

# Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California



## Maestría en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control

---

### Formación de vehículos aéreos con aplicaciones a búsqueda y vigilancia

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

**Carlos Francisco Montañez Molina**

Ensenada, Baja California, México

2020

Tesis defendida por

**Carlos Francisco Montañez Molina**

y aprobada por el siguiente Comité

---

Dr. César Cruz Hernández

Codirector de tesis

---

Dr. Javier Pliego Jiménez

Codirector de tesis

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Dr. Adrian Arellano Delgado

Dr. Mikhail Shlyagin



---

Dr. Daniel Saucedo Carvajal

Coordinador del Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

---

Dra. Rufina Hernández Martínez

Directora de Estudios de Posgrado

*Carlos Francisco Montañez Molina © 2020*

*Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis*

Resumen de la tesis que presenta Carlos Francisco Montañez Molina como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

### **Formación de vehículos aéreos con aplicaciones a búsqueda y vigilancia**

Resumen aprobado por:

---

Dr. César Cruz Hernández

Codirector de tesis

---

Dr. Javier Pliego Jiménez

Codirector de tesis

En el presente trabajo se aborda el problema de formación de vehículos aéreos con aplicaciones a búsqueda y vigilancia. Para resolver dicho problema, se hace uso de la teoría de sistemas complejos y de grafos para replicar el comportamiento colectivo de formación. Por otro lado, al hacer uso de la teoría de control no lineal fue posible diseñar los algoritmos de control para el sistema de traslación y de orientación. Para llevar a cabo la comunicación se presentan dos algoritmos uno de ellos hace uso de grafos dirigidos (enfoque maestro-esclavo) mientras que el segundo es para grafos no dirigidos. En vista de que ambos algoritmos permiten un vuelo en formación y seguimiento de trayectorias, para cumplir con el objetivo referente a las aplicaciones de búsqueda y vigilancia, se han propuesto dos trayectorias, las cuales corresponden a una espiral en forma de polígono irregular y una trayectoria caótica. La primera de ellas se ha empleado para labores de búsqueda y se diseñó mediante el uso de polinomios de quinto grado. Por otro lado, la trayectoria caótica es empleada para tareas de vigilancia y es obtenida a partir del mapa logístico. El desempeño de los algoritmos se verificó mediante simulaciones numéricas.

**Palabras clave:** Vehículos aéreos, formación, búsqueda, vigilancia, sistemas complejos, grafos, comportamiento colectivo

Abstract of the thesis presented by Carlos Francisco Montañez Molina as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Electronics and Telecommunications with orientation in Instrumentation and Control.

### **Aerial vehicles formation with applications to search and surveillance**

Abstract approved by:

---

Dr. César Cruz Hernández

Thesis Co-Director

---

Dr. Javier Pliego Jiménez

Thesis Co-Director

The present work addresses the problem of aerial vehicles formation with applications to search and surveillance tasks. To resolve this problem, complex systems theory and of graph are used to replicate the collective behavior of formation. On the other hand, making use nonlinear control theory was possible to design the control algorithms for the translation and orientation systems. To bring about the communication two algorithms are introduced one of them makes use directed graphs (master-slave approach) while by the second is for non directed graphs. Given that both algorithms allow flight in formation and trajectories tracking, to fulfill the aim regarding to search and surveillance applications, two trajectories have been proposed, which ones correspond to a irregular polygon shape spiral and to a chaotic trajectory. The firsts of them has been employed for search and it is designed using fifth degree polynomials. On the other hand, the chaotic trajectory is employed for surveillance tasks and it is obtained from the logistic map. Performance from the algorithms has been verified by numerical simulations.

**Keywords:** Aerial vehicles, formation, search, surveillance, complex systems, graphs, collective behavior

## **Dedicatoria**

**A mi mamá y hermano**

## Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por haberme aceptado en su programa de Posgrado en Electrónica y Telecomunicación y a si poder cumplir con el objetivo de obtener el grado de maestro en ciencias.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría. No. de becario: 634071

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico a través del proyecto de investigación de ciencia básica CONACyT entre instituciones, "Sincronización de Sistemas Complejos y Algunas Aplicaciones", Ref. 166654 y Continuación (A1-S-31628).

A mi familia, amigos y en especial a mi mamá y hermano por siempre alentarme a continuar esforzándome para lograr mis metas, de igual forma quiero a agradecer a cada uno de mis profesores que aportaron a parte de mi formación a lo largo de estos dos años, a los miembros de mi comité de tesis: Dr. Adrian Arellano Delgado, Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez, Dr. Mikhail Shlyagin y en especial al Dr. Javier Pliego Jiménez y al Dr. César Cruz Hernández pues gracias a sus enseñanzas fue posible llevar a cabo el desarrollo del presente trabajo de tesis.

# Tabla de contenido

	Página
Resumen en español .....	ii
Resumen en inglés .....	iii
Dedicatoria .....	iv
Agradecimientos .....	v
Lista de figuras .....	viii
Lista de tablas .....	x
<b>Capítulo 1. Introducción</b>	
1.1. Motivación .....	3
1.2. Objetivos .....	3
1.2.1. Objetivo general .....	3
1.2.2. Objetivos particulares .....	4
1.3. Antecedentes .....	4
1.4. Estructura de la tesis .....	6
<b>Capítulo 2. Preliminares</b>	
2.1. Teoría de sistemas complejos .....	7
2.2. Origen de la teoría de grafos .....	7
2.2.1. Tipos de grafos .....	8
2.2.2. Topologías de conexión .....	9
2.2.3. Matrices asociadas a un grafo .....	11
2.3. Modelo matemático del cuadricóptero .....	13
2.3.1. Estudio del movimiento de cuerpos rígidos .....	14
2.3.1.1. Matrices de rotación .....	14
2.3.1.2. Propiedades de las matrices de rotación .....	16
2.3.1.3. Ángulos de Euler .....	16
2.3.1.4. Velocidad angular .....	18
2.3.1.5. Aerodinámica del cuadricóptero .....	19
2.3.2. Ecuaciones de movimiento .....	22
2.3.3. Formulación Newton-Euler .....	22
<b>Capítulo 3. Algoritmos de control</b>	
3.1. Obtención del algoritmo de control de posición .....	24
3.2. Obtención del algoritmo de control de orientación .....	25
3.3. Análisis de estabilidad .....	28
<b>Capítulo 4. Formación de un grupo de cuadricópteros</b>	
4.1. Formación maestro esclavo .....	33
4.1.1. Formación con un grafo estrella dirigido .....	33
4.1.2. Formación con un grafo cadena dirigido .....	34

## Tabla de contenido (continuación)

4.2.	Formación descentralizada . . . . .	35
4.2.1.	Análisis de estabilidad . . . . .	35
<b>Capítulo 5. Aplicaciones a búsqueda y vigilancia</b>		
5.1.	Tareas de búsqueda . . . . .	39
5.2.	Tareas de vigilancia . . . . .	44
<b>Capítulo 6. Resultados</b>		
6.1.	Resultados del desempeño del algoritmo de posición y orientación . . . . .	48
6.2.	Resultados empleando grafos dirigidos y no dirigidos . . . . .	50
6.2.1.	Grafos dirigidos . . . . .	52
6.2.2.	Grafos no dirigidos . . . . .	57
6.3.	Resultados aplicación a labores de búsqueda y vigilancia . . . . .	63
6.3.1.	Aplicación de búsqueda resultados . . . . .	63
6.3.2.	Aplicación a vigilancia resultados . . . . .	66
<b>Capítulo 7. Conclusiones</b>		
7.1.	Contribuciones de este trabajo de tesis . . . . .	70
7.2.	Trabajos futuros . . . . .	70
7.3.	Productos derivados de este trabajo de tesis . . . . .	70
<b>Literatura citada . . . . .</b>		<b>71</b>

## Lista de figuras

Figura	Página
1. UAVs ala fija. . . . .	1
2. UAVs ala rotativa. . . . .	1
3. Comportamientos colectivos en la naturaleza a) hormigas, b) parvada y c) cardumen. . .	2
4. Puentes de Königsberg. . . . .	8
5. Grafo asociado al problema de los puentes de Königsberg. . . . .	8
6. Grafo simple. . . . .	9
7. Multígrafo. . . . .	9
8. Grafo dirigido. . . . .	9
9. Grafo anillo. . . . .	10
10. Grafo cadena. . . . .	10
11. Grafo estrella. . . . .	11
12. Grafo árbol. . . . .	11
13. Marcos de referencia de un cuerpo rígido. . . . .	13
14. Marco $\Sigma_b$ respecto a marco $\Sigma_e$ . . . . .	14
15. Matrices de rotación básicas. . . . .	15
16. Representación de la orientación mediante los ángulos de Euler $ZYZ$ . . . . .	16
17. Ángulos <i>roll</i> , <i>pitch</i> y <i>yaw</i> . . . . .	17
18. Esquema del cuadricóptero, donde $\Sigma_e$ es el marco de referencia inercial y $\Sigma_b$ el marco fijo al cuerpo. . . . .	20
19. Gráficas de las funciones $ 1 - \cos(\tilde{\theta}) \cos(\tilde{\phi}) $ y $ \tilde{\theta}  +  \tilde{\phi} $ . . . . .	30
20. Grafo estrella dirigido. . . . .	33
21. Grafo cadena dirigido. . . . .	34
22. Superficie y espiral de Arquímedes. . . . .	40
23. Superficie. . . . .	41
24. División de la superficie. . . . .	41
25. División de las rectas en segmentos. . . . .	42
26. Trayectoria resultante. . . . .	44
27. Diagrama de bifurcación del mapa logístico. . . . .	45
28. Cambio de orientación. . . . .	47
29. Perfiles de velocidad caóticos obtenidos del mapa logístico. . . . .	47
30. Seguimiento de la trayectoria deseada. . . . .	49

## Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
31. Posiciones angulares donde a) $=\phi[^\circ]$ , b) $=\theta[^\circ]$ y c) $=\psi[^\circ]$ . . . . .	49
32. Normas de los errores de posición a) $=\ e_{\tilde{p}}\ [m]$ y de orientación b) $=\ \phi_{R_e}\ [^\circ]$ . . . . .	50
33. Formación y seguimiento de una trayectoria mediante grafos dirigidos. . . . .	53
34. Posiciones angulares de las topologías de conexión estrella y cadena dirigidas donde para a) y d) $=\phi, \phi_d[^\circ]$ , para b) y e) $=\theta, \theta_d[^\circ]$ y para c) y f) $=\psi, \psi_d[^\circ]$ . . . . .	54
35. Norma del error de posición a) y c) $=\ e_{\tilde{p}}\ [m]$ y de orientación b) y d) $=\ \phi_{R_e}\ [^\circ]$ empleando las topologías de conexión en estrella y cadena dirigidas. . . . .	55
36. Entradas de control a) y c) $=\ \tau_i\ [Nm]$ y b) y d) $=T_i[N]$ empleando las topologías de conexión estrella y cadena dirigidas. . . . .	56
37. Formación y seguimiento mediante topologías de conexión no dirigidas. . . . .	58
38. Velocidades lineales empleando topologías de conexión no dirigidas, donde a), d), g) y j) $=\dot{x}, \dot{x}_d[m/s]$ , b), e), h) y k) $=\dot{y}, \dot{y}_d[m/s]$ y c), f), i) y l) $=\dot{z}, \dot{z}_d[m/s]$ . . . . .	59
39. Posiciones angulares empleando topologías de conexión no dirigidas donde a), d), g) y j) $=\phi, \phi_d[^\circ]$ , b), e), h) y k) $=\theta, \theta_d[^\circ]$ y c), f), i) y l) $=\psi, \psi_d[^\circ]$ . . . . .	60
40. Norma del error del término de interconexión a), c), e) y g) $=\ e_i\ [m]$ y de orientación b), d), f) y h) $=\ \phi_{R_e}\ [^\circ]$ empleando topologías de conexión no dirigidas. . . . .	61
41. Entradas de control a), c), e) y g) $=\ \tau_i\ [Nm]$ y b), d), f) y h) $=T_i[N]$ empleando topologías de conexión no dirigidas. . . . .	62
42. Trayectoria en espiral y formación en el plano $x, y, z$ . . . . .	64
43. Posiciones angulares trayectoria en espiral donde a) $=\phi[^\circ]$ , b) $=\theta[^\circ]$ , c) $=\psi[^\circ]$ . . . . .	64
44. Norma del error de posición a) $=\ e_{\tilde{p}}\ [m]$ y de los ángulos de Euler b) $=\ \phi_{R_e}\ [^\circ]$ . . . . .	65
45. Entradas de control a) $=\ \tau_i\ [Nm]$ y b) $=T_i[N]$ empleando una topología de conexión en estrella dirigida. . . . .	65
46. Trayectoria caótica y formación en el plano $x, y, z$ . . . . .	66
47. Velocidades lineales trayectoria caótica donde a) $=\dot{x}[m/s]$ , b) $=\dot{y}[m/s]$ y c) $=\dot{z}[m/s]$ . . . . .	67
48. Posiciones angulares trayectoria caótica donde a) $=\phi[^\circ]$ , b) $=\theta[^\circ]$ y c) $=\psi[^\circ]$ . . . . .	67
49. Norma del error de acoplamiento a) $=\ e_i\ [m]$ y de los ángulos de Euler b) $=\ \phi_{R_e}\ [^\circ]$ . . . . .	68
50. Entradas de control a) $=\ \tau_i\ [Nm]$ y b) $=T_i[N]$ empleando una topología de conexión en anillo no dirigida. . . . .	68

# Lista de tablas

Tabla		Página
1.	Parámetros del cuadricóptero . . . . .	48
2.	Grafos dirigidos y su matriz de acoplamiento $A$ . . . . .	52
3.	Grafos no dirigidos y sus correspondientes matrices de acoplamiento $A$ . . . . .	57

## Capítulo 1. Introducción

---

La constante modernización de la sociedad ha implicado la necesidad del uso de instrumentos más eficientes y automatizados, capaces de desempeñar actividades que reduzcan los riesgos que atenten contra la integridad física de las personas. Los avances tecnológicos han impulsado la construcción de sistemas autónomos, entre los cuales destacan los vehículos aéreos debido a su amplia gama de movimientos y maniobras, lo cual les permite desenvolverse en múltiples ámbitos. Este tipo de vehículo es capaz de involucrarse en actividades agrícolas, servicios de entrega, aplicaciones en ingeniería, búsqueda y vigilancia tanto civiles como militares.

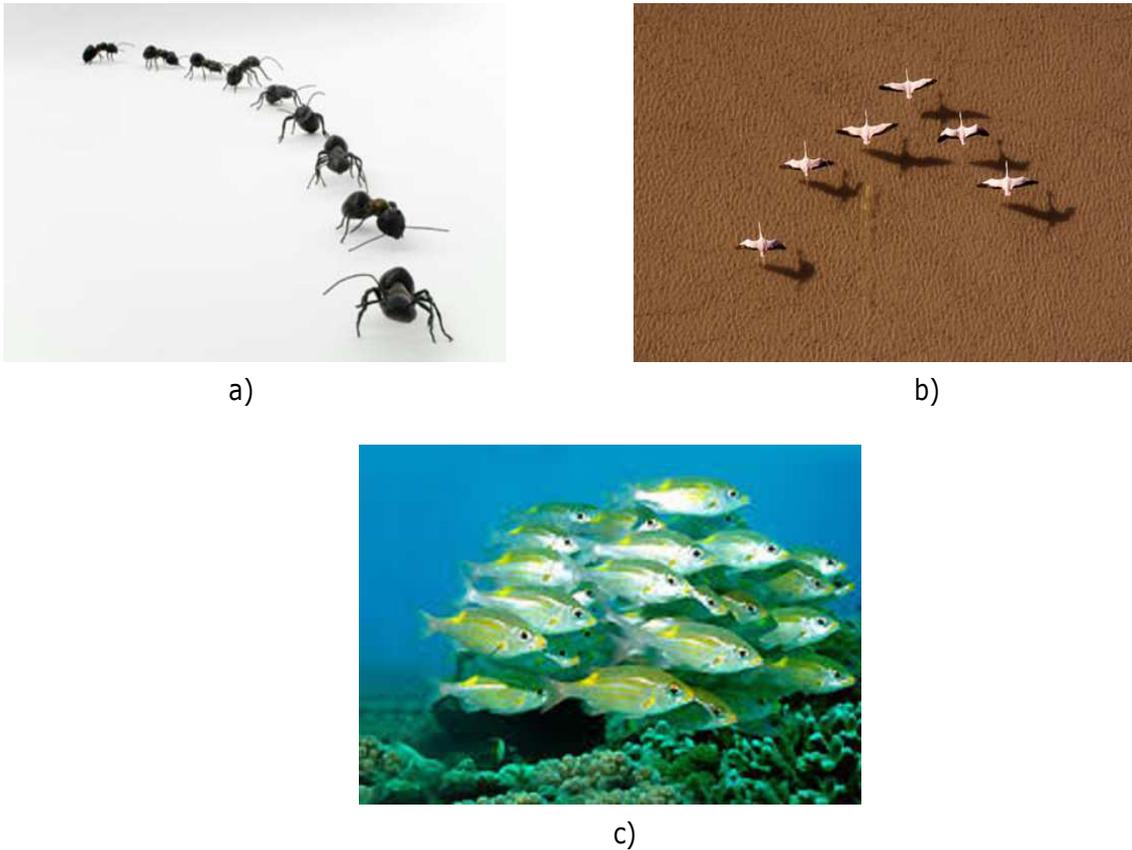
Existen diferentes tipos de vehículos aéreos autónomos (UAVs por sus siglas en inglés) entre los que destacan los de *ala fija* y los de *ala rotatoria* (multirotor) por su sustentación. Los UAVs de *ala fija* mostrados en la figura 1 se encuentran compuestos por dos alas fijas a su fuselaje, que los hace muy similares a los aviones convencionales. Por su autonomía, son utilizados para cubrir grandes áreas de terreno, pero aun así presentan grandes desventajas en comparación a un multirotor, ya que los *ala fija* para su despegue requieren de la ayuda de un operador o de una plataforma especial que les brinde el impulso necesario para elevarse y de igual forma para su aterrizaje, se requiere de la ayuda de un operador o de una superficie muy amplia. Otra desventaja que presenta este tipo de vehículo es a la hora de realizar tareas de inspección en un punto específico, ya que su vuelo constante no le permite volar sobre el punto de interés como lo hace un multirotor. Los UAVs de *ala rotatoria* (multirotor), (ver figura 2) cuentan con rotores que les permiten despegar y aterrizar de manera vertical, son capaces de desplazarse en los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y de mantener un vuelo estacionario en un punto específico, lo que los hace muy parecidos a un helicóptero, los vehículos multirotor pueden recibir el nombre de tricóptero, hexacóptero, octocóptero y cuadricóptero según el número de rotores con los que cuente.



Figura 1. UAVs ala fija.



Figura 2. UAVs ala rotativa.



**Figura 3.** Comportamientos colectivos en la naturaleza a) hormigas, b) parvada y c) cardumen.

Actualmente los vehículos aéreos no tripulados que más se utilizan son del tipo cuadricóptero, éste se desplaza mediante el movimiento provocado por cuatro motores, colocados en los extremos de su estructura, poseen gran maniobrabilidad, generan una mayor estabilidad de vuelo y seguridad, además pueden ser equipados con herramientas para un trabajo específico, son más económicos y resultan no tan complicados de controlar. Este tipo de multirrotor tienen seis grados de libertad, los cuales se dividen en rotacionales y traslacionales lo que provoca que este sistema sea subactuado, ya que como su nombre lo dice, este sistema posee cuatro rotores y es un número menor a la cantidad de grados de libertad que posee. La dinámica generada por este sistema es altamente no lineal, motivo suficiente para que sea un objeto de estudio muy interesante en el área de control automático, pues se requiere del diseño de un algoritmo de control que permita cumplir de manera eficiente las tareas para las cuales fue creado.

En esta tesis se analizará el problema de generación del comportamiento colectivo de formación en vehículos aéreos no tripulados para aplicaciones en labores de búsqueda y vigilancia, aplicando la teoría de sistemas complejos y control automático. La coordinación de los vehículos no tripulados y autónomos involucra la aplicación de los sistemas complejos, ya que hoy en día se busca diseñar sistemas que asemejen el comportamiento colectivo de diferentes organismos vivos (Tan, 2013); por ejemplo el

caso del comportamiento colectivo de las hormigas (ver figura 3(a)) que evita su desorientación (Wilson *et al.*, 2018), la manera en que las aves realizan formaciones al recorrer largas distancias (Portugal *et al.*, 2014) (ver figura 3(b)) o la manera en que los peces se agrupan en cardúmenes para protegerse de los depredadores (Pavlov y Kasumyan, 2000) (ver figura 3(c)). Varios grupos de investigación se han enfocado en el estudio de éstas interacciones y en la clasificación de las conductas que se presentan en éstas agrupaciones naturales, con la finalidad de reproducir de manera artificial estos comportamientos colectivos de sincronización, cohesión, formación, coordinación, etc. De manera que, si se emulan estos comportamientos en los vehículos aéreos, las tareas que antes eran realizadas por un solo sistema, ahora se podrán dividir en varios sistemas lo que reducirá costos y tiempo de operación.

En este trabajo de tesis se hace uso de la teoría de grafos debido a las aplicaciones que se pueden lograr gracias a las matrices asociadas a ellos tanto en el área de control como de robótica (Martínez, 2014), dicho lo anterior por medio de dichas matrices es posible lograr la comunicación entre un grupo de cuadricópteros.

## **1.1. Motivación**

Dado que los cuadricópteros en los últimos años se han logrado colocar entre los sistemas con mayor auge por la gran variedad de tareas que pueden ejecutar, motiva al desarrollo de algoritmos de control que permitan replicar comportamientos colectivos, tal como es el caso de un grupo de cuadricópteros llevando a cabo un vuelo en formación que permita labores de búsqueda o vigilancia y dado que uno de los objetivos de los comportamientos colectivos es lograr que tareas que antes eran realizadas por un solo sistema puedan ser ejecutadas por varios sistemas para la reducción de tiempos y costos de operación, se considera que si un grupo de cuadricópteros vuelan en formación, el área de cobertura al momento de realizar ya sea la tarea de búsqueda o vigilancia será significativamente mayor a la que podría lograr cubrir un sólo cuadricóptero.

## **1.2. Objetivos**

### **1.2.1. Objetivo general**

Aplicar la teoría de sistemas complejos para generar comportamientos colectivos en grupos de vehículos aéreos de 4 rotores enfocados a tareas de búsqueda y vigilancia.

### 1.2.2. Objetivos particulares

1. Estudiar y deducir las ecuaciones del modelo matemático del cuadricóptero.
2. Buscar estrategias de control para el cuadricóptero.
3. Evaluar distintas topologías de conexión para la formación de vehículos aéreos no tripulados.
4. Validar los esquemas propuestos mediante simulaciones.
5. Realizar aplicaciones para el problema de búsqueda y vigilancia.

### 1.3. Antecedentes

En la literatura se reportan una gran variedad de artículos y tesis que abordan temas que presentan cierta relación con el tópico de este trabajo de tesis. Por tal motivo, en esta sección se hace mención a algunos de ellos.

El modelo matemático del cuadricóptero es posible encontrarlo en la mayoría de los trabajos, no obstante en algunos de ellos, dicho modelo se encuentra muy simplificado, impidiendo tener una buena aproximación a lo real, por tal motivo se presta mayor atención a los trabajos realizados por Bouabdallah *et al.* (2005); Kendoul *et al.* (2009); Mahony *et al.* (2012); Lee *et al.* (2017), pues en ellos se puede encontrar el modelo matemático más detallado y con información suficiente para mayor comprensión. Con respecto al diseño de los algoritmos que permiten el control de posición y orientación del cuadricóptero se tiene: Madani y Benallegue (2006), en el cual, se ha empleado la técnica de control backstepping de estado completo para obtener el vector de entradas  $u = [ u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 ]$  que permita controlar los motores del cuadricóptero para lograr un seguimiento adecuado de la trayectoria deseada. Por otra parte, se utilizaron técnicas de control lineal y no lineal para el diseño de algoritmos que permiten controlar la orientación del cuadricóptero, entre dichas técnicas se encuentra backstepping, control PID, teoría de control óptimo, teoría de Lyapunov y modos deslizantes (Bouabdallah, 2007). Kendoul *et al.* (2009), hace uso de la técnica de linealización por retroalimentación exacta para el diseño del algoritmo de orientación y para lograr que el vehículo se comporte como un sistema completamente actuado emplea una entrada de control virtual, pues esto a su vez permite la obtención de una entrada de control para el sistema traslación y de los ángulos deseados  $\phi, \theta$ . Se utilizó un control predictivo para la parte de orientación y un control no lineal  $H_\infty$  para la parte de traslación en (Raffo *et al.*, 2010).

Anteriormente en el Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE), se realizaron trabajos, en los cuales, se usó la teoría de sistemas complejos y de grafos para generar comportamientos colectivos. Entre dichos trabajos se encuentran: (Martínez, 2014), en el cual, para generar los comportamientos colectivos de formación y de sincronización en grupos de robots móviles, se proponen algoritmos de control que permiten hacer uso de la teoría de sistemas complejos y de grafos. El comportamiento de sincronización producido por las luciérnagas se estudió en (Arellano-Delgado *et al.*, 2015), mediante el uso de osciladores, teoría de sistemas complejos y de grafos. Por otra parte, Parra (2017), busca que un grupo de cinco robots móviles diferenciales puedan emular los comportamientos colectivos de formación y sincronización, por tal motivo, hace uso de la teoría de control no lineal, sistemas complejos y de grafos. Para lograr emular el comportamiento de sincronización y de formación Díaz (2018), propone el diseño de un algoritmo de control por medio de la técnica de control backstepping.

Abdessameud y Tayebi (2009) diseñaron un algoritmo de control para que un grupo de UAVs realicen una formación al despegar y al aterrizar. El algoritmo propuesto además de cumplir con el objetivo de control permite que los vehículos mantengan una comunicación bidireccional. El diseño de la ley de control de formación descentralizada reportada en (Arshad y Yoonsoo, 2015), es obtenida mediante una linealización por retroalimentación, esto a su vez ha permitido que el algoritmo sea casi lineal, además se hace uso de la teoría de grafos para obtener la matriz Laplaciana que permite la comunicación entre cada cuadricóptero. Por otra parte, para abordar el problema de formación en (Koksal *et al.*, 2015), se presenta un algoritmo de control dividido en dos niveles, en el primero de ellos, se encuentra lo referente a formación mientras que en el segundo, se describe como se diseñaron los algoritmos de control para orientación y posición. Además los resultados que se muestran en dicho artículo son tanto numéricos como experimentales.

Los artículos Cabreira *et al.* (2018) y Gohari *et al.* (2019) son tomados en consideración, debido a que en ellos se aborda el diseño de trayectorias que pueden aplicarse tanto en labores de vigilancia como de búsqueda. En el primero de ellos se aborda el problema de cobertura de un área, por lo que proponen el diseño de una trayectoria en espiral, mientras que en el segundo por medio del mapa de Hénon se diseñó una trayectoria caótica para cumplir con labores de vigilancia.

#### 1.4. Estructura de la tesis

El presente trabajo de tesis se encuentra estructurado de la siguiente manera:

En el **Capítulo 2**, se presenta una introducción a la teoría de sistemas complejos y teoría de grafos, así como los conceptos necesarios para obtener el modelo matemático del cuadricóptero.

En el **Capítulo 3**, se presenta tanto el desarrollo para la obtención del algoritmo de control de posición como de orientación. Pruebas de estabilidad también son mostradas.

En el **Capítulo 4**, se aborda el problema de formación, por tal motivo se encuentran los algoritmos de control que permiten emular dicho comportamiento colectivo.

En el **Capítulo 5**, se presenta el desarrollo de dos trayectorias que permiten realizar tanto aplicaciones de búsqueda como de vigilancia.

En el **Capítulo 6**, se encuentran los resultados numéricos obtenidos haciendo uso de los diferentes algoritmos de control presentados en este trabajo.

En el **Capítulo 7**, se mencionan las conclusiones y trabajos futuros.

## Capítulo 2. Preliminares

---

En este capítulo se presenta una breve introducción a la teoría de sistemas complejos y de grafos. Con respecto a grafos se presentan sus orígenes y como éstos pueden ser representados por matrices. El resto del capítulo se compone por el modelo cinemático y dinámico del cuadricóptero.

### 2.1. Teoría de sistemas complejos

En los últimos años los investigadores se han enfocado en el estudio de los sistemas complejos y no porque sean imposibles de comprender, dado que a menudo la palabra complejo la asociamos con algo complicado, sino porque esta nueva rama de la ciencia que engloba a la física, biología y las ciencias sociales, busca entender los comportamientos emergentes o en otras palabras los comportamientos colectivos que se presentan en algunos organismos vivos, en la sociedad o en el mismo funcionamiento de los diferentes órganos que conforman a los seres vivos. Desde el punto de vista de la física, un sistema complejo se encuentra compuesto por varios elementos o partículas, donde dichos elementos se encuentran descritos por sus estados, como lo es su posición, velocidad, masa, forma, etc (Thurner *et al.*, 2018).

Algunos comportamientos colectivos de interés que se presentan en seres vivos fueron mencionados en la introducción y cuyo interés es muy grande, pues al lograr emularlos en robots o en sistemas que requiera un cierto grado de autonomía, permitirá al ser humano evitar la realización de tareas que impliquen un gran riesgo en su salud física.

De acuerdo a (Bar-Yam, 2003), los siguientes ejemplos están catalogados como sistemas complejos: una persona, el cuerpo humano, el cerebro, un ecosistema, una corporación y una computadora por mencionar algunos. Algunas de las herramientas matemáticas empleadas en el estudio de dichos sistemas son: ecuaciones diferenciales, análisis de series de tiempo, teoría de grafos y de redes, teoría de juegos y algoritmos genéticos (Ottino, 2003).

### 2.2. Origen de la teoría de grafos

La historia de la teoría de grafos se remonta al siglo XVIII en la ciudad de Königsberg Prusia, donde se encuentra la isla de Kneiphof rodeada por el río Pregel. Para acceder a la isla fueron construidos siete puentes como se muestra en la figura 4. Los habitantes de la ciudad se plantearon el siguiente problema: encontrar un recorrido tal que empezando en cualquier porción de tierra se pase por todos los puentes



Figura 4. Puentes de Königsberg.

una sola vez y se regrese al punto de partida. Ninguna persona fue capaz de resolver el juego hasta que el matemático Leonhard Euler que se encontraba de visita en la ciudad se interesó por dicho juego logrando demostrar que era imposible resolverlo.

Euler en 1736 en su publicación *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, muestra una solución analítica a dicho problema, lo que lo llevó a ser reconocido como el padre de la teoría de grafos. En dicho artículo, Euler representó cada uno de las porciones de tierra por pequeños círculos (nodos o vértices) y los puentes por medio de líneas (aristas) (ver figura 5). Hoy en día dicha abstracción es conocida como grafo, y se puede representar por un conjunto de pares ordenados  $G = (V, E)$ , donde  $V(G)$  es un conjunto finito no vacío cuyos elementos son conocido como vértices y  $E(G)$  es un conjunto finito de pares cuyos elementos son llamados aristas.

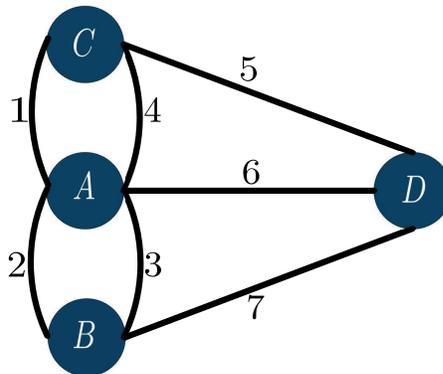


Figura 5. Grafo asociado al problema de los puentes de Königsberg.

### 2.2.1. Tipos de grafos

Existen diferentes tipos de grafos pero en este trabajo de tesis solo se mencionan los tres principales:

- **Grafo simple:** Es aquel en que una arista une dos vértices cualquiera y así se pueden ir formando diferentes topologías de conexión.

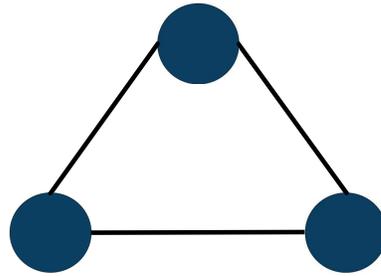


Figura 6. Grafo simple.

- **Multígrafo:** Es aquel en que dos vértices se pueden conectar por más de una arista.

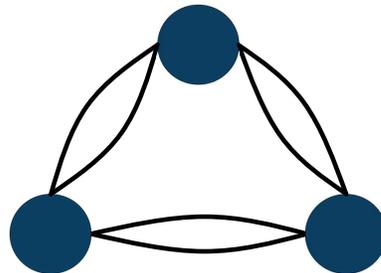


Figura 7. Multígrafo.

- **Grafo dirigido:** Es aquel donde las aristas cuentan con una dirección hacia alguno de los vértices del grafo, dicha dirección se representa por una flecha.

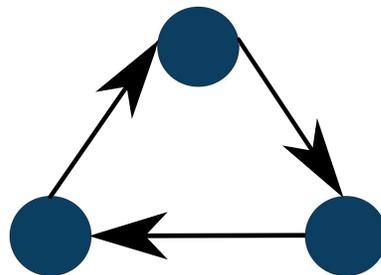


Figura 8. Grafo dirigido.

### 2.2.2. Topologías de conexión

Las topologías de conexión representan diferentes maneras de interconectar elementos de una red para que estos intercambien información de manera dirigida o no dirigida, entre las principales topologías de conexión se encuentran:

**Topología en anillo.** En esta red los nodos se encuentran conectados en serie desde el punto inicial al final, por lo que la información tiene que fluir por cada uno de los nodos hasta llegar al punto inicial, el inconveniente con esta topología de conexión se presenta al momento en que uno de los nodos falle, pues se verá interrumpida la comunicación provocando que la red se vea afectada (Sosinsky, 2009; Sharma, 2017).

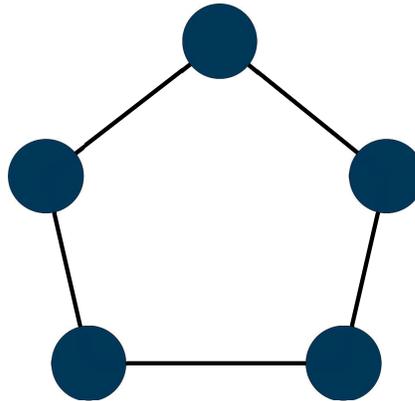


Figura 9. Grafo anillo.

**Topología en cadena.** Al igual que en la topología en anillo los nodos que conforman esta conexión se encuentran conectados en serie, el flujo de la información es similar, con la única diferencia de que los extremos no se unen, por lo tanto, el nodo inicial nunca conocerá que está sucediendo con la información que ha recabado el nodo final y si falla uno de los nodos, la red presentará problemas de comunicación. Este tipo de conexiones tiene un buen funcionamiento con pocos dispositivos (nodos), pero si el número de dispositivos (nodos) es muy grande, la información puede sufrir pérdidas causando que el último dispositivo no tenga un buen desempeño (Sosinsky, 2009; Sharma, 2017).



Figura 10. Grafo cadena.

**Topología en estrella.** En esta topología solo un nodo central recibe la información de cada uno de los dispositivos de la red, por lo que si éste falla, toda la red dejará de funcionar, este tipo de conexiones presentan buena comunicación pues la información no tiene que pasar por cada uno de los dispositivos (Sosinsky, 2009; Sharma, 2017).

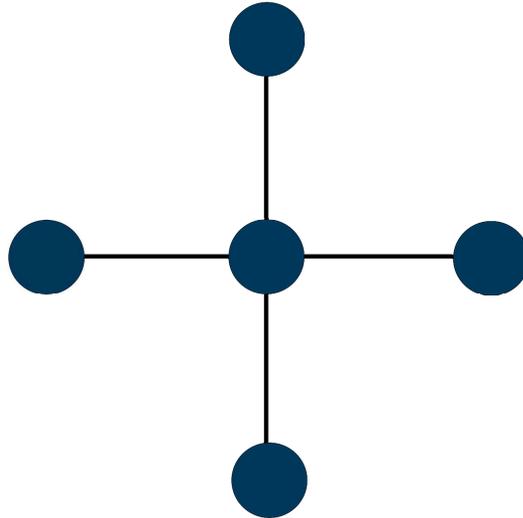


Figura 11. Grafo estrella.

**Topología en árbol.** Esta topología puede considerarse como un derivado de la conexión en estrella, pues se tiene un nodo central encargado de distribuir la información a través de las diferentes ramas, con la diferencia de que en las ramas existe otro nodo que se encarga de repetir la información dado que se comporta como un nuevo nodo central (Sharma, 2017).

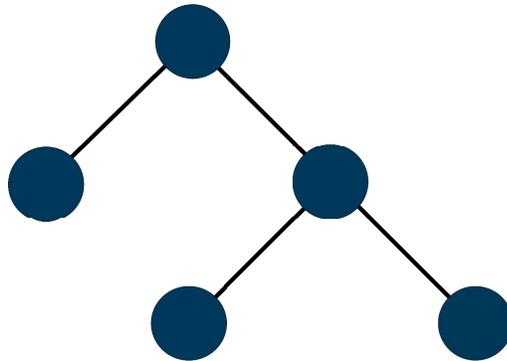


Figura 12. Grafo árbol.

### 2.2.3. Matrices asociadas a un grafo

La razón por la cual se desea representar un grafo por medio de matrices, se debe a ciertas ventajas que se presentan con respecto a su forma gráfica. En procesos en los cuales se desea realizar cálculos numéricos por medio de una computadora es más fácil representar un grafo en forma matricial que realizar un proceso de reconocimiento de imágenes, además de que se pueden aprovechar todas las ventajas del álgebra lineal para obtener datos característicos de cada grafo (Narsingh, 1974).

### Matriz de adyacencia $\Gamma(G)$

Es una matriz cuadrada de dimensión  $n \times n$ , donde  $n$  representa el número de nodos del grafo. Dicha matriz se compone de 1 y 0, sus elementos  $a_{ij}$  de la matriz  $\Gamma(G)$  están dados por,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in E(G) \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (1)$$

$(i, j) \in E(G)$  significa que existe una arista que une a los nodos  $i$  y  $j$ . En el caso de los grafos dirigidos se tiene que  $a_{ij} = 1$  si existe un arco que va del nodo  $j$  al nodo  $i$ .

### Matriz de Grado $D(G)$

Es una matriz diagonal de dimensión  $n \times n$ , donde  $n$  representa el número de vecinos que tiene cada nodo. Los elementos  $d_{ij}$  de dicha matriz están dados por,

$$d_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases} \quad (2)$$

Se conoce al coeficiente  $d_i$  como el *grado* del nodo  $i$ , el cual se calcula como la suma de los elementos de la fila  $i$  de la matriz de adyacencia  $\Gamma(G)$ ,

$$d_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n (i, j) \in E(G) \quad (3)$$

En el caso de los grafos orientados podemos distinguir entre el grado de entrada  $d_i^-$  y el grado de salida  $d_i^+$ , en donde el primero es la suma de todos los arcos que tienen al nodo  $i$  como final y el segundo es la suma de los que lo tienen como inicio (Martínez, 2014).

### Matriz Laplaciana $L(G)$

Esta matriz tiene dimensión  $n \times n$  se forma restando la matriz de grado  $D(G)$  y la matriz de adyacencia  $\Gamma(G)$ ,

$$L(G) = D(G) - \Gamma(G) \quad (4)$$

Los elementos  $l_{ij}$  de la matriz  $L(G)$  se calculan de la siguiente manera,

$$l_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{si } i = j \\ -1 & (i, j) \in E(G) \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (5)$$

### Matriz de acoplamiento $A(G)$

Para lograr una comunicación entre diferentes sistemas y que estos realicen tareas en conjunto, se utiliza la matriz de acoplamiento, que se define como la matriz Laplaciana negativa,

$$A(G) = -L(G) \quad (6)$$

Para una explicación más detallada sobre teoría de grafos ver (Parra, 2017; Martínez, 2014; Foulds, 1992).

### 2.3. Modelo matemático del cuadricóptero

En esta sección se encuentra todo lo referente al modelo matemático del cuadricóptero, como son las matrices de rotación y sus propiedades, ángulos de Euler, obtención de las fuerzas de arrastre y empuje provocadas por las propelas del cuadricóptero y la formulación Newton-Euler para la obtención del modelo de movimiento.

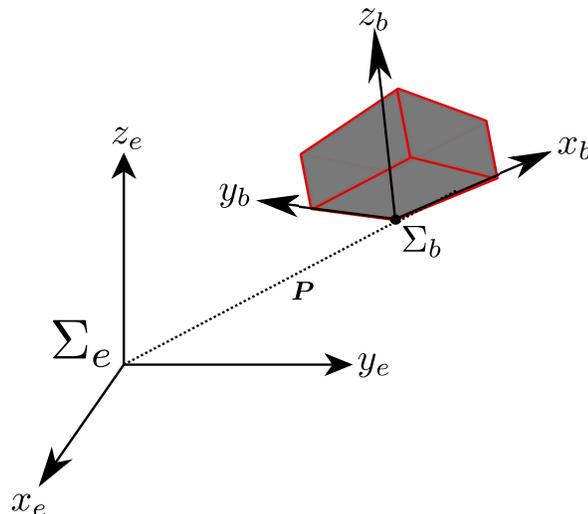


Figura 13. Marcos de referencia de un cuerpo rígido.

### 2.3.1. Estudio del movimiento de cuerpos rígidos

Para dicho estudio se requiere de herramientas matemáticas que permitan conocer tanto la posición como la orientación de un cuerpo rígido en el espacio. Por tal motivo las matrices de rotación y sus propiedades juegan un papel importante, ya que por medio de ellas es posible conocer la posición y orientación de un cuerpo con respecto a un marco de referencia deseado, (ver figura 13).

#### 2.3.1.1. Matrices de rotación

Las matrices de rotación permiten conocer la orientación de un cuerpo rígido en el espacio. Una matriz de rotación en un espacio de tres dimensiones se puede obtener a partir de las proyecciones de los ejes de un marco del cuerpo  $\Sigma_b$  con respecto a un marco fijo en el mundo  $\Sigma_e$  (ver figura 14).

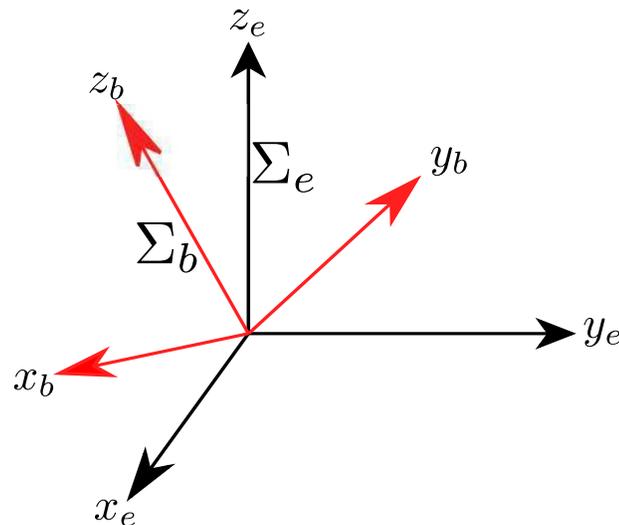


Figura 14. Marco  $\Sigma_b$  respecto a marco  $\Sigma_e$ .

A continuación se muestran las proyecciones del marco  $\Sigma_b$  con respecto al marco  $\Sigma_e$ , haciendo uso del producto punto para la obtención de una matriz de rotación general,

$$\mathbf{x}_b^e = (\mathbf{x}_b \cdot \mathbf{x}_e)\mathbf{x}_e + (\mathbf{x}_b \cdot \mathbf{y}_e)\mathbf{y}_e + (\mathbf{x}_b \cdot \mathbf{z}_e)\mathbf{z}_e, \quad (7)$$

$$\mathbf{y}_b^e = (\mathbf{y}_b \cdot \mathbf{x}_e)\mathbf{x}_e + (\mathbf{y}_b \cdot \mathbf{y}_e)\mathbf{y}_e + (\mathbf{y}_b \cdot \mathbf{z}_e)\mathbf{z}_e, \quad (8)$$

$$\mathbf{z}_b^e = (\mathbf{z}_b \cdot \mathbf{x}_e)\mathbf{x}_e + (\mathbf{z}_b \cdot \mathbf{y}_e)\mathbf{y}_e + (\mathbf{z}_b \cdot \mathbf{z}_e)\mathbf{z}_e, \quad (9)$$

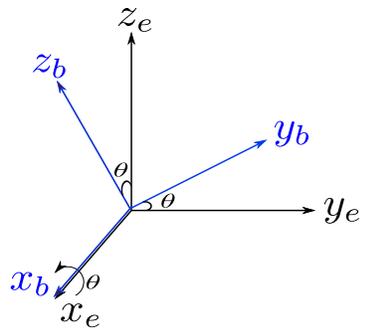
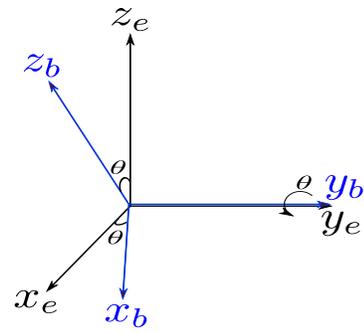
donde cada producto punto se encuentra multiplicado por la dirección del eje en que se realiza la proyección. Los elementos de las ecuaciones (7)-(9) son rescritos de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_b^e = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \cdot \mathbf{x}_e \\ \mathbf{x}_b \cdot \mathbf{y}_e \\ \mathbf{x}_b \cdot \mathbf{z}_e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_b^e = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_b \cdot \mathbf{x}_e \\ \mathbf{y}_b \cdot \mathbf{y}_e \\ \mathbf{y}_b \cdot \mathbf{z}_e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_b^e = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_b \cdot \mathbf{x}_e \\ \mathbf{z}_b \cdot \mathbf{y}_e \\ \mathbf{z}_b \cdot \mathbf{z}_e \end{bmatrix}, \quad (10)$$

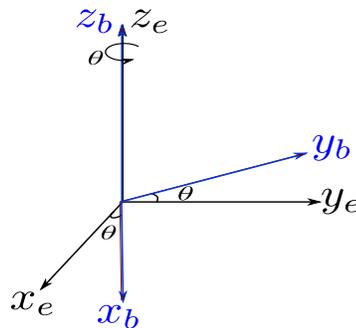
dado que se requiere una matriz de rotación  $\mathbf{R}$  de dimensión  $3 \times 3$  que al ser multiplicada por cada uno de los vectores del marco  $\Sigma_b$  regrese cada uno de los nuevos vectores en las coordenadas del marco  $\Sigma_e$ , dicha matriz  $\mathbf{R}$  puede ser escrita de la siguiente forma,

$$\mathbf{R}_b^e = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b^e & \mathbf{y}_b^e & \mathbf{z}_b^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \cdot \mathbf{x}_e & \mathbf{y}_b \cdot \mathbf{x}_e & \mathbf{z}_b \cdot \mathbf{x}_e \\ \mathbf{x}_b \cdot \mathbf{y}_e & \mathbf{y}_b \cdot \mathbf{y}_e & \mathbf{z}_b \cdot \mathbf{y}_e \\ \mathbf{x}_b \cdot \mathbf{z}_e & \mathbf{y}_b \cdot \mathbf{z}_e & \mathbf{z}_b \cdot \mathbf{z}_e \end{bmatrix}, \quad (11)$$

la matriz en (11) se conoce como matriz de rotación genérica. Existen tres matrices elementales para representar la rotación en cada uno de los ejes y se representan de la siguiente forma,

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$



$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 15. Matrices de rotación básicas.

### 2.3.1.2. Propiedades de las matrices de rotación

Las matrices de rotación presentan ciertas propiedades que permiten simplificar algunos cálculos (Spong *et al.*, 2005). Se sabe que

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \quad (12)$$

por tal motivo se concluye que,

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}, \quad (13)$$

ya que esto es cierto, la matriz de rotación es una matriz ortogonal, su determinante es igual a 1 y si se cumplen estas condiciones, se dice que  $\mathbf{R} \in SO(n)$  (grupo especial ortogonal). Dado que una matriz de rotación tiene que pertenecer a  $SO(n)$ , se puede concluir que no cualquier matriz cuadrada puede ser considerada una matriz de rotación.

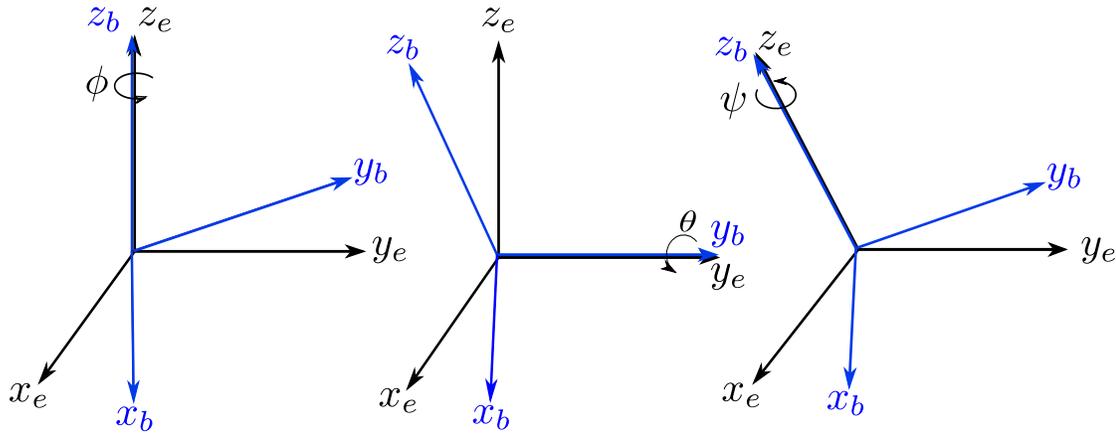


Figura 16. Representación de la orientación mediante los ángulos de Euler ZYZ.

### 2.3.1.3. Ángulos de Euler

Un método simple para describir la orientación de un cuerpo rígido en términos de tres cantidades independientes  $(\phi, \theta, \psi)$  es por medio de los ángulos de Euler. Una matriz de rotación se puede obtener a partir de tres rotaciones sucesivas. Por ejemplo, una matriz de rotación se puede obtener a partir de una rotación alrededor del eje  $z$  un ángulo  $\phi$ , seguida de una rotación alrededor del eje  $y$  un ángulo  $\theta$  y finalmente una rotación alrededor del eje  $z$  un ángulo  $\psi$  como se muestra en la figura 16. La secuencia anterior se conoce como los ángulos de Euler ZYZ y su matriz de rotación es la siguiente,

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_z(\psi) = \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\psi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\psi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}, \quad (14)$$

donde  $c_j = \cos(j)$ ,  $s_j = \sin(j)$  y  $j = \{\phi, \theta, \psi\}$ .

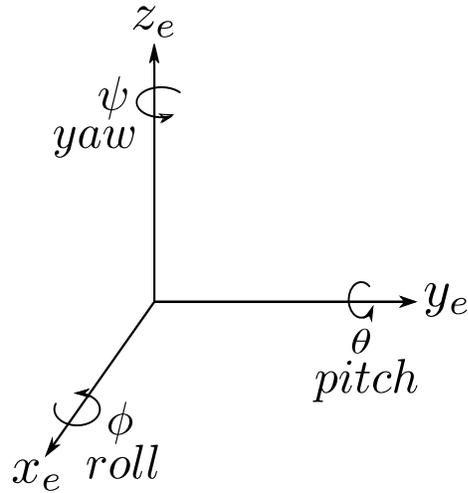


Figura 17. Ángulos roll, pitch y yaw.

En navegación los ángulos de Euler más utilizados son los ángulos  $yaw(\psi)$ ,  $pitch(\theta)$  y  $roll(\phi)$  que corresponden a la secuencia  $ZYX$  (ver figura 17) y su matriz de rotación está dada por

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & c_\psi c_\phi s_\theta + s_\psi s_\phi \\ c_\theta s_\psi & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\psi c_\phi s_\theta - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}. \quad (15)$$

A continuación se presenta una solución sencilla para el caso del problema inverso, el cual consiste en obtener los ángulos de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$  a partir de una matriz de rotación dada (Siciliano y Villani, 1999),

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Igualando las expresiones (15) y (16), se obtiene

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & c_\psi c_\phi s_\theta + s_\psi s_\phi \\ c_\theta s_\psi & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\psi c_\phi s_\theta - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}, \quad (17)$$

donde al relacionar los términos y al realizar algunas operaciones es posible la obtención de los ángulos

de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$ , que se presentan a continuación:

$$\begin{aligned}\phi &= \text{atan2}(r_{32}, r_{33}), \\ \theta &= \text{atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right), \\ \psi &= \text{atan2}(r_{21}, r_{11})\end{aligned}\quad (18)$$

donde  $\text{atan2}$  es la función arco tangente de dos argumentos.

#### 2.3.1.4. Velocidad angular

La velocidad angular es posible determinarla a partir de la derivada con respecto al tiempo de una matriz de rotación  $\mathbf{R}(t)$ . Se sabe que la derivada de una matriz de rotación se puede calcular por la siguiente relación,

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t)) \quad (19)$$

donde  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})$  es una matriz antisimétrica con la siguiente estructura

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$

y  $\boldsymbol{\omega}(t) = [p \ q \ r]^T$  es el vector de la velocidad angular del marco que rota con respecto al marco fijo en un tiempo  $t$  (Spong *et al.*, 2005; Siciliano *et al.*, 2008).

La derivada de la matriz de rotación (15) está dada por,

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_{z,\psi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{x,\phi} + \mathbf{R}_{z,\psi} \dot{\mathbf{R}}_{y,\theta} \mathbf{R}_{x,\phi} + \mathbf{R}_{z,\psi} \mathbf{R}_{y,\theta} \dot{\mathbf{R}}_{x,\phi}. \quad (20)$$

Al aplicar las propiedades de la matriz de rotación y la matriz antisimétrica (Spong *et al.*, 2005; Siciliano *et al.*, 2008) y tomando en cuenta las ecuaciones (19) y (20) se obtiene

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\mathbf{S}(\boldsymbol{w}) = \mathbf{R}\mathbf{S}(\boldsymbol{w}_x + \mathbf{R}_{x,\phi}^T \boldsymbol{w}_y + \mathbf{R}_{x,\phi}^T \mathbf{R}_{y,\theta}^T \boldsymbol{w}_z). \quad (21)$$

Igualando los argumentos de las matrices antisimétricas se obtiene

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_x + \mathbf{R}_{x,\phi}^T \boldsymbol{w}_y + \mathbf{R}_{x,\phi}^T \mathbf{R}_{y,\theta}^T \boldsymbol{w}_z \quad (22)$$

donde  $\mathbf{w}_x = \dot{\phi} [1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{w}_y = \dot{\theta} [0 \ 1 \ 0]^T$  y  $\mathbf{w}_z = \dot{\psi} [0 \ 0 \ 1]^T$ . Finalmente, la velocidad angular en términos de las derivadas de los ángulos de Euler está dada por

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & s_\phi c_\theta \\ 0 & -s_\phi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \Psi(\phi) \dot{\phi}. \quad (23)$$

La matriz inversa de  $\Psi(\phi)$  está dada por

$$\Psi^{-1}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & c_\theta s_\phi \\ 0 & s_\phi \text{se}_\theta & c_\phi \text{se}_\theta \end{bmatrix} \quad (24)$$

donde  $t(\cdot) = \tan(\cdot)$  y  $\text{se}(\cdot) = \sec(\cdot)$ . Es importante mencionar que esta matriz tiene una singularidad en  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ .

### 2.3.1.5. Aerodinámica del cuadricóptero

En el cuadricóptero se presentan ciertas fuerzas aerodinámicas que dependen del diseño de los rotores (Mahony *et al.*, 2012). Una de ellas es la fuerza de empuje, esta es la causante del desplazamiento del vehículo aéreo y puede ser modelada en estado estacionario mediante:

$$f_{ri} = \rho A_i r_i^2 C_T \omega_{ri}^2, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (25)$$

donde  $\rho$  es la densidad del aire,  $A_i$  área del disco del rotor,  $r_i$  radio del disco,  $C_T$  coeficiente de arrastre y  $\omega_{ri}$  velocidad angular del rotor.

Para fines prácticos la ecuación (25) puede ser sustituida por el siguiente modelo simplificado

$$f_{ri} = c_T \omega_{ri}^2, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (26)$$

donde  $c_T > 0$  puede ser determinado a partir de la prueba de empuje estático.

Debido a que se tienen cuatro rotores el empuje total ( $T$ ) aplicado al cuadricóptero se puede expresar por

$$T = \sum_{i=1}^4 f_{ri} = \sum_{i=1}^4 c_T \omega_{ri}^2, \quad (27)$$

por otra parte, la fuerza de arrastre es generada por la oposición que presenta el aire al movimiento provocado por los rotores del cuadricóptero. Por lo tanto, se genera un par en el fuselaje que está dado por

$$\tau_{ri} = c_Q \omega_{ri}^2 \quad (28)$$

donde  $c_Q > 0$  es el coeficiente de torque que depende de la geometría de las propelas (Mahony *et al.*, 2012).

En la figura 18 se encuentra un esquema del cuadricóptero donde se puede apreciar como actúan las fuerzas antes mencionadas en el objeto de estudio. Se tiene al marco de referencia inercial  $\Sigma_e = \{x_e, y_e, z_e\}$  y el marco unido al cuerpo del vehículo  $\Sigma_b = \{x_b, y_b, z_b\}$ . La fuerza de empuje solo actúa en el eje  $z_b$  por lo que haciendo uso de la ecuación (27), la fuerza total está dada por

$$\mathbf{f} = T \mathbf{z}_b = T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

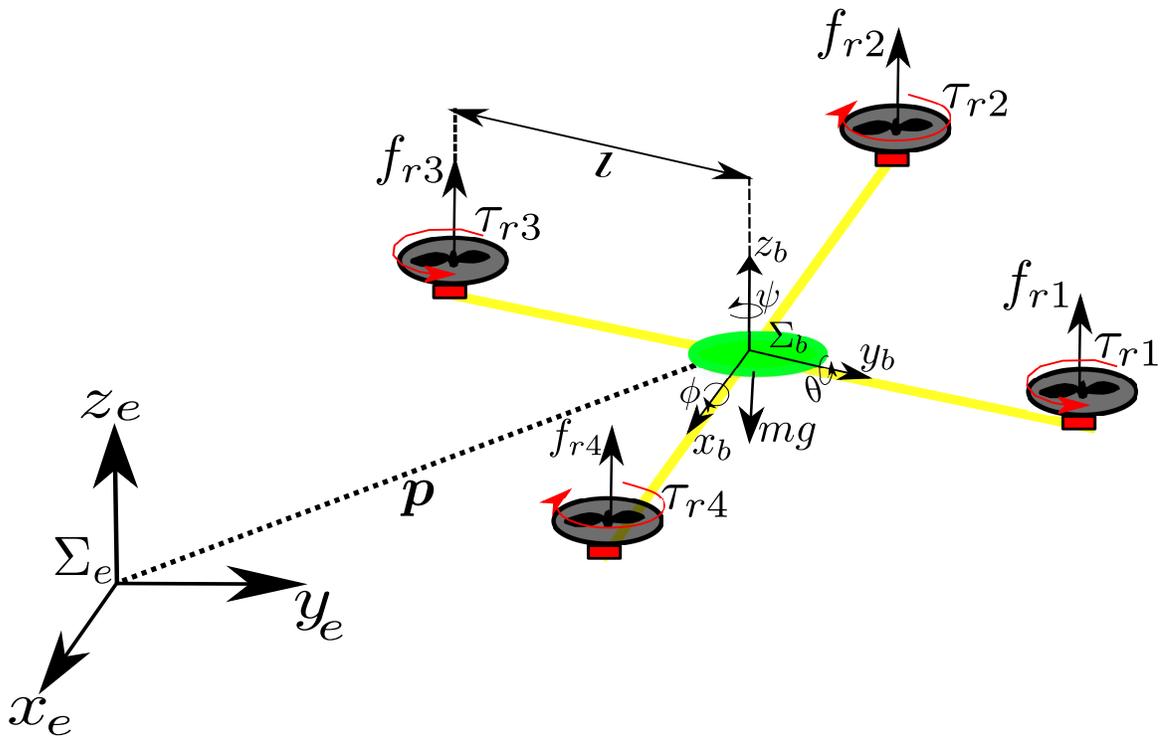


Figura 18. Esquema del cuadricóptero, donde  $\Sigma_e$  es el marco de referencia inercial y  $\Sigma_b$  el marco fijo al cuerpo.

El momento total generado por la fuerza de arrastre en el marco unido al cuadricóptero está dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_x + \boldsymbol{\tau}_y + \boldsymbol{\tau}_z \quad (30)$$

donde

$$\boldsymbol{\tau}_x = l\mathbf{y}_b \times f_{r2}\mathbf{z}_b - l\mathbf{y}_b \times f_{r4}\mathbf{z}_b = l \begin{bmatrix} f_{r2} - f_{r4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = lc_T \begin{bmatrix} \omega_{r2}^2 - \omega_{r4}^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$\boldsymbol{\tau}_y = l\mathbf{x}_b \times f_{r1}\mathbf{z}_b - l\mathbf{x}_b \times f_{r3}\mathbf{z}_b = l \begin{bmatrix} 0 \\ f_{r3} - f_{r1} \\ 0 \end{bmatrix} = lc_T \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{r3}^2 - \omega_{r1}^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$\boldsymbol{\tau}_z = \boldsymbol{\tau}_{r2} + \boldsymbol{\tau}_{r4} - \boldsymbol{\tau}_{r1} - \boldsymbol{\tau}_{r3} = c_Q \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{r2}^2 + \omega_{r4}^2 - \omega_{r1}^2 - \omega_{r3}^2 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$l$  es la distancia del origen del marco  $\sum_b$  al  $i$ -ésimo rotor.

Agrupando (27) y los términos anteriores se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{bmatrix} T \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_T & c_T & c_T & c_T \\ 0 & lc_T & 0 & -lc_T \\ -lc_T & 0 & lc_T & 0 \\ -c_Q & c_Q & -c_Q & c_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{r1}^2 \\ \omega_{r2}^2 \\ \omega_{r3}^2 \\ \omega_{r4}^2 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

La ecuación anterior describe la relación entre las velocidades angulares de los rotores y las fuerzas y pares de empuje.

Dado que dichas fuerzas se encuentran en el marco fijo al cuerpo y para su estudio se requiere que estén respecto al marco inercial  $\sum_e$ , se tiene:

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{R}\mathbf{f} = T\mathbf{R}\mathbf{z}_e, \quad (35)$$

$$\boldsymbol{\tau}_e = \mathbf{R}\boldsymbol{\tau}. \quad (36)$$

### 2.3.2. Ecuaciones de movimiento

La posición lineal del cuadricóptero se define en los ejes del marco inercial  $\Sigma_e$  y se denota por

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Para describir la orientación del cuadricóptero se hace uso de los ángulos de Euler para navegación *roll*, *pitch* y *yaw*:

- El ángulo roll ( $\phi$ ) determina la rotación alrededor del eje  $x$ .
- El ángulo pitch ( $\theta$ ) determina la rotación alrededor del eje  $y$ .
- El ángulo yaw ( $\psi$ ) determina la rotación alrededor del eje  $z$ .

En forma compacta  $\boldsymbol{\phi} = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ . Las velocidades lineales en el marco fijo al cuerpo se definen como  $\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$ . Por otra parte, el vector  $\boldsymbol{\omega} = [p \ q \ r]^T$  denota las velocidad angular con respecto al marco fijo al cuerpo rígido.

### 2.3.3. Formulación Newton-Euler

Las ecuación de movimiento de traslación expresada con respecto al marco fijo al cuerpo rígido, están dadas por

$$m\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times m\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{R}^T g m \mathbf{z}_e \quad (38)$$

donde  $g$  es la constante de gravedad y  $m$  es la masa del cuadricóptero. Considerando las siguientes relaciones cinemáticas:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}\mathbf{v}, \quad \ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{v} \quad (39)$$

la ecuación (38), se puede expresar con respecto al marco de referencia inercial de la siguiente manera

$$m\ddot{\mathbf{p}} = T\mathbf{R}\mathbf{z}_e - mg\mathbf{z}_e = \mathbf{f}_e - mg\mathbf{z}_e. \quad (40)$$

La ecuación que describe la orientación está dada por

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{RS}(\boldsymbol{\omega}) \quad (41)$$

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) \quad (42)$$

donde  $\mathbf{I}$  es el tensor de inercia dado por la siguiente matriz diagonal

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}, \quad (43)$$

debido a la estructura simétrica del cuadricóptero. Es importante mencionar que ambas ecuaciones se encuentran respecto al marco  $\sum_b$ .

Por último, el modelo dinámico del cuadricóptero está dado por:

$$\ddot{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{f}_e}{m} - gz_e, \quad (44)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{RS}(\boldsymbol{\omega}) \quad (45)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}). \quad (46)$$

## Capítulo 3. Algoritmos de control

---

En este capítulo se presenta un algoritmo de control para el vehículo aéreo de cuatro rotores. Dado que se tiene un sistema subactuado para la parte de posición, se adopta un enfoque similar al presentado en (Kendoul *et al.*, 2009). Para la obtención del algoritmo de control del subsistema de orientación, se recurre a la técnica de control no lineal conocida como linealización por retroalimentación exacta (Khalil, 2002).

### 3.1. Obtención del algoritmo de control de posición

Como se mencionó anteriormente para obtener el algoritmo que permite controlar la posición del cuadricóptero, se ha adoptado una estrategia similar a la presentada en (Kendoul *et al.*, 2009). En dicho trabajo se propone una entrada virtual  $\mathbf{u}$  aplicada al subsistema que describe la posición

$$m\ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{u} - \mathbf{u} + T\mathbf{R}z_e - mgz_e \quad (47)$$

para obtener un sistema actuado. Esta entrada de control auxiliar, permite calcular tanto la fuerza de empuje  $T$  como los ángulos deseados  $\phi_d$  y  $\theta_d$ , pues a diferencia del ángulo  $\psi_d$  estos no pueden tomar valores arbitrarios.

La entrada virtual  $\mathbf{u}$ , está definida por

$$\mathbf{u} = T\mathbf{R}_d z_e - mgz_e \quad (48)$$

donde  $\mathbf{R}_d$  es la matriz de rotación en función de los ángulos deseados  $\phi_d, \theta_d, \psi_d$ . Dado que se multiplica la matriz  $\mathbf{R}_d$  por el vector unitario  $z_e$ , se obtiene

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} c_{\psi_d} s_{\theta_d} c_{\phi_d} + s_{\psi_d} s_{\phi_d} \\ s_{\psi_d} s_{\theta_d} c_{\phi_d} + c_{\psi_d} s_{\phi_d} \\ c_{\theta_d} c_{\phi_d} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}. \quad (49)$$

La fuerza de empuje total se puede obtener apartir de

$$T = \|\mathbf{u} + mgz_e\| \quad (50)$$

o por simplicidad de la tercer fila de la ecuación (49) dando como resultado

$$T = \frac{u_z + mg}{c_{\theta_d} c_{\phi_d}}. \quad (51)$$

Los ángulos  $\phi_d$  y  $\theta_d$  se calculan a partir de sustituir la fuerza de empuje total  $T$ , en la primera y segunda fila de la ecuación (49), por lo tanto, las ecuaciones resultantes son:

$$\phi_d = \tan^{-1} \left( \frac{c_{\theta_d}}{u_z + mg} (s_{\psi_d} u_x - c_{\psi_d} u_y) \right), \quad (52)$$

$$\theta_d = \tan^{-1} \left( \frac{1}{u_z + mg} (c_{\psi_d} u_x + s_{\psi_d} u_y) \right) \quad (53)$$

siempre y cuando  $u_z + mg \neq 0$ .

Dado que el objetivo de control es obtener  $\mathbf{u}$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{p}} \triangleq \mathbf{p} - \mathbf{p}_d(t) = \mathbf{0}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \triangleq \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}}_d(t) = \mathbf{0}$$

la entrada de control propuesta para lograr el seguimiento de trayectorias está dada por

$$\mathbf{u} = m\ddot{\mathbf{p}}_d - \mathbf{K}_v \dot{\tilde{\mathbf{p}}} - \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{p}} \quad (54)$$

donde  $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_d$  es el error de posición,  $\dot{\tilde{\mathbf{p}}} = \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}}_d$  es el error de seguimiento de velocidad,  $\mathbf{p}_d$  es la posición deseada y  $\mathbf{K}_v, \mathbf{K}_p > \mathbf{0}$  son matrices de ganancias definidas positivas.

Sustituyendo (48) y (54) en la ecuación (47) el sistema en lazo cerrado está definido por

$$\ddot{\tilde{\mathbf{p}}} + \frac{1}{m} \mathbf{K}_v \dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \frac{1}{m} \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{p}} = \frac{T}{m} (\mathbf{R} - \mathbf{R}_d), \quad (55)$$

se puede observar que sin el término  $T (\mathbf{R} - \mathbf{R}_d)$ , el sistema presenta un punto de equilibrio exponencialmente estable en el origen.

### 3.2. Obtención del algoritmo de control de orientación

En esta sección se presentan los algoritmos de control para la orientación del cuadricóptero basados en los ángulos de Euler  $ZYX$ . Considérese nuevamente la ecuación (42), dicha ecuación es no lineal por lo que se hace uso de una linealización por retroalimentación exacta. La entrada linealizante está dada

por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{I}\tilde{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \quad (56)$$

donde  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  es la nueva entrada de control. Al sustituir la ecuación anterior en (42), se obtiene

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}. \quad (57)$$

Ahora bien, al derivar la ecuación (23) se obtiene la siguiente relación cinemática

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\Psi}}\dot{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{\Psi}\ddot{\boldsymbol{\phi}}. \quad (58)$$

Igualando las ecuaciones (57) y (58) se llega a la siguiente expresión

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}}\dot{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\phi}) + \boldsymbol{\Psi}\ddot{\boldsymbol{\phi}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}. \quad (59)$$

Para el subsistema (59), se propone el siguiente algoritmo de control (Siciliano y Villani, 1999)

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\Psi} \left( \ddot{\boldsymbol{\phi}}_d - \mathbf{K}_w \dot{\boldsymbol{e}} - \mathbf{K}_o \boldsymbol{e} \right) + \dot{\boldsymbol{\Psi}}\dot{\boldsymbol{\phi}} \quad (60)$$

donde  $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_d$ ,  $\dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{\phi}} - \dot{\boldsymbol{\phi}}_d$  son los errores de orientación y  $\mathbf{K}_w, \mathbf{K}_o > \mathbf{0}$  son matrices positivas definidas. El sistema en lazo cerrado da como resultado,

$$\ddot{\boldsymbol{e}} + \mathbf{K}_w \dot{\boldsymbol{e}} + \mathbf{K}_o \boldsymbol{e} = \mathbf{0} \quad (61)$$

siempre y cuando  $\boldsymbol{\Psi}$  sea una matriz no singular. Nótese que (61) es una ecuación diferencial de segundo orden cuyo punto de equilibrio  $(\boldsymbol{e}, \dot{\boldsymbol{e}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  es asintóticamente estable.

Sin embargo esta estrategia de control tiene la desventaja de tener una singularidad en  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ . Por eso se recurre a una segunda estrategia de control. Dicha estrategia consiste en definir el error de orientación en función de una matriz de rotación.

Las matrices de rotación para lograr el objetivo se describen, como

$$\mathbf{R}\mathbf{R}_e = \mathbf{R}_d \quad (62)$$

donde  $\mathbf{R}_e$  es la rotación que se tiene que realizar para lograr la rotación deseada, es decir,  $\mathbf{R}_e$  es una medida del error de orientación, la cual se puede calcular como

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d. \quad (63)$$

Nótese que el cuadricóptero alcanza la orientación deseada si  $\mathbf{R}_e = \mathbf{I}$ . Dada la ecuación (63) se obtiene su primera derivada con respecto al tiempo, para así obtener el error en función de las velocidades angulares con respecto al marco del cuerpo.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_e &= \dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{R}_d + \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}_d \\ &= \mathbf{R}^T \mathbf{S}^T(\mathbf{R}\boldsymbol{\omega}) \mathbf{R}_d + \mathbf{R}^T \mathbf{S}(\mathbf{R}_d\boldsymbol{\omega}_d) \mathbf{R}_d. \end{aligned} \quad (64)$$

La matriz  $\mathbf{S}^T$  es igual a  $-\mathbf{S}$  y aplicando la siguiente propiedad  $\mathbf{R}\mathbf{S}(\mathbf{R}\boldsymbol{\omega})\mathbf{R}^T = \mathbf{S}(\mathbf{R}\boldsymbol{\omega})$ , la ecuación anterior queda expresada como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_e &= \mathbf{S}(-\mathbf{R}^T \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}) \mathbf{R}_e + \mathbf{S}(\mathbf{R}^T \mathbf{R}_d\boldsymbol{\omega}_d) \mathbf{R}_e \\ &= \mathbf{S}(-\boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}_e\boldsymbol{\omega}_d) \mathbf{R}_e \end{aligned} \quad (65)$$

donde el argumento de la matriz  $\mathbf{S}$  representa el error de la velocidad angular mencionado anteriormente. Tomando en cuenta la ecuación (23), se tiene

$$-\boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}_e\boldsymbol{\omega}_d = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\phi}_e) \dot{\boldsymbol{\phi}}_e \quad (66)$$

y cuya derivada está dada por

$$-\dot{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{R}_e\boldsymbol{\omega}_d + \mathbf{R}_e\dot{\boldsymbol{\omega}}_d = \dot{\boldsymbol{\Psi}}(\boldsymbol{\phi}_e) \dot{\boldsymbol{\phi}}_e + \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\phi}_e) \ddot{\boldsymbol{\phi}}_e \quad (67)$$

donde  $\boldsymbol{\phi}_e$  son los ángulos de Euler obtenidos a partir de la matriz  $\mathbf{R}_e$ . Es importante mencionar que si  $\boldsymbol{\phi}_e \rightarrow \mathbf{0}$ , entonces  $\mathbf{R}_e \rightarrow \mathbf{I}$ . Tomando en cuenta la ecuación (57), se obtiene

$$-\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{R}_e\boldsymbol{\omega}_d + \mathbf{R}_e\dot{\boldsymbol{\omega}}_d = \dot{\boldsymbol{\Psi}}(\boldsymbol{\phi}_e) \dot{\boldsymbol{\phi}}_e + \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\phi}_e) \ddot{\boldsymbol{\phi}}_e \quad (68)$$

donde la entrada auxiliar  $\tilde{\tau}$  se define como

$$\tilde{\tau} = -S(\omega)\mathbf{R}_e\omega_d + \mathbf{R}_e\dot{\omega}_d - \dot{\Psi}(\phi_e)\dot{\phi}_e + \Psi(\phi_e)(\mathbf{K}_v\dot{\phi}_e + \mathbf{K}_p\phi_e). \quad (69)$$

El modelo dinámico en lazo cerrado es el siguiente, siempre y cuando  $\Psi(\phi_e)$  sea no singular,

$$\ddot{\phi}_e + \mathbf{K}_w\dot{\phi}_e + \mathbf{K}_o\phi_e = \mathbf{0}. \quad (70)$$

Al igual que en la estrategia de control anterior, la ecuación (70) se analiza como una ecuación diferencial de segundo orden, donde las ganancias  $\mathbf{K}_w$  y  $\mathbf{K}_o$  se eligen como matrices positivas definidas para garantizar que el punto de equilibrio sea asintóticamente estable.

En este enfoque, la singularidad aparece cuando  $\theta_e = \pm\frac{\pi}{2}$ . Nótese que un error de 90 grados es relativamente grande. Además, con este enfoque el cuadricóptero puede realizar trayectorias que requieran valores de  $\theta$  mayor o igual a 90 grados. Tomando en cuenta lo mencionado anteriormente, el algoritmo de control seleccionado para la orientación del cuadricóptero se obtiene mediante este enfoque.

### 3.3. Análisis de estabilidad

Dado que el modelo del cuadricóptero presenta una estructura en cascada, se consultaron los resultados reportados por Sepulchre *et al.* (1997), ya que presenta un amplio estudio de este tipo de sistemas y las herramientas necesarias para llevar a cabo el análisis de estabilidad del modelo matemático en estudio.

Para comenzar con el análisis de estabilidad, se toma como caso de estudio el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \mathbf{f}(z) + \psi(z, \xi), \\ \dot{\xi} &= \alpha(\xi, u), \end{aligned} \quad (71)$$

donde el término de interconexión  $\psi(z, \xi)$  es equivalente a  $T(\mathbf{R} - \mathbf{R}_d)z_e$  y el cual se busca probar que cuando  $t \rightarrow \infty$  dicho término tiende a cero, pues de lo contrario este término estará actuando como una perturbación. Para demostrar lo antes dicho se recurre a la siguiente suposición.

**Suposición 3.1** (Sepulchre et al., 1997, pág 129) La función  $\psi(z, \xi)$  tiene un crecimiento lineal en  $z$ , es decir, existen dos funciones clase- $\mathcal{K}$   $\gamma_1(\cdot)$  y  $\gamma_2(\cdot)$ , diferenciales en  $\xi = 0$ , tal que

$$\|\psi(z, \xi)\| \leq \gamma_1(\|\xi\|)\|z\| + \gamma_2(\|\xi\|). \quad (72)$$

Por tanto, para comprobar que el término de interconexión  $T(\mathbf{R} - \mathbf{R}_d)\mathbf{z}_e$  se encuentra acotado de forma similar a lo visto en (72), se procede a realizar los siguientes cálculos.

Dado que el algoritmo de orientación empleado hace uso de la matriz  $\mathbf{R}_e$  para definir el error, es necesario que el término de interconexión se encuentre en función de dicho término, por tanto, al utilizar  $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$  en  $T(\mathbf{R} - \mathbf{R}_d)\mathbf{z}_e$ , se obtiene

$$T(\mathbf{R} - \mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{R}_d)\mathbf{z}_e = T\mathbf{R}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_e)\mathbf{z}_e \quad (73)$$

ya que el término anterior se encuentra en función de la matriz de rotación del error se procede a acotar dicho término.

Se sabe que  $\mathbf{a}^T\mathbf{b} \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$ , por tanto, al aplicar dicha desigualdad en (73), se obtiene

$$\|T\mathbf{R}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_e)\mathbf{z}_e\| \leq |T|\|\mathbf{R}\|\|(\mathbf{I} - \mathbf{R}_e)\mathbf{z}_e\|_1 \quad (74)$$

donde al hacer uso de la norma 1 y la desigualdad del triángulo en el término

$$(\mathbf{I} - \mathbf{R}_e)\mathbf{z}_e = \begin{bmatrix} -\cos(\tilde{\psi})\sin(\tilde{\theta})\cos(\tilde{\phi}) - \sin(\tilde{\psi})\sin(\tilde{\phi}) \\ -\sin(\tilde{\psi})\sin(\tilde{\theta})\cos(\tilde{\phi}) + \cos(\tilde{\psi})\sin(\tilde{\phi}) \\ 1 - \cos(\tilde{\theta})\cos(\tilde{\phi}) \end{bmatrix}, \quad (75)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{I} - \mathbf{R}_e)\mathbf{z}_e\|_1 &\leq |\cos(\tilde{\psi})\sin(\tilde{\theta})\cos(\tilde{\phi})| + |\sin(\tilde{\psi})\sin(\tilde{\phi})| + |\sin(\tilde{\psi})\sin(\tilde{\theta})\cos(\tilde{\phi})| \\ &\quad + |\cos(\tilde{\psi})\sin(\tilde{\phi})| + |1 - \cos(\tilde{\theta})\cos(\tilde{\phi})| \end{aligned} \quad (76)$$

donde todos los términos pueden acotarse por arriba mediante el uso de las siguientes desigualdades  $|\cos(a)| \leq 1$ ,  $|\sin(a)| \leq |a|$  y  $|a + b| \leq |a| + |b|$ , aplicando dichas desigualdades, se obtienen las

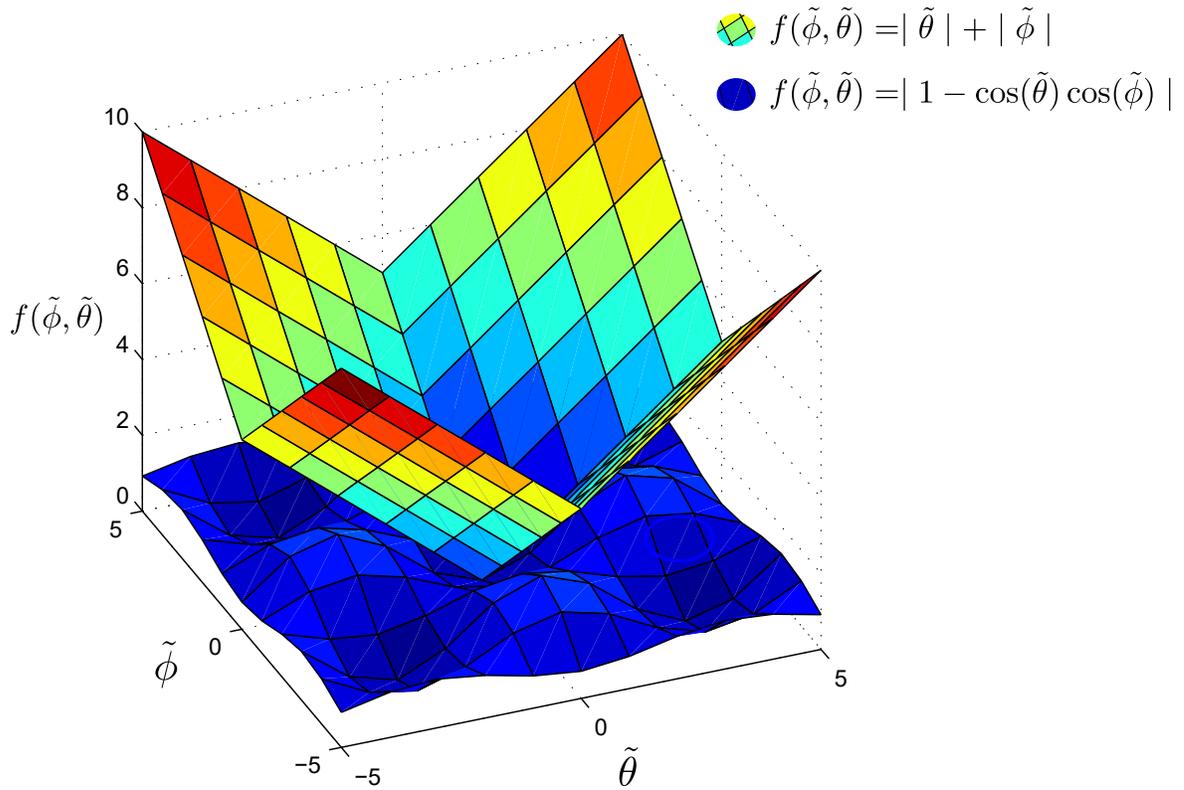
expresiones acotadas:

$$|\operatorname{sen}(\tilde{\theta}) + \operatorname{sen}(\tilde{\psi})| \leq |\tilde{\theta}| + |\tilde{\psi}| \quad (77)$$

$$|\operatorname{sen}(\tilde{\psi}) + \operatorname{sen}(\tilde{\phi})| \leq |\tilde{\phi}| + |\tilde{\psi}| \quad (78)$$

$$|1 - \cos(\tilde{\theta}) \cos(\tilde{\phi})| \leq |\tilde{\phi}| + |\tilde{\theta}| \quad (79)$$

donde por conveniencia en (77) se ha acotado  $|\operatorname{sen}(\tilde{\phi})| \leq 1$ , en (78) se ha acotado  $|\operatorname{sen}(\tilde{\theta})| \leq 1$  y la cota en (79) se ha obtenido gráficamente, lo cual se puede apreciar en la figura 19.



**Figura 19.** Gráficas de las funciones  $|1 - \cos(\tilde{\theta}) \cos(\tilde{\phi})|$  y  $|\tilde{\theta}| + |\tilde{\phi}|$ .

Agrupando los términos obtenidos al hacer uso de las desigualdades es posible acotar (76) por arriba como se muestra a continuación

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{R}_e)\mathbf{z}_e\|_1 \leq 2(|\tilde{\phi}| + |\tilde{\theta}| + |\tilde{\psi}|) \leq 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\tilde{\phi}| \\ |\tilde{\theta}| \\ |\tilde{\psi}| \end{bmatrix} \leq 2\sqrt{3}\|\phi_e\|. \quad (80)$$

Por otra parte, al acotar por arriba la fuerza de empuje total  $T$ , se obtiene

$$|T| = \|\mathbf{u} + mg\mathbf{z}_e\| \leq \|\mathbf{u}\| + mg \quad (81)$$

donde  $\|\mathbf{u}\| = \|m\ddot{\mathbf{p}}_d - \mathbf{K}_v\dot{\tilde{\mathbf{p}}} - \mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{p}}\|$  puede ser acotada por arriba de la siguiente manera

$$\|m\ddot{\mathbf{p}}_d - \mathbf{K}_v\dot{\tilde{\mathbf{p}}} - \mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{p}}\| \leq m\|\ddot{\mathbf{p}}_d\|_\infty + \|\mathbf{K}_v\|\|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\| + \|\mathbf{K}_p\|\|\tilde{\mathbf{p}}\| \quad (82)$$

dado que  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{K}_v$  son matrices simétricas definidas positivas la norma Euclidiana se define por el máximo valor propio, por tanto (82) se puede describir como

$$\|m\ddot{\mathbf{p}}_d - \mathbf{K}_v\dot{\tilde{\mathbf{p}}} - \mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{p}}\| \leq m\|\ddot{\mathbf{p}}_d\|_\infty + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_v)\|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\| + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_p)\|\tilde{\mathbf{p}}\|.$$

Al sustituir (80) y (81) en (74) el término de interconexión se define como

$$\|T\mathbf{R}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_e)\mathbf{z}_e\| \leq 2\sqrt{3}M\|\phi_e\| + 2\sqrt{3}G_{pv}\|z\|\|\phi_e\| \quad (83)$$

donde  $M \triangleq m(\|\ddot{\mathbf{p}}_d\|_\infty + g)$ ,  $G_{pv} \triangleq \|[\lambda_{\max}(\mathbf{K}_b) \quad \lambda_{\max}(\mathbf{K}_v)]\|$ ,  $\|z\| = [\|\tilde{\mathbf{p}}\| \quad \|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\|]^T$ . Recordando la ecuación (72) he igualando  $\gamma_1(\|\phi_e\|)\|z\| = 2\sqrt{3}G_{pv}\|z\|\|\phi_e\|$  y  $\gamma_2(\|\phi_e\|) = 2\sqrt{3}M\|\phi_e\|$ , se demuestra que el término de interconexión  $T\mathbf{R}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_e)$  satisface la desigualdad dada en (72).

El siguiente paso es demostrar si el sistema en lazo cerrado presenta estabilidad global. Por tanto, al llevar el sistema de traslación y de orientación en lazo cerrado descrito por

$$\ddot{\tilde{\mathbf{p}}} = -\frac{1}{m}\mathbf{K}_v\dot{\tilde{\mathbf{p}}} - \frac{1}{m}\mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{p}} + \frac{T}{m}\mathbf{R}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_e)\mathbf{z}_e, \quad (84)$$

$$\ddot{\phi}_e = -\mathbf{K}_w\dot{\phi}_e - \mathbf{K}_o\phi_e$$

a la forma vista en (71), se tiene

$$\dot{z} = \mathbf{A}_1 z + \psi(z, \xi), \quad (85)$$

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}_2 \xi \quad (86)$$

donde  $z = [\tilde{\mathbf{p}} \quad \dot{\tilde{\mathbf{p}}}]^T$ ,  $f(z) = \mathbf{A}_1 z$ ,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\frac{1}{m}\mathbf{K}_p & -\frac{1}{m}\mathbf{K}_v \end{bmatrix}, \quad (87)$$

$$\psi(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{T}{m}\mathbf{R}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_e)\mathbf{z}_e, \quad \boldsymbol{\xi} = [\phi_e \quad \dot{\phi}_e]^T, \quad \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{A}_2\boldsymbol{\xi} \text{ y}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_o & -\mathbf{K}_w \end{bmatrix}. \quad (88)$$

Para estudiar la estabilidad del sistema descrito por (85) y (86) se hará uso de la siguiente proposición:

**Proposición 1** (Sepulchre et al., 1997, pág 133) Si la Suposición 3.1 se cumple y si el sistema  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z})$  es global exponencialmente estable, con una función de Lyapunov  $V(\mathbf{z})$  la cual satisface

$$\alpha_1\|\mathbf{z}\|^2 \leq V(\mathbf{z}) \leq \alpha_2\|\mathbf{z}\|^2 \quad (89)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial \mathbf{z}} \right\| \leq \alpha_3\|\mathbf{z}\| \quad \alpha_i > 0, i = 1, \dots, 4 \quad (90)$$

$$L_f V(\mathbf{z}) \leq -\alpha_4 V(\mathbf{z}) \quad (91)$$

entonces las soluciones  $\mathbf{z}(t)$  de (71) son acotadas y convergen a cero para cualquier  $\boldsymbol{\xi}(t)$  que converge a cero. Además, si  $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$  es global asintóticamente estable, entonces  $(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  del sistema (71) es un punto de equilibrio global asintóticamente estable.

En base a lo anterior, se propone la siguiente función de Lyapunov  $V = \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z}$  donde  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$  es solución de  $\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_1 = -\mathbf{Q}$  con  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{K}_v$  elegidas de tal forma que  $\mathbf{A}_1$  sea Hurwitz,  $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$  y cuya función  $V$  satisface (92)-(94) como se muestra a continuación:

$$\lambda_{\min}(\mathbf{P})\|\mathbf{z}\|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P})\|\mathbf{z}\|^2, \quad (92)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial \mathbf{z}} \right\| \leq 2\lambda_{\max}(\mathbf{P})\|\mathbf{z}\|, \quad (93)$$

$$\dot{V} \leq -\frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})} V, \quad (94)$$

con lo anterior se puede concluir que la dinámica en lazo cerrado del sistema completo (55) y (70), presenta un punto de equilibrio asintóticamente estable en  $(\mathbf{z}, \phi_e, \dot{\phi}_e) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ .

## Capítulo 4. Formación de un grupo de cuadricópteros

---

La importancia de que un grupo de vehículos aéreos puedan realizar vuelos en formación radica principalmente en reducir costos y tiempos de operación, ya que se busca que las tareas que antes eran realizadas por un solo sistema (cuadricóptero) se dividan entre varios cumpliendo así con los objetivos mencionados anteriormente.

Dado que se abordan dos estrategias para lograr que un grupo de cinco cuadricópteros realicen un vuelo en formación, el presente capítulo se encuentra dividido en dos secciones. En la primera sección se encuentra lo referente a vuelo en formación mediante el enfoque conocido como maestro-esclavo. En la segunda sección, se aborda el caso en que no existe un cuadricóptero maestro, sino que cada uno sabe que órdenes tiene que ejecutar.

### 4.1. Formación maestro esclavo

Para que los cuadricópteros realicen una formación mediante el enfoque maestro-esclavo se emplearon los grafos dirigidos, ya que por su estructura, es posible utilizar el enfoque mencionado. Para que cada uno de los cuadricópteros se comuniquen se recurre a la matriz de acoplamiento que se obtiene a partir del grafo en estudio. A continuación se presentan las entradas de control propuestas para la formación de un grupo de cinco cuadricópteros empleando los grafos dirigidos estrella y cadena. El motivo principal por el cual, solo se presentan los dos grafos mencionados se debe a que el grafo árbol dirigido es considerado como un derivado de estas dos. Por otra parte, debido a que el nodo final retroalimenta al nodo inicial, el grafo anillo dirigido no es considerado pues no permite hacer uso de la técnica maestro-esclavo.

#### 4.1.1. Formación con un grafo estrella dirigido

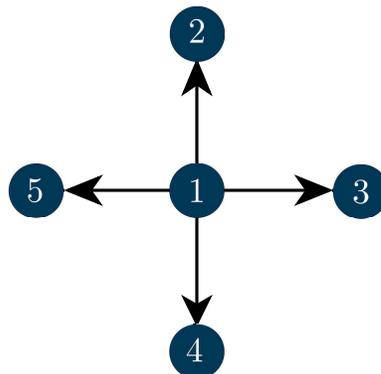


Figura 20. Grafo estrella dirigido.

La entrada de control que permite realizar la comunicación y la formación mediante el uso de un grafo estrella dirigido (ver figura 20), está dada por

$$\mathbf{u}_m = m\ddot{\mathbf{p}}_d + \mathbf{K}_{v1}(\dot{\mathbf{p}}_{m1} - \dot{\mathbf{p}}_d) + \mathbf{K}_{p1}(\mathbf{p}_{m1} - \mathbf{p}_d + \sum_{j=1}^n a_{1j}\delta_{1j}), \quad (95)$$

$$i > 1,$$

$$\mathbf{u}_i = m\ddot{\mathbf{p}}_m + \mathbf{K}_{vi} \sum_{j=1}^n a_{ij}(\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_j) + \mathbf{K}_{pi} \sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j + \delta_{ij}) \quad (96)$$

donde la ecuación (95) es la entrada de control para el cuadricóptero maestro,  $a_{ij}$  es el término de acoplamiento perteneciente a la matriz  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{p}_m = [x_{m1} \ y_{m1} \ z_{m1}]^T$  es la posición del cuadricóptero maestro, la ecuación (96) es la entrada de control para los cuadricópteros esclavos donde,  $\mathbf{p}_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T$  es el nodo receptor,  $\mathbf{p}_j = [x_j \ y_j \ z_j]^T$  el nodo transmisor,  $\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j$  es el término que permite realizar la formación, se considera que  $\delta_{ij} = \mathbf{0} \ \forall i = j$  y  $n$  es el número de cuadricópteros.

#### 4.1.2. Formación con un grafo cadena dirigido



Figura 21. Grafo cadena dirigido.

La entrada de control empleada para lograr el objetivo de control por medio de un grafo cadena dirigido (ver figura 21), está dada por

$$\mathbf{u}_m = m\ddot{\mathbf{p}}_d + \mathbf{K}_{v1}(\dot{\mathbf{p}}_{m1} - \dot{\mathbf{p}}_d) + \mathbf{K}_{p1}(\mathbf{p}_{m1} - \mathbf{p}_d + \sum_{j=1}^n a_{1j}\delta_{1j}), \quad (97)$$

$$i > 1,$$

$$\mathbf{u}_i = m\ddot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{K}_{vi} \sum_{j=1}^n a_{ij}(\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_j) + \mathbf{K}_{pi} \sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j + \delta_{ij}) \quad (98)$$

donde el único término que cambia con respecto a la entrada de control empleada con un grafo estrella dirigido es  $\ddot{\mathbf{p}}_{i-1}$ , pues este término no se mantiene fijo como ocurre con  $\ddot{\mathbf{p}}_m$ . Esto se debe a que en esta topología el primer nodo es maestro del segundo y el segundo del tercero hasta que el nodo  $n - 1$  es el maestro del nodo  $n$ . Cabe mencionar que aunque esto suceda, el cuadricóptero encargado de dar indicaciones es el que se encuentra al inicio.

## 4.2. Formación descentralizada

Para el diseño de la entrada de control que permite hacer uso de grafos no dirigidos, se consultó (Abdessameud y Tayebi, 2009). El método propuesto en dicho trabajo permite comunicar a cada uno de los miembros de un grupo sin la necesidad de limitarse al uso de un cuadricóptero maestro, dado que cada uno de los cuadricópteros sabe que tarea tiene que ejecutar, esto a su vez garantiza que si uno falla los demás cuadricópteros continúen con su función. La entrada de control que permite cumplir con el objetivo de control está dada por

$$\mathbf{u}_i = m\ddot{\mathbf{p}}_d - \mathbf{K}_{v_i}(\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_d) - \mathbf{K}_{p_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} (\mathbf{p}_{ij} - \delta_{ij}) \quad (99)$$

donde  $\dot{\mathbf{p}}_d = [\dot{x}_d \ \dot{y}_d \ \dot{z}_d]^T$  y  $\ddot{\mathbf{p}}_d = [\ddot{x}_d \ \ddot{y}_d \ \ddot{z}_d]^T$  son el perfil de velocidad y aceleración deseados, que a diferencia de lo observado en las entradas de control propuestas para hacer uso de grafos dirigidos no cambian, pues no se cuenta con un cuadricóptero maestro y a su vez permiten cumplir con el seguimiento de la trayectoria deseada a partir del perfil de velocidad, las ganancias  $\mathbf{K}_v$ ,  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{K}_w$ ,  $\mathbf{K}_o$  en este caso tienen que ser iguales para cada cuadricóptero,  $\delta_{ij}$  es igual al caso de grafos dirigidos y el término  $\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$  en conjunto con  $a_{ij}$  permiten comunicar a cada miembro del grupo al hacer uso de la matriz de acoplamiento obtenida de un grafo no dirigido.

### 4.2.1. Análisis de estabilidad

En vista de que (95) y (97), pueden analizarse como en el caso de un sólo cuadricóptero, dado que los cuadricópteros esclavos simplemente reciben como entrada las salidas del maestro, el análisis de estabilidad que se presenta a continuación corresponde a la formación descentralizada y a la ley de control (99).

Al sustituir la ley de control  $\mathbf{u}_i$  en la dinámica del  $i$ -ésimo cuadricóptero y tomando en cuenta  $\dot{\mathbf{p}}_{ij} = \dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_j + \mathbf{v}_d - \mathbf{v}_d = \tilde{\mathbf{v}}_i - \tilde{\mathbf{v}}_j$  la dinámica en lazo cerrado está dada por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{p}}_{ij} = \tilde{\mathbf{v}}_i - \tilde{\mathbf{v}}_j, \quad (100)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_i = -\mathbf{K}_{v_i}\tilde{\mathbf{v}}_i - k_p \sum_{j=1}^n a_{ij} (\mathbf{p}_{ij} - \delta_{ij}) + T_i \mathbf{R}_i (\mathbf{I} - \mathbf{R}_{ei}) \mathbf{z}_a, \quad (101)$$

$$\ddot{\phi}_{ei} = -\mathbf{K}_\omega \dot{\phi}_{ei} - \mathbf{K}_o \phi_{ei}, \quad (102)$$

donde se ha utilizado  $\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{di} = \mathbf{R}_i (\mathbf{I} - \mathbf{R}_{ei})$ . La dinámica en lazo cerrado presenta un punto de

equilibrio en el origen,  $(\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij}, \tilde{\mathbf{v}}_i, \phi_{ei}, \dot{\phi}_{ei}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ . Las ecuaciones (100)-(102) presentan una estructura en cascada donde  $T_i \mathbf{R}_i (\mathbf{I} - \mathbf{R}_{ei}) \mathbf{z}_a$  es el término de interconexión entre los subsistemas de posición y orientación. Antes de continuar con el análisis de estabilidad, se enunciará el siguiente teorema auxiliar referente a la estabilidad de sistemas en cascada propuesto en (Sepulchre *et al.*, 1997),

**Teorema 1** (Sepulchre *et al.*, 1997, pág 129) *Sea el sistema descrito por*

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}) \quad (103)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \quad (104)$$

donde  $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi})$  es el término de interconexión. Si  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable para el subsistema  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z})$  y el punto  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$  es asintóticamente estable para el subsistema  $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$ . Entonces, el punto de equilibrio  $(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  del sistema (103)-(104) es local asintóticamente estable. Si además, los puntos de equilibrio de los subsistemas  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z})$  y  $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$  son global asintóticamente estables, entonces, cualquier solución  $(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\xi}(t))$  converge al origen, o bien, es no acotada cuando  $t \rightarrow \infty$ .

El primer paso, es analizar el subsistema de posición, sin considerar el término de interconexión,

$$\dot{\mathbf{p}}_{ij} = \tilde{\mathbf{v}}_i - \tilde{\mathbf{v}}_j, \quad (105)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_i = -\mathbf{K}_{vi} \tilde{\mathbf{v}}_i - k_p \sum_{j=1}^n a_{ij} (\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij}). \quad (106)$$

Para analizar la estabilidad de este subsistema, considérese la siguiente función escalar

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \tilde{\mathbf{v}}_i^T \tilde{\mathbf{v}}_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{ij} (\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij})^T (\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij}) \right\} \quad (107)$$

cuya derivada a lo largo de la dinámica en lazo cerrado está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^n \left[ -\tilde{\mathbf{v}}_i^T \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_i + \frac{1}{2} k_p \sum_{i=1}^n a_{ij} (\tilde{\mathbf{v}}_i - \tilde{\mathbf{v}}_j)^T (\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij}) \right] \\ &= - \sum_{i=1}^n \left[ \tilde{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{K}_{vi} \tilde{\mathbf{v}}_i - k_p \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{\mathbf{v}}_i^T (\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij}) + \frac{1}{2} k_p \sum_{i=1}^n a_{ij} (\tilde{\mathbf{v}}_i - \tilde{\mathbf{v}}_j)^T (\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij}) \right] \\ &= - \sum_{i=1}^n \left[ \tilde{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{K}_{vi} \tilde{\mathbf{v}}_i - \frac{1}{2} k_p \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{\mathbf{v}}_i^T (\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij}) - k_p \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{\mathbf{v}}_j^T (\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij}) \right]. \end{aligned} \quad (108)$$

Tomando en cuenta  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $\mathbf{p}_{ij} = -\mathbf{p}_{ji}$  y  $\boldsymbol{\delta}_{ij} = -\boldsymbol{\delta}_{ji}$ , se tiene

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{K}_{vi} \tilde{\mathbf{v}}_i - \frac{1}{2} k_p \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{\mathbf{v}}_i^T (\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij}) + \frac{1}{2} k_p \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \tilde{\mathbf{v}}_j^T (\mathbf{p}_{ji} - \boldsymbol{\delta}_{ji}) \\ &= -\sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{K}_{vi} \tilde{\mathbf{v}}_i \leq 0.\end{aligned}\quad (109)$$

Del resultado anterior, se concluye que el punto  $\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij} = \mathbf{0}$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{0}$  es un punto de equilibrio estable. Para mostrar la estabilidad asintótica se hará uso del Teorema de LaSalle,

$$\dot{V} = 0 \quad \implies \quad \tilde{\mathbf{v}}_i = \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_i = \mathbf{0}.\quad (110)$$

Por tanto, de la ecuación (106), se tiene

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij}) = \mathbf{0}.\quad (111)$$

Multiplicando la ecuación anterior por  $(\mathbf{p}_i - \boldsymbol{\delta}_i)^T$  se obtienen  $n$  ecuaciones de la forma (Abdessameud y Tayebi, 2013)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (\mathbf{p}_i - \boldsymbol{\delta}_i)^T (\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij}) = 0.\quad (112)$$

Al sumar las  $n$  ecuaciones y tomando en cuenta nuevamente  $\mathbf{p}_{ij} = -\mathbf{p}_{ji}$  y  $\boldsymbol{\delta}_{ij} = -\boldsymbol{\delta}_{ji}$ , se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\mathbf{p}_i - \boldsymbol{\delta}_i)^T (\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{p}_i - \boldsymbol{\delta}_i)^T (\mathbf{p}_i - \boldsymbol{\delta}_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{p}_i - \boldsymbol{\delta}_i)^T (\mathbf{p}_j - \boldsymbol{\delta}_j) = 0.\end{aligned}\quad (113)$$

Al desarrollar la primera sumatoria del lado derecho de la ecuación (113), se obtiene

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n (\mathbf{p}_i - \boldsymbol{\delta}_i)^T (\mathbf{p}_i - \boldsymbol{\delta}_i) &= a_{11} (\mathbf{p}_1 - \boldsymbol{\delta}_1)^T (\mathbf{p}_1 - \boldsymbol{\delta}_1) + \cdots + a_{1n} (\mathbf{p}_1 - \boldsymbol{\delta}_1)^T (\mathbf{p}_1 - \boldsymbol{\delta}_1) + \cdots \\ &\quad + a_{n1} (\mathbf{p}_n - \boldsymbol{\delta}_n)^T (\mathbf{p}_n - \boldsymbol{\delta}_n) + \cdots + a_{nn} (\mathbf{p}_n - \boldsymbol{\delta}_n)^T (\mathbf{p}_n - \boldsymbol{\delta}_n)\end{aligned}\quad (114)$$

Para la segunda sumatoria, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n (\mathbf{p}_i - \boldsymbol{\delta}_i)^T (\mathbf{p}_j - \boldsymbol{\delta}_j) = & a_{11}(\mathbf{p}_1 - \boldsymbol{\delta}_1)^T (\mathbf{p}_1 - \boldsymbol{\delta}_1) + \cdots + a_{1n}(\mathbf{p}_1 - \boldsymbol{\delta}_1)^T (\mathbf{p}_n - \boldsymbol{\delta}_n) + \cdots \\ & + a_{n1}(\mathbf{p}_n - \boldsymbol{\delta}_n)^T (\mathbf{p}_1 - \boldsymbol{\delta}_1) + \cdots + a_{nn}(\mathbf{p}_n - \boldsymbol{\delta}_n)^T (\mathbf{p}_n - \boldsymbol{\delta}_n). \end{aligned} \quad (115)$$

Finalmente, al agrupar términos se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\mathbf{p}_i - \boldsymbol{\delta}_i)^T (\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij}) = & a_{12} \|\mathbf{p}_{12} - \boldsymbol{\delta}_{12}\|^2 + \cdots + a_{1n} \|\mathbf{p}_{1n} - \boldsymbol{\delta}_{1n}\|^2 + \cdots \\ & + a_{n1} \|\mathbf{p}_{n1} - \boldsymbol{\delta}_{n1}\|^2 + \cdots + a_{nn-1} \|\mathbf{p}_{nn-1} - \boldsymbol{\delta}_{nn-1}\|^2 \quad (116) \\ = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \|\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij}\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Del resultado anterior, se concluye que  $\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij} = \mathbf{0}$  para todo  $i \neq j$ . Nótese que para  $i = j$  se tiene  $\mathbf{p}_{ii} = \boldsymbol{\delta}_{ii} = \mathbf{0}$ . Dado que  $\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij} = \mathbf{0}$  es la única solución que puede permanecer en el conjunto  $S = \{(\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij}, \tilde{\mathbf{v}}_i) \mid \dot{V} = 0\}$  el origen del subsistema descrito por (105) y (106) es asintóticamente estable.

Ahora bien, el subsistema de orientación en lazo cerrado está descrito por la ecuación (102). Claramente el punto  $(\phi_{ei}, \dot{\phi}_{ei}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  es asintóticamente estable para cualquier matriz de ganancias  $\mathbf{K}_\omega, \mathbf{K}_o$  positivas definidas. De acuerdo con el Teorema 1, el punto de equilibrio  $(\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij}, \tilde{\mathbf{v}}_i, \phi_{ei}, \dot{\phi}_{ei}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$  es local asintóticamente estable.

## Capítulo 5. Aplicaciones a búsqueda y vigilancia

---

Como se mencionó en la introducción los cuadricópteros son ampliamente utilizados en diversas tareas, sin embargo, en este trabajo las tareas de interés son la búsqueda y vigilancia. En este capítulo se abordan dos estrategias, la primera de ellas está enfocada a labores de búsqueda en áreas irregulares, mientras que la segunda se enfoca en tareas de vigilancia por medio de una trayectoria caótica.

### 5.1. Tareas de búsqueda

La labor de búsqueda tiene la función de rastrear algún objetivo en específico como podría ser una persona desaparecida o dar a conocer la situación en que se encuentra una zona que fue afectada por un destare natural, por esta razón en este trabajo se desea que un grupo de cuadricópteros lleven a cabo la tarea de búsqueda en un área determinada, ya que esto a su vez permite que los tiempo de búsqueda de algún objetivo disminuyan y que la carga de las baterías de los cuadricópteros sea aprovechada de la mejor manera.

Dicho lo anterior para resolver el problema de búsqueda se propone el diseño de una trayectoria que permita cumplir con dicha tarea, por lo tanto se asume que el área de interés en que se efectuara la búsqueda sea un polígono regular o irregular pues éste cumple con la función de representar la superficie en que se realiza la tarea de búsqueda. Dado que se requiere cubrir la mayor cantidad del área deseada, es posible hacer uso de una trayectoria en espiral o *back and forth*, sin embargo tomado en cuenta lo mencionado en (Cabreira et al., 2018) para este trabajo se ha empleado una trayectoria en espiral decreciente pues permite optimizar tiempos de búsqueda y de duración de la batería. Este tipo de trayectoria también puede emplearse en labores de vigilancia, sin embargo debido a sus movimientos predecibles no se considera como una buena opción para llevar a cabo dicha actividad.

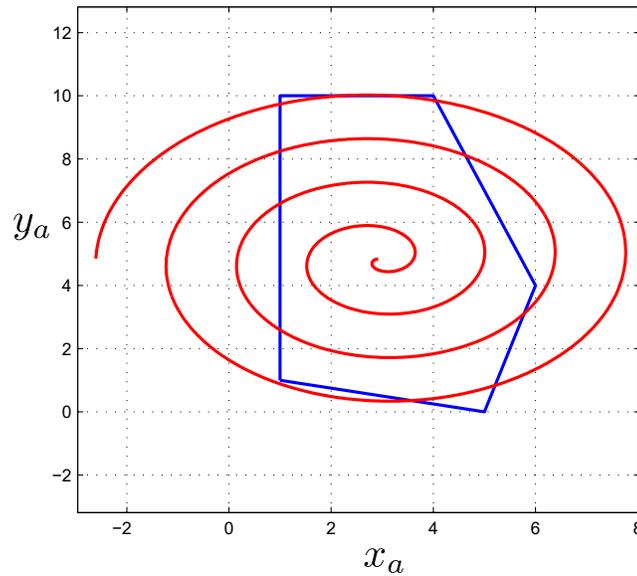
El motivo por el cual no se propone emplear una espiral ya existente en el presente trabajo, es debido a que se asume que no se cubre de manera adecuada el área deseada como se muestra en la figura 22 y se requiere de más tiempo para realizar la cobertura del área.

En color rojo se encuentra la espiral de Arquímedes obtenida a partir de las siguientes ecuaciones

$$x_a = (b\rho) \cos(\rho) + cx, \quad (117)$$

$$y_a = (b\rho) \text{sen}(\rho) + cy \quad (118)$$

donde  $(c_x, c_y)$  corresponden al centroide del polígono,  $b$  es el término que permite incrementar el número de giros y  $\rho$  es el ángulo de giro.



**Figura 22.** Superficie y espiral de Arquímedes.

Para el desarrollo de la trayectoria en espiral propuesta como primer paso se requiere del cálculo del centroide de la superficie en que se efectuará la búsqueda. Como se mencionó anteriormente la superficie corresponde a un polígono irregular, cuyo centroide se puede calcular de la siguiente manera:

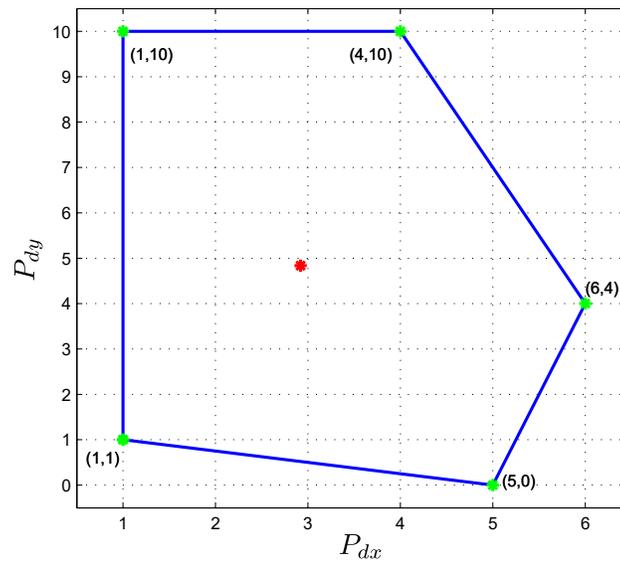
$$C_x = \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i + x_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i), \quad (119)$$

$$C_y = \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{N-1} (y_i + y_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \quad (120)$$

donde  $(C_x, C_y)$  son las coordenadas del centroide en el plano,  $N$  es el número de vértices del polígono y son representados por las coordenadas  $(x_i, y_i)$  y  $A$  es el área del polígono y se puede calcular a partir de la siguiente ecuación,

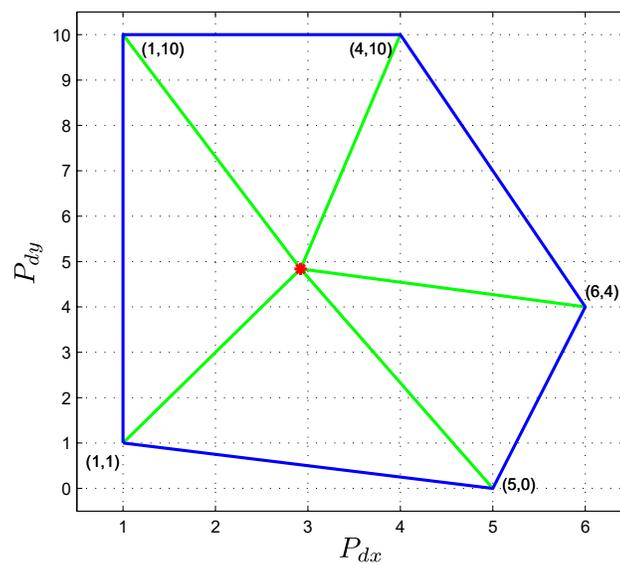
$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i). \quad (121)$$

En la figura 23 se muestra tanto el polígono irregular como su centroide, las distancias entre puntos se encuentran en metros.



**Figura 23.** Superficie.

Como se mencionó anteriormente, la trayectoria deseada describe una espiral, por tanto, como segundo paso se divide dicho polígono en secciones por medio de rectas que nacen de los vértices hacia el centroide como se muestra en la figura 24. Cabe mencionar que el número de rectas es igual al número de vértices del polígono.



**Figura 24.** División de la superficie.



constantes del polinomio. Los pasos realizados para obtener a cada una de las constantes se muestran a continuación,

1. Los puntos iniciales y finales son los vértices y puntos internos del polígono

$$p_{dx}(t_0) = p_{x_i}, \quad p_{dx}(t_f) = p_{x_{i+1}} \quad (123)$$

donde  $a_0 = p_{x_i}$  dado que se está evaluando el polinomio en  $t_0$ .

2. Se propuso que la velocidad y aceleración sea cero en cada punto, i.e.,

$$\dot{p}_{dx}(t_0) = \dot{p}_{dx}(t_f) = 0 \quad \ddot{p}_{dx}(t_0) = \ddot{p}_{dx}(t_f) = 0 \quad (124)$$

donde  $\dot{p}_{dx}(t_0) = a_1 = 0$  y  $\ddot{p}_{dx}(t_0) = a_2 = 0$ .

3. Se evalúa el polinomio y sus derivadas en  $t_f$  dando como resultado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} p_{dx}(t_f) &= p_{x_i}(0) + a_3(t_f - t_0)^3 + a_4(t_f - t_0)^4 + a_5(t_f - t_0)^5, \\ \dot{p}_{dx}(t_f) &= 3a_3(t_f - t_0)^2 + 4a_4(t_f - t_0)^3 + 5a_5(t_f - t_0)^4 = 0, \\ \ddot{p}_{dx}(t_f) &= 6a_3(t_f - t_0) + 12a_4(t_f - t_0)^2 + 20a_5(t_f - t_0)^3 = 0. \end{aligned} \quad (125)$$

Dado que el número de constantes se ha reducido, se procede a la obtención de las constantes  $a_3, a_4$  y  $a_5$  a partir de los resultados obtenidos en la ecuación (125),

$$\begin{bmatrix} (t_f - t_0)^3 & (t_f - t_0)^4 & (t_f - t_0)^5 \\ 3(t_f - t_0)^2 & 4(t_f - t_0)^3 & 5(t_f - t_0)^4 \\ 6(t_f - t_0) & 12(t_f - t_0)^2 & 20(t_f - t_0)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{x_{i+1}} - p_{x_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (126)$$

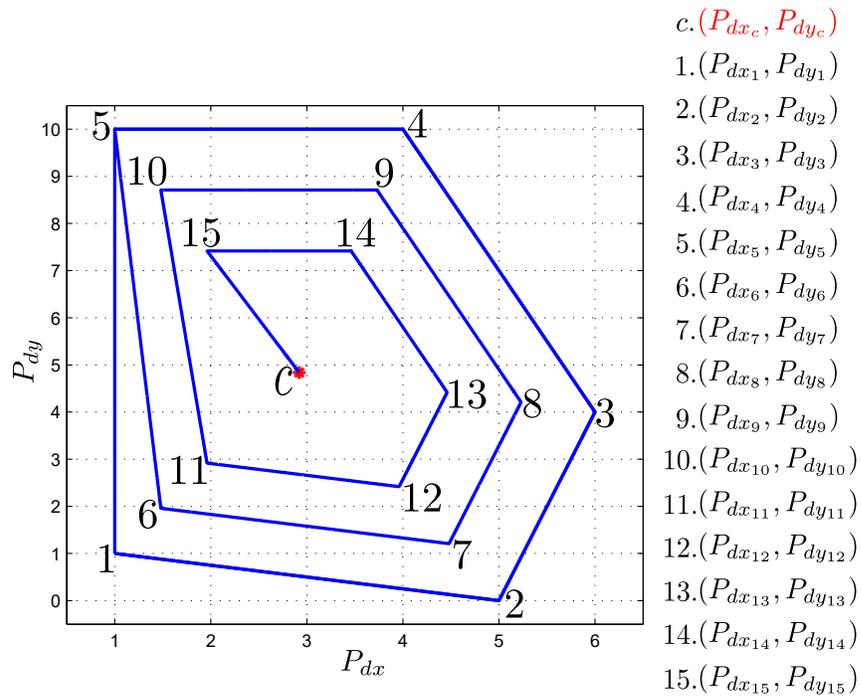
ya que (126) se encuentran en su forma matricial, es posible obtener las ecuaciones que permiten calcular las constantes antes mencionadas de la siguiente forma,

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t_f - t_0)^3 & (t_f - t_0)^4 & (t_f - t_0)^5 \\ 3(t_f - t_0)^2 & 4(t_f - t_0)^3 & 5(t_f - t_0)^4 \\ 6(t_f - t_0) & 12(t_f - t_0)^2 & 20(t_f - t_0)^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_{x_{i+1}} - p_{x_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (127)$$

donde:

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{10(p_{xi+1} - p_{xi})}{(t_f - t_0)^3}, \\ a_4 &= \frac{15(p_{xi+1} - p_{xi})}{(t_f - t_0)^4}, \\ a_5 &= -\frac{6(p_{xi+1} - p_{xi})}{(t_f - t_0)^5}. \end{aligned} \quad (128)$$

Por último, en la figura 26 se muestra la trayectoria resultante al unir cada uno de los puntos.



**Figura 26.** Trayectoria resultante.

## 5.2. Tareas de vigilancia

La vigilancia consiste en observar el comportamiento de objetos o personas con la finalidad de informar de lo que es correcto o incorrecto en el ambiente en el que se está llevando dicha actividad, en este caso en particular, se requiere que un grupo de cuadricópteros realicen esta labor pues a diferencia de los robots móviles estos presentan la ventaja de tener un mayor rango de visión del área en la que se puede estar suscitando el problema.

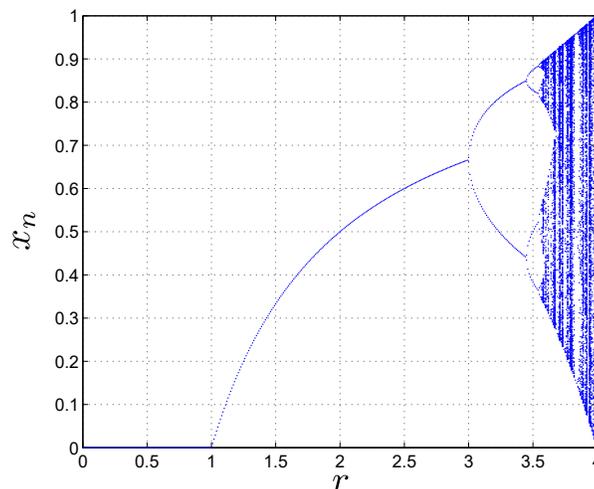
Dado que es necesario que estas labores no sean predecibles ante posibles ataques de personas que no desean que se informe de las actividades que están efectuando, para abordar el problema se parte del uso de un sistema que presente un comportamiento caótico para el diseño de una trayectoria que

se comporte de dicha forma. Este tipo de sistemas cuentan con la propiedad de ser sensibles al cambio de sus condiciones iniciales, lo cual significa que se obtendrá un comportamiento distinto cada vez que estas cambien. Actualmente este tipo de trayectorias caóticas son posibles encontrarlas aplicadas en robots móviles tal y como se ha reportado en (Cetina, 2017), en el cual, se diseñó una trayectoria de este tipo induciendo comportamientos caóticos a las velocidades lineales y angulares del robot diferencial por medio del mapa caótico de Hénon y de igual forma en (Silva, 2019) se busca mediante un acoplamiento maestro-esclavo, que una flotilla de robots diferenciales sigan una trayectoria caótica, por lo que utilizan los sistemas dinámicos Rössler y Lorenz como maestros pues presentan comportamientos caóticos. Sin embargo, se tiene el trabajo realizado en (Gohari *et al.*, 2019), en el cual, por medio del mapa de Hénon se genera una trayectoria caótica que se implemento en un cuadricóptero. Cabe mencionar que en dichos trabajos, se guarda una cierta relación pues el enfoque dado a este tipo de trayectorias es con la finalidad de aplicarlo a labores de patrullaje y vigilancia. Cabe mencionar que esta trayectoria impredecible también puede ser empleada para realizar labores de búsqueda, sin embargo, debido a lo impredecible de sus movimientos se asume que se tendrá un mejor desempeño de la misma realizando labor de vigilancia.

En el presente trabajo se utilizará el mapa logístico estudiado por el biólogo Robert May y por el físico Mitchell Feigenbaum y cuya ecuación discreta se muestra a continuación

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (129)$$

donde  $x_n \in \mathbb{R}^+$ ,  $r$  es positivo, cabe mencionar que cuando dicha variable es mayor a 3.5 el comportamiento caótico se hará presente (ver figura 27).



**Figura 27.** Diagrama de bifurcación del mapa logístico.

A partir de dicho mapa se obtienen los datos de manera caótica, en este caso esto sucederá cada 10 segundos, dicha estrategia como se mencionó se diseñó con un enfoque a labores de vigilancia pero aplicada a un grupo de cuadricópteros.

El mapa caótico descrito (129) solo toma valores entre cero y uno, esta característica será utilizada para generar la trayectoria deseada para el cuadricóptero, como se muestra en la figura 29.

A diferencia del problema de búsqueda, para resolver el problema de vigilancia se propone diseñar una velocidad cartesiana deseada caótica en lugar de una posición deseada. Basado en el mapa logístico se propone la siguiente velocidad cartesiana deseada:

$$\begin{aligned}\dot{x}_d &= \cos(\vartheta), \\ \dot{y}_d &= \text{sen}(\vartheta),\end{aligned}\tag{130}$$

$$\dot{z}_d = 0\tag{131}$$

donde el ángulo  $\vartheta$  está dado por

$$\vartheta = 2\pi x_n.\tag{132}$$

De acuerdo con el trabajo (Cetina, 2017) para uniformizar los valores del ángulo  $\vartheta$  se puede utilizar la siguiente función

$$\vartheta = 2\pi \text{mod}(x_n)\tag{133}$$

donde  $\text{mod}(\cdot)$  es la función módulo. Por medio de  $\cos(\vartheta)$  y  $\text{sen}(\vartheta)$  el cuadricóptero cambia de dirección dado el ángulo  $\vartheta$  en el plano  $xy$  como se muestra en la figura 28. Cabe mencionar que la velocidad en el eje  $z$  fue considerada de esa manera pues se asume que los cuadricópteros se encuentran a la altura deseada.

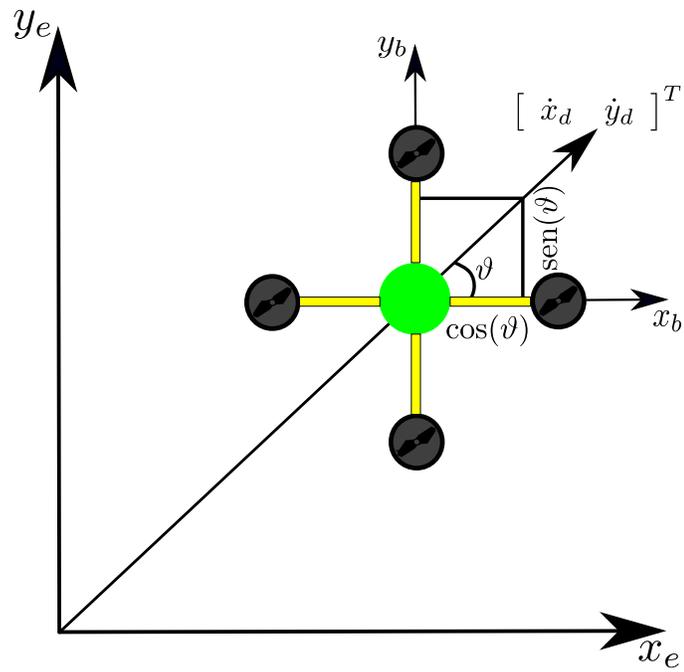


Figura 28. Cambio de orientación.

En la figura 29 se muestran los perfiles de velocidad caóticos obtenidos a partir del mapa logístico y que permitirán el cambio de dirección que se muestran en la figura 28.

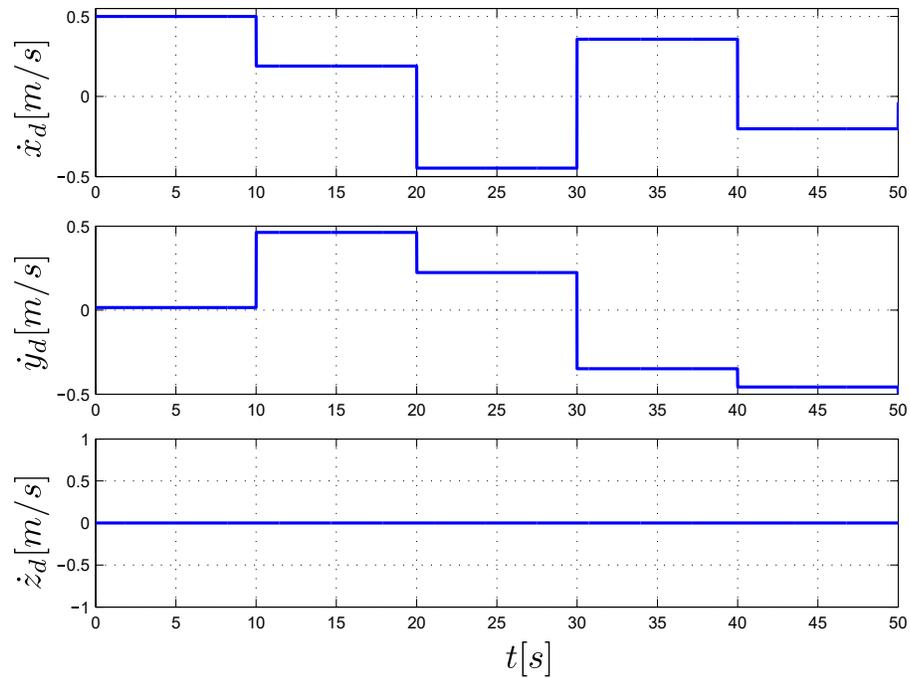


Figura 29. Perfiles de velocidad caóticos obtenidos del mapa logístico.

## Capítulo 6. Resultados

---

En este capítulo se muestran los resultados numéricos que permiten validar el funcionamiento de los algoritmos de control propuestos en el presente trabajo, para la formación de un grupo de cuadricópteros con aplicaciones a búsqueda y vigilancia.

### 6.1. Resultados del desempeño del algoritmo de posición y orientación

Los resultados que se muestran a continuación corresponden al seguimiento de una trayectoria deseada empleando los algoritmos de control de posición (54) y de orientación (69) y un solo cuadricóptero. La trayectoria deseada propuesta corresponde a una circunferencia en el plano  $xy$  y cuyas ecuaciones paramétricas están dadas por:

$$\begin{aligned}x_d &= 3 \cos(2\pi t), \\y_d &= 3 \operatorname{sen}(2\pi t),\end{aligned}$$

dado que se requiere dar una altura deseada se propone  $z_d = 2(1 - e^{-t})$ , ya que por ser una función suave permite que el cuadricóptero no se eleve demasiado rápido.

Las condiciones iniciales de posición como de orientación corresponden a un vector de ceros en  $\mathbb{R}^6$ , la matriz identidad se ha propuesto como condición inicial para la matriz  $\mathbf{R}(0)$ , dado que esto garantiza que no se haya realizado alguna rotación. Los parámetros utilizados para el cuadricóptero fueron tomados de (Rico *et al.*, 2015) y se encuentran en la siguiente tabla 1.

**Tabla 1.** Parámetros del cuadricóptero

Parámetros	Valores
$m$	1.5 Kg
$g$	9.81 m/s <sup>2</sup>
$I_{xx}$	0.01 Kgm <sup>2</sup>
$I_{yy}$	0.011 Kgm <sup>2</sup>
$I_{zz}$	0.0206 Kgm <sup>2</sup>

Las ganancias propuestas están dadas por las siguientes matrices diagonales:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_v &= \operatorname{diag}[ 1.5 \quad 1.5 \quad 1.5 ], \quad \mathbf{K}_p = \mathbf{K}_o = \operatorname{diag}[ 5 \quad 5 \quad 5 ], \\ \mathbf{K}_w &= \operatorname{diag}[ 80 \quad 80 \quad 80 ].\end{aligned}$$

En la figura 30, se muestra la trayectoria descrita por el cuadricóptero en color verde y en líneas punteadas la trayectoria deseada (ref).

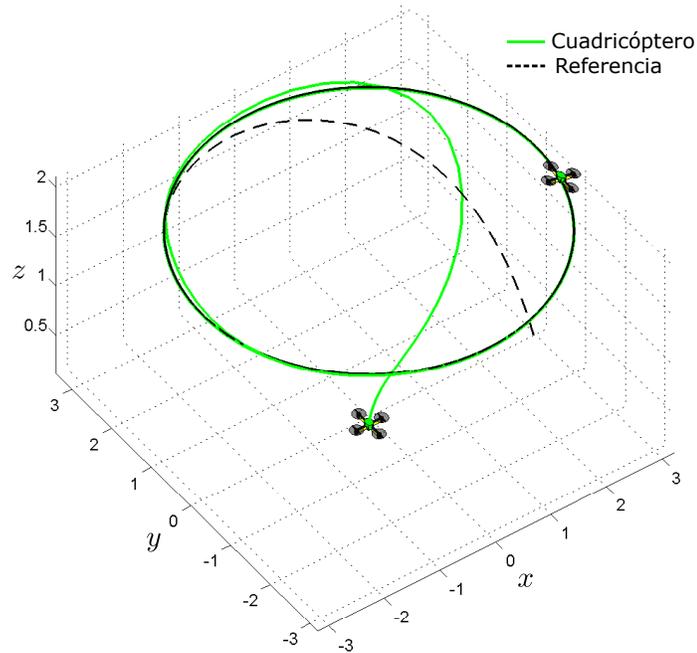


Figura 30. Seguimiento de la trayectoria deseada.

En la figura 31 se puede observar que los ángulos  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  obtenidos, después de un tiempo se aproximan a los ángulos deseados.

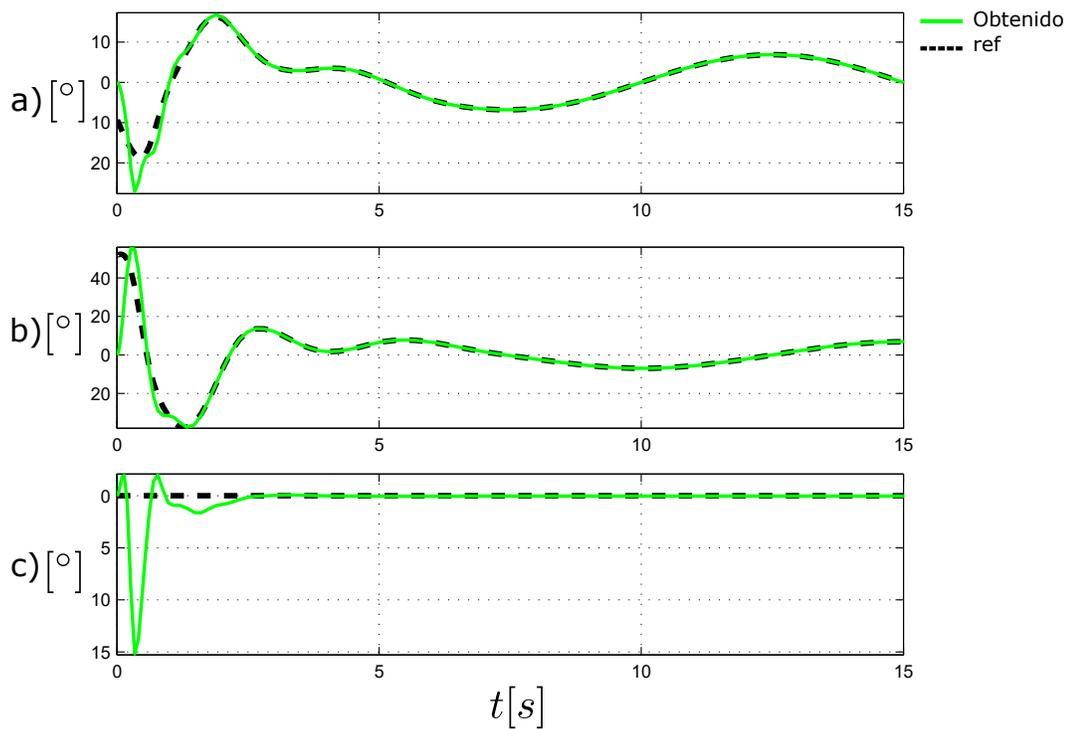
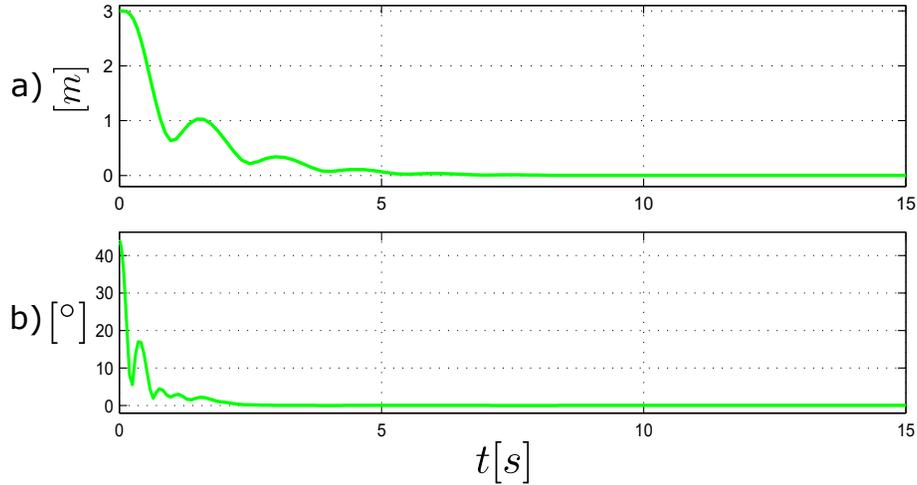


Figura 31. Posiciones angulares donde a)  $=\phi$  [°], b)  $=\theta$  [°] y c)  $=\psi$  [°].

En la figura 32 se encuentran las normas del error, en a)  $\|e_{\tilde{p}}\| [m]$  se encuentra la norma del error de posición en metros y en b)  $\|\phi_{R_e}\| [^\circ]$  la norma del error de orientación en grados pertenecientes a  $R_e$ . En ambas gráficas se puede apreciar que los algoritmos de control presentan un buen funcionamiento pues ambos errores tienden a cero.



**Figura 32.** Normas de los errores de posición a)  $\|e_{\tilde{p}}\| [m]$  y de orientación b)  $\|\phi_{R_e}\| [^\circ]$ .

## 6.2. Resultados empleando grafos dirigidos y no dirigidos

Los resultados que se presentan a continuación corresponden a un vuelo en formación y seguimiento de una trayectoria empleando cinco cuadricópteros, por tal motivo se hace uso de los algoritmos de control presentes en el capítulo 4, de los grafos dirigidos y no dirigidos que permiten comunicar a cada uno de los cuadricópteros por medio de su matriz de acoplamiento.

Las condiciones iniciales de posición y de orientación para cada uno de los cuadricópteros están dadas por:

$$\mathbf{P}_1(0) = [0 \ 0 \ 0]^T, \quad \mathbf{P}_2(0) = [2 \ 0 \ 0]^T, \quad (134)$$

$$\mathbf{P}_3(0) = [1 \ 0 \ 0]^T, \quad \mathbf{P}_4(0) = [-2 \ 0 \ 0]^T,$$

$$\mathbf{P}_5(0) = [-1 \ 0 \ 0]^T$$

y  $\omega_i(0)$  corresponde a un vector de ceros con  $i = 1, 2, \dots, 5$ . Las condiciones iniciales para la matriz  $\mathbf{R}_i(0)$  son las mismas que en el caso de un cuadricóptero, las distancias de separación deseadas para cada

vehículo son:

$$\begin{aligned}
 \delta_1 &= [ 0 \ 0 \ 0 ]^T, & \delta_2 &= [ 2 \ 0 \ 0 ]^T, \\
 \delta_3 &= [ 0 \ 2 \ 0 ]^T, & \delta_4 &= [ -2 \ 0 \ 0 ]^T, \\
 \delta_5 &= [ 0 \ -2 \ 0 ]^T.
 \end{aligned} \tag{135}$$

Cabe mencionar que las condiciones iniciales y las distancias mostradas anteriormente son iguales para cada topología de conexión, a diferencia de las ganancias que requieren ser modificadas para lograr el objetivo de control.

Las ganancias elegidas en el caso de los grafos dirigidos son:

- **Topología de conexión estrella dirigida**

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{v1..5} &= \text{diag}[ 1.5 \ 1.5 \ 1.5 ], \\
 \mathbf{K}_{p1..5} &= \text{diag}[ 4 \ 4 \ 5 ], \\
 \mathbf{K}_{o1..5} &= \text{diag}[ 5 \ 5 \ 5 ], \\
 \mathbf{K}_{w1..5} &= \text{diag}[ 80 \ 80 \ 80 ].
 \end{aligned} \tag{136}$$

- **Topología de conexión cadena dirigida**

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{v1} &= \text{diag}[ 1.5 \ 1.5 \ 1.5 ], \\
 \mathbf{K}_{p1} &= \text{diag}[ 4 \ 4 \ 5 ], \\
 \mathbf{K}_{v2..5} &= \text{diag}[ 1.5 \ 1.5 \ 10 ], \\
 \mathbf{K}_{p2..5} &= \text{diag}[ 4 \ 4 \ 10 ], \\
 \mathbf{K}_{o1} &= \text{diag}[ 5 \ 5 \ 5 ], \\
 \mathbf{K}_{o2..5} &= \text{diag}[ 10 \ 10 \ 10 ], \\
 \mathbf{K}_{w1..5} &= \text{diag}[ 80 \ 80 \ 80 ].
 \end{aligned} \tag{137}$$

Las ganancias elegidas al hacer uso de los grafos no dirigidos son las mismas para cada configuración, pues al hacer varias pruebas se ha observado que se cumple con el objetivo de control de manera aceptable, dichas ganancias están dadas por:

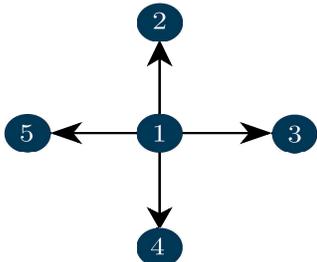
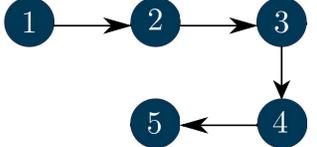
$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{v1..5} &= \text{diag}[ 1.5 \quad 1.5 \quad 60 ], \\
 \mathbf{K}_{p1..5} &= \text{diag}[ 1 \quad 1 \quad 1 ], \\
 \mathbf{K}_{o1..5} &= \text{diag}[ 5 \quad 5 \quad 5 ], \\
 \mathbf{K}_{w1..5} &= \text{diag}[ 80 \quad 80 \quad 80 ].
 \end{aligned} \tag{138}$$

Para una mejor visualización de los resultados se muestran los primeros 3 o 15 segundos de simulación, ya que realmente el tiempo de simulación es de 150 segundos.

### 6.2.1. Grafos dirigidos

En la tabla 2, se encuentran los grafos estrella y cadena dirigidos y su matriz de acoplamiento empleados bajo el esquema de comunicación maestro esclavo.

Tabla 2. Grafos dirigidos y su matriz de acoplamiento  $\mathbf{A}$ .

Grafos dirigidos	Matriz de acoplamiento
<p>Estrella</p> 	$  \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}  $
<p>Cadena</p> 	$  \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}  $

En la figura 33, se puede observar que los cinco cuadricópteros después de unos segundos mantienen una formación y un seguimiento de la trayectoria deseada al hacer uso de las topologías de conexión estrella y cadena dirigidas para su comunicación. Debido a que se ha utilizado el enfoque maestro-esclavo el cuadricóptero uno se ha considerado como el maestro mientras que los demás son seguidores.

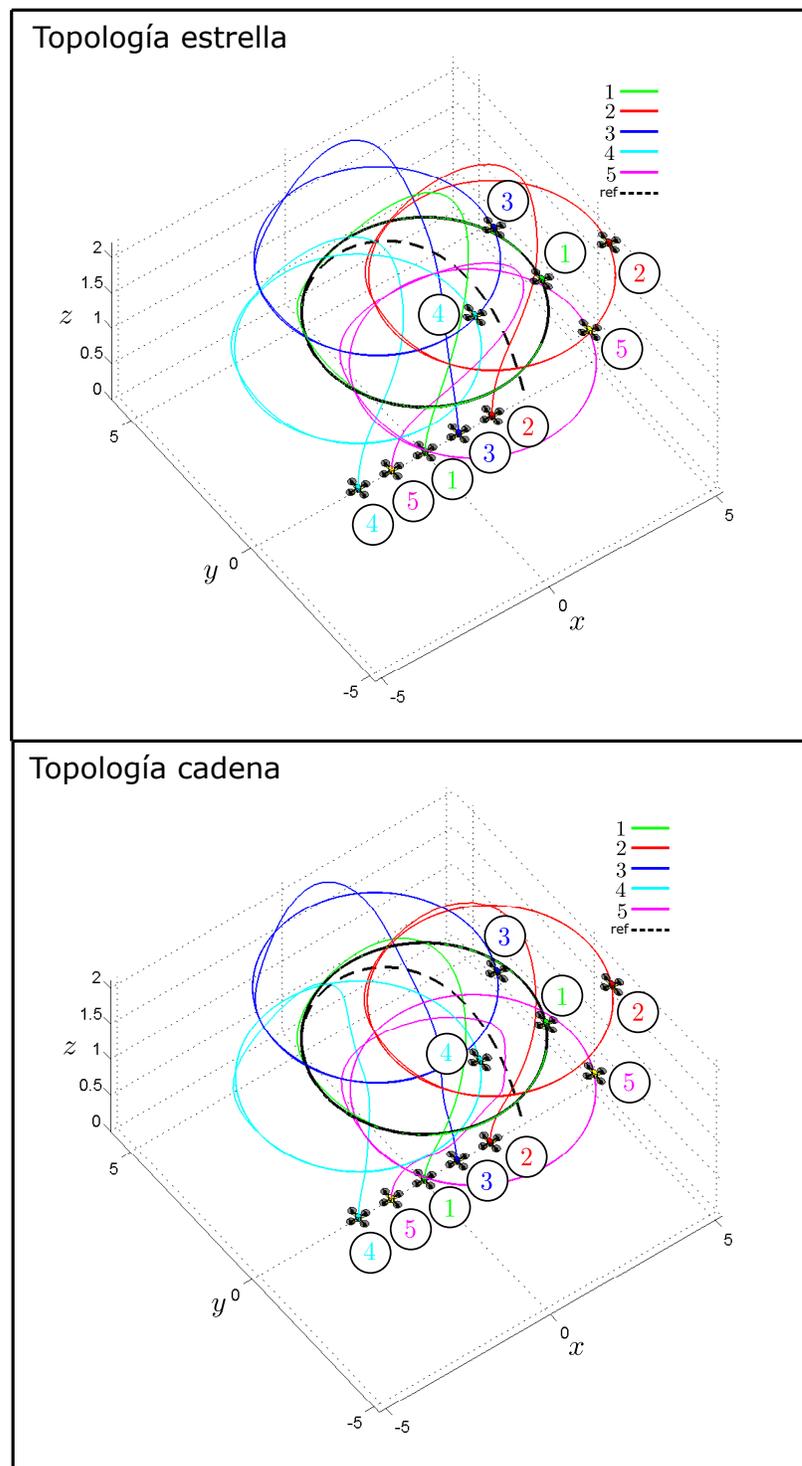
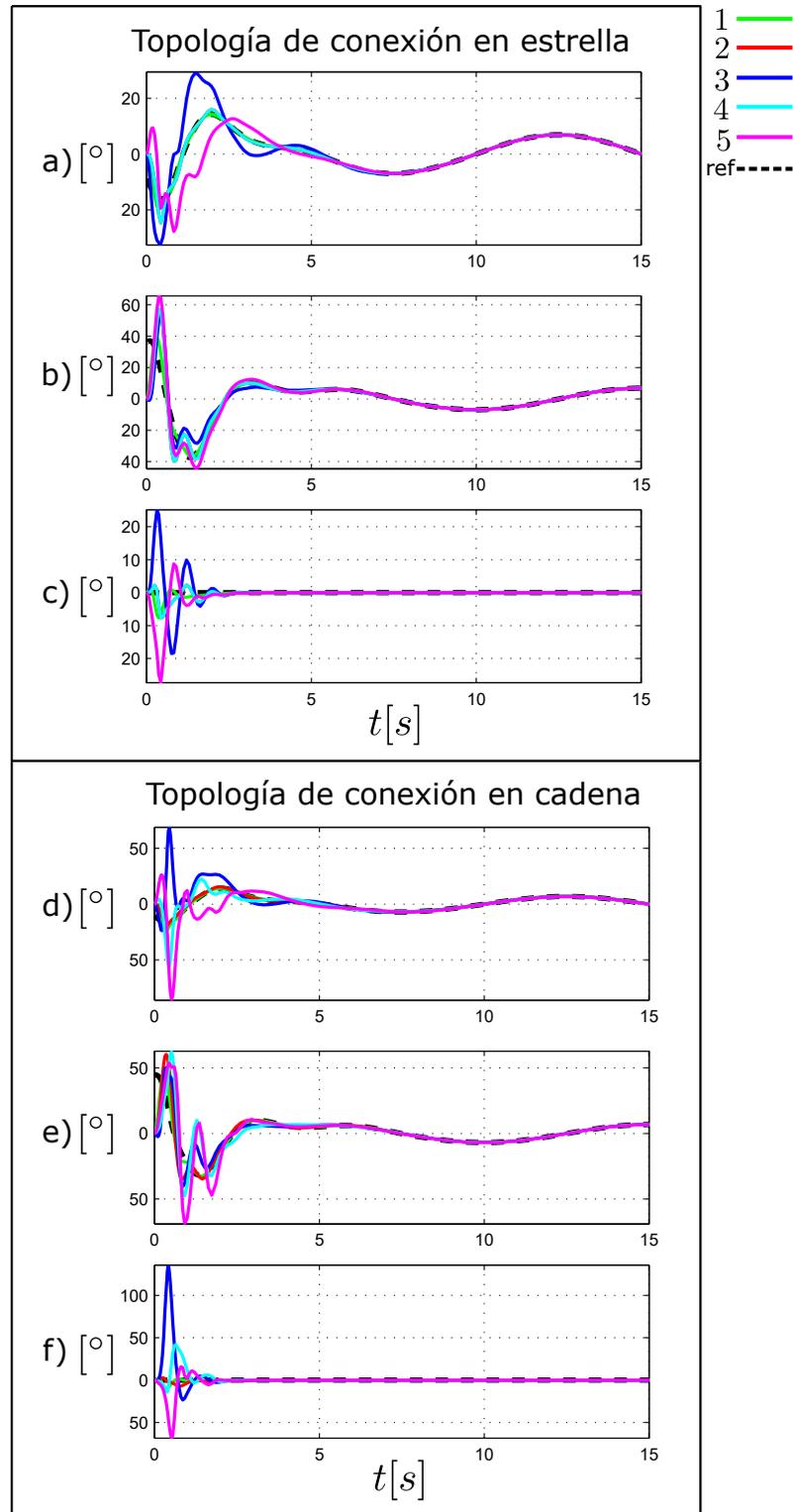


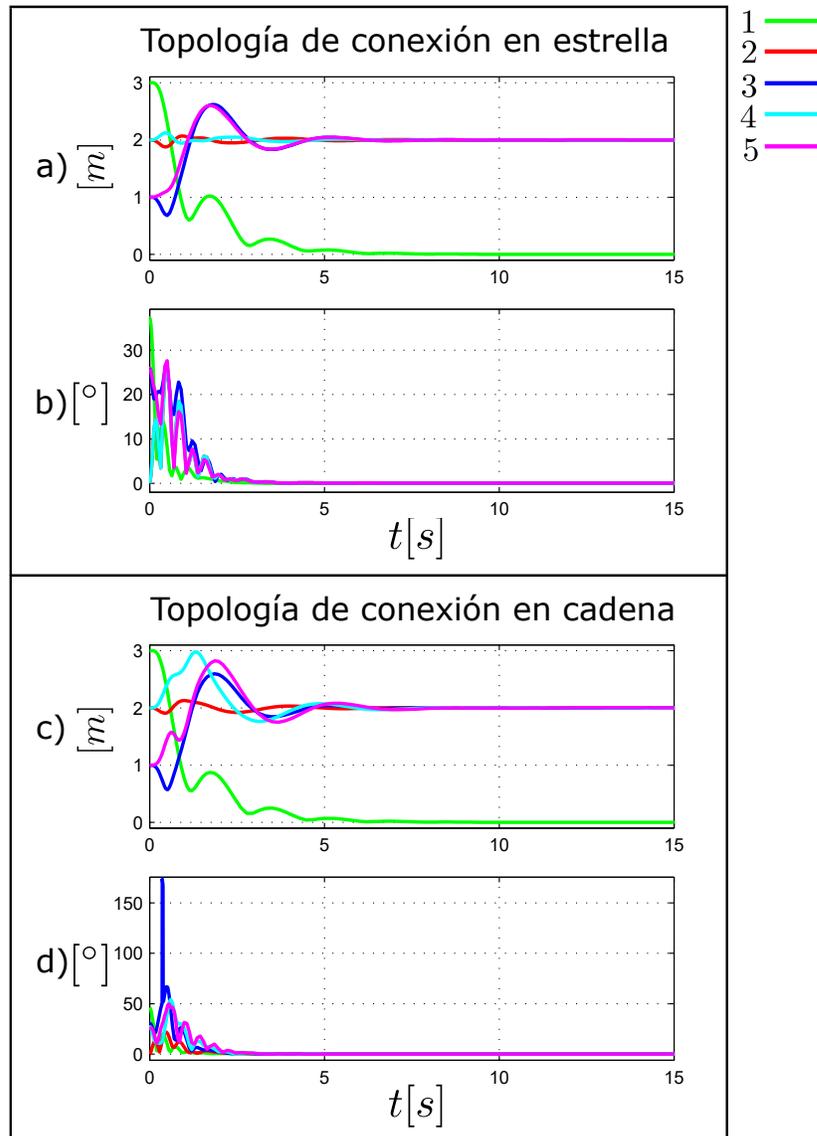
Figura 33. Formación y seguimiento de una trayectoria mediante grafos dirigidos.

En la figura 34 se muestra que los ángulos  $\phi, \theta, \psi$  después del transitorio son muy similares a los deseados, a pesar de ello los ángulos obtenidos empleando la topología de conexión estrella dirigida son más pequeños en a) y c) con respecto a d) y f) obtenidos con la topología de conexión cadena dirigida.



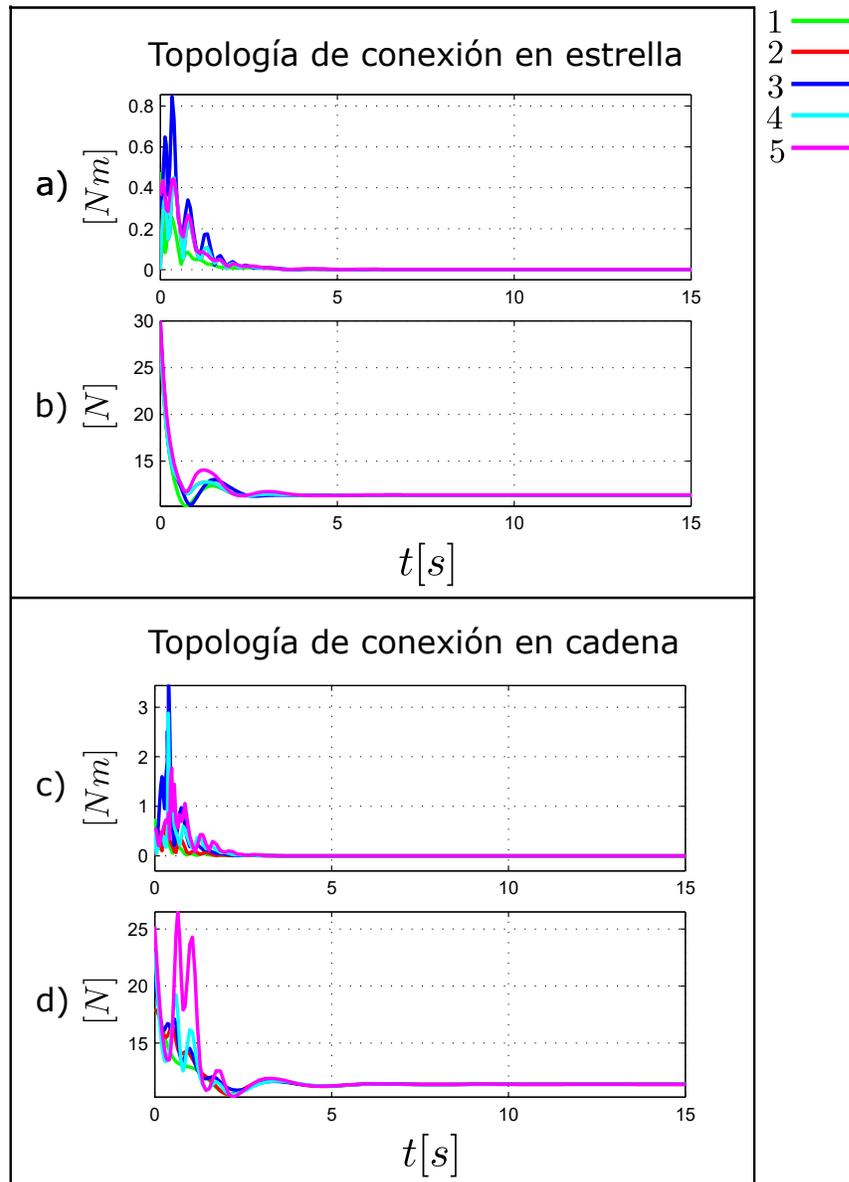
**Figura 34.** Posiciones angulares de las topologías de conexión estrella y cadena dirigidas donde para a) y d)  $=\phi, \phi_d$  [°], para b) y e)  $=\theta, \theta_d$  [°] y para c) y f)  $=\psi, \psi_d$  [°].

En la figura 35 se encuentra la norma de los errores de posición y de los ángulos de Euler tanto para las topologías de conexión estrella y cadena dirigidas, en ambos casos se puede observar que la norma del error de posición  $\|e_{\tilde{p}}\| [m]$  para el cuadricóptero maestro tiende a cero mientras que el de los seguidores tiende a dos, ya que es la distancia de separación a la que se encuentran con respecto a su líder, en cuanto a los errores de los ángulos  $\|\phi_{R_e}\| [^\circ]$  se puede apreciar que al igual que en las gráficas de posición después de pocos segundos tienden a cero, lo cual implica que se tiene un buen seguimiento de la trayectoria en ambos casos.



**Figura 35.** Norma del error de posición a) y c)  $\|e_{\tilde{p}}\| [m]$  y de orientación b) y d)  $\|\phi_{R_e}\| [^\circ]$  empleando las topologías de conexión en estrella y cadena dirigidas.

En la figura 36, se presentan las entradas de control aplicadas a cada uno de los cuadricópteros, en a), c) se muestra la norma de  $\|\tau_i\| [Nm]$ , la cual corresponde al sistema de orientación y en b), d) se encuentra la fuerza de empuje total  $T_i [N]$  aplicada al sistema de traslación.



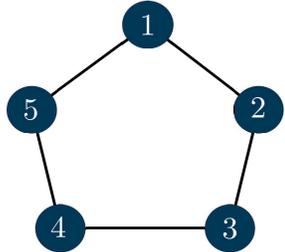
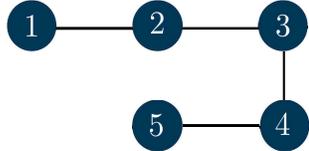
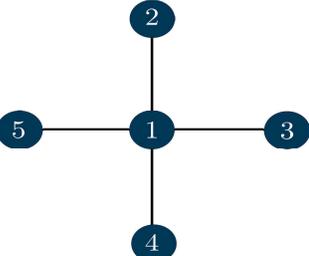
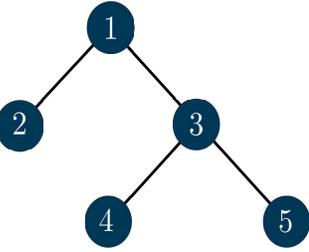
**Figura 36.** Entradas de control a) y c)  $=\|\tau_i\| [Nm]$  y b) y d)  $=T_i [N]$  empleando las topologías de conexión estrella y cadena dirigidas.

Después de realizar una comparación de los resultados obtenidos, se puede afirmar que los correspondientes al grafo estrella dirigido, son mejores, ya que al usar la topología de conexión cadena dirigida la información que envía el maestro a los esclavos, se va debilitando, lo cual a su vez provoca que las ganancias se incrementen, pues los cuadricópteros requieren de un mayor esfuerzo para cumplir con el objetivo de control.

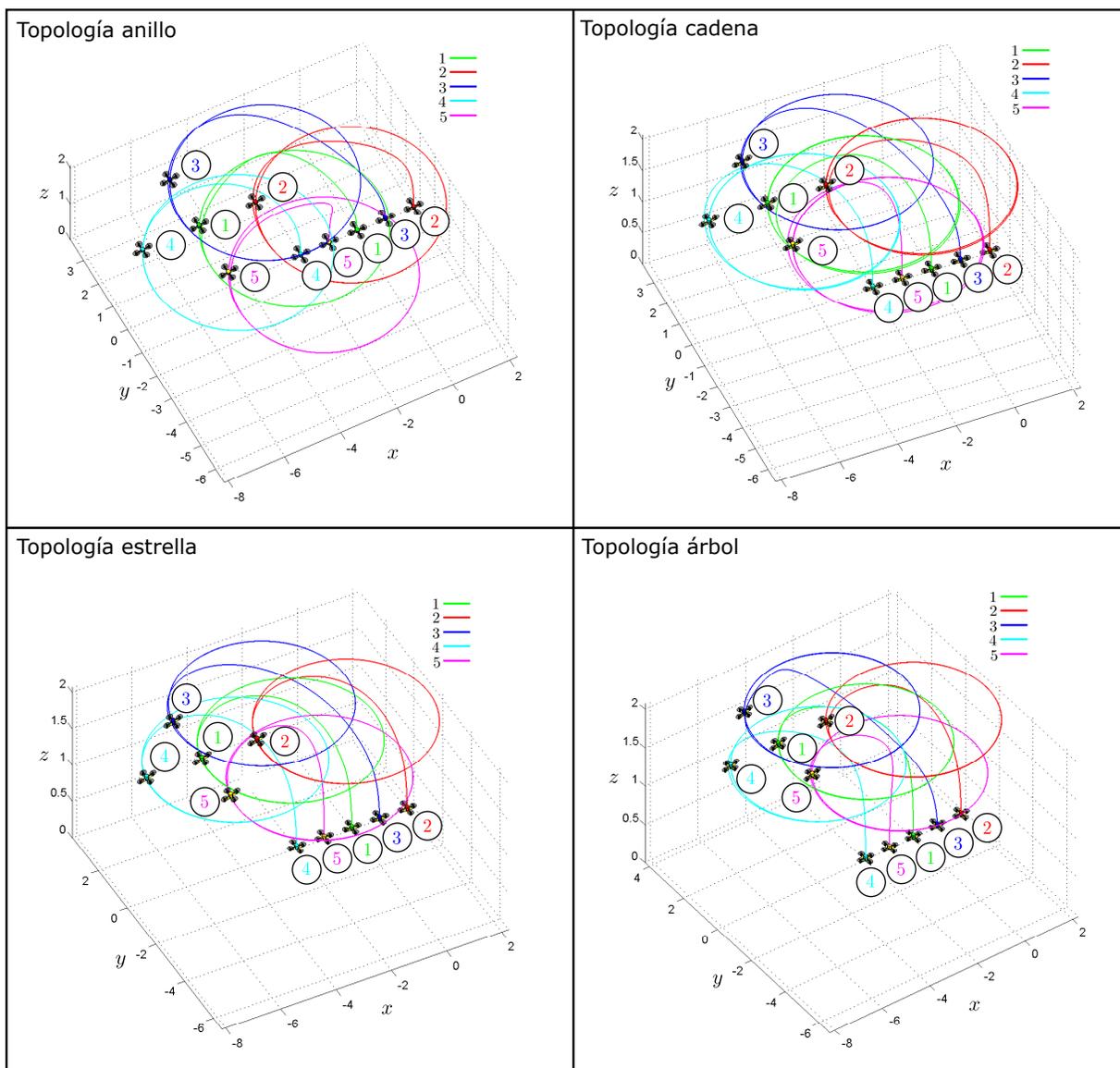
### 6.2.2. Grafos no dirigidos

En la Tabla 3 se encuentran los grafos no dirigidos y sus correspondientes matrices de acoplamiento empleados para validar el algoritmo de control (99).

**Tabla 3.** Grafos no dirigidos y sus correspondientes matrices de acoplamiento  $A$ .

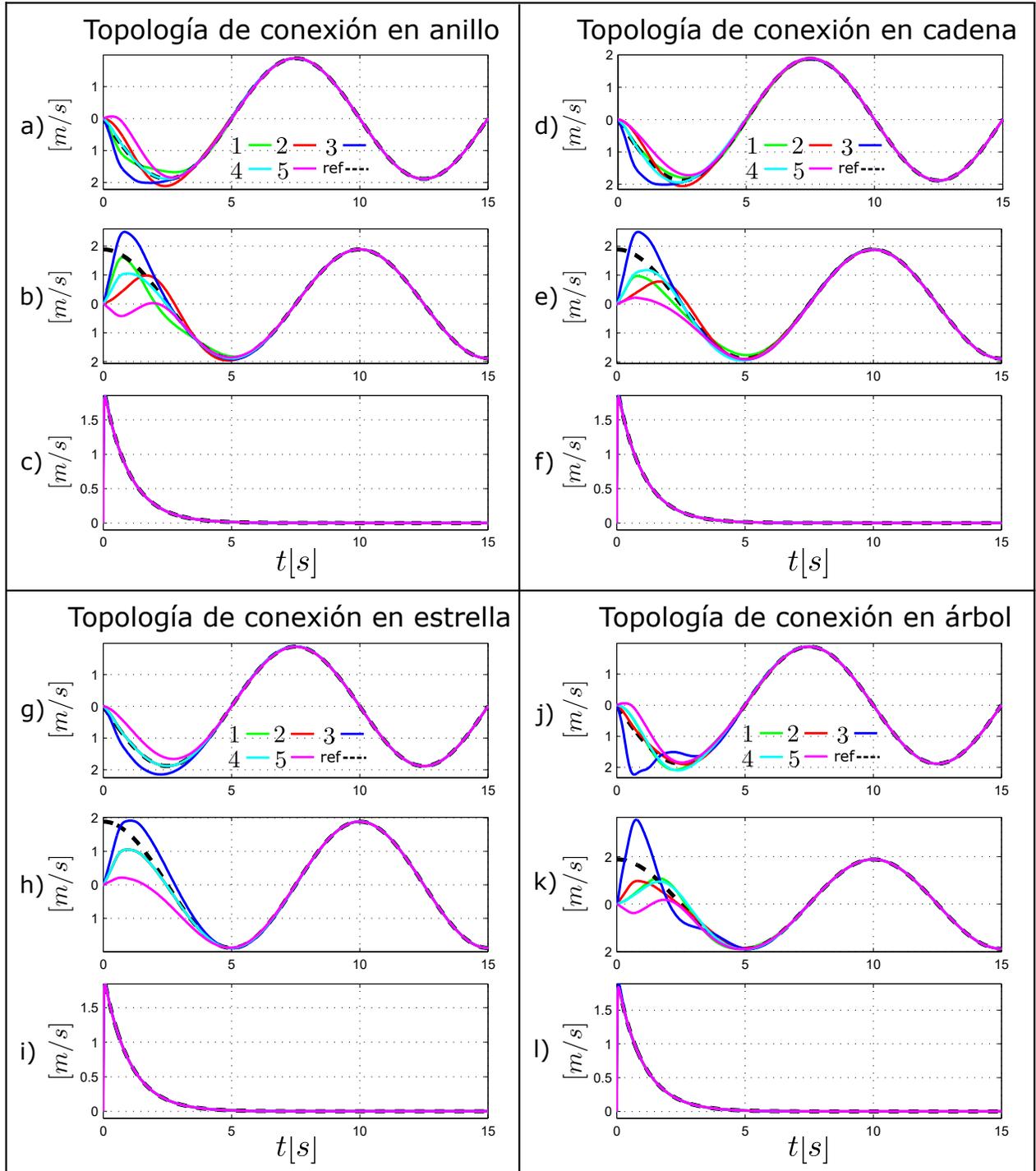
Grafos no dirigidos	Matriz de acoplamiento
<p>Anillo</p> 	$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
<p>Cadena</p> 	$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
<p>Estrella</p> 	$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
<p>Árbol</p> 	$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

En la figura 37 se muestra la formación y la trayectoria descrita por cada cuadricóptero empleando los diferentes grafos no dirigidos para su comunicación.



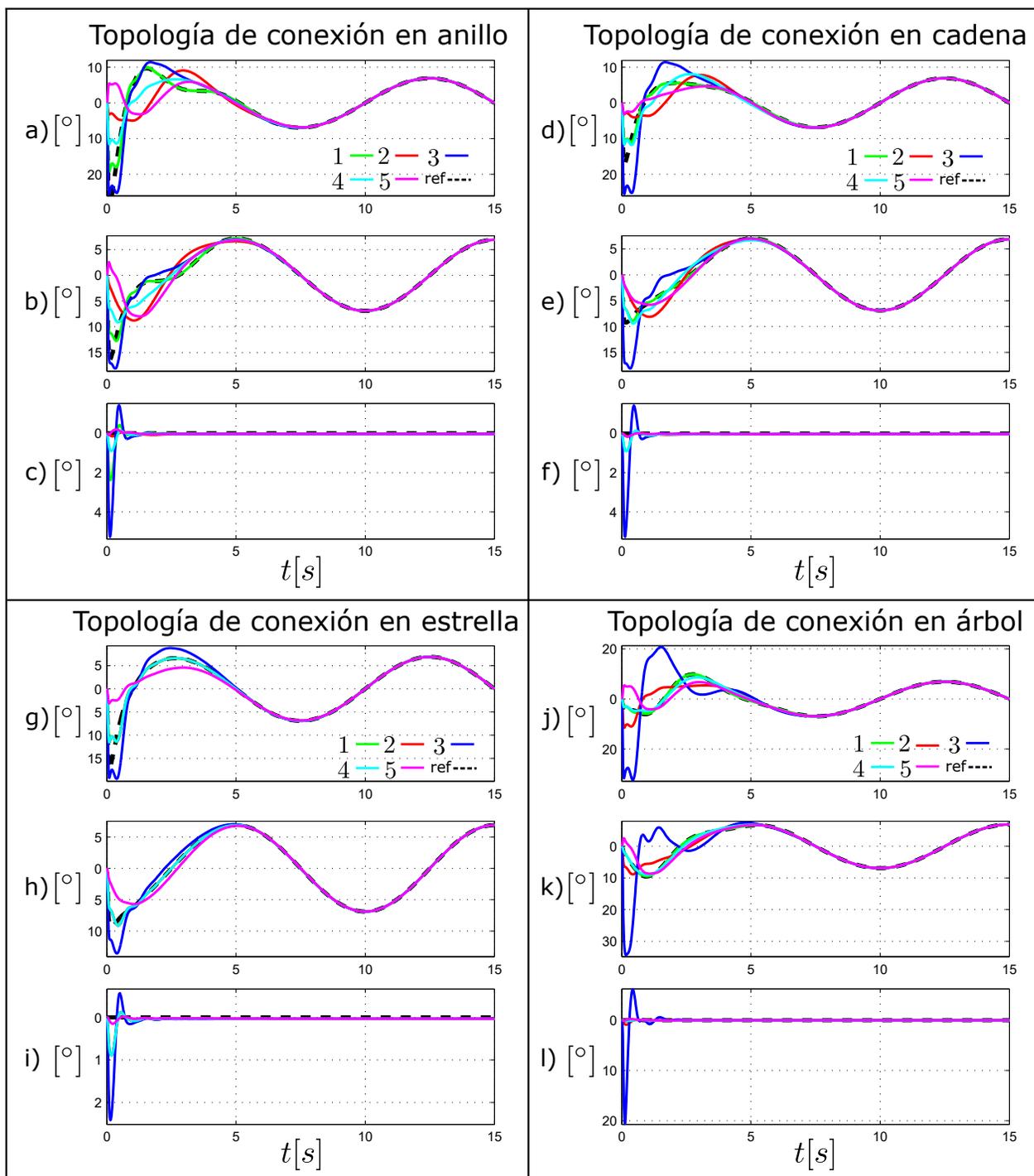
**Figura 37.** Formación y seguimiento mediante topologías de conexión no dirigidas.

En la figura 38 se muestra como las velocidades descritas por cada uno de los cuadricópteros al emplear los diferentes grafos no dirigidos se aproximan al perfil de velocidad deseado. Al comparar cada una de las gráficas se puede observar que al emplear el grafo estrella no dirigido se tiene un mejor transitorio al menos en a), d), g), j) y b), e), h), k).



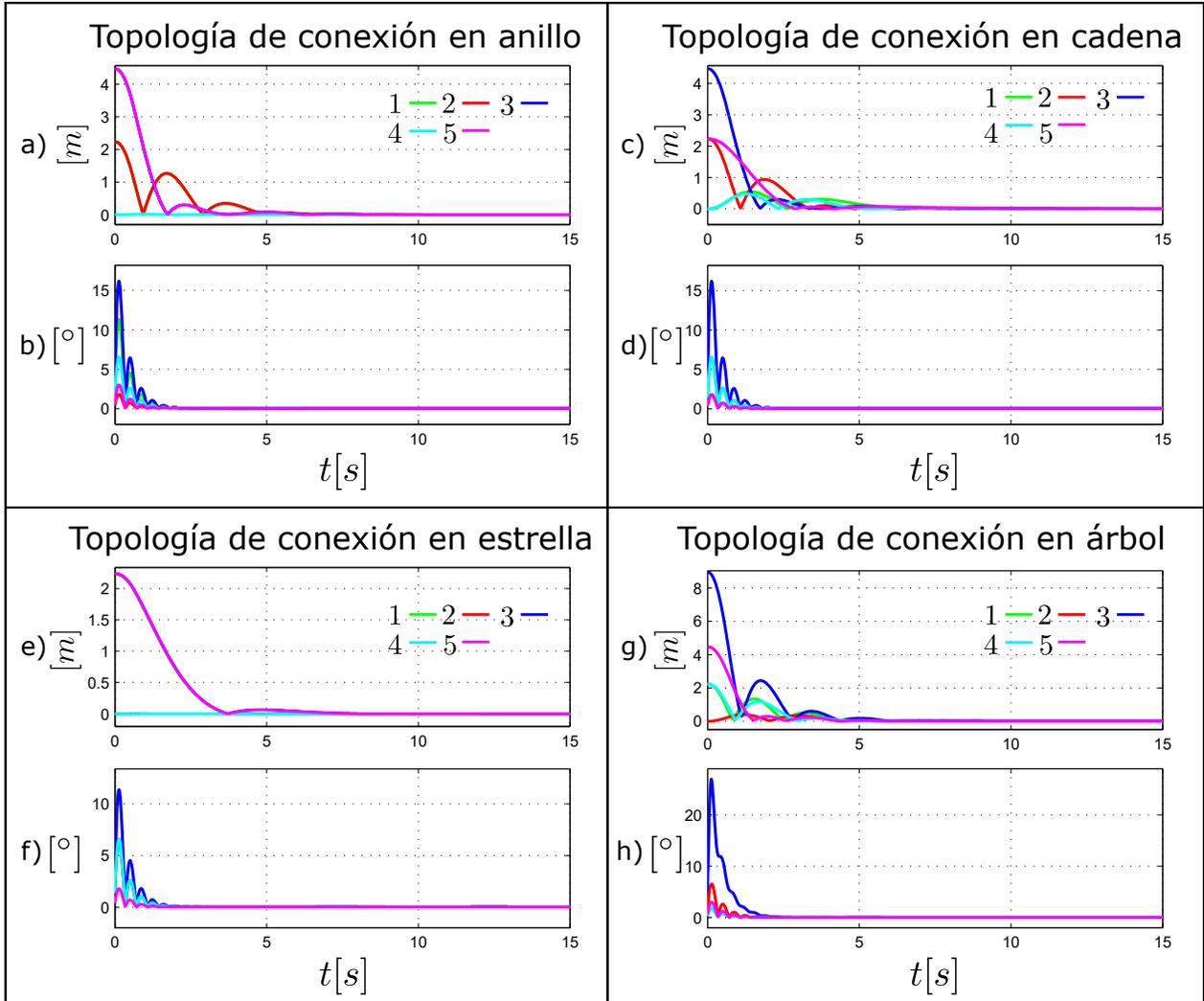
**Figura 38.** Velocidades lineales empleando topologías de conexión no dirigidas, donde a), d), g) y j)  $=\dot{x}$ ,  $\dot{x}_d$ [m/s], b), e), h) y k)  $=\dot{y}$ ,  $\dot{y}_d$ [m/s] y c), f), i) y l)  $=\dot{z}$ ,  $\dot{z}_d$ [m/s].

En la figura 39, para una mejor apreciación solo se han colocado los ángulos deseados descritos por el cuadricóptero en color verde, ya que se puede observar que después del transitorio los ángulos de Euler obtenidos se aproximan de forma aceptable a los ángulos deseados y además al comparar los diferentes resultados, se puede apreciar que al emplear el grafo estrella no dirigido el transitorio es menor.

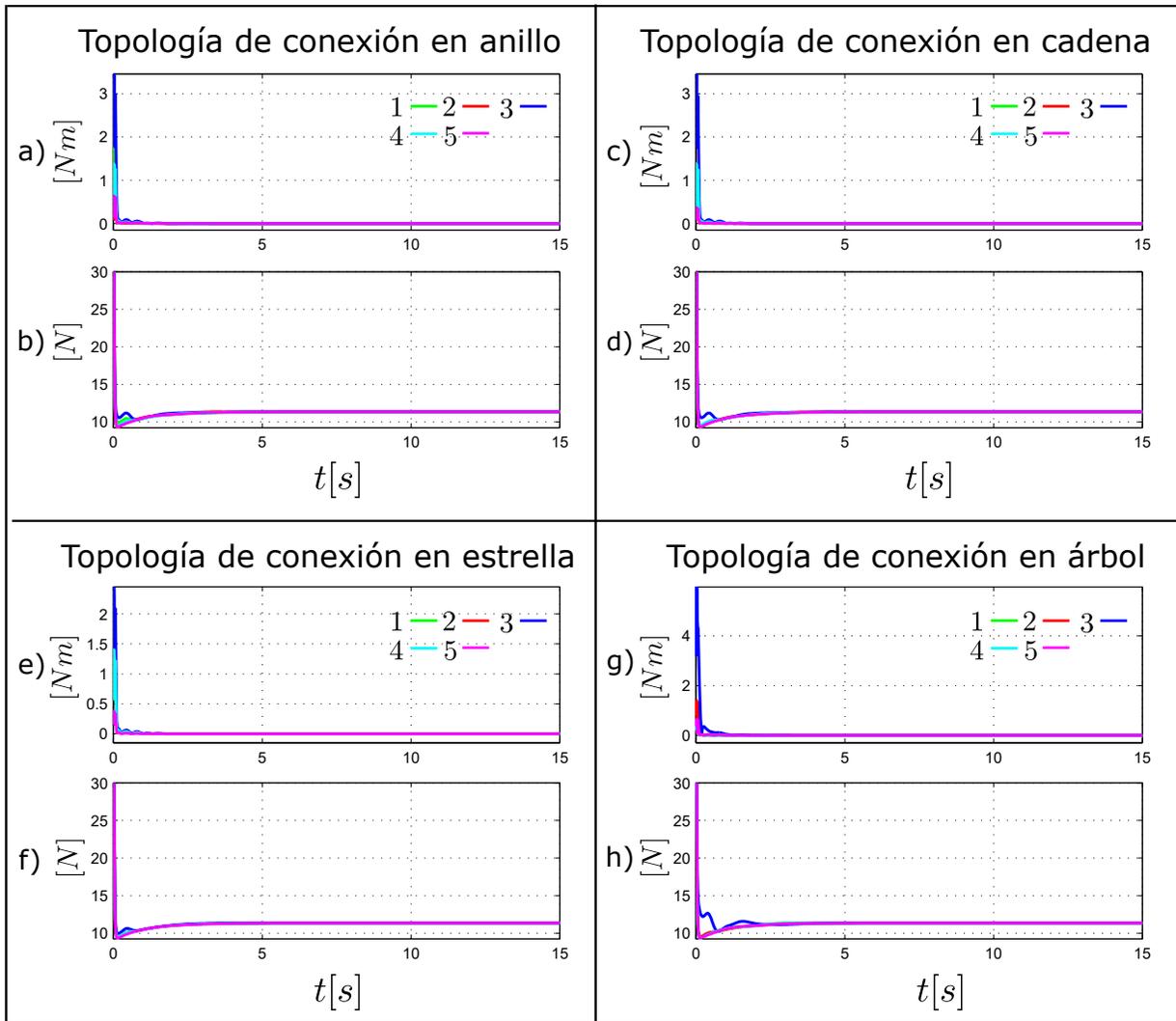


**Figura 39.** Posiciones angulares empleando topologías de conexión no dirigidas donde a), d), g) y j)  $=\phi$ ,  $\phi_a$  [°], b), e), h) y k)  $=\theta$ ,  $\theta_a$  [°] y c), f), i) y l)  $=\psi$ ,  $\psi_a$  [°].

En la figura 40 se muestra que la norma del error tanto para el término de interconexión  $e_i \triangleq \sum_{j=1}^n a_{ij} (\mathbf{p}_{ij} - \delta_{ij})$  como de los ángulos empleando los diferentes grafos no dirigidos, después de unos segundos son cercanos a cero, lo cual a su vez garantiza que se cumple de forma aceptable con los objetivos de control.



**Figura 40.** Norma del error del término de interconexión a), c), e) y g)  $= \|e_i\|$  [m] y de orientación b), d), f) y h)  $= \|\phi_{R_c}\|$  [°] empleando topologías de conexión no dirigidas.



**Figura 41.** Entradas de control a), c), e) y g)  $=\|\tau_i\|$  [Nm] y b), d), f) y h)  $=T_i$  [N] empleando topologías de conexión no dirigidas.

En la figura 41 al igual que en el caso de grafos dirigidos se muestran las entradas de control de orientación  $\|\tau_i\|$  [Nm] y traslación  $T_i$  [N] necesarias para cumplir con el objetivo de control. En el caso de la entrada  $T_i$  [N] solo se presentan los valores menores a 30 Newtons para una mejor visualización.

Al comparar los resultados de cada grafo no dirigido, se puede observar un mejor desempeño al emplear el grafo estrella no dirigido. Por otra parte, los resultados obtenidos al usar grafos no dirigidos son mejores que al utilizar los grafos dirigidos, dado que los ángulos  $\phi, \theta, \psi$  son menores y lo cual permite que los cuadricópteros alcancen su posición deseada en un menor tiempo, lo cual, en el caso de grafos dirigidos no sucede por el hecho de que la información transmitida por el vehículo maestro se debilita causando que los seguidores no tengan un buen desempeño tal y como sucede con un grafo cadena dirigido, pues entre más vehículos se agreguen será más complicado cumplir con el objetivo de control.

### 6.3. Resultados aplicación a labores de búsqueda y vigilancia

Los resultados que se presentan a continuación corresponden al seguimiento de las trayectorias propuestas para lograr aplicaciones a búsqueda y vigilancia mientras se mantiene un vuelo en formación.

El enfoque correspondiente a búsqueda se ha realizado mediante el uso de la entrada de control que permite hacer uso de grafos dirigidos y del enfoque maestro esclavo, ya que debido a su estructura permite el seguimiento de un perfil de posición y de velocidad deseados. Por otra parte, para emplear el enfoque de vigilancia se utilizó el algoritmo de control que permite usar grafos no dirigidos, ya que por medio de este algoritmo es posible el seguimiento de una trayectoria por medio de un perfil de velocidad y a su vez comunicar a cada uno de los cuadricópteros de forma bidireccional.

Cabe mencionar que solo se realizaron simulaciones utilizando las topologías de conexión estrella dirigida para el esquema maestro-esclavo y una conexión anillo no dirigida para el segundo esquema de control, pues se considera son las más adecuadas al momento de comunicar a cada uno de los cuadricópteros en este tipo de tareas.

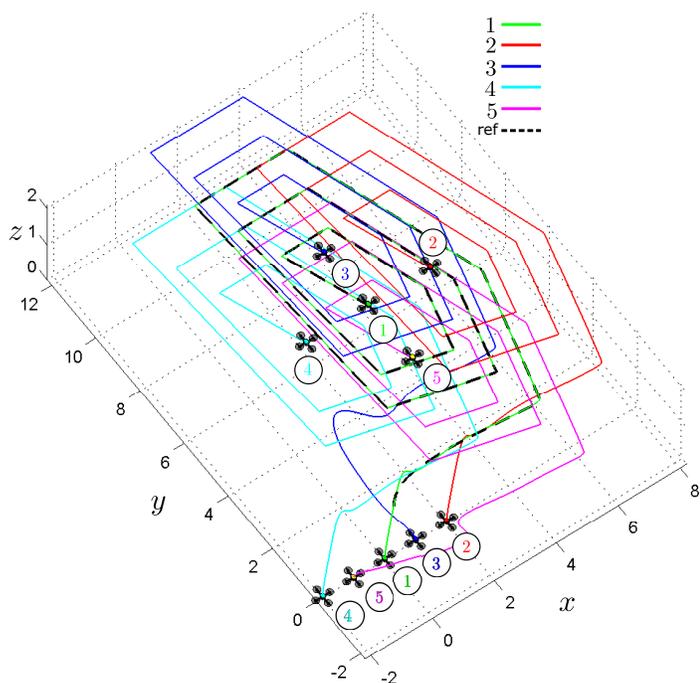
#### 6.3.1. Aplicación de búsqueda resultados

La condiciones iniciales y las distancias empleadas para llevar a cabo las simulaciones son las mismas que se utilizaron al hacer uso de los grafos dirigidos. Las ganancias propuestas son:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{v_i} &= \text{diag}[ 1.5 \quad 1.5 \quad 5 ], \\
 \mathbf{K}_{p_i} &= \text{diag}[ 4 \quad 4 \quad 5 ], \quad i = 1, 2, \dots, 5, \\
 \mathbf{K}_{o_i} &= \text{diag}[ 5 \quad 5 \quad 5 ], \\
 \mathbf{K}_{w_i} &= \text{diag}[ 80 \quad 80 \quad 80 ].
 \end{aligned} \tag{139}$$

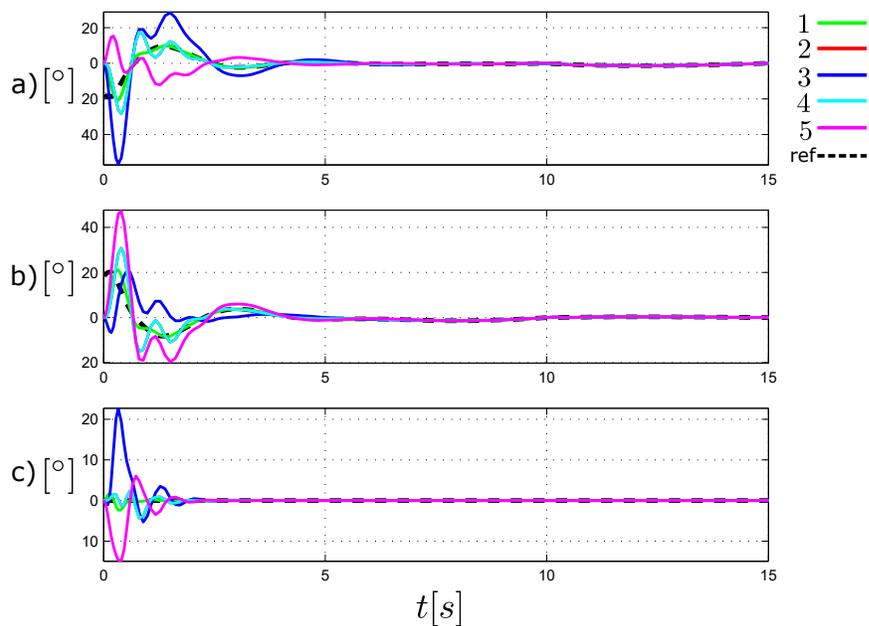
En las siguientes figuras se muestran los resultados obtenidos al hacer uso de la estrategia maestro-esclavo y de la trayectoria en espiral para labores de búsqueda.

En la figura 42 se muestra a los cinco cuadricópteros mientras desarrollan un vuelo en formación y el seguimiento de la trayectoria deseada.



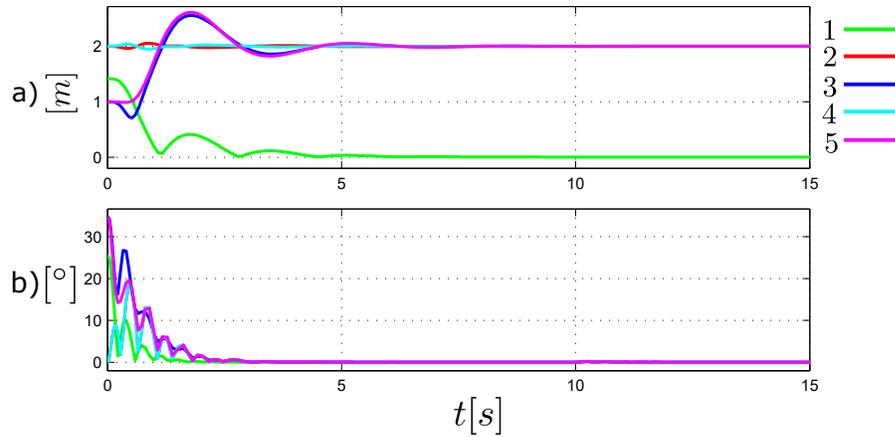
**Figura 42.** Trayectoria en espiral y formación en el plano  $x, y, z$ .

En la figura 43 se muestran los ángulos generados por cada uno de los cuadricópteros con líneas continuas al hacer uso de la trayectoria en espiral. Se puede observar que se tiene un buen desempeño del algoritmo de control, dado que los ángulos son similares a los deseados.



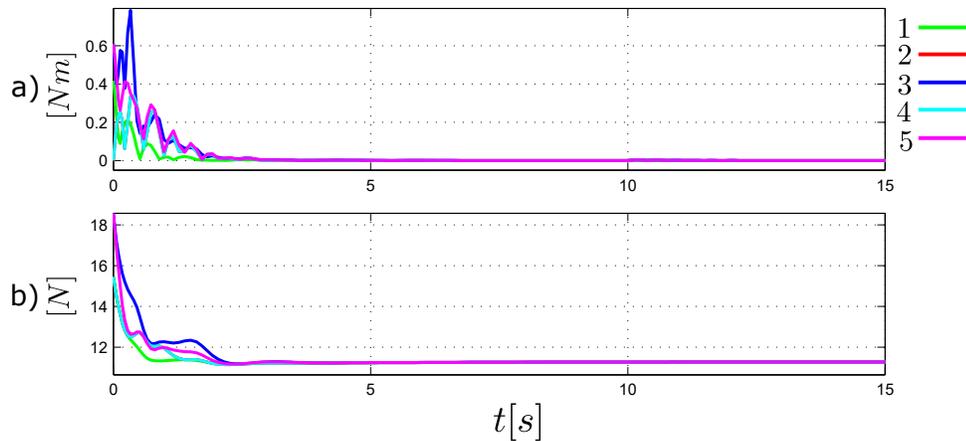
**Figura 43.** Posiciones angulares trayectoria en espiral donde a)  $=\phi[^\circ]$ , b)  $=\theta[^\circ]$ , c)  $=\psi[^\circ]$ .

En la figura 44 se encuentra la norma del error de posición a)  $\|e_{\bar{p}}\| [m]$  y de los ángulos de Euler b)  $\|\phi_{R_e}\| [^\circ]$ . Se puede observar que dichos errores después de unos segundos son muy cercanos a cero, lo cual permite afirmar que se cumple con el objetivo de control.



**Figura 44.** Norma del error de posición a)  $\|e_{\bar{p}}\| [m]$  y de los ángulos de Euler b)  $\|\phi_{R_e}\| [^\circ]$ .

La norma del par de control a)  $\|\tau_i\| [Nm]$  y la fuerza de empuje b)  $T_i [N]$  requeridas para cumplir con el objetivo de control se muestran en la figura 45.



**Figura 45.** Entradas de control a)  $\|\tau_i\| [Nm]$  y b)  $T_i [N]$  empleando una topología de conexión en estrella dirigida.

### 6.3.2. Aplicación a vigilancia resultados

Los resultados obtenidos haciendo uso tanto de un acoplamiento bidireccional como de los perfiles de velocidad caóticos deseados (ver figura 9), para realizar aplicaciones de vigilancia se muestran en esta sección.

Las condiciones iniciales correspondientes a posición para cada cuadricóptero en cuanto a  $x, y$  son iguales a las empleadas en los casos anteriores, en el caso de  $z$  se ha dado como condición inicial 2 metros debido a que se consideró lo dicho en la Sección 5.2. Las distancias, las condiciones iniciales para el subsistema de orientación y  $\mathbf{R}(0)$  no han sido modificadas. Por otro lado, las ganancias a utilizar en este caso son iguales a las empleadas al evaluar los grafos no dirigidos.

En la figura 46 se encuentra la trayectoria caótica generada por los cuadricópteros mientras mantienen una formación.

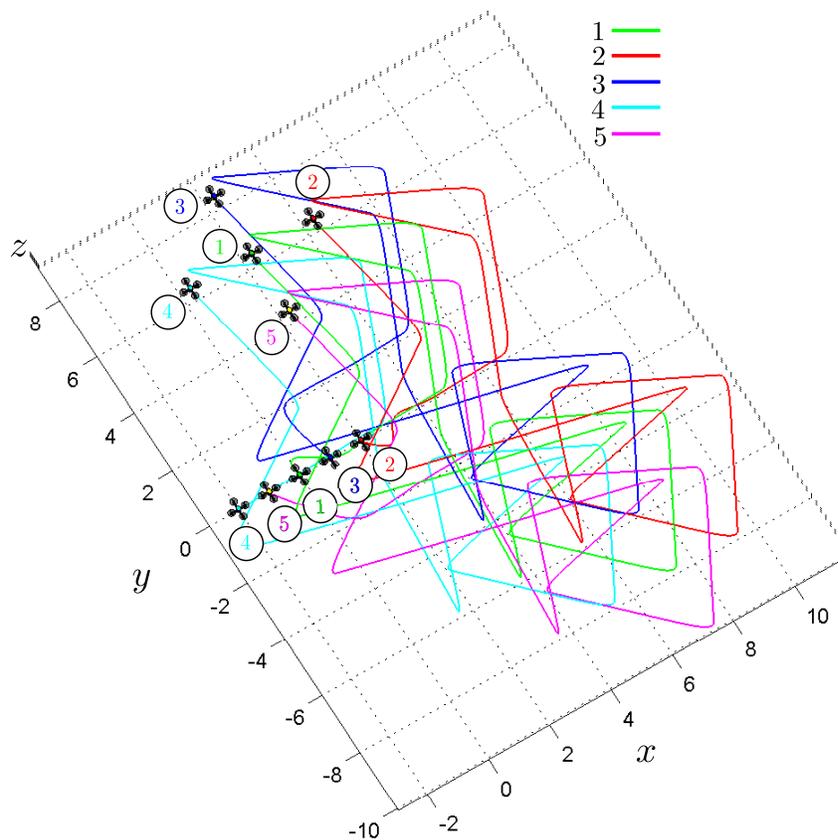
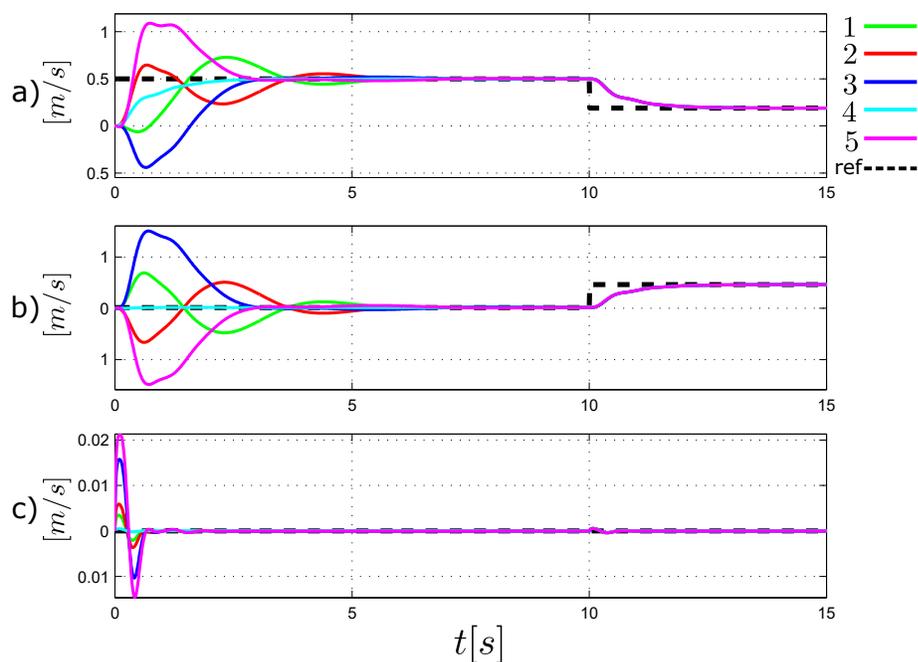
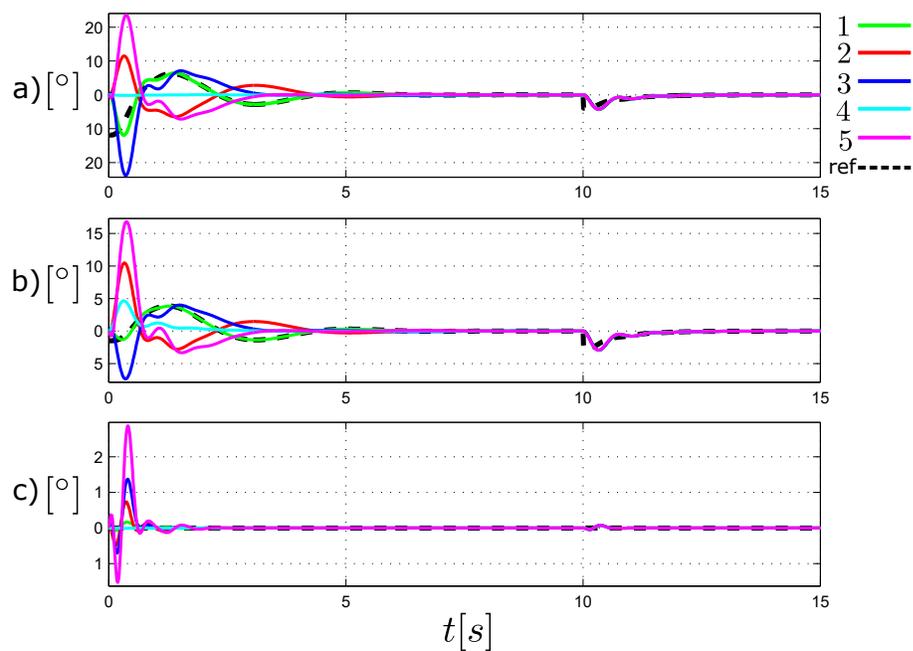


Figura 46. Trayectoria caótica y formación en el plano  $x, y, z$ .

En las figuras 47 y 48 se muestran los perfiles de velocidad caóticos y los ángulos generados por los vehículos. Al igual que en los ángulos presentados en la sección de grafos no dirigidos, solo se han colocado en líneas punteadas los ángulos deseados que sigue el cuadricóptero en color verde.

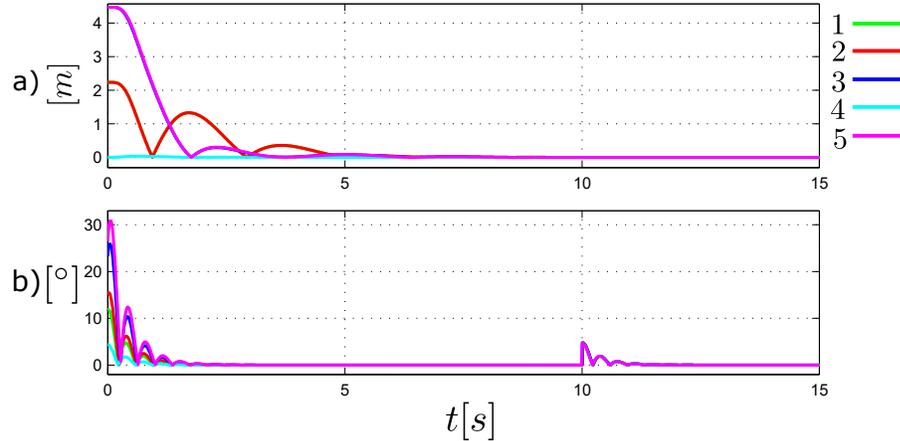


**Figura 47.** Velocidades lineales trayectoria caótica donde a)  $=\dot{x}[m/s]$ , b)  $=\dot{y}[m/s]$  y c)  $=\dot{z}[m/s]$ .



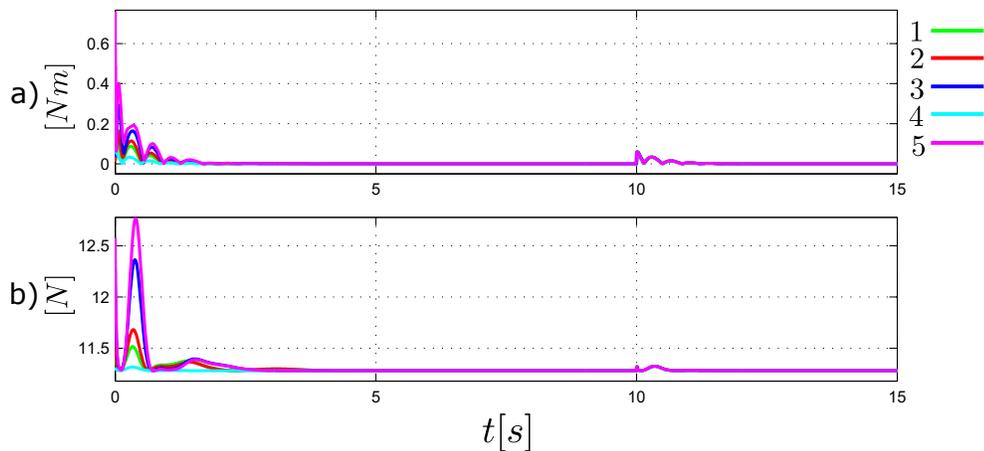
**Figura 48.** Posiciones angulares trayectoria caótica donde a)  $=\phi[^\circ]$ , b)  $=\theta[^\circ]$  y c)  $=\psi[^\circ]$ .

Por medio de la norma del error del término de acoplamiento  $\|e_i\| [m]$  que permite comunicar a cada miembro del grupo y de los ángulos  $\|\phi_{R_e}\| [^\circ]$  se puede concluir que se tiene un buen desempeño del algoritmo de control (69) y de (99) dado que se cumple con el objetivo de control como se observa en la figura 49.



**Figura 49.** Norma del error de acoplamiento a)  $\|e_i\| [m]$  y de los ángulos de Euler b)  $\|\phi_{R_e}\| [^\circ]$ .

Finalmente, en la figura 50, se presentan las entradas de control a)  $\|\tau_i\| [Nm]$  y b)  $T_i [N]$ , aplicadas a cada uno de los cuadricópteros y que permiten cumplir con el objetivo de control.



**Figura 50.** Entradas de control a)  $\|\tau_i\| [Nm]$  y b)  $T_i [N]$  empleando una topología de conexión en anillo no dirigida.

## Capítulo 7. Conclusiones

---

En este capítulo se mencionan las conclusiones generales y contribuciones obtenidas en este trabajo de tesis, así como algunos trabajos futuros que arroja esta tesis.

En este trabajo de tesis, con base en las herramientas matemáticas que permiten el estudio del movimiento de cuerpos rígidos y de la formulación Newton-Euler, se logró entender el modelo matemático del cuadricóptero, el cual, en conjunto con la teoría de control no lineal permitió el diseño de los algoritmos de control de traslación y de orientación del vehículo aéreo.

En el caso del algoritmo de traslación, se aplicó una entrada de control virtual que permite analizar al cuadricóptero como un sistema completamente actuado. Por otra parte, para la obtención del algoritmo de orientación se recurrió a la técnica de linealización por retroalimentación exacta.

Para llevar a cabo la prueba de estabilidad del sistema en lazo cerrado, se utilizó la teoría de sistemas en cascada pues gracias a las herramientas matemáticas que ésta proporciona, se demuestra que el término de interconexión que surge al emplear la entrada de control virtual no desestabiliza el sistema.

El problema de formación se abordó al hacer uso de la teoría de sistemas complejos y a la teoría de grafos, donde la primera de ellas permitió el estudio del comportamiento colectivo de formación, mientras que la segunda fue empleada para la obtención de la matriz de acoplamiento para comunicar a los cuadricópteros.

Dado que en este trabajo también se desea mantener un vuelo en formación con aplicaciones a búsqueda y vigilancia, se proponen dos trayectorias para ser realizadas por el grupo de cuadricópteros. Una de ellas, fue diseñada en base a polinomios de quinto grado, pues estos permiten asegurar que la aceleración tanto al inicio como al final de cada tramo sea cero, mientras que la segunda se generó a partir de un perfil de velocidad caótico obtenido del mapa logístico de primer orden por su simplicidad.

Por medio de las simulaciones numéricas obtenidas, se puede concluir que se han cumplido satisfactoriamente los objetivos establecidos en el presente trabajo de tesis, pues al emplear los algoritmos de control, de diferentes topologías de conexión y de las trayectorias propuestas para llevar a cabo labores de búsqueda y vigilancia, se logró realizar un vuelo en formación mientras realizan el seguimiento de las trayectorias.

Al comparar los resultados se observó que al hacer uso de las topologías de conexión dirigidas como no dirigidas, se obtienen mejores resultados al emplear una topología en estrella, aunque al hacer uso de

topologías de conexión no dirigidas se recomienda tomar en cuenta las ventajas y desventajas que estas presentan, por dicho motivo al realizar labores de vigilancia se decidió realizar una conexión en anillo no dirigido, pues se considera que para este tipo de tareas si un vehículo es afectado los demás seguirán comunicándose, lo cual no sucedería al comunicarlos en una topología de conexión en estrella no dirigida, ya que en el peor de los casos, si el cuadricóptero central se daña la comunicación se perdería con los demás miembros del grupo de cuadricópteros.

### **7.1. Contribuciones de este trabajo de tesis**

En el presente trabajo se obtuvieron las siguientes contribuciones:

- Diseño de un algoritmo de control que permite hacer uso de grafos no dirigidos bajo el uso de un perfil de velocidad.
- Diseño de un perfil de velocidad caótico que permite que los cuadricópteros describan una trayectoria caótica. Dicha trayectoria es ideal para aplicaciones de vigilancia o si se desea en labores de búsqueda, este tipo de trayectorias es poco común encontrarla aplicada en cuadricópteros.

### **7.2. Trabajos futuros**

A continuación se mencionan los principales trabajos futuros que arroja esta tesis:

- Obtención de resultados experimentales.
- Diseño de un algoritmo de control que permita acotar la trayectoria caótica que se presentó.
- Diseño de un algoritmo de control que permita la evasión de obstáculos.
- Probar estabilidad global al emplear el algoritmo de control para una formación descentralizada, mediante otra función de Lyapunov o modificar dicho algoritmo de tal modo que se obtenga el objetivo deseado.

### **7.3. Productos derivados de este trabajo de tesis**

El presente trabajo de tesis permitió el desarrollo del artículo de congreso

Montañez, C., Pliego, J., y Hernández, C. (2019). Formación de vehículos aéreos con aplicaciones a vigilancia, *XXI Congreso Mexicano de Robótica*.

## Literatura citada

- Abdessameud, A. y Tayebi, A. (2009). Formation control of VTOL-UAVs. *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*, pp. 3454–3459.
- Abdessameud, A. y Tayebi, A. (2013). *Motion coordination for VTOL unmanned aerial vehicles: attitude synchronisation and formation control*. Springer.
- Arellano-Delgado, A., Cruz-Hernández, C., López Gutiérrez, R. M., y Posadas-Castillo, C. (2015). Outer synchronization of simple firefly discrete models in coupled networks. *Mathematical Problems in Engineering*, pp. 1–14.
- Arshad, M. y Yoonsoo, K. (2015). Decentralized formation control of quadcopters using feedback linearization. *ICARA 2015 - Proceedings of the 2015 6th International Conference on Automation, Robotics and Applications*, pp. 537–541.
- Bar-Yam, Y. (2003). *Dynamics of Complex Systems*. Westview Press.
- Bouabdallah, S. (2007). *Design and control of quadrotors with application to autonomous flying*. Tesis de doctorado, École polytechnique fédérale de Lausanne.
- Bouabdallah, S., Murrieri, P., y Siegwart, R. (2005). Towards autonomous indoor micro vtol. *Autonomous robots*, **18**(2): 171–183.
- Cabreira, T., Franco, C., Ferreira, P., y Buttazzo, G. (2018). Energy-aware spiral coverage path planning for uav photogrammetric applications. *IEEE Robotics and automation letters*, **3**(4): 3662–3668.
- Cetina, J. (2017). *Diseño de trayectorias caóticas en robots móviles*. Tesis de maestría, CICESE.
- Díaz, R. (2018). *Vuelo en formación de vehículos no tripulados*. Tesis de maestría, CICESE.
- Foulds, L. R. (1992). *Graph theory applications*. Springer-Verlag New York.
- Gohari, P., Mohammadi, H., y Taghvaei, S. (2019). Using chaotic maps for 3d boundary surveillance by quadrotor robot. *Applied soft computing journal*, **76**: 68–77.
- Kendoul, F., Zhenyu, Y., y Kenzo, N. (2009). Guidance and nonlinear control system for autonomous flight of minirotorcraft unmanned aerial vehicles. *Journal of Field Robotics*, **27**: 311–334.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice Hall, (3rd ed).
- Koksal, N., Fidan, B., y Buyukkabasakal, K. (2015). Real-time implementation of decentralized adaptive formation control on multi-quadrotor systems. *2015 European Control Conference, ECC 2015*, pp. 3162–3167.
- Lee, K., Choi, Y., y Park, J. (2017). Backstepping based formation control of quadrotors with the state transformation technique. *Applied Sciences*, **7**: 1170.
- Madani, T. y Benallegue, A. (2006). Control of a quadrotor mini-helicopter via full state backstepping technique. *45th IEEE Conference on Decision & Control*, pp. 1515–1520.
- Mahony, R., Kumar, V., y Corke, P. (2012). Multirotor aerial vehicles: modeling, estimation, and control of quadrotor. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, **19**(3): 20–32.
- Martínez, R. (2014). *Control de comportamientos colectivos en grupos de robots móviles*. Tesis de maestría, CICESE.

- Narsingh, D. (1974). *Graph theory with applications to engineering and computer science*. Prentice-Hall.
- Ottino, J. M. (2003). Complex systems. *AIChE Journal*, **49**: 292–299.
- Parra, A. (2017). *Formación en grupos de robots móviles*. Tesis de maestría, CICESE.
- Pavlov, D. y Kasumyan, A. (2000). Patterns and mechanisms of schooling behavior in fish: A review. *Journal of Ichthyology*, **40**: S163–S231.
- Portugal, S., Hubel, T., Fritz, J., Heese, S., Trobe, D., Voelkl, B., Hailes, S., Wilson, A., y Usherwood, J. (2014). Upwash exploitation and downwash avoidance by flap phasing in ibis formation flight. *Nature*, **505**: 399–402.
- Raffo, V., Ortega, M., y Rubio, F. (2010). An integral predictive/nonlinear h-infinity control structure for a quadrotor helicopter. *Automatica*, **46**: 29–39.
- Rico, R., Maisterra, P., Martínez, M., Azagra, J., y Nájera, S. (2015). Identificación experimental de los parámetros de un cuatrirrotor. *Actas de las XXXVI Jornadas de Automática*, pp. 973–982.
- Sepulchre, R., Jankovic, M., y Kokotovic, P. (1997). *Constructive Nonlinear Control*. Springer.
- Sharma, K. (2017). *Overview of industrial process automation*. Elsevier, (2nd ed).
- Siciliano, B. y Villani, L. (1999). *Robot force control*. Springer. p. 146.
- Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., y Oriolo, G. (2008). *Robotics -modelling, planning and control*. Springer.
- Silva, J. (2019). *Inducción de trayectorias caóticas mediante acoplamiento de robots móviles para la cobertura de áreas específicas de forma síncrona*. Tesis de doctorado, CIATEQ.
- Sosinsky, B. (2009). *Networking bible*. Wiley.
- Spong, M., Hutchinson, S., y Vidyasagar, M. (2005). *Robot modeling and control*. Wiley.
- Tan, Y. (2013). Swarm robotics: collective behavior inspired by nature. *Journal of Computer Science & Systems Biology*.
- Thurner, S., Hanel, R., y Klimek, P. (2018). *Introduction to the theory of complex systems*. Oxford.
- Wilson, S., Buffin, A., y Berman, S. (2018). Multi-robot replication of ant collective towing behaviours. *Royal Society Open Science*, **5**(10): 180409.