

CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE  
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA

LA AUTO-INTERACCIÓN ALINEAL DE UN MODO  
NORMAL DE ROSSBY EN UN OCEANO RECTANGULAR

TESIS  
MAESTRÍA EN CIENCIAS

DAVID ERNESTO SERRANO HERNÁNDEZ

Ensenada, Baja California, México, agosto de 1994.

RESUMEN de la tesis de David Ernesto Serrano Hernández presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS con opción en OCEANOGRAFIA FISICA. Ensenada, Baja California, México. Agosto 1994.

LA AUTO-INTERACCION ALINEAL DE UN MODO NORMAL DE ROSSBY  
EN UN OCEANO RECTANGULAR

Resumen aprobado por:

Se estudia la auto-interacción de un modo normal de Rossby en una cuenca rectangular por medio de un modelo analítico y uno numérico. La auto-interacción a primer orden produce un forzamiento transitorio con el doble de la frecuencia del modo y un forzamiento estacionario. El forzamiento estacionario tiene como respuesta la presencia de dos giros: uno anticiclónico en la parte norte de la cuenca y el otro ciclónico en la parte sur. La respuesta directa al forzamiento transitorio no satisface la condición a la frontera de flujo normal cero en las paredes meridionales. El fluido se ajusta generando ondas de Rossby, de tal forma que la suma de la función corriente de estas ondas (solución homogénea) y la función corriente forzada resulte nula en las paredes. Entre las componentes de la solución perturbativa a primer orden, la que tiene mayor importancia es la solución estacionaria. Los términos advectivos juegan un papel decisivo en la circulación de la cuenca si ésta es relativamente pequeña; por el contrario, para cuencas grandes los términos alineales tienen poco peso. En los resultados del modelo numérico se aprecia un desfase en la función corriente respecto a la solución analítica, presumiblemente por el efecto de la discretización en el modelo numérico. La solución numérica alineal difiere apreciablemente de la solución analítica a primer orden conforme la amplitud de la condición inicial se incrementa, indicándonos que la solución analítica es válida para números de  $\beta$ -Rossby pequeños.



CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE EDUCACION  
SUPERIOR DE ENSENADA

DIVISION DE OCEANOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE OCEANOGRAFIA FISICA

LA AUTO-INTERACCION ALINEAL DE UN MODO NORMAL DE  
ROSSBY EN UN OCEANO RECTANGULAR

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos  
necesarios para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS  
presenta

DAVID ERNESTO SERRANO HERNANDEZ

Ensenada, Baja California, Agosto de 1994.

## DEDICATORIA

A mis padres; por su lucha y amor

A mis hermanos; por sus juegos y risas

A mis sobrinos; porque se están riendo

A Evlin; por su amor y ternura

## AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Federico Graef Ziehl por el apoyo brindado en la realización de este trabajo, además de su gran entusiasmo y profesionalismo que siempre mostró.

A los miembros del comité; Alejandro Parés, Julio Sheinbaum y Jaime Herrera por la paciencia que tuvieron al revisar el trabajo, haciendo valiosos apuntes y comentarios.

A mis profesores.

Agradezco al CONACyT el apoyo económico que me brindó en mi periodo como becario, además de la sobrebeca partida del proyecto de CONACyT (No. 11002-T9111) "Corrientes y Remolinos en el Golfo de México y Mar Caribe", del cual este trabajo forma parte.

Al personal del centro de Cómputo, Biblioteca y Servicios Escolares de CICESE. A Adriana, Lina y Julieta por el café temprano y levantador.

A mis compañeros: Jorge, Emilio P., Rosario, Benjamín, Carlitos, Rigo, Ozunac, Robepa, Gilberto y Emilio B.

## LISTA DE FIGURAS

<u>Figura</u>	<u>Página</u>
1. Representación de los vectores número de onda (22) en un diagrama de lentitud de las cuatro OR que conforman el modo de oscilación ( $\sigma < 0$ ).	13.
2. Contornos de $\psi_{1\ pe}$ , para una cuenca de $X_0 = 7000$ km por $Y_0 = 3500$ km, centrada en los $45^\circ$ latitud norte.	21.
3. A (amplitud de $\psi_0$ ) vs. $A_{pe} = \frac{2EA^2X_0}{16\beta m\pi}$ (máxima amplitud de $\psi_{pe}$ ) como función de $n$ y $A$ ; $m = 1$ y $n$ toma los valores de 1 a 5 para una cuenca $X_0 = 1000$ km por $Y_0 = 500$ km centrada en los $32^\circ$ latitud norte. La intercepción de las diferentes curvas con la línea de $45^\circ$ nos indica que para esa amplitud $\psi_0$ y $\psi_{pe}$ tienen igual importancia.	22.
4. Como en figura 3, para una cuenca de $X_0 = 7000$ km por $Y_0 = 3500$ km centrada en los $45^\circ$ latitud norte.	23.
5. Contornos instantáneos de $\psi_0$ separados por un octavo de periodo: a) $\psi_0(t=0)$ ; b) $\psi_0(t=T/8)$ ; c) $\psi_0(t=2T/8)$ ; d) $\psi_0(t=3T/8)$ ; etc, etc. Los giros derivan hacia occidente. Parámetros: $m = n = 1$ , $A = 7.0 \times 10^5$ m <sup>2</sup> /s, $T = 9.017$ días, $\theta_0 = 45^\circ$ latitud norte, $X_0 = 7000$ km y $Y_0 = 3500$ km.	33.
6. Razón entre las amplitudes de $\psi_{1\ pe}$ y $\psi_{1\ pt}$ como función de $m$ y $n$ , para cuencas tales que $X_0/Y_0 = 2$ .	36.
7. Contornos instantáneos de $\psi_1$ separados por un octavo de periodo $T$ : a) $\psi_1(t=0)$ ; b) $\psi_1(t=T/8)$ ; c) $\psi_1(t=2T/8)$ ; d) $\psi_1(t=3T/8)$ ; etc, etc. Parámetros como en figura 5.	37.

## LISTA DE FIGURAS

(continuación)

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
8.	Contornos instantáneos de $\psi_0 + \psi_1$ separados por un octavo de periodo $T$ : a) $\psi_0 + \psi_1(t=0)$ ; b) $\psi_0 + \psi_1(t=T/8)$ ; c) $\psi_0 + \psi_1(t=2T/8)$ ; d) $\psi_0 + \psi_1(t=3T/8)$ ; etc, etc. Parámetros como en figura 5.	38.
9.	Contornos instantáneos de $\psi_{lin}$ (obtenidos numéricamente) separados por un octavo de periodo analítico $T$ a partir del décimo periodo analítico: a) $\psi_{lin}(t=10T)$ ; b) $\psi_{lin}(t=(10+1/8)T)$ ; c) $\psi_{lin}(t=(10+2/8)T)$ ; d) $\psi_{lin}(t=(10+3/8)T)$ ; etc, etc. Parámetros como en figura 5.	43.
10.	Contornos instantáneos de $\psi_{ali}$ (obtenidos numéricamente) separados por un octavo de periodo analítico $T$ a partir del décimo periodo analítico: a) $\psi_{ali}(t=10T)$ ; b) $\psi_{ali}(t=(10+1/8)T)$ ; c) $\psi_{ali}(t=(10+2/8)T)$ ; d) $\psi_{ali}(t=(10+3/8)T)$ ; etc, etc. Parámetros como en figura 5.	45.
11.	Promedio instantáneo de $\psi_{ali}$ (obtenidos numéricamente) a partir del décimo periodo $T$ , separados por un cuarto de periodo analítico: a) $\bar{\psi}_{ali}(t=10T)$ ; b) $\bar{\psi}_{ali}(t=(10+1/4)T)$ ; c) $\bar{\psi}_{ali}(t=(10+2/4)T)$ ; d) $\bar{\psi}_{ali}(t=(10+3/4)T)$ ; etc, etc. Parámetros como en figura 5.	47.
12.	Razón entre la RCM de $(\psi_0 + \psi_1)$ al tiempo $t = 0$ y la RCM de $(\psi_{ali})$ al tiempo $4T$ en función de $\epsilon$ , parámetros como en figura 3.	48.

**LISTA DE FIGURAS**  
(continuación)

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
13.	a) contornos de $(\psi_0 + \psi_1)$ en $t=0$ ; b) contornos de $(\psi_{ali})$ en $t=8T$ , para una cuenca de $X_0 = 1000$ km y $Y_0 = 500$ km, con $A = 12000$ m <sup>2</sup> /s, centrada en los 32° de latitud.	50.
14.	Esquema de la cuenca rotada para el problema de reflexión de OR incidente y reflejada en una pared no zonal.	53.
15.	Contornos instantáneos de $\psi_L$ (obtenidos numéricamente) a lo largo de la "ventana" y a 1500 km a partir de la costa. Las paredes laterales se encuentran aproximadamente a 23000 km, mientras la pared paralela a la costa se encuentra a 10500 km. los contornos están separados por un octavo de periodo analítico $T$ : a) $\psi_L(t=0)$ ; b) $\psi_L(t=T/8)$ ; c) $\psi_L(t=2T/8)$ ; d) $\psi_L(t=3T/8)$ ; etc, etc. Parámetros: $\theta_0 = 25^\circ$ , $\alpha = 25^\circ$ , $T = 0.1$ año y $k = -0.002$ km <sup>-1</sup> .	54.
16.	Contornos instantáneos de $\psi_A$ (obtenidos numéricamente) a lo largo de la "ventana" y a 1500 km a partir de la costa. Las paredes laterales se encuentran aproximadamente a 23000 km, mientras la pared paralela a la costa se encuentra a 10500 km. los contornos están separados por un octavo de periodo analítico $T$ : a) $\psi_A(t=0)$ ; b) $\psi_A(t=T/8)$ ; c) $\psi_A(t=2T/8)$ ; d) $\psi_A(t=3T/8)$ ; etc, etc. Parámetros como en figura 15.	56.
17.	Gráficas de la componente de velocidad geostrófica $u'$ paralela a la costa, como función de $y'$ , coordenada perpendicular a la costa, obtenida numéricamente (línea continua) y $u'_a$ velocidad geostrófica estacionaria, obtenida de forma analítica (línea discontinua), separadas por un octavo de periodo analítico $T$ : a) $u'(t=0)$ ; b) $u'(t=T/8)$ ; c) $u'(t=2T/8)$ ; d) $u'(t=3T/8)$ ; etc, etc.	58.

## CONTENIDO

	<u>Página</u>
I INTRODUCCION	1
II FORMULACION DEL PROBLEMA	6
II.1 La ecuación de vorticidad potencial cuasigeostrófica	6
II.2 Expansión perturbativa	8
III SOLUCION A ORDEN LIDER	10
IV SOLUCION AL PROBLEMA A PRIMER ORDEN	14
IV.1 Los términos no lineales	14
IV.2 Ecuación a primer orden	15
IV.3 Solución al problema a primer orden	19
IV.3.1 Solución estacionaria	19
IV.3.2 Solución transitoria	24
IV.3.3 Solución homogénea	25
V CONTORNOS DE LA SOLUCION A ORDEN LIDER Y PRIMER ORDEN	32
VI MODELO NUMERICO	39
VI.1 Descripción del modelo numérico	39
VI.2 Problema lineal numérico	41
VI.3 Problema alineal numérico	41
VI.4 Resultado del problema numérico lineal y alineal	42

VI.5	Solución analítica vs. solución numérica	46
VI.6	Reflexión de ondas de Rossby en una pared no zonal	50
VII	SUMARIO Y CONCLUSIONES	59
	LITERATURA CITADA	62

**LA AUTO-INTERACCION ALINEAL DE UN MODO NORMAL DE ROSSBY  
EN UN OCEANO RECTANGULAR**

**I. INTRODUCCION**

El estudio de la circulación oceánica en una cuenca cerrada ha sido el eje principal en el que se ha basado el análisis de una gran variedad de modelos oceánicos que tienen por forzamiento el esfuerzo estacionario del viento. Trabajos como los realizados por Stommel (1948) y Munk (1950) han sido de gran importancia para lograr un mayor entendimiento de la circulación oceánica a gran escala. En una cuenca cerrada, el esfuerzo del viento con promedio temporal nulo produce, además de la respuesta directa del océano, una circulación independiente del tiempo. Esta circulación estacionaria es generada por las alinealidades en la dinámica gobernante (Pedlosky, 1965). Por lo tanto, la circulación general oceánica estacionaria no puede ser descrita tan sólo por la componente estacionaria del esfuerzo del viento.

Graef (1990) estudia las interacciones alineales de las ondas de Rossby que inciden y se reflejan en una pared no zonal

empleando el método de perturbaciones, destacando la importancia de las interacciones al producir un flujo estacionario paralelo a la costa contribuyendo a la circulación general estacionaria.

La idealización del océano sin fronteras es válida si la perturbación a estudiar es pequeña comparada con las dimensiones del dominio, y además si a la perturbación en su propagación le lleva un tiempo considerable en llegar a las fronteras. Sin embargo, para cuencas cerradas como los océanos, el efecto de las fronteras resulta importante a forzamientos de gran escala. En tales casos la respuesta del océano a un forzamiento con dependencia temporal puede ser mejor discutida en términos de los modos normales de oscilación (Pedlosky, 1987).

El tema de oscilaciones en una cuenca cerrada ha atraído la atención de la comunidad científica desde los tiempos de Laplace. Existe una amplia literatura; por ejemplo, Goldsbrough (1913), Stommel (1948) y Longuet-Higgins (1964). Estos últimos concentrándose al estudio de las ondas de Rossby (OR) u ondas planetarias en un dominio cerrado y con fondo plano. Estos dominios son una esquematización de las cuencas que se presentan en la práctica como el Pacífico y el Atlántico norte.

Algunas técnicas analíticas han sido desarrolladas para calcular los modos normales de oscilación en espacios cerrados con fondo variable y con diferentes formas. Longuet-Higgins (1964) calcula los modos normales de oscilación de un fluido

barotrópico en el plano  $\beta$  para diferentes cuencas. Ripa (1978) utiliza el principio variacional para desarrollar un método analítico, estudiando la evolución de los modos normales de Rossby en una cuenca cerrada con topografía variable.

Con la llegada de las computadoras estas técnicas han sido apoyadas por modelos numéricos que emplean diferencias finitas, elementos finitos u otro proceso numérico, resolviendo problemas que analíticamente son intratables.

Las leyes físicas fundamentales usadas en los modelos numéricos que estudian la circulación oceánica son conocidas, siendo resumidas en las ecuaciones de movimiento y conservación de masa. Sin embargo, cada modelo es sólo una aproximación a toda la física que involucra el océano. Para avanzar en materia, algunas simplificaciones son requeridas en los modelos numéricos, de tal forma que se logre aislar algún aspecto físico que se crea esencial en el estudio de un fenómeno y así tener un mayor entendimiento de éste.

La observación de intensos campos de remolinos en diferentes regiones del océano ha sido el motivo por el cual la teoría de la circulación oceánica de gran escala ha experimentado cambios importantes en los últimos años. Estas observaciones sugieren que la circulación general del océano está íntimamente relacionada a la dinámica de los remolinos. No son pocos los autores que se han interesado en desarrollar algún modelo

numérico tratando de explicar el por qué se presentan éstos campos. Holland (1978) con un modelo cuasigeostrófico (CG) de dos capas y con fondo plano, concluye que la interacción de remolinos de mesoescala influye al flujo medio de gran escala.

El presente trabajo tiene como objetivo principal el estudiar la autointeracción alineal débil de los modos normales de Rossby en un océano ideado como una caja con tapa rígida y fondo plano. Para lograr este objetivo haremos uso de un modelo numérico y uno analítico, comparando los resultados que de estos se obtengan. En ambos modelos la dinámica es cuasigeostrófica y la ecuación gobernante es la ecuación de vorticidad potencial cuasigeostrófica (EVPCG).

La comparación se hace con el objeto de establecer un criterio de validez para la solución analítica, ratificando de ésta forma las modificaciones que se hicieron al modelo numérico. Se hace uso de una variante del modelo empleado por Holland (1978), consistiendo en un modelo de una sola capa y sin forzamiento. Para la parte analítica se emplea un método como el desarrollado por Graef (1990).

La organización del trabajo es la siguiente: En el Capítulo II se presenta la formulación del problema, así como la expansión perturbativa a la EVPCG. El Capítulo III presenta la solución a orden cero de la EVPCG. En el Capítulo IV, el problema a primer orden es resuelto, haciendo énfasis en que los términos

alineales juegan un papel más importante para cuencas relativamente pequeñas. Los resultados gráficos del problema lineal y alineal se muestran en el Capítulo V. En el Capítulo VI, se describe el modelo numérico empleado, así como los resultados que se obtienen para el caso lineal y alineal de los modos de Rossby y el problema de la reflexión de dos OR en una pared no zonal. Finalmente el Capítulo VII lo integran el sumario y conclusiones.

## II. FORMULACION DEL PROBLEMA

### II.1 La ecuación de vorticidad potencial cuasigeostrófica

La ecuación a resolver numérica y analíticamente es la EVPCG. Pedlosky (1987) da una rigurosa derivación de la ecuación cuasi-geostrófica y describe las condiciones para que ésta sea una aproximación válida a las ecuaciones primitivas. La ecuación cuasi-geostrófica para un océano de densidad uniforme y con la aproximación de tapa rígida puede escribirse como

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + J(\psi, \nabla^2 \psi) = 0. \quad (1)$$

En (1) las variables físicas son:  $t$  el tiempo,  $\psi$  la función corriente cuasigeostrófica,  $f = f_0 + \beta y$  el parámetro de Coriolis, en el cual  $f_0 = 2\Omega \sin \theta_0$ ,  $\beta = \frac{2\Omega \cos \theta_0}{R_m}$  el gradiente en la dirección norte de la vorticidad planetaria (donde  $\Omega$  es la velocidad angular de la Tierra,  $R_m$  el radio medio de la Tierra y  $\theta_0$  es la latitud de referencia) y  $y$  es la coordenada hacia el norte.  $J$  representa el operador Jacobiano

$$J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x}, \quad (2)$$

y  $\nabla^2$  es el operador Laplaciano horizontal

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (3)$$

donde  $x$  es la coordenada hacia el este. Las componentes de la velocidad geostrófica son calculadas por medio de la función corriente

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (\text{componente este}), \quad (4)$$

$$v = \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (\text{componente norte}). \quad (5)$$

O en forma vectorial 4 y 5 puede escribirse como:

$$\vec{U} = \vec{k} \times \nabla\psi, \quad (6)$$

donde  $\vec{k}$  es el vector unitario en la dirección  $Z$  (verticalmente hacia arriba). Para un mejor entendimiento de la EVPCG notamos que

$$J(\psi, \cdot) = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} = v \frac{\partial}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial x} = \vec{U} \cdot \nabla, \quad (7)$$

por lo cual podemos escribir la EVPCG como

$$(\partial_t + \vec{U} \cdot \nabla) [\beta y + \nabla^2 \psi] = 0. \quad (8)$$

Físicamente la EVPCG nos dice que los elementos del fluido conservan su vorticidad potencial CG ( $\beta y + \nabla^2 \psi$ ) siguiendo la proyección horizontal del movimiento.

La condición de contorno es de que no exista flujo normal a través de las paredes del océano caja. En el caso que nos

ocupa, un océano barotrópico con tapa rígida, la condición de contorno es

$$\psi = 0 \text{ en } x = 0, X_0 \text{ y } y = 0, Y_0, \quad (9)$$

donde  $X_0$  y  $Y_0$  son las dimensiones del océano en  $x$  y  $y$ . La ecuación (1) más la condición a la frontera (9) es el problema a resolver para estudiar los modos normales de oscilación cuasigeostroficos en una cuenca cerrada.

## II.2 Expansión perturbativa

La teoría de perturbaciones es una colección de métodos iterativos que nos permite obtener soluciones aproximadas a problemas que involucran un parámetro pequeño  $\epsilon$  (Bender y Orszag, 1978). Aunque regularmente se cuenta explícitamente con el parámetro perturbativo  $\epsilon$ , en nuestro caso impondremos dicho parámetro al término alineal de la ecuación (1) i.e.

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \epsilon J(\psi, \nabla^2 \psi) = 0, \quad (10)$$

suponiendo que este término es pequeño comparado con los otros dos términos lineales en la auto-interacción alineal débil de un modo normal de Rossby. La solución perturbativa que adoptamos tiene la forma

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \psi_n, \quad (11)$$

donde  $\epsilon$  juega el papel de un parámetro de ordenamiento, el cual se iguala a uno después de calcular  $\psi_0$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ , etc. (Graef,

### III. SOLUCION A ORDEN LIDER

La solución a orden cero es el problema lineal de los modos normales de oscilación en una cuenca cerrada discutido por Longuet-Higgins (1964) y Pedlosky (1987).

En el esquema perturbativo el problema a orden cero se obtiene al sustituir  $n=0$  en las ecuaciones (12) y (13), resultando

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi_0}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi_0}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

$$y \quad \psi_0 = 0 \quad @ \quad x=0, X_0 \quad y \quad y=0, Y_0. \quad (15)$$

La ecuación (14) físicamente nos dice que el cambio temporal de la vorticidad relativa es balanceado por el movimiento de la columna de agua en la dirección meridional, en un campo donde cambia el parámetro de Coriolis (plano  $\beta$ ).

Oscilaciones de la forma

$$\psi_0(x, y, t) = A \operatorname{Re} e^{-i\left(\frac{\beta x}{2\sigma} - \sigma t\right)} \phi(x, y), \quad (16)$$

donde  $A$  es una amplitud arbitraria y  $\operatorname{Re}$  representa la parte real de la exponencial, al ser sustituida en la ecuación (14) resulta una ecuación para  $\phi$  que debe satisfacer

$$(\nabla^2 + \gamma^2)\phi = 0, \quad (17)$$

donde  $\gamma^2 = \beta^2 / 4\sigma^2$ .

La ecuación (17) junto con la condición a la frontera (15), que en términos de  $\phi$  es  $\phi = 0$  en  $x = 0, X_0$  y  $y = 0, Y_0$ , es idéntica a la ecuación que deben satisfacer los modos normales en una membrana estirada y sujeta en sus extremos. La solución a la ecuación (17) con condiciones a la frontera  $\phi = 0$  en  $x = 0, X_0$  y  $y = 0, Y_0$  es (Pedlosky, 1987)

$$\phi(x, y) = \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{X_0}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{Y_0}\right), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (18)$$

donde la frecuencia del modo es:

$$\sigma = \sigma_{mn} = -\frac{\beta}{2\pi[(m/X_0)^2 + (n/Y_0)^2]^{1/2}}. \quad (19)$$

(Se escoge  $\sigma < 0$ .) La solución completa a orden líder es

$$\psi_0 = A \cos\left[\frac{\beta x}{2\sigma_{mn}} + \sigma_{mn} t\right] \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{X_0}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{Y_0}\right), \quad (20)$$

Cada modo normal consiste de una onda viajera con rapidez de fase dirigiéndose hacia el oeste, modulada por el producto de funciones seno que satisfacen las condiciones a la frontera. La solución (20) puede escribirse usando identidades trigonométricas como la suma de cuatro ondas de Rossby (OR) planas

$$\psi_0 = \frac{A}{4} \{ \cos(\vec{K}_1 \cdot \vec{X} + \sigma t) + \cos(\vec{K}_3 \cdot \vec{X} + \sigma t) - \cos(\vec{K}_2 \cdot \vec{X} + \sigma t) - \cos(\vec{K}_4 \cdot \vec{X} + \sigma t) \} \quad (21)$$

donde

$$\vec{K}_1 = \left( \frac{\beta}{2\sigma} - \frac{m\pi}{X_0}, \frac{n\pi}{Y_0} \right), \quad \vec{K}_3 = \left( \frac{\beta}{2\sigma} + \frac{m\pi}{X_0}, -\frac{n\pi}{Y_0} \right), \quad (22)$$

$$\vec{K}_2 = \left( \frac{\beta}{2\sigma} + \frac{m\pi}{X_0}, \frac{n\pi}{Y_0} \right), \quad \vec{K}_4 = \left( \frac{\beta}{2\sigma} - \frac{m\pi}{X_0}, -\frac{n\pi}{Y_0} \right),$$

son los vectores número de onda de las OR y  $\vec{X} = (x, y)$  (figura 1).

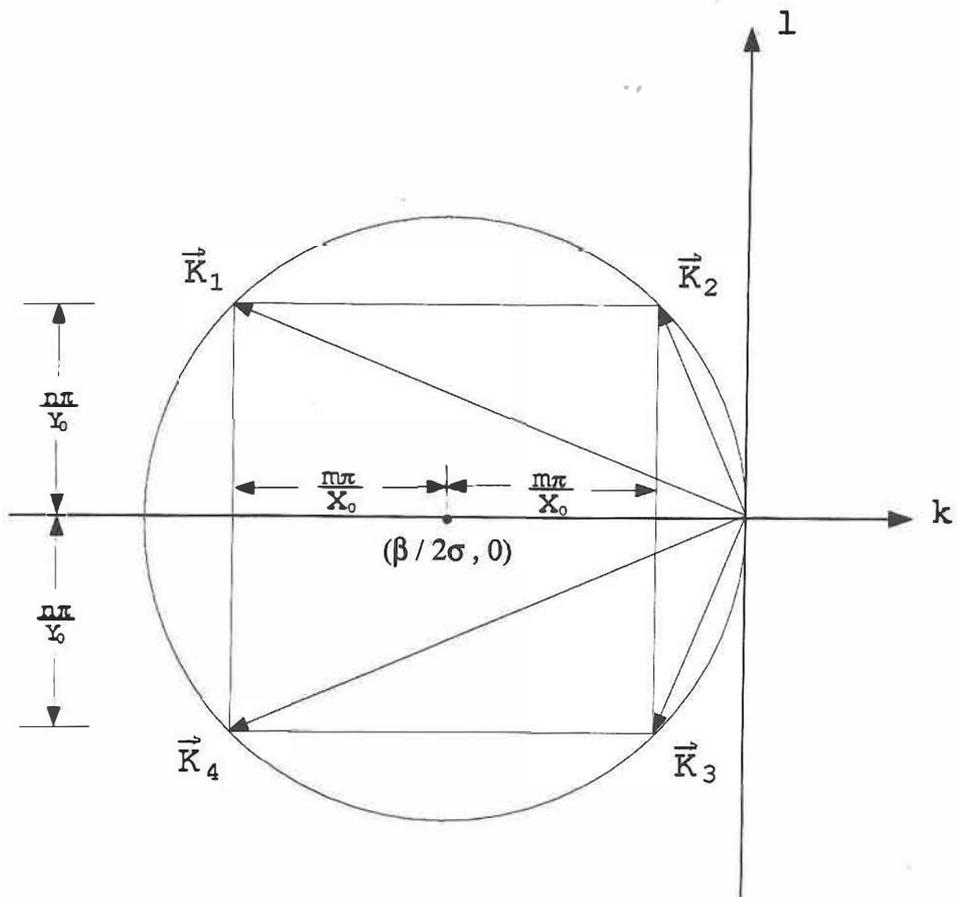


Figura 1: Representación de los vectores número de onda (22) en un diagrama de lentitud de las cuatro OR que conforman el modo normal de oscilación ( $\sigma < 0$ ).

#### IV. SOLUCION AL PROBLEMA A PRIMER ORDEN

##### IV.1 Los términos no lineales

El significado físico de los términos no lineales en la EVPCG es la advección de la vorticidad relativa ( $\nabla^2 \psi = \zeta$ ) por el campo de velocidad geostrofica, i.e.

$$J(\psi, \cdot) [\nabla^2 \psi] = \vec{U} \cdot \nabla [\nabla^2 \psi]. \quad (23)$$

Por lo tanto, si el campo de velocidad geostrofica es perpendicular al gradiente de la vorticidad relativa los términos alineales se anulan.

Ahora consideremos la suma de dos OR, veamos

$$\begin{aligned} \psi &= A_1 \cos(\vec{K}_1 \cdot \vec{X} - \sigma_1 t) + A_2 \cos(\vec{K}_2 \cdot \vec{X} - \sigma_2 t) \\ &\equiv A_1 \cos \Theta_1 + A_2 \cos \Theta_2. \end{aligned} \quad (24)$$

Cada OR por si sola es solución de la EVPCG no lineal; sin embargo la suma de dos OR en general no es solución de (1). Lo que impide que la suma sea una solución exacta, es la contribución de los términos no lineales, la cual nos representa la interacción entre estas dos ondas en las que el campo de velocidad geostrofica de la onda-1,  $\vec{U}_1$ , advecta la vorticidad relativa de la onda-2,  $\zeta_2$ , y viceversa. La interacción entre dos OR cualesquiera se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 \vec{U}_1 \cdot \nabla(\xi_2) + \vec{U}_2 \cdot \nabla(\xi_1) &= -A_1 A_2 \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 (|\vec{K}_2|^2 - |\vec{K}_1|^2) \vec{k} \cdot \vec{K}_1 \times \vec{K}_2 \\
 &= -A_1 A_2 \Gamma_{K_1 K_2} [\cos(\Theta_1 - \Theta_2) - \cos(\Theta_1 + \Theta_2)] \\
 &= I_{12},
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

donde

$$\Gamma_{K_1 K_2} = \frac{1}{2} (|\vec{K}_2|^2 - |\vec{K}_1|^2) \vec{k} \cdot \vec{K}_1 \times \vec{K}_2
 \tag{26}$$

es llamado el coeficiente de acoplamiento.

Dos OR no interactúan si el coeficiente de acoplamiento se anula, es decir si:

- a) El vector número de onda de la onda-1 es paralelo al de la onda-2.
- b) Las longitudes de onda son iguales.

#### IV.2 Ecuación a primer orden

Las ecuaciones de perturbación a primer orden resultan de sustituir  $n=1$  en (12) y (13)

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi_1}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = -J[\psi_0, \nabla^2 \psi_0]
 \tag{27}$$

$$\psi_1 = 0 \quad @ \quad x=0, X_0 \quad \text{y} \quad y=0, Y_0.
 \tag{28}$$

La única diferencia entre la ecuación a primer orden y la ecuación a orden cero es el término no homogéneo en el lado derecho de (27), siendo éste función de la solución a orden cero, la cual y como se mencionó en el capítulo III se puede escribir como la suma de cuatro ondas planas de Rossby. Para

obtener el término no homogéneo o forzamiento nos auxiliaremos de (25) y (26). Ya que la interacción de una OR consigo misma es nula, en principio habrá otras seis diferentes interacciones.

Sustituyendo los vectores número de onda  $\vec{K}_i$  dados por (22) en (26) obtenemos los coeficientes de acoplamiento:

$$\Gamma_{K_1K_2} = \frac{-2\beta m^2 n \pi^3}{\sigma X_0^2 Y_0}, \quad \Gamma_{K_1K_4} = 0, \quad \Gamma_{K_1K_3} = \frac{-\beta^2 m n \pi^2}{\sigma^2 X_0 Y_0},$$

$$\Gamma_{K_3K_4} = \frac{2\beta m^2 n \pi^3}{\sigma X_0^2 Y_0}, \quad \Gamma_{K_2K_3} = 0, \quad \Gamma_{K_2K_4} = \frac{\beta^2 m n \pi^2}{\sigma^2 X_0 Y_0}.$$

Resultando  $\Gamma_{K_1K_4}$  y  $\Gamma_{K_2K_3}$  igual a cero, debido a que sus longitudes de onda son iguales (ver fig. 1). Físicamente éste resultado nos dice que la interacción entre una OR plana que incide en una pared zonal con la onda que refleja es nula.

Por otra parte el coeficiente de acoplamiento para las ondas 1-2 y 3-4 son iguales en magnitud pero de signo opuesto,  $\Gamma_{K_1K_2}$  y  $\Gamma_{K_3K_4}$  representan la interacción entre una OR que incide en una pared meridional y su respectiva onda que refleja.

Los coeficientes  $\Gamma_{K_1K_3}$  y  $\Gamma_{K_2K_4}$  tienen la misma magnitud pero signo opuesto. El coeficiente de acoplamiento  $\Gamma_{K_1K_3}$  representa que la onda-1 que incide en la pared zonal sur interactúa con la onda-3 (onda que refleja la onda-2 al incidir en la pared zonal sur). Por otro lado y de forma similar  $\Gamma_{K_2K_4}$  nos indica

la interacción de la onda-2 que incide en la pared zonal sur con la onda-4 (onda que refleja la onda-1 al incidir en la pared zonal sur). Notamos que el ángulo que forman los vectores número de onda  $\vec{K}_1$  y  $\vec{K}_3$  y  $\vec{K}_2$  y  $\vec{K}_4$  es de  $90^\circ$ ; esto se puede comprobar ya que  $\vec{K}_1 \cdot \vec{K}_3 = \vec{K}_2 \cdot \vec{K}_4 = 0$ .

Por otra parte  $\Gamma_{K_1 K_3}$  y  $\Gamma_{K_2 K_4}$  también pueden describirse en función de la incidencia y reflexión de éstas ondas en las paredes meridionales e.g.  $\Gamma_{K_1 K_3}$  representa la interacción de la onda-1 que incide en la pared meridional oriental con la onda-3 (onda que refleja la onda-4 al incidir en la pared meridional oriental).

Finalmente las interacciones entre las diferentes ondas son expresadas por

$$I_{12} = \frac{-TA^2}{16} \left\{ \cos\left(\frac{-2m\pi x}{X_0}\right) - \cos\left(\frac{\beta x}{\sigma} + 2\sigma t + \frac{2n\pi y}{Y_0}\right) \right\}$$

$$I_{13} = \frac{EA^2}{16} \left\{ \cos\left(\frac{2n\pi y}{Y_0} - \frac{2m\pi x}{X_0}\right) - \cos\left(\frac{\beta x}{\sigma} + 2\sigma t\right) \right\}$$

$$I_{24} = \frac{-EA^2}{16} \left\{ \cos\left(\frac{2n\pi y}{Y_0} + \frac{2m\pi x}{X_0}\right) - \cos\left(\frac{\beta x}{\sigma} + 2\sigma t\right) \right\}$$

$$I_{34} = \frac{TA^2}{16} \left\{ \cos\left(\frac{-2m\pi x}{X_0}\right) - \cos\left(\frac{\beta x}{\sigma} + 2\sigma t - \frac{2n\pi y}{Y_0}\right) \right\}$$

donde:

$$E = \frac{\beta^2 m n \pi^2}{\sigma^2 X_0 Y_0} \quad y \quad T = \frac{2\beta m^2 n \pi^3}{\sigma X_0^2 Y_0}$$

Por último el término no homogéneo se obtiene al sumar los cuatro diferentes  $I_{ij}$

$$J(\psi_0, \nabla^2 \psi_0) = \frac{\Gamma A^2}{16} \left\{ \cos\left(\frac{\beta x}{\sigma} + 2\sigma t + \frac{2n\pi y}{Y_0}\right) - \cos\left(\frac{\beta x}{\sigma} + 2\sigma t - \frac{2n\pi y}{Y_0}\right) \right\} \\ - \frac{EA^2}{16} \left\{ \cos\left(\frac{2m\pi x}{X_0} + \frac{2n\pi y}{Y_0}\right) - \cos\left(\frac{2m\pi x}{X_0} - \frac{2n\pi y}{Y_0}\right) \right\}, \quad (29)$$

el cual consta de dos términos, cada uno con amplitud proporcional al cuadrado de  $A$ : el primero con dependencia temporal y espacial (término transitorio) oscilando con el doble de la frecuencia de la solución a orden cero, y el segundo sólo con dependencia espacial (término estacionario). Cabe destacar que la suma de  $I_{13}$  e  $I_{24}$  contribuye sólo con el término estacionario y la suma de  $I_{12}$  e  $I_{34}$  con el término transitorio.

Por lo tanto y de todo lo anterior nuestra ecuación a primer orden es

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi_1}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = -\frac{\Gamma A^2}{16} \left\{ \cos\left(\frac{\beta x}{\sigma} + 2\sigma t + \frac{2n\pi y}{Y_0}\right) - \cos\left(\frac{\beta x}{\sigma} + 2\sigma t - \frac{2n\pi y}{Y_0}\right) \right\} \\ - \frac{EA^2}{16} \left\{ \cos\left(\frac{2n\pi y}{Y_0} - \frac{2m\pi x}{X_0}\right) - \cos\left(\frac{2n\pi y}{Y_0} + \frac{2m\pi x}{X_0}\right) \right\}. \quad (30)$$

### IV.3 Solución al problema a primer orden

El problema para  $\psi_1$  es inhomogéneo pero lineal y por tanto la solución o respuesta para cada término inhomogéneo puede ser considerada por separado, sumando después sus resultados. La solución para  $\psi_1$  se escribe como

$$\psi_1 = \psi_{1h} + \psi_{1pe} + \psi_{1pt}, \quad (31)$$

donde  $\psi_{1h}$ ,  $\psi_{1pe}$  y  $\psi_{1pt}$  es una solución homogénea, una solución particular para el forzamiento estacionario y una solución particular para el término transitorio de (30) respectivamente.

#### IV.3.1 Solución Estacionaria

La ecuación diferencial de la cual obtendremos la solución estacionaria particular es

$$\begin{aligned} \beta \frac{\partial \psi_{1pe}}{\partial x} &= -\frac{EA^2}{16} \left\{ \cos\left(\frac{2n\pi y}{Y_0} - \frac{2m\pi x}{X_0}\right) - \cos\left(\frac{2n\pi y}{Y_0} + \frac{2m\pi x}{X_0}\right) \right\} \\ &= -\frac{EA^2}{8} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi y}{Y_0}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{X_0}\right), \end{aligned} \quad (32)$$

la cual al ser integrada en  $x$  se obtiene

$$\psi_{1pe} = \frac{EA^2 X_0}{16\beta m\pi} \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi y}{Y_0}\right) \cos\left(\frac{2m\pi x}{X_0}\right) + f(y) \right\}, \quad (33)$$

donde  $f(y)$  es una función arbitraria de  $y$ . Para determinar  $f(y)$  evaluaremos las condiciones a la frontera en (33), veamos. Para  $x = 0, X_0$ ,  $f(y)$  tiene que ser  $-\text{sen}\left(\frac{2n\pi y}{Y_0}\right)$ , satisfaciendo la condición a la frontera en las paredes meridionales. Por otra parte para  $y = 0, Y_0$  al sustituir  $f(y)$  en (33) se satisfacen automáticamente las condiciones a la frontera en las paredes zonales, por lo tanto  $f(y)$  queda determinada y así la solución particular estacionaria a primer orden es:

$$\psi_{1pe} = \frac{EA^2 X_0}{16\beta m\pi} \text{sen}\left(\frac{2n\pi y}{Y_0}\right) \left[ \cos\left(\frac{2m\pi x}{X_0}\right) - 1 \right]. \quad (34)$$

La solución particular estacionaria correspondiente al primer modo, i.e.  $m=1, n=1$ , presenta dos giros a través de la cuenca. El giro en la zona norte muestra circulación anticiclónica mientras que el giro en la zona sur tiene circulación ciclónica; ver figura 2. La intensidad de ambos depende del factor  $E$  así como de la amplitud dada al problema lineal. Para

$$A = \frac{8\beta m\pi}{EX_0}, \quad (35)$$

la solución estacionaria tiene igual importancia que la solución lineal, ya que para ésta  $A$  las curvas de máxima amplitud en ambas soluciones interceptan la línea de  $45^\circ$ , indicándonos que los términos advectivos tienen el mismo peso que los términos lineales, ver figuras 3 y 4.

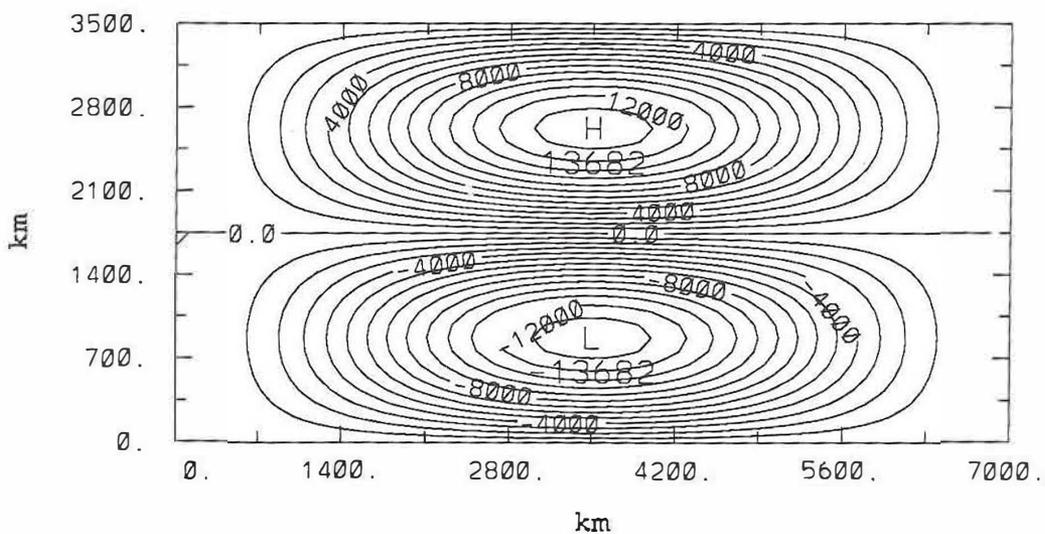


Figura 2: Contornos de  $\psi_{1,pe}$ , para una cuenca de  $X_0 = 7000$  km por  $Y_0 = 3500$  km, centrada en los  $45^\circ$  latitud norte.

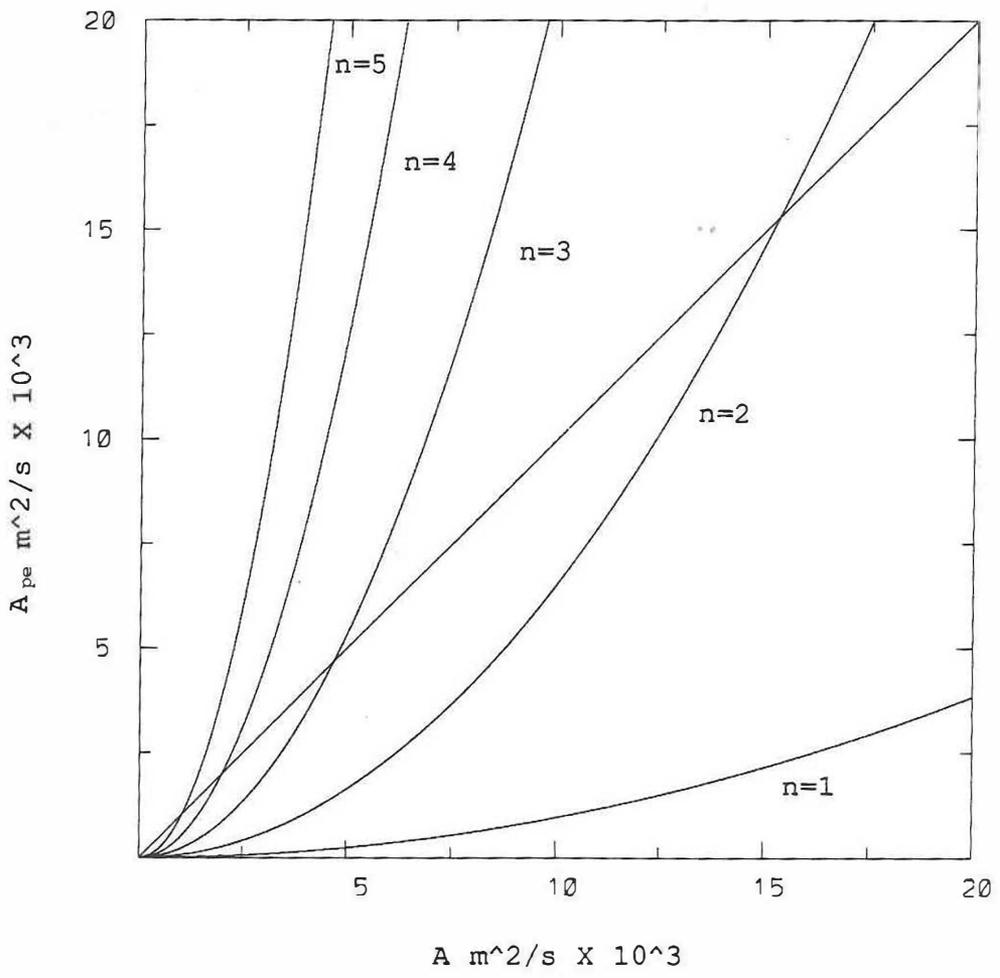


Figura 3: A (amplitud de  $\psi_0$ ) vs.  $A_{pe} = \frac{2EA^2X_0}{16\beta m\pi}$  (máxima amplitud de  $\psi_{pe}$ ) como función de  $n$  y  $A$ ;  $m=1$  y  $n$  toma los valores de 1 a 5 para una cuenca de  $X_0=1000$  km por  $Y_0=500$  km centrada en los  $32^\circ$  latitud norte. La intercepción de las diferentes curvas con la línea de  $45^\circ$  nos indica que para esa amplitud  $\psi_0$  y  $\psi_{pe}$  tienen igual importancia.

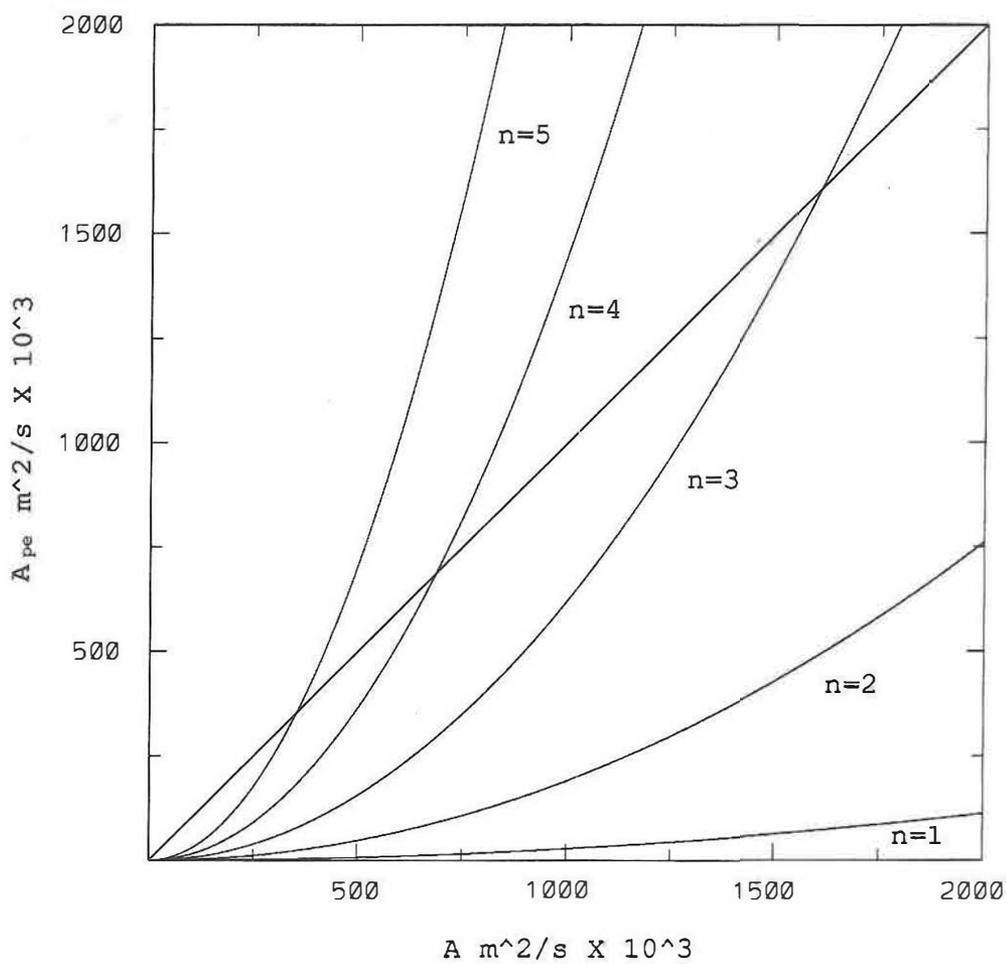


Figura 4: Como en Figura 3, pero para una cuenca de  $X_0 = 7000$  km por  $Y_0 = 3500$  km centrada en los  $45^\circ$  latitud norte.

### IV.3.2 Solución Transitoria

La ecuación para determinar la solución particular transitoria  $\psi_{1,pt}$  es

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi_{1,pt}}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi_{1,pt}}{\partial x} = -\frac{\Gamma A^2}{16} \left\{ \cos\left(\frac{2n\pi y}{Y_0} + \frac{\beta x}{\sigma} + 2\sigma t\right) - \cos\left(\frac{-2n\pi y}{Y_0} + \frac{\beta x}{\sigma} + 2\sigma t\right) \right\}, \quad (36)$$

que al reescribir el término no homogéneo utilizando una identidad trigonométrica resulta

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi_{1,pt}}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi_{1,pt}}{\partial x} = \frac{\Gamma A^2}{16} \left\{ 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\beta x}{\sigma} + 2\sigma t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi y}{Y_0}\right) \right\}. \quad (37)$$

Se propone una solución de (37) de la forma

$$\psi_{1,pt} = B \cos\left(\frac{\beta x}{\sigma} + 2\sigma t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi y}{Y_0}\right), \quad (38)$$

que al sustituir en (37) resulta

$$B \left\{ \left[ 2\sigma \left[ \left(\frac{\beta}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{2n\pi}{Y_0}\right)^2 \right] - \frac{\beta^2}{\sigma} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{\beta x}{\sigma} + 2\sigma t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi y}{Y_0}\right) \right\} = \frac{\Gamma A^2}{8} \operatorname{sen}\left(\frac{\beta x}{\sigma} + 2\sigma t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi y}{Y_0}\right), \quad (39)$$

de donde

$$B = \frac{TA^2}{8 \left[ \frac{\beta^2}{\sigma} + 2\sigma \left( \frac{2n\pi}{Y_0} \right)^2 \right]}, \quad (40)$$

quedando completamente determinada  $\psi_{1_{pt}}$ . La solución particular transitoria presenta un desfase de  $90^\circ$  respecto al forzamiento, además de no satisfacer las condiciones a la frontera (al menos no en las fronteras meridionales), de aquí que  $\psi_{1_{pt}}$  debe ser complementada por una solución a la ecuación homogénea, requiriendo que ambas soluciones al ser sumadas satisfagan las condiciones de contorno.

#### IV.3.3 Solución Homogénea

La solución homogénea  $\psi_{1_h}$  satisface

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi_{1_h}}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi_{1_h}}{\partial x} = 0. \quad (41)$$

Nos interesa una solución de la ecuación (41), tal que

$$\psi_{1_h} + \psi_{1_{pt}} = 0 \text{ en } x=0, X_0 \text{ y } y=0, Y_0. \quad (42)$$

Proponemos como solución homogénea

$$\psi_{1_h} = \text{sen} \left( \frac{2n\pi y}{Y_0} \right) \Phi(x, t), \quad (43)$$

que al ser sustituida en (41) resulta una ecuación diferencial para  $\Phi(x, t)$

$$\partial_t \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \left( \frac{2n\pi}{Y_0} \right)^2 \Phi \right] + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0. \quad (44)$$

Para resolver (44) notamos que la onda forzada  $\psi_{1pt}$  tiene frecuencia  $2\sigma$  por lo que se sugiere que  $\Phi$  sea escrita como la superposición de dos OR planas de frecuencia  $2\sigma$  y que tome valores reales, i.e.

$$\Phi = ce^{i(k_1 x + 2\sigma t)} + c^* e^{-i(k_1 x + 2\sigma t)^*} + de^{i(k_2 x + 2\sigma t)} + d^* e^{-i(k_2 x + 2\sigma t)^*}, \quad (45)$$

donde  $c$  y  $d$  son constantes complejas y el asterisco denota el complejo conjugado (c.c.). La relación de dispersión que satisface cada onda es

$$2\sigma = \frac{\beta k}{k^2 + \left( \frac{2n\pi}{Y_0} \right)^2}; \quad (46)$$

de donde definimos  $k_1$  y  $k_2$  como las raíces de la ecuación cuadrática que resulta para  $k$  de (46)

$$k_1, k_2 = \frac{\beta}{4\sigma} \pm \sqrt{\left( \frac{\beta}{4\sigma} \right)^2 - \left( \frac{2n\pi}{Y_0} \right)^2}. \quad (47)$$

Para encontrar  $c$  y  $d$  aplicamos (42). Se tiene que

$$\psi_{1pt} + \psi_{1h} = \text{sen} \left( \frac{2n\pi y}{Y_0} \right) \left\{ B \cos \left( \frac{\beta x}{\sigma} + 2\sigma t \right) + ce^{i(\phi_1)} + c^* e^{-i(\phi_1)^*} + de^{i(\phi_2)} + d^* e^{-i(\phi_2)^*} \right\}, \quad (48)$$

donde  $\phi_i = k_i x + 2\sigma t$ ,  $i=1,2$ . Obviamente  $\psi_{1pt} + \psi_{1h} = 0$  en  $y=Y_0$  y en  $y=0$ , i.e. la condición a la frontera en las paredes zonales

se satisface. Sólo resta satisfacer la condición a la frontera en las paredes meridionales. Imponiendo  $\psi_{1pt} + \psi_{1h} = 0$  en  $x = 0$  resulta

$$\left\{ \frac{B}{2} + c + d \right\} e^{i2\sigma t} + \text{c.c.} = 0, \quad (49)$$

y haciendo uso de la propiedad de independendencia lineal de  $e^{i2\sigma t}$  y  $e^{-i2\sigma t}$  obtenemos la primera ecuación para  $c$  y  $d$

$$B + 2(c + d) = 0. \quad (50)$$

Imponiendo ahora  $\psi_{1pt} + \psi_{1h} = 0$  en  $x = X_0$  resulta

$$\left[ \frac{B e^{i \frac{\beta X_0}{\sigma}}}{2} + c e^{ik_1 X_0} + d e^{ik_2 X_0} \right] e^{i2\sigma t} + \text{c.c.} = 0, \quad (51)$$

y utilizando de nuevo la propiedad de independendencia lineal de  $e^{i2\sigma t}$  y  $e^{-i2\sigma t}$  se tiene

$$\frac{B e^{i \frac{\beta X_0}{\sigma}}}{2} + c e^{ik_1 X_0} + d e^{ik_2 X_0} = 0; \quad (52)$$

nuestra segunda ecuación, quedando completo nuestro sistema para determinar  $c$  y  $d$ . Despejando  $d$  de (50) y sustituyéndola en (52) obtenemos la expresión para  $c$ , de tal forma que

$$c = -\frac{B}{2} \left\{ \frac{e^{i \frac{\beta X_0}{\sigma}} - e^{ik_2 X_0}}{e^{ik_1 X_0} - e^{ik_2 X_0}} \right\}; \quad (53)$$

y por lo tanto  $d$  al igual queda determinada

$$d = -\frac{B}{2} \left\{ 1 - \left[ \frac{e^{i \frac{\beta X_0}{\sigma}} - e^{ik_2 X_0}}{e^{ik_1 X_0} - e^{ik_2 X_0}} \right] \right\}. \quad (54)$$

Sustituyendo  $c$  y  $d$  en (45) resulta

$$\Phi = -\frac{B}{2} \left\{ \frac{e^{i\frac{\beta X_0}{\sigma}} - e^{ik_2 X_0}}{e^{ik_1 X_0} - e^{ik_2 X_0}} \right\} [e^{i(k_1 x + 2\sigma t)} - e^{i(k_2 x + 2\sigma t)}] - \frac{B}{2} e^{i(k_2 x + 2\sigma t)} + \text{c.c.}, \quad (55)$$

Ahora regresemos a la expresión (47) para determinar  $k_1$  y  $k_2$ , que dependiendo del valor que tome el radicando  $R$  consta de tres casos:

- 1)  $R < 0 \Rightarrow k_1 = k_2^*$
- 2)  $R > 0 \Rightarrow k_1 \neq k_2$
- 3)  $R = 0 \Rightarrow k_1 = k_2$

Empezemos por el primer caso, definiendo

$$k_1 = \alpha + ib_1 \quad \text{y} \quad k_2 = \alpha - ib_1 \quad \text{donde} \quad \alpha = \frac{\beta}{4\sigma} \quad \text{y} \quad b_1 = \sqrt{-\left(\frac{\beta}{4\sigma}\right)^2 + \left(\frac{2n\pi}{Y_0}\right)^2},$$

reemplazando  $k_1$  y  $k_2$  en (55) por sus expresiones correspondientes en términos de  $\alpha$  y  $b_1$  y haciendo un poco de álgebra obtenemos la expresión de  $\Phi(x, t)$  para el caso  $k_1 = k_2^*$

$$\Phi(x, t) = -B \left\{ \frac{\sinh(b_1 x)}{\sinh(b_1 X_0)} \left[ \cos\left(\frac{\beta X_0}{\sigma} + 2\sigma t + \alpha(x - X_0)\right) - e^{b_1 X_0} \cos(2\sigma t + \alpha x) \right] \right\} - B e^{b_1 x} \cos(2\sigma t + \alpha x). \quad (56)$$

Hay que recordar que siendo nuestro dominio finito, el factor exponencial y el seno hiperbólico de  $b_1 x$  en  $\Phi(x, t)$  están acotados.

Para el segundo caso  $k_1 \neq k_2$  definimos

$$k_1 = \alpha + b_2 \quad \text{y} \quad k_2 = \alpha - b_2 \quad \text{donde} \quad b_2 = \sqrt{\left(\frac{\beta}{4\sigma}\right)^2 - \left(\frac{2n\pi}{Y_0}\right)^2}.$$

Sustituyendo  $k_1$  y  $k_2$  en (55) con sus expresiones en términos de  $a$  y  $b_2$  y de nueva cuenta haciendo un poco de álgebra se tiene:

$$\Phi(x, t) = -B \left\{ \frac{\text{sen } b_2 x}{\text{sen } b_2 X_0} \left[ \cos \left( \frac{\beta X_0}{\sigma} + 2\sigma t + a(x - X_0) \right) - \cos(2\sigma t - b_2 X_0 + a x) \right] \right\} - B \cos[(a - b_2)x + 2\sigma t]. \quad (57)$$

Siendo la expresión de  $\Phi$  cuando  $k_1 \neq k_2$ .

Para el tercer caso  $k_1 = k_2 = k$  la solución propuesta (45) es una solución incompleta, proporcional a  $e^{ikx}$ . La otra solución linealmente independiente en este caso es proporcional a  $x e^{ikx}$ , por lo que la solución es

$$\Phi(x, t) = g e^{i(kx+2\sigma t)} + g^* e^{-i(kx+2\sigma t)} + x h e^{i(kx+2\sigma t)} + x h^* e^{-i(kx+2\sigma t)}, \quad (58)$$

así la suma de la solución particular transitoria con la solución homogénea cuando  $R=0$  es:

$$\psi_{1pt} + \psi_{1h} =$$

$$\text{sen} \left( \frac{2n\pi y}{Y_0} \right) \left\{ B \cos \left( \frac{\beta x}{\sigma} + 2\sigma t \right) + [g e^{i\phi} + g^* e^{-i\phi} + x h e^{i\phi} + x h^* e^{-i\phi}] \right\}, \quad (59)$$

donde  $\phi = kx + 2\sigma t$ . De nueva cuenta para obtener las constantes  $g$  y  $h$  se impone  $\psi_{1pt} + \psi_{1h} = 0$  en  $x=0$  y en  $x=X_0$ , resultando un sistema de dos ecuaciones, cuya solución es

$$g = -\frac{B}{2} \quad y \quad h = -\frac{B}{2X_0} \left[ e^{i \left( \frac{\beta X_0}{\sigma} - k X_0 \right)} - 1 \right].$$

Sustituyendo  $g$  y  $h$  en (58) resulta finalmente la expresión de  $\Phi$  para el caso  $k_1 = k_2 = k$

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= -\frac{B}{2} e^{i(kx+2\sigma t)} - \frac{xB}{2X_0} \left[ e^{i\left(\frac{\beta X_0}{\sigma} - kX_0\right)} - 1 \right] e^{i(kx+2\sigma t)} + \text{c.c.} \\ &= -B \cos(\alpha x + 2\sigma t) - \frac{xB}{X_0} \left[ \cos\left(\frac{\beta X_0}{\sigma} + \alpha(x - X_0) + 2\sigma t\right) - \cos(\alpha x + 2\sigma t) \right]. \quad (60) \end{aligned}$$

Sustituyendo la relación de dispersión (19) en el radicando  $R$  para los tres casos, las desigualdades que resultan ( $R < 0$ ,  $R > 0$ , y  $R = 0$ ) son función sólo de las dimensiones de la cuenca  $X_0$  y  $Y_0$  al considerar el caso  $m = n$ .

El primer caso ( $k_1 = k_2^*$ ) sólo ocurre si se satisface la siguiente desigualdad

$$Y_0 < \sqrt{15} X_0.$$

Para el caso  $k_1 \neq k_2$ ,  $R$  tiene que ser mayor que cero implicando que

$$Y_0 > \sqrt{15} X_0,$$

y por último, para el extraordinario caso de  $k_1 = k_2$  se tiene que cumplir

$$Y_0 = \sqrt{15} X_0.$$

Ahora bien, cabe la pregunta ¿Cuál de los tres casos es el apropiado? Matemáticamente no hay restricción alguna, los tres casos son viables, por lo que el único criterio que se tiene es el de las dimensiones de la cuenca. Al ver el Globo Terráqueo nos damos cuenta que las grandes cuencas como el Pacífico Norte, el Océano Indico o el Atlántico Norte en las que se tienen registros de ondas planetarias, las cuencas resultan ser más

largas que anchas ( $Y_0 < X_0$ ) o al menos con dimensiones similares. Por lo tanto el primer caso,  $R < 0$ , es el más relevante desde el punto de vista oceanográfico (para  $m = n$ ).

Finalmente la expresión a la solución homogénea considerando

$k_1 = k_2^*$  es:

$$\Psi_{1h} = -B \operatorname{sen} \left( \frac{2n\pi y}{Y_0} \right) \left\{ \frac{\operatorname{senh} b_1 x}{\operatorname{senh} b_1 X_0} \left[ \cos \left( \frac{\beta X_0}{\sigma} + 2\sigma t + a(x - X_0) \right) - e^{b_1 X_0} \cos(2\sigma t + ax) \right] + e^{b_1 x} \cos(2\sigma t + ax) \right\}. \quad (61)$$

Por último la solución a primer orden se consigue al sumar (34), (38) y (61) i.e.

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \Psi_{1pe} + \Psi_{1pt} + \Psi_{1h} \\ &= \frac{EA^2 X_0}{16\beta n\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{2n\pi y}{Y_0} \right) \left[ \cos \left( \frac{2m\pi x}{X_0} \right) - 1 \right] + \\ &\quad B \operatorname{sen} \left( \frac{2n\pi y}{Y_0} \right) \cos \left( \frac{\beta x}{\sigma} + 2\sigma t \right) - \\ &\quad B \operatorname{sen} \left( \frac{2n\pi y}{Y_0} \right) \left\{ \frac{\operatorname{senh} b_1 x}{\operatorname{senh} b_1 X_0} \left[ \cos \left( \frac{\beta X_0}{\sigma} + 2\sigma t + a(x - X_0) \right) - e^{b_1 X_0} \cos(2\sigma t + ax) \right] + \right. \\ &\quad \left. e^{b_1 x} \cos(2\sigma t + ax) \right\}. \end{aligned} \quad (62)$$

## V. CONTORNOS DE LA SOLUCION A ORDEN LIDER Y PRIMER ORDEN

En esta sección se presentan los contornos de la solución al problema a orden cero y a primer orden. Las dimensiones de la cuenca que se ha escogido es de 7000 km de largo por 3500 km de ancho centrada en los 45° latitud norte. La amplitud  $A$  de la función corriente al problema lineal es de  $7.0 \times 10^5 \text{ m}^2/\text{s}$ , que corresponde a una velocidad máxima geostrófica alrededor de 45 cm/s.

La solución a orden lider es sumamente regular, el campo de  $\psi_0$  presenta la deriva de los centros de alta y baja presión dirigiéndose hacia el oeste, representando giros anticiclónicos y ciclónicos respectivamente, alternándose para una misma área al transcurrir medio periodo de tiempo. El periodo de oscilación del modo normal de Rossby es dado por  $T = \frac{2\pi}{|\sigma|}$ , el cual para la cuenca anteriormente descrita es de 9.017 días considerando  $m = n = 1$ , ver figura 5.

La solución perturbativa a primer orden es proporcional al cuadrado de la amplitud  $A$  e inversamente proporcional a las dimensiones de la cuenca; para amplitudes pequeñas y para cuencas grandes como el Pacífico y el Atlántico norte la contribución que tiene la solución a primer orden es casi imperceptible; por el contrario, para amplitudes grandes y cuencas relativamente pequeñas la solución a primer orden tiene un peso considerable.

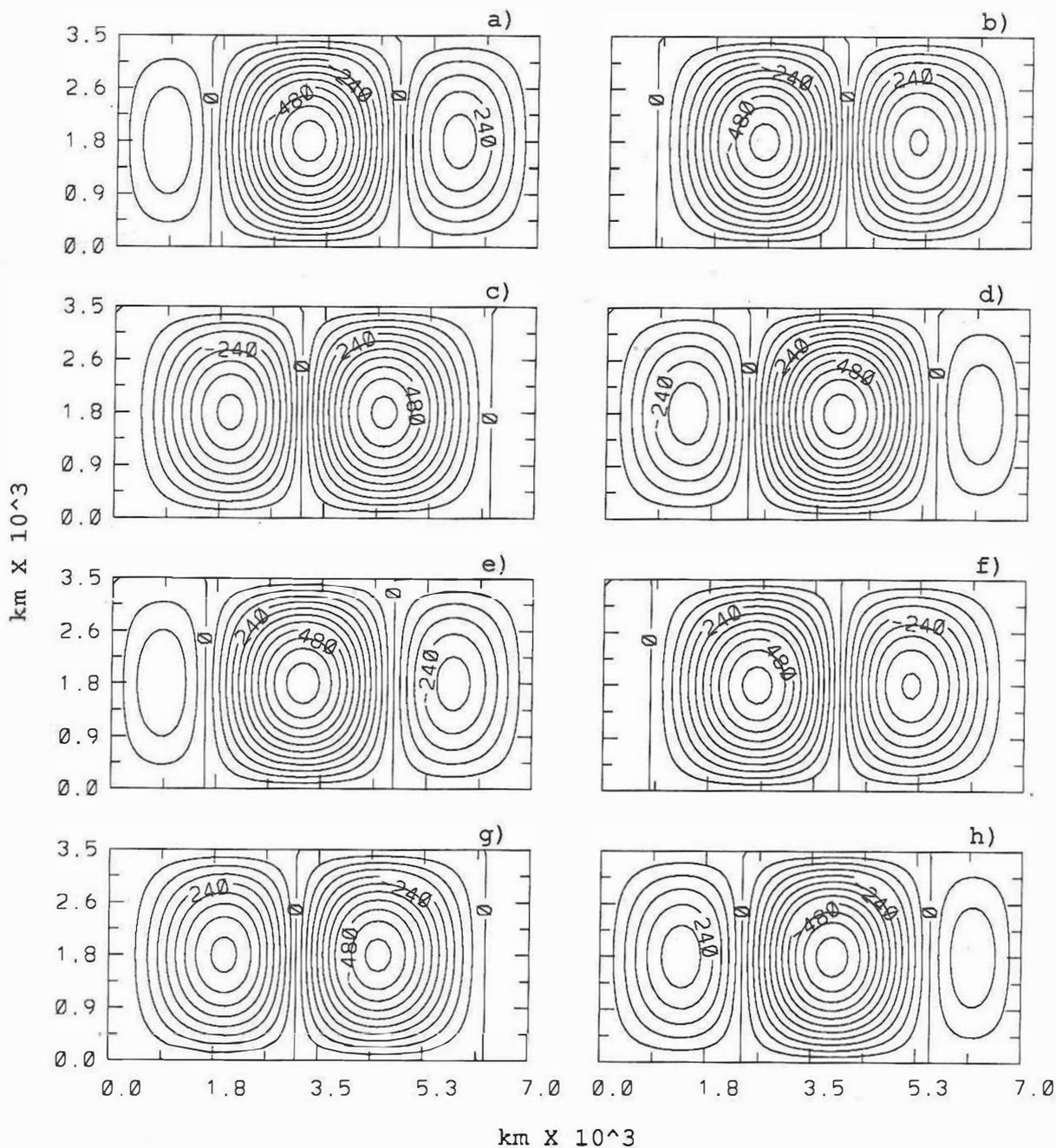


Figura 5: Contornos instantáneos de  $\psi_0$  separados por un octavo de periodo: a)  $\psi_0(t=0)$ ; b)  $\psi_0(t=T/8)$ ; c)  $\psi_0(t=2T/8)$ ; d)  $\psi_0(t=3T/8)$ ; etc, etc. Los giros derivan hacia occidente. Parámetros:  $m=n=1$ ,  $A=7.0 \times 10^5 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $T=9.017$  días,  $\theta_0=45^\circ$  latitud norte,  $X_0=7000 \text{ km}$  y  $Y_0=3500 \text{ km}$ .

La contribución que aporta la solución transitoria más la solución homogénea a  $\psi_1$  es mínima, ya que sus amplitudes son mucho menores que la amplitud de la solución particular estacionaria. La razón entre las amplitudes de  $\psi_{1pe}$  y  $\psi_{1pt}$  es expresada por:

$$\frac{A_{pe}}{B} = 1 + 3 \left( \frac{nX_0}{mY_0} \right)^2 > 1; \quad (63)$$

que para nuestro caso y en general para las razones  $\frac{X_0}{Y_0} = 2$  con  $n = m$  resulta ser igual a 13 (figura 6). La expresión (63) nos indica que el cociente entre estas amplitudes es mayor a 1; es decir, que entre las soluciones que conforman la solución a primer orden, la que tiene mayor importancia es la solución particular estacionaria.

El efecto que producen  $\psi_{1pt}$  y  $\psi_{1h}$  a la solución a primer orden es el alargamiento y encogimiento de los dos giros de la solución estacionaria a intervalos de  $T/4$ , además de recorrer ligeramente los centros de baja y alta presión (figura 7, comparar con fig. 2).

La suma de  $\psi_0 + \psi_1$  produce la compresión (expansión) del giro ciclónico (anticiclónico) en la parte superior de la cuenca, experimentando el efecto contrario la parte inferior, dando la sensación que los giros se "bambolean" conforme transcurre el tiempo. Este efecto es mucho más notorio conforme se incrementa

la magnitud de  $A$ , ya que los términos advectivos tienen mayor importancia. En la figura 8 apenas se alcanza a distinguir este efecto.

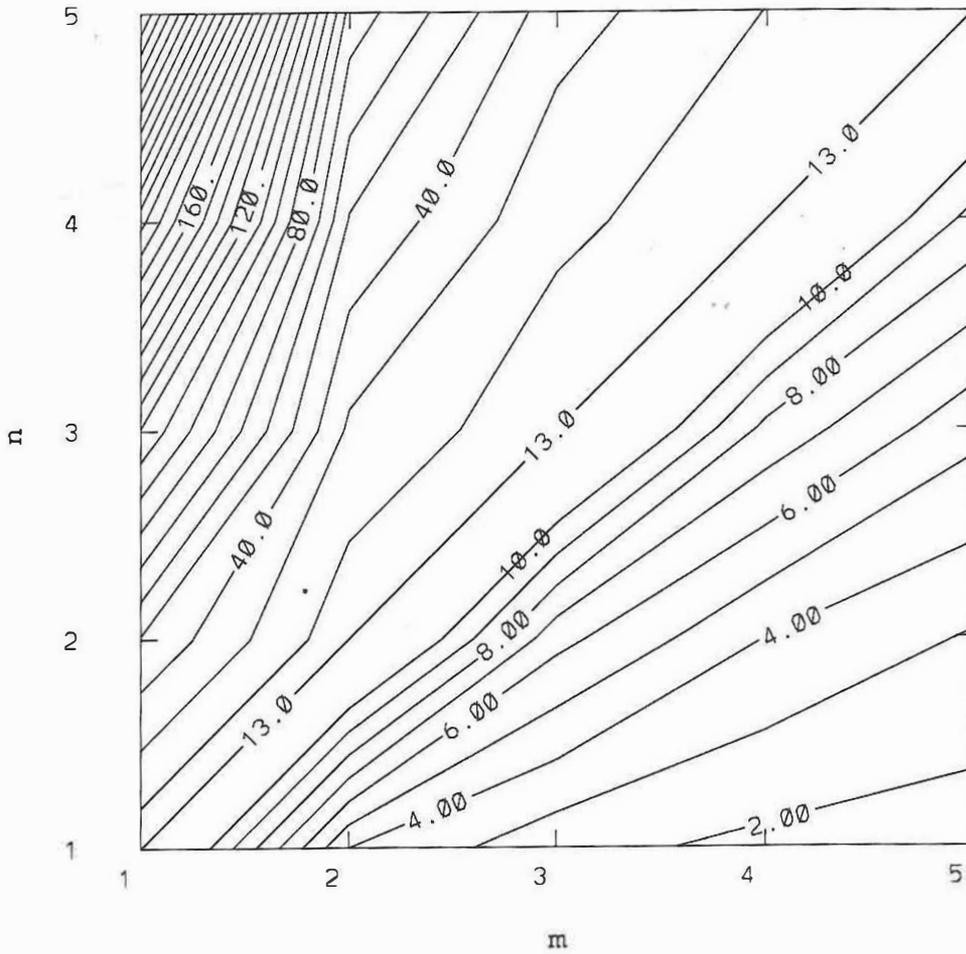


Figura 6: Razón entre las amplitudes de  $\psi_{1_{pe}}$  y  $\psi_{1_{pt}}$  como función de  $m$  y  $n$ , para cuencas tales que  $X_0/Y_0=2$ .

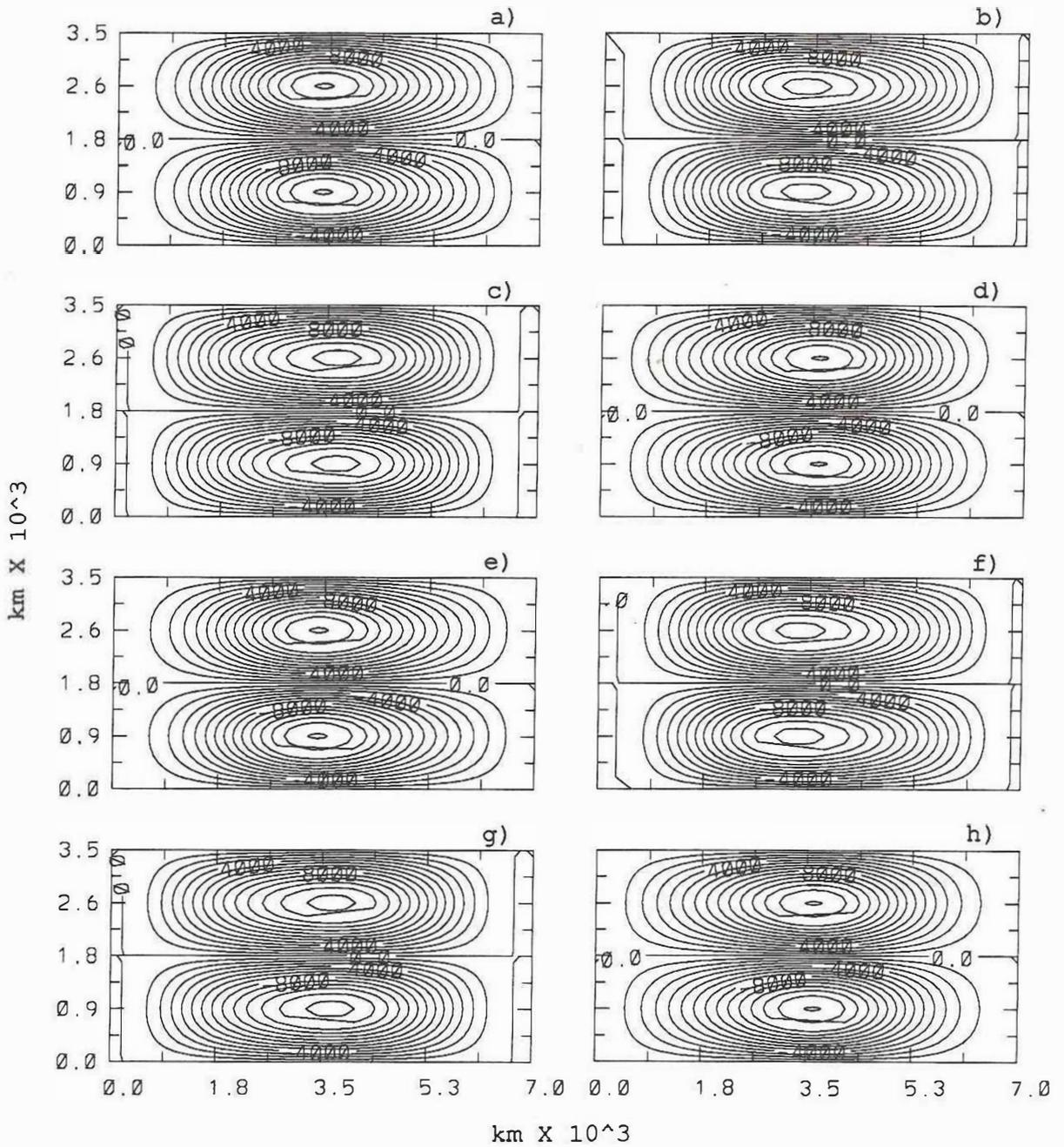


Figura 7: Contornos instantáneos de  $\psi_1$ , separados por un octavo de periodo  $T$ : a)  $\psi_1(t=0)$ ; b)  $\psi_1(t=T/8)$ ; c)  $\psi_1(t=2T/8)$ ; d)  $\psi_1(t=3T/8)$ ; etc, etc. Parámetros como en Figura 5.

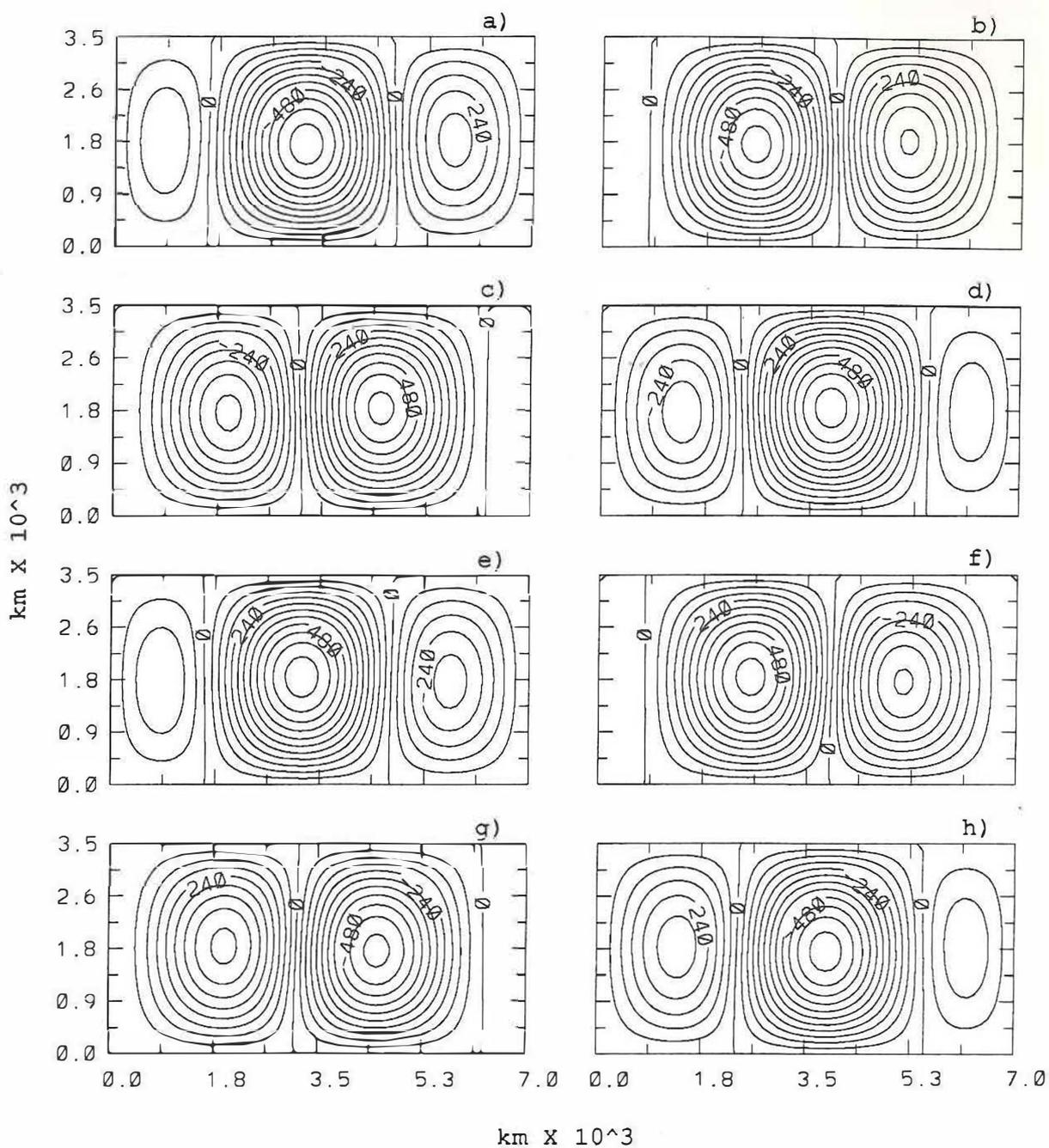


Figura 8: Contornos instantáneos de  $\psi_0 + \psi_1$  separados por un octavo de periodo  $T$ : a)  $\psi_0 + \psi_1(t=0)$ ; b)  $\psi_0 + \psi_1(t=T/8)$ ; c)  $\psi_0 + \psi_1(t=2T/8)$ ; d)  $\psi_0 + \psi_1(t=3T/8)$ ; etc, etc. Parámetros como en Figura 5.

## VI. MODELO NUMERICO

### VI.1 Descripción del modelo numérico

El modelo está formulado para resolver la EVPCG en coordenadas cartesianas en un océano caja. La aproximación en diferencias finitas de segundo orden es empleada en la ecuación diferencial (1) con condiciones a la frontera  $\psi = 0$  @  $x = 0, X_0$  y  $y = 0, Y_0$  y condición inicial  $\psi(t=0)$ . La función corriente se define en una malla regular bidimensional con espaciamento uniforme en ambas direcciones, es decir  $\Delta x = \Delta y = \Delta s$  el cual depende de lo largo del dominio. El operador Jacobiano es evaluado usando la formulación de Arakawa (1976), manteniendo la propiedad de

$$J(a,b) = -J(b,a).$$

La ecuación de Poisson para la función corriente al tiempo  $+1$  se obtiene al tomar el esquema de "salto de rana". La versión en diferencias finitas de la ecuación de Poisson con condiciones a la frontera es solucionada por la subrutina "Crunch", la cual vía la transformada de Fourier en la dirección  $x$  transforma una ecuación diferencial parcial en una ecuación diferencial ordinaria en la dirección  $y$ , que a su vez es resuelta al discretizar un sistema tridiagonal de ecuaciones algebraicas (ver diagrama de flujo).

## VI. MODELO NUMERICO

### VI.1 Descripción del modelo numérico

El modelo está formulado para resolver la EVPCG en coordenadas cartesianas en un océano caja. La aproximación en diferencias finitas de segundo orden es empleada en la ecuación diferencial (1) con condiciones a la frontera  $\psi = 0$  @  $x = 0, X_0$  y  $y = 0, Y_0$  y condición inicial  $\psi(t=0)$ . La función corriente se define en una malla regular bidimensional con espaciamiento uniforme en ambas direcciones, es decir  $\Delta x = \Delta y = \Delta s$  el cual depende de lo largo del dominio. El operador Jacobiano es evaluado usando la formulación de Arakawa (1976), manteniendo la propiedad de

$$J(a,b) = -J(b,a).$$

La ecuación de Poisson para la función corriente al tiempo +1 se obtiene al tomar el esquema de "salto de rana". La versión en diferencias finitas de la ecuación de Poisson con condiciones a la frontera es solucionada por la subrutina "Crunch", la cual vía la transformada de Fourier en la dirección  $x$  transforma una ecuación diferencial parcial en una ecuación diferencial ordinaria en la dirección  $y$ , que a su vez es resuelta al discretizar un sistema tridiagonal de ecuaciones algebraicas (ver diagrama de flujo).

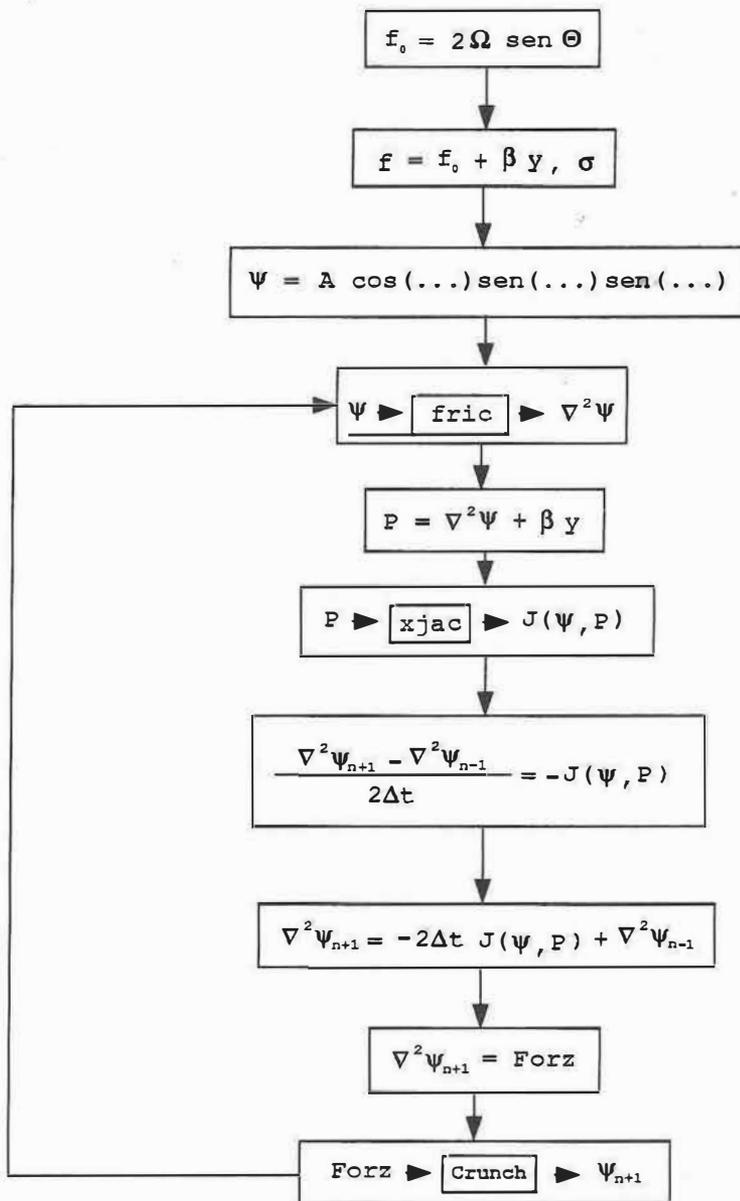


Diagrama de flujo. Las principales subrutinas del modelo numérico como fric, xjac y crunch, están enmarcadas.

## VI.2 Problema lineal numérico

El planteamiento al problema lineal numérico se consigue al omitir el operador Jacobiano de la ecuación (1) (al igual que el planteamiento analítico). A diferencia del problema analítico, el problema numérico requiere de una condición inicial. Se sugiere que  $\psi_{num}$  (función corriente numérica) al tiempo  $t=0$  tiene que ser igual a  $\psi_{ana}$  (solución analítica) i.e.

$$\psi_{num} |_{t=0} = \psi_{ana} |_{t=0}$$

¿Por qué escoger esta condición inicial? Ambos planteamientos resuelven la misma ecuación y es de esperarse que si  $\psi_{ana}$  es solución al problema analítico (que es un problema de valor a la frontera), también lo sea para el problema numérico (que además de ser un problema de valor a la frontera es un problema de valor inicial), esperando que deriven los centros de alta y baja presión conforme avanza el tiempo de integración.

## VI.3 Problema alineal numérico

El problema alineal se consigue al considerar la vorticidad relativa y la vorticidad planetaria en el operador Jacobiano en la ecuación (1), i.e. se toman en cuenta los términos advectivos. Al igual que el problema lineal, se tiene un problema de valor inicial con condiciones de contorno. Hay que subrayar que la condición inicial (que es solución del problema analítico)

en ambos planteamientos no es solución exacta del problema numérico, debido a la discretización que presenta el modelo; por esta razón esperamos que se presente un ajuste de la solución numérica conforme transcurre el tiempo de integración (entiéndase como ajuste de la solución numérica, al intervalo de tiempo en el que la condición inicial deja de tener inferencia con la solución que arroja el modelo, éste ajuste se dará a partir de que el modelo haya integrado la EVPCG por lo menos en un periodo de tiempo  $T$ ).

#### VI.4 Resultados del problema numérico lineal y alineal

En esta sección se presentan los contornos de la solución al problema numérico lineal y alineal. Los parámetros de la cuenca son iguales a los referidos en el capítulo V. El campo de la función corriente lineal ( $\psi_{lin}$ ) presenta, al igual que la solución analítica a orden líder, la deriva de los centros de alta y baja presión dirigiéndose hacia occidente, representando giros anticiclónicos y ciclónicos respectivamente. El periodo de oscilación del modo de Rossby, que es igual al periodo de cualquiera de las cuatro OR que lo conforman, difiere en menos del 9 % del que se ha calculado analíticamente. Esto es notorio al dibujar los contornos de la función corriente en un periodo de tiempo analítico  $T$ , mostrando un ligero desfase (ver figura 9). El retraso que se observa (comparar fig. 9-a con fig. 9-e) lo podemos atribuir a que la relación de dispersión de las OR

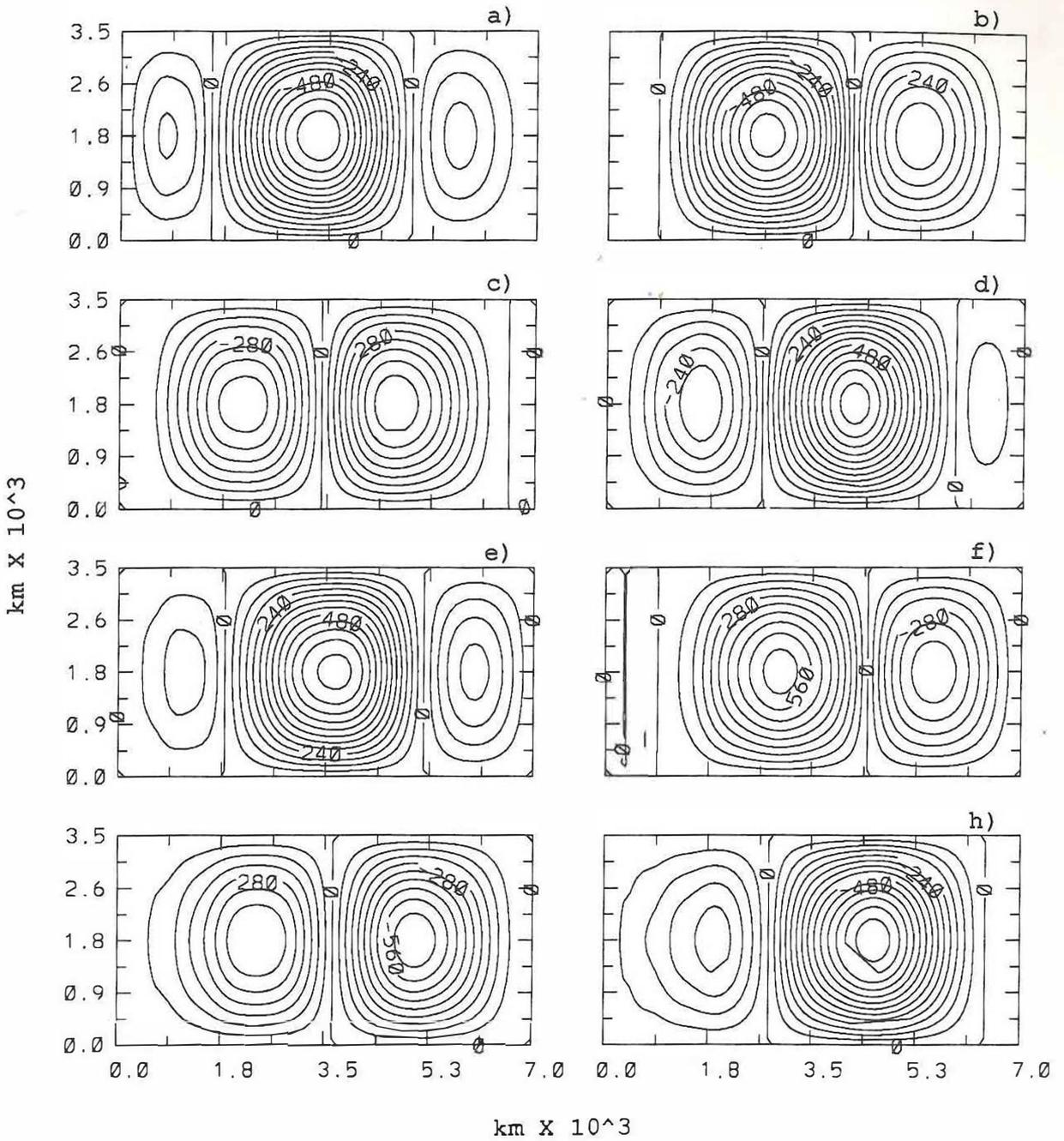


Figura 9: Contornos instantáneos de  $\psi_{lin}$  (obtenidos numéricamente) separados por un octavo de periodo analítico  $T$  a partir del décimo periodo analítico: a)  $\psi_{lin}(t=10T)$ ; b)  $\psi_{lin}(t=(10+1/8)T)$ ; c)  $\psi_{lin}(t=(10+2/8)T)$ ; d)  $\psi_{lin}(t=(10+3/8)T)$ ; etc, etc. Parámetros como en Figura 5.

que se obtiene de forma analítica y de forma numérica difieren, y por tanto también su rapidez de fase (en este caso la frecuencia numérica es menor que la analítica).

Wajsowicz (1985) presenta el efecto de discretizar la relación de dispersión de las ondas planetarias en las mallas Arakawa tipo B y C, encontrando que para la malla B la frecuencia y la rapidez de fase es menor comparada con la que se obtiene de forma analítica. Esta diferencia básicamente depende del tipo de malla, de la resolución de la misma y de la longitud de onda que se quiere modelar: para mallas con "buena" resolución y para ondas muy largas la diferencia entre ambas relaciones de dispersión es imperceptible.

El campo de la función corriente alineal ( $\psi_{alín}$ ) (figura 10), muestra la deriva hacia occidente de los giros ciclónicos y anticiclónicos, presentándose más claramente el efecto de "bamboleo" en los giros. En el caso lineal y alineal numérico, los giros que arriban a la frontera occidental presentan una ligera deformación, producto de la posible generación de ondas cortas de Rossby. Wajsowicz (1985) sugiere que la frontera occidental en su modelo numérico es fuente de ondas planetarias cortas, pero pobremente resueltas, cuya velocidad de grupo se dirige hacia oriente.

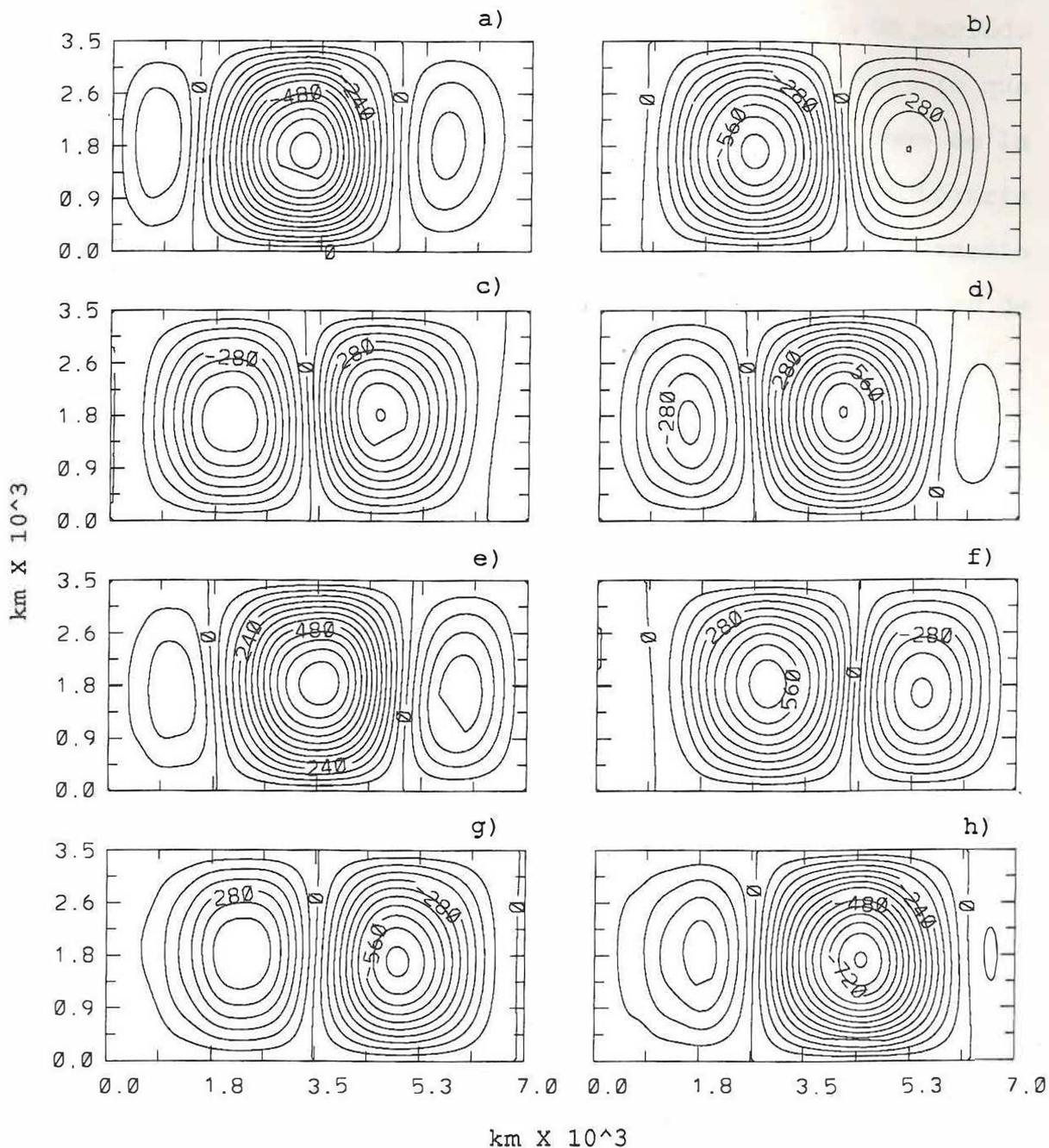


Figura 10: Contornos instantáneos de  $\psi_{au}$  (obtenidos numéricamente) separados por un octavo de periodo analítico  $T$  a partir del décimo periodo analítico: a)  $\psi_{au}(t=10T)$ ; b)  $\psi_{au}(t=(10+1/8)T)$ ; c)  $\psi_{au}(t=(10+2/8)T)$ ; d)  $\psi_{au}(t=(10+3/8)T)$ ; etc, etc. Parámetros como en Figura 5.

Al promediar la función corriente de la cuenca en un periodo de tiempo  $T$  en el modelo numérico para el caso alineal, lo que se pretende recuperar es la señal estacionaria. Sabemos de la solución analítica a primer orden que la parte estacionaria consiste de dos giros. En la figura 11 se presenta el promedio de la función corriente para el caso alineal con intervalos de  $T/4$  a partir del décimo periodo  $T$ . Para los tiempos de  $10T$  y  $11T$  (figuras 11-a y 11-e respectivamente) se puede distinguir en la cuenca la presencia de dos giros: uno en la parte superior con circulación anticiclónica y otro en la parte inferior con circulación ciclónica, mostrando gran semejanza a los giros que muestra la solución particular estacionaria (fig. 2).

#### VI.5 Solución analítica vs. solución numérica

Uno de los objetivos de este trabajo es el determinar hasta qué punto la solución a primer orden de la EVPCG es válida respecto a los resultados que se obtienen por medio del modelo numérico. Para cumplir con este objetivo se calculó el cociente de la raíz cuadrática media (RCM) entre los campos de la función corriente ( $\psi_0 + \psi_1$ ) y el campo de la función corriente alineal que arroja el modelo numérico, para los tiempos  $t=0$  y  $t=4T$ , respectivamente.

En la figura 12 se muestra la gráfica del cociente de las RCM para diferentes valores del número  $\beta$ -Rossby,  $\epsilon$  el cual nos indica la importancia relativa entre los términos lineales y

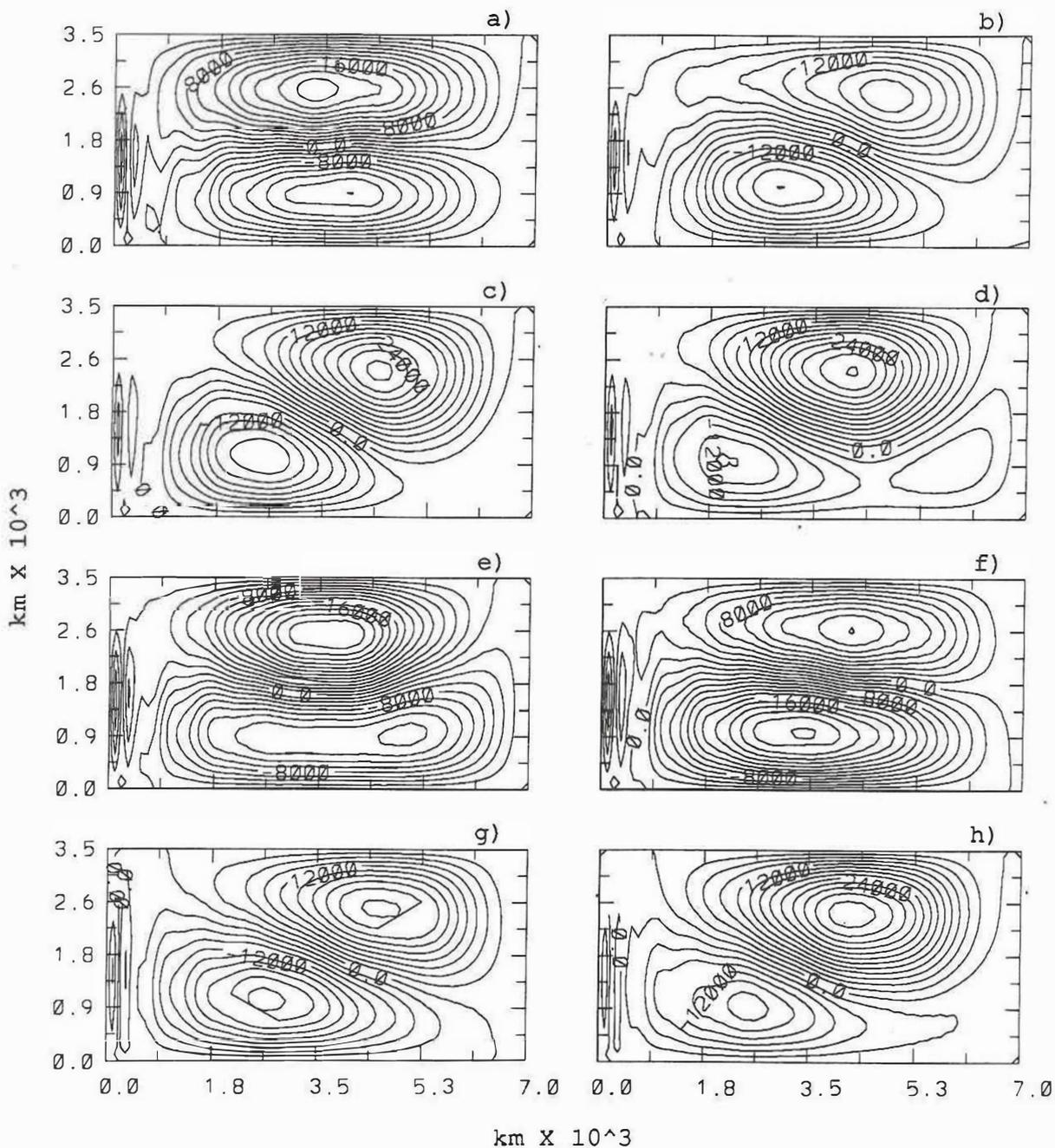


Figura 11: Promedio instantáneo de  $\psi_{ali}$  (obtenidos numéricamente) a partir del décimo periodo  $T$ , separados un cuarto de periodo analítico: a)  $\bar{\psi}_{ali}(t=10T)$ ; b)  $\bar{\psi}_{ali}(t=(10+1/4)T)$ ; c)  $\bar{\psi}_{ali}(t=(10+2/4)T)$ ; d)  $\bar{\psi}_{ali}(t=(10+3/4)T)$ ; etc, etc. Parámetros como en Figura 5.

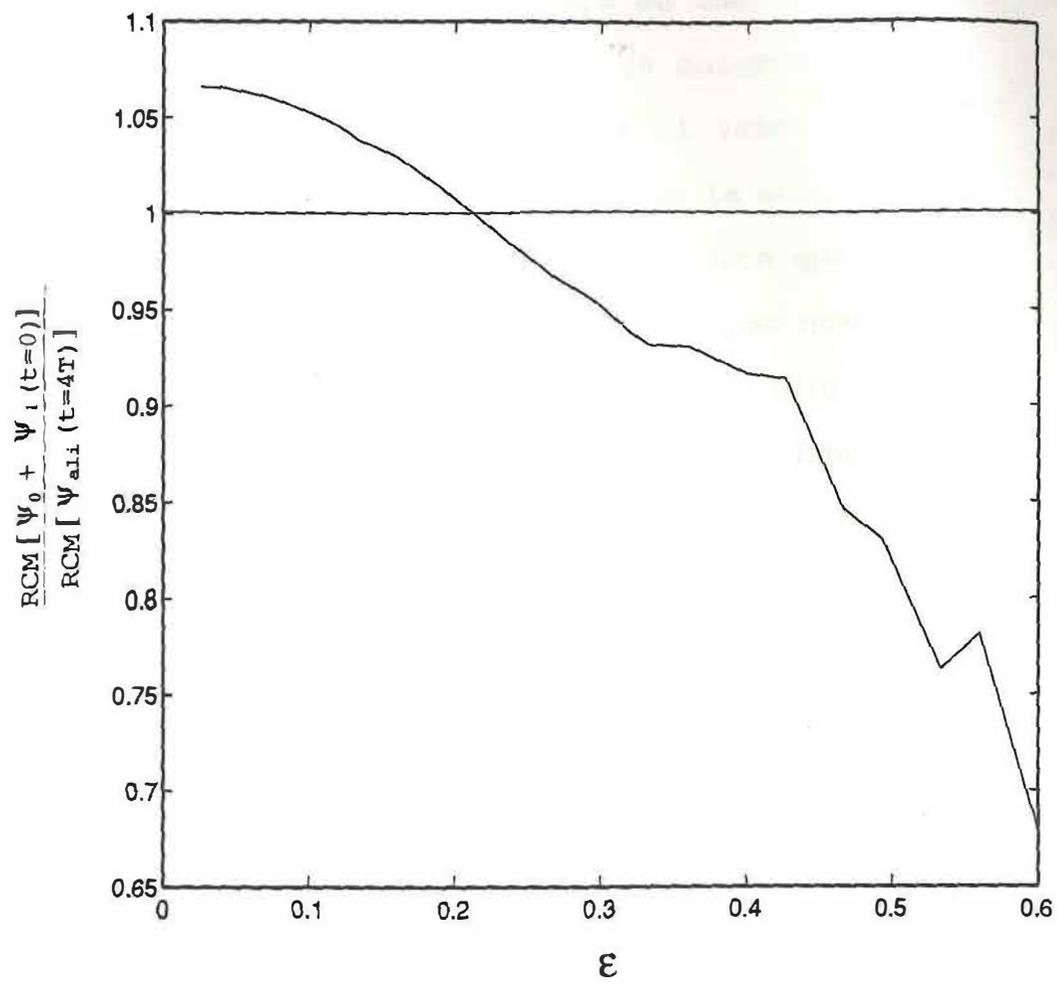


Figura 12: Razón entre la RCM de  $(\psi_0 + \psi_1)$  al tiempo  $t = 0$  y la RCM de  $\psi_{ali}$  al tiempo  $4T$  en función de  $\epsilon$ , parámetros como en Figura 3.

los términos advectivos de la EVPCG, para una cuenca de 1000 km por 500 km centrada en los 32° latitud norte, se define como

$$\epsilon = \frac{|\vec{U}|_{\max}}{\beta L^2}$$

donde  $L = \min\left(\frac{x_0}{\pi}, \frac{y_0}{\pi}\right)$ . Para  $\epsilon$  relativamente pequeños, entre 0.026 y 0.26 el cociente se mantiene cerca de uno, indicándonos que la solución analítica se aproxima a la solución numérica; por el contrario, conforme se incrementa el valor de  $\epsilon$ , la razón de las RCM se aleja de uno, indicando que la solución analítica pierde validez. Por otra parte, la variación que existe entre la razón de las RCM es menor al 10 % para los números  $\beta$ -Rossby entre 0.026 y 0.426, mostrando que la solución perturbativa dentro de este rango resulta bastante buena. Hay que recordar que al aumentar la amplitud los términos alineales adquieren mayor importancia, perdiendo  $\psi_1$  el carácter de solución perturbativa.

Otro criterio para seleccionar  $L$  en el número  $\beta$ -Rossby pudo ser  $L = \frac{\pi}{2\{\max(|\vec{K}_1|, |\vec{K}_2|)\}}$  que es la mínima longitud de onda de las ondas que forman el modo dividida entre cuatro. Con esta  $L$  y para el caso de la figura 12,  $\epsilon$  es menor por un factor de alrededor de tres respecto al primer criterio; no obstante, ambas selecciones de  $L$  mantienen a  $\epsilon$  dentro del mismo orden.

En la figura 13 se muestran los contornos de la función corriente para el caso alineal analítico y numérico (figuras 13-a y 13-b respectivamente), para una cuenca de 1000 por 500

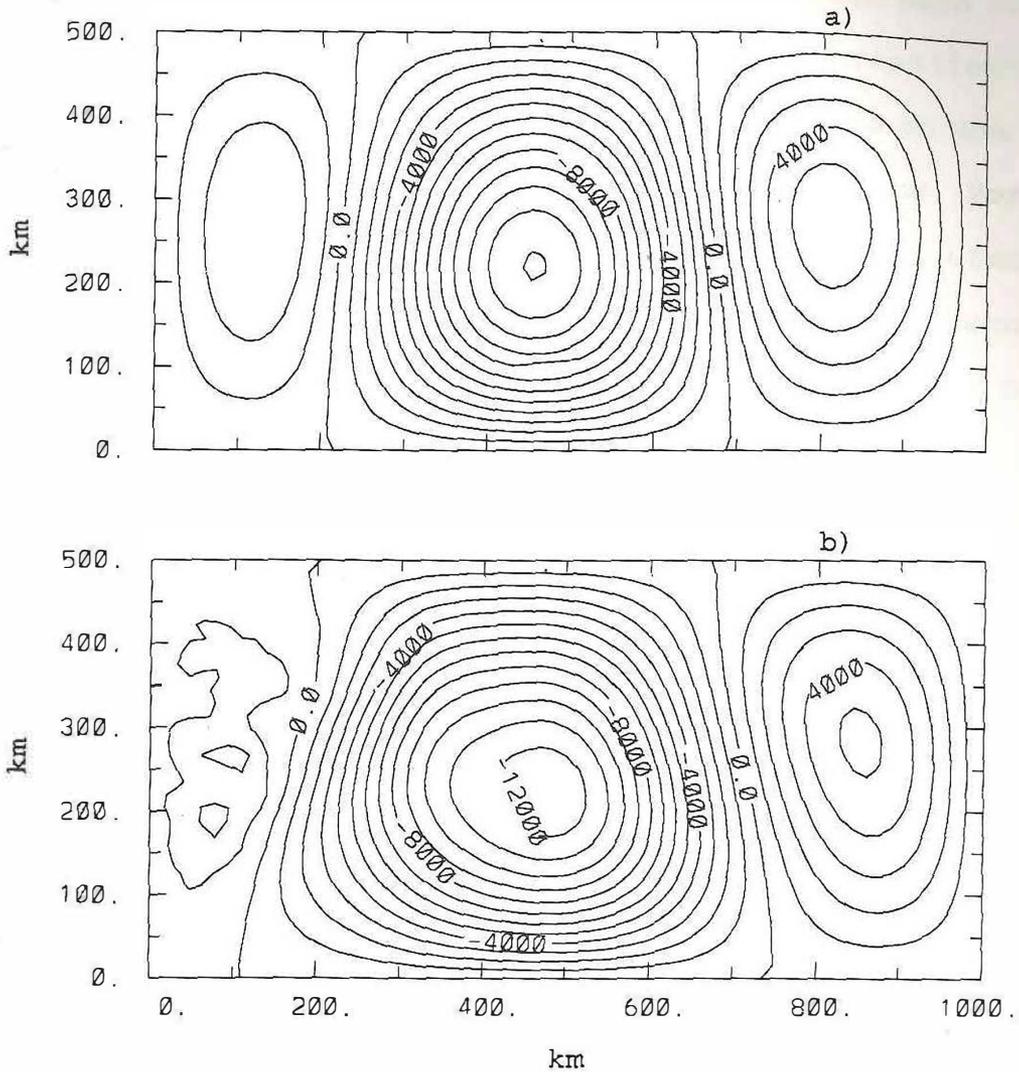


Figura 13: a) contornos de  $\psi_0 + \psi_1$  en  $t=0$ ; b) contornos de  $\psi_{ali}$  en  $t=8T$ , para una cuenca de  $X_0=1000$  km y  $Y_0=500$  km, con  $A=12000$  m<sup>2</sup>/s, centrada en los 32° de latitud.

km centrada en los  $32^\circ$  latitud norte y con amplitud  $A$  de 12000  $m^2/s$ , que corresponde a una velocidad máxima geostrófica de 9 cm/s. Como se puede apreciar los términos alineales para cuencas relativamente pequeñas tienen un papel más sobresaliente que para cuencas grandes, siendo notorio al deformarse en una forma más acentuada los giros ciclónicos y anticiclónicos. Por otra parte en el caso numérico claramente se distingue el efecto de la frontera occidental, la cual presumiblemente es fuente de ondas cortas de Rossby, para las cuales el modelo no cuenta con una resolución suficiente.

#### VI.6 Reflexión de ondas de Rossby en una pared no zonal

El interés en estudiar la reflexión de las OR que inciden en una pared por medio de un modelo numérico CG surge a raíz de determinar la estabilidad del flujo estacionario paralelo a la costa que reporta Mysak y Magaard (1983) y Graef (1990), producto de la interacción alineal de la OR que incide en una pared no zonal con la onda que refleja.

Para cubrir este punto se hicieron algunas modificaciones al modelo numérico antes descrito, consistiendo básicamente en expresar el término  $\beta y$  del parámetro de Coriolis en el sistema de coordenadas  $(x', y')$  rotado respecto a los ejes  $x$  y  $y$ , en el cual  $x'$  es paralelo y  $y'$  es perpendicular a la costa. Así  $\beta y$

se expresa en este sistema coordenado como  $\beta(-x' \text{sen } \alpha + y' \text{cos } \alpha)$ , donde  $\alpha$  es el ángulo que forma la costa con el eje  $x$  (positivo en la dirección de las manecillas del reloj).

Por otra parte las condiciones a la frontera y la condición inicial que requiere el problema de la reflexión de las OR en una costa o pared son diferentes a las que necesita el problema de los modos normales, siendo necesario implementar para el primero tres fronteras abiertas y una cerrada (la pared), con una condición inicial que sea la superposición de una onda incidente y la onda reflejada definidas en todo el dominio. Desafortunadamente no se logró la implementación de las fronteras abiertas y así evitar el efecto de reflexión que se produciría al incidir las OR en las otras tres paredes. Por ello, y para tratar de estudiar la reflexión en una pared, se decidió ampliar el dominio computacional, consistiendo este en una región de alrededor de 50000 km a lo largo del eje  $x'$  y de 12000 km en el eje  $y'$ , interesándonos tan sólo en una pequeña "ventana", ésta con dimensiones de  $2\pi/k$  a lo largo del eje  $x'$ , ahí centrada y de  $2\pi/\min(l_1, l_2)$  en el eje  $y'$  a partir de la costa, donde  $(k, l_1)$  y  $(k, l_2)$  son las componentes  $(x', y')$  del vector número de onda de la OR incidente y reflejada, respectivamente (ver figura 14).

En la figura 15 se presentan los contornos en la "ventana" de la función corriente ( $\psi_1$ ) para una condición inicial que es

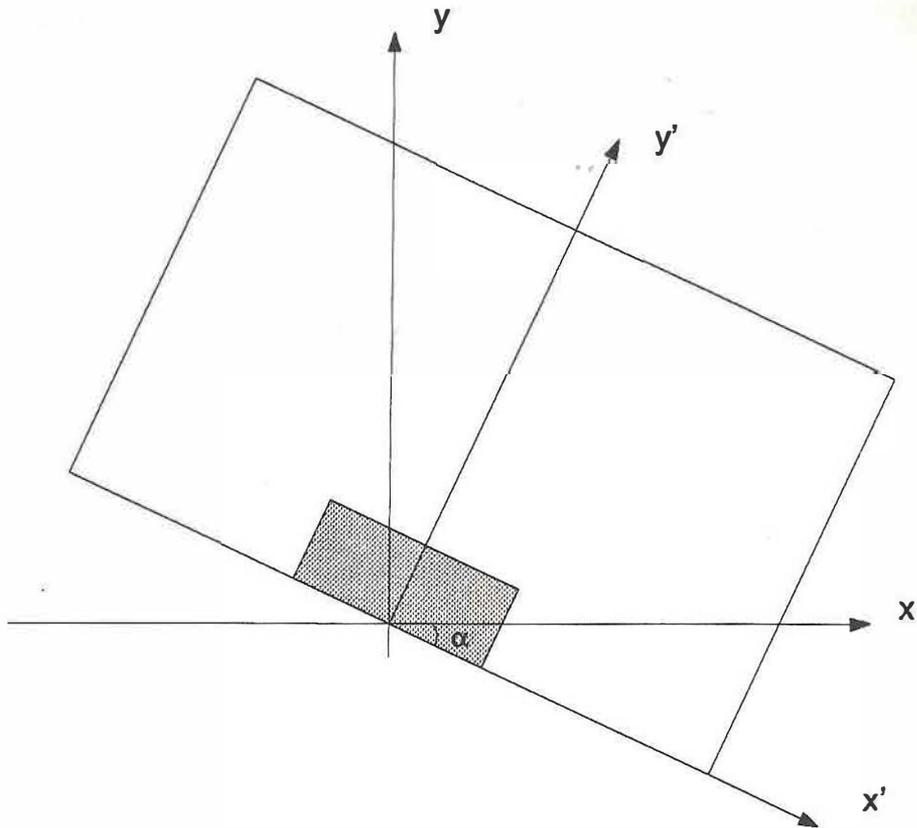


Figura 14: Esquema de la cuenca rotada para el problema de reflexión de OR incidente y reflejada en una pared no zonal.

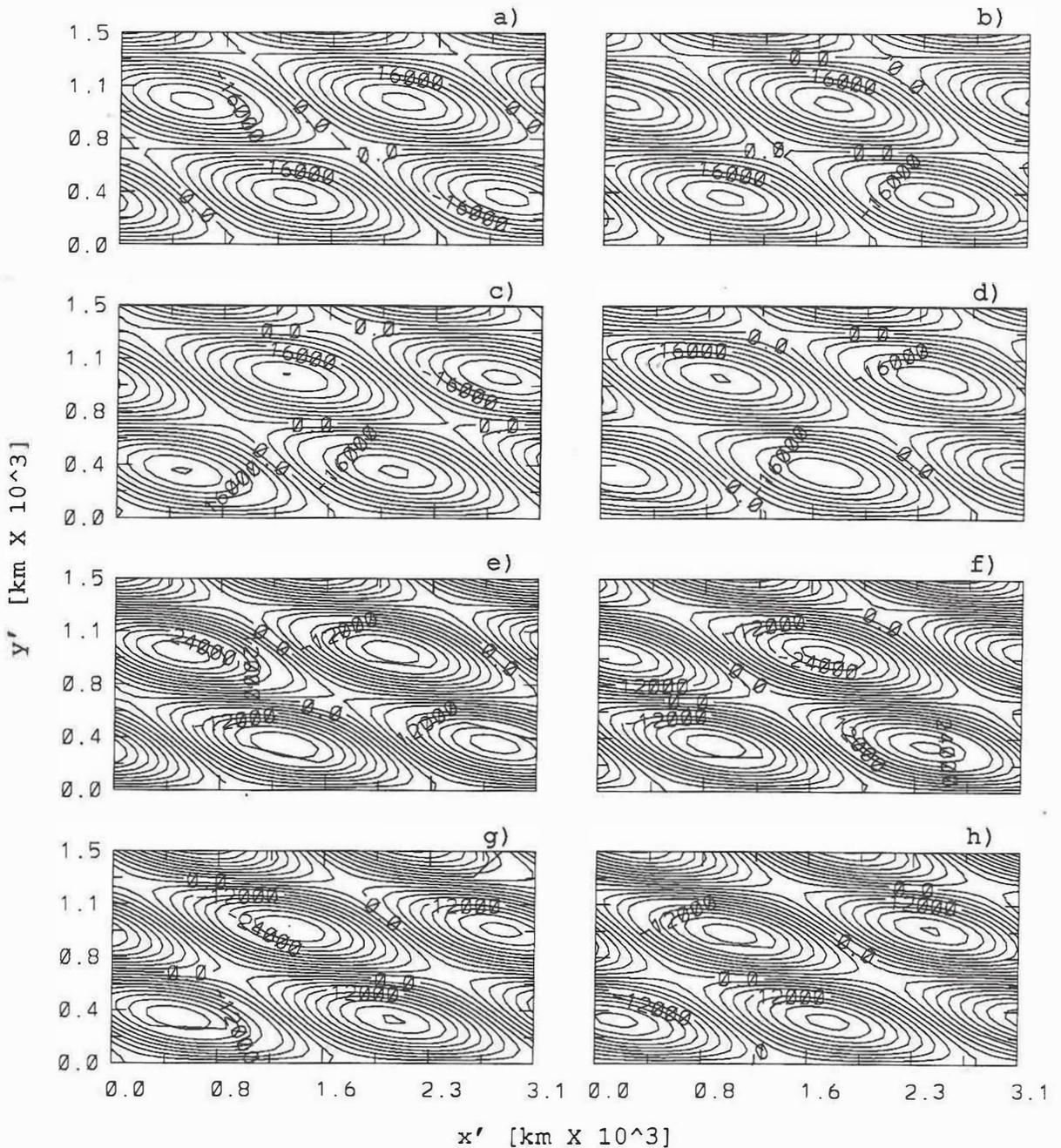


Figura 15: Contornos instantáneos de  $\psi_L$  (obtenidos numéricamente) a lo largo de la "ventana" y a 1500 km a partir de la costa. Las paredes laterales se encuentran aproximadamente a 23000 km, mientras la pared paralela a la costa se encuentra a 10500 km. Los contornos están separados por un octavo de periodo analítico  $T$ : a)  $\psi_L(t=0)$ ; b)  $\psi_L(t=T/8)$ ; c)  $\psi_L(t=2T/8)$ ; d)  $\psi_L(t=3T/8)$ ; etc, etc. Parámetros:  $\theta_0 = 25^\circ$ ,  $\alpha = 25^\circ$ ,  $T = 0.1$  año,  $k = -0.002 \text{ km}^{-1}$ .

la superposición de una OR incidente y la reflejada en una pared no zonal para el caso lineal en el modelo numérico, mostrando la deriva (en este caso hacia  $-x'$ ) de los centros de alta y baja presión. Los parámetros de las ondas son:  $T = 0.1$  año,  $k = -0.002 \text{ km}^{-1}$ ,  $l_1 = 0.00224 \text{ km}^{-1}$ ,  $l_2 = -0.006641 \text{ km}^{-1}$ ,  $\alpha = 25^\circ$  y  $\Theta_0 = 25^\circ$ . En principio, para el caso lineal los centros de baja y alta presión no deberían experimentar deformación alguna, tan sólo la deriva de los centros al transcurrir el tiempo; sin embargo conforme éste avanza, la función corriente dentro de la "ventana" se va deformando, limitando la validez de nuestros resultados a un corto intervalo de tiempo. La deformación de la función corriente la atribuimos al efecto que experimentan las OR al incidir en las tres fronteras cerradas alejadas de la "ventana", provocando que las ondas que ahí se generan (reflejadas) se propaguen hacia el interior del dominio conforme transcurre el tiempo, alterando la función corriente en nuestra región de interés.

En la figura 16, se presentan los contornos de la función corriente  $\psi_A$  para el caso alineal con una condición inicial que es la superposición de las OR incidente-reflejada. Para este caso los términos advectivos son activados, manifestándose al "deformar" los centros de baja y alta presión al transcurrir el tiempo. La condición inicial no es solución del problema alineal, por lo que en el modelo numérico tendríamos que esperar idealmente un tiempo de ajuste a su solución. Desgraciadamente

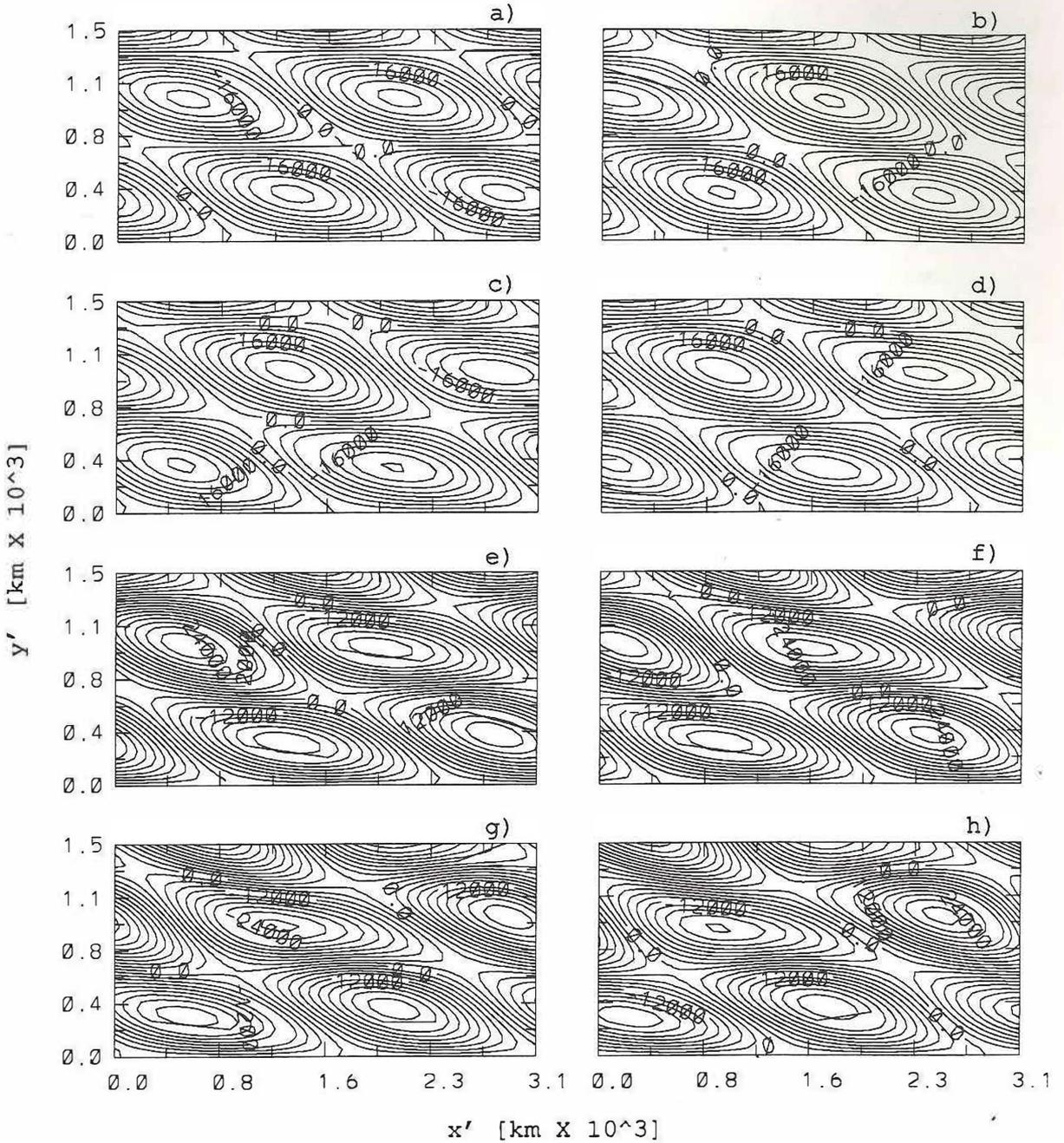


Figura 16: Contornos instantáneos de  $\psi_A$  (obtenidos numéricamente) a lo largo de la "ventana" y a 1500 km a partir de la costa. Las predes laterales se encuentran aproximadamente a 23000 km, mientras la pared paralela a la costa se encuentra a 10500 km. Los contornos están separados por un octavo de periodo analítico  $T$ : a)  $\psi_A(t=0)$ ; b)  $\psi_A(t=T/8)$ ; c)  $\psi_A(t=2T/8)$ ; d)  $\psi_A(t=3T/8)$ ; etc, etc. Parámetros como en Figura 15.

nuestros resultados se ven perturbados rápidamente por el efecto de la reflexión de las OR al incidir en las tres paredes alejadas de la ventana, limitando la validez de estos.

En la figura 17 se compara la componente  $u'$  de la velocidad geostrófica (paralela a la costa) obtenida numéricamente con la corriente estacionaria obtenida analíticamente por Mysak y Magaard (1983) en el caso sin fricción y Graef (1990). La corriente obtenida numéricamente se calcula a partir de promediar  $\psi_A(x', y', t)$  a lo largo de  $x'$  en una longitud de  $|\frac{2\pi}{k}|$  (a lo largo de la ventana) y se muestra a distintos tiempos separados por un octavo del periodo  $T$  de las ondas incidente-reflejada. Como se puede observar, al transcurrir el tiempo se hace presente una corriente, siendo muy notorio el corte de velocidades y su similitud con el flujo estacionario obtenido analíticamente.

También se puede observar que el flujo obtenido numéricamente no puede estabilizarse o hacerse estacionario. Pensamos en dos posibilidades para explicar la dependencia temporal del flujo promediado en  $x'$  obtenido numéricamente: 1) el efecto de las reflexiones en las tres paredes alejadas de la ventana "contaminando" la solución en la ventana y 2) que el flujo promediado sea inestable. Lo ideal sería correr el modelo por más tiempo para observar la evolución del promedio en  $x'$  de  $\psi_A$ , pero como se ha discutido anteriormente, esto "contaminaría" aún más  $\psi_A$  en la ventana.

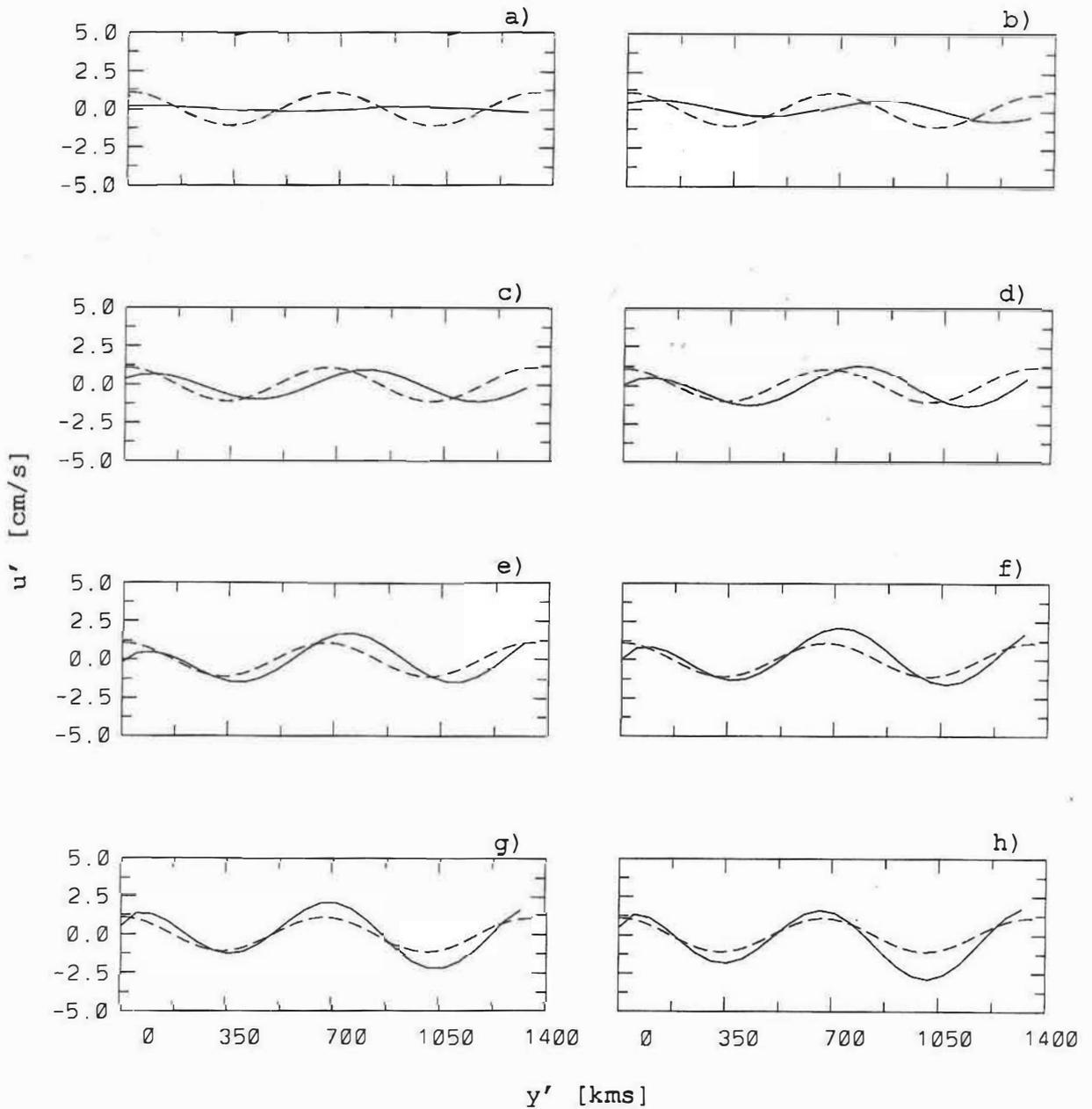


Figura 17: Gráficas de la componente de velocidad geostrófica  $u'$  paralela a la costa, como función de  $y'$ , coordenada perpendicular a la costa, obtenida numéricamente (línea continua) y  $u'_a$  velocidad geostrófica estacionaria, obtenida de forma analítica (línea discontinua), separadas por un octavo de periodo analítico  $T$ : a)  $u'(t=0)$ ; b)  $u'(t=T/8)$ ; c)  $u'(t=2T/8)$ ; d)  $u'(t=3T/8)$ ; etc, etc.

## VII. SUMARIO Y CONCLUSIONES

Se estudia la autointeracción de los modos normales de Rossby por medio de un modelo numérico y uno analítico. La solución de la EVPCG lineal con condiciones a la frontera  $\psi_0 = 0$  en  $x = 0, X_0$  y  $y = 0, Y_0$  que obtiene Pedlosky (1987) es reproducida, consistiendo de una onda viajera que se propaga hacia occidente modulada por funciones seno que satisfacen las condiciones a la frontera.  $\psi_0$  presenta una serie de giros ciclónicos y anticiclónicos alternándose en medio periodo. El modo normal cuasigeostrófico se puede escribir como la suma de cuatro OR. La frecuencia de oscilación del modo que es igual a cualesquiera de las cuatro ondas depende esencialmente de las dimensiones de la cuenca y del término  $\beta$ .

La autointeracción a lineal a primer orden de un modo normal de Rossby se estudia en base a la interacción que existe entre las cuatro OR que lo conforman. La interacción a primer orden produce un forzamiento transitorio con el doble de la frecuencia del modo y un forzamiento estacionario.

El forzamiento estacionario tiene como respuesta la presencia de dos giros: uno anticiclónico en la parte norte de la cuenca y el otro ciclónico en la parte sur. La respuesta directa al forzamiento transitorio presenta un desfase de  $90^\circ$  respecto al forzamiento, esta respuesta consiste de una serie de giros ciclónicos y anticiclónicos que no satisfacen las

condiciones a la frontera en las paredes meridionales. La respuesta que tiene el fluido para satisfacer las condiciones de contorno es el de generar OR, de tal forma que la suma de la función corriente de estas ondas (solución homogénea) y la función corriente forzada resulte nula en las paredes. Anderson y Gill (1975) proponen como mecanismo de generación de OR libres el ajuste a flujos que no satisfacen las condiciones a la frontera. Las ondas producen un contra flujo, nulificando así la respuesta del forzamiento en las fronteras.

De las tres posibles soluciones a la ecuación diferencial homogénea para  $\psi_1$ , las dimensiones de la cuenca son las que determinan qué solución escoger. Por otra parte, entre las soluciones que conforman la solución perturbativa a primer orden, la que tiene mayor importancia es la solución particular estacionaria. Los términos advectivos juegan un papel decisivo en la circulación de la cuenca si ésta es relativamente pequeña; por ejemplo para la cuenca de 1000 km por 500 km; por el contrario para cuencas grandes, como la de 7000 km por 3500 km los términos alineales pasan casi desapercibidos.

De los resultados que se obtienen por medio del modelo numérico se aprecia que los contornos de la función corriente lineal y alineal presentan la deriva hacia occidente de los giros ciclónicos y anticiclónicos, registrando en ambos casos un desfase respecto a la solución analítica. La deformación

que sufren los giros al aproximarse a la frontera occidental presumiblemente se deba a la generación de ondas cortas de Rossby cuya velocidad de grupo se dirige hacia oriente. La solución numérica alineal difiere apreciablemente de la solución analítica perturbativa conforme la amplitud de la condición inicial se incrementa, indicándonos que la solución analítica es válida para números de  $\beta$ -Rossby pequeños.

El estudio de la estabilidad del flujo paralelo a la costa por medio de un modelo numérico CG, como consecuencia de la interacción alineal de una OR incidente y su respectiva onda que refleja en una costa no zonal no pudo realizarse, debido a que las condiciones a la frontera en el modelo numérico no pudieron ser implementadas para estudiar el problema de reflexión de las OR que inciden en una pared. Sin embargo, el flujo paralelo a la costa como función de  $y'$  al promediar la función corriente alineal a lo largo de la ventana, resulta similar al flujo estacionario que reportan Mysak y Maggaard (1983), en ausencia de fricción, y Graef (1990). Este resultado deja abierta la posibilidad de que en un futuro, al implementar adecuadamente las condiciones a la frontera, el estudio de la estabilidad de este flujo pueda realizarse.

## LITERATURA CITADA

Anderson, D. L. T., and A. E. Gill, 1975: Spin-up of a stratified ocean with applications to upwelling. **Deep-Sea Res.**, 22, 683-696.

Arakawa, A., and V. R. Lamb, 1976: Computational design of the UCLA General Circulation. **Methods in Computational Physics**, Academic Press, New York.

Bender, C. M., and S. A. Orszag, 1978: **Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers**. Mc Graw-Hill, 593 pp.

Goldsbrough, G. R. 1914 The dynamical theory of the tides in polar basin. **Proc. Lond. Math. Soc.** 14, (ser. 2), 207-299.

Graef, F., 1994: Secon order nonlinear interactions among Rossby waves. **Atmósfera.**, 7, 89-103.

Graef-Ziehl, F., 1990: Reflection of nonlinear baroclinic Rossby waves at a non-zonal boundary and the driving of secondary mean flows. Tesis doctoral. University of Hawaii, 283 pp.

Holland, R. H., 1978: The role of mesoscale eddies in the general circulation of the ocean -Numerical experiments using a wind-driven quasi-geostrophic model. **J. Phys Oceanogr.**, 8, 363-392.

Longuet-Higgins, M. S., 1964: Planetary waves on a rotating sphere. **Proc. Roy. Soc. A**, 279, 446-473.

Munk, W. H., 1950: On the wind-driven ocean circulation. **J. Meteor.**, 7, 79-93.

Mysak, L. A., and L. Magaard, 1983: Rossby wave driven Eulerian mean flows along non-zonal barriers, with application to the Hawaiian Ridge. **J. Phys. Oceanogr.**, 13, 1716-1725.

Pedlosky, J., 1965: A study of the time dependent ocean circulation. *J. Atmos. Sci.*, 22, 267-272.

Pedlosky, J., 1987: *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 624 pp.

Ripa, P., 1978: Normal Rossby modes of a closed basin with topography. *J. Geophys. Res.*, 83, 1947-1957.

Stommel, H., 1948: The westward intensification of wind-driven ocean currents. *Trans. Amer. Geophys. Union*, 29, 202-206.

Wajsowicz, R. C., 1985: Free planetary waves in finite-difference numerical models. *J. Phys. Oceanogr.*, 16, 773-789.