

**Centro de Investigación Científica y de Educación  
Superior de Ensenada, Baja California**



---

**Doctorado en Ciencias  
Ciencias de la Tierra  
con orientación en Geofísica Aplicada**

---

**Reformulación del tensor de fase magnetotelúrico para  
propósitos de monitoreo: aplicación al campo geotérmico de  
Cerro Prieto**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Doctor en Ciencias

Presenta:

**Ana Gabriela Bravo Osuna**

Ensenada, Baja California, México  
2021

Tesis defendida por

**Ana Gabriela Bravo Osuna**

y aprobada por el siguiente Comité

---

**Dr. Enrique Gómez Treviño**

Director de tesis

**Dr. José Manuel Romo Jones**

**Dr. Marco Antonio Pérez Flores**

**Dr. Luis Munguía Orozco**

**Dr. Jorge Ramírez Hernández**



---

**Dr. Alejandro González Ortega**

Coordinador del Posgrado en Ciencias de la Tierra

---

**Dra. Rufina Hernández Martínez**

Directora de Estudios de Posgrado

*Ana Gabriela Bravo Osuna © 2021*

*Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis.*

Resumen de la tesis que presenta **Ana Gabriela Bravo Osuna** como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias de la Tierra con orientación en Geofísica Aplicada.

**Reformulación del tensor de fase magnetotelúrico para propósitos del monitoreo: aplicación al campo geotérmico de Cerro Prieto**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Enrique Gómez Treviño  
**Director de tesis**

El método magnetotelúrico se viene utilizando cada vez más para monitorear cambios en la distribución de la resistividad eléctrica en el subsuelo. Uno de los parámetros preferidos para este fin es la dirección de rumbo, la cual se deriva de la impedancia superficial observada y es muy sensible a cambios en la dirección del flujo de corriente eléctrica en el subsuelo. El método más utilizado para estimar los cambios en el rumbo es la fórmula que se obtiene del tensor de fase porque éste es inmune a las distorsiones galvánicas. Sin embargo, es bien conocido que esta fórmula es inestable para datos con ruido, lo que limita su aplicación para propósitos de monitoreo de cambios temporales, porque en general esto implica la comparación entre dos o más conjuntos de datos muy similares. Uno de los problemas es que el ruido provoca que la distribución de las estimaciones se disperse en los cuatro cuadrantes. Esto se puede manejar acotando todos los valores a un solo cuadrante. Esto se justifica en esta tesis mostrando que la fórmula exacta obtenida del tensor de fase para el rumbo es a la vez una fórmula de mínimos cuadrados. Se muestra que esto es equivalente a definir funciones objetivo para la matriz de valores propios y a seleccionar los mínimos numéricamente. En contraste a la fórmula analítica, el método numérico se puede generalizar para calcular rumbos utilizando cualquier número de periodos, permitiendo el cálculo de compromisos entre variancia y resolución. El método que se propone en esta tesis se ilustra aplicándolo a datos sintéticos y a datos de campo recolectados en una arreglo de monitoreo magnetotelúrico instalado en el Valle de Mexicali, México.

**Palabras clave:** Monitoreo magnetotelúrico, Tensor de fase, Rumbo de Swift, Distorsión galvánica

Abstract of the thesis presented by **Ana Gabriela Bravo Osuna** as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Earth Sciences with orientation in Applied Geophysics.

**Reframing the magnetotelluric phase tensor for monitoring purposes: application to the Cerro Prieto geothermal field**

Abstract approved by:

---

Dr. Enrique Gómez Treviño  
Thesis Director

The magnetotelluric method is increasingly being used to monitor electrical resistivity changes in the subsurface. One of the preferred parameters derived from the surface impedance is the strike direction, which is very sensitive to changes in the direction of the subsurface electrical current flow. The preferred method for estimating the strike changes is that provided by the phase tensor because it is immune to galvanic distortions. However, it is also a fact that the associated analytic formula is unstable for noisy data, something that limits its applicability for monitoring purposes, because in general, this involves a comparison of two or more very similar data sets. One of the issues is that the noise provokes dispersion of the distribution of estimates between the four quadrants. This can be handled by limiting all values to the same quadrant by adding or subtracting the appropriate amount. This is justified by showing that the analytic formula is also a least squares solution. This is equivalent to define penalty functions for the matrix of eigenvalues and then select the minima numerically. Contrary to the analytic formula, the numerical approach can be generalized to compute strikes using windows of any number of periods, thus providing tradeoffs between variance and resolution. The performance of the proposed approach is illustrated by its application to synthetic data and to real data from a monitoring array in the Mexicali Valley, México.

**Keywords:** Magnetotelluric monitoring, Phase tensor, Swift strike, Galvanic distortion



## **Agradecimientos**

A mi asesor, el Doctor Enrique Gómez Treviño, por su gran apoyo y paciencia en el desarrollo de esta tesis, por sus valiosos consejos, observaciones y reflexiones, por compartir su experiencia en el quehacer científico.

A los miembros de mi comité de tesis: Dr. José Manuel Romo Jones, Dr. Marco Antonio Pérez Flores, Dr. Luis Munguía Orozco y Dr. Jorge Ramírez Hernández. Su apoyo y sus consejos han sido de mucho valor para mí.

A CONACYT, por el apoyo económico para la realización de mis estudios de Doctorado.

A CICESE, a su personal técnico y administrativo.

## Tabla de contenido

	Página
Resumen en español .....	ii
Resumen en inglés .....	iii
Dedicatorias .....	iv
Agradecimientos .....	v
Lista de figuras.....	vii
Lista de tablas .....	xi
<b>Capítulo 1. Introducción</b>	
1.1 Antecedentes.....	1
1.2 Justificación .....	2
1.3 Hipótesis.....	4
1.4 Objetivos.....	4
1.4.1 Objetivo general .....	5
1.4.2 Objetivos específicos .....	5
<b>Capítulo 2. Metodología</b>	
2.1 El tensor de fase .....	6
2.2 Reformulación del tensor de fase .....	16
<b>Capítulo 3. Resultados</b>	
3.1 Ventanas de varios periodo.....	22
3.2 Rumbo variable con el periodo.....	25
3.3 Aplicación a datos sintéticos diferenciales .....	28
3.4 Aplicación a datos de campo .....	34
<b>Capítulo 4 . Discusión y conclusiones .....</b>	<b>34</b>
<b>Literatura citada .....</b>	<b>37</b>
<b>Apéndice .....</b>	<b>40</b>

## Lista de figuras

- Figura 1. Los elementos del tensor de impedancias corresponden al sitio 15 de conjunto de datos COPROD2S1. Las impedancias originales se distorsionaron y se añadió ruido aleatorio como se indica. a) Partes reales. b) Partes imaginarias. Los valores se calcularon como la media de 30 realizaciones por periodo con sus correspondientes desviaciones estándar. Las líneas continuas unen los valores libres de error que en la mayoría de los casos son prácticamente idénticos a los valores medios. .... 10
- Figure 2. a) Elementos diagonales del tensor de fase derivados del tensor de impedancia que se muestra en la figura 1. El código de color es  $\Phi_{11}$  verde y  $\Phi_{22}$  amarillo. La línea negra continua corresponde a valores sin errores. b) Los elementos fuera de la diagonal correspondientes. El código de color es  $\Phi_{12}$  verde y  $\Phi_{21}$  amarillo. La línea negra punteada corresponde a valores sin error. .... 11
- Figura 3. a) Combinación de los elementos tensores de fase que componen la razón en la fórmula para el ángulo  $\alpha$ . El código de color es  $\Phi_{11} - \Phi_{22}$  en verde y  $\Phi_{12} + \Phi_{21}$  en amarillo. La línea negra continua corresponde a valores sin errores. b) Combinación correspondiente para el ángulo  $\beta$ . El código de color es  $\Phi_{11} + \Phi_{22}$  en verde y  $\Phi_{12} - \Phi_{21}$  en amarillo. La línea negra punteada corresponde a valores libres de error. .... 12
- Figura 4. a) Las razones que componen las fórmulas para los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . El código de color es verde para el ángulo  $\alpha$  y amarillo para el ángulo  $\beta$ . La línea negra continua corresponde a valores sin error. b) Los resultados finales del rumbo  $\theta = \alpha - \beta$ . La línea roja corresponde a estimaciones suponiendo un error del 1% y utilizando 30 realizaciones. La línea negra corresponde al 1% de error y 1000 realizaciones. La línea azul punteada corresponde a un error de 0.01% y 30 realizaciones. .... 14
- Figura 5. El análisis de la fórmula del rumbo indica que está sesgada con respecto al ruido aleatorio: a) los rumbos individuales para cada realización se grafican para dos niveles de error. Las líneas verdes corresponden al 1% de error y 1000 realizaciones. Las líneas amarillas corresponden al 5% de error y 1000 realizaciones. Los datos se distorsionaron suponiendo  $twist = 20^\circ$  y  $shear = 30^\circ$ . Las líneas punteadas representan el rumbo verdadero calculado con un error de 0.01%. b) La línea negra representa las estimaciones de rumbo con un error del 5% y 30 realizaciones. La línea roja representa las estimaciones utilizando un error del 5% y 1000 realizaciones. .... 15
- Figura 6. Típica migración de cuadrantes debido a ruido en los datos al usar la fórmula analítica. La línea continua representa las funciones de penalización  $C_{L_2}(\theta)$  para un periodo de 10 s y dos realizaciones distintas (ilustradas en rojo y negro). Los círculos corresponden a los estimados usando la fórmula analítica. .... 19
- Figura 7. a) Funciones de penalización y concentración dentro del cuadrante I del rumbo estimado usando la fórmula analítica. Las líneas continuas representan las funciones de penalización para un periodo de 10 s y siete realizaciones. Los círculos rojos representan el rumbo de la fórmula analítica. b) La curva negra representa las estimaciones para todos los periodos usando minimización numérica y la curva roja usando la fórmula analítica. La línea punteada verde corresponde al rumbo verdadero. .... 20

- Figura 8. a) Estimaciones minimizando la ecuación 17 suponiendo ventanas de dos periodos. La línea punteada verde representa el rumbo verdadero. b) Estimaciones minimizando la ecuación 17 suponiendo ventanas de dos periodos. La línea punteada verde representa el rumbo verdadero. .... 23
- Figura 9. Desempeño relativo del método de mínimos cuadrados usando el tensor de impedancia (ecuación 10) y al tensor de fase (ecuación 16). a) Sin distorsiones galvánicas. La línea verde punteada representa el rumbo verdadero. La línea continua representa las estimaciones utilizando el tensor de impedancia (Mínimos cuadrados en tensor de impedancia). La línea roja corresponde a las estimaciones utilizando la fórmula analítica constreñida derivada del tensor de fase (Mínimos cuadrados en tensor de fase). b) Con distorsiones galvánicas. La línea verde punteada representa el rumbo verdadero. La línea negra continua representa las estimaciones utilizando el tensor de impedancia (Mínimos cuadrados en tensor de impedancia). La línea roja corresponde a las estimaciones utilizando la fórmula analítica derivada del tensor de fase (Mínimos cuadrados en tensor de fase). .... 24
- Figura 10. Variación en la función de penalización (ecuación 16) para un perfil con rumbos de 20, 30 y 40 grados. a) Sin agregar ruido a las impedancias. Los mínimos de la función de penalización caen, como deberían, exactamente en los rumbos verdaderos. b) Con ruido aleatorio del 1%. Los mínimos en este caso se extienden alrededor de los valores verdaderos. El grado de dispersión en cada caso refleja la exactitud y precisión de las estimaciones de rumbo. La estimación se acotó al primer cuadrante. .... 27
- Figura 11. Las estimaciones de rumbo corresponden a las funciones de penalización mostradas en la Figura 10b, excepto que en este caso se usaron 30 realizaciones. .... 28
- Figura 12. Estimación de rumbo para el caso de una variación temporal de un grado: a) aplicación sin restricciones de la fórmula analítica (ecuación 6.). La línea negra corresponde a las estimaciones para el caso inicial con 20, 30 y 40 grados. La línea roja corresponde a las estimaciones del perfil perturbado de 21, 31 y 41 grados. b) Usando la versión reformulada para ventanas de un periodo (ecuación 16). La línea negra corresponde a las estimaciones para el caso inicial de 20, 30 and 40 grados. La línea roja corresponde a las estimaciones para el caso perturbado con 21, 31 y 41 grados. En ambos casos, las líneas discontinuas representan los correspondientes valores verdaderos. .... 29
- Figura 13. Estimación de rumbo mediante ventanas de diferentes anchos utilizando la ec. 17. Las líneas punteadas corresponden al caso base de 20, 30 y 40 grados, y las continuas al caso perturbado de 21, 31 y 41 grados. a) Ventanas de cuatro y seis periodos. b) Ventanas de ocho y diez periodos. .... 30
- Figura 14. Estimaciones de rumbo utilizando datos de campo de dos semanas en años consecutivos usando ventanas de un periodo. Las líneas rojas corresponden al año 2017 y las líneas azules al año 2018. .... 32
- Figura 15. Estimaciones de rumbo utilizando datos de campo de dos semanas en dos años consecutivos. a) Usando ventanas de 6 periodos. b) Usando ventanas de 12 periodos. c) Usando ventanas de 18 periodos. Las líneas rojas corresponden al año 2017 y las líneas azules al año 2018. .... 33

## Lista de tablas

<b>Tabla 1.</b> La descomposición Groom and Bailey (1989) del tensor de impedancia. $\mathbf{Z}_m$ representa el tensor de impedancia medido, $\mathbf{R}$ es la matriz de rotación y $\theta$ el rumbo 2D. Los parámetros de distorsión son <i>twist</i> , <i>shear</i> y los factores de escalamiento $a$ y $b$ . $\mathbf{Z}_2$ es el tensor de impedancia 2D sin distorsión. .....	9
---	---

# Capítulo 1. Introducción

---

## 1.1 Antecedentes

El método magnetotelúrico (MT) es una técnica de exploración geofísica que utiliza fuente natural para obtener información de las propiedades eléctricas del subsuelo y el modo en que están distribuidas a profundidad. En este y en el siguiente párrafo se describen brevemente algunas de las principales características del método. No se incluyen citas a autores particulares por tratarse de generalidades. Para más detalles se recomiendan consultar los textos recientes de Simpson y Bahr (2005) y Chave y Jones (2012). La fuente que proporciona la energía en este método geofísico es el campo electromagnético de origen natural, el que resulta de la interacción entre el Sol y la Tierra, o en otras palabras, la interacción del viento solar con el campo magnético terrestre (Chave y Jones, 2012). A latitudes medias el campo magnético puede considerarse una onda plana con incidencia perpendicular a la superficie terrestre. No así en los polos ni en el ecuador (Simpson y Bahr, 2005). Volviendo a las latitudes medias, el método MT funciona gracias a que las ondas electromagnéticas de frecuencias bajas (un rango que va de  $10^{-4}$  a  $10^4$  Hz) logran penetrar en la tierra incluso decenas de kilómetros. En respuesta a estas ondas incidentes la tierra produce un segundo campo magnético por la circulación de corrientes eléctricas conocidas como corrientes telúricas. El método MT se basa en las ecuaciones de Maxwell que describen los fenómenos electromagnéticos y en algunas suposiciones que simplifican los cálculos.

Una instalación MT consiste en un aparato registrador de series de tiempo de las componentes de los campos eléctricos y magnéticos. Para medir estas componentes en un sitio, se colocan dipolos alineados en ángulo recto, generalmente orientados N-S y E-O para medir el campo eléctrico. Y para el campo magnético, se requiere la instalación de tres bobinas perpendiculares entre sí (N-S, E-O y arriba-abajo). Las series de tiempo registradas son transformadas al dominio de la frecuencia para estimar una función de transferencia entre campos eléctricos y magnéticos, llamada impedancia de superficie, la cual está relacionada con la distribución de resistividad en el subsuelo. Posteriormente, a partir de la impedancia se puede derivar la estructura resistiva del subsuelo, la cual debe compararse con otros estudios y tomar en cuenta la geología del sitio. El método MT tiene importantes ventajas sobre otros métodos de exploración. Su fuente, por ser de origen natural, lo hace un método relativamente económico. El alcance que tiene es del orden de decenas de kilómetros bajo la superficie de la tierra.

El método magnetotelúrico se fundamenta en los trabajos de Andrei Nikolaevich Tikhonov, publicados a partir de 1950, donde se propone una manera de explorar el subsuelo, idea que después se aplicó para encontrar características eléctricas de capas profundas en el terreno. Yoshio Kato y Takehiko Kikuchi (1950a, 1950b y 1951), y Tsuneji Rikitake (1950a, 1950b, 1950c y 1950d) reconocieron la existencia de corrientes inducidas en el terreno debidas a cambios en el campo magnético terrestre, y contribuyeron al estudio del interior de la tierra estudiando campos electromagnéticos. Louis Cagniard, en 1953, publicó las bases del método magnetotelúrico para la prospección geofísica y proporcionó fórmulas para encontrar curvas de resistividad. El método, en sus orígenes, se pensó como un modelo de capas horizontales con una respuesta de terreno para cada periodo. Cuando el terreno tiene variaciones hacia abajo y hacia un lado, la respuesta de la tierra es un tensor de impedancias complejo de  $2 \times 2$  que relaciona las componentes horizontales del campo eléctrico con las correspondientes del campo magnético (Cantwell, 1960). El tensor de impedancias depende del sistema de coordenadas por lo que rotándolo se puede encontrar el ángulo que cumpla con determinadas características de sus elementos. Uno de los ángulos que se puede determinar es el rumbo de la estructura que esté afectando al tensor. Como se verá más adelante, la determinación del rumbo no es un problema trivial debido a diversas circunstancias que se presentan en la práctica. En lo que sigue se describen brevemente los principales desarrollos al respecto y se justifica por qué es necesario mejorar su desempeño.

La fórmula preferida para fines de monitoreo es la que se deriva del tensor de fase (por ejemplo, Peacock et al. 2012; 2013). Sin embargo, en las aplicaciones del método magnetotelúrico con propósitos de monitoreo resulta necesario mejorar las determinaciones del rumbo. Una de las razones de que esta fórmula sea muy utilizada, es que no existe ningún supuesto sobre la dimensionalidad mientras todos los otros enfoques suponen estructuras 2D. Otra de las razones es que es inmune a las distorsiones galvánicas, algo que no tiene la fórmula de Swift. El inconveniente es la inestabilidad que presenta con datos ruidosos (Jones, 2012). Esto limita su uso en aplicaciones de monitoreo porque los datos deben ser muy precisos si se quiere garantizar una buena estimación de cambios en el rumbo.

## 1.2 Justificación

Cuando uno de los ejes coordenados es paralelo al rumbo estructural, los elementos de la diagonal del tensor de impedancias son ceros. Por esta razón, el enfoque de Swift (1967) propone rotar el tensor medido para encontrar el ángulo que minimiza la diagonal, es decir se busca el ángulo que mejor se ajuste

al criterio bidimensional (2D). Este enfoque conduce a una fórmula analítica. Por su parte, Bahr (1988) propone una manera de estimar distorsiones locales en la que además se puede estimar el rumbo 2D. Bahr (1988) desarrolló una fórmula analítica imponiendo la condición de que los elementos de las columnas del tensor de impedancia deben tener las mismas fases en el caso de estructuras 2D. Groom y Bailey (1989) propusieron una aproximación que ajusta numéricamente, en el sentido de mínimos cuadrados, las impedancias medidas con un modelo con distorsiones locales que incluye el ángulo que alinea el sistema coordenado al caso 2D. La solución de Groom y Bailey no es una fórmula analítica. Por su parte, el tensor de fase de Caldwell et al. (2004), se deriva una fórmula analítica para el ángulo que alinea el sistema al rumbo estructural 2D.

Las distorsiones galvánicas son efectos que producen las cargas eléctricas acumuladas en la discontinuidad entre el terreno y un cuerpo somero con resistividad diferente a la de su entorno, o por desniveles en el terreno. Si el cuerpo somero tiene una resistividad más baja que la tierra que lo rodea, se producirá un efecto de canalización de corriente. Por el contrario, si el objeto es más resistivo, se produce una deflexión de corriente. Se produce un campo secundario que afecta al campo eléctrico total (Jiracek, 1990). Las distorsiones galvánicas tienen como efecto el corrimiento de las curvas de resistividad aparente (aumentan o disminuyen sus valores independientemente del periodo), lo que conduce a interpretaciones erróneas (Simpson y Bahr, 2005).

Los enfoques descritos anteriormente para la determinación del rumbo difieren entre sí en varios aspectos y son, también, similares en otros. Si se consideran las similitudes entre los enfoques de Bahr y el tensor de fase, ambos fueron diseñados para evitar el efecto de las distorsiones galvánicas. Además, imponen criterios rigurosos tales que sólo pueden cumplirse con datos libres de errores. Una tercera similitud es que en ambos casos las aproximaciones conducen a fórmulas analíticas.

Los enfoques de Swift y Groom-Bailey se asemejan en que buscan el mejor ajuste en el sentido de mínimos cuadrados, en lugar del ajuste exacto. Para Swift, los elementos diagonales no están constreñidos a ser ceros, sino a tener la amplitud mínima posible. Groom-Bailey también ajustan los parámetros de distorsión y el rumbo 2D utilizando el criterio de mínimos cuadrados.

Los métodos descritos se desarrollaron pensando en obtener información de la dirección rumbo, y no tanto en detectar cambios temporales en el mismo. La contribución del presente trabajo consiste en mejorar la estimación de rumbo porque la aplicación del método MT se ha extendido al estudio y monitoreo de zonas volcánicas (Aizawa et al., 2013), inyección de fluidos en sistemas geotérmicos

mejorados (Didana et al., (2019); Peacock (2012); Thiel (2017)), zonas geotérmicas (Cortés-Arroyo et al., 2018) y sitios donde se quiere conocer y describir dinámica del subsuelo. Los cambios temporales del rumbo en estas aplicaciones son típicamente muy pequeños por lo que se requiere mejorar el desempeño de los métodos existentes.

### **1.3 Hipótesis**

Cuando las impedancias utilizadas están libres de errores, todos los enfoques para encontrar el rumbo deben producir el mismo resultado. Sin embargo, cuando los datos tienen errores, en muchos casos resulta conveniente el criterio de mínimos cuadrados al reconocer desde el principio la posibilidad de inconsistencias. La hipótesis de esta tesis es que la imposición del criterio de mínimos cuadrados mejorará las estimaciones que se obtengan de la fórmula analítica propuesta por Caldwell et al. (2004) para el rumbo a partir de impedancias magnetotelúricas.

### **1.4 Objetivos**

Todas las fórmulas analíticas proporcionan estimaciones del rumbo periodo por periodo. Es decir, cada estimación y su varianza son independientes de las demás. Sin embargo, es posible vincular periodos contiguos suponiendo variaciones suaves del rumbo sobre los periodos y producir un perfil estable a la manera de la filosofía de Occam (por ejemplo, Constable et al., 1987). Muñiz et al. (2017) exploraron este camino para el tensor de fase utilizando como semilla las estimaciones que están mejor acotadas. Otra posibilidad de estabilización está ejemplificada por el enfoque de Groom-Bailey generalizado por McNeice y Jones (2001); las estimaciones se pueden hacer periodo por periodo, para un número determinado de periodos o para todos los periodos juntos. La varianza de las estimaciones generalmente disminuye a medida que aumenta el número de periodos. En cierto modo, esto sigue la filosofía de Backus y Gilbert (1968) en el sentido de que la varianza puede mejorarse a costa de la resolución.

### 1.4.1 Objetivo general

Actualmente, es casi un requisito incluir elipses del tensor de fase como parte de la interpretación de cualquier conjunto de datos. Por lo general, se dibujan sobre mapas del área de estudio para revelar la direccionalidad de estructuras profundas o poco profundas, según el periodo de interés (por ejemplo, Martí et al., 2020; Comeau et al., 2020). No es raro que los ejes de las elipses apunten en direcciones inconsistentes debido al ruido aleatorio. Sin duda alguna, cualquier mejora a este respecto sería bienvenida.

El objetivo general es disminuir las incertidumbres en la estimación de los rumbos más allá de la aplicación de los métodos existentes.

### 1.4.2 Objetivos específicos

Todas las fórmulas analíticas proporcionan estimaciones del rumbo periodo por periodo. Es decir, cada estimación y su varianza son independientes de las demás. Sin embargo, es posible vincular periodos contiguos suponiendo variaciones suaves del rumbo durante un periodo y producir un perfil estable a la manera de la filosofía de Occam (por ejemplo, Constable et al., 1987). Muñiz et al. (2017) exploraron este camino para el tensor de fase utilizando como semilla las estimaciones que están mejor acotadas. Otra posibilidad de estabilización está ejemplificada por el enfoque de Groom-Bailey generalizado por McNeice y Jones (2001); las estimaciones se pueden hacer periodo por periodo, para un número determinado de periodos o para todos los periodos juntos. La varianza de las estimaciones generalmente disminuye a medida que aumenta el número de periodos. De hecho, como lo muestra Delgadillo Jauregui (2019) utilizando diferentes fórmulas, las variancias disminuyen cuando se utilizan todos los datos a la vez en la determinación del rumbo. Esto sigue la metodología de Backus y Gilbert (1968) en el sentido de que en la estimación de propiedades del subsuelo se pueden definir cantidades en que la varianza puede mejorarse a costa de la resolución.

En vista de lo anterior los objetivos particulares que se plantean son: 1) entender el efecto del ruido en la fórmula analítica del rumbo derivada del tensor de fase y mejorar su desempeño, y 2) generalizar el criterio del tensor de fase para un número determinado de periodos o para todos los periodos a la vez.

## Capítulo 2. Metodología

---

### 2.1 El tensor de fase

La historia del método magnetotelúrico abunda en ejemplos donde el problema a resolver consiste en neutralizar efectos secundarios ajenos a la exploración del subsuelo. Por ejemplo, considere las variaciones caóticas de la intensidad de la fuente al realizar mediciones telúricas. Al incluir el campo magnético en el método telúrico (Cagniard, 1953) las variaciones fueron neutralizadas. A su vez, las polarizaciones también caóticas de la fuente fueron atendidas por el tensor de impedancia (Cantwell, 1960). La distribución no menos caótica de pequeñas heterogeneidades cercanas a las superficie que producen distorsiones galvánicas fue neutralizada por el tensor de fase (Caldwell et al. 2004).

En relación con las distorsiones, el tamaño y la profundidad de las heterogeneidades que las causan, deben ser menores a la profundidad de penetración de los campos (e.g. Bahr, 1988; Groom & Bailey, 1989). A fin de cuentas, la inducción electromagnética local es pequeña, por lo que sólo los efectos galvánicos debidos a cargas eléctricas son importantes. Físicamente, la fuente de las cargas es el campo eléctrico no distorsionado, por lo que los efectos galvánicos deben ser proporcionales a la intensidad de la fuente. En resumen, que el campo eléctrico medido o distorsionado  $\mathbf{E}_m$  se puede modelar como  $\mathbf{E}_m = \mathbf{CE}$ , donde  $\mathbf{C}$  es una matriz de distorsión y  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico no distorsionado. En términos de las componentes  $x$  y  $y$

$$\begin{pmatrix} E_{xm} \\ E_{ym} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Los elementos de la matriz de distorsión  $\mathbf{C}$  son reales en nombre de la suposición de un gran *skin depth*. Las cargas están en fase y siguen el campo eléctrico no distorsionado. Los elementos diagonales dan cuenta de la distorsión producida por un componente al mismo componente, mientras que fuera de la diagonal distorsionan componentes ortogonales. Para ver cómo los campos eléctricos distorsionados afectan al tensor de impedancia, considere los campos no distorsionados expresados en términos de impedancias

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix}, \quad (2)$$

donde  $H_x$  y  $H_y$  son los componentes correspondientes del campo magnético y  $Z_{ij}$  representa los elementos del tensor de impedancia. El tensor de impedancia distorsionado se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} Z_{xxm} & Z_{xym} \\ Z_{yxm} & Z_{yym} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{22} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Los elementos reales de la matriz de distorsión afectan sólo la amplitud de las impedancias, pero esto es sólo para los productos individuales. La combinación lineal que implica el producto matricial puede producir impedancias distorsionadas que no se parecen a ninguna de las originales. Esto explica la importancia del tema y los intentos de neutralizar los efectos de la matriz de distorsión. La fórmula desarrollada por Bahr (1988) para la estimación del rumbo 2D podría considerarse un precursor de la fórmula más general derivada del tensor de fase. Sucede que para el rumbo 2D, el producto de la matriz de distorsión y el tensor de impedancia tiene una propiedad especial: los elementos de cada columna deben tener la misma fase. Al imponer esta condición a la impedancia medida, Bahr (1988) desarrolló su fórmula para el rumbo, que se mantiene independientemente de la matriz de distorsión. El tensor de fase de Caldwell et al. (2004) generaliza esta fórmula y proporciona otros parámetros igualmente inmunes a las distorsiones. Al separar el tensor de impedancia  $\mathbf{Z}$  en términos de sus partes real  $\mathbf{X}$  e imaginaria  $\mathbf{Y}$ , tal que  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$ , el tensor de fase queda definido, sin importar la dimensionalidad como:

$$\Phi = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}, \quad (4)$$

que de manera explícita es:

$$\begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{X})} \begin{pmatrix} X_{22}Y_{11} - X_{12}Y_{21} & X_{22}Y_{12} - X_{12}Y_{22} \\ X_{11}Y_{21} - X_{21}Y_{11} & X_{11}Y_{22} - X_{21}Y_{12} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

donde  $\det(\mathbf{X}) = X_{11}X_{22} - X_{21}X_{12}$  es el determinante de  $\mathbf{X}$ .

La impedancia distorsionada  $\mathbf{Z}_m$  se puede expresar como  $\mathbf{Z}_m = \mathbf{CZ}$ . Al separar el producto en sus partes real e imaginaria  $\mathbf{Z}_m = \mathbf{CX} + i\mathbf{CY}$ , el tensor de fase distorsionado se puede escribir como  $\Phi_m = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{CY} = \Phi$ . Esto es, las distorsiones galvánicas que afectan tan severamente al tensor de impedancia no tienen ningún efecto sobre el tensor de fase. Esta propiedad es en gran parte responsable de su popularidad en varias aplicaciones del método magnetotelúrico. Una de estas aplicaciones es la

determinación del rumbo. Con esta finalidad, Caldwell et al. (2004) desarrollan su fórmula analítica para el rumbo  $\theta$  como

$$\theta = \alpha - \beta, \quad (6)$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\Phi_{12} + \Phi_{21}}{\Phi_{11} - \Phi_{22}} \right) \quad (7)$$

y

$$\beta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\Phi_{12} - \Phi_{21}}{\Phi_{11} + \Phi_{22}} \right). \quad (8)$$

La fórmula para el rumbo proporcionada por el tensor de fase se reduce a la de Bahr (1988) cuando  $\beta = 0$ . En el sentido, mencionado anteriormente, que éste último es un caso especial del primero. El interés está en la fórmula más general, particularmente en relación con su vulnerabilidad al ruido aleatorio. La curiosidad surgió al analizar el desempeño de varias fórmulas de rumbo presentadas por Jones (2012).

Para ilustrar paso a paso cómo la fórmula del rumbo es inestable, se preparó una secuencia de figuras utilizando datos sintéticos que corresponden al sitio 15 del conjunto de datos COPROD2S1 (Varenstov, 1998). La Figura 1 muestra los elementos del tensor de impedancia que fueron distorsionados de los originales usando la descomposición de  $\mathbf{C}$  dada por Groom y Bailey (1989). Se eligieron los parámetros de distorsión llamados *twist* y *shear*, que junto con el rumbo, se expresan en grados. Los valores particulares son *twist*=20° y *shear*=30°, y una rotación general de coordenadas de -30°, de modo que el rumbo sea 30°. Además, se añadió un ruido aleatorio relativamente pequeño con distribución normal a las impedancias resultantes. El ruido se calculó como el 1% de las impedancias fuera de la diagonal, y se agregó a todos los elementos. Como se indicó anteriormente, el objeto del ejercicio es explorar cómo estos pequeños errores se amplifican al calcular el rumbo.

**Tabla 1.** La descomposición Groom and Bailey (1989) del tensor de impedancia.  $Z_m$  representa el tensor de impedancia medido,  $R$  es la matriz de rotación y  $\theta$  el rumbo 2D. Los parámetros de distorsión son *twist*, *shear* y los factores de escalamiento  $a$  y  $b$ .  $Z_2$  es el tensor de impedancia 2D sin distorsión.

---

### Descomposición Groom-Bailey

---

$$Z_m = RTSAZ_2R^T$$

#### Rotación

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

#### Shear

$$S = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} \begin{pmatrix} 1 & e \\ e & 1 \end{pmatrix}$$

#### Twist

$$T = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

#### Escalamiento

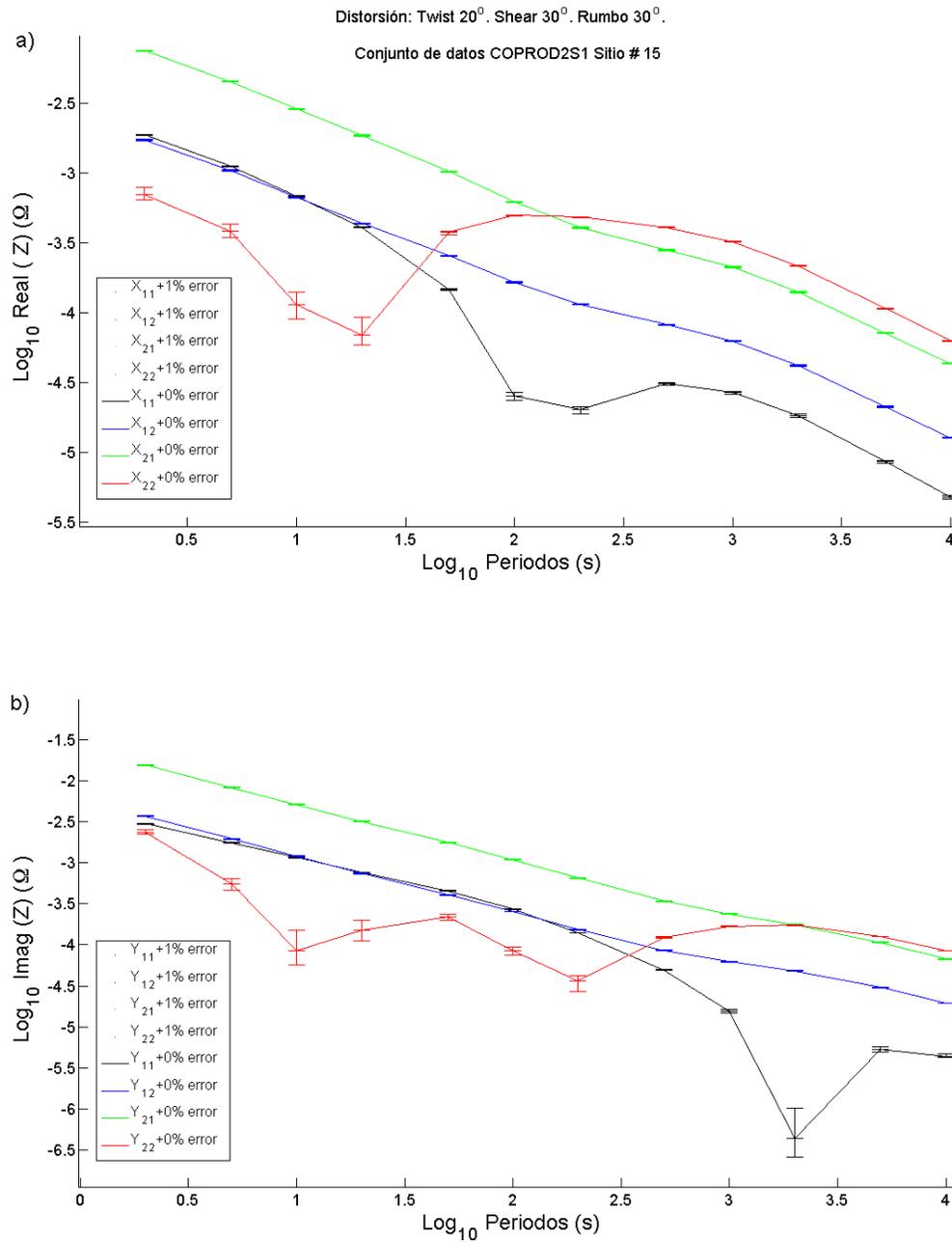
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

#### Impedancias 2D

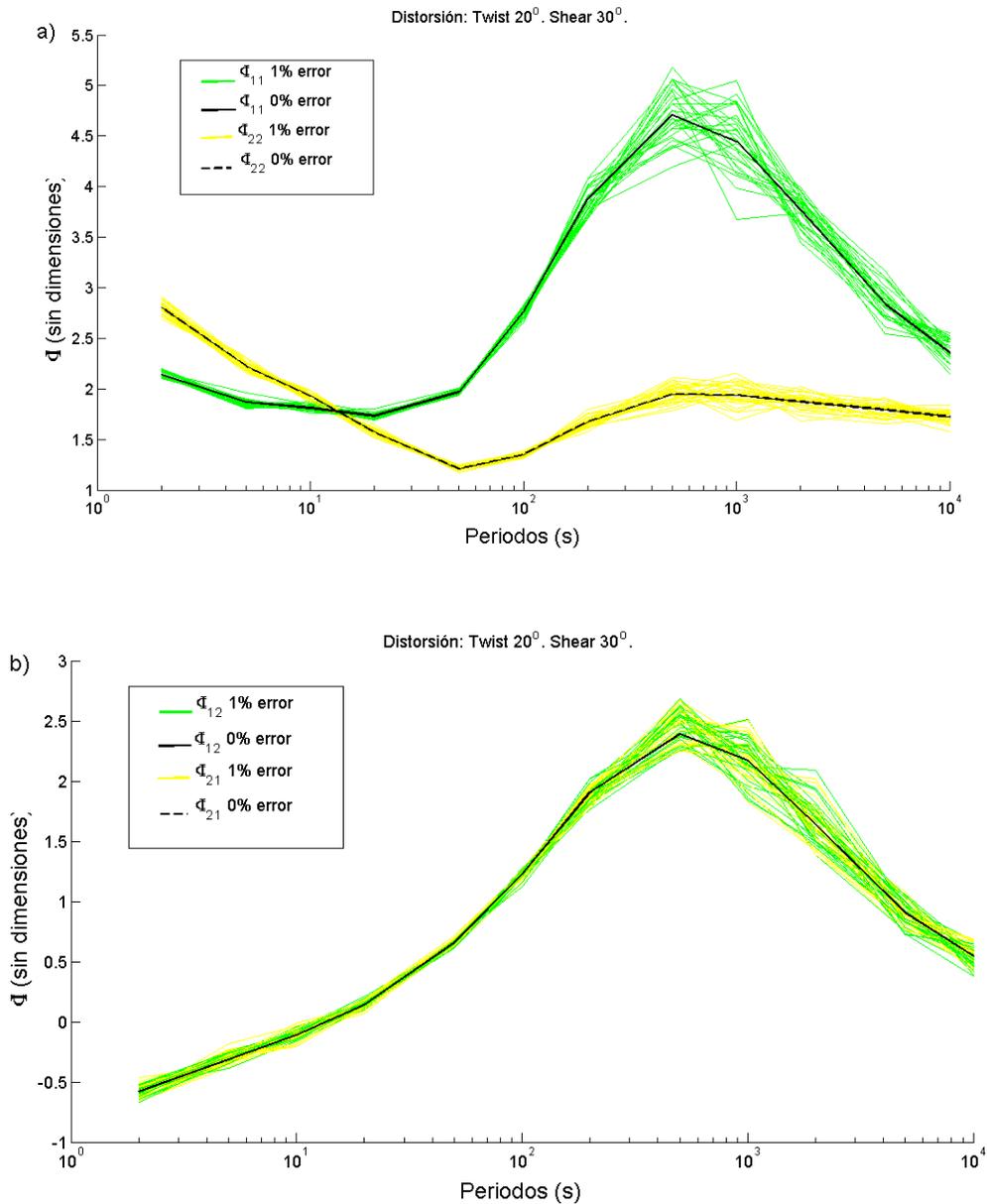
$$AZ_2 = \begin{pmatrix} 0 & aZ_{2xy} \\ bZ_{2yx} & 0 \end{pmatrix}$$


---

El primer nivel de cálculos implica utilizar las impedancias en la fórmula para el tensor de fase dado por la ecuación 5. Los elementos diagonales calculados se muestran en la Figura 2a, donde se puede observar que están casi libres de errores en los primeros seis periodos y son más ruidosos en los últimos seis. Los elementos fuera de la diagonal que se muestran en la Figura 2b se comportan de manera muy similar. Es importante notar que para los seis primeros periodos los elementos son iguales, lo que indica que el tensor es simétrico. De hecho, deberían ser iguales para todos los periodos porque se extrajeron de un modelo 2D. El hecho de que no lo sean para los últimos seis periodos se debe por completo al ruido y a las distorsiones que introducen los efectos 3D.



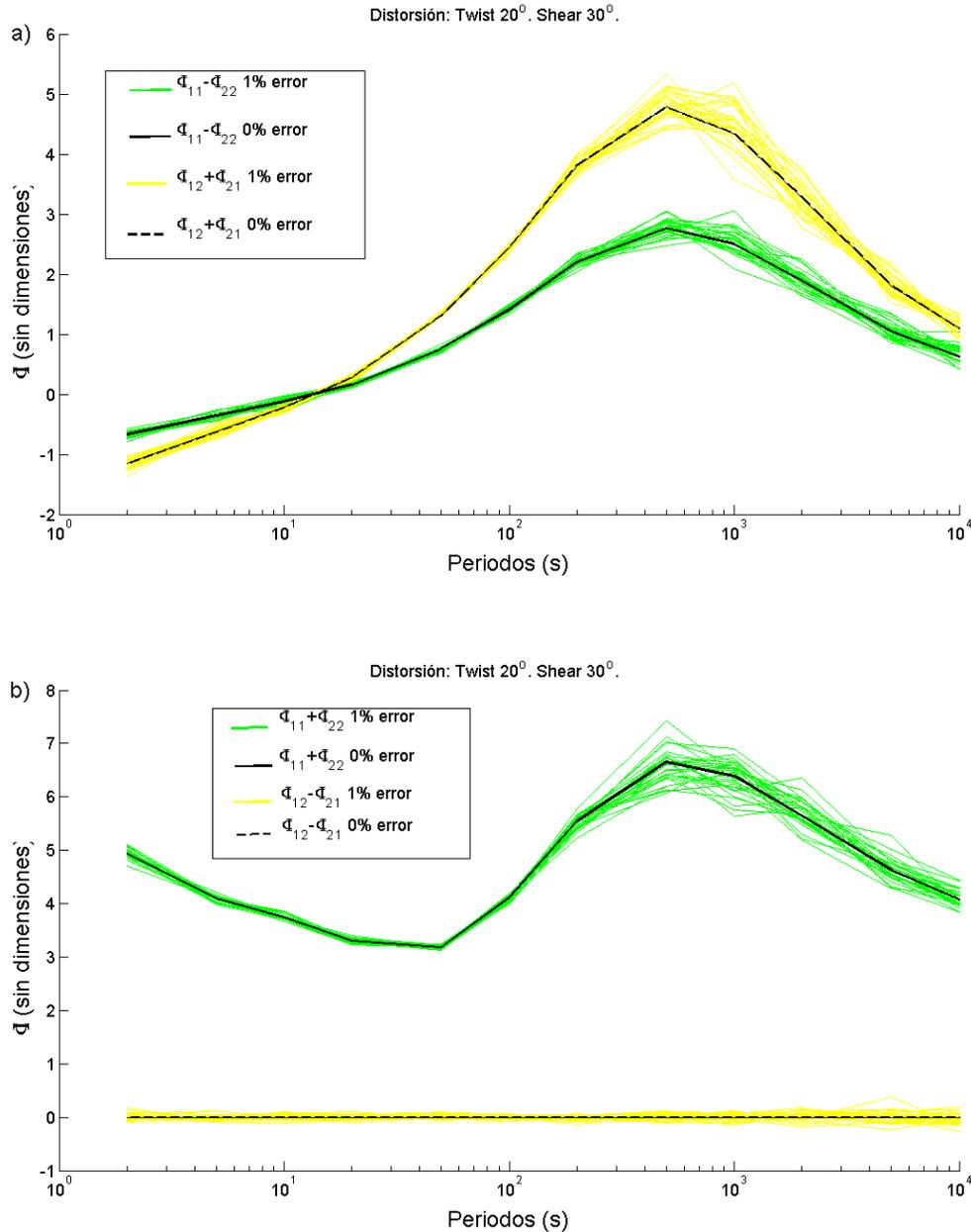
**Figura 1.** Los elementos del tensor de impedancias corresponden al sitio 15 de conjunto de datos COPROD2S1. Las impedancias originales se distorsionaron y se añadió ruido aleatorio como se indica. a) Partes reales. b) Partes imaginarias. Los valores se calcularon como la media de 30 realizaciones por periodo con sus correspondientes desviaciones estándar. Las líneas continuas unen los valores libres de error que en la mayoría de los casos son prácticamente idénticos a los valores medios.



**Figure 2.** a) Elementos diagonales del tensor de fase derivados del tensor de impedancia que se muestra en la figura 1. El código de color es  $\Phi_{11}$  verde y  $\Phi_{22}$  amarillo. La línea negra continua corresponde a valores sin errores. b) Los elementos fuera de la diagonal correspondientes. El código de color es  $\Phi_{12}$  verde y  $\Phi_{21}$  amarillo. La línea negra punteada corresponde a valores sin error.

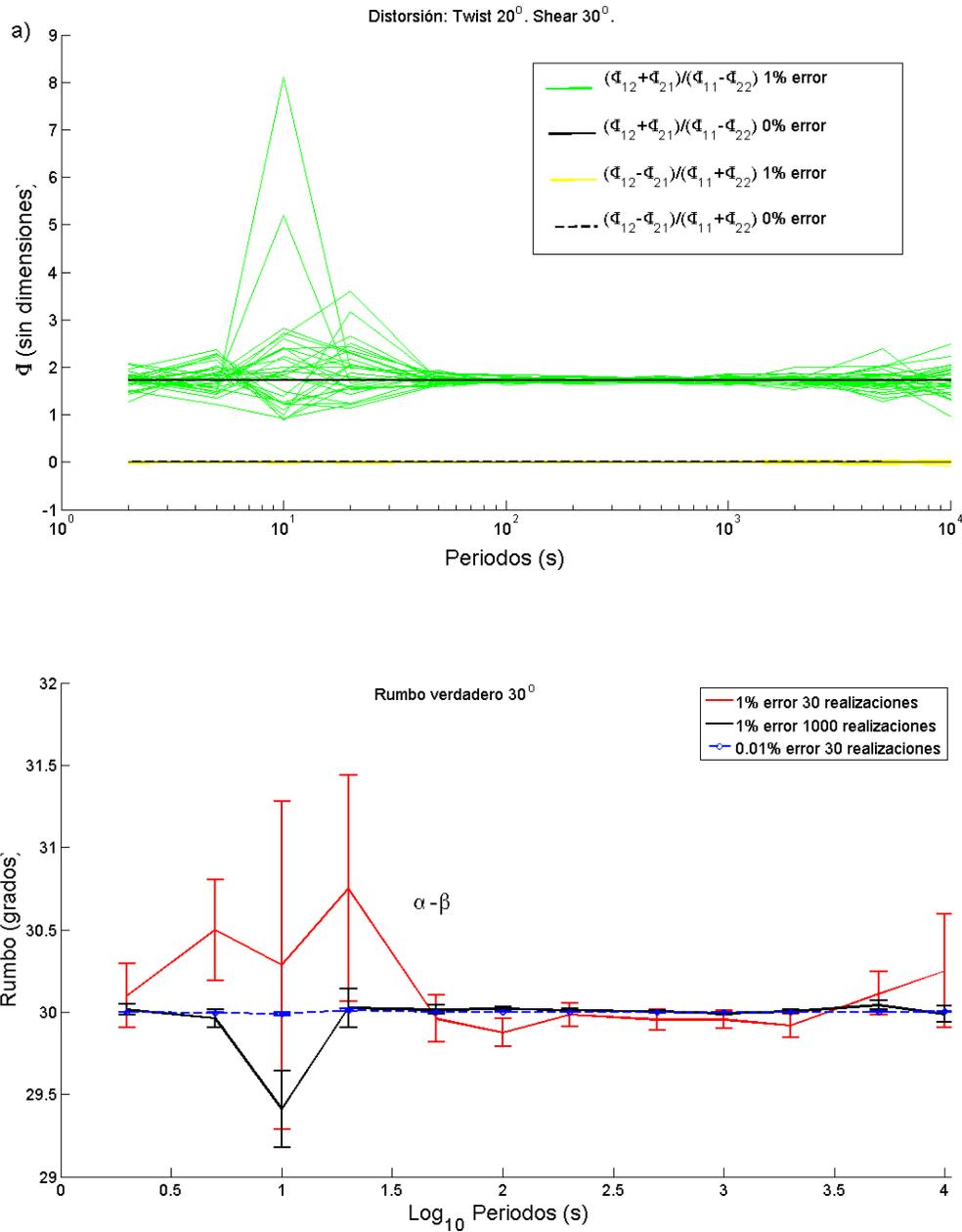
En cuanto a las razones que definen los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . El primero implica la suma de los elementos fuera de la diagonal como numerador, y la resta de los elementos diagonales como denominador. En la Figura 3a ambas cantidades pasan por cero a un periodo de aproximadamente 10 s. Esto tendrá sus implicaciones cuando se calcule la razón. La figura 3b ilustra las variaciones de la suma de la diagonal y la

resta de los elementos fuera de la diagonal. Esta resta cae alrededor de cero para todos los periodos, pero no se espera ningún problema al calcular la razón porque para el ángulo  $\beta$  la resta va en el numerador. Observe que durante los últimos seis periodos, la resta tiene menos dispersión que los elementos individuales que se muestran en la Figura 2b.



**Figura 3.** a) Combinación de los elementos tensores de fase que componen la razón en la fórmula para el ángulo  $\alpha$ . El código de color es  $\Phi_{11} - \Phi_{22}$  en verde y  $\Phi_{12} + \Phi_{21}$  en amarillo. La línea negra continua corresponde a valores sin errores. b) Combinación correspondiente para el ángulo  $\beta$ . El código de color es  $\Phi_{11} + \Phi_{22}$  en verde y  $\Phi_{12} - \Phi_{21}$  en amarillo. La línea negra punteada corresponde a valores libres de error.

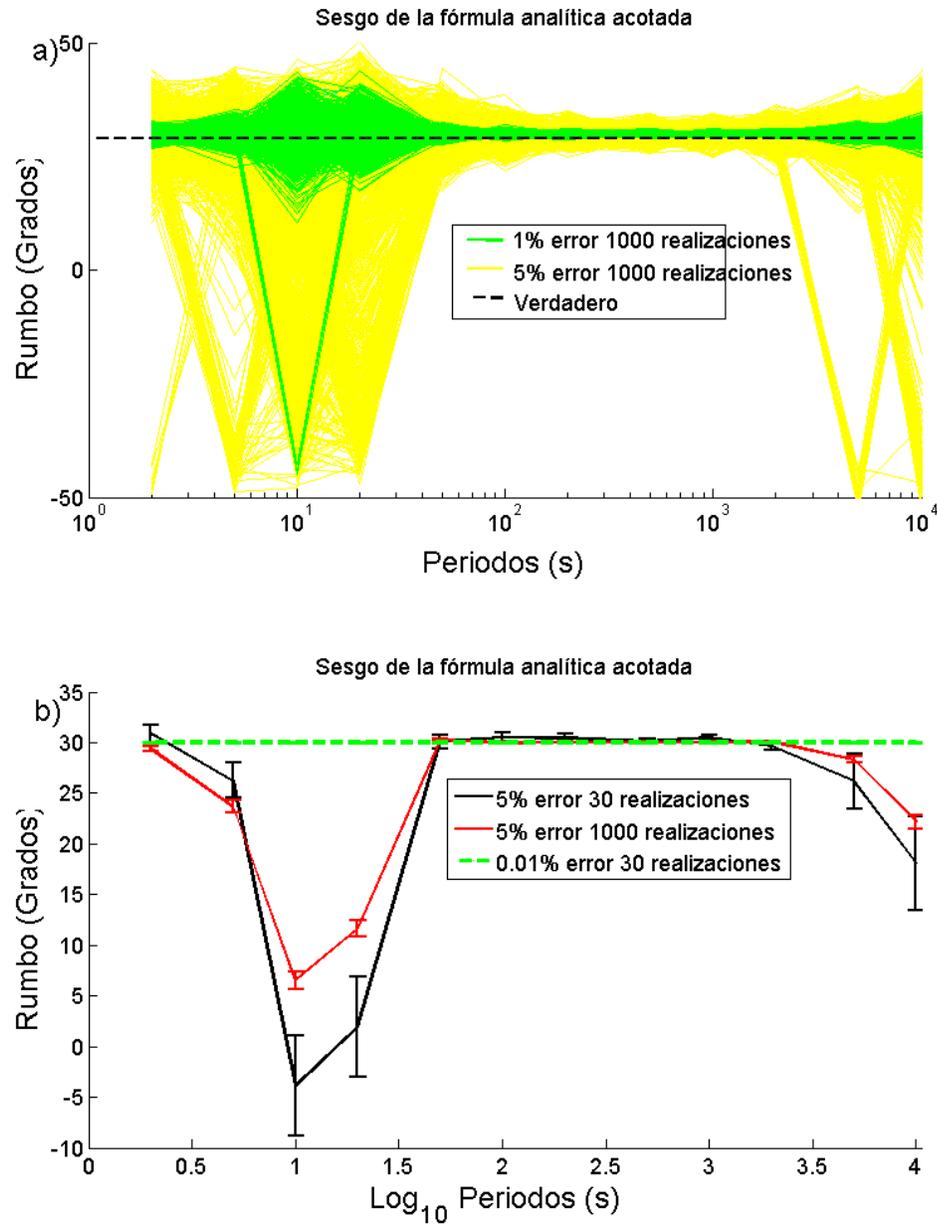
El comportamiento de las razones se ilustra en la Figura 4a. Ambas proporciones son aproximadamente uniformes para todos los periodos, como deberían, ya que corresponden a un rumbo uniforme. Las desviaciones de la uniformidad se deben al efecto del ruido. La primera observación sobre la razón para el ángulo  $\alpha$  es el ruido relativamente alto durante el periodo de 10 s y sus dos periodos vecinos. Aquí es donde los elementos diagonales  $\Phi_{11}$  y  $\Phi_{22}$  son muy similares entre sí, probablemente debido a la detección de una estructura 1D. Tanto el numerador como el denominador están cerca de cero para estos periodos y, en particular, el denominador. Pasando ahora a los periodos más largos, se puede observar que la razón es muy ruidosa durante los últimos tres periodos. Nuevamente, esto es un reflejo de los elementos diagonales que se acercan entre sí, y probablemente en este caso debido a un efecto de disminución de la resolución dilución de la estructura 2D en vista de la creciente profundidad de penetración. La Figura 4a también muestra la razón asociada con el ángulo  $\beta$ . En este caso, la relación es mucho menos ruidosa principalmente porque el denominador ahora es la suma de los elementos diagonales, y no su diferencia, como para el ángulo  $\alpha$ . Por tanto, el rumbo  $\theta = \alpha - \beta$  debe su sensibilidad al ruido, principalmente a la estimación del ángulo  $\alpha$ . El último paso es calcular los valores reales del rumbo y hacer las estadísticas. Se calcula el rumbo para una serie de realizaciones, y se toma su media aritmética y su error estándar para cada periodo. Los resultados se muestran en la Figura 4b. Tres escenarios se presentan: 1) ruido aleatorio de 0.01 % usando 30 realizaciones, 2) ruido aleatorio de 1 % usando 30 realizaciones, y 3) ruido aleatorio de 1% usando 1,000 realizaciones. El primero recupera esencialmente el rumbo verdadero debido al error pequeño, el segundo recupera aproximadamente el rumbo verdadero sólo durante los periodos anticipados por el análisis de la Figura 4a, y el tercero ilustra que el aumento de realizaciones mejora tanto la exactitud, como la precisión. Sin embargo, no se puede dejar de notar que en el periodo de 10 s el rumbo se subestima a pesar del error pequeño y de las 1000 realizaciones. Este punto merece mayor atención porque puede ser la punta del iceberg de algo más profundo, en vista de que las razones y la función trigonométrica tangente son combinaciones no lineales de los datos y, por lo tanto, no son fáciles de visualizar.



**Figura 4.** a) Las razones que componen las fórmulas para los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . El código de color es verde para el ángulo  $\alpha$  y amarillo para el ángulo  $\beta$ . La línea negra continua corresponde a valores sin error. b) Los resultados finales del rumbo  $\theta = \alpha - \beta$ . La línea roja corresponde a estimaciones suponiendo un error del 1% y utilizando 30 realizaciones. La línea negra corresponde al 1% de error y 1000 realizaciones. La línea azul punteada corresponde a un error de 0.01% y 30 realizaciones.

Es difícil predecir, simplemente por inspección, los resultados de una fórmula no lineal. Considere, por ejemplo, la Figura 4a. Existe un sesgo hacia valores más altos para algunas de las realizaciones

alrededor del periodo de 10 segundos. Se podría pensar que al aumentar el número de realizaciones simplemente se llenarían los espacios vacíos. De hecho, esto es lo que sucede excepto por una pequeña pero significativa diferencia.



**Figura 5.** El análisis de la fórmula del rumbo indica que está sesgada con respecto al ruido aleatorio: a) los rumbos individuales para cada realización se grafican para dos niveles de error. Las líneas verdes corresponden al 1% de error y 1000 realizaciones. Las líneas amarillas corresponden al 5% de error y 1000 realizaciones. Los datos se distorsionaron suponiendo  $twist = 20^\circ$  y  $shear = 30^\circ$ . Las líneas punteadas representan el rumbo verdadero calculado con un error de 0.01%. b) La línea negra representa las estimaciones de rumbo con un error del 5% y 30 realizaciones. La línea roja representa las estimaciones utilizando un error del 5% y 1000 realizaciones.

La Figura 5a presenta las estimaciones para el mismo error del 1% y 1000 realizaciones. Se puede observar cómo algunas realizaciones son consistentemente negativas durante el periodo de 10 s. Estos valores parecen valores atípicos aislados, pero en realidad no lo son. La Figura 5a también presenta el caso de un error del 5% que ilustra que este es un efecto sistemático asociado con la manera en que se calcula el rumbo. En la mayoría de los ejemplos que siguen se usa un 5% de error y 30 realizaciones, que se consideran apropiadas para ilustrar el punto principal de este trabajo. En este nivel de error, los resultados de utilizar 30 o 1000 realizaciones son comparables, como se ilustra en la Figura 5b.

El análisis general de esta sección se aplica sólo al sitio 15 del conjunto de datos COPROD2S1. No pretende ser una prueba general de que una razón u otra sea más sensible al ruido aleatorio. Esto se puede ver como una ventana hacia lo que hay detrás del carácter inestable de la fórmula del rumbo basada en el tensor de fase. Para mejorar el rendimiento de la fórmula, se deben abordar dos cuestiones: una, que es neutralizar el efecto del ruido en relación al cambio de cuadrantes, lo cual se corresponde al primer objetivo mencionado en la introducción. La otra es poder utilizar varios periodos contiguos para hacer una estimación, lo que podría reducir aún más la dispersión de las estimaciones. Esto último corresponde al segundo objetivo. En la siguiente sección se presenta la reformulación del tensor de fase con la que se abordarán ambos problemas.

## 2.2 Reformulación del tensor de fase

Al recordar los pasos dados por Swift (1967) al desarrollar su fórmula para el rumbo en términos del tensor de impedancia. Lo primero es considerar una versión rotada del tensor de impedancia a través de una matriz de rotación  $\mathbf{R}$ . Es decir,

$$\begin{pmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{21} & Z'_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{Z}\mathbf{R}^T(\theta). \quad (9)$$

El segundo paso es resolver el rumbo utilizando un criterio de mínimos cuadrados. Es decir, encontrar el ángulo  $\theta$  que minimice la función de penalización:

$$C_{L_2}(\theta) = |Z'_{11}(\theta)|^2 + |Z'_{22}(\theta)|^2. \quad (10)$$

En este último paso se reconoce que los datos no son ideales, en el sentido de que pueden tener algunos errores. La función de penalización  $C_{L_2}(\theta)$  tiene un mínimo en todos los cuadrantes, y dada la periodicidad de la matriz de rotación están separados 90 grados entre sí. La fórmula para el rumbo  $\theta = \alpha - \beta$  tiene la misma periodicidad, pero no hay garantía de que en presencia de ruido los valores calculados correspondan a algún tipo de mínimo. La fórmula analítica de Swift (1967) es

$$\tan 4\theta = \frac{2\text{Real}[(Z_{yy}-Z_{xx})(Z_{xy}^*+Z_{yx}^*)]}{|Z_{xy}+Z_{yx}|^2 - |Z_{yy}-Z_{xx}|^2} \quad (11)$$

El asterisco indica que se trata del conjugado de un número complejo. En artículos y libros de texto se afirma que la fórmula se obtiene minimizando  $|Z'_{xx}|^2 + |Z'_{yy}|^2$  o maximizando  $|Z'_{xy}|^2 + |Z'_{yx}|^2$  (por ejemplo, en Vozoff, 1972; Gamble et al., 1979; Clarke et al., 1983; Simpson and Bahr, 2005; Chave and Jones, 2012). Un criterio de mínimos cuadrados no impone una equivalencia rígida entre cantidades involucradas esto es, sino solo que  $|Z'_{xx}|^2 = |Z'_{yy}|^2 = 0$ . Esto da como resultado soluciones flexibles que pueden adaptarse a datos contradictorios. Por otro lado, las soluciones exactas que imponen condiciones de igualdad no necesariamente son flexibles en presencia de ruido porque no fueron desarrolladas con ese fin en mente (e.g. Claerbout 1976; Jones, 2012). Sin embargo, ¿qué pasa si una expresión es al mismo tiempo la solución exacta y la de mínimos cuadrados? Esto parece ser el caso de la ecuación 11 porque Sims and Bostick (1969) obtuvieron la misma fórmula sin recurrir al criterio de mínimos cuadrados. Ellos consideran una combinación especial de los elementos del tensor y muestran que la cantidad describe una elipse cuando rota el sistema coordenado. Luego, encuentran el ángulo del eje mayor de la elipse. El resultado es la ecuación 11. A continuación, se muestra que la ecuación 6, que se considera una solución analítica exacta para el rumbo, también se puede considerar como una solución de mínimos cuadrados.

Las expresiones para  $\alpha$  y  $\beta$  en la ecuación 6 se obtuvieron originalmente por Bibby (1977) descomponiendo el tensor de resistividad de corriente directa en partes simétrica y simétrica-sesgada. Los ángulos son utilizados por Caldwell et al. (2004) para factorizar el tensor de fase como

$$\Phi = \mathbf{R}^T(\alpha - \beta) \begin{pmatrix} \Phi_{\max} & 0 \\ 0 & \Phi_{\min} \end{pmatrix} \mathbf{R}(\alpha + \beta) \quad , \quad (12)$$

donde  $\alpha - \beta$  y  $\mathbf{R}$  son el rumbo y la matriz de rotación, respectivamente.  $\Phi_{\max}$  y  $\Phi_{\min}$  son los valores singulares del tensor de fase. Note que la rotación de la izquierda es con la diferencia de los ángulos y que

la de la derecha, es con la suma de ellos. Para hacer este producto simétrico, puede demostrarse que  $\mathbf{R}(\alpha + \beta) = \mathbf{R}(\alpha - \beta)\mathbf{R}(2\beta)$ , tal que

$$\Phi = \mathbf{R}^T(\alpha - \beta) \begin{pmatrix} \Phi_{\text{máx}} & 0 \\ 0 & \Phi_{\text{mín}} \end{pmatrix} \mathbf{R}(\alpha - \beta)\mathbf{R}(2\beta). \quad (13)$$

Ahora se resuelve la matriz de valores propios (eigenvalores) como

$$\begin{pmatrix} \Phi_{\text{máx}} & 0 \\ 0 & \Phi_{\text{mín}} \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\alpha - \beta)\Phi\mathbf{R}^{-1}(2\beta)\mathbf{R}^T(\alpha - \beta). \quad (14)$$

Suponiendo que el rumbo  $\theta = \alpha - \beta$  es una incógnita, la matriz de valores singulares o principales ya no es diagonal, a menos que corresponda con el rumbo apropiado. En general

$$\begin{pmatrix} \Phi'_{11} & \Phi'_{12} \\ \Phi'_{21} & \Phi'_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\theta)\Phi\mathbf{R}^{-1}(2\beta)\mathbf{R}^T(\theta). \quad (15)$$

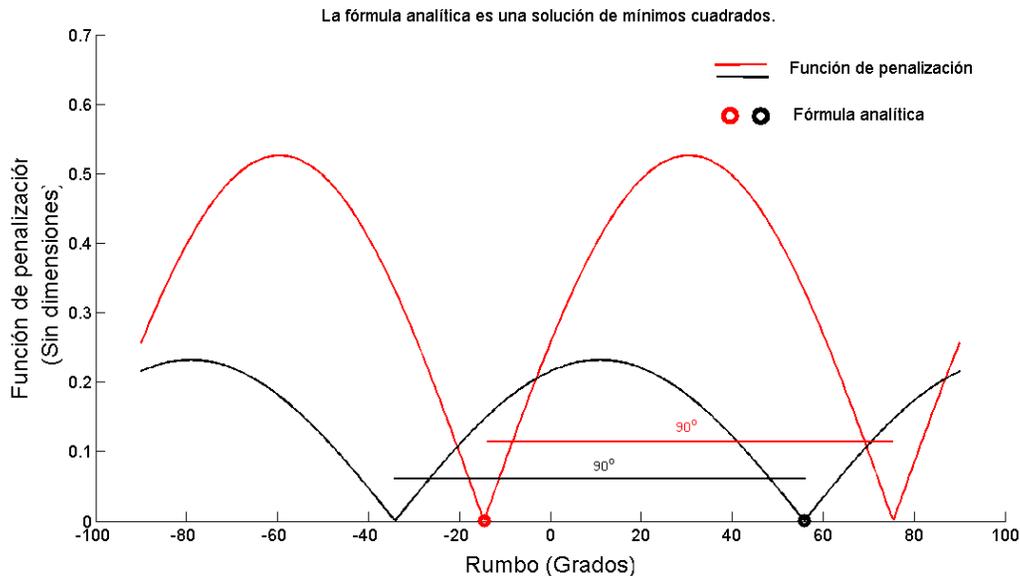
Planteadas en estos términos, la fórmula analítica del rumbo obtenida por Caldwell et al. (2004) correspondería al ajuste  $\Phi'_{12} = \Phi'_{21} = 0$ . Usando el criterio de Swift, esto correspondería a minimizar

$$C_{L_2}(\theta) = \Phi'_{12}(T_i, \theta)^2 + \Phi'_{21}(T_i, \theta)^2. \quad (16)$$

En otras palabras, para cada periodo  $T_i$ , se busca el ángulo  $\theta$  que minimiza el tamaño de los elementos anti-diagonales del tensor de fase como define la ecuación (14). Una manera de hacerlo es proceder como en la ecuación 10 para obtener una fórmula para la solución de mínimos cuadrados. Esto se desarrolla en el Apéndice con el resultado de que la fórmula es la misma que la conocida fórmula dada para el rumbo por la ecuación 6. Otra manera de proceder es calcular el ángulo  $\beta$  usando la ecuación 8, y muestrear la función de penalización (16) para diferentes valores de  $\theta$  y seleccionar numéricamente el ángulo donde la función tiene sus mínimos. A esto es a lo que en esta tesis se llama reformulación del tensor de fase para determinación del rumbo.

Evaluar la fórmula analítica o localizar el mínimo de la función de penalización debería proporcionar el mismo resultado. De hecho, es así, pero la forma en que lo hacen es completamente diferente. Esto se ilustra en la Figura 6 para dos de las realizaciones que se muestran en la Figura 5, pero usando las impedancias de un solo periodo. En otras palabras, los datos son un solo tensor de impedancia alterado por error aleatorio de dos formas diferentes. El objetivo es encontrar el rumbo de 30 grados. Se

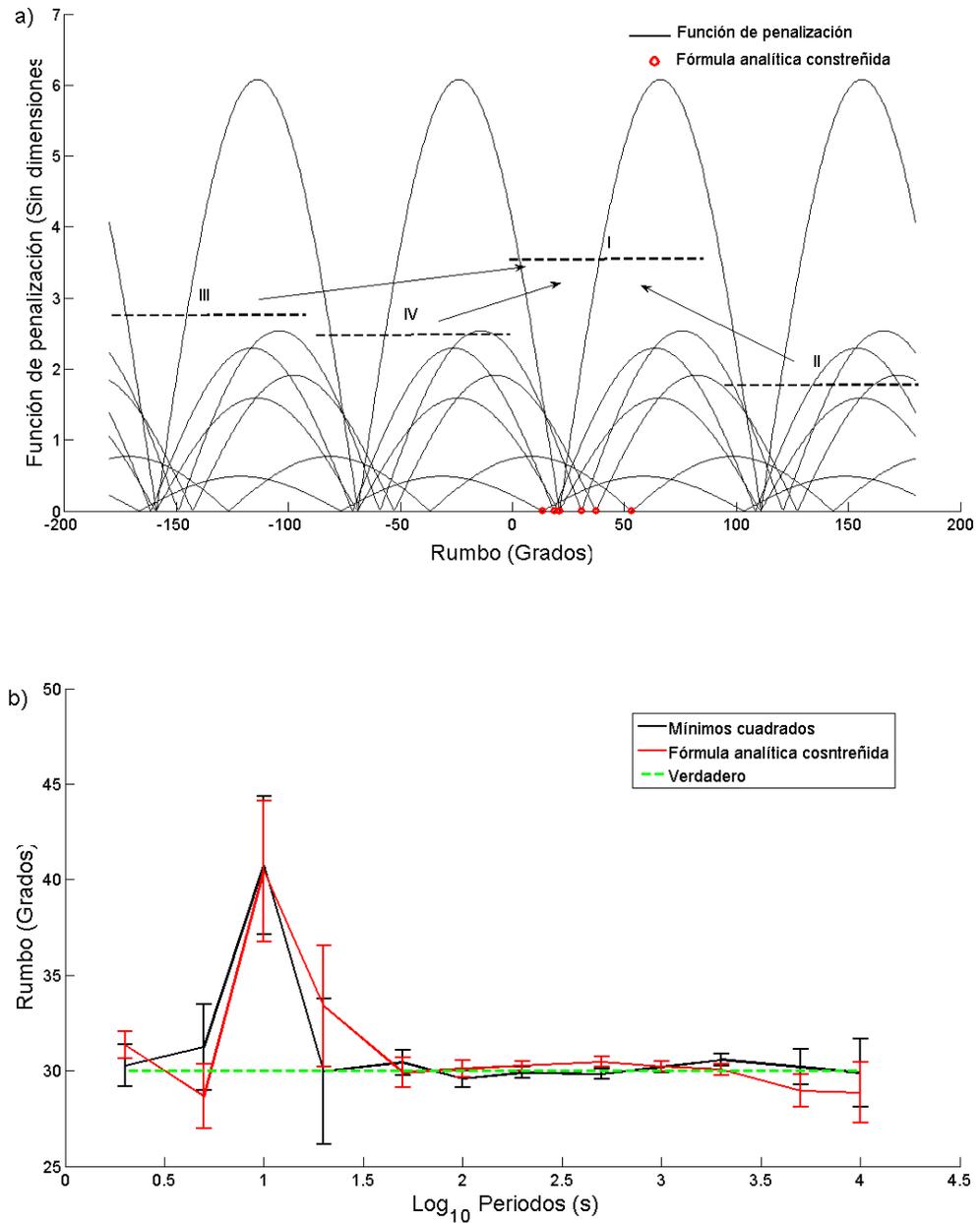
grafica la función de penalización de -90 a 90 grados y el rumbo que proporciona la fórmula analítica (ecuación 6). Se puede observar que los dos valores provistos por la fórmula caen exactamente en uno de los mínimos de la función de penalización en cada caso. Lo importante aquí es que aún si la estimación cae fuera del cuadrante objetivo, cae exactamente en otro mínimo. Hay un mínimo en cada cuadrante que dista 90 grados del contiguo.



**Figura 6.** Típica migración de cuadrantes debido a ruido en los datos al usar la fórmula analítica. La línea continua representa las funciones de penalización  $C_{L_2}(\theta)$  para un periodo de 10 s y dos realizaciones distintas (ilustradas en rojo y negro). Los círculos corresponden a los estimados usando la fórmula analítica.

Para obtener las estadísticas adecuadas usando la fórmula analítica o los mínimos de la función de penalización, es necesario situar todas las estimaciones en el mismo cuadrante. En el caso de la fórmula esto puede hacerse identificando el cuadrante de una estimación dada y sumando o restando la cantidad adecuada para enviarla al cuadrante deseado. Lo anterior se ilustra en la Figura 7a para siete realizaciones donde todas se acotan al primer cuadrante. A esto se le llama una aplicación acotada de la fórmula analítica, en contraposición a una no acotada cuando simplemente se aceptan los valores calculados en cualquier cuadrante. En el caso de una función de penalización, no es necesario mover las estimaciones. Basta con limitar el muestreo al cuadrante deseado, en este caso, el primer cuadrante (0-90°). La figura 7b compara el desempeño de ambos enfoques utilizando 30 realizaciones. Se puede ver que la diferencia entre las estimaciones correspondientes y sus varianzas no es significativa. De hecho, deberían ser

idénticos, pero no lo son porque no se calcularon utilizando exactamente las mismas 30 muestras aleatorias.



**Figura 7.** a) Funciones de penalización y concentración dentro del cuadrante I del rumbo estimado usando la fórmula analítica. Las líneas continuas representan las funciones de penalización para un periodo de 10 s y siete realizaciones. Los círculos rojos representan el rumbo de la fórmula analítica. b) La curva negra representa las estimaciones para todos los periodos usando minimización numérica y la curva roja usando la fórmula analítica. La línea punteada verde corresponde al rumbo verdadero.

El primer objetivo mencionado en la introducción, el de entender el efecto del ruido en la fórmula analítica y mejorar su desempeño se resume en la diferencia entre la Figura 5b y la 7b. Este problema del cambio de cuadrante por efecto del ruido se resuelve acotando todas las estimaciones a un solo cuadrante. Esto se justifica demostrando que la fórmula analítica es a su vez una solución de mínimos cuadrados según se documenta en el apéndice. El segundo objetivo es utilizar la misma reformulación para generalizar el criterio del tensor de fase para un número determinado de periodos. Los resultados se presentan en el siguiente capítulo.

## Capítulo 3. Resultados

---

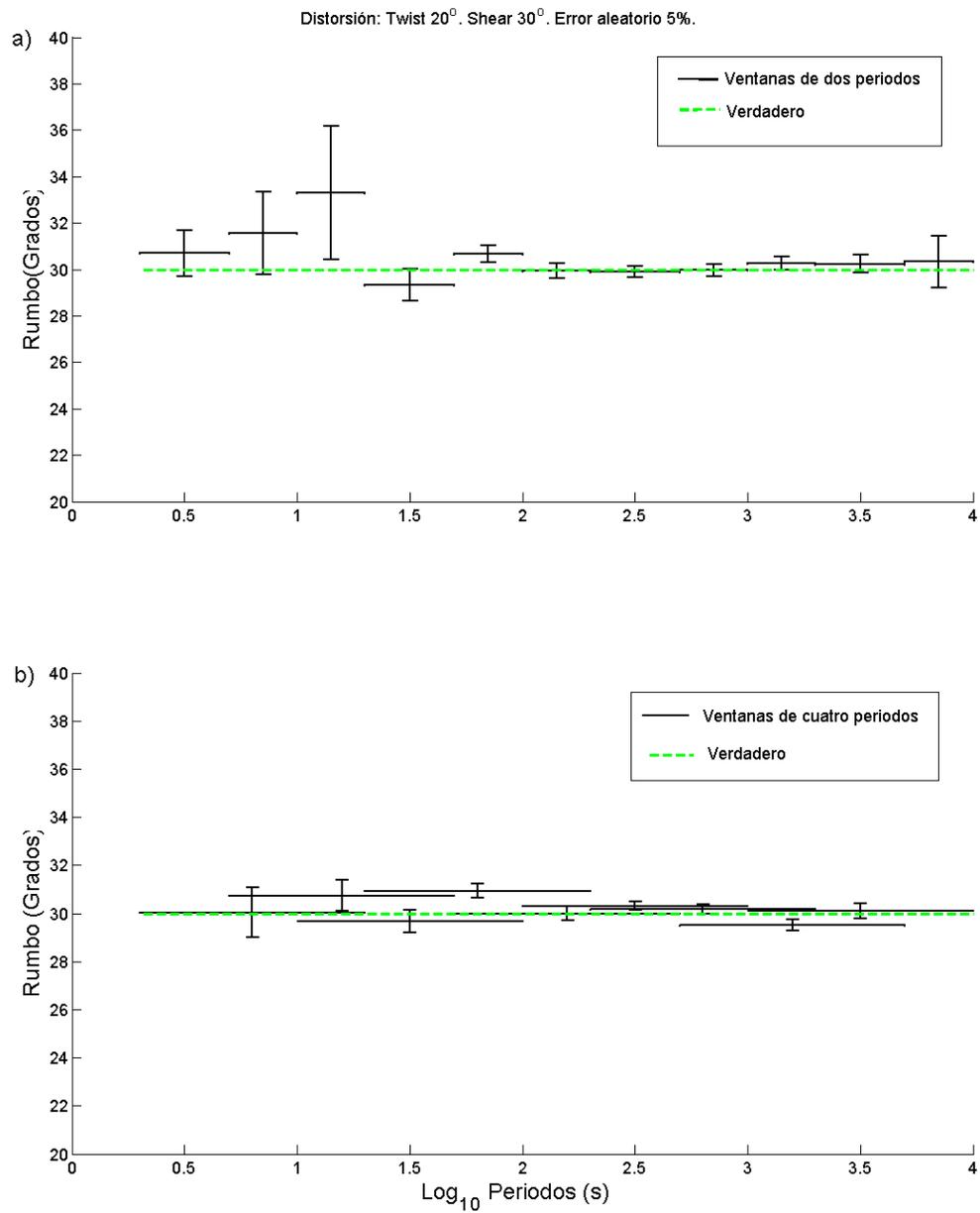
### 3.1 Ventanas de varios periodos

Hay varias formas de relacionar entre sí las estimaciones obtenidas mediante la aplicación de la fórmula analítica. Por ejemplo Muñiz et al. (2017) impone condiciones de continuidad entre periodos contiguos. Otra forma de mejorar las estimaciones sería calcular promedios para varios periodos aprovechando que ya se tienen los rumbos concentrados en un solo cuadrante. Otra forma sería aplicar el criterio de mínimos cuadrados a varios periodos contiguos, en lugar de a periodos individuales. En este capítulo se presentan los resultados y las ventajas de esta última opción. Se minimiza

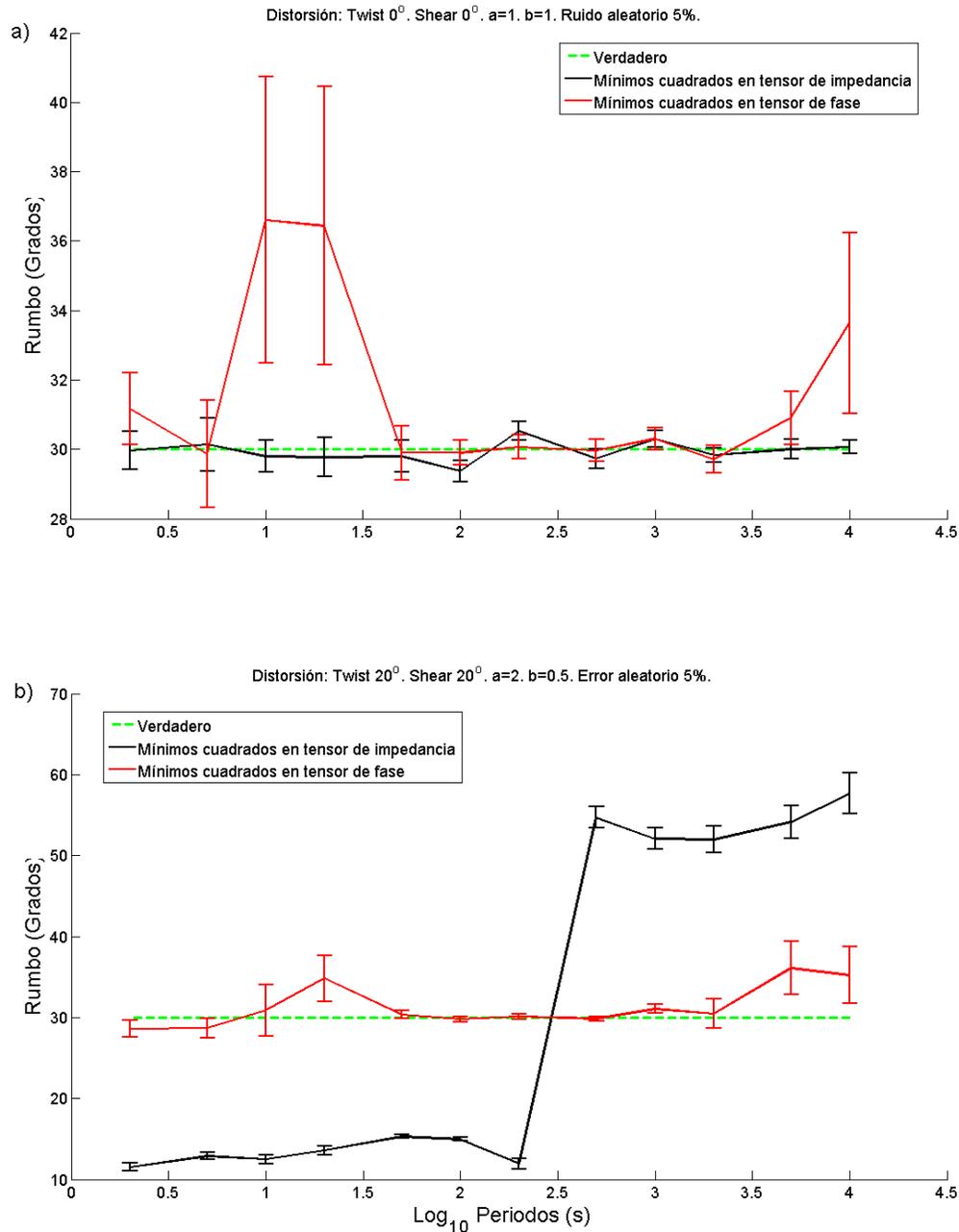
$$C_{L_2}(\theta) = \sum_i (\Phi'_{12}(T_i, \theta))^2 + (\Phi'_{21}(T_i, \theta))^2 \quad (17)$$

La suma se realiza sobre cualquier número de periodos consecutivos, según el ancho que se desea tengan las ventanas. Vale la pena mencionar que mientras mayor sea el ancho de la ventana, menor será la resolución, y dado que el periodo  $T$  está asociado a la profundidad en el subsuelo, también será mayor el rango de profundidades involucrado en el promedio. La Figura 8 ilustra cómo mejora la estimación del rumbo cuando se utilizan ventanas de varios periodos. La Figura 8 ilustra cómo mejora la estimación del rumbo cuando se utilizan ventanas de varios periodos. En general, si  $nT$  es el número total de periodos y  $np$  es el número de periodos de la ventana, habrá  $nT - np + 1$  ventanas sobre las que se estimará el rumbo.

La Figura 8a ilustra el caso de  $nT = 12$  y  $np = 2$  de modo que hay 11 ventanas. Las estimaciones se grafican en la media geométrica del primer y último periodo. Cuando  $np = 1$  hay 12 ventanas, es decir que cada estimación involucra un solo periodo, al igual que cuando se aplica la fórmula analítica (figura 7). Se puede observar en la Figura 8b que las ventanas más anchas funcionan aún mejor, tanto en exactitud como en precisión. En esta tesis se presenta un ejemplo de ventanas uniformes, pero la aplicación está abierta para combinaciones de tamaños, ya sea fijadas de antemano o dependientes de un compromiso con la varianza. La Figura 8 también ilustra que las estimaciones que utilizan ventanas de varios periodos no son promedios aritméticos de los valores proporcionados por la fórmula analítica que se muestra en la figura 7b. La optimización conjunta de varios periodos funciona mejor que las estimaciones individuales o combinaciones de ellos.



**Figura 8.** a) Estimaciones minimizando la ecuación 17 suponiendo ventanas de dos periodos. La línea punteada verde representa el rumbo verdadero. b) Estimaciones minimizando la ecuación 17 suponiendo ventanas de dos periodos. La línea punteada verde representa el rumbo verdadero.



**Figura 9.** Desempeño relativo del método de mínimos cuadrados usando el tensor de impedancia (ecuación 10) y al tensor de fase (ecuación 16). a) Sin distorsiones galvánicas. La línea verde punteada representa el rumbo verdadero. La línea continua representa las estimaciones utilizando el tensor de impedancia (Mínimos cuadrados en tensor de impedancia). La línea roja corresponde a las estimaciones utilizando la fórmula analítica constreñida derivada del tensor de fase (Mínimos cuadrados en tensor de fase). b) Con distorsiones galvánicas. La línea verde punteada representa el rumbo verdadero. La línea negra continua representa las estimaciones utilizando el tensor de impedancia (Mínimos cuadrados en tensor de impedancia). La línea roja corresponde a las estimaciones utilizando la fórmula analítica derivada del tensor de fase (Mínimos cuadrados en tensor de fase).

Otra mejora que se puede implementar fácilmente es el cambio de norma en la ecuación 16. Analíticamente, cambiar de una norma  $L_2$  a una  $L_1$  es un proceso matemático muy elaborado. Sin embargo, numéricamente este es un cambio trivial. En lugar de minimizar la función de penalización dada en la ecuación 17, se minimiza

$$C_{L_1}(\theta) = \sum_i (|\Phi'_{12}(T_i, \theta)| + |\Phi'_{21}(T_i, \theta)|) . \quad (18)$$

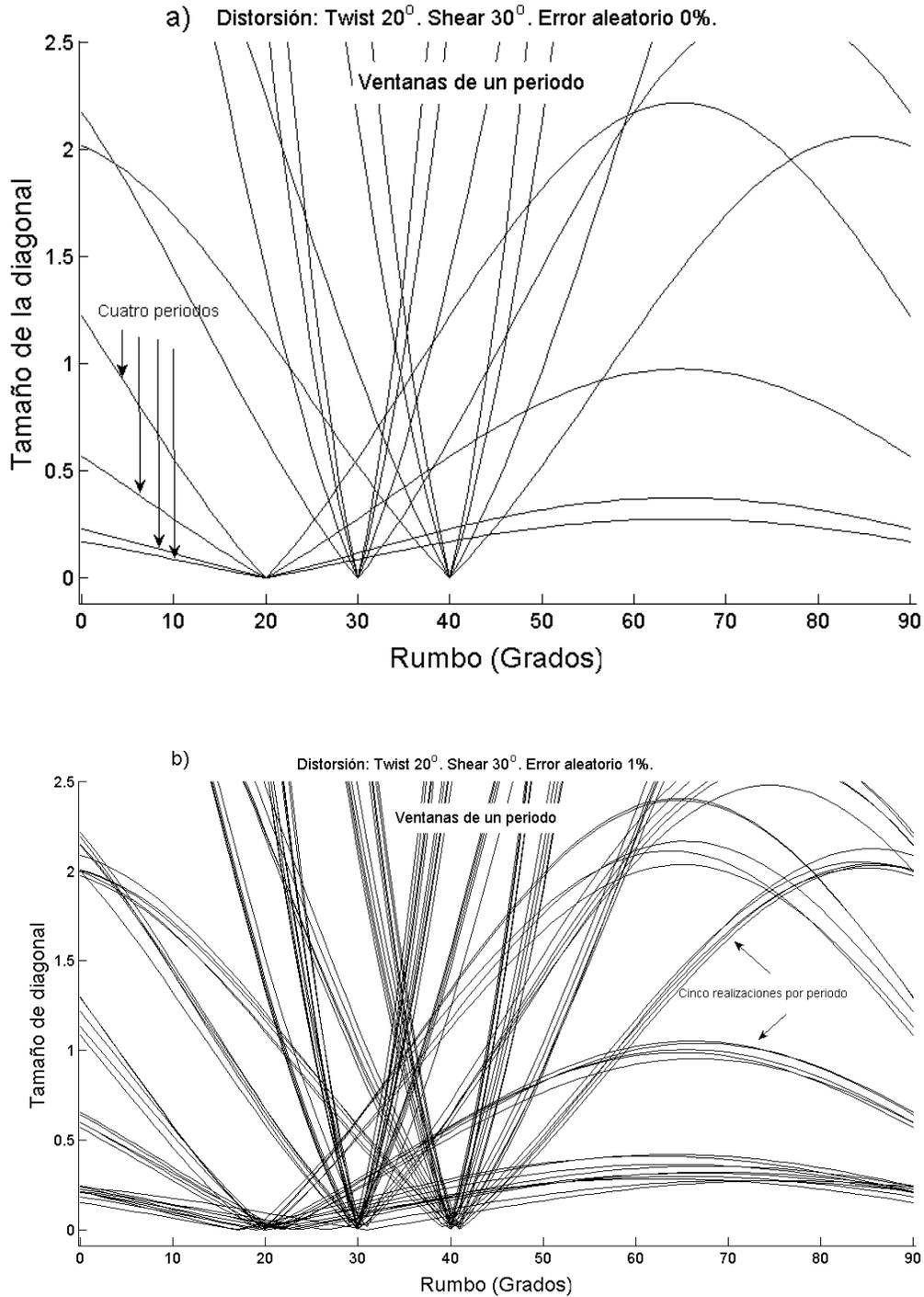
En presencia de valores atípicos, es bien conocida la propiedad de la norma  $L_1$  de proporcionar mejores estimaciones, porque la norma  $L_2$  por su propia naturaleza eleva al cuadrado el efecto de esos valores atípicos.

En este punto conviene recordar que aunque se está aplicando el mismo criterio a las impedancias y a los elementos del tensor de fase, existen diferencias cualitativas entre los dos tipos de datos. La fórmula de Swift opera directamente sobre los elementos del tensor de impedancia. Por otro lado, la condición impuesta al tensor de fase se aplica a combinaciones de razones de impedancias. La Figura 9a muestra que trabajar con impedancias (ecuación 10) produce rumbos más estables que los obtenidos con los elementos del tensor de fase (ecuación 16). En este caso se utilizan datos sin distorsiones galvánicas para aislar el efecto de precisión durante la comparación. La Figura 9b muestra el desempeño cuando los datos se ven afectados por distorsiones galvánicas. Se puede observar que, si bien el tamaño de los errores sigue siendo algo menor para las impedancias, sus valores medios están muy lejos del valor real. Por otro lado, los rumbos del tensor de fase están más cerca del valor real pero su barra de error es mayor. Esta pérdida de precisión es el precio a pagar por la inmunidad a las distorsiones galvánicas.

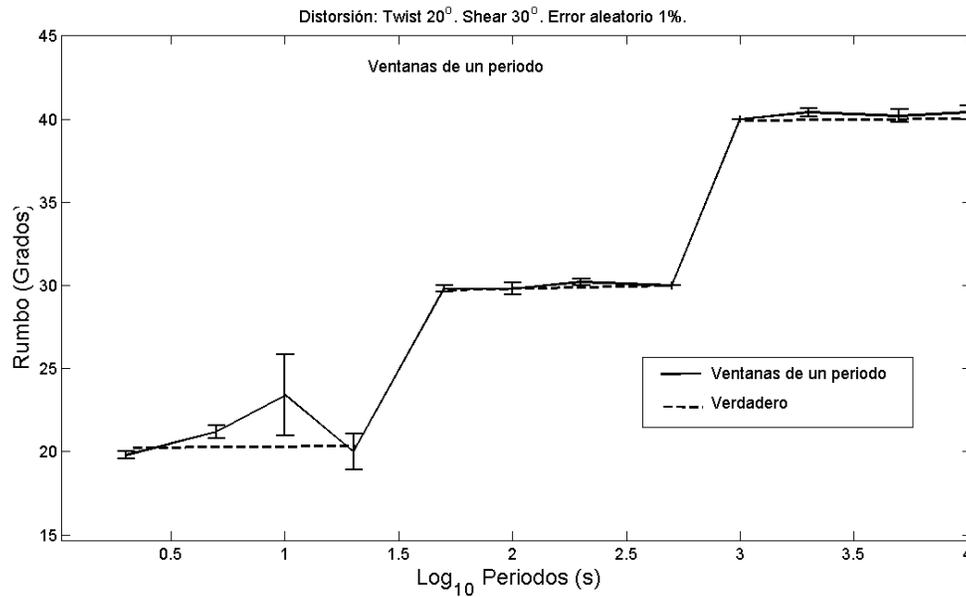
### 3.2 Rumbo variable con el periodo

A continuación, se explora la estimación del rumbo cuando éste varía con el periodo. Se usará este mismo caso más adelante cuando se comparen datos de monitoreo temporal, que involucran variaciones muy pequeñas en el rumbo. Los rumbos verdaderos son de 20, 30 y 40 grados en tres distintos intervalos de periodo (figura 11). Se suponen datos sin ruido y con ruido de pequeño a moderado. La Figura 10a ilustra el comportamiento de la función de penalización (ecuación 16) para el caso sin ruido.

Los mínimos ocurren exactamente en los objetivos de 20, 30 y 40 grados, como deberían (la estimación se acota al primer cuadrante). Aunque los datos no tienen ruido, inspeccionando la función de penalización es posible predecir que el rumbo de 20 grados será el peor determinado cuando se incluya el ruido, dado que tiene la función de penalización con tendencia más dispersa. Luego sigue 40 grados, y el mejor determinado será 30 grados porque tiene la función de penalización menos dispersa. Esto se confirma en la Figura 10b, que corresponde a datos con ruido aleatorio relativamente pequeño del 1% en las impedancias. Se muestra la función de penalización para sólo 5 realizaciones por periodo por claridad, pero se utilizaron 30 realizaciones. De alguna manera las 5 mostradas en la figura 10b son suficientes para corroborar las predicciones mencionadas anteriormente. Se puede observar que la dispersión más amplia de los mínimos se produce alrededor de los 20 grados. Luego le siguen los de 40 grados, y finalmente, los menos dispersos alrededor de 30 grados. Esta es la misma secuencia anticipada por la amplitud relativa de las funciones de penalización sin ruido (figura 10a). Esto a su vez se refleja en el tamaño de las barras de error en la Figura 11. Los errores más grandes son para el rumbo de 20 grados, seguido de 40 grados, y 30 grados como el rumbo mejor estimado. En este caso se usaron 30 realizaciones.



**Figura 10.** Variación en la función de penalización (ecuación 16) para un perfil con rumbos de 20, 30 y 40 grados. a) Sin agregar ruido a las impedancias. Los mínimos de la función de penalización caen, como deberían, exactamente en los rumbos verdaderos. b) Con ruido aleatorio del 1%. Los mínimos en este caso se extienden alrededor de los valores verdaderos. El grado de dispersión en cada caso refleja la exactitud y precisión de las estimaciones de rumbo. La estimación se acotó al primer cuadrante.

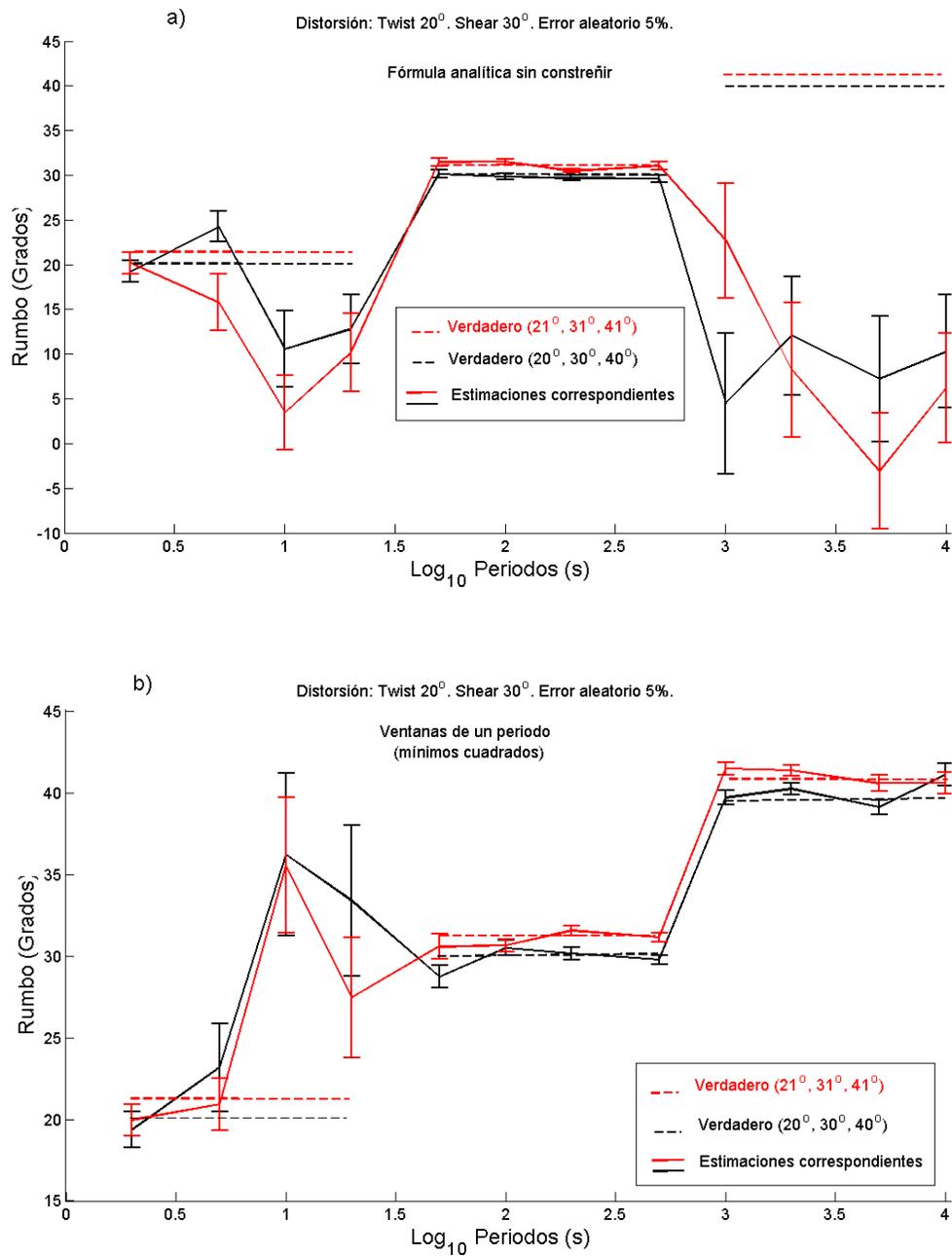


**Figura 11.** Las estimaciones de rumbo corresponden a las funciones de penalización mostradas en la Figura 10b, excepto que en este caso se usan 30 realizaciones.

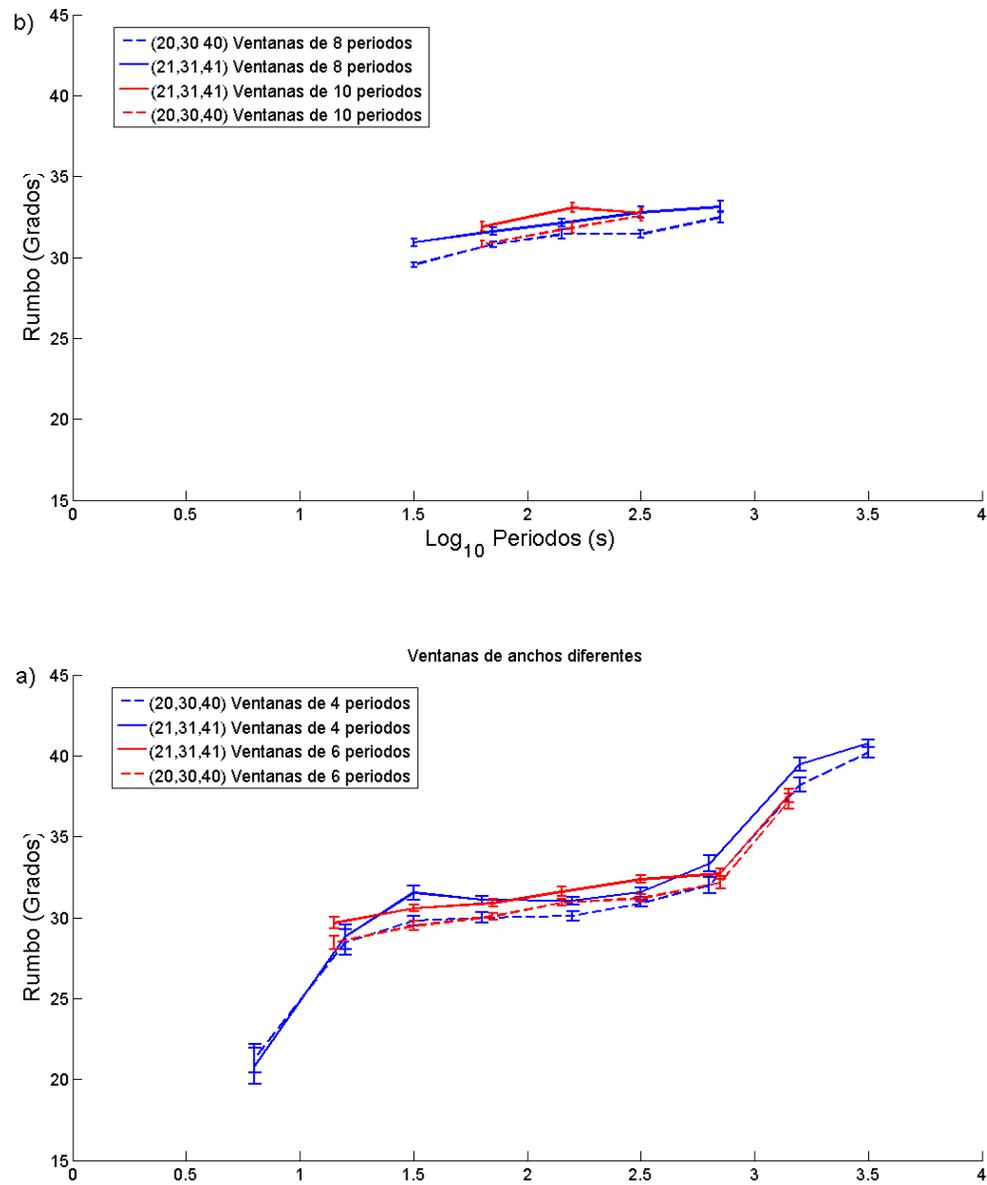
### 3.3 Aplicación a datos sintéticos con variación temporal

El siguiente objetivo será el de detectar cambios temporales utilizando el caso sintético discutido anteriormente, en el que se pone como objetivo un cambio de un grado en el rumbo, utilizando el mismo sitio 15 del conjunto de datos sintéticos COPROD2S1, distorsionado con un *twist* de 20 grados y *shear* de 30 grados. Se agregó ruido aleatorio del 5% a las impedancias distorsionadas. Considérese la fórmula analítica (ecuación 6). Se puede observar en la Figura 12a que sólo para el rumbo de 30 grados se tiene la posibilidad de acercarse al objetivo con una diferencia de un grado. Para los otros dos (20 y 40 grados) se obtienen variaciones demasiado grandes y la mayoría de las estimaciones están muy lejos de los valores deseados. Por supuesto, esta no es la forma correcta de utilizar la fórmula (ecuación 6). La Figura 12b ilustra el desempeño de la versión reformulada (ecuación 16) usando ventanas de un periodo y 30 realizaciones. Se puede observar que para el grupo de 20 grados las estimaciones son casi tan malas como las proporcionadas por la fórmula analítica. Para el rumbo de 30 grados, las estimaciones obtenidas con los dos enfoques son comparables. Esto significa que para un intervalo de periodos no hay cambios de cuadrantes en las soluciones analíticas. Los cambios aparecen para los últimos cuatro periodos. Se incluye esta comparación entre la fórmula analítica sin restricciones y las estimaciones que utilizan ventanas de un periodo solo para completar. De hecho, como se discutió anteriormente, la fórmula analítica cuando

se acota a un solo cuadrante produce la misma estimación que las ventanas de un periodo. Es cuando se utilizan ventanas más anchas cuando se puede reducir la varianza.



**Figura 12.** Estimación de rumbo para el caso de una variación temporal de un grado: a) aplicación sin restricciones de la fórmula analítica (ecuación 6.). La línea negra corresponde a las estimaciones para el caso inicial con 20, 30 y 40 grados. La línea roja corresponde a las estimaciones del perfil perturbado de 21, 31 y 41 grados. b) Usando la versión reformulada para ventanas de un periodo (ecuación 16). La línea negra corresponde a las estimaciones para el caso inicial de 20, 30 and 40 grados. La línea roja corresponde a las estimaciones para el caso perturbado con 21, 31 y 41 grados. En ambos casos, las líneas discontinuas representan los correspondientes valores verdaderos.



**Figura 13.** Estimación de rumbo mediante ventanas de diferentes anchos utilizando la ec. 17. Las líneas punteadas corresponden al caso base de 20, 30 y 40 grados, y las continuas al caso perturbado de 21, 31 y 41 grados. a) Ventanas de cuatro y seis periodos. b) Ventanas de ocho y diez periodos

Se presentan los resultados utilizando ventanas de un número par de periodos de cuatro a diez. Es difícil predecir el efecto de saltos de rumbo cuando se utilizan ventanas de varios periodos en un caso como el anterior, donde el rumbo cambia en el dominio del periodo  $T$  (i.e. con la profundidad). No se sabe cómo la función de penalización (ecuación 17) podrá manejar valores muy diferentes, y cuál sería el efecto

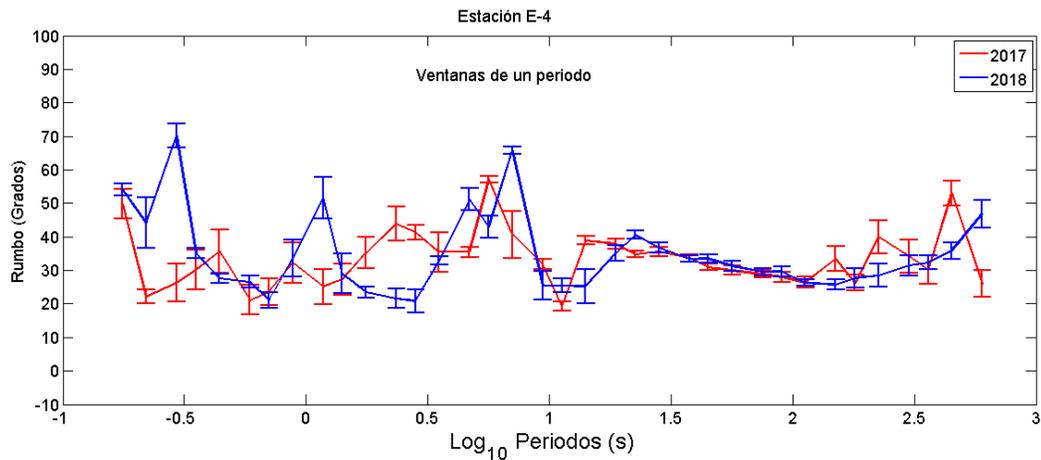
en las varianzas, que son cruciales para detectar cambios. Las estimaciones que utilizan ventanas de cuatro y seis periodos se muestran en la Figura 13a. Sólo se señalará que las estimaciones mejoran para la mayoría de las ventanas, excepto para las estimaciones que están en los extremos (en los primeros periodos 0 a 3 s). Se pueden observar mejoras adicionales en la Figura 13b para ventanas de ocho y diez periodos. Teniendo en cuenta esta secuencia de resultados, la lección general del ejercicio es que se debe experimentar con ventanas de diferente número de periodos para obtener cambios que sean estadísticamente significativos. Cabe mencionar que en este ejemplo se tiene la desventaja de que se cuenta solo con tres periodos por década, en comparación con los estudios MT convencionales que tienen entre 8 y 10 periodos por década, como se muestran los ejemplos de la siguiente sección.

### 3.4 Aplicación a datos de campo

Para ilustrar el desempeño con datos de campo de este nuevo enfoque para la estimación de rumbo, se seleccionó un sitio de una red de monitoreo instalada en el Valle de Mexicali, alrededor del campo geotérmico de Cerro Prieto, ubicado en el norte de Baja California, México. A partir de 2015 con una estación, la red creció hasta llegar a dieciocho en 2018, estaciones de monitoreo magnetoteléurico continuo. Se midieron campos eléctricos utilizando dos dipolos de 25 m en un arreglo en "L", con electrodos impolarizables de Pb-PbCl<sub>2</sub> mientras que los campos magnéticos se midieron con bobinas de inducción (EMI, Inc. BF-4). Los detalles sobre los electrodos Pb-PbCl<sub>2</sub> se pueden encontrar en Petiau (2000) y Booker y Burd (2006), y sobre las bobinas tipo BF-4 en el manual de funcionamiento del sistema MT-1 (Electromagnetic Instruments Inc., 1996). La frecuencia de muestreo permitió un rango de periodos de aproximadamente 10<sup>1</sup> a 10<sup>3</sup> segundos. Sólo dos estaciones estuvieron equipadas con bobinas de inducción, pero todas se sincronizaron en el procesamiento de las series de tiempo utilizando técnicas de estimación robusta (Chave et al. (1987) y Chave y Thompson (1989)) y referencia remota (Gamble et al., 1979). Cortés-Arroyo (2018) y Cortés-Arroyo et al. (2018) describen más detalles sobre la red.

Se eligió comparar los datos de dos semanas de 2017 con los datos de dos semanas de 2018 para una estación etiquetada como E-4. La comparación se muestra en la Figura 14 usando ventanas de un periodo. En todos los casos se supuso un error del 5% en los datos para calcular la incertidumbre en el rumbo. Se puede observar que las estimaciones son muy estables para periodos entre 10 y 100 segundos. De hecho, se puede afirmar que el rumbo no cambió de un año a otro en ese rango de periodos. Sin embargo, para

periodos más cortos y más largos, la historia es muy diferente ya que se observan grandes oscilaciones significativas en las estimaciones de rumbo.

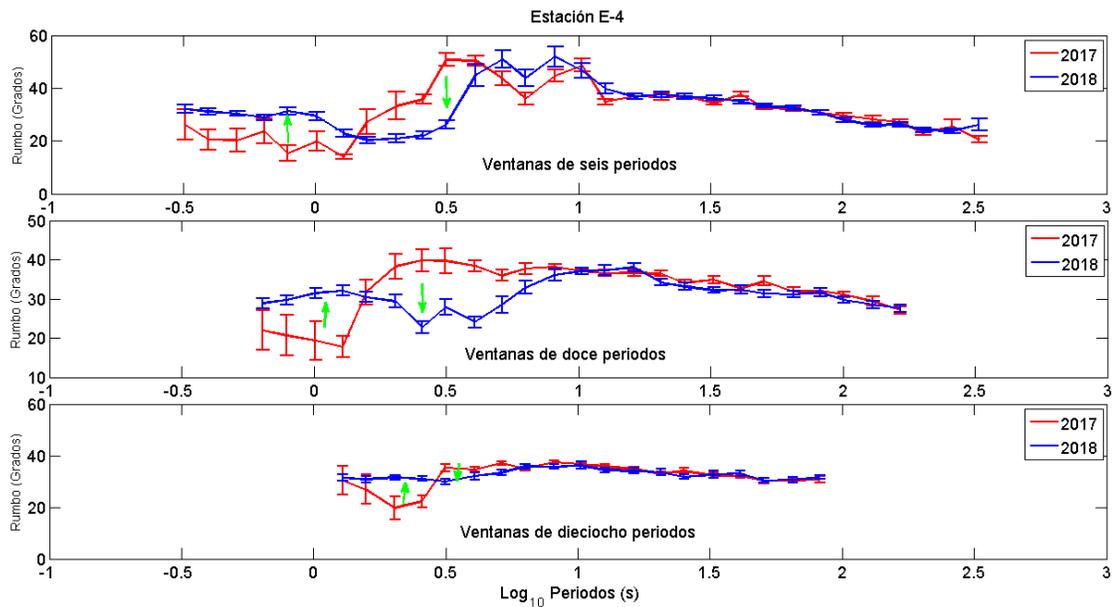


**Figura 14.** Estimaciones de rumbo utilizando datos de campo de dos semanas en años consecutivos usando ventanas de un periodo. Las líneas rojas corresponden al año 2017 y las líneas azules al año 2018.

El rumbo es mucho más suave cuando se usan ventanas que incluyen varios periodos. Se realizaron estimaciones con ventanas de 6, 12 y 18 periodos. El rumbo resultante para estas ventanas se muestra en la Figura 15. Las estimaciones para la ventana más corta ya muestran cierta diferencia entre los dos años, como se ilustra en la Figura 15a. Esto ocurre para periodos menores a 10 segundos, lo cual en el área de estudio corresponde a profundidades de penetración menores a 3-4 km. Esto ubicaría los cambios dentro del rango de profundidad del campo geotérmico de Cerro Prieto. La estación de monitoreo MT E-4 se localiza cercana a la esquina suroeste de la laguna de evaporación del Campo Geotérmico, cercano a la falla Cerro Prieto, aproximadamente a 4 km de la planta generadora del sector CP I, pero fuera del campo geotérmico, el cual está delimitado por las fallas Cerro Prieto e Imperial.

No se observan cambios apreciables para periodos mayores a 10s, i.e. a profundidades mayores a 3-4 km. Es intrigante que las curvas se crucen entre sí, lo que implica que el rumbo cambió de 20 a 30 grados en profundidades someras, 0 a 1 km (periodos entre 0.3 y 1 s) y en sentido contrario, de 40 a 20 grados a profundidades de 1 a 3-4 km). Esta tendencia se reproduce para las ventanas más anchas con 12 y 18 periodos, como se muestra en las Figuras 15b y 15c, respectivamente. Sin embargo, puede observarse

que los cambios negativos (de 40 a 20) tienden a desaparecer para la ventana más ancha, como lo indica el descenso de la curva roja de 2017 hacia la azul de 2018. Nótese también la estabilidad y consistencia del rumbo para los periodos más largos, lo que implica un ambiente estable con un rumbo que se mantuvo constante durante los dos años.



**Figura 15.** Estimaciones de rumbo utilizando datos de campo de dos semanas en dos años consecutivos. a) Usando ventanas de 6 periodos. b) Usando ventanas de 12 periodos. c) Usando ventanas de 18 periodos. Las líneas rojas corresponden al año 2017 y las líneas azules al año 2018.

## Capítulo 4. Discusión y conclusiones

---

La reformulación que se propone en esta tesis para el tensor de fase magnetoteléurico fue motivada por la necesidad de mejorar la exactitud y la precisión de las estimaciones del rumbo. Esto en relación con aplicaciones de monitoreo en las que se requiere analizar conjuntos de datos muy parecidos entre sí y que están afectados por errores aleatorios. La forma estándar de proceder es utilizar la fórmula analítica aunque se sabe que es inestable cuando se aplica a datos con ruido. Se espera que esta reformulación mediante un procedimiento básico y muy simple repercuta en aplicaciones prácticas en general y no solo en el monitoreo de cambios de resistividades en el subsuelo.

El carácter inestable de la fórmula de rumbo derivada del tensor de fase no es intrínseco al tensor de fase. Es posible mantener los activos del tensor de fase con respecto a su inmunidad a las distorsiones galvánicas al replantear la forma de estimar el rumbo. El problema a superar fue el efecto del ruido aleatorio que puede cambiar los cuadrantes del rumbo estimado. Una de las conclusiones es que el problema se puede abordar enviando las estimaciones, lo que en esta tesis se ha llamado fórmula analítica acotada. Esto se justifica porque la fórmula analítica (ecuación 6) también es una solución de mínimos cuadrados, según se probó en el apéndice. Independientemente del cuadrante, cualquier estimación cae en un mínimo de la función de penalización por mínimos cuadrados (ecuación 16). Esto significa que elegir los mínimos de la función de penalización sobre cualquier cuadrante equivale a acotar a un solo cuadrante las estimaciones de la fórmula analítica. La estimación del rumbo minimizando la función de penalización (ecuación 17) permite utilizar varios periodos a la vez. Esta estimación en ventanas de varios periodos, algo intrínsecamente imposible mediante la fórmula analítica, permite recuperar el rumbo con menores varianzas. Por lo tanto, el enfoque de mínimos cuadrados ciertamente aporta algo nuevo a la estimación del rumbo. Con respecto a las incertidumbres, no se exploró más allá de la desviación estándar al suponer distribuciones normales. El tema está abierto para trabajos futuros utilizando métodos más elaborados como enfoques estocásticos, bayesianos o cadenas de Markov para el muestreo y la estimación de parámetros y sus incertidumbres. Otra extensión sería la implementación de algoritmos anidados para imponer la continuidad del rumbo durante un periodo o para obtener la combinación óptima de tamaños de ventana para una variación determinada.

La reformulación del tensor de fase fue la base para entender el carácter dual de la fórmula para el rumbo. También fue la base para la generalización y estabilización de las estimaciones del rumbo utilizando más de un periodo. En el fondo de la reformulación está la diferencia entre una solución exacta

y otra basada en mínimos cuadrados. En el caso de la fórmula para el rumbo la relación entre los datos y la incógnita no es lineal, lo cual dificulta comprender cómo es posible que una fórmula pueda ser a la vez una solución exacta y también una de mínimos cuadrados. Tal vez la mejor forma de apreciar la diferencia entre una solución exacta y otra basada en mínimos cuadrados sea utilizar el ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales.

Si se supone un sistema de ecuaciones  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , donde  $\mathbf{y}$  representa los datos,  $\mathbf{x}$  las incógnitas y  $\mathbf{A}$  es la matriz que los relaciona. Si se considera, por lo pronto, que los datos no tienen error y que hay más ecuaciones que incógnitas, o sea que se tiene un problema sobre-determinado. No es posible despejar directamente el vector  $\mathbf{x}$  porque la matriz  $\mathbf{A}$  no es cuadrada. Lo que procede es multiplicar ambos lados de la ecuación por  $\mathbf{A}^T$ , la transpuesta de  $\mathbf{A}$ . Entonces se tiene  $\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ . La matriz  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  es cuadrada por lo que se termina con la solución  $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}$ .

Al aplicar esta solución a datos sin ruido no se sabrá con certeza cómo se propagan los errores de los datos a la solución. En general, las leyes físicas se expresan suponiendo que todas las cantidades a las que se refieren no tienen errores. Para lidiar con los errores se desarrollan fórmulas para la propagación de errores. Lo mismo se podría haber hecho con la fórmula del rumbo derivada del tensor de fase. Sin embargo, el cambio de cuadrante por efecto de los errores complica la situación porque no se sabe qué propiedad tiene el nuevo valor del rumbo. Por esta razón era importante entender cómo se comporta la fórmula analítica en la presencia de ruido. La duda se disipa con la demostración en el apéndice de que la fórmula analítica para el rumbo es a la vez la solución de mínimos cuadrados en la nueva formulación. Si la estimación se aproxima a un mínimo de la función objetivo (ecuación 16), como lo garantiza el método de mínimos cuadrados, ésta se puede acotar a un solo cuadrante sumando o restando múltiplos de 90 grados. En otras palabras, el criterio de mínimos cuadrados le da significado al uso de una fórmula exacta cuando se utiliza con datos inexactos.

Lo mismo pasa con el sistema de ecuaciones exactas  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . La solución exacta es  $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}$ . A la pregunta ¿qué pasa con la solución  $\mathbf{x}$  si se utiliza la fórmula cuando el vector de datos  $\mathbf{y}$  tiene errores? no habría mucho qué decir. Se podría calcular la variancia de  $\mathbf{x}$  en términos de la variancia de  $\mathbf{y}$  pero no se sabría nada más. Las cosas son diferentes si desde el principio se supone que los datos tienen error. Esto es, que  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e}$ , donde  $\mathbf{e}$  es el vector de errores. El problema se replantea y se busca una solución  $\hat{\mathbf{x}}$  que minimice  $\mathbf{e}^T\mathbf{e}$ . La solución es  $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}$ , la cual es exactamente igual a la solución exacta, pero hay una gran diferencia entre las dos en cuanto a significado. En el caso de la solución exacta prácticamente no se sabe nada sobre la solución, excepto que si los errores tienden a cero se estaría

cerca de la solución exacta. En cambio, en el caso de la solución de mínimos cuadrados se sabe que se está obteniendo exactamente lo que se estaba buscando. Esto es, un compromiso sin sesgo tomando en cuenta todos los datos.

## Literatura citada

---

- Aizawa, K., Koyama, T., Uyeshima, M., Hase, H., Hashimoto, T., Kanda, W., Yoshimura, R., Utsugi, M., Ogawa, Y. y Yamazaki, K. (2013) Magnetotelluric and temperature monitoring after the 2011 sub-Plinian eruptions of Shinmoe-dake volcano. *Earth, Planets and Space*, 65, 539-550.
- Backus, G. and Gilbert, F. (1968). The resolving power of gross earth data. *Geophysical Journal International*, 16(2), 169-205.
- Bahr, K. (1988) Interpretation of the magnetotelluric impedance tensor: regional induction and local telluric distortion. *Journal of Geophysics*, 62(1), 119-127.
- Bibby, H.M. (1977). The apparent resistivity tensor. *Geophysics*, 42(6), 1258-1261.
- Booker, J., Burd, A. (2006). Second Generation Pb-PbCl<sub>2</sub> Electrodes for Geophysical Applications (Revisited). Poster. 18th International Workshop on Electromagnetic Induction in the Earth. El Vendrell, España.
- Cagniard, L. 1953. Basic Theory of the Magneto-Telluric Method of Geophysical Prospecting. *Geophysics*, 18. Pp 605-635.
- Caldwell, T.G., Bibby, H.M., & Brown, C. (2004). The magnetotelluric phase tensor. *Geophysical Journal International*, 158(2), 457-469.
- Cantwell, T. (1960) Detection and analysis of low frequency magnetotelluric signals. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Chave, A.D., & Jones, A.G. (Eds). (2012) *The magnetotelluric method: Theory and practice*. Cambridge University Press.
- Chave, A.D., Thomson, D.J., and Ander, M.E. (1987). On the robust estimation of power spectra, coherences and transfer functions, *J. Geophys. Res.*, 92: 633-648.
- Chave, A.D., and Thomson, D.J. (1989) Some comments on magnetotelluric response function estimation, *J. Geophys. Res.*, 94:14215-14225.
- Claerbout, J.F. (1976) Fundamentals of geophysical data processing. Mc. Graw-Hill.
- Clarke, J., Gamble, T.D., Goubau, W.M., Koch, R.H. and Miracky, R. (1983). Remote-reference magnetotellurics: equipment and procedures. *Geophysical Prospecting*, 31(1), 149-170.
- Comeau, M.J., Becken, M., Käufel, J.S., Grayver, A.V., Kuvshinov, A.V., Tserendug, S., Batmagnai, E. y Demberel, S. (2020) Evidence for terrane boundaries and sutured zones across Southern Mongolia detected with a 2-dimensional magnetotelluric transect. *Earth, Planets and Space* 72,5.
- Constable, S.C., Parker, R.L. and Constable, C.G. (1987). Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. *Geophysics*, 52(3), 289-300.
- Cortés-Arroyo, O.J. (2011) Perfil Magnetotelúrico a través de una Zona de Deformación Activa en el Norte de Baja California. Tesis de Maestría, CICESE.

- Cortés-Arroyo, O.J. (2018). Monitoreo electromagnético temporal como herramienta de evaluación en un yacimiento geotérmico. Tesis doctoral, CICESE, Ensenada, Baja California.
- Cortés-Arroyo, O.J., Romo-Jones, J.M. y Gómez-Treviño, E. (2018). Robust estimation of temporal resistivity variations: Changes from the 2010 Mexicali, Mw 7.2 earthquake and first results on continuous monitoring. *Geothermics*, 72, 288-300.
- Delgadillo Jauregui, N. F. 2019. Determinación estable del rumbo magnetotélúrico utilizando los criterios de fórmulas analíticas. Tesis de Maestría en Ciencias. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California, 53 hojas.
- Didana, Y.L., Thiel, S., Heinson, G. – Boran G. (2016) Magnetotelluric monitoring of hydraulic fracture stimulation at the Habanero Enhanced Geothermal System, Cooper Basin, South Australia, ASEG Extended Abstracts, 2016:1, 1-9.
- Electromagnetic Instruments Inc (1996) MT-1 magnetotelluric system operation manual.
- Gamble, T.D., Goubau, W.M. and Clarke, J. (1979) Magnetotellurics with a remote magnetic reference. *Geophysics*, 44(1): 53-68.
- Groom, R.W. and Bailey, R.C. (1989). Decomposition of magnetotelluric impedance tensors in the presence of local three-dimensional galvanic distortion. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 94(B2), 1913-1925.
- Jiracek, G.R. (1990). Near surface and topographic distortions in electromagnetic induction. *Surveys in Geophysics* 11, 163-203.
- Jones, A. (2012) Distorsion of magnetotelluric data: its identification and removal. En *The Magnetotelluric Method. Theory and Practice* (219-302) Reino Unido: Cambridge University Press.
- Kato, Y. Y Kikuchi, T., 1950a. On the phase difference of earth current induced by the changes of the earth's magnetic field. 1. *Sci. Resp. Tohoku Univ, Fifth Ser.*, 2: 139-141.
- Kato, Y. Y Kikuchi, T., 1950b. On the phase difference of earth current induced by the changes of the earth's magnetic field. 2. *Sci. Resp. Tohoku Univ, Fifth Ser.*, 2: 142-145.
- Kato. Y. Y Noritomi, K., 1951. The thermal variation of the electrical conductivity of rocks.
- Martí, A., Queralt, P., Marcuello, A., Ledo, J., Rodríguez-Escudero, E. Martínez-Díaz, J.J. , Campanyà y Meqbel, N. (2020). Magnetotelluric characterization of the Alhama de Murcia Fault (Eastern Betics, Spain) and study of magnetotelluric interstation impedance inversion. *Earth, Planets and Space*, 72(1), 1-13.
- McNeice, G.W. and Jones, A.G. (2001). Multisite, multifrequency tensor decomposition of magnetotelluric data. *Geophysics*, 66(1), 158-173.
- Muñiz, Y., Gómez-Treviño, E., Esparza, F.J. y Cuellar, M. (2017). Stable 2D magnetotelluric strikes and impedances via the phase tensor and the quadratic equation. *Geophysics*, 82(4), E169-E186.
- Peacock, J.R. (2012) Magnetotelluric monitoring. Disertación para obtener el grado de Doctor en Filosofía en Geofísica. Universidad de Adelaida.

- Peacock, J.R., Thiel, S., Reid, P. y Heinson, G. (2012) Magnetotelluric monitoring of a fluid injection: Example from an enhanced geothermal system. *Geophysical Research Letters*, 39, L18403.
- Peacock, J.R., Thiel, S., Heinson, G.S. y Reid, P. (2013). Time-lapse magnetotelluric monitoring of an enhanced geothermal system. *Geophysics*, 78(3), B121-B130.
- Petiau, G. (2000) Second Generation of lead-lead Chloride Electrodes for Geophysical Applications. *Pure and Applied Geophysics*, 157, 357-382.
- Rikitake, T., 1950a. Electromagnetic induction within the earth and its relation to the electrical state of the earth's interior. 1 (1). Bull. Earthquake Res. Inst., Tokyo Univ., 28:45-100.
- Rikitake, T., 1950b. Electromagnetic induction within the earth and its relation to the electrical state of the earth's interior. 1 (2). Bull. Earthquake Res. Inst., Tokyo Univ., 28:219-262.
- Rikitake, T., 1950c. Electromagnetic induction within the earth and its relation to the electrical state of the earth's interior. 2. Bull. Earthquake Res. Inst., Tokyo Univ., 28:263-283.
- Rikitake, T., 1950d. Electromagnetic induction within the earth and its relation to the electrical state of the earth's interior. 3. Bull. Earthquake Res. Inst., Tokyo Univ., 28:61-69.
- Simpson, F. y K. Bahr. 2005. Practical Magnetotellurics. Cambridge University Press.
- Sims, W.E., & Bostick Jr, F.X. (1969). Methods of magnetotelluric analysis. Texas Univ. at Austin Electronics Research Center.
- Swift, C.M. (1967). A magnetotelluric investigation of an electrical conductivity anomaly in the southwestern United States (Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology).
- Thiel, S. (2017) Electromagnetic Monitoring of Hydraulic Fracturing: Relationship to Permeability, Seismicity and Stress. *Surveys in Geophysics* 38, 1133-1169.
- Tikhonov, A.N., (1950) Determination of the electrical characteristics of the deep strata of the earth's crust. Dok. Akad. Nauk, USSR, 73, 2, 295-297.
- Varentsov, I.M. (1998). 2D synthetic data sets COPROD-2S to study MT inversion techniques, presented at the 14th Workshop on Electromagnetic Induction in the Earth, Sinaia, Romania. Disponible en: <http://mtnet.dias.ie>
- Vozoff, K. (1972). The magnetotelluric method in the exploration of sedimentary basins. *Geophysics*, 37(1), 98-141.

## Apéndice

---

### La fórmula analítica para el rumbo es también una solución de mínimos cuadrados

Para desarrollar una solución de mínimos cuadrados para la ecuación

$$C_{L_2}(\theta) = \Phi'_{12}(T_i, \theta)^2 + \Phi'_{21}(T_i, \theta)^2 \quad (16)$$

es necesario tomar la derivada de  $C_{L_2}(\theta)$  con respecto a  $\theta$  y luego igualar a cero. Sin embargo, esto no es necesario al considerar por el momento que  $\beta = 0$  en la ecuación 15

$$\begin{pmatrix} \Phi'_{11} & \Phi'_{12} \\ \Phi'_{21} & \Phi'_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{\Phi}\mathbf{R}^{-1}(2\beta)\mathbf{R}^T(\theta). \quad (15)$$

La fórmula de Swift se puede obtener al minimizar  $|Z'_{xx}|^2 + |Z'_{yy}|^2$  o al maximizar  $|Z'_{xy}|^2 + |Z'_{yx}|^2$ . Ahora bien, la derivada de  $|Z'_{xy}|^2 + |Z'_{yx}|^2$  es la misma que la derivada de  $|\Phi'_{12}|^2 + |\Phi'_{21}|^2$ , excepto que los elementos del tensor de fase son reales. Al sustituir los elementos correspondientes del tensor de fase en la ecuación  $\tan 4\theta = \frac{2\text{Real}[(Z_{yy}-Z_{xx})(Z_{xy}^*+Z_{yx}^*)]}{|Z_{xy}+Z_{yx}|^2 - |Z_{yy}-Z_{xx}|^2}$  como sigue  $Z_{xx} \leftrightarrow \Phi_{11}, Z_{xy} \leftrightarrow \Phi_{12}, Z_{yx} \leftrightarrow \Phi_{21}, Z_{yy} \leftrightarrow \Phi_{22}$ , el resultado es

$$\tan 4\theta = \frac{2[(\Phi_{22} - \Phi_{11})(\Phi_{12} + \Phi_{21})]}{(\Phi_{12} + \Phi_{21})^2 - (\Phi_{22} - \Phi_{11})^2} \quad (A1)$$

Esta es la solución de mínimos cuadrados para el rumbo en términos de los elementos del tensor de fase. Sin embargo, no hay nada nuevo en esta fórmula. Al considerar la forma equivalente

$$\tan 4\theta = \frac{2 \frac{\Phi_{12} + \Phi_{21}}{\Phi_{22} - \Phi_{11}}}{\frac{(\Phi_{12} + \Phi_{21})^2}{(\Phi_{22} - \Phi_{11})^2} - 1} \quad (A2)$$

O en términos más conocidos

$$\tan 4\theta = \frac{2 \frac{\Phi_{12} + \Phi_{21}}{\Phi_{11} - \Phi_{22}}}{1 - \frac{(\Phi_{12} + \Phi_{21})^2}{(\Phi_{11} - \Phi_{22})^2}} \quad (A1)$$

Se puede reconocer que las razones en el numerador y en el denominador son, de acuerdo con la ecuación

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\Phi_{12} + \Phi_{21}}{\Phi_{11} - \Phi_{22}} \right), \quad (7)$$

$2 \tan 2\alpha$  y  $1 - \tan^2 2\alpha$ , respectivamente. El resultado es la conocida identidad trigonométrica para el ángulo doble

$$\tan 4\theta = \frac{2 \tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} \quad (A3)$$

Esto significa que adaptar la ecuación

$$\tan 4\theta = \frac{2 \operatorname{Real}[(Z_{yy} - Z_{xx})(Z_{xy}^* + Z_{yx}^*)]}{|Z_{xy} + Z_{yx}|^2 - |Z_{yy} - Z_{xx}|^2} \quad (11)$$

al tensor de fase no agrega a la estimación original de  $\tan 2\alpha$ . Simplemente reemplaza la estimación de  $2\theta$  por la de  $4\theta$ . En otras palabras, en el caso de estructuras 2D la fórmula analítica para el rumbo es una solución de mínimos cuadrados. Esto significa que la fórmula analítica de Bahr (1988) es solo una solución de mínimos cuadrados. Para el caso general cuando  $\beta \neq 0$  no es necesario reemplazar los elementos de  $\Phi \mathbf{R}^{-1}(2\beta)$  en la ecuación 16 y proceder algebraicamente como antes. Existe un posible atajo considerando que el efecto del sesgo en la ecuación 15 es rotar  $\Phi$  en un ángulo extra  $-2\beta$ . El signo negativo se debe al inverso de la matriz de rotación. Así es posible reemplazar en la ecuación (A3)  $\tan 2\alpha$  por  $\tan 2(\alpha - \beta)$ . El resultado es

$$\tan 4\theta = \frac{2 \tan 2(\alpha - \beta)}{1 - \tan^2 2(\alpha - \beta)} \quad (A4)$$

Nuevamente, la solución de mínimos cuadrados no agrega nada a la estimación original de  $\tan 2\theta$ . Simplemente reemplaza la estimación de  $2\theta$  por la de  $4\theta$ . Esto significa que la fórmula analítica para el rumbo, derivada del tensor de fase, también es una solución de mínimos cuadrados.