

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias
en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación
en Instrumentación y Control**

**Diseño, construcción y sincronización de neuronas
electrónicas**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Guillermo Ortega Morales

Ensenada, Baja California, México

2020

Tesis defendida por

Guillermo Ortega Morales

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Jonatán Peña Ramírez

Codirector de tesis

M. en C. Ricardo Francisco Núñez Pérez

Codirector de tesis

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

M. en C. Moisés Castro Delgado

Dra. Mónica Elizabeth Tentori Espinosa



Dr. Daniel Saucedo Carvajal

Coordinador del Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dra. Rufina Hernández Martínez

Directora de Estudios de Posgrado

Guillermo Ortega Morales © 2020

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis

Resumen de la tesis que presenta Guillermo Ortega Morales como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

Diseño, construcción y sincronización de neuronas electrónicas

Resumen aprobado por:

Dr. Jonatán Peña Ramírez

Codirector de tesis

M. en C. Ricardo Francisco Núñez Pérez

Codirector de tesis

El cerebro humano es un órgano muy importante del cuerpo humano. De hecho, este complejo órgano puede verse como el “controlador” del cuerpo ya que es el encargado de regular todos los impulsos nerviosos. Uno de los componentes esenciales del cerebro son las neuronas, las cuales son células que tienen como función principal recibir, procesar y transmitir información, ya sea mediante sinapsis química o eléctrica. Dependiendo del tipo de información y/o actividad, las neuronas pueden exhibir diferentes comportamientos dinámicos como por ejemplo, espigues, ráfagas de espigas, espigues caóticos, entre otros. Para poder estudiar el comportamiento neuronal, de una manera no invasiva, se han desarrollado diferentes modelos matemáticos, los cuales son capaces de reproducir el comportamiento dinámico, o al menos las formas de onda observadas en mediciones “In-vivo” e “In-vitro”. Dichos modelos también permiten estudiar la aparición de comportamiento colectivo o sincronización en grupos de neuronas. Esta tesis aborda el estudio de neuronas desde una perspectiva de Dinámica y Control. En particular, se presenta un estudio analítico, numérico y experimental del comportamiento dinámico observado en una versión modificada del modelo neuronal de Izhikevich. Como primer punto, esta tesis introduce una modificación al modelo neuronal propuesto por Izhikevich, la cual consiste en reemplazar la función de conmutación estática del modelo original por una función de conmutación dinámica, lo cual permite analizar el modelo modificado como un sistema híbrido con dos modos de operación. Además, el modelo modificado es usado para construir una “neurona electrónica”, es decir, un circuito electrónico analógico capaz de reproducir los comportamientos dinámicos del modelo modificado de Izhikevich. Finalmente, se investiga la aparición de sincronización en un par y en una red de neuronas, para lo cual se utiliza la teoría de estabilidad de Lyapunov y la función maestra de estabilidad.

Palabras clave: Neuronas electrónicas, sincronización, redes neuronales, sistemas híbridos

Abstract of the thesis presented by Guillermo Ortega Morales as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Electronics and Telecommunications with orientation in Instrumentation and Control.

Design, construction, and synchronization of electronic neurons

Abstract approved by:

Dr. Jonatán Peña Ramírez

Thesis Co-Director

M. en C. Ricardo Francisco Núñez Pérez

Thesis Co-Director

The human brain plays a very important role in the human body. In fact, this complex organ can be seen as “the controller” of the human body because this organ governs the nervous system. One of the key components in the brain are the neurons. The main function of the neurons is to receive, to process, and to transmit information either via chemical synapses or via electrical synapses. Depending on the type of activity to be performed, the neurons may exhibit different dynamic behaviors like for example spiking, bursting, chaotic bursting, among others. In order to study the neuronal behavior, in a non-invasive manner, the scientist have developed several mathematical models, which allow reproducing most of the neuronal behaviors or at least to reproduce the wave forms obtained from “In-vivo” e “In-vitro” measurements. Also, these models allow studying the onset of collective behavior and synchronization in groups of neurons. This thesis aims to contribute to the study of neurons from a Dynamics and Control perspective. In particular, the thesis presents an analytic, numeric, and experimental study related to the Izhikevich neuronal model. As a first step, a modified version of the Izhikevich model is presented. The modification consists in replacing the static reset function in the original model by a dynamic reset. With the proposed modification, the system can be modelled as a hybrid system with two operating modes. Furthermore, this modification allows implementing the model with electronic circuits, i.e. the modified model is used in order to design and to construct an electronic neuron, which can reproduce most of the dynamic behaviors observed in the original Izhikevich model. Finally, the onset of synchronization in a pair and in a network of modified Izhikevich neurons is investigated. In the analysis, we use the Lyapunov stability theory and the Master Stability Function approach.

Keywords: Electronic neurons, synchronization, neural networks, Hybrid systems

Dedicatoria

A mi familia y amigos.

Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría/doctorado. No. de becario: 633578

A mis padres y hermanos por su amor y apoyo, que siempre estuvieron al pendiente de mi.

Muchas gracias a mis directores de tesis Jonatán Peña y Ricardo Nuñez por su asesoramiento y apoyo durante este proyecto de tesis. También agradezco a mi comité de tesis Joaquín Álvarez, Moisés Castro y Mónica Tentori por sus comentarios y sugerencias las cuales fueron muy valiosas para este trabajo de tesis.

Agradezco a mis amigos Hirata, Eduardo (Mochis), Alberto, Willem, Juan, Angie, Yryx y Anita por su amistad y apoyo que siempre estuvieron ahí para lo que se ofreciera.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	viii
Capítulo 1. Introducción	
1.1. Estudios de neuronas desde la perspectiva de dinámica y control	2
1.2. Neuronas electrónicas y sus aplicaciones	3
1.3. Panorama general de esta tesis	4
1.3.1. Motivación	4
1.3.2. Hipótesis	4
1.3.3. Objetivo general	5
1.3.4. Objetivos particulares	5
1.3.5. Contribuciones	5
1.3.6. Productos generados	6
1.3.7. Estructura de esta tesis	6
Capítulo 2. Preliminares	
2.1. Modelos neuronales clásicos	8
2.1.1. Modelo de Hodgking-Huxley	8
2.1.2. Modelo de FitzHugh-Nagumo	11
2.1.3. Modelo de Morris-Lecar	11
2.1.4. Modelo de Hindmarsh-Rose	13
2.2. Modelo de Izhikevich	16
2.2.1. Discusión sobre la implementación del modelo de Izhikevich en circuitos electrónicos	18
2.3. Sincronización	19
2.3.1. Herramientas de análisis del comportamiento síncrono	19
2.3.1.1. Estabilidad de sincronización de sistemas perturbados	20
2.3.1.2. Función maestra de estabilidad	22
2.4. Sistemas híbridos	25
2.4.1. Autómata híbrido	26
Capítulo 3. Análisis y diseño teórico del modelo modificado de Izhikevich	
3.1. Modelado de la neurona como un sistema híbrido	28
3.2. Modificación propuesta del modelo de Izhikevich	29
3.2.1. Análisis y diseño del potencial de la membrana	30
3.2.2. Análisis y diseño de la variable de recuperación de la membrana	31
3.2.3. Introducción de la variable del tiempo	33
3.2.4. Funcionamiento del reinicio	34

Tabla de contenido (continuación)

3.3.	Resultados numéricos	35
3.3.1.	Comportamiento del tipo de “espigado”	36
3.3.2.	Comportamiento del tipo de “ráfagas”	37
Capítulo 4. Diseño e implementación electrónica del modelo modificado de Izhikevich		
4.1.	Consideraciones de diseño	39
4.2.	Implementación del reset	41
4.2.1.	Potencial de la membrana	42
4.2.2.	Variable de recuperación de la membrana	42
4.3.	Circuito electrónico de Izhikevich	43
4.3.1.	Implementación del circuito en simulación	44
4.3.2.	Resultados experimentales	46
Capítulo 5. Sincronización de neuronas		
5.1.	Sincronización de un par de neuronas modificadas de Izhikevich mediante el diseño de un controlador	49
5.2.	Sincronización de un par de neuronas modificadas de Izhikevich con acoplamiento unidireccional difuso	51
5.2.1.	Estabilidad local de la solución síncrona	52
5.3.	Sincronización de dos neuronas usando la función maestra de estabilidad (MSF)	53
5.4.	Resultados numéricos	56
5.5.	Resultados experimentales	57
Capítulo 6. Conclusiones y recomendaciones		
6.1.	Conclusiones	60
6.2.	Recomendaciones	60
Literatura citada		62
Anexo		66

Lista de figuras

Figura	Página
2. Respuesta en el tiempo del modelo de Hodgkin-Huxley dado en la Ec. (1).	10
3. Series del tiempo del modelo de FitzHugh-Nagumo (2).	12
4. Series del tiempo de las variables x_1 y x_2 del modelo de Morris-Lecar (3).	13
5. Series del tiempo del modelo de Hindmarsh-Rose (4) en espigado, obtenidas con $I = 4$.	15
6. Con $I = 3$, el modelo de Hindmarsh-Rose (4) exhibe ráfaga.	15
7. Ráfagas aperiódicas en el modelo de Hindmarsh-Rose (4), obtenido con $I = 3.25$.	16
8. Comportamiento de espigado en el modelo de Izhikevich (5), con $a = 0.02$, $b = 0.2$, $c = -65$, $d = 6$, $I = 15$.	17
9. Solución del modelo de Izhikevich (5) en ráfagas, con $a = 0.02$, $b = 0.2$, $c = -50$, $d = 2$, $I = 15$.	18
10. Representación esquemática de un automata híbrido con 3 modos discretos. Cada nodo del grafo dirigido representa un modo (punto de operación) descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales. Las flechas indican las transiciones discretas posibles que corresponden a un cambio del modo	27
11. Representación del modelo neuronal de Izhikevich mediante un autómata híbrido.	28
12. Representación del sistema mediante un autómata híbrido.	29
13. Evolución en el tiempo del potencial de la membrana durante el reinicio dinámico (37).	32
14. Evolución en el tiempo de la membrana de recuperación durante el reinicio dinámico (42).	33
15. Evolución del tiempo de la nueva variable z (48).	35
16. Evolución en el tiempo del reinicio dinámico (36).	36
17. a) se muestra la serie del tiempo obtenida usando el modelo original de Izhikevich en "spiking", en su implementación en matlab [mV], en b) La serie de tiempo usando el modelo modificado de Izhikevich en "spiking" [mV]	37
18. a) se muestra la serie del tiempo obtenida usando el modelo original de Izhikevich en "bursting", en su implementación en matlab [mV], en b) La serie de tiempo usando el modelo modificado de Izhikevich en "bursting" [mV]	38
19. Circuito inversor.	39
20. Circuito sumador inversor.	40

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
21. Circuito integrador-sumador.	40
22. Conexión básica del multiplicador. Fuente: hoja de datos AD734.	41
23. Circuito comparador que permite estar en el modo de reinicio durante un intervalo de tiempo.	42
24. Circuito para fijar las condiciones iniciales del potencial de la membrana (x_1).	42
25. Circuito para fijar las condiciones iniciales de la variable de recuperación de la membrana (x_2).	43
26. Representación esquemática del circuito de Izhikevich usando circuitería analógica.	44
27. Implementación en Multisim del circuito eléctrico que emula la dinámica del modelo modificado de Izhikevich (63)-(64).	45
28. a) Simulación numérica en Matlab del modelo original de Izhikevich en "spiking" [mV], b) Simulación numérica en Multisim del circuito eléctrico del modelo modificado de Izhikevich en "spiking" [mV].	45
29. a) Simulación numérica con Matlab del modelo de Izhikevich en "bursting" [mV], b) Simulación numérica con Multisim del circuito eléctrico del modelo modificado de Izhikevich en "bursting" [mV].	46
30. Implementación experimental del modelo modificado de Izhikevich (63)-(64).	47
31. Comparación del modelo original de Izhikevich (5)-(6) y el modelo modificado (63)-(64) implementado en circuitería analógica. a) y c): Series del tiempo del modelo original. b) y d) Mediciones experimentales obtenidas del circuito correspondiente al modelo modificado.	48
32. Exponentes transversos máximos de Lyapunov para una par de 2 neuronas acopladas unidireccionalmente.	55
33. Sincronización de 2 neuronas modificadas de Izhikevich en comportamiento tipo 'spiking'.	56
34. Sincronización de 2 neuronas modificadas de Izhikevich en comportamiento tipo 'bursting'.	57
35. Sincronización de 2 neuronas modificadas de Izhikevich en acoplamiento unidireccional.	58
36. Validación experimental de la sincronización de 2 neuronas, usando el controlador no lineal (69).	59

37. Validación experimental de la sincronización de 2 neuronas, usando el controlador lineal (78). 59

Capítulo 1. Introducción

Las neuronas son un componente esencial en el cerebro. Estudios recientes han mostrado que el cerebro humano tiene, en promedio, 86 billones de neuronas (Azevedo *et al.*, 2009) y éstas están conectadas en redes gigantes. Por ejemplo, la corteza visual primaria contiene 200 millones de neuronas, (Haken, 2007). Además, se ha encontrado que grupos de neuronas en el cerebro humano se pueden ser sincronizar, por ejemplo, mediante emociones y la promoción de la interacción social (Nummenmaa *et al.*, 2012).

Las neuronas transmiten información en forma de potenciales, ya sea mediante sinapsis química o sinapsis eléctrica. En la literatura se muestra que ha sido posible realizar mediciones "In-vivo" e "In-vitro" de los potenciales de la membrana. En la Figura 1 se muestran grabaciones del potencial de la membrana de neuronas corticales visuales primarias de gatos anestesiados (Sanchez-Vives y McCormick, 2000), utilizando microelectrodos.

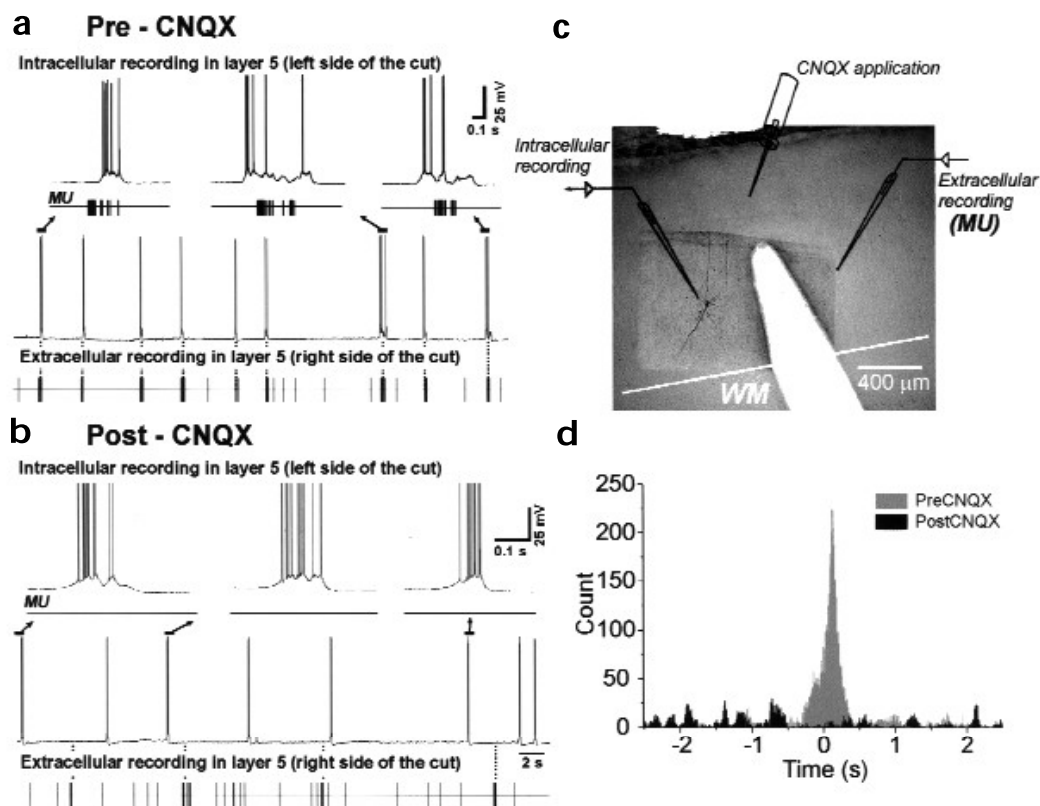


Figura 1. Grabación de neuronas corticales visuales primarias de gatos anestesiados. Fuente: (Sanchez-Vives y McCormick, 2000).

1.1. Estudios de neuronas desde la perspectiva de dinámica y control

Para estudiar el comportamiento dinámico tanto individual como colectivo de las neuronas, de forma no invasiva, se han desarrollado diferentes modelos matemáticos capaces de reproducir el comportamiento dinámico o al menos la forma de onda que se observan en las neuronas, por ejemplo, el modelo neuronal de Hodgkin-Huxley (Hodgkin y Huxley, 1952), el modelo de Morris-Lecar (Morris y Lecar, 1981), el modelo de FitzHugh-Nagumo, el modelo de Hindmarsh-Rose (Hindmarsh y Rose, 1984) y el modelo de Izhikevich (Izhikevich, 2003).

La variable física más importante de la neurona es el potencial de la membrana, el cual determina el comportamiento dinámico de la neurona (Koch, 2004). Dentro de los comportamientos neuronales dinámicos de mayor interés se puede mencionar el espiguelo ('spiking') y paquetes de espigas ('bursting') (Reimbayev *et al.*, 2017). Y desde el punto de vista de sistemas dinámicos, es de interés estudiar cómo se da la transición de un comportamiento a otro, por ejemplo a través de una bifurcación (Zhao y Gu, 2017; Izhikevich, 2000; Wu *et al.*, 2012).

Por otra parte, los esfuerzos de investigación también se han orientado al estudio del comportamiento emergente y el comportamiento sincronizado en redes de neuronas. Por ejemplo, en (Woodman y Jirsa, 2013) se presenta un estudio que demuestra que la asimetría en el acoplamiento en una red de neuronas es el mecanismo responsable de la aparición del comportamiento emergente, es decir, aquel comportamiento que sólo aparece cuando grupos de neuronas están conectadas, pero que no se puede observar en una sola neurona aislada. Además, se han derivado diversos esquemas de análisis para estudiar la aparición de comportamiento síncrono de redes de neuronas, los cuales se basan en la noción de semi-pasividad y convergencia (Steuer *et al.*, 2009).

Finalmente, se pueden encontrar en la literatura ejemplos de redes neuronales usados en aplicaciones de control. Por ejemplo, en (Manoonpong *et al.*, 2005) se muestra el control de una máquina de 4 piernas que camina usando una pequeña red neuronal la cual permite controlar el comportamiento de la máquina. Por otra parte, en (Lewis *et al.*, 1996) se reporta el control de un brazo robótico usando una red neuronal y en (Nagata *et al.*, 1990) se documenta el diseño de un controlador para un robot móvil usando 12 sensores que monitoreen las condiciones internas y los cambios del entorno.

1.2. Neuronas electrónicas y sus aplicaciones

Típicamente, los modelos neuronales se implementan computacionalmente, ya que es la manera más sencilla y práctica de estudiar su comportamiento dinámico. Sin embargo, en aplicaciones en tiempo real, se pueden presentar cuellos de botella. En dichos casos, una implementación electrónica resuelve el problema, ya que ésta presenta una respuesta mucho más rápida que la obtenida en una simulación por computadora (Wagemakers y Sanjuán, 2013). Además, la implementación electrónica de un modelo neuronal permite investigar la robustez de los comportamientos dinámicos observados ante variaciones en parámetros del modelo y/o presencia de señales externas como lo es el ruido, el cual inevitablemente está presente, a mayor o menor grado, en una aplicación con circuitos electrónicos.

Por esta razón, se han desarrollado diversos circuitos electrónicos los cuales están basados en modelos neuronales clásicos. Por ejemplo, en (Hu *et al.*, 2016) se presenta la implementación electrónica del modelo de Morris-Lecar, en (Equihua y Ramirez, 2018) se presenta un circuito electrónico que emula la dinámica del modelo neuronal de Hindmarsh-Rose y en (Linares-Barranco *et al.*, 1991) se implementa el modelo de FitzHugh-Nagumo con circuitos CMOS.

Por otra parte, en la literatura se encuentran reportadas diferentes aplicaciones de las neuronas electrónicas. Por ejemplo, en (Janglová, 2004), se muestra el control de un robot móvil usando redes neuronales; en (Vromen *et al.*, 2016), se presenta un procedimiento de entrenamiento adaptativo para el control de una red neuronal y se validan los resultados experimentalmente usando un robot móvil y una red de neuronas electrónicas; en (Ayers y Witting, 2007) y (Ayers *et al.*, 2010), se desarrolla un controlador de robots submarinos inspirados en principios de diseño biométricos, usando el modelo neuronal de Hindmarsh-Rose con una arquitectura híbrida.

Cabe mencionar que en la implementación de los modelos neuronales se han observado diferencias inevitables entre las respuestas dadas por las neuronas electrónicas y aquellas predichas por el modelo. Estas diferencias se deben, por ejemplo, a tolerancias de fabricación en los componentes y/o al ruido, entre otros factores.

1.3. Panorama general de esta tesis

Esta tesis se enfoca en el estudio, diseño, construcción y sincronización de “neuronas electrónicas” desde la perspectiva de sistemas dinámicos. En particular, se propone una modificación al modelo neuronal de Izhikevich y se construye una neurona electrónica analógica, con componentes discretos, inspirada en el modelo modificado.

1.3.1. Motivación

Existen diversos modelos matemáticos que permiten reproducir el comportamiento dinámico observado en (redes de) neuronas en el cerebro. Estos modelos permiten estudiar, de manera no invasiva, cómo es la interacción entre las neuronas y cómo su comportamiento se afecta ante distintos impulsos nerviosos y/o señales de entrada. Además, muchos de estos modelos se pueden implementar de manera electrónica, lo cual permite investigar la robustez de los comportamientos que se observan ante variaciones en los parámetros del modelo y/o la influencia de perturbaciones externas (por ejemplo ruido). De estos modelos, el modelo de Izhikevich es uno de los más "simples", en el sentido de que está descrito por 2 ecuaciones diferenciales y, a la vez, es uno de los más completos en el sentido que permite reproducir la mayoría de los comportamientos que se observan en una neurona. Sin embargo, no existe una implementación electrónica de este modelo.

Por lo tanto, esta tesis se enfoca en la implementación del modelo de Izhikevich usando circuitos electrónicos electrónicos, ya que como se mencionó anteriormente, dicha implementación permitirá validar, de manera experimental, de los comportamientos dinámicos del modelo de Izhikevich.

1.3.2. Hipótesis

En principio, el modelo de Izhikevich no sería físicamente implementable con componentes analógicos debido a que contiene una función de conmutación *estática* con

pendiente infinita. Una posible solución a este problema es reemplazar la función estática de conmutación por una función *dinámica*, adecuadamente diseñada, de tal manera que el modelo pueda implementarse con circuitería analógica y sin modificar de manera significativa el comportamiento dinámico del modelo original.

1.3.3. Objetivo general

Contribuir al estudio y conocimiento de modelos neuronales por medio del diseño y construcción de neuronas electrónicas basadas en el modelo neuronal de Izhikevich usando circuitería analógica.

1.3.4. Objetivos particulares

- Reemplazar la función de conmutación estática del modelo original de Izhikevich por una función de conmutación dinámica adecuadamente diseñada.
- Diseñar y construir un circuito electrónico del modelo modificado de Izhikevich que sea capaz de reproducir todos o la mayoría de los comportamientos observados en el modelo original.
- Estudiar de manera analítica, numérica y experimental la aparición del comportamiento síncrono en un par de neuronas tipo Izhikevich.

1.3.5. Contribuciones

La principal contribución de este trabajo de tesis es obtener un circuito electrónico analógico que emule el comportamiento dinámico de un modelo neuronal reportado en la literatura. Dicho circuito electrónico podrá ser usado en estudios y permitirá validar experimentalmente futuros desarrollos teóricos.

En la parte de análisis, la contribución de esta tesis es una nueva función de conmutación para el modelo de Izhikevich, la cual permite representar la dinámica del modelo

mediante un autómata híbrido con dos modos discretos de operación. La función aquí propuesta tiene la ventaja de que puede ser implementada, de manera sencilla, con circuitos electrónicos simples. También se pudo extender el cálculo de los exponentes transversos de Lyapunov para sistemas con dos modos de operación.

1.3.6. Productos generados

Se sometió el artículo titulado: “A modified hybrid Izhikevich neuron: modeling, synchronization, and experiments” al congreso: “21st IFAC World Congress in Berlin, Germany, July 12-17, 2020”, del cual los resultados se publicarán el mes de febrero del 2020. El artículo está basado en los Capítulos 3, 4 y 5 de esta tesis.

1.3.7. Estructura de esta tesis

Esta tesis está organizada de la siguiente manera.

En el Capítulo 2 se presentan diferentes modelos neuronales clásicos que emulan el comportamiento dinámico observado en las neuronas. También se presenta una definición formal de sincronización y se describen las herramientas de análisis utilizadas para determinar la estabilidad del comportamiento síncrono, así como una breve introducción a los sistemas híbridos.

En el Capítulo 3 se presenta el análisis y diseño teórico del modelo modificado de Izhikevich, como un sistema híbrido con dos modos de operación. La respuesta en el tiempo del modelo modificado se compara con el modelo original por medio de simulaciones numéricas.

Posteriormente, en el Capítulo 4 se discuten el diseño e implementación en circuitería analógica del modelo neuronal introducido en el Capítulo 3. Además se presenta un estudio experimental en el que se compara la respuesta del circuito electrónico con la respuesta obtenida en simulaciones numéricas con los programas Matlab y Multisim.

El Capítulo 5 se enfoca en el estudio analítico, numérico y experimental de la sincronización de 2 neuronas electrónicas. En el análisis se utiliza la teoría de perturbaciones

evanescentes y los exponentes transversos de Lyapunov. Además, se presenta un estudio numérico relativo a la aparición de sincronización en una red de 5 neuronas.

Las conclusiones generadas durante el desarrollo de esta tesis se describen en el Capítulo 6.

Finalmente, la sección de los anexos presenta el reporte derivado de mi estancia de investigación en la Universidad Tecnológica de Eindhoven (TU/E) y el artículo de congreso derivado de este proyecto de tesis.

Capítulo 2. Preliminares

En este capítulo se presentan diferentes modelos neuronales, tanto unos biológicamente inspirados, como algunos otros desarrollados para reproducir las formas de onda de comportamientos dinámicos que se observan en una neurona. Se pone un particular énfasis en el modelo de Izhikevich, estudiado en esta tesis.

Por otra parte, se presenta una definición formal de sincronización y se introducen las herramientas matemáticas de análisis utilizadas en capítulos posteriores para determinar la estabilidad de la solución síncrona en pares de neuronas. Dichas herramientas son los exponentes transversos de Lyapunov y la teoría de estabilidad de Lyapunov de sistemas perturbados.

Finalmente, el capítulo presenta una breve introducción a los sistemas híbridos.

2.1. Modelos neuronales clásicos

A lo largo del tiempo, se han propuesto diferentes modelos matemáticos capaces de reproducir el comportamiento dinámico de una neurona. A continuación, se presenta una breve descripción de los más utilizados.

2.1.1. Modelo de Hodgking-Huxley

En 1952, Alan Lloyd Hodgkin and Andrew Fielding Huxley propusieron un modelo matemático el cual describe el flujo de corriente eléctrica a través de la membrana superficial de una fibra nerviosa, (Hodgkin y Huxley, 1952). En 1963, A.L. Hodgkin, A.F. Huxley y Sir John Carew Eccles recibieron el premio nobel de fisiología o medicina por este trabajo. Las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de este modelo neuronal son las siguientes:

$$\begin{aligned}
C\dot{x}_1 &= g_{Na}x_2^3x_3(E_{Na} - x_1) + g_kx_4^4(E_k - x_1) + g_l(E_l - x_1) + I, \\
\dot{x}_2 &= \alpha_2(1 - x_2) - \beta_2x_2, \\
\dot{x}_3 &= \alpha_3(1 - x_3) - \beta_3x_3, \\
\dot{x}_4 &= \alpha_4(1 - x_4) - \beta_4x_4,
\end{aligned} \tag{1}$$

con parámetros

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{0.1(-x_1 + 25)}{\exp\left(\frac{-x_1 + 25}{10}\right) - 1}, & \alpha_3 &= 0.07 \exp\left(\frac{-x_1}{20}\right), & \alpha_4 &= \frac{0.1(-x_1 + 10)}{\exp\left(\frac{-x_1 + 10}{10}\right) - 1}, \\
\beta_2 &= 4 \exp\left(\frac{-x_1}{18}\right), & \beta_3 &= \frac{1}{\left(\exp\left(\frac{-x_1 + 30}{10}\right) + 1\right)}, & \beta_4 &= 0.125 \exp\left(\frac{-x_1}{80}\right), \\
E_{Na} &= 115, & E_k &= -12, & E_l &= 10.6, \\
g_{Na} &= 120, & g_k &= 36, & g_l &= 0.3, \\
C &= 1, & I &= 10,
\end{aligned}$$

donde

- x_1 Es el desplazamiento del potencial de la membrana desde su potencial de reposo (depolarización negativa) [mV],
- I Es la densidad de corriente de la membrana (corriente sináptica) [$\mu A/cm^2$],
- C Es la capacitancia de la membrana por unidad de área [$\mu F/cm^2$],
- g_{Na} , g_k y g_l son conductancias de los iones de sodio, potasio y la generada por la corriente de fuga debido al cloro y otros iones, respectivamente, [$mmho/cm^2$]
- E_{Na} y E_k Son los potenciales de equilibrio para los iones de sodio y potasio
- E_l Es el potencial al cual la 'fuga de corriente' es cero debido al cloro y otros iones
- x_2 Representa la proporción de moléculas de sodio activadoras en el interior de la membrana, y $(1 - x_2)$ en el exterior [mV]

- x_3 Es la proporción de moléculas de sodio inactivadoras en el exterior de la membrana, y $(1 - x_3)$ en el interior [mV]
- $\alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ y β_3 Representan la tasa de transferencia de moléculas en ambas direcciones [$msec^{-1}$]
- x_4 Representa la proporción de potasio en una cierta ubicación (por ejemplo, dentro de la membrana), $1 - x_4$ representa la proporción en algún otro lugar (por ejemplo, fuera de la membrana) [mV]
- α_4 Determina la tasa de transferencia de potasio que entra a la membrana [$msec^{-1}$]
- β_4 Determina la tasa de transferencia de potasio que sale de la membrana [$msec^{-1}$]

Hodgking y Huxley en su artículo (Hodgkin y Huxley, 1952), realizan una comparación de los resultados de simulaciones numéricas del sistema (1) con señales obtenidas de un axón de calamar gigante.

Los resultados en simulaciones del modelo neuronal de Hodgkin-Huxley (1) se muestran en la Figura 2, con los valores paramétricos arriba descritos.

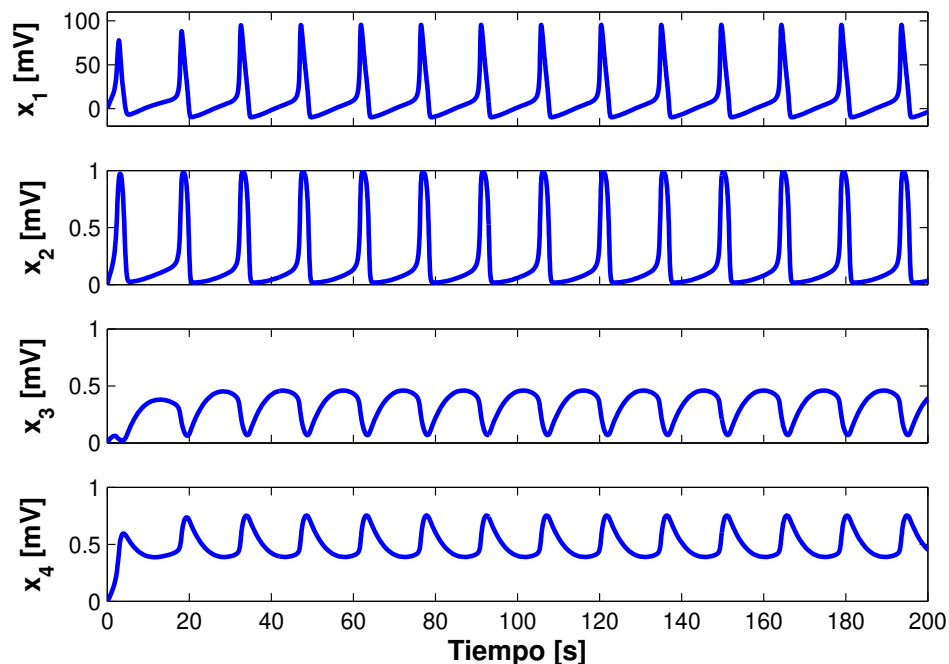


Figura 2. Respuesta en el tiempo del modelo de Hodgkin-Huxley dado en la Ec. (1).

2.1.2. Modelo de FitzHugh-Nagumo

Debido a la complejidad del modelo neuronal de Hodgkin-Huxley (1) era complicado realizar simulaciones numéricas usando computadoras analógicas o digitales (Nagumo *et al.*, 1962). FitzHugh simplificó el modelo de Hodgkin-Huxley (1) a partir de un análisis del oscilador de Van der Pol (FitzHugh, 1961) y propuso el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= c \left(x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 + x_2 + I \right), \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{c} (a - x_1 - bx_2),\end{aligned}\tag{2}$$

donde a , b y c son constantes, las cuales satisfacen las siguientes condiciones:

$$0 < b < 1, \quad b < c^2, \quad 1 - \frac{2}{3}b < a < 1.$$

En la Figura 3 se muestran los resultados de las simulaciones del modelo de FitzHugh-Nagumo (2) con parámetros: $a = 0.7$, $b = 0.8$, $c = 3$ e $I = -0.4$.

2.1.3. Modelo de Morris-Lecar

En 1981, Catherine Morris y Harold Lecar propusieron un modelo matemático que describe las oscilaciones de la tensión de una fibra muscular gigante de percebe, (Morris y Lecar, 1981). El modelo es el siguiente:

$$\begin{aligned}C\dot{x}_1 &= g_L(V_L - x_1) + g_{Ca}M_\infty(V_{Ca} - x_1) + g_Kx_2(V_K - x_1) + I, \\ \dot{x}_2 &= \lambda_N(N_\infty - x_2),\end{aligned}\tag{3}$$

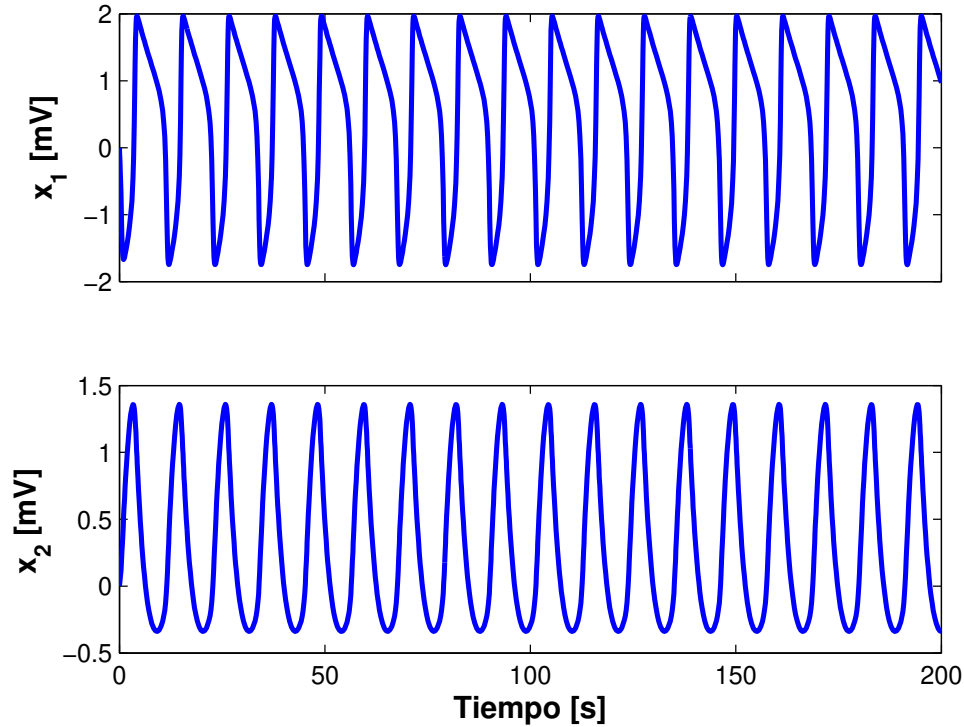


Figura 3. Series del tiempo del modelo de FitzHugh-Nagumo (2).

donde los valores numéricos de los parámetros son los siguientes:

$$M_{\infty} = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{x_1 - V_1}{V_2} \right) \right] \quad N_{\infty} = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{x_1 - V_3}{V_4} \right) \right] \quad \lambda_N = \bar{\lambda}_N \cosh \left(\frac{x_1 - V_3}{2V_4} \right)$$

$$V_{Ca} = 100 \quad V_k = -70 \quad V_L = -50$$

$$g_{Ca} = 6 \quad g_k = 12 \quad g_L = 2$$

$$C = 20 \quad I = 50 \quad V_1 = 0$$

$$V_2 = 15 \quad V_3 = 10 \quad V_4 = 10$$

Por otra parte, las variables y parámetros en el modelo de Morris Lecar son:

- x_1 Es el potencial de la membrana [mV]
- x_2 Representa la porción de canales abiertos de potasio (k^+)
- I Es la densidad de corriente de la membrana (corriente sináptica) [$\mu A/cm^2$]
- C Es la capacitancia de la membrana [$\mu F/cm^2$]

- g_L, g_{Ca} y g_k Son los valores de conductancia máxima o instantánea para las vías de fuga, calcio (Ca^{++}) y potasio (k^+), [$mmho/cm^2$]
- V_L, V_{Ca} y V_k Son los potenciales de equilibrio correspondiente a las conductancias de fuga, calcio (Ca^{++}) y potasio (k^+), [mV]
- M_∞ y N_∞ son la porción de canales de Calcio (Ca^{++}) y potasio (k^+) abiertos, en estado estacionario
- λ_N constantes de velocidad máxima para la apertura del canal de potasio (k^+) [s^{-1}]

Los resultados de la simulación del modelo neuronal de Morris-Lecar (3) con los parámetros descritos anteriormente se muestran en la Figura 4.

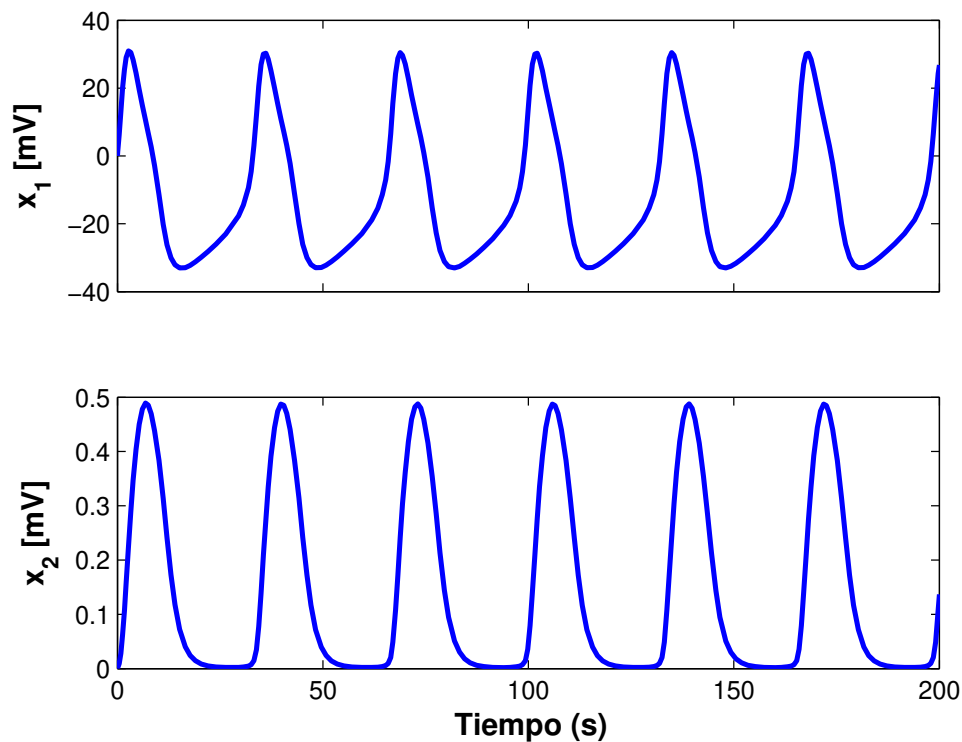


Figura 4. Series del tiempo de las variables x_1 y x_2 del modelo de Morris-Lecar (3).

2.1.4. Modelo de Hindmarsh-Rose

En 1979, J. L. Hindmarsh participó en un proyecto el cual consistía en modelar la sincronización de dos neuronas de caracol. Implementar el modelo de Hodgkin-Huxley

(1) era muy complicado en ese tiempo, y usar el modelo de FitzHugh (2) no era lo suficientemente preciso. De acuerdo con (FitzHugh, 1961), un problema con este modelo era que sus ecuaciones no proveían una descripción realista del “espigado” rápido de la neurona comparado al largo intervalo entre espigas (Hindmarsh y Cornelius, 2005). Por lo tanto, J. L. Hindmarsh y R. M. Rose comenzaron a desarrollar su propio modelo.

En 1982, Hindmarsh y Rose propusieron un modelo de segundo orden (Hindmarsh y Rose, 1982) basándose en el modelo de FitzHugh (2). Con el objetivo de crear un modelo neuronal que pudiera cambiar su comportamiento, de reposo estable a un comportamiento dinámico (por ejemplo, el espigado), mediante la aplicación de un pulso de corriente positivo de corta duración, desarrollaron el siguiente modelo neuronal, el cual fue publicado en 1984 (Hindmarsh y Rose, 1984)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + bx_1^2 - ax_1^3 - x_3 + I, \\ \dot{x}_2 &= c - dx_1^2 - x_2, \\ \dot{x}_3 &= r[s(x_1 - x_0) - x_3],\end{aligned}\tag{4}$$

donde $x_1 \in \mathbb{R}$ es el potencial de la membrana (mV), $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ son variables internas (no físicas), $I \in \mathbb{R}$ es la corriente externa aplicada a la neurona, con parámetros constantes $a, b, c, d, r, s \in \mathbb{R} > 0$, $r \ll 1$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ es el potencial de reposo del sistema.

Los valores de los parámetros de este modelo, de acuerdo a (Hindmarsh y Rose, 1982) son

$$\begin{aligned}a &= 1, & b &= 3, & c &= 1, & d &= 5, \\ r &= 0.005, & s &= 4, & x_0 &= -1.6.\end{aligned}$$

Variando la densidad de la corriente de la membrana (corriente sináptica I), se logran reproducir diferentes comportamientos dinámicos en este modelo. Por ejemplo, en la Figura 5, se muestra el comportamiento de espigado obtenido al fijar $I = 4$. Por otra parte, si la corriente sináptica se fija en $I = 3$, se logra reproducir el comportamiento de ráfaga, tal y como se muestra en la Figura 6.

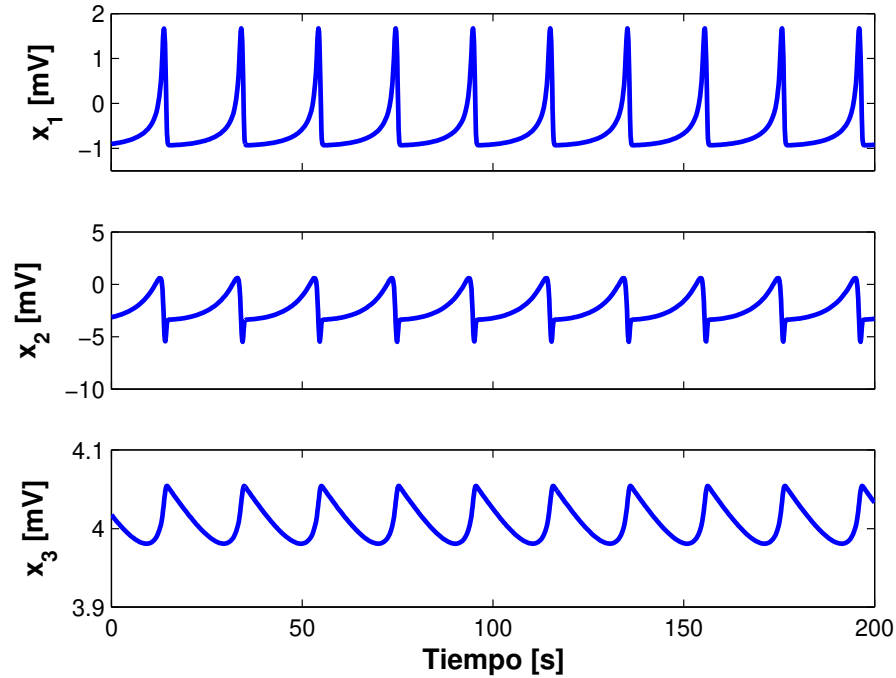


Figura 5. Series del tiempo del modelo de Hindmarsh-Rose (4) en espigado, obtenidas con $I = 4$.

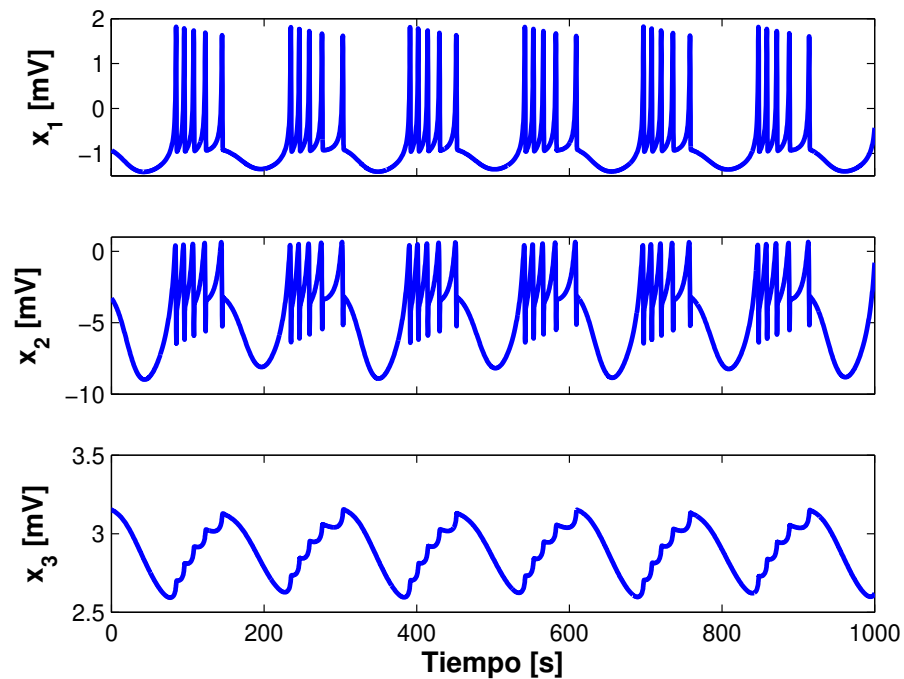


Figura 6. Con $I = 3$, el modelo de Hindmarsh-Rose (4) exhibe ráfaga.

Finalmente, en la Figura 7 se muestra un comportamiento dinámico “aperiódico” con $I = 3.25$, donde el número de picos cambia entre paquetes, asimismo, este comportamiento es sensible a las condiciones iniciales del sistema.

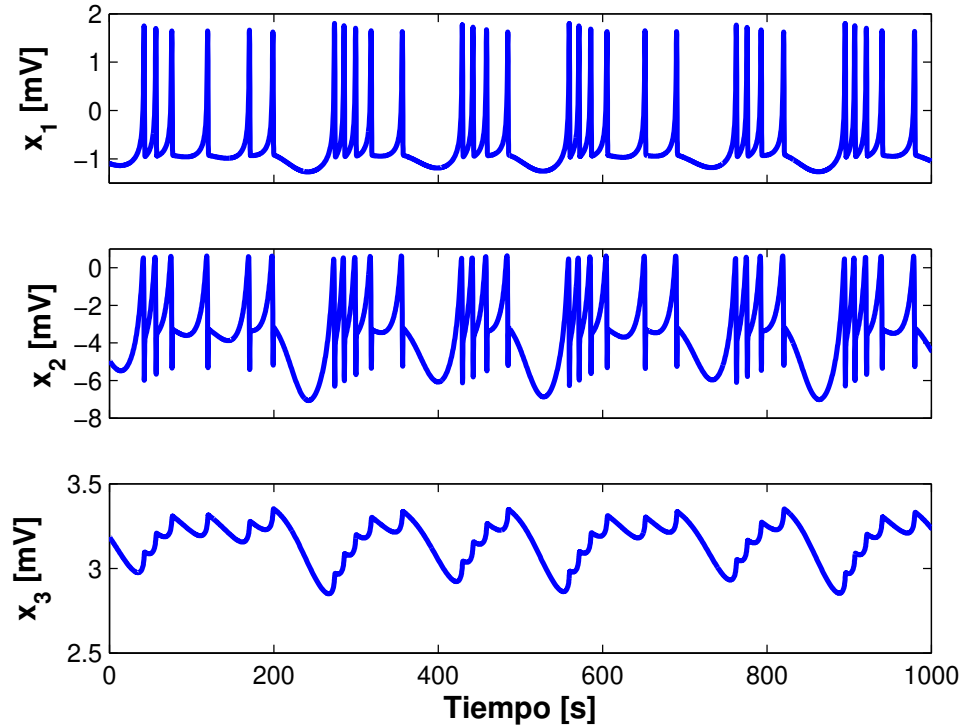


Figura 7. Ráfagas aperiódicas en el modelo de Hindmarsh-Rose (4), obtenido con $I = 3.25$.

2.2. Modelo de Izhikevich

Eugene M. Izhikevich publicó un modelo matemático de segundo orden (Izhikevich, 2003), que es computacionalmente eficiente comparado con los modelos “integrate-and-fire” (Izhikevich, 2004). Además, puede reproducir las formas de onda observadas en la corteza motora de una rata. El modelo se describe mediante las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0.04x_1^2 + 5x_1 + 140 - x_2 + I, \\ \dot{x}_2 &= a(bx_1 - x_2), \end{aligned} \tag{5}$$

con una función de conmutación de reinicio auxiliar descrita por

$$\text{si } x_1 \geq r_1 \text{ mV, entonces } \begin{cases} x_1 \leftarrow c, \\ x_2 \leftarrow x_2 + d, \end{cases} \quad (6)$$

donde x_1 representa el potencial de la membrana, x_2 representa una variable de recuperación de la membrana que explica la activación de corrientes iónicas de potasio (k^+) y la inactivación de las corrientes iónicas de sodio (Na^+), asimismo, proporciona una retroalimentación negativa a x_1 . Cuando el potencial de la membrana alcanza el valor de umbral r_1 ($30mV$), x_1 y x_2 presentan un reinicio acorde a (6). Las corrientes inyectadas o la corriente sináptica se representan con la variable I , el parámetro a describe la escala de tiempo de la variable de recuperación x_2 , b describe la sensibilidad de la variable de recuperación x_2 a las fluctuaciones del potencial de la membrana x_1 , c y d son los parámetros que describen el valor de reinicio del potencial de la membrana x_1 y de la variable de recuperación x_2 , respectivamente.

Se pueden obtener diferentes comportamientos modificando los parámetros en las ecuaciones del modelo de Izhikevich. Por ejemplo, en la Figura 8 se muestran las series de tiempo del modelo de Izhikevich en comportamiento de espigado y en la Figura 9 se muestra el comportamiento ráfagas.

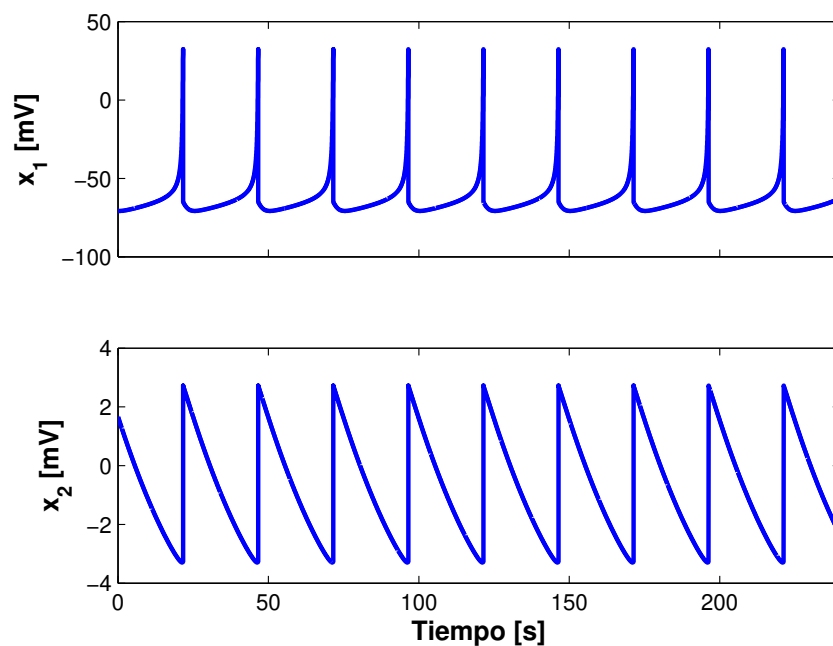


Figura 8. Comportamiento de espigado en el modelo de Izhikevich (5), con $a = 0.02$, $b = 0.2$, $c = -65$, $d = 6$, $I = 15$.

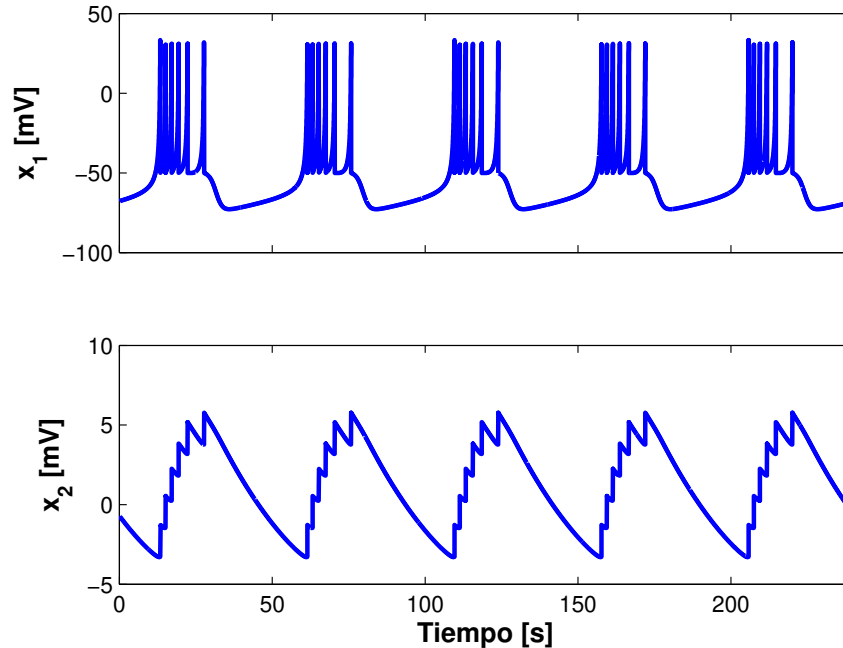


Figura 9. Solución del modelo de Izhikevich (5) en ráfagas, con $a = 0.02$, $b = 0.2$, $c = -50$, $d = 2$, $I = 15$.

2.2.1. Discusión sobre la implementación del modelo de Izhikevich en circuitos electrónicos

La función de reinicio del modelo de Izhikevich presenta un reacondicionamiento instantáneo de los valores de las variables x_1 y x_2 cuando el potencial de la membrana x_1 alcanza cierto umbral r_1 , tal y como se muestra en la ecuación (6). Este reinicio puede ser implementado de manera sencilla en simulaciones numéricas. Sin embargo, su implementación usando circuitería analógica se complica de manera significativa (Korkmaz *et al.*, 2016; Rangan *et al.*, 2010; van Schaik *et al.*, 2010).

Para lograr su implementación física usando circuitos electrónicos, en esta tesis se propone modificar la ecuación (6), que modela el reinicio instantáneo del modelo original de Izhikevich, por un reinicio dinámico (descrito por ecuaciones diferenciales parciales), sin modificar significativamente el modelo original de Izhikevich.

2.3. Sincronización

La sincronización, en su definición más general, es la acción y efecto de hacer que coincidan en el tiempo dos o más movimientos o fenómenos (RAE). Otra definición de sincronización, que se presenta en (Pikovsky *et al.*, 2003), es el ajuste de ritmos de objetos o sistemas oscilantes debido a una interacción débil entre ellos.

Para definir sincronización desde la perspectiva de dinámica y control, considérese una red de sistemas dinámicos de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (7)$$

donde $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados correspondiente al nodo i . Los nodos en la red interactúan por medio de $\mathbf{u}^i \in \mathbb{R}^m$; la función $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ describe la dinámica del nodo aislado y N es el número de nodos.

Definición 2.3.1 *Se dice que los subsistemas (7) se encuentran sincronizados (asintóticamente) en fase si las soluciones \mathbf{x}^i con condiciones iniciales $\mathbf{x}^i(0)$ satisfacen (8), (Pena Ramirez, 2013).*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}^i(t) := \mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq j. \quad (8)$$

Definición 2.3.2 *Se dice que los subsistemas (7) se encuentran prácticamente sincronizados en fase si las soluciones \mathbf{x}^i con condiciones iniciales $\mathbf{x}^i(0)$ satisfacen*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}^i(t) := |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j| \leq \epsilon, \quad \epsilon > 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq j. \quad (9)$$

2.3.1. Herramientas de análisis del comportamiento síncrono

Las herramientas que se usan para el estudio del comportamiento síncrono en una red neuronal se realiza mediante la definición de perturbaciones evanescentes (Khalil, 2002) y la función maestra de estabilidad (Pecora y Carroll, 1998).

2.3.1.1. Estabilidad de sincronización de sistemas perturbados

Esta sección presenta un análisis basado en la estabilidad de sistemas perturbados (Khalil, 2002) para analizar la estabilidad de la sincronización de dos sistemas acoplados en la configuración unidireccional, también llamada configuración amo-esclavo.

Considérese que el sistema amo esté descrito por

$$\Sigma_M : \begin{cases} \dot{x}_m = F(x_m), \\ y_m = Cx_m, \end{cases} \quad (10)$$

y a su vez, el sistema esclavo, esté definido por

$$\Sigma_S : \begin{cases} \dot{x}_s = F(x_s) + Bu_s, \\ y_s = Cx_s, \end{cases} \quad (11)$$

donde $x_i \in \mathbb{R}^n$ y $y_i \in \mathbb{R}$, $i = m, s$, son los estados y las salidas de los sistemas amo y esclavo, respectivamente. Por otra parte, $B \in \mathbb{R}^n$ es el vector de entrada del sistema esclavo, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ es el vector de salida y la función $F(x_i)$ está definida por

$$F(x_i) = Ax_i + g(x_i), \quad (12)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante y $g(x_i)$ es un vector que contiene las no linealidades del sistema, $i = m, s$.

La señal de control $u_s \in \mathbb{R}$ del sistema esclavo, está definida por

$$u_s = k(y_m - y_s) = kC(x_m - x_s), \quad (13)$$

donde $k \in \mathbb{R}_+$ es la fuerza de acoplamiento.

El problema de sincronización se reduce a encontrar un valor adecuado de la fuerza de acoplamiento k , de modo que el sistema amo y el sistema esclavo se sincronicen, al menos localmente, de modo que se cumpla lo siguiente

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x_m(t) - x_s(t)) = 0. \quad (14)$$

Entonces, al definir el error de sincronización como $e = x_m - x_s$, se obtiene la siguiente dinámica del error para los sistemas acoplados (10) y (11)

$$\begin{aligned} \dot{e} &= F(x_m) - F(x_s) - kBC(x_m - x_s), \\ &= Ax_m + g(x_m) - Ax_s - g(x_s) - kBCe, \\ &= \underbrace{(A - kBC)}_{\bar{A}} e + g(e), \end{aligned} \quad (15)$$

donde $g(e) = g(x_m) - g(x_s) = g(x_m) - g(x_m - e)$. Dado que $g(0) = 0$, se tiene que el término $g(e)$ puede verse como una perturbación evanescente en e .

De los resultados presentados en (Khalil, 2002), se tiene que la condición para la estabilidad local de la dinámica del error (15), es que la matriz \bar{A} sea de Hurwitz y que el término $g(e)$ esté acotado tal que

$$\|g(e)\|_2 \leq \gamma \|e\|_2, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall e \in D, \quad (16)$$

donde γ es una constante no-negativa, D es un dominio que contiene el origen $e = 0$ y, $\|\cdot\|_2$ representa la norma Euclidiana. Como se presenta en Khalil (2002), la cota γ debe satisfacer

$$\gamma < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}, \quad (17)$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva y $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la solución a la ecuación de Lyapunov $P\bar{A} + \bar{A}^T P = -Q$. Por otra parte, λ_{\min} y λ_{\max} denotan el valor propio mínimo y máximo, respectivamente.

2.3.1.2. Función maestra de estabilidad

Considérese una red de sistemas dinámicos de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}^i) - k \sum_{j=1}^N G_{ij} \mathbf{w}(\mathbf{x}^j), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq j, \quad (18)$$

donde $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados correspondiente al nodo i , la función $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ describe la dinámica de un nodo aislado, G_{ij} determina la fuerza de interacción entre los nodos i y j , la función $\mathbf{w} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ describe qué variables se utilizan en el acoplamiento, k es la fuerza de acoplamiento y N es el número de nodos.

Definiendo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}^N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}^1) \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}^2) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}^N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(\mathbf{x}^1) \\ \mathbf{w}(\mathbf{x}^2) \\ \vdots \\ \mathbf{w}(\mathbf{x}^N) \end{bmatrix}, \quad \text{y } G = [G_{ij}], \quad (19)$$

la ecuación (18) se puede escribir en la siguiente forma compacta

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - k \mathbf{G} \otimes \mathbf{W}(\mathbf{x}), \quad (20)$$

donde el símbolo \otimes representa el producto de Kronecker.

Las siguientes suposiciones se consideran en el siguiente análisis con respecto a la matriz de conectividad \mathbf{G} :

A-1 Cada fila de la matriz de conectividad \mathbf{G} suman 0 y además, los elementos de la matriz fuera de la diagonal son no positivos, es decir

$$\sum_{j=1}^N G_{ij} = 0 \quad \text{y} \quad G_{ij} \leq 0 \quad \text{para } i \neq j. \quad (21)$$

A-2 La matriz de conectividad \mathbf{G} tiene un valor propio igual a cero y $N - 1$ valores

proprios positivos, los cuales pueden ser ordenados como sigue:

$$\gamma_1 = 0 < \gamma_2 \leq \gamma_3 \leq \dots \leq \gamma_N. \quad (22)$$

Además, se supone que la función $\mathbf{w}(\mathbf{x}^i)$ es una función lineal de la forma:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}^i) = \mathbf{C}\mathbf{x}^i, \quad (23)$$

donde $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante.

Bajo esta suposición, la ecuación (20) toma la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - k\mathbf{G} \otimes \mathbf{C}\mathbf{x}. \quad (24)$$

Una solución de la ecuación (24) es una solución síncrona si satisface

$$\mathbf{x}^1(t) = \mathbf{x}^2(t) = \dots = \mathbf{x}^N(t) = \mathbf{s}(t), \quad (25)$$

donde $\mathbf{s}(t)$ corresponde a la solución de un nodo aislado, es decir

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{f}(\mathbf{s}), \quad (26)$$

y además, se debe notar que $\mathbf{s}(t)$ es una solución exacta de la ecuación (24).

La estabilidad local de la solución síncrona (25) se puede investigar utilizando la función maestra de estabilidad. Como primer paso, la ecuación (18) se linealiza alrededor de $\mathbf{s}(t)$. Por lo que se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{f}(\mathbf{s}) - k \sum_{j=1}^N G_{ij} \mathbf{w}(\mathbf{s}) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^i} (\mathbf{x}^i - \mathbf{s}) - k \sum_{j=1}^N G_{ij} \frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^j} (\mathbf{x}^j - \mathbf{s}), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq j. \quad (27)$$

Reemplazando (23) en (27) y considerando la suposición [A – 2] se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{f}(\mathbf{s}) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^i} (\mathbf{x}^i - \mathbf{s}) - k \sum_{j=1}^N G_{ij} \mathbf{C}(\mathbf{x}^j - \mathbf{s}), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq j. \quad (28)$$

Después, se definen los siguientes errores de sincronización

$$\mathbf{e}^i := \mathbf{x}^i - \mathbf{s}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (29)$$

Usando las ecuaciones (26) y (28), se obtiene la siguiente dinámica del error

$$\dot{\mathbf{e}}^i = \dot{\mathbf{x}}^i - \dot{\mathbf{s}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^i} \mathbf{e}^i - k \sum_{j=1}^N G_{ij} \mathbf{C} \mathbf{e}^j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq j, \quad (30)$$

la cual puede ser escrita en la siguiente forma compacta

$$\dot{\mathbf{e}} = [\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Df}(\mathbf{s}) - k \mathbf{G} \otimes \mathbf{C}] \mathbf{e}, \quad (31)$$

donde $\mathbf{e} = [\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^N]^T$, $\mathbf{I}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es la matriz identidad, y $\mathbf{Df}(\mathbf{s})$ es el Jacobiano de la función \mathbf{f} evaluada en la solución síncrona $\mathbf{s}(t)$ (ver ecuación (26)). Esta ecuación se puede diagonalizar en bloques utilizando la siguiente transformación

$$\mathbf{e} = (\mathbf{V} \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mathbf{e}}, \quad (32)$$

donde $\bar{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^{nN}$ es un nuevo vector de estados, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es la matriz de vectores propios asociada a la matriz de conectividad \mathbf{G} , y $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad.

Aplicando esta transformación a la ecuación (31) y utilizando las propiedades del producto de Kronecker, se obtiene la siguiente dinámica del error diagonalizada a bloques

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}} = [\mathbf{I} \otimes \mathbf{Df}(\mathbf{s}) - k \mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{C}] \bar{\mathbf{e}}, \quad (33)$$

donde $\mathbf{\Gamma} := \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ es una matriz diagonal que contiene los valores propios σ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ de la matriz de conectividad \mathbf{G} .

Por lo tanto, se puede observar que la dinámica del error (33) consiste de N bloques de la forma

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}}^i = [\mathbf{Df}(\mathbf{s}) - k \sigma_i \mathbf{C}] \bar{\mathbf{e}}^i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (34)$$

Esta ecuación es conocida como la *ecuación variacional*.

Condiciones locales de estabilidad

Como paso final en el análisis de la estabilidad local de la solución síncrona (25) se calcula a partir de la i -ésima ecuación variacional (34) el i -ésimo máximo exponente transverso de Lyapunov, denotado por $\lambda_i^{\perp max}$, para cada ecuación variacional (34) de acuerdo a la siguiente expresión

$$\lambda_i^{\perp max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |\bar{\mathbf{e}}^i(t)| - \ln |\bar{\mathbf{e}}^i(0)|}{t}. \quad (35)$$

Entonces, se tienen las siguientes condiciones para la estabilidad local de la solución síncrona (25), véase Pikovsky *et al.* (2003):

- Si $\lambda_i^{\perp max} < 0$, para todo $i = 2, \dots, N$, la solución síncrona es localmente estable.
- Si $\lambda_i^{\perp max} > 0$, para al menos una $i = 2, \dots, N$, el estado de sincronización es inestable.

Nótese que los valores propios de la matriz de conectividad \mathbf{G} , juegan un papel importante en determinar la estabilidad de la solución síncrona (25).

2.4. Sistemas híbridos

El término *sistemas híbridos* se usó por primera vez en 1966 (Witsenhausen, 1966) en el contexto de sistemas dinámicos. Los sistemas dinámicos híbridos son una clase de sistemas complejos que implican la interacción de eventos discretos y variables dinámicas continuas (Lin *et al.*, 2014). Además, estos sistemas implican la interacción de diferentes tipos de dinámicas (Lygeros, 2004).

Un ejemplo de los sistemas híbridos en circuitería electrónica es aquel cuando la carga de los capacitores se interrumpe mediante interruptores.

2.4.1. Autómata híbrido

Un autómata híbrido es una representación de un sistema dinámico en la que se describe la evolución en el tiempo de los valores de un conjunto de variables de estado discretas y continuas del sistema híbrido (Lygeros, 2004).

Definición 2.4.1 *Un autómata híbrido H es una colección $H = (Q, X, f, Init, Inv, Dom, E, G, R)$ (Lin et al., 2014), donde:*

- $Q = \{q_1, q_2, \dots\}$ es un conjunto finito de estados discretos;
- $X \subseteq \mathbb{R}^n$ representa el espacio de estados donde las variables de estados continuos toman diferentes valores;
- $f : Q \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ asigna a cada estado discreto $q \in Q$ un campo vectorial $f(q, \cdot)$;
- $Init \subseteq Q \times X$ es un conjunto de estados iniciales;
- $Inv : Q \rightarrow 2^X$ asigna a cada estado discreto $q \in Q$ un conjunto $Inv(q) \subseteq X$ llamado conjunto invariante;
- $E \subseteq Q \times Q$ es un conjunto de transiciones discretas;
- $G : E \rightarrow 2^X$ asigna a cada transición discreta $(q, q') \in E$ un conjunto de guardas $G(q, q') \subset X$;
- $R : E \times X \rightarrow 2^X$ es un mapa de reset

En la descripción anterior 2^X denota las posibilidades de todos los subconjuntos de X .

En la Figura 10 se muestra la representación esquemática de un autómata híbrido con 3 modos discretos. Las condiciones iniciales del sistema están dadas por (q_0, x_0) . De este estado inicial, la dinámica del estado continuo x evoluciona acorde a la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(q_0, x), \quad \text{con } x(0) = x_0,$$

y el estado discreto q se mantiene constante $q(t) = q_0$. El sistema evoluciona en este modo siempre y cuando x esté contenida dentro del conjunto invariante $Inv(q_0)$. Si

en algún punto el estado continuo x alcanza el umbral $G(q_0, q_1)$, el estado discreto cambiará al modo discreto q_1 , y los estados continuos cambian del valor x^- a un nuevo valor x^+ con $(x^-, x^+) \in R(q_0, q_1)$. Después de esta transición, el sistema evoluciona en este modo hasta que se alcance el valor de la guarda $G(q_1, q_0)$ o $G(q_1, q_2)$ y el sistema irá al modo discreto q_0 o al modo discreto q_2 y el proceso entero se repite.

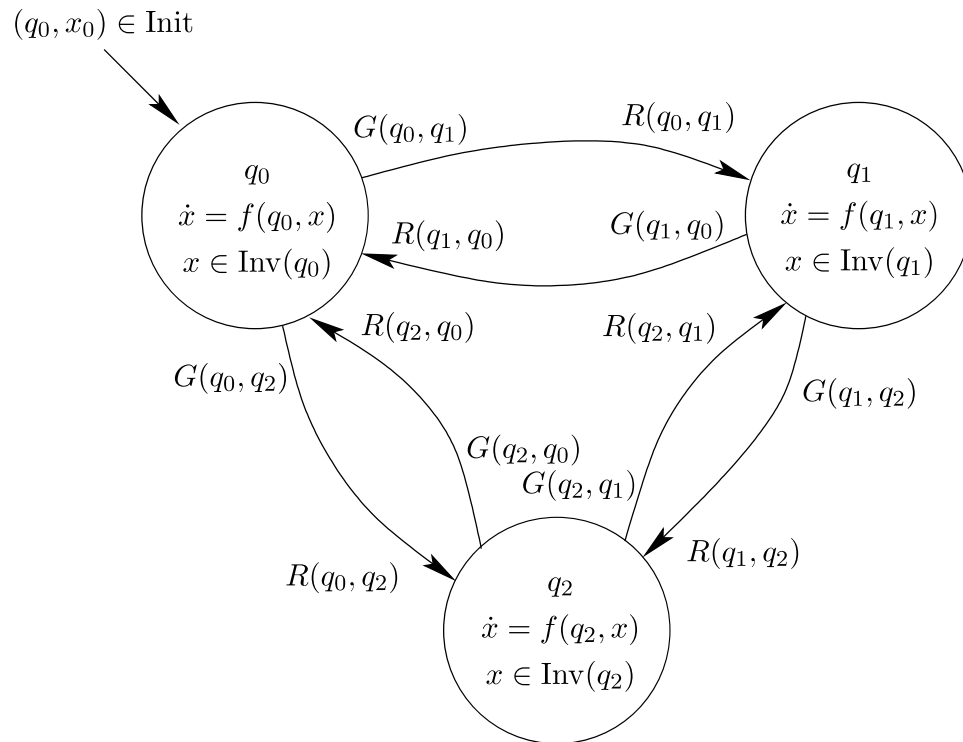


Figura 10. Representación esquemática de un autómata híbrido con 3 modos discretos. Cada nodo del grafo dirigido representa un modo (punto de operación) descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales. Las flechas indican las transiciones discretas posibles que corresponden a un cambio del modo. Fuente: (De Schutter et al., 2003).

Capítulo 3. Análisis y diseño teórico del modelo modificado de Izhikevich

En este capítulo se introduce una versión modificada del modelo neuronal de Izhikevich. En particular, con el fin de lograr una implementación de este modelo con circuitería analógica, se presenta el diseño de una función de conmutación dinámica, la cual reemplaza la función de conmutación estática del modelo original, descrita por la ecuación (6), sin modificar de manera significativa el comportamiento observado en el modelo original de Izhikevich.

Además, se presenta un estudio numérico con el fin de ilustrar el comportamiento dinámico del modelo modificado y los resultados obtenidos se comparan con aquellos obtenidos por el modelo original.

3.1. Modelado de la neurona como un sistema híbrido

El modelo original de Izhikevich, descrito por la ecuaciones (5)-(6), puede verse como un sistema híbrido con un modo de operación y se puede representar mediante un autómata híbrido, tal y como se muestra en la Figura 11. En esta figura se puede observar que el sistema opera dentro del modo q_1 hasta que el potencial de la membrana x_1 alcanza el umbral r_1 . Cuando esto pasa, instantáneamente el sistema se reinicia y regresa al modo q_1 , y se repite el proceso.

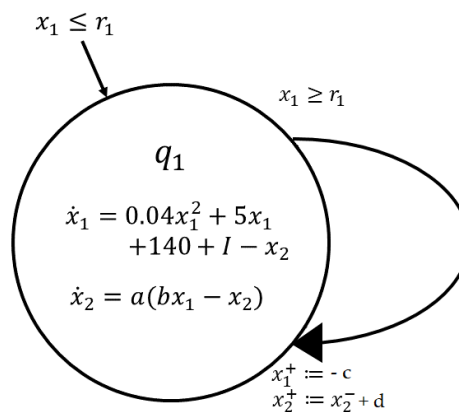


Figura 11. Representación del modelo neuronal de Izhikevich mediante un autómata híbrido.

3.2. Modificación propuesta del modelo de Izhikevich

En este trabajo se propone reemplazar la función de conmutación estática (6) del modelo original de Izhikevich por la siguiente función de conmutación dinámica

$$\text{si } x_1 \geq r_1, \text{ entonces } \begin{cases} \dot{x}_1 = -\gamma(x_1 - c), \\ \dot{x}_2 = \beta, \\ \dot{z} = 1, \end{cases} \quad (36)$$

donde x_1 y x_2 son las variables de estado del modelo de Izhikevich y z es una variable que denota el tiempo. Por otra parte, γ y β son parámetros constantes de diseño.

Al añadir dinámica al reinicio, el modelo de Izhikevich puede ser representado mediante dos modos discretos, tal y como se muestra en la Figura 12. En el modo q_1 el comportamiento dinámico del sistema está descrito por exactamente las mismas ecuaciones del modelo original de Izhikevich (5). Por otra parte, el modo q_2 representa el reinicio dinámico propuesto (36). Inicialmente, el sistema opera en el modo q_1

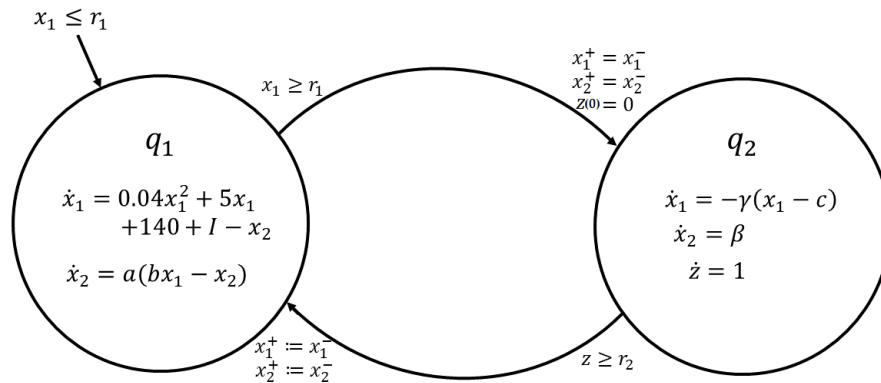


Figura 12. Representación del sistema mediante un autómata híbrido.

hasta que el potencial de la membrana x_1 alcance el valor de consigna r_1 y entonces el sistema cambia al modo q_2 , es decir, al reinicio dinámico. En el modo q_2 , el sistema evoluciona de acuerdo a las ecuaciones (36). El sistema opera en el modo de reinicio, es decir en el modo q_2 hasta que la variable de tiempo z alcance un valor de consigna

r_2 predefinido. Cuando esto suceda, el sistema regresará a operar al modo q_1 .

A continuación se presenta un desarrollo que permite entender cómo funciona el reinicio dinámico (36).

3.2.1. Análisis y diseño del potencial de la membrana

En el modelo original de Izhikevich, cuando se presenta el reinicio, es decir cuando $x_1 \geq r_1$ [mV], al potencial de la membrana x_1 se le asigna, de manera instantánea, el valor de c , de acuerdo a (6). Es esta reasignación instantánea lo que dificulta la implementación física del modelo antes mencionado.

En contraste, para el caso del reinicio dinámico (36), la reasignación del valor del estado x_1 a su valor de consigna c , se realiza de manera asintótica, en un intervalo de tiempo (t_δ), el cual se calcula a continuación.

Considérese la primera ecuación del sistema de ecuaciones (36), la cual está dada por

$$\text{si } x_1 \geq r_1 \text{ mV, entonces } \begin{cases} \dot{x}_1 = -\gamma(x_1 - c). \end{cases} \quad (37)$$

La solución de esta ecuación es

$$x_1(t) = (x_1(0) - c)e^{-\gamma t} + c. \quad (38)$$

En este punto, es importante recordar que se desea que la variable x_1 alcance el valor de consigna c , es decir, $x_1(t) = c$. Sin embargo, de (38) es claro ver que esto ocurrirá cuando $t \rightarrow \infty$. Esto presenta un problema, ya que se requiere que el reinicio se lleve a cabo de manera instantánea.

Por lo tanto, para resolver este problema se introduce un parámetro δ “suficientemente pequeño” ($\delta \ll 1$), de tal manera que el primer término del lado derecho de la ecuación (38) satisfaga

$$(x_1(0) - c)e^{\gamma t} = \delta. \quad (39)$$

Entonces, el tiempo al cual (39) se satisface, está dado por

$$t_\delta = -\frac{1}{\gamma} \ln\left(\frac{\delta}{x_1(0) - c}\right). \quad (40)$$

Si a t_δ se le asigna un valor deseado, entonces de (39) se puede obtener el valor de γ , es decir, se obtiene

$$\gamma = -\frac{1}{t_\delta} \ln\left(\frac{\delta}{x_1(0) - c}\right). \quad (41)$$

En la Figura 13, se muestra la evolución en el tiempo del potencial de la membrana. El sistema se inicializa en el modo q_1 , es decir, el comportamiento dinámico del modelo, del tiempo t_0 a t_1 , está gobernado por las ecuaciones (5). Cuando x_1 alcanza el umbral r_1 el sistema cambia al modo q_2 y evoluciona de acuerdo al reinicio dinámico (36). De esta manera, se logra reasignar asintóticamente del tiempo t_1 al t_2 , el valor del estado $x_1 = r_1$ al de $x_1 = c + \delta$. Después del intervalo de tiempo t_δ , el sistema regresa a operar al modo q_1 y el proceso entero se repite.

3.2.2. Análisis y diseño de la variable de recuperación de la membrana

Al momento del reinicio, el valor x_2 de la membrana del modelo original de Izhi-kevich es instantáneamente reasignado a $x_2 = x_2 + d$ (véase la segunda ecuación en (6)).

Sin embargo, para el caso del reinicio dinámico, de la segunda ecuación de (36) se tiene que

$$\text{si } x_1 \geq 30 \text{ [mV], entonces } \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_2 = \beta. \end{array} \right. \quad (42)$$

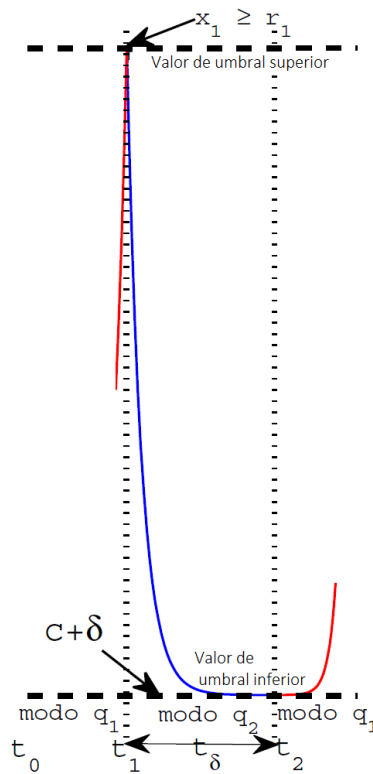


Figura 13. Evolución en el tiempo del potencial de la membrana durante el reinicio dinámico (37).

La solución de (42), está dada por

$$x_2(t) = \beta \int_{t_1}^{t_2} dt + x_2(t_1), \quad (43)$$

$$= \beta(t_2 - t_1) + x_2(t_1), \quad (44)$$

donde t_1 y t_2 son los instantes en que la neurona entra y sale del reinicio dinámico, respectivamente. Además, de la Figura 13 es claro ver que el tiempo que el sistema permanece en el modo q_2 , es decir en el modo de reinicio, está dado por t_δ , es decir

$$t_\delta = t_2 - t_1. \quad (45)$$

Por otra parte, de la función estática de reinicio (6), se desea que el valor de x_2 al tiempo t_δ sea

$$x_2(t_\delta) = x_2(t_1) + d. \quad (46)$$

De (44)-(46) se obtiene que

$$\beta = \frac{d}{t_\delta}. \quad (47)$$

La evolución en el tiempo de la dinámica que se propone para la membrana de recuperación, modelada por la ecuación (42), se muestra en la Figura 14. En esta figura se observa que del tiempo t_0 al tiempo t_1 el modelo opera en el modo q_1 , de acuerdo a la ecuación (5). Cuando la dinámica del sistema cambia al modo q_2 , la membrana de recuperación se modela mediante (42), logrando así que en un intervalo de tiempo (t_δ) se satisfaga que $x_2(t_2) = x_2(t_1) + d$.

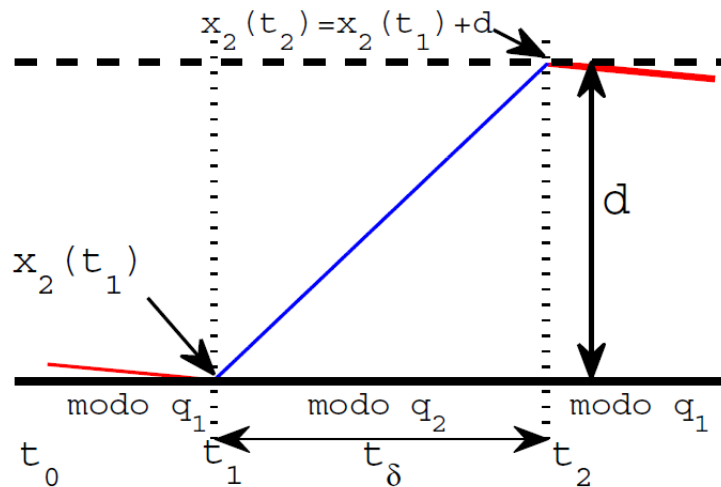


Figura 14. Evolución en el tiempo de la membrana de recuperación durante el reinicio dinámico (42).

3.2.3. Introducción de la variable del tiempo

Finalmente, para determinar el tiempo en el que se desea que la neurona se mantenga en el modo de reinicio q_2 , se ha introducido una nueva variable de tiempo z , véase (36), la cual se genera de manera dinámica por medio de la siguiente ecuación

$$\text{si } x_1 \geq 30 \text{ mV, entonces } \left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = 1, \end{array} \right. \quad (48)$$

cuya solución está dada por

$$z(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt, \quad (49)$$

$$= t_2 - t_1, \quad (50)$$

$$= t_\delta. \quad (51)$$

Es importante recordar que cuando se inicializa la dinámica del sistema, ésta opera en el modo q_1 , tal como se muestra en la Figura 12. Sin embargo, cuando el potencial de la membrana x_1 alcanza el umbral r_1 , el modelo cambia su modo de operación al modo q_2 . Sin embargo, para regresar a operar al modo q_1 es necesario que

$$z \geq r_2, \quad (52)$$

donde r_2 es un parámetro de diseño que determina el tiempo que el sistema pasa en el modo q_2 . Dado que, como se ha mencionado anteriormente, el sistema sólo permanece en este modo durante un intervalo de tiempo t_δ , véase (40), se tiene que

$$r_2 = t_\delta = -\frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{\delta}{x_1(0) - c} \right). \quad (53)$$

En la Figura 15, se muestra la evolución en el tiempo de la variable z . En el instante de tiempo t_1 , el potencial de la membrana x_1 alcanza el umbral r_1 y la variable del tiempo z es igual a cero. Así mismo, transcurrido un intervalo de tiempo t_δ la variable z alcanza el umbral r_2 , es decir $z = r_2 = t_\delta$, y el sistema regresa a operar al modo q_1 y el proceso entero se repite. En este punto es importante recordar que la variable z es una variable auxiliar que se usa en el diseño del acoplamiento dinámico y sólo está definida en el modo de operación q_2 .

3.2.4. Funcionamiento del reinicio

Las subsecciones anteriores presentaron una explicación del comportamiento dinámico de cada una de las variables del reinicio dinámico (36) propuesto en este trabajo. En esta subsección se presenta la operación completa del reinicio dinámico (36), la

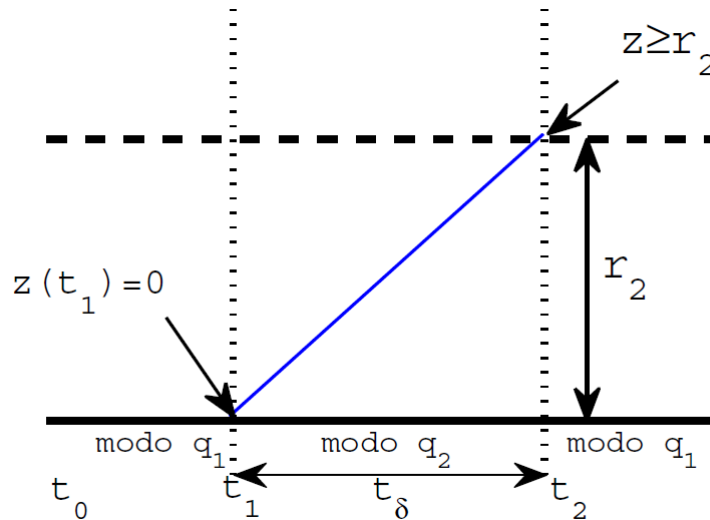


Figura 15. Evolución del tiempo de la nueva variable z (48).

cual se muestra en la Figura 16.

Inicialmente el sistema opera en el modo q_1 , donde el comportamiento del sistema está gobernado por la ecuación (5). Cuando el potencial de la membrana x_1 alcanza el umbral r_1 el sistema cambia a operar al modo q_2 , y su dinámica se representa por la ecuación (36). El sistema opera en el modo q_2 durante un intervalo de tiempo t_δ , en el cual el valor del estado x_1 es reasignado a $x_1 = c + \delta$. En este mismo intervalo t_δ , a la variable de recuperación de la membrana x_2 se le reasigna el valor $x_2 = x_2 + d$. Transcurrido el tiempo t_δ el sistema regresa a operar en el modo q_1 y se repite el proceso antes mencionado.

3.3. Resultados numéricos

En esta sección, se muestra una comparación numérica entre el modelo original de Izhikevich (5)-(6) y, el modelo modificado de Izhikevich, descrito por las ecuaciones (5) con reinicio dinámico (36).

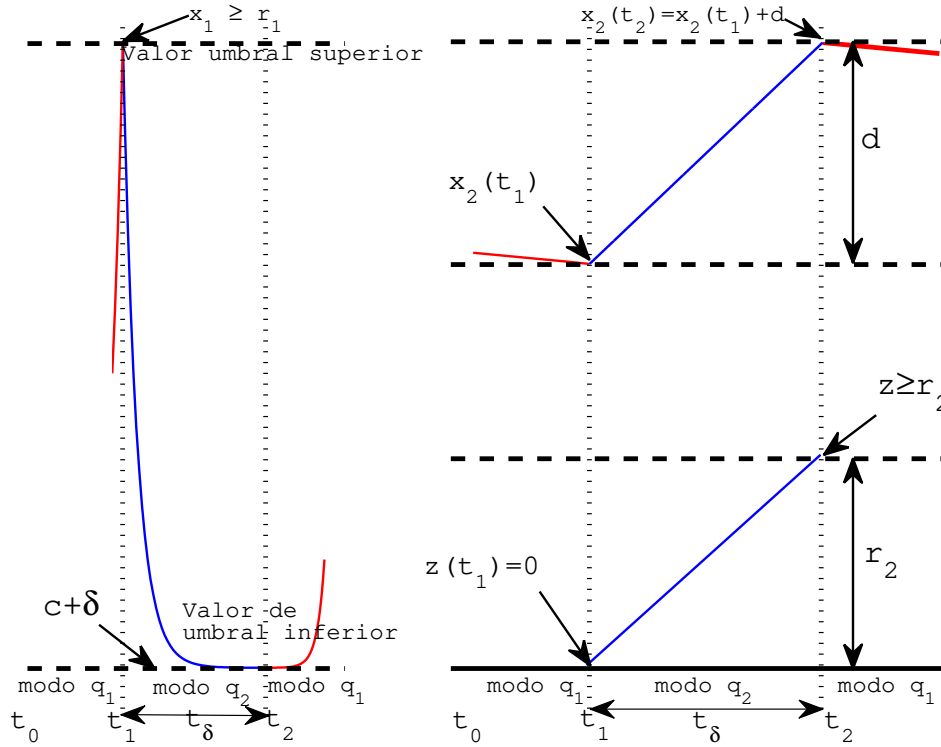


Figura 16. Evolución en el tiempo del reinicio dinámico (36).

3.3.1. Comportamiento del tipo de “espigado”

Anteriormente, en la Figura 8, se mostró la solución del modelo original de Izhikevich en el comportamiento del tipo “espigado”, con parámetros

$$a = 0.02, \quad b = 0.2, \quad c = -65, \quad d = 6, \quad I = 15. \quad (54)$$

Para encontrar los valores γ y β del reinicio dinámico, se escoge $t_\delta \ll 1$ y $\delta \ll 1$, para no modificar significativamente el comportamiento dinámico del modelo modificado, por lo que:

$$\begin{aligned} t_\delta &= 50 \mu s, \\ \delta &= 0.0043. \end{aligned} \quad (55)$$

Sustituyendo c , d y (55), en las ecuaciones (41) y (47), se obtiene

$$\begin{aligned}\gamma &= 200000, \\ \beta &= 12000.\end{aligned}\tag{56}$$

En la Figura 17, se muestra la serie del tiempo obtenida usando el modelo original de Izhikevich y el modelo modificado. La simulación del modelo original de Izhikevich modelada por las ecuaciones (5) y (6), se muestra en la Figura 17-a). El modelo modificado de Izhikevich, representado con las ecuaciones (5) y (36), con parámetros γ y β obtenidos en (56), se ilustra en la Figure 17-b).

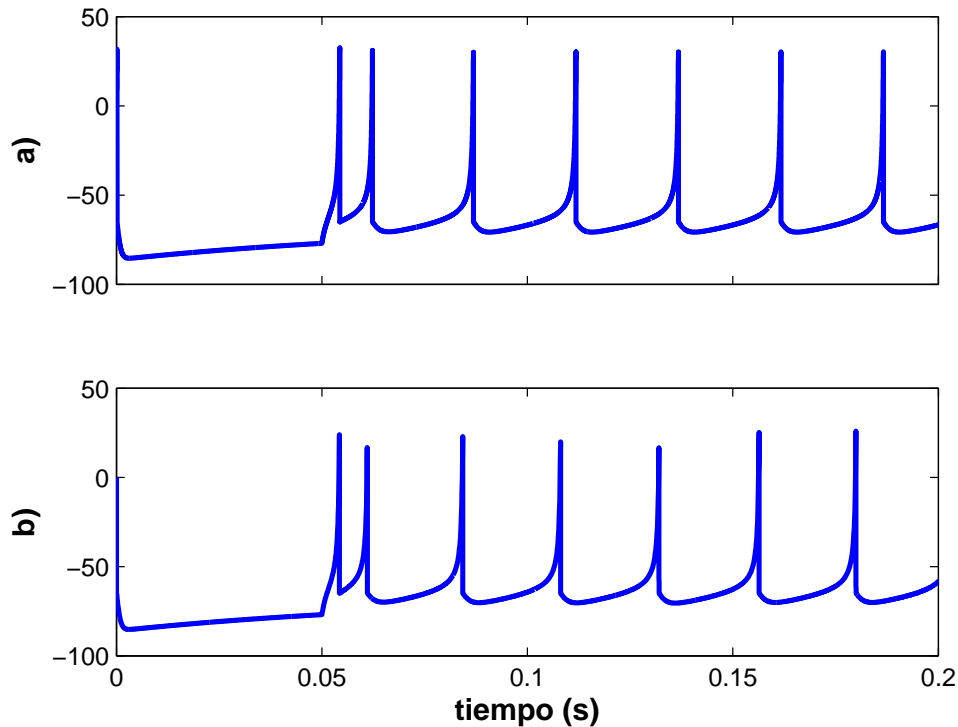


Figura 17. a) se muestra la serie del tiempo obtenida usando el modelo original de Izhikevich en “spiking”, en su implementación en matlab [mV], en b) La serie de tiempo usando el modelo modificado de Izhikevich en “spiking” [mV]

3.3.2. Comportamiento del tipo de “ráfagas”

Para reproducir el comportamiento del tipo de “ráfagas”, se usaron los siguientes parámetros

$$a = 0.02, \quad b = 0.2, \quad c = -50, \quad d = 2, \quad I = 15.\tag{57}$$

Sustituyendo c , d y (55), en las ecuaciones (41) y (47), se obtiene

$$\begin{aligned}\gamma &= 1.9662e5 \\ \beta &= 40000\end{aligned}\tag{58}$$

Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 18, donde 18-a) corresponde al modelo original de Izhikevich, modelada con las ecuaciones (5) y (6) con parámetros (57). Y, la Figura 18-b) corresponde a la serie del tiempo del modelo modificado de Izhikevich modelado por las ecuaciones (5) y (36), con parámetros (57) y (58).

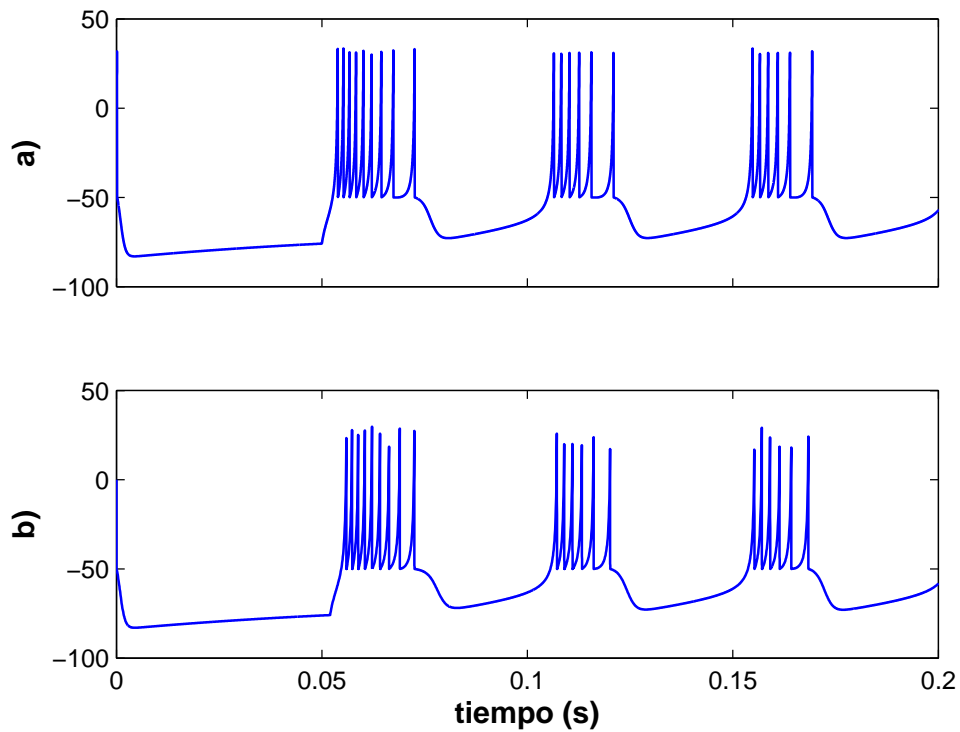


Figura 18. a) se muestra la serie del tiempo obtenida usando el modelo original de Izhikevich en “bursting”, en su implementación en matlab [mV], en b) La serie de tiempo usando el modelo modificado de Izhikevich en “bursting” [mV]

Capítulo 4. Diseño e implementación electrónica del modelo modificado de Izhikevich

En este capítulo se presenta la implementación de una neurona electrónica basada en el modelo de Izhikevich descrita por (5) con reinicio dinámico (36). En particular, se presenta el método de diseño, las características, las simulaciones del circuito y los resultados experimentales.

4.1. Consideraciones de diseño

El diseño e implementación del modelo modificado de Izhikevich se realiza con componentes electrónicos simples (resistencias y capacitores) y amplificadores operacionales. La no linealidad cuadrática, se implementó usando circuitos multiplicadores AD734. A continuación, se presenta una breve introducción de las configuraciones usadas para los amplificadores operacionales y el diagrama de conexión del multiplicador.

En la Figura 19, se muestra el diagrama de un circuito inversor.

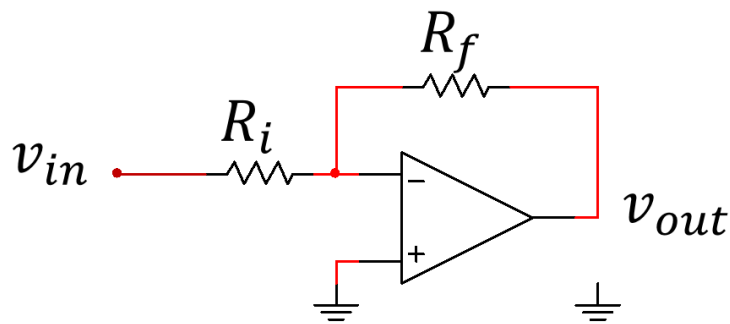


Figura 19. Circuito inversor.

La ecuación que relaciona el comportamiento entrada-salida está dada por

$$v_{out} = -\frac{R_f}{R_i} v_i, \quad (59)$$

donde v_i es la tensión de entrada, v_{out} representa la tensión de salida del amplificador operacional, y las resistencias R_f y R_i determinan la ganancia.

Por otro lado, la configuración de un circuito sumador se muestra en la Figura 20.

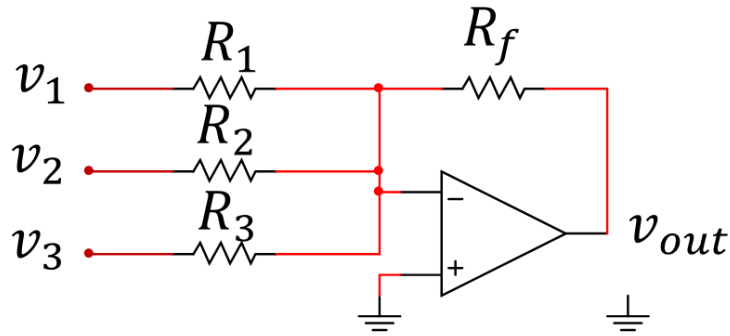


Figura 20. Circuito sumador inversor.

La relación entrada-salida de este circuito está dada por

$$v_{out} = -\left(\frac{R_f}{R_1}v_1 + \frac{R_f}{R_2}v_2 + \frac{R_f}{R_3}v_3\right), \quad (60)$$

donde v_1 , v_2 , v_3 son tensiones de entrada, v_{out} representa la tensión de salida del amplificador operacional, y R_f , R_1 , R_2 y R_3 son resistencias.

Otra configuración utilizada en el diseño de la neurona electrónica de Izhikevich es el circuito integrador-sumador, el cual se muestra en la Figura 21.

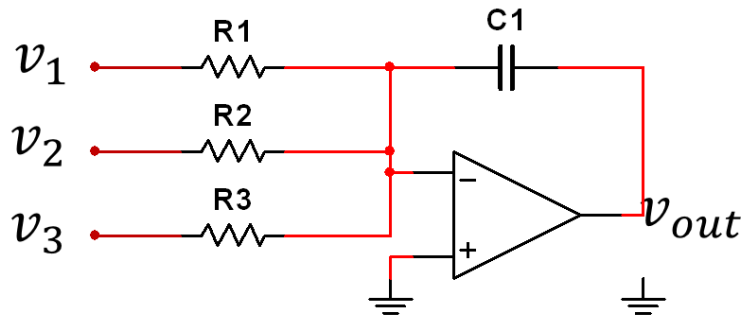


Figura 21. Circuito integrador-sumador.

Al obtener la ecuación que modela el comportamiento entrada-salida del circuito mostrado en la Figura 21 se obtiene

$$v_{out} = -\left(\frac{1}{R_1C} \int v_1 + \frac{1}{R_2C} \int v_2 + \frac{1}{R_3C} \int v_3\right), \quad (61)$$

donde v_1 , v_2 , v_3 son tensiones de entrada, v_{out} representa la tensión de salida del amplificador operacional, R_1 , R_2 y R_3 son resistencias y C es un capacitor.

La implementación de la no linealidad, mostrada en la ecuación (5), se realizó utilizando el circuito integrado AD734. La Figura 22 muestra la conexión necesaria, descrita por el fabricante, para utilizar este circuito como multiplicador.

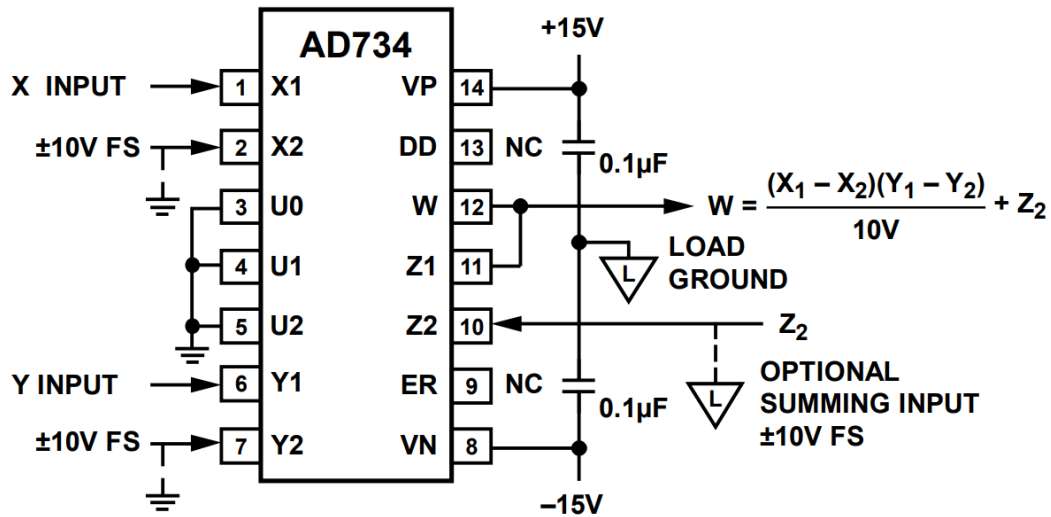


Figura 22. Conexión básica del multiplicador. Fuente: hoja de datos AD734.

Utilizando combinaciones de los circuitos descritos anteriormente es posible implementar y resolver una gran diversidad de ecuaciones diferenciales de manera analógica. Por lo tanto, en este trabajo se utilizaron combinaciones de estos circuitos como base para el diseño de un circuito electrónico que fuera capaz de reproducir el comportamiento dinámico observado en el modelo neuronal de Izhikevich.

4.2. Implementación del reset

Para la implementación del reinicio auxiliar, se utilizó un comparador *LM339N*, el cual cuando el potencial de la membrana alcanza cierto umbral, acorde a (36), genera un pulso estable con ayuda de resistencias, diodos, capacitores y un gatillo de Schmitt. El pulso generado se envía al interruptor analógico *HI1-5043-5*, de tal manera que el sistema permanezca en el modo de reacondicionamiento auxiliar durante un periodo de tiempo t_δ , tal como se describe en (45). En la Figura 23 se muestra el diagrama del circuito.

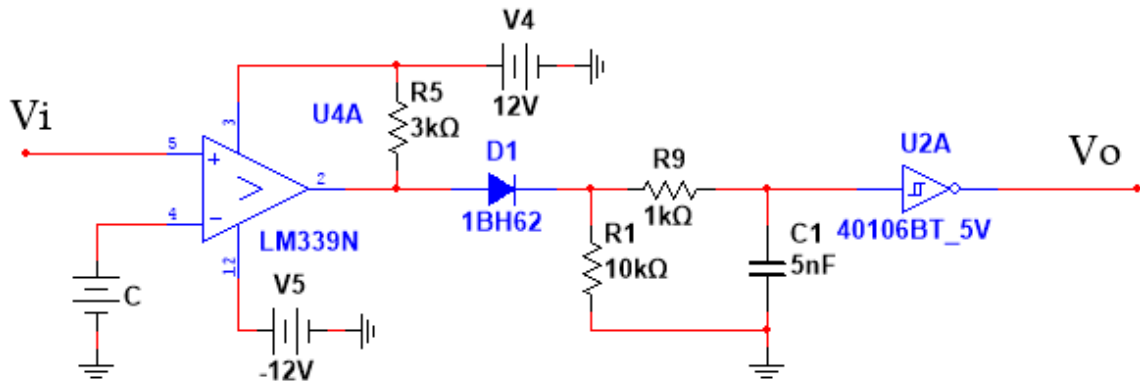


Figura 23. Circuito comparador que permite estar en el modo de reinicio durante un intervalo de tiempo.

4.2.1. Potencial de la membrana

El diagrama del circuito que emula el comportamiento dinámico mostrado en la ecuación (37) se muestra en la Figura 24

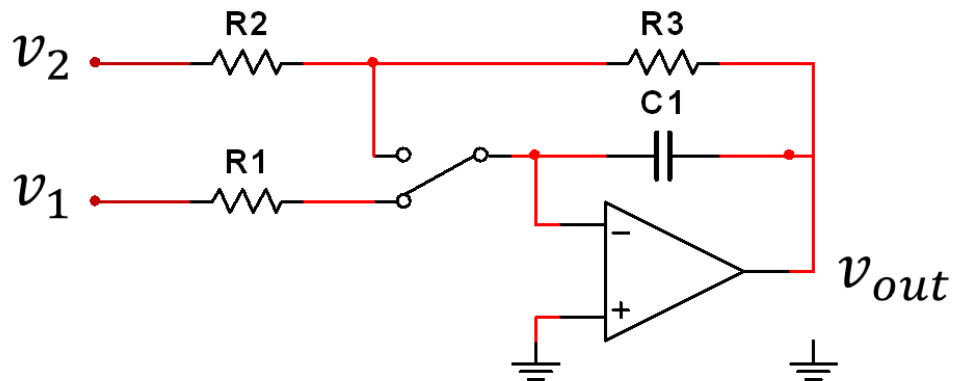


Figura 24. Circuito para fijar las condiciones iniciales del potencial de la membrana (x_1).

4.2.2. Variable de recuperación de la membrana

El diagrama del circuito que emula el comportamiento dinámico mostrado en la ecuación (42) se muestra en la Figura 25

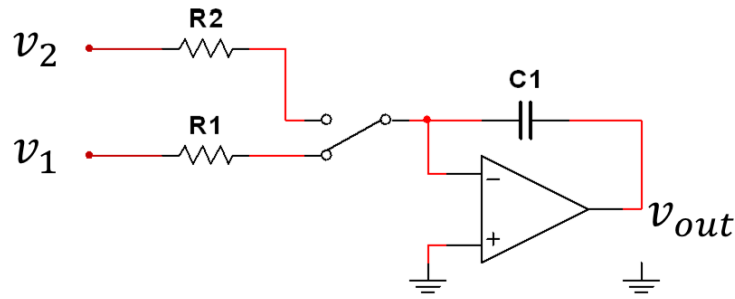


Figura 25. Circuito para fijar las condiciones iniciales de la variable de recuperación de la membrana (x_2).

4.3. Circuito electrónico de Izhikevich

La implementación del modelo de Izhikevich (5) en circuitería analógica con su reset dinámico (36), es escalado en amplitud y tiempo.

Por lo tanto se introduce el siguiente cambio de variables

$$t = \tau\eta, \quad x_1 = \alpha\bar{x}_1, \quad x_2 = \theta\bar{x}_2, \quad z = \Gamma\bar{z}, \quad (62)$$

donde η , α , θ y Γ son parámetros positivos.

En términos de las variables escaladas, el sistema de (5) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \left[0.04\alpha\bar{x}_1^2 + 5\bar{x}_1 + \frac{1}{\alpha}(140 + I - \theta)\bar{x}_2 \right] \eta, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= a\left(\frac{\alpha}{\theta}b\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right)\eta. \end{aligned} \quad (63)$$

Y de manera similar, el reinicio dinámico (36) es escalado en forma tal que queda como

$$\text{si } \bar{x}_1 \geq \frac{r_1}{\alpha}, \text{ entonces } \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 &= -\gamma(\bar{x}_1 - \frac{c}{\alpha})\eta, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \frac{1}{\alpha}\beta\eta, \\ \dot{\bar{z}} &= \eta/\Gamma. \end{cases} \quad (64)$$

A continuación el sistema escalado (63) con reset dinámico escalado (64) se implementó con circuitos electrónicos. Como primer paso, se diseñó el diagrama eléctrico y posteriormente el circuito obtenido se implementó en un programa especializado de

simulación llamado Multisim.

4.3.1. Implementación del circuito en simulación

En la Figura 26 se muestra el circuito diseñado, el cual es una implementación con circuitería analógica del modelo modificado escalado de Izhikevich dado en (63)-(64), en el que se usaron los mismos componentes electrónicos que posteriormente se utilizaron en la construcción del circuito físico.

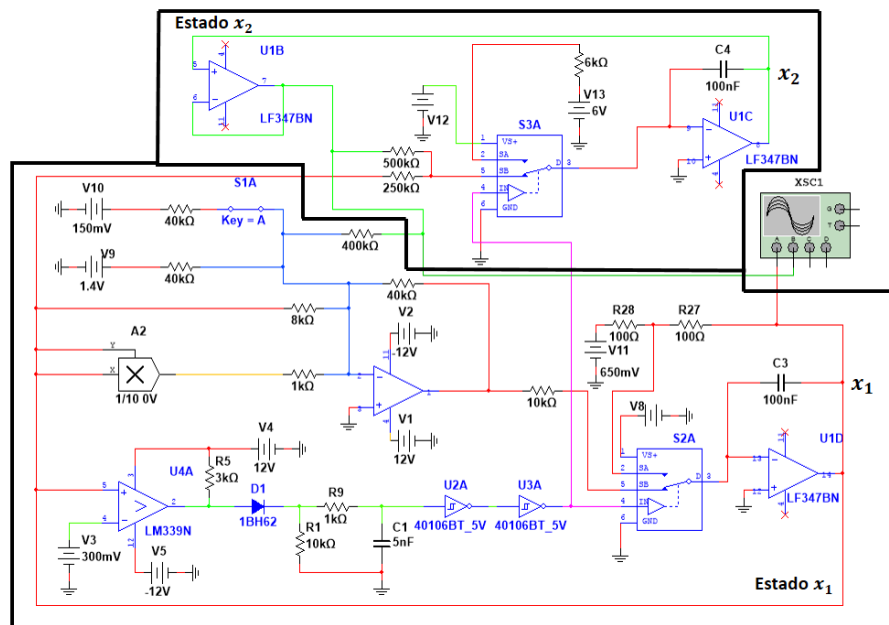


Figura 26. Representación esquemática del circuito de Izhikevich usando circuitería analógica.

Este circuito fue posteriormente implementado en el simulador de circuitos electrónicos Multisim (NI Multisim 14.1), tal y como se muestra en la Figura 27.

A continuación, se realizó una comparación entre los resultados obtenidos con el modelo original de Izhikevich y el modelo modificado aquí presentado. El modelo original de Izhikevich (5)-(6) fue escalado de acuerdo a (62) e implementado en Matlab. Por otra parte, el diagrama eléctrico de la Figura 26, el cual corresponde al modelo de Izhikevich modificado y escalado dado en (63)-(64), fue implementado en Multisim.

En un primer estudio numérico, se realizó una simulación utilizando los parámetros dados en (54) y para el reset dinámico se utilizaron los parámetros (56), con los que

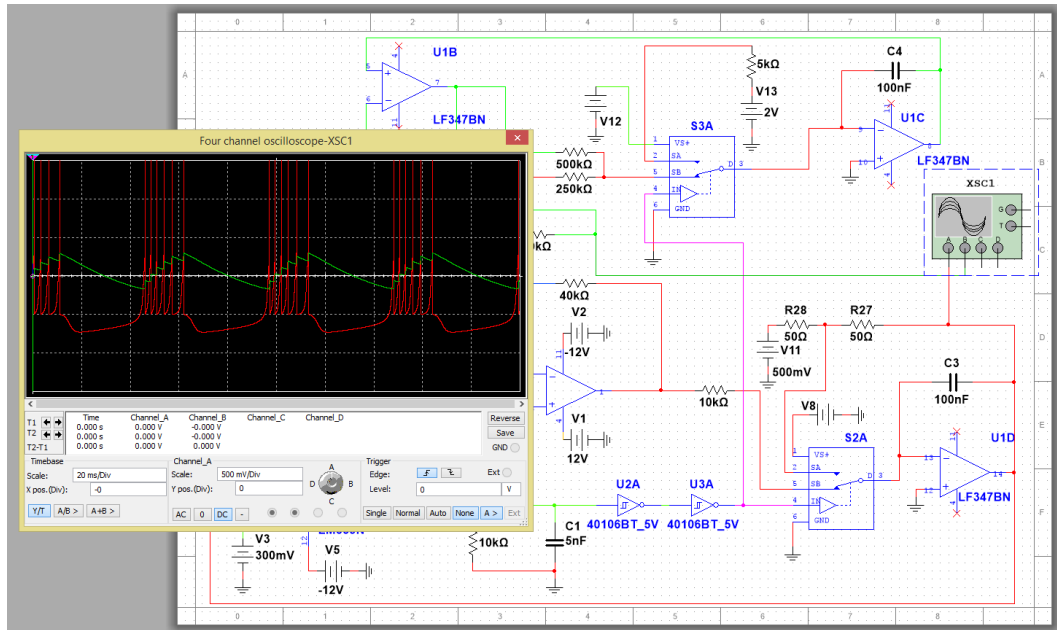


Figura 27. Implementación en Multisim del circuito eléctrico que emula la dinámica del modelo modificado de Izhikevich (63)-(64).

se esperaba un comportamiento de “espigado”. Los resultados que se obtuvieron se presentan en la Figura 28, de la cual se puede apreciar que las forma de onda obtenidas, tanto para el modelo original como para el modelo modificado aquí propuesto son muy similares.

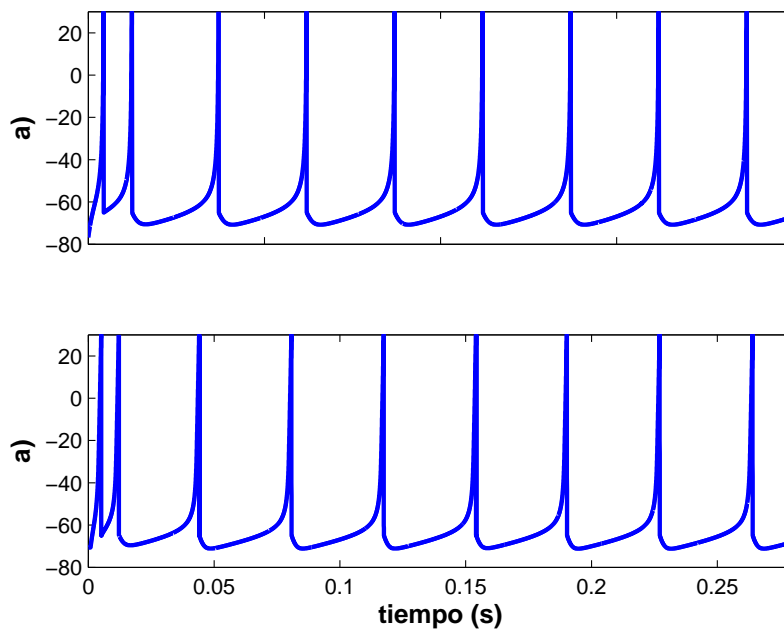


Figura 28. a) Simulación numérica en Matlab del modelo original de Izhikevich en “spiking” [mV], b) Simulación numérica en Multisim del circuito eléctrico del modelo modificado de Izhikevich en “spiking” [mV].

Posteriormente, se realizó un segundo estudio numérico en el que los parámetros de los modelos se escogieron de acuerdo a (57) y para el reset dinámico se utilizaron los parámetros dados en (58). Con esta elección se esperaba que los sistemas exhibieran un comportamiento de “ráfagas”.

La Figura 29 muestra los resultados que se obtuvieron, de la cual es claro ver que las formas de onda tanto del modelo original simulado en Matlab como aquellas del circuito electrónico del modelo modificado son cualitativamente muy similares.

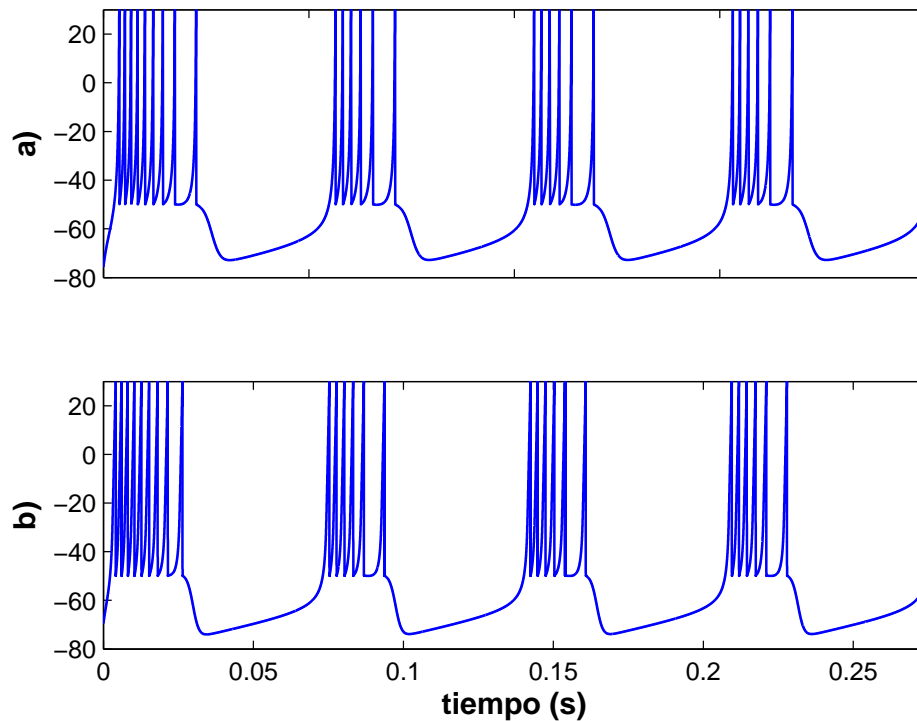


Figura 29. a) Simulación numérica con Matlab del modelo de Izhikevich en “bursting” [mV], b) Simulación numérica con Multisim del circuito eléctrico del modelo modificado de Izhikevich en “bursting” [mV].

4.3.2. Resultados experimentales

Para poder validar de manera experimental el correcto funcionamiento del modelo modificado de Izhikevich, se realizó una implementación electrónica del diagrama esquemático de la Figura 26 en una tablilla de pruebas, tal y como se muestra en la Figura 30. Dicha implementación experimental permitió verificar que es posible reproducir los comportamientos observados en el modelo, a pesar de las diferencias

inevitables entre los componentes electrónicos y otros efectos que podrían afectar el comportamiento dinámico del sistema, por ejemplo el ruido.

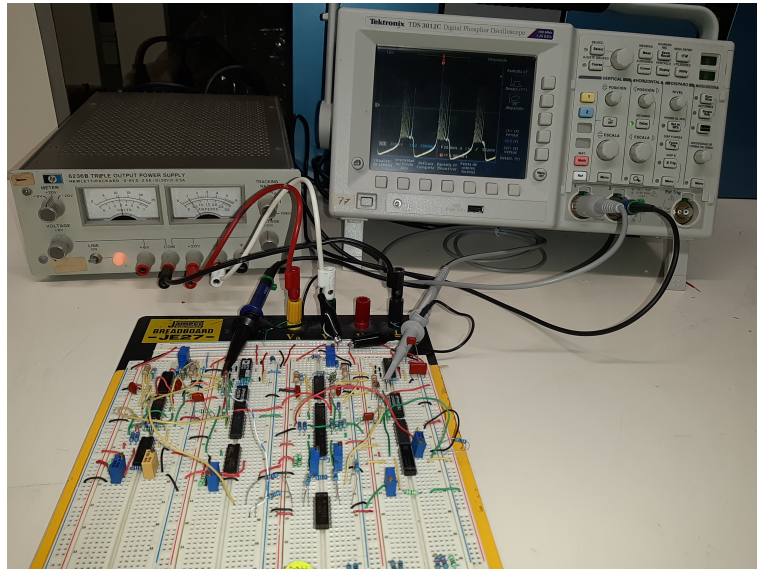


Figura 30. Implementación experimental del modelo modificado de Izhikevich (63)-(64).

Los resultados experimentales se muestran en la Figura 31, los datos se obtuvieron usando el osciloscopio digital TDS3012C de Tektronix.

En un primer experimento, los componentes del circuito electrónico se ajustaron en forma tal que los parámetros del sistema fueron $a = 0.02$, $b = 0.2$, $c = -50$, $d = 6$, $I = 15$. Para estos parámetros el modelo original exhibió un comportamiento de “ráfagas” con dos espigas tal y como se muestra en la Figura 31a). La medición obtenida del circuito también exhibe un comportamiento cualitativamente muy similar, tal y como se muestra en la Figura 31b).

Por otra parte, en un segundo experimento los parámetros del circuito se ajustaron a $a = 0.02$, $b = 0.2$, $c = -50$, $d = 2$, $I = 15$. Con esta modificación, el modelo original de Izhikevich mostró un comportamiento de “ráfagas” con varias espigas, tal y como se muestra en la Figura 31c). Y la medición obtenida del circuito, corresponde con el valor obtenido en simulación, como claramente puede verse en la Figura 31d).

Los resultados experimentales muestran que el modelo modificado de Izhikevich implementado usando electrónica analógica logra replicar satisfactoriamente los comportamientos dinámicos observados en el modelo original.

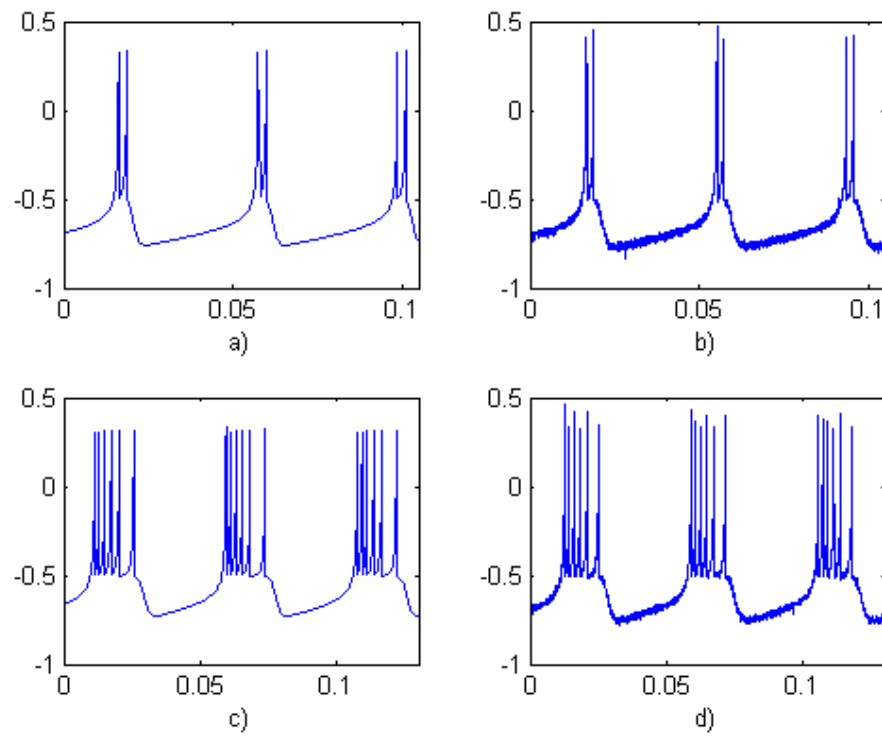


Figura 31. Comparación del modelo original de Izhikevich (5)-(6) y el modelo modificado (63)-(64) implementado en circuitería analógica. a) y c): Series del tiempo del modelo original. b) y d) Mediciones experimentales obtenidas del circuito correspondiente al modelo modificado.

Capítulo 5. Sincronización de neuronas

Este capítulo se enfoca en la sincronización de modelos neuronales de Izhikevich. Se inicia con el estudio de dos neuronas acopladas unidireccionalmente (amo-esclavo), donde se investiga la estabilidad local del régimen de sincronización utilizando la teoría de Lyapunov y la función maestra de estabilidad. Además, se realiza un estudio experimental en el que se muestra la sincronización de dos neuronas tipo Izhikevich implementadas con circuitos electrónicos.

5.1. Sincronización de un par de neuronas modificadas de Izhikevich mediante el diseño de un controlador

En esta sección se presenta el diseño de un controlador para inducir sincronización en un par de neuronas modificadas de Izhikevich en configuración amo-esclavo.

Para empezar el estudio se considera que el sistema amo (Σ_1) está descrito de acuerdo a (63), por

$$\Sigma_1 = \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = [0.04\alpha\bar{x}_1^2 + 5\bar{x}_1 + \frac{1}{\alpha}(140 + I - \theta)\bar{x}_2]\eta, \\ \dot{\bar{x}}_2 = a(\frac{\alpha}{\theta}b\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\eta, \end{cases} \quad (65)$$

con reinicio dinámico (64)

$$\text{si } \bar{x}_1 \geq \frac{r_1}{\alpha}, \text{ entonces } \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = -\gamma(\bar{x}_1 - \frac{c}{\alpha})\eta, \\ \dot{\bar{x}}_2 = \frac{1}{\alpha}\beta\eta, \\ \dot{z} = \eta/\Gamma. \end{cases} \quad (66)$$

Y el sistema esclavo (Σ_2) estará dado por

$$\Sigma_2 = \begin{cases} \dot{\bar{y}}_1 = [0.04\alpha\bar{y}_1^2 + 5\bar{y}_1 + \frac{1}{\alpha}(140 + I - \theta)\bar{y}_2 + u]\eta, \\ \dot{\bar{y}}_2 = a(\frac{\alpha}{\theta}b\bar{y}_1 - \bar{y}_2)\eta, \end{cases} \quad (67)$$

con reinicio dinámico

$$\text{si } \bar{y}_1 \geq \frac{r_1}{\alpha}, \text{ entonces } \begin{cases} \dot{\bar{y}}_1 = -\gamma(\bar{y}_1 - \frac{c}{\alpha})\eta, \\ \dot{\bar{y}}_2 = \frac{1}{\alpha}\beta\eta, \\ \dot{\bar{z}}_1 = \eta/\Gamma. \end{cases} \quad (68)$$

La ley de control que se aplica al sistema Σ_2 es

$$u = 0.04\alpha\bar{x}_1^2 - 0.04\alpha\bar{y}_1^2 + k(\bar{x}_1 - \bar{y}_1). \quad (69)$$

A continuación, se definen los errores de sincronización

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= x_1 - y_1, \\ \dot{e}_2 &= x_2 - y_2. \end{aligned} \quad (70)$$

Bajo la suposición de que tanto el sistema amo como el esclavo son reiniciados de manera simultánea, se podría analizar la dinámica del error sólomente para el caso en que los sistemas se encuentren en el modo q_1 , véase la Figura 12.

Bajo esta consideración, la dinámica del error está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5-k & -1 \\ ab & -a \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}. \quad (71)$$

El polinomio característico de la matriz A está dado por

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + (a + k - 5)\lambda + a(b + k - 5) = 0. \quad (72)$$

Entonces, el valor de k en el controlador (69) debe satisfacer

$$k \geq \max \{5 - a, 5 - b\}. \quad (73)$$

5.2. Sincronización de un par de neuronas modificadas de Izhikevich con acoplamiento unidireccional difuso

En la sección anterior se presentó el diseño de un controlador para sincronizar dos neuronas modificadas tipo Izhikevich. Sin embargo, dicho controlador requiere de cancelar los términos no lineales en el sistema esclavo. En esta sección se presenta el diseño de un controlador mucho más simple al presentado en la ecuación (69).

Una vez más, considerérese que el sistema amo esté descrito por

$$\Sigma_M : \begin{cases} \dot{x}_m = F(x_m), \\ y_m = Cx_m, \end{cases} \quad (74)$$

y el sistema esclavo descrito por

$$\Sigma_S : \begin{cases} \dot{x}_s = F(x_s) + Bu_s, \\ y_s = Cx_s, \end{cases} \quad (75)$$

donde $x_i \in \mathbb{R}^2$ e $y_i \in \mathbb{R}$, $i = m, s$ son los estados y la salida de los sistemas amo y esclavo, respectivamente, $B \in \mathbb{R}^2$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ son los vectores de entrada y salida, respectivamente, y $F(x_i)$ es una función no lineal que contiene las dinámicas intrínsecas del modelo de Izhikevich, y está dada por

$$F(x_i) = \begin{bmatrix} 0.04x_{i1}^2 + 5x_{i1} + 140 + I - x_{i2} \\ a(bx_{i1} - x_{i2}) \end{bmatrix}, \quad (76)$$

donde a , b , e I son parámetros positivos e $i = m, s$. Además, cada sistema tiene un reinicio dinámico dado por (66) y (68), respectivamente y,

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0]. \quad (77)$$

La entrada de control u_s aplicada al sistema esclavo es

$$u_s = k(y_m - y_s) = kC(x_m - x_s), \quad (78)$$

donde $k \in \mathbb{R}_+$ es la fuerza de acoplamiento.

El problema de control se reduce a encontrar un valor adecuado de acoplamiento k , tal que el sistema amo y el sistema esclavo se sincronicen, al menos localmente, en forma tal que se satisfaga lo siguiente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_m(t) - x_s(t)) = 0. \quad (79)$$

5.2.1. Estabilidad local de la solución síncrona

El análisis de estabilidad global de la solución síncrona (79) en los sistemas acoplados (74)-(75) no es una tarea trivial, en parte debido a la naturaleza híbrida de los sistemas. Sin embargo, bajo ciertas consideraciones es posible obtener una buena idea de este problema.

Por lo tanto, considérese el caso en que las neuronas modificadas de Izhikevich, amo y esclavo, se inicializan en el modo q_1 , véase la Figura 12, y además, supóngase que los sistemas se sincronizan antes que se lleve a cabo el reinicio, es decir, antes de que salgan del modo q_1 . Entonces, definiendo el error de sincronización $e = x_m - x_s$, se obtiene la siguiente dinámica del error de los sistemas acoplados (74)-(75), con la función F definida en (76)

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5-k & -1 \\ ab & -a \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1m}^2 - x_{1s}^2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{g(t,e)}. \quad (80)$$

Debido al reinicio, las trayectorias de los sistemas amo y esclavo *siempre* están acotadas y por lo tanto, el término $g(t, e)$ puede ser considerado como una perturbación 'evanescente en e ', y qué satisface

$$\|g(e)\|_2 \leq \gamma \|e\|_2, \quad (81)$$

donde γ es una constante positiva, y $\|\cdot\|_2$ representa la norma Euclideana. Por lo tanto, de los resultados presentados en (Khalil, 2002), se tiene que una condición suficiente para la estabilidad local de la dinámica de error (80), es que la matriz A sea de Hurwitz. Esta condición puede ser fácilmente verificada observando el polinomio característico

de la matriz A , el cual está dado por

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + (a + k - 5)\lambda + a(b + k - 5) = 0. \quad (82)$$

Entonces, el valor de k en la entrada de control (78) deberá escogerse como sigue, para asegurar que A sea de Hurwitz

$$k \geq \max \{5 - a, 5 - b\}. \quad (83)$$

5.3. Sincronización de dos neuronas usando la función maestra de estabilidad (MSF)

En esta sección se investiga la sincronización de dos neuronas, conectadas unidireccionalmente, usando el método de la función maestra de estabilidad, presentado en la Sección 2.3.1.2.

Como primer paso, nótese que el modelo de Izhikevich (5) está descrito por 2 ecuaciones diferenciales ordinarias, mientras que el reinicio dinámico (36) está descrito por 3 ecuaciones (véase también la Figura 12). Sin embargo, el método de la función maestra de estabilidad requiere que tanto el modelo (5) como el reinicio dinámico (36) tengan el mismo número de ecuaciones. Para resolver este problema, el modelo (5), que sólo consta de \dot{x}_1 y \dot{x}_2 , se reescribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0.04x_1^2 + 5x_1 + 140 - x_2 + I, \\ \dot{x}_2 &= a(bx_1 - x_2), \\ \dot{z} &= -\psi z, \end{aligned} \quad (84)$$

donde ψ es un parámetro positivo y z es la variable de tiempo introducida en el reinicio dinámico (36). Cabe recordar que el estado z es para controlar el tiempo que las trayectorias del modelo modificado de Izhikevich se mantenga en el modo de reinicio q_2 descrito por (36).

Nótese que al agregar la tercera ecuación en (84) no se afecta el comportamiento original de x_1 y x_2 ya que estas variables están completamente desacopladas de z .

Como siguiente paso, se considera un par de neuronas (84)-(36) acopladas unidireccionalmente y se describen según la forma de la ecuación (24) con $N = 2$, $\mathbf{x} = [\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2]$, con $\mathbf{x}^i = [x_{1i}, x_{2i}, z_i]$, $i=1,2$ y

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}^1) \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}^2) \end{bmatrix}. \quad (85)$$

Cuando las neuronas operen en el modo q_1 , se tiene de la ecuación (84) que el valor de $\mathbf{f}(\mathbf{x}^i)$ en (85) será

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^i) = \begin{bmatrix} 0.04x_i^2 + 5x_i + 140 - y + I \\ a(bx_i - y_i) \\ -\psi z \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad (86)$$

donde $a = 0.02$, $b = 0.2$, $I = 15$ y ψ es una constante positiva lo suficientemente grande para asegurar que z regrese a $z \approx 0$ cuando el potencial de la membrana alcance el valor de umbral r_1 , por lo que se escogió $\psi = 50$.

Por lo tanto, la ecuación variacional (34), cuando el sistema opere en el modo q_1 , toma la forma

$$\dot{\mathbf{e}}^i = \begin{bmatrix} 0.08x + 5 - k\sigma_i & -1 & 0 \\ ab & -a & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix} \mathbf{e}^i, \quad (87)$$

donde k es la fuerza de acoplamiento, y σ_i son los valores propios de la matriz de conectividad \mathbf{G} , los cuales son $\sigma_1 = 0$ y $\sigma_2 = -1$.

Por otra parte, cuando el modelo modificado de Izhikevich opere en el modo q_2 , se tiene de la ecuación (36) que $\mathbf{f}(\mathbf{x}^i)$ en (86) esté dada por

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^i) = \begin{bmatrix} -\gamma(x - c) \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (88)$$

donde $i = 1, 2$, $c = -50$, $\gamma = 1.9662e5$ y $\beta = 40000$.

Entonces, la ecuación variacional (34), para el caso en el que las neuronas operen en el modo q_2 , está descrita por

$$\dot{\mathbf{e}}^i = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{e}^i. \quad (89)$$

Para calcular los exponentes transversos máximos de Lyapunov $\lambda_i^{\perp max}$, véase la ecuación (35), se utiliza el algoritmo de Wolf (Wolf *et al.*, 1985). Los resultados se muestran en la Figura 32, donde se observa que $\lambda_i^{\perp max} < 0$ cuando $k > 0.7$. Por lo tanto, la solución síncrona (25) será localmente estable si el valor del acoplamiento k se escoge tal que $k > 0.7$

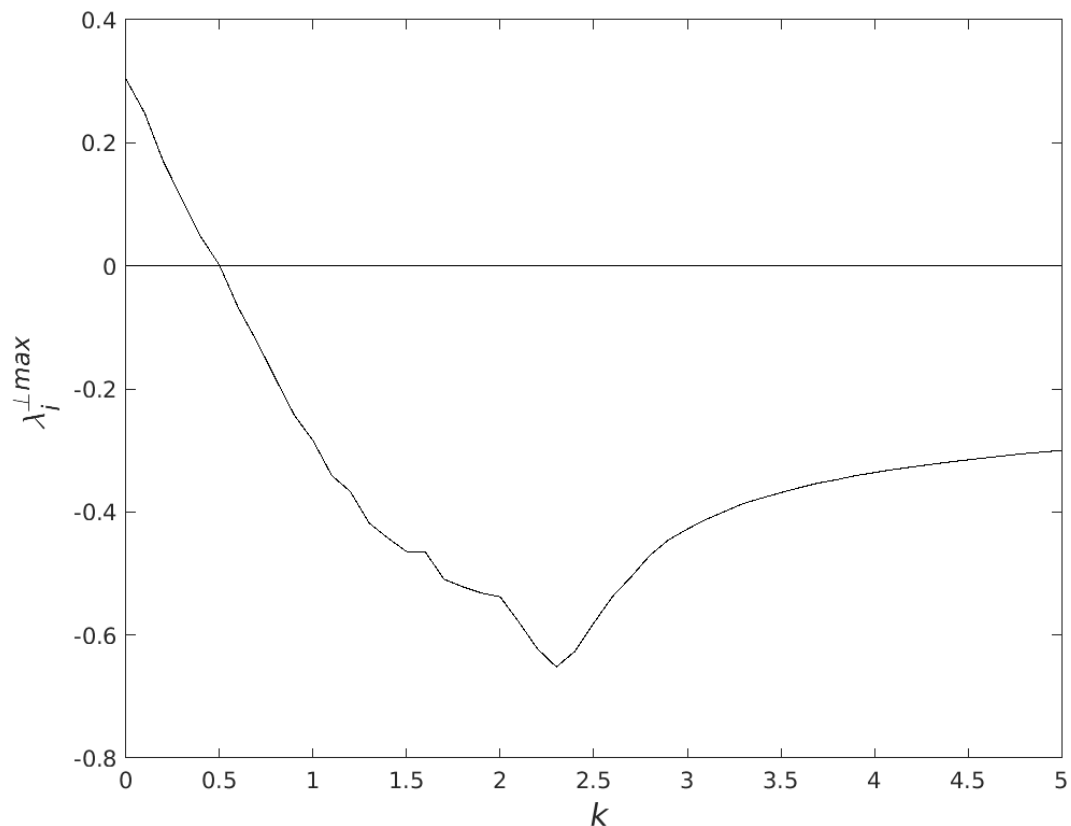


Figura 32. Exponentes transversos máximos de Lyapunov para una par de 2 neuronas acopladas unidireccionalmente.

5.4. Resultados numéricos

A continuación se presenta un estudio numérico con el fin de ilustrar la eficacia de los controladores propuestos en las secciones 5.1 y 5.2

En una primera simulación, el sistema amo (65)-(66) y el sistema esclavo (67)-(69) se integran numéricamente con parámetros a, b, c, I, d dados en (54), $\alpha = 10$, $\theta = 100$, $\eta = 1000$ y $\Gamma = 1000$, con los valores de γ y β están dados en (56).

El valor del acoplamiento k en (69) se escogió como $k = 5$. Para los parámetros escogidos este valor de k satisface (73).

La Figura 33 muestra los resultados obtenidos donde puede verse que el sistema amo exhibe un comportamiento de “spiking”. La ley de control (69) se aplica en el momento 0.1s y como resultado la neurona esclava se sincroniza a la neurona ama.

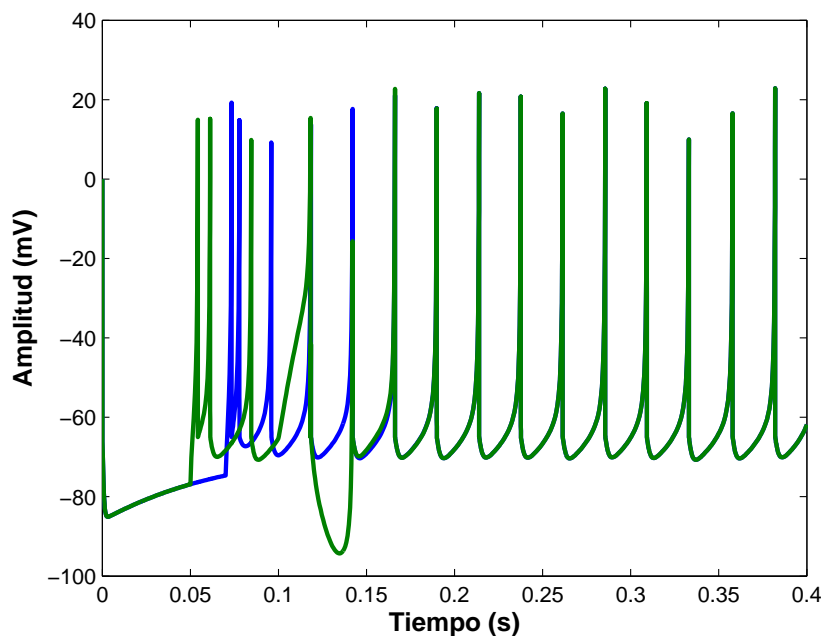


Figura 33. Sincronización de 2 neuronas modificadas de Izhikevich en comportamiento tipo ‘spiking’.

Por otra parte, la Figura 34 muestra la simulación del sistema amo (65)-(66) y el sistema esclavo (67)-(69) en comportamiento tipo “bursting” con acoplamiento $k = 5$. En este caso los parámetros que se utilizan son los mismos que en la simulación anterior, excepto que c y d están dados en (57) y γ y β se escogen de acuerdo a (58). El control (69) se activa en el momento 0.1s y como consecuencia las neuronas se

sincronizan después de un transitorio.

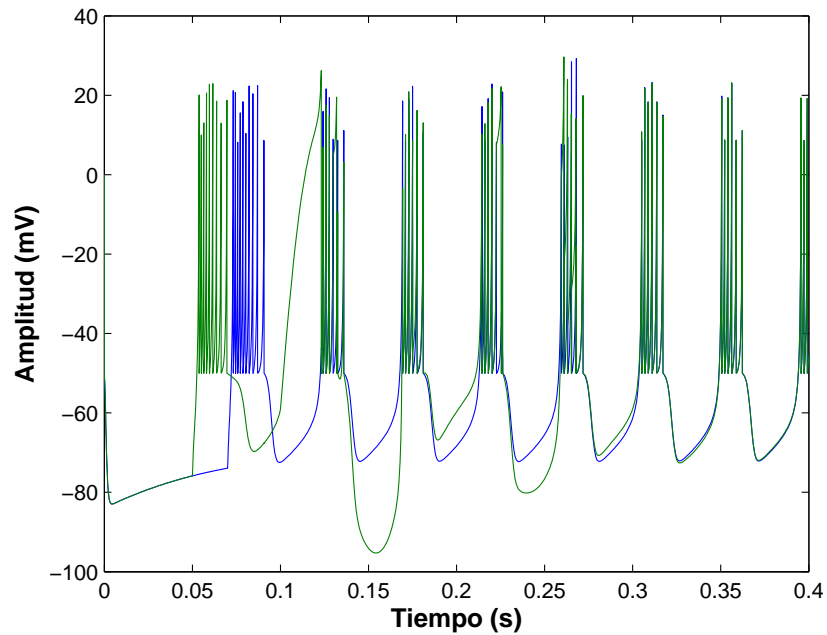


Figura 34. Sincronización de 2 neuronas modificadas de Izhikevich en comportamiento tipo 'bursting'.

En un segundo estudio numérico se ilustra la eficacia del control por acoplamiento presentado en (78).

En particular, se realiza una integración numérica de los sistemas (74)-(78) con los mismos parámetros usados para generar la Figura 34, excepto que el valor de k es $k = 1$ y la entrada de control (78) se activa cuando $t \geq 0.095$. Como puede verse en la Figura 35, los sistemas de Izhikevich modificados se sincronizan, después de un tiempo.

5.5. Resultados experimentales

En esta sección, se validan experimentalmente los resultados numéricos que se obtuvieron en la sección anterior, usando las neuronas electrónicas que se describen en la sección 4.3.2.

En el primer experimento, los parámetros de las neuronas electrónicas se ajustaron de tal manera que éstas exhiban un comportamiento de 'ráfagas'. Y la entrada de control a la neurona esclava está dada por (69), con $k = 5$.

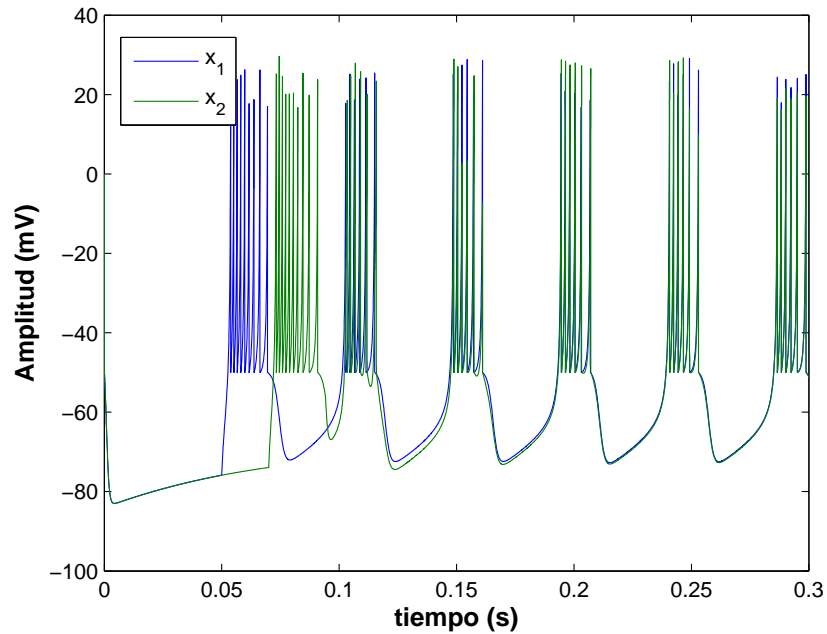


Figura 35. Sincronización de 2 neuronas modificadas de Izhikevich en acoplamiento unidireccional.

Los resultados que se obtuvieron se muestran en la Figura 36, donde la señal verde corresponde a la variable x_1 de la neurona ama y la señal azul corresponde a la variable x_1 de la neurona esclava. Como puede verse, las neuronas electrónicas están prácticamente sincronizadas.

Para un segundo experimento lo único que se hizo fue reemplazar la entrada no lineal de control (69), usada en el primer experimento, por la entrada de control lineal dada en (78). El valor del acoplamiento k es el mismo usado en el experimento anterior.

Los resultados de este experimento se muestran en la Figura 37, en la cual, otra vez, la señal verde corresponde a la señal x_1 de la neurona ama, mientras que la variable x_1 de la neurona esclava se muestra en azul. De la figura es claro apreciar que las neuronas electrónicas se sincronizan.

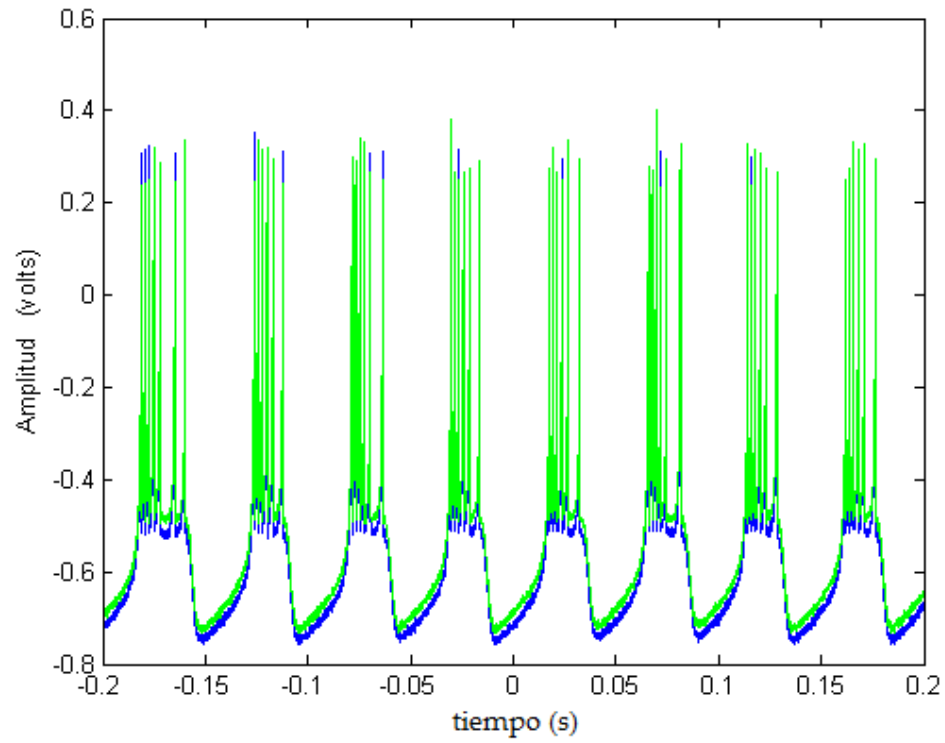


Figura 36. Validación experimental de la sincronización de 2 neuronas, usando el controlador no lineal (69).

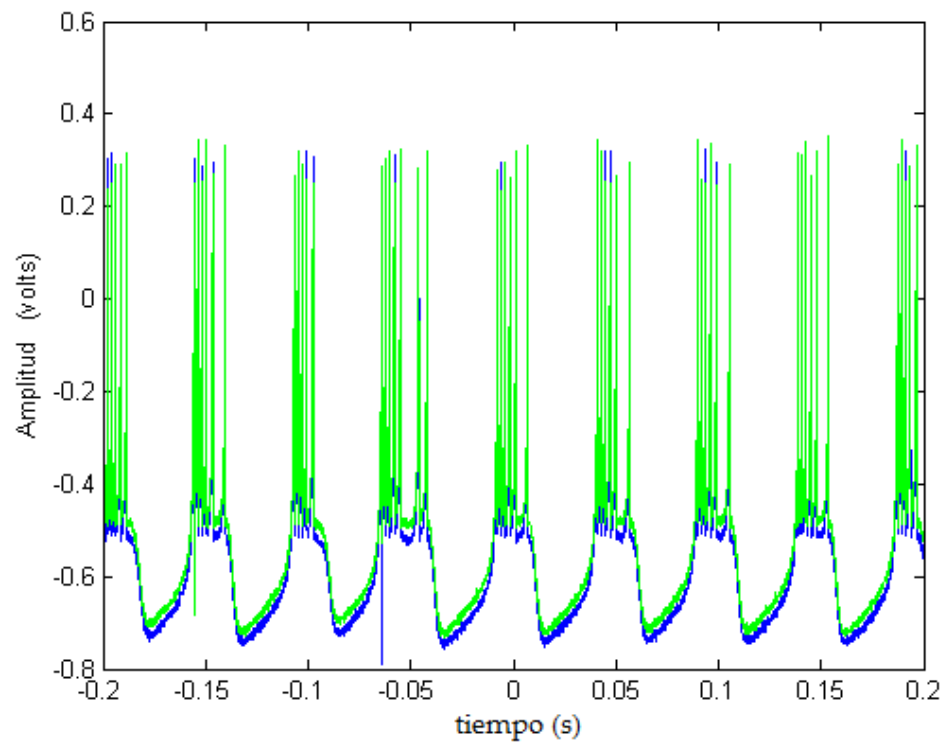


Figura 37. Validación experimental de la sincronización de 2 neuronas, usando el controlador lineal (78).

Capítulo 6. Conclusiones y recomendaciones

En este capítulo se presentan las conclusiones que se generaron durante mi periodo de investigación de este proyecto, también, y se presentan recomendaciones para futuras investigaciones.

6.1. Conclusiones

El modelo neuronal de Izhikevich no había podido ser implementado usando componentes analógicos, debido a la función de conmutación estática (“restauración estática”) con pendiente infinita. Sin embargo, gracias a la función de conmutación dinámica propuesta, fue posible implementar el modelo modificado de Izhikevich con circuitos analógicos y reproducir el comportamiento dinámico observado en el modelo original.

A pesar de la modificación a la función de conmutación, el modelo modificado de Izhikevich logra reproducir, de manera muy satisfactoria, los comportamientos dinámicos de “espigado” y “ráfagas” observados en el modelo original de Izhikevich. Esto se ivendencia por medio de simulaciones numéricas y, además, de forma experimental con el circuito electrónico diseñado y construido.

La aparición del comportamiento síncrono entre un par de neuronas tipo Izhkevich, se logró de forma analítica, numérica y experimental.

La dinámica del modelo modificado de Izhikevich fue representada mediante un automata híbrido con dos modos discretos de operación. También, se pudo extender el cálculo de los exponentes transversos de Lyapunov para sistemas con dos modos de operación con la finalidad de estudiar el comportamiento síncrono en una red neuronal.

6.2. Recomendaciones

En el desarrollo de circuitos electrónicos siempre se busca diseñar y construir circuitos con el menor número de componentes, que sean simples y con el más bajo consumo de energía posible. Por tanto, se recomienda incorporar una aproximación

del término cuadrático en el modelo (5), de tal manera que no se necesite usar un circuito multiplicador en la implementación del modelo, ya que éste es relativamente costoso y, además, presenta un consumo energético muy alto.

Así mismo, se recomienda desarrollar un procedimiento para encontrar, de manera óptima, el tiempo en que el sistema deba permanecer en la función de conmutación (36), es decir, en el modo q_2 del modelo modificado.

Literatura citada

- Ayers, J. y Witting, J. (2007). Biomimetic approaches to the control of underwater walking machines. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **365**(1850): 273–295.
- Ayers, J., Rulkov, N., Knudsen, D., Kim, Y.-B., Volkovskii, A., y Selverston, A. (2010). Controlling underwater robots with electronic nervous systems. *Applied Bionics and Biomechanics*, **7**(1): 57–67.
- Azevedo, F., R.B. Carvalho, L., Grinberg, L., Farfel, J., E.L. Ferretti, R., E.P. Leite, R., Jacob Filho, W., Lent, R., y Herculano-Houzel, S. (2009). Equal numbers of neuronal and nonneuronal cells make the human brain an isometrically scaled-up primate brain. *The Journal of comparative neurology*, **513**: 532–41.
- Cochocki, A. y Unbehauen, R. (1993). *Neural networks for optimization and signal processing*. John Wiley & Sons, Inc.
- Cormen, T. H. (2009). *Introduction to algorithms*. MIT press.
- De Schutter, B., Heemels, W., y Bemporad, A. (2003). Modeling and control of hybrid systems. *Lecture notes of the DISC course*, p. 4.
- Equihua, G. G. V. y Ramirez, J. P. (2018). Synchronization of hindmarsh-rose neurons via huygens-like coupling. *IFAC-PapersOnLine*, **51**(33): 186 – 191. 5th IFAC Conference on Analysis and Control of Chaotic Systems CHAOS 2018.
- FitzHugh, R. (1961). Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical journal*, **1**(6): 445–466.
- Guenther, F. H. (1995). Speech sound acquisition, coarticulation, and rate effects in a neural network model of speech production. *Psychological review*, **102**(3): 594.
- Haken, H. (2007). *Brain dynamics: an introduction to models and simulations*. Springer Science & Business Media.
- Hindmarsh, J. y Cornelius, P. (2005). The development of the hindmarsh-rose model for bursting. En: *Bursting: the genesis of rhythm in the nervous system*. World Scientific, pp. 3–18.
- Hindmarsh, J. y Rose, R. (1982). A model of the nerve impulse using two first-order differential equations. *Nature*, **296**(5853): 162.
- Hindmarsh, J. L. y Rose, R. (1984). A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proceedings of the Royal society of London. Series B. Biological sciences*, **221**(1222): 87–102.
- Hodgkin, A. L. y Huxley, A. F. (1952). A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of physiology*, **117**(4): 500–544.
- Hu, X., Liu, C., Liu, L., Ni, J., y Li, S. (2016). An electronic implementation for morris-lecar neuron model. *Nonlinear Dynamics*, **84**(4): 2317–2332.
- Izhikevich, E. M. (2000). Neural excitability, spiking and bursting. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **10**(06): 1171–1266.

- Izhikevich, E. M. (2003). Simple model of spiking neurons. *IEEE Transactions on neural networks*, **14**(6): 1569–1572.
- Izhikevich, E. M. (2004). Which model to use for cortical spiking neurons? *IEEE transactions on neural networks*, **15**(5): 1063–1070.
- Janglová, D. (2004). Neural networks in mobile robot motion. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, **1**(1): 2.
- Khalil, H. K. (2002). Nonlinear systems. *Upper Saddle River*.
- Koch, C. (2004). *Biophysics of computation: information processing in single neurons*. Oxford university press.
- Korkmaz, N., ÖZTÜRK, İ., y Kilic, R. (2016). Multiple perspectives on the hardware implementations of biological neuron models and programmable design aspects. *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, **24**(3): 1729–1746.
- Lewis, F. L., Yesildirek, A., y Liu, K. (1996). Multilayer neural-net robot controller with guaranteed tracking performance. *IEEE Transactions on Neural Networks*, **7**(2): 388–399.
- Lin, H., Antsaklis, P. J., *et al.* (2014). Hybrid dynamical systems: An introduction to control and verification. *Foundations and Trends® in Systems and Control*, **1**(1): 1–172.
- Linares-Barranco, B., Sanchez-Sinencio, E., Rodriguez-Vazquez, A., y Huertas, J. L. (1991). A cmos implementation of fitzhugh-nagumo neuron model. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, **26**(7): 956–965.
- Lygeros, J. (2004). Lecture notes on hybrid systems. En: *Notes for an ENSIETA workshop*. Citeseer.
- Lynch, N., Segala, R., y Vaandrager, F. (2003). Hybrid i/o automata. *Information and computation*, **185**(1): 105–157.
- Manoonpong, P., Pasemann, F., y Fischer, J. (2005). Modular neural control for a reactive behavior of walking machines. En: *2005 International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation*. IEEE, pp. 403–408.
- Mead, C. A. y Mahowald, M. A. (1988). A silicon model of early visual processing. *Neural networks*, **1**(1): 91–97.
- Morris, C. y Lecar, H. (1981). Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber. *Biophysical journal*, **35**(1): 193–213.
- Nagata, S., Sekiguchi, M., y Asakawa, K. (1990). Mobile robot control by a structured hierarchical neural network. *IEEE Control Systems Magazine*, **10**(3): 69–76.
- Nagumo, J., Arimoto, S., y Yoshizawa, S. (1962). An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*, **50**(10): 2061–2070.
- Nobukawa, S., Nishimura, H., y Yamanishi, T. (2017). Chaotic resonance in typical routes to chaos in the izhikevich neuron model. *Scientific reports*, **7**(1): 1331.

- Nummenmaa, L., Glerean, E., Viinikainen, M., Jääskeläinen, I. P., Hari, R., y Sams, M. (2012). Emotions promote social interaction by synchronizing brain activity across individuals. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **109**(24): 9599–9604.
- Pecora, L. M. y Carroll, T. L. (1998). Master stability functions for synchronized coupled systems. *Physical review letters*, **80**(10): 2109.
- Pena Ramirez, J. (2013). *Huygens' synchronization of dynamical systems: beyond pendulum clocks*. Tesis de doctorado, Ph. D. thesis, Eindhoven University of Technology.
- Pikovsky, A., Kurths, J., Rosenblum, M., y Kurths, J. (2003). *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, Vol. 12. Cambridge university press.
- Psaltis, D., Sideris, A., y Yamamura, A. A. (1988). A multilayered neural network controller. *IEEE control systems magazine*, **8**(2): 17–21.
- Rangan, V., Ghosh, A., Aparin, V., y Cauwenberghs, G. (2010). A subthreshold avlsi implementation of the izhikevich simple neuron model. En: *2010 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology*. IEEE, pp. 4164–4167.
- Reimbayev, R., Daley, K., y Belykh, I. (2017). When two wrongs make a right: synchronized neuronal bursting from combined electrical and inhibitory coupling. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **375**(2096): 20160282.
- Sanchez-Vives, M. V. y McCormick, D. A. (2000). Cellular and network mechanisms of rhythmic recurrent activity in neocortex. *Nature neuroscience*, **3**(10): 1027–1034.
- Steur, E., Tyukin, I., y Nijmeijer, H. (2009). Semi-passivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **238**(21): 2119–2128.
- Steur, E., Vromen, T., y Nijmeijer, H. (2017). Adaptive training of neural networks for control of autonomous mobile robots. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, **474**: 387–405.
- van Schaik, A., Jin, C., McEwan, A., y Hamilton, T. J. (2010). A log-domain implementation of the izhikevich neuron model. En: *Proceedings of 2010 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. IEEE, pp. 4253–4256.
- Vromen, T., Steur, E., y Nijmeijer, H. (2016). Training a network of electronic neurons for control of a mobile robot. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **26**(12): 1650196.
- Wagemakers, A. y Sanjuán, M. A. (2013). Electronic circuit implementation of the chaotic rulkov neuron model. *Journal of the Franklin Institute*, **350**(10): 2901 – 2910.
- Witsenhausen, H. (1966). A class of hybrid-state continuous-time dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **11**(2): 161–167.
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., y Vastano, J. A. (1985). Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **16**(3): 285–317.
- Woodman, M. M. y Jirsa, V. K. (2013). Emergent dynamics from spiking neuron networks through symmetry breaking of connectivity. *PLOS ONE*, **8**(5): 1–12.

- Wu, Y., Lu, W., Lin, W., Leng, G., y Feng, J. (2012). Bifurcations of emergent bursting in a neuronal network. *PLOS ONE*, **7**(6): 1–12.
- Zhao, Z. y Gu, H. (2017). Transitions between classes of neuronal excitability and bifurcations induced by autapse. *Scientific reports*, **7**(1): 1–15.

Anexo

Network training of electronic neurons

Student: Guillermo Ortega Morales

Supervisor: Prof. Dr. Henk Nijmeijer

September 2, 2019

Contents

1	Abstract	3
2	Introduction	3
2.1	Motivation	4
2.2	Objectives	5
2.3	Specific objectives	5
3	Preliminary	5
3.1	Neural models	5
3.1.1	Hodgking-Huxley model	5
3.1.2	Morris-Lecar model	6
3.1.3	FitzHugh-Nagumo model	6
3.2	The Hindmarsh-Rose neuronal model	6
4	Neural networks	8
4.1	Network synchronization: static coupling	8
4.2	Stability analysis: the master stability function approach	9
4.3	Network topologies	11
4.3.1	Fully connected network	11
4.3.2	Star network	12
4.3.3	Line network	13
5	Neural controller	15
5.1	The adaptive training procedure	17
5.2	Matlab implementation	18
5.2.1	Fully connected network	19
5.2.2	Star connected network	19
5.2.3	Line connected network	20
6	Experimental results	21
6.1	Adaptive training procedure	24
7	Conclusions	24
	References	26

1 Abstract

This paper focuses in the implementation of an adaptive training procedure for a network of electronics neurons. In the use of electronic neurons their response to the same input is different, e.g. due to manufacturing tolerances and noise. It is desired to have a proper functioning in the network of electronic neurons and it requires each node (neuron) produce identical response when the same input is applied. In order to reduce this variances, cluster of neurons are implemented instead a single neuron in the neural network controller and the clusters are trained such the output of the neurons in the cluster are synchronized and the collective response of the clusters are practically indistinguishable when the same input is applied. The working principle of the training is experimentally validated.

2 Introduction

The neurons are an essential component in the brain, recent studies have shown that the human brain has, in average, 86 billions of neurons [Azevedo et al., 2009] and appear to be connected in large networks, for example, humans brain's primary visual cortex contains 200 millions of neurons [Haken, 2007]. A group of neurons in the human brain can be synchronized, for example, emotions can synchronize group of neurons and promote social interaction [Nummenmaa et al., 2012].

In order to study the individual and collective behavior of the neurons, scientists have developed different mathematical models, which can reproduce the dynamic behavior or at least the wave form observed in a neuron, for example, the Hodgkin-Huxley model is a (4-D) four dimensional system and probably the most important model in neuroscience [Hodgkin and Huxley, 1952], the Morris-Lecar model [Morris and Lecar, 1981], the FitzHugh-Nagumo model, the Izhikevich model [Izhikevich, 2003] and Hindmarsh-Rose model is a (3-D) three dimensional system, with some constant and positive parameters, and depending on the choice of this parameters the behavior of the neuron can be in resting, spiking or bursting behavior [Hindmarsh and Rose, 1984].

The most important physical variable is the membrane potential, because of properties in the dynamical behavior, and its able to implement a variety of linear and non-linear operations [Koch, 2004]. Inspired in this properties of the individual and collective behavior, neural networks has become such important in the last years, and has applications in different areas such as signal processing [Cochocki and Unbehauen, 1993], visual processing [Mead and Mahowald, 1988], medicine, speech production [Guenther, 1995], business and control [Psaltis et al., 1988].

Examples of neural networks used for control purposes can be found in literature. For example, in [Manoonpong et al., 2005] a four-legged walking machine is controlled using a small modular neural network which is able to control the sensor-driven behavior of walking machines with many degrees of freedom, in [Lewis et al., 1996] a rigid robot arm is controlled using a neural network, the controller is derived using a filtered error/passivity approach, in [Nagata et al., 1990] a mobile robot using 12 sensors to monitor internal conditions and environmental changes is controlled using a structured hierarchical neural

network.

The response of each neuron is slightly different, due to manufacturing tolerances and noise. It is desired to have a proper functioning in the network of electronic neurons or electronic brain, and it requires to each node (neuron) produce identical responses when the same input is applied. To reduce this variances in the output of each nodes, in [Vromen et al., 2016] and [Steur et al., 2017], it is proposed to use clusters of neurons instead a single neuron in the neural network controller, and training the clusters such that:

1. The outputs of the neurons in a cluster are synchronized
2. The collective responses of the clusters are practically indistinguishable when the same input is applied.

The focus of this project is to implement the adaptive training procedure presented in [Steur et al., 2017] using Hindmarsh-Rose (HR) electronic neurons in a network to train the cluster and generate a network structure with desired collective input-output behavior using different topologies of connections. The Hindmarsh-Rose neuron is chosen because it is available in electronic circuits in the laboratory. It is semi-passive and synchronization can be achieved [Steur et al., 2009]. This training procedure is not limited only to Hindmarsh-Rose neurons, the theoretical results on semi-passivity and synchronization of neurons, [Steur et al., 2009], implies that this training will also work replacing the HR-neuron, for example, implementing this training procedure using Hodgking-Huxley neurons, Morris-Lecar neurons or FitzHugh-Nagumo neurons, as these neurons are also semi-passive, [Steur et al., 2009].

This report is organized as follows. In 2, different neural models are described and presents the electronic Hindmarsh-Rose neuron. In 3, is introduced to neural networks, the synchronous stability for Hindmarsh-Rose neuron is studied using the Master Stability Functions (MSFs) using different topologies. Next, in 4 is described the adaptive training procedure and simulation results are presented using different topologies. The results of the experiments of the adaptive training procedure using Hindmarsh-Rose electronics neurons are presented in 5. Finally, in 6 conclusions.

2.1 Motivation

Neural networks have a large number of applications, such as agricultural, automatic driving, transporting objects, optimization, signal processing, visual processing, business and control. Using the neurons and cluster of neurons is allowed to solve different tasks in short period of time and it is able to implement a variety of linear and non-linear operations.

In order to optimize, reduce costs and have a fast controller, in some cases, it is convenient to implement neurons in electronic circuits and use networks of this neurons. It is always desired to have a proper functioning in the network, and requires that each node (neuron) produce identical responses when the same input is applied.

To reduce the differences in the output of each node and have a network structure, the training procedure studied in this project proposes to change each single and use a cluster of neurons in the neural network controller, and that the collective response of the

clusters is practically indistinguishable when the same input is applied [Vromen et al., 2016] [Steur et al., 2017]. This allow us to implement the trained network in different tasks, for example, the control of mobile robots, autonomous navigation and signal processing.

2.2 Objectives

To implement a training procedure to reduce the difference in the output of each cluster of electronics neurons (electronic brain), to have the same response in different clusters when the same input is applied and to investigate the effect that, a failure in one or more of the electronic neurons composing the cluster, has on the controller performance.

2.3 Specific objectives

- a) To implement a training procedure for a neuronal network to reduce the differences in the output of each node.
- b) To investigate the effect of failures in neurons within the clusters of the electronic brain.
- c) To numerically and experimentally validate the theoretical results using electric neurons

3 Preliminary

Scientists have been developing different mathematical models in order to reproduce the dynamical behavior of the neurons, or at least the wave form. This models can reproduce different behaviors as "spiking", "bursting" and "chaotic bursting".

3.1 Neural models

3.1.1 Hodgking-Huxley model

In 1952, A. L. Hodgkin and A.F. Huxley [Hodgkin and Huxley, 1952], propose a mathematical model concerned for the flow of electric current through the surface membrane of a giant nerve fibre. Consider the equations:

$$\begin{aligned}
 C\dot{x}_1 &= g_{Na}x_2^3x_3(E_{Na} - x_1) + g_kx_4^4(E_k - x_1) + g_l(E_l - x_1) + I + u \\
 \dot{x}_2 &= \alpha_2(1 - x_2) - \beta_2x_1 \\
 \dot{x}_3 &= \alpha_3(1 - x_3) - \beta_3x_1 \\
 \dot{x}_4 &= \alpha_4(1 - x_4) - \beta_4x_1
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

where x_1 is the membrane potential, I is the synaptic current, C is the membrane capacity per unit area (assumed constant), E_{Na} and E_k are the equilibrium potentials for the sodium and potassium ions, E_l is the potential at which the 'leakage current' due to chloride and other ions is zero, g_{Na} , g_k and g_l are the ionic permeability of the membrane potential, α_i and β_i determines the rate of transfer from outside to inside and the opposite direction, respectively, where $i = 2, 3, 4$.

3.1.2 Morris-Lecar model

The Morris–Lecar model is a planar system that models the voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber [Morris and Lecar, 1981]. This model is given by the following equations:

$$\begin{aligned} C\dot{x}_1 &= I - g_l(x_L) - g_{Ca}M(x_1 - x_{Ca}) - g_kN(x_1 - x_k) \\ \dot{x}_2 &= \lambda_M(x_1)[x_{2\infty}(x_1) - x_2] \\ \dot{x}_3 &= \lambda_N(x_1)[x_{3\infty}(x_1) - x_3] \end{aligned} \quad (3.2)$$

where I is the applied current (synaptic current), g_l , g_{Ca} and g_k are the maximum or instantaneous conductances values for leak, x_L , x_{Ca} and x_k are the equilibrium potential corresponding to leak, $\lambda_N(x_1)$ and $\lambda_M(x_1)$ are the maximum rate constant for opening of Ca^{++} and k^+ channels (s^{-1}), $x_{2\infty}(x_1)$ and $x_{3\infty}(x_1)$ are fraction of open Ca^{++} and k^+ channels at steady state, x_1 is the membrane potential, x_2 and x_3 are the fraction of open Ca^{++} and k^+ channels.

3.1.3 FitzHugh-Nagumo model

This model is one of the simplest models of the spiking dynamics of neurons and it is represented by the following equations:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - \frac{x_1^3}{3} - x_2 + I + u \\ \dot{x}_2 &= \phi(x_1 + a - bx_2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

where x_1 represents the membrane potential of the neuron, a , b and ϕ are positive parameters, I represents the synaptic current and u is the input.

3.2 The Hindmarsh-Rose neuronal model

This research project is based in the neuronal model presented in september 1984 by J.L. Hindmarsh and R.M. Rose [Hindmarsh and Rose, 1984]. The model is a system of three coupled differential equations, with some constant and positive parameters. Depending on the choice of this parameters the neuron can be in "resting", "bursting", "spiking" or "chaos" behavior.

The Hindmarsh-Rose (HR) model is represented by Equations (??), (??), and (??). Where y represents the membrane potential which is the output of the neuron, z_1 and z_2 represents (internal) ionic currents, I represent the synaptic current of the neuron, where, modifying this parameter (I), the behavior of the neuron can vary $y_0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z_1 + by^2 - ay^3 - z_2 + I \\ \dot{z}_1 &= c - dy^2 - z_1 \\ \dot{z}_2 &= r[s(y - y_0) - z_2] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Defining the parameters a, b, c, d, r, s and, y_0 , different behavior can be obtained that are presented in the figures 3.1, 3.2 and 3.3.

$$a = 1, \quad b = 3, \quad c = 1, \quad d = 5, \quad r = 0.006, \quad s = 4, \quad x_0 = -1.6$$

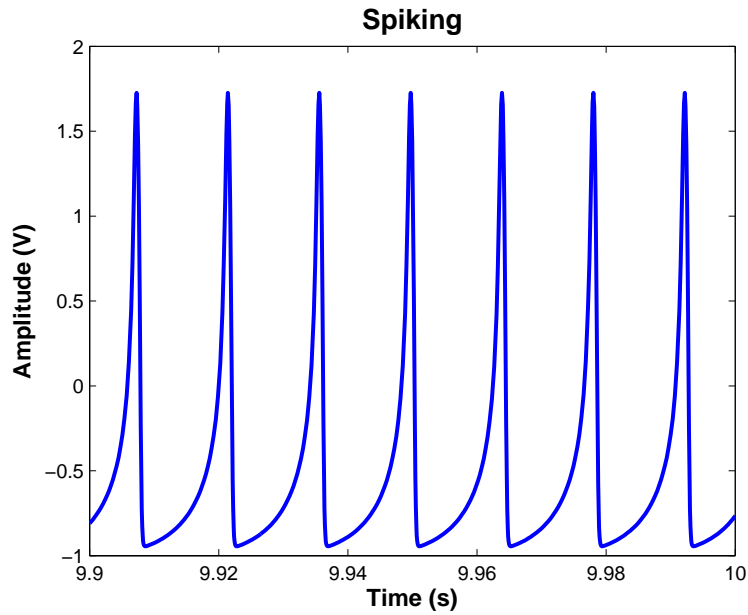


Figure 3.1: Hindmarsh-Rose in "Spiking" behavior, $I = 4.5$

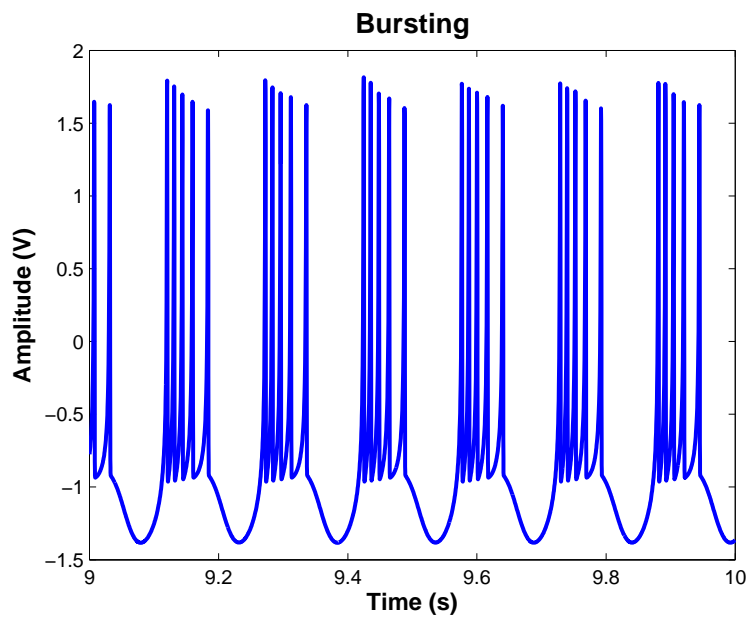


Figure 3.2: Hindmarsh-Rose in "bursting" behavior

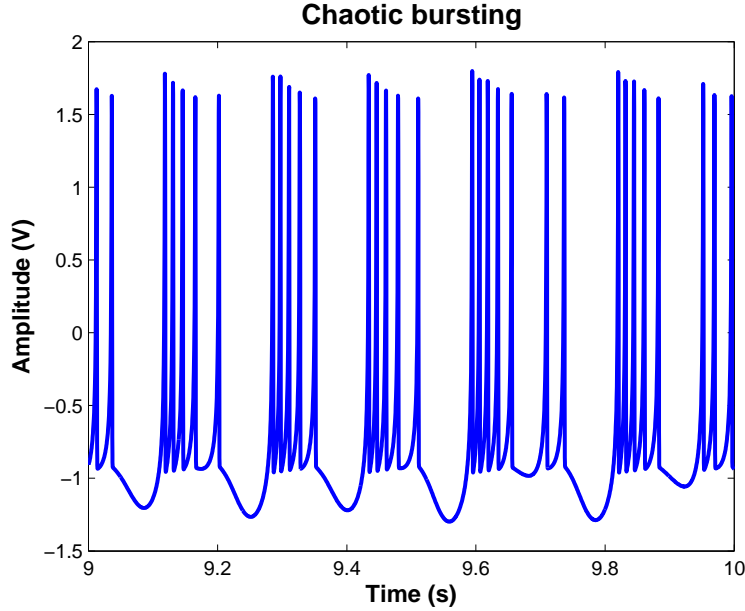


Figure 3.3: Hindmarsh-Rose in "chaotic bursting" behavior, $I=3.25$

In Steur et al. [2009] the semi-passivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators for different neurons is studied. The semi-passivity of the Hindmarsh-Rose neuron is studied in Oud and Tyukin [2004] and Steur et al. [2009].

4 Neural networks

4.1 Network synchronization: static coupling

Consider a network of dynamical systems of the form

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}^i) - k \sum_{j=1}^N G_{ij} \mathbf{w}(\mathbf{x}^j), \quad (4.1)$$

where $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^n$ is the state vector corresponding to node i , function $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ describes the isolated node dynamics, G_{ij} determines the strength of interaction between nodes i and j , function $\mathbf{w} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ describes which variables are used in the coupling, and k is the overall coupling strength.

By defining

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}^N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}^1) \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}^2) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}^N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(\mathbf{x}^1) \\ \mathbf{w}(\mathbf{x}^2) \\ \vdots \\ \mathbf{w}(\mathbf{x}^N) \end{bmatrix}, \quad \text{and } \mathbf{G} = [G_{ij}], \quad (4.2)$$

then Eq.(4.1) can be written in the compact form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - k\mathbf{G} \otimes \mathbf{W}(\mathbf{x}), \quad (4.3)$$

where the symbol \otimes denotes the Kronecker product.

The following assumptions are considered in the upcoming analysis with respect to the connectivity matrix \mathbf{G} :

A-1 The connectivity matrix \mathbf{G} has zero row sums and non-positive off-diagonal elements, i.e.

$$\sum_{j=1}^N G_{ij} = 0 \quad \text{and} \quad G_{ij} \leq 0 \quad \text{for } i \neq j. \quad (4.4)$$

A-2 The connectivity matrix \mathbf{G} has one zero eigenvalue and $N - 1$ positive eigenvalues, which can be sorted as follows

$$\gamma_1 = 0 < \gamma_2 \leq \gamma_3 \leq \dots \leq \gamma_N. \quad (4.5)$$

Furthermore, it is assumed that function $\mathbf{w}(\mathbf{x}^i)$ is a linear function of the form

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}^i) = \mathbf{C}\mathbf{x}^i, \quad (4.6)$$

where $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is a constant matrix.

Under this assumption Eq. (4.3) becomes

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - k\mathbf{G} \otimes \mathbf{C}\mathbf{x}. \quad (4.7)$$

A solution of Eq. 4.7 is called a synchronous solution if satisfies

$$\mathbf{x}^1(t) = \mathbf{x}^2(t) = \dots = \mathbf{x}^N(t) = \mathbf{s}(t), \quad (4.8)$$

where $\mathbf{s}(t)$ corresponds to the solution of an isolated node, i.e.

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{f}(\mathbf{s}), \quad (4.9)$$

and furthermore, it should be noted that $\mathbf{s}(t)$ is an exact solution of Eq. (4.7).

4.2 Stability analysis: the master stability function approach

The local stability of the synchronous solution (4.8) can be investigated by using the Master Stability Function approach. As a first step, Eq. (4.1) is linearized around $\mathbf{s}(t)$. This yields

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{f}(\mathbf{s}) - k \sum_{j=1}^N G_{ij} \mathbf{w}(\mathbf{s}) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^i} (\mathbf{x}^i - \mathbf{s}) - k \sum_{j=1}^N G_{ij} \frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^j} (\mathbf{x}^j - \mathbf{s}). \quad (4.10)$$

Replacing (4.6) in (4.10) and considering Assumption [A-2] yields

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{f}(\mathbf{s}) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^i} (\mathbf{x}^i - \mathbf{s}) - k \sum_{j=1}^N G_{ij} \mathbf{C}(\mathbf{x}^j - \mathbf{s}). \quad (4.11)$$

Next, the following synchronization errors are defined

$$\mathbf{e}^i := \mathbf{x}^i - \mathbf{s}. \quad (4.12)$$

Using (4.9) and Eq. (4.11), the following error dynamics is obtained

$$\dot{\mathbf{e}}^i = \dot{\mathbf{x}}^i - \dot{\mathbf{s}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^i} \mathbf{e}^i - k \sum_{j=1}^N G_{ij} \mathbf{C} \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.13)$$

This equation can be written in the following compact form

$$\dot{\mathbf{e}} = [\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{s}) - k\mathbf{G} \otimes \mathbf{C}] \mathbf{e}, \quad (4.14)$$

where $\mathbf{e} = [\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^N]^T$, $\mathbf{I}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ is the identity matrix, and $\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{s})$ is the Jacobian of function \mathbf{f} evaluated on the synchronous solution $\mathbf{s}(t)$, see Eq. (4.9).

This equation can be block-diagonalized, using the following transformation

$$\mathbf{e} = (\mathbf{V} \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mathbf{e}}, \quad (4.15)$$

where $\bar{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^{nN}$ is a new state vector, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ is the matrix of eigenvectors associated to the connectivity matrix \mathbf{G} , and $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is the identity matrix.

Applying this transformation to Eq. (4.15) and using some properties of the Kronecker product, yields the following block-diagonalized error dynamics

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}} = [\mathbf{I} \otimes \mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{s}) - k\Gamma \otimes \mathbf{C}] \bar{\mathbf{e}}, \quad (4.16)$$

where $\Gamma := \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ is a diagonal matrix containing the eigenvalues of \mathbf{G} , σ_i , $i = 1, 2, \dots, N$.

Hence, is easy to see that the error dynamics (4.16) consists of N blocks of the form

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}}^i = [\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{s}) - k\sigma_i \mathbf{C}] \bar{\mathbf{e}}^i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.17)$$

This equation is referred to as the *variational equation*.

As a final step in the analysis of the local stability of the synchronous solution (4.8), the i th largest transverse Lyapunov exponent for each variational equation (4.17), denoted by $\lambda_i^{\perp \max}$, is computed from the i th variational equation (4.17) as follows

$$\lambda_i^{\perp \max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |\bar{\mathbf{e}}^i(t)| - \ln |\bar{\mathbf{e}}^i(0)|}{t}. \quad (4.18)$$

Then, the following conditions for the local stability of the synchronous solution (4.8) are obtained

- If $\lambda_i^{\perp \max} < 0$, for all $i = 2, \dots, N$, the synchronous solution is locally stable.
- If $\lambda_i^{\perp \max} > 0$, for at least one $i = 2, \dots, N$, the synchronous solution is unstable.

Remark 1 *The eigenvalues of the connectivity matrix \mathbf{G} play a key role in determining the stability of the synchronous solution (4.8).*

4.3 Network topologies

4.3.1 Fully connected network

In a fully connected network all the nodes are interconnected, as shown in Figure 4.1, the number of connections (N_C) in this topology can be described as:

$$N_C = \frac{N(N-1)}{2}$$

where n describes the number of nodes in the network.

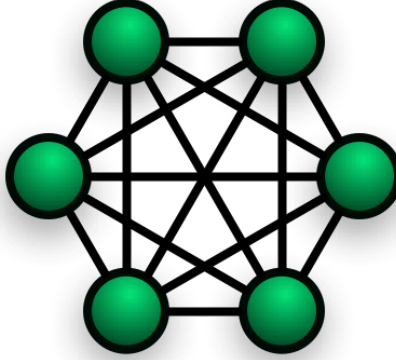


Figure 4.1: Fully connected network

The eigenvalues for this topology network can be calculated as:

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_i = -N, \quad \text{for } i = 2, 3, \dots, N \quad (4.19)$$

Consider a network of 5 nodes and the first state for each neuron is taken as the coupling output. The fully connectivity matrix and the coupling matrix are defined respectively, as:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0] \quad (4.20)$$

where the eigenvalues of \mathbf{G} are $\sigma_1 = 0$ and $\sigma_i = -5$, $i = 2, 3, 4, 5$.

Calculating the largest transverse Lyapunov exponent (4.18), and using the criteria for stability of the synchronous solution Pikovsky et al. [2003], the largest transverse Lyapunov exponents is shown in Figure 4.2, where the criterion to ensure a stable solution is shown in Equation (4.21).

$$k \geq 0.5 \quad (4.21)$$

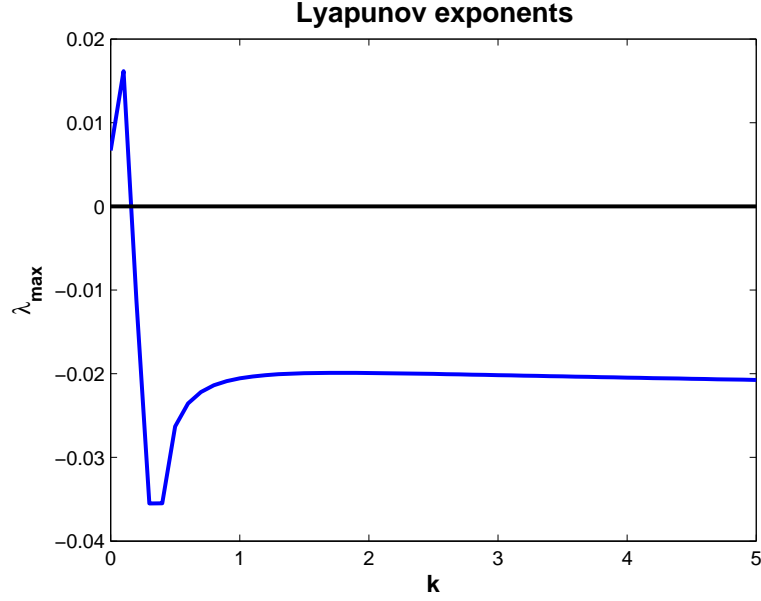


Figure 4.2: Largest transverse Lyapunov exponents for a 5 nodes network fully connected, where k is the coupling strength

4.3.2 Star network

In this network, each node is connected to a central node as shown in Figure 4.3. The connectivity matrix for a cluster of 5 nodes is defined:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

The eigenvalues of the connectivity matrix are defined by:

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_i = -1, \quad \sigma_5 = -5, \quad \text{where: } i = 2, 3, 4 \quad (4.23)$$

Calculating the largest transverse Lyapunov exponent, using the connectivity matrix (4.22) and \mathbf{C} defined in (4.20), the Lyapunov exponent is shown in figure 4.4, the solution is stable when:

$$k \geq 1.0 \quad (4.24)$$

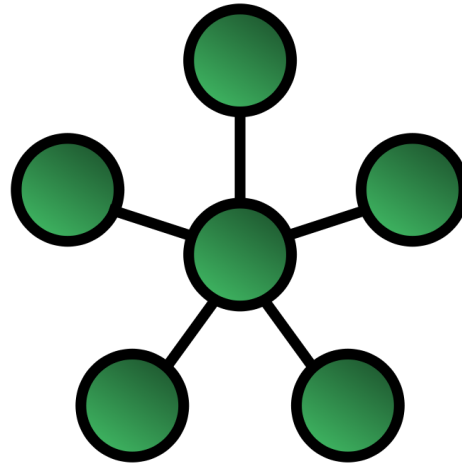


Figure 4.3: Star network

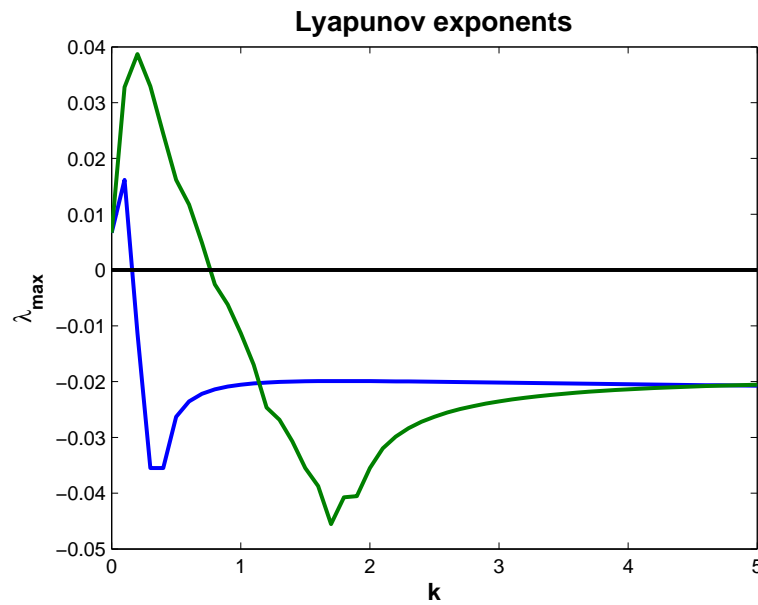


Figure 4.4: Largest transverse Lyapunov exponents for a 5 nodes network in star connection

4.3.3 Line network

This network is connected as shown in Figure 4.5. The connectivity matrix is defined:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

The eigenvalues for the connectivity matrix (4.25) are:

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -0.382, \quad \sigma_3 = -1.382, \quad \sigma_4 = -2.618, \quad \sigma_5 = -3.618, \quad (4.26)$$

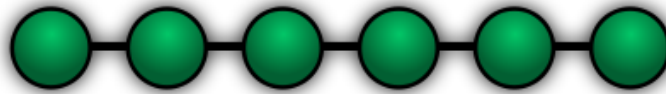


Figure 4.5: Line network

Calculating the largest transverse Lyapunov exponent, using the connectivity matrix (4.25) and coupling matrix (4.20), the solution is stable when $k \geq 2$, but in order to have stronger the synchronous stability, the coupling strength is chosen:

$$k \geq 3 \quad (4.27)$$

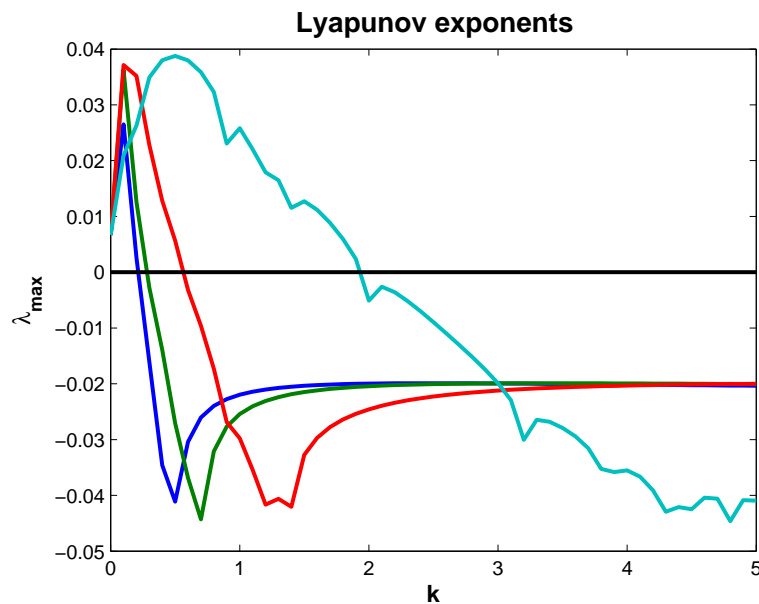


Figure 4.6: Largest transverse Lyapunov exponents for a 5 nodes network in line connectivity

5 Neural controller

As described before, the responses of the individuals Hindmarsh-Rose Neurons in electronic circuits are slightly different due to manufacturing tolerances and noise, as shown in figure 5.1. In order to obtain a desired output, from a neural network, is necessary to realize a training, where a reference parameter is chosen, and comparing the output of this neural network from the reference parameter, we need to choose an error the sufficient small to say the neural network is trained.

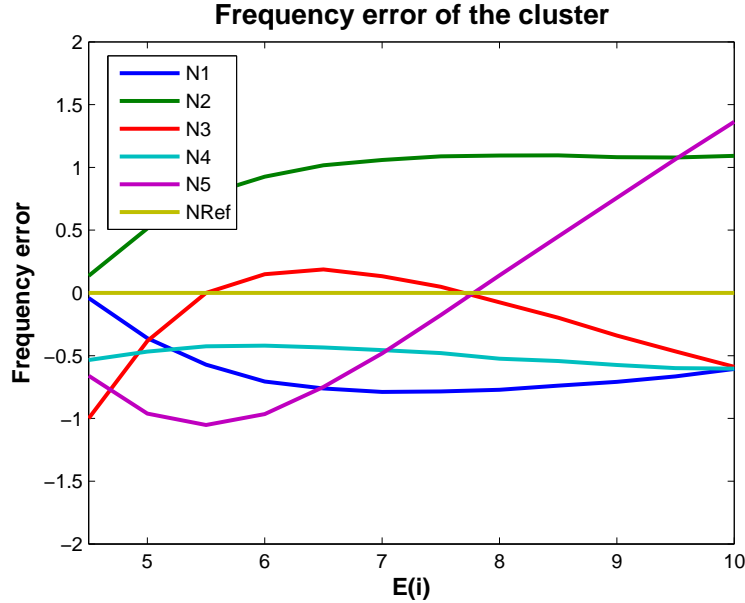


Figure 5.1: Hindmarsh-Rose model neuron in spiking behavior, $E(i)$ is the synaptic current of the neuron i , $i = 1, 2, \dots, N$, $4.5 \leq E(i) \leq 10$.

In the implementation of this neuronal model using electronics circuits, the behavior of the response of each system is slightly different, this is because each parameter value deviates from the nominal design value, e.g., due to manufacturing tolerances.

In the book chapter Steur et al. [2017] is presented the scaled equations of the HR neural model and the parameters for each neuron. The Equations (??), (??) and (??) describes the scaled dynamic behavior of the Hindmarsh-Rose neuron implemented in circuits and the parameters are described in Table 5.1, this parameters were estimated using extended Kalman filtering.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \tau(-P_1^i x_1^3 + P_2^i x_1 + P_3^i x_2 - P_4^i x_3 - P_5^i + P_6^i E_i(t) + u_i(t)) \\
 \dot{x}_2 &= \tau(-P_7^i (x_1^2) - P_8^i x_1 - P_9^i x_2) \\
 \dot{x}_3 &= \tau(P_{10}^i (P_{11}^i x_1 + P_{12}^i - x_3))
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

where $E_i(t)$ is the synaptic current of the neuron i , $4.5 \leq E_i(t) \leq 10$; and, $u_i(t)$ describes the interaction between Hindmarsh-Rose neurons in the cluster, and it is defined

as

$$u_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{C}_i} w_j \alpha_{ij} (y_j(t) - y_i(t)) \quad (5.2)$$

Where w_i and α_{ij} are positive parameters, w_i is used to modify the weight of the neuron i in the cluster, and α_{ij} is used to ensure synchronization.

Parameter	Neuron (i)					
	1	2	3	4	5	Ref
P1	1.0063	1.0112	0.9913	1.0061	1.0351	1.0080
P2	2.9905	2.9898	2.9581	2.9999	3.0026	2.9734
P3	4.9246	4.9491	4.9191	4.9819	4.9587	4.9191
P4	0.9888	0.9841	0.9981	0.9908	1.0023	0.9872
P5	7.9346	7.8532	7.9737	7.8814	7.9654	7.9038
P6	0.9949	0.9916	1.0031	0.9935	1.0029	0.9994
P7	1.0196	1.0161	0.9958	1.0074	1.0295	1.0142
P8	2.0255	2.0262	2.0039	2.0152	2.0119	2.0159
P9	1.0050	1.0044	0.9906	1.0034	1.0046	0.9954
P10(1000)	4.8458	4.8643	4.8605	4.8442	4.8333	4.9425
P11	4.0646	4.0427	4.0235	4.0317	4.0277	4.0702
P12	4.5447	4.6245	4.6363	4.6456	4.3949	4.6286

Table 5.1: Parameters of the electronic HR model neuron, taken from Steur et al. [2017]

In Vromen et al. [2016] a training of electronics neurons is described. It is based in the Hindmarsh-Rose neuron Hindmarsh and Rose [1984]. In the paper, it is proposed to use a cluster of neurons instead of a single neuron as nodes in the neuronal network controller, and training the clusters such that:

1. The outputs of the neurons in a cluster are synchronized.
2. The synchronized outputs of the clusters are (practically) indistinguishable when the same input is applied.

The main idea of this training is to choose a reference neuron and to train the clusters of neurons, by varying the coupling strength, if it is desired, add more neurons to the cluster, as described in the next training algorithm:

S1 Start (1 neuron)

S2 Add neuron to the cluster

S3 Synchronize neurons

S4 Change period time

S5 Return to S2

In order of the nature of this procedure (to add neurons and perform adaptation each time a new neuron is added) is inconvenient and requires a lot of time. So, in Steur et al. [2017] a new training procedure to synchronize all neurons in a cluster is presented:

- S1 Select an input E
- S2 Check and adapt synchronization
- S3 Check and adapt frequency
- S4 Check convergence (if yes stop, if not return to S1)

5.1 The adaptive training procedure

In the Matlab implementation, the equations and the parameters are shown in Equations (5.1) and table 5.1, respectively. The interaction between Hindmarsh-Rose neurons in the cluster (\mathbf{C}_l) is described by equation (5.2).

- S1 Initialize the training procedure with:

$$w_j = 1 \text{ and } \alpha_{ij} = 0, \quad i, j \in \mathbf{C}_l$$

and continue to S2

- S2 Determine the trajectories $y_i(t)$, $i \in \mathbf{C}_l$, and go to S3
- S3 Compute the synchronization for all neurons in the cluster, and go to S4.
- S4 Determine the collective firing rate $f_{\mathbf{C}_l}$ and compute the collective firing rate error

$$f_{\mathbf{C}_l} = \frac{1}{N} (f_{n_1} + f_{n_2} + \dots + f_{n_i}), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$f_e = \frac{|f_{\mathbf{C}_l} - f_{ref}|}{f_{ref}}$$

where f_e is the collective firing rate error, $f_{\mathbf{C}_l}$ is the collective firing rate, f_{n_i} is the frequency of the i neuron

- (a) If the firing rate error is smaller than e_f , stop!
- (b) Otherwise, compute for each neuron:

$$\Delta w_j = \eta w_j \left(\frac{f_j - f_{ref}}{f_{ref}} \right) \left(\frac{f_{ref} - f_{\mathbf{C}_l}}{f_{ref}} \right)$$

$$w_j \leftarrow w_j + \Delta w_j$$

where η is a predefined positive constant.

- (c) Go back to S2!

5.2 Matlab implementation

Connecting all the neurons in the cluster, the collective firing rate error is smaller than each neuron uncoupled, as shown in Figure 5.2 that represents the collective firing rate error of the synchronized cluster and Figure 5.1 where the frequency error of the uncoupled neurons are shown.

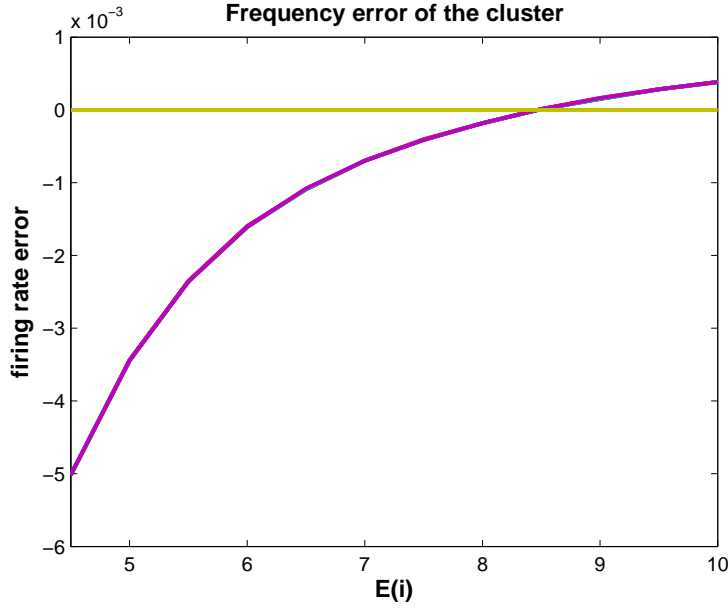


Figure 5.2: Frequency error of the synchronized cluster, $w_j = 1$

In Equation (5.2) the interaction between neurons is described, where w_i is used to modify the weight of the neuron i in the cluster and α_{ij} is used to ensure synchronization.

As the criterion to ensure a stable solution in a fully connected, star and a line network, described in Equations (4.21), (4.24) and (4.27) respectively; is defined:

$$w_i \alpha_{ij} = k \quad (5.3)$$

Solving for α_{ij} , the equation (5.3), results:

$$\alpha_{ij} = \frac{k}{\min(w_i)}; \text{ where } i = 1, 2, \dots, N \quad (5.4)$$

5.2.1 Fully connected network

Training the cluster of neurons for a fully connected network, the coupling strength to ensure synchronization is defined as $k = 2$. After finishing the training, the weight of the neurons are defined:

$$w_1 = 0.9553, w_2 = 1.1734, w_3 = 0.2445, w_4 = 0.5051, w_5 = 0.4201 \quad (5.5)$$

In Figure 5.3 the collective firing rate error of the trained cluster is presented where the error reduces in comparison to the untrained cluster, Figure 5.2.

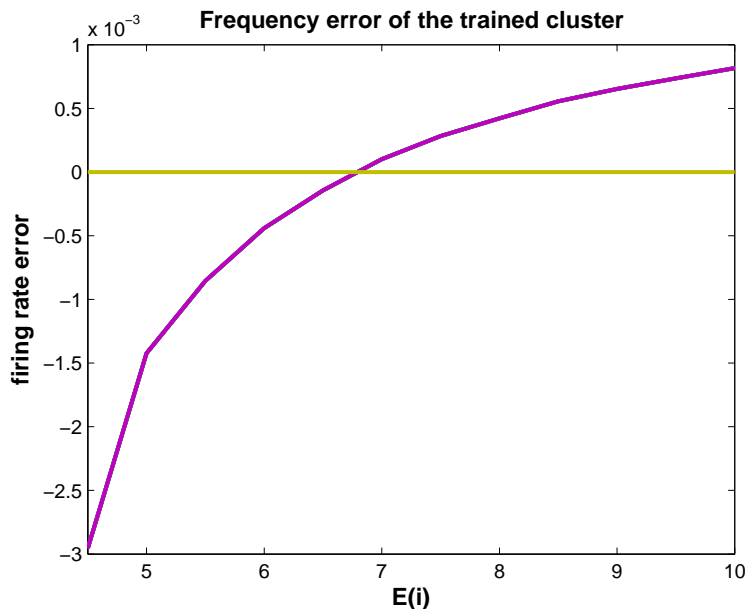


Figure 5.3: Frequency error of the trained cluster, fully connected network

5.2.2 Star connected network

Training the cluster of neurons for a star network, the coupling strength to ensure synchronization is defined as $k = 2$. After finishing the training, the weight of the neurons are defined:

$$w_1 = 0.9435, w_2 = 1.2249, w_3 = 0.1650, w_4 = 0.4191, w_5 = 0.3311 \quad (5.6)$$

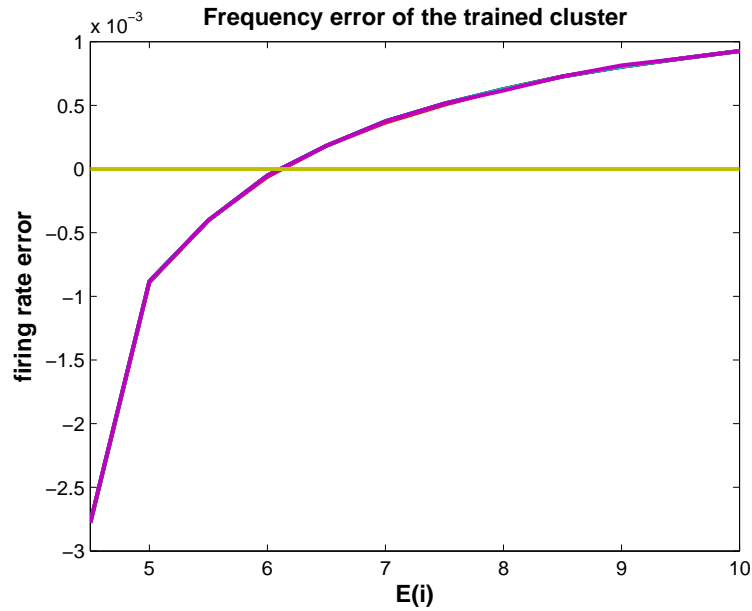


Figure 5.4: Hindmarsh-Rose model neuron in spiking behavior trained, star network

5.2.3 Line connected network

Training the cluster of neurons for a line connected network, the coupling strength to ensure synchronization is defined as $k = 3$. After finishing the training, the weight of the neurons are defined as:

$$w_1 = 0.9553, w_2 = 1.1734, w_3 = 0.2445, w_4 = 0.5051, w_5 = 0.4201 \quad (5.7)$$

Similar response is obtained in the training of the Line connected network, the firing rate error of the cluster varies $\delta \ll 1$ in comparison to others network structures.

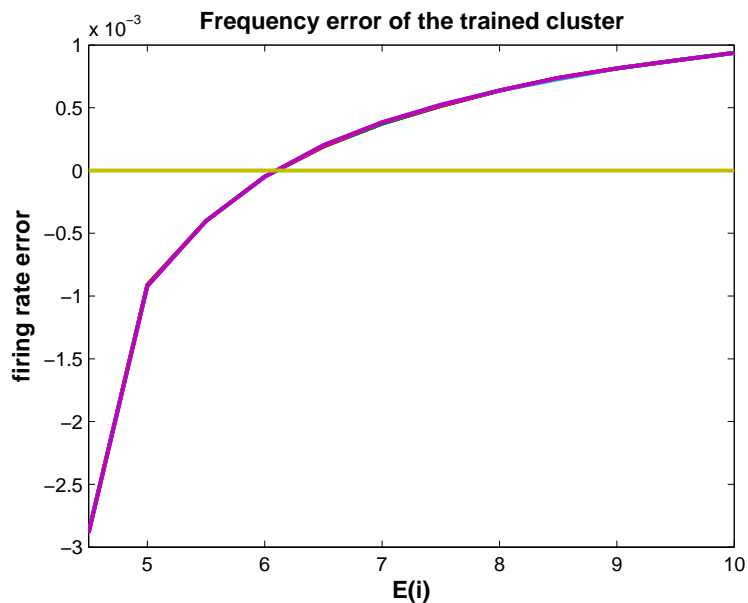


Figure 5.5: Hindmarsh-Rose model neuron in spiking behavior trained, line network

6 Experimental results

To validate the simulation results the experimental setup was used, shown Fig. 6.1, using the Hindmarsh-Rose electronic neurons, shown in Fig. 6.2, randomly chosen in the cluster and referencing the responses of the individual and collective electronic neurons to one neuron randomly chosen.

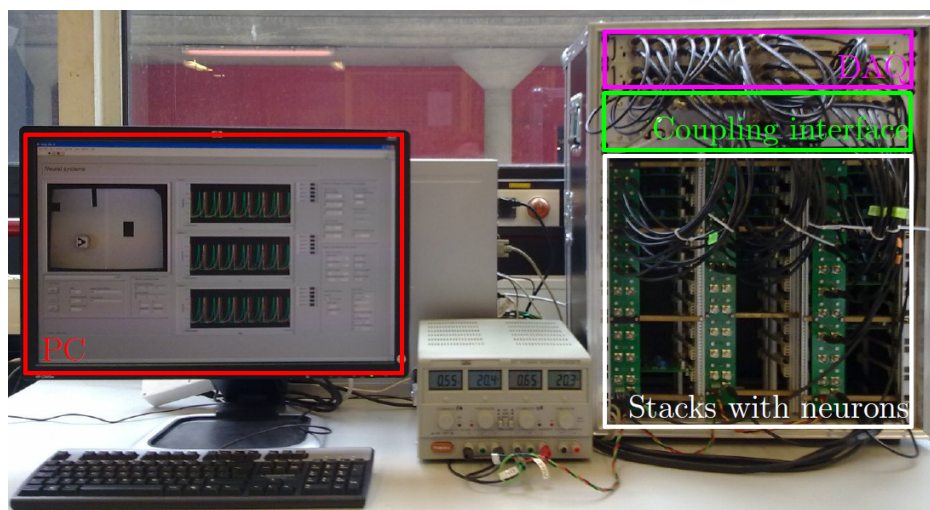


Figure 6.1: Photograph of the experimental setup, Vromen et al. [2016]

The experimental setup consists of a personal computer, a data acquisition device, a coupling interface and the electronic neurons which are placed in three different stacks representing the clusters in the input layer of the neuronal controller.

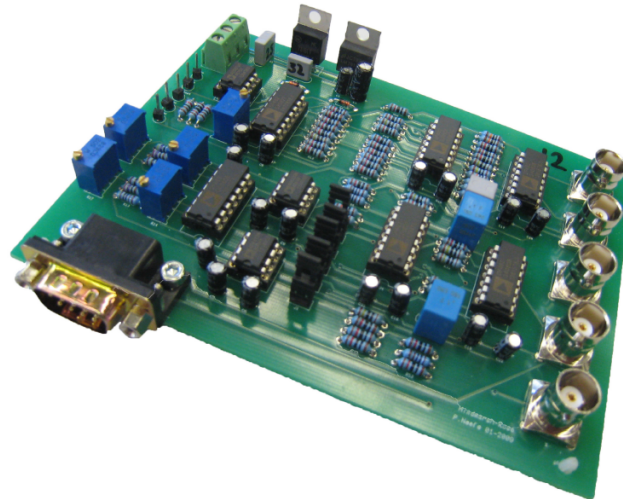


Figure 6.2: HR electronic neuron, Vromen et al. [2016]

In the implementation of this experimental results 6 neurons chosen randomly were used, 5 neurons were used to coupled in the cluster and 1 used as the referenced neuron. In the Figure 6.3 are shown the referenced firing rate errors of the uncoupled cluster. The frequency of all uncoupled neurons, as shown in Fig. 6.4, is $6 \leq f_j \leq 29$ for each neuron, with input $4.5 \leq E(i) \leq 10$

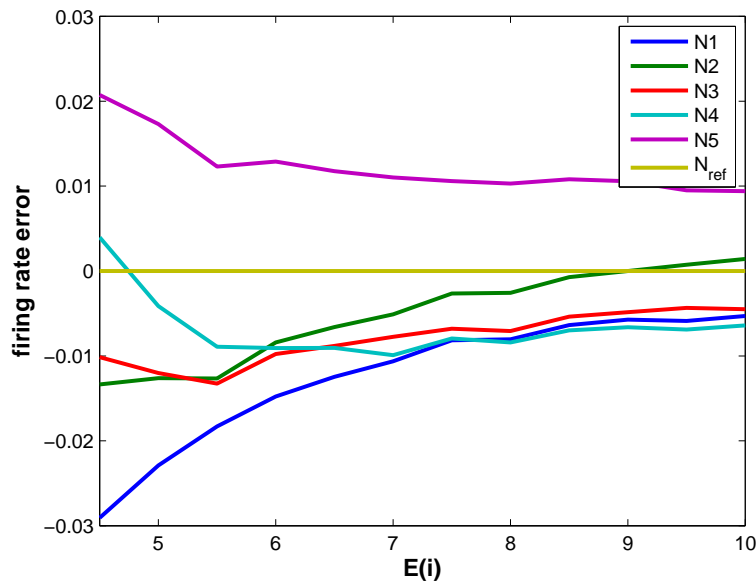


Figure 6.3: Hindmarsh-Rose model neuron uncoupled cluster

Coupling the neurons and ensuring synchronization in a fully connected network, the firing rate error of the synchronized cluster is shown in the Figure 6.5. Note that only coupling and ensuring synchronization of the cluster the firing rate error is smaller

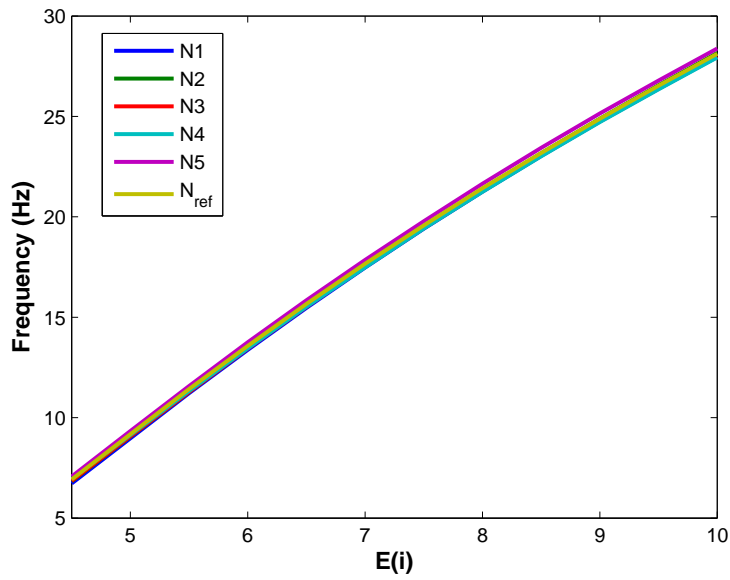


Figure 6.4: Frequency uncoupled cluster

in comparison to the uncoupled neurons, the weight of all neurons in the cluster have the same value (6.1).

$$w_i = 1, \text{ where: } i = 1, 2, 3, 4, 5 \tag{6.1}$$

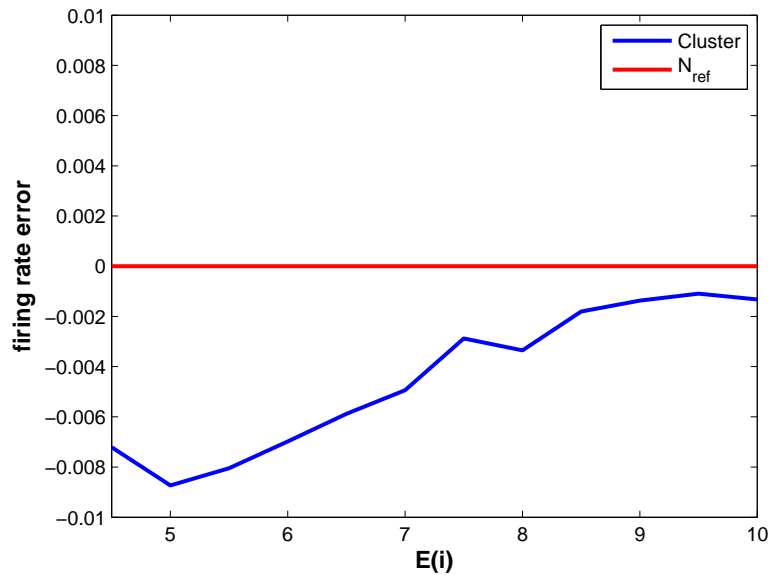


Figure 6.5: Cluster of HR neurons synchronized fully connected

6.1 Adaptive training procedure

Training the cluster of the neurons, after 6 iterations, the weight of the neurons in the network is represented in Equation (6.2).

$$w_1 = 0.828, w_2 = 1.0027, w_3 = 0.95, w_4 = 1.008, w_5 = 1.137 \quad (6.2)$$

In the figure 6.6 the firing rate error of the trained cluster is shown.

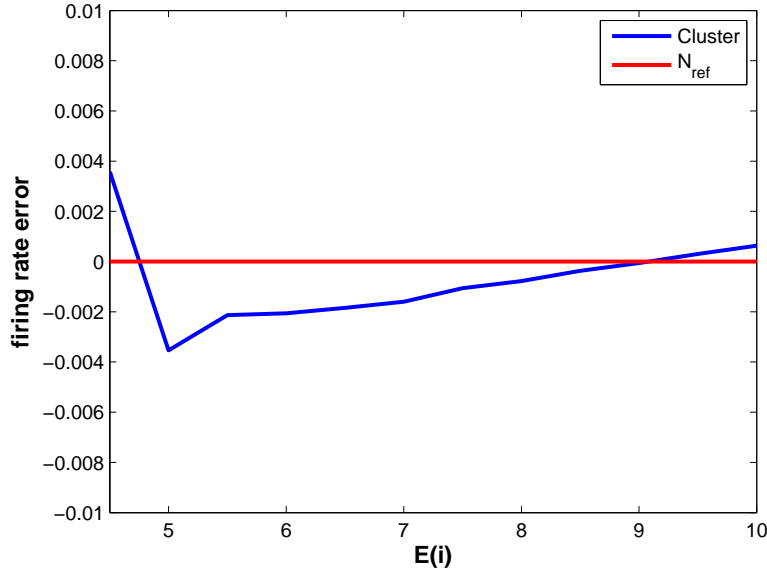


Figure 6.6: Cluster of HR neurons trained, in star coupling

In the Figure 6.7 the comparison between simulation and experimental results is shown. The simulation results are obtained for the fully connected network, and shown in Figure 5.4, the absolute maximum firing rate error is ‘0.0029’ when $E(i) = 4.5$. The maximum firing rate error result obtained in the experimental implementation is ‘0.0035’ when $E(i) = 4.5$.

7 Conclusions

As the values of components are slightly different, e.g., due to manufacturing tolerances, the experimental response of neurons in electronics circuits deviates slightly from the ideal response. In order to obtain a response practically indistinguishable when the same input is applied, it is necessary to realize a training. The training procedure implemented in this project, proposes to change the nodes (single neurons) by a cluster of neurons, and training the network by varying the weight of each neuron in the cluster.

The trained network structure achieves the collective response of the cluster practically indistinguishable to the referenced neuron, as shown in Figure 6.7, where the absolute of the collective firing rate error is $|f_1| \leq 0.004$. This results were implemented in simulation

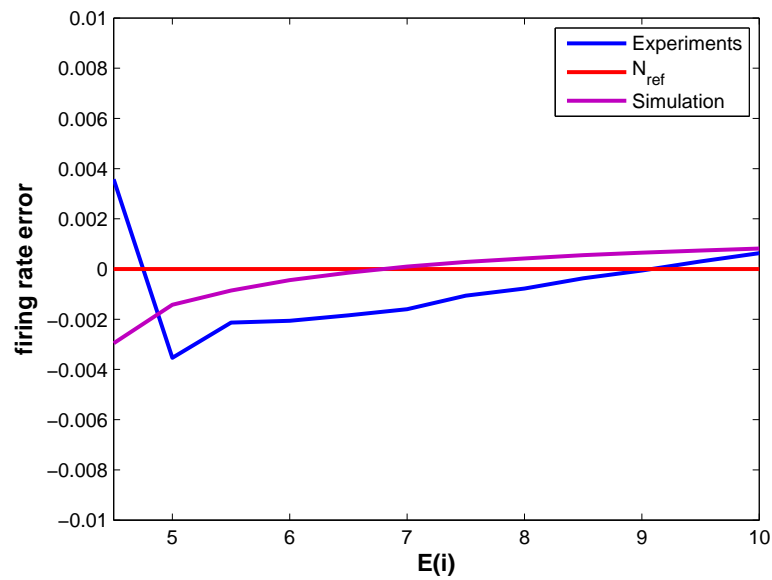


Figure 6.7: Frequency error of the trained cluster in simulation and experimental results, fully connected network

(using Matlab) and experimentally validated (using clusters of Hindmarsh-Rose electronic neurons), see Figure 6.1.

These responses of the trained clusters can be implemented for different tasks, for example, in the control of mobile robots Vromen et al. [2016] Steur et al. [2017].

References

- F. Azevedo, L. R.B. Carvalho, L. Grinberg, J. Farfel, R. E.L. Ferretti, R. E.P. Leite, W. Jacob Filho, R. Lent, and S. Herculano-Houzel. Equal numbers of neuronal and nonneuronal cells make the human brain an isometrically scaled-up primate brain. *The Journal of comparative neurology*, 513:532–41, 04 2009. doi: 10.1002/cne.21974.
- A. Cochocki and R. Unbehauen. *Neural networks for optimization and signal processing*. John Wiley & Sons, Inc., 1993.
- F. H. Guenther. Speech sound acquisition, coarticulation, and rate effects in a neural network model of speech production. *Psychological review*, 102(3):594, 1995.
- H. Haken. *Brain dynamics: an introduction to models and simulations*. Springer Science & Business Media, 2007.
- J. L. Hindmarsh and R. Rose. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proceedings of the Royal society of London. Series B. Biological sciences*, 221(1222):87–102, 1984.
- A. L. Hodgkin and A. F. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of physiology*, 117(4):500–544, 1952.
- E. M. Izhikevich. Simple model of spiking neurons. *IEEE Transactions on neural networks*, 14(6):1569–1572, 2003.
- C. Koch. *Biophysics of computation: information processing in single neurons*. Oxford university press, 2004.
- F. L. Lewis, A. Yesildirek, and K. Liu. Multilayer neural-net robot controller with guaranteed tracking performance. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 7(2):388–399, 1996.
- P. Manoonpong, F. Pasemann, and J. Fischer. Modular neural control for a reactive behavior of walking machines. In *2005 International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation*, pages 403–408. IEEE, 2005.
- C. A. Mead and M. A. Mahowald. A silicon model of early visual processing. *Neural networks*, 1(1):91–97, 1988.
- C. Morris and H. Lecar. Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber. *Biophysical journal*, 35 1: 193–213, 1981.
- S. Nagata, M. Sekiguchi, and K. Asakawa. Mobile robot control by a structured hierarchical neural network. *IEEE Control Systems Magazine*, 10(3):69–76, 1990.
- L. Nummenmaa, E. Glerean, M. Viinikainen, I. P. Jääskeläinen, R. Hari, and M. Sams. Emotions promote social interaction by synchronizing brain activity across individuals. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 109(24):9599–9604, 2012.
- W. T. Oud and I. Tyukin. Sufficient conditions for synchronization in an ensemble of hindmarsh and rose neurons: Passivity-based approach. *IFAC Proceedings Volumes*, 37(13):441–446, 2004.
- A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, and J. Kurths. *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, volume 12. Cambridge university press, 2003.

- D. Psaltis, A. Sideris, and A. A. Yamamura. A multilayered neural network controller. *IEEE control systems magazine*, 8(2):17–21, 1988.
- E. Steur, I. Tyukin, and H. Nijmeijer. Semi-passivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 238(21):2119–2128, 2009.
- E. Steur, T. Vromen, and H. Nijmeijer. Adaptive training of neural networks for control of autonomous mobile robots. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 474:387–405, 2017.
- T. Vromen, E. Steur, and H. Nijmeijer. Training a network of electronic neurons for control of a mobile robot. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 26(12):1650196, 2016.

A modified hybrid Izhikevich neuron: modeling, synchronization, and experiments^{*}

Guillermo Ortega^{*} Ricardo Nunez^{*} Jonatan Pena Ramirez^{**}

^{} Center for Scientific Research and Higher Education at Ensenada (CICESE), Department of Electronics and Telecommunications Carr. Tijuana-Ensenada 3918, Zona Playitas, 22860 Ensenada, B.C., Mexico (email: ortegamg@cicese.edu.mx; rnunez@cicese.mx)*

*^{**} CONACYT-CICESE. Applied Physics Division. Department of Electronics and Telecommunications, Carr. Ensenada-Tijuana 3918, Zona Playitas, C.P. 22860, Ensenada, B.C. Mexico (email: jpena@cicese.mx)*

Abstract: The original Izhikevich neuronal model is described by a nonlinear mathematical model with a static reset map. Due to the fact that the reset is applied instantaneously, it is not easy to implement this model with analog circuits. Consequently, this paper presents a modified Izhikevich neuronal model, in which the static and instantaneous reset is replaced by a dynamic reset, which is physically implementable. Furthermore, the resulting system is modeled as a hybrid system with two discrete modes. Additionally, the occurrence of synchronization in a pair of modified Izhikevich neurons is investigated and a comment on the local stability of the synchronous solution is given. Ultimately, the performance of the modified Izhikevich model is experimentally validated using electronic circuits.

Keywords: Izhikevich model, hybrid system, dynamic reset, neuronal dynamics, electronic neuron

1. INTRODUCTION

There exist several mathematical models aiming to describe the dynamic behavior observed in a neuron cell. These models may be classified according to their complexity or according to the type of behavior(s) they can reproduce. On the other hand, some of these models are biologically inspired, as the Hodgkin-Huxley model (Hodgkin and Huxley, 1990), whereas others are computationally efficient, as the integrate-and-fire models (Jolivet et al., 2004).

Among the existing models, the Hodgkin-Huxley model is considered as one of the most complete models in the sense that it allows explaining, in a qualitative and quantitative manner, the generation of the action potential in the squid giant axon. However, due the complexity of this model, simplified models which mainly focus on the membrane potential, have been developed. This is the case of the Izhikevich model, (Izhikevich, 2003), which is biologically inspired and computationally efficient. The Izhikevich model is a nonlinear model with a static reset map. When the variable describing the membrane potential reaches a certain upper threshold value the state of the system is reset instantaneously to a fixed value. Although the reset map can be easily implementable in software, its physical implementation with standard analog circuits is not an easy task, as mentioned in (Kormaz et al., 2016).

Note that a physical implementation with electronic circuits may be desirable, specially for the cases of large arrays of coupled neurons, where a physical implementation is much faster than the computer simulations, see e.g. (Wagemakers and Sanjuán, 2013).

This paper presents a modified Izhikevich model, in which the original static reset map is replaced by a dynamic reset. This modification allows a relatively easy physical implementation of the Izhikevich model.

The theory of hybrid systems is used in the modeling and a design procedure for tuning the dynamic coupling is provided. Additionally, the modified Izhikevich neuron is implemented with electronic circuits and a controller is designed to induce synchronous behavior in a pair of neurons. Ultimately, the proposed modified model is validated numerically and experimentally.

The outline of this paper is as follows. First, the original Izhikevich model is briefly described in Section 2. Then, the problem statement is given in Section 3. Next, the design of the proposed dynamic reset and the resulting Izhikevich model are presented in Section 4, and Section 5 presents the design of a simple controller to synchronize a pair of modified Izhikevich models. After that, the physical implementation with electronic circuits of the system and some experiments on synchronization are provided in Section 6. Finally, a discussion and some conclusions are provided in Section 7.

^{*} Partially supported by CONACYT Mexico

2. IZHIKEVICH MODEL

The Izhikevich model is described by the following set of equations (Izhikevich, 2003)

$$\dot{x}_1 = 0.04x_1^2 + 5x_1 + 140 - x_2 + I, \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = a(bx_1 - x_2), \quad (2)$$

with the auxiliary after-spike resetting

$$\text{if } x_1 \geq r_1, \text{ then } \begin{cases} x_1 \leftarrow c \\ x_2 \leftarrow x_2 + d, \end{cases} \quad (3)$$

where $x_1 \in \mathbb{R}$ and $x_2 \in \mathbb{R}$ represent the membrane potential of the neuron and the membrane recovery variable, respectively. The parameter a describes the time scale of x_2 and parameter b describes the sensitivity of x_2 to the subthreshold fluctuations of x_1 . On the other hand, I denotes the synaptic currents or injected dc-currents.

Note that when the membrane potential x_1 reaches the upper threshold value r_1 , the state of the system is reset according to (3), where $r_1 = 30mV$.

Depending on the value of the parameter values a , b , c and d , different types of neuronal behavior can be reproduced by model (1)-(3). For example, regular spiking, bursting, fast spiking, low-threshold spiking, among others (Izhikevich, 2004; Nobukawa et al., 2015)

3. PROBLEM STATEMENT

The reset function (3) of the Izhikevich model updates *instantaneously* the value of the variables x_1 and x_2 in Eqs. (1)-(2). Although this reset can be easily implemented in numerical simulations, its physical implementation with analog circuits turns out to be complicated, see e.g. (Kormaz et al., 2016) (?). (?).

Therefore, the problem addressed in this paper consists in finding a suitable replacement for the reset function (3), such that it can be implemented with analog circuits and without affecting the dynamic behavior observed in the original Izhikevich system (1)-(3).

To achieve this, the theory of modeling hybrid systems is used.

4. MODIFIED IZHIKEVICH MODEL

In this section, a modified Izhikevich system is presented. As a first step, the reset function (3) is replaced by the following dynamic reset

$$\text{if } x_1 \geq r_1, \text{ then } \begin{cases} \dot{x}_1 = -\gamma(x_1 - c), \\ \dot{x}_2 = \beta, \\ \dot{z} = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Note that in the dynamic reset we have included a time variable z which play the key role of determining the amount of time that the system trajectories spend in the dynamic reset mode (4). Specifically, while $z < r_2$ for certain suitably chosen $r_2 > 0$, the system evolves according to (4). After that, at $z = r_2$, the system ‘jumps back’ to Eqs (1)-(2).

Consequently, the modified Izhikevich system can be modeled by the hybrid automaton given in Figure 1. From the automaton it is clear that the system operates in two discrete modes: the mode q_1 , in which the dynamics are exactly the dynamics (1)-(2) of the original Izhikevich model and mode q_2 , which is the proposed dynamic reset (4).

Initially, the system starts in mode q_1 and evolves in this mode according to (1)-(2). Then, when the membrane potential x_1 reaches the upper-threshold value r_1 , the system jumps to mode q_2 , i.e. to the dynamic reset.

In mode q_2 besides the equations describing the time evolution of x_1 and x_2 , there is an additional variable, namely z , which is a time variable. Then, the values of γ and β in the dynamic equations describing x_1 and x_2 in mode q_2 are chosen such that when $z = r_2$, it holds that $x_1 \approx c + \delta$, $\delta \ll 0$ and $x_2 = x_2(0) + d$.

Note that, we are considering the practical case where $x_1 \approx c + \delta$ and not the ideal case where $x_1 = c + \delta$. This is due to the fact that the equality only holds when $t \rightarrow \infty$. However, the system remains in the reset mode q_2 for a finite and short period of time.

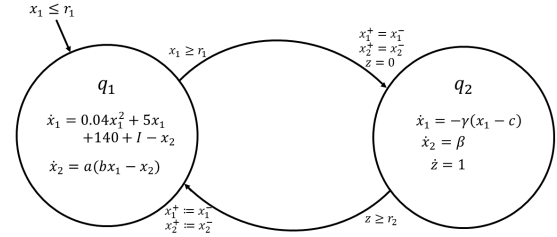


Fig. 1. Hybrid automaton for the modified Izhikevich neuron

4.1 How to determine the values of γ and β in the dynamic reset (4)

This part provides an algorithm for computing the values of γ , β , and r_2 in the dynamic reset (4).

First, from the first equation in (4) it follows that

$$x_1(t) = (x_1(0) - c)e^{-\gamma t} + c, \quad (5)$$

where $x_1(0) = r_1$. Ideally, it is desired that $x_1(t) = c$ but this only occurs in the limit when $t \rightarrow \infty$. Instead, the practical value of interest of $x_1(t)$ is $x_1(t) = \delta + c$. In other words, we are interested in the value of x_1 when the transient part of (5) satisfies

$$(x_1(0) - c)e^{-\gamma t} = \delta, \quad (6)$$

for certain $\delta \ll 0$.

Then, the time at which (6) is satisfied is given by

$$t_\delta := -\frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{\delta}{x_1(0) - c} \right). \quad (7)$$

Alternatively, the value of γ can be obtained from (6), i.e.

$$\gamma = -\frac{1}{t_\delta} \ln \left(\frac{\delta}{x_1(0) - c} \right). \quad (8)$$

Finally, note that the argument of the logarithmic function in (7) is very small and consequently $t_\delta > 0$.

On the other hand, from the second equation in (4) it follows that

$$x_2(t) = \beta \int_0^t dt + x_2(t_0), \quad (9)$$

$$= \beta t + x_2(0). \quad (10)$$

From (3) it follows that the desired value of $x_2(t)$ at time t_δ is

$$x_2(t_\delta) = x_2(0) + d. \quad (11)$$

Hence, from Eq. (10) it follows that (11) is satisfied if

$$\beta = \frac{d}{t_\delta}. \quad (12)$$

By replacing t_δ , given in (7) into (12) yields

$$\beta = -\frac{d\gamma}{\ln \left(\frac{\delta}{x_1(0) - c} \right)}. \quad (13)$$

Finally, it should be noted that the time the system spends in mode q_2 is t_δ . Hence, the value of the threshold value r_2 , see Figure 1 is

$$r_2 = t_\delta = -\frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{\delta}{x_1(0) - c} \right). \quad (14)$$

This procedure is schematically depicted in Figure 2, where the evolution of the system dynamics in mode q_2 , i.e. during the dynamic reset, is explained. The left plot shows the time evolution of x_1 , whereas the top and bottom plots on the right depict the time evolution of x_2 and z , respectively.

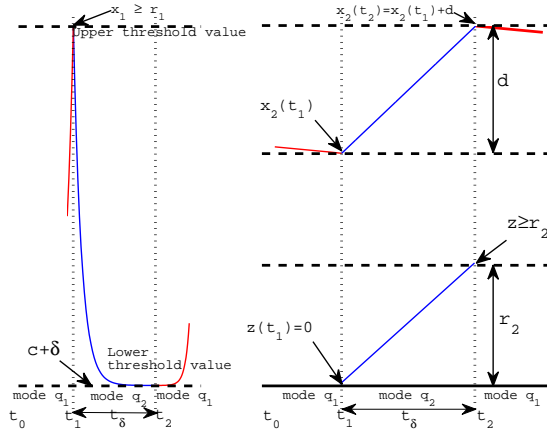


Fig. 2. Time evolution of the system during the dynamic reset (4). The time that the system spends in this mode is denoted by t_δ , see Eq. (7).

Algorithm for tuning the parameters in the dynamic reset:

- (1) Choose a transient time $t_\delta \ll 0$ and a $\delta \ll 0$
- (2) Find the value of γ from Eq. (8)
- (3) Find the value of β from Eq. (13)

4.2 Numerical results

In this part, a numerical comparison between the original Izhikevich model (1)-(3) and the modified model derived here described by Eqs. (1),(2) with dynamic reset (4), is provided. Consequently, Eqs. (1)-(3) and Eqs. (1)-(2) with dynamic reset (4) are numerically integrated by using the following parameter values $a = 0.002$, $b = 0.2$, and $I = 15$. Two cases are considered, namely, the case of regular spiking ($c = -65$ and $d = 6$) and bursting ($c = -50$ and $d = 2$). For the former case the values of the dynamic reset are $t_\delta = 50\mu s$ and $\delta = 0.0043$ and consequently $\gamma = 200000$ and $\beta = 12000$. For the case of bursting the values of the dynamic reset are $t_\delta = 50\mu s$, $\delta = 0.0043$, $\gamma = 1.9662e5$ and $\beta = 40000$.

The obtained results are shown in Figure 3, where the plots on the left correspond to the original Izhikevich model, whereas the plots on the right correspond to the modified Izhikevich model. Clearly, the obtained results are in good agreement.

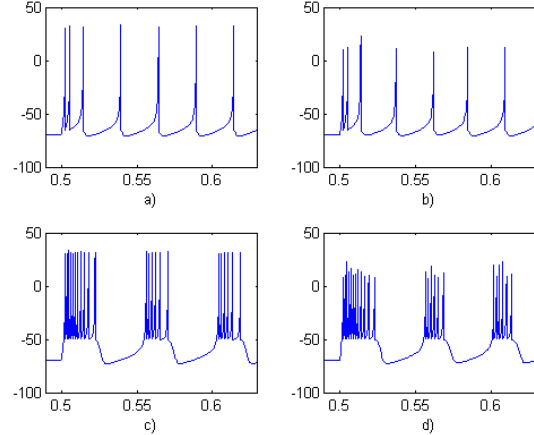


Fig. 3. Panels a) and c): time series obtained with the original Izhikevich model. Panels b) and d): time series for the modified Izhikevich model.

5. SYNCHRONIZATION OF A PAIR OF MODIFIED IZHIKEVICH MODELS

This section presents the design of a controller for inducing synchronization in a pair of modified Izhikevich models coupled in a master-slave configuration.

The master system is described by

$$\Sigma_M : \begin{cases} \dot{x}_m = F(x_m), \\ y_m = Cx_m, \end{cases} \quad (15)$$

and the slave system

$$\Sigma_S : \begin{cases} \dot{x}_s = F(x_s) + Bu_s, \\ y_s = Cx_s, \end{cases} \quad (16)$$

where $x_i \in \mathbb{R}^2$ and $y_i \in \mathbb{R}$, $i = m, s$ are the state and output, of master and slave systems, respectively, and $F(x_i)$ is a nonlinear function containing the intrinsic dynamics of Izhikevich model, and is given by

$$F(x_i) = \begin{bmatrix} 0.04x_{i1}^2 + 5x_{i1} + 140 + I - x_{i2} \\ a(bx_{i1} - x_{i2}) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

where a, b , and I are positive parameters and $i = m, s$. Furthermore, each system has a dynamic reset (4) and

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0]. \quad (18)$$

The static feedback control input u_s applied to the slave system is

$$u_s = k(y_m - y_s) = kC(x_m - x_s), \quad (19)$$

where $k \in \mathbb{R}_+$ is the coupling strength.

The synchronization problem reduces to find a suitable value of coupling strength k , such that the master and slave system synchronize, at least locally, such that the following is satisfied

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x_m(t) - x_s(t)) = 0. \quad (20)$$

5.1 A comment on the local stability of the synchronous solution

The (global) stability analysis of the synchronous solution (20) in the coupled systems (15)-(16) is not a trivial task, in part because of the hybrid nature of the system. However, under some assumptions it is possible to get some insight into this issue.

Therefore, let assume that the master and slave modified Izhikevich neurons start in mode q_1 , see Figure 1, and furthermore, let assume that the systems synchronize before the reset takes place.

Then, by defining the synchronization error as $e = x_m - x_s$, yields the following error dynamics for the coupled systems (15)-(16), with function F defined in (17)

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 - k & -1 \\ ab & -a \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1m}^2 - x_{1s}^2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{g(t,e)} \quad (21)$$

Due to the reset, the trajectories of the master and slave systems are *always* bounded and therefore, the term $g(t, e)$ can be considered as a perturbation ‘vanishing on e ’, satisfying

$$\|g(e)\|_2 \leq \gamma \|e\|_2, \quad (22)$$

where γ is a nonnegative constant, and $\|\cdot\|_2$ represents the Euclidean norm. Therefore, from the results presented in (Khalil, 2002), it follows that a sufficient condition for the local stability of the error dynamics (21), is that matrix A should be Hurwitz. This condition can be easily verified by looking at the characteristic polynomial of matrix A , which is given by

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + (a + k - 5\lambda) + a(b + k - 5) = 0. \quad (23)$$

Then, the value of k in the control input (19) should be chosen as follows to ensure that A is Hurwitz

$$k \geq \max\{5 - a, 5 - b\}. \quad (24)$$

6. EXPERIMENTAL RESULTS

In this section a pair of modified Izhikevich models (1),(2) with dynamic reset (4) is implemented with analog circuits. Furthermore, the circuits are synchronized in a master-slave configuration, as given in (15)-(16), with input and output vectors as given in (18) and using the control input (19).

The system (1)-(2) with dynamic reset (4) is scaled in amplitude and time, introducing the following change of variables $t = \tau\eta$, $x_1 = \alpha\bar{x}_1$, $x_2 = \theta\bar{x}_2$, $z = \Gamma\bar{z}$. Then, the scaled equations for the system Σ_i in (15)-(16) are given by

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_{i1} &= \left[0.04\alpha\bar{x}_{i1}^2 + 5\bar{x}_{i1} + \frac{1}{\alpha}(140 + I - \theta\bar{x}_{i2} + u_i) \right] \eta, \\ \dot{\bar{x}}_{i2} &= a \left(\frac{\alpha}{\theta} b\bar{x}_{i1} - \bar{x}_{i2} \right) \eta, \end{aligned} \quad (25)$$

and the dynamic reset

$$\text{if } \bar{x}_{i1} \geq \frac{r_1}{\alpha}, \text{ then } \begin{cases} \dot{\bar{x}}_{i1} = -\gamma(\bar{x}_{i1} - \frac{c}{\alpha})\eta, \\ \dot{\bar{x}}_{i2} = \frac{1}{\theta}\beta\eta, \\ \dot{\bar{z}} = \eta/\Gamma, \end{cases} \quad (26)$$

where $i = m, s$.

Likewise, the static feedback control input u_s , see (19), is scaled as follows

$$u_s = k\alpha(x_{m1} - x_{s1}) \quad (27)$$

and the parameter values are $a = 0.002$, $b = 0.2$, $k = 5$, and the scaling parameters are defined as $\alpha = 10$, $\theta = 100$, $\Gamma = 1$, $\eta = 1000$.

The electronic implementation was constructed using the scaled equations (25)(26) (27) and the corresponding schematic diagram is given in Figure A.1. The constructed experimental setup used to validate the numerical simulations is shown in Figure 4.

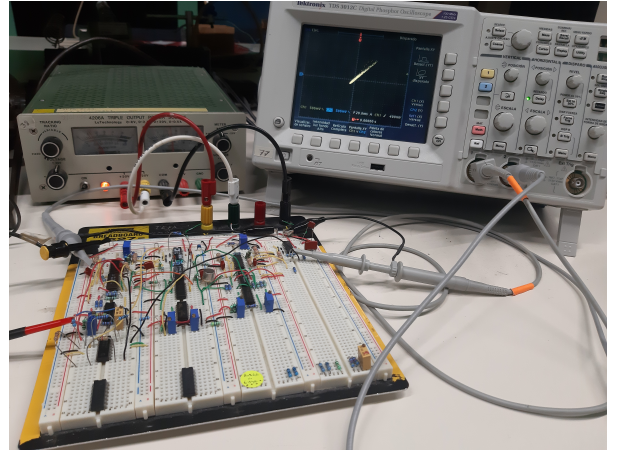


Fig. 4. Experimental setup at CICESE.

The obtained experimental results are shown in Figures 5 to 7. The experimental data have been obtained by using the TDS3012C Digital Oscilloscope from Tektronix.

Figure 5 shows the numerical simulations and the measurements from the circuit, using different parameters.

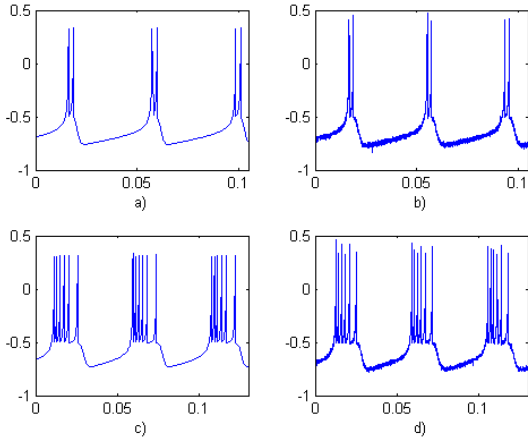


Fig. 5. Comparison between numerical and experimental results with parameters $a = 0.02$, $b = 0.2$, $I = 15$; a) Numerical results for $c = -50$, $d = 6$; b) Circuit measurements for $c = -50$, $d = 6$; c) Numerical results for $c = -50$, $d = 2$; b) Circuit measurements for $c = -50$, $d = 2$;

Figure 6 shows the synchronization of the master and slave Izhikevich electronic neurons.

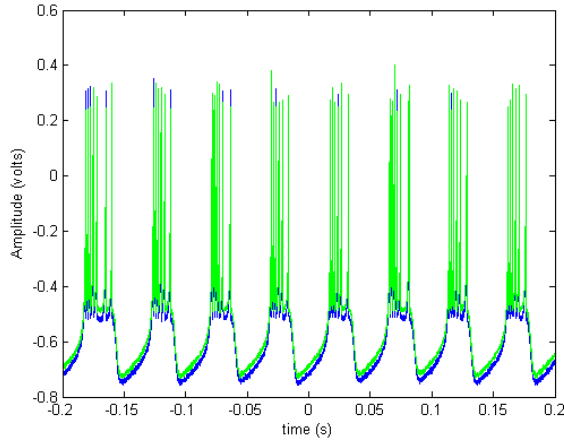


Fig. 6. Synchronized bursting behavior in the coupled Izhikevich electronics neurons

The phase plane projection of the outputs of the systems is shown in Figure 7. These experimental results confirm that the modified Izhikevich model has been successfully implemented with analog circuits.

7. DISCUSSION AND CONCLUSIONS

A modified Izhikevich model has been presented, in which the static reset function of the original Izhikevich model has been replaced by an ad hoc designed dynamic reset. The resulting system has been modelled as a hybrid system with two discrete modes. It has been demonstrated that the modified Izhikevich model presented here can be physically implemented with analog circuits.

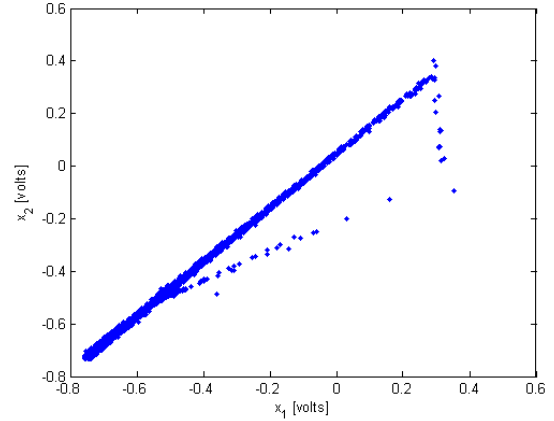


Fig. 7. Projection of the experimental solution of the system onto the (x_1, x_2) plane

It is our hope that the derived model and circuit will be useful in the study of neural dynamics.

REFERENCES

- Hodgkin, A.L. and Huxley, A.F. (1990). A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *Bulletin of Mathematical Biology*, 52(1), 25–71.
- Izhikevich, E.M. (2003). Simple model of spiking neurons. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 14(6), 1569–1572.
- Izhikevich, E.M. (2004). Which model to use for cortical spiking neurons? *IEEE Transactions on Neural Networks*, 15(5), 1063–1070.
- Jolivet, R., Lewis, T.J., and Gerstner, W. (2004). Generalized integrate-and-fire models of neuronal activity approximate spike trains of a detailed model to a high degree of accuracy. *Journal of Neurophysiology*, 92(2), 959–976.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear systems; 3rd ed.* Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Kormaz, N., Ozturk, I., and Kilic, R. (2016). Multiple perspectives on the hardware implementations of biological neuron models and programmable design aspects. *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*, 24, 1729–1746.
- Nobukawa, S., Nishimura, H., Yamanishi, T., and Liu, J.Q. (2015). Analysis of chaotic resonance in izhikevich neuron model. *PLOS ONE*, 10(9), 1–22.
- Wagemakers, A. and Sanjuán, M.A. (2013). Electronic circuit implementation of the chaotic rulkov neuron model. *Journal of the Franklin Institute*, 350(10), 2901 – 2910.

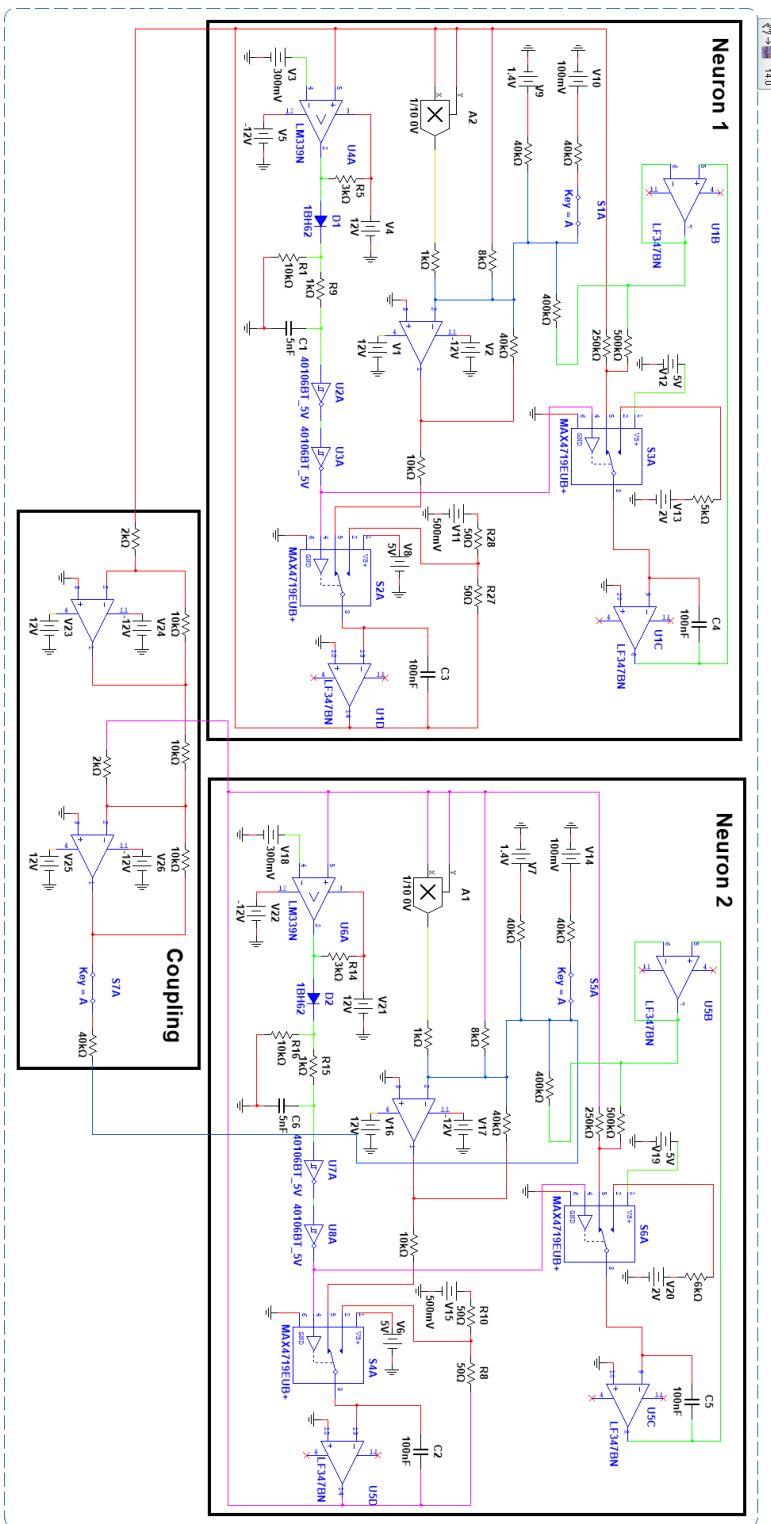


Fig. A.1. Schematic implementation of the modified Izhikevich model with analog circuits.