

Centro de Investigacion Cientifica y de
Educacion Superior de Ensenada

PELICULAS DELGADAS INHOMOGENEAS
FILTROS DE INTERFERENCIA Y
ABSORCION.

TESIS

DOCTORADO EN CIENCIAS

FRANCISCO VILLA VILLA

ENSENADA, B. C. MEXICO. MAYO DE 1995.

QC
173
4
.I53
V55
g.2

RESUMEN de la Tesis de FRANCISCO VILLA VILLA presentada como requisito para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS en Física Aplicada con opción en FISICA DE MATERIALES. Ensenada, Baja California, México, 26 de Marzo de 1995.

PELICULAS DELGADAS INHOMOGENEAS: FILTROS DE INTERFERENCIA Y ABSORCION

Resumen aprobado por:


Dr. Roberto Machorro Mejía

Director de Tesis

El presente trabajo constituye el estudio de algunas propiedades de películas inhomogéneas y su aplicación como filtros ópticos espectrales los cuales utilizan los fenómenos de interferencia y absorción para controlar las propiedades de reflexión y transmisión de luz en superficies ópticas. El objetivo principal es utilizar y/o desarrollar las herramientas necesarias para diseñar, analizar, y obtener experimentalmente este tipo de filtros, mediante co-evaporación al alto vacío.

INHOMOGENEOUS THIN FILMS: INTERFERENCE AND ABSORPTION FILTERS

The present work is a study of some properties of inhomogeneous thin films and their application as spectral optical filters. Based in the interference and absorption phenomena such films can control the reflectance and transmittance of optical surfaces. Here, the main goal is to use and/or develop the necessary tools for the design, the analysis and the manufacture this kind of filters, using a high vacuum co-evaporation technique.

**CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA**



**DIVISION DE FISICA APLICADA
FISICA DE MATERIALES**

**Películas Delgadas Inhomogéneas:
Filtros de Interferencia y Absorción**

T E S I S

**QUE PARA CUBRIR PARCIALMENTE LOS REQUISITOS
NECESARIOS PARA OBTENER EL GRADO DE**

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

Francisco Villa Villa

ENSENADA, BAJA CALIFORNIA, MEXICO, 26 DE MAYO DE 1995.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Roberto Machorro quién además de la asesoría me brindó una gran amistad y los medios necesarios a su alcance para la realización más eficiente de esta tesis.

A los miembros del comité por su colaboración y sugerencias para el desarrollo del presente trabajo.

Muy especialmente al Sr. Jesús Nieto por el excelente soporte técnico y gran empeño en el desarrollo de la parte experimental.

A todo el personal del Instituto de Física de la UNAM, Laboratorio Ensenada, cuyas actividades se relacionan de manera directa o indirecta con nuestro trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo dado mediante el programa de becas.

DEDICATORIA

Para mi querida esposa y compañera Amalia
a quien debo gran parte del tiempo
dedicado a este trabajo.

CONTENIDO

Página

I.	INTRODUCCION	1
I. 1	Antecedentes	1
I. 2	Objetivos	3
I. 3	Organización del trabajo	4
I. 4	Contribuciones	4
II.	TEORIA DE PROPAGACION MATRICIAL	6
II. 1	Ecuaciones de Maxwell	6
II. 2	Matriz inhomogénea	12
II. 3	Funciones de múltiple reflexión	17
II. 4	Reflectancia, transmitancia y absorción	23
II. 5	Ejemplos de aplicación	26
III.	SINTESIS POR TRANSFORMADA DE FOURIER	32
III. 1	Análisis y síntesis	32
III. 2	Aproximación de segundo orden	33
III. 3	Aproximación de tercer orden	35
III. 4	Síntesis por transformada de Fourier	37
III. 5	Propiedades de la ecuación de síntesis	44

CONTENIDO (Continuación)

Página ^{vii}

III. 6. Síntesis bajo incidencia oblicua	47
IV. ADMITANCIA DE PELICULAS INHOMOGENEAS	53
IV. 1. Admitancia de películas inhomogéneas dieléctricas	54
IV. 2. Admitancia de sistemas periódicos	59
IV. 3. Parámetros básicos de las zonas de rechazo	63
V. FILTROS INHOMOGENEOS: EXPERIMENTO	68
V. 1. El medio efectivo y las funciones de concentración asociadas	69
V. 2. Velocidades de evaporación	74
V. 3. Coevaporación al alto vacío	75
V. 4. Control: monitor de cuarzo y la PC	78
V. 5. Factores físicos limitantes en el proceso	80
V. 6. Control de la velocidad de depósito mediante mascarillas rotatorias .	81
V. 7. Resultados del experimento	85
VI. CONCLUSIONES	87
VI. 1. Resumen de conclusiones	87
VI. 2. Perspectivas para trabajo futuro	89
LITERATURA CITADA	90
APENDICE A	93



LISTA DE FIGURAS

Figura	<u>Página</u>
1 Índices de refracción y absorción de una capa delgada inhomogénea constituida por un cermet como función del grosor físico.	7
2 Orientación del sistema coordinado para cada polarización. El eje z se ha elegido como el eje de referencia para la dirección de propagación y el plano y - z es el plano de incidencia.	9
3 Múltiples órdenes reflejados y transmitidos por la capa inhomogénea . . .	23
4 Si las fronteras de la capa se extienden más allá de sus límites físicos reales, la función del perfil $r(\beta)$ no se modifica ya que es cero fuera de tales límites.	25
5 Índices de refracción $n(z)$ y absorción $k(z)$ para un divisor de haz.	27
6 Desempeño espectral del divisor de haz.	28
7 Índices de refracción y absorción para una zona de rechazo típica. Los materiales utilizados para este diseño fueron plata y dióxido de titanio en la longitud de onda $\lambda = 500nm$	30
8 Desempeño espectral de la zona de rechazo. Se ha incluido el efecto de dispersión $n(\lambda)$	31
9 Proceso de análisis y síntesis en películas delgadas.	34
10 Desempeño espectral propuesto, en línea delgada. La línea gruesa es la respuesta generada con el perfil de índice obtenido utilizando la aproximación de Sossi.	41
11 Índice de refracción obtenido.	41
12 Desempeño espectral.	42
13 Índice de refracción obtenido.	42

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura	<u>Página</u>
14 Desempeño espectral.	43
15 Índice de refracción obtenido.	43
16 Superposición de dos estructuras A y B.	46
17 Desempeño espectral de la doble zona de rechazo bajo ángulo de incidencia de 40°.	48
18 Desempeño espectral bajo ángulo de incidencia de 40°.	48
19 Diseño en polarización s bajo ángulo de incidencia de 35° e índice promedio $n_0 = 1.5$	51
20 Mismo diseño en polarización p con 25° y $n_0 = 2$	52
21 Índice de refracción de una película inhomogénea como función del grosor físico.	54
22 La condición de acoplamiento requiere que el índice en las fronteras de la capa coincidan con los medios en que se encuentra inmersa.	57
23 Índice de refracción periódico con período $\lambda_0/2\bar{n}$. Aquí $z_0 = \lambda/4\bar{n}$. La cantidad ξ es un número muy pequeño que se utiliza para identificar los puntos correspondientes a grosores ópticos impares de $\lambda_0/4$	59
24 Integral de fase para un sistema con función de índice periódica. Esta es también una curva periódica pero creciente que oscila alrededor de una línea oblicua cuya pendiente depende de la magnitud del índice de refracción promedio.	60
25 Admitancia del mismo filtro en la longitud de onda del diseño. Las intersecciones de la curva corresponden con grosores que son múltiplos de $\lambda_0/4$	62
26 Función ancho Δg para una zona con índice senoidal en función de la amplitud δ . Los parámetros utilizados fueron $\bar{n} = 3.5$ y $\lambda_0 = 1000\text{nm}$	65
27 a) Longitud de onda donde se localiza el borde superior de la zona. b) Longitud de onda para el límite inferior.	66
28 Número de períodos requeridos para obtener una reflectancia $R_0 = 99.99\%$ para la longitud de onda del diseño figura 5.	67

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura	Página	
29	Indice de refracción para una mezcla de los materiales dieléctricos fluoruro de magnesio ($n_{MgF_2} = 1.38$) y dióxido de titanio ($n_{TiO_2} = 2.7$), en la longitud de onda $\lambda = 550nm$, como función de la concentración.	70
30	Indice de refracción y absorción para un cermet formado con los materiales dióxido de titanio y cobre ($n_{Cu} - ik_{Cu} = 0.945 - 2.954i$) en la longitud de onda $\lambda = 550nm$, como función de la concentración.	71
31	Capa dieléctrica inhomogénea	72
32	Funciones de concentración de la capa dieléctrica.	73
33	Velocidades de evaporación de cada material para la mezcla dieléctrica.	76
34	Velocidades de evaporación para los materiales de la mezcla dieléctrica manteniendo constante $v_{TiO_2} = 10 \text{ \AA}/seg.$	77
35	Configuración del sistema de evaporación y control.	79
36	Sistema con mascarilla rotatoria.	82
37	Mascarilla con abertura en forma de cuña circular.	83
38	Mascarilla de velocidad angular constante.	83
39	Experimento de coevaporación de fluoruro de magnesio y monóxido de silicio.	86
40	Modelo de Maxwell Garnett.	94
41	Modelo de Bruggeman.	95
42	Casos límite para la función dieléctrica. a) Microestructura sin apantallamiento. b) Microestructura con apantallamiento.	97
43	Los valores físicamente permitidos para la función dieléctrica efectiva deben estar dentro de la región sombreada para cualquier modelo. Se ha considerado el caso más general de una mezcla de dos materiales con absorción.	98

I. INTRODUCCION

I. 1 Antecedentes

La teoría y aplicación de películas delgadas homogéneas como filtros de interferencia y absorción se ha desarrollado en los últimos 30 años [Jacobson, 1975], de manera que en la actualidad se tiene una idea clara de las ventajas y limitaciones intrínsecas de tales sistemas. Como parte del proceso natural de evolución de este campo, en los últimos años se han buscado nuevos materiales, nuevos medios de producción y se ha extendido la teoría hacia sistemas más complejos, considerando variables o propiedades adicionales. Este es el caso de películas inhomogéneas en las cuales el índice de refracción puede variar como una función arbitraria a través del grosor de la capa. De manera análoga a capas delgadas homogéneas, estos sistemas obedecen los mismos principios básicos aprovechando los fenómenos de interferencia y absorción del campo electromagnético, para controlar las propiedades de reflexión y transmisión de superficies ópticas.

Como parte de un campo relativamente reciente, el estudio de las propiedades de capas inhomogéneas se encuentra en proceso de desarrollo, de manera que, hasta hace algunos años, no se contaba con una teoría para la propagación del campo electromagnético a través de sistemas estratificados e inhomogéneos, y solamente se conocían algunas soluciones para casos muy específicos. Es importante mencionar que los métodos de propagación utilizados para capas homogéneas proporcionan una excelente aproximación para el cálculo de la respuesta espectral de películas inhomogéneas. De este modo, se ha determinado el desempeño espectral de películas inhomogéneas (incluso con absorción),

simulando su perfil de índice, con un número grande de rebanadas muy delgadas de películas homogéneas, y se ha llegado a obtener algunos resultados, particularmente en el diseño de absorbedores solares [Ritchie y Window, 1977; Bittar y White, 1992; Trotter y Sievers, 1980].

Es importante mencionar que por este método, resulta muy difícil analizar claramente el comportamiento del campo en el interior del material, lo cual dificulta el estudio de las propiedades más significativas de este tipo de filtros.

En el caso de películas inhomogéneas con absorción existe poco trabajo reportado. Los principales esfuerzos han sido encaminados al estudio de las propiedades ópticas de cermets utilizando la teoría del medio efectivo [Cohen, *et al.*, 1973], mediante modelos como los de Maxwell-Garnett y Bruggeman para calcular el índice de refracción de mezclas constituidas de dos o más materiales que pueden ser metales ó dieléctricos.

Hasta muy recientemente se ha desarrollado una herramienta muy poderosa para estudiar sistemas inhomogéneos [Bovard, 1988]. Esta constituye una generalización del método matricial homogéneo para materiales sin absorción y del cual se han deducido importantes propiedades y, más importante aún, de esta teoría se ha derivado un método general de síntesis de filtros inhomogéneos utilizando transformada de Fourier, con el cual es posible resolver prácticamente cualquier problema de diseño.

Una parte también de gran importancia en el desarrollo de estos filtros, es el problema experimental. Dado el gran número de factores que intervienen en los procesos de obtención de películas delgadas (generalmente procesos de depósito por medios químicos o físicos al alto vacío), aún cuando hablemos de películas homogéneas, la reproducibilidad de un resultado con tolerancias muy pequeñas, es difícil de lograr. Si a esto agregamos la necesidad de mantener un control preciso del índice de refracción con el grosor de la misma, mediante la variación de concentraciones de los materiales conforme la capa crece, el problema se complica bastante.

Debido a estos problemas técnicos, la fabricación de capas delgadas inhomogéneas se ha retardado en su desarrollo. Sin embargo, actualmente ha resurgido el interés de manera tal que el tema de las películas inhomogéneas y su aplicación como filtros de interferencia se puede considerar como un campo de trabajo muy activo. Esto se debe en gran parte a que se ha visto la posibilidad de diseñar filtros con características muy especiales y, por otra parte, en la actualidad se estudian diferentes medios de producir tales sistemas en el laboratorio mediante procesos de control y monitoreo por computadora.

I. 2 Objetivos

En el contexto anteriormente expuesto, los objetivos del presente trabajo, consiste en realizar un estudio del estado actual de desarrollo de la teoría y aplicación de películas inhomogéneas, que nos permita diseñar y obtener experimentalmente nuestros propios sistemas. Esto a su vez implica realizar investigación de nuevas propiedades y procesos de obtención. Lo anteriormente expuesto aunque parezca demasiado ambicioso, es posible, debido a que los sistemas inhomogéneos son realmente una generalización de las películas homogéneas. De manera que mucho del trabajo ya realizado se puede utilizar por analogía para entender una gran parte de su comportamiento. Otra razón que justifica el enfoque del presente trabajo es que el avance realizado hasta ahora se puede englobar perfectamente en tres actividades fundamentales que son:

- i) Análisis o propagación del campo para determinar el comportamiento espectral,
- ii) síntesis o diseño,
- iii) fabricación.

I. 3 Organización del trabajo

En el capítulo II se desarrolla la teoría de propagación en películas inhomogéneas, partiendo de las ecuaciones de Maxwell, para el caso general de propagación en películas con absorción. En el capítulo III se realiza una revisión del método de síntesis basado en una aproximación derivada del método matricial inhomogéneo, el cual implica transformadas de Fourier para el caso sin absorción. Así mismo, se desarrolla un procedimiento similar para síntesis de filtros de incidencia oblicua, los cuales producen efectos de polarización en cada componente del campo. En el capítulo IV se analizan las propiedades de sistemas dieléctricos con función de índice periódica en base al método matricial y su relación con los diagramas de admitancia. Se determinan los parámetros básicos de este tipo de filtros. En el capítulo V se describe brevemente la teoría del medio efectivo utilizado y su relación con los parámetros prácticos de fabricación de películas inhomogéneas para el método propuesto. Particularmente, se desarrolla la metodología para la obtención de las mascarillas de evaporación para cualquier perfil de índice. Se describe también el procedimiento experimental y el montaje del sistema utilizado. Finalmente en el Capítulo VI se dan conclusiones y perspectivas para el trabajo futuro.

I. 4 Contribuciones

La contribución del presente trabajo en el campo que nos ocupa, se puede describir concretamente por los siguientes puntos:

- Extensión del método matricial inhomogéneo para describir la propagación del campo electromagnético en películas delgadas de cermets inhomogéneos.
- Aplicación de un método de síntesis a películas inhomogéneas de incidencia oblicua.

- Aplicación de los diagramas de admitancia y la matriz característica inhomogénea para determinar los parámetros básicos de zonas de rechazo.
- Implementación de un procedimiento experimental para la obtención de este tipo de películas delgadas por co-evaporación mediante el uso de mascarillas rotatorias.
- Desarrollo de programas para análisis y síntesis de sistemas inhomogéneos, para determinar la respuesta espectral o la función de índice según sea el caso.
- Desarrollo de programas para simulación del medio efectivo y su relación con los parámetros del sistema de fabricación. Esto también implica crear programas de control para el sistema de monitoreo y procesos de evaporación.

II. TEORIA DE PROPAGACION MATRICIAL

En este capítulo se desarrolla la teoría de propagación matricial para películas delgadas inhomogéneas con absorción partiendo de las ecuaciones de Maxwell. Este método fue desarrollado por Bovard [1988]. Nosotros lo hemos extendido para considerar este tipo de películas con la finalidad de contar con una herramienta para determinar el desempeño espectral y la admitancia de sistemas inhomogéneos en general.

II. 1 Ecuaciones de Maxwell

El problema de propagación de luz en películas inhomogéneas implica considerar la condición de inhomogeneidad en el índice de refracción del material el cual es complejo para mezclas de materiales metal-dieléctrico y real para dieléctricos. Supongamos un material en forma de capa delgada con un índice de refracción que varía como una función de forma arbitraria pero continua en la dirección z , conforme se atraviesa la capa [figura 1].

$$N(z) = n(z) - ik(z). \quad (1)$$

Por supuesto, este índice complejo se encuentra relacionado con la permitividad eléctrica $\epsilon(z)$ y con la conductividad $\sigma(z)$ del medio. Por conveniencia, tomaremos a $\epsilon(z) = \epsilon_{med}(z)/\epsilon_0$ y $\mu = \mu_{med}/\mu_0$ como la permitividad y la permeabilidad relativa del medio, respectivamente. Aquí ϵ_0 y μ_0 son las constantes del vacío. De este modo las

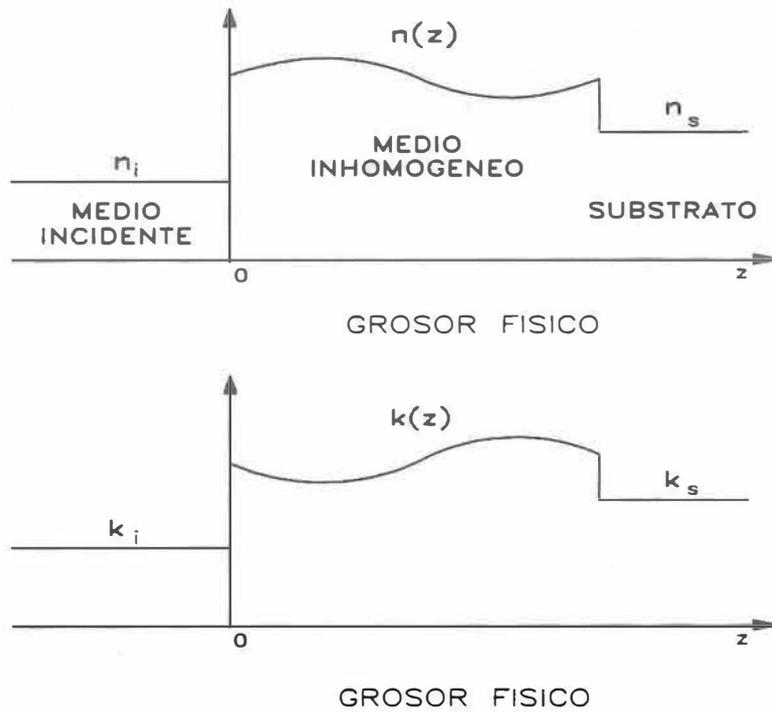


Figura 1: Índices de refracción y absorción de una capa delgada inhomogénea constituida por un cermet como función del grosor físico.

ecuaciones de Maxwell en un material, se pueden expresar como:

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon(z)\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma(z)\vec{E}, \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot [\epsilon(z)\vec{E}] = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (5)$$

donde \vec{E} y \vec{H} son los vectores eléctrico y magnético respectivamente.

Si consideramos la dependencia temporal en los campos como $\exp(i\omega t)$ y tomando en cuenta el índice de refracción complejo:

$$N^2(z) = \epsilon(z)\mu - i\frac{\sigma(z)\mu}{\omega\epsilon_0}, \quad (6)$$

las ecuaciones 2 y 3 se pueden escribir como

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu\mu_0\vec{H}, \quad (7)$$

$$\nabla \times \vec{H} = i\frac{\epsilon_0\omega}{\mu}N^2(z)\vec{E}. \quad (8)$$

Tomando el rotacional en ambos lados de la ecuación 7 y sustituyendo en esta ecuación el rotacional de \vec{H} de la ecuación 8 tenemos

$$\nabla^2\vec{E} + k^2N^2(z)\vec{E} + \nabla(\nabla \ln \epsilon(z) \cdot \vec{E}) = 0. \quad (9)$$

De manera similar tomando el rotacional de la ecuación 8 y sustituyendo en esta ecuación el rotacional de \vec{E} de la ecuación 7 obtenemos

$$\nabla^2\vec{H} + k^2N^2(z)\vec{H} + i\frac{\epsilon_0\omega}{\mu}\nabla N^2(z) \times \vec{E} = 0. \quad (10)$$

Para diferenciar el índice de absorción $k(z)$ [ecuación 1] del número de onda, $k = 2\pi/\lambda$ expresaremos la dependencia explícita en z del primero.

Figura 2: Orientación del sistema coordenado para cada polarización. El eje z se ha elegido como el eje de referencia para la dirección de propagación y el plano y - z es el plano de incidencia.

Las ecuaciones 9 y 10 son las ecuaciones de onda para un medio inhomogéneo, nuestro objetivo es entonces resolverlas para encontrar la forma funcional de los campos. El último término de estas ecuaciones se debe a la presencia de la inhomogeneidad del material en la dirección de propagación del campo. Es importante notar que no es posible separar completamente los campos en ecuaciones de onda independientes, como en el caso homogéneo. Como consecuencia no es posible resolver explícitamente para la variable z , la cual es la dirección en la que se encuentra la inhomogeneidad. Sin embargo podemos llegar a determinar la dependencia explícita en las variables x , y , como se verá enseguida. Consideremos la polarización TE (transversal eléctrico ó polarización "s") del campo [figura 2]

$$\vec{E} = \hat{i}E_x, \quad (11)$$

sustituyendo en la ecuación 8 y escribiendo por componentes

$$-i\omega\mu\mu_0 H_x = 0, \quad (12)$$

$$-i\omega\mu\mu_0 H_y = \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad (13)$$

$$-i\omega\mu\mu_0 H_z = \frac{\partial E_x}{\partial y}, \quad (14)$$

De ecuación 12 podemos observar que $H_x = 0$. De igual manera sustituyendo el campo eléctrico en la ecuación 8 y expresando por componentes

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = i\frac{\epsilon_0\omega}{\mu} N^2 E_x, \quad (15)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = 0. \quad (17)$$

De la ecuación 16 tenemos que H_z es independiente de x . De la ecuación 17, H_y es independiente de x , lo cual implica a su vez que en ecuación 13 $\partial E_x / \partial z$ es independiente de x y por lo tanto E_x también lo es. En conclusión, en el caso TE los campos en general serán funciones tales que:

$$\vec{E} = \vec{E}(y, z), \quad (18)$$

$$\vec{H} = \vec{H}(y, z). \quad (19)$$

En base a lo anterior, podemos expresar vectorialmente los campos como:

$$\vec{E} = \hat{i}E_x(y, z), \quad (20)$$

$$\vec{H} = \hat{j}H_y(y, z) + \hat{k}H_z(y, z), \quad (21)$$

Si sustituimos este campo \vec{E} en la ecuación de onda [ecuación 9] tenemos

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - k^2 N^2(z) E_x = 0. \quad (22)$$

De manera similar sustituyendo los campos dados por las ecuaciones 20 y 21 en la ecuación 10 y expresando por componentes tenemos

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + k^2 N^2(z) H_y + \frac{2}{N(z)} \frac{dN(z)}{dz} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 N^2(z) H_z = 0. \quad (24)$$

Las ecuaciones 22, 23, y 24 en general se pueden resolver por separación de variables, para las variables (x, y) , aunque en general no poseen una solución analítica para z . La solución se puede expresar como

$$\vec{E} = \hat{i} E_x(z) \exp[i(\omega t - kSy)], \quad (25)$$

$$\vec{H} = \hat{j} H_y(z) \exp[i(\omega t - kSy)] + \hat{k} H_z(z) \exp[i(\omega t - kSy)], \quad (26)$$

para estas componentes, donde $S = N(z) \sin \hat{\theta}(z)$ está dado por la ley de Snell, y $\hat{\theta}(z)$ es el ángulo complejo de propagación.

Siguiendo un procedimiento similar es posible demostrar que ecuaciones similares se satisfacen para el caso TM.

II. 2 Matriz inhomogénea

Ahora que conocemos más explícitamente la forma de las funciones de los campos, expresaremos las ecuaciones de Maxwell utilizando el formalismo matricial sustituyendo las expresiones de los campos (E, H) [ecuaciones 25 y 26] en las ecuaciones 7 y 8. Las componentes en el caso TE serán

$$E'_x(z) = -ik\eta_0^{-1}H_z(z), \quad (27)$$

y

$$H'_y(z) = -ik\eta_0 N^2 \cos^2 \hat{\theta}(z)E_x(z), \quad (28)$$

donde hemos llamado $\eta_0 = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$, a la admitancia del vacío, y hemos supuesto un medio no magnético $\mu = 1$. Si ahora definimos las siguientes funciones $\eta(z)$ y $\gamma(z)$:

$$\eta(z) = \eta_0 N(z) \cos \hat{\theta}(z), \quad (29)$$

$$\gamma(z) = N(z) \cos \hat{\theta}(z), \quad (30)$$

y las sustituimos en las ecuaciones 27 y 28, podemos reescribirlas como

$$E'_x(z) = -ik \frac{\gamma(z)}{\eta(z)} H_z(z), \quad (31)$$

$$H'_y(z) = -ik\gamma(z)\eta(z)E_x(z). \quad (32)$$

Estas ecuaciones, se pueden transformar definiendo las variables siguientes:

$$\beta(z) = k \int_0^z N(z) \cos \hat{\theta}(z) dz, \quad (33)$$

$$\bar{E}_x(\beta) = \sqrt{\eta(\beta)} E_x(\beta), \quad (34)$$

$$\bar{H}_y(\beta) = \frac{H_y(\beta)}{\sqrt{\eta(\beta)}}, \quad (35)$$

para obtener,

$$\bar{E}_x'(\beta) - r(\beta) \bar{E}_x(\beta) = -i \bar{H}_y(\beta), \quad (36)$$

$$\bar{H}_y'(\beta) + r(\beta) \bar{H}_y(\beta) = -i \bar{E}_x(\beta). \quad (37)$$

Se ha introducido

$$r(\beta) = \frac{\eta'(\beta)}{2\eta(\beta)}, \quad (38)$$

función que está definida completamente por la función de índice y representa la derivada del coeficiente de reflexión diferencial a primer orden, debido a la inhomogeneidad en cada punto en el interior de la película. En el caso homogéneo, el factor $r(\beta)$ se anula, en virtud de que $\eta'(\beta) = 0$. Es importante mencionar que bajo incidencia normal, $\beta(z) = \beta_r(z) - i\beta_i(z)$ es una función cuya parte real representa el grosor en fase de la capa dado por:

$$\beta_r(z) = \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^z n(z) dz, \quad (39)$$

y donde la parte imaginaria $\beta_i(z)$ representa el grosor en absorción siendo:

$$\beta_i(z) = \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^z k(z) dz. \quad (40)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para el caso TM se pueden obtener ecuaciones similares para los campos E_y y H_x , con una diferencia en la ecuación 29, la cual se redefine como

$$\eta(z) = \eta_0 \frac{N(z)}{\cos \hat{\theta}}. \quad (41)$$

De aquí en adelante, llamaremos $\eta(z)$ a la admitancia de la película en un punto z para cualquier polarización y omitimos el subíndice en los campos, en el entendido de que $\eta(z)$ será dada en términos de las ecuaciones 29 ó 41 según sea el caso (polarización "s" o polarización "p").

Las ecuaciones 31 y 32 son ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden, que si se expresan de manera independiente dan lugar a dos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, cuya solución general está dada como

$$\bar{E}(\beta) = A_1 F(\beta) + A_2 G(\beta), \quad (42)$$

$$\bar{H}(\beta) = B_1 K(\beta) + B_2 L(\beta). \quad (43)$$

Los coeficientes de estas ecuaciones se pueden determinar si establecemos las condiciones de frontera

$$\bar{E}(0) = \bar{E}_0, \quad (44)$$

$$\bar{H}(0) = \bar{H}_0, \quad (45)$$

y

$$[F(0), K(0)] = [1, 0], \quad (46)$$

$$[G(0), L(0)] = [0, 1], \quad (47)$$

donde E_0 y H_0 representan los campos en la interfaz entre el medio de incidencia y la película. De manera que

$$A_1 = E_0, \quad (48)$$

$$B_2 = H_0. \quad (49)$$

Si sustituimos nuestras soluciones por pares $[A_1 F(\beta), B_1 K(\beta)]$, y $[A_2 G(\beta), B_2(\beta)]$, en cualquiera de las ecuaciones del campo ecuación 36 ó 37 se puede mostrar que

$$A_2 = H_0, \quad (50)$$

$$B_1 = E_0. \quad (51)$$

De manera que, dadas las condiciones a la frontera, los campos estarán dados como

$$\overline{E}(\beta) = E_0 F(\beta) + H_0 G(\beta), \quad (52)$$

$$\overline{H}(\beta) = E_0 K(\beta) + H_0 L(\beta). \quad (53)$$

Las anteriores ecuaciones se pueden expresar en forma matricial. Dado que las funciones F , G , K , y L están por determinarse, las podemos modificar, para establecer una mayor similitud con la matriz característica de sistemas homogéneos, si multiplicamos las funciones G y K por la constante imaginaria $-i$. La expresión para los campos será entonces

$$\bar{E}(\beta) = E_0 F(\beta) - i H_0 G(\beta) \quad (54)$$

y

$$\bar{H}(\beta) = -i E_0 K(\beta) + H_0 L(\beta). \quad (55)$$

De la anterior ecuación obtenemos la llamada matriz de transferencia, la cual, al ser invertida, nos da la matriz característica de la capa inhomogénea

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\eta(\beta)}{\eta(0)}} L(\beta) & \frac{iG(\beta)}{\sqrt{\eta(\beta)\eta(0)}} \\ i\sqrt{\eta(\beta)\eta(0)} K(\beta) & \sqrt{\frac{\eta(0)}{\eta(\beta)}} F(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_s \end{pmatrix}, \quad (56)$$

donde $B = E_0/E_s$, $C = H_0/E_s$, η_s es la admitancia del sustrato, E_s y H_s representan las magnitudes de los vectores eléctrico y magnético en el medio de transmisión. Los radicales $\sqrt{\eta(\beta)/\eta(0)}$, y $\sqrt{\eta(\beta)\eta(0)}$, poseen dos raíces, debido a que están dados en términos del índice de refracción (complejo) en las fronteras de la película. Sin embargo ambas raíces nos llevan al mismo resultado en el cálculo de la absorción o la reflectancia.

La matriz característica inhomogénea [ecuación 56] tiene determinante unitario y cada uno de sus elementos tiene su correspondiente en la matriz característica homogénea.

II. 3 Funciones de múltiple reflexión

Hasta aquí hemos obtenido la matriz característica en forma general, pero no hemos determinado la forma explícita de la solución para las funciones de propagación del campo $F(\beta)$, $K(\beta)$, $G(\beta)$ y $L(\beta)$. Si ahora sustituimos los pares de soluciones $[F(\beta), -iK(\beta)]$ y $[-iG(\beta), L(\beta)]$ en las ecuaciones 36 y 37, obtenemos

$$\begin{aligned}
 F'(\beta) &= r(\beta)F(\beta) - K(\beta), \\
 K'(\beta) &= -r(\beta)K(\beta) + F(\beta), \\
 G'(\beta) &= r(\beta)G(\beta) + L(\beta), \\
 L'(\beta) &= -r(\beta)L(\beta) - G(\beta).
 \end{aligned}
 \tag{57}$$

Si observamos con detalle estas ecuaciones es posible notar que podemos extraer un poco más de esta forma explícita introduciendo las funciones $f(\beta)$, $g(\beta)$, $k(\beta)$ y $l(\beta)$:

$$\begin{aligned}
 F(\beta) &= f(\beta) \cos \beta + k(\beta) \operatorname{sen} \beta, \\
 K(\beta) &= f(\beta) \operatorname{sen} \beta - k(\beta) \cos \beta, \\
 G(\beta) &= l(\beta) \operatorname{sen} \beta + g(\beta) \cos \beta, \\
 L(\beta) &= l(\beta) \cos \beta - g(\beta) \operatorname{sen} \beta,
 \end{aligned}
 \tag{58}$$

las cuales son series de integrales complejas en el caso de cermetos y reales en el caso de dieléctricos, en donde cada término se encuentra asociado al orden en la reflexión múltiple dentro de la capa, como veremos más adelante.

Sustituyendo estas funciones en las ecuaciones del campo [ecuaciones 36 y 37] tenemos

$$f' \cos \beta + k' \operatorname{sen} \beta = r f \cos \beta + r k \operatorname{sen} \beta, \tag{59}$$

$$f' \operatorname{sen} \beta - k' \cos \beta = -r f \operatorname{sen} \beta + r k \cos \beta, \quad (60)$$

$$l' \operatorname{sen} \beta + g' \cos \beta = r l \operatorname{sen} \beta + r g \cos \beta, \quad (61)$$

$$l' \cos \beta - g' \operatorname{sen} \beta = -r l \cos \beta + r g \operatorname{sen} \beta. \quad (62)$$

Multiplicando la ecuación 59 por $\operatorname{sen} \beta$ y la ecuación 60 por $\cos \beta$ y sumando ambas ecuaciones tenemos

$$f' = r f \cos 2\beta + r k \operatorname{sen} 2\beta, \quad (63)$$

restándolas entre sí

$$k' = r f \operatorname{sen} 2\beta - r k \cos 2\beta. \quad (64)$$

De manera similar multiplicando la ecuación 61 por $\operatorname{sen} \beta$ y la ecuación 62 por $\cos \beta$ y sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$g' = r g \cos 2\beta + r l \operatorname{sen} 2\beta, \quad (65)$$

restándolas entre sí

$$l' = r g \operatorname{sen} 2\beta - r l \cos 2\beta. \quad (66)$$

Estos pares de ecuaciones [ecuaciones 63, 64 y 65, 66], se pueden expresar en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} g'(\beta) \\ l'(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos 2\beta & r\sen 2\beta \\ r\sen 2\beta & -r\cos 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(\beta) \\ l(\beta) \end{pmatrix}, \quad (67)$$

y

$$\begin{pmatrix} f'(\beta) \\ k'(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos 2\beta & r\sen 2\beta \\ r\sen 2\beta & -r\cos 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\beta) \\ k(\beta) \end{pmatrix}, \quad (68)$$

de aquí podemos observar que los pares de funciones $[g(\beta), l(\beta)]$ y $[f(\beta), k(\beta)]$ satisfacen la misma ecuación matricial. Si llamamos $S(\beta)$ al vector que representa cada par de funciones y $U(\beta)$ a la matriz 2×2 , podemos expresar las ecuaciones 67 y 68 como

$$S'(\beta) = U(\beta)S(\beta), \quad (69)$$

la cual es una ecuación diferencial matricial que buscamos resolver para $S(\beta)$. Esta ecuación posee la solución autorrecurrente

$$S(\beta) = \int_{\Gamma} U(\beta_1)S(\beta_1)d\beta_1, \quad (70)$$

que implica la integral compleja sobre el contorno Γ determinado por la ecuación compleja de la fase [ecuación 33]. Es importante notar que en el caso de materiales dieléctricos esta integral es real y de variable real, definida en el intervalo $[0, \beta]$.

Dadas las condiciones iniciales

$$S_0 = \begin{pmatrix} f(0) \\ \\ k(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (71)$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} g(0) \\ \\ l(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (72)$$

podemos aplicar el método de aproximaciones sucesivas para determinar la forma de nuestra solución, de manera que

$$S_1(\beta) = \int_{\Gamma} U(\beta_1) S_0 d\beta_1 + IS_0, \quad (73)$$

y donde I representa la matriz identidad 2×2 . El siguiente orden en la aproximación será

$$\begin{aligned} S_2(\beta) &= \int_{\Gamma} U(\beta_1) S_1 d\beta_1 + IS_0 \\ &= S_0 \left[\int_{\Gamma} \int_{\Gamma_1} U(\beta_1) U(\beta_2) d\beta_2 d\beta_1 + \int_{\Gamma} U(\beta_1) S_0 d\beta_1 + IS_0 \right]. \end{aligned} \quad (74)$$

Si llamamos $Q(U) = \int_{\Gamma} U(\beta_1) d\beta_1$ a la matriz integral podemos expresar nuestra solución de la siguiente manera

$$\begin{aligned} S_0 &= S(0), \\ S_1 &= [I + Q(U)] S_0, \\ S_2 &= \{I + Q(U) + Q[UQ(U)]\} S_0, \end{aligned} \quad (75)$$

...

y en general

$$S(\beta) = \{I + Q(U) + Q[UQ(U)] + \dots\} S_0. \quad (76)$$

Si a la matriz determinada por la suma de todos los términos entre llaves la llamamos $M(\beta)$, podemos expresar a $S(\beta)$ como

$$S(\beta) = M(\beta)S(0). \quad (77)$$

Escribiendo con detalle los términos de la matriz $M(\beta)$ tenemos

$$Q(U) = \begin{pmatrix} \int_{\Gamma} r(\beta) \cos 2\beta d\beta & \int_{\Gamma} r(\beta) \sen 2\beta d\beta \\ \int_{\Gamma} r(\beta) \sen 2\beta d\beta & -\int_{\Gamma} r(\beta) \cos 2\beta d\beta \end{pmatrix}, \quad (78)$$

llamando $\hat{C}_1 = \int_{\Gamma} r(\beta) \cos 2\beta d\beta$ y $\hat{S}_1 = \int_{\Gamma} r(\beta) \sen 2\beta d\beta$, tenemos

$$Q(U) = \begin{pmatrix} \hat{C}_1 & \hat{S}_1 \\ \hat{S}_1 & -\hat{C}_1 \end{pmatrix}, \quad (79)$$

el gorro sobre las variables se utiliza para enfatizar que se trata de funciones complejas en el caso de cermets. De manera similar se puede mostrar que el siguiente término de la expresión dada en ecuación 75, está dada como

$$Q[UQ(U)] = \begin{pmatrix} \hat{C}_2 & \hat{S}_2 \\ -\hat{S}_2 & \hat{C}_2 \end{pmatrix}, \quad (80)$$

donde

$$\hat{C}_2 = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma_1} r(\beta)r(\beta_1) \cos 2(\beta_1 - \beta) d\beta_1 d\beta, \quad (81)$$

$$\hat{S}_2 = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma_1} r(\beta)r(\beta_1) \text{sen} 2(\beta_1 - \beta) d\beta_1 d\beta. \quad (82)$$

Siguiendo este desarrollo es posible determinar los elementos de la matriz

$$M(\beta) = \begin{pmatrix} 1 + \hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \dots & \hat{S}_1 + \hat{S}_2 + \hat{S}_3 + \dots \\ \hat{S}_1 - \hat{S}_2 + \hat{S}_3 - \dots & 1 - \hat{C}_1 + \hat{C}_2 - \dots \end{pmatrix}. \quad (83)$$

Finalmente al sustituir esta matriz en la ecuación 77 obtenemos las funciones

$$\begin{aligned} f(\beta) &= 1 + \hat{C}_1(\beta) + \hat{C}_2(\beta) + \dots \\ g(\beta) &= \hat{S}_1(\beta) + \hat{S}_2(\beta) + \hat{S}_3(\beta) + \dots \\ l(\beta) &= 1 - \hat{C}_1(\beta) + \hat{C}_2(\beta) - \dots \\ k(\beta) &= \hat{S}_1(\beta) - \hat{S}_2(\beta) - \hat{S}_3(\beta) + \dots, \end{aligned} \quad (84)$$

donde \hat{C}_m y \hat{S}_m representan la familia de integrales de contorno anidadas dadas por:

$$\begin{aligned} \hat{C}_m &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma_1} \dots \int_{\Gamma_{m-1}} r(\beta_1)r(\beta_2) \dots r(\beta_m) \\ &\quad \times \cos 2(\beta_m - \beta_{m-1} + \dots + \dots \beta_1) d\beta_m \dots d\beta_2 d\beta_1 \end{aligned} \quad (85)$$

y

$$\begin{aligned} \hat{S}_m &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma_1} \dots \int_{\Gamma_{m-1}} r(\beta_1)r(\beta_2) \dots r(\beta_m) \\ &\quad \times \sin 2(\beta_m - \beta_{m-1} + \dots + \dots \beta_1) d\beta_m \dots d\beta_2 d\beta_1. \end{aligned} \quad (86)$$

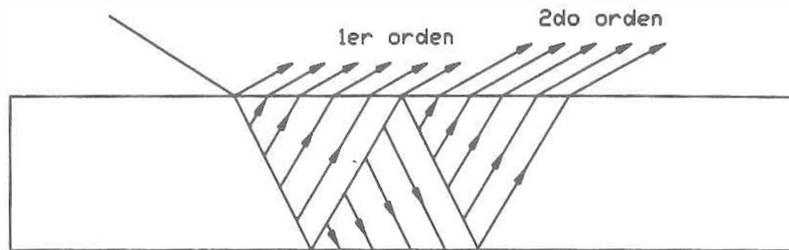


Figura 3: Múltiples órdenes reflejados y transmitidos por la capa inhomogénea

Las funciones están asociadas a los diferentes órdenes reflejados o transmitidos debido a las múltiples reflexiones de la onda que se propaga [figura 3] en el interior de la capa y sus fronteras. Las variables $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{m-1}$ representan los caminos de integración dados por la integral de fase [ecuación 33].

Se puede comprobar que, si despreciamos términos de orden superior o igual a uno, la matriz inhomogénea se reduce a la matriz característica homogénea. Igualmente, si despreciamos términos superiores al orden uno, esta aproximación es equivalente a considerar el efecto de la inhomogeneidad en la fase de la onda tomando sólo en cuenta el proceso de interferencia de las fronteras de la capa.

II. 4 Reflectancia, transmitancia y absorción

Conocida la matriz característica de la película, el siguiente paso consiste en determinar la reflectancia, transmitancia y absorción de nuestro sistema mediante las relaciones [Macleod, 1988]

$$R = \left| \frac{\eta_0 B - C}{\eta_0 B + C} \right|^2, \quad (87)$$

$$T = \frac{4\eta_0 \operatorname{Re}(\eta_s)}{|\eta_0 B + C|^2}, \quad (88)$$

y

$$A = \frac{4\eta_0 \operatorname{Re}(BC^* - \eta_s)}{|\eta_0 B + C|^2}, \quad (89)$$

donde B y C están dados en la ecuación 56. En estas ecuaciones se debe satisfacer la restricción de que el medio de incidencia sea libre de absorción cuando la absorción está presente en la película.

Las expresiones para (R, T, A) se pueden simplificar considerablemente si extendemos teóricamente las fronteras de la capa más allá de sus límites reales dentro de los medios en que se encuentra inmersa [figura 4]. Esto no cambia la función del índice $r(\beta)$ de la ecuación 38 debido a que la derivada del índice de las rebanadas de los medios de incidencia y transmisión es cero.

Realizando la sustitución de las funciones $f(\beta), g(\beta), k(\beta)$ y $l(\beta)$ en las ecuaciones 87-89, y después de desarrollar el álgebra compleja, es posible obtener una forma alternativa para $R, T,$ y A :

$$R = \left| \frac{B_1 + B_3 + B_5 + \dots}{B_0 + B_2 + B_4 + \dots} \right|^2, \quad (90)$$

$$T = \frac{\operatorname{Re} \eta_s \exp i(\beta^* - \beta)}{|\eta_s| |B_0 + B_2 + B_4 + \dots|^2}, \quad (91)$$

$$A = 1 - R - T, \quad (92)$$

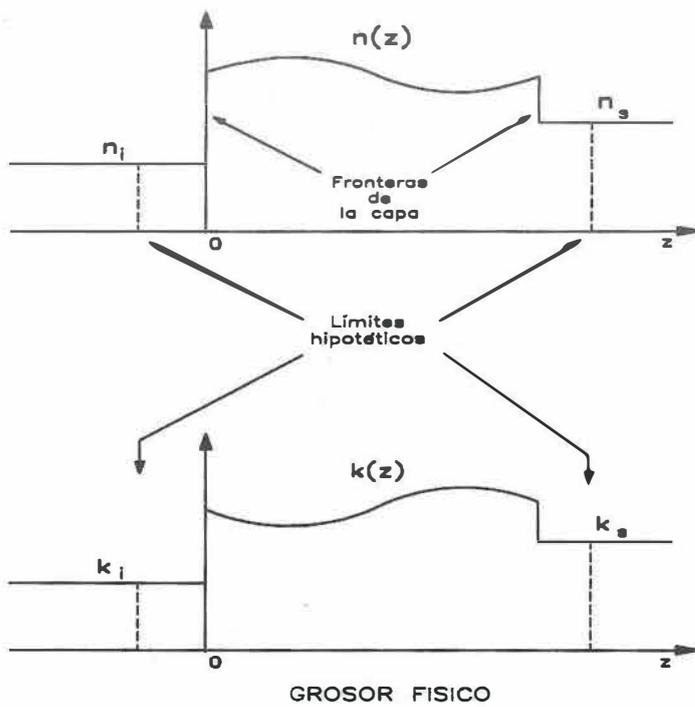


Figura 4: Si las fronteras de la capa se extienden más allá de sus límites físicos reales, la función del perfil $r(\beta)$ no se modifica ya que es cero fuera de tales límites.

donde

$$B_j = \begin{cases} \hat{C}_j(\beta) - i\hat{S}_j(\beta) & j = 1, 3, 5, \dots \\ \hat{C}_j(\beta) + i\hat{S}_j(\beta) & j = 0, 2, 4, \dots \end{cases} \quad (93)$$

El primer término es, por definición, $\hat{B}_0 = 1$. El argumento de la función exponencial de la ecuación 91 bajo incidencia normal,

$$\beta^* - \beta = -\frac{2\pi}{\lambda} \int_0^z k(z) dz, \quad (94)$$

es la parte imaginaria de la integral de fase dada en la ecuación 33 y está relacionada con la absorción que ocurre conforme la onda viaja a través del cermet. En materiales con absorción, la amplitud de los campos electromagnéticos va decayendo conforme la onda viaja a través del material. Por medio de esta integral también se puede calcular el grosor de la piel del material; más allá de este grosor la energía transmitida es despreciable ($1/e$) y cualquier variación en el índice de refracción no tiene efecto apreciable sobre el campo.

II. 5 Ejemplos de aplicación

En la figura 5 se muestran los índices de refracción y absorción para un divisor de haz, y en la figura 6 su desempeño espectral para los órdenes uno, dos y once comparadas con los resultados de la matriz homogénea, los cuales prácticamente coinciden para el caso en que se toma en cuenta hasta el onceavo orden. En este caso la aproximación de primer orden difiere sólo en 1% aproximadamente del caso más preciso (orden 11, ya que de este término en adelante no existe contribución). En general, en películas dieléctricas inhomogéneas, los altos órdenes dan una fuerte contribución debido a las múltiples re-

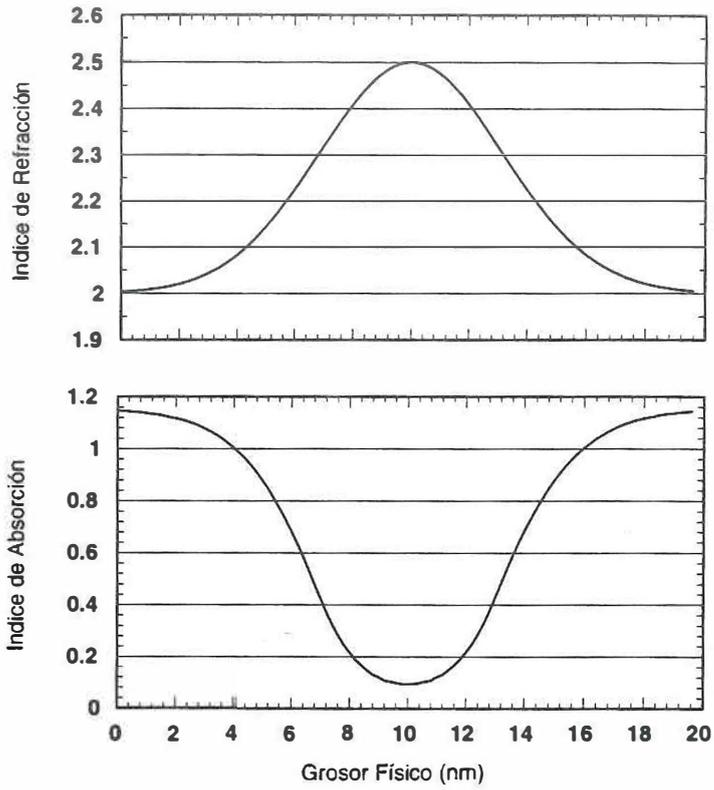


Figura 5: Índices de refracción $n(z)$ y absorción $k(z)$ para un divisor de haz.

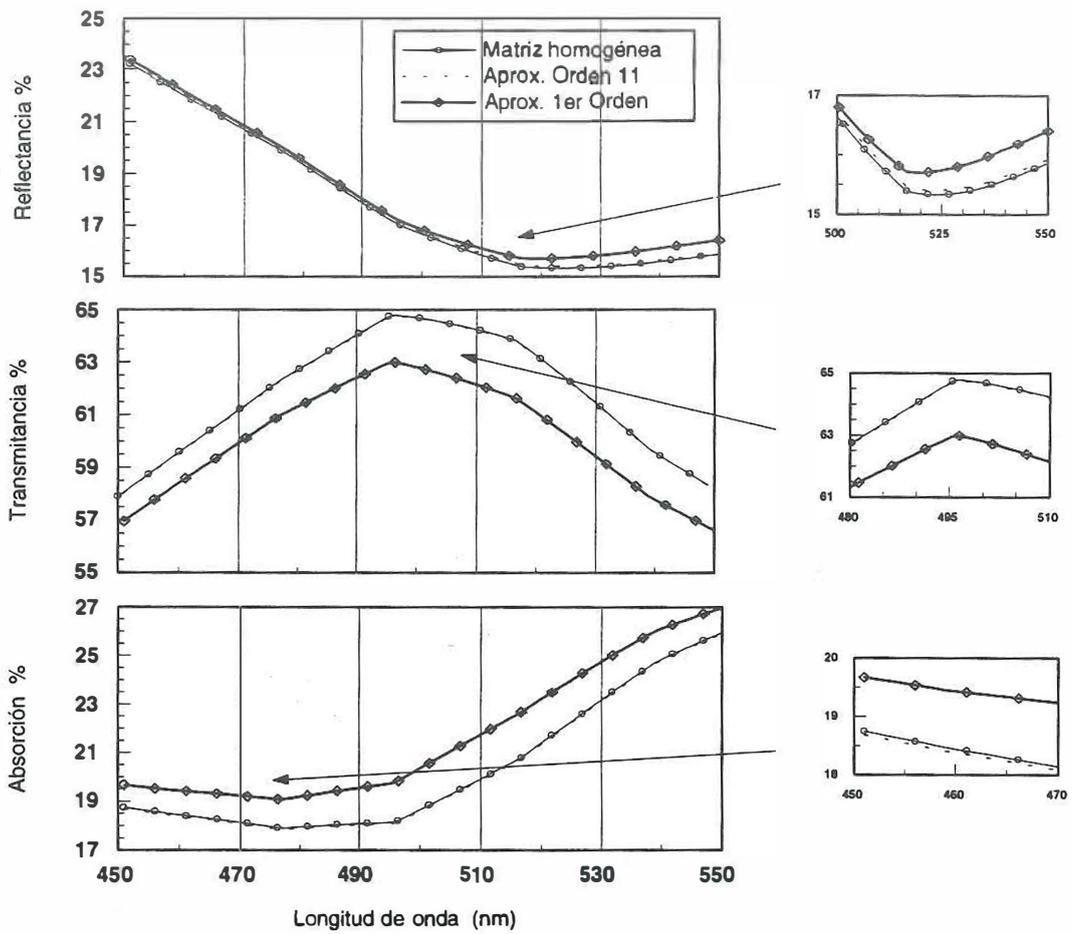


Figura 6: Desempeño espectral del divisor de haz.

flexiones. Sin embargo en películas con gran absorción, el efecto de interferencia se ve afectado fuertemente llegando a ser despreciable.

Un ejemplo especial, es el característico filtro llamado zona de rechazo [figuras 7 y 8]. En este caso, aún la aproximación de segundo orden está lejos de representar el comportamiento del filtro en la zona de alta reflectancia, ésto ocurre de manera más notable en el caso dieléctrico [Bovard, 1988]. Un diseño con una zona de alta reflectancia en una banda espectral es muy difícil de lograr cuando la absorción está presente, debido a que el amortiguamiento del campo a través de la capa influye en el efecto de interferencia que produce la zona de rechazo.

Es muy importante mencionar aquí que los índices de refracción y absorción, no pueden ser definidos arbitrariamente, ya que ambos están ligados por la relaciones de causalidad de Kramers-Kronig [Wooten, 1972]. De manera que uno determina el otro, dependiendo de la mezcla de materiales utilizada. Para obtener los sistemas dados en las figuras 5 y 7 nosotros definimos el índice de refracción en la longitud de onda de 500nm y utilizando el modelo de Bruggeman para el medio efectivo determinamos el índice de absorción para una mezcla de plata y dióxido de titanio. El índice de refracción de estos materiales para la región espectral considerada, se tomó del libro de Palik [1985] sobre constantes ópticas de materiales.

Es importante también notar que la separación entre las gráficas correspondientes a diferentes órdenes es casi despreciable en algunas longitudes de onda, ya que esta incertidumbre cae dentro del intervalo que se tiene experimentalmente en la obtención de estos filtros. Esto nos permite hacer aproximaciones despreciando cierto número de términos para ver si es posible invertir las ecuaciones y realizar procesos de síntesis como veremos en el siguiente capítulo.

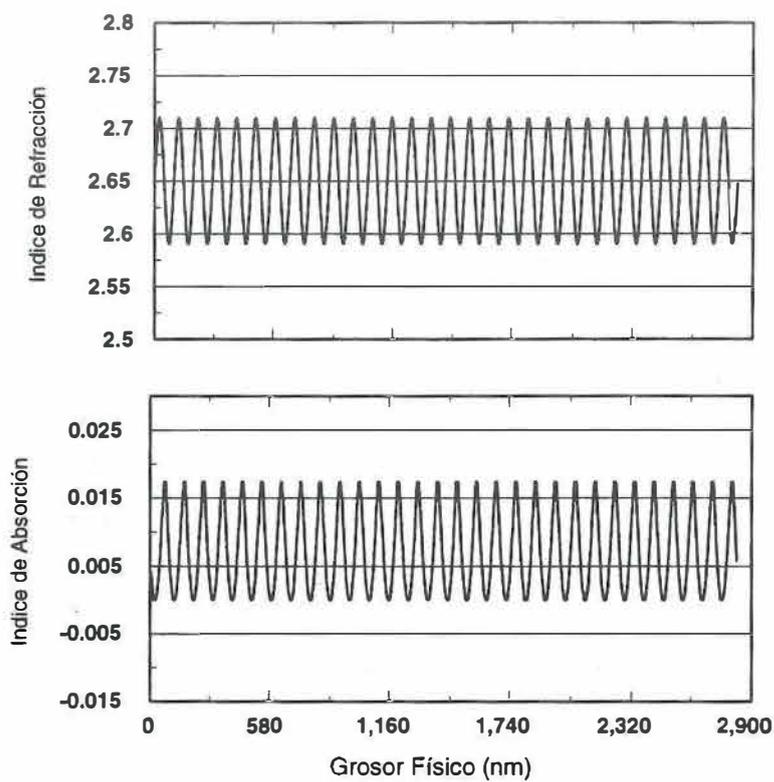


Figura 7: Índices de refracción y absorción para una zona de rechazo típica. Los materiales utilizados para este diseño fueron plata y dióxido de titanio en la longitud de onda $\lambda = 500nm$.

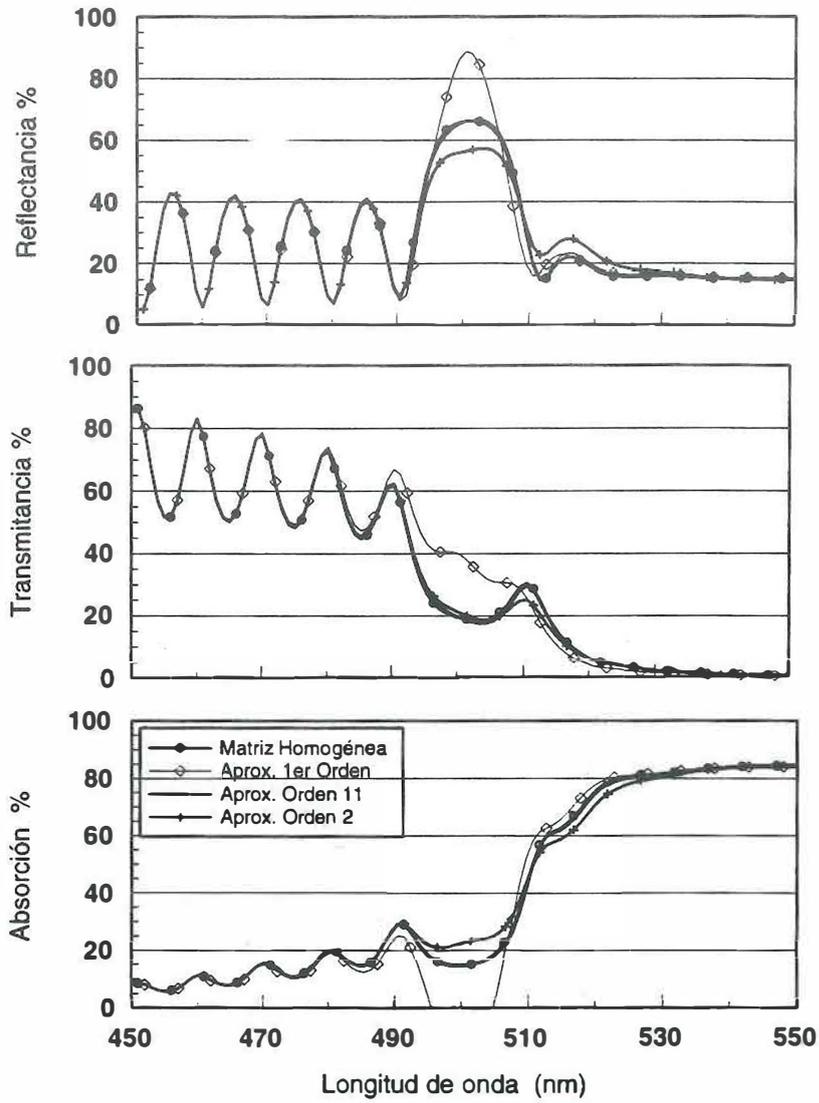


Figura 8: Desempeño espectral de la zona de rechazo. Se ha incluido el efecto de dispersión $n(\lambda)$.

III. SINTESIS POR TRANSFORMADA DE FOURIER

En este capítulo se hace una breve revisión del método de transformada de Fourier para la síntesis de sistemas inhomogéneos completamente dieléctricos y se dan las propiedades más importantes de la ecuación de síntesis.

Este método representa una herramienta muy poderosa para obtener filtros espectrales con características muy complejas, sin la necesidad de partir de algún diseño inicial o utilizar métodos numéricos muy elaborados.

Veremos también como se puede aplicar la misma técnica para obtener sistemas de incidencia oblicua. Al respecto Bovard [1993] ha mencionado que es posible obtener toda clase de filtros análogos para cualquiera de las dos polarizaciones. Nosotros resolveremos las ecuaciones explícitamente para determinar el perfil de índice como función del ángulo de incidencia y el desempeño espectral requerido para cualquiera de las polarizaciones.

III. 1 Análisis y síntesis

Si consideramos sistemas sin absorción, las ecuaciones reflectométricas [ecuaciones 87-91] se reducen a:

$$R = \left| \frac{B_1 + B_3 + B_5 + \dots}{B_0 + B_2 + B_4 + \dots} \right|^2, \quad (95)$$

$$T = \frac{1}{|B_0 + B_2 + B_4 + \dots|^2}, \quad (96)$$

donde $B_j(\sigma) = C_j(\sigma) - iS_j(\sigma)$ y las funciones $C_j(\sigma)$ y $S_j(\sigma)$ son reales. Podemos llamar a estas ecuaciones de análisis ya que, dado un sistema inhomogéneo, con ellas es posible determinar su comportamiento espectral [figura 9].

El problema inverso (de síntesis) es también de especial interés. Generalmente en la práctica se tiene como punto de partida el comportamiento espectral requerido y se busca determinar la función de índice de un sistema que satisfaga tan cercanamente como sea posible las condiciones de tolerancia dadas. Desafortunadamente, las ecuaciones de análisis sólo se pueden invertir analíticamente para unos cuantos casos particulares de capas homogéneas, como capas antirreflectoras y espejos multicapas, los cuales son ciertamente muy importantes [Macleod, 1989].

Dado que en general la inversión analítica no es posible, hasta ahora se han desarrollado muchos métodos numéricos, de carácter un tanto particular [Pegis, 1961; Bloom, 1981; Dobrowolski y Piotrowski, 1982; Dobrowolski, 1986] debido a que con ellos es posible resolver sólo cierta clase de problemas. El método que analizaremos ahora [Delano, 1967; Sossi, 1974], aunque aproximado, es uno de los más versátiles y eficientes debido a que no requiere partir de un diseño inicial para la obtención de una solución, y la implementación para el cálculo resulta sencilla de realizar.

III. 2 Aproximación de segundo orden

Dado que la respuesta de las capas delgadas, está dada por términos separados correspondientes a cada reflexión interna [Delano, 1957], la idea principal detrás de las a-

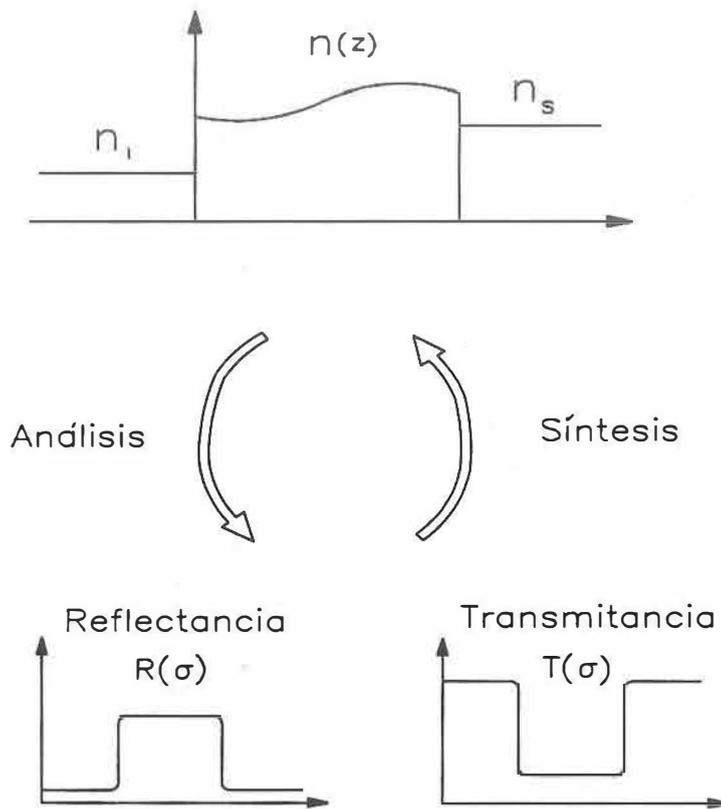


Figura 9: Proceso de análisis y síntesis en películas delgadas.

proximaciones que veremos a continuación, consiste en despreciar términos de alto orden. Esto es posible, por que la magnitud de las funciones B_1, B_2 , etcétera, tiende rápidamente a cero conforme aumenta el orden (excepto en zonas de alta reflectancia [Bovard, 1988]).

Si dividimos la ecuación 95 entre ecuación 96 tenemos,

$$\frac{R}{T} = |B_1 + B_3 + B_5 + \dots|^2, \quad (97)$$

si además suponemos que $|B_3| = |B_5| = \dots = 0$, entonces

$$|B_1| \approx \sqrt{\frac{R}{T}}. \quad (98)$$

Ahora, B_1 es en general una cantidad compleja que representaremos como

$$B_1(\sigma) = Q(\sigma) \exp[i\Phi(\sigma)], \quad (99)$$

de manera que

$$Q(\sigma) = \sqrt{\frac{R}{T}}. \quad (100)$$

Esta es la función definida por Delano [1967] quien propuso por primera vez este método. Podemos considerar esta aproximación como de segundo orden, dado que toma en cuenta hasta el orden dos en las series de múltiples reflexiones.

III. 3 Aproximación de tercer orden

La aproximación de segundo orden, no es la única que podemos definir. De hecho Sossi [1974] de manera independiente demostró que existen una infinidad de aproxima-

ciones diferentes. Sin embargo, no es posible definir una función general con la cual se resuelvan todos los problemas de diseño. Sossi propuso una función que constituye una de las mejores aproximaciones que toma en cuenta hasta el orden tres, bajo las restricciones que veremos a continuación.

Consideremos la ecuación de la transmitancia

$$T = \frac{1}{(B_0 + B_2 + B_4 + \dots)(B_0 + B_2 + B_4 + \dots)^*}, \quad (101)$$

si llamamos,

$$\tau = \frac{1}{(B_0 + B_2 + B_4 + \dots)}, \quad (102)$$

y despreciamos la contribución de los términos de orden cuatro en adelante, $|B_4| = |B_6| = \dots = 0$, tenemos

$$\tau \approx \frac{1}{1 + B_2}. \quad (103)$$

Si además suponemos que $|B_2| < 1$ y expandemos a τ en serie de Taylor alrededor del origen del plano complejo, podemos encontrar que

$$\frac{1}{T} - T \approx 2(B_2 + B_2^*). \quad (104)$$

Finalmente, si se establece la condición adicional de que $r(x)$ [ecuación 38], sea par o impar, y si se coloca simétricamente nuestro sistema coordenado respecto al centro del grosor óptico de la película, entonces

$$|B_1|^2 = B_2 + B_2^*. \quad (105)$$

Consecuentemente de las Ecs. (99), (104), y (105) tenemos

$$Q(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{T} - T \right)}. \quad (106)$$

Esta es la aproximación de Sossi, la cual se puede considerar como una aproximación de tercer orden con restricciones, dado que requiere de las condiciones dadas para su validez.

De manera muy similar, Bovard [1993] ha propuesto una función $Q(\sigma)$, que presenta un grado de precisión mayor, aunque con las mismas restricciones que la aproximación de Sossi, la cual está dada por:

$$Q(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{T}} - \sqrt{T}}. \quad (107)$$

III. 4 Síntesis por transformada de Fourier

Es importante mencionar que la función $Q(\sigma)$ tiene la desventaja de que, cuando la transmitancia se anula ($T \rightarrow 0$), la función ($|B_1| \rightarrow \infty$) se hace infinita para las aproximaciones dadas, por lo cual bajo tales condiciones deja de ser aceptable.

El término de orden uno, involucrado en las aproximaciones de segundo y tercer orden es de particular interés, debido a que implica una relación de transformación de Fourier, como veremos a continuación. La función integral, correspondiente al orden uno, está dada como

$$B_1 = \int_0^\beta r(\beta) \exp(-2i\beta) d\beta, \quad (108)$$

donde

$$\beta(z) = \pi\sigma u, \quad (109)$$

y

$$u = 2 \int_0^z n(z) dz, \quad (110)$$

siendo $\sigma = 1/\lambda$ el número de onda. Si se desplaza el sistema coordenado hacia el centro de la capa en el eje u , suponiendo que la capa tiene un grosor óptico $u_0/2$, realizando el cambio de variable,

$$x = u - \frac{u_0}{2}, \quad (111)$$

la ecuación 108 se puede expresar como

$$B_1(\sigma) = \int_{-\frac{x_0}{2}}^{\frac{x_0}{2}} r(x) \exp(-2i\pi\sigma x) dx, \quad (112)$$

donde $x_0 = u_0$. Si ahora extendemos los límites hacia infinito, teniendo presente que

$$r(x) = \begin{cases} \frac{n'(x)}{2n(x)} & -\frac{x_0}{2} \leq x \leq \frac{x_0}{2} \\ 0 & x > \frac{x_0}{2}, x < -\frac{x_0}{2} \end{cases} \quad (113)$$

tenemos

$$B_1(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} r(x) \exp(-2i\pi\sigma x) dx, \quad (114)$$

la cual es la transformada de Fourier de la función del perfil $r(x)$. De Ecs. (99) y (114), podemos expresar la relación general de síntesis como

$$Q(\sigma) \exp[i\Phi(\sigma)] = \int_{-\infty}^{\infty} r(x) \exp(-2i\pi\sigma x) dx. \quad (115)$$

Esta última ecuación, establece una relación de transformación de Fourier con el par $\sigma \longleftrightarrow x$, que al invertirse nos da

$$r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\sigma) \exp i [\Phi(\sigma) + 2\pi\sigma x] d\sigma. \quad (116)$$

La expresión anterior constituye nuestra ecuación básica de síntesis, debido a que la función $r(x)$ depende solamente del perfil de índice de refracción, siendo

$$r(x) = \frac{1}{2} \ln' n(x). \quad (117)$$

Sustituyendo la ecuación 117 en ecuación 116, tenemos

$$\ln' n(x) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} Q(\sigma) \exp i [\Phi(\sigma) + 2\pi\sigma x] d\sigma. \quad (118)$$

Ya que la función del lado izquierdo de esta ecuación es real, las funciones $Q(\sigma)$ y $\Phi(\sigma)$, deben satisfacer ciertas condiciones de paridad,

$$Q(\sigma) = Q(-\sigma), \quad (119)$$

$$\Phi(\sigma) = -\Phi(-\sigma). \quad (120)$$

Esto nos lleva a una simplificación adicional para expresar explícitamente la función índice

$$n(x) = n_0 \exp \left[4 \int_0^x \int_0^\infty Q(\sigma) \cos [\Phi(\sigma) + 2\pi\sigma x] d\sigma dx \right]. \quad (121)$$

La constante n_0 representa el índice en la frontera de la capa y es un parámetro que se puede elegir de acuerdo a los materiales disponibles para la obtención del filtro.

El factor de fase $\Phi(\sigma)$ es una función arbitraria, que por simplicidad se puede elegir como cero. Dobrowolski y Lowe [1978] estudiaron con detalle la influencia que tiene tal función en el perfil de índice, y han encontrado que se puede utilizar para obtener diferentes soluciones al mismo problema.

El doble grosor óptico, x , también es una variable que generalmente se elige con una magnitud tal que más allá de este grosor, las fluctuaciones en la función de índice, son despreciables.

En las Figuras (10)-(15) se muestran tres diseños con diferente grado de complejidad, que se obtuvieron por transformada de Fourier, utilizando la aproximación de Sossi, con $\phi(\sigma) = 0$. El diseño dado en la figura 10 constituye una zona de rechazo simple. La línea delgada representa el desempeño espectral requerido y la línea gruesa el comportamiento del filtro. El perfil de índice obtenido se muestra en la figura 11. En la figura 12 se muestra un doble espejo con bandas de ancho distinto. Nótese que ahora la función de índice es la combinación de dos funciones armónicas [figura 13], una correspondiente a cada espejo. En la figura 14, se tiene un sistema con características más especiales. Aquí es posible apreciar que donde existen picos muy agudos en la curva espectral requerida, el diseño se desvía más notablemente por lo cual suponemos que sería necesario incluir un mayor número de términos en la aproximación. La función de índice correspondiente se muestra en la figura 15.

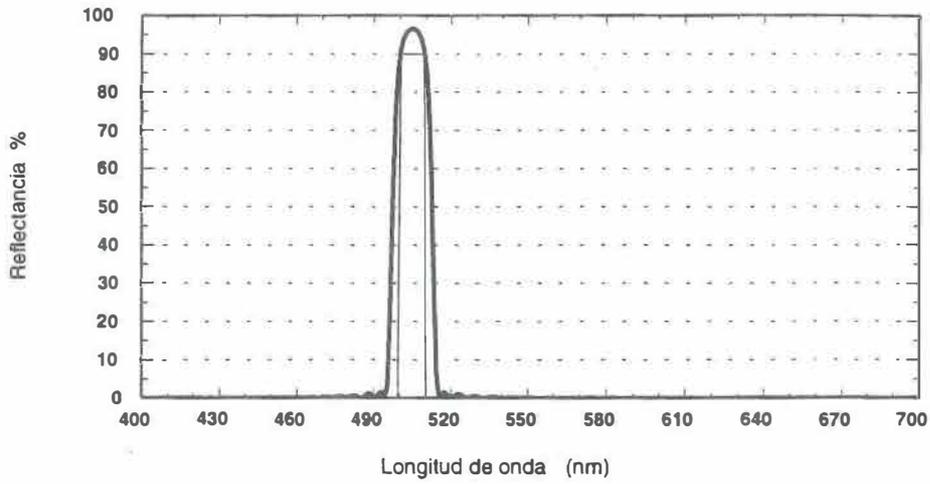


Figura 10: Desempeño espectral propuesto, en línea delgada. La línea gruesa es la respuesta generada con el perfil de índice obtenido utilizando la aproximación de Sossi.

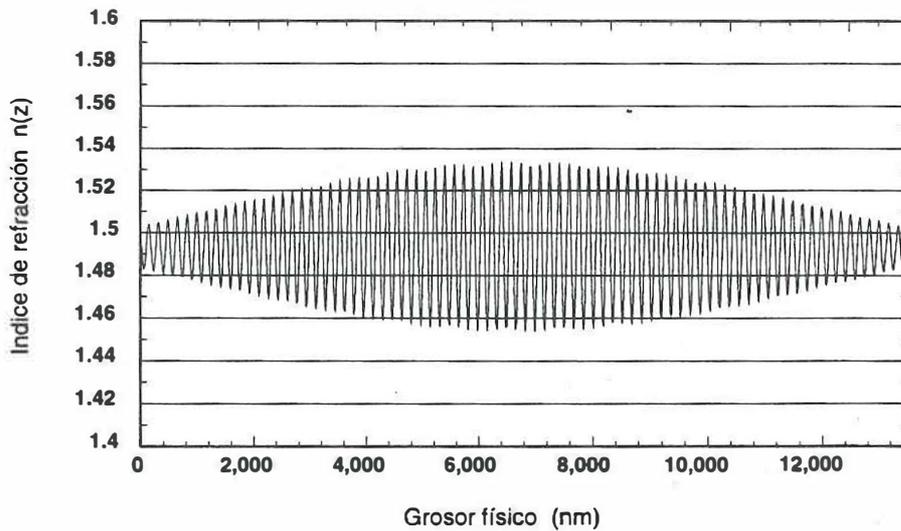


Figura 11: Índice de refracción obtenido.

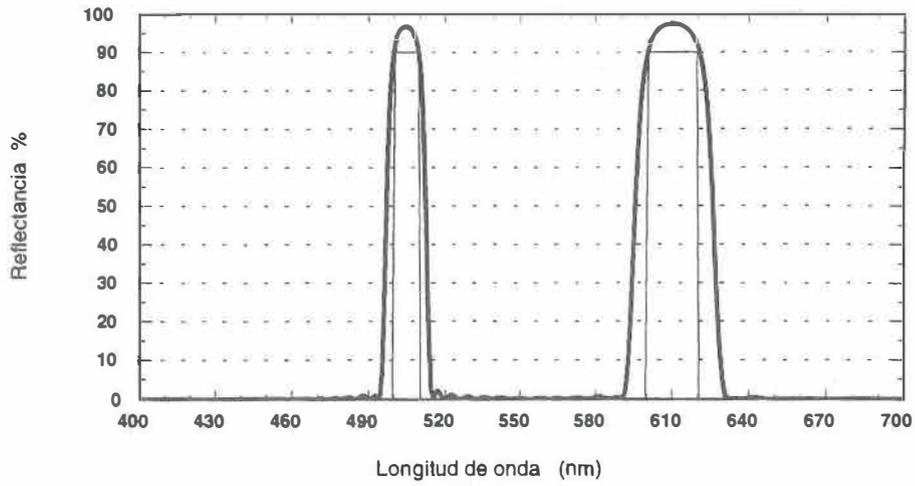


Figura 12: Desempeño espectral.

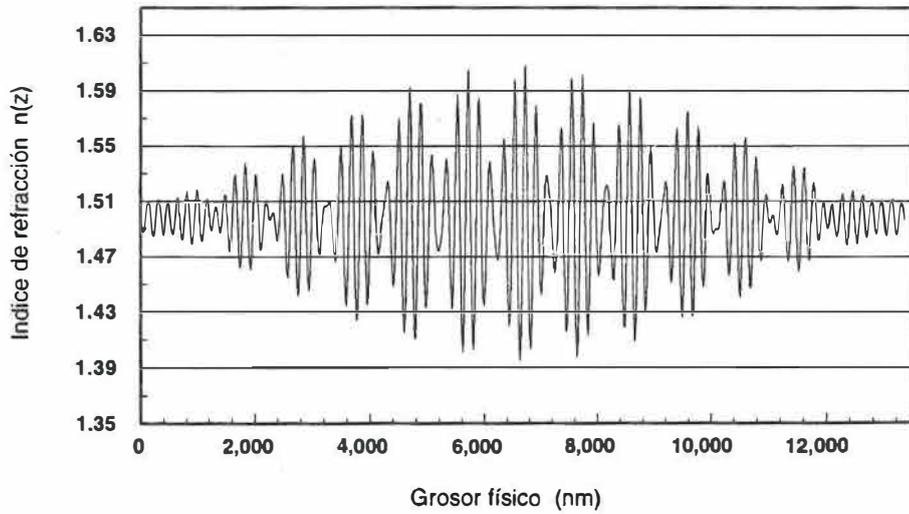


Figura 13: Índice de refracción obtenido.

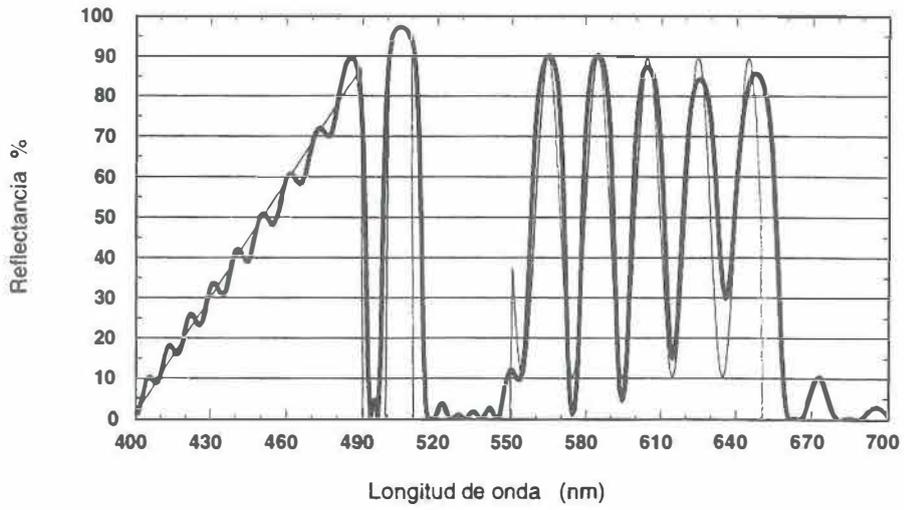


Figura 14: Desempeño espectral.

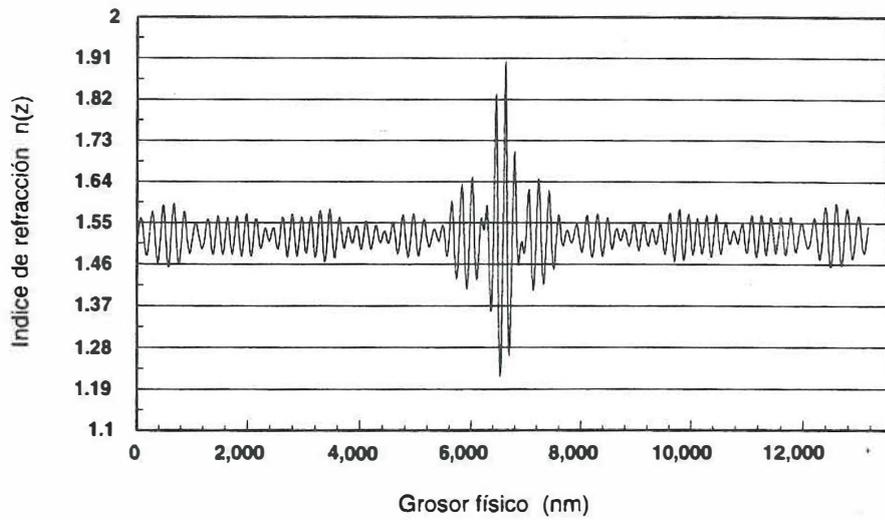


Figura 15: Índice de refracción obtenido.

Es importante enfatizar aquí, que conforme la reflectancia requerida se aproxima a 100% también se tiene pérdida de precisión en el comportamiento del diseño obtenido.

III. 5 Propiedades de la ecuación de síntesis

Una vez establecida nuestra ecuación de síntesis, podemos derivar algunas de sus propiedades [Dobrowolski y Lowe, 1978; Bovard, 1993] que son debidas principalmente a la presencia de la transformada de Fourier, y las cuales se pueden utilizar como técnicas generales de diseño. Una de las propiedades más importantes es la linealidad con respecto a la suma. Si consideramos la suma de dos funciones $r_A(x - h_A)$ y $r_B(x - h_B)$ cuyos perfiles de índice se encuentran desplazados entre sí,

$$r(x) = r_A(x - h_A) + r_B(x - h_B) \quad (122)$$

y donde h_A , h_B definen los centros respectivos de las estructuras A y B, entonces, la correspondiente función transformada será,

$$Q(\sigma) \exp [i\Phi(\sigma)] = Q_A(\sigma) \exp i [\Phi_A(\sigma) - 2\pi\sigma h_A] + Q_B(\sigma) \exp i [\Phi_B(\sigma) - 2\pi\sigma h_B], \quad (123)$$

cuyo módulo está dado como

$$Q^2(\sigma) = Q_A^2(\sigma) + 2Q_A(\sigma)Q_B(\sigma) \times \cos [(\Phi_A(\sigma) - 2\pi\sigma h_A) - (\Phi_B(\sigma) - 2\pi\sigma h_B)] + Q_B^2(\sigma). \quad (124)$$

Este módulo determina la reflectancia del sistema compuesto y la diferencia de fases $\Phi_A(\sigma) - \Phi_B(\sigma) - 2\pi\sigma(h_A - h_B)$ está relacionada con un desplazamiento (en fase) relativo entre las curvas de reflectancia de cada sistema.

El perfil de índice correspondiente será

$$r(x) = \frac{1}{2} \frac{[n_A(x - h_A)n_B(x - h_B)]'}{n_A(x - h_A)n_B(x - h_B)}. \quad (125)$$

De manera que si llamamos

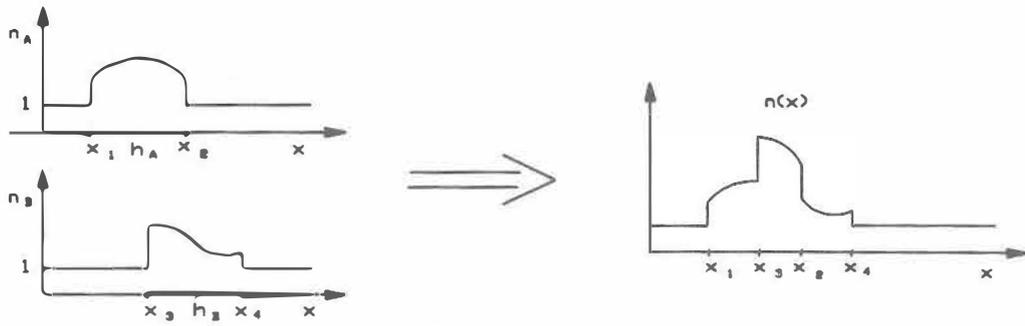
$$n(x) = n_A(x - h_A)n_B(x - h_B), \quad (126)$$

es posible verificar que la relación para $r(x)$ se sigue cumpliendo, ya que

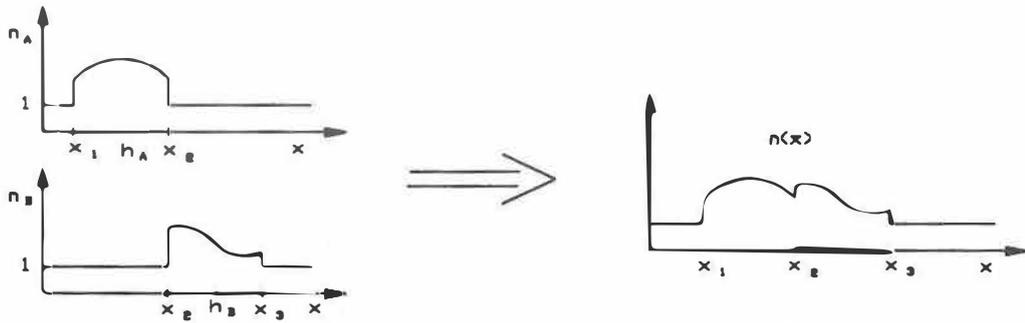
$$r(x) = \frac{n'(x)}{2n(x)}. \quad (127)$$

De este modo, podemos utilizar la linealidad para superponer en serie, en paralelo o desplazados dos o más diseños con la finalidad de obtener uno nuevo con características compuestas [figura 16]. Es importante mencionar que en el caso de estructuras en serie debe haber un acoplamiento entre las estructuras para evitar oscilaciones secundarias en la curva espectral, debidas a interferencia entre ellas.

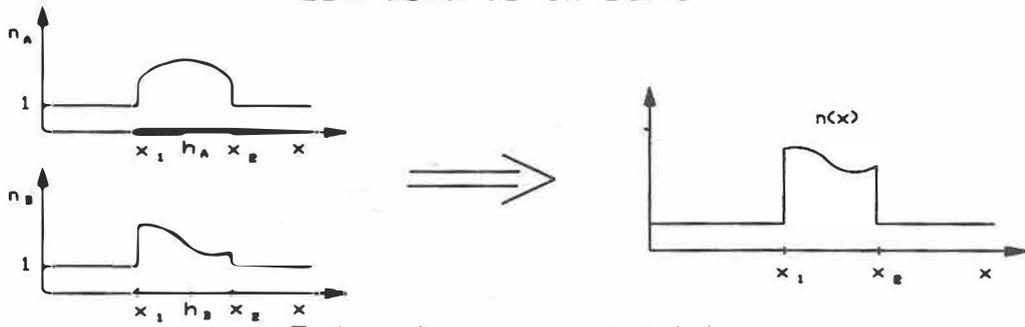
Bovard [1993] ha publicado un trabajo muy extenso en la aplicación de estructuras desplazadas obteniendo de manera analítica prácticamente cualquier tipo de diseño conocido; como por ejemplo capas antirreflectoras, múltiples zonas de rechazo, zonas de rechazo con armónicos ausentes, etcétera.



Estructuras desplazadas



Estructuras en serie



Estructuras en paralelo

Figura 16: Superposición de dos estructuras A y B.

III. 6 Síntesis bajo incidencia oblicua

Ahora veremos como es posible derivar relaciones de síntesis para obtener filtros de incidencia oblicua. Los sistemas inhomogéneos se comportan de una manera muy similar a los homogéneos bajo incidencia oblicua. Debido al decremento que sufre el grosor en fase conforme aumenta el ángulo de incidencia, se produce un desplazamiento del diseño hacia longitudes de onda cortas. Adicionalmente, la inclinación también produce un cambio en el índice de refracción, el cual se debe expresar como admitancia óptica. Esto provoca una distorsión en la curva espectral, la cual es distinta para cada polarización y afecta drásticamente el desempeño espectral en polarización p , de tal manera que el efecto del filtro puede llegar a desaparecer casi completamente más allá de cierto ángulo. En las figuras 17 y 18 se muestran los mismos filtros obtenidos para incidencia normal [figuras 12 y 14] pero ahora bajo incidencia oblicua.

Ya que la respuesta espectral del filtro es distinta en cada polarización, tendremos una relación de síntesis para cada caso,

$$\eta_s(x) = \eta_{s0} \exp \left\{ 2 \int_0^x \int_{-\infty}^{\infty} Q_s(\sigma) \exp i [\Phi_s(\sigma) + 2\pi\sigma x] d\sigma dx \right\}, \quad (128)$$

$$\eta_p(x) = \eta_{p0} \exp \left\{ 2 \int_0^x \int_{-\infty}^{\infty} Q_p(\sigma) \exp i [\Phi_p(\sigma) + 2\pi\sigma x] d\sigma dx \right\}, \quad (129)$$

donde, la admitancias están dadas como

$$\eta_s(x) = n(x) \cos \theta(x), \quad (130)$$

$$\eta_p(x) = \frac{n(x)}{\cos \theta(x)}, \quad (131)$$

siendo $\theta(x)$ el ángulo de propagación en el interior de la película. Además $\eta_{s0} = n_0 \cos \theta_0$

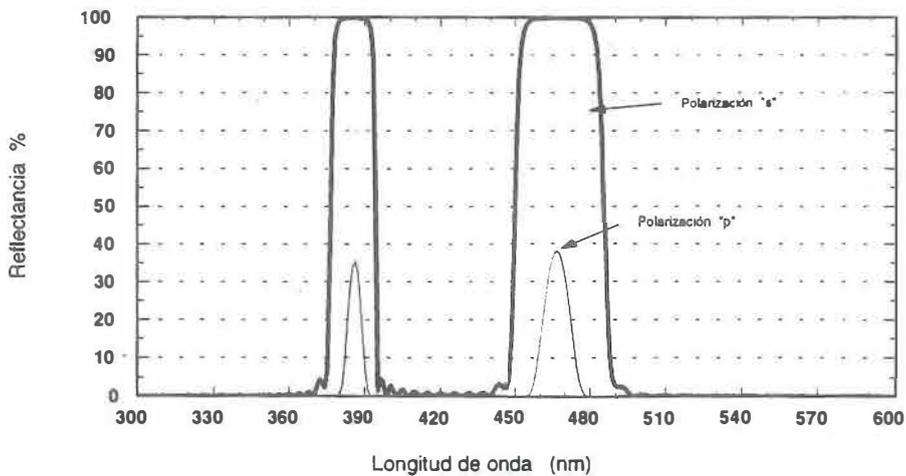


Figura 17: Desempeño espectral de la doble zona de rechazo bajo ángulo de incidencia de 40° .

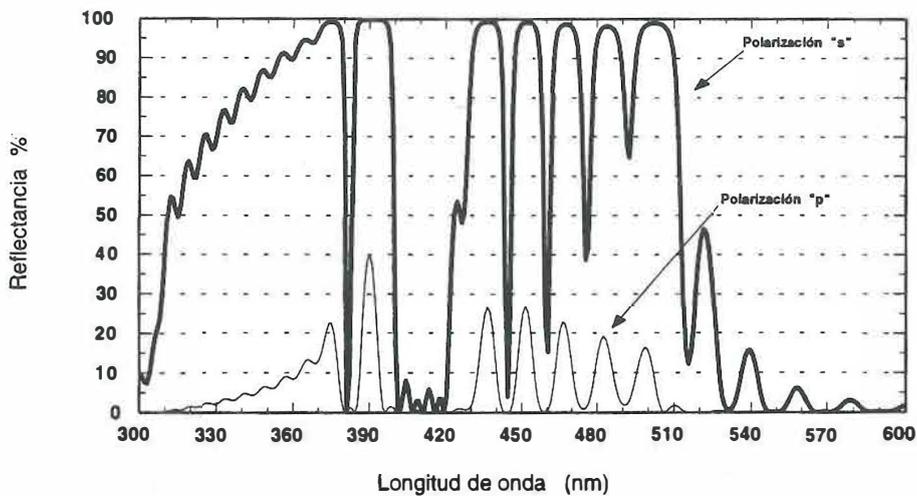


Figura 18: Desempeño espectral bajo ángulo de incidencia de 40° .

y $\eta_{p0} = n_0 / \cos \theta_0$ representan la admitancia del medio incidente con índice de refracción n_0 y ángulo de incidencia θ_0 .

Las funciones $Q_s(\sigma)$, $Q_p(\sigma)$, $\Phi_s(\sigma)$, y $\Phi_p(\sigma)$ satisfacen las mismas condiciones de paridad dadas anteriormente. El doble grosor óptico, se expresa como

$$x = 2 \int_0^z n(z) \cos \theta(z) dz - \int_0^{z_0} n(z) \cos \theta(z) dz. \quad (132)$$

Con las Ecs. (128)-(130), y utilizando la ley de Snell, podemos encontrar relaciones explícitas para la síntesis en una de las dos polarizaciones.

$$n(x) = \sqrt{\eta_s^2(x) + n_0^2 \text{sen}^2 \theta_0} \quad (133)$$

para polarización s , y

$$n(x) = \sqrt{\frac{\eta_p(x)}{2} \sqrt{\eta_p(x) + \sqrt{\eta_p^2(x) - 4n_0^2 \text{sen}^2 \theta_0}}} \quad (134)$$

para polarización p .

Finalmente, si sustituimos las correspondientes admitancias en las Ecs. (133) y (134) tenemos

$$n(x) = n_0 \sqrt{\cos^2 \theta_i \exp \left[4 \int_0^x s(x) dx \right] + \text{sen}^2 \theta_i} \quad (135)$$

para polarización s , y

$$n(x) = \frac{n_0}{\sqrt{2} \cos \theta_i} \exp \left[\int_0^x p(x) dx \right] \\ \times \sqrt{\exp \left[2 \int_0^x p(x) dx \right] + \sqrt{\exp \left[4 \int_0^x p(x) dx \right] - 4 \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i}}, \quad (136)$$

para polarización p . En estas ecuaciones, hemos llamado

$$s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Q_s(\sigma) \exp i [\Phi_s(\sigma) + 2\pi\sigma x] d\sigma, \quad (137)$$

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Q_p(\sigma) \exp i [\Phi_p(\sigma) + 2\pi\sigma x] d\sigma. \quad (138)$$

Supongamos que se desea obtener un filtro como aquel dado en la figura 14 pero para polarización s a un ángulo de incidencia $\theta_0 = 35^\circ$. Utilizando la ecuación 133 obtenemos el diseño mostrado en la figura 19.

En el caso de polarización p existe un límite superior para el ángulo de incidencia al cual es posible obtener un resultado aceptable en el diseño. La razón de tal limitante está en que debe cumplirse la condición $\eta_p(x) > 2n_0 \sin \theta_0$, en la ecuación [134], en caso contrario el radical se vuelve complejo, lo cual no es físicamente permitido. En la figura 20 se muestra el mismo diseño del ejemplo anterior ahora para polarización p . En este caso no es posible obtener una solución a un ángulo mayor de 25° por la limitante mencionada anteriormente.

En conclusión, hemos derivado las ecuaciones explícitas para determinar el perfil de índice en cada una de las dos polarizaciones dado el desempeño espectral requerido para filtros de incidencia oblicua. El problema de síntesis para polarización s es similar al caso de incidencia normal, en cambio para polarización p se debe satisfacer una condición limitante que depende de las características de los parámetros involucrados en el diseño.

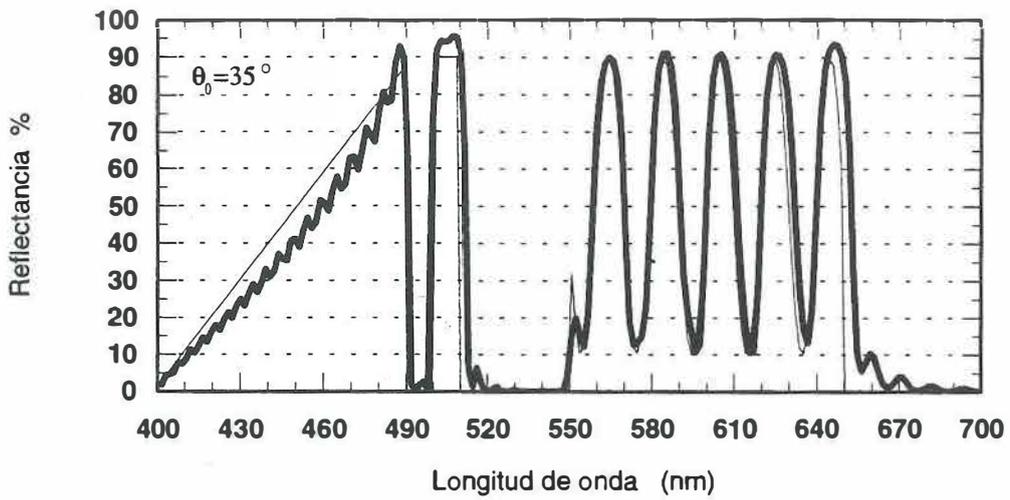
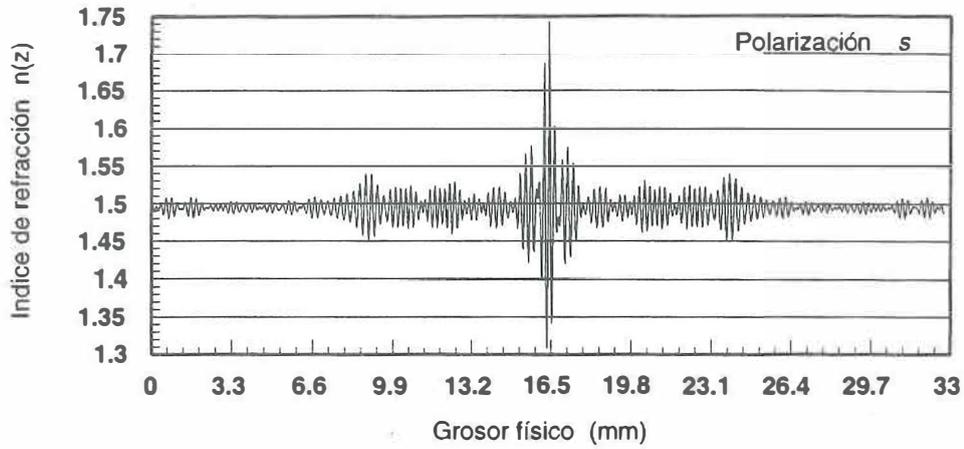


Figura 19: Diseño en polarización s bajo ángulo de incidencia de 35° e índice promedio $n_0 = 1.5$.

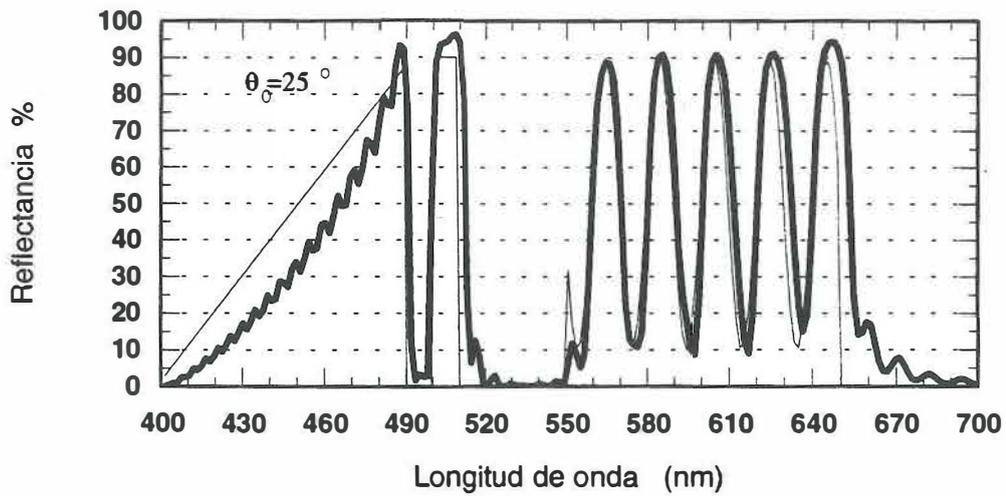
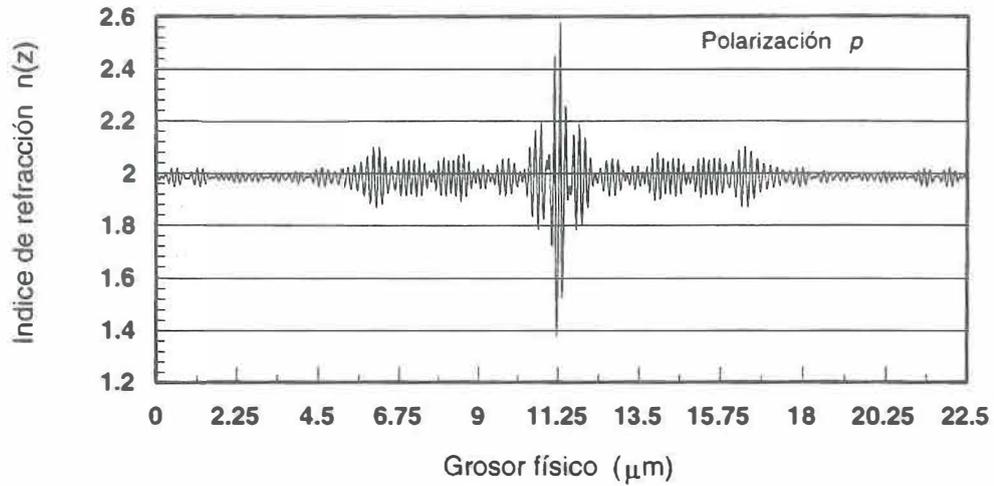


Figura 20: Mismo diseño en polarización p con 25° y $n_0 = 2$.

IV. ADMITANCIA DE PELICULAS INHOMOGENEAS

En este capítulo se analiza la evolución de la admitancia como función del grosor, derivando algunas propiedades generales de las capas inhomogéneas libres de absorción. Estas propiedades se utilizan para determinar los parámetros más importantes en sistemas con función de índice periódica los cuales dan lugar a filtros del tipo zona de rechazo. También se demuestra que es posible asociar un índice efectivo a una fracción de capa inhomogénea que se encuentra definido en términos de la integral de fase de una manera muy simple. Esto nos permite tratar los sistemas inhomogéneos como sistemas periódicos homogéneos lo cual facilita el análisis para determinar sus parámetros básicos como son: el ancho, la altura, y el desplazamiento en frecuencia bajo incidencia no normal.

Sabemos que las películas inhomogéneas con una función de índice senoidal poseen un comportamiento muy similar a los sistemas multicapas homogéneos periódicos y, de hecho, se han desarrollado filtros con algunas zonas armónicas ausentes, lo cual es ciertamente más difícil de lograr con sistemas homogéneos. Las propiedades de estos sistemas se han estudiado con cierto detalle en el pasado [Jacobson, 1966, 1975; Yada *et al.*, 1973; Gunning *et al.*, 1989; Southwell y Hall, 1989; Donovan *et al.*, 1989] y actualmente estos constituyen una de las aplicaciones más importantes de películas inhomogéneas. Southwell [1989] ha aplicado la teoría de modos acoplados para analizar este tipo de sistemas bajo la condición de que la función de índice posea una amplitud muy pequeña comparada con el índice promedio. Con esta teoría, él deriva relaciones muy simples para calcular los parámetros característicos de la zona de rechazo.

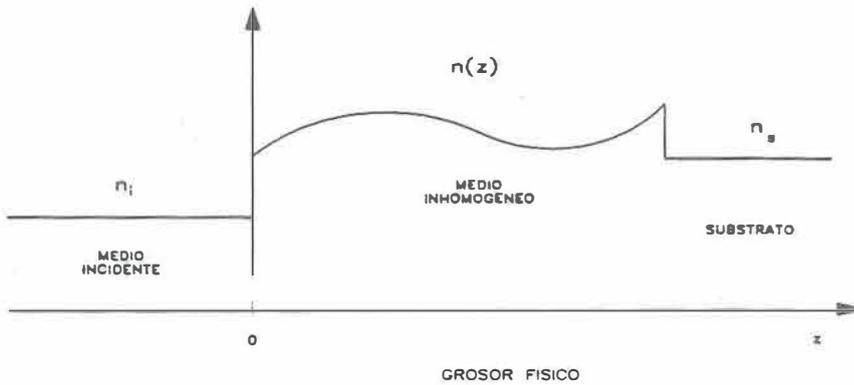


Figura 21: Índice de refracción de una película inhomogénea como función del grosor físico.

IV. 1 Admitancia de películas inhomogéneas dieléctricas

Siguiendo con el formalismo matricial dado en el capítulo II para la propagación del campo a través de estos sistemas [Bovard, 1988] [figura 21], la admitancia Y de una capa delgada inhomogénea de grosor físico z y sin absorción está dada en términos de

$$E_i \begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\eta(\beta)}{\eta(0)}} L(\beta) & \frac{iG(\beta)}{\sqrt{\eta(\beta)\eta(0)}} \\ i\sqrt{\eta(\beta)\eta(0)} K(\beta) & \sqrt{\frac{\eta(0)}{\eta(\beta)}} F(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Y' \end{pmatrix} E_s. \quad (139)$$

Aquí β es la integral de fase (real para este caso) dada por:

$$\beta(z) = \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^z n(z) \cos \theta(z) dz, \quad (140)$$

donde $n(z)$ es el índice de refracción de la capa y $\theta(z)$ es el ángulo de propagación. La admitancia total del sustrato más la capa, para un cierto grosor está dada por la cantidad compleja $Y' = \alpha + i\gamma$. La dependencia angular de la admitancia de la capa en un punto z en el interior de la misma es:

$$\eta(z) = \begin{cases} \eta_v n(z) \cos \theta(z) & \text{caso } TE, \\ \eta_v n(z) / \cos \theta(z) & \text{caso } TM, \end{cases} \quad (141)$$

donde η_v representa la admitancia del vacío.

De la ecuación 139 podemos obtener la relación que determina la evolución de la admitancia conforme la película crece:

$$Y = x + iy = \frac{\sqrt{\frac{\eta_0}{\eta}} F\alpha + i \left[\sqrt{\eta_0 \eta} K + \sqrt{\frac{\eta_0}{\eta}} F\gamma \right]}{\left[\sqrt{\frac{\eta}{\eta_0}} L - \sqrt{\eta_0 \eta} G\gamma \right] + i \sqrt{\eta_0 \eta} G\gamma}, \quad (142)$$

aquí hemos llamado $\eta_0 = \eta(0)$ y omitido la dependencia explícita en β pero es importante tener presente que todo está en función de esta variable excepto η_0 .

Las funciones $F(\beta)$, $K(\beta)$, $G(\beta)$, y $L(\beta)$ están dadas en términos de otro conjunto de funciones:

$$\begin{aligned}
F(\beta) &= f(\beta) \cos \beta + k(\beta) \sin \beta, \\
K(\beta) &= f(\beta) \sin \beta - k(\beta) \cos \beta, \\
G(\beta) &= l(\beta) \sin \beta + g(\beta) \cos \beta, \\
L(\beta) &= l(\beta) \cos \beta - g(\beta) \sin \beta.
\end{aligned}
\tag{143}$$

Sustituyendo las ecuaciones 143 en la ecuación 142 separando las partes real e imaginaria y eliminando entre ellas el parámetro de fase β , es posible obtener la ecuación que determina el lugar geométrico de la admitancia:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\eta_0} (g^2 + l^2) (x^2 + y^2) - \frac{\alpha^2 + \gamma^2 + \eta^2}{\eta} x \\
+ 2\alpha(gf + lk)y + (f^2 + k^2)\alpha\eta_0 = 0.
\end{aligned}
\tag{144}$$

Si todos los parámetros involucrados fueran constantes excepto x e y , esta ecuación representaría círculos con centro en

$$\left(\frac{\eta_0 (\alpha^2 + \gamma^2 + \eta^2)}{2\alpha\eta(g^2 + l^2)}, -\frac{\eta_0(gf + lk)}{g^2 + l^2} \right),
\tag{145}$$

y radio

$$r_a = \frac{\eta_0 \sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2 + \eta^2)^2 - 4\alpha^2\eta^2}}{2\alpha\eta(g^2 + l^2)},
\tag{146}$$

sin embargo, las funciones g , f , l , y k están cambiando con la fase β y el radio está cambiando también conforme la película crece. Aunque en realidad no podemos predecir el comportamiento de estas funciones analíticamente, es posible establecer algunas

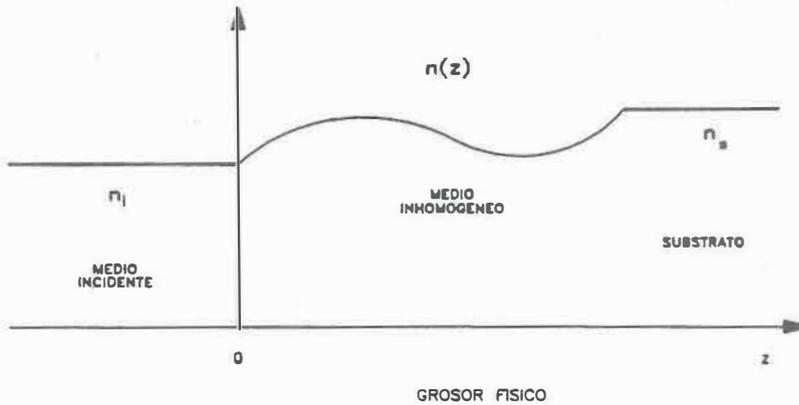


Figura 22: La condición de acoplamiento requiere que el índice en las fronteras de la capa coincidan con los medios en que se encuentra inmersa.

restricciones para analizar algunos puntos interesantes: los intersechos de la curva de admitancia con el eje real, por ejemplo. Para garantizar que la curva interseca el eje real, se debe satisfacer la condición

$$|gf + lk| \leq \frac{\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2 + \eta^2)^2 - 4\alpha^2\eta^2}}{2\alpha\eta}; \quad (147)$$

ahora bien, en los intersechos $y = 0$, pero en estos puntos ocurre que

$$gf + lk = 0, \quad (148)$$

siempre que la condición de acoplamiento $\eta(0) = \eta_i$ y $\eta(\beta) = \eta_s$ se satisfaga [figura 22]. Suponiendo que nuestro sustrato es no absorbente, fijando $\gamma = 0$ en la ecuación 144 y tomando en cuenta que $\alpha(0) = \eta_s$, y $l(0) = 1$, $g(0) = 0$, los intersechos serán dados por

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \eta_s, \\
 x_j &= \frac{\eta\eta_0}{x_{j-1}(g^2 + l^2)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}
 \tag{149}$$

aquí x_0 representa el punto inicial de la curva donde $\beta = 0$ y x_j nos da todas las intersecciones subsecuentes con el eje real conforme el grosor en fase crece.

Consideremos ahora el coeficiente de reflexión

$$\rho = \frac{\eta_i - Y}{\eta_i + Y}, \tag{150}$$

tomando en cuenta la condición de acoplamiento dada anteriormente, podemos demostrar [Bovard, 1993] que

$$|\rho| \sin \varphi_\rho = \frac{2(gf + lk)}{(f + l)^2 + (k - g)^2}, \tag{151}$$

aquí φ_ρ representa el cambio de fase en reflexión. Si consideramos la condición en los intersecciones dada por la ecuación 148, tenemos que de la ecuación 151

$$\varphi_\rho = m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \tag{152}$$

lo cual significa que siempre que el grosor óptico sea un múltiplo de un cuarto de la longitud de onda

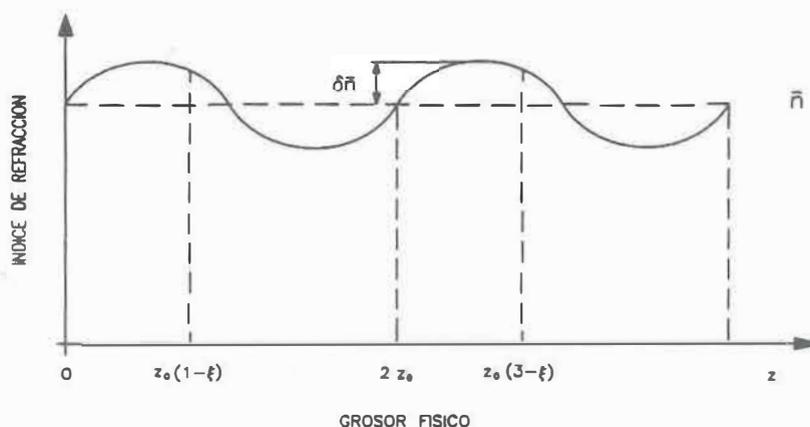


Figura 23: Índice de refracción periódico con período $\lambda_0/2\pi$. Aquí $z_0 = \lambda/4\pi$. La cantidad ξ es un número muy pequeño que se utiliza para identificar los puntos correspondientes a grosores ópticos impares de $\lambda_0/4$.

$$\int_0^z n(z) \cos \theta(z) dz = m \frac{\lambda}{4}, \quad (153)$$

la curva de admitancia intersecta el eje real.

IV. 2 Admitancia de sistemas periódicos

El formalismo matricial nos permite tratar un apilamiento de películas delgadas tomando el producto de las matrices características de cada capa para obtener la respuesta total del sistema. Para una capa inhomogénea con un índice de refracción periódico que fluctúa alrededor de un índice promedio \bar{n} [figura 23], es posible calcular de una manera muy simple su desempeño espectral aprovechando la periodicidad del sistema. Si dividimos hipotéticamente en rebabadas por períodos como en el caso de multicapas periódicos, el producto de las matrices características correspondiendo con cada período

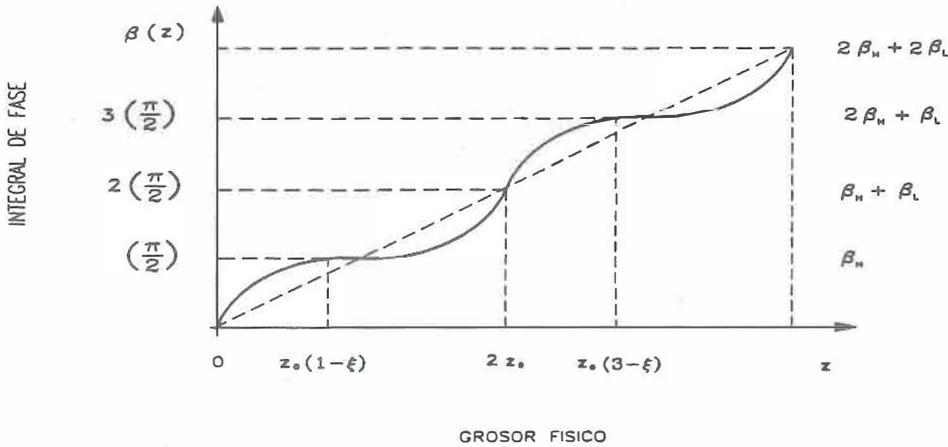


Figura 24: Integral de fase para un sistema con función de índice periódica. Esta es también una curva periódica pero creciente que oscila alrededor de una línea oblicua cuya pendiente depende de la magnitud del índice de refracción promedio.

será el equivalente a una matriz total.

Por simplicidad, consideremos una capa a incidencia normal con un índice de refracción en función del grosor físico z definido por [figura 23]

$$n(z) = \bar{n} \left(1 + \delta \sin \frac{4\pi}{\lambda_0} \bar{n} z \right). \quad (154)$$

Aquí, δ representa la fluctuación relativa de la función de índice alrededor del índice promedio \bar{n} . Dado este diseño, podemos calcular la integral de fase en el intervalo $[z_1, z_2]$ de la ecuación 140 para obtener [figura 24]

$$\beta = \left[\frac{2\pi}{\lambda_0} \bar{n} z + \frac{\delta}{2} \cos \frac{4\pi}{\lambda_0} \bar{n} z \right]_{z_1}^{z_2}. \quad (155)$$

De las ecuaciones 154 y 155 podemos ver que siempre que el grosor óptico sea

un múltiplo de $\lambda_0/2$, el índice de refracción toma el valor inicial del índice promedio \bar{n} y podemos entonces definir un período que se replica un cierto número de veces. Si cada período se divide en dos rebanadas de igual grosor óptico $\lambda_0/4$, podemos entonces tratar esta configuración utilizando la matriz característica asociada para estudiar el comportamiento total de este sistema periódico inhomogéneo constituido de p períodos

$$E_i \begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{n(\beta_H)}{n(0)}} L(\beta_H) & \frac{iG(\beta_H)}{\sqrt{n(\beta_H)n(0)}} \\ i\sqrt{n(\beta_H)n(0)} K(\beta_H) & \sqrt{\frac{n(0)}{n(\beta_H)}} F(\beta_H) \end{pmatrix} \right. \\ \left. \times \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{n(\beta_H + \beta_L)}{n(\beta_H)}} L(\beta_L) & \frac{iG(\beta_L)}{\sqrt{n(\beta_H + \beta_L)n(\beta_H)}} \\ i\sqrt{n(\beta_H + \beta_L)n(\beta_H)} K(\beta_L) & \sqrt{\frac{n(\beta_H)}{n(\beta_H + \beta_L)}} F(\beta_L) \end{pmatrix} \right\}^p \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ n_s \end{pmatrix} E_s \quad (156)$$

aquí la dependencia de las funciones L, G, H y K en β_H y β_L significa que podemos evaluarlas dentro de los límites que van de 0 a β_H o de β_H a β_L respectivamente.

El lugar geométrico de las admitancias de cualquier perfil periódico en general se conforma de curvas similares a espirales [figura 25], un parámetro muy útil que se puede obtener de este diagrama es la intersección de la curva de admitancias con el eje real, el cual corresponde a un grosor óptico $m\lambda_0/4$ y donde m es un entero. Reescribiendo las ecuaciones 149 obtenemos:

$$x_0 = n_s, \quad (157)$$

$$x_j = \frac{n(0)n(\beta)}{x_{j-1} [g^2(\beta) + f^2(\beta)]}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (158)$$

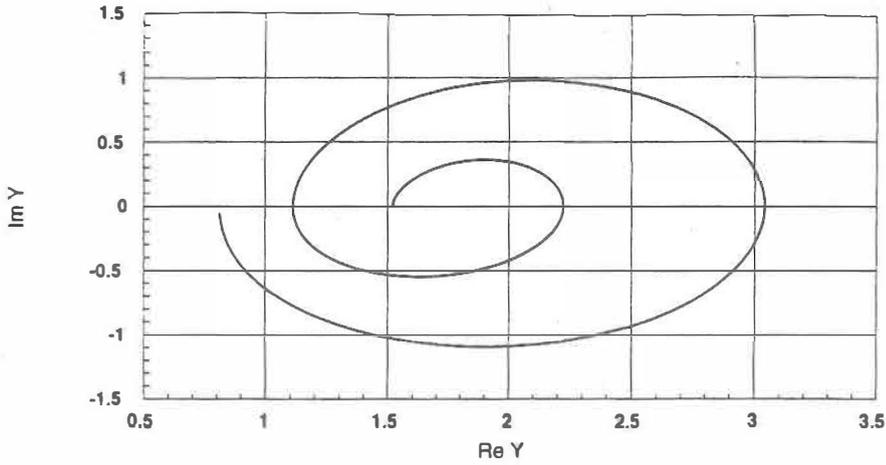


Figura 25: Admitancia del mismo filtro en la longitud de onda del diseño. Las intersecciones de la curva corresponden con grosores que son múltiplos de $\lambda_0/4$.

Considerando la dependencia en β_H o β_L podemos llamar

$$n_H^2 = \frac{n(0)n(\beta_H)}{g^2(\beta_H) + f^2(\beta_H)}, \quad (159)$$

$$n_L^2 = \frac{n(\beta_H)n(\beta_H + \beta_L)}{g^2(\beta_L) + f^2(\beta_L)},$$

de manera que los intersechos para incidencia normal se pueden expresar como

$$x_j = \begin{cases} n_s \left(\frac{n_L}{n_H} \right)^j & j = 0, 2, 4, \dots \\ \frac{n_H^{j+1}}{n_s n_L^{j-1}} & j = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (160)$$

Estos intersechos representan los puntos de retorno en la curva de reflectancia del

sistema, el cual puede considerarse ahora como un apilamiento periódico de capas homogéneas.

IV. 3 Parámetros básicos de las zonas de rechazo

El cálculo de los índices efectivos en este sistema, está directamente relacionado con la integral de fase. De la ecuación 153 podemos obtener

$$n_H = \frac{1}{\Delta_H} \int_0^{\Delta_H} n(z) dz, \quad (161)$$

$$n_L = \frac{1}{\Delta_L} \int_0^{\Delta_L} n(z - \Delta_H) dz, \quad (162)$$

donde Δ_H , Δ_L representan los grosores físicos asociados a dos rebanadas de material con grosores ópticos $\lambda_0/4$ de *alto* o *bajo* índice efectivo respectivamente. Se puede demostrar que

$$\Delta_H = \frac{\lambda_0}{4\bar{n}}(1 - \xi), \quad (163)$$

$$\Delta_L = \frac{\lambda_0}{4\bar{n}}(1 + \xi),$$

donde ξ es un parámetro dado por la ecuación implícita

$$\xi = \frac{\delta}{\pi}(1 + \cos(\pi\xi)), \quad (164)$$

la cual no posee una solución analítica. Si tomamos el primer y segundo términos de la expansión en serie de la función coseno, es posible determinar las soluciones aproximadas

$$\xi = \frac{2\delta}{\pi}, \quad (165)$$

y

$$\xi = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\delta^2}}{\pi\xi}, \quad (166)$$

a primer y segundo orden.

Ahora podemos calcular el número de períodos requerido para obtener una reflectancia dada R_0 con nuestro sistema periódico

$$\bar{p} = \frac{\ln \left[\frac{n_i}{n_s} \left(\frac{1 - \sqrt{R_0}}{1 + \sqrt{R_0}} \right) \right]}{2 \ln \left(\frac{n_L}{n_H} \right)}, \quad (167)$$

y el ancho de la zona de rechazo [Macleod, 1989]

$$\Delta g = \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{n_H - n_L}{n_H + n_L} \right), \quad (168)$$

en este caso $g = \lambda_0/\lambda$ es diferente de la función g dada en ecuación 143. Las figuras 26 y 27 muestran el comportamiento de p y Δg para las diferentes aproximaciones. Por comparación hemos incluido los resultados de Southwell's los cuales fueron obtenidos utilizando la teoría de modos acoplados. La figura 28 muestra los bordes de la zona en términos de la longitud de onda.

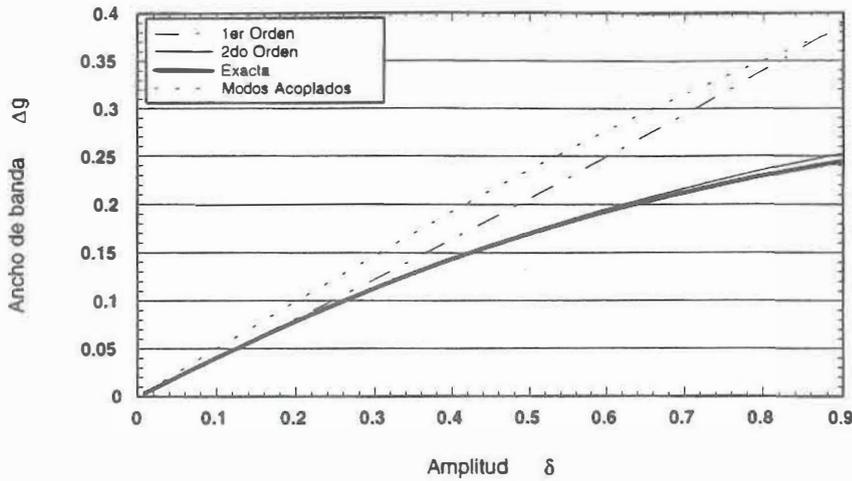


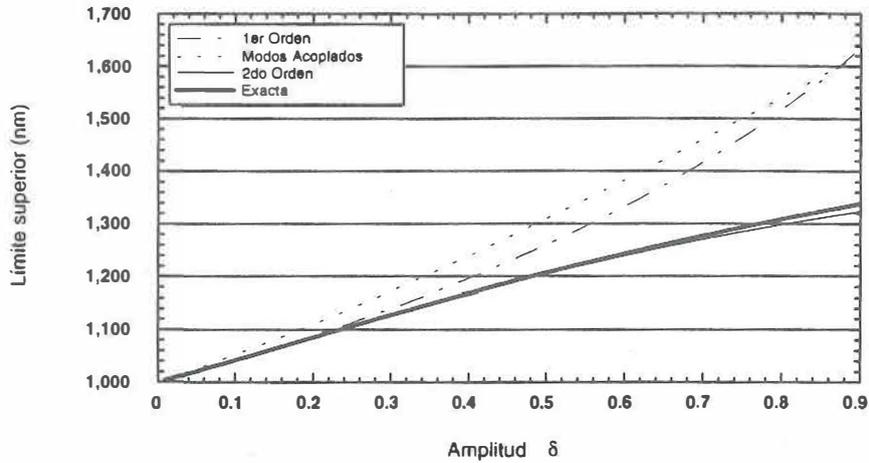
Figura 26: Función ancho Δg para una zona con índice senoidal en función de la amplitud δ . Los parámetros utilizados fueron $\bar{n} = 3.5$ y $\lambda_0 = 1000\text{nm}$.

El desplazamiento en longitud de onda que sufre la zona cuando se ilumina bajo incidencia no normal se puede obtener de la ecuación 140 como

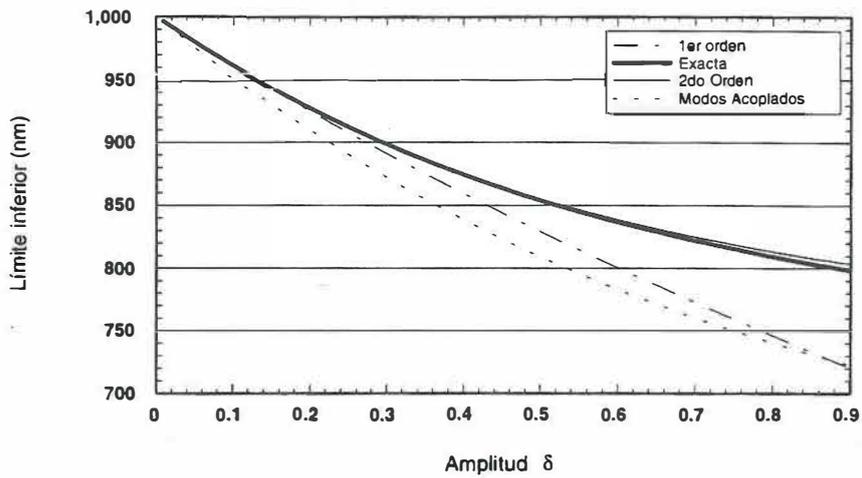
$$\int_0^z n(z) \cos \theta(z) dz \approx \int_0^z n \left(1 - \frac{n_i^2 \sin^2 \theta_i}{n^2} \right) dz. \quad (169)$$

El desplazamiento en longitud de onda encontrado por Southwell se puede determinar con la anterior ecuación en el límite de pequeñas amplitudes en la función de índice, en el cual $\delta \ll 1$ en la ecuación 154, entonces

$$\Delta \lambda \approx \left(\frac{n_i^2 \sin^2 \theta_i}{2\bar{n}^2} \right) \lambda_0. \quad (170)$$



(a)



(b)

Figura 27: a) Longitud de onda donde se localiza el borde superior de la zona. b) Longitud de onda para el límite inferior.

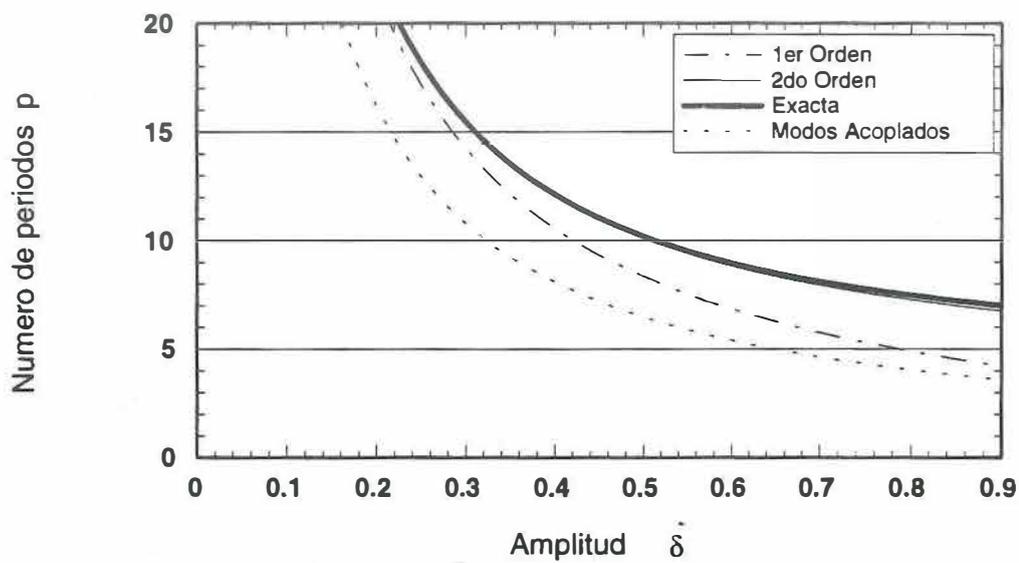


Figura 28: Número de períodos requeridos para obtener una reflectancia $R_0 = 99.99\%$ para la longitud de onda del diseño figura 5.

V. FILTROS INHOMOGENEOS: EXPERIMENTO

Una parte importante en el estudio de capas delgadas inhomogéneas constituye el problema experimental. En los capítulos anteriores hemos analizado con cierto detalle la teoría de propagación y hemos estudiado algunos sistemas específicos, sin embargo no se ha considerado el procedimiento para la obtención de tales sistemas.

Aquí describiremos un procedimiento que utiliza la teoría elemental del medio efectivo [Jacobson, 1975] para obtener las funciones de concentración de los materiales componentes de la mezcla como función del grosor de la capa. Conocida esta función para cada material es posible obtener funciones para las velocidades de depósito, las cuales constituyen los parámetros básicos de laboratorio para la obtención de capas inhomogéneas con una función de índice arbitraria. Dado que se trata de un proceso de evaporación variable en el tiempo, se requiere realizar el control de manera automática.

En este capítulo también describiremos la implementación del experimento que fue realizado por coevaporación y control por computadora, introduciendo como nueva variante el uso de mascarillas dinámicas, para producir la modulación de las velocidades de evaporación de cada material.

V. 1 El medio efectivo y las funciones de concentración asociadas

La función dieléctrica de los medios compuestos de dos o más materiales, se puede estimar en términos de las propiedades ópticas de cada componente (apéndice A). Al respecto se ha realizado bastante trabajo y de hecho, existen modelos muy elaborados que toman en cuenta el tamaño, forma, y distribución de las micro-partículas que constituyen los medios compuestos [R. G. Barrera *et al.*, 1989]. Sin embargo, no importa qué tan completa sea la teoría, existen parámetros físicos que no es posible determinar experimentalmente.

Por otra parte Aspnes [1989], ha demostrado que independientemente del modelo utilizado, la función dieléctrica efectiva se encuentra acotada en una región determinada por el efecto de apantallamiento del campo (apéndice A).

Ya que nuestro objetivo no es el estudio del medio efectivo, utilizaremos uno de los modelos más simples (modelo de Bruggeman) para realizar la estimación del índice de refracción de las películas. En este caso, la ecuación del medio efectivo constituido por dos materiales con funciones dieléctricas ϵ_1 y ϵ_2 , está dada como

$$c_1 \frac{\epsilon_1 - \epsilon}{\epsilon_1 + 2\epsilon} + c_2 \frac{\epsilon_2 - \epsilon}{\epsilon_2 + 2\epsilon} = 0, \quad (171)$$

donde ϵ representa la función dieléctrica del medio compuesto, y c_1 y c_2 las fracciones de volumen o concentraciones de cada componente. Esta ecuación extremadamente simple nos permite observar el intervalo en el que se encuentra la función dieléctrica efectiva, dependiendo de la concentración de cada material.

Como ejemplo consideremos el medio compuesto de los materiales dieléctricos fluoruro de magnesio y dióxido de titanio, con índices de refracción $n_{MgF_2} = 1.38$ y

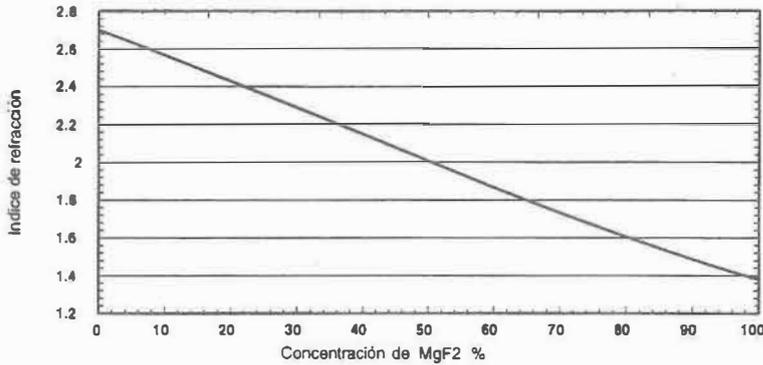


Figura 29: Índice de refracción para una mezcla de los materiales dieléctricos fluoruro de magnesio ($n_{MgF_2} = 1.38$) y dióxido de titanio ($n_{TiO_2} = 2.7$), en la longitud de onda $\lambda = 550nm$, como función de la concentración.

$n_{TiO_2} = 2.7$ respectivamente, en la longitud de onda $\lambda = 550nm$. Variando la concentración (MgF_2) desde 0% hasta 100% obtenemos la curva mostrada en la figura 29. Algo similar ocurre con los cermetes, en la figura 30 se grafican los índices de refracción y absorción para la mezcla de un dieléctrico (dióxido de titanio) y un metal (cobre) con índice de $n_{Cu} - ik_{Cu} = 1.12 - 2.6i$ también en $\lambda = 550nm$.

En el intervalo de 90% a 100% existe una irregularidad, ya que esperaríamos que el índice se aproximara gradualmente al valor de aquel para el metal puro, esto se debe a que hemos utilizado el modelo con cierta libertad, el cual se considera más apropiado para compuestos con materiales cuyas concentraciones son comparables entre sí.

En la figura 31 se muestra una capa dieléctrica con función de índice dada por la suma de dos funciones seno defasadas por una fracción de periodo y en la figura 32 las correspondientes funciones de concentración para la mezcla de materiales $MgF_2 + TiO_2$.

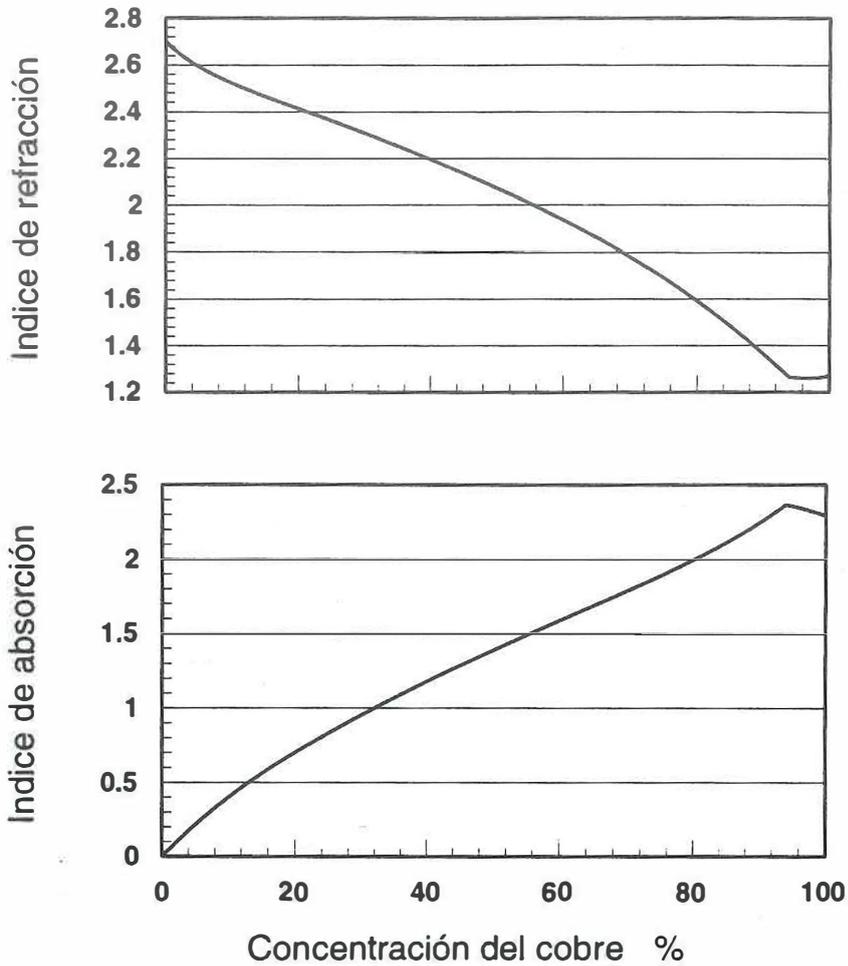


Figura 30: Índice de refracción y absorción para un cermet formado con los materiales dióxido de titanio y cobre ($n_{Cu} - ik_{Cu} = 0.945 - 2.954i$) en la longitud de onda $\lambda = 550nm$, como función de la concentración.

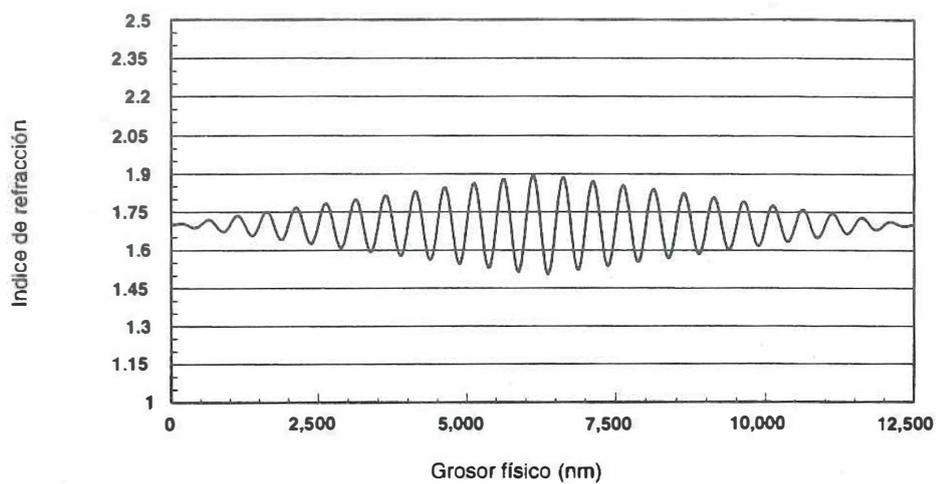


Figura 31: Capa dieléctrica inhomogénea

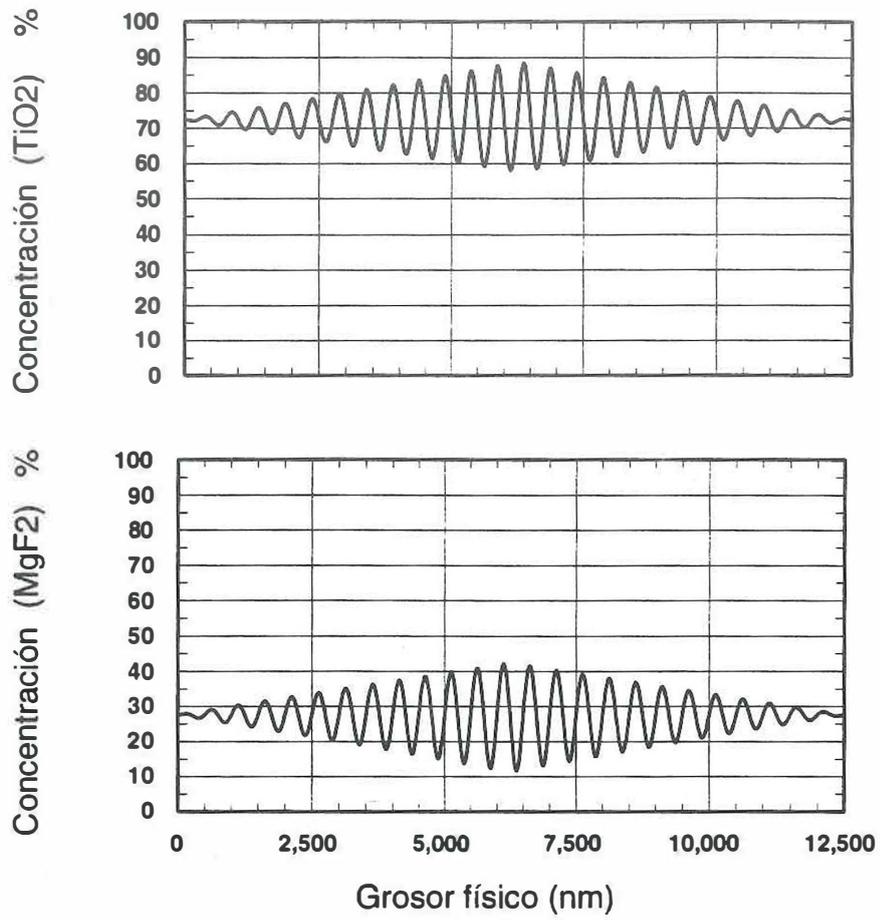


Figura 32: Funciones de concentración de la capa dieléctrica.

V. 2 Velocidades de evaporación

Conocida nuestra función de índice, es posible determinar las velocidades de evaporación como función del grosor de la capa [Jacobson, 1975] mediante la ecuación del medio efectivo, debido a que éstas se encuentran relacionadas con las concentraciones o fracciones de llenado. Bajo la hipótesis de que cada componente ocupa proporcionalmente el mismo volumen del material puro para cualquier concentración (su densidad no cambia en el medio compuesto), tendremos [Jacobson, 1975]

$$c_1(t) = \frac{v_1(t)}{v_1(t) + v_2(t)}, \quad (172)$$

y

$$c_2(t) = \frac{v_2(t)}{v_1(t) + v_2(t)}, \quad (173)$$

donde $v_1(t)$, y $v_2(t)$ están dadas por

$$v(t) = \frac{dz}{dt}. \quad (174)$$

Aquí z representa el grosor físico de la capa, y t el tiempo.

Las ecuaciones 172 y 173 no son independientes, ya que $c_1(t) + c_2(t) = 1$. De manera que en realidad tenemos una sola ecuación y dos variables

$$v_1(t) = \frac{c_1(t)}{c_2(t)} v_2(t). \quad (175)$$

Esto implica que existe un número infinito de soluciones para $v_1(t)$ y $v_2(t)$. Lo

cual, nos permite establecer una segunda condición que relacione nuestras variables. Por ejemplo podemos pedir que

$$v_1(t) = v_0 c_1(t), \quad (176)$$

$$v_2(t) = v_0 c_2(t), \quad (177)$$

donde v_0 es alguna constante determinada por las condiciones dadas en el experimento, particularmente por los materiales elegidos.

En la figura 33 se muestran las velocidades de evaporación para la capa dieléctrica dada como ejemplo.

Igualmente podemos establecer una condición aún más simple, por ejemplo: $v_1(t) = cte$ o $v_2(t) = cte$, lo cual simplifica el proceso de evaporación, ya que experimentalmente es más simple variar la velocidad de evaporación de un solo material [figura 34].

V. 3 Coevaporación al alto vacío

Ronald Jacobson [1975], propuso por primera vez el método para obtener experimentalmente películas inhomogéneas por evaporación simultánea de dos o más materiales al alto vacío. Desde entonces, se han aplicado diferentes técnicas de depósito para fabricar estos sistemas [Jay, 1976; Bartolomew *et al.*, 1987; Boivin y Germain, 1987; Gunning, 1989; Donovan *et al.*, 1989; Thomas, 1992; Greenham *et al.*, 1993], pero de una manera muy conservadora, debido, por una parte a que los resultados obtenidos no han sido del todo positivos y por otra, a que el desarrollo de la teoría y aplicación no se había dado de manera importante.

Los métodos aplicados, que reportan buenos resultados son por ejemplo, aquellos

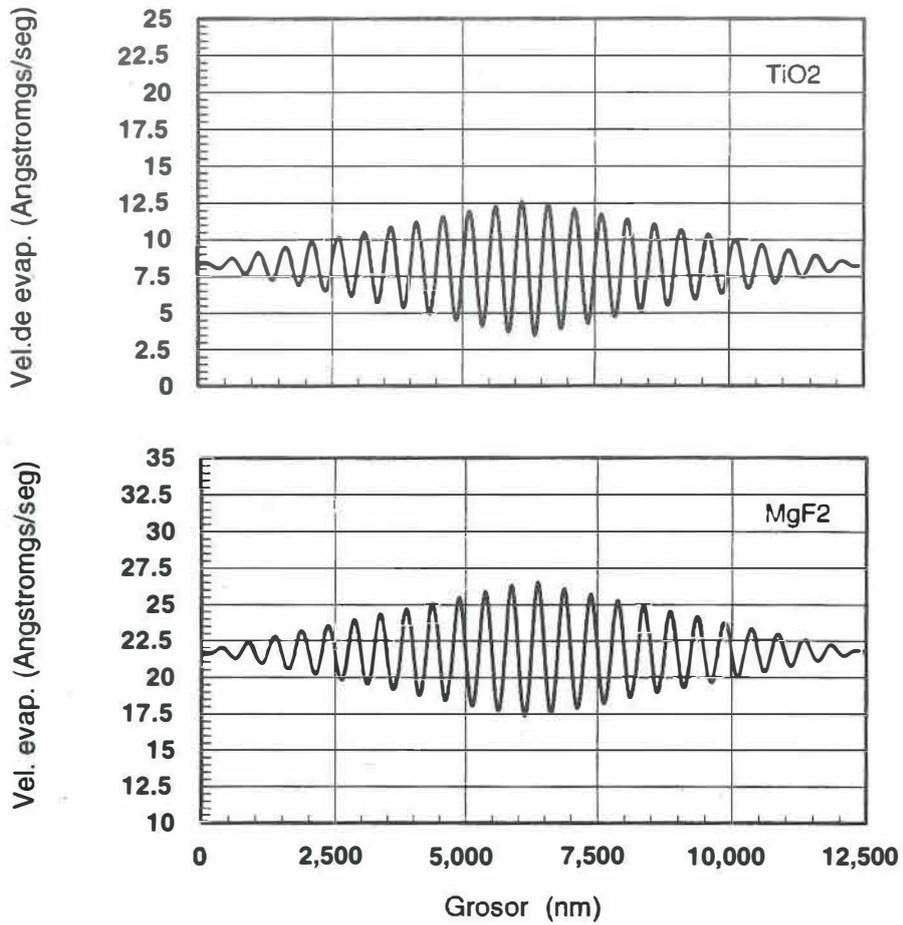


Figura 33: Velocidades de evaporación de cada material para la mezcla dieléctrica.

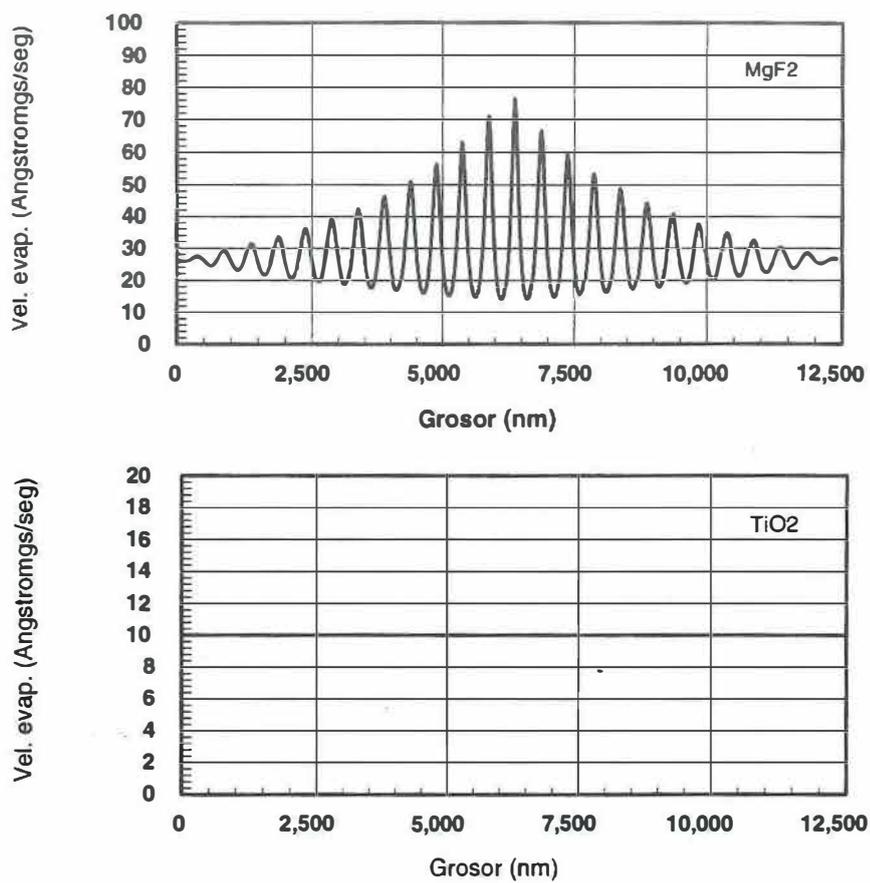


Figura 34: Velocidades de evaporación para los materiales de la mezcla dieléctrica manteniendo constante $v_{\text{TiO}_2} = 10 \text{ \AA}/\text{seg}$.

obtenidos por el grupo de Gunning [1989] quienes por evaporación de dióxido de titanio con cañón de electrones y evaporación reactiva de monóxido de silicio en bote térmico, obtuvieron una doble zona de rechazo. Otro resultado importante lo obtuvo el grupo de Greenham [1993] por el método de depósito por vapores químicos, mediante plasmas producidos por micro-ondas. Con esta técnica se obtuvieron algunos filtros tipo zona de rechazo simples y dobles con rizos apodizados, lo cual representa un grado de dificultad aún mayor. El material utilizado fue, oxi-nitruro de silicio, y la variación de índice se hizo controlando la concentración de silica el cual tiene un índice de refracción de 1.46 frente al nitruro de silicio que es de 2.04. Otra cualidad de este método es la gran uniformidad que se obtiene en el grosor de las capas, el cual es del orden del 2% en un sustrato de 3cm de diámetro.

En general, el depósito simultáneo de dos o más materiales se puede realizar por diferentes medios que pueden ser físicos o químicos, por ejemplo ablación laser, sputtering, etcétera. En el laboratorio se utilizó cañón de electrones y botes térmicos de acuerdo a la configuración que se muestra en la figura 35. Por simplicidad, la fuente de bote térmico se mantuvo a velocidad de emisión constante y se varió la tasa de evaporación del cañón de electrones.

V. 4 Control: monitor de cuarzo y la PC

El monitor de cuarzo utilizado (xtc/2 de Inficon) tiene capacidad para monitorear velocidad de crecimiento de la capa, grosor físico, y potencia suministrada a la fuente de evaporación, por lo cual, puede ser utilizado también como controlador.

El aparato posee una interfaz RS232 y una frecuencia de comunicación de 4 Hertz, de manera que la resolución máxima que se puede tener en el control del proceso, está en función de esta capacidad de respuesta. Mediante la misma interfaz es posible realizar el

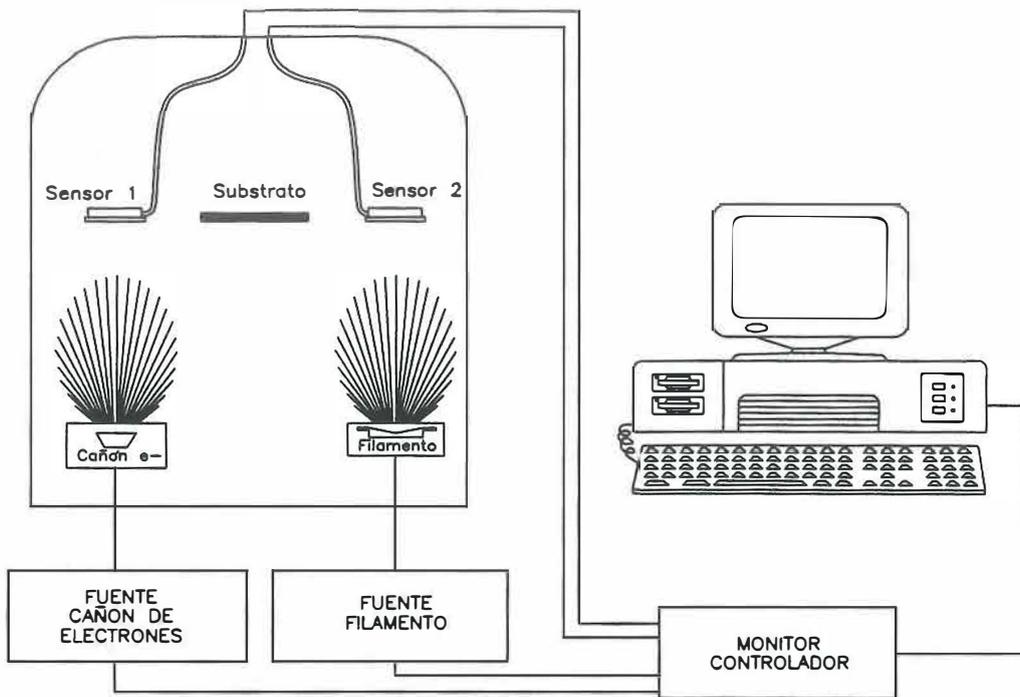


Figura 35: Configuración del sistema de evaporación y control.

control, envío y adquisición de datos.

V. 5 Factores físicos limitantes en el proceso

Debido a la inercia al cambio de temperaturas de los materiales en evaporación y las propias fuentes, se produce un defasamiento o retardo entre la función de potencia para el control de la corriente y la velocidad de evaporación.

Esto implica una gran incertidumbre en el comportamiento de las fuentes, y consecuentemente se requiere realizar gran número de experimentos de calibración. Por otra parte, ya que la respuesta del sistema es muy lenta, ésto también limita el tipo de películas que se puedan obtener, es decir no es posible fabricar capas muy delgadas cuya función de índice posea oscilaciones de alta frecuencia. Esto se puede expresar también diciendo que la derivada de la velocidad de evaporación está acotada en un cierto intervalo cuyos valores extremos dependen de factores físicos como la cantidad y el tipo de material, el tamaño y tipo de los crisoles, la presión, etcétera.

Otro problema que presenta nuestro equipo, es que el sistema de bombeo, posee una capacidad muy limitada para los requerimientos de trabajo del cañón de electrones, el cual opera en un rango de presión de alto vacío. De este modo, no es posible mantener la presión con tasas de evaporación mayores a $10 \text{ \AA}/\text{seg}$. Este problema es en cierta forma crítico, especialmente cuando se trata de evaporar óxidos que generalmente emiten gran cantidad de gas adsorbido por el material.

V. 6 Control de la velocidad de depósito mediante mascarillas rotatorias

Como una alternativa al sistema propuesto en la sección anterior, es posible aprovechar la inercia del proceso de evaporación, si en lugar de tratar de producir cambios de temperatura para controlar la velocidad de emisión, por el contrario se mantiene constante y se realiza la modulación mediante el uso de una mascarilla de abertura variable en el tiempo [figura 36], tal como un diafragma colocado sobre la fuente¹. Esto se puede hacer de diferentes maneras. Consideremos una mascarilla en forma de disco con una abertura como se muestra en la figura 37. La fuente en este caso se localiza a un radio ρ del centro de rotación de la misma, de manera que girando hacia adelante o hacia atrás según se requiera, es posible controlar la velocidad de emisión. Otra manera muy similar consiste en diseñar la abertura de tal manera que la forma de la modulación requerida para la velocidad de emisión esté asociada directamente a la abertura [figura 38], así que será suficiente girar a la velocidad angular adecuada para obtener el perfil de índice requerido.

En cualquiera de los dos casos, podemos expresar matemáticamente la relación entre el ancho de la abertura y la velocidad de depósito como

$$\Delta\rho[\theta(t)] = \frac{\Delta\rho_{max}}{v_{max}}v(t), \quad (178)$$

Aquí $\Delta\rho[\theta(t)]$, representa la mitad del ancho de la abertura [figura 38] la cual está centrada en el radio ρ . Las constantes $\Delta\rho_{max}$, v_{max} representan la máxima abertura y la máxima velocidad alcanzable con esa abertura, respectivamente. La variable θ es el ángulo de rotación.

¹Boivin y Germain [1987], utilizaron un sistema con algo parecido a un obturador, pero no dan mayores detalles en la descripción del sistema y su funcionamiento.

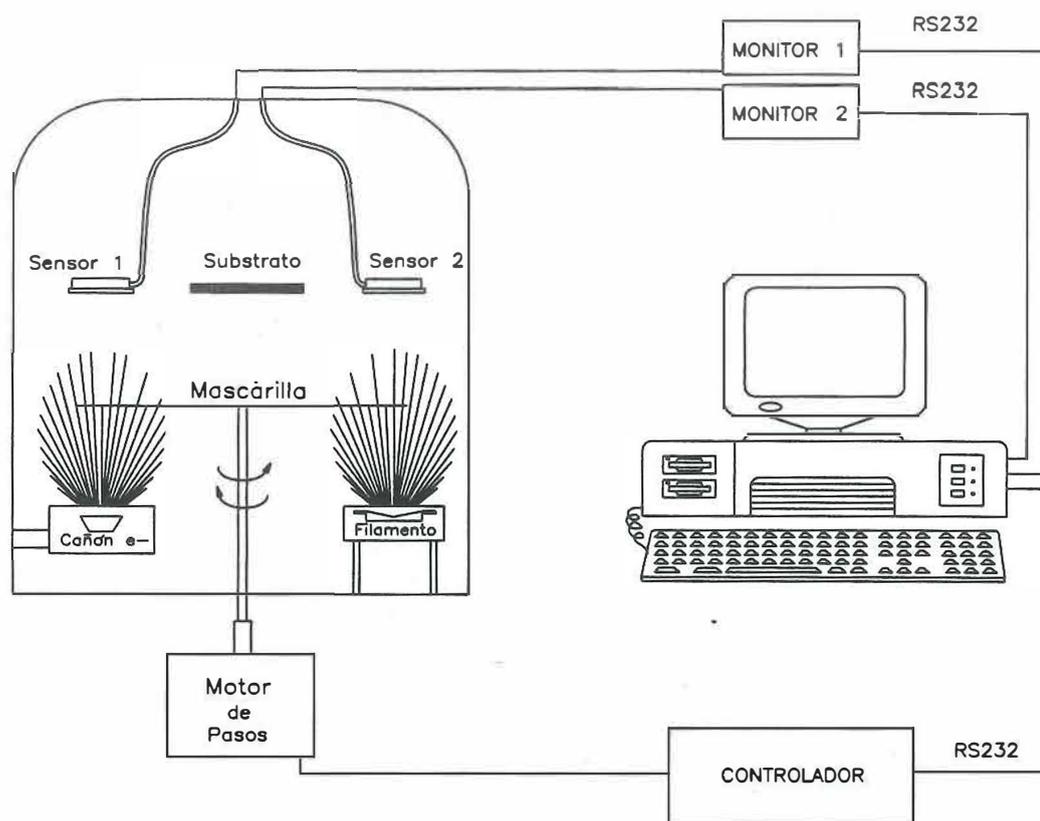


Figura 36: Sistema con mascarilla rotatoria.

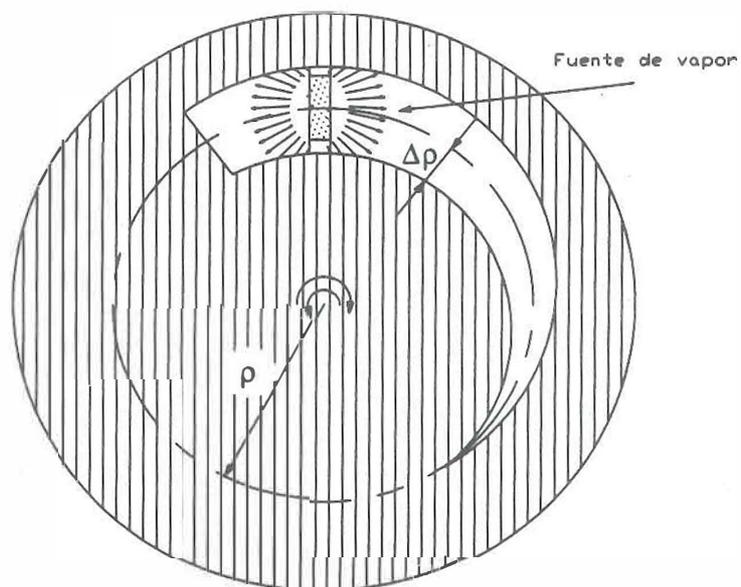


Figura 37: Mascarilla con abertura en forma de cuña circular.

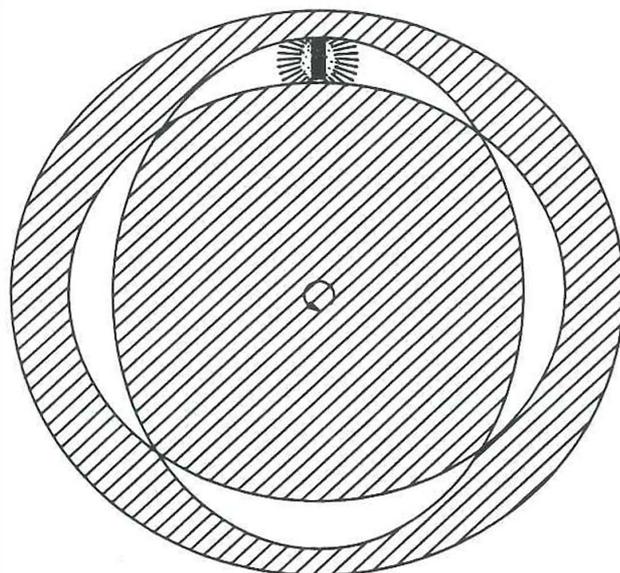


Figura 38: Mascarilla de velocidad angular constante.

Aunque la ecuación 178 nos da la forma de la mascarilla, no nos dice explícitamente cual es la dependencia del ángulo con el tiempo. Si derivamos la ecuación 178 respecto al tiempo, aplicando la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{d\Delta\rho}{d\theta}\omega = k\frac{dv(t)}{dt}, \quad (179)$$

donde ω representa la velocidad angular. En esta ecuación, desconocemos $\Delta\rho(\theta)$ y $\theta(t)$, de manera que es posible definir arbitrariamente una de las dos funciones, para determinar la otra.

Caso (a) Sea $d\Delta\rho/d\theta = q$, donde $q = \Delta\rho_{\max}/\theta_{\max}$. En este caso

$$\Delta\rho(\theta) = q\theta, \quad (180)$$

y

$$\theta(t) = \frac{k}{q}v(t). \quad (181)$$

Esta última ecuación implica que tenemos una velocidad angular variable, que además puede ser positiva o negativa. Este caso corresponde a la mascarilla con abertura en forma de cuña [figura 37].

Caso (b) Si por el contrario, fijamos la velocidad angular como constante, $\omega = \omega_0$, entonces la ecuación 178 se puede expresar como

$$\Delta\rho(\omega_0 t) = kv(t). \quad (182)$$

Este caso corresponde a aquel dado en la figura 38 en el cual se gira a velocidad angular constante. Una mascarilla de este tipo presenta cierta conveniencia cuando la

función de índice de la capa a depositar es periódica como en el caso de las zonas de rechazo, ya que se puede definir el perfil de la abertura en términos de un solo período y entonces poner a rotar a velocidad constante, lo cual implica un dispositivo más simple, tal como un motor DC.

Resumiendo, podemos considerar que en el caso (a), primero construimos la mascarilla y luego determinamos su movimiento en términos del perfil del índice requerido, y en el caso (b), la forma de la abertura se determina por el perfil requerido y la mascarilla se gira a velocidad constante.

V. 7 Resultados del experimento

En la figura 39 se muestran los resultados de un experimento de coevaporación, que fue realizado utilizando cañón de electrones para evaporar fluoruro de magnesio a velocidad constante, y bote térmico para monóxido de silicio a velocidad variable y modulada con una mascarilla como aquella dada en la figura 38.

La razón de haber elegido estos materiales es en realidad puramente la limitación práctica. Nuestro principal problema aquí, es la estabilidad en la emisión de material del cañón, la cual no fue posible mantener constante. Esto se debe principalmente a que el haz de electrones choca en un punto fijo de la superficie del material haciendo un agujero sobre el cual van cayendo granos de material sin fundir, de manera que cuando el haz toma uno de estos granos produce una fluctuación en la emisión [figura 39]. Esto descarta la posibilidad de usar el cañón de electrones.

Por su parte la fuente de bote térmico posee un comportamiento extraordinariamente estable [figura 39] al menos con el monóxido de silicio, el cual es un material que se sublima. Hemos comprobado también que el fluoruro de magnesio es de buen comportamiento, desafortunadamente no contamos con otra fuente de bote térmico. Sin

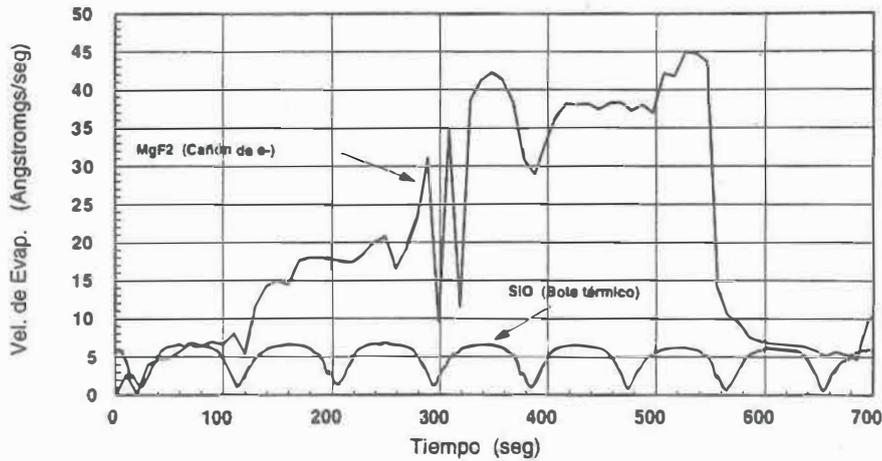


Figura 39: Experimento de coevaporación de fluoruro de magnesio y monóxido de silicio.

embargo es completamente posible realizar el experimento.

La única desventaja que tendría el hecho de utilizar botes térmicos, es que la cantidad de materiales distintos que se pueden utilizar, se reduce grandemente, debido a que no es posible evaporar materiales duros y de alto índice de refracción, como es el caso de los óxidos.

VI. CONCLUSIONES

Con la finalidad de lograr una visión general en el desarrollo y obtención de películas delgadas inhomogéneas aplicadas como filtros de interferencia y absorción, hemos estudiado y resuelto algunos problemas específicos, relacionados con las tres partes básicas que conforman el área que nos ocupa, que son: análisis, síntesis y fabricación de filtros inhomogéneos.

VI. 1. Resumen de conclusiones

En este estudio, como parte del trabajo en el análisis, hemos extendido el método matricial de Bovard para calcular el desempeño espectral de películas inhomogéneas con absorción [Villa, *et al.*, 1994].

Esta matriz se reduce a la conocida matriz característica homogénea de 2×2 cuando el índice de la capa es constante, como era de esperarse. Por otra parte, si la capa es altamente absorbente, el cálculo de la reflectancia se puede efectuar fácilmente por medio de una integral simple.

Es importante mencionar que el algoritmo de la matriz homogénea, es más eficiente que el método de las integrales (matriz inhomogénea), sin embargo este último resulta físicamente más significativo, porque nos permite derivar importantes propiedades de los filtros inhomogéneos que de otra manera no sería posible.

Los ejemplos que hemos considerado, se eligieron para ilustrar las características del método, que ofrece la posibilidad de realizar un proceso de síntesis por una técnica análoga a la desarrollada para filtros sin absorción.

En el trabajo de síntesis, aplicamos el método de transformada de Fourier, para determinar explícitamente el perfil de índice como función de la respuesta espectral requerida en una de las dos polarizaciones. Esta técnica resulta útil para el diseño de filtros de incidencia oblicua.

También como parte de análisis y diseño, mostramos que los diagramas de admittancia pueden ser útiles en el estudio de estos filtros inhomogéneos, ya que mediante ellos es posible obtener sus parámetros más importantes de una manera muy sencilla [Villa *et al.*, 1995]. Se encontró también que es posible tratar a los sistemas inhomogéneos como si fueran apilamientos multicapas periódicos constituidos de dos índices efectivos, *alto* y *bajo*. Y hemos calculado para un sistema propuesto, el número de períodos requerido para obtener una reflectancia dada, el ancho y el desplazamiento de la zona bajo incidencia no normal, los cuales son los parámetros básicos de este tipo de sistemas. Nuestros resultados se comparan con aquellos previamente reportados en la literatura.

En la parte experimental, se determinaron los parámetros básicos de laboratorio, basados en la teoría del medio efectivo y se desarrolló un método de obtención del filtros inhomogéneos mediante coevaporación y utilizando mascarillas rotatorias para modular las velocidades de depósito de los materiales. Este proceso se realiza mediante control por computadora, para envío, análisis y adquisición de datos.

Finalmente con una perspectiva general podemos concluir que en la actualidad el desarrollo de los filtros inhomogéneos, se encuentra en una etapa de consolidación en teoría y experimento de tal manera que estos sistemas empiezan a circular comercialmente e incluso algunos de los nuevos programas de diseño ya los consideran como parte de las herramientas del ingeniero en tecnología óptica.

VI. 2 Perspectivas para trabajo futuro

A pesar de lo dicho anteriormente, existen por supuesto, muchos aspectos que pueden ser estudiados en el futuro. Un problema interesante, consiste en realizar un análisis de la estabilidad de los sistemas inhomogéneos, ya que es por demás importante considerar como afecta el comportamiento espectral del filtro las desviaciones del perfil de índice. Esto se debe a que las fluctuaciones requeridas en la función de índice de algunos sistemas sintetizados por transformada de Fourier, son del orden del 2.5% lo cual es muy difícil de lograr en el laboratorio, al menos con los medios de que se dispone hasta ahora.

Otro problema que puede ser de interés es el desarrollo del método de síntesis de películas inhomogéneas con absorción. Aunque la absorción posee una influencia mayor que la interferencia en el desempeño espectral de las capas delgadas y por lo tanto no es una tarea fácil diseñar filtros con absorción, sólo para algunos casos particulares. Por otra parte la dispersión es más significativa en materiales con absorción de manera que los diseños por naturaleza son útiles sólo en regiones pequeñas del espectro, a menos que como mencionamos anteriormente se trate de casos muy particulares como es el caso de los espejos metálicos.

Una parte que representa prácticamente el futuro de estos sistemas, es la parte experimental, aunque se han publicado algunos trabajos aplicando diferentes técnicas, todavía queda mucho por hacer. Y no es de dudarse que en muchas empresas en los países desarrollados se encuentren en buen grado de avance, aunque por supuesto, esto no se publica dado el valor que representa.

LITERATURA CITADA

- Aspnes D. E. 1982. *Local-field effects and effective-medium theory: A microscopic perspective*, Am. J. Phys. **50** 704-709.
- Aspnes D. E. 1989. *Optical properties of thin films*, Thin solid films **89** 249-262.
- Bartolomew C. S., H. T. Betz, J. L. Grieser, R. A. Spence, and N. P. Murarka. 1987. *Rugate filters by laser flash evaporation of SiO_xN_y on room temperature polycarbonate*, Soc. Photo-Opt. Eng. **821** 198- 204.
- Barrera R. G., P. Villaseñor-González, W. L. Mochán, M. del Castillo-Mussot, and G. Monsivais. 1989. *Effects of the dispersion of sizes in the dielectric response of composites*, Phys. Rev. B **39** 3522- 3527.
- Bittar A. and M. G. White. 1992. *Design of Ultraviolet Neutral Density Filters using metal-insulator inhomogeneous layers*, Appl. Opt. **31** 6122-6126.
- Bloom A. L. 1981. *Refining and optimization in multilayers*, Appl. Opt. **20** 66-73.
- Boivin G. and D. St. Germain. 1987. *Synthesis of gradient-index profiles corresponding to spectral reflectance derived by inverse Fourier transform*, Appl. Opt. **26** 4209-4213.
- Bovard B. G. 1988. *Derivation of a Matrix Describing a Rugate Dielectric Thin Film*, Appl. Opt. **27**, 1998-2005.
- Bovard B. G. 1993. *Rugate Filter Theory: an Overview*, Appl. Opt. **32** 5427-5442.
- Cohen R. W., G. D. Cody, M. D. Coutts, and B. Abeles. 1973. *Optical Properties of Granular Silver and Gold Films*, Phys. Rev. B **8** 3689-3701.
- Delano E. 1967. *Fourier synthesis of multilayer filters*, J. Opt. Soc. Am. **57** 1529-1533.
- Donovan E. P., D. Van Vechten, A. D. F. Kahn, C. A. Carosella, and G. K. Hubler. 1989. *Near infrared rugate filter fabrication by ion beam assisted deposition of $\text{Si}_{1-x}\text{N}_x$ films*, Appl. Opt. **28** 2940-2944.
- Dobierzewska E. and P. Bieganski. 1993. *Optical properties of discontinuous copper films*, Appl. Opt. **32** 2345-2350.
- Dobrowolski J. A. and S. H. C. Piotrowski. 1982. *Refractive index as a variable in the numerical design of optical thin film systems*, Appl. Opt. **21** 1502-1511.
- Dobrowolski J. A. and D. Lowe. 1978. *Optical thin film synthesis program based on the use of Fourier transforms*, Appl. Opt. **17** 3039-3050.

LITERATURA CITADA (Continuación)

- Dobrowolski J. A. 1986. *Design of optical multilayer coatings at NRCC*, Soc. Photo.-Opt. Eng. **652** 48-56.
- Donovan E. P., D. V. Vetchen, A. D. F. Kahn, C. A. Carosella, and G. K. Hubler. 1989. *Near Infrared Rugate Filter Fabrication by Ion Assisted Deposition of $Si_{1-x}N_x$ Films*, Appl. Opt. **28** 2940-2944.
- Greenham A. C., B. A. Nichols R. M. Wood, N. Noursharg. 1993. *Optical interference filters with continuous refractive index modulations by microwave plasma-assisted chemical vapor deposition*, Opt. Eng. **32** 1018-1024.
- Gunning W. J., R. L. Hall, F. J. Woodberry, W. H. Southwell, and N. S. Gluck. 1989. *Codeposition of Continuous Composition Rugate Filters*, Appl. Opt. **28** 2945-2948.
- Jacobson R. 1966. *Light Reflection from Films of Continuously Varying Refractive Index*, Progress in Optics. **5** 247-286.
- Jacobson R. 1975. *Inhomogeneous and Coevaporated Homogeneous Thin Films for Optical Applications*, Phys. Thin Films **8** 51-98.
- Macleod H. A. 1989. *Thin-Film Optical Filters*, McGraw-Hill Publishing Company, New York, 519 pp.
- Minot M. J. 1976. *Single-layer, gradient refractive index antireflection films effective from 0.35 to 2.5 μ* , **66** 515-519.
- Nikalson G. A., C. G. Granquist and O. Hunderi. 1981. *Effective medium models for the optical properties of inhomogeneous materials*, Appl. Opt. **20** 26-30.
- Palik E. D. 1985. *Handbook of Optical Constants*, Academic Press, Inc., San Diego California, 804 pp.
- Pegis R. J. 1961. *An exact method for multilayer dielectric films*, J. Opt. Soc. Am. **51** 1255-1264.
- Ritchie I. T. and B. Window. 1977. *Applications of Thin Graded-Index to Solar Absorbers*, Appl. Opt. **16** 1438-1443.
- Sossi L. 1974. *A method for the synthesis of multilayer dielectric interference coatings*, EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED FUUSIKA, MATEMATIKA, **23** (3), 229-237. Traducido al inglés por J. A. Dobrowolski, National Research Council, Ottawa Canada.

LITERATURA CITADA (Continuación)

- Southwell W. H. and R. Hall. 1989. *Rugate Filter Side-lobe Suppression Using Quintic and Quintic Rugated Matching Layers*, Appl. Opt. **28** 2929-2951.
- Southwell W. H. 1989. *Spectral Response Calculations of Rugate Filters Using Coupled-Wave Theory*, J. Opt. Soc. Am. A **5** 1558-1564.
- Thomas I. A. 1992. *Method for the preparation of porous silica antireflection coatings varying in refractive index from 1.22 to 1.44*, Appl. Opt. **28** 6145-6148.
- Trotter D. M., Jr., and A. J. Sievers. 1980. *Spectral Selectivity of High Temperature Solar Absorbers*, Appl. Opt. **5** 711-728.
- Villa F., R. Machorro, J. Siqueiros, and L. E. Regalado, 1994. *Admittance of rugate filters derived from a 2x2 inhomogeneous matrix*, Appl. Opt. **33** 2672-2677.
- Villa F., R. Machorro, and A. Martínez, 1995. *Absorbing rugate filters and the 2x2 inhomogeneous matrix*, En prensa en revista Applied Optics.
- Ward L. 1988. *The optical constants of bulk materials and films*, Adam Higler, Bristol, 244 pp.
- Wooten F. 1972. *Optical Properties of Solids*, Academic Press, San Diego California, 260 pp.
- Yada V. N., S. K. Sharma and K. L. Chopra. 1973. *Variable Refractive Index Optical Coatings*, Thin Solid Films **17** 243-252.

Apéndice A: Teoría del medio efectivo

En medios homogéneos e isotrópicos es posible estudiar la propagación del campo electromagnético en términos de la respuesta macroscópica dada por la función dieléctrica, la cual es constante y real en el caso de dieléctricos y compleja en el caso de metales. De manera similar podemos continuar hablando de una respuesta macroscópica en el caso de materiales inhomogéneos, pero dado que la inhomogeneidad resulta de mezclar dos o más materiales que pueden ser metales o dieléctricos se requiere hacer uso de la teoría del medio efectivo, la cual considera los efectos locales sobre el campo en el interior de la mezcla. En general, una mezcla de materiales dieléctricos posee una estructura policristalina [figura 40a] en la cual el tamaño de los cristalitos es mucho menor que la longitud de onda utilizada. Esto permite considerar un efecto puramente macroscópico en la respuesta del material. Por otra parte, las mezclas metal-dieléctrico tienden a comportarse de manera un poco distinta ya que el material de mayor concentración forma un medio continuo, en el cual se encuentra embebido el otro material formando agregados de partículas [figura 41a] cuya forma depende de si el material es dieléctrico o metálico. Para poder hablar de una respuesta macroscópica, en este caso también es necesario que se cumpla la condición de que la longitud de onda sea mucho mayor que las dimensiones de los agregados en el medio de soporte.

Es importante mencionar aquí que existen materiales heterogéneos que no entran en ninguna clase de los materiales descritos, sin embargo podemos decir que gran parte de los compuestos que utilizaremos se ajustan al comportamiento dado por cualquiera de las dos clases. De este modo se habla de dos tipos de modelos; aquellos para mezclas completamente dieléctricas (materiales policristalinos) y mezclas metal-dieléctrico, los cuales constituyen los llamados cermet.

Maxwell Garnett [Aspnes, 1989] fue el primero en proponer a principios de siglo un modelo para explicar las propiedades ópticas de los materiales heterogéneos tipo cermet.

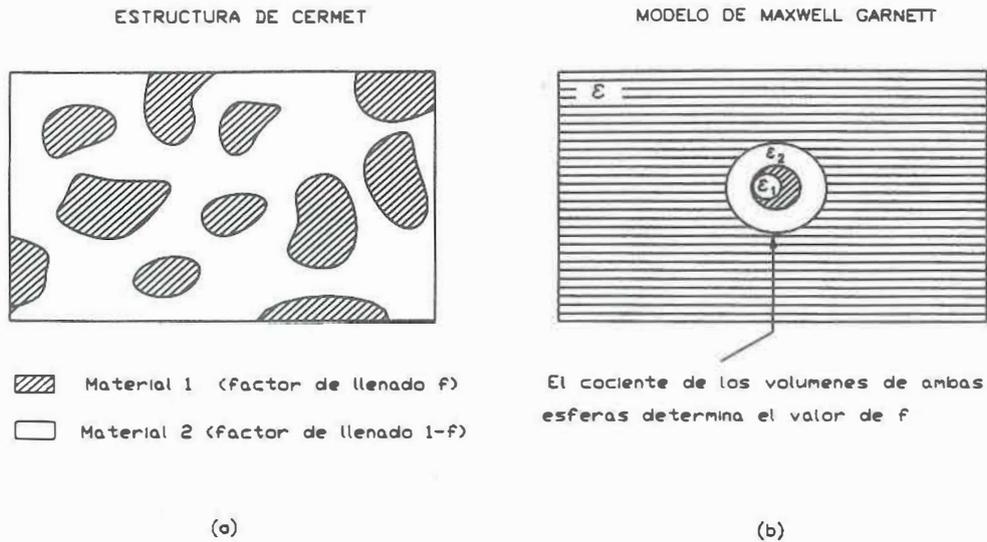


Figura 40: Modelo de Maxwell Garnett.

El problema que él consideró consiste en suponer que las mezclas están constituidas de entidades esféricas (partículas) susceptibles de ser polarizadas por un campo eléctrico externo. En la figura 40b se muestra un esquema de este modelo, la esfera interior corresponde al material de menor concentración y la esfera externa al medio de soporte en el cual se encuentra embebido el primero, el área del rectángulo representa el medio efectivo debido a la respuesta total del medio.

Maxwell Garnett realiza una estimación del campo local en el interior del material el cual en primera aproximación es igual al campo externo y determina con ello la ecuación de dispersión para el medio efectivo en términos de las funciones dieléctricas de sus componentes en forma pura.

La función dieléctrica efectiva ϵ derivada de este modelo está dada por

$$\frac{\epsilon - \epsilon_2}{\epsilon + 2\epsilon_2} = f_2 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}, \quad (183)$$

donde $f_{1,2} = q_{1,2}/(q_1 + q_2)$ es la fracción de volumen de la fase 1 ó la fase 2. Esta ecuación

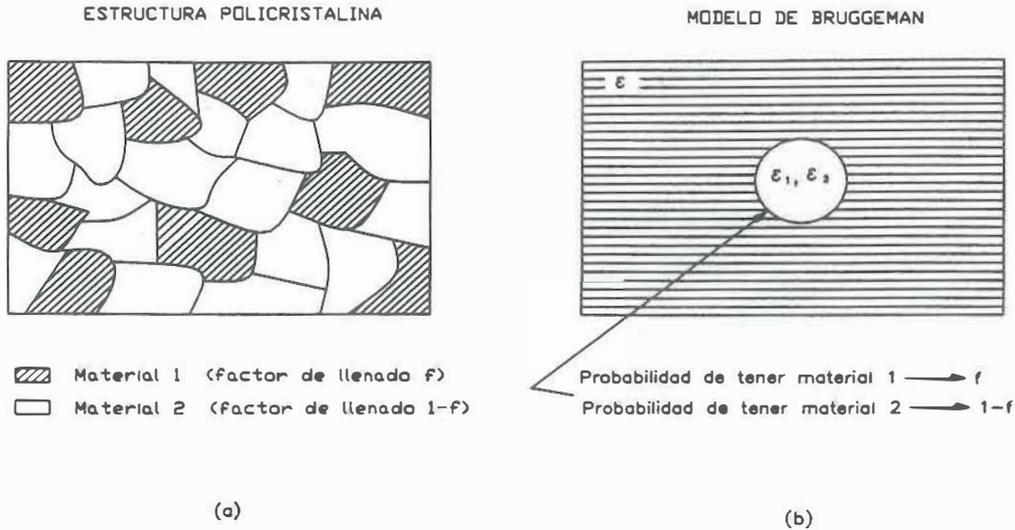


Figura 41: Modelo de Bruggeman.

tiene la desventaja de que es asimétrica y sólo toma en cuenta el caso en el que el material 2 predomina en la mezcla. Tratando de eliminar esta asimetría se puede considerar la ecuación

$$\frac{\epsilon - \epsilon_h}{\epsilon + 2\epsilon_h} = f_1 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_h}{\epsilon_1 + 2\epsilon_h} + f_2 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_h}{\epsilon_2 + 2\epsilon_h}. \quad (184)$$

En este caso el medio h es aquel para el cual la concentración es mayor ya sea el material 1 ó el material 2. Cuando la concentración de ambos materiales es comparable entre sí no queda claro cual material definir como el medio predominante. En este caso Bruggeman propone que el medio de soporte es el propio medio efectivo $\epsilon = \epsilon_h$ con lo cual la ecuación 184 se reduce a

$$f_1 \frac{\epsilon_1 - \epsilon}{\epsilon_1 + 2\epsilon} + f_2 \frac{\epsilon_2 - \epsilon}{\epsilon_2 + 2\epsilon} = 0. \quad (185)$$

En la figura 41a se muestra el modelo en el cual, dado el medio efectivo, una partícula puede ser de uno u otro material de acuerdo a la probabilidad determinada por

la concentración de cada componente. Esto se ajusta bastante bien al comportamiento de materiales policristalinos [figura 41b].

Durante los últimos años estos modelos han evolucionado en teorías que tratan de simular lo mejor posible el tamaño, forma y distribución de las partículas en las mezclas heterogéneas y que realizan un cálculo más preciso del campo interno [Dobierzewska y Biegański, 1993; Nikalson *et al.*, 1981; Aspnes, 1982; Cohen *et al.*, 1973; Jacobson, 1975; Ward, 1988]. Sin embargo, debido a la complejidad de la microestructura de los materiales en general, solamente es posible hacer cálculos aproximados y aún las teorías más completas poseen parámetros ajustables que no se pueden determinar con precisión experimentalmente.

Aspnes [1989] ha resumido claramente cuales deben ser los límites físicos permitidos para la teoría del medio efectivo en términos del efecto de apantallamiento que sufre el campo al viajar a través de un material heterogéneo. Este efecto está relacionado con la forma de las partículas que constituyen el medio; si consideramos una mezcla de dos componentes podemos analizar los dos casos extremos de interacción del campo externo aplicado con la microestructura. Primero supongamos que las superficies de todas las partículas están orientadas preferencialmente en dirección del campo (por ejemplo partículas en forma de aguja). Podemos visualizar esta situación mediante la figura 42a que corresponde al caso de no apantallamiento, de manera que la respuesta del medio está dada por ϵ_1 o por ϵ_2 dependiendo de si estamos en el material 1 ó en el material 2. En general la respuesta promedio se puede expresar en la función dieléctrica como

$$\epsilon_{\parallel} = f_1 \epsilon_1 + f_2 \epsilon_2. \quad (186)$$

Por otra parte si las superficies se encuentran preferencialmente orientadas en la dirección perpendicular (partículas en forma de lámina) al campo, entonces tendremos un apantallamiento máximo [figura 42b], en este caso la función dieléctrica efectiva está

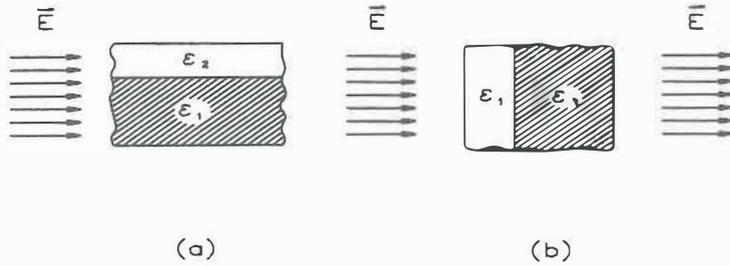


Figura 42: Casos límite para la función dieléctrica. a) Microestructura sin apantallamiento. b) Microestructura con apantallamiento.

dada por

$$\epsilon_{\perp} = \left(\frac{f_1}{\epsilon_1} + \frac{f_2}{\epsilon_2} \right)^{-1} \quad (187)$$

Estas ecuaciones representan los valores límite que puede tomar la función dieléctrica de manera que cualquier modelo está acotado en una cierta región del plano complejo [figura 43] limitada por las llamadas fronteras absolutas de Wiener, las cuales están dadas por una línea recta [ecuación 187] y una semi-circunferencia [ecuación 186] que pasan por los puntos ϵ_1 , ϵ_2 y 0.

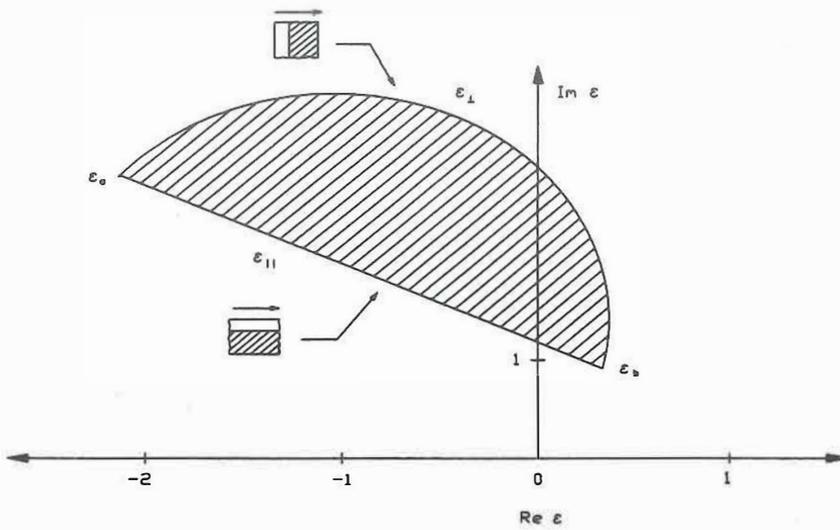


Figura 43: Los valores físicamente permitidos para la función dieléctrica efectiva deben estar dentro de la región sombreada para cualquier modelo. Se ha considerado el caso más general de una mezcla de dos materiales con absorción.