

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias
en Electrónica y Telecomunicaciones
con orientación en Instrumentación y Control**

**Diseño, modelado y regulación de un mecanismo
con grado de subactuación 2**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

José Alberto Villalobos Torres

Ensenada, Baja California, México

2020

Tesis defendida por

José Alberto Villalobos Torres

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez

Codirector de tesis

Dr. José Ricardo Cuesta García

Codirector de tesis

Dr. Pedro Negrete Regagnon

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Dr. Yury Orlov



Dr. Daniel Saucedo Carvajal

Coordinador del Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dra. Rufina Hernández Martínez

Directora de Estudios de Posgrado

José Alberto Villalobos Torres © 2020

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis

Resumen de la tesis que presenta José Alberto Villalobos Torres como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

Diseño, modelado y regulación de un mecanismo con grado de subactuación 2

Resumen aprobado por:

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez

Codirector de tesis

Dr. José Ricardo Cuesta García

Codirector de tesis

En este trabajo de tesis se aborda el problema del modelado y control de un mecanismo de cinco barras con un péndulo esférico de cuatro grados de libertad, con 2 grados de subactuación. Se obtuvo un modelo dinámico completo considerando el mecanismo desacoplado porque es de cadena cinemática cerrada, posteriormente se aplicaron las restricciones holonómicas para reducir el número de ecuaciones de estado al de grados de libertad. También se obtuvo un modelo dinámico del mecanismo, mediante identificaciones paramétricas de la fricción presente en las articulaciones actuadas. Para cumplir con el objetivo de control de regulación se proponen dos controladores. Primero se hace el análisis para un control lineal del tipo LQR, utilizando una aproximación lineal, alrededor del punto de interés del modelo dinámico obtenido. También se propone un controlador no lineal con compensación de incertidumbre en las articulaciones actuadas. Finalmente, se validan estos controladores de manera numérica para el mecanismo de cuatro grados de libertad, realizándose también una implementación experimental mediante un mecanismo de cinco barras con un péndulo compuesto, siendo este último sistema de 3 grados de libertad, con grado de subactuación de uno.

Palabras clave: Modelo dinámico, sistema subactuado, mecanismo de cinco barras, péndulo esférico, identificación paramétrica

Abstract of the thesis presented by José Alberto Villalobos Torres as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Electronics and Telecommunications with orientation in Instrumentation and Control.

Design, model and regulate a mechanism with an underactuation degree of 2

Abstract approved by:

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez

Thesis Co-Director

Dr. José Ricardo Cuesta García

Thesis Co-Director

The present thesis addresses the modeling and control problem of a five-link mechanism with a spherical pendulum, four degrees of freedom, with an underactuated degree of two. The complete dynamic model was obtained considering the decoupled mechanism as it is a closed kinematic chain, afterward holonomic restrictions were applied to reduce the number of equation-of-state equal to the degrees of freedom. Also, the dynamic model was obtained, through parametric identifications of the registered friction in the actuated articulations. To satisfy the regulation objective, two controllers are proposed. First, an analysis for a linear control of LQR type is made, making a linear approximation of the point of interest to the obtained dynamic model. Also, a nonlinear controller unit is proposed, with uncertainty compensation of the actuated joints. Finally, both controller units are numerically validated for the four degrees of freedom mechanism, performing as well an experimental implementation through the five-link mechanism with an integrated pendulum, this last one having 3 degrees of freedom and an underactuation degree of one.

Keywords: Dynamic model, underactuated system, five link mechanism, spherical pendulum, parameter identification

Dedicatoria

A mis familiares y amigos, por todo su apoyo incondicional.

Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por aceptarme para estudiar una maestría en ciencias.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría. No. de becario: 634462

A todos mis familiares por su amor y apoyo incondicional, sin su ayuda no podría haber logrado esto. También, a mi novia y amigos que siempre estuvieron presente en las buenas y en las malas.

A mis directores de tesis, Dr. Ricardo Cuesta y Dr. Alejandro Márquez, por todo su tiempo y consejos invertidos en mi formación. Gracias por su paciencia y comprensión en este periodo.

A mi comité de tesis, Dr. Pedro Negrete, Dr. Yury Orlov y Dr. Joaquín Álvarez, por sus acertados comentarios y aportes para el desarrollo de este trabajo.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	viii
Lista de tablas	x
Capítulo 1. Introducción	
1.1. Antecedentes	2
1.2. Justificación	3
1.3. Objetivos	4
1.3.1. Objetivo general	4
1.3.2. Objetivos específicos	4
1.4. Estructura de la tesis	5
Capítulo 2. Modelado	
2.1. Cinemática directa	8
2.2. Ecuaciones de movimiento de Lagrange	11
2.3. Energía cinética	12
2.4. Energía potencial	17
2.5. Modelo dinámico: mecanismo desacoplado	18
2.6. Modelo dinámico: mecanismo restringido	22
2.7. Casos particulares	25
2.7.1. Mecanismo de 5 barras con péndulo compuesto	26
2.7.2. Mecanismo de cinco barras	29
Capítulo 3. Diseño del observador	
3.1. Preliminares	33
3.2. Diseño de un observador discontinuo	34
3.3. Identificación de incertidumbre	36
3.4. Resultados	37
3.4.1. Resultados numéricos	38
3.4.2. Resultados experimentales	42
Capítulo 4. Modelado de fricción	
4.1. Modelos de fricción	45
4.1.1. Fricción estática máxima	45
4.1.2. Fricción de Coulomb	46
4.1.3. Fricción viscosa	47
4.1.4. Modelo de Dahl	47

Tabla de contenido (continuación)

4.2.	Método de identificación de fricción	48
4.2.1.	Función de costo: Modelo de Dahl	49
4.2.2.	Función de costo: Fricción viscosa y de Coulomb	50
4.3.	Resultados experimentales	50
4.3.1.	Modelo de Dahl	52
4.3.2.	Fricción viscosa y de Coulomb	53
Capítulo 5. Estructura de control		
5.1.	Objetivo de control	57
5.2.	Algoritmo de control lineal	57
5.3.	Algoritmo de control no lineal para sistemas subactuados con identificación de incertidumbre	59
5.4.	Análisis de estabilidad	62
5.5.	Resultados	64
5.5.1.	Resultados numéricos: mecanismo de cinco barras con péndulo esférico	65
5.5.1.1.	Control lineal	66
5.5.1.2.	Control no lineal	68
5.5.2.	Resultados experimentales: mecanismo de cinco barras con péndulo compuesto	69
5.5.2.1.	Control lineal	71
5.5.2.2.	Control no lineal	72
Capítulo 6. Conclusiones		
6.1.	Trabajo futuro	79
Literatura citada		81

Lista de figuras

Figura	Página
1. Diagrama del sistema mecánico subactuado.	6
2. Representación de los ángulos de rotación esféricos.	7
3. Diagrama de los subsistemas.	7
4. Diagrama del mecanismo de cinco barras.	9
5. Efecto de la gravedad en el sistema mecánico subactuado.	18
6. Representación de sistema desacoplado a sistema restringido.	23
7. Mecanismo de cinco barras con péndulo compuesto.	26
8. Mecanismo de cinco barras.	29
9. Diagrama de bloques para implementar el observador de Luenberger. . . .	32
10. Diagrama de bloques para implementar observador discontinuo con identificación de incertidumbre.	38
11. Respuesta del sistema y observador discontinuo.	39
12. Diferencia del estado real y el observado.	39
13. Incertidumbre inducida y estimada.	40
14. Respuesta del sistema y observador discontinuo.	41
15. Diferencia del estado real y el observado.	41
16. Incertidumbre inducida y estimada.	42
17. Respuesta del sistema y observador discontinuo.	43
18. Diferencia del estado real y el observado.	43
19. Incertidumbre inducida y estimada.	44
20. Fuerzas que actúan en la fricción	46
21. Entrada u tipo chirp.	51
22. Señales de incertidumbre presentada en los actuadores y fuerzas de fricción de Dahl generadas.	53
23. Señales de incertidumbre presentada en los actuadores y fuerzas de fricción viscosa y de Coulomb generadas.	54
24. Estructura de control con identificación de perturbaciones.	56
25. Punto de equilibrio inestable del sistema.	57
26. Comportamiento del sistema en lazo cerrado, utilizando un control lineal. .	67
27. Señales del control lineal.	68
28. Comportamiento del sistema en lazo cerrado, utilizando un controlador no lineal.	70

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
29. Señales del controlador no lineal.	70
30. Estados del sistema en lazo cerrado, utilizando un control lineal de manera experimental.	72
31. Señales del control lineal de manera experimental.	73
32. Estados del sistema implementando un controlador no lineal de manera experimental.	75
33. Señales del control no lineal de manera experimental.	75
34. Incertidumbre estimada en la dinámica de las articulaciones.	76
35. Comportamiento del sistema en presencia de perturbaciones externas utilizando un controlador no lineal.	77
36. Señales del control no lineal en presencia de perturbaciones externas.	77
37. Incertidumbre estimada en la dinámica de las articulaciones en presencia de perturbaciones externas.	78

Lista de tablas

Tabla	Página
1. Valores nominales de los parámetros del sistema.	65

Capítulo 1. Introducción

El desarrollo de técnicas de control para sistemas mecánicos es un campo de investigación muy activo en la actualidad. Esta área de investigación ha tenido fuerte impacto en la industria, desde la invención de máquinas automáticas, hasta el desarrollo de procesos automatizados. Sin embargo, aún no se tiene solución a todos los problemas conocidos ni han dejado de presentarse nuevos problemas, por ello la importancia del desarrollo de nuevas técnicas de control automático.

El campo del control de sistemas mecánicos es muy extenso. Por ello, en esta tesis nos acotaremos al control de sistemas no lineales, en específico el grupo de sistemas mecánicos subactuados. Estos sistemas se caracterizan por tener menos actuadores que grados de libertad. La mayoría de los controladores propuestos en la literatura son diseñados para sistemas mecánicos completamente actuados, por ejemplo, las técnicas basadas en la linealización por retroalimentación en (Spong *et al.*, 2006) y (Kelly *et al.*, 2005). Sin embargo, no es trivial utilizar esos algoritmos para el análisis de los sistemas subactuados, ya que el grado de complejidad de estos es aún mayor.

Los sistemas subactuados se presentan en el día a día, tal es el caso de los cohetes espaciales, vehículos submarinos o aéreos, camiones con semirremolque, entre otros. También, el hombre recrea una versión simplificada de estos sistemas para su análisis en laboratorios, como lo son el carro-péndulo (Lin y Sheu, 1992), el Pendubot (Spong y Block, 1995), el Acrobot (Hauser y Murray, 1990), entre otros. Estos sistemas tienen grado de subactuación de uno, pero también hay sistemas donde pueden presentarse con grado de subactuación de dos: tal es el caso del péndulo esférico. Mientras más grados de subactuación presente el sistema, más complejo es el análisis de este.

Se puede pensar como una solución inmediata agregar un actuador donde no se tiene, y así poder hacer el análisis desde el enfoque convencional donde se tiene el mecanismo completamente actuado. Económicamente esta puede no ser la mejor solución, debido a que posiblemente se pueda realizar el mismo trabajo sin la necesidad de agregar los actuadores faltantes. Entonces, la finalidad de este trabajo de tesis es analizar y estabilizar de manera numérica un mecanismo de grado de subactuación de dos en su punto de equilibrio inestable. También, analizar y estabilizar experimentalmente un mecanismo de grado de subactuación de uno en su punto de equilibrio

inestable, considerando los efectos de la fricción. Para esto, es necesario contar con un modelo dinámico del sistema que se aproxime lo mejor posible a su comportamiento real.

1.1. Antecedentes

A finales del siglo XX se desarrollaron técnicas de control para sistemas subactuados, tales como en (Mori *et al.*, 1976) donde se presenta el control de un péndulo invertido, en (Furuta *et al.*, 1991) se realiza el control en un péndulo de Furuta, también se formularon técnicas generales para sistemas subactuados como se presenta en (Ramos *et al.*, 1997) y en (Reyhanoglu *et al.*, 1999).

Algunos de los controladores propuestos para sistemas subactuados son del tipo lineal, es decir, se hace una aproximación lineal del modelo dinámico para poder diseñar el controlador. En el caso ideal, este método puede estabilizar el mecanismo en su punto de equilibrio inestable en una vecindad, sin embargo, al ejecutarlo en la práctica, es común la existencia de errores paramétricos y de modelado tales que puedan afectar el desempeño del sistema en lazo cerrado.

En la actualidad, el péndulo invertido es uno de los sistemas de mayor interés en el área del control automático, debido a su dinámica no lineal, sus características de inestabilidad y el grado de subactuación que presenta. Algunos de los sistemas más comunes basados en el péndulo invertido son: el Carro-péndulo (Lin y Sheu, 1992), el Péndulo de Furuta (Aström y Furuta, 1996), el Péndulo con rueda inercial (Spong *et al.*, 1999), el Pendubot (Spong y Block, 1995), el Acrobot (Hauser y Murray, 1990) y el Péndulo esférico (Yang *et al.*, 2000).

El último sistema mencionado, el péndulo esférico, tiene un grado de subactuación de dos. Este mecanismo consiste en un péndulo conectado por una unión esférica a un robot planar de dos grados de libertad.

En (Yang *et al.*, 2000) se trabaja con el péndulo esférico conectado a un robot cartesiano. El análisis se hace a partir de las proyecciones en los ejes (X, Y) del robot. Entonces, el control se hace independiente a cada proyección para mantener el péndulo en el punto de equilibrio inestable.

Posteriormente en (Wang *et al.*, 2008) también se presenta el péndulo esférico conectado a un robot cartesiano. A diferencia de la literatura anterior, en esta se utiliza una cámara de bajo costo para tener una retroalimentación visual. En el análisis del mecanismo se descomponen las componentes del péndulo esférico en los ejes (X, Y) tal que el control está desacoplado. Por lo tanto, no se tiene un control donde se involucre la dinámica completa del mecanismo.

Un par de años después, en (Alvarado *et al.*, 2010) se realizó el control del péndulo esférico conectado a un mecanismo de cinco barras. En este trabajo se consideraron como dos subsistemas desacoplados, el péndulo esférico y el mecanismo de cinco barras, la unión de estos se hizo por medio de un controlador lineal. Sin embargo, el modelo dinámico utilizado para el péndulo esférico considera la barra como una masa puntual cuando en realidad es una barra rígida, por lo tanto no presenta los efectos del momento de inercia. Entonces, al considerar los sistemas desacoplados, en el modelo dinámico del péndulo esférico no están presentes los efectos del mecanismo de cinco barras y viceversa. Posteriormente se hizo una aproximación lineal de cada subsistema para diseñar la ley de control, por lo tanto, el análisis del mecanismo presentado tiene varias simplificaciones.

Por último, en (Soto y Campa, 2012) se presenta de nuevo el péndulo esférico conectado a un mecanismo de cinco barras. En este trabajo se analiza únicamente el modelado del sistema completo, pero en el mecanismo de cinco barras se considera que las longitudes de los eslabones son iguales.

El interés de este trabajo de tesis es el análisis y control de un péndulo esférico conectado a un mecanismo de cinco barras. Para ello, es necesario obtener un modelo dinámico generalizado sin simplificaciones, tal que sea lo más aproximado a su comportamiento real.

1.2. Justificación

El estudio de los sistemas mecánicos subactuados es importante hoy en día, lamentablemente el análisis de estos sistemas es más complicado que los mecanismos completamente actuados, ya que las técnicas desarrolladas para controlar a estos últimos sistemas no se pueden aplicar de forma directa a los sistemas subactuados.

Los sistemas subactuados pueden presentarse por diseño, por falla de algún actuador tal que sea inactivo o simplemente esta característica es inherente al sistema. Estos sistemas presentan un rango de controlabilidad restringida a una vecindad alrededor de su punto de equilibrio inestable (Rampazzo y Sussmann, 2001), por lo que no es posible en ocasiones realizar el mismo trabajo que un sistema completamente actuado.

Para tener un mejor análisis del sistema, se obtendrá un modelo tal que involucre los siguientes efectos dinámicos: barra rígida en el péndulo esférico (no masa puntual), efectos de la fricción y longitudes diferentes de los eslabones. También, es importante analizar y desarrollar técnicas de control para sistemas mecánicos subactuados tal que se tenga un mejor desempeño de estos.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Modelar y controlar un mecanismo de cuatro grados de libertad con un grado de subactuación de dos.

1.3.2. Objetivos específicos

- Modelar un mecanismo de cinco barras con un péndulo esférico, considerando los efectos de la fricción.
- Identificar los parámetros de fricción en las articulaciones actuadas.
- Proponer controladores para un mecanismo con grado de subactuación de uno y dos.
- Validar de manera numérica los controladores propuestos en el mecanismo con grado de subactuación de dos.
- Validar de manera experimental los controladores propuestos en el mecanismo con grado de subactuación de uno.

1.4. Estructura de la tesis

Para desarrollar la ley de control tal que el sistema subactuado se mantenga en una vecindad alrededor de su punto de equilibrio inestable, es necesario obtener el modelo dinámico del sistema completo (véase capítulo 2). También, se diseña un observador sin considerar la fricción, tal que estime los estados desconocidos del sistema para retroalimentarlos en la ley de control, y a su vez, estimar las incertidumbres paramétricas y de modelado que contiene de forma implícita la fricción (véase capítulo 3).

En las señales de incertidumbre obtenidas se presentan las fuerzas de fricción que actúan en el sistema, sumadas a ellas están las diferencias paramétricas y de modelado. Se considera que las diferencias paramétricas y de modelado son despreciables, y se propone un método de identificación paramétrica de dos modelos de fricción conocidos, modelo de Dahl y fricción viscosa y de Coulomb. Entonces, se utiliza el modelo de fricción de mayor aproximación a la incertidumbre (véase capítulo 4).

Una vez que se tenga el modelo dinámico considerando los efectos de la fricción, se hace un análisis para definir la ley de control, la cual hará que el sistema subactuado sea estable en una posición definida. Se ilustra la propuesta de control mediante resultados numéricos en un sistema mecánico con grado de subactuación de dos y resultados experimentales en un sistema mecánico con grado de subactuación de uno (véase capítulo 5).

Por último, se presentan las conclusiones y trabajo futuro (véase capítulo 6).

Capítulo 2. Modelado

El modelo dinámico del sistema está constituido por un mecanismo de cinco barras y un péndulo esférico, como se ilustra en la Figura 1a. El espacio donde opera el mecanismo permanece sobre el plano XY , y está orientado horizontalmente tal que su movimiento no es afectado por la gravedad. De acuerdo a la Figura 1b, su posición angular está definida por q_1 , q_2 , q_5 y q_6 , los cuales se consideran absolutos y con una rotación dextrógira en el eje Z . La posición angular del péndulo esférico está definida por q_3 y q_4 , representan una rotación levógira en el eje X y una rotación dextrógira en el eje Y respectivamente. Este último es un ángulo relativo con respecto a q_2 , en la Figura 2 se observa a detalle la representación de estos ángulos esféricos.

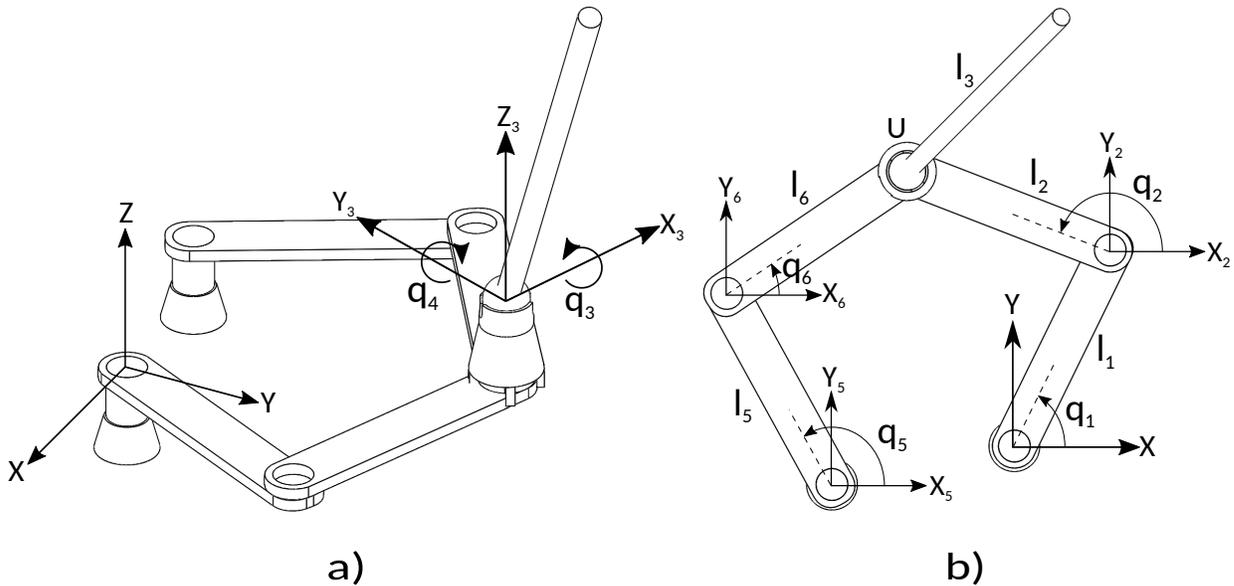


Figura 1. Diagrama del sistema mecánico subactuado.

En este capítulo se obtiene el modelo que describe el movimiento del sistema mencionado, para ello, se consideran dos subsistemas desacoplados debido a que es un mecanismo de cadena cinemática cerrada, como lo dice la metodología en (Ghorbel *et al.*, 2000). Los mecanismos de cadena cinemática cerrada son aquellos donde cada eslabón está unido a dos o más eslabones, el movimiento de estos no es libre, sino que tiene restricciones. Entonces, el análisis del sistema se hace desacoplándolo en dos subsistemas tal como se muestra en la Figura 3. Por lo tanto, el subsistema Σ_1 es un mecanismo planar de dos grados de libertad y el péndulo esférico, mientras que el subsistema Σ_2 sólo es un mecanismo planar de dos grados de libertad.

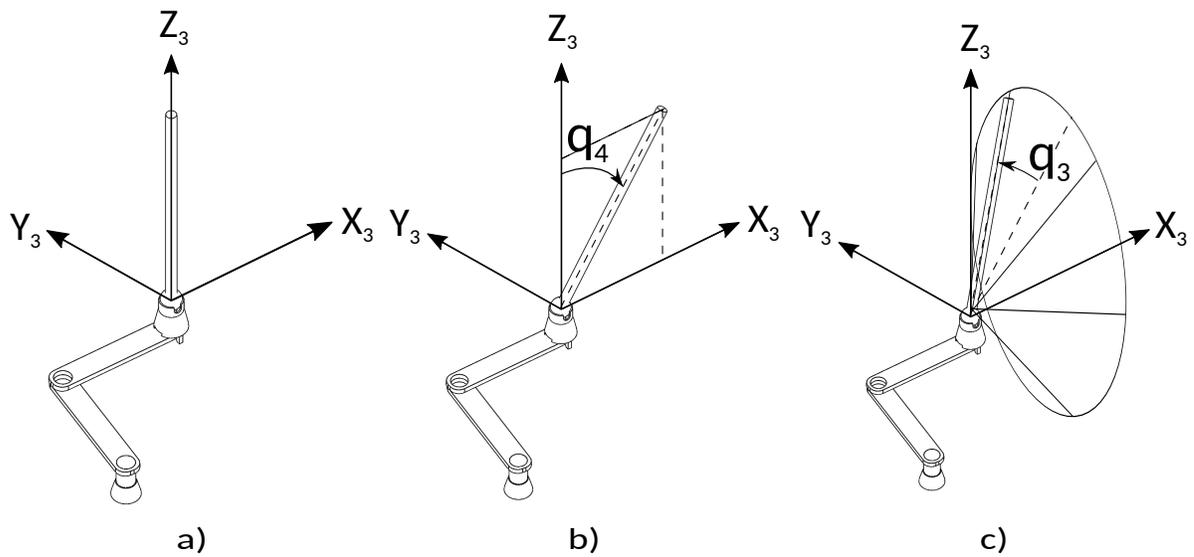


Figura 2. Representación de los ángulos de rotación esféricos.

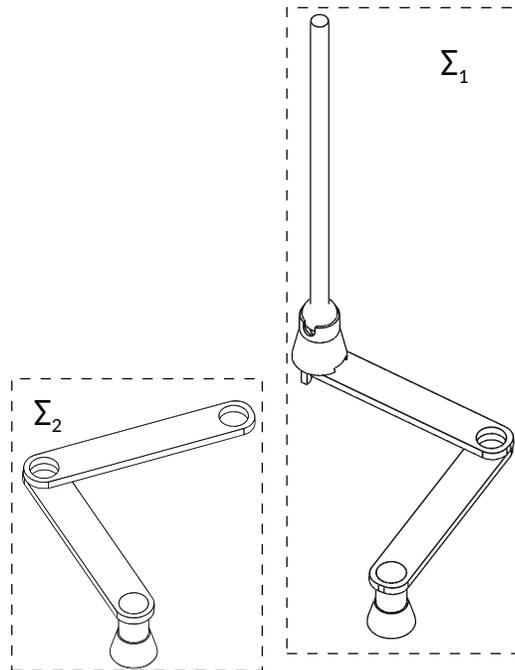


Figura 3. Diagrama de los subsistemas.

Posteriormente, se obtienen las energías cinéticas y potenciales de los subsistemas por separado, se calcula el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento de los subsistemas desacoplados. Se escriben dichas ecuaciones en forma matricial aumentada y se aplican las restricciones holonómicas para reducir el número de ecuaciones de estado al de grados de libertad.

2.1. Cinemática directa

El objetivo de la cinemática directa es calcular la posición y orientación del efector final con respecto al punto de origen, utilizando las posiciones angulares de cada articulación y los parámetros geométricos del mecanismo.

El interés de conocer el modelo cinemático directo es obtener la posición del efector final. En la Figura 4 se muestra un diagrama del sistema sin considerar el péndulo esférico, es decir, el mecanismo de cinco barras, el cual utilizaremos para encontrar el modelo cinemático. Se considera la posición del efector final como $U = (U_x, U_y) \in \mathbb{R}^2$, que corresponde a la unión de los eslabones 2, 3 y 6. Los parámetros l_i corresponden a la longitud del i -ésimo eslabón y q_i es la posición angular del eslabón i -ésimo, donde $i = 1, 2, 5, 6$. Se toma como origen en el plano (XY) el extremo del eslabón 1, donde se forma el ángulo q_1 . La distancia entre la articulación 1 y 5 es fija, entonces, por conveniencia se consideran las longitudes C_x y C_y constantes. Además, se tiene medición de la posición angular q_1 y q_5 , por lo tanto, el objetivo del modelo cinemático directo es encontrar la posición del efector final $U \in \mathbb{R}^2$ en función de los ángulos q_1, q_5 y las longitudes l_i donde $i = 1, 2, 5, 6$. En la Figura 4 se observan dos maneras de llegar al punto $U(q_1, q_5) = (U_x, U_y)$ partiendo del origen: una de ellas es considerando la longitud y posición angular de los eslabones 1 y 2, el otro camino se obtiene considerando tanto las componentes C_x, C_y , como la longitud y posición angular de los eslabones 5 y 6. De acuerdo a (Ilia y Sinatra, 2009), se proponen las siguientes ecuaciones para determinar la posición del punto $U(q_1, q_5)$ con respecto al origen

$$U_x = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_2) = l_5 \cos(q_5) + l_6 \cos(q_6) - C_x, \quad (1)$$

$$U_y = l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_2) = l_5 \sin(q_5) + l_6 \sin(q_6) - C_y, \quad (2)$$

donde (1) y (2) corresponden a las coordenadas en (X, Y) del punto $U(q_1, q_5)$, respectivamente.

Puesto que se conocen las longitudes de los eslabones y las posiciones angulares q_1 y q_5 , es necesario obtener los valores q_2 y q_6 para conocer la posición del punto $U(q_1, q_5)$ utilizando (1) y (2). Primero obtendremos q_6 , entonces, de las ecuaciones (1)

Con el fin de obtener q_6 , se convierte la ecuación (5) en una ecuación cuadrática. Para ello, se considera el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} T &= \tan\left(\frac{q_6}{2}\right), \\ T^2 &= \tan^2\left(\frac{q_6}{2}\right) = \frac{1 - \cos(q_6)}{1 + \cos(q_6)}, \end{aligned} \quad (9)$$

por lo tanto

$$\cos(q_6) = \frac{1 - T^2}{1 + T^2}. \quad (10)$$

Por otra parte, se puede obtener el término $\sin(q_6)$ en función de T sustituyendo (9) y (10) en la identidad $\tan\left(\frac{q_6}{2}\right) = \frac{\sin(q_6)}{1 + \cos(q_6)}$, y por lo tanto se tiene lo siguiente

$$\sin(q_6) = \frac{2T}{1 + T^2}. \quad (11)$$

Ahora, se sustituye (10) y (11) en (5) para obtener lo siguiente

$$(\beta_3 + \beta_2)T^2 - 2\beta_1T + (\beta_3 - \beta_2) = 0. \quad (12)$$

Así, las raíces de la ecuación cuadrática (12) son

$$T = \frac{\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2}}{\beta_2 + \beta_3},$$

por lo que se tienen dos posibles valores para T . Considerando la configuración de trabajo del sistema, el valor de T es

$$T = \frac{\beta_1 - \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2}}{\beta_2 + \beta_3}, \quad (13)$$

por lo tanto, se despeja q_6 de (9) y se sustituye (13) para obtener lo siguiente

$$q_6 = 2 \arctan\left(\frac{\beta_1 - \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2}}{\beta_2 + \beta_3}\right), \quad (14)$$

donde β_1 , β_2 y β_3 se encuentran en (6), (7) y (8) respectivamente. Finalmente se sustituye (4) y (3) en la identidad $\tan(q_2) = \frac{\text{sen}(q_2)}{\text{cos}(q_2)}$, y se obtiene

$$q_2 = \arctan\left(\frac{l_5 \text{sen}(q_5) + l_6 \text{sen}(q_6) - C_y - l_1 \text{sen}(q_1)}{l_5 \text{cos}(q_5) + l_6 \text{cos}(q_6) - C_x - l_1 \text{cos}(q_1)}\right). \quad (15)$$

Las variables q_2 y q_6 son variables dependientes de q_1 y q_5 como se muestra en (15) y (14).

2.2. Ecuaciones de movimiento de Lagrange

Para representar el modelo dinámico de un robot de n grados de libertad, es conveniente hacerlo mediante las ecuaciones de movimiento de Lagrange.

El lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ de un robot de n grados de libertad, es la diferencia entre su energía cinética $\mathcal{K}(q, \dot{q})$ y su energía potencial $\mathcal{U}(q)$

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q),$$

donde $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ es el vector de coordenadas generalizadas. La energía potencial $\mathcal{U}(q)$ representa las fuerzas conservativas como la fuerza de gravedad y las fuerzas de resortes.

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange son

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i,$$

donde τ_i es el vector de fuerzas generalizadas con $i = 1, 2, \dots, n$. En (Kelly et al., 2005), se describe el modelo dinámico de un robot de n grados de libertad en forma matricial como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (16)$$

donde $M(q)$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})$ es la matriz de coriolis y $G(q)$ es el vector de pares gravitacionales.

Para obtener el modelo dinámico del mecanismo de cinco barras con un péndulo esférico, se siguió esta metodología:

1. Considerar dos subsistemas desacoplados, uno de ellos está formado por el péndulo doble y el péndulo esférico Σ_1 , y el otro subsistema es un péndulo doble de dos grados de libertad Σ_2 (véase Figura 3).
2. Obtener las energías cinéticas y potenciales de ambos subsistemas.
3. Calcular el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento de los subsistemas desacoplados.
4. Escribir las ecuaciones en su forma matricial y aumentada.
5. Considerar restricciones holonómicas.
6. Reducir el número de ecuaciones de estado al de grados de libertad.

2.3. Energía cinética

La energía cinética se calcula mediante

$$K_i(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} (m_i v_i^2 + I_i \dot{q}_i^2), \quad (17)$$

donde m_i es la masa, v_i^2 depende de (q, \dot{q}) y representa el cuadrado de la rapidez del centro de masa, I_i es el momento de inercia respecto al centro de masa y \dot{q}_i es la velocidad angular, cada elemento es asociado al i -ésimo eslabón. Por lo tanto, la energía cinética total del subsistema Σ_1 está dada por $\mathcal{K}_1(q, \dot{q}) = K_{1,1}(q, \dot{q}) + K_{1,2}(q, \dot{q}) + K_{1,3}(q, \dot{q})$ y de Σ_2 está dada por $\mathcal{K}_2(q, \dot{q}) = K_{2,1}(q, \dot{q}) + K_{2,2}(q, \dot{q})$. Entonces, tomando los marcos de referencia establecidos en la Figura 1, se define la posición del centro de masa del eslabón 1 de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x_1 &= l_{c1} \cos(q_1), \\ y_1 &= l_{c1} \text{sen}(q_1), \end{aligned}$$

se derivan las ecuaciones anteriores con respecto al tiempo, y así, obtener la rapidez del centro de masa del eslabón 1

$$\dot{x}_1 = -l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1,$$

$$\dot{y}_1 = l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1,$$

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2,$$

por lo que, de acuerdo a la ecuación (17), la energía cinética relacionada al eslabón 1 está dada por

$$K_{1,1}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} (m_1 l_{c1}^2 + I_1) \dot{q}_1^2. \quad (18)$$

Para obtener la energía cinética del con respecto al eslabón 2 se hace el mismo procedimiento, partimos de la posición del centro de masa

$$x_2 = l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_2),$$

$$y_2 = l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_2),$$

ahora, se obtienen las componentes del vector velocidad al centro de masa y la rapidez del centro de masa del eslabón 2

$$\dot{x}_2 = -l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 - l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2,$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_2,$$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2 \dot{q}_1^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_{c2}^2 \dot{q}_2^2,$$

por lo tanto, la energía cinética relacionada al eslabón 2 está dada por

$$K_{1,2}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} (m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (m_2 l_{c2}^2 + I_2) \dot{q}_2^2). \quad (19)$$

La energía cinética relacionada al eslabón 3 (i.e. del péndulo esférico) se puede obtener por medio de (17), sin embargo, puesto que su movimiento es libre y no sólo en un plano, el momento de inercia I_3 presentará términos cruzados. Entonces, se obtiene la energía cinética relacionada al eslabón 3 utilizando la siguiente ecuación

mencionada en (Arimoto, 1996)

$$K_i = \frac{1}{2} \text{traza} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial T_i}{\partial q_j} J_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right], \quad (20)$$

donde

$$J_i = \int_{L_i} r^{(i)} (r^{(i)})^T dm, \quad (21)$$

siendo J_i una integral triple relacionada al volumen del i -ésimo eslabón, L_i son los límites de integración que representan las dimensiones volumétricas del eslabón, $r^{(i)}$ son las coordenadas homogéneas de un punto en el marco (X_i, Y_i) y T_i es la matriz que las transforma al marco inercial (X, Y) . Observe que, para obtener la energía cinética relacionada al eslabón 3, es necesario definir las matrices de rotación que componen T_i .

Se conoce como matriz de rotación a aquella que describe la rotación de un cuerpo, con respecto a un marco de referencia inercial. Esta matriz de rotación se denomina por $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. La matriz de transformación homogénea representa tanto la rotación, como los desplazamientos de forma conjunta de un sistema de coordenadas y está compuesta por una matriz de rotación y un vector de traslación

$$T = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si el cuerpo sufre más de una rotación, puede representarse por una sola matriz llamada matriz de rotación compuesta, la cual es resultado de multiplicar las matrices de rotación por la izquierda, siendo la primer matriz de rotación la que está del lado derecho, por ejemplo, $R = R_3 R_2 R_1$.

Entonces, en nuestro caso, se define la matriz de transformación homogénea T_α como una rotación dextrógira q_4 alrededor del eje Y , por lo tanto T_α queda de la

siguiente manera

$$T_a = \begin{bmatrix} \cos(q_4) & 0 & \text{sen}(q_4) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(q_4) & 0 & \cos(q_4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

La segunda matriz llamada T_b consta de hacer rotar el eslabón 3 en sentido levógiro q_3 con respecto al eje X y posterior a ello una traslación de longitud l_2 en el eje X , esta longitud representa el eslabón 2 del sistema planar al que está acoplado. Entonces la matriz T_b queda de la siguiente manera

$$T_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & \cos(q_3) & \text{sen}(q_3) & 0 \\ 0 & -\text{sen}(q_3) & \cos(q_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

La siguiente matrix T_c hace una rotación dextrógiro $q_2 - q_1$ en el eje Z y posteriormente una traslación de longitud l_1 en el eje X , la traslación describe lo largo del eslabón 1. Entonces, se tiene la siguiente matriz de rotación

$$T_c = \begin{bmatrix} \cos(q_2 - q_1) & -\text{sen}(q_2 - q_1) & 0 & l_1 \\ \text{sen}(q_2 - q_1) & \cos(q_2 - q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

donde el ángulo de rotación $q_2 - q_1$ es debido a que q_2 es un ángulo absoluto como se muestra en la Figura 1b.

Finalmente, en T_d se hace una rotación dextrógiro q_1 en el eje Z , obteniendo la

siguiente matriz

$$T_d = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\text{sen}(q_1) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Para obtener la energía cinética K_3 de la ecuación (20), es necesaria la matriz de transformación homogénea T_3 , la cual está dada por la multiplicación de (22), (23), (24) y (25) en el orden siguiente

$$T_3 = T_d T_c T_b T_a.$$

Ahora bien, queda obtener J_3 mencionada en (21), donde $r^{(3)} = [r \cos(\theta), r \text{sen}(\theta), z, 1]^T$ y en los límites de integración se describe la posición inicial y geometría del eslabón 3, entonces

$$J_3 = \int_0^{l_3} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \begin{bmatrix} r \cos(\theta) \\ r \text{sen}(\theta) \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos(\theta) & r \text{sen}(\theta) & z & 1 \end{bmatrix} dr d\theta dz,$$

donde l_3 es la longitud total del eslabón 3 (péndulo esférico), r_2 es el radio mayor y r_1 es el radio menor del cilindro hueco.

Entonces de (20), la energía cinética queda de la siguiente manera

$$K_{1,3} = \frac{m_3}{192} (k_1 \dot{q}_1^2 + k_2 \dot{q}_2^2 + k_3 \dot{q}_3^2 + k_4 \dot{q}_4^2 + k_5 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + k_6 \dot{q}_1 + k_7 \dot{q}_2), \quad (26)$$

donde

$$k_1 = 96l_1^2,$$

$$k_2 = (3r_1^2 + 3r_2^2 - 4l_3^2)(\cos(2(q_3 + q_4)) + \cos(2(q_4 - q_3)) + 2\cos(2q_3) + 2\cos(2q_4)) \\ + 96l_2l_3 \text{sen}(q_4) + 30(r_1^2 + r_2^2) + 24l_3^2 + 96l_2^2,$$

$$k_3 = 4((9 - 3 \cos(2q_4))(r_1^2 + r_2^2) + 4l_3^2 \cos(2q_4) + 4l_3^2),$$

$$k_4 = 8(3(r_1^2 + r_2^2) + 4l_3^2),$$

$$k_5 = 24l_1(8l_2 \cos(q_2 - q_1) + l_3(\cos(-q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - \cos(q_1 - q_2 + q_3 + q_4) - \cos(-q_1 + q_2 - q_3 + q_4) + \cos(q_1 - q_2 - q_3 + q_4))) + 2l_3 \sin(-q_1 + q_2 + q_4) + 2l_3 \sin(q_1 - q_2 + q_4)),$$

$$k_6 = 24l_1l_3((\dot{q}_4 + \dot{q}_3)(\cos(-q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + \cos(q_1 - q_2 + q_3 + q_4)) + (\dot{q}_3 - \dot{q}_4)(\cos(-q_1 + q_2 - q_3 + q_4) + \cos(q_1 - q_2 - q_3 + q_4)) + 2\dot{q}_4(\sin(-q_1 + q_2 + q_4) - \sin(q_1 - q_2 + q_4))),$$

$$k_7 = -4(12l_2l_3(\dot{q}_4(\cos(q_4 - q_3) - \cos(q_4 + q_3)) - \dot{q}_3(\cos(q_4 - q_3) + \cos(q_4 + q_3)))) + (3r_1^2 + 3r_2^2 - 4l_3^2)\dot{q}_3(\sin(2q_4 - q_3) + \sin(q_3 + 2q_4)) + 4 \sin(q_3)\dot{q}_4(3r_1^2 + 3r_2^2 + 4l_3^2)).$$

La energía cinética total del subsistema Σ_1 está dado por la suma de las energías cinéticas (18), (19) y (26)

$$\mathcal{K}_1(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^3 \mathcal{K}_{1,i}. \quad (27)$$

Para obtener la energía cinética \mathcal{K}_2 del subsistema Σ_2 se utiliza (17) cambiando los subíndices correspondientes, tal que

$$\mathcal{K}_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}((m_5 l_{c5}^2 + m_6 l_5^2 + I_5)\dot{q}_5^2 + 2m_6 l_5 l_{c6} \cos(q_5 - q_6)\dot{q}_5 \dot{q}_6 + (m_6 l_{c6}^2 + I_6)\dot{q}_6^2). \quad (28)$$

Por lo tanto, la energía cinética total del sistema es la suma de (27) y (28)

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}_1(q, \dot{q}) + \mathcal{K}_2(q, \dot{q}). \quad (29)$$

2.4. Energía potencial

Dado que el mecanismo de cinco barras se mueve en el plano horizontal (X, Y) como se muestra en la Figura 5, sólo se requiere calcular la energía potencial en el

eslabón 3 (péndulo esférico), la cual está dada por

$$U(q_3, q_4) = \frac{1}{2} m_3 g l_3 \cos(q_3) \cos(q_4). \quad (30)$$

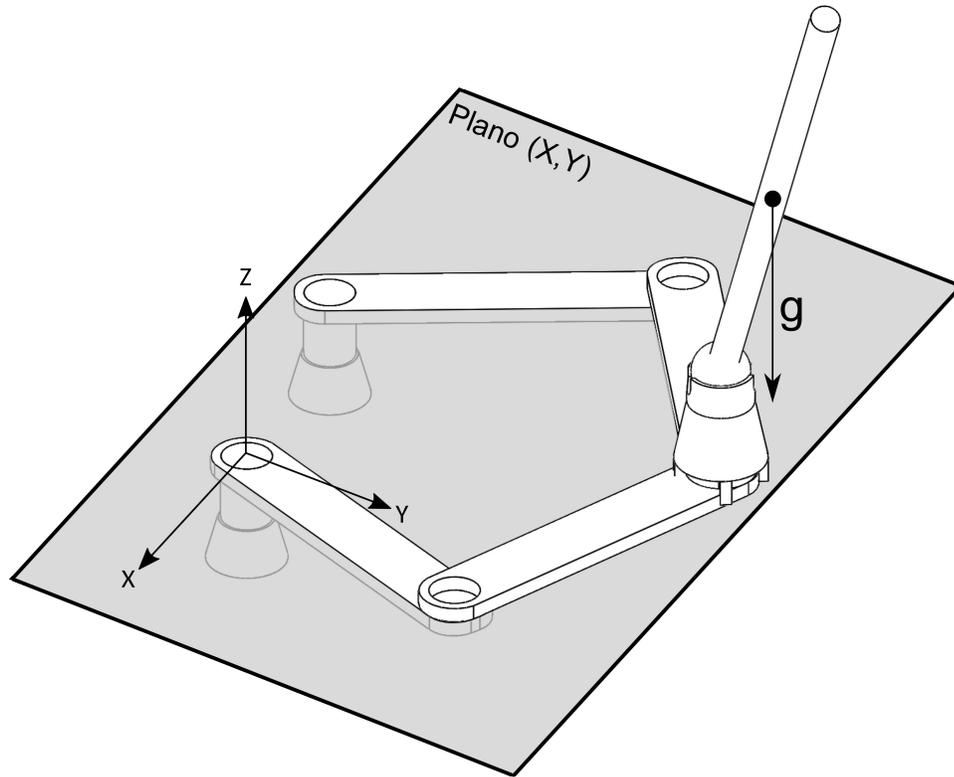


Figura 5. Efecto de la gravedad en el sistema mecánico subactuado.

2.5. Modelo dinámico: mecanismo desacoplado

Sea Σ el sistema desacoplado que contiene los subsistemas Σ_1 y Σ_2 mostrados en la Figura 3, donde $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]^T$ es el vector de coordenadas generalizadas, entonces, las ecuaciones que describen su movimiento, mencionado en (16) están dadas por

$$\Sigma : M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau. \quad (31)$$

Entonces, se definen las matrices aumentadas \mathbb{R}^6 de (31) que contienen los subsistemas Σ_1 y Σ_2 de la siguiente manera

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & 0 & 0 \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & 0 & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & 0 & 0 & 0 \\ m_{14} & m_{24} & 0 & m_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{55} & m_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{56} & m_{66} \end{bmatrix},$$

donde

$$m_{11} = I_1 + l_1^2 m_3 + l_1^2 m_2 + l_{c1}^2 m_1,$$

$$m_{12} = \frac{1}{8} l_1 ((8l_{c2} m_2 + 8l_2 m_3) \cos(q_2 - q_1) + 2l_3 m_3 \sin(q_1 - q_2 + q_4) + 2l_3 m_3 \sin(-q_1 + q_2 + q_4) + l_3 m_3 \cos(q_1 - q_2 - q_3 + q_4) - l_3 m_3 \cos(-q_1 + q_2 - q_3 + q_4) - l_3 m_3 \cos(q_1 - q_2 + q_3 + q_4) + l_3 m_3 \cos(-q_1 + q_2 + q_3 + q_4)),$$

$$m_{13} = \frac{1}{8} l_1 l_3 m_3 (\cos(q_1 - q_2 - q_3 + q_4) + \cos(-q_1 + q_2 - q_3 + q_4) + \cos(q_1 - q_2 + q_3 + q_4) + \cos(-q_1 + q_2 + q_3 + q_4)),$$

$$m_{14} = \frac{1}{8} l_1 l_3 m_3 (-2 \sin(q_1 - q_2 + q_4) + 2 \sin(-q_1 + q_2 + q_4) - \cos(q_1 - q_2 - q_3 + q_4) - \cos(-q_1 + q_2 - q_3 + q_4) + \cos(q_1 - q_2 + q_3 + q_4) + \cos(-q_1 + q_2 + q_3 + q_4)),$$

$$m_{22} = \frac{1}{96} (96l_{c2}^2 m_2 + (96l_2^2 + 24l_3^2) m_3 + 96I_2 - 8l_3^2 m_3 (\cos(2q_3) + \cos(2q_4))) + 3m_3 (2 \cos(2q_3) + 2 \cos(2q_4) + 10 + \cos(2(q_4 - q_3)) + \cos(2(q_3 + q_4))) (r_1^2 + r_2^2) + 96l_2 l_3 m_3 \sin(q_4) - 4l_3^2 m_3 (\cos(2(q_4 - q_3)) + \cos(2(q_3 + q_4))),$$

$$m_{23} = -\frac{1}{48} m_3 (3(\sin(2q_4 - q_3) + \sin(q_3 + 2q_4)) (r_1^2 + r_2^2) - 12l_2 l_3 (\cos(q_4 - q_3) + \cos(q_3 + q_4)) - 4l_3^2 (\sin(2q_4 - q_3) + \sin(q_3 + 2q_4))),$$

$$m_{24} = -\frac{1}{12} m_3 (4l_3^2 \sin(q_3) + 3l_2 l_3 (\cos(q_4 - q_3) - \cos(q_3 + q_4)) + 3 \sin(q_3) (r_1^2 + r_2^2)),$$

$$m_{33} = -\frac{1}{24} m_3 (-4l_3^2 (1 + \cos(2q_4)) + (3 \cos(2q_4) - 9) (r_1^2 + r_2^2)),$$

$$m_{44} = \frac{1}{12} m_3 (4l_3^2 + 3(r_1^2 + r_2^2)),$$

$$m_{55} = I_5 + l_5^2 m_6 + l_{c5}^2 m_5,$$

$$m_{56} = l_5 l_{c6} m_6 \cos(q_6 - q_5),$$

$$m_{66} = I_6 + l_{c6}^2 m_6,$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{65} & 0 \end{bmatrix},$$

donde

$$c_{12} = -\frac{1}{8} l_1 (l_3 m_3 (\dot{q}_2 + 2\dot{q}_3 + 2\dot{q}_4) \text{sen}(-q_1 + q_2 + q_3 + q_4)$$

$$8(l_{c2} m_2 + l_2 m_3) \dot{q}_2 \text{sen}(q_2 - q_1) + 2l_3 m_3 (\dot{q}_2 - 2\dot{q}_4) \cos(q_1 - q_2 + q_4)$$

$$- 2l_3 m_3 (\dot{q}_2 + 2\dot{q}_4) \cos(-q_1 + q_2 + q_4) +$$

$$l_3 m_3 (2\dot{q}_4 - \dot{q}_2 - 2\dot{q}_3) \text{sen}(q_1 - q_2 - q_3 + q_4) +$$

$$l_3 m_3 (\dot{q}_3 - \dot{q}_2 - 2\dot{q}_4) \text{sen}(-q_1 + q_2 - q_3 + q_4) +$$

$$l_3 m_3 (\dot{q}_2 - 2\dot{q}_4 - 2\dot{q}_3) \text{sen}(q_1 - q_2 + q_3 + q_4)),$$

$$c_{13} = -\frac{1}{8} l_1 l_3 m_3 ((2\dot{q}_4 - \dot{q}_3) (\text{sen}(q_1 - q_2 - q_3 + q_4) + \text{sen}(-q_1 + q_2 - q_3 + q_4))$$

$$+ (\dot{q}_3 + 2\dot{q}_4) (\text{sen}(-q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + \text{sen}(q_1 - q_2 + q_3 + q_4))),$$

$$c_{14} = -\frac{1}{8} l_1 l_3 m_3 \dot{q}_4 (2 \cos(q_1 - q_2 + q_4) - 2 \cos(-q_1 + q_2 + q_4)$$

$$- \text{sen}(q_1 - q_2 - q_3 + q_4) - \text{sen}(-q_1 + q_2 - q_3 + q_4)$$

$$+ \text{sen}(q_1 - q_2 + q_3 + q_4) + \text{sen}(-q_1 + q_2 + q_3 + q_4)),$$

$$c_{21} = \frac{1}{8} l_1 \dot{q}_1 (8(l_{c2} m_2 + l_2 m_3) \text{sen}(q_2 - q_1) + l_3 m_3 (2 \cos(q_1 - q_2 + q_4)$$

$$- 2 \cos(-q_1 + q_2 + q_4) - \text{sen}(q_1 - q_2 - q_3 + q_4) + \text{sen}(-q_1 + q_2 + q_3 + q_4)$$

$$- \text{sen}(-q_1 + q_2 - q_3 + q_4) + \text{sen}(q_1 - q_2 + q_3 + q_4))),$$

$$\begin{aligned}
c_{22} &= -\frac{1}{48}m_3(-8l_3^2(\dot{q}_3 \sin(2q_3) + \dot{q}_4 \sin(2q_4)) - 48l_2l_3\dot{q}_4 \cos(q_4) + \\
&\quad 4l_3^2((\dot{q}_3 - \dot{q}_4) \sin(2(q_4 - q_3)) - (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) \sin(2(q_3 + q_4))) + \\
&\quad (6\dot{q}_3 \sin(2q_3) + 6\dot{q}_4 \sin(2q_4) + 3(\dot{q}_4 - \dot{q}_3) \sin(2(q_4 - q_3)) + \\
&\quad 3(\dot{q}_3 + \dot{q}_4) \sin(2(q_3 + q_4)))(r_1^2 + r_2^2)), \\
c_{23} &= -\frac{1}{48}m_3(12l_2l_3((2\dot{q}_4 - \dot{q}_3) \sin(q_4 - q_3) + (\dot{q}_3 + 2\dot{q}_4) \sin(q_3 + q_4)) + \\
&\quad 4l_3^2((\dot{q}_3 - 2\dot{q}_4) \cos(2q_4 - q_3) - 4(\dot{q}_3 + 2\dot{q}_4) \cos(q_3 + 2q_4)) + \\
&\quad (12 \cos(q_3)\dot{q}_4 + 3(2\dot{q}_4 - \dot{q}_3) \cos(2q_4 - q_3) + \\
&\quad 3(\dot{q}_3 + 2\dot{q}_4) \cos(q_3 + 2q_4))(r_1^2 + r_2^2) + 16l_3^2 \cos(q_3)\dot{q}_4), \\
c_{24} &= -\frac{1}{4}l_2l_3m_3\dot{q}_4(\sin(q_3 + q_4) - \sin(q_4 - q_3)), \\
c_{31} &= \frac{1}{8}l_1l_3m_3\dot{q}_1(-\sin(q_1 - q_2 - q_3 + q_4) + \sin(-q_1 + q_2 - q_3 + q_4) \\
&\quad - \sin(q_1 - q_2 + q_3 + q_4) + \sin(-q_1 + q_2 + q_3 + q_4)), \\
c_{32} &= -\frac{1}{96}m_3(4l_3^2(\dot{q}_2(2 \sin(2q_3) + \sin(2(q_3 + q_4)) - \sin(2(q_4 - q_3))) - \\
&\quad 4\dot{q}_4(2 \cos(q_3) + \cos(2q_4 - q_3) + \cos(q_3 + 2q_4))) + \\
&\quad 3(\dot{q}_2(\sin(2(q_4 - q_3)) - 2 \sin(2q_3) - \sin(2(q_3 + q_4))) + \\
&\quad 4\dot{q}_4(\cos(2q_4 - q_3) + \cos(q_3 + 2q_4) - 2 \cos(q_3)))(r_1^2 + r_2^2)), \\
c_{33} &= \frac{1}{12}m_3\dot{q}_4 \sin(2q_4)(3(r_1^2 + r_2^2) - 4l_3^2), \\
c_{41} &= \frac{1}{8}l_1l_3m_3\dot{q}_1(\sin(q_1 - q_2 - q_3 + q_4) - \sin(-q_1 + q_2 - q_3 + q_4) - \\
&\quad 2 \cos(q_1 - q_2 + q_4) - 2 \cos(-q_1 + q_2 + q_4) - \sin(q_1 - q_2 + q_3 + q_4) + \\
&\quad \sin(-q_1 + q_2 + q_3 + q_4)), \\
c_{42} &= \frac{1}{96}m_3(-4l_3(4l_3\dot{q}_3(2 \cos(q_3) + \cos(2q_4 - q_3) + \cos(q_3 + 2q_4)) + \\
&\quad \dot{q}_2(12l_2 \cos(q_4) + l_3(2 \sin(2q_4) + \sin(2(q_4 - q_3)) + \sin(2(q_3 + q_4)))))) + \\
&\quad 3(\dot{q}_2(\sin(2(q_4 - q_3)) + \sin(2(q_3 + q_4)) + 2 \sin(2q_4)) + \\
&\quad 4\dot{q}_3(\cos(2q_4 - q_3) + \cos(q_3 + 2q_4) - 2 \cos(q_3)))(r_1^2 + r_2^2)),
\end{aligned}$$

$$c_{43} = -\frac{1}{24}m_3\dot{q}_3 \sin(2q_4)(3(r_1^2 + r_2^2) - 4l_3^2),$$

$$c_{56} = -l_5l_{c6}m_6\dot{q}_6 \sin(q_6 - q_5),$$

$$c_{65} = l_5l_{c6}m_6\dot{q}_5 \sin(q_6 - q_5),$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gl_3m_3 \sin(q_3) \cos(q_4) \\ -\frac{1}{2}gl_3m_3 \cos(q_3) \sin(q_4) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

y

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & 0 & 0 & \tau_5 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Se tiene un vector de 6 coordenadas generalizadas para el sistema desacoplado, cabe mencionar que al considerar las restricciones holonómicas el mecanismo completo tiene 4 grados de libertad. Dado que el vector τ sólo contiene dos componentes diferentes de cero, el sistema tendrá un grado de subactuación de dos. Las rotaciones angulares que tienen movimiento independiente son q_1, q_3, q_4, q_5 , el resto de ellas (q_2, q_6) dependen de los ángulos independientes como se obtuvo en (15) y (14).

2.6. Modelo dinámico: mecanismo restringido

Ahora, consideremos las restricciones holonómicas al sistema desacoplado tal que se obtenga el sistema restringido, como se muestra en la Figura 6.

Para obtener el sistema restringido, nos basaremos en la metodología dada en (Ghorbel *et al.*, 2000), la cual requiere un vector que incluya las restricciones y las coordenadas generalizadas. La diferencia entre el número de coordenadas generalizadas del sistema desacoplado y el número de restricciones deben dar como resultado los grados de libertad del sistema completo. En nuestro caso, tenemos 6 coordenadas generalizadas para el sistema desacoplado, mientras que el sistema completo tiene 4

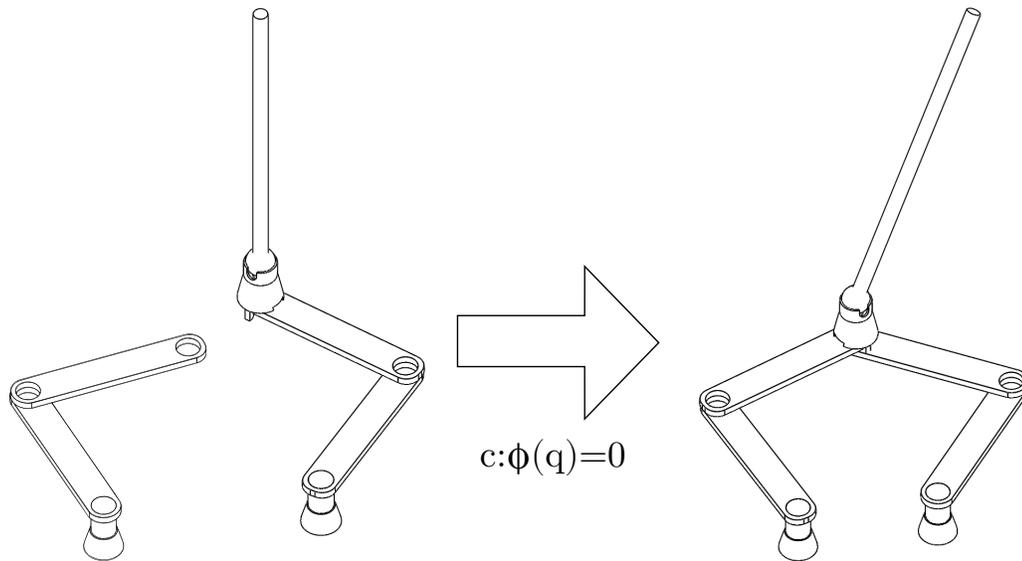


Figura 6. Representación de sistema desacoplado a sistema restringido.

grados de libertad, por lo tanto, es necesario aplicar 2 restricciones.

Las restricciones \mathcal{C} deben cumplir lo siguiente

$$\mathcal{C} : \phi(q) = 0, \quad (32)$$

donde $\phi(q)$ debe ser al menos dos veces continuamente diferenciable. Por lo tanto, se definen las restricciones a partir de la geometría del mecanismo descrita en (1) y (2), estas restricciones deben cumplir con (32), entonces

$$\phi(q) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_2) - l_5 \cos(q_5) - l_6 \cos(q_6) + C_x \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_2) - l_5 \sin(q_5) - l_6 \sin(q_6) + C_y \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, se define un vector que incluya las restricciones y las coordenadas

generalizadas al cual llamaremos $\psi(q)$, por lo tanto

$$\psi(q) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_2) - l_5 \cos(q_5) - l_6 \cos(q_6) + C_x \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_2) - l_5 \sin(q_5) - l_6 \sin(q_6) + C_y \\ q_1 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

continuando con la metodología se requiere el jacobiano de $\psi(q)$ (33), es decir

$$\frac{\partial \psi(q)}{\partial q} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) & -l_2 \sin(q_2) & 0 & 0 & l_5 \sin(q_5) & l_6 \sin(q_6) \\ l_1 \cos(q_1) & l_2 \cos(q_2) & 0 & 0 & -l_5 \cos(q_5) & -l_6 \cos(q_6) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Ahora, para que el sistema no permanezca en configuración singular, debe cumplirse que $\det \left[\frac{\partial \psi(q)}{\partial q} \right] \neq 0$. Así, en nuestro caso

$$\det \left[\frac{\partial \psi(q)}{\partial q} \right] = l_2 l_6 \sin(q_6 - q_2),$$

por lo tanto se debe cumplir que $q_6 - q_2 \neq k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Finalmente se obtiene el modelo dinámico del mecanismo de 5 barras con un péndulo esférico, dado por

$$\hat{M}(\eta)\ddot{\eta} + \hat{C}(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + \hat{G}(\eta) = \hat{\tau}, \quad (35)$$

donde

$$\begin{aligned}
 \eta &= \begin{bmatrix} q_1 & q_3 & q_4 & q_5 \end{bmatrix}^T, \quad \dot{q} = \rho(q)\dot{\eta}, \\
 \hat{M}(\eta) &= \rho(q)^T M(q) \rho(q), \\
 \hat{C}(\eta, \dot{\eta}) &= \rho(q)^T M(q) \dot{\rho}(q, \dot{q}) + \rho(q)^T C(q, \dot{q}) \rho(q), \\
 \hat{G}(\eta) &= \rho(q)^T G(q), \\
 \hat{\tau} &= \rho(q)^T \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & 0 & \tau_5 \end{bmatrix}^T, \\
 \rho(q) &= \left[\frac{\partial \psi(q)}{\partial q} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0_{2 \times 4} \\ I_{4 \times 4} \end{bmatrix}, \quad \dot{\rho}(q, \dot{q}) = - \left[\frac{\partial \psi(q)}{\partial q} \right]^{-1} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \psi(q)}{\partial q} \right] \rho(q).
 \end{aligned} \tag{36}$$

Se consideran como variables de estado el vector de posiciones η y el vector de velocidades $\dot{\eta}$ contenidas en $H = [\eta^T, \dot{\eta}^T]^T$. Entonces, el modelo dinámico del sistema se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \dot{H} &= \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \hat{M}(\eta)^{-1} [\hat{\tau} - \hat{C}(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} - \hat{G}(\eta)] \end{bmatrix}, \\
 y &= \eta,
 \end{aligned} \tag{37}$$

donde las matrices están definidas en (36). Los valores numéricos se encuentran en la sección 5.5.

2.7. Casos particulares

En esta sección se presentan un par de sistemas partiendo del modelo dinámico obtenido, ya que al hacer las consideraciones pertinentes se reduce el modelo al del mecanismo correspondiente.

El interés de mostrar esos casos particulares, es porque se trabaja con estos sistemas en los siguientes capítulos, por lo que se necesita conocer su modelo dinámico.

2.7.1. Mecanismo de 5 barras con péndulo compuesto

El modelo dinámico del mecanismo de 5 barras con péndulo compuesto como se muestra en la Figura 7, se puede obtener a partir de (35). Para este caso considere el vector de estados de la siguiente manera

$$\eta = [q_1 \quad q_3 \quad q_5]^T.$$

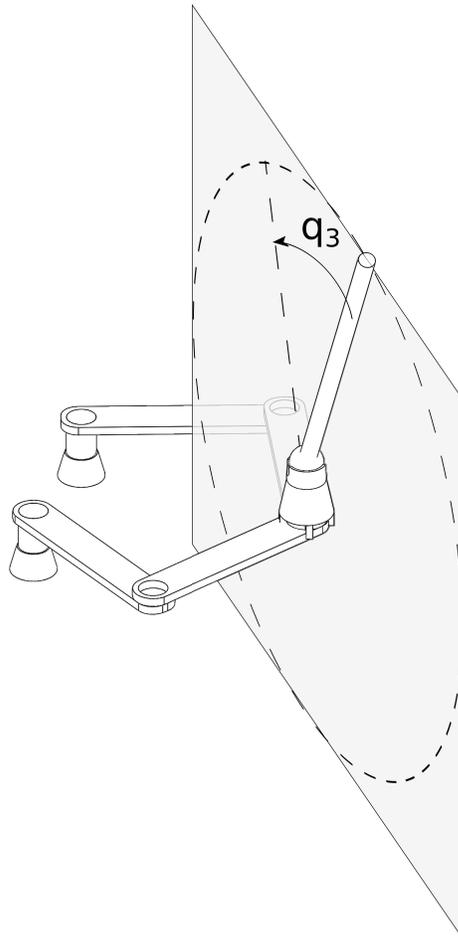


Figura 7. Mecanismo de cinco barras con péndulo compuesto.

Observe que este modelo no considera los efectos de la componente generada por q_4 del péndulo esférico, por lo tanto, todos los elementos relacionados se hacen nulos (es decir, $q_4 = \dot{q}_4 = 0$). Por lo tanto, las matrices del sistema quedan de la siguiente

manera

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 & 0 \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & 0 & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{55} & m_{56} \\ 0 & 0 & 0 & m_{56} & m_{66} \end{bmatrix},$$

donde

$$m_{11} = I_1 + l_1^2 m_3 + l_1^2 m_2 + l_{c1}^2 m_1,$$

$$m_{12} = \frac{1}{4} l_1 (l_3 m_3 (\cos(-q_1 + q_2 + q_3) - \cos(q_1 - q_2 + q_3)) + (4l_{c2} m_2 + 4l_2 m_3) \cos(q_2 - q_1)),$$

$$m_{13} = \frac{1}{4} l_1 l_3 m_3 (\cos(q_1 - q_2 + q_3) + \cos(-q_1 + q_2 + q_3)),$$

$$m_{22} = \frac{1}{24} (24I_2 + 24l_{c2}^2 m_2 + (24l_2^2 + 4l_3^2) m_3 + (9m_3 + 3m_3 \cos(2q_3))(r_1^2 + r_2^2) - 4l_3^2 m_3 \cos(2q_3)),$$

$$m_{23} = \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 \cos(q_3),$$

$$m_{33} = \frac{1}{12} m_3 (4l_3^2 + 3(r_1^2 + r_2^2)),$$

$$m_{55} = I_5 + l_5^2 m_6 + l_{c5}^2 m_5,$$

$$m_{56} = l_5 l_{c6} m_6 \cos(q_6 - q_5),$$

$$m_{66} = I_6 + l_{c6}^2 m_6,$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{56} \\ 0 & 0 & 0 & c_{65} & 0 \end{bmatrix},$$

donde

$$c_{12} = -\frac{1}{4}l_1(4(l_{c2}m_2 + l_2m_3)\dot{q}_2 \text{sen}(q_2 - q_1) + l_3m_3(\dot{q}_2 + 2\dot{q}_3) \text{sen}(-q_1 + q_2 + q_3) + l_3m_3(\dot{q}_2 - 2\dot{q}_3) \text{sen}(q_1 - q_2 + q_3)),$$

$$c_{13} = -\frac{1}{4}l_1l_3m_3\dot{q}_3(\text{sen}(q_1 - q_2 + q_3) + \text{sen}(-q_1 + q_2 + q_3)),$$

$$c_{21} = \frac{1}{4}l_1\dot{q}_1(4(l_{c2}m_2 + l_2m_3) \text{sen}(q_2 - q_1) + l_3m_3 \text{sen}(-q_1 + q_2 + q_3) + l_3m_3 \text{sen}(q_1 - q_2 + q_3)),$$

$$c_{22} = -\frac{1}{12}m_3\dot{q}_3 \text{sen}(2q_3)(3(r_1^2 + r_2^2) - 4l_3^2),$$

$$c_{23} = -\frac{1}{2}l_2l_3m_3 \text{sen}(q_3)\dot{q}_3,$$

$$c_{31} = \frac{1}{4}l_1l_3m_3\dot{q}_1(\text{sen}(-q_1 + q_2 + q_3) - \text{sen}(q_1 - q_2 + q_3)),$$

$$c_{32} = \frac{1}{24}m_3\dot{q}_2 \text{sen}(2q_3)(3(r_1^2 + r_2^2) - 4l_3^2),$$

$$c_{56} = -l_5l_{c6}m_6\dot{q}_6 \text{sen}(q_6 - q_5),$$

$$c_{65} = l_5l_{c6}m_6\dot{q}_5 \text{sen}(q_6 - q_5),$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gl_3m_3 \text{sen}(q_3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & 0 & \tau_5 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Finalmente, considerando q, η, ρ y ψ como las descritas en (36) pero de manera reducida, es decir, sin las componentes relativas al péndulo esférico, se obtiene el modelo dinámico del mecanismo de cinco barras con péndulo compuesto

$$\hat{M}(\eta)\ddot{\eta} + \hat{C}(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + \hat{G}(\eta) = \hat{\tau},$$

donde

$$\begin{aligned}\eta &= \begin{bmatrix} q_1 & q_3 & q_5 \end{bmatrix}^T, \quad \dot{q} = \rho(q)\dot{\eta}, \\ \hat{M}(\eta) &= \rho(q)^T M(q) \rho(q), \\ \hat{C}(\eta, \dot{\eta}) &= \rho(q)^T M(q) \dot{\rho}(q, \dot{q}) + \rho(q)^T C(q, \dot{q}) \rho(q), \\ \hat{G}(\eta) &= \rho(q)^T G(q), \\ \hat{\tau} &= \rho(q)^T \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & \tau_5 \end{bmatrix}^T, \\ \rho(q) &= \left[\frac{\partial \psi(q)}{\partial q} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0_{2 \times 3}, \\ I_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad \dot{\rho}(q, \dot{q}) = - \left[\frac{\partial \psi(q)}{\partial q} \right]^{-1} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \psi(q)}{\partial q} \right] \rho(q).\end{aligned}$$

2.7.2. Mecanismo de cinco barras

El modelo dinámico del mecanismo de cinco barras, sin considerar el péndulo esférico como se muestra en la Figura 8, se puede obtener a partir de (35). Para este caso considere el vector de estados de la siguiente manera

$$\eta = \begin{bmatrix} q_1 & q_5 \end{bmatrix}^T.$$

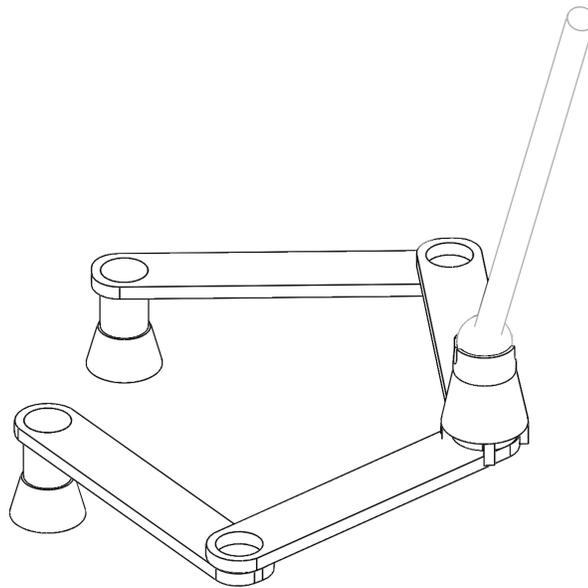


Figura 8. Mecanismo de cinco barras.

Observe que este modelo no considera los efectos del péndulo esférico, por lo tanto,

todos los elementos relacionados al péndulo se hacen nulos (es decir, $q_3 = q_4 = \dot{q}_3 = \dot{q}_4 = 0$). Las matrices del mecanismo de cinco barras quedan de la siguiente manera

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{12} & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{55} & m_{56} \\ 0 & 0 & m_{56} & m_{66} \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} m_{11} &= I_1 + l_1^2 m_2 + l_{c1}^2 m_1, & m_{12} &= l_1 l_{c2} m_2 \cos(q_2 - q_1), \\ m_{22} &= I_2 + l_{c2}^2 m_2, & m_{55} &= I_5 + l_5^2 m_6 + l_{c5}^2 m_5, \\ m_{56} &= l_5 l_{c6} m_6 \cos(q_6 - q_5), & m_{66} &= I_6 + l_{c6}^2 m_6, \end{aligned}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{56} \\ 0 & 0 & c_{65} & 0 \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} c_{12} &= -l_1 l_{c2} m_2 \dot{q}_2 \sin(q_2 - q_1), & c_{21} &= l_1 l_{c2} m_2 \dot{q}_1 \sin(q_2 - q_1), \\ c_{56} &= -l_5 l_{c6} m_6 \dot{q}_6 \sin(q_6 - q_5), & c_{65} &= l_5 l_{c6} m_6 \dot{q}_5 \sin(q_6 - q_5), \end{aligned}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & \tau_5 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Finalmente, considerando q, η, ρ y ψ como las descritas en (36) pero de manera reducida, es decir, sin las componentes relativas al péndulo esférico, se obtiene el mismo modelo dinámico de la siguiente manera

$$\hat{M}(\eta)\ddot{\eta} + \hat{C}(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = \hat{\tau},$$

donde

$$\begin{aligned} \eta &= \begin{bmatrix} q_1 & q_5 \end{bmatrix}^T, \quad \dot{q} = \rho(q)\dot{\eta}, \\ \hat{M}(\eta) &= \rho(q)^T M(q) \rho(q), \\ \hat{C}(\eta, \dot{\eta}) &= \rho(q)^T M(q) \dot{\rho}(q, \dot{q}) + \rho(q)^T C(q, \dot{q}) \rho(q), \\ \hat{G}(\eta) &= \rho(q)^T G(q), \\ \hat{\tau} &= \rho(q)^T \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_5 \end{bmatrix}^T, \\ \rho(q) &= \left[\frac{\partial \psi(q)}{\partial q} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad \dot{\rho}(q, \dot{q}) = - \left[\frac{\partial \psi(q)}{\partial q} \right]^{-1} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \psi(q)}{\partial q} \right] \rho(q), \end{aligned}$$

este modelo dinámico coincide con el descrito en (Violante, 2018).

Capítulo 3. Diseño del observador

Es posible aproximarse matemáticamente al comportamiento real de un sistema mecánico o proceso. Una representación pueden ser las variables de estado; entonces, si hablamos de un sistema mecánico podemos llamar como estados a la posición y velocidad de cada articulación del mecanismo. En simulación no hay problema en trabajar con el estado completo del sistema, debido a que es posible tener estas mediciones; sin embargo, en la práctica no siempre sucede eso.

Cuando no se tiene medido el estado completo es necesario utilizar un observador, su función es estimar el vector de estado utilizando el modelo matemático que describe el comportamiento del sistema y los estados medidos. La idea es generar un sistema virtual con la misma dinámica del sistema real, y así poder obtener los estados faltantes.

Uno de los observadores más conocido es el observador de Luenberger (Luenberger, 1971), el cual fue diseñado para sistemas lineales. Una de sus desventajas es que se tiene buen desempeño cuando el modelo de la planta y sus parámetros son prácticamente exactos; de lo contrario, no se tiene una apropiada aproximación a los estados estimados, debido a que se tienen términos de incertidumbre. En la Figura 9 se muestra la implementación de un observador de Luenberger para un sistema lineal. El observador requiere tener la misma señal de entrada y la salida del sistema físico, y se desea que la diferencia entre el estado real y el observado (llamado error de observación) sea cero de manera asintótica.

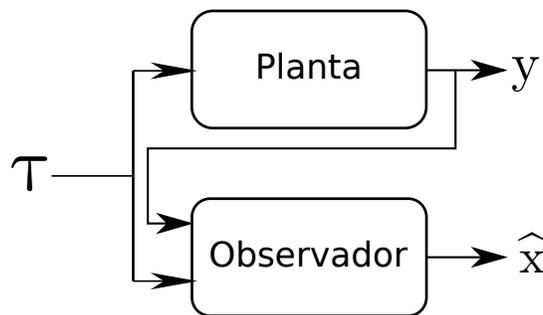


Figura 9. Diagrama de bloques para implementar el observador de Luenberger.

En este capítulo se analiza un observador discontinuo propuesto en (Rosas Almeida, 2005). Este observador, además de calcular los estados del sistema, estima la incerti-

dumbre existente. Posteriormente, dicha incertidumbre se utilizará para identificar la fricción en el sistema.

Se presenta el desempeño del observador discontinuo de manera numérica y experimental, en un mecanismo de cinco barras, siendo un sistema de cadena cinemática cerrada.

3.1. Preliminares

Para analizar la estabilidad del observador discontinuo, se considera el siguiente sistema de segundo orden

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -az_1 - bz_2 + \varphi(t) - c\text{sign}(z_1) \end{bmatrix}, \quad (38)$$

donde a y b son constantes positivas, c es un parámetro de control y $\varphi(t)$ es una perturbación externa acotada, es decir

$$|\varphi(t)| \leq \mu, \quad (39)$$

donde μ es una constante. Ahora, se define la matriz A como

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}, \quad (40)$$

y la matriz P como

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

donde P es la solución de la ecuación de Lyapunov $A^T P + PA = -I$. Las propiedades de estabilidad del sistema (38) se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 1 Para el sistema (38), si

$$c > 2\lambda_{\max}(P) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P) a\mu}{\lambda_{\min}(P) \theta}}, \quad (42)$$

para algún θ , $0 < \theta < 1$ y $\lambda_{\max}(P)$ y $\lambda_{\min}(P)$ son los valores propios máximo y mínimo de la matriz P , entonces el origen del espacio de estado es un punto de equilibrio exponencialmente estable en el sentido de Lyapunov, en forma global.

En (Rosas et al., 2007) se hace la demostración considerando el sistema (38) con estructura variable, debido a que el sistema es modificado por la función $\text{sign}(\cdot)$ cuando $z_1 < 0$ y $z_1 > 0$. Primero se hace el análisis cuando $\varphi(t) = 0$ y posteriormente se considera $\varphi(t) \neq 0$.

3.2. Diseño de un observador discontinuo

Se reestructura (37) agregando un término de incertidumbre, recordando que $H = [\eta^T, \dot{\eta}^T]^T$, el sistema queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ f(\eta, \dot{\eta}) + g(\eta) + \varphi(\cdot) + \hat{M}(\eta)^{-1} \hat{t} \end{bmatrix}, \\ y &= \eta, \end{aligned} \quad (43)$$

donde

$$\begin{aligned} f(\eta, \dot{\eta}) &= -\hat{M}(\eta)^{-1} \hat{C}(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta}, \\ g(\eta) &= -\hat{M}(\eta)^{-1} \hat{G}(\eta), \\ \varphi(\cdot) &= -\hat{M}(\eta)^{-1} \gamma, \end{aligned}$$

con $\gamma(\cdot)$ un vector que contiene las incertidumbres, sean errores de modelado o parámetros.

Para estimar el vector de estados completo del sistema (43), se puede utilizar un observador a partir de la salida del sistema, para ello, se establece la dinámica del observador.

Se estructura el observador de la siguiente manera, considerando $\hat{\eta}, \dot{\hat{\eta}}$ como los vectores observados

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{\eta} \\ \dot{\hat{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{\eta}} \\ f(\eta, \dot{\eta}) + g(\eta) + \hat{M}(\eta)^{-1} \hat{\tau} \end{bmatrix} + L(y - \hat{y}), \quad (44)$$

$$\hat{y} = \hat{\eta},$$

donde el vector $L(y - \hat{y})$ está dado de la forma

$$L(y - \hat{y}) = \begin{bmatrix} C_1(y - \hat{y}) \\ C_2(y - \hat{y}) + C_3 \text{sign}(y - \hat{y}) \end{bmatrix},$$

donde C_1, C_2 y C_3 son matrices diagonales definidas positivas.

Ahora, se definen los errores de observación $e_1 = y - \hat{y} = \eta - \hat{\eta}$ y $e_2 = \dot{\eta} - \dot{\hat{\eta}} - C_1 e_1$. La dinámica de los errores está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= -c_2 e_1 - c_1 e_2 - c_3 \text{sign}(e_1) + \varphi(\cdot) + f(\eta, \dot{\eta}) - f(\eta, \dot{\hat{\eta}}), \end{aligned} \quad (45)$$

debido a que $f(\eta, \dot{\eta}) - f(\eta, \dot{\hat{\eta}})$ es Lipschitz, se tiene que

$$\|f(\eta, \dot{\eta}) - f(\eta, \dot{\hat{\eta}})\| \leq \epsilon_1 \|e\|,$$

donde $\epsilon_1 > 0$, de esta manera se define

$$\xi(\cdot) = \varphi(\cdot) + f(\eta, \dot{\eta}) - f(\eta, \dot{\hat{\eta}}), \quad (46)$$

que está acotado de la siguiente forma

$$\|\xi(\cdot)\| \leq \epsilon_0 + \epsilon_1 \|e\|.$$

Entonces, se sustituye (46) en (45), obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= -c_2 e_1 - c_1 e_2 - c_3 \text{sign}(e_1) + \xi(\cdot). \end{aligned} \quad (47)$$

El sistema (47) está de la forma dada en (38), por lo tanto, se puede obtener la ganancia c_3 considerando (42) de acuerdo a la metodología en (Rosas *et al.*, 2007). Las ganancias c_1 y c_2 , corresponden a la dinámica lineal del error de observación como en (40).

3.3. Identificación de incertidumbre

El sistema (47) tiene una superficie de discontinuidad cuando $e_1 = 0$ y el término $c_3 \text{sign}(e_1)$ produce un modo deslizante de segundo orden, es decir, el control equivalente se presenta en la segunda derivada de la superficie de discontinuidad, como se ve a continuación

$$\ddot{e}_1 = -c_2 e_1 - c_1 e_2 - u_{eq} + \varphi(\cdot) + f(\eta, \dot{\eta}) - f(\eta, \hat{\eta}),$$

Entonces, el control equivalente se presenta cuando $e_1 = e_2 = 0$ (que implica $\dot{\eta} = \hat{\eta}$), por lo tanto el control equivalente está dado por

$$u_{eq} = \varphi(\cdot) = -\hat{M}(\eta)^{-1} \gamma. \quad (48)$$

El control equivalente es el promedio del término discontinuo $c_3 \text{sign}(e_1)$ cuando las trayectorias llegan al origen, por lo que

$$u_{eq} = \overline{\lim_{t \rightarrow \infty} c_3 \text{sign}(e_1(t))}. \quad (49)$$

Entonces, se puede aproximar a la incertidumbre en el sistema a partir de (48)

$$\hat{\gamma} = -\hat{M}(\eta) \overline{\lim_{t \rightarrow \infty} c_3 \text{sign}(e_1(t))}, \quad (50)$$

donde $\overline{c_3 \text{sign}(e_1(t))}$ representa el promedio y $\hat{\gamma}$ es la incertidumbre aproximada.

Para obtener el promedio de la señal discontinua se propone utilizar un filtro de Butterworth de segundo orden, con el fin de obtener una aproximación al control equivalente como se describe en (49). Se considera la dinámica del filtro pasa bajas como

un sistema auxiliar, donde la señal de entrada es $c_3 \text{sign}(e_1(t))$, entonces, su representación en variables de estado es

$$\begin{aligned}\dot{x}_f &= A_f x_f + B_f u_f, \\ y_f &= C x_f,\end{aligned}\tag{51}$$

donde

$$\begin{aligned}A_f &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_c^2 & -\sqrt{2}\omega_c \end{bmatrix}, \\ B_f &= \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_c^2 \end{bmatrix}, \\ C_f &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{52}$$

con ω_c la frecuencia de corte del filtro, $u_f = c_3 \text{sign}(e_1(t))$ y la salida $y_f = \hat{\phi}$.

Si se tiene un vector de entrada $u_f \in \mathcal{R}^n$, se puede representar (51) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{x}_f &= \mathcal{A}_f x_f + \mathcal{B}_f u_f, \\ y_f &= \mathcal{C} x_f,\end{aligned}\tag{53}$$

donde $\mathcal{A}_f = I \otimes A_f$, $\mathcal{B}_f = I \otimes B_f$ y $\mathcal{C}_f = I \otimes C_f$, el símbolo \otimes representa el producto Kronecker, en este caso de una matriz identidad $I \in \mathcal{R}^{n \times n}$ por cada matriz en (52).

3.4. Resultados

En esta sección se presentan resultados numéricos y experimentales utilizando el observador discontinuo descrito anteriormente. El objetivo es obtener las señales de incertidumbre inducidas en el sistema. En la Figura 10 se muestra la implementación del observador discontinuo con identificación de incertidumbre para sistemas lagrangianos.

El sistema utilizado en el experimento práctico y numérico es el mecanismo de cinco barras, donde su modelo dinámico se presenta en la sección 2.7.2.

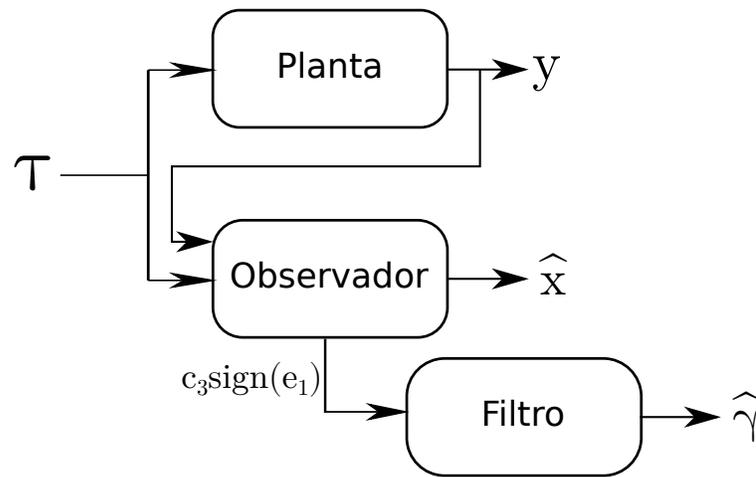


Figura 10. Diagrama de bloques para implementar observador discontinuo con identificación de incertidumbre.

3.4.1. Resultados numéricos

Consideremos el modelo dinámico del mecanismo de cinco barras dado en (43) y el observador descrito en (44) con las hipótesis correspondientes. En particular se seleccionan las matrices diagonales

$$C_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix},$$

tal que los polos del error de observación estén ubicados en $\lambda = -5$. Considerando (42) se tiene que

$$C_3 = \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 40 \end{bmatrix}.$$

La señal de entrada $\hat{\tau} = [0, 0]^T$ y la señal de incertidumbre inducida es $\gamma(t) = [0.15 \sin(2\pi t), 0]^T$.

En la Figura 11 se muestra la respuesta del mecanismo de cinco barras y la respuesta del observador discontinuo, mientras que en la Figura 12 se muestra la diferencia

de estas señales. En ellas, se presenta un transitorio, debido a la diferencia de condiciones iniciales en simulación. A pesar de la incertidumbre inducida, los estados del observador convergen a los estados del sistema original.

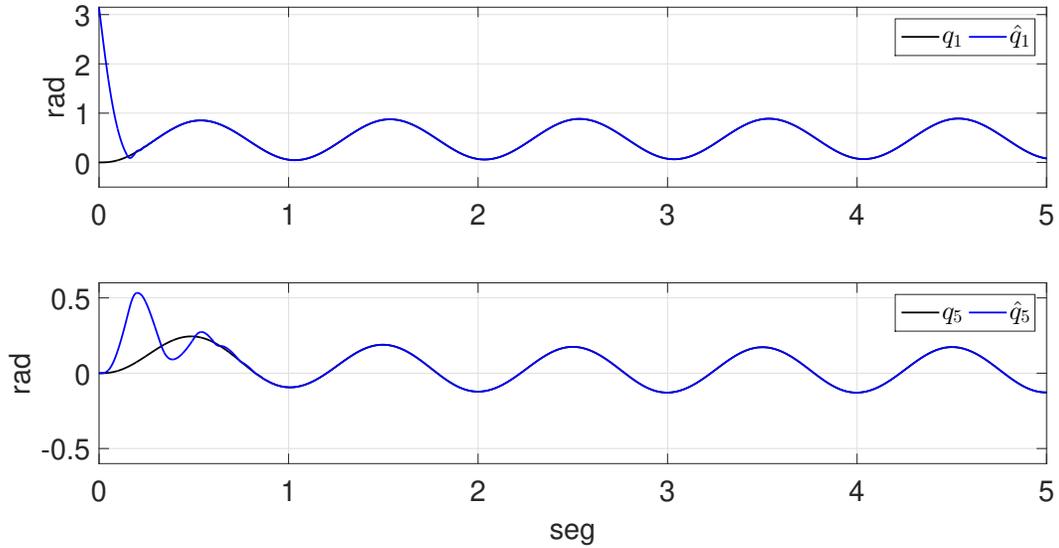


Figura 11. Respuesta del sistema y observador discontinuo.

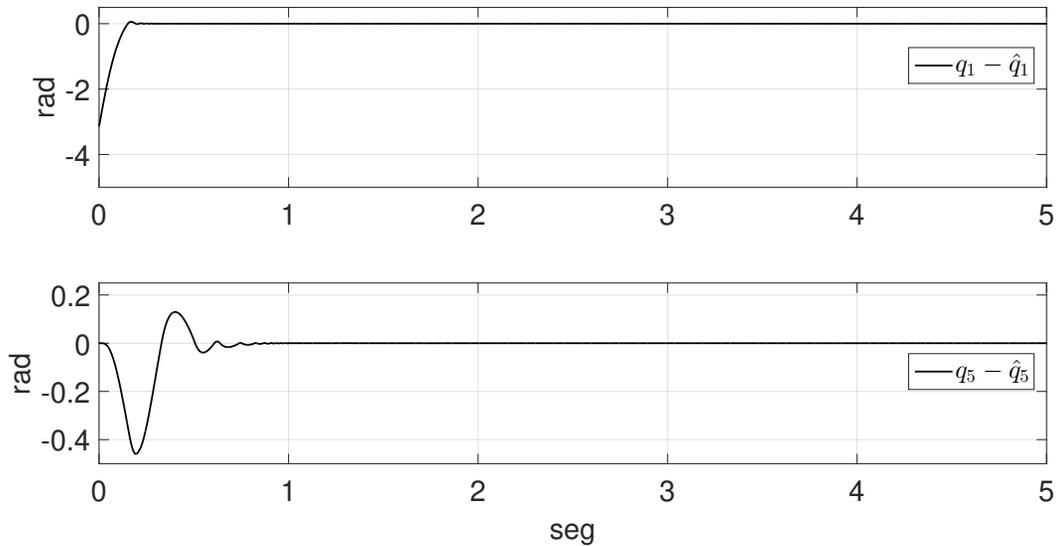


Figura 12. Diferencia del estado real y el observado.

En la Figura 13 se muestra la incertidumbre inducida y la identificada. Para esto, se obtuvo el promedio de la señal discontinua utilizando el filtro de Butterworth descrito en la ecuación (53), con una frecuencia de corte de $\omega_c = 50 \text{ rad/seg}$. La incertidumbre estimada relacionada a la articulación 1 converge a la señal inducida, mientras que la

incertidumbre de la articulación 2 converge a cero ya que no hubo excitación en ese actuador.

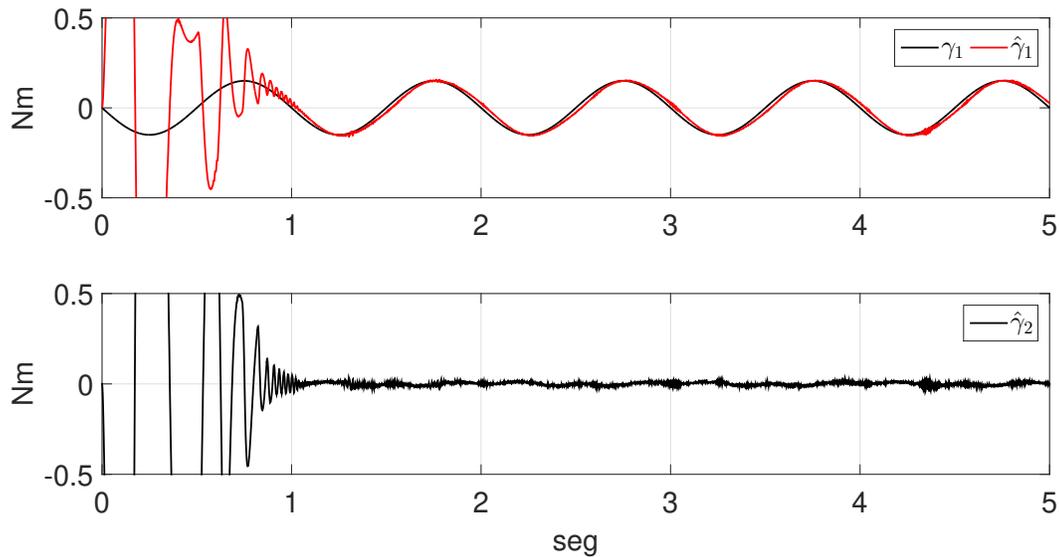


Figura 13. Incertidumbre inducida y estimada.

El observador es un sistema virtual, modificar sus ganancias no afecta el desempeño del sistema real, a menos que estas señales estimadas se retroalimenten. Por eso, es importante que la dinámica del observador sea rápida, para mantener el transitorio de las señales estimadas en un tiempo pequeño y no se extienda en un período largo, alterando el comportamiento del sistema real.

Ahora, se hace de nuevo la identificación de la incertidumbre en el mecanismo de cinco barras, solo modificando las matrices diagonales del observador para disminuir el transitorio en la estimación de las señales, proponiendo lo siguiente

$$C_1 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 2500 & 0 \\ 0 & 2500 \end{bmatrix},$$

tal que los polos del error de observación estén ubicados en $\lambda = -50$.

En la Figura 14 se muestra la respuesta del mecanismo de cinco barras y la respuesta del observador discontinuo. En la Figura 15 se muestran los errores de observación.

Las señales observadas presentan menos tiempo transitorio con respecto a la simulación anterior, debido a la ubicación de polos del observador.

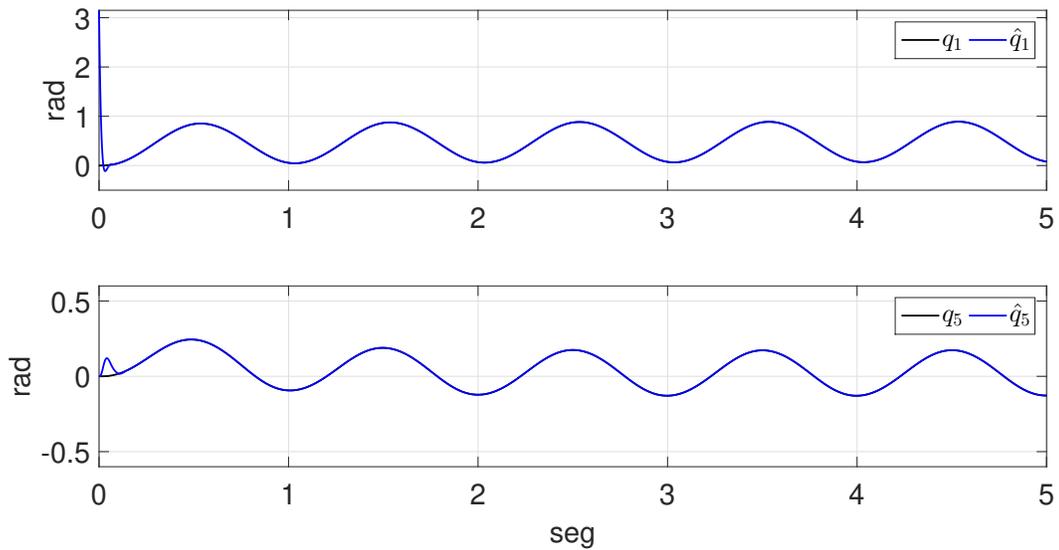


Figura 14. Respuesta del sistema y observador discontinuo.

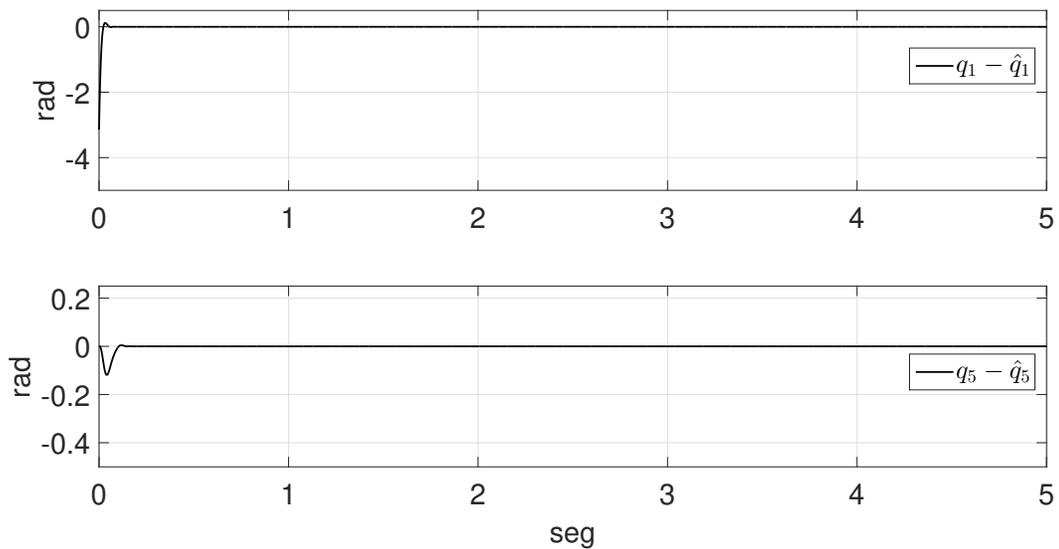


Figura 15. Diferencia del estado real y el observado.

En la Figura 16 se muestra la incertidumbre inducida y la identificada. Se utilizó de nuevo el filtro de Butterworth con la misma frecuencia de corte, $\omega_c = 50 \text{ rad/seg}$.

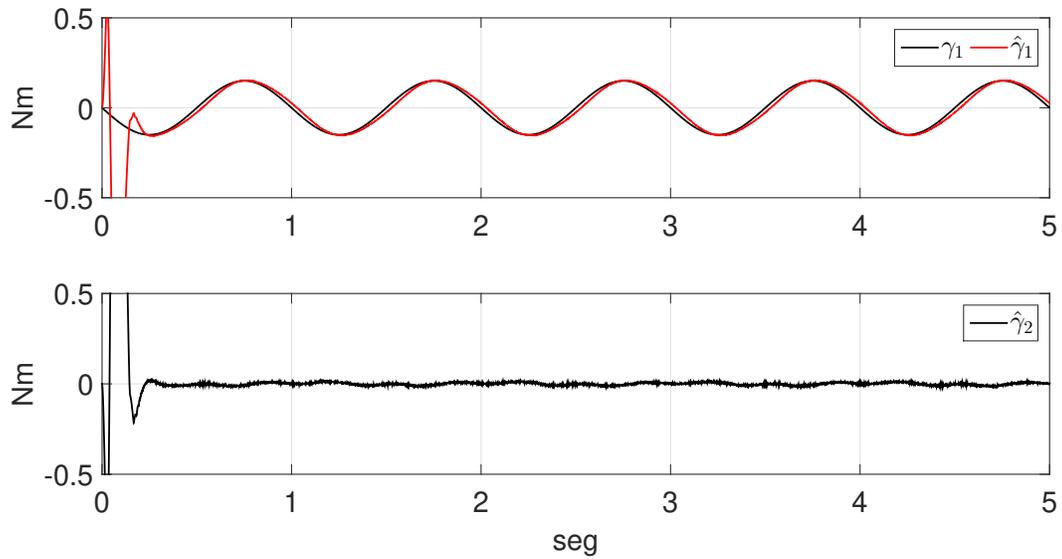


Figura 16. Incertidumbre inducida y estimada.

3.4.2. Resultados experimentales

El experimento se realizó en el mecanismo de cinco barras desarrollado en (Violante, 2018). Se considera su modelo dinámico presentado en la sección 2.7.2 agregando un término de incertidumbre y sin considerar los efectos de la fricción. Es importante tener en cuenta que se pueden tener diferencias paramétricas y de modelado, las cuales se verán sumadas en la señal de incertidumbre estimada.

Las matrices diagonales del observador utilizadas son

$$C_1 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 2500 & 0 \\ 0 & 2500 \end{bmatrix},$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 4.5 \end{bmatrix}.$$

La señal de entrada $\hat{\tau} = [0, 0]^T$ y la señal de incertidumbre inducida es $\gamma(t) = [0.15 \sin(2\pi t), 0]^T$.

En la Figura 17 se muestra la respuesta del mecanismo de cinco barras y la respuesta del observador discontinuo. En el experimento, las condiciones iniciales del observador son casi idénticas al sistema real; por ello, no se observa bien el transitorio. La señal del observador se ve igual a la señal del sistema, pero en la Figura 18 se ve el error que permanece entre ellos.

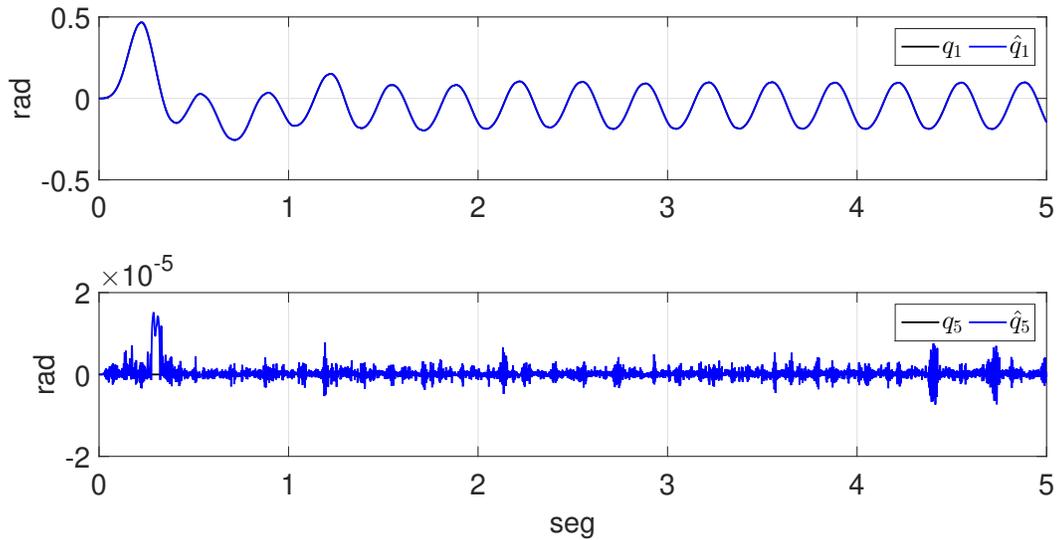


Figura 17. Respuesta del sistema y observador discontinuo.

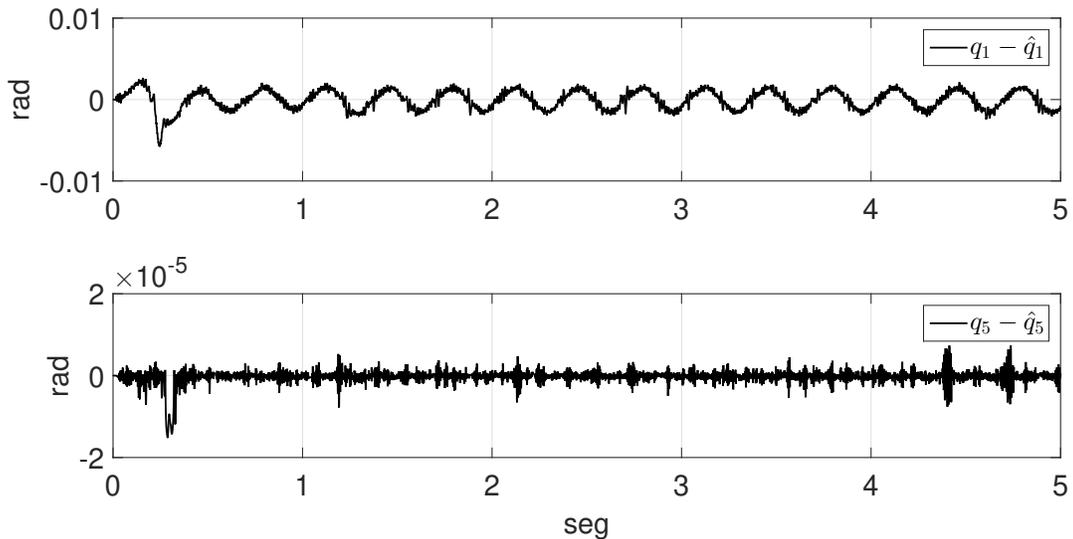


Figura 18. Diferencia del estado real y el observado.

En la Figura 19 se muestra la incertidumbre inducida y la identificada. Para esto, se obtuvo el promedio de la señal discontinua utilizando el filtro de Butterworth (53),

con una frecuencia de corte de $\omega_c = 50f$. Se ve diferencia entre la señal conocida y la obtenida, debido a que la señal identificada contiene la perturbación inducida, posibles diferencias paramétricas y efectos no modelados como la fricción.

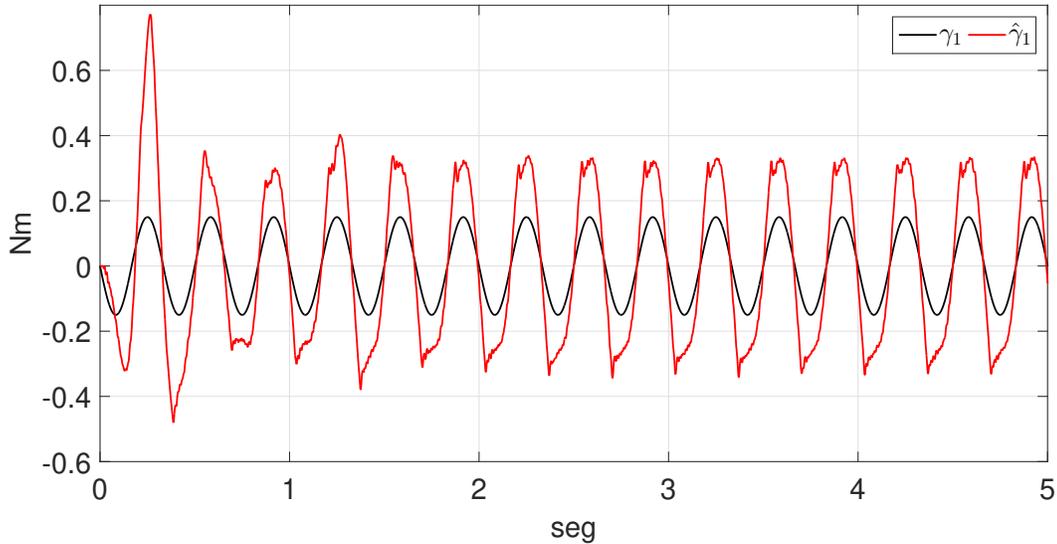


Figura 19. Incertidumbre inducida y estimada.

Se obtuvieron buenos resultados en cuanto a la estimación de una incertidumbre inducida. Se mejora el desempeño del observador discontinuo cuando su dinámica es rápida, evitando transitorios largos. En el siguiente capítulo se necesitará conocer la incertidumbre estimada por el observador discontinuo, para hacer una identificación paramétrica de la fricción.

Capítulo 4. Modelado de fricción

La fuerza de fricción es la fuerza que se opone al movimiento cuando dos superficies están en contacto. En la práctica, es común que esta fuerza se manifieste en las articulaciones de los sistemas mecánicos, lo cual puede afectar la eficiencia y precisión si no se considera este fenómeno. Por ello, es importante tomar en cuenta las fuerzas de fricción y compensar sus efectos en los sistemas mecánicos.

4.1. Modelos de fricción

En el paso de los años los investigadores han estudiado los fenómenos presentados en las fuerzas de fricción ((Dahl, 1975), (Olsson, 1997), entre otros). Gracias a estas investigaciones, se han desarrollado modelos matemáticos que estiman el comportamiento de la fricción.

A continuación se presentan algunos de los modelos de fricción existentes, con el fin de utilizarlos posteriormente para la estimación de estas fuerzas en un mecanismo de cinco barras.

4.1.1. Fricción estática máxima

Se puede definir la fricción estática máxima como la fuerza mínima necesaria para inicial el desplazamiento entre dos superficies en contacto (González Elías, 2000). Supongamos que tenemos un cuerpo de masa m , que deseamos desplazar por medio de una fuerza externa F_e como se muestra en la Figura 20.

Sea la fricción una fuerza constante F como se muestra en la Figura 20. El valor máximo que alcanza antes que el cuerpo inicie movimiento alguno se le conoce como fricción estática máxima. Esta fricción se representa por f_s . Un modelo matemático que aproxima este fenómeno es

$$f_s = \mu_s mg,$$

donde μ_s es el coeficiente adimensional de fricción estática, m es la masa y g es la aceleración gravitacional.

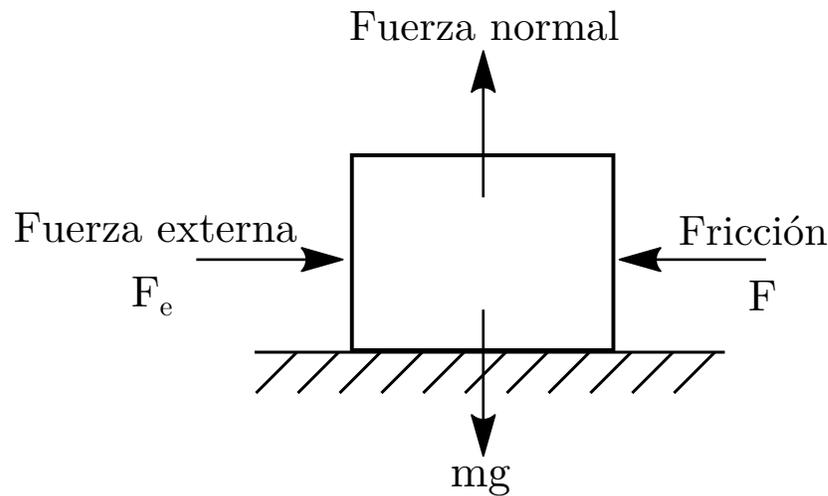


Figura 20. Fuerzas que actúan en la fricción

Esta representación matemática no captura el comportamiento completo, solo describe cuándo se rompe el umbral f_s para producir el movimiento del cuerpo.

4.1.2. Fricción de Coulomb

En el siglo XVII Charles A. Coulomb y G. Amontons descubren que la fricción cuando los cuerpos permanecen en reposo, no es la misma que la fricción cuando existe un deslizamiento entre ellos (González Elías, 2000). En los experimentos que realizaron mostraron que una vez que el cuerpo esté en movimiento, se puede mantener así con una fuerza menor a la necesaria para iniciar su movimiento. Esto quiere decir que la fuerza de fricción cinética es menor a la fuerza de fricción estática máxima f_s .

Una representación más utilizada para la fricción cinética es el modelo de fricción de Coulomb, que se define como

$$F_{Coulomb} = f_c \text{sign}(\dot{q}), \quad (54)$$

donde $F_{Coulomb}$ es la fricción cinética o de Coulomb, \dot{q} es la velocidad angular y f_c es el coeficiente de fricción de Coulomb.

4.1.3. Fricción viscosa

En sistemas mecánicos, la fricción puede producir desgaste y calentamiento en las partes que están en continuo rozamiento. Una solución a ello es cubrir las partes que permanecen en contacto con sustancias viscosas, es decir, lubricantes. Sin embargo, no se eliminan por completo los efectos de la fricción, sino que aún se manifiesta entre las superficies en contacto con las pequeñas capas de lubricante.

Esta fuerza de fricción viscosa es representada como una función directamente proporcional de la velocidad de deslizamiento y se define como

$$F_{Viscosa} = f_v \dot{q}, \quad (55)$$

donde $F_{Viscosa}$ es la fuerza de fricción generada por la viscosidad del lubricante, f_v es el coeficiente de fricción viscosa y \dot{q} es la velocidad angular.

4.1.4. Modelo de Dahl

Entre 1968 y 1975 P. Dahl propuso un modelo dinámico de fricción basado en el comportamiento de las asperezas que forman el contacto entre las superficies (Dahl, 1975). Este comportamiento es interpretado por medio de las cerdas de dos cepillos entrelazados. En su modelo de fricción, Dahl considera la variable z para representar la deflexión promedio de las cerdas. El modelo de Dahl es

$$\begin{aligned} F &= \sigma_0 z, \\ \dot{z} &= -\frac{\sigma_0 |\dot{q}|}{f_c} z + \dot{q}, \end{aligned} \quad (56)$$

donde F es la fricción, z es la deflexión promedio de las cerdas y σ_0 es el coeficiente de rigidez de las cerdas.

El modelo de Dahl no considera la fricción viscosa y otros efectos, por lo tanto no se describen algunos fenómenos en este modelo dinámico. Sin embargo, se relaciona para la región de deslizamiento con la fricción de Coulomb.

4.2. Método de identificación de fricción

En la literatura existen varios métodos de identificación paramétrica para modelos de fricción. Uno de los métodos es propuesto en (Kelly y Llamas, 1999), donde se analiza la respuesta de un motor eléctrico ante una entrada tipo rampa, considerando que el sistema es completamente conocido y que presenta una fricción viscosa y de Coulomb. Otro método se describe en (González Elías, 2000) y consiste en aplicar una entrada tipo rampa, analizando la respuesta de posición y velocidad.

A continuación se presenta un método para obtener los parámetros de un par de modelos de fricción. Esta idea se presenta de forma general para identificar parámetros en (Rosas Almeida, 2005).

Primero, se define la función de error para estimar el vector de parámetros θ a partir de la incertidumbre estimada $\hat{\gamma}$. Para facilitar el proceso de cómputo, se consideran las señales discretas, obteniendo lo siguiente

$$e(k; \theta) = \Phi(k, y(k))\theta - \hat{\gamma}(k), \quad (57)$$

donde θ es el vector de parámetros, $\hat{\gamma}(k)$ es un vector que depende de los parámetros y $\Phi(k, y(k))$ es una matriz que depende de $y(k)$.

Posteriormente, se optimiza J por el criterio de mínimos cuadrados considerando la función de error (57), por lo tanto

$$J(\theta) = \sum_{k=0}^N e^2(k; \theta).$$

Siguiendo la metodología en (Franklin *et al.*, 1998), el vector de parámetros estimados es

$$\hat{\theta} = (\Phi(k)^T \Phi(k))^{-1} \Phi(k)^T \hat{\gamma}(k), \quad (58)$$

donde se considera que $\Phi(k)^T \Phi(k)$ es no singular, lo cual se puede lograr con una señal de excitación persistente.

4.2.1. Función de costo: Modelo de Dahl

Para este método de identificación, se considera que la incertidumbre estimada $\hat{\gamma}$ es la señal de fricción de Dahl F descrita en (56). Se utiliza el método de la regla trapezoidal para calcular aproximadamente la integral de F , quedando de la siguiente manera

$$\hat{F}_{k+1} \approx F_k + \frac{T}{2}(\dot{F}_{k+1} + \dot{F}_k), \quad (59)$$

donde $k = [1, 2, \dots, N-1, N]$, \dot{F} es la derivada de la fricción de Dahl al instante kT y T es el paso de integración entre las muestras.

Se deriva con respecto al tiempo la fricción F mencionada en (56), quedando en forma discreta de la siguiente manera

$$\dot{F}_k = \dot{q}_k \sigma_0 - |\dot{q}_k| F_k \frac{\sigma_0}{f_c}. \quad (60)$$

Ahora, se sustituye (60) en (59) obteniendo lo siguiente

$$\hat{F}_{k+1} \approx \frac{T}{2}(\dot{q}_{k+1} + \dot{q}_k)\sigma_0 - \frac{T}{2}(|\dot{q}_{k+1}|F_{k+1} + |\dot{q}_k|F_k)\frac{\sigma_0}{f_c} + F_k,$$

se considera que $\hat{\gamma} \approx F$, entonces

$$\hat{F}_{k+1} \approx \frac{T}{2}(\dot{q}_{k+1} + \dot{q}_k)\sigma_0 - \frac{T}{2}(|\dot{q}_{k+1}|\hat{\gamma}_{k+1} + |\dot{q}_k|\hat{\gamma}_k)\frac{\sigma_0}{f_c} + \hat{\gamma}_k. \quad (61)$$

Se desea encontrar los valores de σ_0 y f_c , para ello es necesario definir una función de error para aplicar un método de optimización. Se define la función de error considerando $\hat{\gamma}$ y (61) de la siguiente manera

$$e_{k+1} = \hat{F}_{k+1} - \hat{\gamma}_{k+1},$$

$$e_{k+1} = \frac{T}{2}(\dot{q}_{k+1} + \dot{q}_k)\sigma_0 - \frac{T}{2}(|\dot{q}_{k+1}|\hat{\gamma}_{k+1} + |\dot{q}_k|\hat{\gamma}_k)\frac{\sigma_0}{f_c} + \hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{k+1},$$

y se reescribe de tal manera que coincida con (57), quedando de la siguiente manera

$$e(k; \theta) = \Phi(k)\theta - \Delta F(k), \quad (62)$$

donde $\Phi(k) = \frac{T}{2}[\dot{q}_{k+1} + \dot{q}_k, -(|\dot{q}_{k+1}|\hat{\gamma}_{k+1} + |\dot{q}_k|\hat{\gamma}_k)]$, $\theta = [\sigma_0, \frac{\sigma_0}{f_c}]^T$ y $\Delta F = \hat{\gamma}_{k+1} - \hat{\gamma}_k$.

Posteriormente se obtienen los parámetros estimados por el método de mínimos cuadrados, utilizando la fórmula (58).

4.2.2. Función de costo: Fricción viscosa y de Coulomb

Se considera que F es la fricción viscosa y de Coulomb . Esta se compone de la suma de (54) y (55), quedando en forma discreta de la siguiente manera

$$F_k = f_v \dot{q}_k + f_c \text{sign}(\dot{q}_k). \quad (63)$$

Para encontrar los valores de f_v y f_c , se define la función de error. Considerando la incertidumbre estimada $\hat{\gamma} \approx F$, se define el error de la siguiente manera

$$e(k; \theta) = f_v \dot{q}_k + f_c \text{sign}(\dot{q}_k) - \hat{\gamma},$$

y también se reescribe de tal manera que coincida con (57), quedando de la siguiente manera

$$e(k; \theta) = \Phi(k)\theta - \hat{\gamma}(k), \quad (64)$$

donde $\Phi(k) = [\text{sign}(\dot{q}(k)), \dot{q}(k)]$ y $\theta = [f_c, f_v]^T$.

Posteriormente se obtienen los parámetros estimados por el método de mínimos cuadrados, utilizando la fórmula (58).

4.3. Resultados experimentales

En esta sección se presentan resultados experimentales de identificación paramétrica de la fricción de Dahl, y fricción viscosa y de Coulomb. Suponemos que se conoce

la dinámica del sistema mecánico, pero no los efectos de la fricción que actúan en él. Entonces, utilizando el observador discontinuo (44) se obtiene la incertidumbre del sistema (50), se estructura el observador tal que la incertidumbre estimada sean las fuerzas de fricción. Cabe mencionar que en la práctica, en la señal estimada pueden estar involucradas las fuerzas de fricción, señales de incertidumbre, errores paramétricos y de modelado. El experimento se realizó con el mecanismo de cinco barras en el Laboratorio de Control, donde su modelo dinámico se presentó en la sección 2.7.2. Es necesario excitar el sistema con una entrada u en lazo abierto, en este caso se utilizó una señal chirp como se muestra en la Figura 21, tal que al realizar el método de optimización la matriz $\Phi^T \Phi$ en (58) sea no singular.

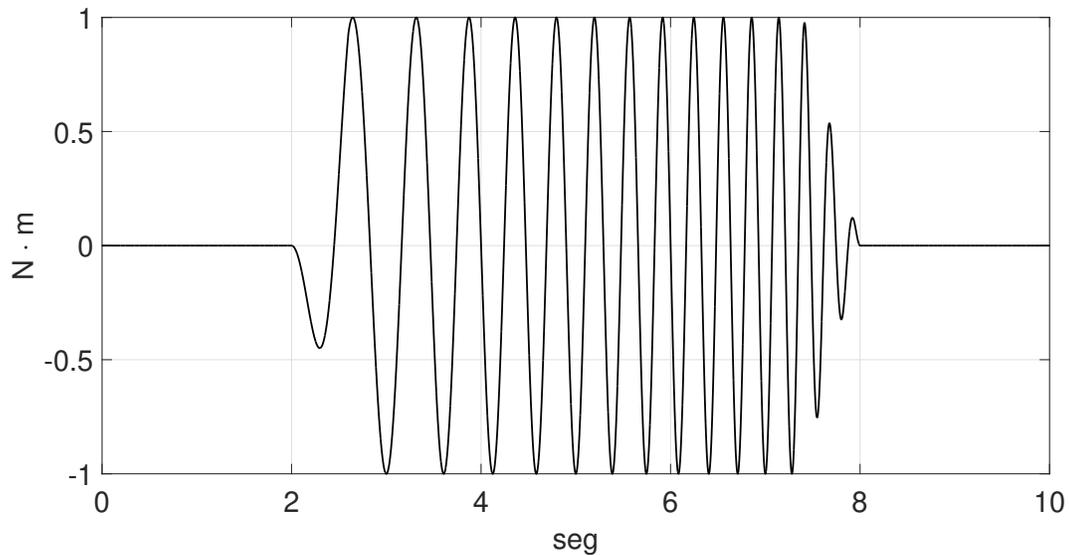


Figura 21. Entrada u tipo chirp.

Se toma el modelo dinámico del mecanismo de cinco barras mostrado en la sección 2.7.2, considerando los efectos de la fricción f de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \hat{M}(\eta)^{-1}(\hat{\tau} - \hat{C}(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} - f) \end{bmatrix}, \quad (65)$$

$$y = \eta,$$

Las ganancias del observador $C_1 = \text{diag}[100, 100]$ y $C_2 = \text{diag}[2500, 2500]$, son tales que los polos del error de observación están ubicados en $\lambda = -50$. De acuerdo a lo visto en la sección 3.3, se espera que la incertidumbre aproximada tienda a la

fuerza de fricción

$$\hat{\gamma} = -\hat{M}(\eta) \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{c_3 \text{sign}(e_1(t))} \approx \hat{f},$$

donde e_1 es el error de observación, definido como $e_1 = y - \hat{y}$.

Para la realización de este experimento, se utilizaron las siguientes ganancias en el observador discontinuo

$$C_3 = \begin{bmatrix} 150 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix},$$

donde la frecuencia de corte utilizada en el filtro de Butterworth (51) es $\omega_c = 80$ rad/seg. También, es importante mencionar que a las señales de incertidumbre estimadas $\hat{\gamma}$ se les hace un ajuste, ya que se encuentran recorridas en el tiempo después de ser filtradas.

Una vez realizado el experimento, se guardaron las señales de la velocidad observada $\hat{\eta}$ y las incertidumbres estimadas $\hat{\gamma}$, para la realización del método de optimización fuera de línea. Se utilizó el mismo experimento para los métodos de optimización de ambos modelos de fricción.

4.3.1. Modelo de Dahl

Empleando la función de costo (62), se estimaron los parámetros por medio de (58). Considerando que la incertidumbre se comporta como la fricción de Dahl, se obtuvieron los siguientes parámetros

$$\hat{f}_c = \begin{bmatrix} 0.0647 \\ -0.0125 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} 0.0253 \\ -0.5049 \end{bmatrix}.$$

Utilizando las ganancias obtenidas y las velocidades observadas $\hat{\eta}$, se generan las fricciones de Dahl (56) para compararlas con las señales de incertidumbre estimadas $\hat{\gamma}$.

En la Figura 22 se muestran las señales de incertidumbre obtenidas por el obser-

vador discontinuo, y las fuerzas de fricción generadas con los valores obtenidos por el método de optimización. Se observa que la fricción de Dahl estimada no es buena con respecto a las señales de incertidumbre. Una de las causas es que las señales $\hat{\gamma}$ pueden contener errores paramétricos y de modelado sumados a las fuerzas de fricción. Otro factor puede ser la función de costo a optimizar necesite ciertas restricciones, por ejemplo, que los valores encontrados sean positivos, puesto que algunos se obtuvieron negativos y físicamente eso no es posible. Otro motivo por el cual no se tiene una buena aproximación puede ser que el modelo de Dahl no sea el adecuado para este sistema. La gráfica está en el intervalo $[2, 8]$ ya que es el tiempo de trabajo de la entrada u , el resto del tiempo el sistema está estático.

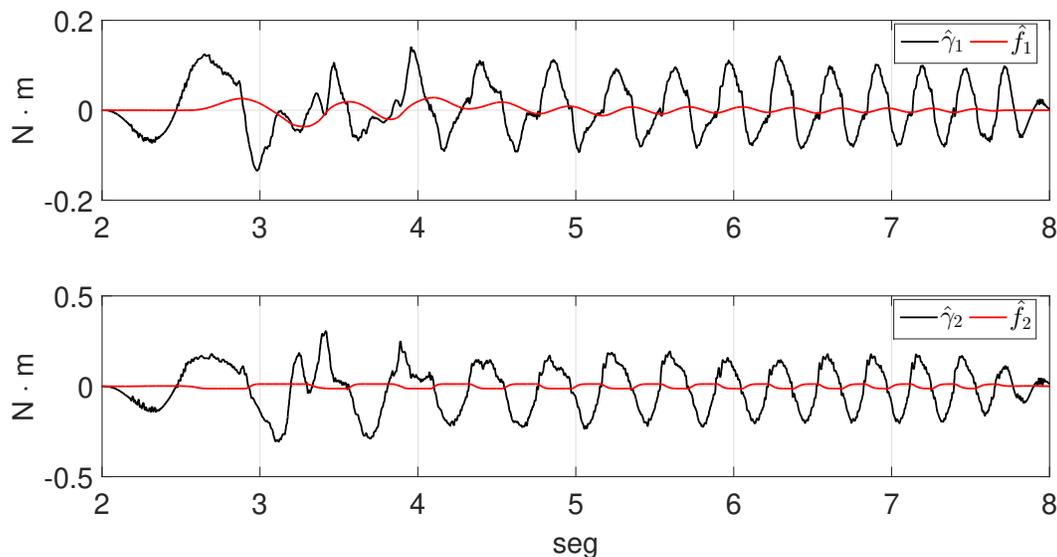


Figura 22. Señales de incertidumbre presentada en los actuadores y fuerzas de fricción de Dahl generadas.

4.3.2. Fricción viscosa y de Coulomb

Empleando la función de costo (64), se estimaron los parámetros por medio de (58). Considerando que la señal de incertidumbre se comporta como la fricción viscosa y de Coulomb, se obtuvieron los siguientes parámetros

$$\hat{f}_v = \begin{bmatrix} 0.0040 \\ 0.0533 \end{bmatrix}, \quad \hat{f}_c = \begin{bmatrix} 0.0285 \\ 0.0369 \end{bmatrix},$$

Utilizando las ganancias obtenidas y las velocidades observadas $\dot{\hat{\eta}}$, se generan las

fricciones (63) para compararlas con las señales de incertidumbre estimadas

En la Figura 23 se muestran las señales de incertidumbre obtenidas por el observador discontinuo, y las fuerzas de fricción generadas con los valores obtenidos por el método de optimización. Se observa que la fricción viscosa y de Coulomb estimada es buena con respecto a las señales de incertidumbre, existen diferencia entre ellas porque las señales $\hat{\gamma}$ pueden contener errores paramétricos y de modelado sumados a las fuerzas de fricción. Considerar este modelo de fricción con las ganancias obtenidas, es muy buena aproximación al comportamiento real de la fricción. La gráfica está en el intervalo [2, 8] ya que es el tiempo de trabajo de la entrada u , el resto del tiempo el sistema está estático.

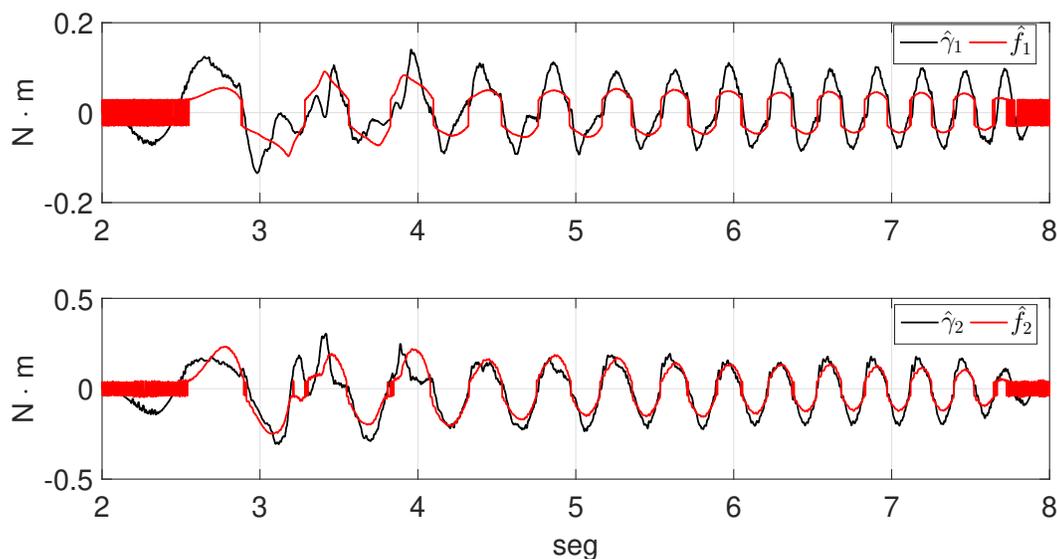


Figura 23. Señales de incertidumbre presentada en los actuadores y fuerzas de fricción viscosa y de Coulomb generadas.

La diferencia de este método de identificación paramétrica con respecto a (Kelly y Llamas, 1999) y (González Elías, 2000), radica en que puede ser aplicado a sistemas lineales y no lineales, sólo basta con conocer lo mejor posible el modelo y parámetros del sistema sin considerar la fricción, ya que la idea principal es estimar la incertidumbre existente, en el caso ideal la señal estimada es la fuerza de fricción.

Capítulo 5. Estructura de control

El objetivo de controlar sistemas es garantizar su estabilidad alrededor de un punto deseado, que siga y se mantenga en una trayectoria definida o realizar tareas específicas, a pesar de presentar perturbaciones externas o incertidumbres paramétricas y de modelado. Los sistemas en lazo cerrado deben ser estables y robustos, cumpliendo un eficiente desempeño según su criterio establecido.

En este capítulo se analiza un algoritmo de control lineal y no lineal con identificación de incertidumbre, presentado en (Rosas Almeida, 2005). Se utiliza este algoritmo porque se compensa la incertidumbre, teniendo un mejor desempeño ante perturbaciones externas, errores paramétricos y de modelado. Estos algoritmos se diseñan para el mecanismo de cinco barras con un péndulo esférico y se muestran resultados numéricos del desempeño de los controladores. La implementación experimental se hace en un mecanismo de cinco barras con un péndulo compuesto, i.e., un sistema de tres grados de libertad con grado de subactuación de uno. Así, se pueden comparar ambos controladores para determinar cual brinda un mejor desempeño.

En la Figura 24 se muestra la implementación del algoritmo de control, el cual consta de un observador discontinuo que estima los estados restantes y la incertidumbre presentada en el sistema. La salida del observador presenta señales de alta frecuencia, por ello es necesario filtrarla, las velocidades e incertidumbres estimadas por el observador se utilizan en el algoritmo de control no lineal. El controlador retroalimenta los estados medidos y observados, también compensa las incertidumbres estimadas por el observador discontinuo haciendo robusto el sistema en lazo cerrado.

El modelo dinámico del mecanismo de cinco barras con péndulo esférico se presenta en (37) y el mecanismo de cinco barras con péndulo compuesto en la página 26. En este capítulo se consideran los efectos de la fricción en ambos mecanismos estimados en el capítulo anterior. Una forma general de representar ambos sistemas considerando los efectos de la fricción $\hat{f}(\dot{\eta})$ y agregando un término de incertidumbre γ , es de la siguiente manera

$$\dot{H} = \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ f(\eta, \dot{\eta}) + g(\eta) + \varphi(\cdot) + \hat{M}(\eta)^{-1} \hat{\tau} \end{bmatrix}, \quad (66)$$

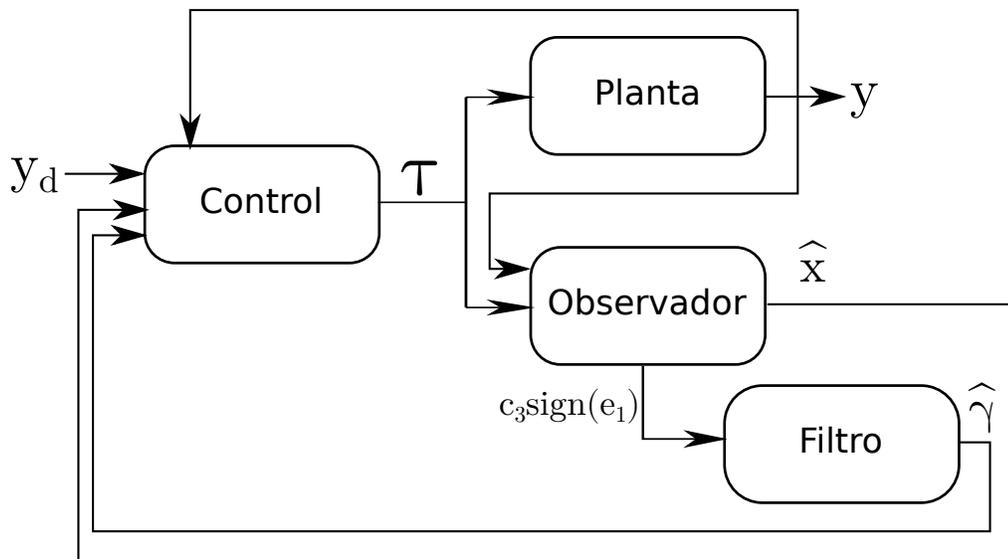


Figura 24. Estructura de control con identificación de perturbaciones.

donde

$$\begin{aligned}
 H &= [\eta^T, \dot{\eta}^T]^T, \\
 f(\eta, \dot{\eta}) &= -\hat{M}(\eta)^{-1}(\hat{C}(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + \hat{f}(\dot{\eta})), \\
 g(\eta) &= -\hat{M}(\eta)^{-1}\hat{G}(\eta), \\
 \varphi(\cdot) &= -\hat{M}(\eta)^{-1}\gamma.
 \end{aligned}$$

El observador utilizado para el sistema (66) está de la forma que (44), con la diferencia que en este se consideran los efectos de la fricción. Entonces, el observador queda de la siguiente manera

$$\dot{\hat{H}} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{\eta}} + C_1 e_1 \\ f(\eta, \dot{\eta}) + g(\eta) + \hat{M}(\eta)^{-1} \hat{\tau} + C_2 e_1 + C_3 \text{sign}(e_1) \end{bmatrix}, \quad (67)$$

donde

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= [\hat{\eta}, \dot{\hat{\eta}}]^T, \\
 f(\eta, \dot{\eta}) &= -\hat{M}(\eta)^{-1}(\hat{C}(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + \hat{f}(\dot{\eta})), \\
 g(\eta) &= -\hat{M}(\eta)^{-1}\hat{G}(\eta).
 \end{aligned}$$

5.1. Objetivo de control

Sea el vector de estados $H = [\eta^T, \dot{\eta}^T]^T$, donde η corresponde al vector de posiciones generalizadas del sistema y $\dot{\eta}$ sus respectivas velocidades. Se desea que el objetivo de control sea el de regulación, estabilizar el sistema en un punto deseado, el cual denotaremos como H_o . Es decir, se desea

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) - H_o \approx 0, \quad (68)$$

donde el punto de interés $H_o \in \mathbb{R}^n$ representa un equilibrio inestable del sistema, como se muestra en la Figura 25.

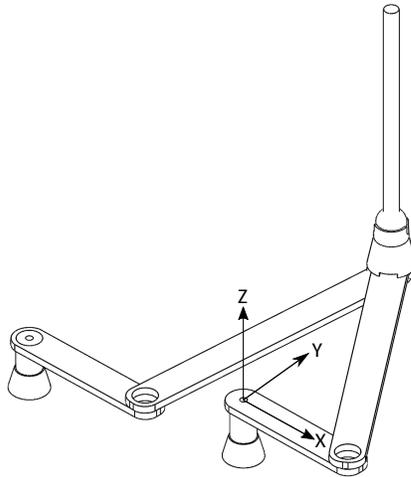


Figura 25. Punto de equilibrio inestable del sistema.

5.2. Algoritmo de control lineal

Considere el comportamiento del sistema (90) en lazo cerrado sea en una vecindad alrededor del punto de equilibrio inestable. En este caso, una propuesta de solución para el objetivo de control (68), es utilizar un control lineal. Para ello, se obtiene una aproximación lineal del sistema alrededor del punto de interés, y se establece una ley de control tal que H_o sea estable.

La forma general de las ecuaciones de estado (66) del sistema no lineal, está de la forma

$$\dot{H}(t) = f(H(t), \tau(t)), \quad (69)$$

donde $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continuamente diferenciable y $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ es una pequeña región alrededor del punto de equilibrio. La ecuación (69) se expande hasta el término de primer orden de la serie de Taylor, alrededor del punto H_o (Khalil, 2002). Se considera que el punto de equilibrio H_o está en el interior de \mathcal{D} , por lo tanto, se tiene que $f(H_o, 0) = 0$. La aproximación lineal del sistema no lineal se puede escribir como

$$\dot{H} \approx AH + B\tau, \quad (70)$$

donde $A = \frac{\partial f}{\partial H}|_{(H_o, \tau)}$ y $B = \frac{\partial f}{\partial \tau}|_{(H_o, \tau)}$.

Una vez que se tiene la aproximación lineal del sistema alrededor del punto que se desea estabilizar, se propone un controlador que cumpla con el objetivo de control (68), en este caso se utiliza un regulador lineal cuadrático (LQR por sus siglas en ingles). Se propone utilizar este controlador ya que obtener ganancias de control garantiza la estabilidad del sistema, aun teniendo restricciones físicas por ser un sistema subactuado.

Dado el sistema lineal (70), se determina la matriz K del vector de control óptimo

$$\tau = -KH, \quad (71)$$

con el objetivo de minimizar la siguiente función de costo

$$J = \int_0^{\infty} (H^T Q H + \tau^T R \tau) dt, \quad (72)$$

donde Q es una matriz simétrica real semidefinida positiva, R es una matriz simétrica real definida positiva, H es el vector de estados $H = [\eta^T, \dot{\eta}^T]^T$ y τ es el vector de entradas. Obsérvese que el lado derecho de la igualdad en (72) considera el costo de energía de las señales de control (Ogata, 2010). Las matrices Q y R determinan el peso de los estados y de las entradas, respectivamente.

Siguiendo la metodología en (Ogata, 2010), se tiene que

$$K = R^{-1} B^T P, \quad (73)$$

donde la matriz P se obtiene resolviendo la ecuación de Riccati

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (74)$$

La metodología en forma reducida para obtener las ganancias del controlador es

1. Resolver la ecuación de Riccati (74), para la matriz P .
2. Sustituir la matriz P en (73). La matriz K resultante es la matriz óptima.

En esta sección se mostró un algoritmo de control lineal para implementar en el sistema, el cual garantiza estabilidad alrededor del punto de interés. En la siguiente sección se presenta un algoritmo de control no lineal, se espera que sea más robusto que el controlador lineal propuesto.

5.3. Algoritmo de control no lineal para sistemas subactuados con identificación de incertidumbre

Un algoritmo de control no lineal que da buenos resultados es la linealización por retroalimentación de estado, es decir, se elimina la dinámica del sistema y se agrega una deseada. Para ello se necesita que el sistema este completamente actuado, de lo contrario no es posible eliminar por completo la dinámica del sistema como en los sistemas subactuados. El objetivo de este algoritmo de control es hacer una compensación parcial por retroalimentación de estado y posteriormente aproximar el sistema en su forma lineal alrededor del punto de interés.

En (66) se describe el mecanismo de cinco barras con péndulo esférico de 4 grados de libertad en su representación en variables de estado. De acuerdo a (Reyhanoglu *et al.*, 1999), se escriben las ecuaciones de movimiento de Lagrange de la siguiente

manera

$$\begin{aligned}
 & [\hat{M}_{11} \quad \hat{M}_{12} \quad \hat{M}_{13} \quad \hat{M}_{14}] \ddot{\eta} + F_1(\eta, \dot{\eta}) = \hat{\tau}_1, \\
 & [\hat{M}_{21} \quad \hat{M}_{22} \quad \hat{M}_{23} \quad \hat{M}_{24}] \ddot{\eta} + F_2(\eta, \dot{\eta}) = 0, \\
 & [\hat{M}_{31} \quad \hat{M}_{32} \quad \hat{M}_{33} \quad \hat{M}_{34}] \ddot{\eta} + F_3(\eta, \dot{\eta}) = 0, \\
 & [\hat{M}_{41} \quad \hat{M}_{42} \quad \hat{M}_{43} \quad \hat{M}_{44}] \ddot{\eta} + F_4(\eta, \dot{\eta}) = \hat{\tau}_4,
 \end{aligned} \tag{75}$$

donde

$$\begin{aligned}
 F_i(\eta, \dot{\eta}) &= [\hat{C}_{i1} \quad \hat{C}_{i2} \quad \hat{C}_{i3} \quad \hat{C}_{i4}] \dot{\eta} + \hat{G}_i + \hat{f}_i + \gamma_i, \\
 & i = 1, \dots, 4,
 \end{aligned} \tag{76}$$

$\dot{\eta}$ es el vector de velocidades angulares, \hat{M}_{ij} y \hat{C}_{ij} son elementos de las matrices de inercia y coriolis respectivamente, \hat{G}_i son los elementos del vector de pares gravitacionales. Este vector y matrices mencionadas se muestran en (36), \hat{f}_i es la fricción en cada articulación, $\hat{\gamma}_i$ representa la incertidumbre y $\hat{\tau}_i$ son las entradas del mecanismo.

Se hace una compensación parcial con las entradas que pueden ser manipuladas, quedando de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \hat{\tau}_1 &= F_1(\eta, \dot{\eta}) + v_1, \\
 \hat{\tau}_4 &= F_4(\eta, \dot{\eta}) + v_4,
 \end{aligned} \tag{77}$$

donde $F_1(\eta, \dot{\eta})$ y $F_4(\eta, \dot{\eta})$ se describen en (76), las variables v_1 y v_4 son entradas auxiliares, las cuales se proponen adelante. Sustituyendo las entradas (77) en el sistema (75), se obtiene lo siguiente

$$\hat{M}_{11}\ddot{\eta}_1 + \hat{M}_{12}\ddot{\eta}_2 + \hat{M}_{13}\ddot{\eta}_3 + \hat{M}_{14}\ddot{\eta}_4 = v_1, \tag{78}$$

$$\hat{M}_{21}\ddot{\eta}_1 + \hat{M}_{22}\ddot{\eta}_2 + \hat{M}_{23}\ddot{\eta}_3 + \hat{M}_{24}\ddot{\eta}_4 = -F_2(\eta, \dot{\eta}), \tag{79}$$

$$\hat{M}_{31}\ddot{\eta}_1 + \hat{M}_{32}\ddot{\eta}_2 + \hat{M}_{33}\ddot{\eta}_3 + \hat{M}_{34}\ddot{\eta}_4 = -F_3(\eta, \dot{\eta}), \tag{80}$$

$$\hat{M}_{41}\ddot{\eta}_1 + \hat{M}_{42}\ddot{\eta}_2 + \hat{M}_{43}\ddot{\eta}_3 + \hat{M}_{44}\ddot{\eta}_4 = v_4. \tag{81}$$

Siguiendo la metodología en (Spong, 1996), primero se despejan $\ddot{\eta}_2$ y $\ddot{\eta}_3$ de las

ecuaciones (79) y (80) respectivamente, quedando de la siguiente manera

$$\ddot{\eta}_2 = \delta_{11}\ddot{\eta}_1 + \delta_{13}\ddot{\eta}_3 + \delta_{14}\ddot{\eta}_4 + \delta_{15}, \quad (82)$$

$$\ddot{\eta}_3 = \delta_{21}\ddot{\eta}_1 + \delta_{22}\ddot{\eta}_2 + \delta_{24}\ddot{\eta}_4 + \delta_{25}, \quad (83)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= -\frac{1}{\hat{M}_{22}}\hat{M}_{21}, & \delta_{13} &= -\frac{1}{\hat{M}_{22}}\hat{M}_{23}, & \delta_{14} &= -\frac{1}{\hat{M}_{22}}\hat{M}_{24}, & \delta_{15} &= -\frac{1}{\hat{M}_{22}}F_2(q, \dot{q}), \\ \delta_{21} &= -\frac{1}{\hat{M}_{33}}\hat{M}_{31}, & \delta_{22} &= -\frac{1}{\hat{M}_{33}}\hat{M}_{32}, & \delta_{24} &= -\frac{1}{\hat{M}_{33}}\hat{M}_{34}, & \delta_{25} &= -\frac{1}{\hat{M}_{33}}F_3(q, \dot{q}). \end{aligned}$$

Se sustituye (82) en (83) y viceversa, tal que las funciones queden dependientes de $(\ddot{\eta}_1, \ddot{\eta}_4)$, obteniendo lo siguiente

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_2 &= \zeta_{11}\ddot{\eta}_1 + \zeta_{12}\ddot{\eta}_4 + \zeta_{13}, \\ \ddot{\eta}_3 &= \zeta_{21}\ddot{\eta}_1 + \zeta_{22}\ddot{\eta}_4 + \zeta_{23}, \end{aligned} \quad (84)$$

donde

$$\begin{aligned} \zeta_{11} &= \frac{1}{1-\delta_{13}\delta_{22}}(\delta_{11} + \delta_{13}\delta_{21}), & \zeta_{12} &= \frac{1}{1-\delta_{13}\delta_{22}}(\delta_{14} + \delta_{13}\delta_{24}), & \zeta_{13} &= \frac{1}{1-\delta_{13}\delta_{22}}(\delta_{15} + \delta_{13}\delta_{25}), \\ \zeta_{21} &= \frac{1}{1-\delta_{13}\delta_{22}}(\delta_{21} + \delta_{22}\delta_{11}), & \zeta_{22} &= \frac{1}{1-\delta_{13}\delta_{22}}(\delta_{24} + \delta_{22}\delta_{14}), & \zeta_{23} &= \frac{1}{1-\delta_{13}\delta_{22}}(\delta_{25} + \delta_{22}\delta_{15}). \end{aligned}$$

Ya que se tiene despejadas $\ddot{\eta}_2$ y $\ddot{\eta}_3$ en (84), se sustituyen en (78) y (81), quedando de la siguiente manera

$$\Upsilon \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{v} - \boldsymbol{\alpha}$$

donde

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \begin{bmatrix} \hat{M}_{11} + \hat{M}_{12}\zeta_{11} + \hat{M}_{13}\zeta_{21} & \hat{M}_{14} + \hat{M}_{12}\zeta_{12} + \hat{M}_{13}\zeta_{22} \\ \hat{M}_{41} + \hat{M}_{42}\zeta_{11} + \hat{M}_{43}\zeta_{21} & \hat{M}_{44} + \hat{M}_{42}\zeta_{12} + \hat{M}_{43}\zeta_{22} \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\alpha} &= \begin{bmatrix} \hat{M}_{12}\zeta_{13} + \hat{M}_{13}\zeta_{23} \\ \hat{M}_{42}\zeta_{13} + \hat{M}_{43}\zeta_{23} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{v} &= [v_1, v_4]^T. \end{aligned}$$

Ahora, se hace de nuevo una compensación utilizando las entradas auxiliares v , quedando de la siguiente manera

$$v = \alpha + \Upsilon \vartheta, \quad (85)$$

donde $\vartheta = [\vartheta_1, \vartheta_4]^T$ es un vector de control lineal, donde se puede inducir una dinámica al sistema.

Considerando las ecuaciones (84) y el control (85), se puede reescribir el sistema (78)-(81) como

$$\ddot{\eta}_1 = \vartheta_1, \quad (86)$$

$$\ddot{\eta}_2 = \zeta_{11} \vartheta_1 + \zeta_{12} \vartheta_4 + \zeta_{13}, \quad (87)$$

$$\ddot{\eta}_3 = \zeta_{21} \vartheta_1 + \zeta_{22} \vartheta_4 + \zeta_{23}, \quad (88)$$

$$\ddot{\eta}_4 = \vartheta_4. \quad (89)$$

En el sistema (86)-(89) el vector ϑ actúa como la entrada del sistema, se puede agregar una dinámica lineal al sistema que afecta directamente a las ecuaciones (86) y (89), mientras que la dinámica en las ecuaciones (87) y (88) dependen de otras variables que están involucradas haciendo un comportamiento no lineal.

Posteriormente, se hace una aproximación lineal del sistema (86)-(89) alrededor del punto de interés, ya que se tenga el sistema lineal se puede utilizar un control lineal tipo LQR, como el descrito en la sección 5.2.

5.4. Análisis de estabilidad

Dado que no se tiene medición física de los estados $\dot{\eta}$, sino que se utilizan las señales estimadas por un observador $\hat{\dot{\eta}}$, es importante considerar en el análisis de estabilidad la dinámica del observador.

Considere el algoritmo de control lineal dado en (71) que estabilice el sistema en una vecindad pequeña alrededor del origen. Así, el sistema (66) en lazo cerrado queda

de la siguiente manera

$$\dot{H} = \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ f(\eta, \dot{\eta}) + g(\eta) - \hat{M}(\eta)^{-1}KH \end{bmatrix}. \quad (90)$$

El observador utilizado para el sistema (66) está descrito (67). Por otra parte, el observador en lazo cerrado queda de la siguiente manera

$$\dot{\hat{H}} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{\eta}} + C_1 e_1 \\ f(\eta, \dot{\hat{\eta}}) + g(\eta) - \hat{M}(\eta)^{-1}KH + C_2 e_1 + C_3 \text{sign}(e_1) \end{bmatrix}. \quad (91)$$

Definiendo los errores de observación entre el sistema (90) y el observador (91) como $e_1 = \eta - \hat{\eta}$, $e_2 = \dot{\eta} - \dot{\hat{\eta}} - C_1 e_1$, la dinámica del error queda como

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} e_2 \\ -C_2 e_1 - C_1 e_2 - C_3 \text{sign}(e_1) + \xi(\cdot) \end{bmatrix}, \quad (92)$$

donde $\xi(\cdot) = \varphi(\cdot) + f(\eta, \dot{\eta}) - f(\eta, \dot{\hat{\eta}})$. El sistema del error (92) está de la forma dada en (38), donde se garantiza la convergencia del observador al estado del sistema, con una selección adecuada de las ganancias C_1 , C_2 y C_3 . Entonces, es posible retroalimentar los estados observados $\hat{\eta}$ ya que se garantiza convergencia con el estado real.

Dado que el sistema (70) es una aproximación lineal del sistema no lineal (69) sin considerar la incertidumbre $\varphi(\cdot)$, el comportamiento de ambos es similar para una vecindad pequeña. Entonces, el análisis de estabilidad se hace aplicado a sistemas lineales.

Sea el sistema lineal (70) en lazo cerrado con una ley de control (71), queda de la siguiente manera

$$\dot{H} = \bar{A}H, \quad (93)$$

donde $\bar{A} = (A - BK)$, con punto de equilibrio en el origen.

Las propiedades de estabilidad en el origen del sistema (93), pueden ser caracterizados por la ubicación de los valores propios de la matriz \bar{A} . El siguiente teorema

demostrado en (Khalil, 2002), proporciona condiciones suficientes y necesarias para la estabilidad del sistema (93).

Teorema 2 *El punto de equilibrio $H^* = 0$ del sistema (93) es estable sí y sólo si todos los valores propios de \bar{A} satisfacen $Re\lambda_i \leq 0$ y para cada valor propio $Re\lambda_i = 0$ tiene asociado un bloque de Jordan de orden uno. El punto de equilibrio $H^* = 0$ es globalmente asintóticamente estable sí y sólo si todos los valores propios de \bar{A} satisfacen $Re\lambda_i < 0$.*

5.5. Resultados

En esta sección se presentan resultados numéricos y experimentales de los algoritmos de control propuestos anteriormente, bajo el objetivo de control de regulación en un punto de equilibrio inestable.

El sistema utilizado en el experimento numérico es el mecanismo de cinco barras con péndulo esférico, mientras que el experimento práctico se hizo con el mecanismo de cinco barras con péndulo compuesto. Se considera que el mecanismo presenta una fricción viscosa con las ganancias estimadas en la sección 4.3.2, los valores nominales de los parámetros del sistema se muestran en la tabla 1.

Las ganancias del observador se obtienen considerando los polos del error de observación $\lambda = -50$, entonces, las ganancias de observación son

$$C_1 = 100I,$$

$$C_2 = 2500I,$$

donde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz identidad y n representa los grados de libertad.

Tabla 1. Valores nominales de los parámetros del sistema.

Parámetro	Valor nominal	Unidades	Descripción
l_1	0.0598	m	Longitud del eslabón 1
l_2	0.455	m	Longitud del eslabón 2
l_3	0.43	m	Longitud del eslabón 3
l_5	0.132	m	Longitud del eslabón 5
l_6	0.499	m	Longitud del eslabón 6
m_1	0.0362	kg	Masa del eslabón 1
m_2	0.239	kg	Masa del eslabón 2
m_3	0.065	kg	Masa del eslabón 3
m_5	0.0975	kg	Masa del eslabón 5
m_6	0.262	kg	Masa del eslabón 6
l_{c1}	0.0262	m	Longitud al centro de masa del eslabón 1
l_{c2}	0.2279	m	Longitud al centro de masa del eslabón 2
l_{c5}	0.0636	m	Longitud al centro de masa del eslabón 5
l_{c6}	0.2499	m	Longitud al centro de masa del eslabón 6
I_1	4.6789×10^{-5}	$kg \cdot m^2$	Momento de inercia del eslabón 1
I_2	0.01663	$kg \cdot m^2$	Momento de inercia del eslabón 2
I_5	0.00060853	$kg \cdot m^2$	Momento de inercia del eslabón 5
I_6	0.02192	$kg \cdot m^2$	Momento de inercia del eslabón 6
f_{v1}	0.004	$N \cdot m \cdot s/rad$	Fricción viscosa en la rotación q_1
f_{v3}	0.2	$N \cdot m \cdot s/rad$	Fricción viscosa en la rotación q_3
f_{v4}	0.2	$N \cdot m \cdot s/rad$	Fricción viscosa en la rotación q_4
f_{v5}	0.0533	$N \cdot m \cdot s/rad$	Fricción viscosa en la rotación q_5
r_1	0.0047	m	Radio menor del eslabón 3
r_2	0.0063	m	Radio mayor del eslabón 3
c_x	0.25	m	Longitud fija del mecanismo
c_y	0.075	m	Longitud fija del mecanismo
g	9.81	m/s^2	Gravedad

5.5.1. Resultados numéricos: mecanismo de cinco barras con péndulo esférico

Para la realización de las pruebas de controladores de manera numérica, se utilizaron las siguientes ganancias del observador discontinuo

$$C_3 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}.$$

También, es importante mencionar que en las simulaciones se hicieron variaciones a los parámetros del sistema de un $\pm 20\%$, excepto las longitudes de los eslabones para no causar errores en las variables (q_2, q_6) que dependen de la geometría del mecanismo, esto con el fin de comprobar numéricamente que se cumpla el objetivo de control aún con estas diferencias.

5.5.1.1. Control lineal

Siguiendo la metodología descrita en la sección 5.2, se hace la aproximación lineal del sistema, obteniendo las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2.2482 & -14.6401 & 0 & -2.1986 & 0.0087 & 0.0566 & -10.6724 \\ 0 & 39.2495 & 0.4368 & 0 & 0.0656 & -0.1517 & -0.0017 & -1.3046 \\ 0 & 0.4368 & 37.0567 & 0 & 0.4272 & -0.0017 & -0.1433 & 2.0735 \\ 0 & 3.3556 & -5.3333 & 0 & -0.8009 & -0.0130 & 0.0206 & -5.2511 \end{bmatrix}, \quad (94)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 549.6482 & 0 & 0 & 200.2321 \\ -16.3988 & 0 & 0 & 24.4765 \\ -106.7884 & 0 & 0 & -38.9021 \\ 200.2321 & 0 & 0 & 98.5199 \end{bmatrix}. \quad (95)$$

Posteriormente, se definen las matrices Q y R para cumplir con la función de costo (72). Cabe mencionar que la selección de estas matrices se hizo a prueba y error para obtener una mejor respuesta, utilizando el método de optimización ITE que representa la integral del tiempo multiplicado por el valor absoluto del error. Las matrices

utilizadas son

$$Q = \begin{bmatrix} 8I & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0.2I \end{bmatrix}, \quad (96)$$

$$R = I,$$

donde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz identidad, $n = 4$ representa los grados de libertad.

Finalmente, el control (71) depende de la matriz K que se obtiene considerando (96), quedando de la siguiente manera

$$K = \begin{bmatrix} -2.8270 & -2.4290 & -57.6918 & 0.0893 & -1.4815 & -0.3972 & -9.7464 & 0.1494 \\ -0.0893 & 14.8832 & -24.9791 & -2.8270 & 0.0493 & 2.4821 & -4.2223 & -1.7468 \end{bmatrix}. \quad (97)$$

El sistema en lazo cerrado es estable ya que se satisface el teorema 2, debido a que los valores propios de la matriz en lazo cerrado $(A - BK)$ tienen parte real negativa.

La simulación del mecanismo de cinco barras se realizó con el péndulo esférico utilizando un control lineal, con condiciones iniciales $H_0 = [0, 0.1, 0.01, -0.1, 0, 0, 0, 0]^T$. En la Figura 26 se muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado, mientras que en la Figura 27 se muestran las señales de control. Se observa que se cumple el objetivo de control aun con diferencias paramétricas en el sistema.

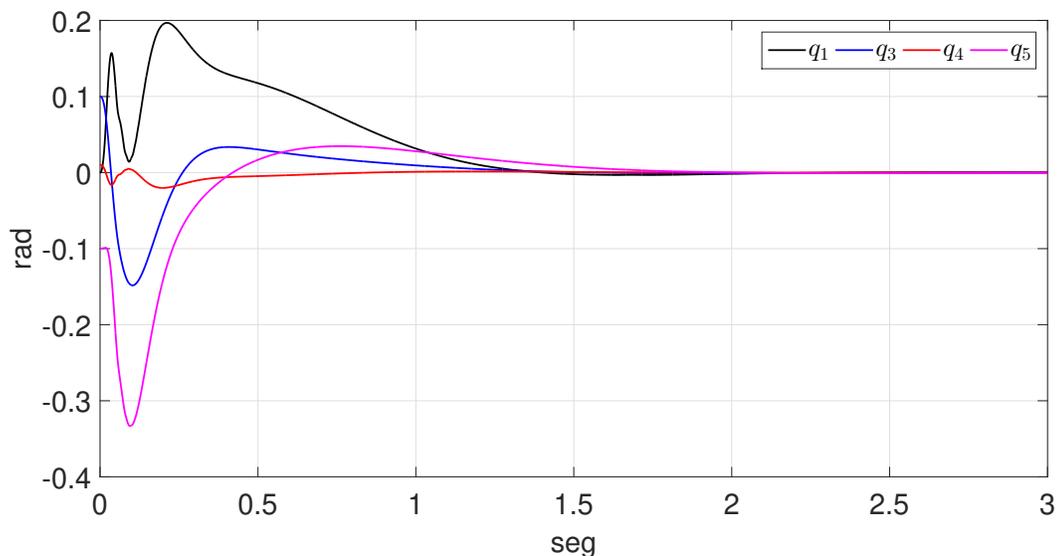


Figura 26. Comportamiento del sistema en lazo cerrado, utilizando un control lineal.

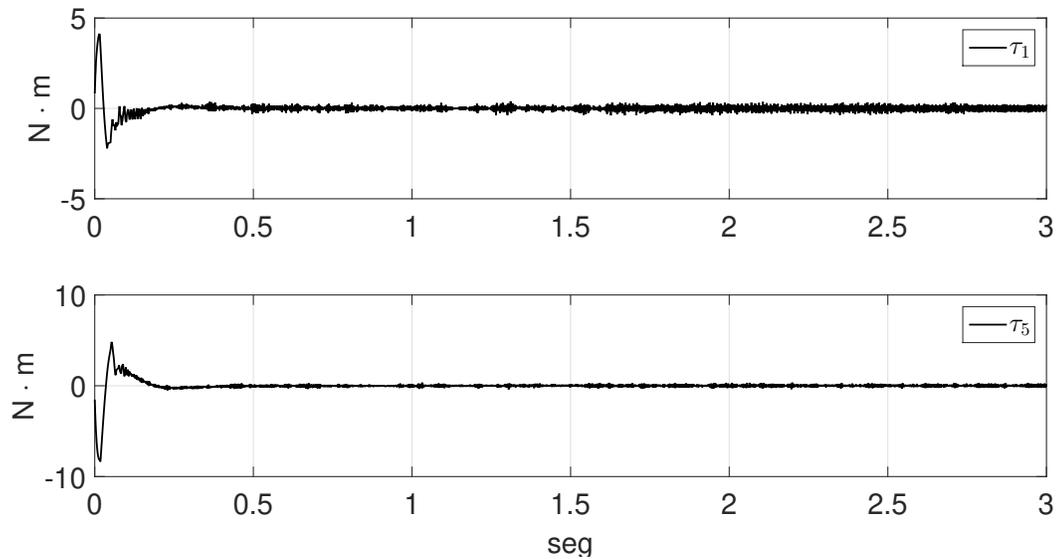


Figura 27. Señales del control lineal.

5.5.1.2. Control no lineal

De acuerdo a la metodología descrita en 5.3, el sistema queda de la forma (86)-(89), donde ϑ_1 y ϑ_4 actúan como entradas auxiliares del sistema. Una propuesta es aproximar el sistema a su forma lineal representado por las matrices (94) y (95), todo esto con el fin de utilizar las mismas ganancias del controlador lineal LQR dado en (97), para ello se definen ϑ_1 y ϑ_4 de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_4 \end{bmatrix} = \Lambda_1 \begin{bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \Lambda_2 \dot{\eta} + \Lambda_3 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (98)$$

donde

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} -2.2482 & -14.6401 \\ 3.3556 & -5.3333 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} -2.1986 & 0.0087 & 0.0566 & -10.6724 \\ -0.8009 & -0.0130 & 0.0206 & -5.2511 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} 549.6482 & 200.2321 \\ 200.2321 & 98.5199 \end{bmatrix},$$

con u_1 y u_2 las nuevas entradas del sistema. Sustituyendo (98) en el sistema (86)-(89) y haciendo su aproximación lineal se obtienen las mismas matrices numéricas (94) y (95).

Las nuevas entradas (u_1, u_2) son de la forma (71). Para calcular las ganancias del control LQR es necesario proponer las matrices Q y R . En esta ocasión se seleccionan las matrices ya definidas en (96) y, la matriz de ganancias K es la misma que (97). El control a implementar se obtiene sustituyendo (85), (98) y (71) en (77), quedando de la siguiente manera

$$\hat{\tau} = F(\eta, \dot{\eta}) + \alpha + \Upsilon \left(\Lambda_1 \begin{bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \Lambda_2 \dot{\eta} - \Lambda_3 KH \right).$$

Se realizó la simulación del mecanismo de cinco barras con péndulo esférico utilizando un controlador no lineal, las condiciones iniciales son las mismas que la simulación anterior i.e., $H_0 = [0, 0.1, 0.01, -0.1, 0, 0, 0, 0]^T$. En la Figura 28 se muestra como los estados convergen al punto de equilibrio inestable, mientras que en la Figura 29 se muestran las señales de control que actúan para que se cumpla el objetivo de control.

Ambos controladores, control lineal y no lineal, cumplen con el objetivo de regulación, por lo tanto, es posible estabilizar un sistema de grado de subactuación de dos aun con diferencias paramétricas. Dado que es simulación, puede no ser a simple vista cual de los dos controladores es más eficiente, esta eficiencia de los controladores puede apreciarse en una implementación experimental, ya que el sistema real tiene diferencias paramétricas o de modelado al sistema simulado, entonces, el controlador tiene que cumplir con el objetivo aun con estas variaciones.

5.5.2. Resultados experimentales: mecanismo de cinco barras con péndulo compuesto

En esta sección se presentan los resultados experimentales del controlador lineal y no lineal propuestos previamente, los experimentos se hicieron en el Laboratorio de Control con el mecanismo de cinco barras con péndulo compuesto, teniendo 3 grados de libertad y grado de subactuación de uno. En la implementación de los experimen-

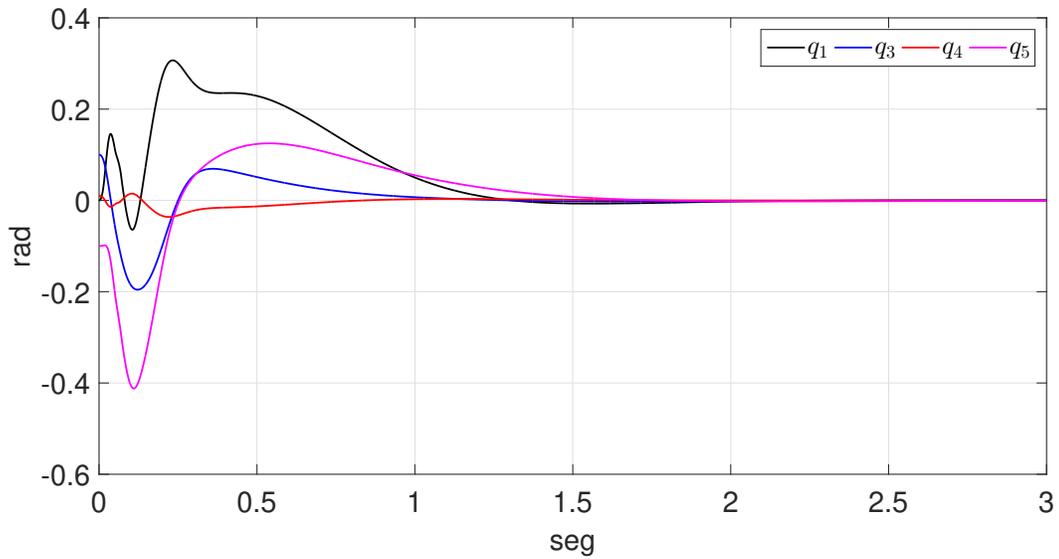


Figura 28. Comportamiento del sistema en lazo cerrado, utilizando un controlador no lineal.

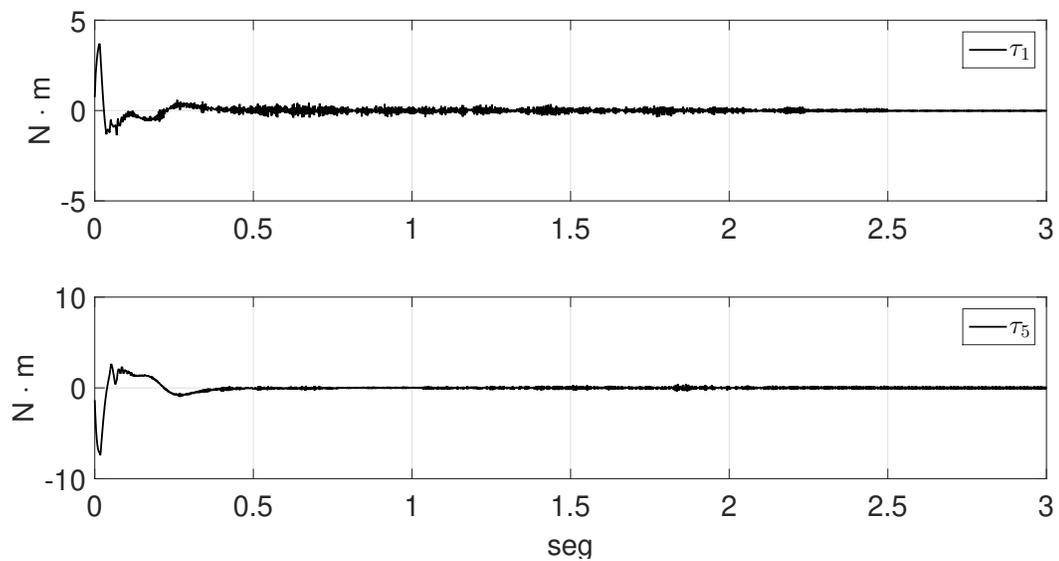


Figura 29. Señales del controlador no lineal.

tos, se aplicó una saturación en los actuadores de $0.7 N \cdot m$ por seguridad, esta saturación se da a notar en las gráficas del control aplicado en los actuadores. Aun así, estas saturaciones no afectan la eficiencia del control.

5.5.2.1. Control lineal

Para la realización de este experimento se utilizaron las siguientes ganancias del observador discontinuo

$$C_3 = \begin{bmatrix} 110 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 65 \end{bmatrix}.$$

Siguiendo la metodología descrita en la sección 5.2, se hace la aproximación lineal del sistema, obteniendo las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2.0756 & 0 & -2.0298 & 0.008 & -9.8532 \\ 0 & 39.2443 & 0 & 0.0606 & -0.1517 & -1.329 \\ 0 & 3.4185 & 0 & -0.7395 & -0.0132 & -4.9527 \end{bmatrix}, \quad (99)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 507.4589 & 0 & 184.863 \\ -15.14 & 0 & 24.9351 \\ 184.863 & 0 & 92.921 \end{bmatrix}.$$

Para calcular las ganancias del controlador LQR es necesario definir las matrices Q y R para cumplir con la función de costo (72). Se utilizó el criterio que se aplicó en las simulaciones, quedando las matrices de la misma manera que en (97), la diferencia es que $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $n = 3$ que representan los grados de libertad.

La matriz K obtenida para el control (71) queda de la siguiente manera

$$K = \begin{bmatrix} 2.0024 & -5.7756 & 1.9976 & 0.1351 & -0.9623 & 0.7988 \\ 1.9976 & 13.4317 & -2.0024 & 0.7488 & 2.2370 & -1.4656 \end{bmatrix}. \quad (100)$$

El sistema en lazo cerrado es estable ya que se satisface el teorema 2, la parte real de los valores propios de la matriz en lazo cerrado ($A - BK$) son negativos.

En la Figura 30 se muestra el comportamiento del sistema en lazo cerrado empleando un control lineal del tipo LQR. En la Figura 31 se muestran las señales de control implementadas en el experimento. Se observa que los estados del sistema no convergen en el punto deseado, representado de color magenta, sino que oscila alrededor del punto de interés. El sistema puede presentar incertidumbres paramétricas y de modelado que no se están considerando, por lo tanto, este controlador lineal no es lo suficientemente robusto para la convergencia de los estados.

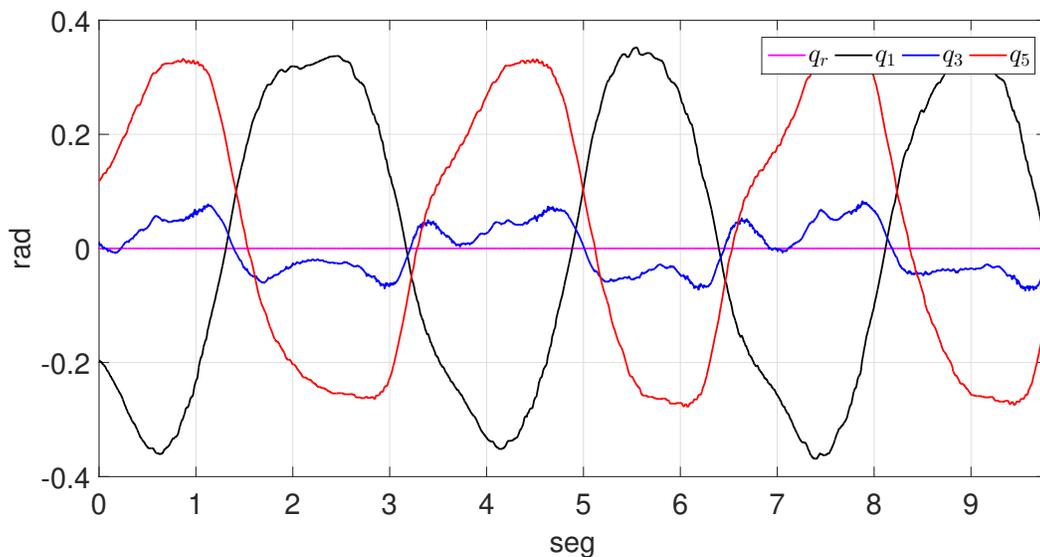


Figura 30. Estados del sistema en lazo cerrado, utilizando un control lineal de manera experimental.

5.5.2.2. Control no lineal

En la implementación del controlador no lineal (sección 5.3) de manera experimental se utilizaron las siguientes ganancias del observador discontinuo

$$C_3 = \begin{bmatrix} 170 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo a la metodología descrita en 5.3, el sistema queda de la forma (86)-(89), donde ϑ actúa como entrada auxiliar. Para la implementación del control no lineal en

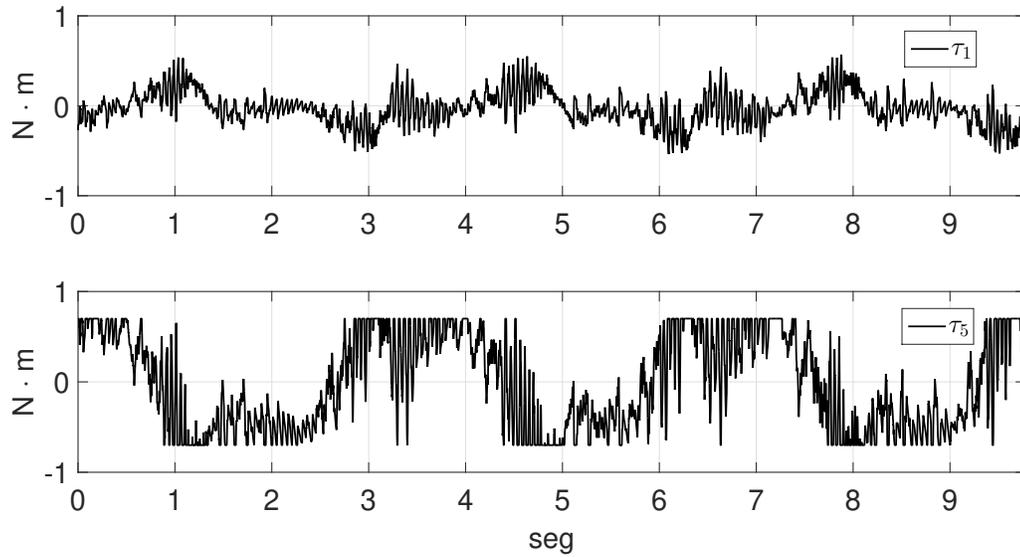


Figura 31. Señales del control lineal de manera experimental.

este sistema, se ajustan las ecuaciones al modelo dinámico de tres grados de libertad, reduciéndose el sistema (86)-(89) de la siguiente manera

$$\ddot{\eta}_1 = \vartheta_1, \quad (101)$$

$$\ddot{\eta}_2 = \zeta_{11}\vartheta_1 + \zeta_{12}\vartheta_3 + \zeta_{13}, \quad (102)$$

$$\ddot{\eta}_3 = \vartheta_3. \quad (103)$$

donde

$$\zeta_{11} = -\frac{1}{\hat{M}_{22}}\hat{M}_{12}, \quad \zeta_{13} = -\frac{1}{\hat{M}_{22}}\hat{M}_{23}, \quad \zeta_{15} = -\frac{1}{\hat{M}_{22}}([\hat{C}_{21}, \hat{C}_{22}, \hat{C}_{23}]\dot{\eta} + \hat{G}_2 + \hat{f}_2 + \gamma_2).$$

Posteriormente, se hace el mismo procedimiento que se implementó en la simulación del controlador no lineal, se aproxima el sistema a su forma lineal representado por las matrices (99), todo esto con el fin de utilizar las mismas ganancias del controlador lineal LQR dadas en (100), para ello se definen ϑ_1 y ϑ_3 de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix} = \Lambda_1 q_3 + \Lambda_2 \dot{\eta} + \Lambda_3 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (104)$$

donde

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} -2.0756 \\ 3.4185 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} -2.0298 & 0.008 & -9.8532 \\ -0.7395 & -0.0132 & -4.9527 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} 507.4589 & 184.863 \\ 184.863 & 92.921 \end{bmatrix},$$

con u_1 y u_2 las nuevas entradas del sistema. Sustituyendo (104) en el sistema (101)-(103) y haciendo su aproximación lineal como lo describe la metodología, se obtienen las mismas matrices numéricas (99). Las nuevas entradas (u_1, u_2) son de la forma (71).

La matriz de ganancias K del control LQR es la misma que (100). El control a implementar se obtiene sustituyendo (85), (104) y (71) en (77), quedando de la siguiente manera

$$\hat{\tau} = F(\eta, \dot{\eta}) + \alpha + \Upsilon (\Lambda_1 q_3 + \Lambda_2 \dot{\eta} - \Lambda_3 KH),$$

donde

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \hat{M}_{11} + \hat{M}_{12}\zeta_{11} & \hat{M}_{13} + \hat{M}_{12}\zeta_{12} \\ \hat{M}_{13} + \hat{M}_{23}\zeta_{11} & \hat{M}_{33} + \hat{M}_{23}\zeta_{12} \end{bmatrix},$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \hat{M}_{12}\zeta_{13} \\ \hat{M}_{23}\zeta_{13} \end{bmatrix}.$$

En la Figura 32 se muestra el comportamiento del sistema implementando un control no lineal de manera experimental, en la Figura 33 se muestran las señales de control y en la Figura 34 se muestran las incertidumbres estimadas por el observador discontinuo. Se puede apreciar que este controlador no lineal es más robusto con respecto al lineal, ya que los estados se mantienen alrededor de una vecindad más pequeña del punto de referencia de color magenta. Esto es porque se compensan las incertidumbres existentes la dinámica de las articulaciones actuadas. La oscilación

puede estar relacionada con las ganancias del controlador LQR, que necesiten un mejor ajuste para ubicar los polos más alejados del eje imaginario, o simplemente sea por la incertidumbre existente en la dinámica de la articulación subactuada, ya que se hace una aproximación lineal de esta dinámica sin considerar las incertidumbres existentes.

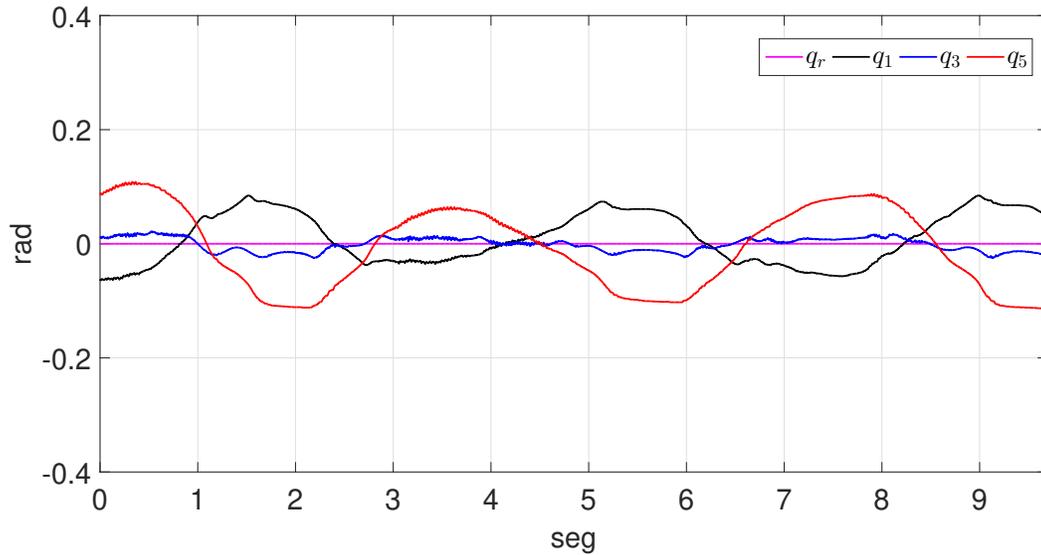


Figura 32. Estados del sistema implementando un controlador no lineal de manera experimental.

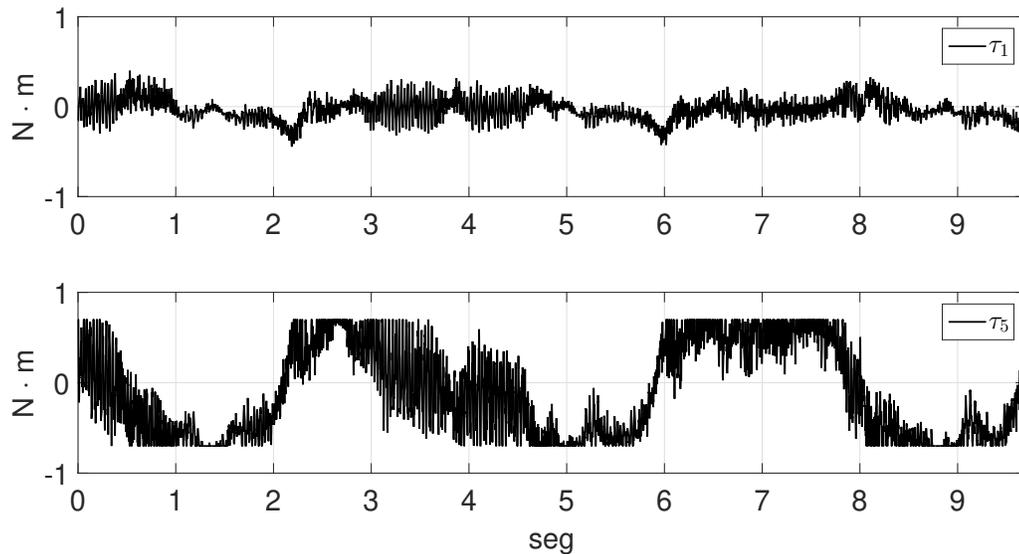


Figura 33. Señales del control no lineal de manera experimental.

Por último, se repitió el experimento pero se aplicaron un par de perturbaciones externas para observar los efectos del controlador. En la Figura 35 se muestra el com-

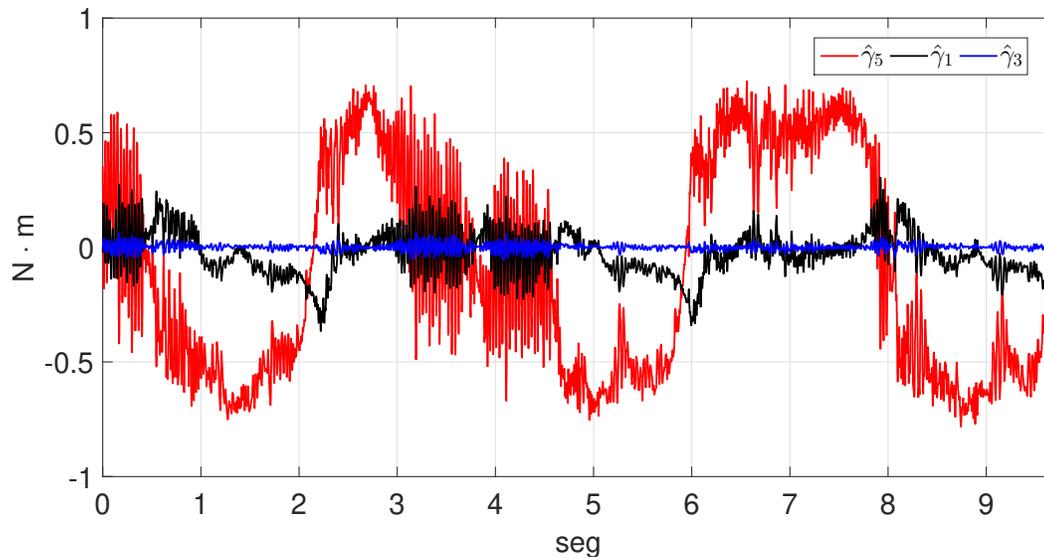


Figura 34. Incertidumbre estimada en la dinámica de las articulaciones.

portamiento de los estados ante unas perturbaciones externas aplicadas en los tiempos 3.27seg y 6.431seg como lo muestran las líneas punteadas. En la Figura 36 se muestran los controles aplicados a los actuadores para mantener estable el sistema y en la Figura 37 se muestran las incertidumbres estimadas por el observador discontinuo. Las perturbaciones externas se aplicaron en la articulación subactuada, dando un ligero golpe al péndulo compuesto, el cambio de posición se observa a partir de las líneas punteadas. El controlador actúa de manera inmediata, haciendo que los estados se mantengan en una vecindad alrededor del punto de interés de color magenta, esto sucedió después de las dos perturbaciones aplicadas en un intervalo de 10seg . Con esto se comprueba que el control no lineal propuesto es más robusto que el control lineal, siendo que en ambos experimentos se aplicaron las mismas ganancias K del controlador LQR.

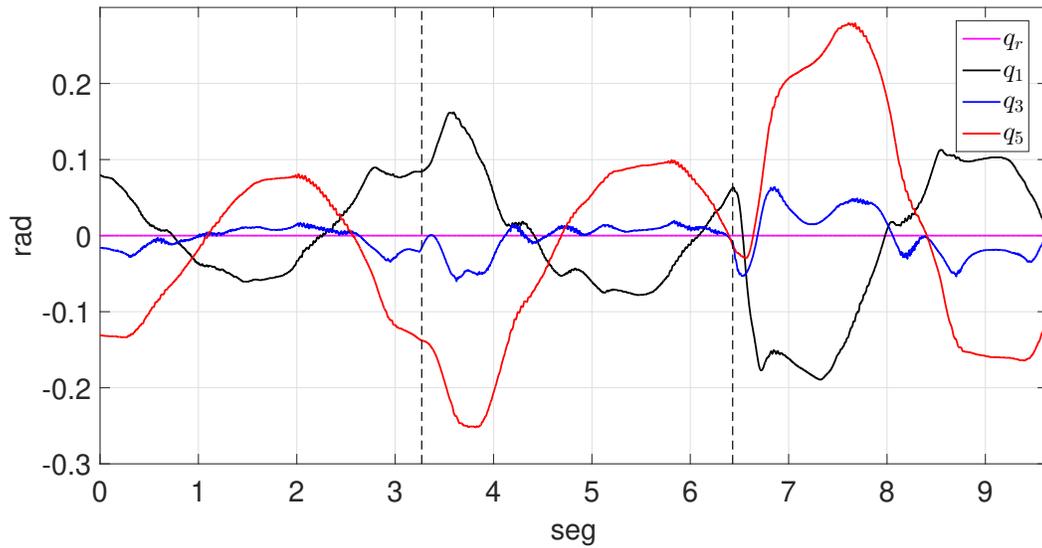


Figura 35. Comportamiento del sistema en presencia de perturbaciones externas utilizando un controlador no lineal.

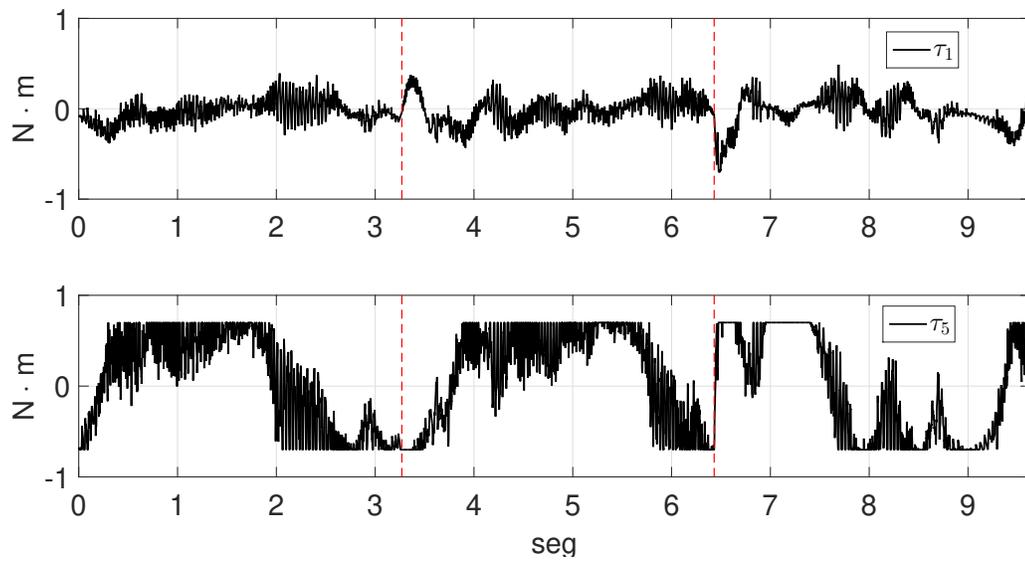


Figura 36. Señales del control no lineal en presencia de perturbaciones externas.

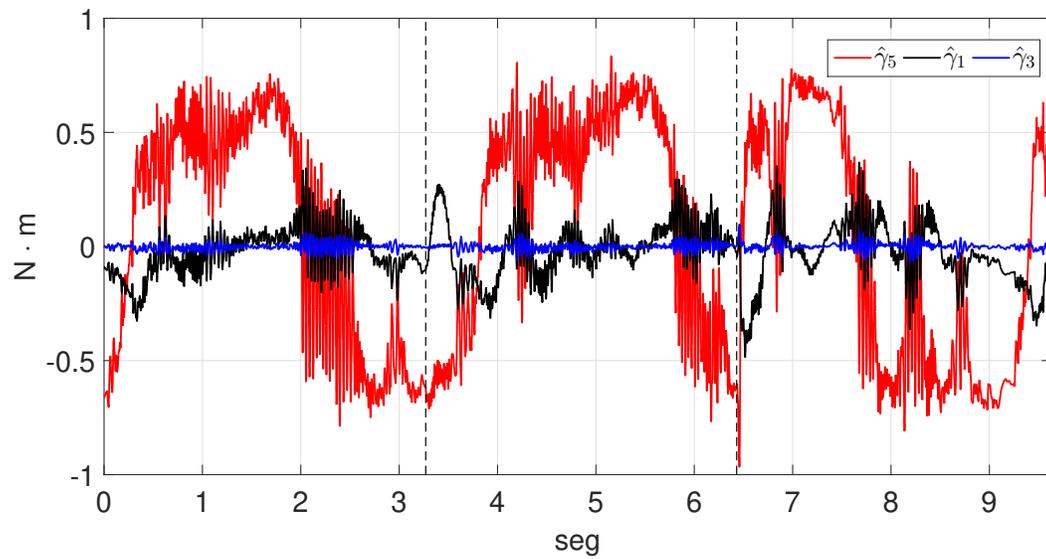


Figura 37. Incertidumbre estimada en la dinámica de las articulaciones en presencia de perturbaciones externas.

Capítulo 6. Conclusiones

En este trabajo de tesis se desarrolló el modelo dinámico de un mecanismo de cinco barras con péndulo esférico. El modelo dinámico obtenido presenta una mayor generalización en comparación a los modelos presentados en la literatura ya que se considera una barra rígida. Dada la caracterización del péndulo esférico aquí presentada, es posible obtener la inercia sobre cualquier eje de rotación. Por otra parte, aplicando las consideraciones correctas, el modelo dinámico del sistema completo coincide con los modelos simplificados de un mecanismo de cinco barras con o sin un péndulo compuesto. La complejidad obtenida en el modelo, se justifica si se desea un desempeño óptimo, no solo bueno. También, se realizó un método de identificación paramétrica de la fricción presente en las articulaciones actuadas, desarrollando una función de costo con el modelo de Dahl y fricción viscosa y de Coulomb. Se obtuvieron mejores resultados considerando una fricción viscosa y de Coulomb.

Se diseñaron dos algoritmos de control, uno del tipo LQR y un control no lineal que compensa parcialmente la dinámica e incertidumbre del sistema, para cumplir con el objetivo de regulación en un punto de equilibrio inestable. Por último, se validaron los controladores de manera numérica para el sistema de 4 grados de libertad con grado de subactuación de 2, mientras que la validación experimental se hizo en un mecanismo de cinco barras con péndulo compuesto, i.e., tres grados de libertad con grado de subactuación de uno.

Se obtuvieron mejores resultados con el algoritmo de control no lineal, ya que se compensa parte de la dinámica del sistema y las incertidumbres estimadas de las articulaciones actuadas. Inclusive, el sistema se mantuvo alrededor de una vecindad pequeña al aplicar una perturbación externa en el experimento.

6.1. Trabajo futuro

Parte del trabajo futuro es el diseño y fabricación del mecanismo de cinco barras con péndulo esférico, considerando el acoplamiento del péndulo esférico en el mecanismo de cinco barras. También, la instrumentación necesaria para detectar la posición del péndulo por medio de un sistema de visión.

Se puede continuar con la estimación de la fricción presente en el sistema, proponiendo nuevas funciones de costo para diferentes modelos de fricción, ajustando el modelo de fricción para tener un modelo más aproximado a la realidad.

Por otro lado, se pueden diseñar controladores más robustos para un mejor desempeño del sistema del tipo no lineal, modos deslizantes, backstepping, entre otros. También, cambiar el objetivo de control a seguimiento de trayectoria, tal que el mecanismo planar de cinco barras siga una trayectoria definida mientras se mantiene en posición vertical el péndulo subactuado.

Por último, implementar los controladores propuestos en el mecanismo de cinco barras con péndulo esférico, una vez que se tenga la instalación completa de este sistema mecánico.

Literatura citada

- Alvarado, O., Ollervides, J., y Campa, R. (2010). Modelado y control de un mecanismo tipo péndulo invertido esférico. *Congreso anual de la asociación de México de control automático*.
- Arimoto, S. (1996). *Control theory of nonlinear mechanical systems*. Oxford University Press, Inc.
- Aström, K. y Furuta, K. (1996). Swinging up a pendulum by energy control*. *IFAC proceedings volumes*, **29**(1): 1919 – 1924. 13th World Congress of IFAC, 1996, San Francisco USA, 30 June - 5 July.
- Cuesta García, J. R. (2003). *Dinámica compleja de un robot subactuado*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.
- Dahl, P. (1975). Solid friction damping of spacecraft oscillations. *AIAA guidance and control conference*, p. 20.
- Franklin, G. F., Powell, J. D., Workman, M. L., et al. (1998). *Digital control of dynamic systems*, Vol. 3. Addison-wesley Menlo Park, CA.
- Furuta, K., Yamakita, M., y Kobayashi, S. (1991). Swing up control of inverted pendulum. En: *Proceedings IECON '91: 1991 international conference on industrial electronics, control and instrumentation*.
- Ghorbel, F. H., Member, S., Chételat, O., Gunawardana, R., y Longchamp, R. (2000). Modeling and set point control of closed-chain mechanisms : theory and experiment. *IEEE Transactions on control systems technology*, **8**(5): 801–815.
- González Elías, M. E. (2000). *Modelos de fricción con aplicación al control de mecanismos*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.
- Hauser, J. y Murray, R. M. (1990). Nonlinear controllers for non-integrable systems: the acrobot example. En: *1990 American Control Conference*, May. pp. 669–671.
- Iliá, D. y Sinatra, R. (2009). A novel formulation of the dynamic balancing of five-bar linkages with applications to link optimization. *Multibody system dynamics*, **21**(2): 193–211.
- Kelly, R. y Llamas, J. (1999). Determination of viscous and coulomb friction by using velocity responses to torque ramp inputs. En: *Proceedings 1999 IEEE international conference on robotics and automation*. pp. 1740–1745 vol.3.
- Kelly, R., Santibáñez, V., y Loría, A. (2005). *Control of robot manipulators in joint space*. Springer science & business media.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems (3ra. ed)*. Prentice-Hall.
- Lin, C. E. y Sheu, Y. . (1992). A hybrid-control approach for pendulum-car control. *IEEE Transactions on industrial electronics*, **39**(3): 208–214.
- Luenberger, D. (1971). An introduction to observers. *IEEE Transactions on automatic control*, **16**(6): 596–602.
- Marion, J. B. (1996). *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Reverté.

- Mori, S., Nishihara, H., y Furuta, K. (1976). Control of unstable mechanical system control of pendulum. *International journal of control*, **23**(5): 673–692.
- Ogata, K. (2010). Ingeniería de control moderna. *Pearson educacion*, p. 904.
- Olsson, H. (1997). *Control systems with friction*. Tesis de doctorado, Department of automatic control, Lund Institute of Technology (LTH), Lund, Suecia.
- Ramos, L. E., Castillo-Toledo, B., y Alvarez, J. (1997). Nonlinear regulation of an underactuated system. En: *Proceedings of international conference on robotics and automation*.
- Rampazzo, F. y Sussmann, H. J. (2001). Set-valued differentials and a nonsmooth version of chow's theorem. En: *Proceedings of the 40th IEEE conference on decision and control (Cat. No.01CH37228)*, Dec. Vol. 3, pp. 2613–2618 vol.3.
- Reyhanoglu, M., van der Schaft, A., McClamroch, N. H., y Kolmanovsky, I. (1999). Dynamics and control of a class of underactuated mechanical systems. *IEEE Transactions on automatic control*, **44**(9): 1663–1671.
- Rosas, D., Alvarez, J., y Fridman, L. (2007). Robust observation and identification of ndof lagrangian systems. *International journal of robust and nonlinear control*, **17**: 842 – 861.
- Rosas Almeida, D. I. (2005). *Sincronización robusta de sistemas Lagrangianos utilizando controladores discontinuos*. Tesis de doctorado, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.
- Siciliano, B. y Khatib, O. (2008). *Springer handbook of robotics*. Springer Berlin heidelberg.
- Soto, I. y Campa, R. (2012). Modelado de un péndulo invertido esférico sobre un mecanismo de cinco barras. *Congreso anual de la asociación de México de control automático*.
- Spong, M. W. (1996). Energy based control of a class of underactuated mechanical systems. *IFAC Proceedings volumes*, **29**(1): 2828–2832.
- Spong, M. W. y Block, D. J. (1995). The pendubot: a mechatronic system for control research and education. En: *Proceedings of 1995 34th IEEE conference on decision and control*, Dec. Vol. 1, pp. 555–556 vol.1.
- Spong, M. W., Corke, P., y Lozano, R. (1999). Nonlinear control of the inertia wheel pendulum. *Automatica*, **37**: 1845–1851.
- Spong, M. W., Hutchinson, S., Vidyasagar, M., et al. (2006). *Robot modeling and control*, Vol. 3. wiley New York.
- Violante, C. (2018). *Diseño y construcción de un mecanismo de cinco barras*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.
- Wang, H., Chamroo, A., Vasseur, C., y Koncar, V. (2008). Stabilization of a 2-DOF inverted pendulum by a low cost visual feedback. *American control conference*, pp. 3851–3856.
- Yang, R., Kuen, Y.-y., Li, Z., Bay, C. W., y Kong, H. (2000). Stabilization of a 2-DOF spherical pendulum on X-Y table. *IEEE International conference on control applications*.