

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA

DIVISION DE FISICA APLICADA
DEPARTAMENTO DE ELECTRONICA Y
TELECOMUNICACIONES

CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES MEDIANTE
CAMPO DE VELOCIDAD

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el
grado de MAESTRO EN CIENCIAS presenta:

Eduardo Javier Moreno Valenzuela

Ensenada, Baja California, México. Julio de 1999.

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA

DIVISION DE FISICA APLICADA
DEPARTAMENTO DE ELECTRONICA Y
TELECOMUNICACIONES

CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES MEDIANTE
CAMPO DE VELOCIDAD

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el
grado de MAESTRO EN CIENCIAS presenta:

Eduardo Javier Moreno Valenzuela

Ensenada, Baja California, México. Julio de 1999.

RESUMEN de la Tesis de Eduardo Javier Moreno Valenzuela, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES. Ensenada, Baja California, México. Junio de 1999.

CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES MEDIANTE CAMPO DE VELOCIDAD

Resumen aprobado por:

Dr. Rafael Kelly Martínez
Director de tesis

La presente tesis trata sobre el estudio del planteamiento de control de robots mediante campo de velocidad. El uso del enfoque del control mediante campo de velocidad es atractivo ya que los movimientos para realizar una tarea son codificados a través de un campo de velocidad que es independiente del tiempo.

En este contexto, uno de los objetivos de esta tesis ha sido proponer controladores que puedan inducir en el robot el cumplimiento del objetivo de control mediante campo de velocidad. En forma paralela al asunto de la búsqueda de controladores, se propone un método para encontrar campos vectoriales con características arbitrarias en el espacio n -dimensional.

Aunque se ha dado importancia a los resultados de naturaleza teórica, también se han llevado a la práctica los controladores estudiados poniendo en claro las ventajas, así como los problemas de implementación del uso de esta filosofía de control.

Palabras clave: Robótica, estabilidad, campos de velocidad, campos vectoriales, control.

ABSTRACT of the Thesis of Eduardo Javier Moreno Valenzuela, presented as a partial requirement for obtaining the degree of MASTER OF SCIENCE. Ensenada, Baja California, Mexico. June 1999.

ROBOT CONTROL VIA VELOCITY FIELDS

This thesis deals with the study of robot control via velocity fields. The approach of robot control via velocity fields is attractive because the motion to performance a task is specified through velocity fields which are independent of time.

This thesis addresses the design of controllers to guarantee the control objective via velocity field. Also, it is proposed a method to design vectorial fields with arbitrary characteristics in the n -dimensional space.

Although importance is given to theoretical results, the controllers studied were experimentally tested on a direct drive arm setting clear the advantages as well as implementation problems in the use of this control philosophy.

Keywords: Robotics, stability, velocity fields, vector fields, control.

DEDICATORIA

A mis Padres y Hermanos

A Salud

AGRADECIMIENTOS

En primera instancia deseo agradecer al Dr. Rafael Kelly por tratar de transmitir su espíritu crítico y científico a sus alumnos y por su apoyo en la terminación de este trabajo.

Agradezco a los miembros del comité de tesis, al Dr. César Cruz y al Dr. Heriberto Márquez, por sus cuestionamientos y sugerencias acerca de este trabajo de tesis.

También quisiera agradecer a mis amigos y compañeros de generación (son muchos nombres para ponerlos aquí) por las discusiones y experiencias que hemos pasado, tanto en el plano académico como personal.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

CONTENIDO

I	INTRODUCCIÓN	1
I.1	Control mediante campo de velocidad	5
I.2	Objetivos de la tesis	5
I.3	Aportaciones	6
II	MODELADO Y CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES	7
II.1	Modelo cinemático directo	7
II.2	Modelo dinámico	9
II.3	Control de robots	10
III	ESPECIFICACIÓN DE CAMPOS DE VELOCIDAD	15
III.1	Campos escalares y vectoriales	15
III.1.1	Campos escalares	15
III.1.2	Campos vectoriales	16
III.2	Especificación de campos de velocidad	19
III.2.1	Motivación	19
III.2.2	Formas de especificación	24
III.2.3	Especificación indirecta	27
III.2.4	Ejemplos de especificación indirecta	29
III.3	Conclusiones	33
IV	CONTROL MEDIANTE CAMPO DE VELOCIDAD	35
IV.1	Introducción	35

IV.2	Controlador basado en dinámica inversa	36
IV.3	Controlador basado en dos lazos de retroalimentación	39
IV.4	Aplicación a coordenadas articulares	42
IV.5	Conclusiones	43
V	RESULTADOS EXPERIMENTALES	44
V.1	Consideraciones prácticas de la implementación	45
V.2	Campo de velocidad en coordenadas operacionales	47
V.2.1	Especificación del campo de velocidad	47
V.2.2	Experimentos con el controlador basado en dinámica inversa . . .	50
V.2.3	Experimentos con el controlador basado en dos lazos de retroali- mentación	57
V.3	Campo de velocidad en coordenadas articulares	61
V.3.1	Especificación del campo de velocidad	61
V.3.2	Experimento con el controlador basado en dinámica inversa . . .	63
V.4	Conclusiones	66
VI	CONCLUSIONES GENERALES	68
VI.1	Conclusiones	68
VI.2	Problemas abiertos	68
	LITERATURA CITADA	70
A	El teorema de LaSalle	73
B	Modelo cinemático y dinámico del robot de 2 grados de libertad	77

C	Descripción del sistema experimental	80
D	Programas en SIMNON	83
D.1	Dinámica del robot	83
D.2	Fricción de Coulomb	85
D.3	Controlador basado en dinámica inversa en coordenadas operacionales .	85
D.3.1	Conector	89
D.4	Controlador basado en dos lazos de retroalimentación	89
D.4.1	Conector	94
D.5	Controlador basado en dinámica inversa en coordenadas articulares . .	95
D.5.1	Conector	97
E	Programas en SPAC	98
E.1	Controlador basado en dinámica inversa en coordenadas operacionales .	98
E.2	Controlador basado en dos lazos de retroalimentación	103
E.3	Controlador basado en dinámica inversa en coordenadas articulares . .	108

FECHA DE INGRESO
 OCT 15 1999
 BIBLIOTECA CICESE

LISTA DE FIGURAS

Figura	Página
1 Diagrama abstracto de un robot de n grados de libertad (g.d.l.)	2
2 Descripción de un robot de 4 grados de libertad	4
3 Entradas y salidas del robot.	10
4 Esquemas generales de control, a) coordenadas articulares, b) coordenadas operacionales.	12
5 Esquemas generales de control mediante campo de velocidad, a) coordenadas articulares, b) coordenadas operacionales.	13
6 Superficie de nivel $f(x, y, z) = k$. En este caso $k = 0$	17
7 Curvas de nivel $f(x, y) = k$	17
8 Un campo vectorial que describe la velocidad del flujo en una cañería.	18
9 Gradiente y curvas de nivel del campo escalar $f(x, y) = x \exp^{-(x^2+y^2)}$	20
10 Gráfica del campo vectorial $\mathbf{v}_o(\mathbf{q})$	21
11 Campo vectorial que apunta hacia la curva Γ_q	21
12 Campo vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{q})$ que dibuja un círculo.	23
13 Especificación indirecta de un campo vectorial.	25
14 Campo vectorial que dibuja el círculo $(q_1 - q_{1c})^2 + (q_2 - q_{2c})^2 - r_0^2 = 0$	31
15 Campo vectorial que dibuja la parábola $q_2 = q_1^2 - 1$	33
16 Campo vectorial que dibuja un punto.	34
17 Diagrama de bloques del controlador basado en dinámica inversa para coordenadas operacionales.	38
18 Diagrama de bloques del controlador basado en dos lazos de retroalimentación.	41

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura	Página
19 Robot usado para experimentación	45
20 Campo vectorial usado en experimentos, el cual dibuja el óvalo de Cassini.	50
21 Resultado de experimentación y simulación de τ_1 para el experimento 1.	52
22 Resultado de experimentación y simulación de τ_2 para el experimento 1.	52
23 Gráfica de y vs x experimental para el experimento 1.	53
24 Resultado experimental y de simulación de $\ \dot{\mathbf{x}}\ $ para el experimento 1.	53
25 Resultado de experimentación y simulación de τ_1 para el experimento 2.	54
26 Resultado de experimentación y simulación de τ_2 para el experimento 2.	55
27 Gráfica de y vs x de simulación y experimental para el experimento 2. . .	55
28 Gráfica de $\ \dot{\mathbf{x}}\ $ de simulación y experimental para el experimento 2. . .	56
29 Resultado de experimentación y simulación de τ_1 para el experimento 3.	58
30 Resultado de experimentación y simulación de τ_2 para el experimento 3.	58
31 Gráfica de y vs x experimental para el experimento 3.	59
32 Gráfica de $\ \dot{\mathbf{x}}\ $ de simulación y experimental para el experimento 3. . .	59
33 Resultado de experimentación y simulación de τ_1 para el experimento 4.	60
34 Resultado de experimentación y simulación de τ_2 para el experimento 4.	61
35 Gráfica de y vs x de simulación y experimental para el experimento 4. . .	61
36 Gráfica de $\ \dot{\mathbf{x}}\ $ de simulación y experimental para el experimento 4. . .	62
37 Campo vectorial usado en experimento, el cuál dibuja un círculo. . . .	63
38 Campo de velocidad en coordenadas articulares. Par τ_1 experimental y simulado.	64

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
39	Campo de velocidad en coordenadas articulares. Par τ_2 experimental y simulado.	65
40	Campo de velocidad en coordenadas articulares. Grafica de q_2 vs q_1 experimental.	65
41	Campo de velocidad en coordenadas articulares. Grafica de $\ \dot{q}\ $ de simulación y experimental.	66
42	Robot Manipulador	77
43	Esquema de componentes del sistema experimental.	80

LISTA DE TABLAS

	Página
I Parámetros dinámicos y cinemáticos del robot de 2 gdl.	77
II Valores numéricos de los parámetros cinemáticos y dinámicos del robot experimental.	82

I INTRODUCCIÓN

Un robot es un dispositivo que puede ser tan versátil como características físicas o mecánicas posea. Ejemplos de robots son un brazo manipulador, un vehículo provisto de ruedas o patas para movilizarse, un vehículo con la capacidad de volar, o una combinación de éstos (Latombe 1991).

En este trabajo son de interés los robots manipuladores industriales, por lo que una definición concreta de éstos es necesaria. De acuerdo a la definición adoptada por la Federación Internacional de Robótica (Kelly, 1995), *un robot manipulador industrial es una máquina manipuladora con varios grados de libertad controlada automáticamente, reprogramable y de usos múltiples, pudiendo estar en un lugar fijo o móvil, para su empleo en aplicaciones industriales.*

En este trabajo se considera el estudio de robot manipuladores que poseen articulaciones de tipo rotacional¹. La figura 1 ilustra en forma abstracta como un robot manipulador de articulaciones rotacionales es representado por una cadena cinemática abierta.

En la figura 1 se observa un marco de referencia cartesiano de tres dimensiones denotado por los ejes x_1 , x_2 y x_3 , que será denotado en este trabajo también por x , y y z en forma indistinta. Dicho marco de referencia puede ser colocado en cualquier lugar de la base del robot. Los eslabones son enumerados consecutivamente desde la base (eslabón 0) hasta el final (eslabón n). Las articulaciones son los puntos de contacto entre los eslabones y son numeradas de tal forma que la articulación i conecta los eslabones i e $i - 1$. La coordenada articular generalizada q_i es el desplazamiento angular alrededor del eje de movimiento asociado a cada articulación. Dicho eje de movimiento es mostrado en la figura 1 por una línea punteada en cada articulación. Las coordenadas articulares también reciben el nombre de posiciones articulares.

¹Las articulaciones de los robots son básicamente de dos tipos: rotacionales y traslacionales (Kelly, 1995).

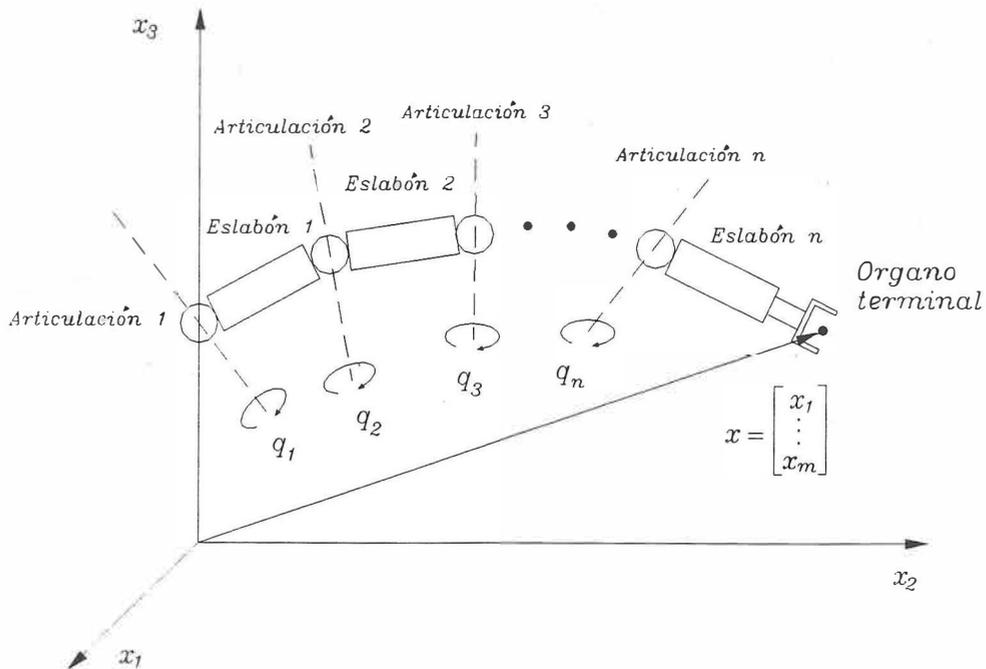


Figura 1: Diagrama abstracto de un robot de n grados de libertad (g.d.l.)

En base a lo anterior, el adoptar la siguiente definición pragmática de robot manipulador también resulta válido (Kelly, 1995): *un robot manipulador, es un brazo mecánico articulado formado de eslabones conectados a través de articulaciones*. Generalmente el número de articulaciones en un manipulador determina su número de grados de libertad (g.d.l.).

Para propósitos analíticos, las posiciones articulares son agrupadas para formar el vector de posiciones articulares

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}. \quad (\ddagger)$$

Es importante señalar que el espacio de coordenadas (o posiciones) articulares es referido en muchas ocasiones como el *espacio de configuración articular*. En un robot manipulador las posiciones articulares \mathbf{q} , como las velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt}\mathbf{q}$ son

medidas mediante sensores convenientemente colocados en el robot.

Por otro lado, resulta natural el tratar de describir el movimiento de los robots manipuladores en el *espacio de operación* donde la posición y orientación del organo terminal² del robot son de interés. El espacio de operación es definido como la porción del espacio físico que el organo terminal de robot puede acceder para realizar alguna tarea dada. Dicha posición y orientación se expresa con respecto al marco de referencia coordinado cartesiano $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ colocado en la base del robot, así como, en forma eventual, en términos de los llamados ángulos de Euler. Los ángulos de Euler describen la orientación del organo terminal con respecto a un marco coordinado en el extremo final del robot. De esta forma, las posiciones y orientaciones son agrupadas en el vector \mathbf{x} de coordenadas del espacio de operación o coordenadas operacionales

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde $m \leq n$. El vector de coordenadas operacionales \mathbf{x} también es llamado vector de posiciones operacionales. El espacio \mathbf{x} de coordenadas operacionales es referido algunas veces como *espacio operacional* (Sciavicco y Siciliano, 1996). La figura 2 muestra un caso en que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$.

A cada unión le corresponde un actuador, el cual puede ser de naturaleza electromecánica, neumática o hidráulica. Dichos actuadores tienen como objetivo generar los pares y fuerzas los cuales proveen de movimiento a los eslabones. El conjunto de pares y fuerzas generados por los actuadores del robot son agrupados para fines

²El organo terminal es una herramienta que el robot usa para realizar una tarea dada. Ejemplos de organos terminales son una garra, una herramienta de corte tal como un rayo láser, una herramienta de pintado, etc.

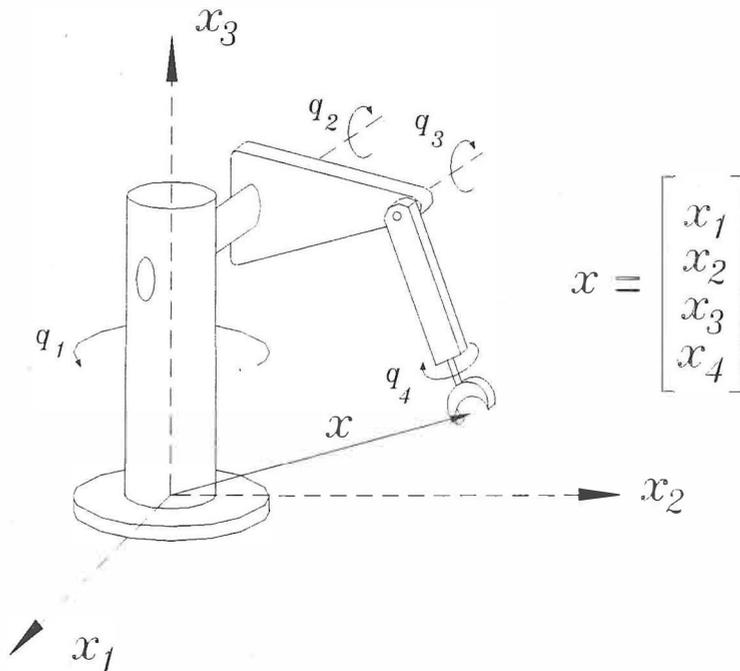


Figura 2: Descripción de un robot de 4 grados de libertad

analíticos en el vector

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}. \quad (3)$$

En resumidas cuentas, un robot manipulador industrial es constituido por (Siaviccio y Siciliano, 1996):

- Una estructura mecánica o manipulador que consiste de una secuencia de cuerpos rígidos (eslabones) conectados por medio de articulaciones (uniones).
- Actuadores que ponen en movimiento al manipulador. Los actuadores pueden estar instalados o no en las articulaciones del robot³. Los actuadores emplea-

³En el caso en que los actuadores no estén instalados en las articulaciones, la fuerza o el par requerido para el movimiento es transferido hacia las articulaciones por medio de bandas o engranes.

dos para el movimiento del robot pueden ser de tipo eléctrico e hidráulico, y ocasionalmente neumáticos.

- Sensores para medir las variables necesarias para controlar el robot y, si es necesario, para medir algunas variables en el ambiente físico con el que el robot interactúa.
- Un sistema de control (computadora) que posibilita el control y la supervisión del movimiento del manipulador.

I.1 Control mediante campo de velocidad

La tarea encomendada a un robot manipulador en el espacio de operación, o articular, es especificada tradicionalmente como función del tiempo. Bajo este esquema, el objetivo es que el robot siga dicha trayectoria en cada instante de tiempo. La idea de la especificación del movimiento de un robot manipulador independiente del tiempo parecería ilógica a primera vista. Sin embargo, existen aplicaciones en que el tiempo en la ejecución de los movimientos carece de importancia (Li y Horowitz, 1995; 1996). Cuando éste es el caso, el interés que prevalece es el que los movimientos del robot completen la tarea encomendada sin deterioro en la ejecución ante la presencia de fuerzas externas en un intervalo de tiempo. Con el control mediante campo de velocidad es posible especificar el movimiento deseado en el robot sin involucrar en forma explícita al tiempo.

I.2 Objetivos de la tesis

La ventaja del enfoque del control mediante campo de velocidad es que resulta ser atractivo tener un *comportamiento natural* en el movimiento del robot cuando éste realiza la ejecución de la tarea encomendada. Dicho comportamiento natural es inducido al codificar los movimientos por medio de un *campo de velocidad* ya sea en el espacio articular

u operacional. La exclusión del tiempo en la especificación del movimiento se logra si el campo de velocidad es dependiente de las coordenadas articulares u operacionales, según sea el caso.

Bajo este relieve, la presente tesis tiene como objetivo esencial el análisis y solución del planteamiento de *control de robots manipuladores mediante campo de velocidad*. Cabe decir que dicho planteamiento de control fué originalmente propuesto por Li y Horowitz (1995; 1996).

En este trabajo de tesis se ha puesto gran atención a los resultados de naturaleza teórica. Sin embargo, se han llevado a la práctica la mayoría de los resultados obtenidos.

I.3 Aportaciones

- En este trabajo se explora el problema de la especificación de campos de velocidad con características dadas por el usuario. Como resultado de ésto, se establece una filosofía con fundamentos analíticos para especificar campos de velocidad en los que se codifica el movimiento para desarrollar la tarea requerida para el robot.
- Se han propuesto y analizado controladores para satisfacer el objetivo de control mediante campo de velocidad para robots manipuladores.
- En forma complementaria, se han llevado a las práctica los controladores estudiados poniendo en claro las ventajas y también los problemas de implementación del uso de esta filosofía de control.

II MODELADO Y CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES

Este capítulo repasa los fundamentos matemáticos sobre los modelos cinemático y dinámicos de robots manipuladores. Además se discuten cuestiones acerca de los objetivos de control de robots más comunes. Finalmente se comparan éstos con el objetivo de control que persigue el control mediante campo de velocidad. En el apéndice B se estudian los modelos cinemático y dinámico de un robot de dos grados de libertad.

En este trabajo el símbolo \mathbb{R} denota el conjunto de los números reales. El espacio euclídeo n -dimensional, denotado por \mathbb{R}^n , consta de todas las n -uplas ordenadas de números reales (Marsden y Hoffman, 1998). Simbólicamente,

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

II.1 Modelo cinemático directo

El problema de cinemática directa consiste en determinar la posición y orientación \mathbf{x} del extremo final del robot en función de las posiciones articulares \mathbf{q} . Si denotamos a $\mathbf{h}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ como la cinemática directa, esto es, la relación entre el espacio de configuración articular y el espacio de configuración operacional, entonces la posición y orientación $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ del efector final es dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{q}). \quad (4)$$

Un robot manipulador es llamado *cinemáticamente redundante* cuando el número de grados de libertad es mayor que el número de variables que son necesarias para describir una tarea dada (Sciavicco y Siciliano, 1996). Otra forma de decir que un robot es cinemáticamente redundante, es cuando existe un conjunto de valores no aislados del

vector \mathbf{q} para los cuales la posición y orientación del extremo final es la misma (Coello, 1997).

Por otro lado, el jacobiano del robot describe un mapeo de velocidad del espacio articular al espacio operacional del robot. La derivada temporal del modelo cinemático directo (4) dá el modelo cinemático diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = J(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (5)$$

donde $J(\mathbf{q})$ es una matriz llamada jacobiano analítico (Canudas *et al.*, 1996; Coello, 1997).

En un robot no redundante ($n = m$) existen ciertas configuraciones para las cuales el jacobiano resulta ser singular, esto significa que en estas posiciones el jacobiano pierde rango. Dichas configuraciones son llamadas *singularidades cinemáticas*. Evitar las singularidades en un manipulador es de interés por lo siguiente (Sciavicco y Siciliano, 1996):

- Las singularidades normalmente aparecen cuando el extremo final del robot se encuentra en la frontera física del espacio de trabajo.
- Cuando el robot está en una singularidad, puede existir un número infinito de soluciones al problema de *cinemática inversa*⁴.
- En la vecindad de una singularidad, velocidades pequeñas en el espacio operacional pueden reflejarse en velocidades grandes en el espacio articular.

Ahora bien, si el robot es redundante ($m < n$), se observa que la matriz jacobiana resulta ser no cuadrada, por lo que una posición articular dada es admisible, es decir que no es una configuración singular, debe cumplir

$$\text{rango}\{J(\mathbf{q})\} = m. \quad (6)$$

⁴El problema de cinemática inversa consiste en la determinación de las variables articulares correspondientes a una posición y orientación dada del elemento terminal.

Tomando la segunda derivada de la ecuación (5) tenemos

$$\ddot{\mathbf{x}} = J(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (7)$$

Así, la solución correspondiente a la ecuación (7) en términos de la pseudoinversa del jacobiano es

$$\ddot{\mathbf{q}} = J(\mathbf{q})^\dagger [\ddot{\mathbf{x}} - \dot{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}] \quad (8)$$

donde la pseudoinversa es dada por

$$J(\mathbf{q})^\dagger = [J(\mathbf{q})^T J(\mathbf{q})]^{-1} J(\mathbf{q})^T \quad (9)$$

asumiendo que $J(\mathbf{q})^T J(\mathbf{q})$ es no singular (Canudas *et al.*, 1996). Cabe decir que si se trata de un robot no redundante, i.e. $n = m$, la pseudoinversa del jacobiano resulta ser la matriz inversa del jacobiano.

II.2 Modelo dinámico

Con la formulación de Lagrange, las ecuaciones del movimiento pueden ser derivadas en forma sistemática independientemente del marco de referencia (Sciavicco y Siciliano, 1996). El *lagrangiano* de un sistema mecánico puede ser definido como una función de las coordenadas generalizadas del sistema como

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (10)$$

donde $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es la energía cinética, $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ representa la energía potencial del sistema, \mathbf{q} es el vector de posiciones articulares y $\dot{\mathbf{q}}$ es el vector de velocidades articulares.

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para un robot manipulador de n g.d.l. están expresadas por

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} = \tau_i \quad (11)$$

para $i = 1, \dots, n$, donde q_i es la posición articular de un eslabón y τ_i es el par ejercido externamente en la articulación.

La ecuación dinámica de un robot de n eslabones seriales con articulaciones rotacionales puede ser escrita como (Spong y Vidyasagar, 1989)

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (12)$$

que es una ecuación diferencial no lineal en el estado $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$, en donde $M(\mathbf{q})$ es una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$ llamada de *inercia*, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es una matriz de $n \times n$ llamada de *fuerzas centrífugas y de Coriolis*, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es un vector de $n \times 1$ llamado de *pares o fuerzas gravitacionales*.

Una propiedad interesante y útil en muchos análisis es que la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es definida positiva⁵ para todo $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ y su inversa, i.e. la matriz $M(\mathbf{q})^{-1}$, existe.

II.3 Control de robots

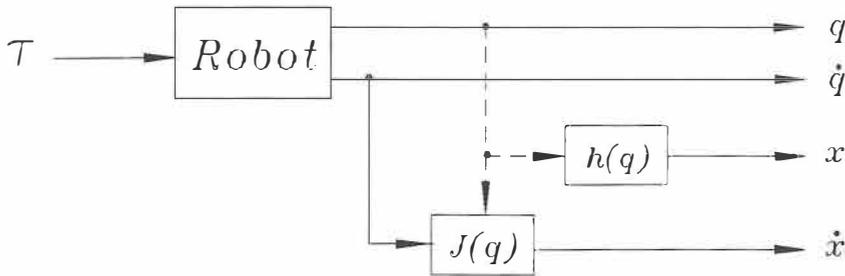


Figura 3: Entradas y salidas del robot.

Los robots son sistemas multivariantes que tienen como entrada a los pares $\boldsymbol{\tau}$, mientras que como salidas es posible elegir entre las posiciones y velocidades articulares, ya sean dadas en el espacio articular o en el espacio operacional. La figura 3 esquematiza este concepto.

Un problema de control de robots consiste en determinar cuáles son los pares necesarios para que el robot satisfaga un objetivo de control planteado. Es ilustrativo, para

⁵Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, no necesariamente simétrica, es definida positiva si $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, con $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ (Kelly, 1995).

propósitos de comparación, la clasificación de los objetivos de control más comunes (Kelly, 1995):

- *Control de posición pura.* Una configuración fija es especificada, donde el objetivo es llevar y mantener la posición del robot alrededor de una posición deseada constante partiendo desde cualquier condición inicial. Los comportamientos de transitorios son no especificados. El objetivo de control de posición pura en coordenadas articulares es puesto como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{q}_d - \mathbf{q}(t)] = \mathbf{0},$$

y en coordenadas operacionales

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{x}_d - \mathbf{x}(t)] = \mathbf{0},$$

donde $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ es el vector de posiciones articulares deseadas y $\mathbf{x}_d \in \mathbb{R}^m$ es el vector de posiciones operacionales deseadas, donde ambos son vectores constantes.

- *Control de movimiento.* Consiste en que las articulaciones o el extremo final sigan una trayectoria de referencia variante con el tiempo (con velocidad y aceleración continuas) especificada. En general la trayectoria deseada es supuesta tal que cumpla con las capacidades de par o fuerza de los actuadores. El objetivo de control de movimiento es el seguimiento asintótico de la trayectoria deseada, i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}(t)] = \mathbf{0},$$

o bien

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}(t)] = \mathbf{0},$$

donde $\mathbf{q}_d(t)$ es el vector de posiciones articulares deseadas y $\mathbf{x}_d(t)$ es el vector de posiciones operacionales deseadas, donde ambos son vectores función del tiempo.

Cabe decir que el problema de control de posición pura es un caso particular del control de movimiento. Además, es algunas veces frecuente utilizar en la práctica el

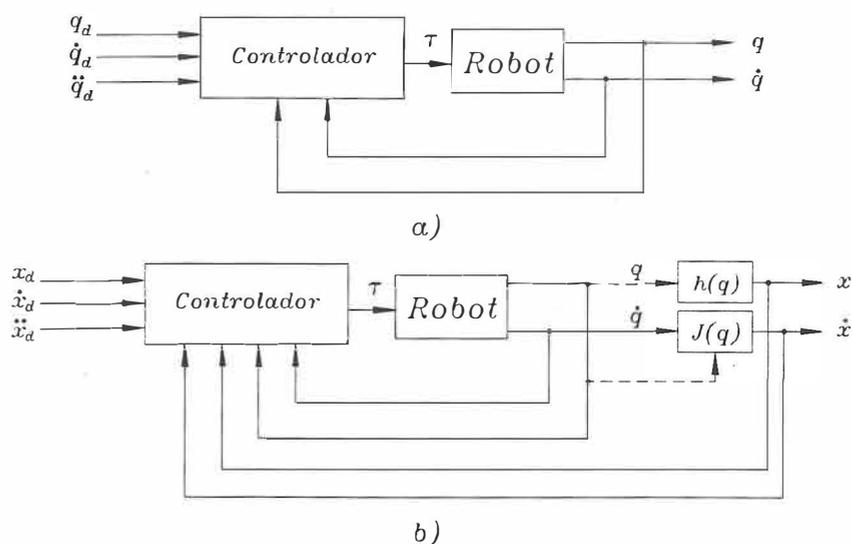


Figura 4: Esquemas generales de control, a) coordenadas articulares, b) coordenadas operacionales.

control de posición pura para resolver de manera artificial el control de movimiento, especificando una serie de puntos los cuales definirían una trayectoria que se desea seguir. La figura 4 muestra los esquemas generales de control de movimiento en coordenadas articulares y operacionales.

Recientemente ha sido reportado en la literatura un nuevo planteamiento de control denominado control mediante campo de velocidad (Li y Horowitz, 1995; 1996) que pretende ser una alternativa al control de movimiento. En el control mediante campo de velocidad la especificación es un *campo vectorial de velocidad deseado* \mathbf{v} , el cual puede ser función de las coordenadas articulares \mathbf{q} , o de las coordenadas operacionales \mathbf{x} , dependiendo del espacio de configuración en que se desee aplicar esta estrategia de control. Este campo vectorial de velocidad asocia un vector (la velocidad deseada en el robot) a cada punto del espacio de configuración del robot.

El objetivo del control mediante campo de velocidad consiste en hacer que el error del campo de velocidad sea cero. Debe entenderse como error de campo de velocidad a la diferencia entre el campo de velocidad deseado y el vector velocidad del manipu-

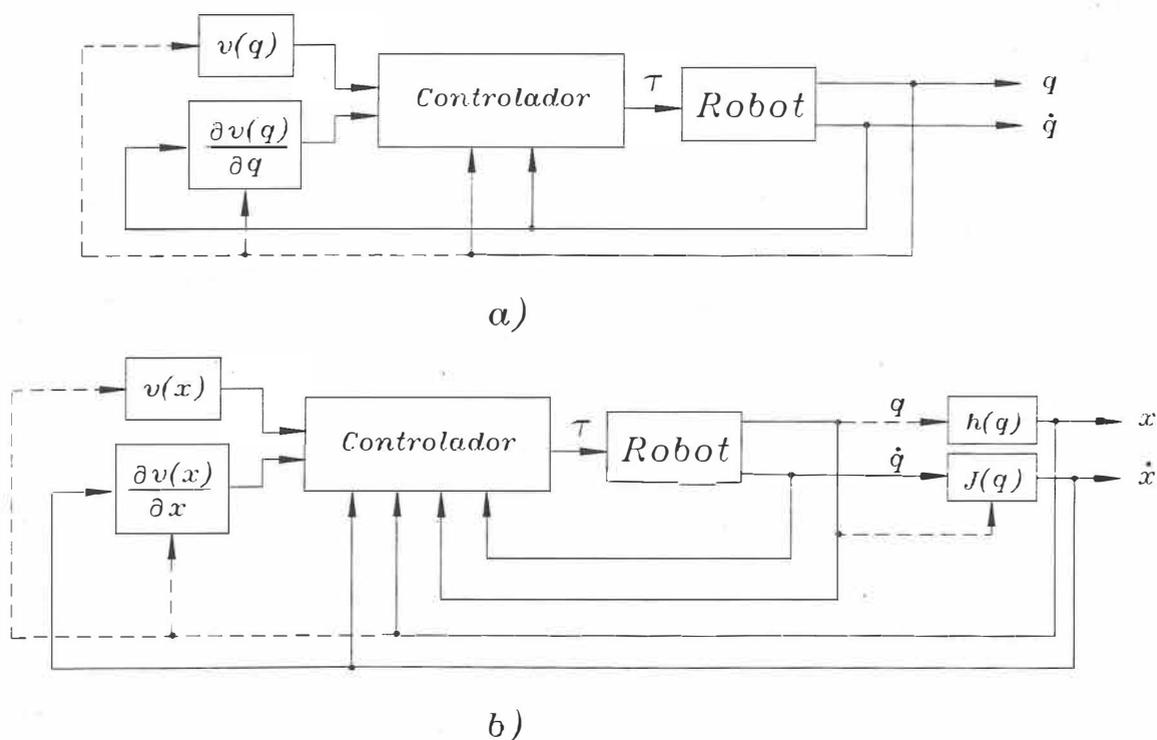


Figura 5: Esquemas generales de control mediante campo de velocidad, a) coordenadas articulares, b) coordenadas operacionales.

lador. Lo anterior significa que el objetivo de control mediante campo de velocidad en coordenadas articulares consiste en

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{v}(\mathbf{q}(t)) - \dot{\mathbf{q}}(t)] = \mathbf{0}, \quad (13)$$

donde $\mathbf{v}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el campo de velocidad especificado en coordenadas articulares. En caso de coordenadas operacionales, el objetivo de control es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{v}(\mathbf{x}(t)) - \dot{\mathbf{x}}(t)] = \mathbf{0}, \quad (14)$$

donde $\mathbf{v}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es el campo de velocidad en coordenadas operacionales.

La figura 5 muestra esquemas generales de control mediante campo de velocidad en coordenadas articulares y operacionales. Se observa que el campo de velocidad especificado y su derivada temporal hacen las veces de referencia de entrada al controlador.

En este escenario, el objetivo es encontrar controladores que puedan inducir en el robot el cumplimiento del objetivo de control mediante campo de velocidad. En forma paralela al asunto de la búsqueda de controladores, un tema que requiere de reflexión profunda es el asociado a la manera de determinar el campo de velocidad deseado v . Este problema es resuelto al proponer un método para encontrar campos vectoriales con características arbitrarias en el espacio n -dimensional y justamente ello es tratado en el capítulo siguiente.

III ESPECIFICACIÓN DE CAMPOS DE VELOCIDAD

En este capítulo se repasan algunos fundamentos matemáticos sobre campos escalares y vectoriales, además de sus significados físicos y geométricos. Particularmente es de interés el gradiente. Además se plantea una manera de especificar campos vectoriales con características arbitrarias. El hecho de poder especificar campos vectoriales con características arbitrarias representa una aportación de este trabajo.

III.1 Campos escalares y vectoriales

El material que se presenta en esta sección ha sido inspirado en gran medida de Marsden y Tromba (1988), Kreyszig (1962) y Wylie (1975).

III.1.1 Campos escalares

Un campo escalar es definido en una región en el espacio n -dimensional si una cantidad escalar puede ser asociada a cada punto de esa región. Dicha cantidad escalar puede cambiar de un punto a otro y la magnitud de dicho cambio depende de la naturaleza del campo, de la distancia entre los puntos y la dirección de desplazamiento entre ellos.

Definición (Campo escalar). Un campo escalar en un mapeo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna un número real a cada punto del espacio \mathbb{R}^n .

—□

Un ejemplo simple de un campo escalar es la distribución de la temperatura en una lámina de metal. Si se conectan los puntos de igual temperatura se obtendría lo que se conoce como *curvas isotérmicas*. Podemos extender este ejemplo a una dimensión más, si en vez de que se tratase de la temperatura en una lámina de metal fuera la temperatura en una habitación. En este caso, si se conectan los puntos de igual

temperatura, lo que se obtiene son las denominadas *superficies isotérmicas*.

Desde un punto de vista geométrico, el resultado de unir puntos del mismo valor en campo escalares referidos a dos dimensiones, son las llamadas *curva de nivel*. De manera análoga, el unir puntos en el espacio tridimensional, que al ser evaluados por campo escalar resulte la misma cantidad escalar, dá como resultado las *superficies de nivel*.

Definición (Superficie de nivel en \mathbb{R}^n). Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar y k una constante real. Entonces el conjunto

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = k\}$$

define una superficie de nivel para un k dado. Si se trata del plano, i.e. $n = 2$, S se llamará curva de nivel.

□

A manera de ilustración, considérese el campo escalar

$$f(x, y, z) = z - x \exp^{-(x^2+y^2)}. \quad (15)$$

La figura 6 muestra la *superficie* de nivel $f(x, y, z) = 0$.

Por otro lado la figura 7 ilustra algunas curvas de nivel del campo escalar

$$f(x, y) = x \exp^{-(x^2+y^2)}. \quad (16)$$

III.1.2 Campos vectoriales

Es frecuente encontrar en la naturaleza que algunas propiedades físicas de un objeto pueden cambiar de magnitud, dirección y sentido de un punto a otro de éste. Como es sabido, las características de los vectores son la magnitud, dirección y sentido. La anterior significa que cierta propiedad del objeto en cuestión puede ser descrita por un campo vectorial.

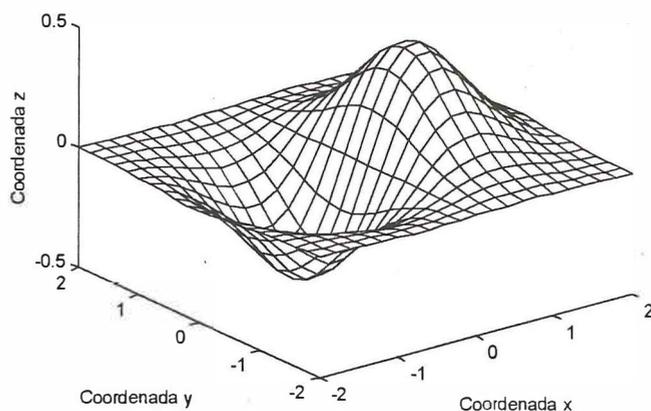


Figura 6: Superficie de nivel $f(x, y, z) = k$. En este caso $k = 0$.

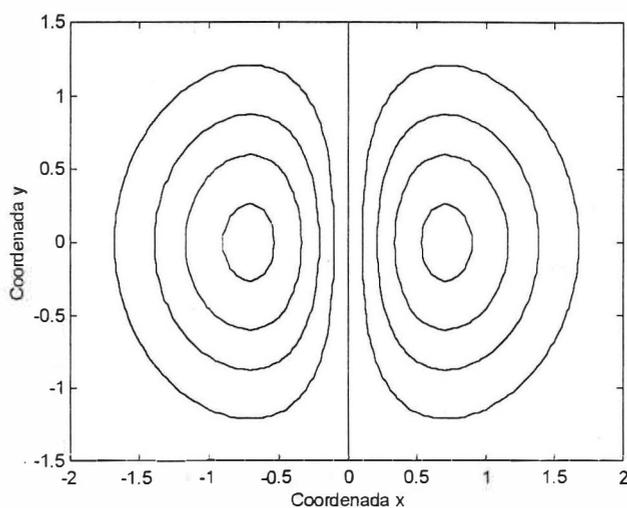


Figura 7: Curvas de nivel $f(x, y) = k$.

Definición (Campo vectorial). Un campo vectorial en el espacio \mathbb{R}^n es un mapeo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que asigna a punto \mathbf{x} de \mathbb{R}^n un vector $f(\mathbf{x})$.

□

Como ejemplo de campo vectorial, imaginemos un fluido moviéndose a través de una cañería. Si asociamos a cada punto del fluido la velocidad de ese mismo punto

obtendremos el campo vectorial \mathbf{v} que describe la velocidad del fluido. Nótese que la longitud de los vectores, así como la dirección de estos puede cambiar de un punto a otro.

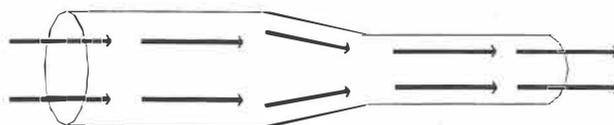


Figura 8: Un campo vectorial que describe la velocidad del flujo en una cañería.

Otro problema común es el de encontrar la dirección de mayor o menor crecimiento de un campo escalar en el espacio \mathbb{R}^n . Para ejemplificar este problema, piénsese en la elección de un punto en una habitación. Para encontrar la dirección de crecimiento de la temperatura tenemos que medir la temperatura de todos los puntos en la vecindad del punto de referencia. El de mayor temperatura indicará que es en esa dirección en la que la temperatura aumenta mayormente. Lo dicho anteriormente equivale a determinar la dirección de mayor crecimiento de un campo escalar.

Definición (Gradiente). Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo y diferenciable. Luego, el gradiente de $f(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, es definido como

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (17)$$

donde ∇ ("nabla") es el operador gradiente.

□

Teorema (Gradiente). Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar con primeras derivadas parciales continuas. Entonces el gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$ existe, y si para un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ el gradiente es un vector no nulo, este indica la dirección de máximo crecimiento del campo escalar $f(\mathbf{x})$ al punto \mathbf{x}_0 .

□

La prueba de este teorema puede consultarse en Kreyszig (1962).

Ahora bien, una *superficie de nivel* en el espacio n -dimensional es descrita por los puntos \mathbf{x} que cumplen con que $f(\mathbf{x}) = k$, donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y k es una constante real. Si se cambia el valor de k lo que se obtiene es una superficie de nivel distinta. Del teorema anterior se sabe que el gradiente indica la dirección de mayor crecimiento de una función escalar $f(\mathbf{x})$. Si se elige una superficie de nivel en un campo escalar, ésta descansará en puntos en los que el gradiente se mantiene igual en magnitud. El siguiente teorema establece la relación entre las superficies de nivel de un campo escalar $f(\mathbf{x})$ y su gradiente.

Teorema (Vector normal a una superficie de nivel en \mathbb{R}^n). Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar con primeras derivadas parciales continuas y sea \mathbf{x}_0 un punto que está en la superficie de nivel definida por $f(\mathbf{x}) = k$ (esto significa que $f(\mathbf{x}_0) = k$), para k constante real. Entonces $\nabla f(\mathbf{x})$ es normal a la superficie de nivel que pasa por el punto \mathbf{x}_0 .

□

Este teorema es probado en Marsden y Tromba (1988).

Como ejemplo, sea el campo escalar descrito por la ecuación (16). La figura 9 ilustra algunas curvas de nivel y los vectores gradiente de $f(x, y)$.

III.2 Especificación de campos de velocidad

III.2.1 Motivación

Resulta de interés el poder especificar campos vectoriales de características arbitrarias, tal como el que un campo vectorial dibuje una curva en el espacio n -dimensional, o que tenga características particulares en magnitud y dirección en algunas zonas del espacio en cuestión. En esta subsección se introducen algunos conceptos intuitivos que ayudarán a especificar campos vectoriales con características arbitrarias. La especificación de éstos campos vectoriales será usada posteriormente para especificar campos

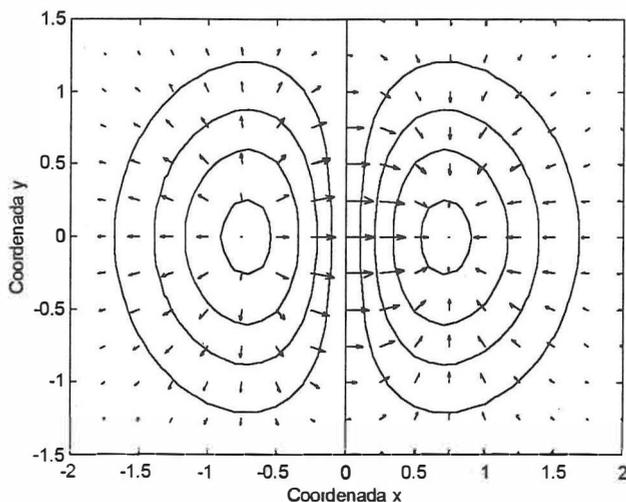


Figura 9: Gradiente y curvas de nivel del campo escalar $f(x, y) = x \exp^{-(x^2+y^2)}$

de velocidad.

Para fines de motivación en la especificación de un campo vectorial, considere un círculo de radio $r_0 = 1$ en el espacio articular⁶ de dos dimensiones. Esta curva es descrita por el conjunto

$$\Gamma_q = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 : f(\mathbf{q}) = 0\}$$

donde⁷ $f(\mathbf{q}) = q_1^2 + q_2^2 - r_0^2$. El gradiente $\nabla f(\mathbf{q})$ apunta en la dirección de máximo crecimiento de la función $f(\mathbf{q})$. En este caso, el gradiente de $f(\mathbf{q})$ es dado por

$$\nabla f(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 2q_1 \\ 2q_2 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

el cual describe un mapeo de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 . Sin embargo, podrá observarse que el vector gradiente (18) aumenta su magnitud en la medida en que se eligen un punto lejano al origen. Un campo vectorial que conserva una magnitud constante al evaluarse en

⁶El análisis y los ejemplos que se traten referentes a campos vectoriales serán referidos a coordenadas articulares, pero obviamente son aplicables a coordenadas operacionales.

⁷Es conveniente aclarar que cuando el espacio de configuración en que se está trabajando es el articular, nos referiremos a dicha conjunto como Γ_q , y en el caso de que el espacio de configuración sea el operacional, este conjunto será denotado como Γ_x .

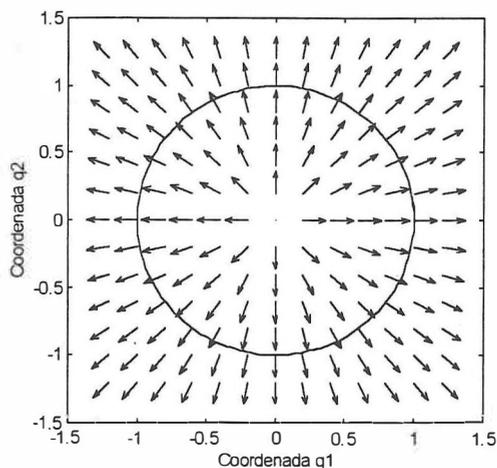


Figura 10: Gráfica del campo vectorial $\mathbf{v}_o(\mathbf{q})$.

cualquier punto del espacio \mathbb{R}^2 es el dado por

$$\mathbf{v}_o(\mathbf{q}) = k \frac{\nabla f(\mathbf{q})}{\|\nabla f(\mathbf{q})\|} \quad (19)$$

La gráfica 10 muestra el campo vectorial descrito por $\mathbf{v}_o(\mathbf{q})$ para el caso en que $f(\mathbf{q}) = q_1^2 + q_2^2 - r_0^2$. En dicha figura se observa como el campo vectorial $\mathbf{v}_o(\mathbf{q})$ atraviesa en forma perpendicular a la curva Γ_q .

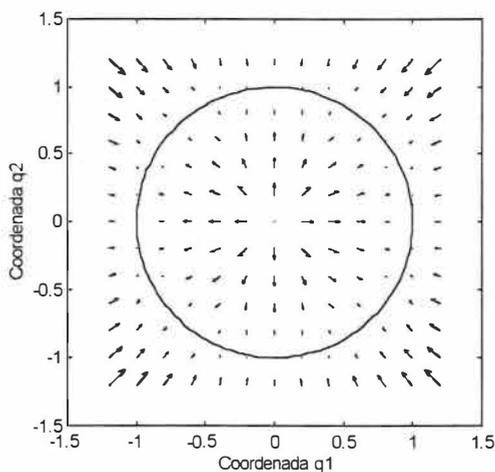


Figura 11: Campo vectorial que apunta hacia la curva Γ_q .

Un campo vectorial que evaluado en cualquier punto del espacio \mathbb{R}^2 “apunta” hacia

la curva Γ_q es el descrito por

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) = -kf(\mathbf{q}) \frac{\nabla f(\mathbf{q})}{\|\nabla f(\mathbf{q})\|} = -k \frac{f(\mathbf{q})}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

donde k es cualquier constante estrictamente positiva. La gráfica del campo vectorial $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$ es la que se encuentra en la figura 11. Cuando $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$ se evalúa en un punto en el exterior del círculo, $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$ apunta hacia éste. La razón es que la introducción del signo menos hace que el gradiente apunte ahora a la dirección de menor crecimiento de $f(\mathbf{q})$ y además como $f(\mathbf{q})$ evaluado en el exterior del círculo es positivo, éste no cambia la dirección de $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$. Pero $f(\mathbf{q})$ es negativo en el interior del círculo, lo que ocasiona que $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$ cambie de dirección, apuntando hacia el círculo Γ_q . También debe notarse que cuando $\mathbf{q} \in \Gamma_q$ el valor de $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$ es nulo.

Por otro lado, inspirados del hecho de que gradiente de $f(\mathbf{q})$ es ortogonal a la curva Γ_q cuando es evaluado en los puntos que están en la curva Γ_q , un vector $\bar{\mathbf{v}}$ tangente a Γ_q tendría la propiedad de que

$$\nabla f(\mathbf{q})^T \bar{\mathbf{v}} = 0. \quad (21)$$

Lo anterior equivale a decir que el vector $\bar{\mathbf{v}}$ debe ser ortogonal a $\nabla f(\mathbf{q})$. En este ejemplo $\bar{\mathbf{v}}$ resulta de resolver la siguiente ecuación

$$2q_1\bar{v}_1 + 2q_2\bar{v}_2 = 0. \quad (22)$$

Se observará que la solución en $\bar{\mathbf{v}}$ de la ecuación (22) depende de \mathbf{q} . Además resulta obvio que la ecuación (22) posee un número infinito de soluciones en $\bar{\mathbf{v}}$, pues el número de incógnitas (\bar{v}_1 y \bar{v}_2) supera el número de ecuaciones, que este caso es una. Un $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$ que es ortogonal a $\nabla f(\mathbf{q})$ es

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -q_2 \\ q_1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Si a la expresión resultante de $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$ le agregamos la restricción de rapidez constante c_0 cuando $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$ se evalúa en $\mathbf{q} \in \Gamma_q$, lo que se tiene que hacer es multiplicar la ecuación

(23) por $c_0/\|\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{q})\|$, i.e.,

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) = \frac{c_0}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \begin{bmatrix} -q_2 \\ q_1 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

que también es ortogonal a $\nabla f(\mathbf{q})$.

De esta forma, sumando los vectores $\hat{\mathbf{v}}$ y $\bar{\mathbf{v}}$ se dispone de un campo vectorial que posee características particulares. Este campo vectorial es el dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{q}) &= \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) + \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) \\ &= -k f(\mathbf{q}) \frac{\nabla f(\mathbf{q})}{\|\nabla f(\mathbf{q})\|} + \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) \\ &= -k \frac{[q_1^2 + q_2^2 - r_0^2]}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \frac{c_0}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \begin{bmatrix} -q_2 \\ q_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

donde $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) = \frac{c_0}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \begin{bmatrix} -q_2 \\ q_1 \end{bmatrix}$ es tal que $\nabla f(\mathbf{q})^T \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) = 0$. Es importante resaltar que la especificación de la velocidad tangencial a Γ_q queda restringida a cumplir con la ecuación (22). La gráfica de $\mathbf{v}(\mathbf{q})$ se observa en la figura 12, donde se eligió $k = 7$ y $c_0 = 10$.

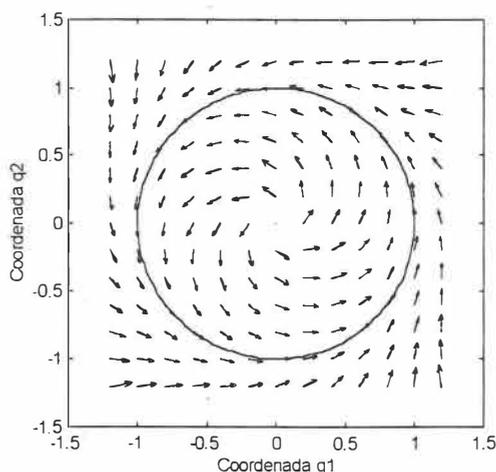


Figura 12: Campo vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{q})$ que dibuja un círculo.

La figura 12 muestra que los vectores que se encuentran más alejados de la curva Γ_q tienen una dirección más perpendicular a dicha curva, que los vectores que se encuentran

mas cercanos. Además, entre más cercanos están los vectores a los puntos que forman la curva Γ_q , la dirección de los vectores tiende a ser tangencial a la curva, por lo que se puede decir que de cierta forma el campo vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{q})$ “*dibuja*” un círculo de radio unitario, en donde se tiene rapidez tangencial constante c_0 a dicho círculo.

El especificar campos de velocidad para cualquier curva y cualquier rapidez tangencial puede seguirse generalizando de las ideas planteadas aquí. Ello es el motivo de la siguiente subsección.

III.2.2 Formas de especificación

La especificación de un campo de velocidad en un espacio de dimensión arbitraria puede ser de dos formas. La primera forma de especificación es directa, en la que uno simplemente dá la expresión analítica del campo de vectorial como un mapeo del espacio \mathbb{R}^n de posiciones articulares \mathbf{q} al espacio \mathbb{R}^n del campo de velocidad, esto es,

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (26)$$

La segunda forma de especificar un campo de velocidad es indirectamente. En base a la motivación de la subsección III.2.1, un campo de velocidad se puede especificar de forma indirecta a través de una curva en el espacio de dimensión n y de la especificación de la rapidez tangencial a dicha curva. La figura 13 ilustra la especificación indirecta.

La curva en cuestión es denotada mediante el conjunto Γ_q . La curva Γ_q debe ser simple, es decir, que no se cruza a sí misma y que se extiende por el espacio \mathbb{R}^n ; o bien puede ser una curva cerrada, como lo es un círculo o una elipse. Esta curva es descrita como

$$\Gamma_q = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : f_1(\mathbf{q}) = 0, \dots, f_{n-1}(\mathbf{q}) = 0\}.$$

Dicho de otra forma, lo anterior significa que Γ_q es descrita por todos los puntos que se encuentran en la intersección de las $n - 1$ superficies caracterizadas por las ecuaciones

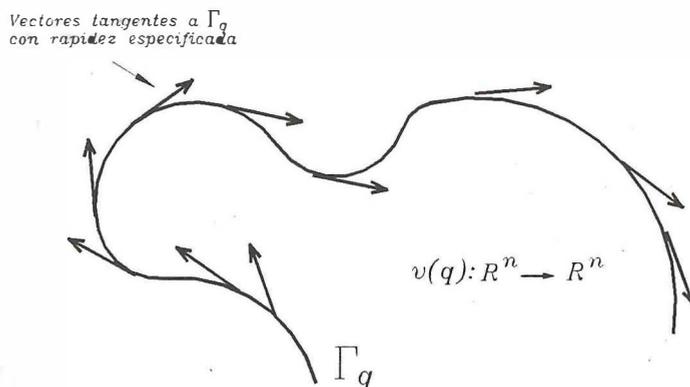


Figura 13: Especificación indirecta de un campo vectorial.

$f_i(\mathbf{q}) = 0$. En este escenario, defínase el vector

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ f_{n-1}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (27)$$

el cual pertenece al espacio \mathbb{R}^{n-1} . La matriz jacobiana asociada al vector $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ es dada por

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{q})}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}(\mathbf{q})}{\partial q_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{q})^T \\ \vdots \\ \nabla f_{n-1}(\mathbf{q})^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n}$$

donde $\nabla f_i(\mathbf{q})$ es el gradiente de la función $f_i(\mathbf{q})$ para $i = 1, \dots, n-1$, y es un vector columna. De la misma forma, también es cierto que

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})^T}{\partial \mathbf{q}} = [\nabla f_1(\mathbf{q}) \quad \cdots \quad \nabla f_{n-1}(\mathbf{q})] \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$$

En primera instancia se define un campo vectorial que apunta localmente hacia Γ_q , pero que evaluado en los puntos que están en Γ_q , es nulo. Tal campo vectorial es dado por

$$\begin{aligned} \hat{v}(\mathbf{q}) &= -k(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})^T}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{f}(\mathbf{q}) \\ &= -k(\mathbf{q}) [f_1(\mathbf{q}) \nabla f_1(\mathbf{q}) + \cdots + f_{n-1}(\mathbf{q}) \nabla f_{n-1}(\mathbf{q})] \end{aligned} \quad (28)$$

donde $\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}^T \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$, $\mathbf{f}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $k(\mathbf{q})$ es una función escalar que según se defina, puede caracterizar la magnitud del campo vectorial $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$.

El significado geométrico de cada término $-k(\mathbf{q})f_i(\mathbf{q})\nabla f_i(\mathbf{q})$ es que cada uno apunta a la superficie de nivel dada por $f_i(\mathbf{q}) = 0$. Además todos los términos se anulan cuando se toma un punto \mathbf{q} que está en Γ_q .

Por otra parte, el disponer de un campo vectorial que sea tangente a la curva Γ_q no parece tan claro. Sin embargo, la especificación de los vectores $\dot{\mathbf{q}}$ tangentes a Γ_q deben necesariamente satisfacer

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{q})^T \\ \vdots \\ \nabla f_{n-1}(\mathbf{q})^T \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{q} \in \Gamma_q, \quad (29)$$

es decir que un vector $\dot{\mathbf{q}}$ tangente a Γ_q debe ser ortogonal a cada vector gradiente $\nabla f_i(\mathbf{q})$.

Llámesese $\dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}}$ a los $\dot{\mathbf{q}}$ que satisfacen la ecuación (29). Los vectores $\dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}}$ son los $\dot{\mathbf{q}}$ que se encuentran en el espacio nulo de la matriz jacobiana de $\mathbf{f}(\mathbf{q})$, i.e.,

$$\dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N} \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$$

donde $\mathcal{N} \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)$ es el espacio nulo de la matriz jacobiana $\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$. Dicho espacio nulo se define como

$$\mathcal{N} \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Observéese que si $\dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N} \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)$, luego el vector

$$c(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N} \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)$$

donde $c(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es un mapeo escalar. Este hecho resulta de interés para obtener una expresión de rapidez constante c_0 en Γ_q cuando

$$c(\mathbf{q}) = \frac{c_0}{\|\dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}}(\mathbf{q})\|}. \quad (30)$$

III.2.3 Especificación indirecta

Dada la especificación indirecta, es decir, del conocimiento de las funciones $f_1(\mathbf{q}), \dots, f_{n-1}(\mathbf{q})$ y de la elección del vector $\dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}}$ que está en el espacio nulo de la matriz jacobiana $\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$, un campo de velocidad consistente con dicha especificación está dado por

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}) = -k(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})^T}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{f}(\mathbf{q}) + \dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}}(\mathbf{q}) \quad (31)$$

donde $k(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ es un mapeo escalar del dominio \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^+ , $\dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}}(\mathbf{q}) \in \mathcal{N}\left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\right)$, y se tiene la suposición de que el jacobiano $\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ es de rango pleno en la vecindad de Γ_q , es decir,

$$\text{rango} \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\} = n - 1 \quad (32)$$

para todo $\mathbf{q} \in \bar{\Gamma}_q$, donde

$$\bar{\Gamma}_q = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\mathbf{q}, \Gamma_q) < \delta\} \quad (33)$$

con $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño.

Sin embargo, el jacobiano de $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ puede perder rango si se evalúa en ciertos punto del espacio \mathbb{R}^n . Por ello es conveniente introducir el subconjunto

$$D = \left\{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : \text{rango} \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})^T}{\partial \mathbf{q}} \right\} < n - 1 \right\}.$$

De la definición del subconjunto D y de la suposición (32) se desprende que

$$\Gamma_q \cap D = \emptyset$$

esto significa que en una vecindad de Γ_q los $n-1$ gradientes $\nabla f_i(\mathbf{q})$ no dependen linealmente entre sí. Para demostrar la afirmación de que el campo de velocidad (31) es consistente con la especificación indirecta, primero recuérdese que este campo de velocidad indica el vector $\dot{\mathbf{q}}$ asociado al vector \mathbf{q} , es decir, $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}(\mathbf{q})$. En base a ello podemos definir la siguiente ecuación diferencial autónoma

$$\dot{\mathbf{q}} = -k(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})^T}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{f}(\mathbf{q}) + \dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}}(\mathbf{q}) \quad (34)$$

El estudio del comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial (34) puede realizarse mediante el teorema de LaSalle⁸ (Khalil, 1996; Vidyasagar, 1978). Para ello considérese la siguiente función no negativa

$$V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{q})^T \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (35)$$

la cual es nula en $\mathbf{q} \in \Gamma_q$ y es positiva para todo $\mathbf{q} \notin \Gamma_q$. De esta manera, la derivada temporal de $V(\mathbf{q})$ toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{q}) &= \mathbf{f}(\mathbf{q})^T \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \\ &= -k(\mathbf{q}) \mathbf{f}(\mathbf{q})^T \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}^T \mathbf{f}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\mathbf{q})^T \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}_N \end{aligned} \quad (36)$$

Sin embargo el segundo término de la derivada temporal de la función de Lyapunov es nulo debido a que el vector $\dot{\mathbf{q}}_N(\mathbf{q})$ está en el espacio nulo de la matriz jacobiana de $\mathbf{f}(\mathbf{q})$, por lo que la derivada temporal de la función de Lyapunov queda

$$\dot{V}(\mathbf{q}) = -k(\mathbf{q}) \mathbf{f}(\mathbf{q})^T \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}^T \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (37)$$

la cual es una ecuación no positiva. Puede observarse que el subconjunto Ω del espacio de configuración donde $\dot{V}(\mathbf{q}) = 0$ es

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(\mathbf{q}) = 0 \right\} \\ &= \Gamma_q \cup E \end{aligned}$$

donde

$$E = \left\{ \mathbf{q} \in D : \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}^T \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \right\}.$$

Luego, para que una condición inicial $\mathbf{q}(0) \in \Omega$ genere una solución $\mathbf{q}(t)$ que se mantenga en Ω para todo $t \geq 0$, ésta debe cumplir con (34), por lo que

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{q}}_N(\mathbf{q}(t)). \quad (38)$$

⁸El teorema de LaSalle es expuesto en el apéndice A.

Luego, partiendo del hecho de que

$$\frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}, \quad (39)$$

entonces de (38) se tiene que

$$\frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}}(\mathbf{q}). \quad (40)$$

Luego, debido a que $\dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}}(\mathbf{q}) \in \mathcal{N}\left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\right)$, entonces

$$\frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}} = \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0 \text{ y } \forall \mathbf{q} \in \Omega. \quad (41)$$

La ecuación (41) tiene como solución $\mathbf{f}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{q}(0)) \quad \forall t \geq 0 \text{ y } \forall \mathbf{q} \in \Omega$, donde $\mathbf{f}(\mathbf{q}(0))$ es un vector constante. Ahora bien, si la condición inicial $\mathbf{q}(0) \in \Gamma_q$ entonces la ecuación diferencial (41) tiene como solución

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0, \quad (42)$$

resultando que $\mathbf{q}(t) \in \Gamma_q$ para todo $t \geq 0$. Si la condición inicial $\mathbf{q}(0) \in E$, entonces (41) tiene como solución

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{q}(0)) \quad \forall t \geq 0, \quad (43)$$

con lo que se interpreta que $\mathbf{q}(t) \in E$ para todo $t \geq 0$. De acuerdo al teorema de LaSalle lo anterior significa que Ω es el conjunto invariante al que converge $\mathbf{q}(t)$.

III.2.4 Ejemplos de especificación indirecta

Ejemplo 1: Campo vectorial que dibuja un círculo en \mathbb{R}^2 .

Este ejemplo tiene como fin el desarrollar el ejemplo tratado en la sección III.2.1 dentro del contexto generalizado de especificación de campos vectoriales. La curva queda definida como

$$\Gamma_q = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 : f(\mathbf{q}) = 0\}$$

con $f(\mathbf{q}) = (q_1 - q_{1c})^2 + (q_2 - q_{2c})^2 - r_0^2$, donde q_{1c} y q_{2c} son dos constantes reales cualesquiera y r_0 es una constante real estrictamente positiva. La especificación del vector de velocidad $\dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}}$ tangente a Γ_q debe satisfacer

$$\nabla f(\mathbf{q})^T \dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}} = 0 \quad (44)$$

donde $\dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}}$ es ortogonal a $\nabla f(\mathbf{q})$. Este es obtenido de

$$2(q_1 - q_{1c})\dot{q}_{\mathcal{N}_1} + 2(q_2 - q_{2c})\dot{q}_{\mathcal{N}_2} = 0, \quad (45)$$

de donde resulta que

$$\dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}} = \begin{bmatrix} -(q_2 - q_{2c}) \\ (q_1 - q_{1c}) \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Pero otra elección posible de $\dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}}$ si se quiere obtener rapidez constante en Γ_q es

$$\dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}} = c(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} -(q_2 - q_{2c}) \\ (q_1 - q_{1c}) \end{bmatrix}, \quad (47)$$

con

$$c(\mathbf{q}) = \frac{c_0}{\sqrt{(q_1 - q_{1c})^2 + (q_2 - q_{2c})^2}} \begin{bmatrix} -(q_2 - q_{2c}) \\ (q_1 - q_{1c}) \end{bmatrix}, \quad (48)$$

donde $c_0 \in \mathbb{R}$. Nótese que para esta elección de $c(\mathbf{q})$, $\|\dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}}(\mathbf{q})\| = c_0$ para todo $\mathbf{q} \neq [q_{1c} \ q_{2c}]^T$.

De manera análoga, el término que apunta a Γ_q es dado como

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) = -k(\mathbf{q})f(\mathbf{q})\nabla f(\mathbf{q}) \quad (49)$$

donde $k(\mathbf{q})$ es un mapeo escalar de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^+ . Si se elige $k(\mathbf{q}) = k$ donde k es una constante real estrictamente positiva, un campo vectorial que dibuja un círculo en el plano con rapidez tangencial constante c_0 , está dado por $\mathbf{v}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) + \dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{N}}$, i.e.,

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -k[q_1 - q_{1c}] f(\mathbf{q}) - c_0 \frac{q_2 - q_{2c}}{\sqrt{(q_1 - q_{1c})^2 + (q_2 - q_{2c})^2}} \\ -k[q_2 - q_{2c}] f(\mathbf{q}) + c_0 \frac{q_1 - q_{1c}}{\sqrt{(q_1 - q_{1c})^2 + (q_2 - q_{2c})^2}} \end{bmatrix}, \quad (50)$$

con

$$f(\mathbf{q}) = (q_1 - q_{1c})^2 + (q_2 - q_{2c})^2 - r_0^2. \quad (51)$$

Cabe mencionar que la diferencia entre el campo vectorial desarrollado en la subsección III.2.1 y el campo vectorial descrito por la ecuación (50) y (51) es la definición del vector $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$. La gráfica del campo vectorial dado por (50) y (51) puede apreciarse en la figura 14, donde las constantes involucradas toman los valores de $q_{1c} = 0.37$ rad, $q_{2c} = 0.37$ rad, $r_0 = 0.1$ rad y $c_0 = 1$ rad/seg.

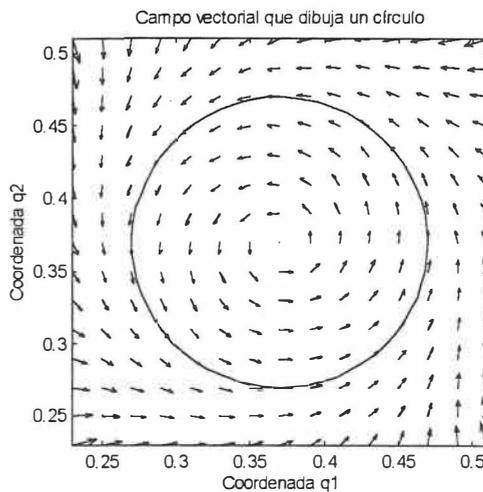


Figura 14: Campo vectorial que dibuja el círculo $(q_1 - q_{1c})^2 + (q_2 - q_{2c})^2 - r_0^2 = 0$.

Ejemplo2: Campo vectorial que dibuja una parábola en \mathbb{R}^2 .

La curva queda definida por el conjunto

$$\Gamma_q = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 : f(\mathbf{q}) = 0\}$$

con $f(\mathbf{q}) = q_2 - q_1^2 + a$. La obtención de $\dot{\mathbf{q}}_N$ se sigue de resolver

$$-2q_1\dot{q}_{N1} + \dot{q}_{N2} = 0, \quad (52)$$

de donde resulta que un $\dot{\mathbf{q}}_N$ que está en el espacio nulo de $\nabla f(\mathbf{q})$ es

$$\dot{\mathbf{q}}_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 2q_1 \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Otra expresión para $\dot{\mathbf{q}}_N$ si se requiere rapidez constante en Γ_q es

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_N &= c(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} 1 \\ 2q_1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{c_0}{\sqrt{1+4q_1^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2q_1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (54)$$

donde se satisface que $\|\dot{\mathbf{q}}_N\| = c_0$.

El término que apunta hacia Γ_q es elegido de nueva cuenta como

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) = -k(\mathbf{q})f(\mathbf{q})\nabla f(\mathbf{q}) \quad (55)$$

Si se elige $k(\mathbf{q}) = 1$, un campo vectorial que dibuja una parábola con rapidez tangencial constante c_0 es el dado como $\mathbf{v}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) + \dot{\mathbf{q}}_N$, que en forma explícita queda,

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 2q_1f(\mathbf{q}) + \frac{c_0}{\sqrt{1+4q_1^2}} \\ -f(\mathbf{q}) + \frac{2c_0q_1}{\sqrt{1+4q_1^2}} \end{bmatrix}, \quad (56)$$

donde

$$f(\mathbf{q}) = q_2 - q_1^2 + a. \quad (57)$$

La gráfica de este campo vectorial puede apreciarse en la figura 15 con $c_0 = 2.5$ y $a = 1$

Ejemplo 3: Campo vectorial que dibuja un punto en \mathbb{R}^2 .

Para el caso de la especificación de un campo de velocidad que dibuja un punto en el plano primeramente definiremos a Γ_q como

$$\Gamma_q = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 : f(\mathbf{q}) = 0\}$$

con $f(\mathbf{q}) = (q_1 - q_{d1})^2 + (q_2 - q_{d2})^2$. Será fácil notar que en este ejemplo $\dot{\mathbf{q}}_N(\mathbf{q})$ necesariamente es cero. El campo de velocidad es dado por

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) = -k(\mathbf{q})f(\mathbf{q})\nabla f(\mathbf{q}). \quad (58)$$

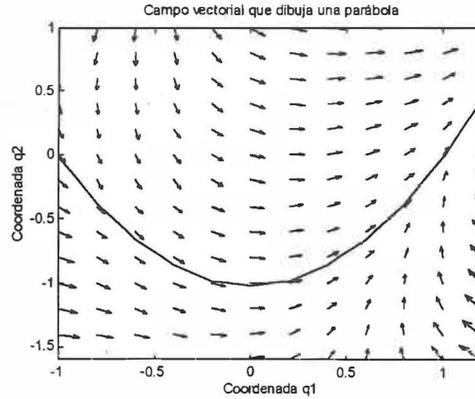


Figura 15: Campo vectorial que dibuja la parábola $q_2 = q_1^2 - 1$.

Se define

$$k(\mathbf{q}) = \frac{k_0}{|f(\mathbf{q})| \|\nabla f(\mathbf{q})\| + \epsilon}. \quad (59)$$

donde ϵ es una constante estrictamente positiva. La razón de la elección de $k(\mathbf{q})$ como en (59), es para tratar de conservar la norma de $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$ con magnitud constante en la mayoría del espacio \mathbb{R}^2 . Además, es obvio que el valor de $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$ es nulo en $\mathbf{q}^T = [q_{d1} \ q_{d2}]^T$ y, en una vecindad relativamente pequeña alrededor de $\mathbf{q}^T = [q_{d1} \ q_{d2}]^T$, $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$ tiene una norma también pequeña. El tamaño relativo de dicha vecindad puede ser reducido si el valor de ϵ es también pequeño y ampliado si se aumenta el valor de ϵ .

En forma explícita el campo vectorial que dibuja un punto en el plano es dado como

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) = -\frac{k_0 f(\mathbf{q})}{2|f(\mathbf{q})| \sqrt{(q_1 - q_{d1})^2 + (q_2 - q_{d2})^2} + \epsilon} \begin{bmatrix} 2(q_1 - q_{d1}) \\ 2(q_2 - q_{d2}) \end{bmatrix} \quad (60)$$

donde $f(\mathbf{q}) = (q_1 - q_{d1})^2 + (q_2 - q_{d2})^2$. La gráfica de este campo vectorial puede apreciarse en la figura 16 con $q_{d1} = 1$, $q_{d2} = 1$, $\epsilon = 0.001$ y $k_0 = 10$.

III.3 Conclusiones

- Este capítulo muestra algunos conceptos relacionados con campos escalares y vectoriales.

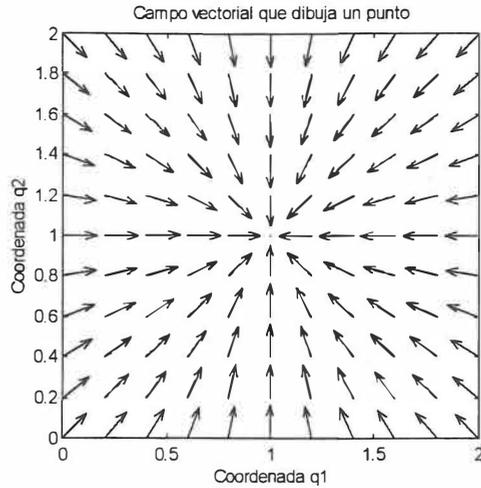


Figura 16: Campo vectorial que dibuja un punto.

- Se ha motivado la manera de como especificar campos de velocidad en forma indirecta.
- Se estudió la manera de cómo especificar campos vectoriales de forma indirecta, desarrollando un método analítico para ello. Dicha especificación es usada para campos de velocidad.
- Aplicación del teorema de LaSalle en el análisis de la especificación indirecta de campos de velocidad.

IV CONTROL MEDIANTE CAMPO DE VELOCIDAD

En este capítulo se proponen dos controladores para resolver el problema de control mediante campo de velocidad en coordenadas operacionales. El primero de ellos está basado en el control por dinámica inversa usado para resolver el problema de control de movimiento. Cabe decir que el control por dinámica inversa es bien estudiado en diversos textos, e.g., Sciavicco y Siciliano (1996). La otra propuesta de control está basada en las ideas propuestas en Kelly *et al.* (1999), el cual originalmente fué concebido para ser aplicado en la solución al problema de control de movimiento en coordenadas de visión y su estructura es basada en el control cinemático. Este controlador resulta de bastante interés desde un punto de vista práctico, pues posee características de robustez. La explicación de ello es que basa su estructura en dos lazos de retroalimentación, lo que contribuye a rechazar perturbaciones.

IV.1 Introducción

En la propuesta original del control de manipuladores mecánicos mediante campo de velocidad de Li y Horowitz (1995; 1996), se pretende, además del anulamiento asintótico del error de campo de velocidad, que el sistema en malla cerrada se comporte en forma pasiva ante la presencia de fuerzas externas, como lo pueden ser fuerzas de contacto de otros objetos. Lo anterior significa que cuando el sistema esté en malla cerrada no deben crecer los pares indefinidamente bajo la acción de fuerzas externas. Los controladores propuestos por Li y Horowitz resuelven ambos objetivos de control pero su análisis y diseño resultan ser relativamente complejos ya que hacen uso de herramientas poco comunes en teoría de control, tal como lo es el cálculo tensorial.

Los controladores que se proponen en este apartado son mucho más simples en su estructura y la filosofía que se persigue es presentar un diseño más simple que los

planteados por Li y Horowitz. Si bien es cierto que aunque los controladores propuestos en este trabajo sólo logran el objetivo de control de anulamiento asintótico del error de campo de velocidad y no el comportamiento pasivo, también son analizadas algunas variantes de éstos, que mantienen los pares acotados del sistema en malla cerrada bajo la presencia de fuerzas externas.

En este capítulo se supone que el jacobiano del robot $J(\mathbf{q})$ es de rango pleno.

IV.2 Controlador basado en dinámica inversa

Considérese el problema de control mediante campo de velocidad en coordenadas del espacio operacional. Debe recordarse que el modelo dinámico de un robot de n grados de libertad es dado por

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}. \quad (61)$$

El control basado en dinámica inversa consiste en encontrar una entrada de control $\boldsymbol{\tau}$ como función de los estados del sistema, la cual sea capaz de realizar una relación entre la entrada y la salida de tipo lineal. Es posible obtener una linealización global por medio de una *retroalimentación no lineal de los estados* (Isidori, 1993).

La entrada de control $\boldsymbol{\tau}$ es tomada de la forma

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\mathbf{u}_0 + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}), \quad (62)$$

la cual conduce en malla cerrada al sistema lineal dado por

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{u}_0. \quad (63)$$

Se tiene que bajo la ley de control (62) el sistema en malla cerrada es lineal y desacoplado con respecto a la nueva entrada \mathbf{u}_0 . En este escenario, la nueva entrada de control \mathbf{u}_0 puede ser diseñada a través de la ecuación cinemática diferencial de segundo orden (7).

De acuerdo a la solución pseudoinversa (8), la entrada buscada es

$$\mathbf{u}_0 = J(\mathbf{q})^\dagger \left[\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + K_v [\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{x}}] + K_p \boldsymbol{\xi} - \dot{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \quad (64)$$

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \int_0^t [\mathbf{v}(\mathbf{x}(\sigma)) - \dot{\mathbf{x}}(\sigma)] d\sigma \quad (65)$$

con K_p y K_v matrices simétricas definidas positivas. El diagrama de bloques del sistema en malla cerrada se muestra en la figura 17. En esta forma se llega a la ecuación de malla cerrada

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{x}} + K_v [\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{x}}] + K_p \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \quad (66)$$

Se puede usar la ecuación (65) para transformar la ecuación de malla cerrada (66) en

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} + K_v \dot{\boldsymbol{\xi}} + K_p \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \quad (67)$$

Esta ecuación corresponde a un sistema lineal asintóticamente estable en forma global debido a que K_p y K_v son matrices simétricas definidas positivas. De aquí que se llega a la conclusión de que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\xi}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{0}$$

lo cual implica de (65) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{v}(\mathbf{x}(t)) - \dot{\mathbf{x}}(t)] = \mathbf{0}.$$

Supóngase que una fuerza externa es aplicada al robot durante su operación de tal forma que esta fuerza detiene el movimiento del robot. En razón de esto existirá un error de campo de velocidad distinto de cero, por lo que de acuerdo con (65) el estado $\boldsymbol{\xi}$ incrementará su valor conforme el tiempo evolucione. Este hecho se traduce en que los pares calculados por la ecuación (62) también se incrementarán, ya que el estado $\boldsymbol{\xi}$ está incrementado su valor. Si la fuerza externa es suspendida, el estado $\boldsymbol{\xi}$ ya habrá adquirido cierto valor y el robot experimentará un movimiento brusco buscando la anulación del error de campo de velocidad y la anulación del estado $\boldsymbol{\xi}$. Sin embargo, es deseable que no ocurra este fenómeno, sino que al momento de suspender la fuerza

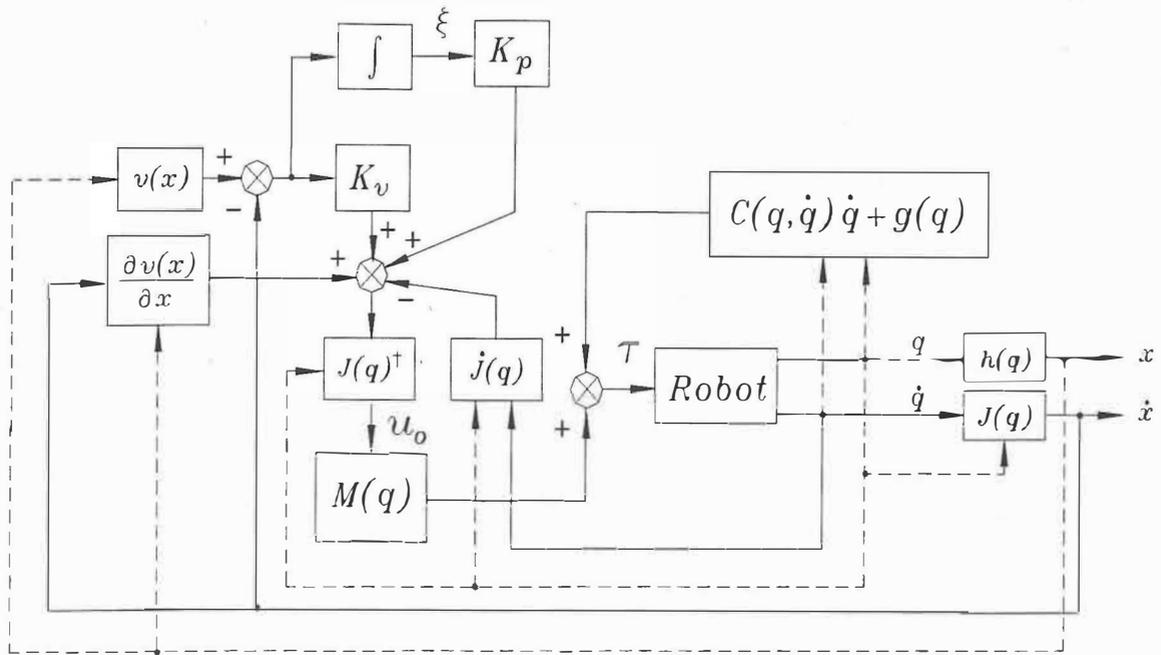


Figura 17: Diagrama de bloques del controlador basado en dinámica inversa para coordenadas operacionales.

externa, el robot continúe de manera natural su movimiento. Ello puede obtenerse si para todo tiempo se mantiene acotado el estado ξ . Con este fin, una entrada de control u_0 es propuesta como

$$u_0 = J(q)^\dagger \left[\frac{\partial v(x)}{\partial x} \dot{x} + K_v (v(x) - \dot{x}) + K_p \tanh(\xi) - \dot{J}(q) \dot{q} \right] \quad (68)$$

donde ξ es definido en la ecuación (65) y $\tanh(\xi) = [\tanh(\xi_1) \dots \tanh(\xi_n)]^T$. De esta forma la ecuación de malla cerrada es dada por

$$\ddot{\xi} + K_v \dot{\xi} + K_p \tanh(\xi) = 0 \quad (69)$$

El análisis de estabilidad de la ecuación (69) es realizado en base a la siguiente función de Lyapunov

$$V(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \sqrt{\ln(\cosh(\xi))}^T K_p \sqrt{\ln(\cosh(\xi))} \quad (70)$$

cuya derivada temporal es

$$\dot{V}(\xi, \dot{\xi}) = -\dot{\xi}^T K_v \dot{\xi} \quad (71)$$

la cual resulta semidefinida negativa. Debido a la autonomía con respecto al tiempo de la ecuación (69) es posible hacer uso del teorema de LaSalle (Khalil, 1996; Vidysagar, 1978) y concluir que la ecuación (69) es asintóticamente estable en forma global, implicando

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{v}(\mathbf{x}(t)) - \dot{\mathbf{x}}(t)] = \mathbf{0}.$$

IV.3 Controlador basado en dos lazos de retroalimentación

Como su nombre lo indica, este esquema de control hace uso de dos lazos de retroalimentación para satisfacer el objetivo de control. Los dos lazos a los que se hace referencia, son un lazo interno de velocidad, y en segunda instancia un lazo externo basado en la cinemática del robot.

Para la deducción del controlador y bajo la óptica del control cinemático, la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$ es considerada como la entrada al robot. En esta situación y asumiendo que el jacobiano analítico del robot $J(\mathbf{q})$ es de rango completo y acotado, se propone la siguiente ley de control para generar las velocidades articulares deseadas $\dot{\mathbf{q}}_d$

$$\dot{\mathbf{q}}_d = J(\mathbf{q})^\dagger [\mathbf{v}(\mathbf{x}) + K\boldsymbol{\xi}] \quad (72)$$

donde $\boldsymbol{\xi}$ es dada por la ecuación (65) y K es una matriz simétrica definida positiva. Bajo la suposición de seguimiento exacto de velocidad, i.e., $\dot{\mathbf{q}}(t) \equiv \dot{\mathbf{q}}_d(t)$ y sustituyendo (72) en (5) se tiene

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\xi} = -K\boldsymbol{\xi} \quad (73)$$

y por lo tanto se consigue anulamiento exponencial del estado $\boldsymbol{\xi}$, es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{0}$. Lo dicho anteriormente también implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{v}(\mathbf{x}(t)) - \dot{\mathbf{x}}(t)] = \mathbf{0}. \quad (74)$$

Sin embargo, en la práctica, los controladores de velocidad aseguran seguimiento asintótico en lugar de seguimiento exacto. El conocimiento de la aceleración articular $\ddot{\mathbf{q}}_d(t)$ puede

ser obtenido a través de la ecuación (72) como

$$\ddot{\mathbf{q}}_d = J(\mathbf{q})^\dagger \left[\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + K [\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{x}}] \right] + \left[\frac{d}{dt} J(\mathbf{q})^\dagger \right] [\mathbf{v}(\mathbf{x}) + K \boldsymbol{\xi}]. \quad (75)$$

Es posible hacer uso del control por dinámica inversa usado en el control de movimiento en coordenadas articulares (Spong y Vidyasagar, 1989) y aplicarlo a control de velocidad

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) \left[\ddot{\mathbf{q}}_d + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_p \mathbf{z} \right] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (76)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (77)$$

donde K_p y K_v son matrices simétricas definidas positivas, $\dot{\mathbf{q}}_d$ es la velocidad articular deseada y $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}_d(t) - \dot{\mathbf{q}}(t)$ denota el error de velocidad articular. De esta forma, un esquema de dos lazos de retroalimentación es obtenido para la anulación asintótica del error de velocidad de campo de velocidad. En la figura 18 se observa el diagrama de bloques del controlador basado en dos lazos de retroalimentación.

Es posible obtener la ecuación de malla cerrada total realizando algunas manipulaciones algebraicas. La ecuación de malla cerrada total está dada por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -K_p & -K_v & 0 \\ 0 & 0 & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Observe que las variables de estado \mathbf{z} y $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ describen un sistema independiente del estado $\boldsymbol{\xi}$. Debido a que K_p y K_v son simétricas definidas positivas, se concluye que $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) = \mathbf{0}$. De esta forma, $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ se anula exponencialmente, lo mismo que el término $J(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ dada la suposición de acotamiento del jacobiano. Finalmente, como K también es simétrica definida positiva, se llega a la conclusión de que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\xi}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{v}(\mathbf{x}(t)) - \dot{\mathbf{x}}(t)] = \mathbf{0}.$$

De manera análoga a lo que se hizo con el control de dinámica inversa para acotar los pares en la presencia de fuerzas externas que pudieran detener el movimiento del

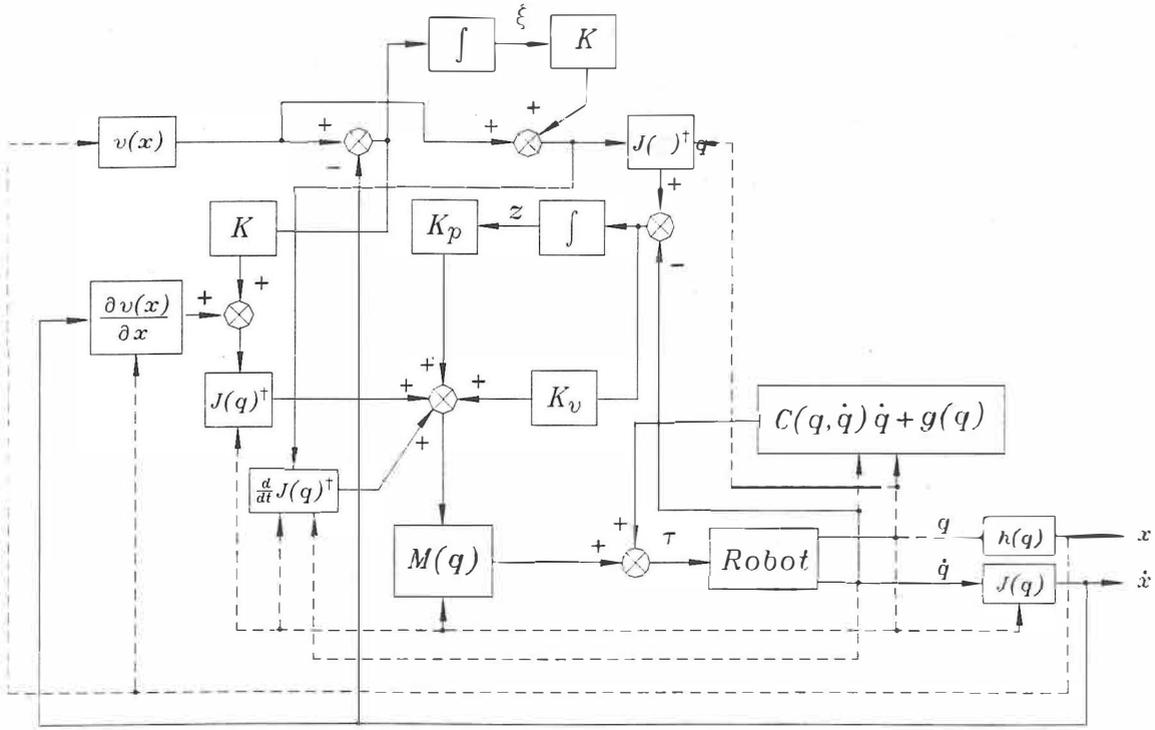


Figura 18: Diagrama de bloques del controlador basado en dos lazos de retroalimentación.

robot, es posible usar la tangente hiperbólica en el estado ξ para tal efecto. En base a ésto, las velocidades articulares deseadas quedan

$$\dot{q}_d = J(q)^\dagger [v(x) + K \tanh(\xi)] \quad (79)$$

donde $\tanh(\xi) = [\tanh(\xi_1) \dots \tanh(\xi_n)]^T$ y K es una matriz simétrica definida positiva. Consecuentemente la velocidad articular \dot{q}_d es obtenida diferenciando la ecuación (79), de donde se obtiene

$$\ddot{q}_d = J(q)^\dagger \left[\frac{\partial v(x)}{\partial x} \dot{x} + K \operatorname{sech}^2(\xi) [v(x) - \dot{x}] \right] + \left[\frac{d}{dt} J(q)^\dagger \right] [v(x) + K \tanh(\xi)]. \quad (80)$$

La estabilidad asintótica de la ecuación de malla cerrada total utilizando las expresiones (79) y (80) es concluida por medio de argumentos similares a los que se presentaron en el análisis de la ecuación (78).

IV.4 Aplicación a coordenadas articulares

Es posible aplicar los controladores anteriores a coordenadas articulares simplemente notando que $J(\mathbf{q})^\dagger = I$. Este trabajo sólo contempla la exposición de la aplicación del controlador de dinámica inversa a coordenadas articulares. El controlador que resulta en el caso en que $\mathbf{x} = \mathbf{q}$, no es otra cosa que el control par calculado o de dinámica inversa en coordenadas articulares ya mencionada antes en su aplicación a control de velocidad. Este controlador además es bien estudiado en textos como Spong y Vidyasagar (1989) y Slotine y Li (1991).

Tenemos la especificación de un campo vectorial en el espacio articular, por lo que el objetivo es que el robot debe alinearse a él y seguirlo. Lo anterior es equivalente a decir que lo que se busca es la anulación del siguiente límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{v}(\mathbf{q}(t)) - \dot{\mathbf{q}}(t)] = \mathbf{0} ,$$

donde $\mathbf{v}(\mathbf{q}(t))$ es campo de velocidad deseado y $\dot{\mathbf{q}}(t)$ es el vector de velocidades articulares del robot. El controlador basado en dinámica inversa y que pretende resolver el problema de control mediante de velocidad es caracterizado como

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) \left[\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} + K_v [\mathbf{v}(\mathbf{q}) - \dot{\mathbf{q}}] + K_p \boldsymbol{\xi} \right] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (81)$$

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \int_0^t [\mathbf{v}(\mathbf{q}(\sigma)) - \dot{\mathbf{q}}(\sigma)] d\sigma \quad (82)$$

donde K_p y K_v son matrices simétricas definidas positivas.

Sustituyendo la ecuación del controlador (81) en la ecuación del robot (61), podemos obtener la ecuación de malla cerrada

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}} + K_v [\mathbf{v}(\mathbf{q}) - \dot{\mathbf{q}}] + K_p \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \quad (83)$$

Considerando la ecuación (82) en la ecuación de malla cerrada podemos escribir esta última como

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} + K_v \dot{\boldsymbol{\xi}} + K_p \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \quad (84)$$

la cual es asintóticamente estable en forma global debido a que K_p and K_v son matrices simétricas definidas positivas. Por lo tanto el estado $[\xi(t)^T \ \dot{\xi}(t)^T]^T$ se anula asintóticamente. Esto significa que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\xi}(t) = [\mathbf{v}(\mathbf{q}(t)) - \dot{\mathbf{q}}(t)] = \mathbf{0}.$$

De esta manera el objetivo de control mediante campo de velocidad es alcanzado.

IV.5 Conclusiones

Los esquemas de control estudiados en este capítulo han seguido la idea de desacoplar la dinámica no lineal del robot a partir del conocimiento exacto de los parámetros cinemáticos y dinámicos de su modelo. Lo anterior equivale a tener cancelación exacta de la dinámica del robot, por lo que es natural que surjan cuestionamientos acerca de los problemas de robustez y sensibilidad debido a la cancelación inexacta por incertidumbre en el conocimiento del modelo o la presencia de dinámica no modelada.

El controlador basado en dinámica inversa de la sección IV.2 y el controlador basado en dos lazos de retroalimentación de la sección IV.3 involucran el cálculo del jacobiano del manipulador. Los efectos inducidos debido a posiciones singulares hacen pensar que la dificultad de controlar el movimiento del robot en el espacio operacional se incrementa comparada con el hecho de controlar al robot en el espacio articular.

V RESULTADOS EXPERIMENTALES

Este capítulo tiene como fin ilustrar la ejecución práctica de los controladores que completan el objetivo de control mediante campo de velocidad, los cuales se han estudiado en el capítulo anterior. Los experimentos se han desarrollado en un sistema experimental, el cuál consiste en un robot planar de dos grados de libertad de transmisión directa de articulaciones rotacionales, manejadores electrónicos para los motores que se encuentran instalados en las articulaciones del robot, sensores de posición en los motores, una tarjeta de control montada en una computadora que posee el ambiente de software necesario para la programación de los algoritmos de control, además de la capacidad de coleccionar datos del estado de la ejecución del algoritmo de control. El sistema experimental en cuestión fué construido en el Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones del CICESE, con la finalidad de desarrollar y validar en forma práctica algoritmos de control. En el apéndice B se encuentra descrito en detalle los modelos cinemático y dinámico del robot de dos grados de libertad, mientras que el apéndice C describe en forma precisa los componentes del sistema experimental, así como los valores numéricos de los parámetros cinemáticos y dinámicos del robot experimental. En la figura 19 se aprecia una fotografía del robot usado para experimentación.

La presentación de los resultados experimentales tiene la siguiente organización: la sección V.2 presenta resultados experimentales de campo de velocidad en coordenadas operacionales. En dicha sección se presentan en total cuatro experimentos, dos para el controlador basado en dinámica inversa (62), (64) y (65), estudiado en la sección IV.2, y dos para el controlador basado en dos lazos de retroalimentación (65), (72), (75), (76) y (77), estudiado en la sección IV.3. En la sección V.3 se presenta un experimento para campo de velocidad en coordenadas articulares con el controlador basado en dinámica inversa (81) y (82), estudiado en la sección IV.4. Es importante señalar que los experimentos que se presentan son comparados con resultados de simulación de computadora.

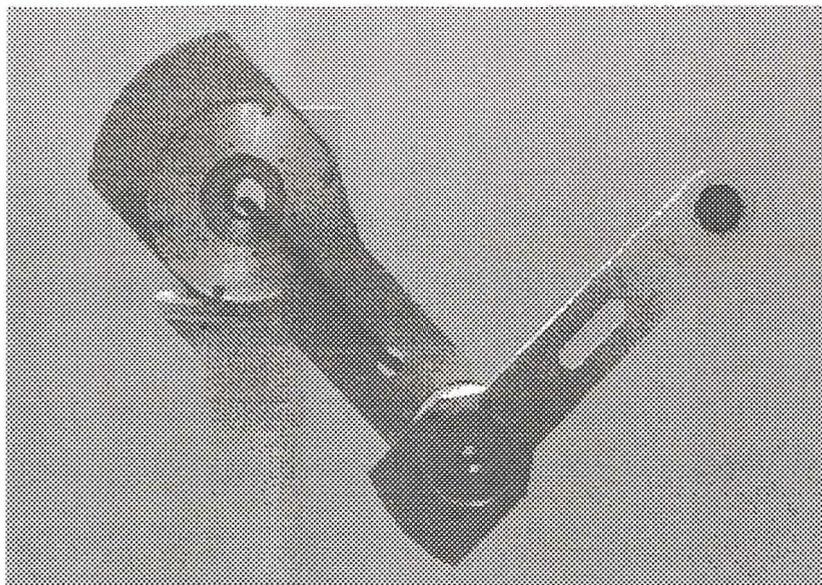


Figura 19: Robot usado para experimentación

V.1 Consideraciones prácticas de la implementación

Respecto a la puesta en práctica de los controladores estudiados en este trabajo, cabe señalar que la sintonización de éstos responde a ciertos límites en la capacidad de los motores que usa el robot. Dicho de otra forma, los motores en cuestión responden a un cota máxima en par y en velocidad:

- $\dot{q}_{1max} = 2$ rps
- $\dot{q}_{2max} = 0.5$ rps
- $\tau_{1max} = 150$ Nm
- $\tau_{2max} = 15$ Nm

El hecho de disponer de resolvedores o tacómetros para medición de velocidad en robots manipuladores puede traer una serie de consecuencias prácticas en el diseño y construcción de un robot manipulador. Por ello en vez de realizar una medición de velocidad se realiza en muchas ocasiones una *estimación de la velocidad*. Dicha estimación

es realizada en el sistema experimental en cuestión (Reyes y Kelly, 1996) por medio de la aproximación de Euler,

$$\dot{\mathbf{q}}_k = \frac{\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1}}{T}, \quad (85)$$

donde T es el periodo de muestreo de la posición articular y k es el tiempo discreto. El periodo de muestreo que usa el sistema experimental es de 2.5 ms, el cual se considera suficiente para obtener aceptables de las ejecuciones de los algoritmos de control.

Los experimentos parten de la realización de simulaciones, en donde se sintonizaron las ganancias de los controladores respetando los límites físicos de los actuadores. Las simulaciones también tomaron en cuenta el hecho de que la implementación del controlador es discreta y la estimación de la velocidad por el algoritmo de diferenciación de Euler (85).

Por otro lado, es sabido que la mayoría de los sistemas físicos incorporan en su dinámica fuerzas disipativas, como lo es la fricción en sistemas mecánicos. En algunos sistemas mecánicos el par debido a la fricción es bastante significativo. Además la presencia de fricción puede deteriorar el comportamiento en los movimientos de un robot, por lo que el estudio de la fricción y su compensación representa hoy en día un tópico de investigación de bastante interés en robótica⁹. El modelo dinámico del robot, tomando en cuenta la fricción queda

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_f. \quad (86)$$

El modelo de fricción que se considera en este trabajo es el debido a la fricción viscosa y a la fricción de Coulomb:

$$\boldsymbol{\tau}_f = \begin{bmatrix} b_1\dot{q}_1 + f_{c1}\text{sgn}(\dot{q}_1) \\ b_2\dot{q}_2 + f_{c2}\text{sgn}(\dot{q}_2) \end{bmatrix} \quad (87)$$

donde $\text{sgn}(\cdot)$ es la función signo, f_{c1} , f_{c2} y b_1 , b_2 representan los coeficientes de fricción de Coulomb y de fricción viscosa de la articulación 1 y 2, respectivamente. A partir de

⁹Trabajos recientes que reportan técnicas de compensación de fricción son e.g. (Panteley *et al.*, 1998) e (Iwasaki *et al.*, 1999).

pruebas identificación paramétrica, éstos coeficientes han podido ser estimados para el robot experimental (Reyes y Kelly, 1997):

$$\begin{aligned} b_1 &= 2.288 \text{ Nm seg} \\ b_2 &= 0.175 \text{ Nm seg} \\ f_{c1} &= \begin{cases} 7.17 \text{ Nm} & \text{para } \dot{q}_1 > 0 \\ -8.049 \text{ Nm} & \text{para } \dot{q}_1 < 0 \end{cases} \\ f_{c2} &= 1.734 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Para evitar los efectos inducidos por la fricción en la práctica es conveniente realizar su compensación, bajo el hecho de tener el conocimiento de los coeficientes. Sin embargo, es sabido que la compensación de fricción de Coulomb presenta complicaciones cuando se tiene *medición ruidosa de la velocidad* debido a que en realidad sólo se está realizando su estimación con la aproximación de Euler. Siendo así, en los experimentos que se presentan sólo se ha contemplado la compensación de fricción viscosa.

V.2 Campo de velocidad en coordenadas operacionales

V.2.1 Especificación del campo de velocidad

El campo de velocidad presentado en esta sección será usado en la experimentación de los controladores para campo de velocidad en coordenadas operacionales.

El campo de velocidad debe exhibir un comportamiento sin cambios abruptos en la velocidad y la aceleración de tal forma que no haya saturación en los motores. El campo de velocidad que se eligió para los experimentos en coordenadas operacionales dibuja el óvalo de Cassini. La ecuación en coordenadas polares del ovalo de Cassini es dada por (Spiegel y Abellanas, 1991)

$$r^4 + a^4 - 2a^2r^2 \cos(2\theta) = b^4. \quad (88)$$

donde a y b son constantes y $b > a$. La ecuación (88) puede ser transformada a

coordenadas rectangulares, quedando como (Spiegel y Abellanas, 1991)

$$[[x - x_c]^2 + [y - y_c]^2]^2 + a^4 - 2a^2[[x - x_c]^2 - [y - y_c]^2] = b^4 \quad (89)$$

donde x_c e y_c son las coordenadas en el espacio operacional del centro del óvalo.

Como se estudió en el capítulo III y de acuerdo a la ecuación (31), la especificación indirecta de un campo de velocidad en \mathbb{R}^2 en coordenadas operacionales es dada como

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -k_1(\mathbf{x})f(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}) + c_1(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}_{\mathcal{N}}(\mathbf{x}). \quad (90)$$

En el caso en que el campo de velocidad dibuja el óvalo de Cassini,

$$f(\mathbf{x}) = [[x - x_c]^2 + [y - y_c]^2]^2 + a^4 - 2a^2[[x - x_c]^2 - [y - y_c]^2] - b^4 \quad (91)$$

y $\dot{\mathbf{x}}_{\mathcal{N}}(\mathbf{x})$ es un vector que está en el espacio nulo del gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$. De acuerdo a lo estudiado en el capítulo III, la elección de los mapeos escalares $k_1(\mathbf{x})$ y $c_1(\mathbf{x})$ responde a las restricciones de norma en $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ que se deseen imponer. Para el caso del campo de velocidad usado en los experimentos se eligió

$$k_1(\mathbf{x}) = \frac{k_0}{|f(\mathbf{x})|\|\nabla f(\mathbf{x})\| + \epsilon} \quad (92)$$

$$c_1(\mathbf{x}) = \frac{c_0 \exp^{-\alpha|f(\mathbf{x})|}}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|} \quad (93)$$

donde

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 4[x - x_c][[x - x_c]^2 + [y - y_c]^2] - 4a^2[x - x_c] \\ 4[y - y_c][[x - x_c]^2 + [y - y_c]^2] + 4a^2[y - y_c] \end{bmatrix}. \quad (94)$$

La elección de $k(\mathbf{q})$ es hecha con los mismos fines que en el ejemplo 3 de la subsección III.2.4. De acuerdo a la ecuación (93), que define $c_1(\mathbf{x})$, puede afirmarse que si se elige un punto \mathbf{x} suficientemente lejano a la curva Γ_x entonces $c_1(\mathbf{x})$ tendrá un valor pequeño debido al exponencial negativo, por lo que el segundo término de la ecuación (90) también será pequeño, pero si $\mathbf{x} \in \Gamma_x$, entonces $f(\mathbf{x}) = 0$, implica que $c_1(\mathbf{x}) = c_0/\|\nabla f(\mathbf{x})\|$. De esta forma, la elección de $k_1(\mathbf{x})$ y $c_1(\mathbf{x})$ como función del estado \mathbf{x} es tal, que para puntos lejanos a la curva, $k_1(\mathbf{x})$ y $c_1(\mathbf{x})$ ocasionan que la norma euclídeana

de $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ no sea demasiado grande. De esta manera, para una condición inicial dada, el error campo vectorial no resulta ser demasiado grande lo que conviene para evitar saturar los motores. Finalmente, $\dot{\mathbf{x}}_{\mathcal{N}}(\mathbf{x})$ se escogió como

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathcal{N}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -4[y - y_c][x - x_c]^2 + [y - y_c]^2 - 4a^2[y - y_c] \\ 4[x - x_c][x - x_c]^2 + [y - y_c]^2 - 4a^2[x - x_c] \end{bmatrix}. \quad (95)$$

Es fácil comprobar que $\nabla f(\mathbf{x})^T \dot{\mathbf{x}}_{\mathcal{N}}(\mathbf{x})^T = 0$, con lo se cumple la condición de que $\dot{\mathbf{x}}_{\mathcal{N}}(\mathbf{x})$ debe estar en el espacio nulo de $\nabla f(\mathbf{x})$.

Los valores de las constantes en el campo de velocidad se eligieron como

- $a = 0.15$ m
- $b = 0.16$ m
- $x_c = 0$ m
- $y_c = 0$ m
- $k_0 = 0.1$ m/s
- $c_0 = 0.1$ m/s
- $\alpha = 500$ m⁻⁴
- $\epsilon = 0.0001$ m⁷

Las unidades de $f(\mathbf{x})$ son m⁴ y las del producto $|f(\mathbf{x})|\|\nabla f(\mathbf{x})\|$ son m⁷, por lo que las unidades de las constantes α y ϵ deben corresponder a tales, de acuerdo a las ecuaciones (92) y (93).

Es visto que tanto el controlador basado en dinámica inversa de la sección IV.2, como el de dos lazos de retroalimentación de la sección IV.3 requieren la derivada temporal de $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Se observa que $k_1(\mathbf{x})$ y $c_1(\mathbf{x})$ involucran al valor absoluto, por lo

que la derivada temporal de $k_1(\mathbf{x})$ y de $c_1(\mathbf{x})$ es aproximada por medio de la tangente hiperbólica, resultando

$$\frac{d}{dt}k_1(\mathbf{x}) = \frac{-k_0 \left[|f(\mathbf{x})| \left[\frac{d}{dt} \|\nabla f(\mathbf{x})\| \right] + \|\nabla f(\mathbf{x})\| \tanh(\lambda f(\mathbf{x})) \left[\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}) \right] \right]}{\left[|f(\mathbf{x})| \|\nabla f(\mathbf{x})\| + \epsilon \right]^2} \quad (96)$$

$$\frac{d}{dt}c_1(\mathbf{x}) = -\alpha c_0 \tanh(\lambda |f(\mathbf{x})|) \left[\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}) \right] \exp^{-\alpha |f(\mathbf{x})|} \quad (97)$$

En los experimentos se considera $\lambda = 5000$. Finalmente la figura 20 muestra el campo de velocidad que se usó en la experimentación de los controladores mediante campo de velocidad en coordenadas operacionales.

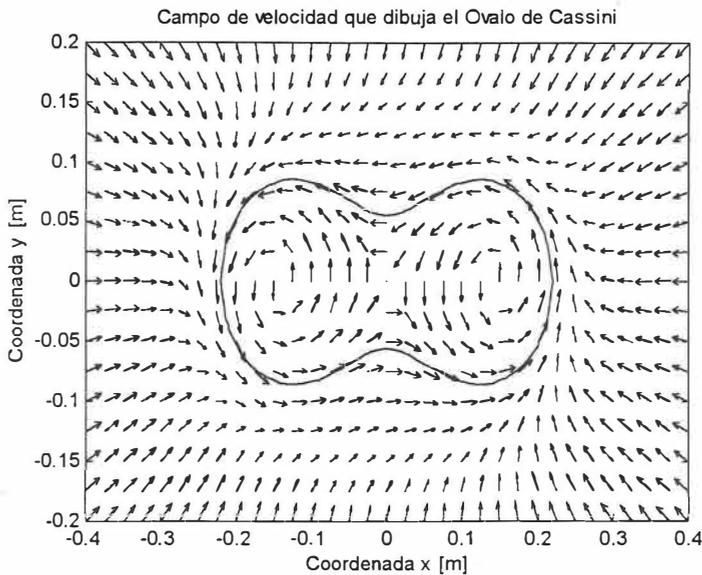


Figura 20: Campo vectorial usado en experimentos, el cual dibuja el óvalo de Cassini.

V.2.2 Experimentos con el controlador basado en dinámica inversa

Este controlador se estudió en la sección IV.2. La caracterización matemática del controlador mediante campo de velocidad basado en dinámica inversa para coordenadas operacionales es

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{u}_0 + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (98)$$

$$\mathbf{u}_0 = J(\mathbf{q})^\dagger \left[\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + K_v [\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{x}}] + K_p \boldsymbol{\xi} - \dot{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \quad (99)$$

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \int_0^t [\mathbf{v}(\mathbf{x}(\sigma)) - \dot{\mathbf{x}}(\sigma)] d\sigma \quad (100)$$

con K_p y K_v matrices simétricas definidas positivas.

Con este controlador se realizaron dos experimentos en los que se modificaron las ganancias K_p y K_v para probar sus prestaciones. En éstos experimentos se llevó al robot de la posición de casa, i.e., de la condición inicial $x(0) = 0$ m e $y(0) = -0.9$ m, a la posición $x(0) = 0.636$ m e $y(0) = 0$ m por medio de un controlador de posición. Una vez que se alcanzó esta posición, después de un tiempo de 10 seg, se conmutó al control mediante campo de velocidad basado en dinámica inversa, por lo que las gráficas que se presentan parten de 10 de segundos en adelante.

Experimento 1 Como se mencionó anteriormente, el inicio de la fase de experimentación es a partir del desarrollo de simulaciones. En éstas se prueban distintos valores de ganancias de los controladores para observar que no se rebasen los límites de físicos en par de los motores. En éste primer experimento los valores de las ganancias K_p y K_v son los siguientes

$$K_p = \text{diag}\{157, 157\} \text{ Nm/rad}$$

$$K_v = \text{diag}\{25, 25\} \text{ Nm seg/rad}$$

La figura 21 muestra el toque aplicado τ_1 simulado y experimental, mientras que el resultado de la simulación y experimentación de τ_2 puede verse en la figura 22.

La gráfica de y vs x que se obtuvo experimentalmente se aprecia en la figura 23. Recuérdese que en la especificación que se hizo del campo de velocidad los vectores tangentes al óvalo de Cassini tienen una rapidez constante de 0.1 m/seg. La gráfica de $\|\dot{\mathbf{x}}\|$ que resulta tanto de la simulación como de la experimentación se tiene en la figura 24.

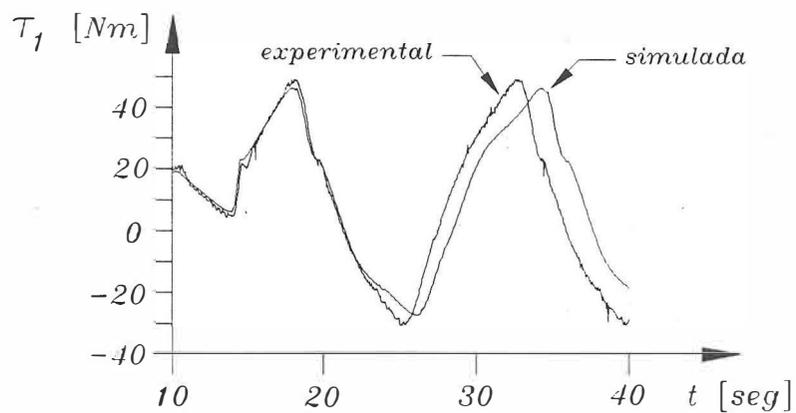


Figura 21: Resultado de experimentación y simulación de τ_1 para el experimento 1.

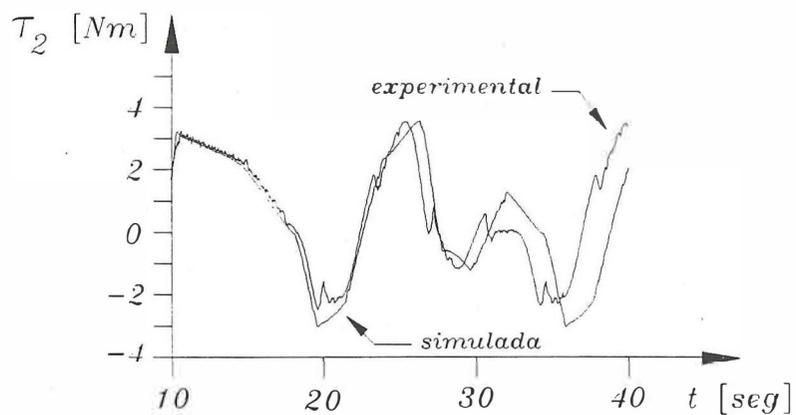


Figura 22: Resultado de experimentación y simulación de τ_2 para el experimento 1.

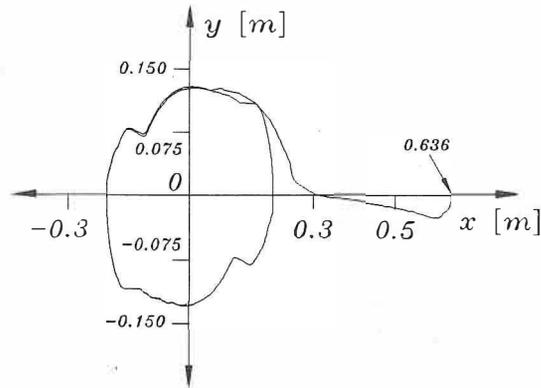


Figura 23: Gráfica de y vs x experimental para el experimento 1.

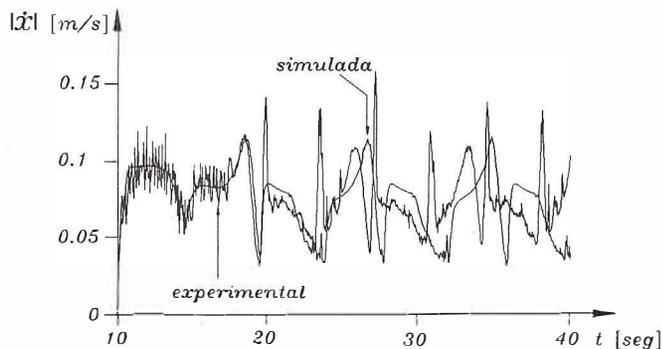


Figura 24: Resultado experimental y de simulación de $\|\dot{\mathbf{x}}\|$ para el experimento 1.

Podrá observarse que existen diferencias entre los pares que resultan de la simulación y los pares del experimento. Además de esto, una diferencia también ocurre entre las gráficas de la norma de la velocidad $\|\dot{\mathbf{x}}\|$ del experimento y simulación. Podrá observarse también que, mientras el valor deseado de $\|\dot{\mathbf{x}}\|$ es 0.1 m/s, en dicha gráfica se vé que la evolución de las curvas de simulación y experimentación se mantienen bastante oscilantes, en vez de converger asintóticamente. Finalmente, otra gráfica que muestra la mala ejecución es la de y vs x mostrada en la figura 23.

El responsable del pobre desempeño, según mostraron las simulaciones, es la fricción de Coulomb, pues al anular ésta en el modelo del robot, el comportamiento era sin deformaciones y con convergencia asintótica a las especificaciones de rapidez y trayectoria esperada. Otra explicación de la diferencia entre las gráficas de simulación y experi-

mentación son los efectos de ruido en el sistema experimental, además de los pequeños errores que existen en la estimación de los parámetros dinámicos y cinemáticos del modelos dinámico del robot.

Experimento 2 El experimento anterior mostró resultados poco satisfactorios en cuanto a desempeño. La experiencia de simulación indica que la ganancia que hace que el efecto de la fricción de Coulomb sea menos significativo es la ganancia K_p . Así pues, la diferencia de este experimento con el anterior es que la ganancia K_p se aumentó para tratar de eliminar los efectos de deterioro que causa la fricción de Coulomb. En este contexto, se eligieron los valores de

$$K_p = \text{diag}\{500, 500\} \text{ Nm/rad}$$

$$K_v = \text{diag}\{20, 20\} \text{ Nm seg/rad}$$

La gráfica del par τ_1 simulado y experimental puede verse en la figura 25. La gráfica del par τ_2 simulado y experimental puede apreciarse la figura 26.

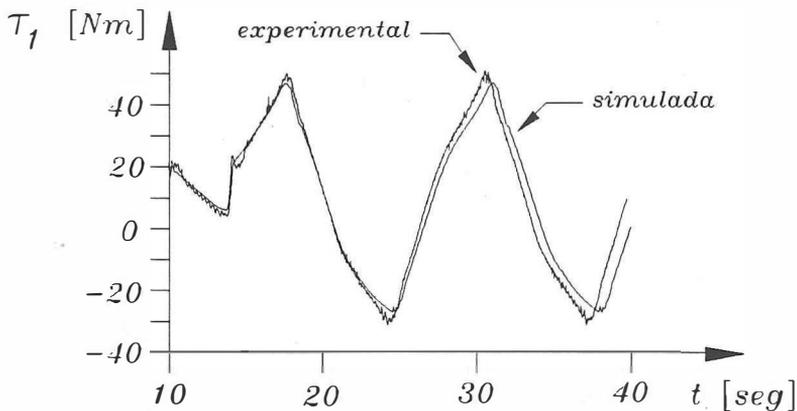


Figura 25: Resultado de experimentación y simulación de τ_1 para el experimento 2.

La gráfica de y vs x que resultó de la experimentación está en la figura 27. Por último, en la figura 28, se tiene la gráfica de $\|\dot{x}\|$ que resultó de la simulación y de la experimentación.

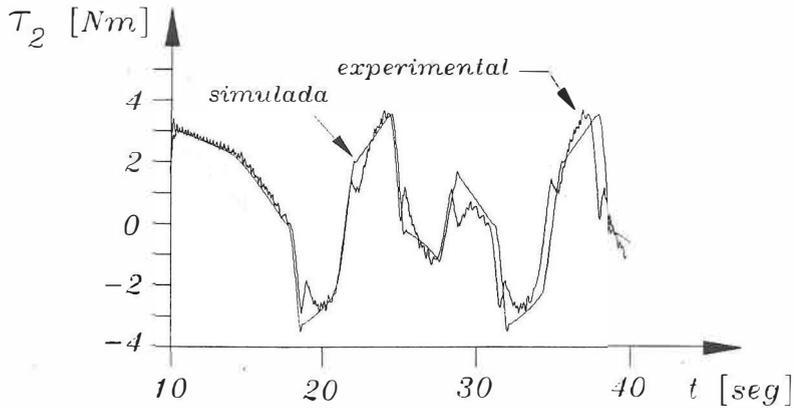


Figura 26: Resultado de experimentación y simulación de τ_2 para el experimento 2.

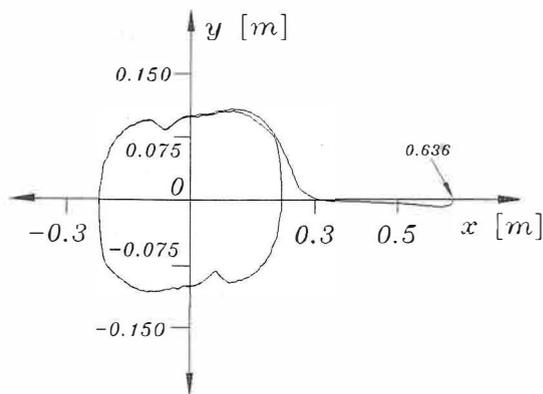


Figura 27: Gráfica de y vs x de simulación y experimental para el experimento 2.

En este experimento los pares simulados y experimentales son similares, sin embargo, al transcurso del tiempo se va registrando una diferencia en ellos. De nueva cuenta, la explicación de esta diferencia es que las ganancias elegidas no son lo suficientemente grandes como para eliminar el efecto de la fricción de Coulomb, además de la cancelación inexacta de la dinámica debido a posibles errores en la estimación del modelo. En el caso de la norma $\|\dot{\mathbf{x}}\|$ también hay similitud en experimento y simulación, excepto por las componentes de alta frecuencia que se posee la curva del experimento. Estas componentes son debido a los factores mencionados antes y al hecho de que al aumentar la ganancia K_p el controlador intenta rechazar los efectos de ruido y de la fricción de Coulomb. Sin embargo, la mejoría en el desempeño es significativamente mayor

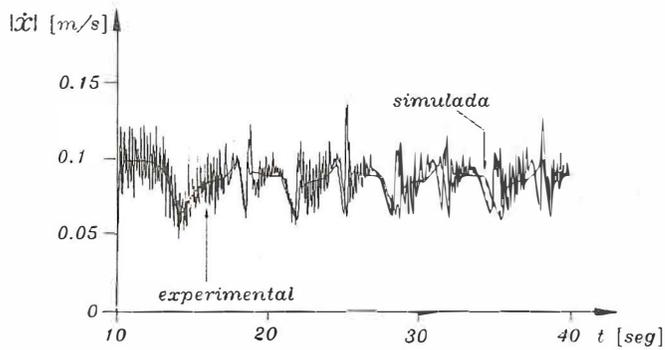


Figura 28: Gráfica de $\|\dot{x}\|$ de simulación y experimental para el experimento 2.

comparada con el experimento 1. en el que la ganancia K_p es menor. Ello es claro al comparar la gráfica 23 con la gráfica 27, en las que se muestran y vs x del experimento 1 y 2, respectivamente.

Si bien es cierto que el aumento las ganancias K_p y K_v mejorará el rechazo al efecto de la fricción de Coulomb, el costo que se paga por ello es que hay un aumento en las componentes de alta frecuencia en los pares aplicados, lo que es ideseable, pues estas componentes pueden ser dañinas para los motores, ya que a su vez, éstas pueden exitar la dinámica de alta frecuencia de los motores, lo que se traduce en un posible daño físico. Este hecho se demostró al querer implementar en la práctica ganancias más altas que las que se mostraron en los dos experimentos anteriores.

De manera concluyente, los resultados de ambos experimentos conducen al siguiente cuestionamiento: ¿cómo es posible mejorar el desempeño del robot ante el efecto desastroso de la fricción de Coulomb?. En la siguiente sección se demuestra experimentalmente que el controlador basado en dos lazos de retroalimentación es más robusto a este efecto.

V.2.3 Experimentos con el controlador basado en dos lazos de retroalimentación

Los experimentos de esta subsección son referidos al controlador estudiado en la sección IV.3. El controlador en cuestión es dado como

$$\tau = M(\mathbf{q}) [\ddot{\mathbf{q}}_d + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_p \mathbf{z}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (101)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (102)$$

donde

$$\ddot{\mathbf{q}}_d = J(\mathbf{q})^\dagger \left[\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + K [\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{x}}] \right] + \left[\frac{d}{dt} J(\mathbf{q})^\dagger \right] [\mathbf{v}(\mathbf{x}) + K \boldsymbol{\xi}] \quad (103)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_d = J(\mathbf{q})^\dagger [\mathbf{v}(\mathbf{x}) + K \boldsymbol{\xi}] \quad (104)$$

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \int_0^t [\mathbf{v}(\mathbf{x}(\sigma)) - \dot{\mathbf{x}}(\sigma)] d\sigma, \quad (105)$$

K , K_p y K_v son matrices simétricas definidas positivas $\dot{\mathbf{q}}_d$ es la velocidad articular deseada y $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}_d(t) - \dot{\mathbf{q}}(t)$ denota el error de velocidad articular.

Al igual que con la experimentación del controlador basado en dinámica inversa, con el controlador basado en dos lazos de retroalimentación se realizaron dos experimentos con ganancias distintas para valorar sus prestaciones. Al igual que antes se llevó al robot de la posición de casa, a la posición $x(0) = 0.636$ m e $y(0) = 0$ m por medio de un controlador de posición. Una vez alcanzada esta posición, después de 10 seg., se conmutó al control mediante campo de velocidad basado en dos lazos de retroalimentación. Las gráficas mostradas parten de 10 de segundos.

Experimento 3 El paso inicial para la selección de las ganancias K , K_p y K_v se basó en pruebas de simulación, con la idea de no infringir los límites físicos de los actuadores. Para este primer experimento las ganancias son

$$K = \text{diag}\{25, 25\} \text{ seg}^{-1}$$

$$K_p = \text{diag}\{100, 100\} \text{ Nm/rad}$$

$$K_v = \text{diag}\{20, 20\} \text{ Nm seg/rad}$$

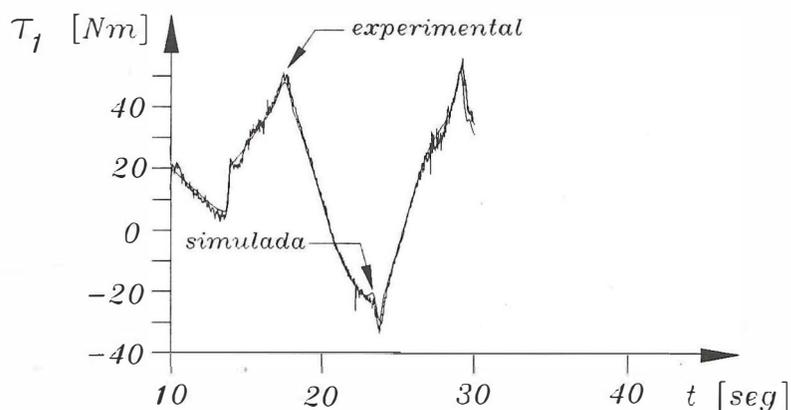


Figura 29: Resultado de experimentación y simulación de τ_1 para el experimento 3.

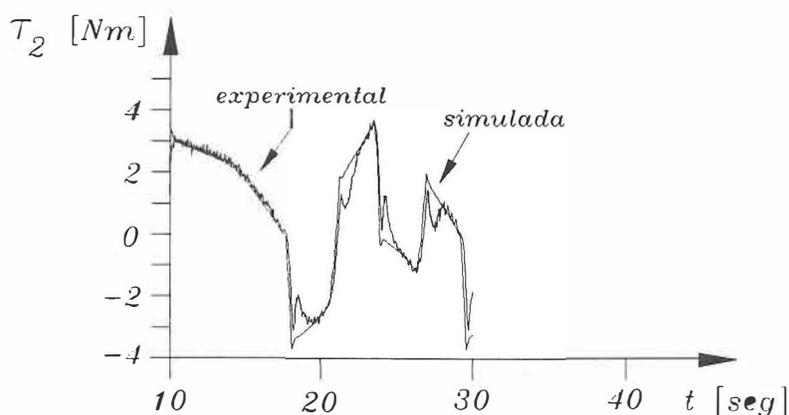


Figura 30: Resultado de experimentación y simulación de τ_2 para el experimento 3.

La gráfica del par aplicado τ_1 simulado y experimental puede apreciarse en la figura 29, mientras que la de τ_2 que resultó de la simulación y de la experimentación puede verse en la figura 30.

La gráfica de y vs x que se obtuvo experimentalmente se aprecia en la figura 31. La gráfica de $\|\dot{\mathbf{x}}\|$ que resulta tanto de la simulación como del experimento se tiene en la figura 32.

Se observa una gran semejanza entre los resultados de simulación y de experimentación en las gráficas de los pares como de $\|\dot{\mathbf{x}}\|$. Podrá observarse que el desempeño es superior a los dos experimentos realizados con el controlador basado en dinámica in-

versa, sin embargo se apreciará en la figura 31 que aún persiste una deformación de la trayectoria y vs x que dibuja el robot. También se apreciará una similitud entre las gráficas de simulación y experimentación de $\|\dot{\mathbf{x}}\|$, excepto por la oscilación de alta frecuencia que presenta la curva del experimento. De nueva cuenta, la simulación mostró que, tanto la deformación en la gráfica y vs x como la presencia de picos en la curva experimental de $\|\dot{\mathbf{x}}\|$, son efectos debidos a la fricción de Coulomb. Una vez más, la manera de hacer que el efecto de la fricción de Coulomb sea menos incidente en la ejecución es realizar un aumento de las ganancias K , K_p y K_v . El experimento 4 arroja resultados en este sentido.

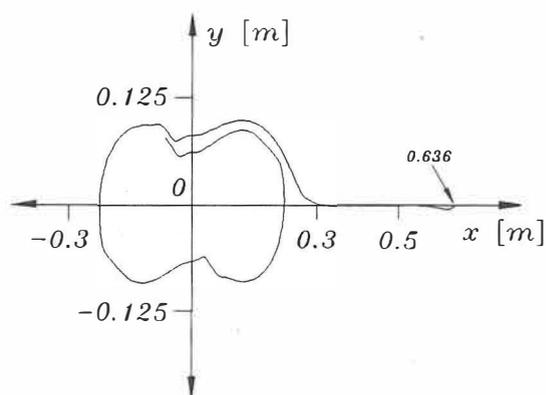


Figura 31: Gráfica de y vs x experimental para el experimento 3.

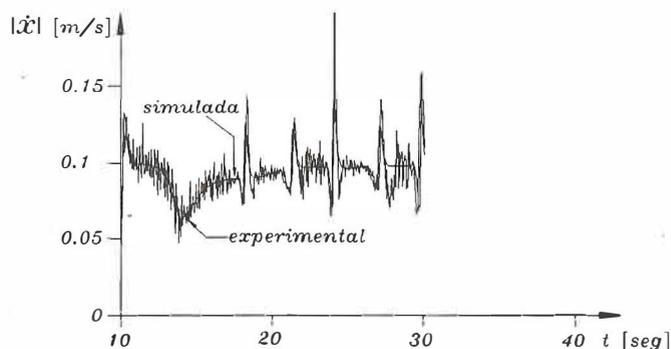


Figura 32: Gráfica de $\|\dot{\mathbf{x}}\|$ de simulación y experimental para el experimento 3.

Experimento 4 La diferencia de este experimento con el anterior es que las ganancias K , K_p y K_v se aumentaron para tratar de disminuir el efecto de deformación que la fricción de Coulomb causa en el trazado de la trayectoria y vs x . La simulación hacía ver que las ganancias K y K_p tenían un efecto más relevante en el rechazo al efecto de la fricción de Coulomb. En este contexto, se eligieron los valores de

$$K = \text{diag}\{25, 25\} \text{ seg}^{-1}$$

$$K_p = \text{diag}\{157, 157\} \text{ Nm/rad}$$

$$K_v = \text{diag}\{25, 25\} \text{ Nm seg/rad}$$

La gráfica del par τ_1 simulado y experimental puede verse en la figura 33, la del par τ_2 simulado y experimental puede apreciarse la figura 34.

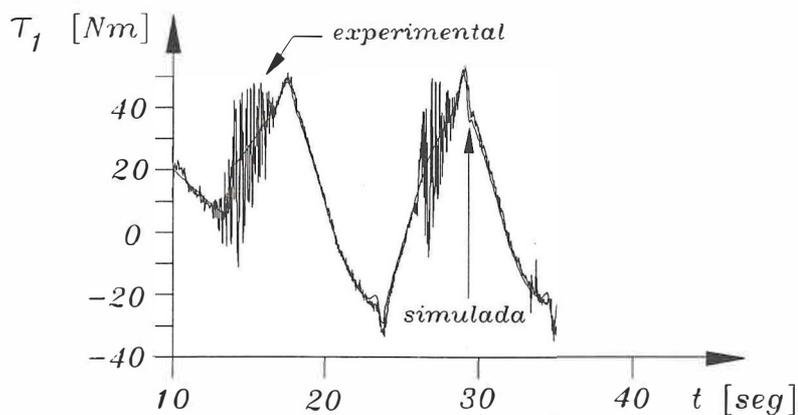


Figura 33: Resultado de experimentación y simulación de τ_1 para el experimento 4.

Además y vs x del experimento está en la figura 35 y por último la gráfica de $\|\dot{\mathbf{x}}\|$ experimental y de simulación está en la figura 36. Si observamos la gráficas de los pares se observará la presencias de algunos picos en ciertos intervalos de tiempo. La explicación de su presencia es debido a que el controlador intenta rechazar los efectos de la medición ruidosa de la velocidad y de la fricción de Coulomb, además de los pequeños errores en la cancelación de la dinámica. Finalmente puede apreciarse que la trayectoria y vs x que ejecuta el robot es la mejor comparada con la de los otros experimentos. De forma análoga, la gráfica de $\|\dot{\mathbf{x}}\|$ experimental es bastante satisfactoria.

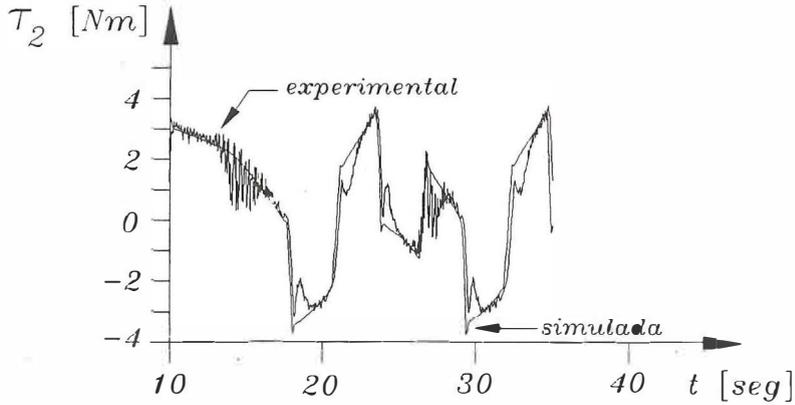


Figura 34: Resultado de experimentación y simulación de τ_2 para el experimento 4.

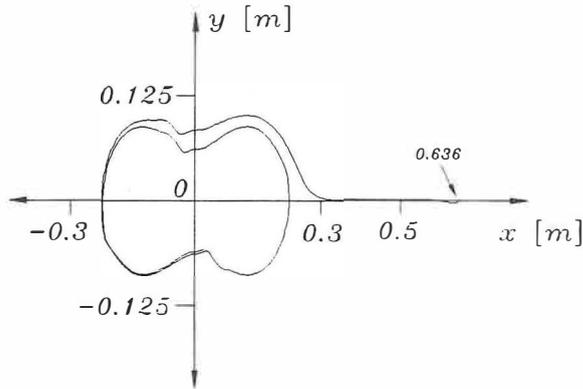


Figura 35: Gráfica de y vs x de simulación y experimental para el experimento 4.

V.3 Campo de velocidad en coordenadas articulares

V.3.1 Especificación del campo de velocidad

El campo de velocidad que se propone para el experimento dibuja un círculo. El cómo definir un campo de velocidad de tales características ha sido tratado ya en la subsección III.2.1 y en el ejemplo 1 de la subsección III.2.4. El campo de velocidad usado en el

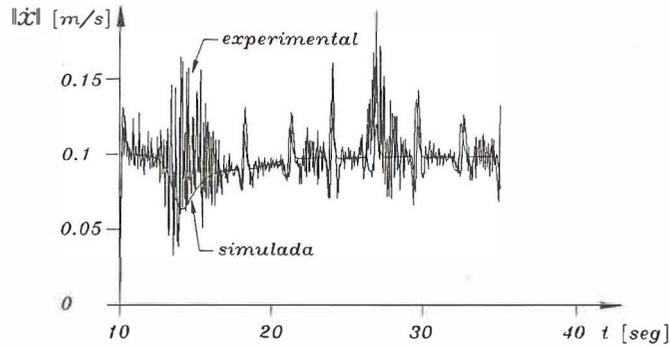


Figura 36: Gráfica de $\|\dot{\mathbf{x}}\|$ de simulación y experimental para el experimento 4.

experimento viene dado por

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -2k_0 f(q_1, q_2) [q_1 - q_{1c}] - c_0 \frac{q_2 - q_{2c}}{\sqrt{(q_1 - q_{1c})^2 + (q_2 - q_{2c})^2}} \\ -2k_0 f(q_1, q_2) [q_2 - q_{2c}] + c_0 \frac{q_1 - q_{1c}}{\sqrt{(q_1 - q_{1c})^2 + (q_2 - q_{2c})^2}} \end{bmatrix}, \quad (106)$$

donde

$$f(q_1, q_2) = (q_1 - q_{1c})^2 + (q_2 - q_{2c})^2 - r_0^2. \quad (107)$$

Además los valores de las constantes involucradas en el campo vectorial en cuestión toman los valores siguientes

- $q_{1c} = 0.75$ rad
- $q_{2c} = 0.75$ rad
- $r_0 = 0.5$ rad
- $c_0 = 0.25$ rad/seg

Debe notarse que la constante c_0 especifica una rapidez constante de 0.25 rad/seg, equivalente a 14.324 grados/seg, a los vectores tangentes al círculo dado por $f(\mathbf{q}) = 0$. La gráfica de dicho campo vectorial se observa en la figura 37.

Una característica del campo de velocidad que se especifica es que los vectores que se encuentran más alejados del círculo poseen magnitud mayor que los que se encuentran

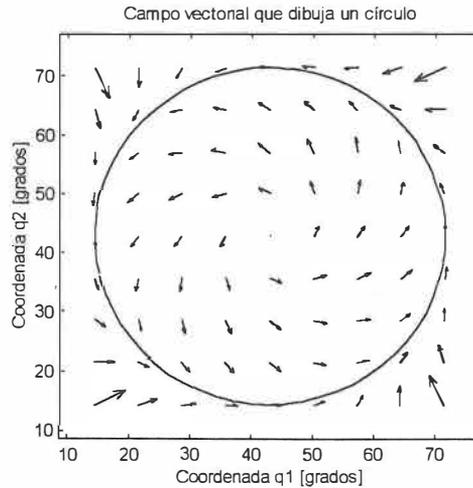


Figura 37: Campo vectorial usado en experimento, el cuál dibuja un círculo.

mas cerca. Esto conduce al hecho de que si la velocidad inicial del robot es nula y la posición inicial se encuentra relativamente lejana al círculo, el error de campo de velocidad puede ser demasiado grande que a partir de ciertas ganancias puede haber saturación en los motores.

V.3.2 Experimento con el controlador basado en dinámica inversa

Los resultados presentados aquí corresponden al controlador analizado en la sección IV.4. Dicho controlador tiene la siguiente forma

$$\tau = M(\mathbf{q}) \left[\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + K_v [\mathbf{v}(\mathbf{q}) - \dot{\mathbf{q}}] + K_p \boldsymbol{\xi} \right] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (108)$$

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \int_0^t [\mathbf{v}(\mathbf{q}(\sigma)) - \dot{\mathbf{q}}(\sigma)] d\sigma \quad (109)$$

Para este controlador tan sólo se realizó un experimento.

Las ganancias elegidas son

$$K_p = \text{diag}\{849.4, 849.4\} \text{ Nm/rad}$$

$$K_v = \text{diag}\{20.05, 11.46\} \text{ Nm seg/rad}$$

Se podrá observar en la figura 38 y 39 las gráficas de los pares simulados y de experimentación τ_1 y τ_2 , respectivamente. Se observa gran similitud entre los resultados de experimentación y simulación, sin embargo es apreciable que en los primeros instantes de tiempo se le exige a los motores su capacidad máxima. Esto significa que las ganancias que se seleccionaron son las máximas permitidas bajo la condición inicial $q_1 = 0$ y $q_2 = 0$. Debe recordarse que el error de campo de velocidad disminuye si la velocidad inicial del robot es nula y la posición inicial del robot es cercana a los puntos que dibujan el círculo. Cabe mencionar que para estas mismas ganancias, si la condición inicial de la posición del robot fuera mas cercana al círculo, los pares aplicados por los motores serían menores a los mostrados en los primeros instantes de tiempo.

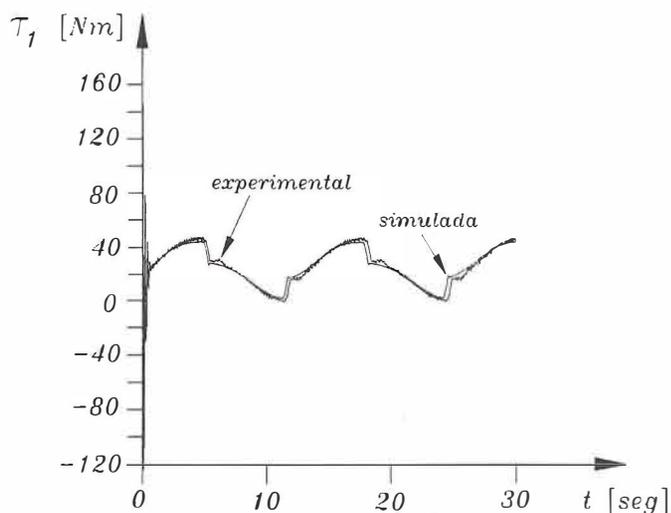


Figura 38: Campo de velocidad en coordenadas articulares. Par τ_1 experimental y simulado.

En la figura 40 se muestra la gráfica de q_2 vs q_1 de experimentación y en la figura 41 tenemos la gráfica de $\|\dot{q}\|$ de experimentación y simulación. En ambas gráficas se observa que la ejecución experimental es satisfactoria. La deformación que se aprecia en la trayectoria q_2 vs q_1 es debido a la fricción de Coulomb. El efecto es eliminable aumentando las ganancias del controlador, pero el costo sería la saturación de los actuadores y la presencia de componentes de alta frecuencia en los pares aplicados. Por

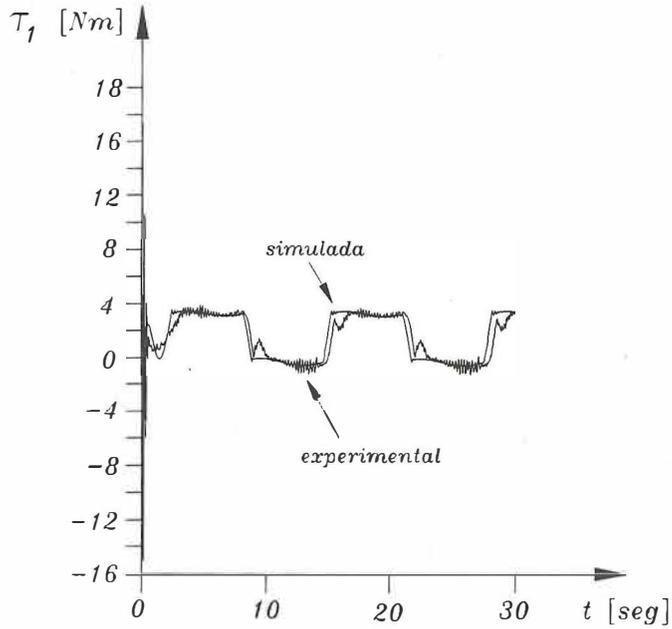


Figura 39: Campo de velocidad en coordenadas articulares. Par τ_2 experimental y simulado.

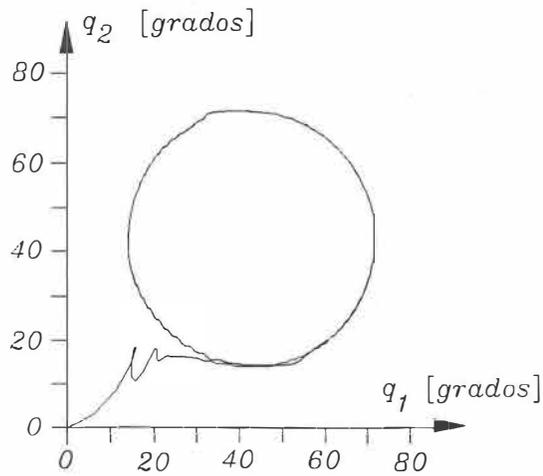


Figura 40: Campo de velocidad en coordenadas articulares. Grafica de q_2 vs q_1 experimental.

otro lado, la evolución experimental y de simulación de la curva de $\|\dot{\mathbf{q}}\|$ mostrada en la figura 41 converge al valor especificado de 14.324 grados/seg.

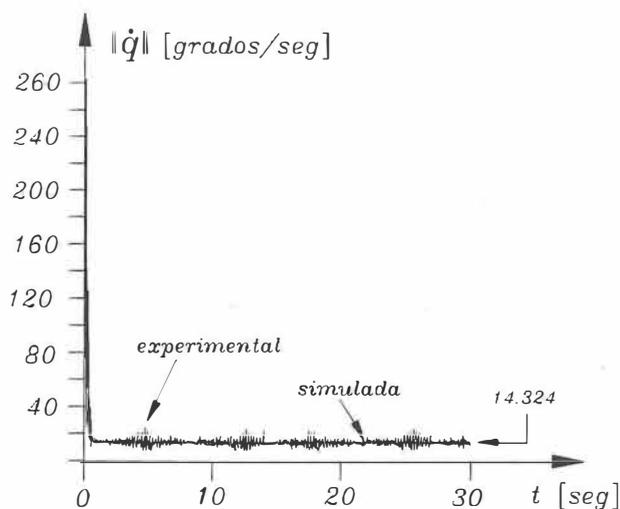


Figura 41: Campo de velocidad en coordenadas articulares. Grafica de $\|\dot{q}\|$ de simulación y experimental.

V.4 Conclusiones

En este capítulo se han mostrado los experimentos de los controladores estudiados, tanto en coordenadas operacionales como coordenadas articulares.

Se ha apreció que la fricción de Coulomb causa en efecto bastante significativo en el deterioro del desempeño. En el caso del controlador basado en dinámica inversa, se observó que sólo aumentando las ganancias el efecto de la fricción puede ser disminuido, pero ésto lleva a que el par sea bastante oscilatorio, lo que es inconveniente por el posible daño en los motores. En el caso del controlador basado en dos lazos de retroalimentación, el efecto de la fricción fué menos significativo, y tuvo en desempeño mejor en la ejecución del objetivo de control.

Los experimentos han demostrado que el cumplimiento del objetivo de control es bastante sensible a la presencia de fricción de Coulomb en el robot. Además, el no tener una buena estimación de la velocidad y la presencia de ruido en el sistema experimental también influyen en el cumplimimiento del objetivo de control. De esta forma, como trabajo a futuro se sugiere hacer un estudio sobre técnicas para tener una mejor esti-

mación de la velocidad y sobre técnicas para la compensación de fricción de Coulomb, para ser aplicadas en los controladores estudiados.

VI CONCLUSIONES GENERALES

VI.1 Conclusiones

Este trabajo de tesis ha abordado un planteamiento de control para robots manipuladores de reciente concepción, denominado "control mediante campo de velocidad". Se ha realizado un estudio alterno al reportado en la literatura y se han motivado algunos aspectos que no estaban del todo claros, como la manera de especificar campos de velocidad. A este respecto, el presente trabajo aportó un método analítico para la especificación de campos de velocidad.

Los controladores que se estudian para resolver el problema de control mediante campo de velocidad son simples en cuanto a la idea de desacoplar la dinámica no lineal del robot a partir del conocimiento exacto de los parámetros cinemáticos y dinámicos de su modelo. El controlador basado en dos lazos de retroalimentación representa un esquema bastante interesante en su aplicación, no sólo a campo de velocidad, sino a otros problemas de control como el control servo-visual (Kelly *et al.*, 1999) o control de velocidad, dadas sus características de robustez.

Los experimentos de los controladores propuestos, arrojaron resultados interesantes en cuanto a los problemas y características de ejecución. Se apreció que la fricción de Coulomb causa un efecto bastante significativo en el deterioro del desempeño, por lo que resulta evidente que el estudio de las técnicas de compensación de fricción de Coulomb requiere una profundidad mayor.

VI.2 Problemas abiertos

Se sugiere hacer un estudio sobre técnicas para la compensación de fricción de Coulomb y aplicarlas en los controladores estudiados, pues la evidencia experimental demostró que los esquemas de control analizados son bastantes sensible a la presencia de fricción

de Coulomb.

Hacer un estudio sobre técnicas para estimación de velocidad articular a partir de la medición de la posición articular.

Otro tema que resulta de interés es el estudio de robustez de los controladores propuestos cuando se tiene incertidumbre en el conocimiento de los parámetros dinámicos y cinemáticos del robot.

LITERATURA CITADA

- Canudas C., Siciliano B. y G. Bastin (eds.) 1996. "*Theory of Robot Control*", Springer-Verlag, London, U.K. 392 pp.
- Coello A. 1997. "*Study of the Transpose Jacobian Control of Robots Manipulators*" (in Spanish), M.S. thesis, CICESE, Ensenada, B.C., Mexico. 143 pp.
- Isidori A. 1995. "*Nonlinear Control Systems*", 3rd ed., Springer-Verlag, London, UK. 549 pp.
- Iwasaki M., Shibata T. y N. Matsui. 1999. "*Disturbance-Observer-Based Nonlinear Friction Compensation in Table Drive System*". IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, Vol. 4, No. 1, March. 3-8 p.
- Kelly R. 1995. "*Motion Control of Robots Manipulators*" (in Spanish), CICESE, Ensenada, B.C., Mexico. 451 pp.
- Kelly R., Reyes F., Moreno J. y S. Hutchinson. 1999. "*A Two Loops Direct Visual Control of Direct-Drive Planar Robots with Moving Target*", In Proceedings of the IEEE International Conferences in Robotics and Automation, Detroit, MI, May. 599- 604 p.
- Khalil H. 1996. "*Nonlinear Systems*", Macmillan, New York, NY. 734 pp.
- Kreyszig E. 1962. "*Advanced Engineering Mathematics*", John Wiley and Sons, New York, NY. 1016 pp.
- Latombe J. 1991. "*Robot Motion Planning*", Kluwer, Norwell, MA. 843 pp.
- Li P. y R. Horowitz. 1995. "*Passive Velocity Field Control of Mechanical Manipulators*", In Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation, Nagoya, Japan, May. 2764-2770 p.

- Li P. y R. Horowitz. 1996. "*Application of Passive Velocity Field Control To Robot Contour Following Problems*", In Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, December. 378-385 p.
- Marsden J. y M. Hoffman. 1998. "*Análisis Clásico Elemental*", Addison-Wesley Iberoamericana, México, 735 pp.
- Marsden J. y A. Tromba. 1988. "*Vector Calculus*", W. H. Freeman and Company, New York, NY. 664 pp.
- Panteley E., Ortega R. y M. Gäfvert. 1998. "*An Adaptive Friction Compensator for Global Tracking in Robot Manipulators*", Systems & Control Letters, 33, 307-313 p.
- Reyes F. 1997. "*Control de un Robot de 2 Grados de Libertad de Transmisión Directa*". Tesis doctoral, CICESE, Ensenada, BC., Mex. 156 pp.
- Reyes F. y R. Kelly. 1997. "*Experimental Evaluation of Identification Schemes on a Direct Drive Robot*", Robotica, Vol. 15. 563-571 p.
- SIMNON for Windows, Version 2.0*. 1995. SSPA Maritime Consulting AB, Sweden.
- Spiegel M. y L. Abellanas. 1991. "*Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada*", Serie Schaum, McGraw-Hill, México. 326 pp.
- Spong M. y M. Vidyasagar. 1989. "*Robot Dynamics and Control*", John Wiley and Sons, New York, NY.
- Sciavicco L. y B. Siciliano. 1996. "*Modeling and Control of Robot Manipulators*", McGraw-Hill, New York, NY. 358 pp.
- Vidyasagar M. 1978. "*Nonlinear Systems Analysis*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 302 pp.

Wylie C. 1960. "*Advanced Engineering Mathematics*", McGraw-Hill, New York, NY.
938 pp.

A El teorema de LaSalle

Esta parte ha sido tomada de (Khalil, 1996). La demostración del lema y el teorema presentado pueden ser consultados en esta misma referencia. Considere el sistema autónomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (110)$$

donde $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un mapeo localmente Lipschitz del dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ a \mathbb{R}^n .

Sea $\mathbf{x}(t)$ una solución de (110). Un punto \mathbf{p} se dice ser un *punto límite positivo* de $\mathbf{x}(t)$ si existe una secuencia $\{t_n\}$ con $t_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, tal que $\mathbf{x}(t_n) \rightarrow \mathbf{p}$ cuando $n \rightarrow \infty$. El conjunto de todos los puntos límites positivos de $\mathbf{x}(t)$ es llamado *conjunto límite positivo de $\mathbf{x}(t)$* . Un conjunto M se dice ser un *conjunto invariante* con respecto a (110) si

$$\mathbf{x}(0) \in M \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in M, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Esto es, si una solución está en M en algún instante de tiempo, entonces debe estar en M para todo tiempo futuro y pasado. Un conjunto M se dice ser un *conjunto positivamente invariante* si

$$\mathbf{x}(0) \in M \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in M, \quad \forall t \geq 0$$

También decimos que $\mathbf{x}(t)$ se aproxima a el conjunto M cuando t tiende a infinito, si para cada $\epsilon > 0$ hay un $T > 0$ tal que

$$\text{dist}(\mathbf{x}(t), M) < \epsilon, \quad \forall t > T,$$

donde $\text{dist}(\mathbf{p}, M)$ denota la más pequeña distancia desde \mathbf{p} a cualquier punto de M . Esto dicho de forma más precisa es

$$\text{dist}(\mathbf{p}, M) = \inf_{\mathbf{x} \in M} \|\mathbf{p} - \mathbf{x}\|$$

Lema. Si una solución $\mathbf{x}(t)$ de (110) es acotada y esta en D para $t \geq 0$, entonces su conjunto límite positivo L^+ es un conjunto invariante no vacío y compacto. Además,

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow L^+ \text{ como } t \rightarrow \infty. \quad (111)$$

□

Ahora enunciaremos el teorema de LaSalle.

Teorema (LaSalle). Sea $\Phi \subset D$ un conjunto compacto el cual es positivamente invariante con respecto a (110). Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ en Ω . Sea Ω el conjunto de todos los puntos en Φ donde $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$. Sea M el conjunto invariante más grande en Ω . Entonces cada solución que comienza en Φ se aproxima a M como $t \rightarrow \infty$.

□

Note que el teorema de LaSalle no requiere que la función $V(\mathbf{x})$ sea definida positiva.

A continuación se presenta una aplicación inédita del teorema de LaSalle. Sea el sistema autónomo dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = -f(\mathbf{x}) \nabla f(\mathbf{x}) \quad (112)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $f(\mathbf{x})$ es una función escalar y $\nabla f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ es el gradiente de $f(\mathbf{x})$. Además defínase el conjunto

$$\Gamma_x = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Para analizar la naturaleza de las soluciones $\mathbf{x}(t)$ de la ecuación (112), usamos la siguiente función continuamente diferenciable

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} f(\mathbf{x})^2. \quad (113)$$

Debe notarse que $V(\mathbf{x})$ es una función no negativa y es nula en los puntos $\mathbf{x} \in \Gamma_x$. La derivada temporal de $V(\mathbf{x})$ está dada por

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \nabla f(\mathbf{x})^T \dot{\mathbf{x}} \quad (114)$$

Sustituyendo $\dot{\mathbf{x}}$ de la ecuación (112), $\dot{V}(\mathbf{x})$ queda

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= -f(\mathbf{x})^2 \nabla f(\mathbf{x})^T \nabla f(\mathbf{x}) \\ &= -f(\mathbf{x})^2 \|\nabla f(\mathbf{x})\|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (115)$$

El conjunto Ω está dado por

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : -f(\mathbf{x})^2 \nabla f(\mathbf{x})^T \nabla f(\mathbf{x}) = 0\} \\ &= \Gamma_x \cup \bar{E}\end{aligned}$$

donde el conjunto \bar{E} está dado por

$$\bar{E} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Si una solución tiene condición inicial que pertenece al conjunto \bar{E} , entonces la ecuación (112) queda

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (116)$$

Esto significa que la solución de (112) permanece en el conjunto \bar{E} para todo $t \geq 0$.

Para analizar las soluciones con condición inicial en el conjunto Γ_x considere la ecuación diferencial dada por

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})^T \dot{\mathbf{x}}. \quad (117)$$

Sustituyendo $\dot{\mathbf{x}}$ de la ecuación (112) se tiene

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x})^T \nabla f(\mathbf{x}) \quad (118)$$

dada la suposición de que $\mathbf{x}(0) \in \Gamma_x$, entonces

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}) = 0. \quad (119)$$

La solución de la ecuación diferencial (119) es

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}(0)) \quad (120)$$

donde $f(\mathbf{x}(0))$ es una constante. Pero si $\mathbf{x}(0) \in \Gamma_x$, implica que $f(\mathbf{x}(0)) = 0$, por lo que la solución de (119) es

$$f(\mathbf{x}) = 0 \quad (121)$$

con lo que se demuestra que si una solución comienza en $\boldsymbol{x}(0) \in \Gamma_x$, permanece en Γ_x para todo $t \geq 0$. Con todo lo anterior se demuestra que el conjunto invariante más grande en Ω es Ω mismo, con lo que se concluye que dicho conjunto es un atractor, cuando menos localmente.

Tabla I: Parámetros dinámicos y cinemáticos del robot de 2 gdl.

Descripción del parámetro	Notación
Longitud eslabón 1	l_1
Longitud eslabón 2	l_2
Masa del eslabón 1	m_1
Masa del eslabón 2	m_2
Centro de masa del eslabón 1	l_{c1}
Centro de masa del eslabón 2	l_{c2}
Inercia del eslabón 1	I_1
Inercia del eslabón 2	I_2
Aceleración de la gravedad	g

B Modelo cinemático y dinámico del robot de 2 grados de libertad

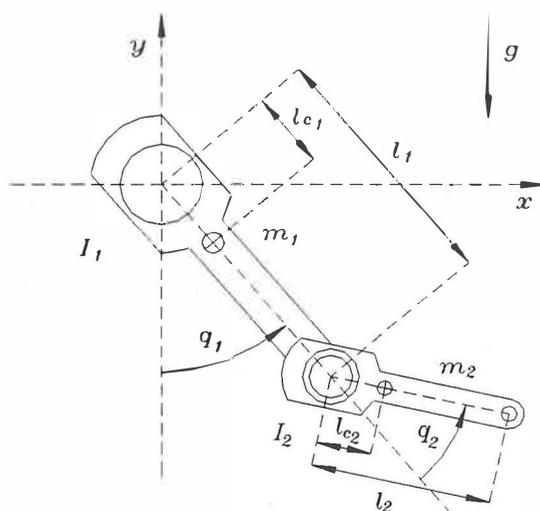


Figura 42: Robot Manipulador

Considérese el robot de 2 g.d.l. mostrado en la figura 42. El modelo cinemático

directo queda como:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{h}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} l_1 \sin(q_1) + l_1 \sin(q_1 + q_2) \\ -l_1 \cos(q_1) - l_1 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}. \quad (122)$$

La matriz jacobiana $J(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, está dada por

$$J(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) & l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}. \quad (123)$$

Para obtener el modelo dinámico del robot se pueda usa la formulación de Lagrange.

El lagrangiano es definido por (Siavikko y Siciliano, 1996)

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (124)$$

donde $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es la energía cinética del robot y $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ es la energía potencial del robot.

En el caso del robot de dos grados de libertad de la figura 42, la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} [m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_{c2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_1 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2], \quad (125)$$

mientras que la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ está dada por

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = g [l_{c1} m_1 [1 - \cos(q_1)] + m_2 [l_1 + l_{c2} - [l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)]]]. \quad (126)$$

De esta forma el modelo dinámico del robot resulta de aplicar las ecuaciones de lagrange, expresadas por (Siavikko y Siciliano, 1996)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, \dots, n \quad (127)$$

Es posible poner las ecuaciones dinámicas del robot en términos de la matriz de inercia, de la matriz de Coriolis y del vector de pares gravitacionales (Reyes y Kelly,

1997):

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \theta_1 + 2\theta_2 \cos(q_2) & \theta_3 + \theta_2 \cos(q_2) \\ \theta_3 + \theta_2 \cos(q_2) & \theta_3 \end{bmatrix}, \quad (128)$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -2\theta_2 \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 & -\theta_2 \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 \\ \theta_2 \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (129)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \theta_4 \text{sen}(q_1) + \theta_5 \text{sen}(q_1 + q_2) \\ \theta_5 \text{sen}(q_1 + q_2) \end{bmatrix}. \quad (130)$$

donde

$$\theta_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + I_1 + I_2$$

$$\theta_2 = m_2 l_1 l_{c2}$$

$$\theta_3 = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

$$\theta_4 = \mathbf{g}(m_1 l_{c1} + m_2 l_1)$$

$$\theta_5 = \mathbf{g} m_2 l_{c2}.$$

C Descripción del sistema experimental

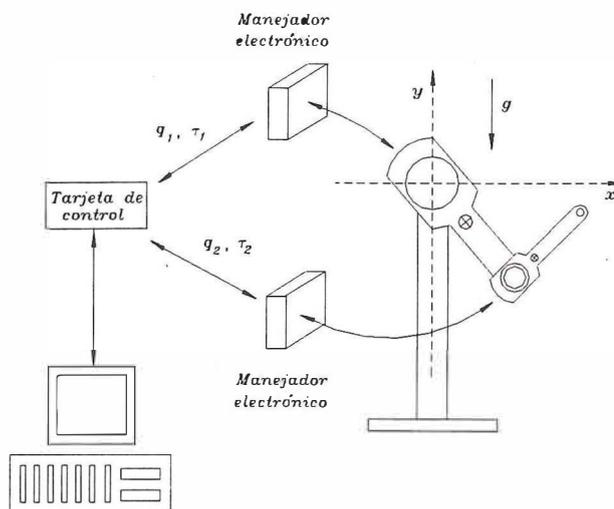


Figura 43: Esquema de componentes del sistema experimental.

El sistema en el que se desarrollaron los experimentos consiste, como se había mencionado anteriormente, en un robot dos grados de libertad de transmisión directa y de articulaciones rotacionales, como el que se encuentra en la figura 42. Dicho robot se construyó en el departamento de Electrónica y Telecomunicaciones del CICESE para el desarrollo y validación de algoritmos de control. El desarrollo de este sistema experimental fué parte del trabajo de tesis doctoral de Reyes (1997).

El robot manipulador está equipado con sensores de posición para medir los desplazamientos articulares q_1 y q_2 de cada eslabón, servo actuadores para manejar cada articulación a través de los pares aplicados τ_1 y τ_2 . Estos son generados por un algoritmo de control que se ejecuta en una tarjeta basada en un procesador digital de señales instalada dentro de una computadora 486DX2 y un ambiente programación que genera una interfase amigable al usuario con las herramientas necesarias para la implementación de algoritmos de control. La figura 43 muestra el esquema de componentes que integran al robot manipulador experimental.

El robot manipulador consiste de dos eslabones rígidos fabricados de aluminio 6061.

Los servo motores utilizados en la articulación del hombro y codo, son los modelos DM1200-A y DM1015, respectivamente, de la compañía Parker Compumotor.

Los manejadores electrónicos de los motores operan en modo *par*, aceptando un voltaje analógico como referencia de la señal de par. De esta forma los motores actúan como una fuente ideal de par.

La información de la posición articular del robot manipulador es obtenida a través de codificadores incrementales localizados en los motores, los cuales tienen una resolución de 1 024 000 pulsos/rev para el motor DM1200-A, mientras que para el motor que forma el codo es de 655360 pulsos/rev. La información de la velocidad articular es obtenida mediante el algoritmo de Euler, a través de la diferenciación numérica de la posición articular (Reyes, 1997).

Se ha logrado identificar completamente todas las constantes dinámicas y cinemáticas asociadas al modelo dinámico de dicho robot y se presentan en la tabla II (Reyes y Kelly, 1997).

Incorporando los valores numéricos de la tabla II, tenemos que después de algunas simplificaciones las matrices de inercia y de Coriolis y el vector pares gravitacionales son expresados por (Reyes, 1997)

$$\begin{aligned}
 M(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} 2.351 + 0.168 \cos(q_2) & 0.102 + 0.084 \cos(q_2) \\ 0.102 + 0.084 \cos(q_2) & 0.102 \end{bmatrix} \\
 C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} -0.168 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -0.084 \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ 0.084 \sin(q_2) \dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} 3.921 \sin(q_1) + 0.186 \sin(q_1 + q_2) \\ 0.186 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Tabla II: Valores numéricos de los parámetros cinemáticos y dinámicos del robot experimental.

Descripción del parámetro	Notación	Valor	Unidades
Longitud eslabón 1	l_1	0.45	m
Longitud eslabón 2	l_2	0.45	m
Masa del eslabón 1	m_1	23.9	Kg
Masa del eslabón 2	m_2	3.88	Kg
Centro de masa del eslabón 1	l_{c1}	0.091	m
Centro de masa del eslabón 2	l_{c2}	0.05	m
Inercia del eslabón 1	I_1	1.27	Kg m ²
Inercia del eslabón 2	I_2	0.093	Kg m ²
Aceleración de la gravedad	g	9.81	m/seg ²

D Programas en SIMNON

Las simulaciones que se presentan en capítulo V, el cual trata sobre los resultados experimentales de este trabajo de tesis, fueron realizadas en SIMNON 2.0. En este apéndice se presentan los listados de éstos programas de simulación. Para realizar una simulación de un controlador en SIMNON se involucran 3 programas que intercambian datos a través de un programa de conexión¹⁰. Cada uno de los 3 programas a los que se hace referencia contiene las expresiones de

- la dinámica del robot,
- la fricción de Coulomb,
- y la ley de control ,

respectivamente.

D.1 Dinámica del robot

```

CONTINUOUS SYSTEM ROBOT
" Simulacin de un robot de 2 gdl
" Author: Eduardo J. Moreno Valenzuela
" Created: 12/1/97
INPUT tau1 tau2 fc1 fc2
OUTPUT q1 q2 q3 q4
STATE xq1 xq2 xq3 xq4
DER dxq1 dxq2 dxq3 dxq4
TIME t
"Matriz de inercia
M11=2.351+0.168*cos(xq2)
M12=0.102+0.084*cos(xq2)
M21=0.102+0.084*cos(xq2)
M22=0.102

```

¹⁰Para saber más acerca de SIMNON 2.0, consulte:
SIMNON for Windows, Version 2.0. 1995. SSPA Maritime Consulting AB, Sweden.

```

detM=M11*M22-M12*M21
"Matriz de coriolis
c11=-0.168*sin(xq2)*xq4
c12=-0.084*sin(xq2)*xq4
c21= 0.084*sin(xq2)*xq3
c22= 0.0
"Pares gravitacionales
g1=3.921*g*sin(xq1) +0.186*g*sin(xq1+xq2)
g2=0.186*g*sin(xq1+xq2)
"Modelo de friccion
fric1=(b1*xq3)+fc1
fric2=(b2*xq4)+fc2
h1=(c11*xq3)+(c12*xq4)+g1+fric1
h2=(c21*xq3)+(c22*xq4)+g2+fric2
S1=tau1-h1
S2=tau2-h2
"Definimos ecuaciones de estado
dxq1=xq3
dxq2=xq4
dxq3= ( M22*S1-M12*S2)/detM
dxq4= (-M12*S1+M11*S2)/detM
"Salidas posiciones
q1=xq1
q2=xq2
"Salidas velocidades
q3=xq3
q4=xq4
"Posiciones en grados
q1g=xq1*(180.0/3.1416)
q2g=xq2*(180.0/3.1416)
"Velocidades en grados
q3g=xq3*(180.0/3.1416)
q4g=xq4*(180.0/3.1416)
x= 0.45*sin(q1)+0.45*sin(q1+q2)
y=-0.45*cos(q1)-0.45*cos(q1+q2)
"Parametros
g:9.81
b1:1.8"2.08 "2.288
b2:0.14 "0.15 "0.175

```

END

D.2 Fricción de Coulomb

```

DISCRETE SYSTEM FRIC
" Author: Eduardo J. Moreno Vla.
" Created: 4/5/99
INPUT q3 q4
OUTPUT fc1 fc2
TIME t
TSAMP k
q3z=q3
q4z=q4
"Modelo de friccion
fc1=(if q3z<0.0 then fc1n else fc1p )
fc2=(if q4z<0.0 then -fc2a else fc2a )
k=t+h
"Parametros
h:0.0025
fc1n:-8.049
fc1p:7.17
fc2a:1.734

END

```

D.3 Controlador basado en dinámica inversa en coordenadas operacionales

```

"Control por campo de velocidad basado en
"dinamica inversa en coordenadas genericas
"El campo de velocidad dibuja el ovalo de Cassini
"Aqui se suponen las posiciones del robot son grados
DISCRETE SYSTEM CASIG
" Author: Eduardo J. Moreno Vla.
" Created: 10/abr/99
" Inputs and outputs:
INPUT q1 q2
OUTPUT tau1 tau2
STATE q1k q2k zeta1 zeta2

```

```

NEW q1kn q2kn zeta1n zeta2n
TIME t
TSAMP k
"Velocidad numerica 1
q1kn=q1*180/Pi "Las unidades son grados
vel1=(q1kn-q1k)/h
"Velocidad numerica 2
q2kn=q2*180/Pi "Las unidades son grados
vel2=(q2kn-q2k)/h
"Matriz de inercia
M11=2.351+0.168*cos(q2kn*cgr)
M12=0.102+0.084*cos(q2kn*cgr)
M21=0.102+0.084*cos(q2kn*cgr)
M22=0.102
"Matriz de Coriolis
c11=-0.168*sin(q2kn*cgr)*vel2*cgr
c12=-0.084*sin(q2kn*cgr)*vel2*cgr
c21= 0.084*sin(q2kn*cgr)*vel1*cgr
c22= 0.0
"Pares gravitacionales
g1=3.921*g*sin(q1kn*cgr)+0.186*g*sin((q1kn+q2kn)*cgr)
g2=0.186*g*sin((q1kn+q2kn)*cgr)
" Cinematica directa y Jacobiano
x=0.45*sin(q1kn*cgr)+0.45*sin((q1kn+q2kn)*cgr)
y=-0.45*cos(q1kn*cgr)-0.45*cos((q1kn+q2kn)*cgr)
"Derivada temporal de x e y
dx=0.45*cos(q1kn*cgr)*vel1*cgr+0.45*cos((q1kn+q2kn)*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
dy=0.45*sin(q1kn*cgr)*vel1*cgr+0.45*sin((q1kn+q2kn)*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
" Campo de velocidad "
" que dibuja el ovalo de Cassini "
"Definicion de la funcion f
f1=2*a*a*((x-xc)*(x-xc)-(y-yc)*(y-yc))+b*b*b*b
f=(r)^2+a*a*a*a-f1
r=(x-xc)*(x-xc)+(y-yc)*(y-yc) "definicion de distancia cuadratica
"Gradiente de f
delfx=4*(x-xc)*(r)-4*a*a*(x-xc)
delfy=4*(y-yc)*(r)+4*a*a*(y-yc)

```

```

dist=(delfx*delfx+delfy*delfy)0.5
"Derivada temporal de f
dtf=delfx*dx+delfy*dy
n1=2*(x-xc)*dx+2*(y-yc)*dy
n2=2*(x-xc)*dx-2*(y-yc)*dy
"Derivada temporal del gradiente
dtdelfx=4*(x-xc)*n1+4*dx*r-4*a*a*dx
dtdelfy=4*(y-yc)*n1+4*dy*r+4*a*a*dy
dtdist=(delfx*dtdelfx+delfy*dtdelfy)/dist
"Ganancia k1(q)
k1=ko/(abs(f)*dist+epsilon)
"Derivada temporal de k1(q)
dendtk1=((abs(f)*dist+epsilon)2)
dtk1=-ko*(abs(f)*dtdist+tanh(lambda*f)*dtf*dist)/dendtk1
"Ganancia c1(q)
c1=co*exp(-alpha*abs(f))
"Derivada temporal de c1(q)
dtc1=-alpha*co*tanh(lambda*f)*dtf*exp(-alpha*abs(f))
"Campo de velocidad
vx=-k1*f*delfx -c1*delfy/dist
vy=-k1*f*delfy +c1*delfx/dist
"Variables auxiliares para calcular la derivada
temporal del campo de velocidad
ax=-dtk1*f*delfx -dtc1*delfy/dist
ay=-dtk1*f*delfy +dtc1*delfx/dist
terx=c1*(dist*dtdelfy-dtdist*delfy)/(dist*dist)
tery=c1*(dist*dtdelfx-dtdist*delfx)/(dist*dist)
"Derivada temporal del campo de velocidad
dvtvx=-k1*(dtf*delfx+f*dtdelfx)-terx+ax
dvtvy=-k1*(dtf*delfy+f*dtdelfy)+tery+ay
"
"Aqui terminan ecuaciones del campo de velocidad "
"
"Norma de la velocidad del extremo del robot
"Sirve para observar la radidez del extremo final
"la cual se supone debe converger a una constante
norq=sqrt(dx*dx+dy*dy)

```

```

" Ecuaciones del controlador "
"Jacobiano J(q)
dh11=0.45*cos(q1kn*cgr)+0.45*cos((q1kn+q2kn)*cgr)
dh12=0.45*cos((q1kn+q2kn)*cgr)
dh21=0.45*sin(q1kn*cgr)+0.45*sin((q1kn+q2kn)*cgr)
dh22=0.45*sin((q1kn+q2kn)*cgr)
detdh=dh11*dh22-dh12*dh21 "Determinante de J(q)
"Derivada temporal del Jacobiano
dth11=-0.45*sin(q1kn*cgr)*vel1*cgr-0.45*sin((q1kn+q2kn)*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
dth12=-0.45*sin((q1kn+q2kn)*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
dth21= 0.45*cos(q1kn*cgr)*vel1*cgr+0.45*cos((q1kn+q2kn)*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
dth22= 0.45*cos((q1kn+q2kn)*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
"Error de campo de velocidad
dex=vx-dx "Error en el eje x de campo de velocidad
dey=vy-dy "Error en el eje y de campo de velocidad
zeta1n=zeta1+dex*h
zeta2n=zeta2+dey*h
"Aqui se define la parte del controlador que tiene la forma
"d1= dt[v(x)]+kv[vx-dx]+kp*zeta-dtJ(q)vel
dl1=dtvx+(kv1*dex+kp1*zeta1n)-(dth11*vel1*cgr+dth12*vel2*cgr)
dl2=dtvy+(kv2*dey+kp2*zeta2n)-(dth21*vel1*cgr+dth22*vel2*cgr)
"Definicion del vector uo donde
" uo=(J(q))^-1 *dl
uo1=(dh22*dl1-dh12*dl2)/detdh
uo2=(-dh21*dl1+dh11*dl2)/detdh
tau1=M11*uo1+M12*uo2+(c11*vel1*cgr)+(c12*vel2*cgr)+g1+(b1c*vel1*cgr)
tau2=M21*uo1+M22*uo2+(c21*vel1*cgr)+(c22*vel2*cgr)+g2+(b2c*vel2*cgr)
k=t+h
h: 0.0025
"Ganacias del controlador
kp1:500
kp2:500
kv1:20
kv2:20
"Parametros del ovalo de Cassini
a: 0.15
b: 0.16

```

```

xc: 0 "Centro del ovalo
yc: 0
ko: 0.1
co: 0.1
epsilon:0.0001
lambda:5000
alpha:500
Pi:3.14159265359
"Coeficientes de friccion viscosa b1c:2.288 b2c:0.175

g:9.81 cgr:0.017453293 END

```

D.3.1 Conector

```

CONNECTING SYSTEM CASICONG
" Author: Eduardo J. Moreno Vla.
" Created: 4/8/99
TIME t
q3[fric]=q3[robot]
q4[fric]=q4[robot]
fc1[robot]=fc1[fric]
fc2[robot]=fc2[fric]
q1[casig]=q1[robot]
q2[casig]=q2[robot]
tau1[robot]=tau1[casig]
tau2[robot]=tau2[casig]
END

```

D.4 Controlador basado en dos lazos de retroalimentación

```

"Control por campo de velocidad
"usando control de dos lazos de retroalimentacion
"El campo vectorial especificado dibuja el obalo de Cassini
DISCRETE SYSTEM L2CASI
" Author: Eduardo J. Moreno Vla.
" Created: 12/abr/99
INPUT q1 q2
OUTPUT tau1 tau2

```

```

STATE q1k q2k zeta1 zeta2 z1 z2
NEW q1kn q2kn zeta1n zeta2n z1n z2n
TIME t
TSAMP k
"Velocidad numerica 1
q1kn=q1*180/Pi "Las unidades son grados
vel1=(q1kn-q1k)/h
"Velocidad numerica 2
q2kn=q2*180/Pi "Las unidades son grados
vel2=(q2kn-q2k)/h
"Matriz de inercia
M11=2.351+0.168*cos(q2kn*cgr)
M12=0.102+0.084*cos(q2kn*cgr)
M21=0.102+0.084*cos(q2kn*cgr)
M22=0.102
detM=M11*M22-M12*M21
"Matriz de Coriolis
c11=-0.168*sin(q2kn*cgr)*vel2*cgr
c12=-0.084*sin(q2kn*cgr)*vel2*cgr
c21= 0.084*sin(q2kn*cgr)*vel1*cgr
c22= 0.0
"Pares gravitacionales
g1=3.921*g*sin(q1kn*cgr)+0.186*g*sin((q1kn+q2kn)*cgr)
g2=0.186*g*sin((q1kn+q2kn)*cgr)
" Cinematica directa y Jacobiano
x=0.45*sin(q1kn*cgr)+0.45*sin((q1kn+q2kn)*cgr)
y=-0.45*cos(q1kn*cgr)-0.45*cos((q1kn+q2kn)*cgr)
"Derivada temporal de x e y
dx=0.45*cos(q1kn*cgr)*vel1*cgr+0.45*cos((q1kn+q2kn)*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
dy=0.45*sin(q1kn*cgr)*vel1*cgr+0.45*sin((q1kn+q2kn)*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
" Campo de velocidad "
" que dibuja el ovalo de Cassini "
"Definicion de la funcion f
f1=2*a*a*((x-xc)*(x-xc)-(y-yc)*(y-yc))+b*b*b*b
f=(r)^2+a*a*a*a-f1
r=(x-xc)*(x-xc)+(y-yc)*(y-yc) "definicion de distancia cuadratica
"Gradiente de f

```

```

delfx=4*(x-xc)*(r)-4*a*a*(x-xc)
delfy=4*(y-yc)*(r)+4*a*a*(y-yc)
dist=(delfx*delfx+delfy*delfy)0.5
"Derivada temporal de f
dtf=delfx*dx+delfy*dy
n1=2*(x-xc)*dx+2*(y-yc)*dy
n2=2*(x-xc)*dx-2*(y-yc)*dy
"Derivada temporal del gradiente
dtdelfx=4*(x-xc)*n1+4*dx*r-4*a*a*dx
dtdelfy=4*(y-yc)*n1+4*dy*r+4*a*a*dy
dtdist=(delfx*dtdelfx+delfy*dtdelfy)/dist
"Ganacia k1(q)
k1=ko/(abs(f)*dist+epsilon)
"Derivada temporal de k1(q)
dendtk1=((abs(f)*dist+epsilon)2)
dtk1=-ko*(abs(f)*dtdist+tanh(lambda*f)*dtf*dist)/dendtk1
"Ganancia c1(q)
c1=co*exp(-alpha*abs(f))
"Derivada temporal de c1(q)
dtc1=-alpha*co*tanh(lambda*f)*dtf*exp(-alpha*abs(f))
"Campo de velocidad
vx=-k1*f*delfx -c1*delfy/dist
vy=-k1*f*delfy +c1*delfx/dist
"Variables auxiliares para calcular la derivada
temporal del campo de velocidad
ax=-dtk1*f*delfx -dtc1*delfy/dist
ay=-dtk1*f*delfy +dtc1*delfx/dist
terx=c1*(dist*dtdelfy-dtdist*delfy)/(dist*dist)
tery=c1*(dist*dtdelfx-dtdist*delfx)/(dist*dist)
"Derivada temporal del campo de velocidad
dtx=-k1*(dtf*delfx+f*dtdelfx)-terx+ax
dty=-k1*(dtf*delfy+f*dtdelfy)+tery+ay
"
"Aqui terminan ecuaciones del campo de velocidad "
"
"Norma de la velocidad del extremo del robot
"Sirve para observar la radidez del extremo final

```

"la cual se supone debe converger a una constante

$norq = \sqrt{dx*dx+dy*dy}$

" Ecuaciones del controlador "

"Error de campo de velocidad

$dex = vx - dx$ "Error en el eje x de campo de velocidad

$dey = vy - dy$ "Error en el eje y de campo de velocidad

"Estado zeta1n integral del error de campo de vel

$zeta1n = \text{if } t < t_0 \text{ then } 0 \text{ else } zeta1 + (dex) * h$ "metros

"Estado zeta2n integral del error de campo de vel

$zeta2n = \text{if } t < t_0 \text{ then } 0 \text{ else } zeta2 + (dey) * h$ "metros

"Estado zeta1n integral del error de campo de vel

$zeta1n = zeta1 + (dex) * h$ "metros

"Estado zeta2n integral del error de campo de vel

$zeta2n = zeta2 + (dey) * h$ "metros

"Jacobiano J(q)

$dh11 = 0.45 * \cos(q1kn * cgr) + 0.45 * \cos((q1kn + q2kn) * cgr)$

$dh12 = 0.45 * \cos((q1kn + q2kn) * cgr)$

$dh21 = 0.45 * \sin(q1kn * cgr) + 0.45 * \sin((q1kn + q2kn) * cgr)$

$dh22 = 0.45 * \sin((q1kn + q2kn) * cgr)$

$detdh = dh11 * dh22 - dh12 * dh21$ "Determinante de J(q)

"Derivada temporal del Jacobiano

$dth11 = -0.45 * \sin(q1kn * cgr) * vel1 * cgr - 0.45 * \sin((q1kn + q2kn) * cgr) * (vel1 + vel2) * cgr$

$dth12 = -0.45 * \sin((q1kn + q2kn) * cgr) * (vel1 + vel2) * cgr$

$dth21 = 0.45 * \cos(q1kn * cgr) * vel1 * cgr + 0.45 * \cos((q1kn + q2kn) * cgr) * (vel1 + vel2) * cgr$

$dth22 = 0.45 * \cos((q1kn + q2kn) * cgr) * (vel1 + vel2) * cgr$

"Derivada temporal del J(q)

$detdtdh = dh11 * dth22 + dh22 * dth11 - (dh12 * dth21 + dh21 * dth12)$

"Derivada temporal de (1/detdtdh)

$dv = -detdtdh / (detdh * detdh)$

"Variables que definen los elementos de la derivada temporal

"de la inversa del jacobiano

$d/dt (J(q)^{-1})$

$Mdtdh11 = dh22 * dv + dth22 / detdh$

$Mdtdh12 = -dh12 * dv - dth12 / detdh$

```

Mtdh21=-dh21*dv-dth21/detdh
Mtdh22=dh11*dv+dth11/detdh
.....
l1=vx+ki*zeta1n
l2=vy+ki*zeta2n
dl1=dtvx+ki*dex
dl2=dtvy+ki*dey
dq1d=(dh22*l1-dh12*l2)/detdh "Velocidad articular deseada
dq2d=(-dh21*l1+dh11*l2)/detdh "Aceleracion articular deseada
ddq1d=Mtdh11*l1+Mtdh12*l2+(dh22*dl1-dh12*dl2)/detdh
ddq2d=Mtdh21*l1+Mtdh22*l2+(-dh21*dl1+dh11*dl2)/detdh
deq1=dq1d-vel1*cgr "Error de velocidad
deq2=dq2d-vel2*cgr
.....
"Estado z1n integral del error de vel
z1n= z1+(deq1)*h "radianes
Estado z2n integral del error de vel
z2n= z2+(deq2)*h "radianes
.....
"
"
laz1=ddq1d+kv1*deq1+kp1*z1
laz2=ddq2d+kv2*deq2+kp2*z2
.....
"Lineas usadas para prueba de conmutacion
" de controladores
.....
qd1=45.0
qd2=90.0
error1=qd1-pos1
error2=qd2-pos2
tau1=M11*laz1+M12*laz2+(c11*vel1*cgr)+(c12*vel2*cgr)+g1+(b1c*vel1*cgr)
tau2=M21*laz1+M22*laz2+(c21*vel1*cgr)+(c22*vel2*cgr)+g2+(b2c*vel2*cgr)
.....
pos1=q1kn
pos2=q2kn
k=t+hm
h: 0.0025
hm:0.0025
"Parametros del ovalo de Cassini

```

```
a: 0.15
b: 0.16
xc: 0 "Centro del ovalo
yc: 0
ki: 25
ko: 0.1
co: 0.1
epsilon:0.0001
lambda:5000
alpha:500
Pi:3.1416
"Ganancias derivativas y proporcionales
kv1:25
kv2:25
kp1:157
kp2:157
Coeficientes de friccion viscosa
b1c:2.288
b2c:0.175
g:9.81
cgr:0.017453293
END
```

D.4.1 Conector

```
CONNECTING SYSTEM L2CON
" Author: Eduardo J. Moreno Vla.
" Created: 4/8/99
TIME t
q3[fric]=q3[robot]
q4[fric]=q4[robot]
fc1[robot]=fc1[fric]
fc2[robot]=fc2[fric]
q1[l2casi]=q1[robot]
q2[l2casi]=q2[robot]
tau1[robot]=tau1[l2casi]
tau2[robot]=tau2[l2casi]
END
```

D.5 Controlador basado en dinámica inversa en coordenadas articulares

```

"Control por campo de velocidad basado en el
"control par calculado en coordenadas articulares
DISCRETE SYSTEM CVA1
" Author: Eduardo J. Moreno Vla.
" Created: 4/7/99
" Inputs and outputs:
INPUT q1 q2
OUTPUT tau1 tau2
STATE q1k q2k zeta1 zeta2
NEW q1kn q2kn zeta1n zeta2n
TIME t
TSAMP k
"Velocidad numerica 1
q1kn=q1*180/3.1416
vel1=(q1kn-q1k)/h "Grados
"Velocidad numerica 2
q2kn=q2*180/3.1416
vel2=(q2kn-q2k)/h "Grados
"Campo de velocidad
x=q1kn*3.1416/180 "Conversion radianes
y=q2kn*3.1416/180 "Conversion radianes
dx=vel1*cgr "Conversion radianes
dy=vel2*cgr "Conversion radianes
"Definicion de la funcion f
f=(x-xc)*(x-xc)+(y-yc)*(y-yc)-(ro)*ro
"Derivada temporal de f
dtf=2*(x-xc)*dx+2*(y-yc)*dy
dist=sqrt((x-xc)*(x-xc)+(y-yc)*(y-yc))
costet=(x-xc)/dist
sentet=(y-yc)/dist
"Camponentes x e y del campo de velocidad
vx=-k1*2*f*(x-xc)-c*sentet
vy=-k1*2*f*(y-yc)+c*costet
"Derivada temporal del campo de velocidad
dtvx= -c*dy/dist+c*(y-yc)*dtf/(2*dist*dist*dist)-2*k1*(dx*f+x*dtf)

```

```

dtvy= c*dx/dist-c*(x-xc)*dtf/(2*dist*dist*dist)-2*k1*(dy*f+y*dtf)
"Todas las expresiones anteriores en radianes
"Ecuaciones del controlador
evel1=(vx-vel1*cgr) "En radianes
evel2=(vy-vel2*cgr)
"Estado zeta1n en radianes
zeta1n=zeta1+(vx-vel1*cgr)*h
"Estado zeta2n en radianes
zeta2n=zeta2+(vy-vel2*cgr)*h
"Matriz de inercia
M11=2.351+0.168*cos(q2kn*3.1416/180)
M12=0.102+0.084*cos(q2kn*3.1416/180)
M21=0.102+0.084*cos(q2kn*3.1416/180)
M22=0.102
"Matriz de coriolis
c11=-0.168*sin(q2kn*3.1416/180)*vel2*3.1416/180
c12=-0.084*sin(q2kn*3.1416/180)*vel2*3.1416/180
c21= 0.084*sin(q2kn*3.1416/180)*vel1*3.1416/180
c22= 0.0
"Pares gravitacionales
g1=3.921*g*sin(q1kn*3.1416/180)+0.186*g*sin((q1kn+q2kn)*3.1416/180)
g2=0.186*g*sin((q1kn+q2kn)*3.1416/180)
evel1g=(vx-vel1*cgr)*180/3.1416 "En grados
evel2g=(vy-vel2*cgr)*180/3.1416
zeta1ng=zeta1n*180/3.1416 "En grados
zeta2ng=zeta2n*180/3.1416
norq=sqrt(vel1*vel1+vel2*vel2)
u1=dtvx+kv1*evel1g+kp1*zeta1ng
u2=dtvy+kv2*evel2g+kp2*zeta2ng
tau1a=M11*u1+M12*u2+(c11*vel1*cgr)+(c12*vel2*cgr)+g1+(b1c*vel1*cgr)
tau2a=M21*u1+M22*u2+(c21*vel1*cgr)+(c22*vel2*cgr)+g2+(b2c*vel2*cgr)
tau1=if tau1a<-150.0 then -150 else (if tau1a<150 then tau1a else 150)
tau2=if tau2a<-15.0 then -15 else (if tau2a<15 then tau2a else 15)
k=t+h
h:0.0025
cgr:0.01745329
"Parametros
k1:2 "Ganacia del gradiente

```

```

xc:0.75 "Centro del circulo
yc:0.75
ro:0.5 "Hay que hacer ro mas grande para "que no truene la simulacion
como 0.1 c:0.25 "Rapidez tangencial al circulo
"Ganancias derivativas y proporcionales
kv1:0.35 "22.3
kv2:0.2 "33.89
kp1:15 ""
kp2:15 ""15
"Coefficientes de fricción viscosa
b1c:2.288
b2c:0.175
g:9.81
END

```

D.5.1 Conector

```

CONNECTING SYSTEM CVA1CON
" Author: Eduardo J. Moreno Vla.
" Created: 4/8/99
TIME t
q3[fric]=q3[robot]
q4[fric]=q4[robot]
fc1[robot]=fc1[fric]
fc2[robot]=fc2[fric]
q1[cva1]=q1[robot]
q2[cva1]=q2[robot]
tau1[robot]=tau1[cva1]
tau2[robot]=tau2[cva1]
END

```

E Programas en SPAC

El sistema experimental cuenta con un ambiente de programación llamado *Sistema Programable de Algoritmos de Control* (SPAC) (Reyes 1997). Para realizar la implementación práctica de un algoritmo de control se escribe un programa que contiene las operaciones matemáticas del controlador. Este programa es “corrido” en el SPAC y a través de él pueden seleccionarse y obtener en forma gráfica y numérica los valores de los pares aplicados, las velocidades articulares, las posiciones articulares y de las variables que se encuentran declaradas en el programa del controlador que se está implementando. La sintaxis de los programas hechos en SPAC se basa en el lenguaje C, por lo que resulta familiar la programación de un controlador en SPAC debido a la popularidad del lenguaje C.

E.1 Controlador basado en dinámica inversa en coordenadas operacionales

```

/*****
/* cvg1.rob */
/* */
/* Control por campo de velocidad basado en */
/* dinamica inversa en coordenadas genericas */
/* El campo de velocidad dibuja el ovalo de Cassini */
/* 12 de abril de 1999, Moreno & Kelly */
/* 26 de abril de 1999, Moreno & Kelly */
/*****
/*----- Definicion de variables -----*/
float h=0.0025; /* Periodo de muestreo */
float a=0.15; /* Parametro del ovalo de Cassini en [m] */
float b=0.16; /* Parametro del ovalo de Cassini en [m] */
float xc=0.0; /* Centro del ovalo (origen espacio cartesiano */
float yc=0.0; /* Centro del ovalo (origen espacio cartesiano */
float ko=0.1; /* Ganancias ko y co asociadas al campo de velocidad */
float co=0.1;

```

```

float epsilon=0.0001; /* constante asociada a la derivada de |f(x,y)|
*/
float lambda=5000.0; /* lambda y alpha son constantes asociadas */
float alpha=500.0; /* a las ganancias k1(q) y c1(q) */
/*Ganancias derivativas y proporcionales*/
float kv1=20.0; /* 25.0; 20.0 antes 20, 300 */
float kv2=20.0; /* 25.0; 20.0 antes 20, 300 */
float kp1=157.0; /* 500.0; 157.0; 100.0 antes 500, 22500 */
float kp2=157.0; /* 500.0; 157.0; 100.0 antes 500, 22500 */
float kp1a, kp2a, kv1a, kv2a;
/*Coeficientes de friccion viscosa*/
float b1c=2.288;
float b2c=0.175;
float g=9.81;
float cgr=0.017453293;
float M11, M12, M21, M22;
float c11, c12, c21, c22;
float g1, g2;
float f, f1, dtf;
float x, y, dx, dy, zeta1n=0.0, zeta2n=0.0;
float r, dist, dtdist, delfx, delfy, n1, n2;
float k1, c1, dendtk1, dtk1, dtc1;
float vx, vy, dex=0.0, dey=0.0, ax, ay, terx, tery;
float norq, dtvx, dtvy;
float dh11, dh12, dh21, dh22, detdh;
float dth11, dth12, dth21, dth22;
float dl1, dl2, uo1, uo2;
float dtdelfx, dtdelfy;
float pos1;
float pos2;
float vel1;
float vel2;
float tau1;
float tau2;
float lambda1, lambda2, qd1, qd2, error1, error2;
/*-----Inicia programa-----*/
/*-- Adecuacion variables globales de SPAC --*/
Limite_encordado_1=2048000;
Limite_encordado_2=2000000;

```

```

/* Matriz de inercia */
M11=2.351+0.168*cos(pos2*cgr);
M12=0.102+0.084*cos(pos2*cgr);
M21=0.102+0.084*cos(pos2*cgr);
M22=0.102;
/* Matriz de Coriolis */
c11=-0.168*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c12=-0.084*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c21= 0.084*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr;
c22= 0.0;
/* Pares gravitacionales */
g1=3.921*g*sin(pos1*cgr)+0.186*g*sin((pos1+pos2)*cgr);
g2=0.186*g*sin((pos1+pos2)*cgr);
/* Cinematica directa */
x=0.45*sin(pos1*cgr)+0.45*sin((pos1+pos2)*cgr);
y=-0.45*cos(pos1*cgr)-0.45*cos((pos1+pos2)*cgr);
/* Derivada temporal de x e y */
dx=0.45*cos(pos1*cgr)*vel1*cgr+0.45*cos((pos1+pos2)*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
dy=0.45*sin(pos1*cgr)*vel1*cgr+0.45*sin((pos1+pos2)*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
/*******/
/* Campo de velocidad */
/* que dibuja el ovalo de Cassini */
/*******/
/* Definicion de la funcion f */
f1=2*a*a*((x-xc)*(x-xc)-(y-yc)*(y-yc))+b*b*b*b;
f=r*r+a*a*a*a-f1;
r=(x-xc)*(x-xc)+(y-yc)*(y-yc); /*definicion de distancia cuadratica*/
delfx=4*(x-xc)*(r)-4*a*a*(x-xc); /*gradiente de f */
delfy=4*(y-yc)*(r)+4*a*a*(y-yc);
dist=sqrt(delfx*delfx+delfy*delfy);
dtf=delfx*dx+delfy*dy; /* derivada temporal de f */
n1=2*(x-xc)*dx+2*(y-yc)*dy;
n2=2*(x-xc)*dx-2*(y-yc)*dy;
dtdelfx=4*(x-xc)*n1+4*dx*r-4*a*a*dx; /*derivada temporal del */
dtdelfy=4*(y-yc)*n1+4*dy*r+4*a*a*dy; /*gradiente */
dtdist=(delfx*dtdelfx+delfy*dtdelfy)/dist;
/*-- Ganacia k1(q) --*/

```

```

k1=ko/(fabs(f)*dist+epsilon);
/*-- Derivada temporal de k1(q) --*/
dendtk1=((fabs(f)*dist+epsilon)*(fabs(f)*dist+epsilon));
dtk1=-ko*(fabs(f)*dtdist+tanh(lambda*f)*dtf*dist)/dendtk1;
/*-- Ganancia c1(q) --*/
c1=co*exp(-alpha*fabs(f));
/*-- Derivada temporal de c1(q) --*/
dtc1=-alpha*co*tanh(lambda*f)*dtf*exp(-alpha*fabs(f));
/*-- Campo de velocidad --*/
vx=-k1*f*delfx-c1*delfy/dist;
vy=-k1*f*delfy+c1*delfx/dist;
/* Variables auxiliares para calcular la derivada */
/* temporal del campo de velocidad */
ax=-dtk1*f*delfx-dtc1*delfy/dist;
ay=-dtk1*f*delfy+dtc1*delfx/dist;
terx=c1*(dist*dtdelfy-dtdist*delfy)/(dist*dist);
tery=c1*(dist*dtdelfx-dtdist*delfx)/(dist*dist);
/* Derivada temporal del campo de velocidad */
dtvx=-k1*(dtf*delfx+f*dtdelfx)-terx+ax;
dtvy=-k1*(dtf*delfy+f*dtdelfy)+tery+ay;
/*"*****"*/
/* Aqui terminan ecuaciones del campo de velocidad */
/*"*****"*/
/*Norma de la velocidad del extremo del robot */
/*Sirve para observar la radidez del extremo final*/
/*la cual se supone debe converger a una constante*/
norq=sqrt(dx*dx+dy*dy);
/*-----*/
/* Si Tiempo_real es menor de 10 seg.  entra en operacion un controlador
*/
/* que lo lleva a una posicion inicial qd1 y qd2 (grados).  Despues de
*/
/* este tiempo entra en operacion el control para trazado de espiral */
if(Tiempo_real<10.0)
kp1a=50.0;
kv1a=1.0 ;
lambda1=1.5;
kp2a=3.0;

```

```

kv2a=0.01;
lambda2=2.5;
/* Posiciones articulares deseadas INICIALES */
qd1=45.0;
qd2=90.0;
/* Error en coordenadas articulares */
error1=qd1-pos1;
error2=qd2-pos2;
/* Ley de control Tanh-D. con compensacion de gravedad */
tau1 = kp1a*tanh(lambda1*error1) - kv1a*vel1 + g1;
tau2 = kp2a*tanh(lambda2*error2) - kv2a*vel2 + g2;
/* Para compatibilidad con SPAC */
dex=0.0;
dey=0.0;
zeta1n=0.0;
zeta2n=0.0;
else
/*"*****"*/
/* Ecuaciones del controlador */
/*"*****"*/
/* Error de campo de velocidad */
dex=vx-dx; /* Error en el eje x de campo de velocidad */
dey=vy-dy; /* Error en el eje y de campo de velocidad */
/* Jacobiano J(q) */
dh11=0.45*cos(pos1*cgr)+0.45*cos((pos1+pos2)*cgr);
dh12=0.45*cos((pos1+pos2)*cgr);
dh21=0.45*sin(pos1*cgr)+0.45*sin((pos1+pos2)*cgr);
dh22=0.45*sin((pos1+pos2)*cgr);
deth=dh11*dh22-dh12*dh21; /* Determinante de J(q) */
/* Derivada temporal del Jacobiano */
dth11=-0.45*sin(pos1*cgr)*vel1*cgr- 0.45*sin((pos1+pos2)*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
dth12=-0.45*sin((pos1+pos2)*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
dth21= 0.45*cos(pos1*cgr)*vel1*cgr+0.45*cos((pos1+pos2)*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
dth22= 0.45*cos((pos1+pos2)*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
/* Estado zeta1n integral del error de campo de vel */
zeta1n=zeta1n+(vx-dx)*h; /* metros */
/* Estado zeta2n integral del error de campo de vel */
zeta2n=zeta2n+(vy-dy)*h; /* metros */

```

```

/* Aqui se define la parte del controlador que tiene la forma */
/* dl= dt[v(x)]+kv[vx-dx]+kp*zeta-dtJ(q)vel */
dl1=dtvx+(kv1*dex+kp1*zeta1n)-(dth11*vel1*cgr+dth12*vel2*cgr);
dl2=dtvy+(kv2*dey+kp2*zeta2n)-(dth21*vel1*cgr+dth22*vel2*cgr);
/* Definicion del vector uo donde */
/* uo=(J(q))^-1 *dl */
uo1=( dh22*d11-dh12*d12)/detdh;
uo2=(-dh21*d11+dh11*d12)/detdh;
tau1=M11*uo1+M12*uo2+(c11*vel1*cgr)+(c12*vel2*cgr)+g1+(b1c*vel1*cgr);
tau2=M21*uo1+M22*uo2+(c21*vel1*cgr)+(c22*vel2*cgr)+g2+(b2c*vel2*cgr);

```

E.2 Controlador basado en dos lazos de retroalimentación

```

/*****
/* cvg2.rob */
/* */
/* Control por campo de velocidad basado utilizando */
/* control de dos lazos de retroalimentacin. */
/* El campo de velocidad dibuja el ovalo de Cassini. */
/* */
/* 14 de abril de 1999, Moreno & Kelly */
/*****
/*----- Definicion de variables -----*/
float h=0.0025; /* Periodo de muestreo */
float a=0.15; /* Parametro del ovalo de Cassini en [m] */
float b=0.16; /* Parametro del ovalo de Cassini en [m] */
float xc=0.0; /* Centro del ovalo (origen espacio cartesiano) */
float yc=0.0; /* Centro del ovalo (origen espacio cartesiano) */
float k=25.0; /* Ganancia asociada a la velocidad y aceleracion */
/* articulares deseadas */
float ko=0.1; /* Ganancias ko y co asociadas al campo de velocidad */
float co=0.1;
float epsilon=0.0001; /* constante asociada a la derivada de |f(x,y)|
*/
float lambda=5000.0; /* lambda y alpha son constantes asociadas */
float alpha=500.0; /* a las ganancias k1(q) y c1(q) */
/*Ganancias derivativas y proporcionales*/

```

```
/* control tanh para inicio */
float kp1a=50.0;
float kv1a=1.0 ;
float lambda1=1.5;
float kp2a=3.0;
float kv2a=0.01;
float lambda2=2.5;
float kv1=20.0; /* antes 25.0; */
float kv2=20.0; /* antes 25.0; */
float kp1=100.0; /* antes 157.0; */
float kp2=100.0; /* antes 157.0; */
/*Coeficientes de friccion viscosa*/
float b1c=2.288;
float b2c=0.175;
float g=9.81;
float cgr=0.017453293;
float M11, M12, M21, M22;
float c11, c12, c21, c22;
float g1, g2;
float f, f1, dtf;
float x, y, dx, dy, zeta1n ,zeta2n;
float r, dist, dtdist, delfx, delfy, n1, n2;
float k1, c1, dendtk1, dtk1, dtc1;
float vx, vy, dex, dey, ax, ay, terx, tery;
float norq, dtvx, dtvy;
float dh11, dh12, dh21, dh22, detdh;
float dth11, dth12, dth21, dth22;
float dl1, dl2, uo1, uo2;
float dtdelfx, dtdelfy;
float z1n, z2n, detdtdh, dv;
float Mtdh11, Mtdh12, Mtdh21, Mtdh22;
float l1, l2, dl1, dl2;
float dq1d, dq2d, ddq1d, ddq2d;
float deq1, deq2, laz1, laz2;
float pos1;
float pos2;
float vel1;
float vel2;
float tau1;
```

```

float tau2;
float lambda1, lambda2, qd1, qd2, error1, error2;
/*-----Inicia programa-----*/
/*-- Adecuacion variables globales de SPAC --*/
Limite_encordado_1=2048000;
Limite_encordado_2=2000000;
/* Matriz de inercia */
M11=2.351+0.168*cos(pos2*cgr);
M12=0.102+0.084*cos(pos2*cgr);
M21=0.102+0.084*cos(pos2*cgr);
M22=0.102;
/* Matriz de Coriolis */
c11=-0.168*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c12=-0.084*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c21= 0.084*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr;
c22= 0.0;
/* Pares gravitacionales */
g1=3.921*g*sin(pos1*cgr)+0.186*g*sin((pos1+pos2)*cgr);
g2=0.186*g*sin((pos1+pos2)*cgr);
/* Cinematica directa */
x=0.45*sin(pos1*cgr)+0.45*sin((pos1+pos2)*cgr);
y=-0.45*cos(pos1*cgr)-0.45*cos((pos1+pos2)*cgr);
/* Derivada temporal de x e y */
dx=0.45*cos(pos1*cgr)*vel1*cgr+0.45*cos((pos1+pos2)*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
dy=0.45*sin(pos1*cgr)*vel1*cgr+0.45*sin((pos1+pos2)*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
/*-----*/
/* Campo de velocidad */
/* que dibuja el ovalo de Cassini */
/*-----*/
/* Definicion de la funcion f */
f1=2*a*a*((x-xc)*(x-xc)-(y-yc)*(y-yc))+b*b*b*b;
f=r*r+a*a*a*a-f1;
r=(x-xc)*(x-xc)+(y-yc)*(y-yc); /*definicion de distancia cuadratica*/
delfx=4*(x-xc)*(r)-4*a*a*(x-xc); /*gradiente de f */
delfy=4*(y-yc)*(r)+4*a*a*(y-yc);
dist=sqrt(delfx*delfx+delfy*delfy);
dtf=delfx*dx+delfy*dy; /* derivada temporal de f */

```

```

n1=2*(x-xc)*dx+2*(y-yc)*dy;
n2=2*(x-xc)*dx-2*(y-yc)*dy;
dtdelfx=4*(x-xc)*n1+4*dx*r-4*a*a*dx; /*derivada temporal del */
dtdelfy=4*(y-yc)*n1+4*dy*r+4*a*a*dy; /*gradiente */
dtdist=(delfx*dtdelfx+delfy*dtdelfy)/dist;
/*-- Ganacia k1(q) --*/
k1=ko/(fabs(f)*dist+epsilon);
/*-- Derivada temporal de k1(q) --*/
dendtk1=((fabs(f)*dist+epsilon)*(fabs(f)*dist+epsilon));
dtk1=-ko*(fabs(f)*dtdist+tanh(lambda*f)*dtf*dist)/dendtk1;
/*-- Ganancia c1(q) --*/
c1=co*exp(-alpha*fabs(f));
/*-- Derivada temporal de c1(q) --*/
dtc1=-alpha*co*tanh(lambda*f)*dtf*exp(-alpha*fabs(f));
/*-- Campo de velocidad --*/
vx=-k1*f*delfx-c1*delfy/dist;
vy=-k1*f*delfy+c1*delfx/dist;
/* Variables auxiliares para calcular la derivada */
/* temporal del campo de velocidad */
ax=-dtk1*f*delfx-dtc1*delfy/dist;
ay=-dtk1*f*delfy+dtc1*delfx/dist;
terx=c1*(dist*dtdelfy-dtdist*delfy)/(dist*dist);
tery=c1*(dist*dtdelfx-dtdist*delfx)/(dist*dist);
/* Derivada temporal del campo de velocidad */
dtvx=-k1*(dtf*delfx+f*dtdelfx)-terx+ax;
dtvy=-k1*(dtf*delfy+f*dtdelfy)+tery+ay;
/*"*****"*/
/* Aqui terminan ecuaciones del campo de velocidad */
/*"*****"*/
/*Norma de la velocidad del extremo del robot */
/*Sirve para observar la radidez del extremo final*/
/*la cual se supone debe converger a una constante*/
norq=sqrt(dx*dx+dy*dy);
/*-----*/
/* Si Tiempo_real es menor de 10 seg. entra en operacion un controlador
*/
/* que lo lleva a una posicion inicial qd1 y qd2 (grados). Despues de

```

```

*/
/* este tiempo entra en operacion el control para trazado de espiral */
if(Tiempo_real<10.0)
/* Posiciones articulares deseadas INICIALES */
qd1=45.0;
qd2=90.0;
/* Error en coordenadas articulares */
error1=qd1-pos1;
error2=qd2-pos2;
/* Ley de control Tanh-D con compensacion de gravedad */
tau1 = kp1a*tanh(lambda1*error1) - kv1a*vel1 + g1;
tau2 = kp2a*tanh(lambda2*error2) - kv2a*vel2 + g2;
zeta1n=0.0;
zeta2n=0.0;
z1n=0.0;
z2n=0.0;
else
/*"*****"*/
/* Ecuaciones del controlador */
/*"*****"*/
/* Error de campo de velocidad */
dex=vx-dx; /* Error en el eje x de campo de velocidad */
dey=vy-dy; /* Error en el eje y de campo de velocidad */
/* Estado zeta1n integral del error de campo de vel */
zeta1n=zeta1n+(dex)*h; /* metros */
/* Estado zeta2n integral del error de campo de vel */
zeta2n=zeta2n+(dey)*h; /*metros */
/* Jacobiano J(q) */
dh11=0.45*cos(pos1*cgr)+0.45*cos((pos1+pos2)*cgr);
dh12=0.45*cos((pos1+pos2)*cgr);
dh21=0.45*sin(pos1*cgr)+0.45*sin((pos1+pos2)*cgr);
dh22=0.45*sin((pos1+pos2)*cgr);
detdh=dh11*dh22-dh12*dh21; /* Determinante de J(q) */
/* Derivada temporal del Jacobiano */
dth11=-0.45*sin(pos1*cgr)*vel1*cgr-0.45*sin((pos1+pos2)*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
dth12=-0.45*sin((pos1+pos2)*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
dth21=0.45*cos(pos1*cgr)*vel1*cgr+0.45*cos((pos1+pos2)*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;

```

```

dth22=0.45*cos((pos1+pos2)*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
/*-----*/
/* --Derivada temporal del J(q) --*/
detdtdh=dh11*dth22+dh22*dth11-(dh12*dth21+dh21*dth12);
/*-- Derivada temporal de (1/detdtdh) --*/
dv=-detdtdh/(detdh*detdh);
/* Variables que definen los elementos de la derivada temporal */
/* de la inversa del jacobiano, d/dt (J(q)^-1) */
Mtdh11=dh22*dv+dth22/detdh;
Mtdh12=-dh12*dv-dth12/detdh;
Mtdh21=-dh21*dv-dth21/detdh;
Mtdh22=dh11*dv+dth11/detdh;
l1=vx+k*zeta1n; /* l1 y l2 definen el vector l=v(x)-k*zeta */
l2=vy+k*zeta2n;
dl1=dtvx+k*dex; /* Derivada temporal del vector l */
dl2=dtvy+k*dey;
dq1d=(dh22*l1-dh12*l2)/detdh; /* Velocidad articular deseada */
dq2d=(-dh21*l1+dh11*l2)/detdh;
/* Aceleracion articular deseada */
ddq1d=Mtdh11*l1+Mtdh12*l2+(dh22*dl1-dh12*dl2)/detdh;
ddq2d=Mtdh21*l1+Mtdh22*l2+(-dh21*dl1+dh11*dl2)/detdh;
deq1=dq1d-vel1*cgr; /* Error de velocidad */
deq2=dq2d-vel2*cgr;
/* Estado z1n integral del error de vel */
z1n=z1n+(deq1)*h; /* radianes */
/* Estado z2n integral del error de vel */
z2n=z2n+(deq2)*h; /* radianes */
laz1=ddq1d+kv1*deq1+kp1*z1n;
laz2=ddq2d+kv2*deq2+kp2*z2n;
tau1=M11*laz1+M12*laz2+(c11*vel1*cgr)+(c12*vel2*cgr)+g1+(b1c*vel1*cgr);
tau2=M21*laz1+M22*laz2+(c21*vel1*cgr)+(c22*vel2*cgr)+g2+(b2c*vel2*cgr);

```

E.3 Controlador basado en dinámica inversa en coordenadas articulares

```

/*****/

```

```

/* cva1.rob */
/* */
/* Control por campo de velocidad en coordenadas */
/* articulares. Especificacion por un campo vectorial */
/* convergente a un circulo centrado en xc y yx (rad) */
/* y radio ro (rad). Se especifica rapidez constante */
/* denotada por c (rad/seg). */
/* */
/* El controlador empleado es el denominado por dina- */
/* mica inversa. */
/* */
/* 8 de abril de 1999, Moreno & Kelly */
/*****
/*----- Definicion de variables y constantes -----*/
float h=0.0025;
float k1=2.0; /* Ganacia del gradiente */
float xc=0.75; /* Centro del circulo */
float yc=0.75;
float ro=0.5;
float c=0.25; /* Rapidez tangencial al circulo */
float kv1=0.35;
float kv2=0.2;
float kp1=15.0;
float kp2=15.0;
float b1c=2.288;
float b2c=0.175;
float g=9.81;
float pos1;
float pos2;
float vel1;
float vel2;
float tau1;
float tau2;
float M11, M12, M21, M22, detM;
float c11, c12, c21, c22;
float g1,g2;
float f,dtf,norq;
float dist, costet, sentet, vx, vy, dtvx, dtvy, zeta1ng, zeta1=0.0;
float zeta2ng, zeta2=0.0, evel1, evel2, u1, u2;

```

```

float x,y,dx,dy;
float contador=0;
/*----- cuerpo -----*/
/*----- Campo de velocidad -----*/
x=pos1*Pi/180.0; /* x esta en rad */
y=pos2*Pi/180.0;
dx=vel1*Pi/180.0; /* dx esta en rad/seg */
dy=vel2*Pi/180.0;
f=(x-xc)*(x-xc)+(y-yc)*(y-yc)-ro*ro; /* Definicion de la funcion f */
dtf=2*(x-xc)*dx+2*(y-yc)*dy; /* Derivada temporal de f */
dist=sqrt((x-xc)*(x-xc)+(y-yc)*(y-yc));
costet=(x-xc)/dist;
sentet=(y-yc)/dist;
/* Componentes x e y del campo de velocidad */
vx=-k1*2*f*(x-xc)-c*sentet;
vy=-k1*2*f*(y-yc)+c*costet;
/* Derivada temporal del campo de velocidad */
dtvx= -c*dy/dist+c*(y-yc)*dtf/(2*dist*dist*dist)-2*k1*(dx*f+x*dtf);
dtvy= c*dx/dist-c*(x-xc)*dtf/(2*dist*dist*dist)-2*k1*(dy*f+y*dtf);
zeta1=zeta1+(vx-vel1*Pi/180.0)*h; /* Estado zeta1n */
zeta2=zeta2+(vy-vel2*Pi/180.0)*h; /* Estado zeta2n */
/* ----- dinamica del robot -----*/
/* Matriz de inercia */
M11=2.351+0.168*cos(pos2*Pi/180.0);
M12=0.102+0.084*cos(pos2*Pi/180.0);
M21=0.102+0.084*cos(pos2*Pi/180.0);
M22=0.102;
/* Matriz de coriolis */
c11=-0.168*sin(pos2*Pi/180.0)*vel2*Pi/180.0;
c12=-0.084*sin(pos2*Pi/180.0)*vel2*Pi/180.0;
c21= 0.084*sin(pos2*Pi/180.0)*vel1*Pi/180.0;
c22= 0.0;
/* Pares gravitacionales */
g1=3.921*g*sin(pos1*Pi/180.0) + 0.186*g*sin((pos1+pos2)*Pi/180.0);
g2=0.186*g*sin((pos1+pos2)*Pi/180.0);
/* ----- Ecuaciones del controlador -----*/
if (Tiempo_real < 10.0) contador = contador+1.0;

```

```
zeta1ng=zeta1*(180/Pi); /* en grados */
zeta2ng=zeta2*(180/Pi); /* en grados */
evel1=(vx-(vel1*Pi/180.0))*(180/Pi); /* error campo velocidad en grad/seg
*/
evel2=(vy-(vel2*Pi/180.0))*(180/Pi); /* error campo velocidad en grad/seg
*/
norq=sqrt(vel1*vel1+vel2*vel2);
u1=dtvx+((kv1*evel1+kp1*zeta1ng)); /* en rad ... */
u2=dtvy+((kv2*evel2+kp2*zeta2ng));
tau1=M11*u1+M12*u2+c11*(vel1*Pi/180.0)+c12*(vel2*Pi/180.0)+g1+b1c*vel1*Pi/180
tau2=M21*u1+M22*u2+c21*(vel1*Pi/180.0)+c22*(vel2*Pi/180.0)+g2+b2c*vel2*Pi/180
```