

**Centro de Investigación Científica y de  
Educación Superior de Ensenada**



**MODELO DE PRODUCCION PRIMARIA EN LA  
BAHIA DE TODOS SANTOS**

**TESIS  
MAESTRIA EN CIENCIAS**

**DANTENOC ALVAREZ MILLAN**

**ENSENADA BAJA CALIFORNIA, MEXICO FEBRERO DE 2002**



Centro de Investigación Científica y Educación  
Superior de Ensenada  
División de Oceanología  
Departamento de Ecología

# **Modelo de producción primaria en la Bahía de Todos Santos**

Tesis

Que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para  
obtener el grado de **Maestro Ciencias en Ecología Marina**  
presenta:

L.C.C. Danténoc Alvarez Millán

# Dedicatoria

A Dios, por todas las cosas buenas

A mi familia, por su ejemplo, amor y... por todo

A mi asesor, por aceptarme y apoyarme en el programa

A mis amigos, por los momentos de risa y diversión

A CONACYT por su apoyo económico

... y a todo lo que aún está por venir

**Resumen** de la tesis de **Danténoc Alvarez Millán** presentada como requisito parcial para la obtención del grado de **Maestro en Ciencias en Ecología Marina**, Ensenada, Baja California, México. Diciembre del 2001.

### **Modelo de producción primaria en la Bahía de**

Resumen aprobado por:

---

Director de Tesis

Se elaboró un modelo de producción primaria en la Bahía de Todos Santos el cual incluyó dentro de los componentes físicos y bio-químicos a la circulación residual, temperatura del agua, irradiación solar, así como las concentraciones de nitratos y clorofila, el estado nutricional de las células y parámetros ecofisiológicos del fitoplancton. El modelo fue elaborado en lenguaje Matemática, con una estructura similar a la de los autómatas celulares, donde las operaciones se expresan como reglas lógicas de transformación. La ventaja de este tipo de planteamiento es que facilita el manejo y resolución de procesos que no son lo suficientemente entendidos ó que no se pueden representar con ecuaciones diferenciales. Primeramente se comprobó el modelo biológico en una columna de agua sin movimiento horizontal, el cual simuló en forma correcta el crecimiento del fitoplancton como respuesta a una alta concentración de nutrientes. Posteriormente se ejecutó el modelo completo para toda la bahía, incluyendo los aspectos físicos y bio-químicos, con escenarios representativos de las diferentes estaciones del año. La circulación horizontal y la batimetría de la bahía fueron los factores físicos determinantes en la distribución y crecimiento del fitoplancton, sobresaliendo la entrada norte de la bahía como una zona con un alto crecimiento del fitoplancton, especialmente durante el verano. El modelo dio como resultado una alta concentración de clorofila hacia el interior de la bahía, posterior al pulso de nutrientes proveniente del exterior del sistema. Después de algunos días la alta concentración de clorofila fue consumido por el zooplancton, por lo que posteriormente la población fitoplanctónica disminuyó. En general, todos los resultados arrojados por las diferentes condiciones en que se usó el modelo llevan a la conclusión de que un enfoque incluyente de los procesos físicos, biológicos y químicos, resultan en un mejor entendimiento del funcionamiento integral de ecosistemas como el de la Bahía de Todos Santos. Modelos de este tipo no solamente arrojan resultados predictivos, sino que ofrecen una mejor visión de la ecología del fitoplancton, ya que proveen resultados que son de naturaleza explicativa.

**Palabras clave:** Producción primaria, fitoplancton, diatomeas, autómatas celulares, simulación, circulación residual, tasa de crecimiento limitada por luz, tasa de crecimiento limitada por nutrientes, atenuación de la luz, estado nutricional de las células.

**Abstract** from the thesis of **Danténoc Alvarez Millán**, presented as partial requisite to obtain the degree of **Master in Science in Marine Ecology**. Ensenada, Baja California, Mexico. December 2001.

A primary productivity model was developed for the Todos Santos Bay, which included physical and bio-chemical components, such as water temperature, solar irradiance, residual currents, as well as information about nitrate and chlorophyll concentrations, nutritional state of the cells, and phytoplankton physiological parameters. The model was developed in Mathematica and is lattice based in nature, with the operations not necessarily expressed as conventional differential equations, but rather as logical transformation rules. The advantage of such an approach is that it facilitates handling and resolving processes that are either not understood well enough, or by their very nature cannot be adequately described using differential equations. The biological model was tested for a single water column without advection, where it showed a good performance, simulating events such as phytoplankton growth as a result of a high-nutrient pulse. After that, the model was run for the whole bay, including both the physical and bio-chemical part; and different scenarios were picked up as representative of different seasons of the year. Both the horizontal advection, and the bay's bathymetry proved to be influential in determining the bay's regions where phytoplankton growth occurred more strongly; with favored regions most noticeably including the northern mouth of the bay, specially in the summer months. Among the most outstanding results was the model's behavior when fed with a high nutrient pulse from outside the system. In response the model presented a high concentration chlorophyll patch that follows the nutrient pulse into the bay where it is finally consumed after a few days, leaving the phytoplankton population to wane back to smaller concentrations shortly thereafter. In general, all results point to the conclusion that a complete and encompassing approach to the physical, biological and chemical processes result in a better understanding of the integral workings of such ecosystems like the Todos Santos Bay. Models of this sort not only throw quantitative predictive results, but in general also give a better insight into the complete plankton ecology, by providing results that are more explanatory.

**Key Words:** Primary production, phytoplankton, diatoms, cellular automata, simulation, residual currents, light limited growth rate, nutrient limited growth rate, light attenuation, cell nutritional status.

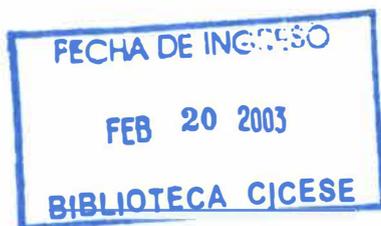
## Indice

<b>I Introducción.....</b>	<b>1</b>
I.1 Área de estudio .....	2
<b>II Modelado físico.....</b>	<b>6</b>
II.1 Modelo de circulación residual.....	6
II.2 Implementación de las reglas del modelo de circulación residual.....	26
II.2.1 Manejo de la línea de costa.....	27
II.2.2 Consideraciones por batimetría.....	28
II.2.3 Aplicación de las reglas de transporte.....	32
II.2.4 Fronteras en el modelo.....	34
II.2.5 Consideraciones en el transporte de Q.....	37
II.3 Variación diurna de la luz.....	38
II.3.1 Implementación de la variación diurna de la luz.....	40
II.4 Temperatura del agua.....	42
II.4.1 Implementación de la temperatura del agua.....	48
<b>III Modelado biológico.....</b>	<b>51</b>
III.1 Planteamiento básico del modelo biológico.....	51
III.2 Tasa de crecimiento limitada por luz.....	54
III.2.1 Implementación de la tasa de crecimiento limitada por la luz.....	59
III.3 Tasa de crecimiento limitada por nutrientes.....	65
III.3.1 Implementación de la tasa de crecimiento limitada por nutrientes.....	67
III.4 Consumo de nutrientes.....	68
III.4.1 Implementación del consumo de nutrientes.....	71
III.5 Distribución vertical de la clorofila.....	76
III.5.1 Implementación del algoritmo de reconstrucción del perfil vertical de clorofila ..	81
III.5.2 Refinamiento en la implementación de la regla MB20.....	85
III.5.3 Comportamiento del algoritmo de reconstrucción.....	91
<b>IV Simulación de una columna de agua.....</b>	<b>96</b>

IV.1 Ejemplo de una columna de 50m .....	96
IV.2 Ejemplo de una columna de 15m .....	106
IV.3 Ejemplo de una columna de 150m.....	112
<b>V Modelado integrado .....</b>	<b>121</b>
V.1 Escenario 1: Septiembre .....	122
V.2 Escenario 2: Octubre .....	130
<b>VI Conclusiones .....</b>	<b>137</b>
<b>Bibliografía citada .....</b>	<b>140</b>
<b>Anexos.....</b>	<b>142</b>

Lista de algoritmos utilizados en esta tesis

Expresiones y ecuaciones matemáticas utilizadas en esta tesis



## Lista de figuras

Figura	Descripción	Página
1	Mapa del área a simular; la Bahía de Todos Santos .....	3
2	Corrientes residuales para un viento del NW de 5 m/s. Modificada de Gutierrez-Gutierrez (1999).....	8
3	Corrientes residuales para un viento del W de 5 m/s. Modificada de Gutierrez-Gutierrez (1999).....	8
4	Corrientes residuales para un viento del N de 5 m/s. Modificada de Gutierrez-Gutierrez (1999).....	9
5	Corrientes residuales para un viento del S de 5 m/s. Modificada de Gutierrez-Gutierrez (1999).....	9
6	Corrientes residuales para un viento del SW de 5 m/s. Modificada de Gutierrez-Gutierrez (1999).....	10
7	Corrientes residuales para un viento del E de 5 m/s. Modificada de Gutierrez-Gutierrez (1999).....	10
8	Arreglo unidimensional con flujo hacia el este (Ejemplo 1).....	12
9	(Ejemplo 1, cont.) Tres posibles escenarios obtenidos a partir de la Fig. 8, correspondiendo a tres distintas magnitudes de flujo.....	13
10	Ahora el sistema tiene un flujo hacia el oeste. (Ejemplo 2).....	14
11	(Ejemplo 2, cont.) El resultado es la imagen espejo del ejemplo 1 (Fig. 9).....	14
12	(Ejemplo 3) El equivalente bidimensional del ejemplo 1 (Fig. 8).....	15
13	(Ejemplo 3, cont.) Aún siendo un ejemplo bidimensional, resulta similar al resultado del segundo caso del ejemplo 1 .....	17
14	Direcciones que los vectores de flujo de las celdas vecinas deben de tomar para aportar partículas a la celda (i,j).....	18
15	(Ejemplo 4) Una situación en la que el flujo corre en dirección diagonal .....	21
16	(Ejemplo 4, cont.) Los vectores de circulación oblicuos generalmente resultan en un transporte a 3 celdas vecinas. En particular, la figura muestra el resultado obtenido –después de una iteración– con $V_{i-1,j-1}$ igual a $\{2/3, 0.6\}$ .....	21

<b>Figura</b>	<b>Descripción</b>	<b>Página</b>
17	(Ejemplo 5) A partir de un estado inicial similar al mostrado en la figura 12, existen tres alternativas de transporte de $(i,j-1)$ hacia $(i,j)$ dependiendo del valor que tome $V_{i,j-1,v}$ . En azul se muestra el caso para una $v$ positiva, en verde el caso en que $v$ es cero, y en rojo el caso para una $v$ negativa.....	24
18	Flujo de partículas de una celda a otra. Por variaciones en la batimetría, un mismo número de partículas puede representar diferentes concentraciones en distintas celdas .....	28
19	Representación de la batimetría de la bahía, según datos utilizados en el modelo. Los ejes x,y corresponden a los índices en la matriz de datos.....	30
20	Desfase entre los datos de batimetría y corrientes. Rojo en donde existe corriente pero no batimetría y azul donde existe batimetría pero no corriente.....	31
21	El sistema maneja reglas especiales cuando trata el caso de las fronteras abiertas del sistema. En amarillo se representa la frontera propiamente, mientras que las zonas A y B representan las celdas que interactúan con dicha frontera.....	34
22a-d	Perfiles de temperatura en la Bahía de Todos Santos, tomados de García Córdova <i>et. al.</i> (CICESE, Departamento de Oceanografía Física, comunicación personal), correspondientes a: a) Noviembre 1993, b) Diciembre 1993, c) Enero 1994 y d) Marzo 1994, respectivamente.....	42
22c-g	Perfiles de temperatura en la Bahía de Todos Santos, tomados de García Córdova <i>et. al.</i> (CICESE, Departamento de Oceanografía Física, comunicación personal), correspondientes a: e) Mayo-Junio 1994, f) Septiembre 1994 y g) Octubre 1994, respectivamente.....	43
23a-d	Comparación entre el comportamiento de las reglas MT1-MT4 y los datos a partir de los cuales dichas expresiones fueron generadas. Los colores sugieren la estación del año de cada gráfica y corresponden a los meses de noviembre, diciembre, enero y marzo respectivamente.....	49
23e-g	Comparación entre el comportamiento de las reglas MT5-MT7 y los datos a partir de los cuales dichas expresiones fueron generadas. Los colores sugieren la estación del año de cada gráfica y corresponden a los meses de mayo/junio, septiembre y octubre respectivamente.....	50
24	Perfil del parámetro fotosintético $\alpha$ , reparametrizado a partir del reportado por Valdéz-Holguín <i>et. al.</i> (1998) para la Bahía de Todos Santos .....	55

Figura	Descripción	Página
25	Comportamiento de la tasa de crecimiento limitada por la temperatura (MB3) con un $\Delta t$ de un día .....	60
26	Comportamiento de la tasa de crecimiento limitada por la luz –y la temperatura– (MB10), cuando $\Delta t$ es un día .....	64
27	Comportamiento de la tasa de crecimiento limitada por nutrientes (MB13), cuando $\Delta t$ es un día .....	68
28	El comportamiento del consumo de nutrientes cuando la temperatura del agua es 18°C, el $\Delta t$ es un día y el fitoplancton representa 1 $\mu\text{M}$ de nitrógeno particulado.....	72
29	Perfil de la distribución vertical de clorofila, según la ecuación D, en el que se muestran los cuatro parámetros que la caracterizan. Nótese que h es el área de <i>toda</i> la campana, incluyendo la porción que no cae dentro de la columna de agua .....	77
30	Perfil de clorofila obtenido mediante el algoritmo de reconstrucción, a partir de una concentración de 50 mg Chl $\text{m}^{-2}$ y una columna de agua de 50 m.....	80
31	Relación entre la concentración de clorofila superficial y las profundidades de máxima concentración de clorofila, penetración del 1% y penetración del 0.1% de la luz superficial .....	83
32	Comportamiento de la variable $\text{Chl}_s$ como función de la profundidad de la columna de agua y la concentración promedio de Chl en la misma (Chlint / Prof).....	86
33a-d	Perfiles de clorofila para una columna de agua de 21, 30, 40 y 50 m respectivamente. El eje x indica la [Chl] promedio (en mg Chl $\text{m}^{-3}$ ) para la cual dicha columna fue calculada, mientras que el eje y es profundidad (m). La escala de color muestra las concentraciones de clorofila (mg Chl $\text{m}^{-3}$ ) del perfil vertical de clorofila reconstruido .....	91
33e-k	Perfiles de clorofila para una columna de agua de 60, 70, 80, 90, 100, 110 y 120m respectivamente. El eje x indica la [Chl] promedio (en mg Chl $\text{m}^{-3}$ ) para la cual dicha columna fue calculada, mientras que el eje y es profundidad (m). La escala de color muestra las concentraciones de clorofila (mg Chl $\text{m}^{-3}$ ) del perfil vertical de clorofila reconstruido .....	92
34	Evolución temporal del perfil de Chl. Ejemplo para una columna de 50m .....	96

<b>Figura</b>	<b>Descripción</b>	<b>Página</b>
35	Evolución temporal de la penetración de la luz en el agua. Ejemplo para una columna de 50m. La alternación de las bandas claras y oscuras se debe a los cambios día / noche.....	97
36	Evolución del perfil de la tasa de crecimiento. Ejemplo para una columna de 50m .....	98
37	Evolución temporal del perfil de consumo de nutrientes. Ejemplo para una columna de 50m .....	98
38	Evolución temporal del estado de nutrición de la población de fitoplancton. Ejemplo para una columna de 50m. $Q_{\min} = 0.071$ , $Q_{\max} = 0.18$ y $Q_{\text{equi}} = 0.15$ .....	99
39	Evolución temporal de la concentración (promedio) de nitratos en la columna de agua. Ejemplo para una columna de 50 m.....	99
40	Evolución temporal de la concentración promedio de Chl. Ejemplo para una columna de 50 m.....	99
41	Evolución temporal de la concentración integrada de Chl. Ejemplo para una columna de 50 m.....	99
42	Evolución temporal de la productividad primaria neta para toda la columna de agua. Ejemplo para una columna de 50 m.....	99
43	Evolución temporal de la productividad primaria bruta para toda la columna de agua. Ejemplo para una columna de 50 m.....	99
44	Evolución temporal del perfil de Chl. Ejemplo para una columna de 15 m.....	106
45	Evolución temporal de la penetración de la luz en el agua. Ejemplo para una columna de 15 m. A pesar de la homogeneidad en la distribución de la clorofila y los nutrientes, la estructura vertical de la luz en la columna de agua hará que la biología muestre una estructura heterogénea en su desempeño con respecto a la profundidad.....	107
46	Evolución del perfil de la tasa de crecimiento. Ejemplo para una columna de 15 m .....	107
47	Evolución temporal del perfil de consumo de nutrientes. Ejemplo para una columna de 15 m.....	107

<b>Figura</b>	<b>Descripción .....</b>	<b>Página</b>
48	Evolución temporal del estado de nutrición de la población fitoplanctónica. Ejemplo para una columna de 15 m. $Q_{\min} = 0.071$ , $Q_{\max} = 0.18$ y $Q_{\text{equi}} = 0.15$ .....	108
49	Evolución temporal de la concentración (promedio) de nitratos en la columna de agua. Ejemplo para una columna de 15 m .....	108
50	Evolución temporal de la concentración promedio de Chl. Ejemplo para una columna de 15 m .....	108
51	Evolución temporal de la concentración integrada de Chl. Ejemplo para una columna de 15 m .....	108
52	Evolución temporal de la productividad primaria neta para toda la columna de agua. Ejemplo para una columna de 15 m .....	108
53	Evolución temporal de la productividad primaria bruta para toda la columna de agua. Ejemplo para una columna de 15 m .....	108
54	Evolución temporal del perfil de Chl. Ejemplo para una columna de 150m .....	112
55	Evolución temporal de la penetración de la luz en el agua. Ejemplo para una columna de 150 m .....	112
56	Evolución del perfil de tasa de crecimiento. Ejemplo para una columna de 150 m .....	113
57	Evolución temporal del perfil de consumo de nutrientes. Ejemplo para una columna de 150 m .....	113
58	Evolución temporal del estado de nutrición de la población fitoplanctónica. Ejemplo para una columna de 150m. $Q_{\min} = 0.071$ , $Q_{\max} = 0.18$ y $Q_{\text{equi}} = 0.15$ .....	114
59	Evolución temporal de la concentración (promedio) de nitratos en la columna de agua. Ejemplo para una columna de 150 m .....	114
60	Evolución temporal de la concentración promedio de Chl. Ejemplo para una columna de 150 m .....	114
61	Evolución temporal de la concentración integrada de Chl. Ejemplo para una columna de 150 m .....	114
62	Evolución temporal de la productividad primaria "nueva" neta para toda la columna de agua. Ejemplo para una columna de 150 m .....	114

<b>Figura</b>	<b>Descripción</b>	<b>Página</b>
63	Evolución temporal de la productividad primaria “nueva” bruta para toda la columna de agua. Ejemplo para una columna de 150 m .....	114
64	Evolución temporal del primer escenario, el cual representa el mes de septiembre con una corriente residual impulsada por un viento del norte. Las tres columnas corresponden respectivamente a: a) la distribución de Chl (iniciando en $0.5 \text{ mg Chl m}^{-3}$ ), b) la distribución de $\text{NO}_3$ (iniciando en $1 \mu\text{M}$ ) y c) la distribución de Q (iniciando en $0.1 \mu\text{Mol N} / \mu\text{Mol C}$ ). Cada renglón equivale a 15 iteraciones del modelo. El día modelado se muestra en la esquina superior derecha de cada cuadro.....	122-125
65	Evolución temporal del segundo escenario. Las tres columnas corresponden respectivamente a: a) la distribución de Chl (iniciando en $0.5 \text{ mg Chl m}^{-3}$ ), b) la distribución de $\text{NO}_3$ (iniciando en $1 \mu\text{M}$ ) y c) la distribución de Q (iniciando en $0.1 \mu\text{Mol N} / \mu\text{Mol C}$ ). Cada renglón equivale a 15 iteraciones del modelo. Nótese que en la esquina superior derecha de cada imagen se localiza el día que dicha imagen representa ..	130-134

## Lista de tablas

<b>Tabla</b>	<b>Descripción</b>	<b>Página</b>
I	Valores de irradiancia solar (PAR) promedio para los días representativos del año, con un $\Delta t$ de 4.8 hrs .....	39
II	Noviembre 1993: Resultados obtenidos al ajustar la figura 22a a una función mediante una regresión no lineal.....	44
III	Diciembre 1993: Resultados obtenidos al ajustar la figura 22b a una función mediante una regresión no lineal.....	44-45
IV	Enero 1994: Resultados obtenidos al ajustar la figura 22c a una función mediante una regresión no lineal.....	45
V	Marzo 1994: Resultados obtenidos al ajustar la figura 22d a una función mediante una regresión no lineal.....	45
VI	Mayo-Junio 1994: Resultados obtenidos al ajustar la figura 22e a una función mediante una regresión no lineal.....	46
VII	Septiembre 1994: Resultados obtenidos al ajustar la figura 22f a una función mediante una regresión no lineal.....	46
VIII	Octubre 1994: Resultados obtenidos al ajustar la figura 22g a una función mediante una regresión no lineal.....	47
IX	Resultados obtenidos al ajustar los datos de XXX a una función bidimensional mediante una regresión polinomial de segundo orden.....	59
X	Resultados obtenidos al ajustar lo figura 31 a un polinomio mediante una regresión múltiple no lineal .....	88-89
XI	Diferentes combinaciones sugeridas para los escenarios que se pueden modelar .....	121

# I Introducción

El conocimiento de la productividad primaria es fundamental para entender adecuadamente el funcionamiento del ecosistema marino, ya que ésta representa la base de la cadena alimenticia. Es a partir de la producción primaria que se desarrollan los organismos mayores como moluscos, crustáceos, peces, mamíferos, etc. Entender el medio marino requiere de conocer primeramente la producción primaria, además de las variables y factores que contribuyen a los cambios en escalas diversas. Se han realizado algunos trabajos en determinadas regiones del océano con el fin de predecir, en función de una o dos variables fácilmente obtenibles, el comportamiento de la producción primaria (Bissett *et al.*, 1999). Sin embargo, pocos trabajos han hecho un verdadero intento por describir de manera detallada lo que ocurre en la naturaleza, conjuntado la dinámica física con los factores biológicos y fisiológicos del fitoplancton. Como consecuencia de lo anterior, la gran mayoría de los modelos fracasan en explicar los procesos más sencillos que se presentan en la naturaleza, como resultado de no contemplar de manera integrada todas las variables físico-, químico- y biológicas que se conocen jugar un papel importante.

El presente trabajo es un esfuerzo para explicar, principalmente de manera cualitativa, el mecanismo mediante el cual el proceso de aporte de nutrientes inorgánicos hacia las aguas superficiales provoca crecimientos del fitoplancton en la Bahía de Todos Santos. Para este propósito se diseñó un modelo que integra componentes físicos del ecosistema con diversas variables bio-químicas. Dentro de las variables físicas se utilizan la temperatura del agua, la incidencia superficial de la luz y la penetración de la irradiancia fotosintéticamente

activa (irradiancia PAR) en la columna de agua, además de las corrientes residuales en la bahía bajo condiciones de vientos dominantes. Las variables bio-químicas que ingresan al modelo son la concentración de clorofila en el agua (como indicador de la biomasa del fitoplancton), el estado nutricional de las células del fitoplancton, la concentración de nitratos en el agua, la eficiencia fotosintética, la tasa máxima de crecimiento y variables relacionadas con la fisiología del fitoplancton (diatomeas).

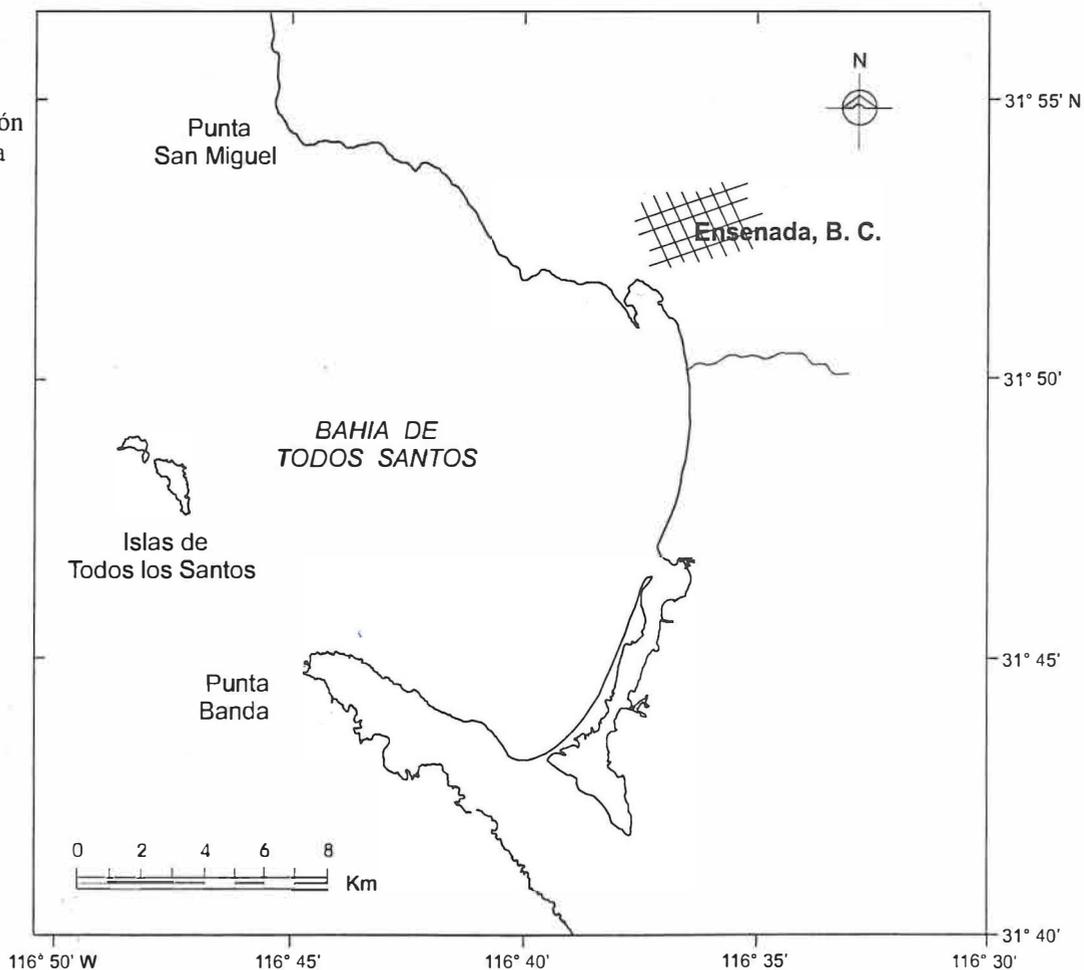
Los resultados obtenidos demuestran en general que un enfoque integral del efecto que los procesos físicos, biológicos y químicos tienen sobre el crecimiento del fitoplancton resulta en una mejor simulación del funcionamiento del medio ambiente. Este modelo no solamente arroja resultados cuantitativos de la producción primaria en la zona de estudio, sino que provee un entendimiento más particular de la ecología del fitoplancton de la región.

## **I.1 Área de Estudio**

La Bahía de Todos Santos (Fig. 1) está ubicada en la costa noroeste de la Península de Baja California entre los  $31^{\circ}40'$  y  $31^{\circ}55'$  de latitud norte y los  $116^{\circ}36'$  y  $116^{\circ}50'$  de longitud oeste. La bahía está limitada al norte por Punta San Miguel, al este por la ciudad de Ensenada, al sur por la Península de Punta Banda, y al oeste por las Islas de Todos Santos. Tiene una forma un tanto rectangular, con un área aproximada de  $180 \text{ km}^2$  y dos conexiones al mar abierto: la boca norte de 12 km de ancho y la boca sur de 6 km de ancho. La boca norte tiene una profundidad máxima de 40 m, aunque contiene bajos de hasta 10 m de profundidad, mientras que la boca sur alcanza profundidades de hasta 300 m en el Cañón de Punta Banda.

**Figura 1:**

Localización de la Bahía de Todos Santos.



La bahía es una cuenca somera donde el 75% de su área presenta una profundidad promedio menor a los 50 m, con bajos de hasta 6 m. El restante 25% corresponde al Cañón de Punta Banda que se encuentra en la zona sur paralelo a la Península de Punta Banda. Las isóbatas menores a los 30 m tienden a ser paralelas a la línea de costa, mientras que las mayores a 60 m toman la configuración de un cono o abanico, hasta alcanzar los 350 m en la zona más profunda del cañón (González Villagrán, 1991).

La temperatura superficial promedio en la bahía presenta un mínimo de 11.0°C en febrero y un máximo de 22.5°C en agosto y septiembre (Mancilla Pereza y Martínez, 1991).

Granados Guzmán *et al.* (1995) en los registros del termógrafo instalado al este de la Isla de Todos Santos reportaron una temperatura mínima de 11.1°C en el mes de junio, mientras que en el mes de noviembre se registró una máxima de 17.4°C. La fluctuación de la temperatura en diferentes épocas del año es indicativo de que la bahía está influenciada por diferentes condiciones oceanográficas y atmosféricas. La columna de agua se encuentra mezclada desde la superficie hasta cerca del fondo durante invierno, con una estratificación máxima durante el verano. Gaxiola Castro y Alvarez Borrego (1984) reportaron en un estudio realizado durante el verano, en un punto cercano a las Islas de Todos Santos, la presencia de una columna de agua estratificada desde la superficie hasta 80 m de profundidad. La influencia del agua fría subsuperficial dentro de la bahía se origina por el transporte de agua que aflora por lo eventos de surgencia (Mancilla Pereza y Martínez, 1991), los cuales se intensifican en primavera y verano (Alvarez Borrego y Alvarez Borrego, 1982; Gómez Valdéz, 1983). El aporte de nutrientes a la zona eufótica por afloramiento favorece el crecimiento de las comunidades fitoplanctónicas.

La concentración de clorofila *a* y la productividad primaria durante el verano presentan máximos (2 mg Chl*a* m<sup>-3</sup> y >6.5 mg C m<sup>-3</sup> h<sup>-1</sup>, respectivamente) a las profundidades del 25 y 10% de penetración de luz (Gaxiola Castro y Alvarez Borrego, 1984). Estos datos indican que la principal producción del fitoplancton en la columna de agua se realiza preferentemente a intensidades intermedias de luz, debido principalmente a la distribución vertical de los nutrientes. Gaxiola Castro y Alvarez Borrego (1984) reportaron para la bahía que la producción del fitoplancton en la columna de agua no sólo depende de la cantidad de luz que penetra, sino también de la profundidad de la capa de mezcla.

En primavera las diatomeas son el grupo dominante, mientras que en verano son los dinoflagelados (Orellana Cepeda *et al.*, 1994). Sin embargo, Gaxiola Castro y Alvarez Borrego (1984) reportaron que durante el verano el grupo dominante fue el nanoplancton (células  $<20 \mu\text{m}$ ), seguido de diatomeas y dinoflagelados.

La concentración de nitratos ( $\text{NO}_3$ ) en primavera-verano varía desde valores indetectables en superficie hasta  $>5.8 \mu\text{M}$  en la columna de agua, debido probablemente a los aportes de surgencias costeras (Orellana Cepeda *et al.*, 1994). Gaxiola Castro y Alvarez Borrego (1984) reportaron para el verano concentraciones de nitratos con un mínimo  $\sim 4 \mu\text{M}$  y un máximo  $\sim 24 \mu\text{M}$  correspondientes al 50% y 1% de penetración de luz respectivamente.

Matus Hernández (1991) reportó para un período de muestreo de 15 días en el mes de julio en una localidad costera de la Bahía de Todos Santos, que el microzooplancton (organismos  $< 200 \mu\text{m}$ ) estuvo dominado por ciliados con una tasa específica de pastoreo con valores desde no detectables hasta  $2.88 \text{ d}^{-1}$ , y que en el macrozooplancton (organismos  $>333 \mu\text{m}$ ) dominaron los copépodos, con tasas de pastoreo desde no detectables hasta  $2.4 \text{ d}^{-1}$ . García Pámanes (1989) reportó también para un período de muestreo de 15 días en el mes de junio en un punto al suroeste de la Península de Punta Banda, que la tasa de pastoreo del zooplancton (dominado principalmente por copépodos) fue de  $0.4 \times 10^{-3}$  a  $8.6 \times 10^{-3} \text{ h}^{-1}$  para *Calanus pacificus* y de  $0.8 \times 10^{-3}$  a  $43.8 \times 10^{-3} \text{ h}^{-1}$  para *Acartia tonsa*. Este mismo autor mencionó que los eventos de surgencia influyeron fuertemente sobre la tasa de filtración y pastoreo específico, coincidiendo tasas bajas con alta variabilidad durante los afloramiento y tasas altas poco variables durante la fase de relajamiento.

## II Modelado físico

### II.1 Modelo de circulación residual

Un factor que puede afectar fuertemente la distribución del fitoplancton y los nutrientes en la bahía son las condiciones físicas que imperan en la misma. Cualquier modelo que pretenda describir estas distribuciones deberá necesariamente incluir tanto la batimetría de la bahía como las corrientes que en ella se presentan.

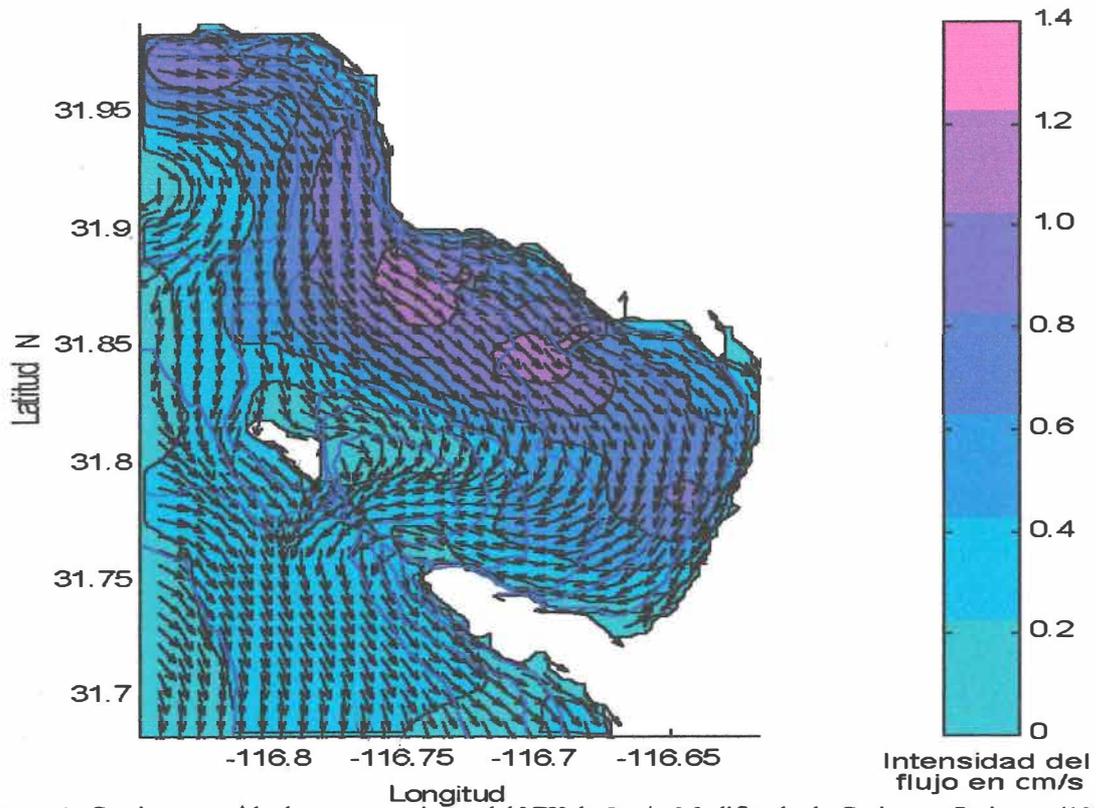
Gutiérrez Gutiérrez (1999) modeló las corrientes residuales bajo diferentes escenarios de esfuerzo eólico. Dicho trabajo se basó en un modelo numérico conocido como *Princeton Ocean Model*, el cual es descrito con detalle en el trabajo de Blumberg y Mellor (1987). Gutiérrez Gutiérrez (1999) supuso una bahía barotrópica, dividida en una malla rectangular de 140 puntos en la dirección norte-sur y 95 puntos en la dirección este-oeste. Eso genera una malla con celdas de 225x225 m<sup>2</sup>. El modelo predice la circulación residual impulsada por el viento, la cual se presenta en mapas que se utilizan en este trabajo como datos de entrada.

Referente al concepto de circulación residual, considérese una partícula cualquiera en el agua. En principio, dicha partícula se moverá durante el día en una trayectoria cíclica como resultado de la marea. Sin embargo, existen otras fuerzas que posiblemente actuarán sobre ella; en bahías y lagunas estas fuerzas adicionales pueden incluir el viento, el gradiente de presión atmosférica, descargas de ríos, corrientes de densidad, corrientes de mar abierto, fuerza de Coriolis e interacciones no lineales de la marea, así como la geometría costera y

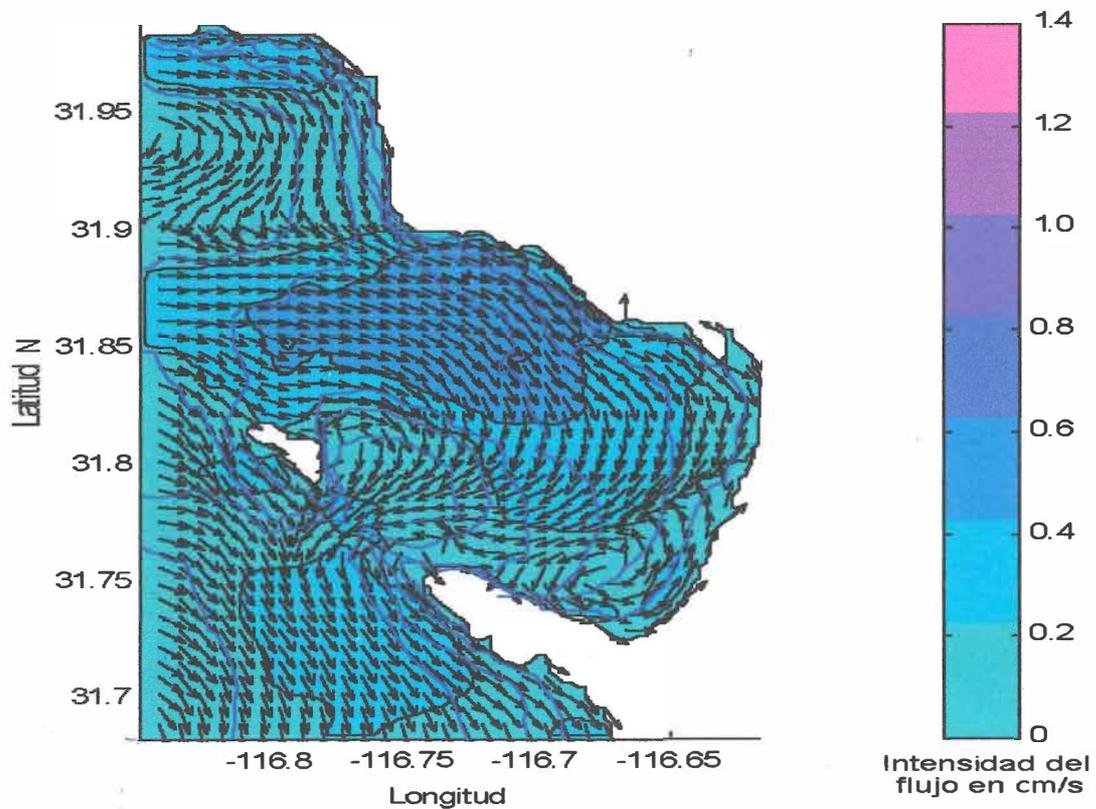
batimétrica (Zimmerman, 1977; Blumber *et al.*, 1993). De manera tal que existen diversos factores por las cuales dicha partícula puede no regresar a su posición original aún después de haber completado un ciclo de marea. A este desplazamiento neto entre su posición inicial y su posición final se le conoce como *flujo residual* (Yanagi, 1976) y es precisamente este flujo el que nos permite calcular el transporte de partículas día a día en la bahía. Los flujos residuales presentados por Gutiérrez Gutiérrez (1999) son resultado del esfuerzo del viento, ya que –según sus resultados– la marea no aporta de manera significativa a estos flujos en la bahía.

Para obtener los flujos residuales inducidos por el viento, Gutiérrez Gutiérrez (1999) permitió la estabilización de su modelo; esperando hasta que la diferencia entre la elevación media del mar en un paso de tiempo al siguiente fuera menor a 1 mm. En su trabajo presentó diversos escenarios, clasificando los vientos según la estación del año en el cual predominan. Para verano analizó los vientos de NW, W y N (Figs. 2-4); mientras que para invierno analizó los vientos de S y SW (Figs. 5 y 6). También generó un escenario con viento del este, para representar las condiciones Santana que esporádicamente se presentan en otoño (Fig. 7). Todos estos escenarios fueron generados con un viento constante de 5 m/s..

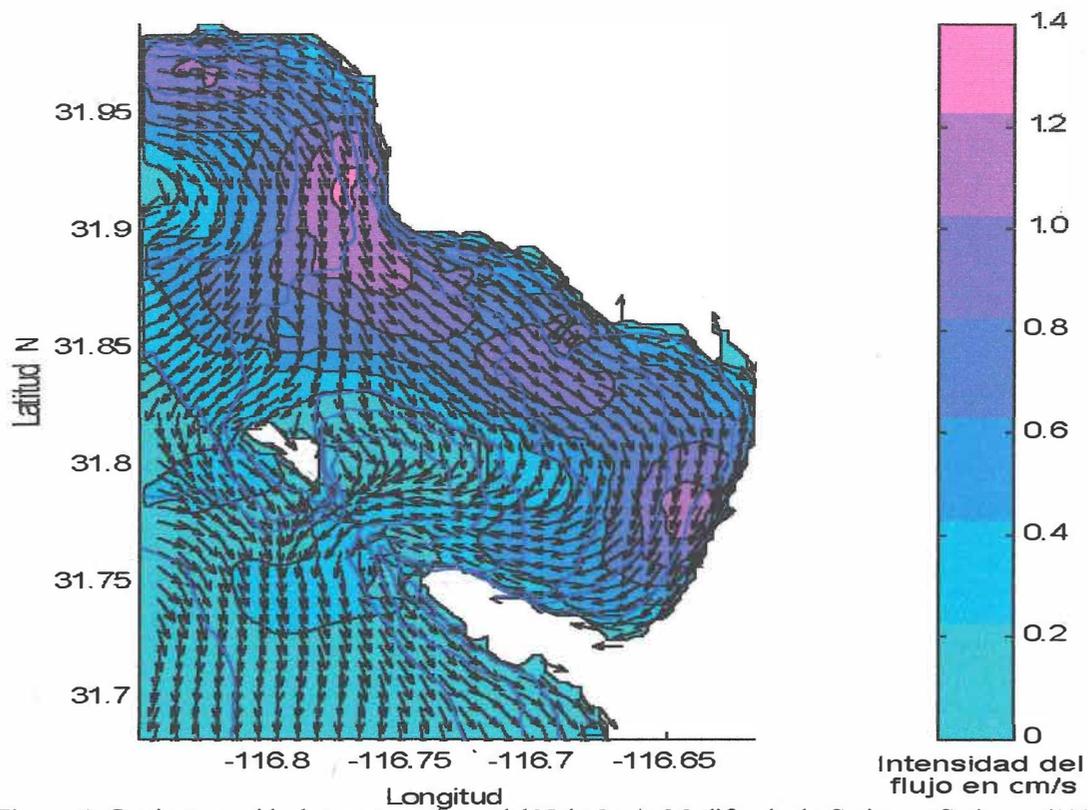
El presente trabajo se limita simplemente a presentar los datos de las corrientes residuales generados por el trabajo de Gutiérrez Gutiérrez (1999), tomándolos como punto inicial desde el cual se generan los datos de entrada para el modelo de producción primaria.



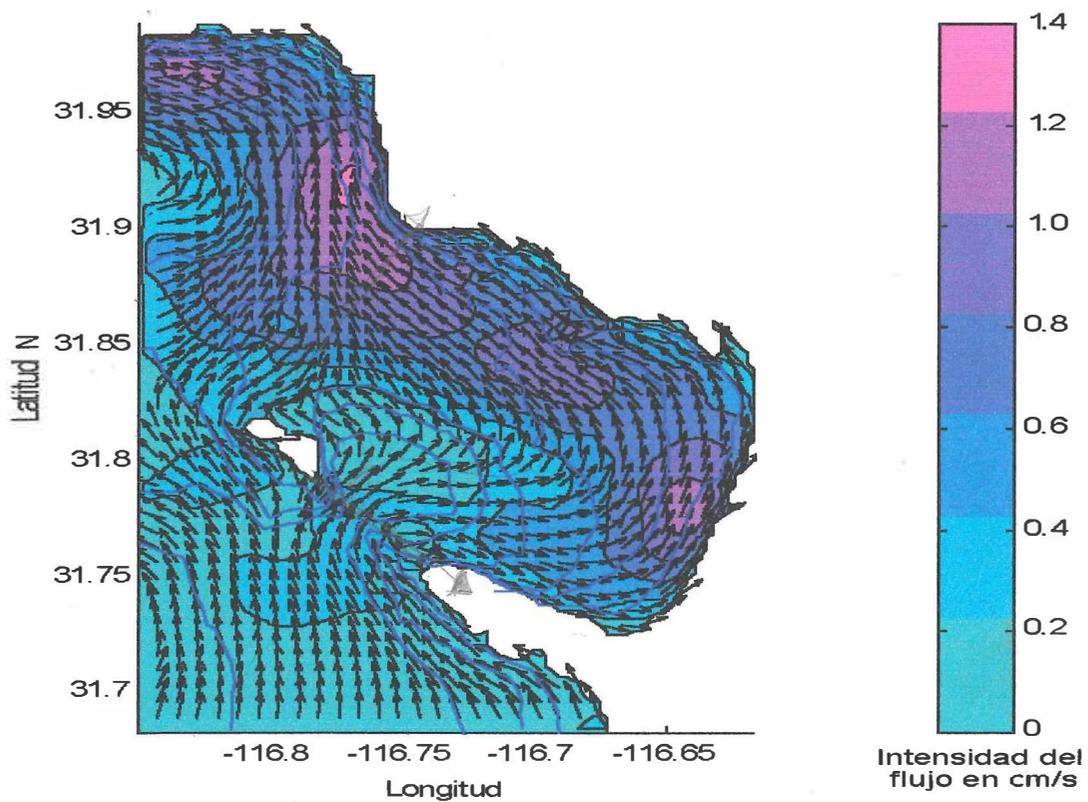
**Figura 2:** Corrientes residuales para un viento del NW de 5 m/s. Modificada de Gutierrez-Gutierrez (1999)



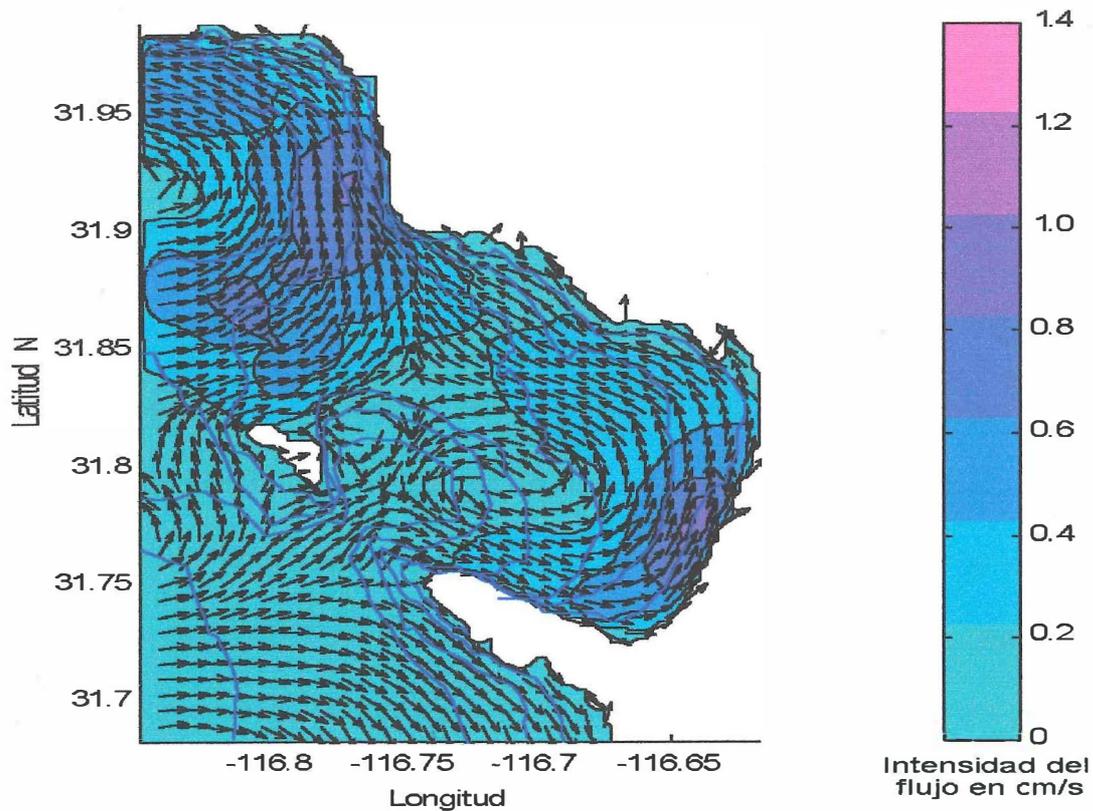
**Figura 3:** Corrientes residuales para un viento del W de 5 m/s. Modificada de Gutierre-Gutierrez (1999).



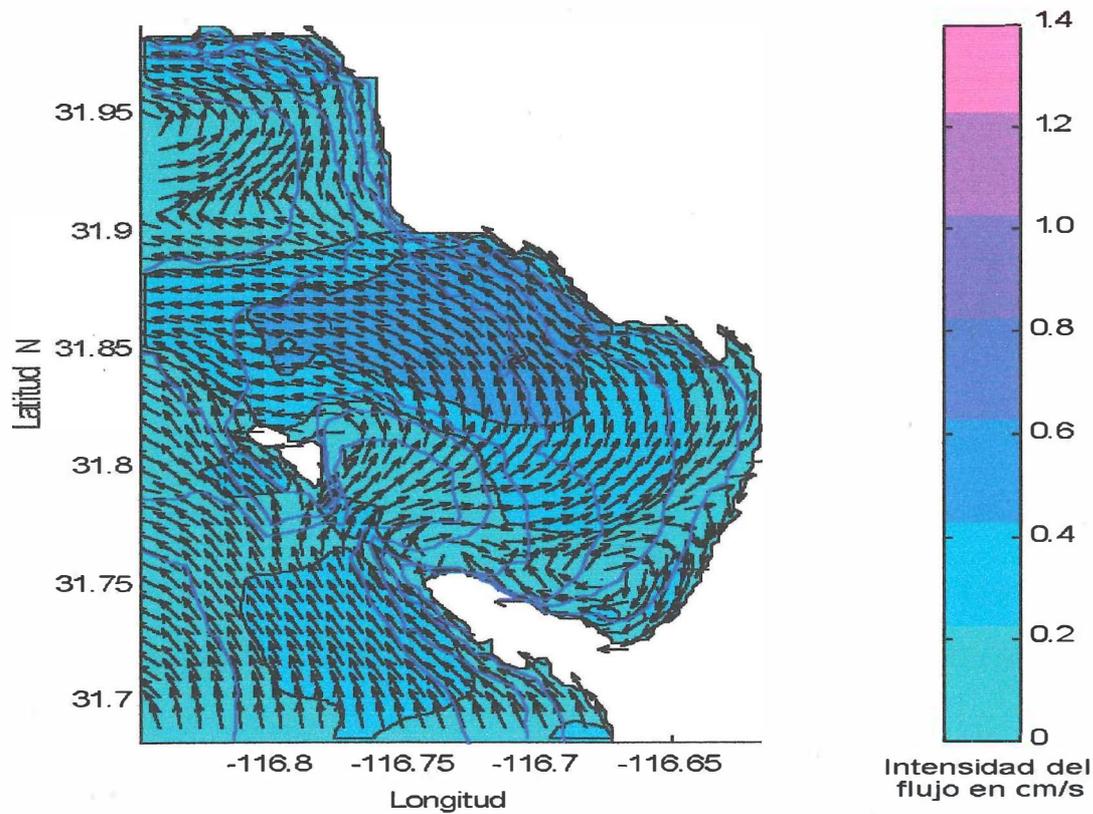
**Figura 4:** Corrientes residuales para un viento del N de 5 m/s. Modificada de Gutierrez-Gutierrez (1999).



**Figura 5:** Corrientes residuales para un viento del S de 5 m/s. Modificada de Gutierrez-Gutierrez (1999).



**Figura 6:** Corrientes residuales para un viento del SW de 5 m/s. Modificada de Gutierrez-Gutierrez (1999).



**Figura 7:** Corrientes residuales para un viento del E de 5 m/s. Modificada de Gutierrez-Gutierrez (1999).

Nótese en los mapas que las Islas de Todos Santos han sido unidas en una sola y que la entrada al Estero de Punta Banda ha sido completamente cancelada. Esto simplifica el modelado de la bahía, y la exclusión de estas características no degradan de manera significativa a los resultados obtenidos.

Numéricamente lo que estos mapas representan son una serie de vectores (140x95) con componentes  $(u,v)$ , que indican la magnitud de las corrientes en metros por segundo. Para fines del presente modelo no resulta de interés el conocer estos vectores de flujo en sí, sino cómo se desplazan las partículas contenidas en la bahía como consecuencia de dichos vectores. El presente trabajo toma estos vectores y con ellos –mediante el modelo de flujo residual aquí presentado– predice el camino que estas partículas siguen a través del tiempo.

Gutiérrez Gutiérrez (1999) resolvió precisamente este problema cuando calcula una serie de trayectorias lagrangianas para un determinado grupo de partículas. Sin embargo, el método empleado por él no es adecuado para el presente trabajo, ya que resultaría impráctico en extremo calcular la trayectoria de cada célula de fitoplancton y de cada molécula de  $\text{NO}_3$  por separado. Para resolver este problema, se plantea lo siguiente:

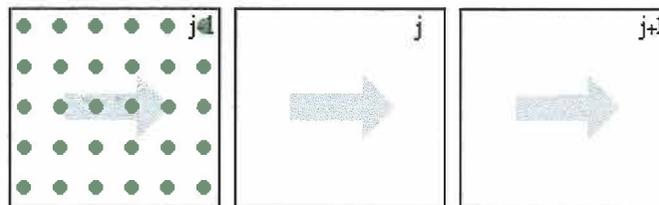
- a) El modelo lleva control de la concentración de células que se presentan en cada celda de la bahía, de la concentración de  $\text{NO}_3$  y del estado de nutrición del fitoplancton.

- b) Los vectores  $(u, v)$  de las corrientes residuales son divididos entre 225 m (el ancho y largo de cada cuadrante).
- c) Se multiplica la magnitud de los vectores por 17280 s; con el fin de no tener que correr un iteración del modelo por cada segundo, sino que una sola iteración bastará para simular 4.8 h (1/5 días).

En esencia, los pasos a y b han escalado los vectores para que queden expresados como magnitudes adimensionales entre 0 y 1. Para entender el mecanismo hacia el cual se quiere llegar, visualícense tres celdas vecinas, tal como se muestra en la figura 8:

**Figura 8:**

Arreglo unidimensional con flujo hacia el este. (Ejemplo 1)



La primer celda contiene 30 partículas, mientras que la segunda y la tercera se encuentran vacías. Como lo representan las flechas grises, existe un flujo de izquierda a derecha. Por simplicidad del ejemplo dichos flujos son unidimensionales, conteniendo sólo una componente ( $u$ ). El enfoque de nuestro ejemplo será la celda central y por lo tanto se denominan a la primer, segunda y tercera celda como  $j-1$ ,  $j$  y  $j+1$  respectivamente. De igual manera, se designan a los vectores de flujo como  $V_{j-1}$ ,  $V_j$  y  $V_{j+1}$ .

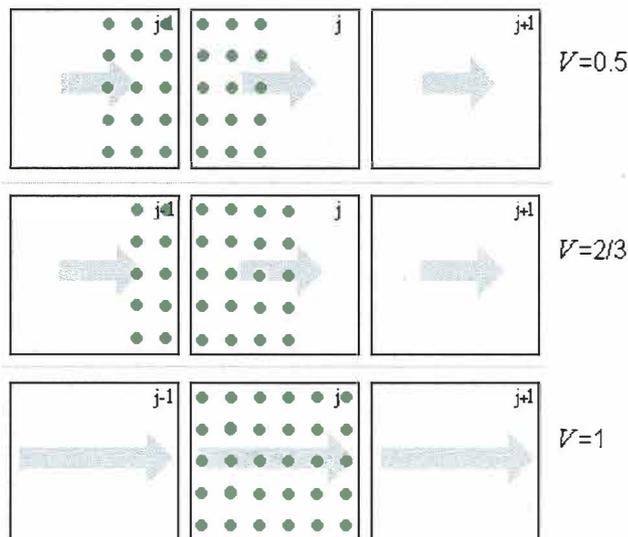
Por principio de conservación de masa, el volumen de agua que entra a la  $j$ -ésima celda debe ser igual al volumen de agua que sale de ella. En el caso muy particular de este

ejemplo  $V_{j-1} = V_j = V_{j+1}$ , pero en un ejemplo bidimensional se puede satisfacer el principio de conservación sin necesidad de que todas las  $V$  sean iguales.

Exactamente cuánto volumen de agua será transferido depende de la intensidad del flujo (gasto). El haber escalado la magnitud de los vectores de corriente sugiere de manera implícita que están expresadas en celdas  $\cdot 4.8 \text{ h}^{-1}$ . De esta manera, un flujo de 1.0 significa que en una sola iteración toda el agua contenida dentro de una celda pasa (en 4.8 horas) a la celda vecina, mientras que un flujo de 0.5 significa que la mitad del agua pasa a la otra celda y así sucesivamente. Suponiendo que la distribución de las partículas es perfectamente homogénea dentro de cada celda, entonces éstas se moverán de celda en celda en la misma proporción que lo haga el agua. De hecho, para el propósito del presente modelo resulta innecesario registrar el movimiento del agua en sí, sino sólo la transferencia de sus propiedades de celda en celda. Para ver esto de manera gráfica, supóngase tres escenarios, todos partiendo de la figura 8, en los que las magnitudes de flujo son 0.5,  $2/3$  y 1 respectivamente. Después de una iteración el resultado sería el siguiente (Fig. 9):

**Figura 9:**

(Ejemplo 1, cont.)  
Tres posibles  
escenarios obtenidos  
a partir de la Fig. 8,  
correspondiendo a  
tres distintas  
magnitudes de flujo

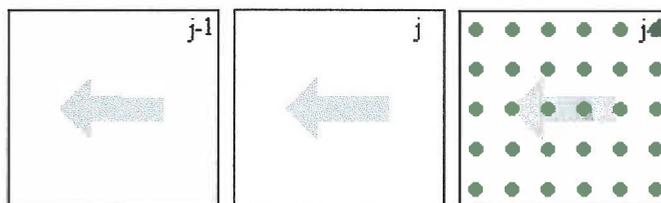


En estos tres escenarios se puede claramente ver la relación directa entre la magnitud del vector (escalado) y la proporción de partículas que es transferida desde una celda a otra:  $30 \cdot 0.5 = 15$ ,  $30 \cdot 2/3 = 20$  y  $30 \cdot 1 = 30$ .

De manera similar, supóngase ahora un ejemplo en donde el estado inicial es el mostrado en la figura 10:

**Figura 10:**

Ahora el sistema tiene un flujo hacia el oeste.  
(Ejemplo 2)

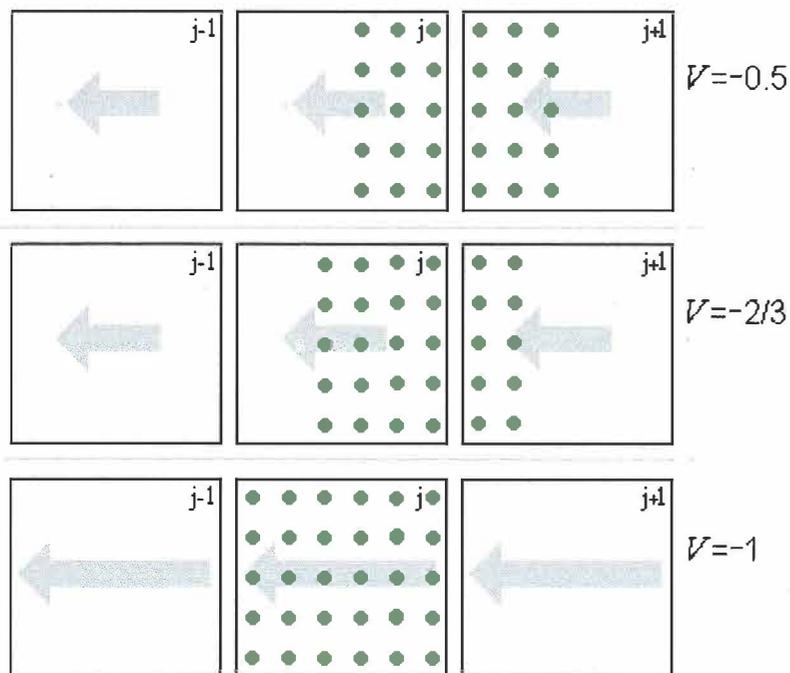


Este ejemplo es prácticamente la imagen espejo del anterior, en donde las  $V$ 's son ahora negativas. Suponiendo ahora tres escenarios en donde las magnitudes siguen siendo 0.5,  $2/3$  y 1, al final de una iteración tendremos como resultado lo siguiente (Fig. 11):

**Figura 11:**

(Ejemplo 2, cont.)

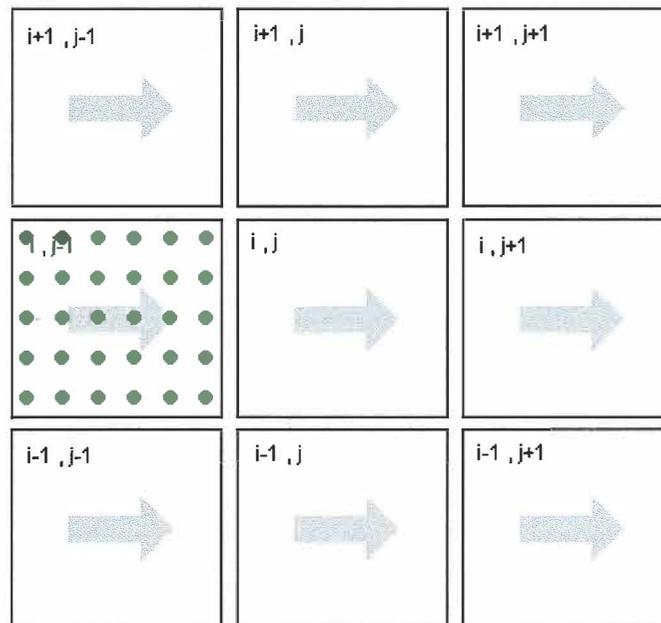
El resultado es la imagen espejo del ejemplo 1 (Fig. 9).



Ahora se puede ver que el transporte responde a las relaciones:  $30 \cdot |-0.5| = 15$ ,  $30 \cdot |-2/3| = 20$  y  $30 \cdot |-1| = 30$ . En realidad, también en el ejemplo 1 el transporte respondía a la magnitud (valor absoluto) del vector, sólo que no era necesario especificarlo ya que los vectores eran todos positivos. Aunque parezca trivial, es necesario remarcar la importancia de entender lo que los ejemplos 1 y 2 nos han mostrado: el signo del vector da la dirección del mismo, pero la intensidad del flujo de partículas responde sólo a su magnitud. Es necesario entender esto, ya que de ninguna manera se puede manejar el concepto de transportes negativos.

Expandiendo los ejemplos para incluir la segunda dimensión, supóngase un estado inicial como el que se muestra en la figura 12:

**Figura 12:**  
(Ejemplo 3)  
El equivalente  
bidimensional del  
ejemplo 1 (Fig. 8)



En el interés de no hacer una transición demasiado abrupta entre el ejemplo 1 y el ejemplo 3, tenemos una situación en donde los vectores tienen su componente  $v = 0$ , y

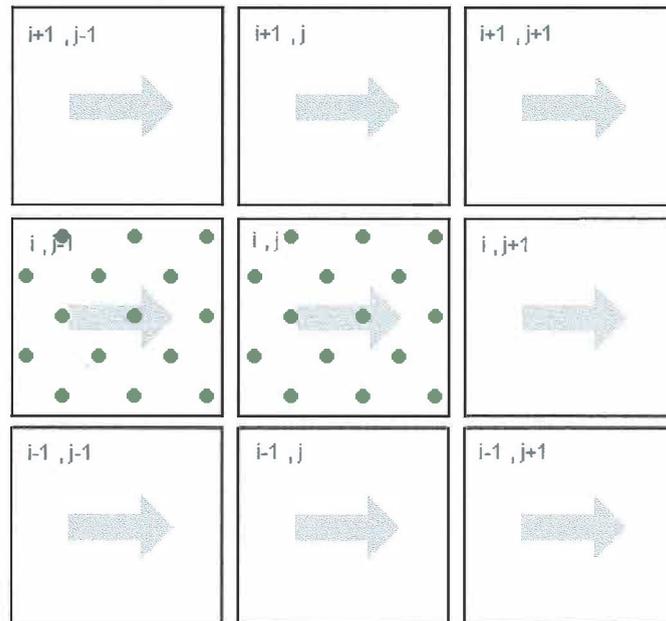
además son todos iguales. Esto rara vez ocurre en la naturaleza, pero servirá como un inicio. Aun así, es importante tener en mente que, en un arreglo bidimensional, el principio de conservación de masa se puede satisfacer sin necesidad de que todas los vectores sean iguales. Al ver las figuras 2 - 7 es notorio que rara vez –si es que alguna– existen dos vectores que sean exactamente iguales.

Nótese en la figura 12 la nomenclatura con la que se identifican los diferentes cuadrantes. Siguiendo las convenciones del lenguaje *Mathematica* (Wolfram Research, Inc.), el subíndice  $i$  designa al renglón, mientras que el subíndice  $j$  designa a las columnas (en afinidad a las convenciones que se manejan al tratar con matrices, y en diferencia al clásico sistema cartesiano  $x,y$ ). Pero además,  $i$  crece de abajo hacia arriba (contrario a lo que normalmente se acostumbra en el manejo de matrices) y  $j$  crece de izquierda a derecha. Aún así, los vectores mismos se mantienen con la clásica notación  $(u,v)$ , en donde  $u$  representa la horizontal (positivo a la derecha, negativo a la izquierda) y  $v$  representa la vertical (positivo hacia arriba, negativo hacia abajo).

De nuevo, el enfoque del ejemplo es la celda central y lo que ésta intercambia con las celdas vecinas. En realidad, en la figura 12 sólo una de las vecinas  $(i,j-1)$  se encuentra en posibilidades de aportar partículas a la celda central. Esto en parte por la dirección del flujo, pero principalmente por el hecho de que es la única que contiene partículas; pero es importante tener en mente que en casos más amplios la celda  $(i,j)$  puede tener interacción con sus ocho vecinas. Estas celdas con las que puede interactuar se conocen como su vecindario, y este tipo en particular –en el que el vecindario se compone por

ocho vecinas– se le conoce como vecindario de Moore (Gaylord y Nishidate, 1996). Se prefiere utilizar éste sobre el vecindario de Von Neumann –el cual sólo consiste de cuatro vecinos (Gaylord y Nishidate, 1996)– ya que lo consideramos más cercano a la realidad. Suponiendo que  $V_{i,j-1} = \{0.5, 0\}$ , después de una iteración tendremos como resultado la figura 13:

**Figura 13:**  
(Ejemplo 3, cont.)  
Aún siendo un ejemplo bidimensional, resulta similar al resultado del segundo caso del ejemplo 1.



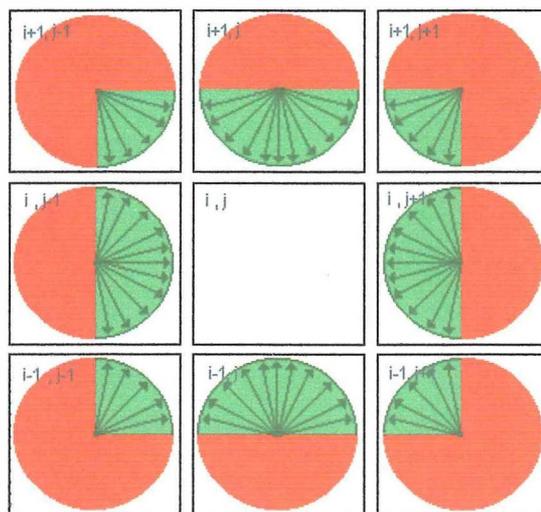
Lo cual es muy similar a lo obtenido en el ejemplo 1, siendo la principal diferencia que en ésta gráfica las partículas se muestran distribuidas homogéneamente dentro de cada celda. Aunque esto deteriora la facilidad con la que se visualiza el transporte, en realidad es más cercano a lo que el modelo numéricamente maneja. Como el modelo no guarda información alguna sobre la distribución de las partículas dentro de cada celda sino sólo de sus concentraciones, es necesario suponer completa homogeneidad dentro de cada una de las celdas. Por supuesto que esto de ninguna manera impide que la

cantidad de partículas difiera de una celda a otra; y son precisamente estas variaciones de celda a celda las que darán la distribución heterogénea en la bahía.

Es importante insistir en que el transporte de las partículas hacia la celda  $(i,j)$  se debe – en este caso– al vector  $V_{i,j-1}$ , y no a  $V_{i,j}$ . En este ejemplo en particular puede no parecer muy importante –debido a que  $V_{i,j-1} = V_{i,j}$ – pero es importante darse cuenta que las partículas transportadas se encontraban –en el tiempo inicial– en  $(i,j-1)$  no en  $(i,j)$ . Por ello,  $V_{i,j}$  no tenía injerencia alguna sobre ellas, sino  $V_{i,j-1}$ . Esto se entiende más claramente cuando consideramos ejemplos en donde no todas las  $V$  son iguales. En general, podemos decir que la celda  $(i,j)$  siempre perderá partículas debido a  $V_{i,j}$  (a menos que  $|V_{i,j}| = 0$ , en cuyo caso no hay transporte de salida), y sólo puede ganar partículas de sus vecinas como consecuencia de los vectores de flujo que en ellas se encuentren, dependiendo de si dichos vectores apuntan –al menos parcialmente– o no hacia la celda  $(i,j)$ .

Para obtener una mayor claridad, la siguiente figura muestra específicamente en que casos las ocho vecinas aportan o no partículas al cuadrante  $(i,j)$ :

**Figura 14:**  
Direcciones que los vectores de flujo de las celdas vecinas deben de tomar para aportar partículas a la celda  $(i,j)$ .



Sólo habrá transporte de las vecinas hacia  $(i, j)$  –en cada caso individual– cuando sus respectivos vectores de flujo se encuentren dentro del arco de acción marcado en verde. Cuando los vectores de flujo se encuentren dentro de la zona roja, el transporte hacia  $(i, j)$  –proveniente de esa celda en particular– será nulo. Bajo ninguna circunstancia tiene sentido hablar de transportes negativos, puesto que  $(i, j)$  perderá partículas solo por influencia de  $V_{i, j}$  y no de ningún otro vector. Por supuesto que el principio de conservación exige que el *gasto* (flujo de agua) que sale de  $(i, j)$  por consecuencia de  $V_{i, j}$  sea igual al *gasto* que entra a  $(i, j)$  como resultado de los  $V$ s de las celdas vecinas; por lo que sería incorrecto inferir de la figura 14 la aparente simultaneidad de los ocho casos presentados en verde. Sin embargo, el flujo de partículas que entra y sale de  $(i, j)$  no necesita estar en equilibrio, ya que depende de las concentraciones de cada celda, las cuales pueden diferir una de otra. En los ejemplos 1 a 3 (Figs. 9 - 13) se ha mostrado precisamente esta situación, ya que en todos los casos el cuadrante  $(i, j)$  ha tenido una ganancia neta de partículas; específicamente porque el agua que salía de  $(i, j)$  tenía concentraciones menores de partículas que el agua que la reemplazaba (de hecho, no contenía ninguna). Lo inverso también puede darse, y comúnmente se presentarán casos en los que  $(i, j)$  tenga una pérdida neta de partículas.

Retornando a la figura 14, a continuación se listan los casos en los que el transporte hacia el cuadrante  $(i, j)$  se presenta. Para ello se define la notación  $V_{i, j} .u$  como la componente  $u$  de  $V_{i, j}$  y  $V_{i, j} .v$  como la componente  $v$  de  $V_{i, j}$ . Recuerdese la notación matemática para los enunciados lógicos en la que “ $\wedge$ ” es el conectivo lógico “y”.

mientras que “ $\rightarrow$ ” significa “implica”. Los casos, pues, en los que el transporte hacia (i, j) se dan son:

$$V_{i-1,j-1}.u > 0 \wedge V_{i-1,j-1}.v > 0 \rightarrow \text{Existe flujo desde } (i-1, j-1) \text{ hacia } (i, j). \quad (1)$$

$$V_{i+1,j-1}.u > 0 \wedge V_{i+1,j-1}.v < 0 \rightarrow \text{Existe flujo desde } (i+1, j-1) \text{ hacia } (i, j). \quad (2)$$

$$V_{i-1,j+1}.u < 0 \wedge V_{i-1,j+1}.v > 0 \rightarrow \text{Existe flujo desde } (i-1, j+1) \text{ hacia } (i, j). \quad (3)$$

$$V_{i+1,j+1}.u < 0 \wedge V_{i+1,j+1}.v < 0 \rightarrow \text{Existe flujo desde } (i+1, j+1) \text{ hacia } (i, j). \quad (4)$$

$$V_{i,j-1}.u > 0 \rightarrow \text{Existe flujo desde } (i, j-1) \text{ hacia } (i, j). \quad (5)$$

$$V_{i-1,j}.v > 0 \rightarrow \text{Existe flujo desde } (i-1, j) \text{ hacia } (i, j). \quad (6)$$

$$V_{i+1,j}.v < 0 \rightarrow \text{Existe flujo desde } (i+1, j) \text{ hacia } (i, j). \quad (7)$$

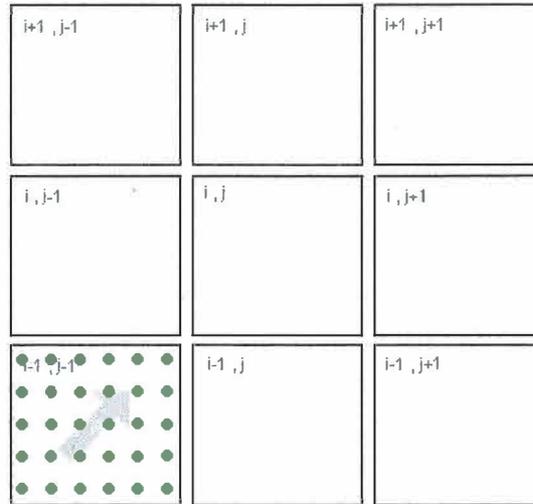
$$V_{i,j+1}.u < 0 \rightarrow \text{Existe flujo desde } (i, j+1) \text{ hacia } (i, j). \quad (8)$$

En todos los demás casos no habrá transporte de partículas desde los vecinos hacia (i,j). Cuánto transporte ocurre exactamente depende de la intensidad del flujo, la cantidad de partículas en el vecino que aporta las partículas y la posición relativa de este con respecto a la celda receptora. En cuanto a la posición relativa, básicamente existen sólo dos casos, cuando el vecino que aporta se encuentra en posición diagonal con respecto a (i,j) y cuando no (i.e., se encuentra directamente arriba, abajo o a los lados). Se presenta primero el caso en el que la celda “donante” de partículas se encuentra en una posición relativa en diagonal; que sería el caso –con respecto a (i, j)– de (i-1, j-1), (i+1,

$j-1$ ),  $(i-1, j+1)$  e  $(i+1, j+1)$ . Específicamente, se ejemplifica con el caso particular de  $(i-1, j-1)$ , suponiendo un estado inicial como se muestra a continuación:

**Figura 15:**

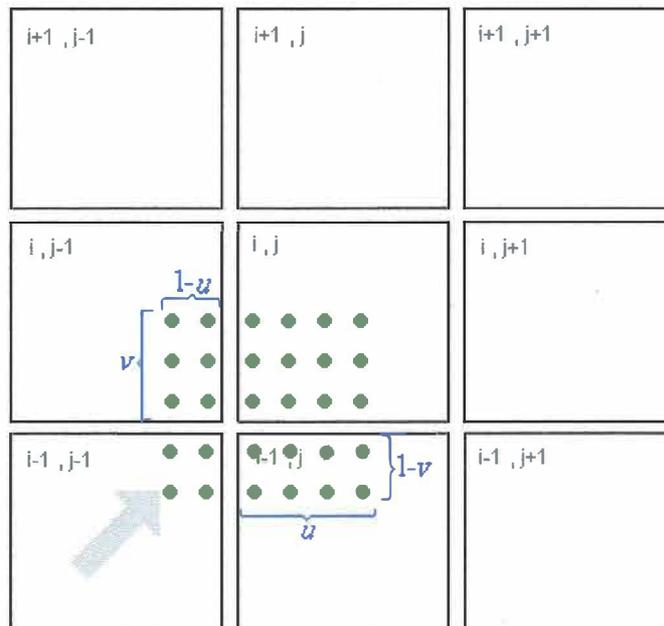
(Ejemplo 4)  
Una situación  
en la que el  
flujo corre en  
dirección  
diagonal.



La celda  $(i-1, j-1)$  contiene 30 partículas, de las cuales –dependiendo de  $V_{i-1, j-1}$ – algunas terminarán en la celda  $(i, j)$ , mientras que otras posiblemente se mantengan en  $(i-1, j-1)$  ó terminen en  $(i-1, j)$  y/o  $(i, j-1)$ . Suponiendo que  $V_{i-1, j-1} = \{2/3, 0.6\}$ , después de una iteración se obtiene lo siguiente (Fig. 16):

**Figura 16:**

(Ejemplo 4, cont.) Los vectores de circulación oblicuos generalmente resultan en un transporte a 3 celdas vecinas. En particular, la figura muestra el resultado obtenido –después de una iteración– con  $V_{i-1, j-1}$  igual a  $\{2/3, 0.6\}$ .



Para facilitar la visualización del transporte ocurrido, la gráfica no muestra a las partículas homogéneamente distribuidas dentro de cada celda, pero supóngase que lo están. Después de una iteración se tiene una situación en la que 4 partículas se mantuvieron en la celda  $(i-1, j-1)$ , 8 se desplazaron a  $(i-1, j)$ , 6 a  $(i, j-1)$  y 12 se transportaron a  $(i, j)$ . Es importante notar que siguen sumando –en total– las mismas treinta partículas con las que se empezó; por lo que no se ha violado el principio de conservación de masa. De cualquier manera, el interés es sobre el transporte hacia  $(i, j)$ , y si se llama  $\text{Agua}_{i,j}$  a la variable que representa la concentración de partículas en la celda  $(i, j)$  entonces el transporte ocurrido en el ejemplo 4 está dado por:

$$V_{i-1,j-1} \cdot u \cdot V_{i-1,j-1} \cdot v \cdot \text{Agua}_{i-1,j-1}. \quad (9)$$

En particular,  $2/3 \cdot 0.6 \cdot 30 = 12$ . Similarmente, el transporte que  $(i-1, j-1)$  aporta hacia  $(i,j-1)$  e  $(i-1, j)$  está dado por  $(1-V_{i-1,j-1} \cdot u) \cdot V_{i-1,j-1} \cdot v \cdot \text{Agua}_{i-1,j-1}$ , y  $V_{i-1,j-1} \cdot u \cdot (1-V_{i-1,j-1} \cdot v) \cdot \text{Agua}_{i-1,j-1}$  respectivamente. Así mismo, la cantidad de partículas que se mantuvo en el cuadrante  $(i-1, j-1)$  está dado por  $\text{Agua}_{i-1,j-1} \cdot (1-V_{i-1,j-1} \cdot u) \cdot (1-V_{i-1,j-1} \cdot v)$ .

Remarcando el apego al principio de conservación de masa, la siguiente igualdad demuestra que la suma de las partículas transportadas desde  $(i-1, j-1)$  más las partículas que permanecieron en  $(i-1, j-1)$  es igual a la cantidad de partículas que se encontraban originalmente en  $(i-1, j-1)$ , sin importar cuántas hayan sido ni qué magnitud haya tenido  $V_{i-1,j-1}$ :

$$\text{Agua}_{i-1,j-1} = V_{i-1,j-1,u} \cdot V_{i-1,j-1,v} \cdot \text{Agua}_{i-1,j-1} + (1-V_{i-1,j-1,u}) \cdot V_{i-1,j-1,v} \cdot \text{Agua}_{i-1,j-1} + V_{i-1,j-1,u} \cdot (1-V_{i-1,j-1,v}) \cdot \text{Agua}_{i-1,j-1} + \text{Agua}_{i-1,j-1} \cdot (1-V_{i-1,j-1,u}) \cdot (1-V_{i-1,j-1,v})$$

$$\text{Agua}_{i-1,j-1} = V_{i-1,j-1,u} \cdot V_{i-1,j-1,v} \cdot \text{Agua}_{i-1,j-1} - V_{i-1,j-1,u} \cdot V_{i-1,j-1,v} \cdot \text{Agua}_{i-1,j-1} + V_{i-1,j-1,v} \cdot \text{Agua}_{i-1,j-1} + V_{i-1,j-1,u} \cdot \text{Agua}_{i-1,j-1} - V_{i-1,j-1,u} \cdot V_{i-1,j-1,v} \cdot \text{Agua}_{i-1,j-1} + \text{Agua}_{i-1,j-1} - \text{Agua}_{i-1,j-1} \cdot V_{i-1,j-1,u} - \text{Agua}_{i-1,j-1} \cdot V_{i-1,j-1,v} + \text{Agua}_{i-1,j-1} \cdot V_{i-1,j-1,u} \cdot V_{i-1,j-1,v}$$

$$\text{Agua}_{i-1,j-1} = \text{Agua}_{i-1,j-1} \quad \square$$

Nótese que A1b es aplicable sólo cuando se cumple el criterio establecido en la expresión A1. Por analogía –siempre y cuando se satisfagan los criterios de las expresiones A2, A3 y A4– los transportes hacia (i, j) originados desde (i+1, j-1), (i-1, j+1) e (i+1, j+1) están dados respectivamente por:

$$-\text{Agua}_{i+1,j-1} \cdot V_{i+1,j-1,u} \cdot V_{i+1,j-1,v} \quad (10)$$

$$-\text{Agua}_{i-1,j+1} \cdot V_{i-1,j+1,u} \cdot V_{i-1,j+1,v} \quad (11)$$

$$\text{Agua}_{i+1,j+1} \cdot V_{i+1,j+1,u} \cdot V_{i+1,j+1,v} \quad (12)$$

Nótese la inversión de signo que se utiliza para compensar los componentes negativos en los vectores. Se insiste que bajo ninguna circunstancia tiene sentido hablar de transportes negativos, ya que es la *magnitud* del vector la que dicta la intensidad del gasto. En realidad, el uso de valores absolutos sería más apropiado pero computacionalmente resulta más económico el simplemente invertir el signo.

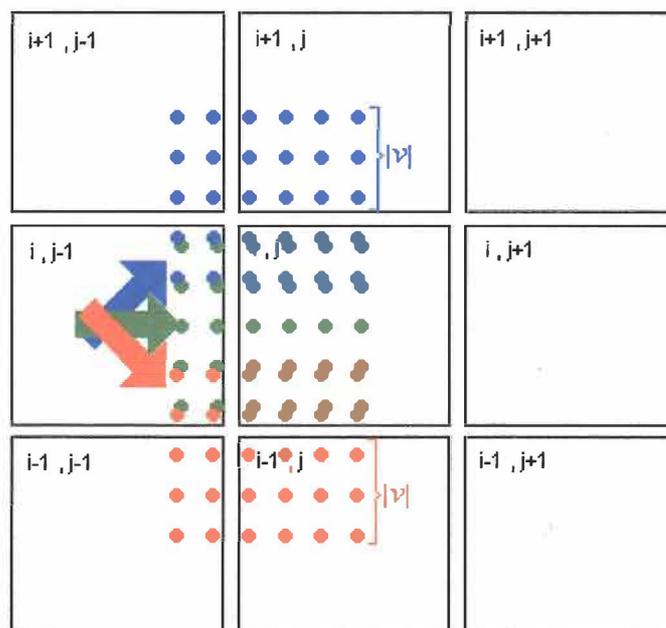
Los casos en los que el transporte proviene de  $(i, j-1)$ ,  $(i-1, j)$ ,  $(i+1, j)$  e  $(i, j+1)$  se ejemplifican con el caso particular de  $(i, j-1)$ . Supóngase un estado inicial como el que se muestra en la figura 12, pero con un  $V_{i, j-1}$  cualquiera que satisfaga la expresión (5). Existen tres alternativas de comportamiento dependiendo del valor de  $V_{i, j-1} \cdot v$ . En primera instancia, si  $V_{i, j-1} \cdot v$  es cero el transporte ocurre sólo hacia el cuadrante  $(i, j)$ , por lo que resulta una situación similar a la mostrada en la figura 13. Si  $V_{i, j-1} \cdot v$  es positivo el resultado será un transporte oblicuo hacia los cuadrantes  $(i+1, j-1)$ ,  $(i+1, j)$  e  $(i, j)$ , similar al mostrado en la figura 16. Por último, si  $V_{i, j-1} \cdot v$  es negativo entonces el resultado será un transporte oblicuo hacia los cuadrantes  $(i-1, j-1)$ ,  $(i-1, j)$  e  $(i, j)$ , comportándose como la imagen espejo (en el sentido vertical) de lo que se muestra en la figura 16. Para facilitar su visualización, la figura 17 muestra simultáneamente estas tres alternativas de transporte:

**Figura 17:**

(Ejemplo 5)

A partir de un estado inicial similar al mostrado en la figura 12, existen tres alternativas de transporte de  $(i, j-1)$  hacia  $(i, j)$  dependiendo del valor que tome  $V_{i, j-1} \cdot v$ .

En azul se muestra el caso para una  $v$  positiva, en verde el caso en que  $v$  es cero, y en rojo el caso para una  $v$  negativa.



Aunque distintos, estos tres comportamientos comparten la característica de transportar al menos algunas partículas hacia  $(i, j)$ , y –hablando estrictamente sólo de este transporte– pueden unificarse en uno sólo mediante la observación de que dicho transporte es siempre proporcional a  $V_{i,j-1,u}$  e inversamente proporcional al valor absoluto de  $V_{i,j-1,v}$ ; de forma tal que la siguiente expresión es la adecuada para representarlo:

$$\text{Agua}_{i,j-1} \cdot V_{i,j-1,u} \cdot (1 - |V_{i,j-1,v}|) \quad (13)$$

Estrictamente hablando, el satisfacer la expresión (5) no siempre conduce a un transporte de partículas desde  $(i,j-1)$  a  $(i, j)$ . Existen las excepciones cuando  $|V_{i,j-1,v}| = 1$ , pero de hecho esto ya es contemplado por la expresión (13), ya que ésta correctamente arroja un resultado de cero (transporte nulo) para estos casos. Se ha evitado mencionar estas excepciones con anterioridad para facilitar la comprensión de las expresiones (5) y (13).

De forma análoga a la expresión (13), el transporte hacia  $(i, j)$  proveniente de  $(i-1, j)$ ,  $(i+1, j)$  e  $(i, j+1)$  está dado por las expresiones:

$$\text{Agua}_{i-1,j} \cdot (1 - |V_{i-1,j,u}|) \cdot V_{i-1,j,v} \quad (14)$$

$$- \text{Agua}_{i+1,j} \cdot (1 - |V_{i+1,j,u}|) \cdot V_{i+1,j,v} \quad (15)$$

$$- \text{Agua}_{i,j+1} \cdot V_{i,j+1,u} \cdot (1 - |V_{i,j+1,v}|) \quad (16)$$

En donde de nuevo la inversión de signos se utiliza para reducir el uso de valores absolutos en las expresiones.

## II.2 Implementación de las reglas del modelo de circulación residual

Se codifican las expresiones 1-16 y los casos de no transporte en las reglas MC1 – MC16, que tienen el formato de una función que calcula el transporte desde un cuadrante a otro. Dichas funciones reciben cuatro parámetros de entrada; los primeros dos indican la posición de la celda donante relativa al receptor, el tercer parámetro es el vector (compuesto por  $u$  y  $v$ ) del flujo residual del cuadrante donante, y el cuarto parámetro es la variable a transportar. Las funciones están codificadas en lenguaje Mathematica, en el que “/;” equivale a “tal que”, “||” equivale a “y”, y “x\_” es una variable atómica (jerga de *Mathematica*) llamada x. En algunos casos, las funciones no hacen referencia en sus cálculos internos a todos los parámetros que reciben de entrada, por lo que simplemente aparecen como “\_”, ya que resulta innecesario nombrarlos.

CalculaTransporte[-1,-1,{u\_,v\_}/; (u ≤ 0 || v ≤ 0), \_] := 0; (MC1)

CalculaTransporte[-1,-1,{u\_,v\_},Agua\_] := Agua u v; (MC2)

CalculaTransporte[0,-1,{u\_,\_}/; u ≤ 0, \_] := 0; (MC3)

CalculaTransporte[0,-1,{u\_,v\_},Agua\_] := Agua u (1 - Abs[v]); (MC4)

CalculaTransporte[1,-1,{u\_,v\_}/; (u ≤ 0 || v ≥ 0), \_] := 0; (MC5)

CalculaTransporte[1,-1,{u\_,v\_},Agua\_] := -Agua u v; (MC6)

CalculaTransporte[-1,0,{\_,v\_}/; v ≥ 0, \_] := 0; (MC7)

CalculaTransporte[-1,0,{u\_,v\_},Agua\_] := Agua (1-Abs[u]) v; (MC8)

CalculaTransporte[1,0,{\_,v\_}/; v ≥ 0, \_]:= 0; (MC9)

CalculaTransporte[1,0,{u\_,v\_},Agua\_]:= -Agua (1-Abs[u]) v; (MC10)

CalculaTransporte[-1,1,{u\_,v\_}/; (u ≥ 0 || v ≤ 0), \_]:= 0; (MC11)

CalculaTransporte[-1,1,{u\_,v\_},Agua\_]:= -Agua u v; (MC12)

CalculaTransporte[0,1,{u\_,\_}/; u ≥ 0, \_]:= 0; (MC13)

CalculaTransporte[0,1,{u\_,v\_},Agua\_]:= -Agua u (1-Abs[v]); (MC14)

CalculaTransporte[1,1,{u\_,v\_}/; (u ≥ 0 || v ≥ 0), \_]:= 0; (MC15)

CalculaTransporte[1,1,{u\_,v\_},Agua\_]:= Agua u v; (MC16)

### II.2.1 Manejo de la línea de costa

La aplicación de las funciones de transporte involucra el enfocar sistemáticamente a cada celda de agua y el transporte que ésta recibe de sus vecinos (Algoritmo 1). En el caso de las celdas que se encuentran pegadas a la línea de costa, éstas tienen como vecinos a algunas celdas que representan *terra firma*, y ningún transporte debe de provenir de ellas. Toda celda que representa tierra es fácilmente reconocible ya que en ellas  $F_{i,j} = \{9999,9999\}$ , y las siguientes reglas se encargan de que el transporte proveniente de esos vecinos sea nulo:

CalculaTransporte[-1,-1,{9999,9999}, \_]:= 0; (MC17)

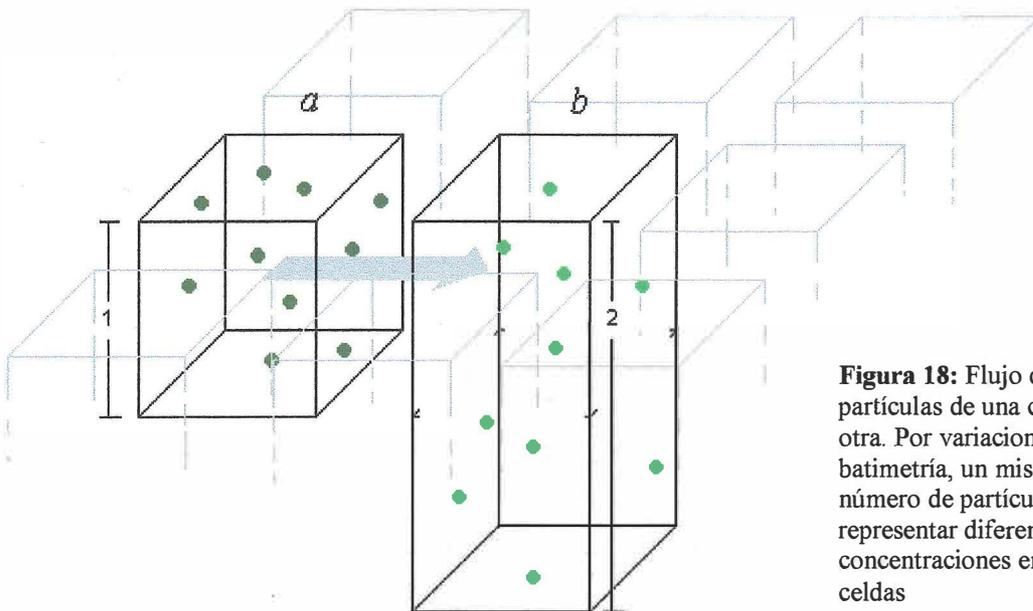
CalculaTransporte[0,-1,{9999,9999}, \_]:= 0; (MC18)

CalculaTransporte[-1,0,{9999,9999}, \_]:= 0; (MC19)

Para los casos de (1,-1), (1,0), (-1,1), (0,1) y (1,1) las reglas MC5, MC9, MC11, MC13 y MC15 se encargan ya de que no generen transporte cuando ambos  $u$  y  $v$  son positivos.

## II.2.2 Consideraciones por batimetría

La aplicación en el modelo de las reglas de transporte implica restar el transporte calculado a la celda donante y sumárselo a la celda receptora. Sin embargo, dicha suma de partículas a la celda receptora no puede ser hecha de manera directa, ya que no toman en cuenta la batimetría de la bahía. Para entender mejor el problema que esto representa, considérese la siguiente figura:



**Figura 18:** Flujo de partículas de una celda a otra. Por variaciones en la batimetría, un mismo número de partículas puede representar diferentes concentraciones en distintas celdas

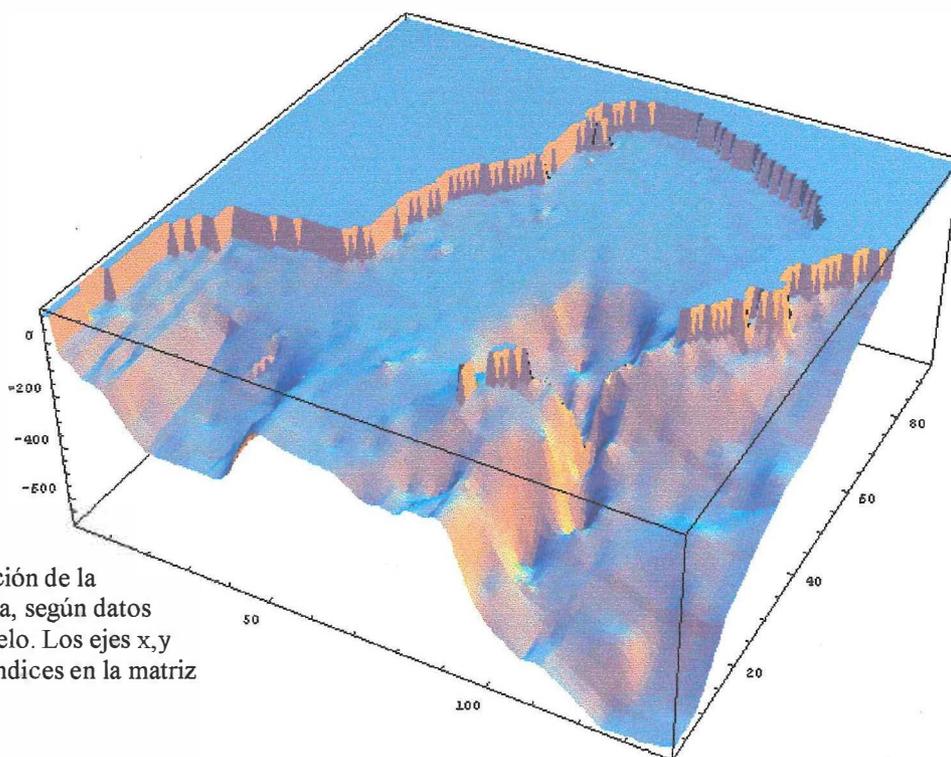
En la figura 18 se muestran dos celdas vecinas (llamadas  $a$  y  $b$ ), en donde –aunque tienen la misma cantidad de partículas– no tienen la misma profundidad y por lo tanto representan concentraciones diferentes. La figura 18 sugiere también la localidad de los otros vecinos de  $b$ , pero para el ejemplo son inconsecuentes. Nótese como se muestra a cada celda como un prisma de tres dimensiones, lo cual es más cercano a lo que el modelo representa, en lugar de los cuadros bidimensionales que hasta ahora se han presentado. Aunque el modelo

toma como entrada un mapa bidimensional de la circulación, no se debe olvidar que dichos mapas surgieron de un modelo tridimensional de la bahía, en donde cada celda tiene su propio valor de profundidad.

La figura 18 resume el paso de una iteración del modelo, en donde las partículas que originalmente se encontraban en  $a$  (verdes) pasan todas al cuadrante  $b$  (verde claro) como consecuencia del flujo representado por la flecha gris. La celda  $a$  tiene una profundidad igual a 1, mientras que la celda  $b$  tiene una profundidad igual a 2, y ya previamente se estableció que las dimensiones horizontales de cada celda son de  $225 \times 225 \text{ m}^2$ ; por lo que se tiene entonces que las partículas que antes representaban una concentración de 10 partículas /  $225 \times 225 \times 1 \text{ m}^3$  en la celda  $a$ , ahora representan una concentración de 5 partículas /  $225 \times 225 \times 2 \text{ m}^3$  en la celda  $b$ . Es necesario entonces un factor de corrección que compense por estas variantes. Aunque en la figura 18 las concentraciones de partículas en  $a$  y  $b$  difieren, podemos ver que la cantidad de partículas se mantiene constante, por lo que se evitan dificultades si se maneja la operación en cantidad de partículas y no en concentraciones. Si se denominan  $Z_a$  y  $Z_b$  a las profundidades de las celdas  $a$  y  $b$  respectivamente, entonces se puede momentáneamente convertir al transporte calculado por las expresiones (9) – (16) a número de partículas multiplicando por  $225 \times 225 \times Z_a \text{ m}^3$  (las dimensiones de la celda  $a$  del cual proviene). Este número de partículas ahora debe revertir a una concentración en el momento de sumarse como una aportación (resultado del transporte) a la concentración ya existente en  $b$ . Esto se logra dividiendo al número de partículas transportadas entre  $225 \times 225 \times Z_b \text{ m}^3$  (las dimensiones de  $b$ ). Resumiendo ambas operaciones en una sola, el factor de corrección se reduce a  $Z_a / Z_b$  (adimensional). Sólo es

necesario aplicar esta corrección cuando el transporte es sumado al cuadrante  $b$ , y no al restárselo al cuadrante  $a$ .

Una manera alternativa de llegar a este factor de corrección es mediante la observación que dicho factor resultaría innecesario si las concentraciones de partículas a transportar estuvieran expresadas por metro cuadrado. Una concentración de 5 partículas/m<sup>2</sup> en la celda  $a$  seguirían siendo 5 partículas/m<sup>2</sup> en la celda  $b$ , sin importar las diferencias entre  $Z_a$  y  $Z_b$ . De manera tal que si en un paso intermedio se expresa el transporte recibido por  $b$  en una concentración por metro cuadrado para después revertir en el resultado final a una concentración por metro cúbico, se llega –de manera más directa– al mismo factor de corrección  $Z_a/Z_b$ . De cualquier manera, se necesita conocer la batimetría de la bahía para tener los valores de  $Z$ . La figura 19 muestra la batimetría de la bahía, derivada de datos otorgados por Adán Mejía (A. Mejía Trejo, comunicación personal, IIO-UABC):

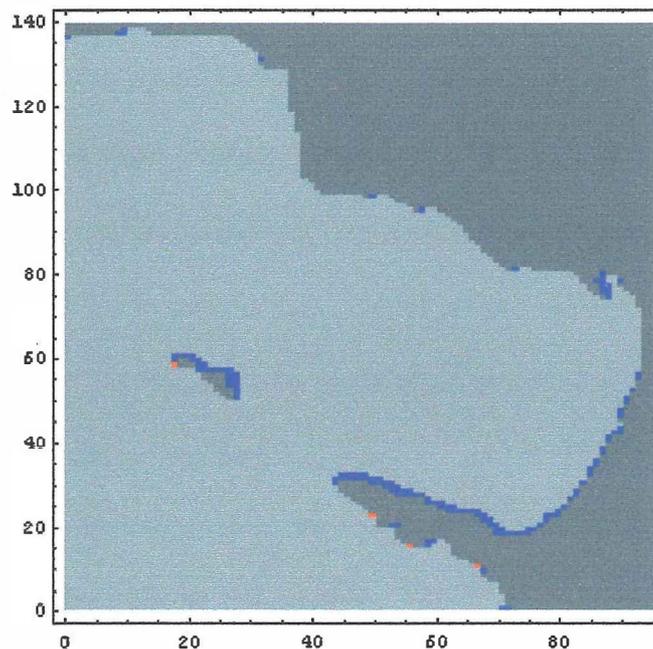


**Fig. 19:** Representación de la batimetría de la bahía, según datos utilizados en el modelo. Los ejes  $x, y$  corresponden a los índices en la matriz de datos.

Nótese que en la figura 19 se exageró el eje vertical para poder apreciar la batimetría con más facilidad, además que el área del mapa se encuentra en una matriz de 140x95. Se ha tenido cuidado en verificar que ambos la información digital de las corrientes y la batimetría se acoplen en una sola imagen coherente, y que –entre otras cosas– muestren ambos una misma línea de costa. Originalmente la matriz de la batimetría era de 300x190 y cubría un área ligeramente distinta que las matrices de las corrientes. Estos problemas de desfase se resolvieron lo más posible, pero al fin de cuentas la morfología de la bahía resultó ligeramente distinta entre una concepción y otra. A continuación se muestra una gráfica en donde se muestran las diferencias entre la morfología de la bahía según como la conceptualizan la batimetría y las corrientes:

**Figura 20:** Desfase entre los datos de batimetría y corrientes.

Rojo en donde existe corriente pero no batimetría y Azul donde existe batimetría pero no corriente.



La zona gris oscura representa donde ambos modelos concuerdan en describir *terra firma*, mientras que el gris claro representa a las celdas donde ambos modelos concuerdan en

describir agua. El color rojo representa aquellos puntos en donde el mapa batimétrico espera encontrar tierra, pero el modelo de corrientes espera agua. Por último, los puntos color azul representan las celdas donde existen valores viables de batimetría, a pesar que el modelo de corrientes no los maneja como cuadrantes de agua.

Las diferencias más notables son la manera como manejan las Islas de Todos Santos y algunos detalles de la línea de costa en la zona de Punta Banda y la rada portuaria. Para resolver esto se decidió dar preferencia a la morfología presentada por las corrientes. De esta forma, se considera a cualquier celda como tierra o agua cuando así se establezca en el mapa de corrientes. Se ignora cualquier valor de profundidad para una celda en el que el mapa de corrientes dice que dicha celda es tierra, y se le asigna una profundidad de un metro a cualquier celda que no tenía un valor válido de profundidad y que el mapa de corrientes considera como agua. El asignar arbitrariamente este valor de profundidad es permisible ya que estos casos (como vemos en la Fig. 20) se presentan sólo en celdas cercanas a la costa. De hecho, para evitar complicaciones innecesarias en los cálculos de la parte biológica del modelo, se transformaron todas las profundidades menores a 1 m –de las cuales había algunas en las zonas costeras– a exactamente 1 m. Todas las profundidades mayores a 1 m se mantuvieron sin cambio alguno.

### **II.2.3 Aplicación de las reglas de transporte**

La aplicación de las reglas de transporte se realiza sistemáticamente calculando el transporte que cada celda recibe de sus ocho vecinos, restando dicho transporte a las celdas

donantes y sumándolo —corregido por consideraciones de la batimetría— a la celda receptora. El siguiente algoritmo es el que se encarga de hacer dicha tarea:

```

For[i=2,i<renglones,i++,                                (Algoritmo 1)
  For[j=2,j<columnas,j++,
    If[V[[i,j]]=={9999,9999}, Continue[]];
    For[m= -1, m ≤ 1, m++,
      For[n= -1, n ≤ 1, n++,
        If[m==0 && n==0, Continue[]];
        Transporte =
          CalculaTransporte[m,n,V[[i+m,j+n]],Agua[[i+m,j+n]]];
        If[Transporte ≠ 0,
          AguaFut[[i,j]]+= Transporte ( Z[[i+m,j+n]] / Z[[i,j]] );
          AguaFut[[i,j]]-= Transporte;
        ];
      ];
    ];
  ];
];

```

Algunos detalles de notación: “V[[i,j]]” equivale  $V_{i,j}$ , “a+=b” equivale a “a=a+b”, “a-=b” equivale a “a=a-b”, y “a==b” prueba la igualdad entre a y b (a diferencia de asignar el valor de b a a).

Los ciclos de i,j se encargan sistemáticamente de enfocar a cada celda. Es importante hacer notar dos cosas: 1) los ciclos no incluyen a las celdas frontera y 2) no enfocan a celdas que

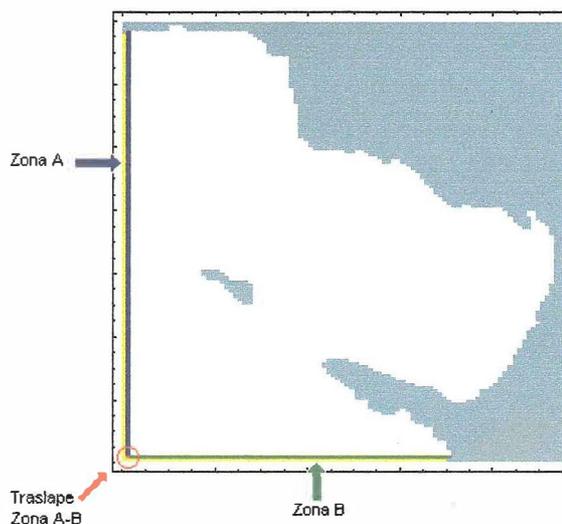
representan tierra (el uso del primer Continue[] para saltar esa iteración). Los ciclos de  $m, n$  se encargan de designar a los ocho vecinos de la celda que se encuentra enfocada. Por supuesto, se excluye el caso cuando ambos  $m$  y  $n$  son cero, ya que eso representaría a la misma celda que se encuentra enfocada (el segundo uso de Continue[]). Se utilizan “Agua” y “AguaFutura” como equivalentes a  $Agua(t)$  y  $Agua(t+1)$ . El uso de dos variables distintas es necesario puesto que se supone que todos los transportes deben de ocurrir simultáneamente. Por último, cabe mencionar que el algoritmo que se acaba de mostrar aplica las reglas sobre *una* distribución contenida en Agua, mientras que en el modelo final dichas operaciones de transporte se deberán aplicar sobre *tres* distribuciones: clorofila (DistChl), nitratos (DistNO<sub>3</sub>) y el estado de nutrición del fitoplancton Q (DistQ). Q en especial tiene consideraciones que evitan la aplicación directa del Algoritmo 1, lo cual se cubre al final de este capítulo.

#### II.2.4 Fronteras en el modelo.

Las fronteras del modelo representan un caso especial, por lo que se necesita manejarlas de manera distinta al resto de las celdas. Para facilitar la comprensión de esto se hará referencia a la siguiente figura:

**Figura 21:** El sistema maneja reglas especiales cuando trata el caso de las fronteras abiertas del sistema.

En amarillo se representa la frontera propiamente, mientras que las zonas A y B representan las celdas que interactúan con dicha frontera.



La figura 21 muestra el área de estudio y remarca en amarillo las celdas que serán consideradas como fronteras abiertas. La zona A y la zona B representan las celdas que interactúan con dicha frontera. La figura 21 muestra una versión recortada de los datos originales, ya que el modelo de corrientes de Gutierrez Gutierrez (1999) establece que las celdas que se encuentran en estas fronteras deben por definición contener flujos residuales nulos (i.e.  $V = 0$ ). Debido a que esta condición no es útil para el presente trabajo –ya que cerraría las fronteras del sistema– se ha tenido que recortar la matriz de 140x95 a 139x94. Esto deja un nuevo conjunto de fronteras, los cuales son los que se muestran en la figura 21. Las orillas superior y derecha del mapa no se consideran como fronteras propiamente, ya que al representar celdas de *terra firma* nunca se les aplicará ninguna regla de transformación.

Hay dos acciones a considerar en los cuadrantes de frontera abierta; el flujo que *sale* del sistema y el flujo que *entra* al sistema. Se desconocen las corrientes mas allá de la frontera, pero se puede suponer que dichas corrientes son tales que las fronteras no representan puntos de apilamiento o déficit de agua y que el flujo se encuentra en equilibrio. De igual manera, salvo consideraciones especiales, se supone que las características del agua en la región fronteriza (nutrientes, clorofila, etc.) también se encuentran en equilibrio. Así, independientemente de lo que salga y entre al sistema, los valores asociados a cada celda fronteriza se mantendrán constantes a través de toda la simulación. La única excepción a esto será cuando se quiera simular entrada de pulsos altos de nutrientes, o alguna otra situación similarmente especial.

En cuanto a las zonas A y B que se marcan en la figura 21, estas son incluidas en la aplicación de las reglas de transporte en el Algoritmo 1, por lo que el sistema simula correctamente lo que estas zonas *reciben* de la frontera. Sin embargo, dichas reglas de transporte –al no ser aplicadas directamente a la frontera– no han simulado lo que la Zona A y la Zona B aportan a la frontera. En realidad, no importa que la frontera no reciba atributos de las zonas A y B, ya que de todas formas sus atributos se mantendrán constantes por definición. Aún así es necesario simular la pérdida de atributos que se da en las zonas A y B como consecuencia de las corrientes que fluyen hacia el exterior del sistema. La Zona A contiene flujos hacia el exterior –que obviamente pasan a través de la frontera– sí y sólo sí sus  $V_{i,2,u} < 0$ ; mientras que la Zona B contiene flujos al exterior sí y sólo sí sus  $V_{2,j,v} < 0$ . Como se marca en la figura 21, la celda (2,2) representa un punto de traslape entre las zonas A y B, por lo cual dicha celda debe de considerarse en ambos sentidos. Para cada celda en la que estas condiciones se cumplan, se deben de disminuir sus atributos según la intensidad de la corriente, simulando un flujo hacia el exterior. Algorítmicamente, esto se puede expresar de la siguiente manera:

```
For[i = 2, i ≤ renglones, i++, (Algoritmo 1a)
```

```
  If[V[[i,2,1]] < 0,
```

```
    AguaFut[[i,2]] = AguaFut[[i,2]] (1 + V[[i,2,1]])
```

```
  ]
```

```
];
```

```
For[j = 2, j ≤ columnas, j++, (Algoritmo 1b)
```

```
  If[V[[2,j,2]] < 0,
```

```
    AguaFut[[2,j]] = AguaFut[[2,j]] (1 + V[[2,j,2]])
```

1  
1;

En donde  $v[[i, j, 1]]$  equivale a  $V_{i,j}.u$  y  $v[[i, j, 2]]$  equivale a  $V_{i,j}.v$ . Debido a este trato especial es necesario aclarar que para los resultados se tomará en cuenta sólo las celdas que no sean frontera, es decir, para  $i = \{2,3,\dots,\text{renglones}\}$  y  $j = \{2,3,\dots, \text{columnas}\}$ . Esto para evitar cualquier controversia que podría presentarse debido a la suposición que se hizo sobre la constancia de los atributos en las fronteras. Los algoritmos 1b y 1c son aplicables sólo a la distribución de clorofila y nitratos, no a la distribución de  $Q$  (proporción N:C dentro de las células).

## II.2.5 Consideraciones en el transporte de $Q$

Por último, es necesario tomar en cuenta algunas consideraciones en cuanto al transporte de  $Q$ . El estado nutricional de las células no es una variable a transportar en sí, sino que es una característica intrínseca del fitoplancton que es transportado. En el presente modelo este transporte es representado por la advección de la clorofila. Cuando la biomasa de fitoplancton en una celda es reducida por efecto de dispersión por las corrientes, el valor de  $Q$  no cambia, puesto que las células que aún permanecen en la celda siguen teniendo las mismas características nutritivas. De igual manera, al entrar un grupo  $F_1$  de fitoplancton con un estado nutritivo  $Q_1$  a una celda donde ya existe una población  $F_2$  con un estado nutritivo  $Q_2$ ; se debe promediar ambas  $Q$  en una manera ponderada por la biomasa del grupo  $F_1$  en proporción a la biomasa de  $F_2$ . Si  $Q_1 > Q_2$ , esto resulta en un fortalecimiento del estado nutritivo  $Q_2$ , resultando en una  $Q$  ligeramente mayor (pero menor a  $Q_1$ ) de todo

el grupo resultante ( $F_1+F_2$ ). Si por el contrario  $Q_1 < Q_2$ , esto diluye ó debilita al estado nutritivo de  $Q_2$  y resulta en un grupo final en el que  $Q$  es menor (aunque no tan baja como  $Q_1$ ). De igual manera, si  $Q_1$  y  $Q_2$  son iguales, la  $Q$  resultante también será igual sin importar la proporción entre  $F_1$  y  $F_2$ . Por lo tanto,  $Q$  jamás se transporta por su propia iniciativa, y siempre que exista un transporte de clorofila hacia el cuadrante  $(i, j)$  proveniente de la celda  $(i+m, j+n)$ , éste debe ser acompañado por el siguiente cálculo (Anexo 1.1):

$$\text{DistQFut}[[i, j]] += (\text{DistQ}[[i+m, j+n]] - \text{DistQ}[[i, j]]) \cdot (\text{Transporte} \cdot Z[[i+m, j+n]]) / (\text{ChlFut}[[i, j]] \cdot Z[[i, j]]); \quad (\text{Anexo 1.1})$$

En donde se puede ver que dependiendo de la diferencia entre  $\text{DistQ}_{i+m, j+n}$  y  $\text{DistQ}_{i, j}$ ,  $\text{DistQFut}_{i, j}$  será enriquecida o empobrecida. En el caso de las fronteras no es necesario realizar ningún cálculo para ajustar ó modificar el valor de  $Q$ .

### II.3 Variación diurna de la luz

Otra variable física de mucho peso en el modelo es la luz solar, ya que ésta es indispensable para el trabajo fotosintético de las células. Más adelante, la expresión (21) y su correspondiente algoritmo 2 describirán la atenuación de la luz dentro de la columna de agua; pero antes de llegar a ese punto, es necesario establecer cómo es esa luz justo en el momento de entrar al agua, antes de ser atenuada.

Se utilizó el programa RADTRAN (K. Carder, comunicación personal, Universidad del Sur de Florida-EUA) para calcular valores simulados de irradiancia solar (PAR) para la bahía.

Dichos valores fueron calculados para cada uno de los 5 intervalos de tiempo que se presentan en un día cuando el modelo supone un  $\Delta t$  de 4.8 hrs. A su vez, el valor calculado para cada intervalo representa un promedio de la irradiancia solar ocurrida en *todo* el lapso de tiempo que dicho intervalo representa (4.8 hrs), el cual se efectuó mediante un proceso numérico de 11 puntos homogéneamente distribuidos (un  $\Delta t$  interno de 0.48 hrs, incluyendo ambos extremos). Los resultados obtenidos se resumen en la tabla I:

**Tabla I:** Valores de irradiancia solar (PAR) promedio para los días representativos del año, con un  $\Delta t$  de 4.8 hrs.

Día Juliano	Descripción	Hora	Irradiancia $\mu\text{mol fotones m}^{-2} \text{s}^{-1}$	Suposiciones **
35	Día representativo de invierno	0.0-4.8	0.00	Presión: 30.1 pulgadas de mercurio. Humedad relativa: 68.94 Viento: 3.19 m/s Visibilidad: 8.68 km
		4.8-9.6	275.30	
		9.6-14.4	1996.76	
		14.4-19.2	279.42	
		19.2-24.0	0.00	
126	Día representativo de primavera	0.0-4.8	0.00	Presión: 39.94 pulgadas de mercurio. Humedad relativa: 77.19 Viento: 3.93 m/s. Visibilidad: 8.04 km
		4.8-9.6	770.26	
		9.6-14.4	1828.35	
		14.4-19.2	595.22	
		19.2-24.0	0.00	
219	Día representativo de verano	0.0-4.8	0.00	Presión: 29.89 pulgadas de mercurio. Humedad relativa: 79.28 Viento: 3.34 m/s. Visibilidad: 6.36 km
		4.8-9.6	721.52	
		9.6-14.4	1838.17	
		14.4-19.2	650.81	
		19.2-24.0	0.00	
311	Día representativo de otoño	0.0-4.8	0.00	Presión: 29.95 pulgadas de mercurio. Humedad relativa: 67.21 Viento: 2.92 m/s. Visibilidad: 7.8 km
		4.8-9.6	374.34	
		9.6-14.4	1151.52	
		14.4-19.2	190.82	
		19.2-24.0	0.00	

\*\* Las suposiciones sobre las condiciones atmosféricas se derivan de las estadísticas mensuales elaboradas por la Fuerza Aérea Mexicana, Dirección del Servicio Meteorológico, Sección Técnica, Estación Meteorológica de El Ciprés, Baja California, desde enero de 1994 hasta septiembre del 2000.

La duración del día y los ángulos de declinación solar fueron calculados específicamente para el día representativo de cada estación (*i.e.* los días Julianos 35, 126, 219 y 311), pero las suposiciones atmosféricas son un promedio para toda la estación del año completa.

Nótese que el valor más alto de irradiancia paradójicamente corresponde al mediodía de invierno, debido a que la atmósfera es más seca en esa temporada. Aún así, los días más cortos provocan que durante las mañanas y tardes de otoño/invierno se presenten irradiancias más bajas que en primavera/verano.

### II.3.1 Implementación de la variación diurna de la luz

Para propósitos del modelo se resumió la información contenida en la tabla 1 en una función que toma como entrada la estación del año y la hora del día, regresando como resultado la irradiancia justo por debajo de la superficie que se presenta en ese momento.

Dicha función se llama `CalculaEo[]`, y se define de la siguiente manera:

```

IrradianciasInvierno = {0,275.3,1996.76,279.42,0};
IrradianciasPrimavera = {0,770.26,1828.35,595.22,0};
IrradianciasVerano = {0,721.52,1838.17,650.81,0};
IrradianciasOtoño = {0,374.34,1151.52,190.82,0};

For[i=1,i≤5,i++,

  CalculaEo[Invierno,x_/;Evaluate[x≥(i-1)*4.8 && x<i*4.8]]=
    IrradianciasInvierno[[i]];                                (ML1.i)

  CalculaEo[Primavera,x_/;Evaluate[x≥(i-1)*4.8 && x<i*4.8]]=
    IrradianciasPrimavera[[i]];                                (ML2.i)

```

```
CalculaEo[Verano,x_/;Evaluate[x ≥ (i-1)*4.8 && x<i*4.8]]=
```

```
IrradianciasVerano[[i]]; (ML3.i)
```

```
CalculaEo[Otoño,x_/;Evaluate[x ≥ (i-1)*4.8 && x<i*4.8]]=
```

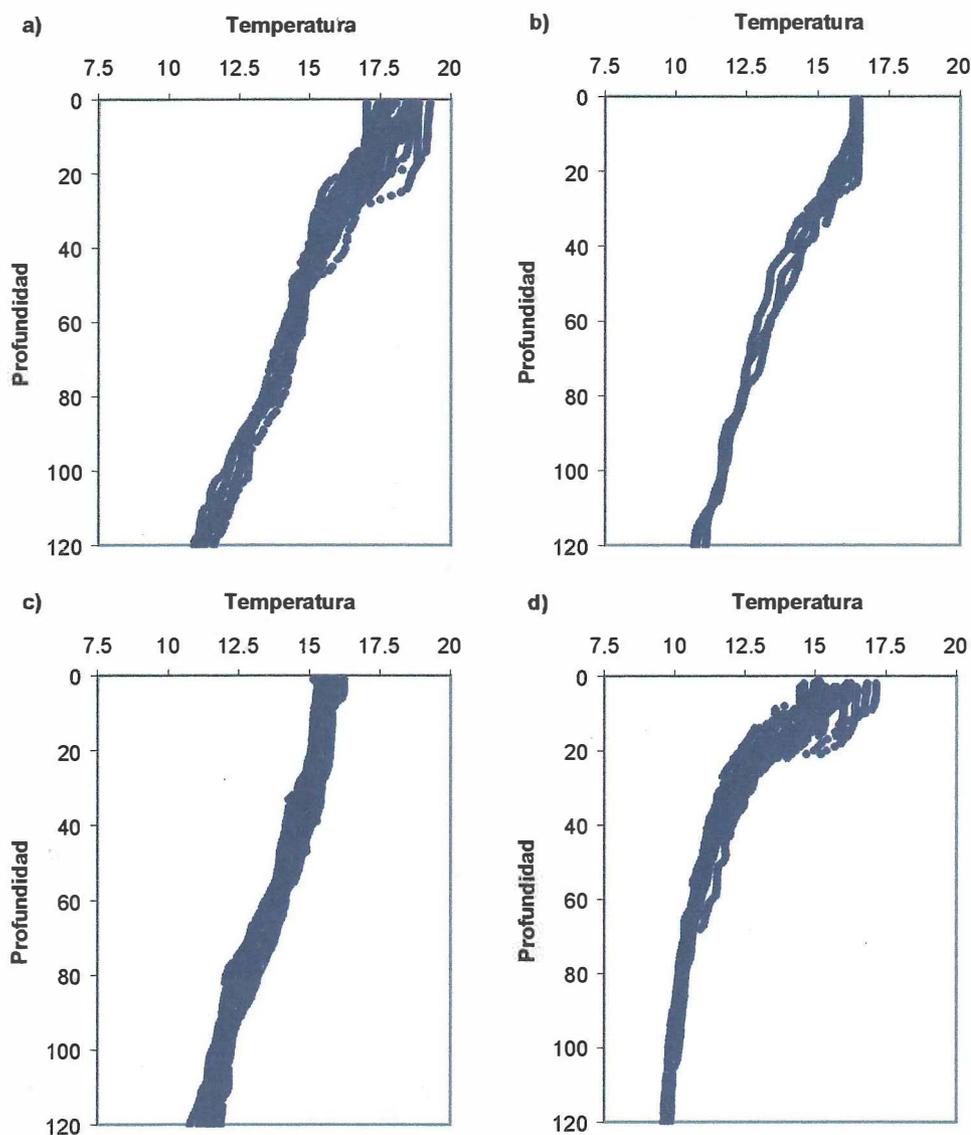
```
IrradianciasOtoño[[i]]; (ML4.i)
```

1

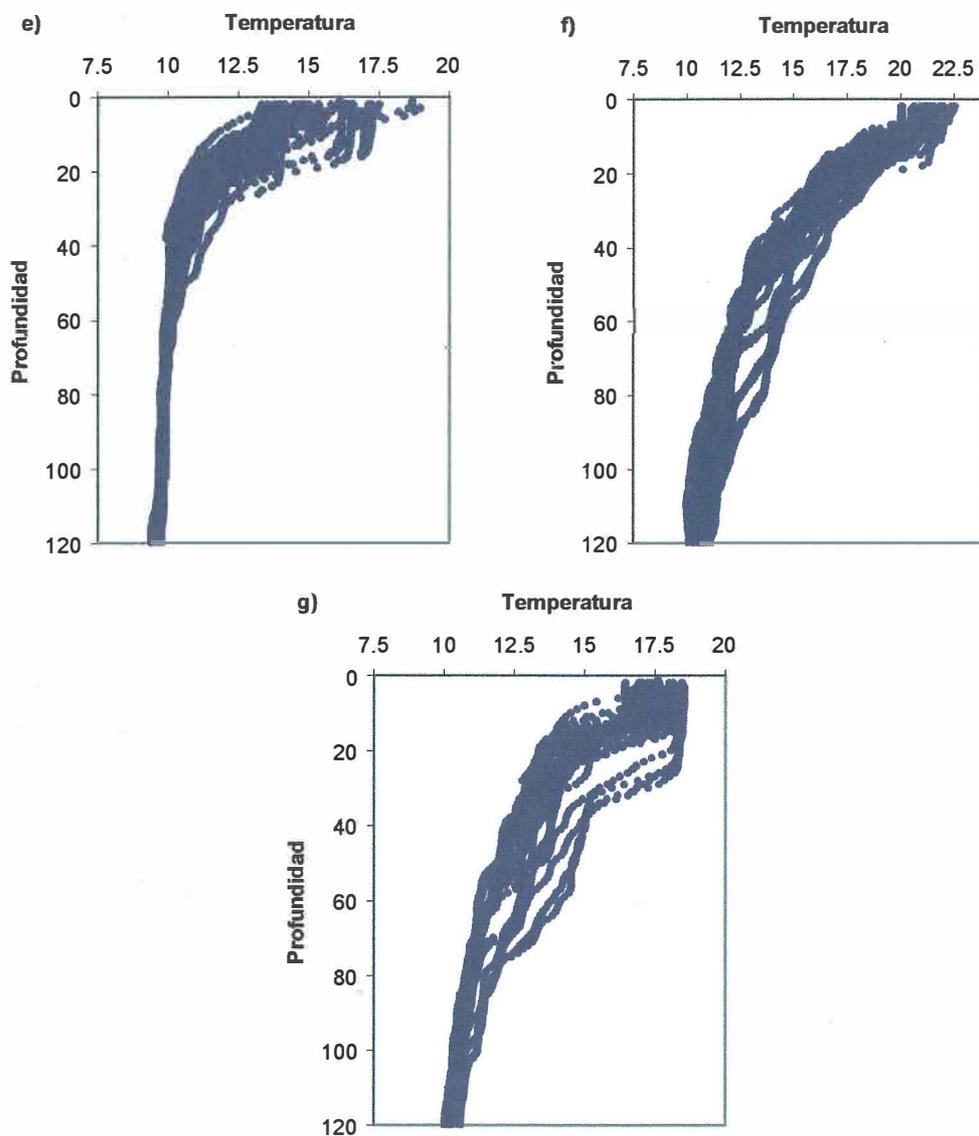
El uso de `Evaluate[]` es para forzar a *Mathematica* a utilizar el valor de  $i$  al momento de construir las distintas reglas de la función y no el símbolo  $i$  en sí. Con estas 20 reglas (ML1.1 - ML4.5) se completa la función que calcula la irradiancia justo por debajo de la superficie. Dicha función está diseñada para un  $\Delta t$  de 4.8 h y es más apropiado llamarla para las horas 2.4, 7.2, 12, 16.8 ó 21.6; ya que fue centrada alrededor del mediodía.

## II.4 Temperatura del agua

La temperatura del agua es de gran importancia ya que dicta la rapidez del metabolismo del fitoplancton. Las temperaturas utilizadas en este trabajo provienen de las campañas Batos 1-7 de García-Córdova *et al.* (1993 - 1994), y se muestran a continuación:



**Figura 22a-d:** Perfiles de temperatura en la Bahía de Todos Santos, tomados de García Córdova *et al.* (CICESE, Departamento de Oceanografía física, comunicación personal), correspondientes a: a) Noviembre 1993, b) Diciembre 1993, c) Enero 1994 y d) Marzo 1994 respectivamente.



**Fig. 22e-g:** Perfiles de temperatura en la Bahía de Todos Santos, tomados de García Córdova *et al.*, correspondientes a: e) Mayo-Junio 1994, f) Septiembre 1994 y g) Octubre 1994 respectivamente

A pesar de que estos perfiles fueron tomados en diversos puntos de la Bahía de Todos Santos y a distintas horas del día, las figuras 22a-c muestran claramente que no existe gradientes de temperatura en el sentido horizontal y/o temporal para los datos de noviembre, diciembre y enero. Por otro lado, aunque las figuras 22d-g muestran una ligera a moderada dispersión de los datos (en especial a profundidades someras), no se encontró que dichas variaciones obedecieran a algún cambio temporal ú horizontal, e

incluso se intentó relacionar tal variación con la profundidad de la columna de agua –lo cual resulta relevante en cuanto a la capa de mezcla– pero ninguna de estas tres variables mejora la explicación del comportamiento observado. Por lo anterior se optó por construir a través de regresiones, siete ecuaciones (una para cada temporada de esos años) que predican la temperatura del agua en función de la profundidad (Tablas II-VIII).

**Tabla II:** Noviembre de 1993. Resultados obtenidos al ajustar los datos de la figura 22a a una función mediante una regresión no lineal.

Parámetro	Coefficiente estimado	SE	TStat	Valor de P
1	21.5022	0.704558	30.5188	0
z	-0.0953089	0.0142538	-6.68654	$3.13743 \times 10^{-11}$
$z^2$	-0.00197858	0.0002000402	-9.87309	$2.30263 \times 10^{-22}$
$\text{Tanh}[(36-z)/25]$	-3.77082	0.820091	-4.59817	$4.59369 \times 10^{-6}$
$z \text{Tanh}[(36-z)/25]$	0.0837432	0.0158226	5.29264	$1.37082 \times 10^{-7}$
$z^2 \text{Tanh}[(36-z)/25]$	-0.0024988	0.000325326	-7.6809	$2.71935 \times 10^{-14}$

$$R^2 = 0.951939 \quad R^2 \text{ ajustada} = 0.95179 \quad \text{Varianza estimada} = 0.223288$$

Tabla Anova	grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado promedio	Razón F	Valor de P
Modelo	5	7151.33	1430.27	6405.49	$2.75170680271 \times 10^{-106.2}$
Error	1617	361.056	0.223288		
Total	1622	7512.39			

**Tabla III:** Diciembre de 1993. Resultados obtenidos al ajustar los datos de la figura 22b a una función mediante una regresión no lineal.

Parámetro	Coefficiente estimado	SE	TStat	Valor de P
1	16.0993	0.0894599	179.961	$2.2672611 \times 10^{-500}$
z	-0.0240832	0.0048995	-4.91543	$1.16308 \times 10^{-6}$
$z^2$	0.00130218	0.000361563	3.60152	0.00034427
$\text{Tanh}[(z-18)/14]$	0.318405	0.125307	2.541	0.0113202
$z \text{Tanh}[(z-18)/14]$	0.0216605	0.00710736	3.04762	0.00241466
$z^2 \text{Tanh}[(z-18)/14]$	0.00126486	0.000384711	3.28783	0.00107249

$$R^2 = 0.98865 \quad R^2 \text{ ajustada} = 0.988549 \quad \text{Varianza estimada} = 0.0410369$$

Tabla Anova	grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado promedio	Razón F	Valor de P
Modelo	5	2015.96	403.191	9825.09	$1.151821382929 \times 10^{-545}$
Error	564	23.1448	0.0410369		
Total	569	2039.1			

Tabla IV: Enero 1994. Resultados obtenidos al ajustar los datos de la figura 22c a un función mediante una regresión no lineal.

Parámetro	Coefficiente estimado	SE	TStat	Valor de P
1	13.9486	0.0591993	235.621	$7.0032828968 \times 10^{-1654}$
z	-0.00680158	0.000909919	-7.47494	$1.07855 \times 10^{-13}$
Tanh[(66-z)/41]	1.8762	0.0526149	35.6592	0.

$$R^2 = 0.973572 \quad R^2 \text{ ajustada} = 0.97355 \quad \text{Varianza estimada} = 0.0513735$$

Tabla Anova	grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado promedio	Razón F	Valor de P
Modelo	2	4511.77	2255.89	43911.5	0.
Error	2384	122.474	0.0513735		
Total	2386	4634.25			

Tabla V: Marzo 1994. Resultados obtenidos al ajustar los datos de la figura 22d a una función mediante una regresión no lineal.

Parámetro	Coefficiente estimado	SE	TStat	Valor de P
1	14.721	0.0578732	254.366	$1.557737 \times 10^{-1427}$
z	-0.0485128	0.0102406	-4.73732	$2.33304 \times 10^{-6}$
z <sup>2</sup>	0.00481248	0.000588526	0.817717	0.413625
Tanh[(17-z)/8]	0.907214	0.0864082	10.4992	0.
z Tanh[(17-z)/8]	0.0174424	0.0117061	1.49003	0.13639
z <sup>2</sup> Tanh[(17-z)/8]	0.00021131	0.00060076	0.351737	0.725076

$$R^2 = 0.950327 \quad R^2 \text{ ajustada} = 0.950191 \quad \text{Varianza estimada} = 0.19329$$

Tabla Anova	grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado promedio	Razón F	Valor de P
Modelo	5	6748.73	1349.75	6983.03	$3.1307252851 \times 10^{-1186}$
Error	1825	352.753	0.19329		
Total	1830	7101.49			

**Tabla VI:** Mayo-Junio 1994: Resultados obtenidos al ajustar los datos de la figura 22e a una función mediante una regresión no lineal.

Parámetro	Coefficiente estimado	SE	Tstat	Valor de P
1	13.8923	0.0902131	153.995	$1.350367 \times 10^{-1172}$
z	-0.153968	0.0215275	-7.15218	$1.16164 \times 10^{-12}$
z <sup>2</sup>	0.00794168	0.00141261	5.62198	$2.13023 \times 10^{-8}$
Tanh[(14-z)/7]	2.12859	0.133914	15.8652	0.
z Tanh[(14-z)/7]	-0.114924	0.0236101	-4.86759	$1.2108 \times 10^{-6}$
z <sup>2</sup> Tanh[(14-z)/7]	0.00775324	0.00143076	5.41896	$6.65711 \times 10^{-8}$

$$R^2 = 0.827297 \quad R^2 \text{ ajustada} = 0.8269 \quad \text{Varianza estimada} = 0.650483$$

Tabla Anova	grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado promedio	Razón F	Valor de P
Modelo	5	6780.4	1356.08	2084.73	$3.10303955685 \times 10^{-826}$
Error	2176	1415.45	0.650483		
Total	2181	8195.85			

**Tabla VII:** Septiembre 1994. Resultados obtenidos al ajustar los datos de la figura 22f a una función mediante una regresión no lineal.

Parámetro	Coefficiente estimado	SE	Tstat	Valor de P
1	18.9339	0.123273	153.593	$3.645125 \times 10^{-2142}$
z	-0.215665	0.00319724	-67.4535	$9.6257599 \times 10^{-748}$
z <sup>2</sup>	0.0031022	0.000118148	26.257	0.
Tanh[(34-z)/14]	4.28557	0.148112	28.9346	0.
z Tanh[(34-z)/14]	-0.175387	0.00598582	-29.3003	$3.95884 \times 10^{-177}$
z <sup>2</sup> Tanh[(34-z)/14]	0.00304845	0.000142732	21.3578	0.

$$R^2 = 0.965824 \quad R^2 \text{ ajustada} = 0.965797 \quad \text{Varianza estimada} = 0.374413$$

Tabla Anova	grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado promedio	Razón F	Valor de P
Modelo	5	67262.9	13452.6	35929.8	$3.5627848789 \times 10^{-1656}$
Error	6357	2380.14	0.374413		
Total	6362	69643.1			

**Tabla VIII:** Octubre 1994. Resultados obtenidos al ajustar los datos de la figura 22g a una función mediante una regresión no lineal.

Parámetro	Coefficiente estimado	SE	Tstat	Valor de P
1	16.981	0.0833909	203.631	$4.927019 \times 10^{-1639}$
Z	-0.080931	0.00361146	-22.4095	$3.89686 \times 10^{-102}$
$z^2$	0.0187688	0.00119583	15.6952	0.
$\text{Tanh}[(8-z)/7]$	0.904002	0.0642452	14.0711	0.
$z^2 \text{Tanh}[(8-z)/7]$	0.0185053	0.00121012	15.2921	0.

$$R^2 = 0.886271 \quad R^2 \text{ ajustada} = 0.886102 \quad \text{Varianza estimada} = 0.713547$$

Tabla Anova	grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado promedio	Razón F	Valor de P
Modelo	4	14985.6	3746.41	5250.4	$7.33944145535 \times 10^{-1270}$
Error	2695	1923.01	0.713547		
Total	2699	16908.6			

#### II.4.1 Implementación de la temperatura del agua

Las siguientes son las siete reglas que codifican las ecuaciones obtenidas por las regresiones resumidas en las Tablas II-VIII; correspondiendo a noviembre 1993, diciembre 1993, enero 1994, marzo 1994, mayo-junio 1994, septiembre 1994 y octubre 1994 respectivamente. Nótese que las reglas son mutuamente excluyentes, por lo que –según el mes que se quiera modelar– una y sólo una de estas reglas debe ser utilizada:

$$T := 21.5022 - 0.0953089 z - 0.00197858 z^2 - 3.77092 \operatorname{Tanh}[(36-z)/25] + 0.0837432 z \operatorname{Tanh}[(36-z)/25] - 0.0024988 z^2 \operatorname{Tanh}[(36-z)/25]; \quad (\text{MT1})$$

$$T := 16.0993 - 0.0240832 z + 0.00130218 z^2 + 0.318405 \operatorname{Tanh}[(18-z)/14] + 0.0216605 z \operatorname{Tanh}[(18-z)/14] + 0.00126486 z^2 \operatorname{Tanh}[(18-z)/14]; \quad (\text{MT2})$$

$$T := 13.9486 - 0.00680158 z + 1.8762 \operatorname{Tanh}[(66-z)/41]; \quad (\text{MT3})$$

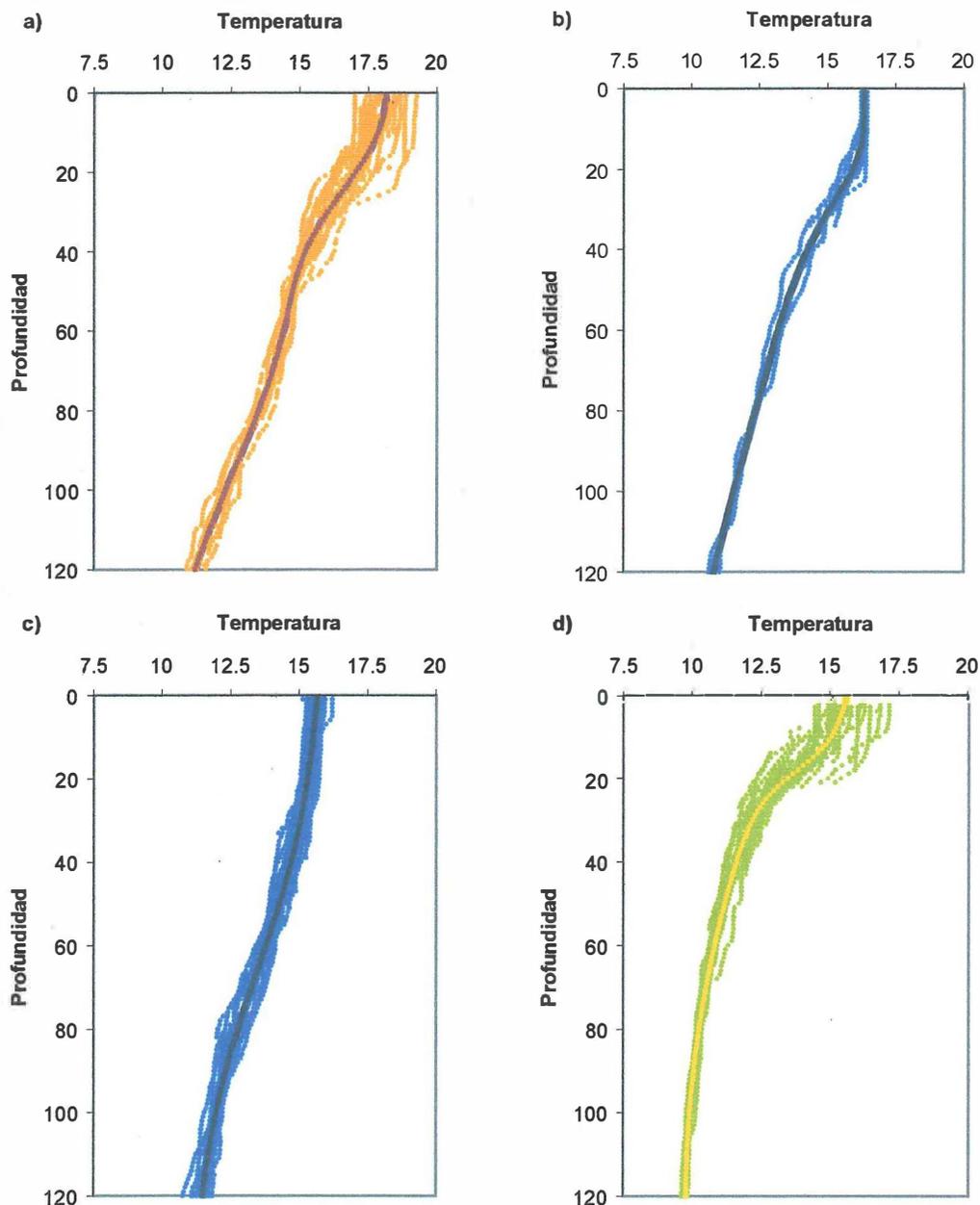
$$T := 14.721 - 0.0485128 z + 0.000481248 z^2 + 0.907214 \operatorname{Tanh}[(17-z)/8] + 0.0174424 z \operatorname{Tanh}[(17-z)/8] + 0.00021131 z^2 \operatorname{Tanh}[(17-z)/8]; \quad (\text{MT4})$$

$$T := 13.8923 - 0.153968 z + 0.00794168 z^2 + 2.12859 \operatorname{Tanh}[(14-z)/7] - 0.114924 z \operatorname{Tanh}[(14-z)/7] + 0.00775324 z^2 \operatorname{Tanh}[(14-z)/7]; \quad (\text{MT5})$$

$$T := 18.9339 - 0.215665 z + 0.0031022 z^2 + 4.28557 \operatorname{Tanh}[(34-z)/14] - 0.175387 z \operatorname{Tanh}[(34-z)/14] + 0.00304845 z^2 \operatorname{Tanh}[(34-z)/14]; \quad (\text{MT6})$$

$$T := 16.981 - 0.080931 z + 0.0187688 z^2 + 0.904002 \operatorname{Tanh}[(8-z)/7] + 0.0185053 z^2 \operatorname{Tanh}[(8-z)/7]; \quad (\text{MT7})$$

A continuación se muestran gráficas comparativas entre los resultados arrojados por las reglas MT1-MT7 y los datos desde los cuales surgieron las regresiones desde las cuales surgen dichas reglas.



**Figura 23 a-d:** Comparación entre el comportamiento de las reglas MT1-MT4 y los datos a partir de los cuales dichas expresiones fueron generadas. Los colores sugieren la estación del año de cada gráfica y corresponde a los meses de noviembre, diciembre, enero y marzo respectivamente

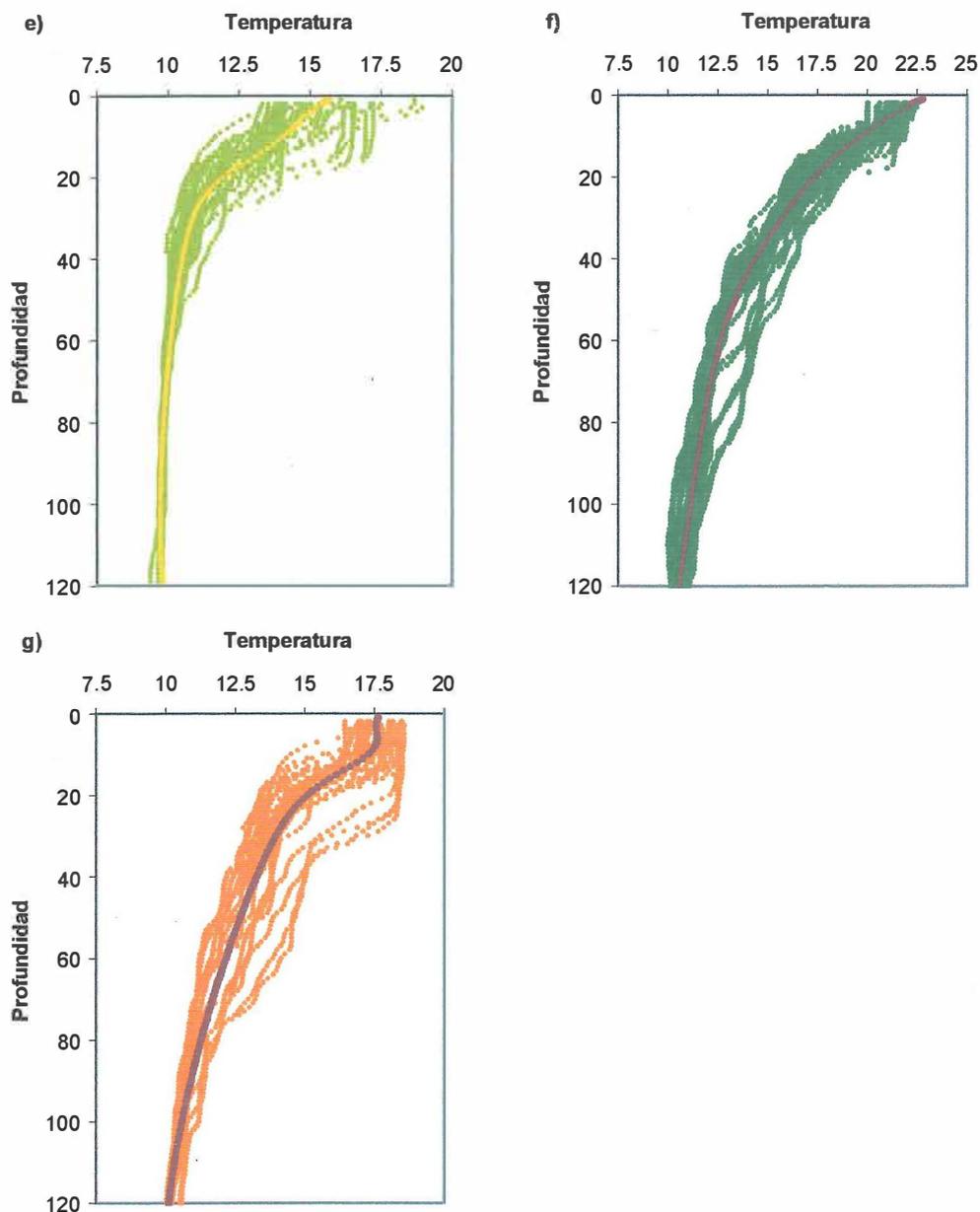


Figura 23 e-g: Comparación entre el comportamiento de las reglas MT5-MT7 y los datos a partir de los cuales dichas expresiones fueron generadas. Los colores sugieren la estación del año de cada gráfica, y corresponden a los meses de mayo/junio, septiembre y octubre respectivamente.

Como lo muestran las figuras 23a-g, visualmente se confirma que las expresiones MT1-MT7 son una excelente aproximación a la temperatura de la bahía, las cuales se utilizan en el presente modelo.

## III Modelado biológico

### III.1 Planteamiento básico del modelo biológico

Como ya se describió anteriormente las corrientes en el modelo modifican las propiedades químico-biológicas de cada celda, mediante el intercambio entre celdas vecinas. A continuación se describirá como la actividad del fitoplancton modifica las características químico-biológicas dentro de cada celda. Las variables que caracterizan a cada celda son: concentración de nutrientes ( $\text{NO}_3$ ), biomasa del fitoplancton (representado por la concentración de clorofila), el estado nutricional de las células (proporción  $\mu\text{mol C} : \mu\text{mol N}$ ) y la temperatura del agua. Aunque la luz también participa en el modelo, no es considerada como una variable que caracterice a las celdas, ya que su valor no es guardado de una iteración a la otra.

A pesar de la bidimensionalidad del modelo de las corrientes residuales, muchos aspectos del modelado biológico tendrán un aspecto tridimensional. Aunque la columna de agua se encuentre lo suficientemente mezclada como para causar una homogeneidad en muchas de sus propiedades físico-químicas, siempre existirá una clara influencia por la luz que penetra en la columna de agua, provocando una estratificación de algunos aspectos biológicos.

Por esto, el cálculo de la parte biológica se realizará diferencialmente metro a metro dentro de la columna de agua, aunque finalmente para fines operacionales el resultado se presentará integrado para toda la columna. Aspectos como la distribución de clorofila, el parámetro  $\alpha$  (eficiencia fotosintética),  $E_0$  (irradiancia escalar) y otros tendrán un valor para

cada metro en la columna, mientras que otros parámetros como la concentración de  $\text{NO}_3$ , el estado nutricional de las células y otros serán promediados para toda la columna de agua.

De esta manera, algunas ecuaciones contienen en su nomenclatura una  $z$  entre paréntesis, que indica que dicho cálculo es función de la profundidad. Además todas las ecuaciones tienen los subíndices “i,j” implícitos, ya que dichos cálculos necesitan realizarse para cada celda del modelo.

Con base en lo anterior la biomasa del fitoplancton cambia en el tiempo según la siguiente expresión básica (modificada de Bissett *et. al.*, 1999):

$$d/dt[\text{Masa Fito}_{(z)}] = \text{Crecimiento}_{(z)} - \text{Excreción}_{(z)} - \text{Pastoreo}_{(z)} \quad (17)$$

El crecimiento del fitoplancton se realiza como consecuencia de la actividad fotosintética, la cual a su vez obedece a las condiciones de temperatura, luz y disponibilidad de nutrientes. La tasa exacta con la que este crecimiento se llevará a cabo será según lo permita el factor más limitrofe de los tres. Por ejemplo, aunque haya suficiente luz no podrá haber crecimiento en ausencia de nutrientes o viceversa. Por su parte, la temperatura influye debido a que es un factor que impacta directamente al metabolismo de las células. Esto lleva a tres escenarios iniciales de crecimiento potencial del fitoplancton: uno limitado por la luz, otro por nutrientes y un tercero por la temperatura (relacionada al metabolismo celular). A partir de esto, se escoge la tasa más limitante de las tres y se aplica como crecimiento del fitoplancton. Sin embargo, la actividad metabólica de la célula es una parte tan integral del proceso de crecimiento que resulta poco práctico y artificial el intentar

separarla de los otros dos factores. Debido a esto, un enfoque más apropiado es considerar los siguientes dos escenarios de crecimiento potencial:

- a) Dada una temperatura del agua, ¿qué tasa de crecimiento permitiría la luz, si los nutrientes no fueran limitantes?
- b) Dada una temperatura actual del agua, ¿qué tasa de crecimiento permitirían los nutrientes, si la luz no fuera limitante?

Entonces el crecimiento del fitoplancton se dará según la tasa ofrecida por el escenario más limitante. Esto es importante, porque permite simular de una manera más apropiada porque el máximo de biomasa se encuentra no en la zona de la columna donde la luz es más intensa, ni tampoco donde los nutrientes son más altos; sino más bien, por lo general se encuentra en la zona donde la combinación de ambos factores resulta óptima. Podemos replantear la expresión (17) como:

$$d/dt[\text{Masa Fitó}_{(z)}] = \text{Min}[\mu_{\text{luz}(z)}, \mu_{\text{nut}(z)}] - \text{Excreción}_{(z)} - \text{Pastoreo}_{(z)} \quad (18)$$

Donde  $\mu_{\text{luz}(z)}$  es la tasa de crecimiento específica del fitoplancton limitada por la luz, y  $\mu_{\text{nut}}$  es la tasa de crecimiento específica limitada por los nutrientes. Nótese que  $\mu_{\text{nut}}$  resulta ser función de la profundidad no por los nutrientes en sí –los cuales tienen una distribución vertical homogénea–, sino por  $\mu_{\text{temp}(z)}$  que se encuentra implícita.

### III.2 Tasa de crecimiento limitada por la luz ( $\mu_{\text{luz}(z)}$ ).

Bissett *et al.* (1999) proponen en su modelo la siguiente expresión para  $\mu_{\text{luz}(z)}$ :

$$\mu_{\text{luz}(z)} = \tanh [\alpha_{(z)} \cdot (E_{O(z)} - E_{O_{\text{comp}}}) / \mu_{\text{temp}(z)} ] \cdot \mu_{\text{temp}(z)} \quad (19)$$

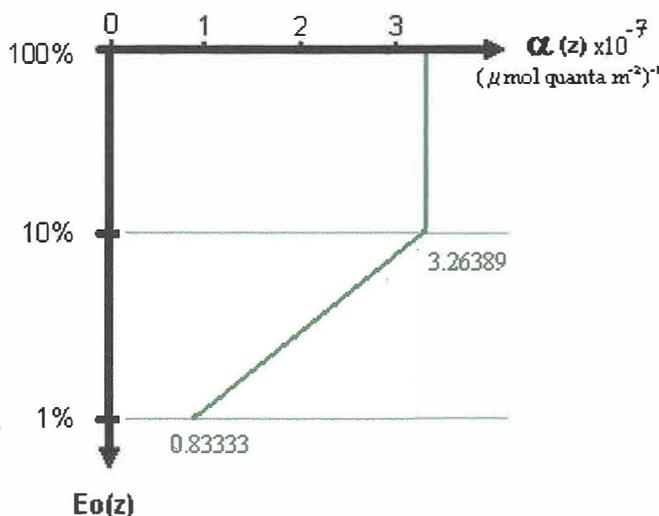
En donde entran en juego la eficiencia fotosintética específica ( $\alpha_{(z)}$ : reparametrizada a  $[\mu\text{mol fotones m}^{-2}]^{-1}$ ), la cantidad de luz disponible ( $E_{O(z)}$ :  $\mu\text{mol fotones m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ) y la máxima tasa de crecimiento específico que permite la temperatura del agua ( $\mu_{\text{temp}(z)}$ :  $\text{d}^{-1}$ ). Es relevante notar que a  $E_{O(z)}$  se le resta  $E_{O_{\text{comp}}}$  (flujo de irradiancia de compensación, en el que la tasa de crecimiento es cero). Esto es significativo ya que compensa la cantidad de luz que aunque absorbida no representa un trabajo fotosintético destinado al crecimiento del fitoplancton, ya que se pierde por respiración. En este modelo se toma  $E_{O_{\text{comp}}} = 10 \mu\text{mol fotones m}^{-2} \text{ s}^{-1}$  (Richardson *et al.*, 1983; Sakshaug *et al.*, 1987).

Valdez Holguín *et al.* (1998) propusieron un valor de  $\alpha^B_{(z)} = 0.047 \pm 0.004 \text{ mgC (mg Chl)}^{-1} \text{ h}^{-1}$  ( $\mu\text{mol fotones m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ )<sup>-1</sup> para la parte superior de la zona eufótica de la zona de estudio, y un valor que desciende de manera lineal desde 0.047 hasta 0.012  $\text{mgC (mg Chl)}^{-1} \text{ h}^{-1}$  ( $\mu\text{mol cuanta m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ )<sup>-1</sup> para la parte inferior de la zona eufótica. La parte superior de la zona eufótica se considera desde la superficie hasta la profundidad donde penetra el 10% de la irradiancia superficial; mientras que la parte inferior de la zona eufótica se considera desde el 10% de la irradiancia superficial hasta donde penetra el 1% de la irradiancia superficial. Valdez Holguín *et al.* (1988) proponen que para la zona de estudio la

profundidad del 10% de la irradiancia superficial coincide generalmente con la mitad de la zona eufótica, dividiendo a ésta en dos partes iguales.

Existe una aparente disparidad dimensional entre el  $\alpha_{(z)}$  de Bissett y el  $\alpha^B_{(z)}$  de Valdez Holguín pero en realidad existe una equivalencia entre ambos, ya que se puede transformar de la segunda a la primera cuando se conoce la proporción C:Chl en las células. De esta manera los valores reportados por Valdez Holguín equivalen a  $3.26389 \times 10^{-7} \pm 2.77778 \times 10^{-8}$  ( $\mu\text{mol fotonos m}^{-2}$ )<sup>-1</sup> para la parte superior de la zona eufótica, descendiendo hasta  $8.33333 \times 10^{-8}$  ( $\mu\text{mol fotonos m}^{-2}$ )<sup>-1</sup> en la parte inferior de la zona eufótica, si se supone una proporción C:Chl igual a 40 (Fig. 24).

**Figura 24:**  
Perfil del parámetro fotosintético  $\alpha$ , reparametrizado a partir del reportado por Valdéz Holguín *et al.* (1998) para la Bahía de Todos Santos.



Eppley (1972) propuso la siguiente expresión para un crecimiento máximo del fitoplancton sin limitación de nutrientes o luz (en un intervalo de 8 a 25°C):

$$\mu_{\text{temp}(z)} = 0.851(1.066)^T \quad (20)$$

Donde T es la temperatura (en grados centígrados) a la cual el fitoplancton se encuentra. Nótese que éste parámetro no varía propiamente con la profundidad, sino con la temperatura del agua. Empero –y tal como las reglas MT1-MT7 mostraron– la temperatura del agua puede expresarse como función de la profundidad, por lo que en nuestro modelo B1a resulta de manera indirecta ser una función de la profundidad. La irradiancia escalar a la profundidad z, ( $E_o(z)$ ) se calculó a partir de la ecuación de Lambert-Beer:

$$E_o(z_2) = E_o(z_1) \cdot \exp[-K_{o(z)} \cdot (z_2 - z_1)] \quad (21)$$

En donde  $K_{o(z)}$  es el coeficiente de atenuación de la irradiancia escalar. Gordon y Morel (1983) propusieron la siguiente expresión para calcular  $K_{d(z)}$ :

$$K_{d(z)} = [a_{T(z)} + b_{b(z)}] [\mu_{d(z)}]^{-1} \quad (22)$$

En donde los términos que participan son: la absorción total del agua de mar con todos sus componentes ópticos ( $a_{T(z)}$ ), el coeficiente de esparcimiento de la luz hacia atrás ( $b_{b(z)}$ ), y el coseno promedio de la radiancia descendente ( $\mu_{d(z)}$ ). En realidad la expresión (22) se refiere al coeficiente de atenuación vertical de la irradiancia descendente, no de la irradiancia escalar (que es la que nos interesa). Sin embargo, Kirk (1994) menciona que son muy similares en valor una de otra, especialmente cuando el intervalo  $z_2 - z_1$  es pequeño (v.g. 1 m). De esta forma, se puede suponer que la expresión (22) es una aproximación suficientemente buena de  $K_{o(z)}$ .

El término  $a_{T(z)}$  representa la suma de la absorción del fitoplancton, la materia orgánica cromofórica disuelta, el detritus, y la absorción por parte del agua pura. Giles Guzmán y Alvarez Borrego (2000) propusieron la siguiente ecuación para  $a_{T(z)}$ :

$$a_{T(z)} = 0.0221 + 0.0466 \text{ Chl}_{(z)} + (0.1378 - 0.0141 \text{ Chl}_{(z)}) \cdot \exp(-m_3 L) \quad (23)$$

La cual permite calcular  $a_{T(z)}$  a partir de  $L$  y la concentración de  $\text{Chl}$  en esa determinada profundidad. En donde el término  $m_3$  representa una abreviación del siguiente polinomio:

$$m_3 = 0.28 - 0.18319 \text{ Chl}_{(z)} - 0.00709 L + 0.0000418 \text{ Chl}_{(z)} L + 0.16604 \text{ Chl}_{(z)}^2 + 0.0000992 L^2 + 0.00019 \text{ Chl}_{(z)}^2 L - 0.0000029 \text{ Chl}_{(z)} L^2 - 0.0464 \text{ Chl}_{(z)}^3 - 0.0000004 L^3 \quad (24)$$

$L$  es la longitud promedio de la trayectoria que los fotones siguen dentro del agua. La utilización del término  $L$  es significativa –en contraste con simplemente utilizar  $z$ – pues denota el hecho de que la luz no viaja en una trayectoria totalmente vertical. Esto es debido a diversos factores, entre los que principalmente se encuentran: el hecho de que el sol no se encuentra en el zenit todo el día, que el oleaje cambia el ángulo de entrada de la luz, y que la luz se refracta y esparce una vez dentro del agua. Entre más se aleje la luz de una trayectoria vertical, tendrá que atravesar más volumen de agua para alcanzar una profundidad determinada. Por simple trigonometría, podemos ver que en el caso de un solo fotón, la transformación de “ $L$ ” a “ $z$ ” será a través de la división por el coseno del ángulo en el cual dicho fotón se desvía de la vertical. Análogamente, en el caso de un haz de luz

(paquete de fotones), la transformación de  $L$  a  $z$  se da a través de la división por el coseno promedio de los ángulos que cada fotón describe en su desviación de la vertical. Zaneveld (comunicación personal, R.J. Zaneveld College of Oceanography, OSU) propuso el coseno promedio no varía con la profundidad sino que el campo de luz es lo suficientemente difuso desde las primeras profundidades como para tornarlo prácticamente constante en toda la columna de agua. Este mismo autor ha propuesto un valor de 0.72 para dicho coseno promedio. De esta forma, se puede calcular  $L$  a partir de  $z$  mediante la siguiente expresión:

$$L = z / 0.72 \quad (25)$$

Para  $b_{b(z)}$ , Giles Guzmán y Alvarez Borrego (2000) propusieron:

$$b_{b(z)} = 0.019 \cdot (0.0015 + 0.416 \cdot \text{Chl}_{(z)}^{0.766}) \quad (26)$$

De nuevo se utiliza  $\mu_{d(z)} = 0.72$ , igual que en la expresión  $B1b_4$ , con lo cual quedan resueltos los tres términos de la expresión  $B1b_1$ .

No siempre resulta adecuado utilizar las expresiones (23)-(26) para obtener (22). Debemos de tener en cuenta que las expresiones del Giles Guzmán y Alvarez Borrego (2000) fueron elaboradas para concentraciones de clorofila menores a  $1.5 \text{ mgChl m}^{-3}$  y con valores mayores se provoca una severa sobreestimación de  $K_{d(z)}$ . La siguiente expresión es una versión alterna de  $K_{d(z)}$  que debe utilizarse para los casos en los que la concentración de  $\text{Chl}_{(z)}$  exceda los  $1.5 \text{ mg Chl m}^{-3}$ .

$$Kd(z) = -0.54455 + 0.073282 z - 0.00220033 z^2 + 0.482306 \text{ Chl}_{(z)} - 0.0533926 z \text{ Chl}_{(z)} + 0.00154006 z^2 \text{ Chl}_{(z)} \quad (27)$$

La expresión (27) fue elaborada a partir de una regresión múltiple de datos de Valdéz Holguín (1998). Las características de dicha regresión se resumen en la Tabla IX.

**Tabla IX:** Resultados obtenidos al ajustar los datos de Valdéz Holguín (1998) a una función bidimensional mediante una regresión polinomial de segundo orden.

Parámetro	Coficiente estimado	SE	TStat	Valor de P
1	-0.54455	0.744014	-0.731908	0.504798
$\text{Chl}_{(z)}$	0.482306	0.281708	1.71208	0.162046
1.38889 z	0.052763	0.0496817	1.06202	0.348093
1.38889 z $\text{Chl}_{(z)}$	-0.0384427	0.0192333	-1.99876	0.116281
1.92901 z <sup>2</sup>	-0.00114062	0.000743858	-1.53343	0.199947
1.92901 z <sup>2</sup> $\text{Chl}_{(z)}$	0.000798368	0.000370494	2.15488	0.0974473

$$R^2 = 0.838141 \quad R^2 \text{ ajustada} = 0.635817 \quad \text{Varianza estimada} = 0.0148526$$

Tabla Anova	grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado promedio	Razón F	Valor de P
Modelo	5	0.307639	0.0615278	4.14257	0.0966419
Error	4	0.0594104	0.0148526		
Total	9	0.36705			

Nótese que en la Tabla IX no se trabajó con z sino con 1.3889 z, lo cual equivale a z/0.72 e incluye implícitamente el uso de L. Dependiendo de la concentración de Chl se utilizarán las expresiones (27) ó (22) respectivamente.

### III.2.1 Implementación de la tasa de crecimiento limitada por luz ( $\mu_{luz}$ )

Antes de discutir la tasa de crecimiento limitada por nutrientes se escribirán en lenguaje *Mathematica* las reglas requeridas para la ecuación (19). En primera instancia el término  $\alpha$  requiere ser representado en función de la profundidad. Sin embargo, dicha profundidad es

relativa, variando según la penetración de la luz en la columna de agua. Por esto, conviene escribir a  $\alpha$  como una función de la proporción entre  $E_0(0)$  y  $E_0(z)$ , y no como una función de un valor absoluto en metros de profundidad. Dicha función consta de dos partes y el cambio entre una y otra ocurre cuando  $E_0(0)/E_0(z) = 0.1$ :

$$\alpha[x\_ / ; x \geq 0.1 \ \&\& \ x \leq 1] := 3.26389 \cdot 10^{-7} \quad (\text{MB1})$$

$$\alpha[x\_ / ; x \geq 0 \ \&\& \ x < 0.1] := 2.70062 \cdot 10^{-6} x + 5.63271 \cdot 10^{-8} \quad (\text{MB2})$$

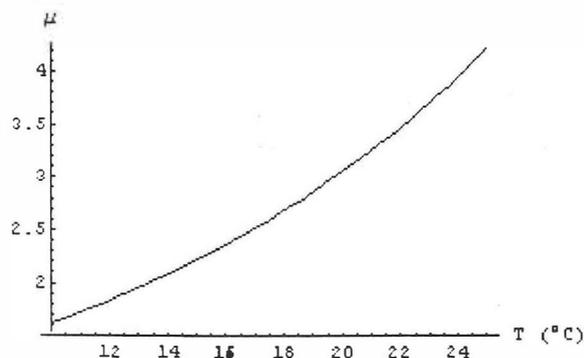
En donde “ $a \cdot 10^b$ ” significa “ $a \times 10^b$ ”. Con estas dos reglas podemos reproducir el comportamiento descrito en la figura 24. La tasa de crecimiento limitada por la temperatura (B1a) se implementa mediante la regla:

$$\mu_{\text{temp}} := (0.851 (1.066)^T) (\Delta t / 24) \quad (\text{MB3})$$

Según la estación del año es necesario activar previamente una y sólo una de las reglas MT1-MT7. Además, la regla MB3 necesita que previamente se haya asignado un valor a  $\Delta t$  (en h). La expresión B1a originalmente arroja valores de tasas de crecimiento *por día*, pero al agregar el término  $\Delta t / 24$  se transforma a una expresión que funciona para un  $\Delta t$  cualquiera (en horas). A continuación se muestra una gráfica representativa del comportamiento de esta regla:

**Figura 25:**

Comportamiento de la tasa de crecimiento limitada por la temperatura (MB3) con un  $\Delta t$  de un día.



Las expresión (25) es escrita de manera directa. La expresión (26) es escrita como función de  $\text{Chl}(z)$  y las expresiones (24) y (23) son escritas como funciones de  $\text{Chl}(z)$  y  $L$ , tal como se muestra a continuación:

$$L := Z / 0.72 \quad (\text{MB4})$$

$$\text{bb}[\text{Chl}z] := 0.019(0.0015 + 0.416 \text{Chl}z^{0.766}) \quad (\text{MB5})$$

$$\begin{aligned} \text{m3}[\text{Chl}z\_ , L\_ ] := & 0.28 - 0.18319 \text{Chl}z - 0.00709 L + 0.0000418 \text{Chl}z L + 0.16604 \\ & \text{Chl}z^2 + 0.0000992 L^2 + 0.00019 \text{Chl}z^2 L - 0.0000029 \text{Chl}z^2 - 0.0464 \\ & \text{Chl}z^3 - 0.0000004 L^3 \quad (\text{MB6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{aT}[\text{Chl}z\_ , L\_ ] := & 0.0221 + 0.0466 \text{Chl}z + (0.1378 - 0.0141 \text{Chl}z) \text{Exp}[-\text{m3} L] \\ & \quad (\text{MB7}) \end{aligned}$$

Las expresiones (22) y (27) forman ambas una misma función de la concentración de clorofila y la profundidad:

$$\text{Kd}[\text{Chl}z\_ / ; \text{Chl}z \leq 1.5, Z\_ ] := (\text{aT}[\text{Chl}z, Z/0.72] + \text{bb}[\text{Chl}z]) / 0.72 \quad (\text{MB8})$$

$$\begin{aligned} \text{Kd}[\text{Chl}z\_ / ; \text{Chl}z > 1.5, Z\_ ] := & -0.54455 + 0.073282 Z - 0.00220033 Z^2 + \\ & 0.482306 \text{Chl}z - 0.0533926 Z \text{Chl}z + 0.00154006 Z^2 \text{Chl}z \quad (\text{MB9}) \end{aligned}$$

Por su parte, la implementación de (21) conviene realizarla de manera tal que de una vez genere todo el perfil de luz en la columna de agua, en lugar de una función que tenga que ser llamada para cada profundidad. Esto se logra con el siguiente algoritmo:

$$\text{If}[\text{PerfilChl}[[1]] > 6.75, \quad (\text{Algoritmo 2})$$

$$\text{Ez} = \{0\},$$

```

Ez={Eo Exp[-Kd[PerfilChl[[1]]],Z→0.5)}

];

For[Z=1.5; z=2,z ≤ Length[PerfilChl], Z++; z++,

If[Last[Ez]>Eocomp,

AppendTo[Ez,Last[Ez]*Exp[-Kd[PerfilChl[[z]],Z]],

Ez=Join[Ez,Table[0,{,Z,Length[PerfilChl]}]];

Break[];

1

]; Z=.;

```

Algunos detalles de notación: `AppendTo[a,b]` actualiza el valor del vector `a` agregando el elemento `b` al final del mismo, `Join[a,b]` concatena los vectores `a` y `b` y `Table[f[x],{x,xmin,xmax}]` crea una lista (vector) cuyos elementos son dados por `f[x]`, con `x` variando desde `xmin` a `xmax` (en nuestro caso `f[x]` es 0, por lo que no es necesario nombrar a `x`). Para poder aplicar el algoritmo 2 es necesario calcular previamente el perfil de clorofila (contenido en el vector `PerfilChl`).

El resultado del algoritmo 2 es un vector `Ez`, el cual contiene el perfil de luz. El primer renglón del algoritmo 2 inicializa al vector `Ez` con su primer elemento. Dicho valor es calculado para la profundidad de 0.5 m. El primer metro de la columna de agua se refiere a lo que sucede dentro del intervalo entre la profundidad 0 m y la profundidad de 1m. Por lo

que el valor más representativo es la profundidad de 0.5 m. El segundo renglón del algoritmo 2 inicia un ciclo que va desde el segundo metro (z) hasta la longitud del vector del perfil de clorofila (siendo este previamente calculado para cubrir los primeros 120 m de la columna de agua). Z indica la profundidad representativa para el z-ésimo metro. La construcción de Ez se realiza metro a metro, calculándose siempre a partir de la luz disponible del metro anterior. Cuando el último valor calculado de Ez sea menor que  $E_{o_{comp}}$ , se considera que el resto de los elementos de Ez serán cero sin necesidad de calcularlos. La razón de esto es que  $E_{o_{comp}}$  representa la intensidad de luz debajo de la cual el fitoplancton ya no puede realizar trabajo, más que sus mínimos procesos metabólicos internos que le permiten sobrevivir. Por debajo de  $E_{o_{comp}}$  el fitoplancton no crece ni asimila nutrientes, por lo que para todo fin práctico se puede considerar cualquier irradiancia menor a  $E_{o_{comp}}$  como nula.

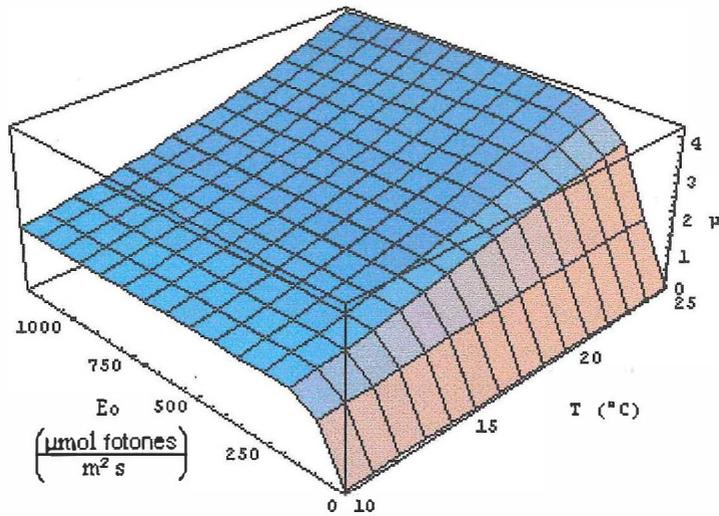
Antes de codificar la expresión B1 es necesario considerar algunos detalles sobre paridad dimensional. La irradiancia escalar en la profundidad z -Ez-, está expresada por segundo, mientras que  $\mu_{temp}$  está expresada en  $(\Delta t/24) d^{-1}$ . Para conseguir una paridad entre uno y otro conviene convertir a la irradiancia a  $(\Delta t/24) d^{-1}$ , lo cual equivale a multiplicar Ez por  $3600 \Delta t$ . De esta forma, la regla derivada de B1 queda codificada como:

$$\mu_{luz} := \text{Tanh}[\Delta t \ 3600 \ \alpha (E_{oz} - E_{o_{comp}}) / \mu_{temp}[z]] \mu_{temp}[z] \quad (\text{MB10})$$

Cada vez que MB9 sea referenciada deben de sustituirse  $E_{oz}$  por la irradiancia escalar en esa profundidad y  $\alpha$  por el valor asociado a esa profundidad de luz (i.e.  $E_z[[Z]]$  y  $\alpha[E_z[[Z]]/E_o]$ ). La Fig. 26 muestra el comportamiento de la regla MB10:

**Figura 26:**

Comportamiento de la tasa de crecimiento limitada por la luz -y la temperatura- (MB10), cuando  $\Delta t$  es un día.



La tasa de crecimiento específica limitada por la luz varía entre 0 y aproximadamente 4 cuando la irradiancia escalar varía entre 0 y 1200  $\mu\text{moles fotones m}^{-2} \text{s}^{-1}$  y la temperatura del agua varía entre 10°C y 25°C. Cuando el agua está fría el metabolismo de las células es lento, por lo que pronto alcanzan un límite de crecimiento sin importar cuanta irradiancia más incida sobre ellas. Cuando el agua es tibia el metabolismo de las células se acelera y pueden presentar tasas de crecimiento mayores y el máximo crecimiento es alcanzado a irradiancias más altas. No ha sido incluido ningún proceso de fotoinhibición en el modelo. La tasa de crecimiento cero se logra cuando la luz disponible es igual a  $E_{o_{\text{comp}}}$ , sin importar la temperatura del agua, arrojando tasas de crecimiento ligeramente negativas con irradiancias menores a la de compensación. Por ello, la regla MB9 nunca es referenciada cuando la irradiancia disponible sea menor a  $E_{o_{\text{comp}}}$ , y en vez de ello se supone una tasa de crecimiento igual a cero.

### III.3 Tasa de crecimiento limitada por nutrientes ( $\mu_{nut}$ )

Bissett *et al.* (1999) propusieron en su modelo al nitrógeno como único nutrimento limitante, debido a que otros nutrientes se consideran menos importantes cuando se trata de aguas oligotróficas y de escalas de tiempo relevantes a los procesos de productividad biológica. En la Bahía de Todos Santos la concentración superficial de  $\text{NO}_3$  es mucho menor que la de  $\text{PO}_4$  (Espinosa Carreón, 1996). Considerando que en la bahía no hay aportes continuos por ríos, podemos considerar que la zona de estudio se comporta como agua de mar abierto y de baja concentración de nutrientes.

Bissett *et al.* (1999) propusieron manejar por separado la tasa de asimilación de nitrógeno (V) y la tasa de crecimiento del fitoplancton, ya que pueden variar una de otra, dependiendo del estado de nutrición de la célula (Q). Esto es particularmente importante para células grandes como las diatomeas, pues tienen una capacidad importante para assimilar nutrientes sin necesariamente destinarlos al crecimiento inmediato. En vez de eso los guardan como un mecanismo para asegurar su nutrición futura. Este comportamiento se conoce como “consumo de lujo”, aunque quizá sea más correcto pensar en un consumo de “ahorro para el futuro”. De cualquier forma, lo importante es considerar al consumo y el crecimiento por separado.

Para el término  $\mu_{nut}$  (el segundo escenario de crecimiento considerado en la expresión 18), Bissett *et al.* (1999) propusieron:

$$\mu_{nut(z)} = \mu_{max} \cdot (1 - K_Q / Q) \quad (28)$$

De manera que los términos que participan en la tasa de crecimiento limitada por nutrientes son: el máximo crecimiento ( $\mu_{\max}$ ), el estado nutritivo del fitoplancton ( $Q$ , expresado como la proporción C:N dentro de la célula), y el estado nutritivo mínimo del fitoplancton ( $K_Q$ ).

Es importante remarcar que en esta expresión no entra en juego ninguna tasa de asimilación de nutrientes, ni tampoco la concentración de nutrientes disponibles en el agua. Eso no tiene injerencia directa sobre el crecimiento. En su lugar, sí se toma en cuenta  $Q$ , que aunque implica un consumo previo, no discrimina entre nitrógeno recién consumido ó nitrógeno que había sido almacenado por algún tiempo. El término  $\mu_{\max}$  representa una tasa teórica de crecimiento máximo inalcanzable, que sucedería sólo si  $Q$  tuviera un valor infinito. La ecuación B2 expresa que el fitoplancton trata de alcanzar ese crecimiento ideal; acercándose más a él cuando su estado de nutrición ( $Q$ ) es muy superior al estado mínimo de nutrición ( $K_Q$ ). Además, cuando el estado de nutrición decae ( $Q$  tiende a  $K_Q$ ), la tasa de crecimiento tiende a cero. Por último, cuando las células sufren desnutrición severa ( $Q < K_Q$ ), se obtendrán tasas de crecimiento negativas; lo cual finalmente representaría muerte por inanición. De manera tal que los valores de  $K_Q$  y de  $\mu_{\max}$  son esenciales para caracterizar la dinámica de población del fitoplancton. Para las diatomeas, Bissett *et al.* (1999) propusieron:

$$K_Q = 1.0 / 14.0 \quad (29)$$

Dentro de la célula debe de haber al menos un átomo de nitrógeno por cada 14 átomos de carbono; o de lo contrario la célula sufre una desnutrición severa que impide cualquier crecimiento. Para calcular  $\mu_{\max(z)}$  se utiliza la ecuación de Bissett *et al.* (1999):

$$\mu_{\max} = \mu_{\text{temp}(z)} [1 - Kq / ((1 + \mu_{\text{temp}(z)}) / 6.625)]^{-1} \quad (30)$$

Una vez solucionados (19) y (28), la expresión (17) toma el mínimo de las dos y la instituye como la tasa de crecimiento realizado.

### Implementación de la tasa de crecimiento limitada por nutrientes

La implementación de (29) es directa:

$$Kq = 1/14; \quad (\text{MB11})$$

Para implementar la expresión (30) se requiere tener en mente que no necesariamente se busca una tasa de crecimiento expresada por día ( $d^{-1}$ ), sino que depende del  $\Delta t$  que se quiera manejar. Sin embargo, no es necesario hacer ningún ajuste explícito, ya que (30) es función de la tasa de crecimiento limitada por la temperatura (MB3), la cual ya está ajustada para  $\Delta t$ :

$$\mu_m := \mu_{\text{temp}} / (1 - (Kq / ((1 + \mu_{\text{temp}}) / 6.625))) \quad (\text{MB12})$$

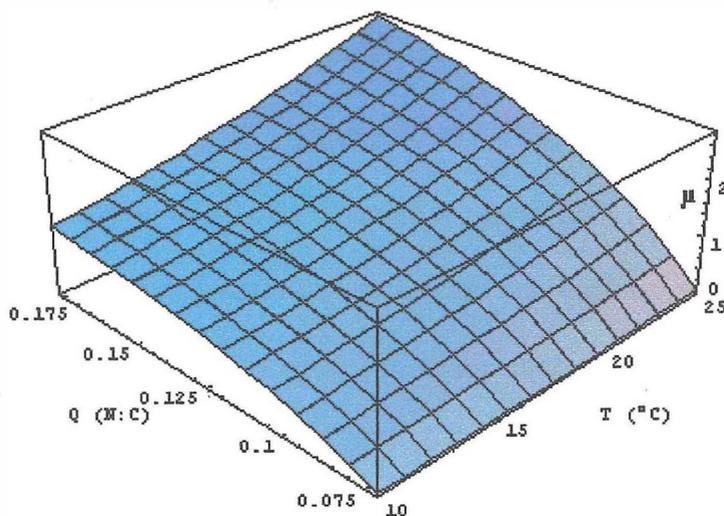
La regla para (28) es la siguiente:

$$\mu_{\text{nut}} := \mu_m (1 - Kq/Q) \quad (\text{MB13})$$

La figura 27 muestra el comportamiento de la regla MB12, cuando sus parámetros Q y temperatura varían desde 1/14 hasta 1/5.5 y desde 10°C hasta 25°C respectivamente:

**Figura 27:**

Comportamiento de la tasa de crecimiento limitada por nutrientes (MB13), cuando  $\Delta t$  es un día.



Como punto de referencia:  $1/14 = 0.0714$ ,  $1/6.625 = 0.1509$  y  $1/5.5 = 0.1818$ . Nótese que cuando  $Q = Kq$  la tasa de crecimiento es cero, independientemente de la temperatura del agua. Al igual que con la tasa de crecimiento limitada por la luz, la temperatura influye en el metabolismo de las células de una manera tal que las tasas más altas de crecimiento sólo pueden lograrse en agua menos fría. Es importante notar que con  $Q$  variando desde  $1/14$  hasta un máximo de  $1/5.5$ , las tasas de crecimiento limitadas por nutrientes no llegan a ser tan altas como las tasas de crecimiento limitadas por la luz. De esta forma, el modelo tiende a dar más peso a la tasa de crecimiento limitada por nutrientes.

### III.4 Consumo de nutrientes

Bissett *et al.* (1999) propusieron que la tasa máxima de consumo de nitrógeno por parte del fitoplancton ( $V'_{\max}$ ,  $d^{-1}$ ) está dada por:

$$V'_{\max} = Q^a \mu_{\text{temp}(z)} \quad (31)$$

En donde influyen el estado de nutrición de la célula ( $Q$ :  $\mu\text{mol N } [\mu\text{mol C}]^{-1}$ ) y el metabolismo (implicado por  $\mu_{\text{temp}}$ :  $\text{d}^{-1}$ ). El exponente “a” es un artificio matemático que temperamenta la curvatura de la función descrita por la relación entre la tasa máxima de consumo de nutrientes y la tasa máxima de crecimiento del fitoplancton. En el esquema de Bissett *et al.* (1999), cada valor de  $Q$  tiene asociado un valor de “a”. La relación entre uno y otro se puede encontrar al despejar “a”:

$$a = \log (V_{\text{max}}^* / \mu_{\text{temp}(z)}) / \log (Q) \quad (32)$$

Esta expresión no puede solucionarse analíticamente debido que “a” no es la única incógnita, pero es posible agregar información adicional para permitir la realización de esta tarea. El estado de nutrición más pobre permisible sucede cuando  $Q_{\text{min}}=1/14$  (Goldmand y McCarthy, 1978; Laws y Bannister, 1980; Sakshug y Andresen, 1989; Flynn *et al.*, 1994). Bajo estas condiciones la razón entre consumo de nutrientes y crecimiento es igual a 2 (Bissett *et al.*, 1999). De esta forma:  $a_1 = \log(2) / \log(1/14)$ . Por otro lado, el estado de nutrición de crecimiento balanceado sucede cuando  $Q_{\text{bal}} = 1/6.625$ , por lo que la razón consumo/crecimiento correspondiente es 1. De esta manera,  $a_2 = \log(1) / \log(1/6.625)$ . Según Bissett *et al.* (1999) estos dos puntos  $-(Q_{\text{min}}, a_1)$  y  $(Q_{\text{bal}}, a_2)$  son suficientes para determinar la relación lineal (en el espacio logarítmico) entre  $a$  y  $Q$ . Esta relación es:

$$a = 3.3032 Q - 0.4986 \quad (33)$$

Con esto se resuelve la ecuación C1, la cual indica el máximo consumo posible de nutrientes. Sin embargo, el consumo real sólo tenderá a este valor dependiendo de la

concentración del nitrógeno en el agua y de la cantidad de nitrógeno que se encuentra dentro de las células del fitoplancton. Bissett *et al.* (1999) describieron esta relación con dos ecuaciones distintas, ya que tratan por separado el consumo de nitrato y el consumo de amonio. Es bien conocido que el fitoplancton tiene una preferencia por el consumo de amonio sobre el consumo de nitrato (Flynn 1991; Smith *et al.*, 1992), por lo cual resultaría una buena idea que el modelo lo reflejara. Desafortunadamente no existen datos confiables sobre concentración de amonio en la bahía; por lo que tomaremos el consumo de todo el nitrógeno como uno solo bajo la etiqueta de “nitratos”. De esta manera se utiliza una versión simplificada de las ecuaciones de Bissett *et al.* (1999) para  $\rho$  (Flujo de  $\text{NO}_3$  del medio hacia el interior de las células):

$$\rho = V'_{\max} \text{PN} [ \text{NO}_3 / ( K_s + \text{NO}_3 ) ] \quad (34)$$

Donde PN es el nitrógeno particulado que se encuentra dentro de las células de fitoplancton;  $\text{NO}_3$  es la concentración de “nitratos” en el ambiente y  $K_s$  es la constante de saturación media para la asimilación de  $\text{NO}_3$ , la cual en el presente trabajo se toma como 0.417.

El consumo de nitratos se calcula de manera independiente al crecimiento de C, y todo el nitrato consumido por el fitoplancton ( $\rho$ ) es agregado a PN (nitrógeno particulado en las células). Durante situaciones de limitación de luz, el consumo de nitrógeno puede exceder la fijación correspondiente de C, resultando en una proporción N:C que exceda la relación de Redfield de 1/6.625. Esto no representa una divergencia con la realidad, ya que en experimentos de cultivo se ha podido observar consumos de N y C tanto por arriba como

por abajo de la razón de Redfield, bajo situaciones de limitación de luz o nutrientes (Laws y Bannister, 1980; Falkowski *et al.*, 1991; Smith *et al.*, 1992). Sin embargo, siguiendo la pauta establecida por Bissett *et al.* (1999) sólo se permitirá que la proporción C:N caiga hasta un mínimo de 5.5, con cualquier nitrógeno excedente liberado nuevamente a la columna de agua. Es importante remarcar que esta proporción se verifica antes de calcular el crecimiento del fitoplancton, por lo que se está comparando la proporción entre el nitrógeno del momento  $t$  con el carbono de  $t-1$ .

#### III.4.1 Implementación del consumo de nutrientes

La implementación de (33) y (31), así como la asignación del valor de  $K_s$ , se logra con las siguientes reglas:

$$a := 3.3032 Q^{-0.4986} \quad (\text{MB14})$$

$$V_m := Q^a \mu_{\text{temp}} \quad (\text{MB15})$$

$$K_s = 0.417; \quad (\text{MB16})$$

De nuevo, es necesario considerar que MB14 no necesariamente está expresada por día, sino por el  $\Delta t$  que se haya escogido, aunque debido a  $\mu_{\text{temp}}$  no es necesario hacer ningún ajuste explícito. La regla para (34) es:

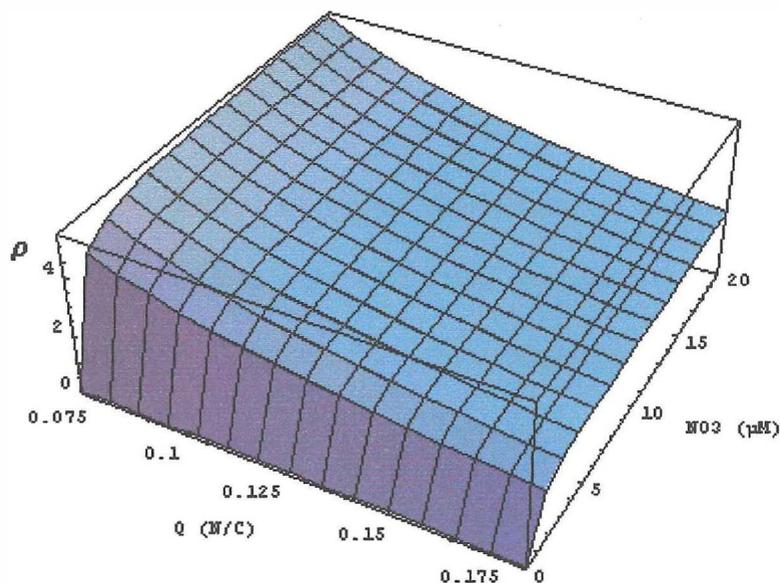
$$\rho := V_m \text{PN} (\text{NO}_3 / (K_s + \text{NO}_3)) \quad (\text{MB17})$$

Lo cual requiere previamente haber calculado el perfil del nitrógeno particulado dentro de las células (contenido en el vector PN) y de haber asignado a  $\text{NO}_3$  la concentración

ambiental promedio de nitratos. La figura 28 muestra el comportamiento de la regla MB17 para el caso específico en el que la temperatura del agua es de 18°C:

**Figura 28:**

El comportamiento del consumo de nutrientes cuando la temperatura del agua es 18°C, el  $\Delta t$  es 1 día y el fitoplancton representa 1  $\mu\text{M}$  de nitrógeno particulado.



Debido a que MB17 tiene a PN como un simple factor multiplicativo se puede extrapolar el comportamiento del consumo de nutrientes para PN's distintos. Como la figura 28 está dada para un PN unitario (en  $\mu\text{moles l}^{-1}$ ), las unidades de  $\rho$  están dadas relativas al valor de PN. De esta forma, para un  $\Delta t$  de un día y una temperatura de 18°C el fitoplancton puede incorporar hasta cuatro veces más su contenido de nitratos cuando su estado de nutrición es pobre y existe una alta concentración de nitratos en el ambiente. Esto representa un caso de condiciones extremas, y además existen otras consideraciones que limitarían dicho consumo tan voraz. De cualquier manera, cuando las células se encuentran en estados de nutrición pobre su apetito por los nutrientes aumenta, disminuyendo cuando su estado de nutrición es más rico; aunque aún en su estado más rico las células todavía presentan cierto consumo. La influencia de  $\text{NO}_3$  en el ambiente sólo tiene peso en concentraciones hasta de

aproximadamente 5  $\mu\text{M}$ . Cualquier oferta superior a ésta no hace nada por inducir un mayor consumo por parte de las células. Por lo mismo, se vislumbra que la voracidad de las células obedece más a sus necesidades internas y no a la oferta de nutrientes en su ambiente.

La utilización de la regla MB17 requiere de ciertas consideraciones, siendo la principal de estas la limitante de 1/5.5 que se le impuso como valor máximo a Q. Debido a esto en ocasiones será necesario reducir el consumo de nitratos a un nivel inferior del que indica la regla MB16. Además de esto, la regla MB17 no debe ser referenciada cuando  $E_o(z) < E_{\text{comp}}$ , ya que es precisamente el trabajo fotosintético el que da a la célula la energía que se requiere para la asimilación de los nutrientes. Por último, para calcular PN a partir de la clorofila se requiere de suponer una relación Chl:C –en nuestro caso 1:40–, de manera que la regla  $\text{PerfilC} := 40 \text{ PerfilChl}$  debe ser previamente establecida.

Tomando todo esto en cuenta, el siguiente algoritmo calcula el consumo ocurrido a través de la columna de agua:

$\text{PerfilPN} = \text{PerfilC} \cdot Q/12$  (Algoritmo 3)

$L_p = \{ \}$ ;

For [Z=1, Z  $\leq$  Length[PerfilChl], Z++,

    If [ $E_z[[Z]] > E_{\text{comp}}$ ,

        Transporte =  $p / .PN \rightarrow \text{PerfilPN}[[Z]]$ ;

```

If[Transporte>0,

  If[Transporte>NO3,Transporte=NO3];

  If[(PerfilC[[Z]]/12)/(PerfilPN[[Z]]+Transporte)<5.5,

    Transporte=((PerfilC[[Z]]/12)/5.5)-PerfilPN[[Z]]

  ]

];

AppendTo[Lp,Transporte]

'

Lp = Join[Lp,Table[0,{,Z,Length[PerfilChl]}]];

Break[];

];

];Z=.;

```

El primer renglón del Algoritmo 3 calcula el perfil de nitratos particulados dentro de las células, mediante la multiplicación del perfil de carbono de las células por Q (la relación N:C dentro de las células). La división entre 12 (el peso molecular del carbono) se utiliza para transformar el carbono de  $\text{mg m}^{-3}$  (ó  $\mu\text{g l}^{-1}$ ) a  $\mu\text{moles l}^{-1}$ . El renglón seis es un filtro que se ha puesto para evitar algunos resultados extremos que la regla MB17 pueda arrojar, ya que bajo condiciones severamente extremas puede reportar un consumo mayor a la cantidad de nutrientes que hay disponible en el medio. Es poco probable que dicha

situación se presente en el transcurso de la simulación ó que de presentarse lograra burlar al filtro del renglón 7, pero aún así es preferible proteger la robustez del programa.

Como se puede observar el Algoritmo 3 hace referencia a la regla MB17 sólo mientras que la luz disponible es mayor a  $E_{O_{comp}}$ , teniendo las subsecuentes profundidades un consumo nulo de nutrientes.

### III.5 Distribución vertical de la clorofila

Algunos de los cálculos realizados requieren de conocer previamente el perfil vertical de la clorofila. Es importante que ésta se modele correctamente, ya que suponer un perfil homogéneo puede llevar a errores significativos en la estimación de la productividad primaria (Platt *et al.*, 1988; Platt *et al.*, 1991). Sin embargo, debido a la bidimensionalidad del modelo de flujos residuales, toda información sobre la estratificación vertical de la clorofila se pierde de una iteración a otra. Por esta razón, es necesario establecer un mecanismo mediante el cual el modelo pueda “reconstruir” el perfil vertical de la clorofila ( $\text{Chl}_{(z)}$ ,  $\text{mg m}^{-3}$ ) a partir de un valor integrado para toda la columna ( $\text{Chl}_{\text{int}}$ ,  $\text{mg m}^{-2}$ ).

Millán-Nuñez *et al.* (1997) han desarrollado un modelo que predice los perfiles verticales de clorofila para la zona de la Corriente de California. Dicho modelo toma como entrada valores de concentración superficial de clorofila y los relaciona a los parámetros de la distribución gaussiana propuesta por Platt *et al.* (1988), mediante los cuales se puede caracterizar el perfil completo de la distribución vertical de clorofila. La ecuación gaussiana propuesta por Platt *et al.* (1988) es:

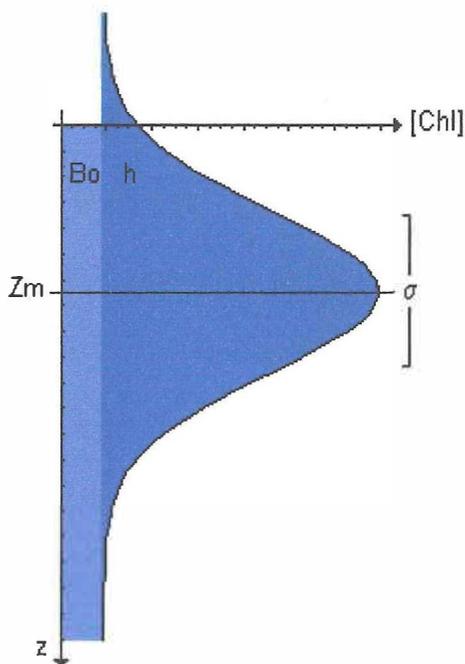
$$\text{Chl}_{(z)} = \text{Bo} + \left[ \frac{h}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right] \cdot \exp[-0.5 (Z-Z_m)^2 \sigma^{-2}] \quad (35)$$

Donde Bo es el valor mínimo “de fondo” de clorofila hacia el cual la ecuación tiende asintóticamente. h es la cantidad total de clorofila que se encuentra por encima de el valor mínimo Bo (y por debajo de la curva),  $\sigma$  controla el ancho de la curva y Zm es la

profundidad en donde se encuentra la máxima concentración de clorofila. A continuación se presenta una gráfica en donde se ilustra cada parámetro:

**Figura 29:**

Perfil de la distribución vertical de la clorofila, según la ecuación (35), en el que se muestran los cuatro parámetros que la caracterizan. Nótese que  $h$  es el área de *toda* la campana, incluyendo la porción que no cae dentro de la columna de agua.



Millán-Núñez *et al.* (1997) dividieron su área de estudio de la Corriente de California en seis regiones, para lograr una mayor correspondencia entre su modelo y las condiciones imperantes en cada localidad. La Bahía de Todos Santos puede considerarse dentro de la region “BCi” de estos autores, la cual comprende prácticamente toda la zona costera frente al estado de Baja California. Para dicha zona, Millán-Núñez *et al.* (1997) propusieron las siguientes ecuaciones para describir la relación entre la clorofila superficial y los parámetros de la curva gaussiana:

$$h = 18.2 + 58.6 \cdot \text{Chl}_s \quad (36)$$

$$\sigma = 17 + 1.78 \cdot \ln(\text{Chl}_s) \quad (37)$$

$$\ln(Z_m) = 3.2 - 0.4 \cdot \ln(\text{Chl}_s) \quad (38)$$

$$\ln(Bo) = -1.25 + 0.6 \cdot \ln(\text{Chl}_s) \quad (39)$$

Estas ecuaciones no son directamente utilizables por el presente trabajo, debido a que el modelo de este estudio no maneja los valores de la clorofila superficial ( $\text{Chl}_s$ ), sino la concentración de clorofila promedio para toda la columna de agua. Esto es un resultado directo de la bidimensionalidad del modelo de flujos residuales que utilizamos. Aún así, podemos calcular la cantidad de clorofila total integrada en la columna de agua ( $\text{Chl}_{\text{int}}$ ,  $\text{mg m}^{-2}$ ) a partir del valor de concentración de clorofila (homogeneizado en toda la columna) y la profundidad de dicha columna (120 m como máximo). A partir de este valor, el objetivo es buscar qué valor de  $\text{Chl}_s$  da un perfil de clorofila mediante la ecuación gaussiana de Platt *et al.* (1988), cuya valor integrado sea igual a  $\text{Chl}_{\text{int}}$ . En otras palabras, lo que se busca es satisfacer la siguiente igualdad:

$$\text{Chl}_{\text{int}} = \int_0^{\text{Profmax}} \left[ Bo + \frac{h}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(Z-Z_m)^2}{\sigma^2}} \right] dZ \quad (40)$$

En donde  $\text{Chl}_{\text{int}}$  es el valor integrado (conocido) de la clorofila en la columna de agua, Profmax es la profundidad del *i,j*-ésimo cuadrante en cuestión, y  $Bo$ ,  $h$ ,  $Z_m$  y  $\sigma$  son todos función de  $\text{Chl}_s$ . No se conoce la solución analítica de la ecuación D5, por lo que se utiliza un algoritmo iterativo que numéricamente la resuelva (con un error de  $\pm \epsilon$ ). La idea central de dicho algoritmo es la siguiente:

$\text{LimInf} = 0; \text{LimSup} = 3 \text{ Chl}_{\text{int}}/\text{Profundidad}; \text{Error} = 10\varepsilon;$

Mientras que  $\text{Error} > \varepsilon$  repite las siguientes instrucciones:

$\text{Chl}_s = (\text{LimInf} + \text{LimSup})/2;$

$\text{Chl}_{\text{int}2} = 0 ;$

Para  $Z = 0$  hasta Profundidad hacer:

$\text{Chl}_{\text{int}2} += \text{Chl}(z);$

$\text{Error} = | \text{Chl}_{\text{int}} - \text{Chl}_{\text{int}2} | ;$

Si  $\text{Chl}_{\text{int}} > \text{Chl}_{\text{int}2}$  entonces  $\text{LimInf} = \text{Chl}_s$

de lo contrario  $\text{LimSup} = \text{Chl}_s;$

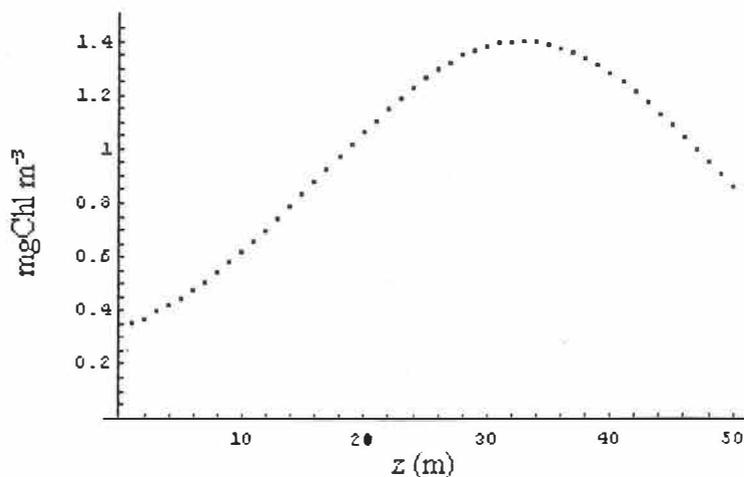
(Algoritmo 4)

Como se mencionó anteriormente, en caso de que la profundidad de la columna sea mayor a 120m, se maneja a ésta cantidad como valor de profundidad. La razón de esto se explica más adelante.

Por ejemplo, para Profundidad = 50m y  $\text{Chl}_{\text{int}} = 50 \text{ mgChl m}^{-2}$ , el algoritmo anterior arrojaría un resultado de  $\text{Chl}_s = 0.50354 \text{ mgChl m}^{-3}$ . Con este valor de  $\text{Chl}_s$  es posible conocer  $B_0$ ,  $h$ ,  $Z_m$  y  $\sigma$  (expresiones 36-39), con los cuales podemos reconstruir el perfil completo (Ecuación 35). Para este ejemplo, dicho perfil tiene la siguiente estructura:

**Figura 30:**

Perfil de clorofila obtenido mediante el algoritmo de reconstrucción, a partir de una concentración de  $50 \text{ mgChl m}^{-2}$  y una columna de agua de 50 m



Nótese en la figura 30 que el valor superficial no coincide con el valor de  $\text{Chl}_s$  calculada por el algoritmo. Esto se debe a que en el trabajo de Millán Nuñez *et al.* (1997) se prefirió hacer las regresiones de los parámetros gaussianos dando prioridad al ajuste de toda la curva en sí y no al ajuste del valor de  $\text{Chl}_s$ . Esta es una de las razones principales por la cual el presente trabajo utiliza la concentración integrada y/o la concentración promedio de la clorofila como variables en el modelo para cuantificar a la biomasa fitoplanctónica y no la concentración superficial de clorofila. De esta forma, en el presente modelo  $\text{Chl}_s$  resulta ser en realidad una variable auxiliar no necesariamente asociada a un concepto real, sino que más bien representa una abstracción que permite aterrizar a los cuatro parámetros gaussianos ( $h$ ,  $\sigma$ ,  $Z_m$  y  $B_0$ ) como funciones de una sola y misma variable a través de las expresiones (36)-(39), originalmente propuestas por Millán Nuñez *et al.* (1997).

Así pues,  $\text{Chl}_s$  no deriva su valor de la  $\text{Chl}_s$  de la iteración anterior ni del valor superficial del perfil de clorofila reconstruido en la iteración anterior, sino que simplemente el algoritmo de reconstrucción del perfil vertical de clorofila busca una

Chl<sub>s</sub> tal que se cumpla la igualdad expresada en (40), lo cual garantiza un perfil vertical de clorofila cuya biomasa integrada representa un mínimo margen de error.

### III.5.1 Implementación del algoritmo de reconstrucción del perfil vertical de clorofila

Existen algunas consideraciones prácticas antes de codificar el algoritmo de reconstrucción del perfil de clorofila. Las ecuaciones propuestas por Millán Nuñez *et al.* (1997) provienen de perfiles de clorofila de CalCoFi que abarcan la zona eufótica, por lo que no sería del todo correcto aplicarlas para columnas de agua demasiado someras ó demasiado profundas. Por lo anterior, la regla que encapsula a este algoritmo será escrita en tres partes. Primero, cuando la columna de agua consta de 20 metros o menos, se supondrá un perfil de clorofila homogéneo:

```
ConstruyePerfilChl[Chlint_, Prof_/;Prof<20.5]:=
  Table[Chlint/Prof,{Prof}]
```

(MB18)

Respecto a la condición `Prof<20.5`, se debe tomar en cuenta la diferencia entre condicionar el *n*-ésimo metro de la columna de agua y el considerar la profundidad *n* metros. Como se había mencionado anteriormente, la profundidad representativa para el *n*-ésimo metro es la profundidad *n*-0.5 metros, por lo que una columna de 21 m necesita tener un profundidad de al menos 20.5 m.

Por otro lado, aun cuando se consideren columnas de agua muy profundas, el fitoplancton tiende a localizarse dentro de la zona eufótica, por lo que más allá de

necesario establecer un límite debajo del cual el modelo de este trabajo no permite la existencia de clorofila. Si se denomina a esta “frontera” –la cual se encuentra más allá del fondo de la zona eufótica– como ProfTransicion, la siguiente regla se encarga de que el fitoplancton se encuentre totalmente por encima de dicha profundidad:

```

ConstruyePerfilChl[Chlint_, Prof_ /; Prof ≥ (ProfTransicion+0.5)] :=
  Join[ConstruyePerfilChl[Chlint, ProfTransicion],
    Table[0, {Prof-ProfTransicion-0.5}]];

```

(MB19)

En todas las demás profundidades se aplica el algoritmo de reconstrucción tal cual con la siguiente regla:

```

ConstruyePerfilChl[Chlint_, Prof_ /; Prof ≥ 20.5 &&
  Prof < (ProfTransicion+0.5)] :=
  Module[{Chls, h, σ, Zm, Bo, Bz, ξ, LimInf, LimSup, Error, Z, Chlintb},

    Chls = .;

    h := 18.2 + 58.6 Chls;

    σ := 17 - 1.78 Log[Chls];

    Zm := Exp[3.2 - 0.4 Log[Chls]];

    Bo := Exp[-1.25 + 0.6 Log[Chls]];

    Bz := Bo - (h / (σ Sqrt[2 Pi])) Exp[-0.5 ((Z-Zm)^2 / σ^2)];

    ξ = 0.1; LimInf = 0; LimSup = 3 Chlint / Prof; Error = 10 ξ;

```

```

While[Error >  $\xi$ ,

  Chls= (LimInf+LimSup)/2;

  For[Z=0.5; Chlintb=0, Z ≤ Prof, Z++, Chlintb+=Bz];Z=.;

  Error=Abs[Chlint-Chlintb];

  If[Chlint > Chlintb, LimInf=Chls, LimSup=Chls];

];

Return[Table[Bz, {Z, 0.5, Prof}]];

];

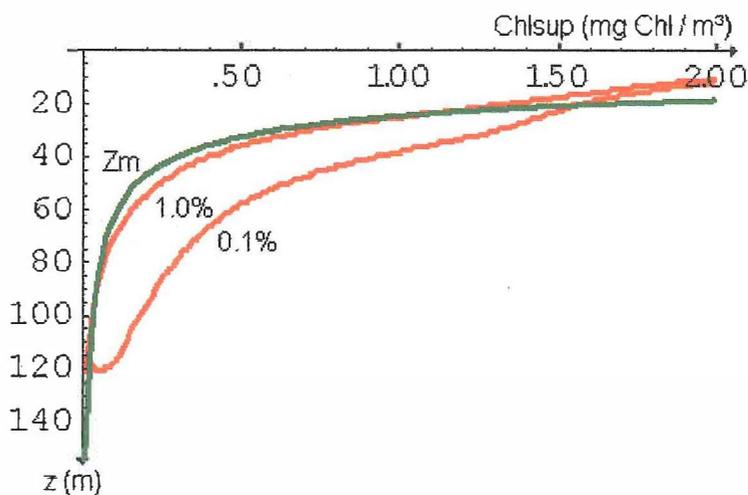
```

(MB20)

La determinación de ProfTransicion se realizó con ayuda de la siguiente gráfica, la cual provee información pertinente sobre la profundidad de la zona eufótica y su relación con la profundidad de máxima concentración de clorofila:

**Figura 31:**

Relación entre la concentración de clorofila superficial y las profundidades de máxima concentración de clorofila, penetración del 1% y penetración del 0.1% de la luz superficial



Para la elaboración de la Fig. 31 se utilizó un despeje de la ecuación (38) para calcular  $Z_m$  y un derivado del Algoritmo 2 para determinar las profundidades hasta donde llegan el 1% y el 0.1% de  $E_{0(0)}$ .

Debido al debate continuo sobre si la “zona eufótica” llega hasta el 1% de la luz o el 0.1% de la luz se decidió graficar ambas y comparar su comportamiento. Como se puede observar en la figura 31, el 1% de luz casi coincide con  $Z_m$ ; por lo que los perfiles de clorofila quedarían extrañamente truncados si consideráramos al 1% como  $ProfTransicion$ . En ese respecto, considerar el 0.1% de la luz sería más adecuado. Sin embargo, al considerar los casos con mayores concentraciones de clorofila, resulta inverosímil el pensar que el fitoplancton se distribuye exclusivamente dentro de la zona delimitada por cualquiera de las dos fronteras. Aún así se elaboraron versiones alternas de las reglas MB19 y MB20 que consideraban a  $ProfTransicion$  como una función de  $Chl_{sup}$ , y la solución no sólo dejaba de ser convergente sino que en muchos casos simplemente no existía.

Tomando en cuenta esto, es más apropiado que  $ProfTransicion$  tome un único valor, correspondiente al valor máximo. Este se presenta para los valores más bajos de  $Chl_{sup}$  (cuando prácticamente es sólo el agua quien atenúa a la luz) y es realmente algo afortunado que éste resulta prácticamente el mismo, independientemente si consideramos el 1% ó el 0.1% de  $E_{0(0)}$  como el límite de la zona eufótica. Para manejar números redondos, estableceremos que:

$$ProfTransicion = 120;$$

(MB21)

La colocación de  $Z_m$  por debajo de la zona eufótica cuando la concentración de clorofila es extremadamente baja no representa error alguno; dicho comportamiento ya ha sido observado en el campo previamente.

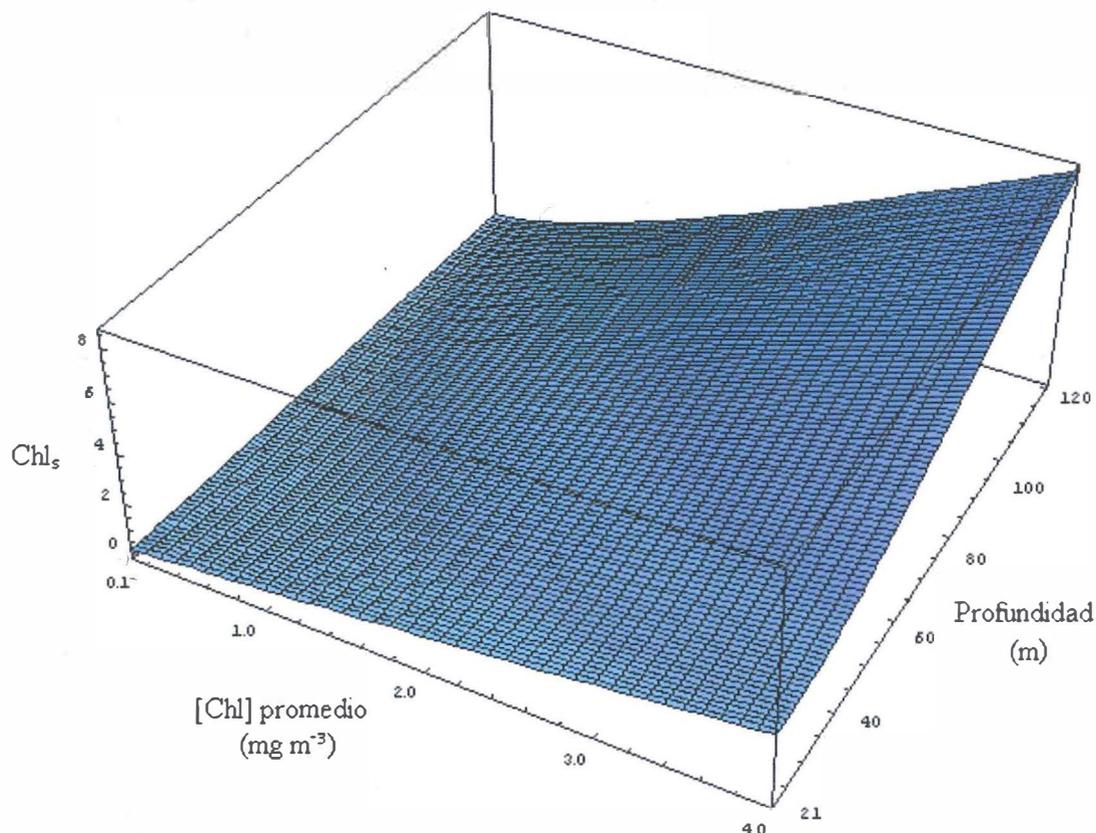
### **III.5.2 Refinamiento en la implementación de la regla MB20**

El algoritmo de reconstrucción del perfil de la clorofila –y su subsiguiente implementación a través de la regla MB20– permite ciertamente la solución de la igualdad (40), pero presenta el inconveniente que requiere de mucho tiempo para ejecutarse. El tiempo típico de ejecución para la regla MB20 es de aproximadamente 0.4 segundos en una computadora Pentium II de 350Mhz, cuando se utiliza un error de  $\xi = 0.1$ .

Este tiempo de ejecución resulta considerable si se toma en cuenta que la regla MB20 se ejecuta 5 veces por día por cada una de las 7424 celdas que representan aguas más profundas que 20.5m. Por lo tanto, simular un día requiere referenciar 37120 veces a la regla MB20, lo cual toma aproximadamente 4 horas. A este tiempo de ejecución aún hay que agregar el tiempo consumido por el resto de las operaciones del modelo. Conviene entonces elaborar una versión de la regla MB20 que funcione con resultados precalculados, para que de esa manera disminuya su tiempo de ejecución.

La figura 32 muestra la relación que existe entre la profundidad de la columna de agua, la concentración promedio de clorofila en la columna de agua y el valor de  $Chl_s$  con el que la regla MB20 construye el perfil de clorofila que regresa como resultado:

**Figura 32:** Comportamiento de la variable  $Chl_s$  como función de la profundidad de la columna de agua y la concentración promedio de  $Chl$  en la misma ( $Chl_{int} / Prof$ )



En realidad la regla MB20 toma como entrada la clorofila integrada en la columna ( $Chl_{int}$ ) y no a la clorofila promedio que se muestra en la figura 32, pero una es fácilmente calculable a partir de la otra y el reparametrizar de esta forma simplifica la construcción de la figura 31. Además, en la elaboración de la figura 31 se utilizó una versión alterna de la regla MB20 en la que se tenía un  $\xi = 0.01$  —un orden de magnitud menor que el normalmente utilizado— para tener una mayor exactitud en la solución de la igualdad (40); aprovechando que el tiempo de ejecución no es una consideración cuando se trata de resultados precalculados. La malla de resultados presentada en la figura 31 representa 4000 puntos calculados a partir de esta versión alterna de MB20 y pueden ser utilizados de diversas maneras. En primera instancia estos resultados se

pueden ser utilizados de diversas maneras. En primera instancia estos resultados se pueden depositar en una tabla de datos a la que se puede hacer referencia cada vez, en la que alternativamente se habría mandado llamar a la regla MB20, redondeando los parámetros de entrada para que éstos coincidan siempre con una de las 4000 combinaciones precalculadas. Un refinamiento a este método sería utilizar los parámetros de entrada tal cual y calcular la  $chl_s$  correspondiente mediante una interpolación de los resultados existentes para aquellos casos en los que los parámetros de entrada no concuerden exactamente con ninguna combinación precalculada. Sin embargo, la mejor solución es crear una expresión matemática que resuma la información contenida en los 4000 puntos calculados. Para esta tarea se intentó ajustar la curva mostrada en la figura 31 a distintas expresiones matemáticas, y el mejor resultado se obtuvo mediante una regresión múltiple –mediante el método de mínimos cuadrados– a un polinomio de quinto y tercer grado para la concentración promedio de la clorofila y para la profundidad de la columna de agua respectivamente, arrojando una  $R^2 = 0.999941$ . Aunque la expresión resulta algo laboriosa al ojo humano, debemos recordar que lo que se busca sobre todo es exactitud. Si el implementar una nueva y “mejorada” versión de MB20 degrada la exactitud de esta, entonces cualquier ahorro en tiempo de ejecución resulta una pobre y mediocre consolación y por ello el afán por una  $R^2$  tan elevada.

Si se nombra a la concentración promedio de clorofila como “x” y a la profundidad de la columna de agua como “y”, la expresión obtenida en esa regresión es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{Chl}_s = & 1.90513 x - 0.0434471 xy + 0.000268121 xy^2 - 2.4532 \cdot 10^{-7} xy^3 - 1.01888 \\
 & x^2 + 0.00118525 x^2y + 0.0005886 x^2y^2 - 3.49397 \cdot 10^{-6} x^2y^3 + 0.373936 x^3 + \\
 & 0.0108017 x^3y - 0.000444761 x^3y^2 + 2.38403 \cdot 10^{-6} x^3y^3 - 0.0653372 x^4 - \\
 & 0.00401867 x^4y + 0.000123365 x^4y^2 - 6.3587 \cdot 10^{-7} x^4y^3 + 0.00444323 x^5 + \\
 & 0.000431849 x^5y - 0.0000118203 x^5y^2 + 5.96774 \cdot 10^{-8} x^5y^3 \quad (41)
 \end{aligned}$$

La regresión múltiple con la que la expresión (41) fue elaborada arroja los siguientes resultados:

**Tabla X:** Resultados obtenidos al ajustar la figura 31 a un polinomio mediante una regresión múltiple no lineal.

Parámetro	Coefficiente estimado	SE	TStat	Valor de P
x	1.90513	0.0719948	26.462	0.
xy	-0.0434472	0.00370879	-11.7147	3.33236x10 <sup>-31</sup>
xy <sup>2</sup>	0.000268121	0.0000569456	4.70837	2.57913x10 <sup>-6</sup>
xy <sup>3</sup>	-2.4532x10 <sup>-7</sup>	2.67296x10 <sup>-7</sup>	-0.917785	0.358785
x <sup>2</sup>	-1.01888	0.147104	-6.92626	4.99171x10 <sup>-12</sup>
x <sup>2</sup> y	0.00118525	0.00757803	0.156406	0.87582
x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>	0.0005886	0.000116355	5.05866	4.40595x10 <sup>-7</sup>
x <sup>2</sup> y <sup>3</sup>	-3.49397x10 <sup>-6</sup>	5.46156x10 <sup>-7</sup>	-6.39737	1.75718x10 <sup>-10</sup>
x <sup>3</sup>	0.373936	0.103755	3.60403	0.000317025
x <sup>3</sup> y	0.0108017	0.00534489	2.02093	0.0433516
x <sup>3</sup> y <sup>2</sup>	-0.000444761	0.0000820668	-5.4195	6.31811x10 <sup>-8</sup>
x <sup>3</sup> y <sup>3</sup>	2.38403x10 <sup>-6</sup>	3.85212x10 <sup>-7</sup>	6.18887	6.65041x10 <sup>-10</sup>
x <sup>4</sup>	-0.0653372	0.030165	-2.16599	0.0303687
x <sup>4</sup> y	-0.00401867	0.00155394	-2.58612	0.00974027
x <sup>4</sup> y <sup>2</sup>	0.000123365	0.0000238595	5.17048	2.44573x10 <sup>-7</sup>
x <sup>4</sup> y <sup>3</sup>	-6.3587x10 <sup>-7</sup>	1.11994x10 <sup>-7</sup>	-5.67772	1.45899x10 <sup>-8</sup>
x <sup>5</sup>	0.00444323	0.00309167	1.43716	0.150748
x <sup>5</sup> y	0.000431849	0.00159266	2.71149	0.00672591
x <sup>5</sup> y <sup>2</sup>	-0.0000118203	2.44541x10 <sup>-6</sup>	-4.83366	1.38924x10 <sup>-6</sup>
x <sup>5</sup> y <sup>3</sup>	5.96774x10 <sup>-8</sup>	1.14785x10 <sup>-8</sup>	5.19906	2.10008x10 <sup>-7</sup>

$$R^2 = 0.999941 \quad R^2 \text{ ajustada} = 0.999941 \quad \text{Varianza estimada} = 0.000491265$$

	DF	Suma de cuadrados	Cuadrado promedio	Razón F	Valor de P
<b>Modelo</b>	20	34318.3	1715.92	$3.49285 \times 10^6$	$8.7156599505 \times 10^{-8691}$
<b>Error</b>	4121	2.0245	0.000491265		
<b>U Total</b>	4141	34320.4			

Con la expresión (41) se puede describir la regla MB20, de tal manera que utilice la expresión (41) siempre que sea posible y el algoritmo de la versión anterior cuando no. Entonces pues, la nueva versión de la regla MB20 es:

```

ConstruyePerfilChl[Chl_, Prof_ /; Prof ≥ 20.5 && Prof <
  (ProfTransicion+0.5)] := Module[{Chls, h, σ, Zm, Bz, ξ,
  LimInf, LimSup, Error, Z, Chlintb, x},

  Chls = .;

  h := 18.2 + 58.6 Chls;

  σ := 17 + 1.78 Log[Chls];

  Zm := Exp[3.2 - 0.4 Log[Chls]];

  Bo := Exp[-1.25 + 0.6 Log[Chls]];

  Bz := Bo + (h / (σ Sqrt[2 Pi])) Exp[-0.5 ((Z - Zm)^2 / σ^2)];

  If[Chls ≤ 4.0, Chls = 1.90513 Chl - 1.0188 Chl^2 + 0.373936 Chl^3
    - 0.0653372 Chl^4 + 0.00444323 Chl^5 - 0.0434472 Chl Prof
    + 0.00119525 Chl^2 Prof + 0.0108017 Chl^3 Prof - 0.00401867
    Chl^4 Prof - 0.000431849 Chl^5 Prof + 0.000268121 Chl Prof^2
    + 0.0005986 Chl^2 Prof^2 - 0.000444761 Chl^3 Prof^2

```

```

+0.000123365 Ch1^4 Prof^2 -0.0000118203 Ch1^5 Prof^2 -
2.4532*^-7 Ch1 Prof^3 -3.49397*^-6 Ch1^2 Prof^3 +2.38403*^-
6 Ch1^3 Prof^3 -6.3587*^-7 Ch1^4 Prof^3 + 5.96774*^-8 Ch1^5
Prof^3;

```

```

If[Chls<0.001, Chls=0.001];

```

```

ξ=0.01; LimInf=0; LimSup=3Ch1; Error=10ξ;

```

```

While(Error>ξ,

```

```

    Chls=(LimInf+LimSup)/2;

```

```

    For[Z=0.5; Chlintb=0, Z≤Prof, Z++, Chlintb+=Bz];Z=.;

```

```

    Error=Abs[Ch1*Prof-Chlintb];

```

```

    If[Ch1*Prof > Chlintb,

```

```

        LimInf=Chls, LimSup=Chls

```

```

    ];

```

```

];

```

```

Return[Table[Bz, {Z, 0.5, Prof}]]

```

```

];

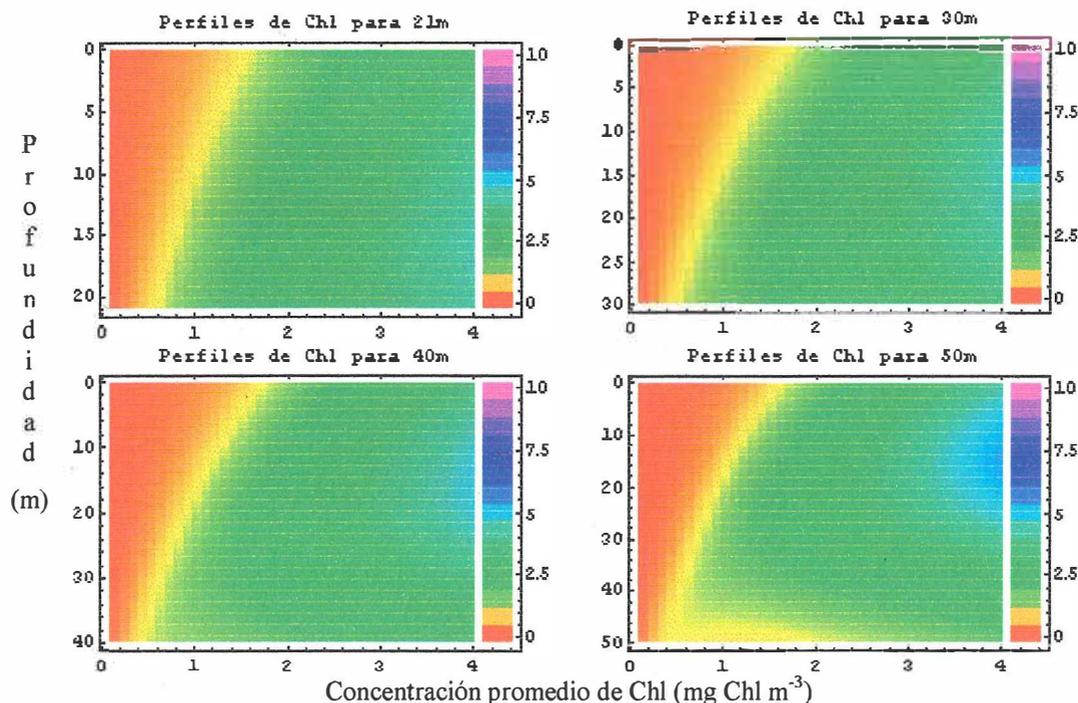
```

(MB20')

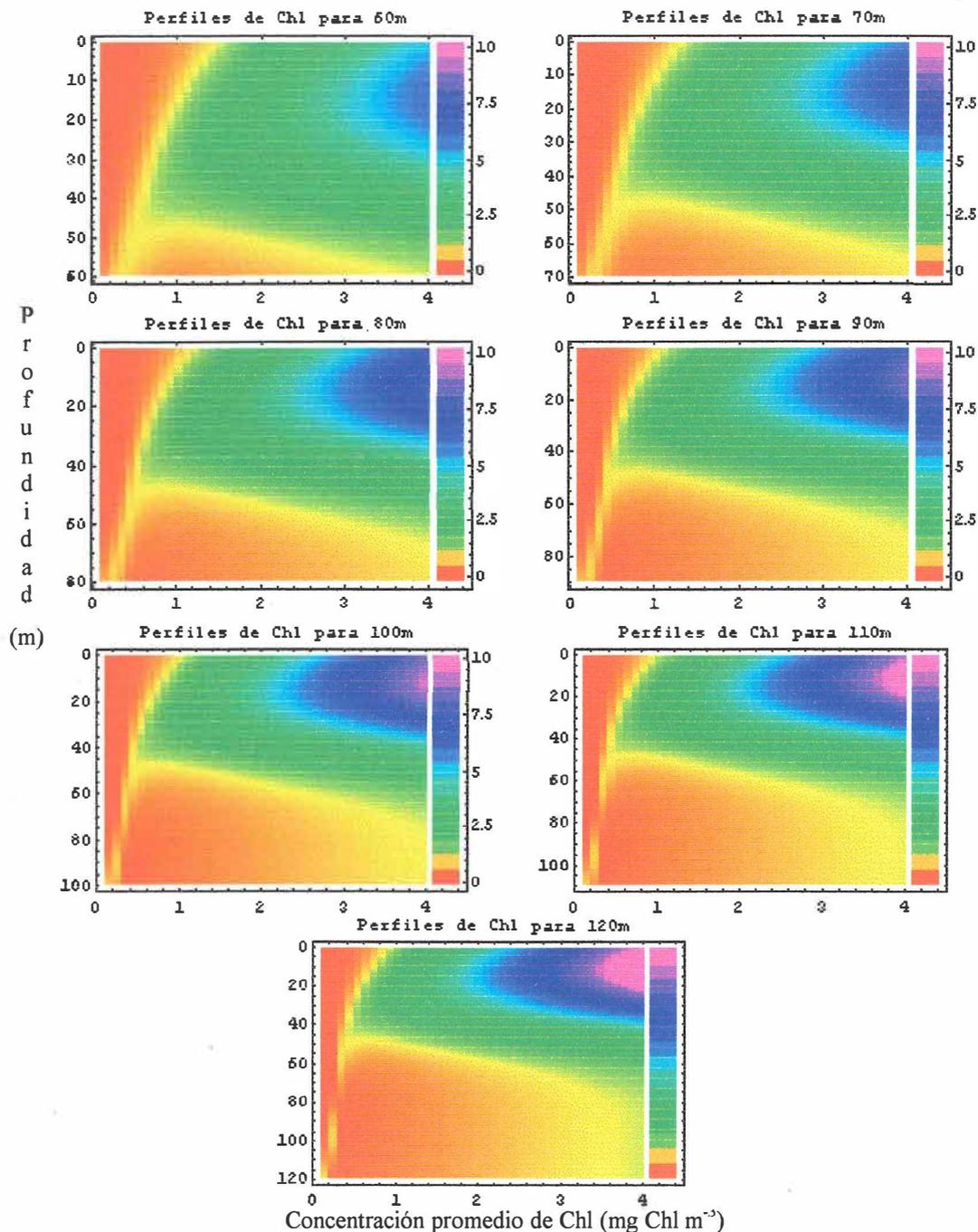
Nótese el renglón 19 en el que se establece a 0.001 como límite inferior al valor de Chls. Existen dos motivos por ello: a) en la naturaleza es factible encontrar concentraciones de Chl infinitesimalmente pequeñas, pero una concentración nula resulta inverosímil; b) evita errores de redondeo que bajo situaciones muy especiales provocan que la expresión (41) regrese valores infinitesimales negativos.

### III.5.3 Comportamiento del algoritmo de reconstrucción (Reglas MB18-MB20')

Las reglas MB18-MB20' son centrales en el desarrollo del modelo por lo que conviene observar detenidamente su comportamiento para verificar su correcto funcionamiento antes de ser aplicadas.



**Figuras 33 a-d:** Perfiles de clorofila para una columna de agua de 21, 30, 40 y 50m respectivamente. El eje x indica la [Chl] promedio (en  $\text{mg Chl m}^{-3}$ ) para la cual dicha columna fue calculada, mientras que el eje y es la profundidad (m). La escala de color muestra las concentraciones de clorofila ( $\text{mg Chl m}^{-3}$ ) del perfil vertical de clorofila reconstruido.



**Figuras 33 e-k:** Perfiles de clorofila para una columna de agua de 60, 70, 80, 90, 100, 110 y 120m respectivamente. El eje x indica la  $[\text{Chl}]$  promedio (en  $\text{mg Chl m}^{-3}$ ) para la cual dicha columna fue calculada, mientras que el eje y es la profundidad (m). La escala de color muestra las concentraciones de clorofila ( $\text{mg Chl m}^{-3}$ ) del perfil vertical de clorofila reconstruido.

Nótese que la figura 33a es para una columna de agua de 21m, ya que la regla MB17 arroja un perfil homogéneo para cualquier profundidad menor o igual a 20.5m. Como

punto de referencia, una concentración promedio de  $4 \text{ mg Chl m}^{-3}$  representa 84, 120, 160, 200, 240, 280, 320, 360, 400, 440 y 480  $\text{mg Chl m}^{-2}$  para columnas de agua de 21, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110 y 120 m de profundidad respectivamente; por lo que representan casos verdaderamente extremos.

Es de mayor interés el área de las gráficas que corresponden a las concentraciones promedio de 0 a  $2 \text{ mg Chl m}^{-3}$ , ya que no se espera que ocurran valores superiores a estos en el transcurso de la simulación. El resto de la gráfica se incluye como punto de referencia sobre como la regla MB20' reacciona bajo situaciones extremas. La figura 32a muestra el motivo de la regla MB17. Cuando la columna de agua es muy somera los perfiles arrojados por MB20' tienden hacia la homogeneidad, por lo que es posible ahorrar tiempo de cómputo al simplemente suponerlos como homogéneos sin necesidad de calcularlos. Aun así, para 21m todavía alcanzan a mostrar una ligera estructura que tiende a colocar el máximo de clorofila cercano al fondo. En el intervalo de bajas concentraciones de clorofila esto muestra un comportamiento totalmente adecuado, ya que el fitoplancton presente en una columna de agua tan somera no muestra limitaciones por luz, por lo que no hay motivo para esperar que el máximo de clorofila se encuentre cercano a la superficie. Por otro lado, sí existen dos motivos por los cuales podemos esperar un máximo de clorofila cercano al fondo. Primero, las diatomeas intentarán colocarse en donde hay más nutrientes, lo cual en la naturaleza generalmente significa cercano al fondo; segundo, las diatomeas cercanas al fondo tenderán a tener más clorofila/célula debido a la fotoaclimatación. En contraste, el comportamiento en el intervalo de concentraciones extremas de clorofila, la regla

MB20' fracasa en tomar en cuenta la pobre penetración de luz que esto representaría, lo cual alejaría al máximo de clorofila del fondo. Aunque incorrecto, esto no es muy preocupante ya que esto sucede sólo bajo casos extremos que no se esperan en la simulación. Este problema se presenta más en columnas de agua someras, lo cual remarca la necesidad de la regla MB17.

Las figuras 33b y 33c (30 y 40m) muestran un comportamiento muy similar a la figura 33a, aunque se puede apreciar un mejor comportamiento para los casos de extrema concentración de clorofila, en los que es posible observar que el máximo de clorofila se coloca a los 20m de profundidad y no cercano al fondo. Aún así, dentro del intervalo "normal" de operación, las primeras tres figuras muestran un comportamiento que no es muy diferente.

En la figura 33d (50 m) se puede observar un mejor comportamiento, en donde no solamente el máximo de clorofila se despega rápido del fondo, sino que el grueso de la clorofila también lo hace a partir de concentraciones de  $\sim 0.75 \text{ mg Chl m}^{-3}$ .

Las figuras 33e-33k muestran progresivamente los mejores comportamientos, reproduciendo de una manera muy satisfactoria el comportamiento esperado. Esto era de suponerse, pues los perfiles de clorofila que Millán Núñez *et al.* utilizaron para realizar sus regresiones corresponden más a estas profundidades, por lo que MB20' se desempeña mejor cuando tiene "espacio para maniobrar". Las bajas concentraciones de clorofila tienden a ser resultado de las bajas concentraciones de nutrientes, por lo que las células tienden a colocarse a mayores profundidades en busca de los nutrientes.

Las altas concentraciones de clorofila tienden a ser resultado de una alta concentración (presente o inmediatamente previa) de nutrientes, por lo que las células tienden a colocarse cerca de la superficie en busca de mejores condiciones de luz. Bajo condiciones de extremadamente alta concentración de clorofila, sólo aquellas diatomeas que se encuentren cerca de la superficie recibirán luz, ya que éstas le hacen sombra a las que se encuentran más profundas.

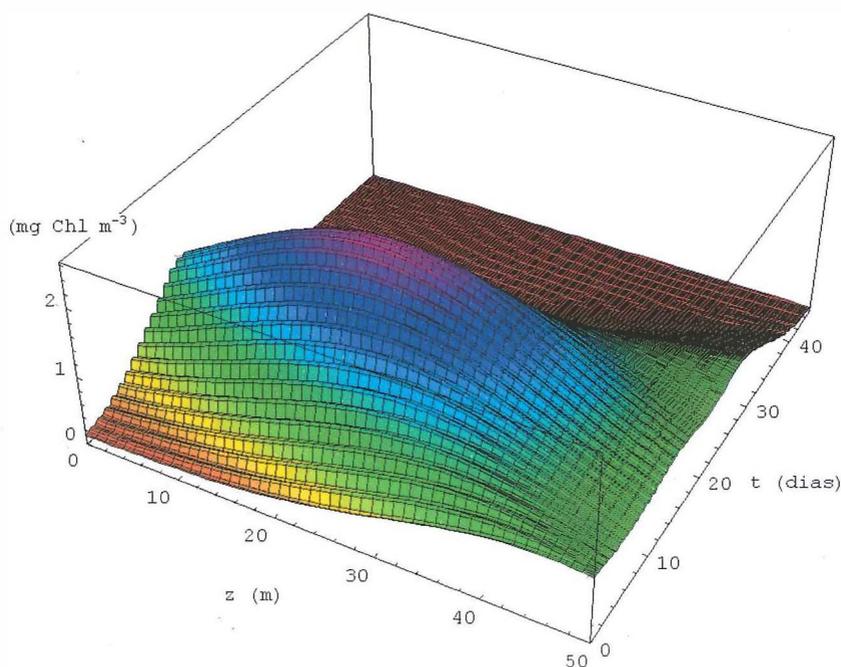
## IV Simulación de una columna de agua

Antes de integrar el modelo físico de circulación residual con el modelo biológico de crecimiento del fitoplancton se probó su desempeño de este último en una columna de agua sin movimiento. Para tal efecto se simuló la evolución en el tiempo empezando con una baja población de diatomeas y una alta concentración de nutrientes, de lo que se esperó como respuesta un típico florecimiento algal. Se intentaron tres escenarios, correspondiendo a columnas de agua de 50, 15 y 150 m de profundidad.

### IV.1 Ejemplo de una columna de 50 m.

El estado inicial para el primer escenario fue:  $[\text{NO}_3] = 2.0 \mu\text{M}$ , Temperatura =  $20^\circ\text{C}$ ,  $Q = 0.1$ ,  $\text{Chl} = 0.5 \text{ mg Chl m}^{-3}$ , proporción C:Chl = 40,  $E_{0\text{comp}} = 10 \mu\text{moles de fotones m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ , Excreción =  $0.1 (\Delta t/24)$ , y Pastoreo =  $0.1 (\Delta t/24)$ . Después de 45 días simulados, los resultados son los siguientes (Figs. 34-43):

**Figura 34:**  
Evolución temporal  
del perfil de Chl.  
Ejemplo para  
una columna de 50m

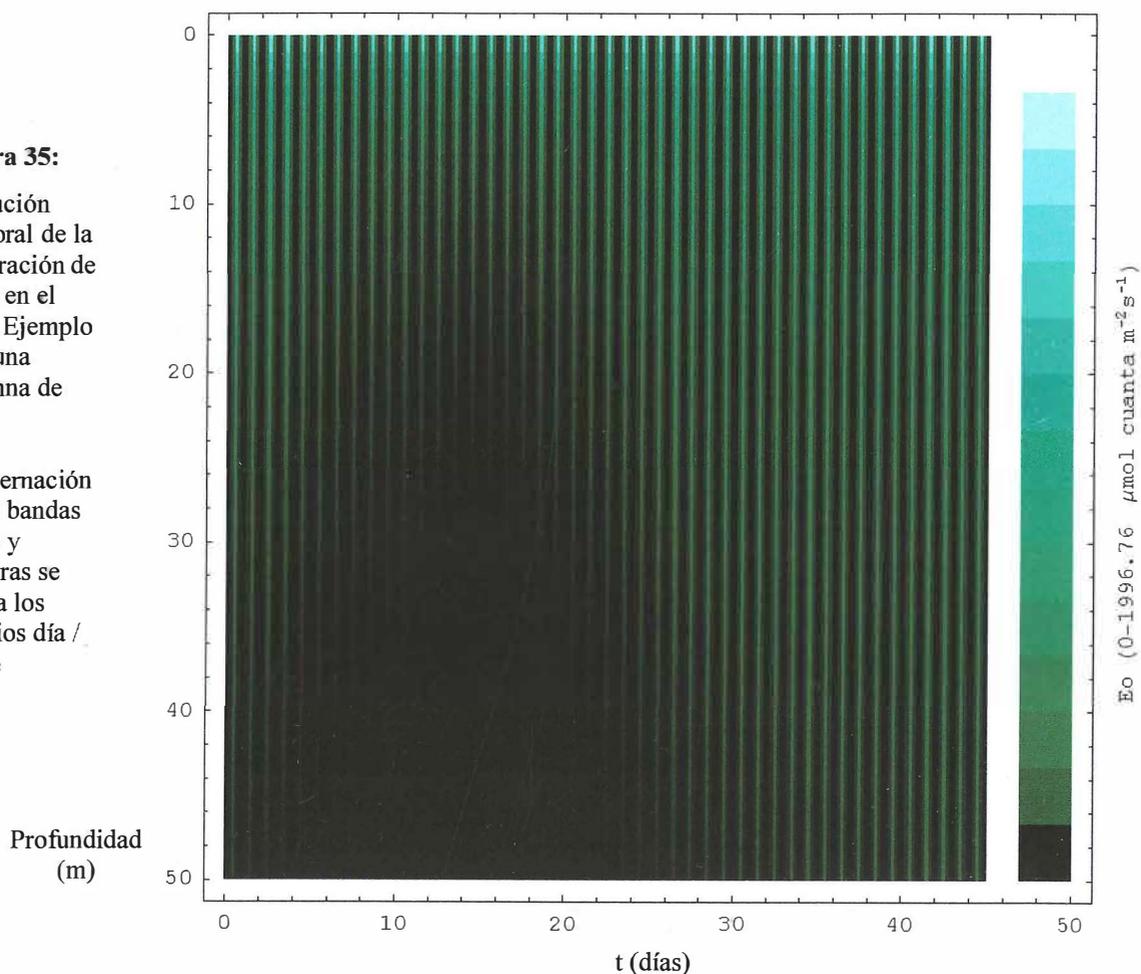


En el tiempo inicial la clorofila se encontraba distribuida principalmente en la zona profunda de la columna de agua (Fig. 33). A medida que el tiempo avanzó, la cantidad de clorofila en la columna de agua aumentó, así como también se tornó más somera la profundidad del máximo de clorofila (alcanzando una concentración superior a  $2.5 \text{ mgChl m}^{-3}$ ). Posteriormente disminuyó la cantidad de clorofila en la columna, al igual que la profundidad del máximo de clorofila. Finalmente –alrededor del día 40– la población algal prácticamente desapareció y el perfil se tornó inapreciable. Las diferentes variables que rigen y dictan este comportamiento se muestran en las figuras 35-43.

**Figura 35:**

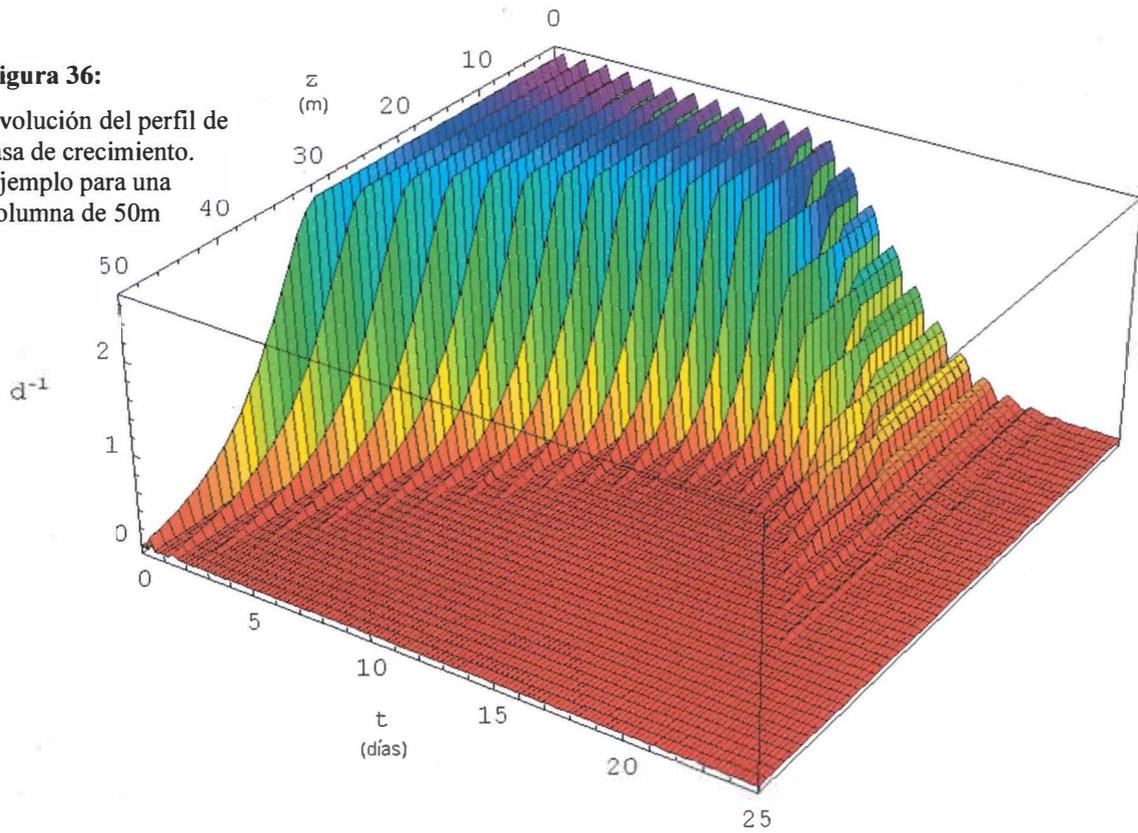
Evolución temporal de la penetración de la luz en el agua. Ejemplo para una columna de 50m .

La alternación de las bandas claras y oscuras se debe a los cambios día / noche

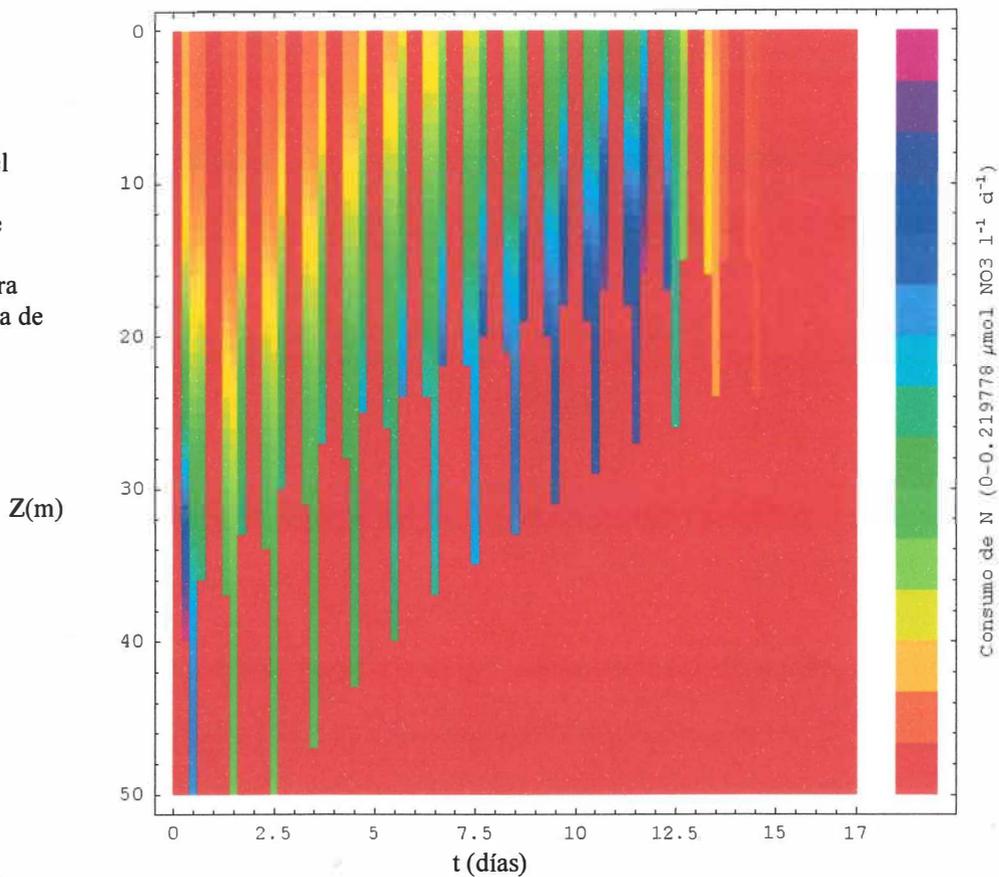


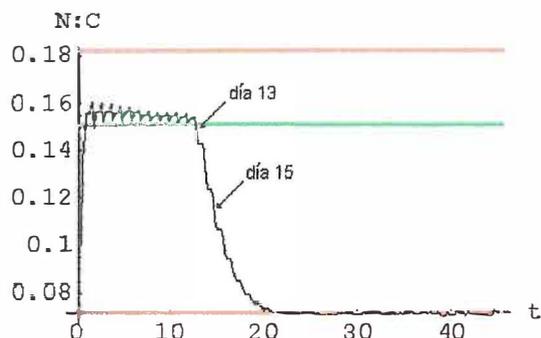
**Figura 36:**

Evolución del perfil de  
tasa de crecimiento.  
Ejemplo para una  
columna de 50m

**Figura 37:**

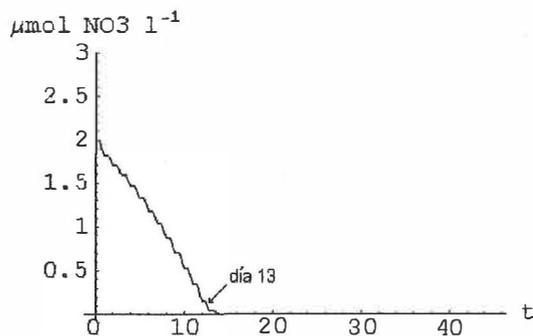
Evolución  
temporal del perfil de  
consumo de  
nutrientes.  
Ejemplo para  
una columna de  
50m.





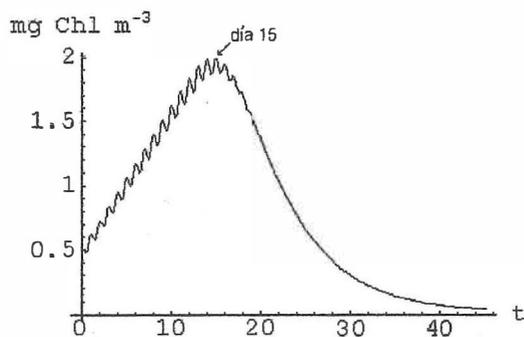
**Figura 38:**

Evolución temporal de el estado de nutrición de la población de fitoplancton. Ejemplo para una columna de 50m.  $Q_{\min} = 0.071$ ,  $Q_{\max} = 0.18$  y  $Q_{\text{equi}} = 0.15$ .



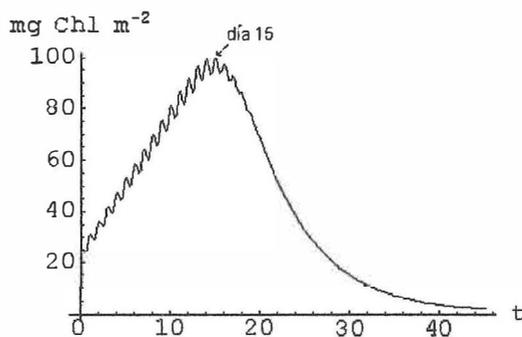
**Figura 39:**

Evolución temporal de la concentración (promedio) de nitratos en la columna de agua. Ejemplo para una columna de 50m.



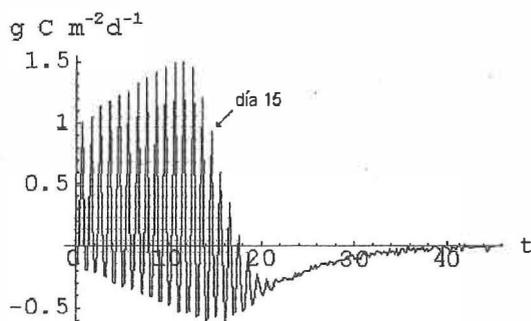
**Figura 40:**

Evolución temporal de la concentración promedio de clorofila. Ejemplo para una columna de 50 m.



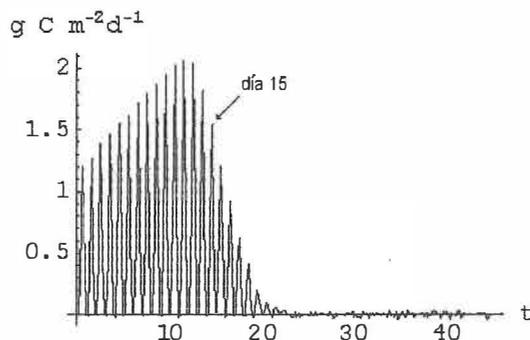
**Figura 41:**

evolución temporal de la concentración integrada de Chl. Ejemplo para una columna de 50 m.



**Figura 42:**

Evolución temporal de la productividad primaria neta para toda la columna de agua. Ejemplo para una columna de 50m.



**Figura 43:**

Evolución temporal de la productividad primaria bruta para toda la columna de agua, ejemplo para una columna de 50m.

No existe una gráfica de la evolución temporal del perfil de  $\text{NO}_3$  debido a que éste se supone homogéneo con respecto a la profundidad. Aunque la figura 37 muestra que el consumo de  $\text{NO}_3$  no fue homogéneo en la columna de agua, el perfil de  $\text{NO}_3$  se homogeneiza después de cada iteración (i.e. cada 4.8 horas). Esto en el espíritu de mantener una correspondencia al modelo final, en el cual las corrientes residuales bidimensionales homogeneizan toda la columna de agua en cada iteración. Es importante recordar que el modelo no maneja reciclamiento de los nutrientes, por lo que cada vez que se hable de producción primaria en realidad nos estamos refiriendo a producción primaria *nueva*.

Nótese como la figura 35 muestra variaciones día/noche que se presentan 45 veces en el transcurso de la simulación. Debido a que la luz es central en el modelo, el efecto de estas variaciones diurnas es evidente en todos los demás resultados (Figs. 34-43); especialmente en las figuras 36 y 37 en las que las tasas de crecimiento y de consumo de  $\text{NO}_3$  caen completamente hasta cero durante los horarios nocturnos. Además, se puede observar que las tasas de crecimiento (Fig. 36) son más altas durante el mediodía con respecto a las mañanas y tardes, y que el consumo de nutrientes (Fig. 37) se realiza hasta zonas más profundas durante el mediodía comparado con las mañanas y tardes. Todo esto es muy significativo, ya que modela en forma correcta al trabajo fotosintético como la única fuente de energía para las diatomeas.

Otro aspecto importante es la disminución en la penetración de la luz a medida que la simulación avanza (Fig. 35), alcanzando su mínima penetración alrededor del día 17, para

después aumentar gradualmente hasta llegar a una situación en la que la luz llega cerca del fondo aproximadamente a partir del día 26. Esto corresponde con la evolución de la población fitoplanctónica mostrada en las Figs. 34, 40 y 41, y modela el comportamiento de aguas Caso I, en el que todas las sustancias que significativamente aportan a la atenuación de la luz en el agua covarían con el fitoplancton.

Entonces pues, se observa en los datos de salida del modelo como el fitoplancton evita ser atrapado en la oscuridad (Figs. 34 y 35); lo cual era el comportamiento esperado según lo observado en las figuras 31 y 32a-k. Este es un comportamiento importante de observar, ya que valida el comportamiento de la regla MB20'. A pesar de que las diatomeas del modelo no toman decisiones en respuesta directa a las distribuciones de luz y nutrientes en la columna de agua, en el modelo se anticipan a éstas distribuciones gracias a – metafóricamente hablando– la experiencia heredada de las diatomeas contenidas en los perfiles de CalCOFI de los cuales provienen las ecuaciones de Millán-Nuñez *et. al* (1997).

El perfil homogéneo de nutrientes no tuvo mucha influencia sobre la distribución vertical de las diatomeas, ya que el máximo de biomasa ignora esto y en su lugar generalmente se coloca en la parte más profunda de la zona eufótica. El ignorar la distribución vertical de los nutrientes en el cálculo de la distribución vertical de la clorofila es intencional, ya que dicha distribución –al ser supuesta homogénea– representa una extrema simplificación de lo que realmente ocurriría en la naturaleza.

Aunque la figura 36 sólo muestra el resultado final de  $\mu$ , es fácil distinguir que en las zonas de “planicie” que se presentan cercanas a la superficie  $\mu_{\text{Nut}} < \mu_{\text{Luz}}$ , y que en todos los demás casos  $\mu_{\text{Nut}} > \mu_{\text{Luz}}$ .

La figura 38 muestra la evolución temporal del estado de nutrición de las células,  $Q$  (descrito como la proporción  $\mu\text{mol N} : \mu\text{mol C}$  dentro de las células). Las líneas roja y verde se han colocado como punto de referencia y equivalen a  $Q_{\text{min}}$  (el valor mínimo permisible debajo del cual la célula muere por inanición),  $Q_{\text{max}}$  (el valor máximo permisible sobre el cual la célula ya no puede almacenar nitrógeno) y  $Q_{\text{equi}}$  (el valor de crecimiento equilibrado, correspondiente al valor de Redfield). El comportamiento de las células debe de mantenerse estrictamente dentro de los límites delineados por  $Q_{\text{min}}$  y  $Q_{\text{max}}$ , ya que cualquier traspaso de estos límites representaría algo inasequible en la realidad. Desde el primer día de la simulación las células incorporan  $\text{NO}_3$  del medio ambiente para mejorar su estado de nutrición, y lo hacen de una manera tan eficiente que desde este día la tasa de crecimiento fue alta (Fig. 36). De hecho, en la figura 37 es posible observar que durante el primer día el consumo de nutrientes es superior al presentado en los días inmediatamente subsecuentes, ya que es precisamente en ese primer día cuando se conjugan tres condiciones que ya no se repiten durante el resto de la corrida del modelo: una alta oferta de nutrientes, una desnutrida –y por lo tanto ávida– población de fitoplancton y una penetración de luz hasta el fondo de la columna que permite la asimilación de los nutrientes por diatomeas en toda la columna (por lo menos al mediodía).

Es importante hacer notar que la figura 37 muestra la  $Q$  *después* de haber realizado el crecimiento del fitoplancton y por ello –aunque exista abundancia de nutrientes en el medio– los valores mostrados nunca llegan a  $Q_{\max}$ . El modelo internamente considera tres valores de  $Q$  en cada iteración. El estado inicial de  $Q$  se utiliza para determinar la voracidad con la que las células consumen nutrientes durante las 4.8 horas del  $\Delta t$ . Una vez hecho el consumo, se calcula una nueva  $Q$  ya que la asimilación de nutrientes ha modificado el estado de nutrición de las células y esta nueva  $Q$  es la que se utiliza para calcular  $\mu_{\text{nut}}$ . Después de esto se calcula una tercera  $Q$  que refleja el nuevo estado de nutrición de las células producto de la fijación de C realizada (crecimiento). Esta tercera  $Q$  sirve como valor inicial en la iteración siguiente y es la que se muestra en la Fig. 37. De haber mostrado los valores de  $Q$  después del consumo pero antes del crecimiento habríamos visto –sobre todo los primeros días al mediodía– valores de  $Q$  mucho más cercanos a  $Q_{\max}$ .

Durante las mañanas el fitoplancton que se encontró en las zonas profundas presentó una  $\mu_{\text{nut}} > \mu_{\text{Luz}}$  por lo que la  $Q$  promedio es enriquecida (incluso por encima de  $Q_{\text{equi}}$ ). Durante el mediodía resultó dominante  $\mu_{\text{Luz}}$  debido a la mayor penetración de la luz, por lo que la  $Q$  promedio bajó tendiendo hacia  $Q_{\text{equi}}$ . Durante las tardes  $\mu_{\text{nut}}$  impera de nuevo y la  $Q$  promedio se elevó una vez más. Al no haber crecimiento durante la noche no se presentaron cambios en  $Q$  durante estas horas; razón por la que se ven esas pequeñas planicies entre los ciclos diurnos. Es importante notar que el primer “pico” que observamos

en la gráfica no correspondió al primer día sino al segundo, ya que el primer día se consumió totalmente en subir a  $Q$  desde 0.100 hasta  $\sim 0.155$ .

El día 12 de la simulación fue cuando se alcanzó la máxima productividad primaria –tanto bruta como neta– (Figs. 42 y 43); ya que fue el último día en el que los nutrientes fueron suficientes para saciar completamente el consumo del fitoplancton (Figs. 37 y 39).

En el día 13 aún existían nutrientes en el agua (Fig. 39), pero estos no fueron suficientes para satisfacer las necesidades de consumo del fitoplancton (Fig. 37), por lo que las diatomeas comenzaron a consumir sus reservas (Fig. 38). A partir de este día la producción primaria decayó (Figs. 42 y 43) ya que la tasa promedio de crecimiento disminuyó (Fig. 36).

En el día 14 las diatomeas fueron forzadas a consumir sus reservas –para compensar la deficiente oferta de nutrientes del medio– de tal manera que ya no pudieron mantener un valor de  $Q$  por encima de  $Q_{\text{equi}}$  (Fig. 38).

El día 15 prácticamente ya no quedaban nutrientes disueltos en el agua (Figs 39 y 37) y a partir de este día ya no hay fuente de nutrientes más que las reservas que cada célula contiene (Fig. 38). La biomasa del fitoplancton alcanzó su máximo en este día (Figs. 40 y 41), impulsado por la inercia de crecimiento que conservaba de días anteriores.

El día 16 representó el principio del fin para la población algal;  $Q$  cae por debajo de 0.1 –su valor inicial para este ejemplo (Fig. 38)– y las tasas de crecimiento ya no lograron compensar las pérdidas por excreción y pastoreo, por lo que la biomasa de fitoplancton

comenzó a decaer (Figs. 40 y 41). Para el día 18 las cosas se tornaron muy adversas para las diatomeas;  $Q$  se acerca cada vez más a  $Q_{\min}$  (Fig. 38) y sólo a mediodía la productividad primaria neta logró ser positiva (Fig. 42).

El día 19 el descenso de la población se tornó pronunciado (Figs. 40 y 41) y ni siquiera bajo la intensa luz de mediodía se logró una productividad primaria neta positiva (Fig. 42).

El día 22 es el último día en el que las células hicieron un esfuerzo por mantener su población; ya que la tasa de crecimiento estaba totalmente limitada por nutrientes (Fig. 36) y es el último día en el que la productividad primaria bruta mantuvo un nivel apreciable a mediodía (Fig. 43).

Alrededor del día 25 la población de fitoplancton fue tan pobre que la luz penetró hasta tocar el fondo de la columna de agua (Fig. 35).

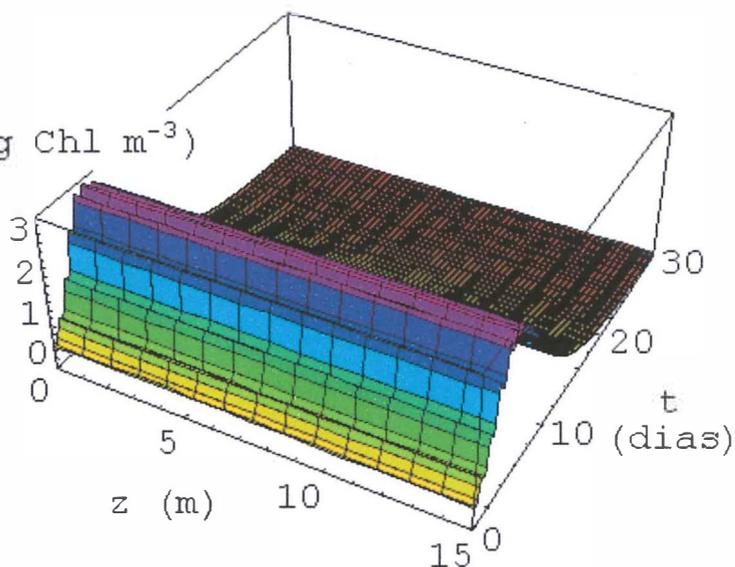
Para el día 40 la población es casi inexistente, y es sólo la falta de un pastoreo más agresivo lo que le permitió a la población sostenerse durante tanto tiempo. Por otro lado, simulaciones con tasas de excreción y pastoreo más altas no permitieron que la población de fitoplancton floreciera; lo cual indica que una tasa fija de pastoreo y excreción no es la mejor solución para el modelo. Una aplicación de un modelo dinámico de población predador/presa habría sin duda arrojado mejores resultados.

## IV.2 Ejemplo de una columna de 15 m.

Para el escenario de 15m las condiciones iniciales fueron iguales al ejemplo de 50m. La simulación se corrió durante 30 días y los resultados se muestran en las figuras 44-53:

**Figura 44:**

Evolución temporal del perfil (mg Chl  $m^{-3}$ ) de Chl. Ejemplo para una columna de 15m.

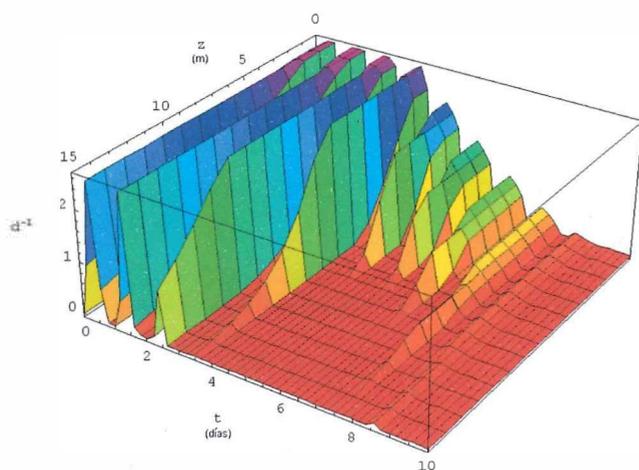
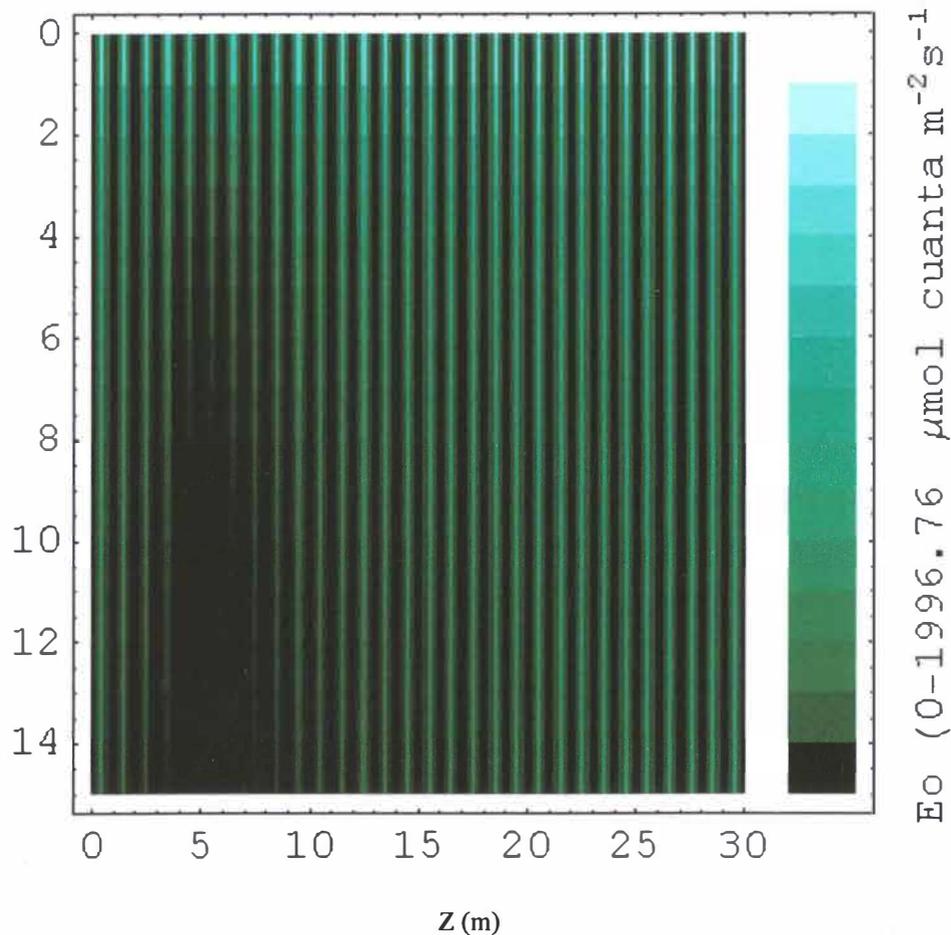


La figura 44 muestra como el modelo supone ahora un perfil homogéneo de clorofila en la columna de agua. Además de esto es posible ver dos notables diferencias con respecto al escenario anterior. La población fitoplanctónica alcanzó un valor máximo mucho más elevado y le toma menos tiempo en completar todo el ciclo crecimiento-desaparición. Debido a que la columna de agua es muy somera, el modelo no presentó ninguna migración del máximo de clorofila dentro de la columna de agua en busca de mejores condiciones de luz, sino que simplemente toda la población fitoplanctónica aumentó o disminuyó homogéneamente en toda la columna. Aún así, esto no significa que el desempeño de todo el fitoplancton será el mismo independientemente de su posición en la columna, ya que la distribución heterogénea de la luz en la columna (Fig. 45) influyó diferencialmente en todos los aspectos de la producción primaria (Figs. 46-53):

**Figura 45:**

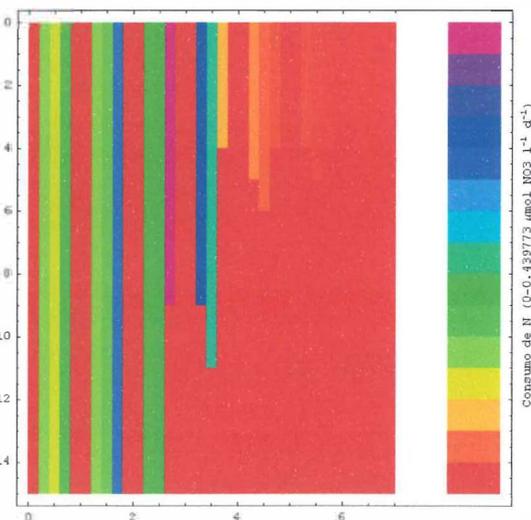
Evolución temporal de la penetración de la luz en el agua. Ejemplo para una columna de 15m.

A pesar de la homogeneidad en la distribución de la clorofila y los nutrientes, la estructura vertical de la luz en la columna de agua hará que la biología muestre una estructura heterogénea en su desempeño con respecto a la profundidad.

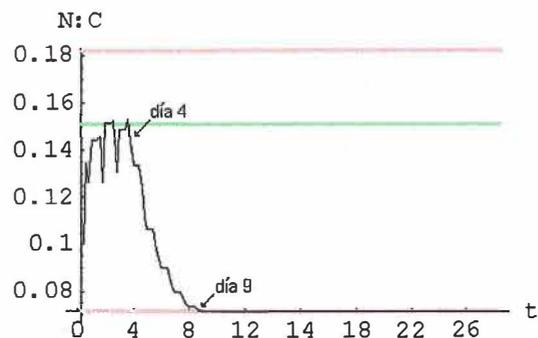
**Figura 46:**

Evolución temporal del perfil de la tasa de Crecimiento. Ejemplo para una columna de 15m

Z (m)

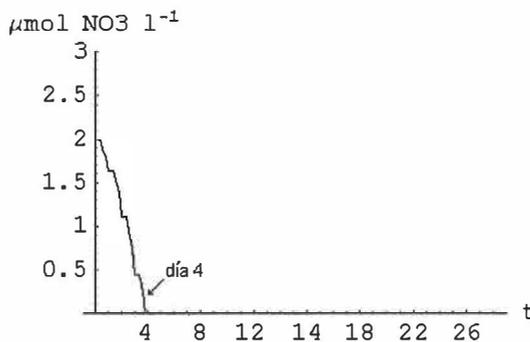
**Figura 47:**

Evolución temporal del perfil de consumo de nutrientes. Ejemplo para una columna de 15m.



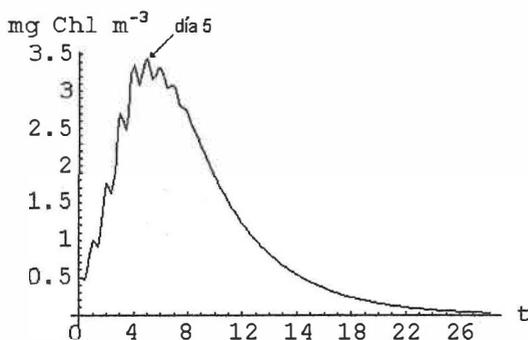
**Figura 48:**

Evolución temporal del estado de nutrición de la población fitoplanctónica. Ejemplo para una columna de 15 m.  $Q_{\min} = 0.071$ ,  $Q_{\max} = 0.18$  y  $Q_{\text{equi}} = 0.15$



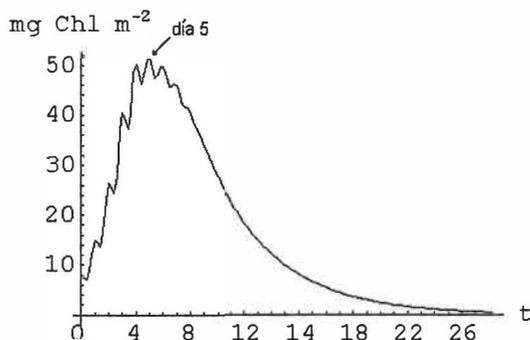
**Figura 49:**

Evolución temporal de la concentración (promedio) de nutrientes en la columna de agua. Ejemplo para una columna de 15 m.



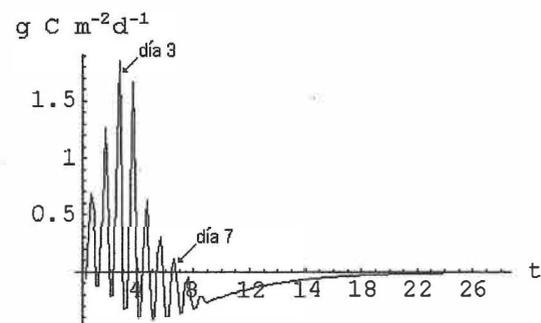
**Figura 50:**

Evolución temporal de la concentración promedio de Chl. Ejemplo para una columna de 15 m



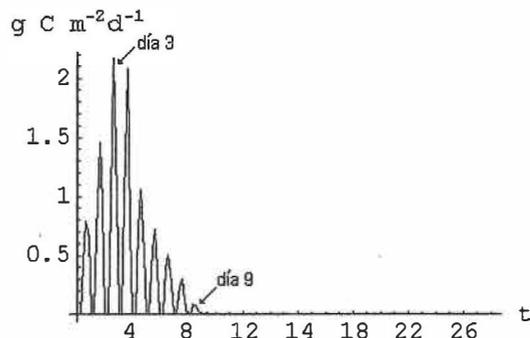
**Figura 51:**

Evolución temporal de la concentración integrada de Chl. Ejemplo para una columna de 15 m



**Figura 52:**

Evolución temporal de la productividad primaria neta para toda la columna de agua. Ejemplo para una columna de 15 m



**Figura 53:**

Evolución temporal de la productividad primaria bruta para toda la columna de agua. Ejemplo para una columna de 15 m

La figura 46 muestra sólo los primeros 12 días de la simulación, debido a que la tasa de crecimiento es cero en todos los demás días restantes. Por razones análogas, la figura 47 muestra sólo los primeros 7 días de la simulación.

El primer día el modelo inició a las 0:00 horas, por lo que debido a la obscuridad –al igual que en los otros dos escenarios– se inició con una pequeña caída en la población fitoplanctónica (Figs. 50 y 51). Inmediatamente al amanecer las algas comenzaron a asimilar los nutrientes en el medio, lo cual realizaron sin ninguna estructura vertical (Fig. 47). Esta homogeneidad en el consumo es resultado de que la luz en toda la columna nunca decayó por debajo de  $E_{O_{comp}}$  (Fig. 45). Nótese que en el primer día el consumo de nutrientes de la mañana fue superior al consumo de nutrientes del mediodía (Fig. 47). Esto se debió a que en este escenario la luz matinal no es limitante, por lo que las células sueltan su ávido “apetito”, el cual resulta de su estado de nutrición (Q) muy bajo (Fig. 48). A mediodía la biomasa ha crecido, pero como Q tiene un nivel más elevado el consumo total de la población resulta ser menor que el consumo matinal. Después, el crecimiento intenso realizado en el mediodía del primer día (Figs. 46, 52 y 53) hizo que las células tuvieran una degradación en su estado de nutrición (Fig. 48). Esto hizo que retornara su avidez y junto a la mayor biomasa alcanzada (Figs. 50 y 51) hizo que el consumo vespertino fuera el mayor del día (Fig. 47). De hecho este patrón de mayor consumo de nutrientes durante la tarde se repite también el día 2 (Fig. 47). Este comportamiento difiere del presentado en los otros dos escenarios y es principalmente debido a que en el presente ejemplo la columna es tan somera que durante estos primeros días la luz penetró hasta el fondo con una intensidad superior a  $E_{O_{comp}}$ .

En el tercer día se presentó un cambio importante durante la tarde debido a la elevada biomasa (Figs. 47 y 48). La luz ya no penetró hasta el fondo con una intensidad superior a  $E_{0,comp}$  (Fig. 45), lo cual provocó que el consumo de nutrientes presentara por primera vez un estructura vertical (Fig. 47). Se revirtió el patrón de comportamiento “normal” que imperó en los otros dos escenarios. Es durante este tercer día que las diatomeas se sobrepusieron a su deficiente estado de nutrición con el que comenzaron, y –gracias a su ávido consumo– han logrado elevarlo hasta  $Q_{equi}$  (Fig. 48).  $Q$  no ha subido por encima de  $Q_{equi}$  debido a que la situación  $\mu_{luz} > \mu_{nut}$  ha sido muy dominante; por lo que prácticamente todos los nutrientes asimilados son destinados a un crecimiento balanceado. Ciertamente, fue durante este tercer día que se alcanzó la más alta producción primaria (Figs. 52 y 53).

Durante la tarde del cuarto día los nutrientes prácticamente agotaron (Fig. 49), por lo que el consumo de nutrientes decae notoriamente (Fig. 47). En respuesta a esto  $Q$  no pudo retornar a  $Q_{equi}$  (Fig. 48) y la máxima tasa de crecimiento ya no logró igualar a las máximas alcanzadas con anterioridad (Fig. 46).

El quinto día se presentó un consumo ya muy bajo de nutrientes (Fig. 47) debido a que estos son prácticamente inexistentes en el medio (Fig. 49). Las células comenzaron entonces a depender de sus reservas como principal fuente de nutrición, por lo que  $Q$  se degradó notablemente (Fig. 48). De aquí en adelante las tasas de crecimiento alcanzadas sufren notablemente la limitante de  $\mu_{nut}$  (Fig. 46). Con todo y esto la inercia de crecimiento lograda hasta este momento aún permitió que el quinto día fuera el de mayor biomasa alcanzada (Figs. 50 y 51). Es precisamente debido a esta alta biomasa que la penetración de

la luz es tan baja (Fig. 45) y son prácticamente sólo los primeros 8m de la columna de agua donde hubo crecimiento de la biomasa (Fig. 46).

De aquí en adelante el escenario se comporta básicamente con el mismo patrón que en el anterior. Debido a las presiones de excreción y pastoreo comienza el decline en la población algal (Figs. 50 y 51).

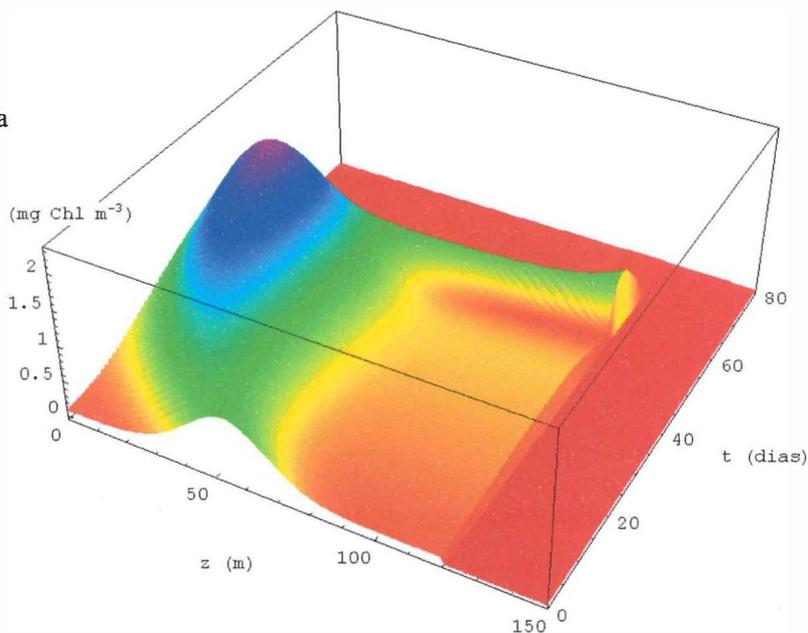
En el sexto día el estado de nutrición cayó por debajo de su estado inicial (Fig. 48). En el séptimo la producción neta por última vez llegó a ser positiva a mediodía (Fig. 52) y el día nueve resultó ser el último en que la población intenta sobrevivir. El día nueve es el último en que  $Q$  se encontró por encima de  $Q_{\min}$  (Fig. 48) y en que la producción bruta es apreciable (Fig. 53). De hecho la biomasa fue tan baja (Fig. 50 y 51) que la luz de nuevo penetró hasta el fondo de la bahía (Fig. 45) con una intensidad superior a  $E_{o_{\text{comp}}}$  (Fig. 46).

Alrededor del día 16 la biomasa decayó por debajo del nivel inicial y fue aproximadamente el día 30 cuando la población del fitoplancton se tornó inapreciable. De nuevo fue la falta de una tasa de pastoreo más agresiva lo que le permitió al fitoplancton sobrevivir tantos días, aunque de cualquier manera el comportamiento general del modelo es aceptable. En cuanto a la suposición de un perfil homogéneo en la distribución de la clorofila, puede ser que algunos de los aspectos mas finos del modelo resulten burdamente limitados, pero el desempeño general del mismo (Figs. 50-53) no es afectado de manera notable.

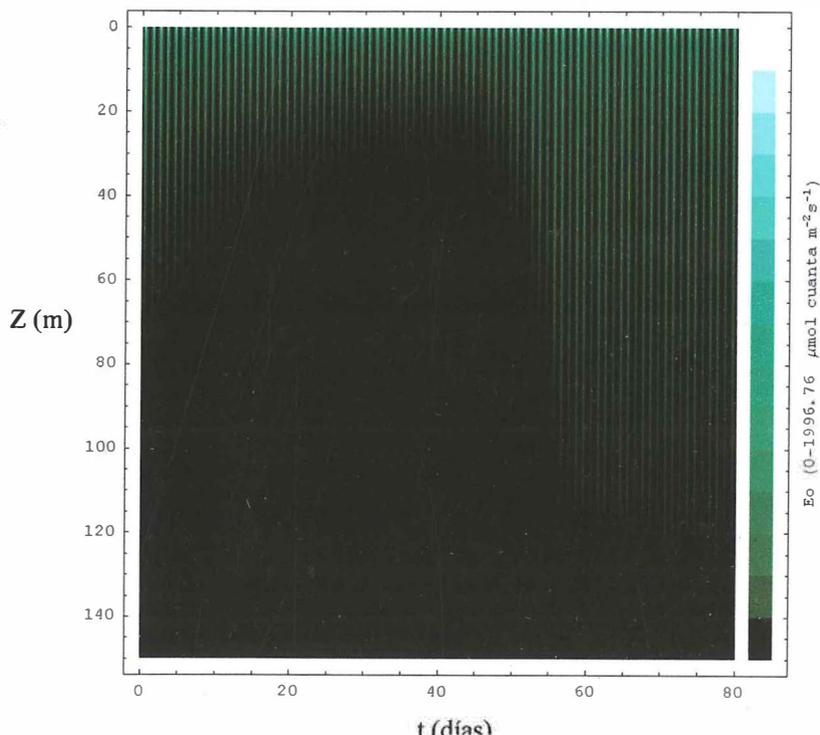
### IV.3 Ejemplo de una columna de 150 m.

Para el escenario de 150m las condiciones iniciales fueron iguales que en los dos escenarios anteriores, excepto por la tasa de pastoreo; la cual fue de 0.05 ( $\Delta t/24$ ). Se corrió la simulación durante 80 días y los resultados se muestran en las gráficas 54-63.

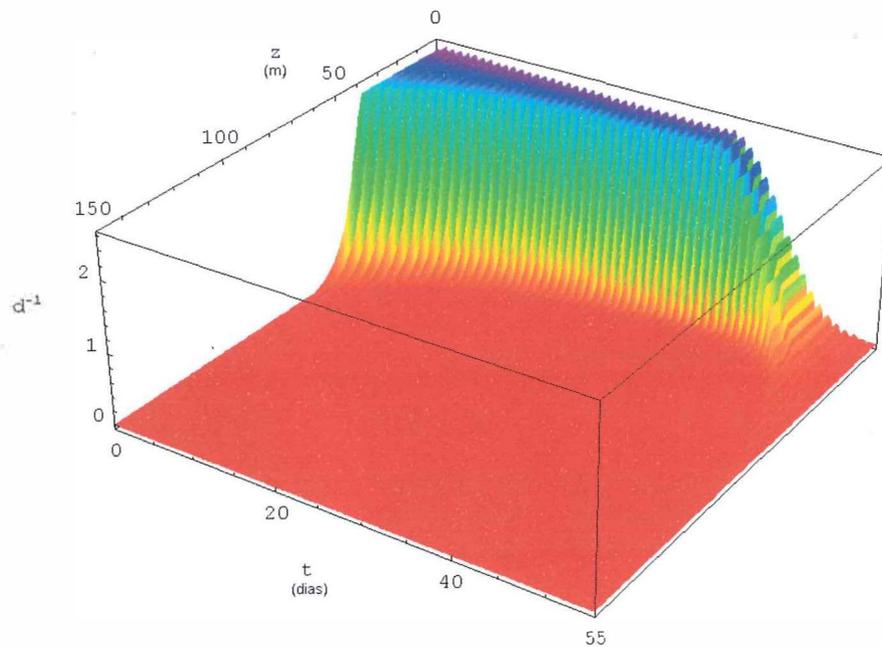
**Figura 54:**  
Evolución temporal del perfil de Chl. Ejemplo para una columna de 150m



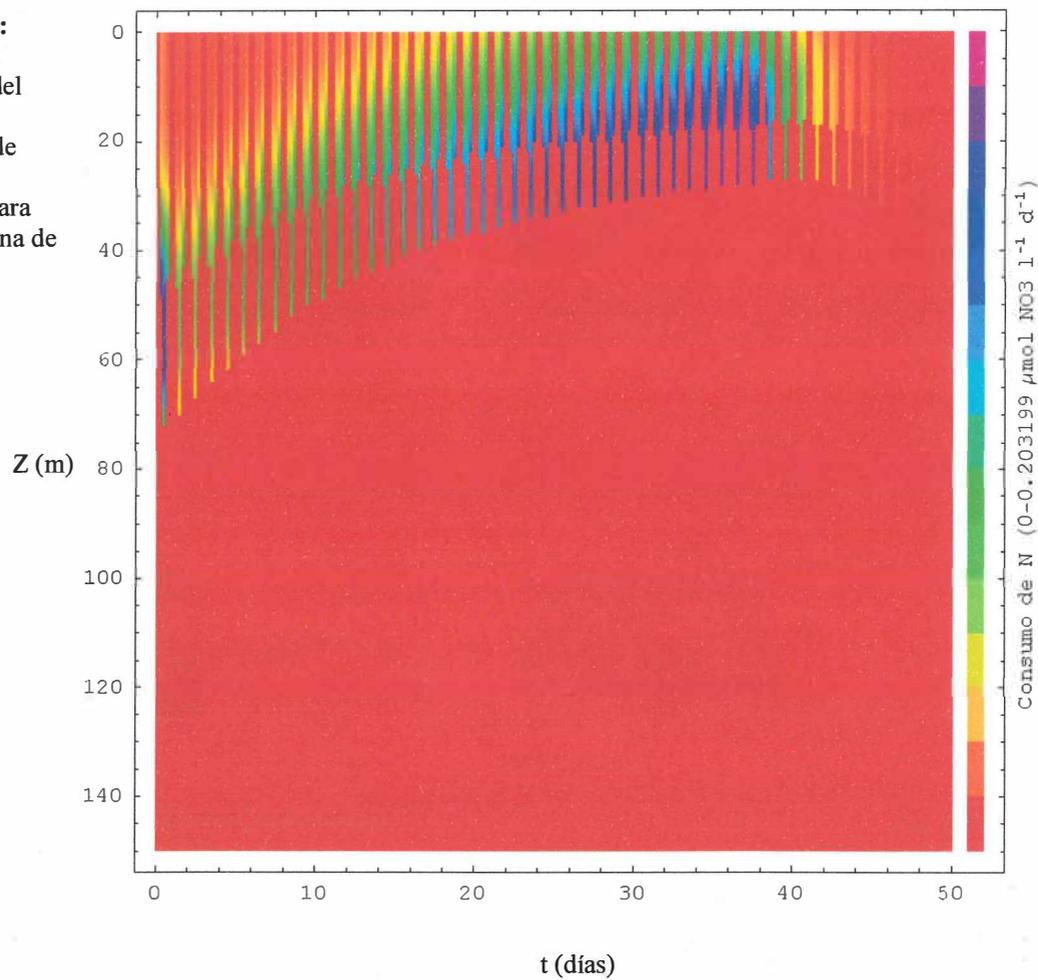
**Figura 55:**  
Evolución temporal de la penetración de la luz en el agua. Ejemplo para una columna de 150 m

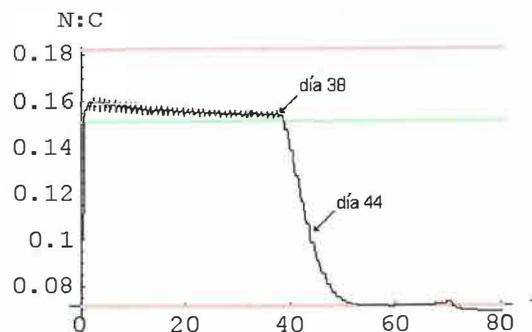


**Figura 56:**  
Evolución del perfil  
de la tasa de  
crecimiento.  
Ejemplo para una  
columna de 150 m



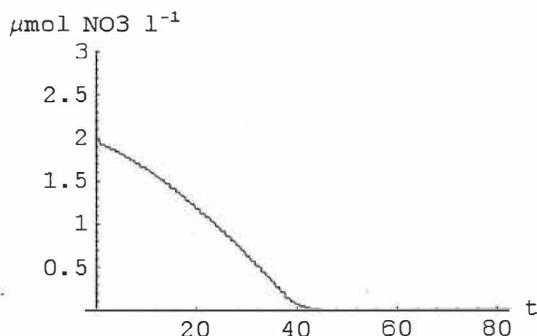
**Figura 57:**  
Evolución temporal del  
perfil de  
consumo de  
nutrientes.  
Ejemplo para  
una columna de  
150 m





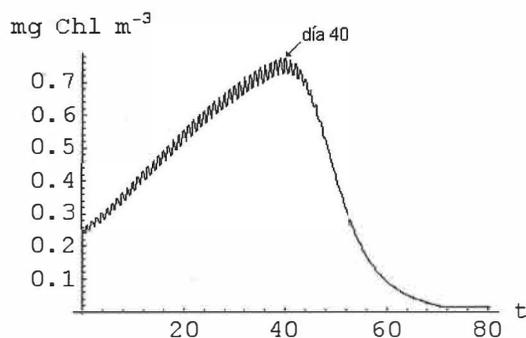
**Figura 58:**

Evolución temporal del estado de nutrición de la Población fitoplanctónica. Ejemplo para una columna de 150 m.  $Q_{\min} = 0.071$ ,  $Q_{\max} = 0.18$  y  $Q_{\text{equi}} = 0.15$



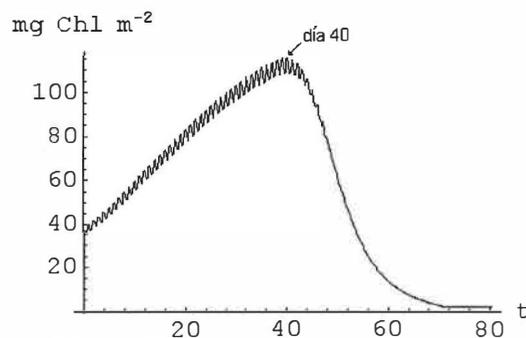
**Figura 59:**

Evolución temporal de la concentración (promedio) de nitratos en la columna de agua. Ejemplo para una columna de 150m



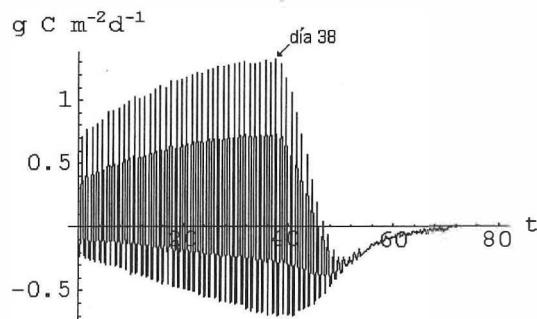
**Figura 60:**

Evolución temporal de la concentración promedio De Chl. Ejemplo para una columna de 150 m



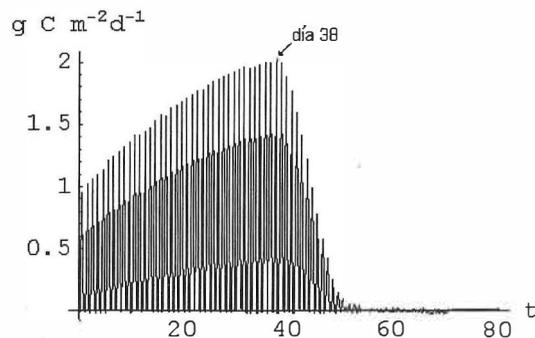
**Figura 61:**

Evolución temporal de la concentración integrada de Chl. Ejemplo para una columna de 150 m



**Figura 62:**

Evolución temporal de la productividad primaria "nueva" neta para toda la columna de agua. Ejemplo para una columna de 150 m



**Figura 63:**

Evolución temporal de la productividad primaria "nueva" bruta para toda la columna de agua. Ejemplo para una columna de 150 m

En la figura 54 se aprecia como la regla MB19 corta el perfil de clorofila a los 120m de profundidad y como le toma ahora más tiempo al fitoplancton en desaparecer.

Resulta relevante observar como la evolución temporal mostrada en esta figura valida el comportamiento de la regla MB20'. Inicialmente el máximo de clorofila se encontró alrededor de 50 m de profundidad, por lo que la mayor parte de la clorofila se localizó dentro de la zona eufótica, la cual llega un poco mas allá de los 60m (Fig. 55). A medida que el tiempo avanzó y la concentración de clorofila aumentó (Figs. 54, 60 y 61), la penetración de la luz disminuyó hasta llegar a un mínimo alrededor del día 40 (Fig. 55). En respuesta a esto, el perfil de clorofila se distribuyó con el máximo de concentración a una profundidad muy somera (Fig. 54), de manera tal que un buen porcentaje de la biomasa se mantuvo con suficiente luz para seguir operando. Después de esto y a medida como la biomasa disminuyó (Figs. 60 y 61), la penetración de la luz volvió a ser mayor (Fig. 55) por lo que la clorofila de nuevo se distribuyó con el máximo de concentración a una mayor profundidad. De esta forma se mantuvo siempre a la mayor parte de la población fitoplanctónica dentro de la zona iluminada.

Alrededor del día 65 la concentración de clorofila es tan baja (Figs. 60 y 61) que la expresión D3 predice una profundidad de máxima concentración de clorofila por debajo de los 120m; por lo que la regla MB19 corta el perfil de clorofila de una manera aparentemente peculiar (Fig. 54). Esto no detracta del desempeño de las reglas MB18-MB21, pues ya habíamos mencionado anteriormente –cuando se discutía el valor de ProfTransición– que una profundidad de máxima concentración de clorofila por debajo

de la zona eufótica no representaba un error en sí. Admitimos que el corte en perfil resulta tajante, y que seguramente la naturaleza no presenta una transición tan abrupta entre las zonas con y sin clorofila, pero la no inclusión de un gradiente mas suave dificilmente puede considerarse como importante, en especial al considerar lo poco que esa zona tan profunda aporta a la producción primaria de toda la columna de agua (de hecho no aportaría nada, debido a que  $E_{0(z)}$  es menor a  $E_{0_{comp}}$  en esas profundidades) y por lo tanto su existencia se excluye del modelo.

Sin duda alguna, el escenario de 150m tiene como su principal limitante a la penetración de la luz. La figura 55 muestra como sólo en la zona más somera ésta penetra de manera significativa. La figura 56 confirma que la tasa de crecimiento es en su mayoría limitada por la luz y no es sino hasta el día 39 que la limitación por nutrientes comienza a tornarse importante.

La figura 57 muestra básicamente el mismo patrón de comportamiento que los otros dos escenarios. El primer día existe un consumo intenso de nutrientes debido al desnutrido –y por lo tanto ávido– estado de las células. Tal magnitud de consumo sólo se repite hasta los días ~25-30, pero no por la avidez de cada célula sino por la gran biomasa de consumidores que se presenta. Algo que sí difiere de los escenarios anteriores es la forma como la zona profunda de la columna de agua actúa como una “reserva” de nutrientes y de hecho ésta es la razón por la cual la biomasa de fitoplancton tarda tanto en desaparecer. En un  $\Delta t$  determinado, los nutrientes que se encuentran por debajo de  $Prof_{Transicion}$  resultan por definición inalcanzables por el fitoplancton. Más aún, sólo bajo condiciones muy

favorables puede la luz penetrar cerca de  $Prof_{Transicion}$  con una intensidad superior a  $E_{O_{comp}}$ , y de hecho la figura 57 muestra como en realidad el consumo de nutrientes se da en una zona minoritaria de la columna de agua. De haber manejado un escenario con nula o poca mezcla vertical, estos nutrientes no consumidos simplemente se habrían quedado en la profundidades fuera del alcance de las diatomeas, por lo que estas pronto habrían muerto por inanición. Empero, el efecto homogeneizador de las corrientes residuales hace que estos nutrientes eventualmente sean accesibles al fitoplancton, alargando la permanencia de éstos en la columna. De haber estado disponibles desde el principio se habría presentado un caso similar al escenario de la columna de 15m, con un florecimiento más intenso de la población algal pero más corto. En cambio, en el presente escenario (150m), este mecanismo de “dosificación” de los nutrientes hace que el florecimiento no sea tan intenso pero sea más duradero.

Este efecto de dosificación también es evidente en la relación que guardan las figuras 58 y 59. A diferencia de los escenarios anteriores, el estado de  $Q$  (Fig. 58) comienza a degradarse (día 38) mucho antes de que los nitratos disueltos en el ambiente (Fig. 59) se acaben (día ~45). De nuevo esto sucedió debido a que los nutrientes que se encuentran en la zona profunda de la columna de agua no estaban disponibles a las diatomeas que se encuentran más cercanas a la superficie. El extraño comportamiento que presenta  $Q$  al despegarse ligeramente de  $Q_{min}$  a partir del día ~68 (Fig. 55) fue probablemente debido a errores por redondeo numérico, ya que a esas alturas de la corrida del modelo biológico  $Q$  es representado como una suma de quebrados cuyo numerador y denominador están ambos tendiendo a cero.

Por razones similares, la producción primaria neta y bruta (Figs. 62 y 63) presentan un ligero ruido en los últimos días de la corrida, y de hecho éste se ha hecho presente en el escenario de la columna de 50m también. Sin embargo, estas señales de ruido son tan diminutas que fácilmente pueden ignorarse y no degradan de manera significativa el desempeño del modelo.

Más notorias resultan las pequeñas ondulaciones que presenta la línea imaginaria que une las crestas de las figuras 62 y 63. Resultan aún más peculiares cuando consideramos que no se presentan situaciones análogas en ninguna de las demás gráficas (Figs. 58-61). La respuesta la encierra  $\Delta t$ . Debido a otras corridas realizadas con  $\Delta t$ 's más grandes se conoce que el modelo es muy sensible a éste parámetro. Cuando el  $\Delta t$  es demasiado grande le resulta más difícil al modelo encontrar su estabilidad; siendo siempre la productividad primaria su característica más inestable, seguida por Q. Finalmente las concentraciones de clorofila en el agua parecen ser la característica más estable. Esto sugiere que el modelo busca principalmente la estabilidad de la biomasa, y de ser necesario sobrecompensa en la producción y Q cuando el  $\Delta t$  resulta inadecuado. Un caso extremo que rompe toda estabilidad del sistema es utilizar un  $\Delta t$  mayor al tiempo transcurrido entre una generación de diatomeas y la siguiente. Dicha situación es análoga a pedir que las diatomeas de una generación dada no consuma nutrimento alguno, sino que funcione exclusivamente con las reservas de una generación anterior, con la generación siguiente teniendo que consumir nutrientes no sólo para ella sino además para reponer lo que la presente generación debió de haber consumido. Tanto Q como la producción primaria presentan oscilaciones que pronto pierden el control. Este error fácilmente se evita utilizando un  $\Delta t$  igual ó menor a

8hrs, ya que la máxima tasa de crecimiento que  $\mu_{nut}$  permite es un poco menos de  $3d^{-1}$  (Fig. 15). Aún así, conviene utilizar un  $\Delta t$  aún más pequeño, ya que el sistema se desempeña mejor entre más ágil sea el tiempo de respuesta en la relación consumo  $\rightarrow Q \rightarrow$  crecimiento  $\rightarrow Q \rightarrow$  consumo. De manera tal que para el aspecto biológico del modelo, entre más pequeño el  $\Delta t$  resulta mejor. Empero, el uso de un  $\Delta t$  más pequeño que 4.8 horas no sería recomendable, ya que degradaría considerablemente el desempeño de la parte física del modelo; más aún si tomamos en cuenta que el perfil de nutrientes se homogeneiza cada  $\Delta t$ . Considerándolo todo, un  $\Delta t$  de 4.8hrs resulta muy adecuado, ya que no causa problemas más allá de una pequeña curiosidad en el modelo biológico.

Lo que si aparenta tener un peso de consideración es la falta de una relación mas dinámica entre el fitoplancton y el zooplancton. De los tres escenarios aquí mostrados, éste último es el más sensible a éste problema. De haber utilizado una tasa de pastoreo igual a los dos primeros escenarios, la población de fitoplancton nunca habría despegado. La razón es muy sencilla; mientras sólo una porción de la población participa en el crecimiento de la biomasa (Fig. 56) la población completa sufre las presiones de la excreción y el pastoreo. En primera instancia este problema se agravaría más entre más grande es la columna de agua, pero la regla MB19 hace que esta situación no se agrave más allá de lo que se presenta en una columna de 120m (ProfTransicion).

Por otra parte, el utilizar una tasa de pastoreo tan baja aporta de manera significativa a la artificialmente larga longevidad de la biomasa de fitoplancton, por lo que la solución perfecta sería un zooplancton cuya voracidad está relacionada a la disponibilidad de

fitoplancton. De nuevo, una relación de dinámica de población depredador/presa sería lo más adecuado.

Por último, el utilizar un perfil vertical homogéneo de nutrientes representa una divergencia importante con la realidad. En los tres escenarios esto provocó comportamientos un tanto peculiares. Desgraciadamente, el conocimiento actual de la bahía no permite hacer mucho al respecto.

En un balance total el desempeño del modelo ha resultado muy bueno y no parece sufrir demasiado por las “asperezas” que contiene. Consideramos que la inclusión de mecanismos más finos están fuera del alcance de este trabajo y su inclusión se delegará a trabajos posteriores.

## V Modelado integrado

Existen siete meses para los cuales se tienen expresiones para calcular el perfil de temperatura del agua (MT1-MT7). Se tienen expresiones para calcular la Eo justo por debajo de la superficie para las cuatro estaciones del año (ML1.1 – ML4.5), así como mapas de corrientes para el “verano” (Figs. 2-4) y para el “invierno” (Figs. 5 y 6). Entendiéndose por “verano” e “invierno” las estaciones cálidas (marzo-septiembre) y frías (octubre-enero) del año. La siguiente tabla muestra como se sugiere que se mezclen todas estas condiciones.

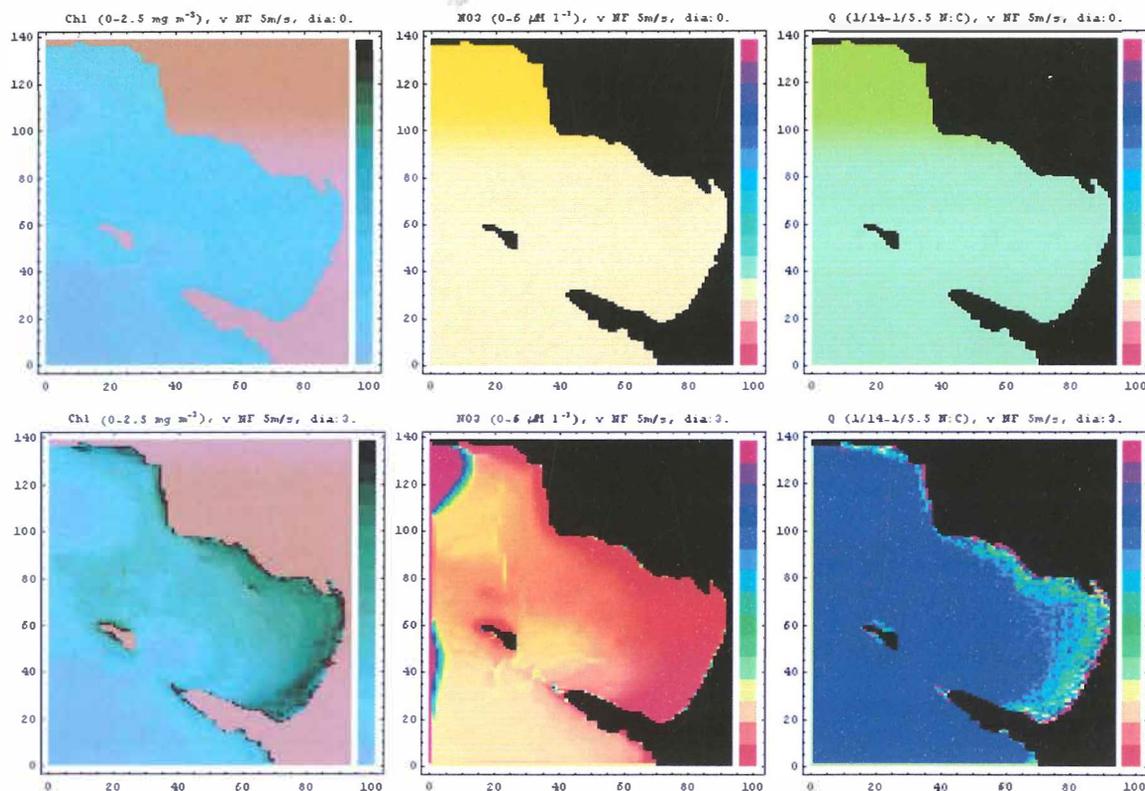
**Tabla XI:** Diferentes combinaciones sugeridas para los escenarios que se pueden modelar

Temperatura	Irradiancia justo por debajo de la superficie	Corriente	Nutrientes
Noviembre 1993	Otoño	S y SW	** Concentraciones de fondo de alrededor de 1 $\mu$ M sin pulsos de nutrientes
Diciembre 1993	Invierno		
Enero 1994			
Marzo 1994	Primavera	NW, W y N	Concentraciones de fondo alrededor de 2 $\mu$ M con o sin pulsos de alrededor de 7 $\mu$ M
Mayo / Junio 1994			
Septiembre 1994	Verano	S, SW y E	Igual que **
Octubre 1994	Otoño		

A estos escenarios sugeridos falta por determinarles las tasas de excreción y pastoreo, así como las condiciones iniciales en cuanto a distribución de nutrientes, clorofila y Q. El presente trabajo se limitara a presentar solamente tres, de todos los posibles escenarios a modelar. Estos escenarios fueron seleccionados por el comportamiento interesante que presentan, pero otros más pueden verse en los CD's que se incluyen al final de esta tesis.

## V.1 Escenario 1: Septiembre

Para el primer escenario se escogió simular el mes de septiembre con una Eo justo por debajo de la superficie correspondiente a verano y corrientes residuales producto de viento del norte. La tasa de excreción y la de pastoreo fueron de  $0.1 \text{ d}^{-1}$ , con una concentración de fondo de clorofila de  $0.5 \text{ mg Chl m}^{-3}$  y de  $1 \text{ } \mu\text{M}$  para  $\text{NO}_3$ , con un pulso de nutrientes sostenido por los primeros siete días de  $7 \text{ } \mu\text{M}$  y el estado Q de fondo de  $0.1 \text{ } \mu\text{mol N} / \mu\text{mol C}$ . La siguiente figura muestra la evolución del modelo a partir de ese estado inicial:



**Figura 64:** Evolución temporal del primer escenario, el cual representa el mes de septiembre con una corriente residual impulsada por un viento del norte. Las tres columnas corresponden respectivamente a: a) la distribución de Chl (iniciando en  $0.5 \text{ mg Chl m}^{-3}$ ), b) la distribución de  $\text{NO}_3$  (iniciando en  $1 \text{ } \mu\text{M}$ ) y c) la distribución de Q (iniciando en  $0.1 \text{ } \mu\text{mol N} / \mu\text{mol C}$ ). Cada renglón equivale a 15 iteraciones del modelo.

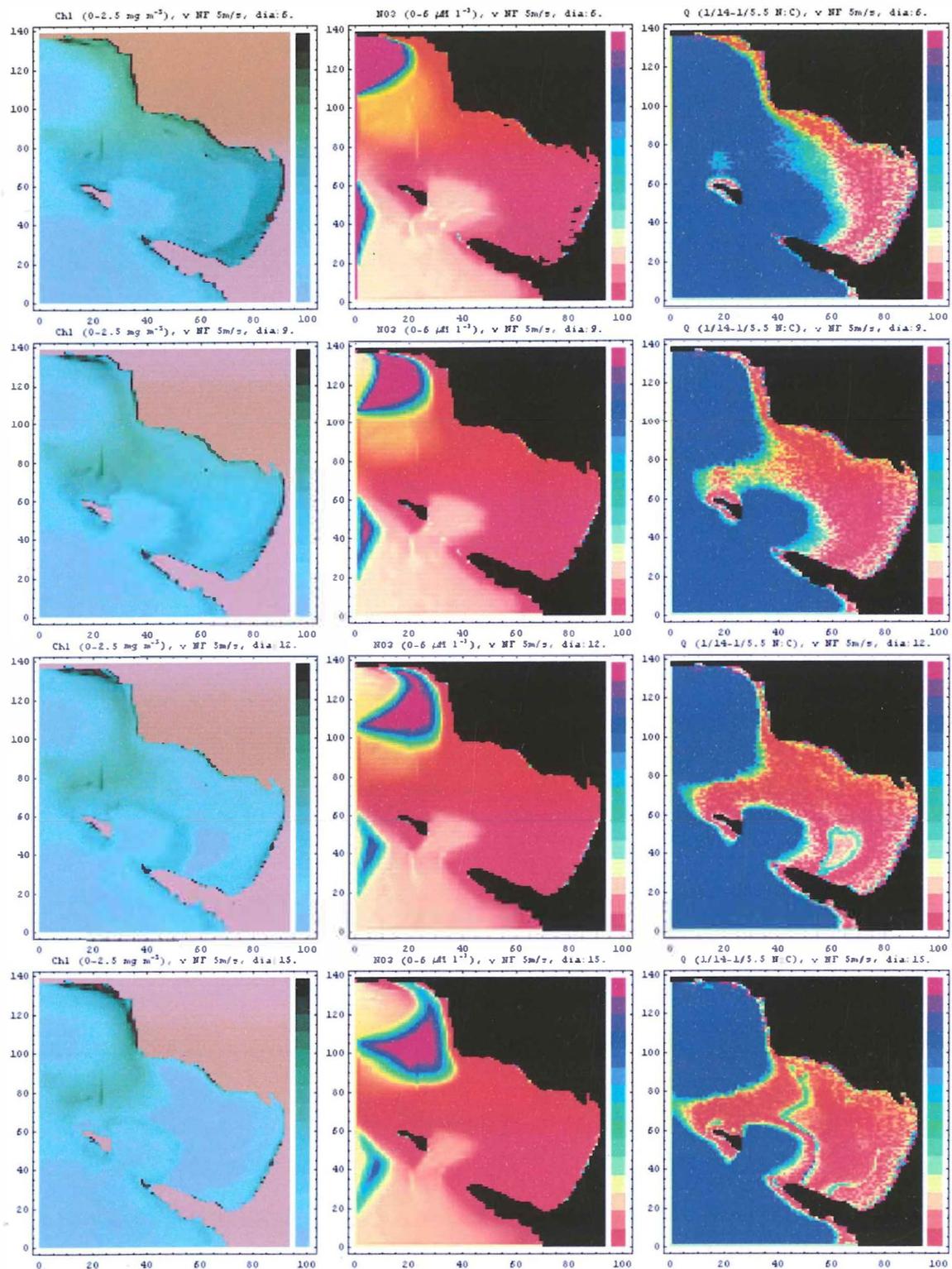


Figura 64 (cont.):

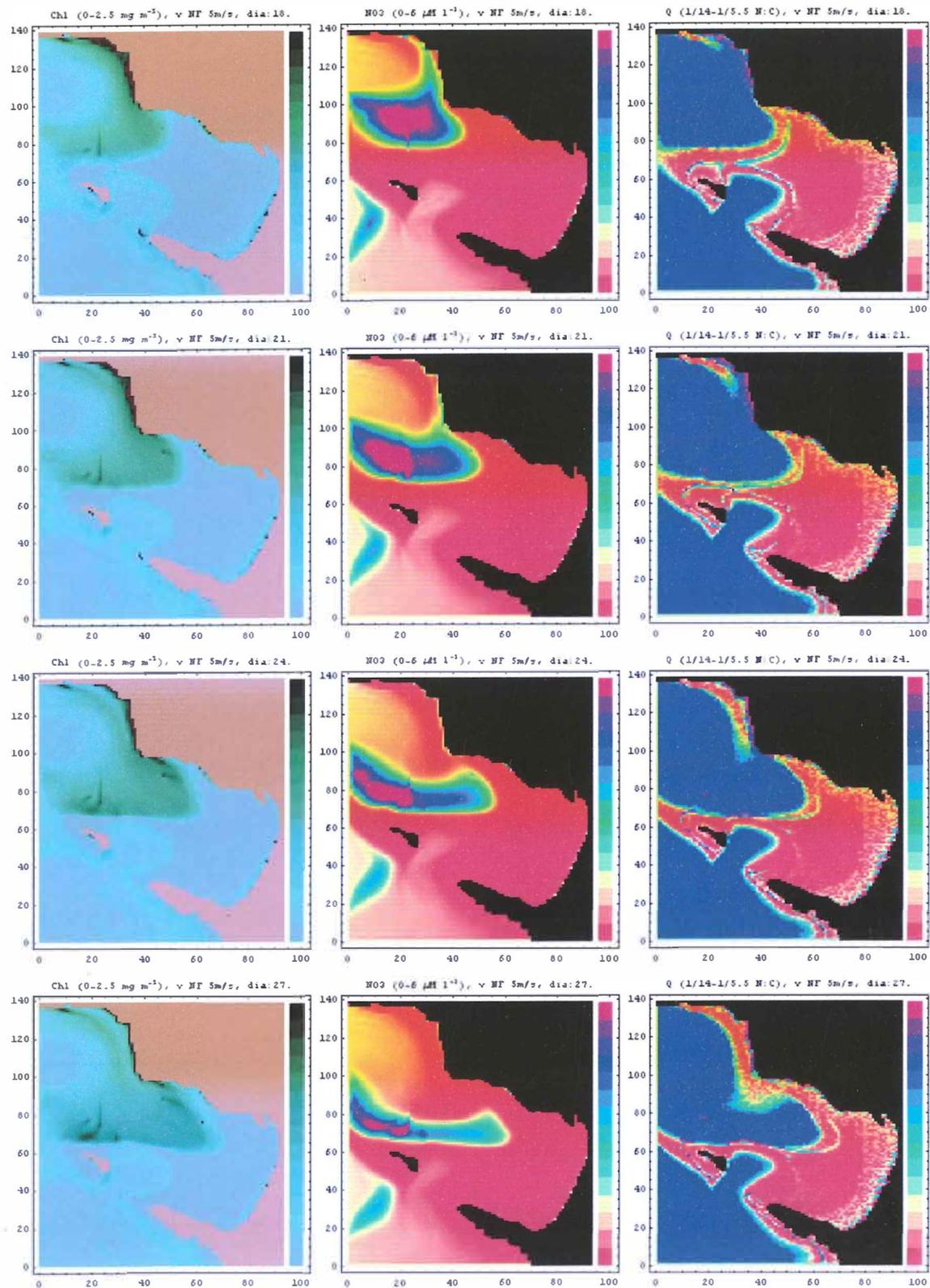


Figura 64 (cont.):

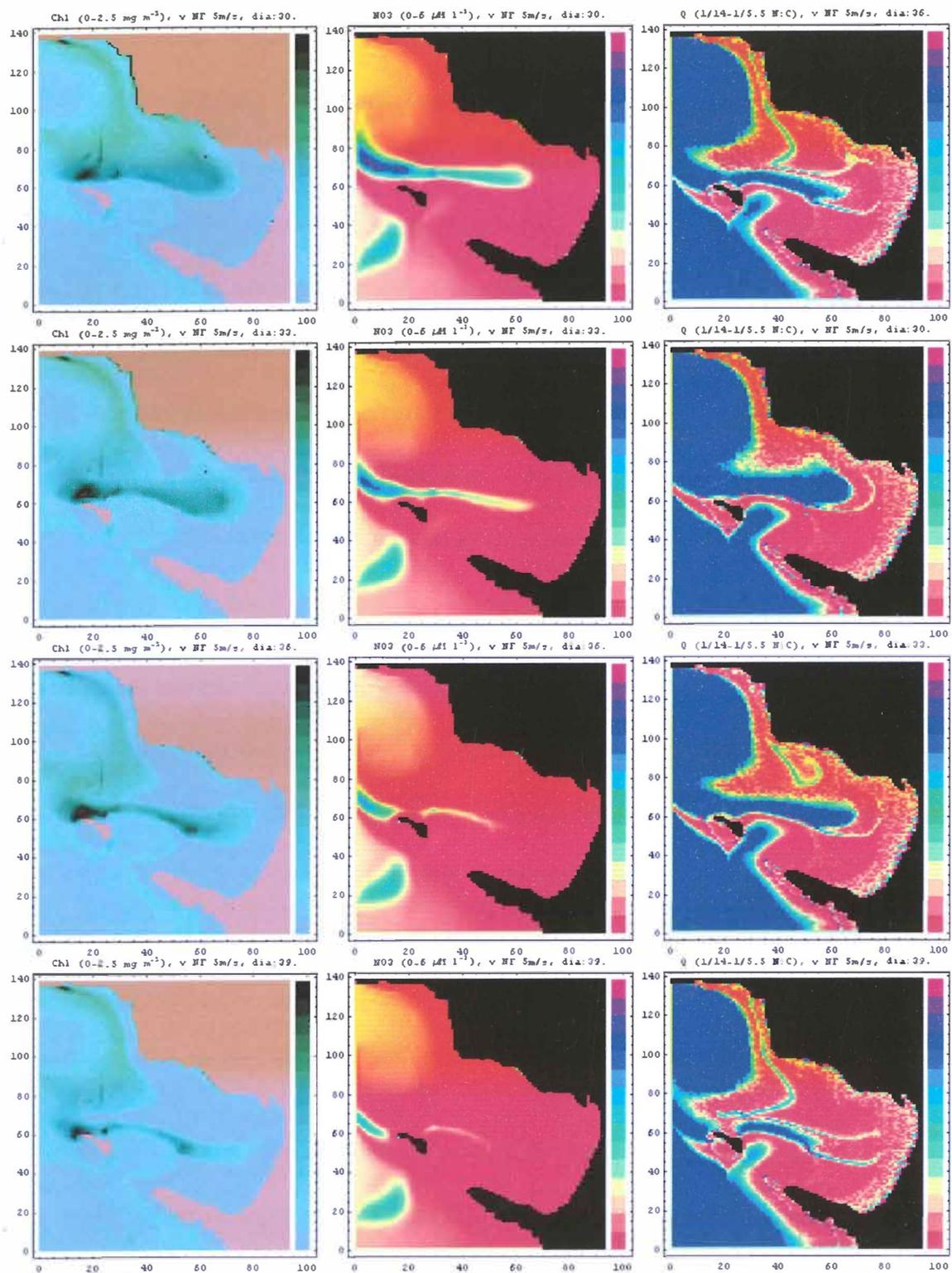


Figura 64 (cont.):

En los primeros días se presentó una etapa de estabilización en la que el modelo reaccionó a la distribución homogénea con la que se inicializa, formando como respuesta un florecimiento “artificial” (Fig. 64). Durante esta etapa de estabilización el modelo gravita hacia un estado más real por lo que no es necesario inicializarlo con un estado inicial predeterminado. Se considera que no es necesario buscar un estado inicial “óptimamente real”, si no que el modelo –dado el suficiente tiempo– debe de gravitar hacia un estado “real” (siempre y cuando el estado inicial alimentado sea razonable). De hecho esta es una de las maneras de verificar el correcto funcionamiento del modelo. Es aproximadamente en la tarde del cuarto día cuando el florecimiento de “estabilización” alcanza su nivel máximo, mostrándose especialmente intenso en las zonas costeras.

En la evolución mostrada en la columna central de la figura 64 se puede observar como los nutrientes entran por la frontera oeste durante los primeros 7 días, y como posteriormente poco a poco se aproximan hacia la boca norte de la bahía. Mientras tanto, en el interior de la bahía los nutrientes se van agotando como resultado de la estabilización del sistema, hasta que llegan a un punto en el que la mayor parte de la zona interna de la bahía representa aguas pobres en nutrientes y clorofila.

Los cambios de  $Q$  (tercer columna) en esos primeros días es muy importante, ya que las células de fitoplancton inician con un valor relativamente bajo (día 0) y rápidamente pasaron a tener una  $Q$  aceptable (día 3), como resultado de la asimilación de los nutrientes que se encontraban disponibles en el agua. Posteriormente (día 6) se comienza a presentar en la zona litoral una franja gradiente en la cual las células en las zonas más someras tienen

una  $Q$  más pobre. La explicación a esto se muestra en las gráficas de la primer columna (concentración de clorofila), en donde se aprecia que las zonas de baja  $Q$  corresponden a las de mayor crecimiento del fitoplancton. Bajos valores de  $Q$  son provocados por el agresivo crecimiento de las células costeras, las cuales al destinar la mayoría de los ingredientes consumidos hacia esta tarea, no han podido reconstruir o mantener sus reservas ganadas inicialmente. La batimetría juega un papel muy importante en todo esto, pues es precisamente lo somera de estas zonas de crecimiento lo que ha permitido que la luz no sea una limitante.

La tendencia sigue igual hasta el día 15, cuando la mayor parte de la bahía se ha quedado pobre en nutrientes y por lo tanto pobre en  $Q$ ; mientras que en las zonas fuera de la bahía (excepto por los litorales) las profundidades contienen reservas de nutrientes que mantienen al fitoplancton con  $Q$ 's elevadas, las cuales no son destinadas al crecimiento debido a la limitante de luz a mayores profundidades. Aquí se puede apreciar la diferencia entre los comportamientos de la boca norte y la boca sur de la bahía. La boca norte representa una zona somera, por lo que tiene un efecto de "extender" las condiciones del interior de la bahía un poco mas allá de su frontera propiamente. En especial, la extensión de las condiciones de "adentro de la bahía" hacia el lado oeste de las Islas Todos Santos verifica la importancia de la batimetría en la ecología del fitoplancton.

La boca sur presenta un caso diametralmente opuesto, como un resultado directo de la batimetría. En la zona sur se encuentra un importante cañón submarino que induce la

intrusión de las características de “fuera de la bahía” hacia el interior, provocando una distinguible bolsa en esa parte de la bahía.

Es precisamente alrededor del día 15 que el pulso de nutrientes comenzó a jugar un papel importante, ya que al entrar en contacto con la boca norte de la bahía se empieza a formar un crecimiento algal en esa zona. Para el día 18 se nota como los nutrientes se encuentran ya entrando plenamente a la bahía, lo cual provoca un retroceso en la distribución de la zona con pobre Q. La tendencia sigue igual hasta que en aproximadamente el día 25, en el que se aprecia como el agua rica en nutrientes que entra a la bahía es seguida por agua pobre una vez más, agua que venía viajando detrás del pulso. Esto se aprecia perfectamente en la gráfica de Q.

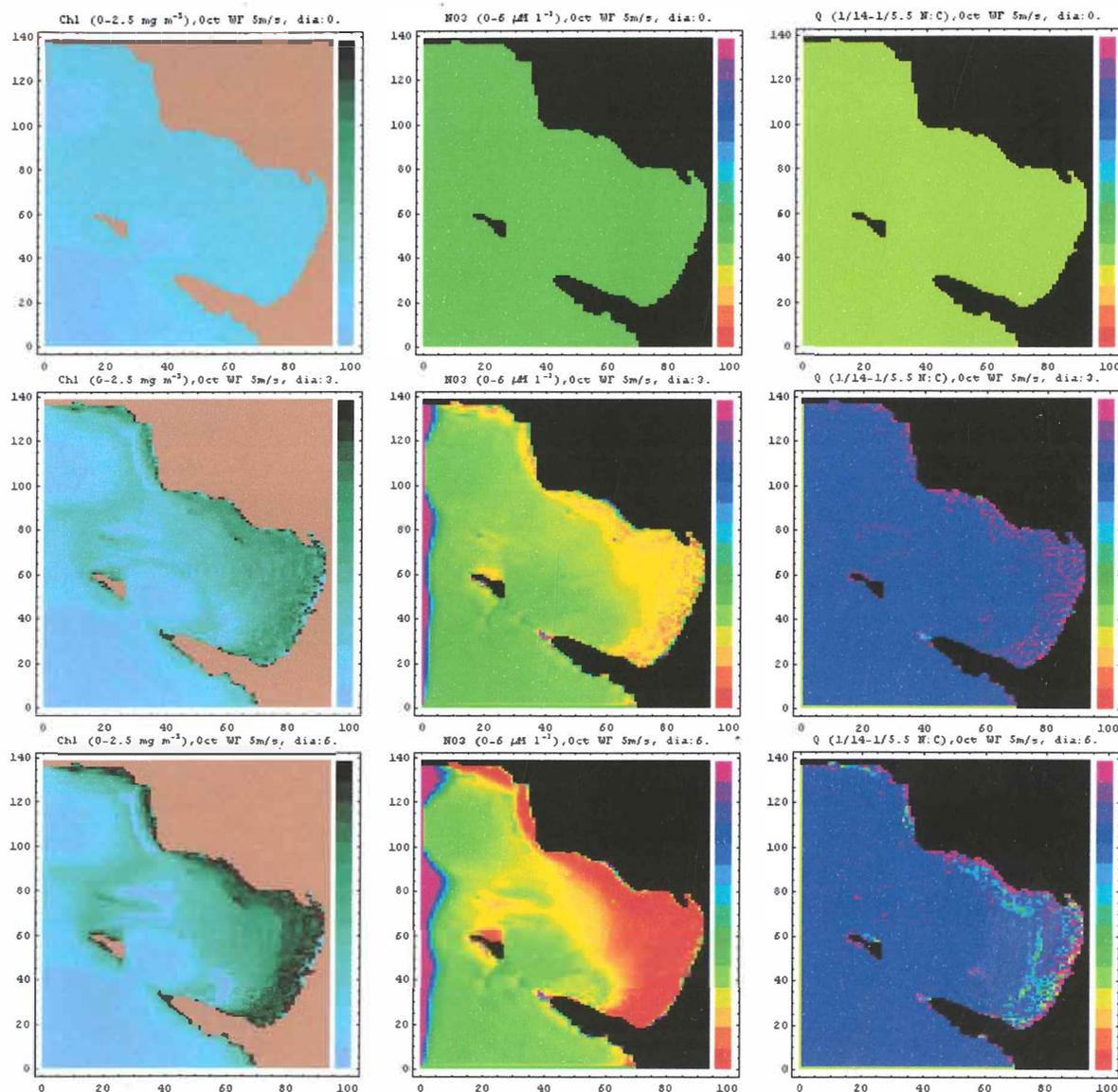
Alrededor del día 27 es cuando el crecimiento algal alcanzó su valor máximo y se puede observar como los nutrientes han disminuido considerablemente, así como ha disminuido también la importancia de la lengüeta de células con Q alta dentro de la bahía. De aquí en adelante la tendencia es a la baja, tanto de Q, como de los nutrientes y la concentración de clorofila.

Nótese como el patrón de circulación ha hecho que no todos los nutrientes entren a la parte interna de la bahía, sino que algunos fueron desviados al lado oeste de las Islas de Todos Santos, provocando un importante crecimiento en la población del fitoplancton en esa zona. De nuevo, es la conjunción de disponibilidad de nutrientes con una columna de agua somera lo que favorece de manera importante al crecimiento del fitoplancton.

Por último, los nutrientes que entraron por la parte sur de la frontera oeste del modelo prácticamente no aportaron al crecimiento del fitoplancton. Debido al patrón de corrientes estos nutrientes nunca se acercaron a las zonas someras de la bahía, máxime que las características batimétricas de la boca sur de la bahía coloca a las zonas someras de ésta todavía mas lejos.

## V.2 Escenario 2: Octubre

Para el escenario de octubre se utilizó una corriente residual producto de un viento del oeste, una concentración de fondo de  $\text{NO}_3$  de  $2 \mu\text{M}$ , y una  $E_o$  justo por debajo de la superficie correspondiente a otoño. El resto de las características es igual al escenario 1.



**Figura 65:** Evolución temporal del segundo escenario. Las tres columnas corresponden respectivamente a: a) la distribución de Chl (iniciando en  $0.5 \text{ mg Chl m}^{-3}$ ), b) la distribución de  $\text{NO}_3$  (iniciando en  $2.0 \mu\text{M}$ ) y c) la distribución de Q (iniciando en  $0.1 \mu\text{mol N} / \mu\text{mol C}$ ). Cada renglón equivale a 15 iteraciones en el modelo. Nótese que en la esquina superior derecha de cada imagen se localiza el día que dicha imagen representa.

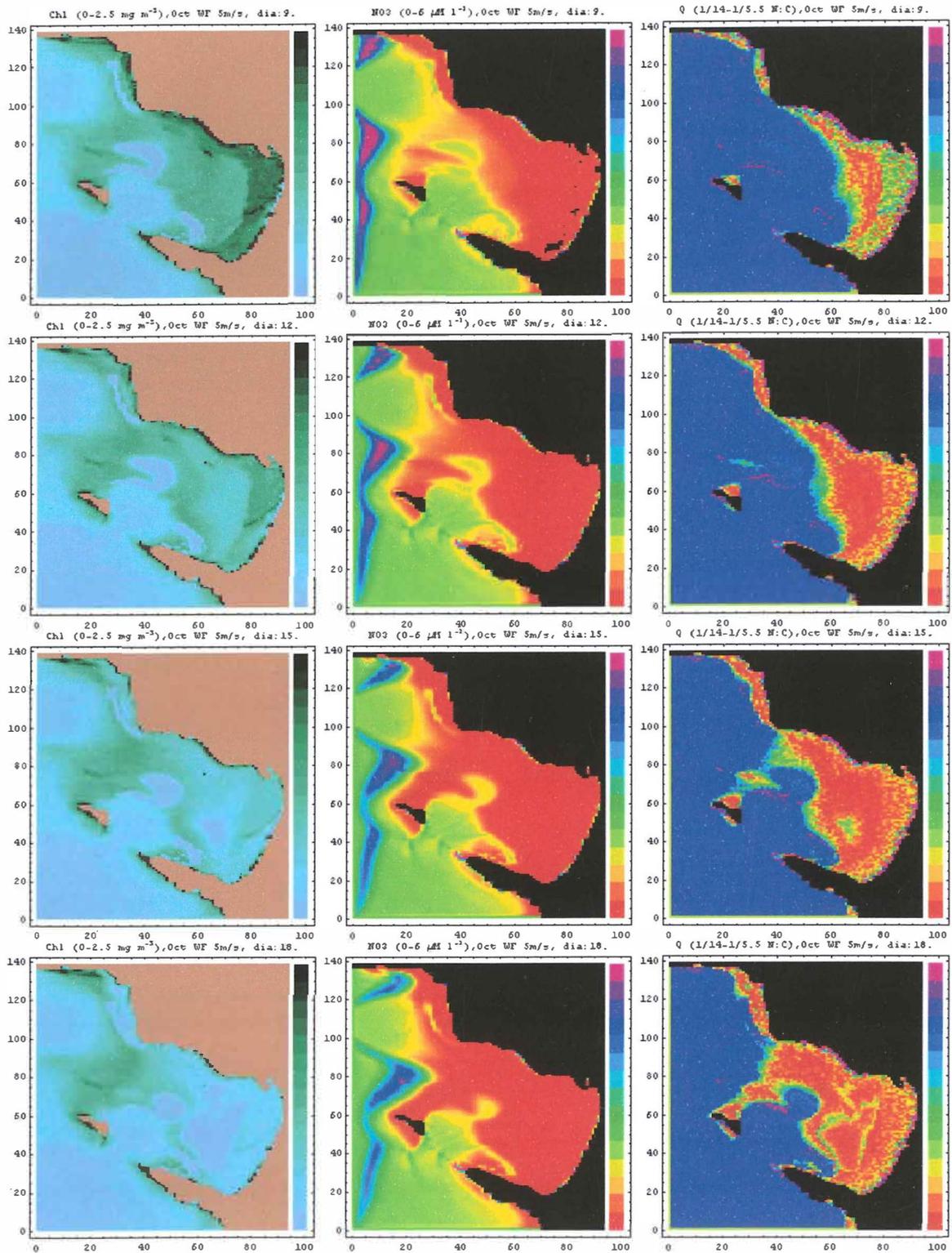


Figura 65 (cont.):

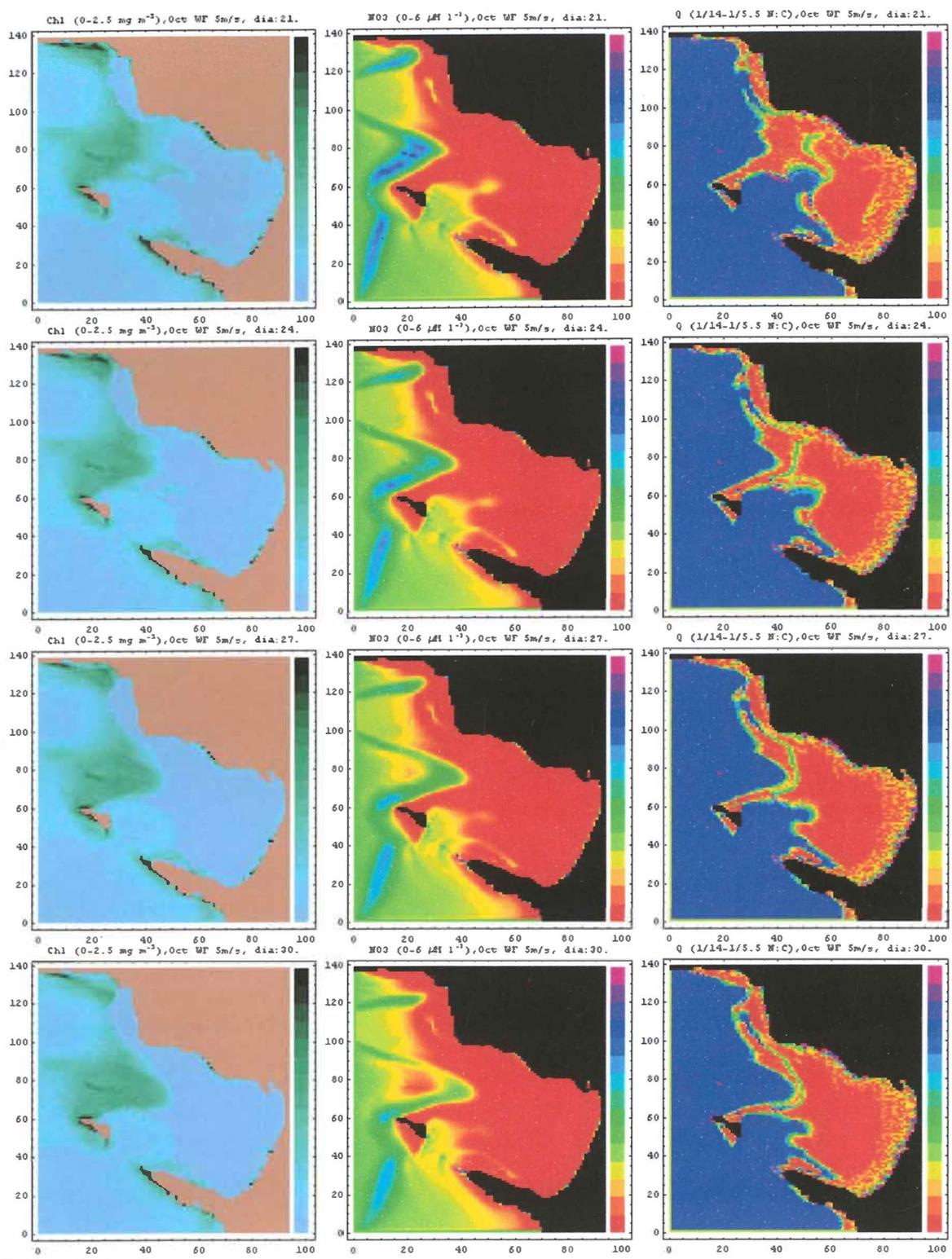


Figura 65 (cont.):

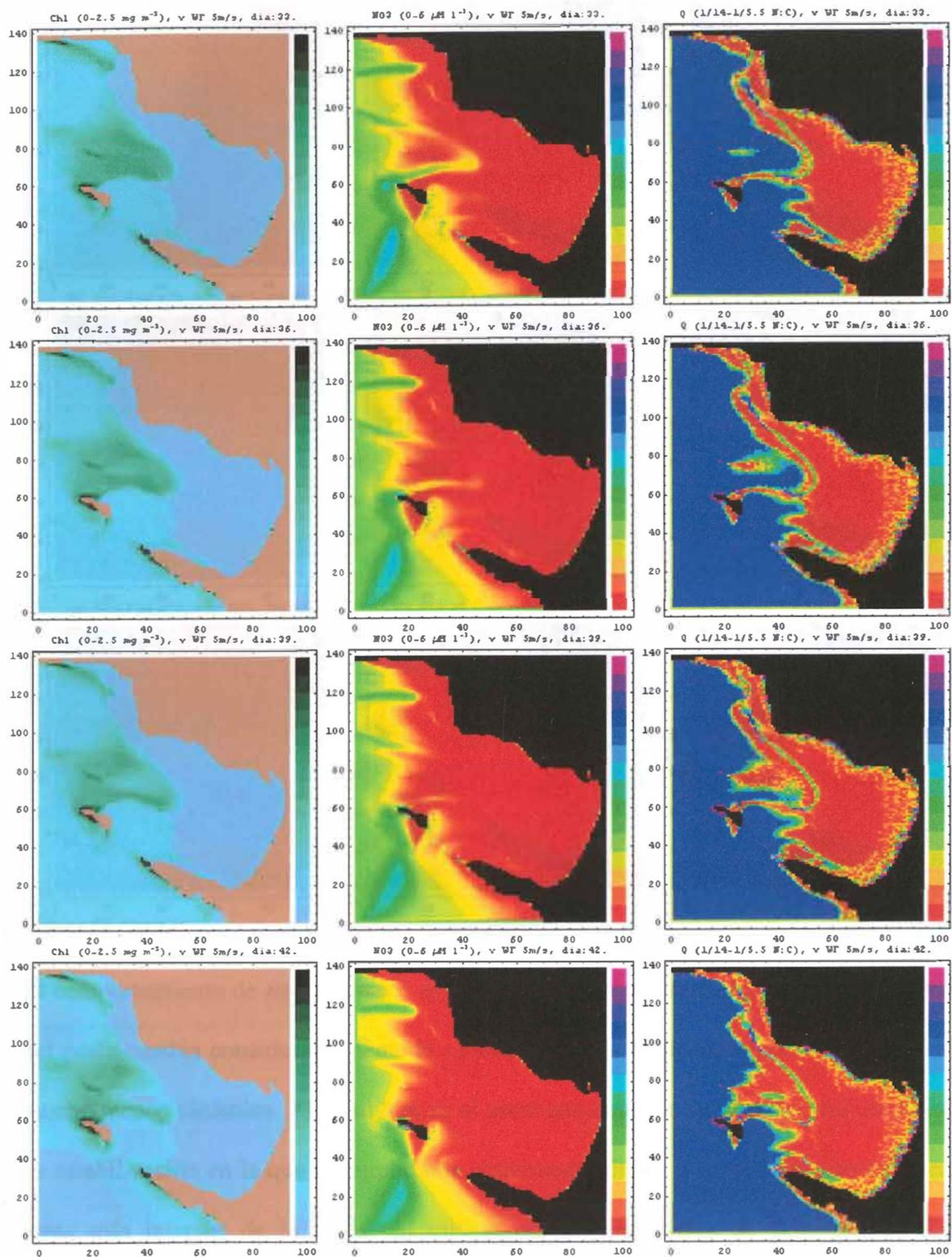
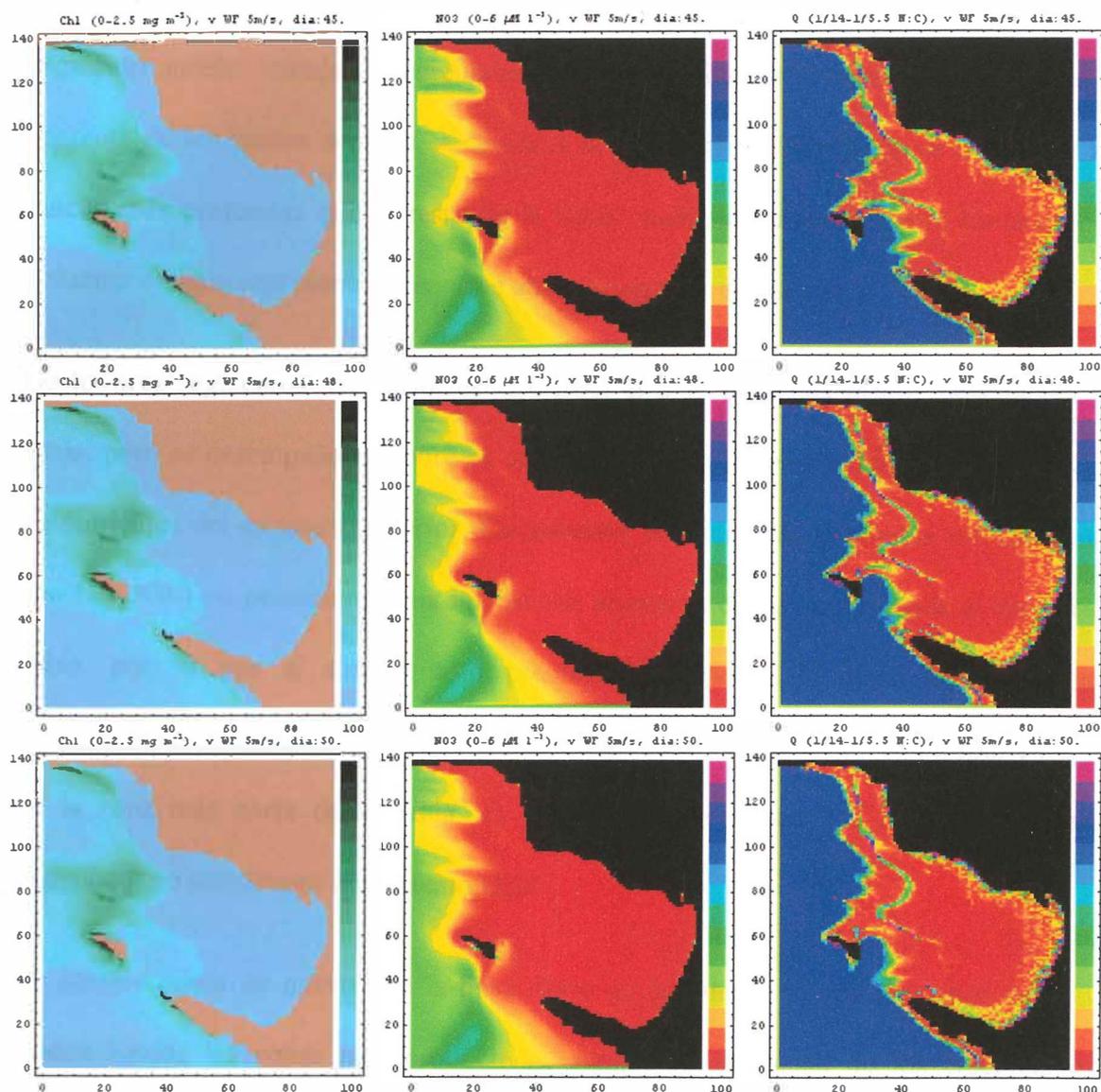


Figura 65 (cont.):



**Figura 65 (cont.):**

El comportamiento de este escenario es diferente al comportamiento del anterior. El viento del oeste cambia considerablemente la circulación de la bahía, de manera tal que se torna mucho menos dinámica. Al igual que en el escenario anterior, se pasa por una etapa inicial de estabilización en la que un importante crecimiento litoral consume los nutrientes en las áreas más internas de la bahía. Al mismo tiempo los niveles de Q aumentan —como

El segmento central es el más dinámico, seguido por el segmento norteño y finalmente el segmento sureño –similar al escenario anterior– resulta ser el más letárgico. La lentitud aparente de los pulsos sureños es debido a la batimetría de la región; ya que al ser zonas mucho más profundas que el resto de la bahía, cualquier desplazamiento horizontal de la columna de agua representa un enorme gasto de energía del sistema.

De los tres segmentos del pulso, es el central el que logra una mayor penetración en la bahía, pero su desempeño es pobre en comparación con la penetración lograda por el pulso de nutrientes del escenario anterior. Ciertamente, las letárgicas corrientes (en comparación con N y NW) no permitieron una importante inyección de nutrientes hacia el interior de la bahía, por lo que el sistema sólo presenta (posterior a la etapa de estabilización) crecimientos importantes en zonas alejadas de la costa. La excepción se da sólo en la costa de la zona más norte de la bahía, en donde el pulso norteño ha logrado alimentar un pequeño pero importante crecimiento algal.

Es notable como de nuevo son la boca norte de la bahía y la costa exterior de las Islas Todos Santos las zonas más productivas, aunque la intensidad de los crecimientos no aparenta ser tan alta como en el escenario anterior. Son la batimetría y las corrientes que estas dos zonas representan, lo que hace que sean precisamente éstas donde los nutrientes pasan de encontrarse en columnas de agua profundas a columnas de agua someras; por lo que la luz deja de ser limitante y el fitoplancton crece adecuadamente.

El crecimiento del fitoplancton en la boca norte de la bahía, como consecuencia directa del pulso de nutrientes, comienza aproximadamente en el día 15 y alcanza su máximo

alrededor del día 30. Sin embargo, previo a esto es posible ver algo de crecimiento algal, ya que las aguas que precedían al pulso no se encontraban totalmente agotadas de nutrientes.

En el día 50 aún quedó una notable población algal en la mitad de la boca norte de la bahía, por lo que si bien es cierto que la producción nueva no aparentó —en un momento dado— ser tan intensa como en el escenario anterior, sí es posible afirmar que es igual o más duradera.

## VI Conclusiones

En este trabajo se han discutido diversos conceptos físicos, químicos y biológicos que no es común que se integren todos juntos en un solo modelo debido a su complejidad y a la dificultad de manejar conceptos y herramientas provenientes de campos muy diferentes. El objetivo principal de este trabajo ha sido el reconciliar e integrar la diferente información que se conoce sobre la naturaleza física y bio-química de la Bahía de Todos Santos en una sola y coherente imagen que sea inclusiva en naturaleza. Si bien es cierto que no han sido incorporados al modelo factores muy importantes como una relación más dinámica entre el fitoplancton y el zooplancton, o la inclusión de una circulación tridimensional, aún así se han integrado exitosamente suficientes componentes físicos, químicos y biológicos como para observar un comportamiento cualitativamente equiparable al encontrado en la variabilidad regional de la producción del fitoplancton.

Resulta especialmente satisfactorio observar como el modelo arroja una nueva luz en la importancia que juegan factores como la batimetría y las corrientes. A pesar de considerar homogénea la distribución vertical de nutrientes inorgánicos, el fitoplancton no consume los pulsos de nutrientes inmediatamente cuando estos se encuentran en zonas profundas, sino que permite que dichos pulsos se aproximen a zonas más someras de la bahía. El desempeño del algoritmo 4 (codificado en las reglas MB18-MB20'), donde se reconstruye el perfil vertical de la clorofila, también resultó muy satisfactorio y fue uno de los factores principales que permitieron que el desempeño del modelo no se degrade significativamente como consecuencia de la bidimensionalidad de las corrientes residuales. Así mismo, resulta

igualmente satisfactorio observar el correcto manejo que se logró en el modelo al concepto de  $Q$ , y en especial como éste muestra una serie de resultados que se asemejan a la naturaleza de la comunidad fitoplanctónica que se simula.

A continuación se presentan dos recomendaciones para mejorar el desempeño del modelo. Primero, por el lado bio-químico, la inclusión de procesos de reciclamiento de nutrientes (producción regenerada, incorporación de amonio por el fitoplancton) y una relación más dinámica entre el fitoplancton y el zooplancton. La inclusión de estos procesos podría complementar significativamente las explicaciones que el presente modelo provee sobre la naturaleza del fitoplancton.

Segundo, por el lado físico del modelo, la inclusión de una circulación residual tridimensional que incluya el efecto agregado de otros forzamientos físicos (i.e.: viento variable, mareas, ondas internas, etc.), resultaría en un modelo más apegado a la realidad, ya que no habría necesidad de reconstruir los perfiles verticales de la clorofila y nutrientes, sino que simplemente se dejaría que la física y la biología dictaran juntas las estructuras verticales en la distribución de dichas variables.

Finalmente, como recomendación general a la comunidad científica, se propone el considerar en un futuro a la Bahía de Todos Santos como un laboratorio natural, donde modelos como este podrían ser probados, ya que es un área importante donde convergen varios procesos de escalas diferentes. Además, esta área es única ya que en ella coinciden varias instituciones oceanográficas, las cuales podrían avocarse a generar mayor

información que ayude a complementar y mejorar los parámetros físicos y químicos utilizados en los algoritmos de los modelos.

## Bibliografía citada

- Alvarez-Borrego, J. y S. Alvarez-Borrego, 1982. Temporal and spatial variability of temperature in two coastal lagoons. CALCOFI Rep., XXIII: 188-197.
- Bissett, W.P., J.J. Walsh, D.A. Dieterle, y K.L. Carder. 1999. Carbon cycling in the upper waters of the Sargasso Sea: I. Numerical simulation of differential carbon and nitrogen fluxes. Deep Sea Research I 46: 205-269.
- Eppley, R.W., 1972. Temperature and phytoplankton growth in the sea. Fish. Bull. 70: 1063-1085.
- Falkowski, P.G., Z. Dubinsky, y K. Wyman, 1985. Groth-irradiance relationships in phytoplankton. Limnology and Oceanography 30(2), 311-321.
- Flynn, K.J., 1991. Algal carbon-nitrogen metabolism: a biochemical basis for modeling the interactions between nitrate and ammonium uptake. Journal of Plankton Research 13(2), 373-387.
- Flynn, K.J., K. Davidson, y J.W. Leftley, 1994. Carbon-nitrogen relations at whole-cell and free-amino-acid levels during batch growth of *Isochrysis galbana* (Prymnesiphyceae) under conditions of alternating light and dark. Marine Biology 118, 229-237.
- García Cordova, J., C. F. Flores Cabrera, y J. M. Robles Pacheco. 1996. Datos de CTD Obtenidos en la Bahía de Todos Santos, B.C. Campaña BATOS 7. B/O Francisco de Ulloa. Octubre 25-27 de 1994. Informe Técnico. Comunicaciones Académicas, Serie Oceanografía Física, CICESE. 60 pp. CTOFT9603.
- García Cordova, J., J. M. Robles Pacheco, C. F. Flores Cabrera, y O. E. Delgado González. 1994. Datos de CTD Obtenidos en la Bahía de Todos Santos, B.C. Campaña BATOS 3. B/O Francisco de Ulloa. Enero 12-15 de 1994. Informe Técnico. Comunicaciones Académicas, Serie Oceanografía Física, CICESE. 63 pp. CTOFT9406.
- García Pámanes, J., 1989. Variación de la tasa de pastoreo zooplanctónico frente a Baja California, México. Tesis de Maestría. Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada. Ensenada, B.C., México, 61 pp.
- Gaxiola Castro, G., 1994. Efectos de algunos procesos físicos sobre la fisiología y productividad del fitoplánton marino. Tesis de Doctorado. Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada. 146 pp.
- Gaxiola Castro, G. y S. Alvarez Borrego. 1984. Relación fotosíntesis irradiancia en el fitoplancton de aguas costeras del noroeste de Baja California. Ciencias Marinas 10(3): 53-66.
- Gaylord, R. J., K. Nishidate. 1996. Modeling nature: cellular automata simulations with Mathematica®. ISBN 0-387-94620-9. 260 pp.
- Giles-Guzmán, A.D., S. Alvarez-Borrego. 2000. Vertical attenuation coefficient of photosynthetically active radiation as a function of chlorophyll concentration and depth in case 1 waters. Applied Optics. Vol. 39, No. 9: 1351-1358.

- Goldman, J.C., J.J. McCarthy, 1978. Steady state growth and ammonium uptake of a fast-growing marine diatom. *Limnology and Oceanography* 23(4), 695-703.
- Gómez, V.J., 1983. Estructura hidrográfica promedio frente a Baja California. *Ciencias Marinas*, 9(2): 75-86.
- González Villagran, A., 1992. Reevaluación de lo estudios utilizados para el diseño del puerto de Ensenada, B.C., Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias Marinas, UABC.
- Gordon, H. R., A. Morel, 1983. Remote Assessment of Ocean Color for Interpretation of Satellite Visible Imagery: A Review, Vol. 4 of Lecture Notes on Coastal and Estuarine Studies (Springer-Verlag, New York, 1983), p. 114.
- Granados Guzmán, A., R. Hidalgo González y S. Alvarez Borrego, 1995. Variabilidad temporal de la temperatura en las Islas Todos Santos y San Jerónimo, Baja California, durante mayo de 1992 a marzo de 1993. Informe técnico CTECT9501. Comunicaciones académicas. Serie Ecología CICESE 24 pp.
- Kirk, J.T.O., 1994, Light and Photosynthesis in Aquatic Ecosystems. (Cambridge Univ. Press. New York), p. 509.
- Laws, E.A., T.T. Bannister, 1980. Nutrient- and light-limited growth of *Thalassiosira fluviatilis* in continuous culture. with implications for phytoplankton growth in the ocean. *Limnology and Oceanography* 25(3), 457-473.
- Mancilla Pérez, M. y G.M. Martínez, 1991. Variación estacional de temperatura, salinidad y oxígeno disuelto en la Bahía de Todos Santos, B.C., México (marzo de 1986 a junio de 1987). *Rev. Inv. Cient.*, 2(2): 33-45.
- Matus Hernández, E., 1991. Tasa de pastoreo diarias del zooplancton en una localidad costera de Baja California, México. Tesis de Maestría. Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada, Ensenada, B.C., México, 64 pp.
- Orellana Cepeda, E., L.A. Morales Zamorano, J. Serrano Esquer y Z.E. Carrillo Hernández, 1994. Fitoplancton de Bahía de Todos Santos. X simposium internacional de biología marina. 13-17 junio 1994, México.
- Richardson, K., J. Beardall y J.A. Raven, 1983. Adaptation of unicellular algae to irradiance: an analysis of strategies. *New Phytologist* 93, 157-191.
- Sakshaug, E., K. Andresen, 1989. A steady state description and light absorption in the marine planktonic diatom *Skeletonema costatum*. *Limnology and Oceanography* 34(1), 198-205.
- Sakshaug, E., S. Demers y C.M. Yentsch, 1987. *Thalassiosira oceanica* and *T. pseudonana*: two different photoadaptational responses. *Marine Ecology Progress Series* 41, 275-282.
- Smith, G.J., R.C. Zimmerman, R.S. Alberte, 1992. Molecular and physiological responses of diatoms to variable levels of irradiance and nitrogen availability: growth of *Skeletonema costatum* in simulated upwelling conditions. *Limnology and Oceanography* 37(5), 989-1007.

## Anexos

### Lista de algoritmos utilizados en esta tesis

<b>Algoritmo</b>	<b>Descripción .....</b>	<b>Página</b>
Algoritmo 1	Aplicación de las reglas de transporte: sistemáticamente calcula el transporte que cada celda recibe de sus ocho vecinos, restando dicho transporte a las celdas donantes y sumándolo a la celda receptora .....	33
Algoritmo 1a	Manejo de la frontera: calcula la pérdida que sufre la zona A (Fig. 21) por lo que ésta aporta a la frontera .....	36
Algoritmo 1b	Manejo de la frontera: calcula la pérdida que sufre la zona B (Fig. 21) por lo que ésta aporta a la frontera .....	36-37
Anexo 1.1	Consideraciones en el transporte de Q: el estado nutricional de las células no es una variable a transportar en si, sino mas bien es una característica intrínseca del fitoplancton que es transportado, por lo que este algoritmo debe siempre de acompañar a todo transporte de clorofila .....	38
Algoritmo 2	Perfil de la luz en la columna de agua: genera –a partir del perfil vertical de clorofila y la irradiancia justo por debajo de la superficie– la irradiancia escalar presente en cada metro de la columna de agua.....	61-62
Algoritmo 3	Perfil de consumo de nutrientes: genera –a partir del perfil vertical de nitrógeno particulado dentro de las células de fitoplancton, del perfil vertical de irradiancia y la concentración de nitratos en la columna de agua– la cantidad de nutrientes que es incorporado por el fitoplancton en cada metro de la zona eufótica de la columna de agua.....	73-74
Algoritmo 4	Algoritmo de reconstrucción del perfil vertical de clorofila: regenera –a partir de la concentración integrada de clorofila y la profundidad de la columna de agua– el perfil vertical de la clorofila. Este algoritmo es necesario para compensar el efecto homogeneizante que tiene el modelo de circulaciones sobre la clorofila.....	79

**Expresiones y ecuaciones matemáticas utilizadas en esta tesis.**

<b>Nombre</b>	<b>Expresión / Formula matemática.....</b>	<b>Página</b>
<b>Conjunto de ecuaciones para decidir si existe y calcular el flujo desde los vecinos hacia (i,j)</b>		
1	$V_{i-1,j-1}.u > 0 \wedge V_{i-1,j-1}.v > 0 \rightarrow$ Existe flujo desde (i-1, j-1) hacia (i,j) .....	20
9	$V_{i-1,j-1}.u \cdot V_{i-1,j-1}.v \cdot$ Agua $_{i-1,j-1}$ .....	22
2	$V_{i+1,j-1}.u > 0 \wedge V_{i+1,j-1}.v > 0 \rightarrow$ Existe flujo desde (i+1, j-1) hacia (i,j) .....	20
10	- Agua $_{i+1,j-1} \cdot V_{i+1,j-1}.u \cdot V_{i+1,j-1}.v$ .....	23
3	$V_{i-1,j+1}.u > 0 \wedge V_{i-1,j+1}.v > 0 \rightarrow$ Existe flujo desde (i-1, j+1) hacia (i,j) .....	20
11	- Agua $_{i-1,j+1} \cdot V_{i-1,j+1}.u \cdot V_{i-1,j+1}.v$ .....	23
4	$V_{i+1,j+1}.u > 0 \wedge V_{i+1,j+1}.v > 0 \rightarrow$ Existe flujo desde (i+1,j+1) hacia (i,j) .....	20
12	Agua $_{i+1,j+1} \cdot V_{i+1,j+1}.u \cdot V_{i+1,j+1}.v$ .....	23
5	$V_{i,j-1}.u > 0 \rightarrow$ Existe flujo desde (i, j-1) hacia (i,j) .....	20
13	Agua $_{i,j-1} \cdot V_{i,j-1}.u \cdot (1 -  V_{i,j-1}.v )$ .....	25
6	$V_{i-1,j}.v > 0 \rightarrow$ Existe flujo desde (i-1, j) hacia (i,j) .....	20
14	Agua $_{i-1,j} \cdot (1 -  V_{i-1,j}.u ) \cdot V_{i-1,j}.v$ .....	25
7	$V_{i+1,j}.v < 0 \rightarrow$ Existe flujo desde (i+1, j) hacia (i,j) .....	20
15	- Agua $_{i+1,j} \cdot (1 -  V_{i+1,j}.u ) \cdot V_{i+1,j}.v$ .....	25
8	$V_{i,j+1}.u < 0 \rightarrow$ Existe flujo desde (i, j+1) hacia (i,j) .....	20
16	- Agua $_{i,j+1} \cdot V_{i,j+1}.u \cdot (1 -  V_{i,j+1}.v )$ .....	25
<b>Conjunto de ecuaciones que –según la fecha que se modela– dan la temperatura del agua para una profundidad dada</b>		
42	$21.5022 - 0.0953089 z - 0.00197858 z^2 - 3.77092 \operatorname{Tanh}((36-z)/25) + 0.0837432 z \operatorname{Tanh}((36-z)/25) - 0.0024955 z^2 \operatorname{Tanh}((36-z)/25)$ .....	N/A
43	$16.0993 - 0.0240832 z + 0.00130218 z^2 + 0.318405 \operatorname{Tanh}((18-z)/14) + 0.0216605 z \operatorname{Tanh}((18-z)/14) + 0.00126486 z^2 \operatorname{Tanh}((18-z)/14)$ .....	N/A

44	$13.9486 - 0.00680158 z + 1.86762 \operatorname{Tanh}((66-z)/41)$ .....	N/A
45	$14.721 - 0.0485128 z + 0.000481248 z^2 + 0.907214 \operatorname{Tanh}((17-z)/8) + 0.0174424 z \operatorname{Tanh}((17-z)/8) + 0.00021131 z^2 \operatorname{Tanh}((17-z)/8)$ .....	N/A
46	$13.8923 - 0.153968 z + 0.00794168 z^2 + 2.12859 \operatorname{Tanh}((14-z)/7) - 0.114924 z \operatorname{Tanh}((14-z)/7) + 0.00775324 z^2 \operatorname{Tanh}((14-z)/7)$ .....	N/A
47	$18.9339 - 0.215665 z + 0.0031022 z^2 + 4.28557 \operatorname{Tanh}((34-z)/14) - 0.175387 z \operatorname{Tanh}((34-z)/14) + 0.00304845 z^2 \operatorname{Tanh}((34-z)/14)$ .....	N/A
48	$16.981 - 0.080931 z + 0.0187688 z^2 + 0.904002 \operatorname{Tanh}((8-z)/7) + 0.0185053 z^2 \operatorname{Tanh}((8-z)/7)$ .....	N/A

### Planteamiento básico del modelo biológico

17	$d/dt[\text{Masa Fito}(z)] = \text{Crecimiento}(z) - \text{Excreción}(z) - \text{Pastoreo}(z)$ .....	52
18	$d/dt[\text{Masa Fito}(z)] = \text{Min}[\mu_{\text{luz}(z)}, \mu_{\text{nut}(z)}] - \text{Excreción}(z) - \text{Pastoreo}(z)$ .....	53
19	$\mu_{\text{luz}(z)} = \operatorname{Tanh}[\alpha_{\text{l}(z)} \cdot (E_{\text{o}(z)} - E_{\text{ocomp}}) / \mu_{\text{temp}(z)}] \cdot \mu_{\text{temp}(z)}$ .....	54
20	$\mu_{\text{temp}(z)} = 0.851(1.066)^T$ .....	55
21	$E_{\text{o}}(z_2) = E_{\text{o}}(z_1) \cdot \exp[-K_{\text{o}(z)} \cdot (z_2 - z_1)]$ .....	56
22	$K_{\text{d}(z)} = [a_{\text{T}(z)} + b_{\text{b}(z)}] [\mu_{\text{d}(z)}]^{-1}$ .....	56
23	$a_{\text{T}(z)} = 0.0221 + 0.0466 \operatorname{Chl}_{(z)} + (0.1378 - 0.0141 \operatorname{Chl}_{(z)}) \cdot \exp(-m_3 L)$ .....	57
24	$m_3 = 0.28 - 0.18319 \operatorname{Chl}_{(z)} - 0.00709 L + 0.0000418 \operatorname{Chl}_{(z)} L + 0.16604 \operatorname{Chl}_{(z)}^2 + 0.0000992 L^2 + 0.00019 \operatorname{Chl}_{(z)}^2 L - 0.0000029 \operatorname{Chl}_{(z)} L^2 - 0.0464 \operatorname{Chl}_{(z)}^3 - 0.0000004 L^3$ .....	57
25	$L = z / 0.72$ .....	58
26	$b_{\text{b}(z)} = 0.019 \cdot (0.0015 + 0.416 \cdot \operatorname{Chl}_{(z)}^{0.766})$ .....	58
27	$K_{\text{d}(z)} = -0.54455 + 0.073282 z - 0.00220033 z^2 + 0.482306 \operatorname{Chl}_{(z)} - 0.0533926 z \operatorname{Chl}_{(z)} + 0.00154006 z^2 \operatorname{Chl}_{(z)}$ .....	59
28	$\mu_{\text{nut}(z)} = \mu_{\text{max}} \cdot (1 - K_{\text{Q}}/Q)$ .....	65
29	$K_{\text{Q}} = 1.0 / 14.0$ .....	66
30	$\mu_{\text{max}} = \mu_{\text{temp}(z)} [1 - K_{\text{Q}} / (1 + \mu_{\text{temp}(z)})]$ .....	67

**Consumo de nutrientes:** calcula el flujo de nutrientes desde el medio hacia el interior de la célula, dependiendo principalmente de la disponibilidad de este en el medio y del estado nutricional de la célula.

34	$\rho = V'_{\max} \text{PN} [\text{NO}_3 / (K_s + \text{NO}_3)]$ .....	70
31	$V'_{\max} = Q^a \mu_{\text{temp}(z)}$ .....	68
33	$a = \log (V'_{\max} / \mu_{\text{temp}(z)}) / \log(Q)$ .....	69
32	$a = 3.3032 Q - 0.4986$ .....	69

**Perfil vertical de clorofila:** expresiones centrales en el algoritmo 4, el cual reconstruye el perfil vertical de la distribución de la clorofila en la columna de agua.

35	$\text{Chl}(z) = B_0 + [h (\sigma 2\pi)^{-0.5}] \cdot \exp[-0.5 (Z-Z_m)^2 \sigma^{-2}]$ .....	76
36	$h = 18.2 + 58.6 \cdot \text{Chl}_s$ .....	77
37	$\sigma = 17 + 1.78 \cdot \ln(\text{Chl}_s)$ .....	77
38	$\ln(Z_m) = 3.2 - 0.4 \cdot \ln(\text{Chl}_s)$ .....	78
39	$\ln(B_0) = -1.25 + 0.6 \cdot \ln(\text{Chl}_s)$ .....	78

40	$\text{Chl}_{\text{int}} = \int_0^{\text{Profmax}} B_0 + \frac{h}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(Z-Z_m)^2}{\sigma^2}} dZ$ .....	78
----	---	----

41	$\begin{aligned} \text{Chl}_s = & 1.90513 x - 0.0434471 xy + 0.000268121 xy^2 - 2.4532 \cdot 10^{-7} xy^3 - \\ & 1.01888 x^2 + 0.00118525 x^2y + 0.0005886 x^2y^2 - 3.49397 \cdot 10^{-6} x^2y^3 + \\ & 0.373936 x^3 + 0.0108017 x^3y - 0.000444761 x^3y^2 + 2.38403 \cdot 10^{-6} x^3y^3 - \\ & 0.0653372 x^4 - 0.00401867 x^4y + 0.000123365 x^4y^2 - 6.3587 \cdot 10^{-7} x^4y^3 + \\ & 0.00444323 x^5 + 0.000431849 x^5y - 0.0000118203 x^5y^2 + 5.96774 \cdot 10^{-8} x^5y^3 \end{aligned}$
----	--

Donde  $x$  es la concentración promedio de clorofila y  $y$  es la profundidad de la columna de agua (ó ProfTransición, lo que sea menor).....

88