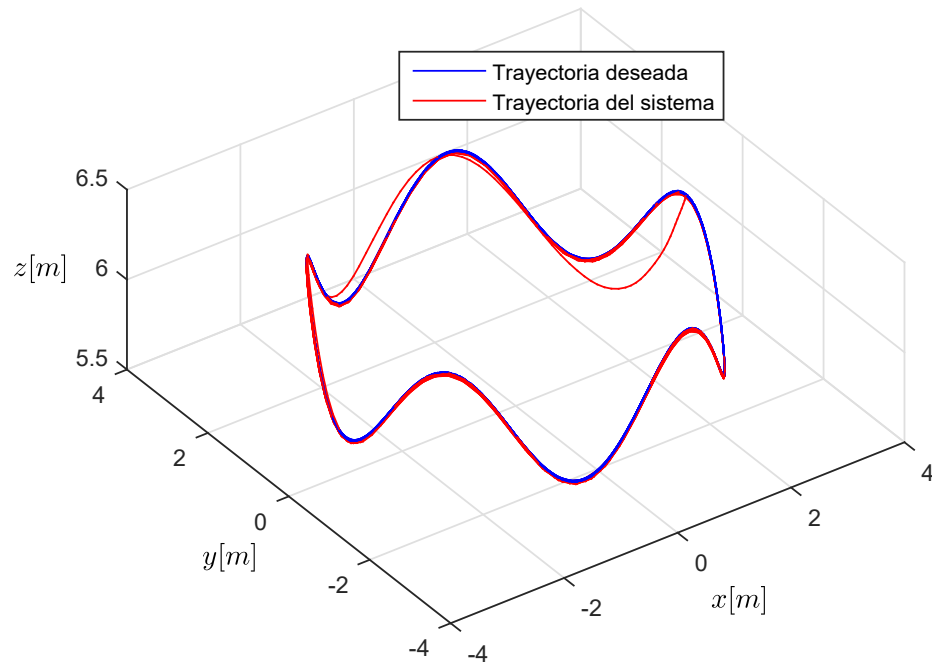


Figura 10. Trayectoria 2 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en ángulos de Euler (error en términos de matriz de rotación).

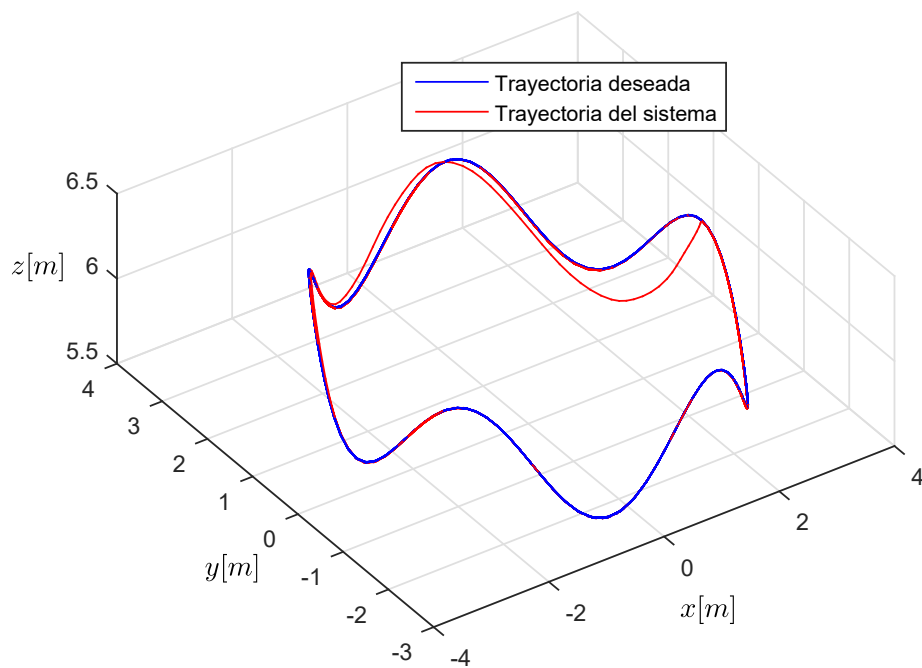


Figura 11. Trayectoria 2 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en cuaternión unitario.

Como se puede apreciar en las gráficas, el seguimiento de la trayectoria mediante el control fue logrado. A continuación se muestran las normas de los errores de posición en cada uno de los esquemas de control en la figura 12.

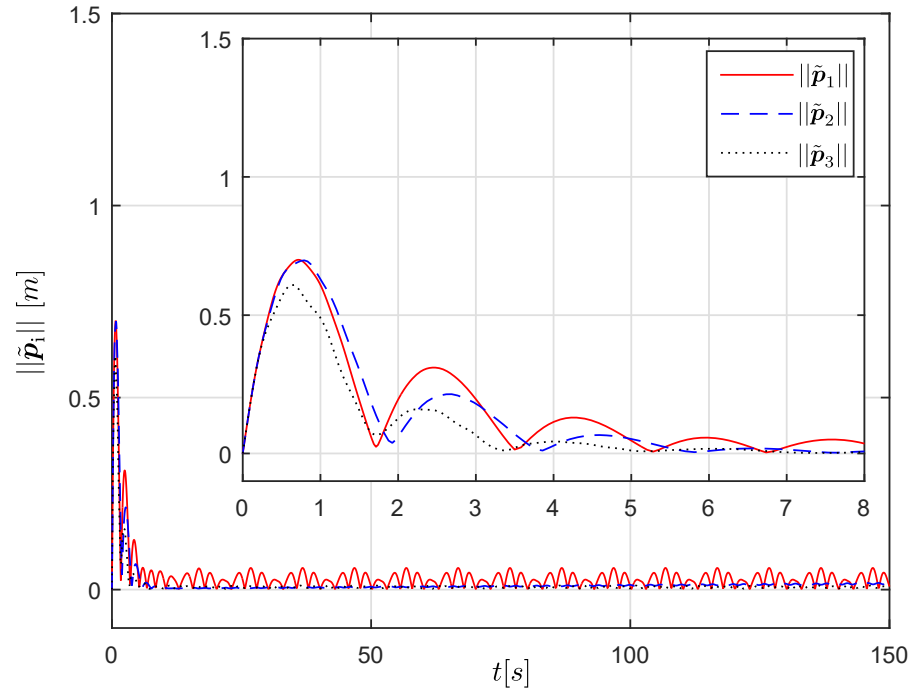


Figura 12. Normas de los errores de posición en la trayectoria 2 ($||\tilde{p}_i||$, con $i = 1, \dots, 3$).

Después de observar la gráfica se puede interpretar que sucede lo mismo que en la trayectoria 1, el mejor desempeño de los enfoques es el tercero y por su parte el primero es el peor. Ahora bien, viendo la tabla 4 se puede obtener un análisis más completo.

Tabla 4. Media cuadrática (RMS) de error de posición ($\tilde{p}$), entrada de fuerza de empuje (T) y entrada τ para la trayectoria 2.

Algoritmo de control	$ \tilde{p} $	T	$ \tau $
Ángulos de Euler (error convencional)	0.12	10.04	47.16
Ángulos de Euler (error en términos de matriz de rotación)	0.09	10.07	41.95
Cuaternión unitario	0.05	9.90	32.01

Es posible concluir que el orden de mejor desempeño que se mencionó con anterioridad se mantiene. Sin embargo, un punto importante que se puede observar en esta tabla, es que las normas de la entrada τ son notablemente grandes. Esto quiere decir que, para lograr esta trayectoria, se requiere de mucha energía, lo cual se debe considerar si se quisiera realizar en la vida real.

Seguimiento de la trayectoria 3

Por su parte, en las figuras 13-15 se pueden ver las gráficas que corresponden a la trayectoria 3 propuesta para los algoritmos de control. Para las simulaciones, fueron consideradas las siguientes condiciones iniciales: en la posición $\mathbf{p}_0 = (0 \ 0 \ 0)^T$ [m] y $\dot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{0}$ [m/s], mientras que la orientación, en el primero y segundo esquema: $\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$ [rad/s] y $\mathbf{R}_0 = \mathbf{I}$ y para el tercero: $\eta_0 = 1$, $\boldsymbol{\epsilon}_0 = (0 \ 0 \ 0)^T$ y $\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$ [rad/s].

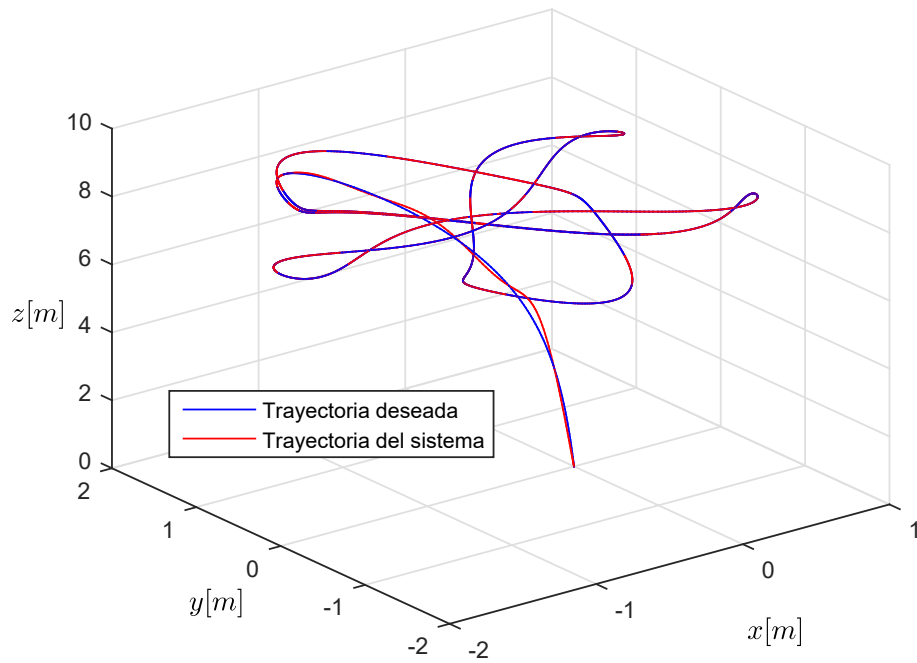


Figura 13. Trayectoria 3 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en ángulos de Euler (error convencional).

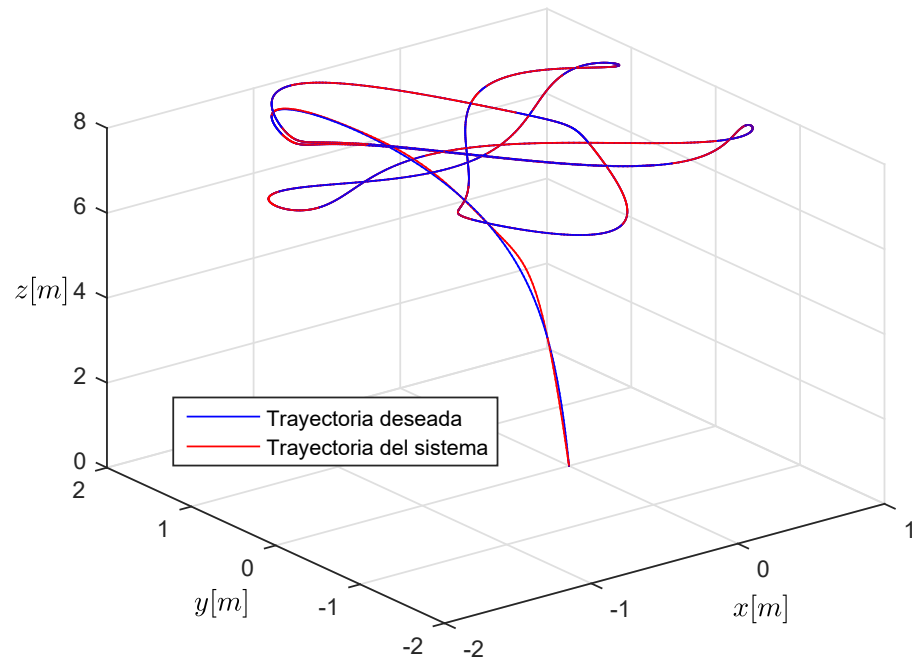


Figura 14. Trayectoria 3 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en ángulos de Euler (error en términos de matriz de rotación).

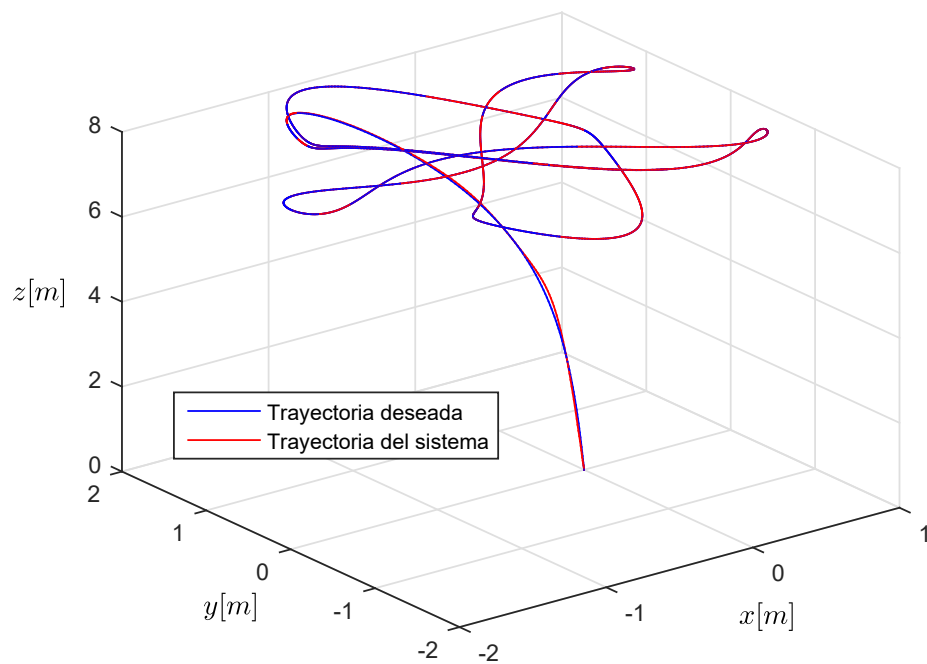


Figura 15. Trayectoria 3 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en cuaternión unitario.

Observando las gráficas, se puede ver el seguimiento de la trayectoria propuesta, en este caso, para los tres enfoques. Una vez visto eso, se prosigue con el análisis de los errores de posición, los cuales son presentados en la figura 16.

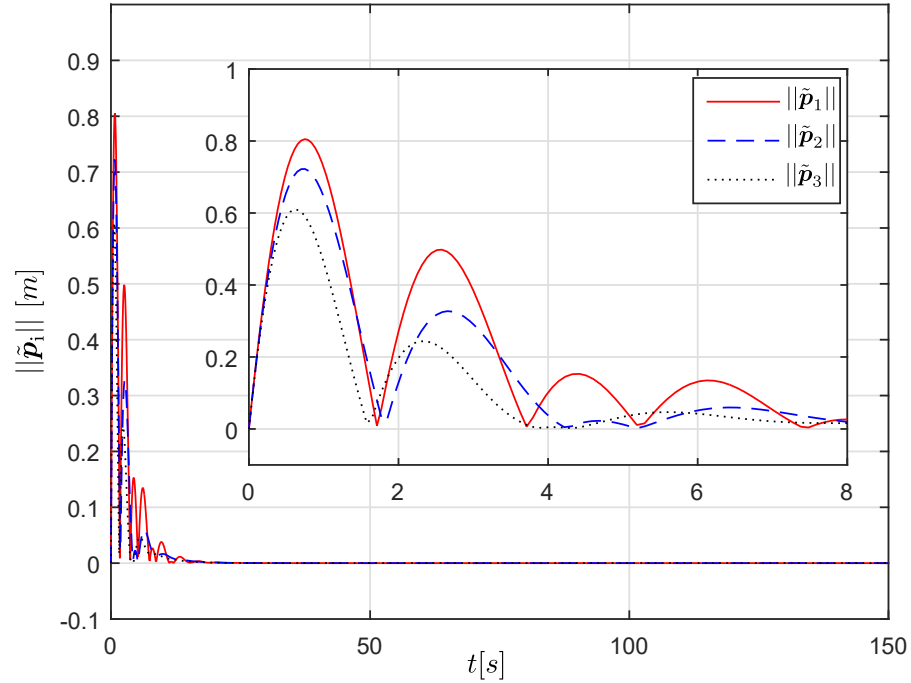


Figura 16. Normas de los errores de posición en la trayectoria 3 ($||\tilde{\mathbf{p}}_i||$, con $i = 1, \dots, 3$).

En este caso, al observar la gráfica de las normas de los errores se puede decir que se sigue cumpliendo lo sucedido en los casos anteriores, el peor desempeño, en cuanto a este aspecto, es el primer esquema y el mejor sigue siendo el tercero. Completando el análisis en la comparación del desempeño de los algoritmos se presenta la tabla 5.

Tabla 5. Media cuadrática (RMS) de error de posición ($\tilde{\mathbf{p}}$), entrada de fuerza de empuje (T) y entrada τ para la trayectoria 3.

Algoritmo de control	$ \tilde{\mathbf{p}} $	T	$ \tau $
Ángulos de Euler (error convencional)	0.10	9.823	0.96
Ángulos de Euler (error en términos de matriz de rotación)	0.08	9.825	1.05
Cuaternión unitario	0.06	9.83	0.91

Al observar la tabla anterior, de igual forma, se puede concluir que el mejor desempeño en el seguimiento de la trayectoria 3 es el del enfoque basado en el cuaternión unitario y el peor desempeño lo presenta el enfoque basado en los ángulos de Euler con el error convencional. Un punto importante que se puede considerar en este análisis es la baja cantidad de energía, en comparación a las trayectorias

anteriores, que se requiere para lograr el seguimiento de esta trayectoria.

Seguimiento de la trayectoria 4

Por último, en las figuras 17-19 se muestran los resultados obtenidos con la trayectoria 4 aplicada a los tres enfoques de control del presente trabajo. Cabe resaltar que las simulaciones para obtener estas gráficas fueron realizadas con las siguientes condiciones iniciales: en la posición $\mathbf{p}_0 = (3 \ 0 \ 9)^T$ [m] y $\dot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{0}$ [m/s], mientras que la orientación, en el primero y segundo esquema: $\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$ [rad/s] y $\mathbf{R}_0 = \mathbf{I}$ y para el tercero: $\eta_0 = 1$, $\boldsymbol{\epsilon}_0 = (0 \ 0 \ 0)^T$ y $\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$ [rad/s].

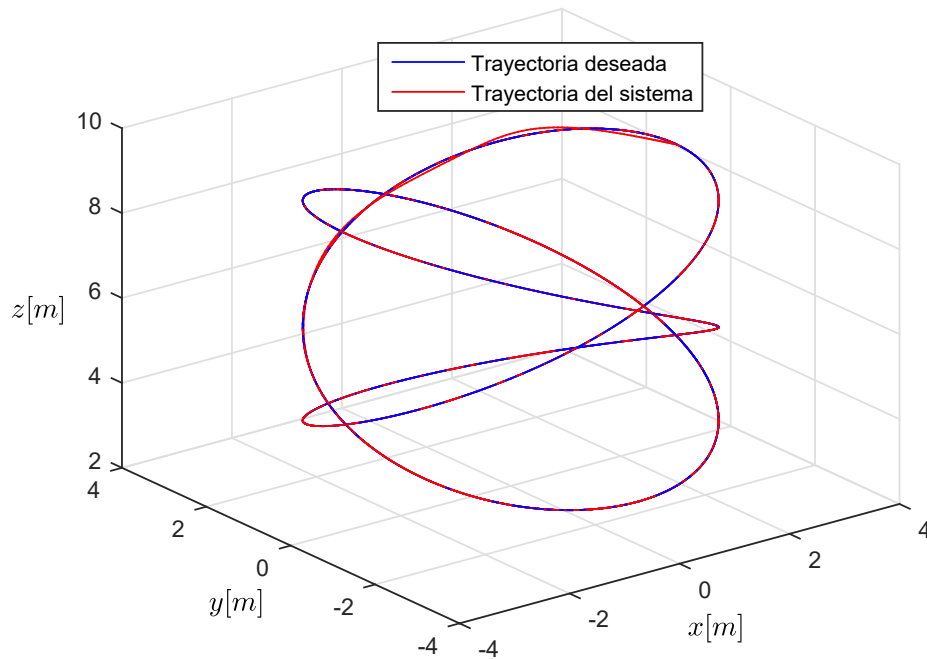


Figura 17. Trayectoria 4 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en ángulos de Euler (error convencional).

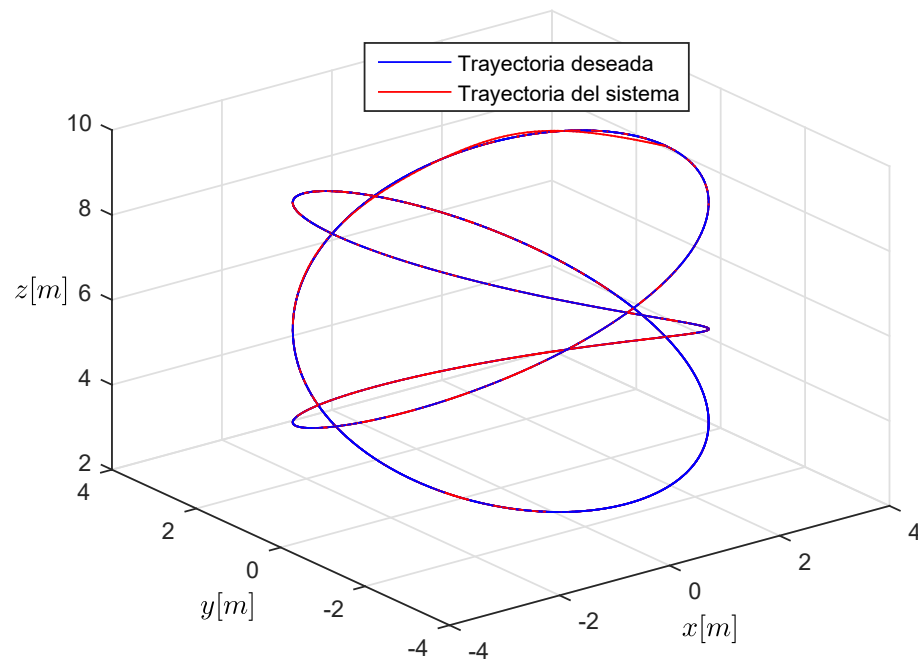


Figura 18. Trayectoria 4 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en ángulos de Euler (error en términos de matriz de rotación).

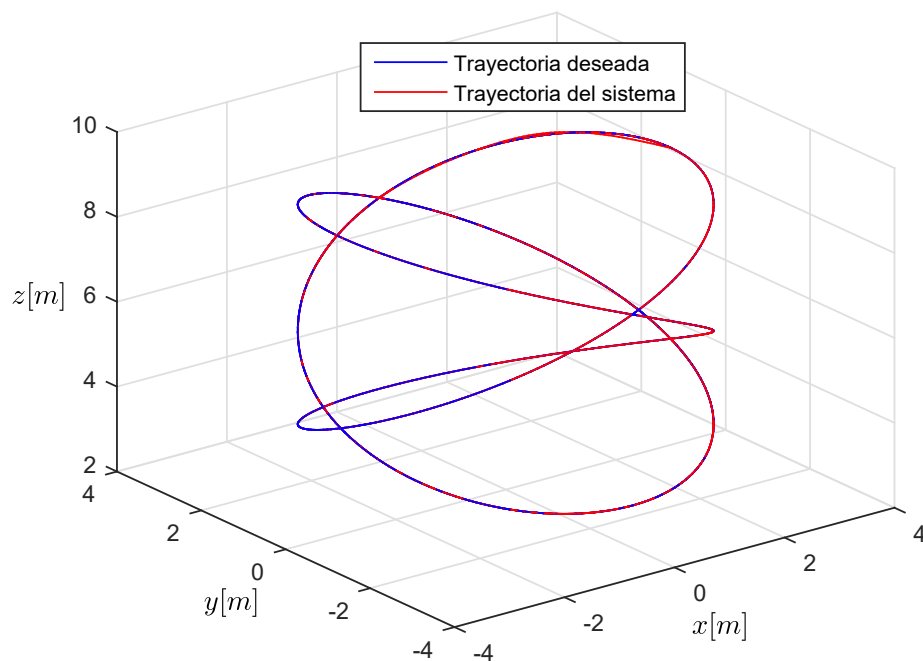


Figura 19. Trayectoria 4 ejecutada por el cuadricóptero con esquema de control basado en cuaternión unitario.

Como se puede apreciar en las gráficas el seguimiento de la trayectoria aplicada en este caso fue logrado, por lo tanto, es posible continuar con el análisis de los errores de posición mostrados en la figura 20.

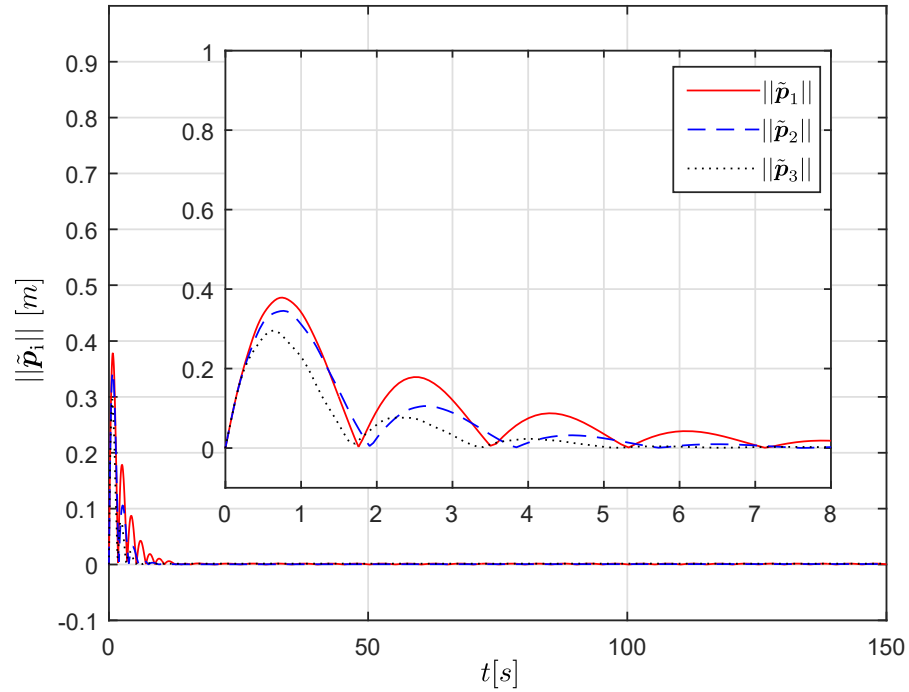


Figura 20. Normas de los errores de posición en la trayectoria 4 ($||\tilde{p}_i||$, con $i = 1, \dots, 3$).

En este caso, al analizar las normas de los errores de posición es posible ver que se sigue cumpliendo el orden del mejor desempeño de los enfoques de control.

Tabla 6. Media cuadrática (RMS) de error de posición ($\tilde{p}$), entrada de fuerza de empuje (T) y entrada τ para la trayectoria 4.

Algoritmo de control	$ \tilde{p} $	T	$ \tau $
Ángulos de Euler (error convencional)	0.05	9.802	12.22
Ángulos de Euler (error en términos de matriz de rotación)	0.04	9.803	13.40
Cuaternión unitario	0.02	9.805	12.20

Ahora bien, analizando la tabla 6 se puede ver que el desempeño de los tres enfoques de control fue muy parecido. Sin embargo, hay una ligera diferencia por lo que se podría optar por elegir como el mejor enfoque al tercero. En este caso, y pudiendo concluir finalmente, que por lo visto en los resultados obtenidos numéricamente, dicho enfoque fue el mejor al utilizarlo con las cuatro trayectorias propuestas.

Seguimiento de trayectorias polinomiales

En cuanto a estas trayectorias, se utilizaron polinomios de tercer orden, como el que se muestra en (87), para llegar a todos los puntos deseados.

Seguimiento de trayectoria polinomial 1

A continuación se presentan en la tabla 7 los parámetros utilizados para la generación de la trayectoria 1, los cuales fueron los puntos deseados en posición y velocidades en dichos puntos, así como los intervalos de tiempo en que se requería que se pasara de punto a punto.

Tabla 7. Parámetros utilizados para la generación de la trayectoria polinomial 1.

$q(t)$	t_0 [s]	t_f [s]	x [m]	y [m]	z [m]	v_x [m/s]	v_y [m/s]	v_z [m/s]
q_0	0	10	0	0	0	0	0	0
q_1	10	20	4	4	2	1	1	0
q_2	20	30	-4	6	2	1	1	0
q_3	30	40	-4	12	2	1	1	0
q_4	40	50	4	18	2	1	1	0
q_5	50	60	0	29	2	0.2	0.1	0
q_6	60	70	-4	20	2	1	1	0
q_7	70	80	6	22	2	1	1	0
q_8	80	90	14	28	2	0.1	0	0
q_9	90	100	14	18	2	0	0.3	0
q_{10}	100	110	6	15	2	0	0.2	0
q_{11}	110	120	14	3	2	0	0	0
q_{12}	120	130	5	-3	2	0	0.1	0
q_{13}	130	140	0	0	0	0	0	0

A continuación se presentan, en la figura 21, los puntos en posición a los que se llevará al cuadricóptero durante la trayectoria que describe la tabla anterior.

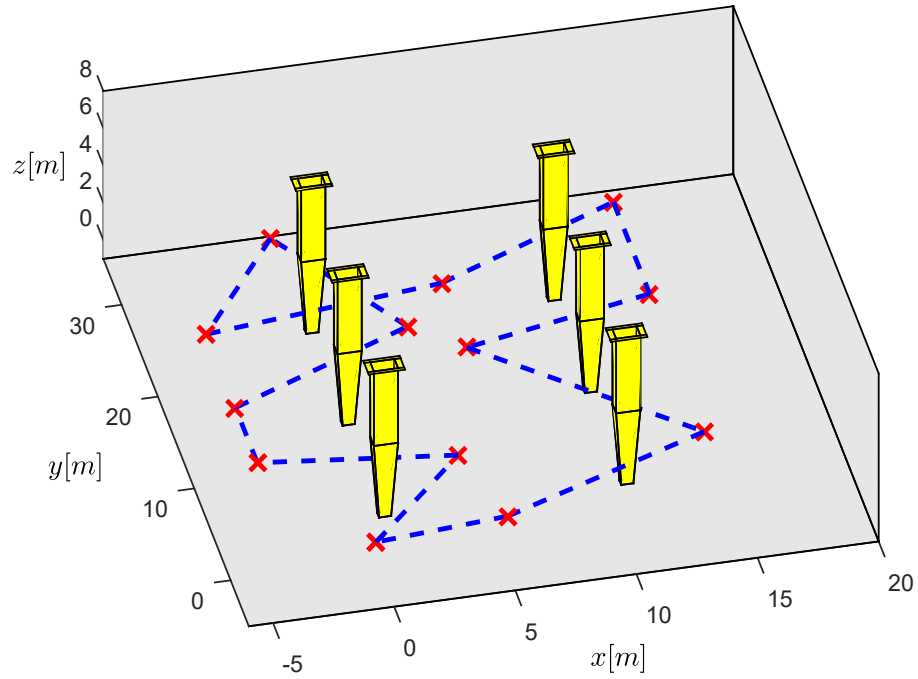


Figura 21. Puntos que forman la trayectoria polinomial 1.

Cabe resaltar que la trayectoria fue generada en función de un escenario conocido, para que en este caso el cuadricóptero, vuele en él. También es importante señalar, que después de analizar el desempeño de los algoritmos de control en las secciones anteriores, se optó por utilizar en el seguimiento de esta trayectoria al algoritmo que tuvo mejor desempeño. Dicho algoritmo fue el basado en el cuaternión unitario y la trayectoria utilizada se muestra en la figura 22.

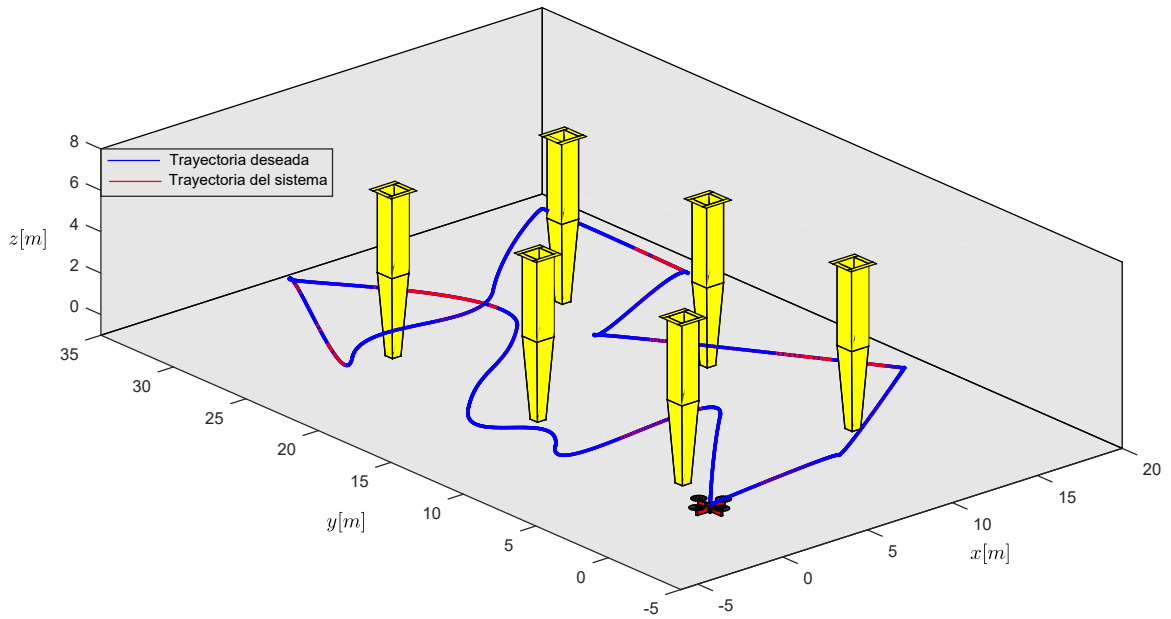


Figura 22. Seguimiento del cuadricóptero de la trayectoria polinomial 1.

Seguimiento de la trayectoria polinomial 2

De igual forma, fue diseñada una segunda trayectoria polinomial, la cual pasa por los puntos que se muestran en la tabla 24

Tabla 8. Parámetros utilizados para la generación de la trayectoria polinomial 2.

$q(t)$	t_0 [s]	t_f [s]	x [m]	y [m]	z [m]	v_x [m/s]	v_y [m/s]	v_z [m/s]
q_0	0	10	0	0	0	0	0	0
q_1	10	20	3	0	7	0.8	0.8	0
q_2	20	30	5	10	7	1	1	0
q_3	30	40	9	15	2	0.8	0.8	0
q_4	40	50	2	22	5	1	1	0
q_5	50	60	3	28	4	0	0	0
q_6	60	70	3	32	7	1	1	0
q_7	70	80	3	22	7	0	0	0
q_8	80	90	12	11	7	0.1	0.1	0
q_9	90	100	10	10	2	1	1	0
q_{10}	100	110	8	1	1	0	0	0
q_{11}	130	140	0	0	0	0	0	0

Ahora bien, se presenta la gráfica de los puntos, en la figura 23, que se eligieron para que el sistema pase por ellos para formar la trayectoria polinomial.

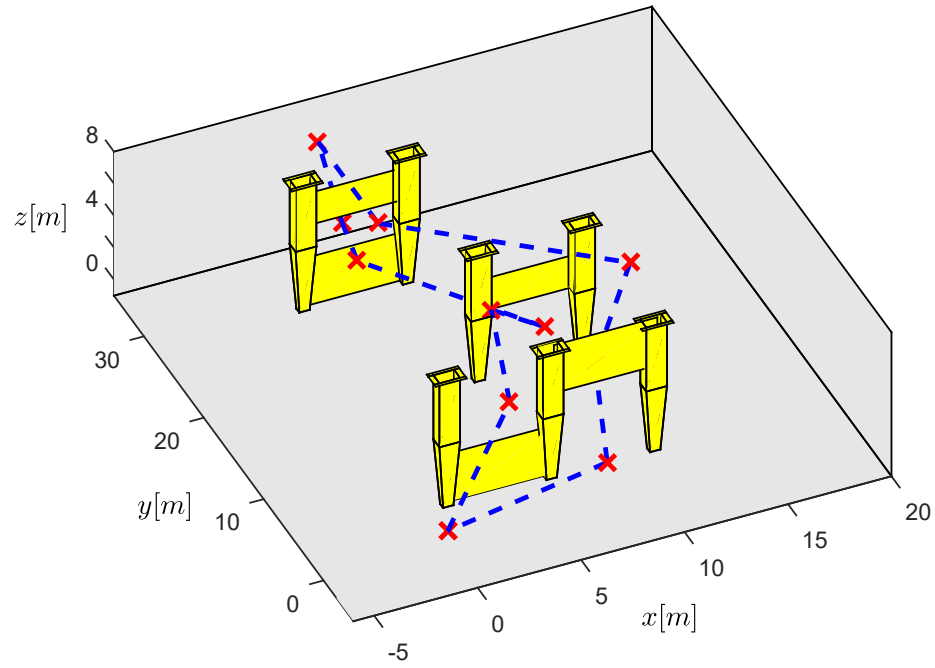


Figura 23. Puntos que forman la trayectoria polinomial 2.

Al igual que en el caso anterior, una vez obtenidos los puntos por los que pasará el cuadricóptero y el escenario en el que se moverá, se diseñó la trayectoria tal y como se muestra en la figura 24.

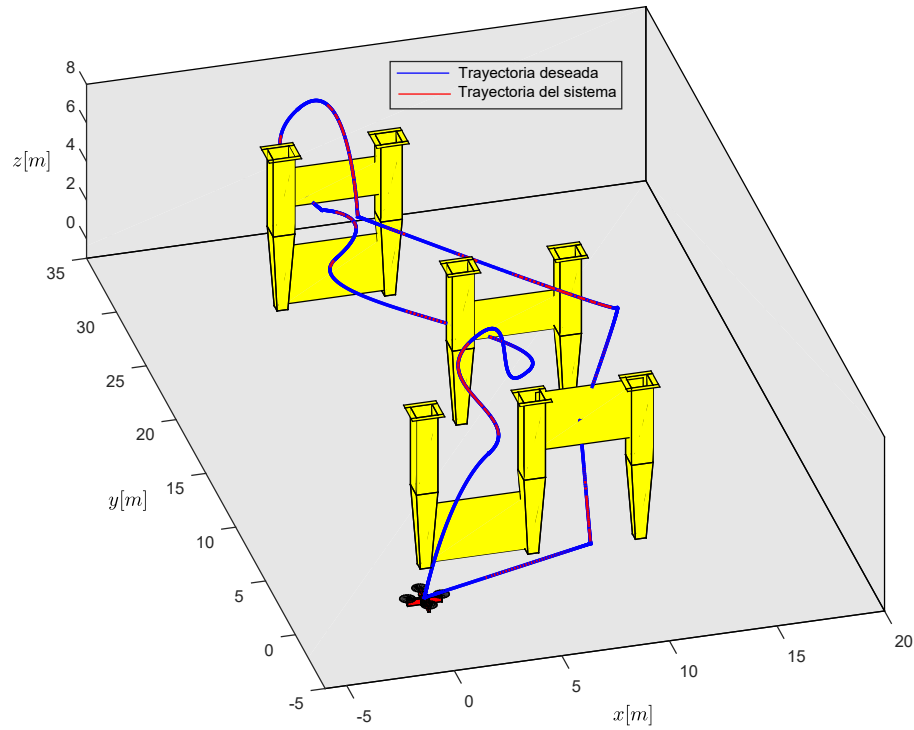


Figura 24. Seguimiento de la trayectoria polinomial 2.

Como se observa en las figuras, el seguimiento de las trayectorias polinomiales fue logrado de manera satisfactoria. El diseño de este tipo de trayectorias, como se puede apreciar, va orientado a aplicaciones reales, debido a que se puede hacer que el sistema a controlar pase por ciertos puntos deseados y así generar un comportamiento requerido para alguna aplicación, obviamente todo ello bajo la condición de conocer previamente el escenario en el que se moverá dicho sistema.

Capítulo 7. Conclusiones

En este trabajo de tesis se obtuvo el modelo matemático de un vehículo aéreo de cuatro rotores. También se realizó un análisis del mismo, descubriendo así algunas de sus propiedades, que fueron utilizadas como herramientas para el diseño de los tres algoritmos de control propuestos. Una vez diseñados, su desempeño fue puesto a prueba con distintas trayectorias en posición. Para evaluar dicho desempeño se utilizó como métrica la raíz media cuadrática (RMS) de la norma de los errores de posición, así como la norma de la fuerza de empuje y el par de entrada. Luego de realizar dicho análisis, el algoritmo basado en el cuaternión unitario resultó ser el que mostró el mejor desempeño para seguir las trayectorias propuestas, por lo que fue elegido para ser utilizado en la implementación de trayectorias polinomiales, las cuales fueron capaces de llevar al sistema por una serie de puntos que se eligieron para dar un recorrido en un escenario específico.

En cuanto a los algoritmos propuestos, matemáticamente, se pudo ver que el primer esquema mostraba singularidades si el sistema alcanza los 90 grados de inclinación. Por su parte, el segundo esquema resultó ser mejor en ese aspecto, ya que, definiendo el error en términos de matrices de rotación, se logró aumentar el margen de inclinación, debido a que en este caso, lo que no debe sobrepasar los 90 grados es el error de rotación, lo cual resulta más difícil que suceda. Por último, con el tercer esquema de control (basado en el cuaternión unitario) se logró superar todas esas singularidades.

De igual forma, se logró demostrar la estabilidad del sistema general en los tres esquemas propuestos, explotando la propiedad estructural de sistemas en cascada del modelo matemático del sistema.

En términos generales, el seguimiento de las trayectorias utilizadas en este trabajo para los algoritmos de control diseñados, fue logrado de manera satisfactoria. Del mismo modo fue posible la realización de un análisis para poder decidir acerca de que trayectorias son factibles para ser implementadas de manera real en este tipo de sistemas.

Trabajo futuro

En cuanto al trabajo futuro, comprende lo siguiente:

- Validación experimental de los esquemas de control propuestos.
- Búsqueda de aplicaciones reales que contribuyan en sectores sociales o productivos de la región.

- Optimización de las trayectorias polinomiales.
- Diseño de esquemas de control utilizando otros enfoques como Backstepping, adaptable, robusto, modos deslizantes, etc.

Literatura citada

- Bouabdallah, S. y Siegwart, R. (2005). Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor. En: *Proceedings of the 2005 IEEE international conference on robotics and automation*. IEEE, pp. 2247–2252.
- Castillo, P., Lozano, R., y Dzul, A. (2005). Experimental implementation of linear and nonlinear control laws. *IEEE Control System Magazine*, pp. 45–55.
- Chamseddine, A., Li, T., Zhang, Y., Rabbath, C. A., y Theilliol, D. (2012). Flatness-based trajectory planning for a quadrotor unmanned aerial vehicle test-bed considering actuator and system constraints. En: *2012 American Control Conference (ACC)*. IEEE, pp. 920–925.
- Johnson, E. N. y Kannan, S. K. (2005). Adaptive trajectory control for autonomous helicopters. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **28**(3): 524–538.
- Kendoul, F., Yu, Z., y Nonami, K. (2010). Guidance and nonlinear control system for autonomous flight of minirotorcraft unmanned aerial vehicles. *Journal of Field Robotics*, **27**(3): 311–334.
- Kim, H. J. y Shim, D. H. (2003). A flight control system for aerial robots: algorithms and experiments. *Control engineering practice*, **11**(12): 1389–1400.
- Koo, T. J. y Sastry, S. (1998). Output tracking control design of a helicopter model based on approximate linearization. En: *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 98CH36171)*. IEEE, Vol. 4, pp. 3635–3640.
- Liu, H., Wang, X., y Zhong, Y. (2015). Quaternion-based robust attitude control for uncertain robotic quadrotors. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, **11**(2): 406–415.
- Madani, T. y Benallegue, A. (2006). Backstepping control for a quadrotor helicopter. En: *2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. IEEE, pp. 3255–3260.
- Mahony, R., Kumar, V., y Corke, P. (2012). Multirotor aerial vehicles: Modeling, estimation, and control of quadrotor. *IEEE robotics & automation magazine*, **19**(3): 20–32.
- Raffo, G. V., Ortega, M. G., y Rubio, F. R. (2010). An integral predictive/nonlinear h control structure for a quadrotor helicopter. *Automatica*, **46**(1): 29–39.
- Reiner, J., Balas, G. J., y Garrard, W. L. (1995). Robust dynamic inversion for control of highly maneuverable aircraft. *Journal of Guidance, control, and dynamics*, **18**(1): 18–24.
- Saif, A.-W. A., Dhaifullah, M., Al-Malki, M., y El Shafie, M. (2012). Modified backstepping control of quadrotor. En: *International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices*. IEEE, pp. 1–6.
- Sepulchre, R., Jankovic, M., y Kokotovic, P. V. (2012). *Constructive nonlinear control*. Springer Science & Business Media.
- Shin, J., Nonami, K., Fujiwara, D., y Hazawa, K. (2005). Model-based optimal attitude and positioning control of small-scale unmanned helicopter. *Robotica*, **23**(1): 51–63.
- Siciliano, B. y Villani, L. (2012). *Robot force control*, Vol. 540. Springer Science & Business Media.
- Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., y Oriolo, G. (2010). *Robotics: modelling, planning and control*. Springer Science & Business Media.

- Smerlas, A., Postlethwaite, I., Walker, D., Strange, M., Howitt, J., Horton, R., Gubbels, A., y Baillie, S. (1998). Design and flight testing of an h-infinity controller for the nrc bell 205 experimental fly-by-wire helicopter. En: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Boston, MA*. pp. 1023–1033.
- Spong, M. W., Hutchinson, S., Vidyasagar, M., *et al.* (2006). *Robot modeling and control*, Vol. 3. wiley New York.
- Swarup, A. (2014). Sudhir. comparison of quadrotor performance using backstepping and sliding mode control. En: *Proceedings of the 2014 International Conference on Circuits, Systems and Control*.
- Tahir, A., Böling, J., Haghbayan, M.-H., Toivonen, H. T., y Plosila, J. (2019). Swarms of unmanned aerial vehicles—a survey. *Journal of Industrial Information Integration*, p. 100106.
- Tayebi, A. y McGilvray, S. (2006). Attitude stabilization of a vtol quadrotor aircraft. *IEEE Transactions on control systems technology*, **14**(3): 562–571.
- Zhao, B., Xian, B., Zhang, Y., y Zhang, X. (2014). Nonlinear robust adaptive tracking control of a quadrotor uav via immersion and invariance methodology. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **62**(5): 2891–2902.