

**Centro de Investigación Científica y de Educación  
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias  
en Ciencias de la Tierra  
con orientación en Geofísica Aplicada**

---

**Simulación de propagación de ondas elásticas en  
medios con fracturas conectadas**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

**José Manuel Fermín Antonio**

Ensenada, Baja California, México

2021

Tesis defendida por

**José Manuel Fermín Antonio**

y aprobada por el siguiente Comité

---

Dr. Jonás de Dios de Basabe Delgado  
Director de tesis

Dr. Pratap Narayan Sahay Sahay

Dr. Mario González Escobar

Dr. Santiago Camacho López



---

Dr. Javier Alejandro González Ortega  
Coordinador del Posgrado en Ciencias de la Tierra

---

Dra. Rufina Hernández Martínez  
Directora de Estudios de Posgrado

*José Manuel Fermín Antonio © 2021*

*Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis*

Resumen de la tesis que presenta José Manuel Fermín Antonio como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Ciencias de la Tierra con orientación en Geofísica Aplicada.

## **Simulación de propagación de ondas elásticas en medios con fracturas conectadas**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Jonás de Dios de Basabe Delgado  
Director de tesis

La presencia de fracturas es común en formaciones geológicas y tienden a dominar las propiedades hidráulicas y mecánicas en las rocas, por lo que el flujo de fluidos a través de estas no puede ser entendido sin un detallado conocimiento de la conectividad y geometría de las redes de fractura que las componen. El rango de potenciales aplicaciones abarca la exploración y explotación de hidrocarburos, almacenamiento de desechos nucleares, geohidrología, almacenamiento de  $CO_2$ , entre otras, por lo que existe un gran interés en mejorar las técnicas para detectar y caracterizar redes de fracturas. Con ayuda de modernas computadoras y el desarrollo de nuevos métodos numéricos, se han impulsado nuevas metodologías para estudiar mejor el efecto de los medios fracturados en el campo de ondas sísmico. El método de Galerkin Discontinuo de Penalización Interior es un esquema numérico que permite simular la ecuación de onda elástica y evaluar modelos representativos de rocas fracturadas con diversas geometrías. Se construyeron volúmenes representativos con fracturas conectadas y no conectadas, para estudiar, no solo el efecto que tiene la conectividad en el campo de ondas, sino también la longitud de fracturas y la frecuencia de la fuente. Se implementó el medio equivalente llamado T-Matrix, que es una solución analítica que describe el comportamiento elástico de un medio con inclusiones, en este caso las fracturas. La principal característica de T-Matrix es que permite caracterizar la interacción de fracturas y su efecto en el campo de ondas. Este método busca replicar los modelos con fracturas discretas y así evaluar su efectividad en la caracterización de medios fracturados. Los análisis espectral y de coherencia en un plano tiempo-frecuencia muestran un efecto considerable producto de la conectividad, sugiriendo la posibilidad de incluir este efecto en los esquemas de evaluación de yacimientos fracturados.

**Palabras clave: simulación numérica, teoría medios equivalentes, conectividad, T-Matrix, propagación de onda**

Abstract of the thesis presented by José Manuel Fermín Antonio as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Earth Science with orientation in Applied Geophysics.

### **Elastic waves simulation in media with connected fractures**

Abstract approved by:

---

Dr. Jonás de Dios de Basabe Delgado  
Thesis Director

The presence of fractures is common in geological formations and tends to dominate their mechanical and hydraulic properties, so the flow of fluids through them cannot be understood without a detailed knowledge of the connectivity and geometry of the rocks. Potential applications include the exploration and exploitation of hydrocarbons, nuclear waste storage, CO<sub>2</sub> sequestration, geohydrology, among others, so there is a great interest in improving techniques to detect and characterize fracture networks. With the help of modern computers and the development of new numerical methods, new methodologies have been promoted to better study the effect of fractured media on the seismic wavefield. The Interior Penalty Discontinuous Galerkin method is a numerical scheme that allows us to simulate the elastic wave equation and evaluate representative models of fractured rocks with various geometries. Representative volumes with connected and disconnected fractures were constructed to study, not only the effect of connectivity on the wavefield, but also the fractures' length and the source frequency. The T-Matrix equivalent medium was implemented. This is an analytical solution that describes the elastic behavior of a medium with inclusions, in this case, fractures, which allowed characterizing the interaction of fractures and their effect on the wavefield. This method seeks to replicate the models with discrete fractures, and thus evaluate their effectiveness in the characterization of fractured media. Spectral and coherence analyses in the time-frequency plane, show a considerable effect as a result of connectivity, suggesting the possibility of including this effect in reservoir evaluation schemes.

**Keywords: numerical simulation, medium equivalent theories, connectivity, T-Matrix, wave propagation.**

## **Dedicatoria**

***A mis padres Manuel y Clara, por su amor incondicional, las palabras me quedan cortas para expresar mi eterna gratitud.***

**A mi hermana Sarahi y mi sobrina Danna,  
que las llevo siempre en mi corazón.**

## **Agradecimientos**

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por darme la oportunidad de formar parte del cuerpo estudiantil y la educación de calidad recibida.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

A mi director de tesis Jonás de Dios de Basabe Delgado por su paciencia y dedicación para la realización de este proyecto. Gracias por compartir conmigo su conocimiento y sabiduría.

A los miembros de mi comité de tesis, el Dr. Pratap Narayan Sahay Sahay, Dr. Mario González Escobar y el Dr. Santiago Camacho López, por su tiempo y valiosas aportaciones a este trabajo.

A los que hicieron de Ensenada una gran experiencia: Mayra, Eli, Eliana, Erick Garcia, Jackeline, Magiareli, Ignacio, Erik Gallardo y los que me faltaron.

A los amigos que se volvieron familia: Carlos, Edú, Gonzalo, Humberto, Alexis, Daniela, Yaya, gracias por confiar en mí.

Al personal administrativo del CICESE.

# Tabla de contenido

|  | Página |
|--|--------|
| Resumen en español .....   | ii     |
| Resumen en inglés .....  | iii    |
| Dedicatoria .....  | iv     |
| Agradecimientos .....  | v      |
| Lista de figuras .....   | viii   |
| Lista de tablas .....  | x      |
| <br>   |        |
| <b>Capítulo 1. Introducción</b>  |        |
| 1.1. Justificación .....   | 2      |
| 1.2. Caracterización de yacimientos fracturados .....                        | 3      |
| 1.3. Conectividad de fracturas .....   | 4      |
| 1.4. Hipótesis .....   | 8      |
| 1.5. Objetivo General .....  | 8      |
| 1.5.1. Objetivos específicos .....   | 8      |
| <br>   |        |
| <b>Capítulo 2. Teoría elástica y medios equivalentes</b>                     |        |
| 2.1. Teoría elástica .....   | 9      |
| 2.1.1. Anisotropía .....   | 9      |
| 2.1.2. Ley de Hooke y ecuación de onda .....                                 | 9      |
| 2.1.3. Clases de simetría .....  | 13     |
| 2.2. Teoría de medios equivalentes .....                                     | 17     |
| 2.2.1. Teoría de Hudson y Schoenberg .....                                   | 18     |
| 2.2.2. Método T-Matrix .....   | 20     |
| <br>   |        |
| <b>Capítulo 3. Métodos numéricos para la propagación de ondas</b>            |        |
| 3.1. Método de diferencias finitas .....                                     | 24     |
| 3.2. Método de elementos espectrales .....                                   | 24     |
| 3.3. Método de Galerkin discontinuo .....                                    | 25     |
| 3.3.1. Formulación débil de la ecuación de onda para incluir fracturas ..... | 26     |
| 3.4. Código Seismic Wave Propagation .....                                   | 28     |
| <br>   |        |
| <b>Capítulo 4. Diseño de experimentos</b>                                    |        |
| 4.1. Diseño de modelos .....   | 30     |
| 4.2. Modelos anisotrópicos .....   | 31     |
| 4.3. Implementación del método T-Matrix .....                                | 35     |
| <br>   |        |
| <b>Capítulo 5. Resultados y discusión</b>                                    |        |
| 5.1. Transformada de Fourier .....   | 41     |
| 5.2. Análisis de ondículas .....   | 42     |

## **Tabla de contenido (continuación)**

|   |    |
|---|----|
| 5.3. Espectros de frecuencia . . . . .                                  | 45 |
| 5.4. Comparación de sismogramas en el plano tiempo-frecuencia . . . . . | 53 |
| 5.5. Comparación con T-Matrix . . . . .                                 | 58 |
| <br>  |    |
| <b>Capítulo 6. Conclusiones</b>   |    |
| 6.1. Trabajo futuro y recomendaciones . . . . .                         | 62 |
| <b>Literatura citada</b> . . . . .                                      | 63 |

## Lista de figuras

| Figura  | Página |
|---|--------|
| 1. Disciplinas involucradas para la obtención de modelos fracturados. . . . .   | 4      |
| 2. Resultados de Shao y Pyrak-Nolte (2015) de experimentos laboratorio en medios con fracturas ortogonales . . . . .        | 7      |
| 3. Ejemplo medios con isotropía transversal . . . . .   | 14     |
| 4. Modelo de un medio equivalente. Proceso de homogenización. . . . .   | 17     |
| 5. Ilustración esquemática de una sección transversal 2D de una distribución de fracturas 3D en un modelo T-Matrix. . . . . | 21     |
| 6. Ejemplo de un mallado de elementos finitos para un modelo fracturado. . .  | 27     |
| 7. Diseño del dominio para las simulaciones numéricas . . . . .   | 31     |
| 8. Volumen elemental representativo para Modelos 1 y 2 . . . . .  | 32     |
| 9. Volumen elemental representativo para Modelos 3 y 4 . . . . .  | 33     |
| 10. Volumen elemental representativo para Modelos 5 y 6 . . . . .   | 33     |
| 11. Visualización de propagación de ondas en medios con fracturas discretas .   | 35     |
| 12. Efecto de la longitud en la evaluación de la densidad de fracturas . . . . .  | 37     |
| 13. Efecto de la relación de aspecto de correlación espacial ARD. . . . .   | 38     |
| 14. Visualización de propagación de ondas en un medio homogeneizado . . . .   | 39     |
| 15. Bases tiempo-frecuencia . . . . .   | 43     |
| 16. Visualización de la ondícula de Morlet . . . . .  | 44     |
| 17. Análisis espectral. Longitud de fractura 30 m a 60 Hz. . . . .  | 46     |
| 18. Análisis espectral. Longitud de fractura 30 m a 75 Hz. . . . .  | 47     |
| 19. Análisis espectral. Longitud de fractura 30 m a 90 Hz. . . . .  | 47     |
| 20. Análisis espectral. Longitud de fractura 30 m a 105 Hz. . . . .   | 48     |
| 21. Análisis espectral. Longitud de fractura 20 m a 60 Hz. . . . .  | 49     |
| 22. Análisis espectral. Longitud de fractura 20 m a 75 Hz. . . . .  | 49     |
| 23. Análisis espectral. Longitud de fractura 20 m a 90 Hz. . . . .  | 50     |
| 24. Análisis espectral. Longitud de fractura 20 m a 105 Hz. . . . .   | 50     |
| 25. Análisis espectral. Longitud de fractura 10 m a 60 Hz. . . . .  | 51     |
| 26. Análisis espectral. Longitud de fractura 10 m a 75 Hz. . . . .  | 52     |
| 27. Análisis espectral. Longitud de fractura 10 m a 90 Hz. . . . .  | 52     |
| 28. Análisis espectral. Longitud de fractura 10 m a 105 Hz. . . . .   | 53     |

## Lista de figuras (continuación)

| Figura  | Página |
|---|--------|
| 29. Análisis de coherencia con longitud de fractura de 30 m. Modelo 1 (No conectado) y Modelo 2 (conectado). A) 60 Hz. B) 75 Hz. . . . .  | 54     |
| 30. Análisis de coherencia con longitud de fractura de 30 m. Modelo 1 (No conectado) y Modelo 2 (conectado). A) 90 Hz. B) 105 Hz. . . . . | 54     |
| 31. Análisis de coherencia con longitud de fractura de 20 m. Modelo 3 (No conectado) y Modelo 4 (conectado). A) 60 Hz. B) 75 Hz. . . . .  | 55     |
| 32. Análisis de coherencia con longitud de fractura de 20 m. Modelo 3 (No conectado) y Modelo 4 (conectado). A) 90 Hz. B) 105 Hz. . . . . | 56     |
| 33. Análisis de coherencia con longitud de fractura de 10 m. Modelo 5 (No conectado) y Modelo 6 (conectado). A) 60 Hz. B) 75 Hz. . . . .  | 57     |
| 34. Análisis de coherencia con longitud de fractura de 10 m. Modelo 5 (No conectado) y Modelo 6 (conectado). A) 90 Hz. B) 105 Hz. . . . . | 57     |
| 35. Comparación de simulaciones T-Matrix vs Modelos discretos a 60 Hz . . . .   | 58     |
| 36. Comparación de simulaciones T-Matrix vs Modelos discretos a 75 Hz . . . .   | 59     |
| 37. Comparación de simulaciones T-Matrix vs Modelos discretos a 90 Hz . . . .   | 59     |
| 38. Comparación de simulaciones T-Matrix vs Modelos discretos a 105 Hz . . . .  | 60     |

## Lista de tablas

| Tabla |  | Página |
|-------|--|--------|
| 1.    | Convención de índices en notación de Voigt. . . . .    | 11     |
| 2.    | Clases de simetría . . . . .                           | 16     |
| 3.    | Parámetros de entrada para el software SWP. . . . .    | 29     |
| 4.    | Parámetros de los modelos . . . . .                    | 32     |
| 5.    | Características de los modelos anisotrópicos . . . . . | 34     |

## Capítulo 1. Introducción

---

El análisis de fracturas a través de observaciones directas, tales como afloramientos o estudios de pozo, es problemático debido al limitado muestreo de los volúmenes de roca afectados, por lo cual las técnicas geofísicas en general y métodos sísmicos en particular son herramientas valiosas para la detección no invasiva y caracterización de fracturas. Las fracturas son características comunes en prácticamente todas las formaciones geológicas y tienden a dominar no solo su mecánica sino también sus propiedades hidráulicas (Rubino *et al.*, 2014). Particularmente, la conectividad entre fracturas está relacionada con la permeabilidad del yacimiento, siendo esta una de las propiedades petrofísicas más importantes para evaluar el potencial de explotación.

Las simulaciones numéricas son una herramienta para estudiar la propagación de ondas en la Tierra. Con ayuda de modernas computadoras y el desarrollo de nuevos métodos numéricos, hoy es posible incluir más detalles en este tipo de simulaciones que ayuden a representar mejor la complejidad del medio rocoso. Estas simulaciones pueden ser de utilidad para entender los efectos sísmicos de las fracturas bajo diferentes condiciones y proporcionar información acerca de la sensibilidad de los datos para ciertos parámetros de las fracturas.

Otra forma de estudiar los efectos del medio fracturado yace en el formalismo de las diferentes teorías de medios equivalentes (TME) (Mavko y Mukerji, 2009), proporcionándonos expresiones analíticas que nos describen el comportamiento elástico de un medio con diversas heterogeneidades (fracturas) con sus respectivas limitaciones y ventajas. En particular, el medio equivalente T-Matrix plantea la base teórica (Jakobsen *et al.*, 2003a) para caracterizar las propiedades elásticas efectivas de las rocas con fracturas ortogonales, siendo uno de las pocas TME capaces de incorporar el efecto de interacción entre fracturas.

A través de simulaciones numéricas de propagación de onda elástica, con el método de Galerkin Discontinuo Simétrico de Penalización Interior (SIPG), implementado por De Basabe *et al.* (2016), se estudió el efecto de incluir fracturas discretas conectadas y no conectadas para evaluar el efecto que tienen en el campo de ondas al variar diversos parámetros como la longitud y el grado de conectividad. Asimismo, por medio del método T-Matrix, se replicaron las características de las simulaciones con fractu-

ras discretas, para evaluar la eficacia de este medio equivalente para caracterizar la interacción entre fracturas.

### **1.1. Justificación**

Stearns y Friedman (1972) definieron una fractura natural como una discontinuidad plana o separación en un material, causado por una falla frágil debido a la deformación o procesos de depositación y compactación en las rocas. Las fracturas y otras discontinuidades mecánicas son comunes en la mayoría de las rocas y a menudo son fuentes de anisotropía mecánica e hidráulica (Pyrak-Nolte, 1996).

En las últimas dos décadas se ha avanzado en la comprensión teórica de los comportamientos mecánicos (elásticos) e hidráulicos (desplazamiento de fluidos) de las fracturas. De acuerdo a Liu y Martinez (2012), el tamaño, la forma, los contactos y la conectividad de las superficies de fractura son importantes, al igual que la densidad y sus distribuciones de orientación. Dada su importancia, se ha mejorado en el desarrollo de técnicas de procesamiento e interpretación sísmica para localizar zonas de fractura, y extraer parámetros de fractura en yacimientos de hidrocarburos, gracias a progresos recientes en la tecnología de adquisición sísmica (Tsvankin *et al.*, 2010).

La detección y caracterización de fracturas son de gran interés en varios dominios de ciencias de la Tierra, ciencias ambientales e ingeniería, tales como (Liu *et al.*, 1995):

- Exploración y explotación de hidrocarburos.
- Administración de acuíferos.
- Sistemas geotérmicos.
- Almacenamiento de desechos nucleares.
- Captura y almacenamiento de CO<sub>2</sub>.
- Geotecnia.

Los medios fracturados han sido estudiados ampliamente y su investigación ha proporcionado abundante información sobre el subsuelo y las propiedades de los yacimientos, pero dado que en la actualidad los yacimientos naturalmente fracturados

presentan geologías más complejas y se encuentran a mayor profundidad, se necesitan nuevos métodos de simulación numérica e interpretación de datos que vayan más allá de los métodos convencionales.

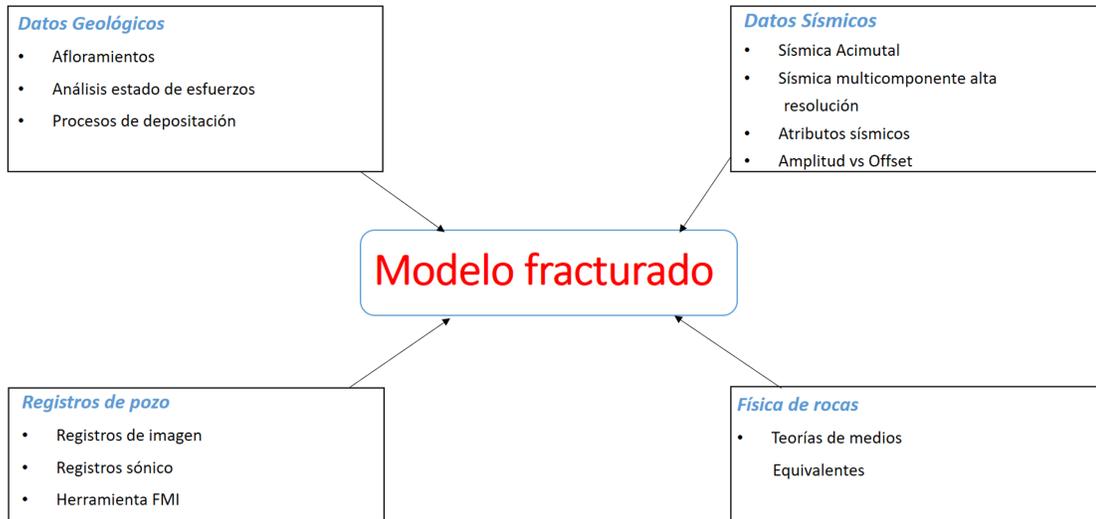
## **1.2. Caracterización de yacimientos fracturados**

La capacidad de identificar grupos de fracturas, corredores y sus direcciones predominantes dentro de yacimientos y recursos no convencionales (gas lutita), puede tener un impacto en la planeación del desarrollo de los campos (Helbig y Thomsen, 2005). Cuanto antes se pueda determinar la presencia de fracturas, mejor se puede alterar el plan de desarrollo en áreas como perforación, estrategias de recuperación mejorada de petróleo así como en terminación y colocación de pozos (Bratton *et al.*, 2006).

Un yacimiento naturalmente fracturado resulta de la diferencia de esfuerzos que existían en la roca al momento de su fractura. Las fracturas pueden tener un efecto positivo, negativo o neutral en el flujo de fluidos (Aguilera, 1998). Por lo tanto, es importante establecer algunos criterios básicos como la orientación, espaciamiento, apertura o densidad, para reconocer cuándo las fracturas son un elemento importante en el rendimiento del yacimiento (Tsvankin *et al.*, 2010).

Los métodos sísmicos tienen el potencial de ser una herramienta de diagnóstico cuantitativo para localizar fracturas y caracterizar las propiedades hidráulicas y mecánicas del macizo rocoso (Pyrak-Nolte, 1996). En general, la presencia de fracturas resulta en una disminución de las amplitudes y velocidades sísmicas (Pyrak-Nolte y Cook, 1987).

Es común utilizar sensores digitales para adquirir datos 3D acimutales con un muestreo alto de datos en entornos tanto terrestres como marinos. Aunque todavía no se ha aprovechado todo el potencial de los datos sísmicos multicomponente, la tecnología, en particular el cable de fondo oceánico (OBC por sus siglas en inglés) y la sismología terrestre multicomponente, se está volviendo cada vez más popular (Liu y Martinez, 2012). Al mismo tiempo, el procesamiento sísmico avanzado como la migración en tiempo inverso o la inversión de forma de onda completa (FWI por sus siglas en inglés), brindan excelentes oportunidades para el análisis sísmico cuantitativo. La



**Figura 1.** Disciplinas involucradas para la obtención de modelos fracturados.

caracterización adecuada de los yacimientos fracturados requiere la integración de todos los datos disponibles: afloramientos, perforaciones, registros geofísicos de pozo y modelos geológicos (ver Figura 1).

Medios que contienen fracturas han sido considerados en el marco de las teorías de medios equivalentes (Hudson, 1980, 1981; Grechka y Kachanov, 2006a,b; Schoenberg, 1980). Los parámetros efectivos de Thomsen resultantes de estos estudios se utilizan ampliamente para describir los medios fracturados. En particular, los parámetros de Thomsen se han utilizado para desarrollar los métodos de procesamiento e interpretación de datos sísmicos de acimut amplio, lo que lleva a evaluaciones de parámetros anisotrópicos de reflexiones sísmicas y, posteriormente, a la determinación de las características del campo fracturado (Helbig y Thomsen, 2005).

### 1.3. Conectividad de fracturas

Dado que la conectividad de las fracturas controla las propiedades de flujo y transporte de las formaciones, la comprensión del papel que juegan la conectividad en el comportamiento de las ondas sísmicas puede ayudar a extraer información hidráulica clave de los datos sísmicos (Rubino *et al.*, 2014). Si bien se ha realizado una cantidad significativa de investigación sobre la respuesta sísmica de fracturas individuales y conjunto de fracturas (Grechka y Kachanov, 2006a,b; Kachanov, 1992; Hu y Mcme-

chan, 2009; Saenger *et al.*, 2004; Saenger y Shapiro, 2002), pocos estudios (Novikov *et al.*, 2017; Rubino *et al.*, 2015) han examinado el efecto de las intersecciones de fractura en la propagación de ondas elásticas.

Estudios de campo por Berkowitz (2000) demuestran que la comunicación hidráulica en rocas fracturadas es principalmente controlada por el grado de interconexión y la geometría de las fracturas. Sin embargo, una medición directa de la conectividad y la velocidad de flujo en una formación geológica fracturada generalmente se considera poco práctica, debido a la complejidad de realizar estas pruebas en campo y que las muestras que afloran en la superficie suelen estar alteradas por procesos de erosión e intemperismo.

La conectividad es función de los siguientes factores (Liu y Martinez, 2012):

- Espaciado de fracturas en cada conjunto.
- Variabilidad espacial del sistema de fractura.
- Longitud efectiva de fracturas.
- Estado de esfuerzos presentes en la formación.

Un ejemplo donde la conectividad de fracturas es clave es en la explotación de yacimientos no convencionales de gas y petróleo de esquisto. En este caso, los hidrocarburos se ubican en el estrecho espacio poroso de los yacimientos caracterizados por una permeabilidad natural extremadamente baja y, por lo tanto, es necesario el fracturamiento hidráulico para extraerlos. El flujo de fluidos tiene lugar entonces en las fracturas generadas artificialmente y, por lo tanto, la información relacionada con la conectividad de la fractura potencialmente contenida en los datos sísmicos resulta muy valiosa. Lo mismo aplica en la mayoría de yacimientos geotérmicos profundos, donde también se necesita fracturación hidráulica para permitir la circulación de fluidos y la extracción de calor (Legarth *et al.*, 2005).

Han surgido diversos modelos teóricos que buscan predecir las propiedades elásticas efectivas en medios porosos y con fracturas. La mayoría de ellos se basan en suposiciones acerca de la complejidad de las rocas reales.

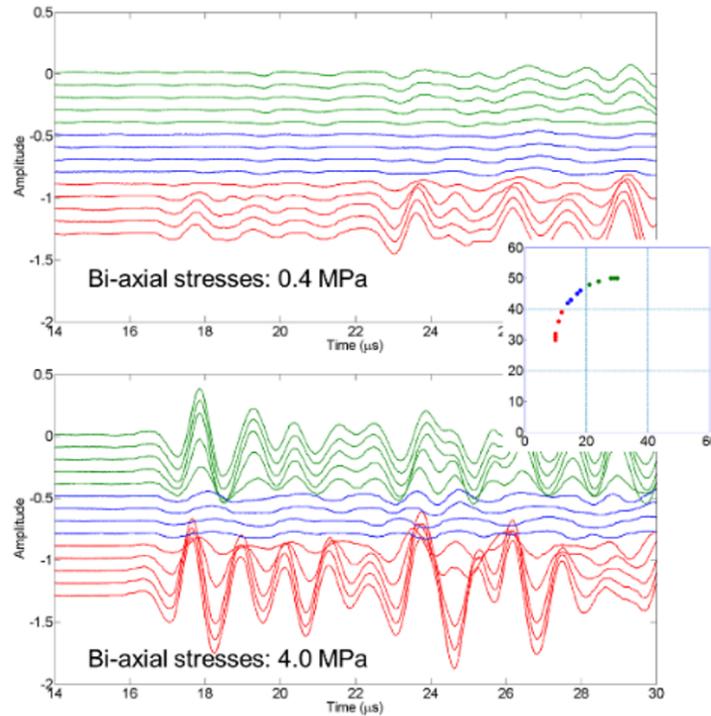
Los enfoques más populares utilizan la aproximación de no interacción (NIA) para predecir la compresibilidad de rocas que contienen concentraciones finitas de fracturas, debido a la dificultad de resolver interacciones elásticas entre poros y fracturas (Zhao *et al.*, 2016). El trabajo pionero sobre NIA fue por Eshelby (1957), en el que presentó la solución al campo de deformación de una inclusión elipsoidal en un sólido homogéneo infinito.

Basado en un análisis de la teoría de la dispersión del campo de ondas en un sólido con fracturas o inclusiones elipsoidales, Hudson derivó las correcciones de primer y segundo orden para calcular los módulos efectivos de los medios fracturados (Hudson, 1980, 1981). El modelo de Hudson de primer orden que ignora las interacciones entre inclusiones solo funciona con una baja densidad de fracturas. La expansión de segundo orden del modelo de Hudson toma en cuenta las interacciones entre fracturas, pero proporciona una predicción no física a una alta densidad de fracturas.

Grechka y Kachanov (2006a) afirmaron que los dos efectos de interacción, escudo de esfuerzos y amplificación de esfuerzos (stress shielding y stress amplification por sus siglas en inglés) se contrarrestan y cancelan entre sí, por lo que las interacciones entre poros o fracturas pueden despreciarse. La teoría de NIA, así como las de inclusión de fracturas ignoran las interacciones elásticas entre fracturas, por lo tanto, en teoría, solo pueden funcionar para concentraciones bajas. Sin embargo, estos límites (aproximadamente porosidad menor al 10 por ciento) hacen que la teoría NIA no sea aplicable para muchas rocas sedimentarias (Zhao *et al.*, 2016).

Para estudiar el efecto de las interacciones entre fracturas, algunos esquemas de física de rocas, como la Self-consistent theory (SC) por Budiansky (1965) y la Differential effective medium (DEM) por Nishizawa (1982) y Hornby *et al.* (1994), se propusieron para manejar grandes concentraciones de fracturas. Estos dos esquemas de física de rocas simulan las interacciones entre fracturas en una forma implícita, son relativamente exitosos y han sido populares en las últimas décadas (Zhao *et al.*, 2016).

Los trabajos de Grechka y Kachanov (2006a,b,c) han sido de los más sobresalientes sobre el tema y sus conclusiones han sido aceptadas por más de una década, pero los estudios recientes realizados por Shao y Pyrak-Nolte (2015) de experimentos en laboratorio de propagación de onda en medios isotrópicos con dos conjuntos de frac-



**Figura 2.** Señal propagada a través de una fractura individual (señales verde y rojo) y alrededor de una intersección (señal azul). Las posiciones donde las señales fueron registradas se muestran por los puntos verdes, rojos y azules en el recuadro superior. La intersección de fracturas atenúa fuertemente la amplitud de la señal a valores altos y bajos de esfuerzos. Shao y Pyrak-Nolte (2015)

turas ortogonales revelan que el efecto de conectividad entre fracturas es relevante. Se ha observado que las intersecciones retrasan y atenúan significativamente la señal, comparada a las fracturas individuales como se aprecia en la Figura 2, por lo que Shao y Pyrak-Nolte (2015) sugieren que este efecto debería ser considerado en la caracterización de fracturas a partir de datos sísmicos de alta resolución. Los trabajos experimentales de Shao y Pyrak-Nolte (2015) plantean los resultados que se buscan obtener desde una perspectiva de simulaciones numéricas.

Los primeros resultados de simulaciones numéricas de propagación de onda en fracturas ortogonales presentados en la literatura fueron por De Basabe *et al.* (2016), pero omite el análisis del efecto de la intersección de fracturas, restringiéndose a validar la eficacia de la implementación. Notablemente este tema también ha sido desarrollado por Rubino *et al.* (2014) donde analizan los efectos de la conectividad en un marco de interacción fractura-medio poroso a través del fenómeno de Flujo de Fluidos Inducido por Ondas (WIFF por sus siglas en inglés), en el cual el gradiente de presión se

asocia al flujo de fluidos entre estas dos regiones, produciendo atenuación de ondas. Evaluaron el efecto de la frecuencia en términos de  $Q$  (factor de atenuación) y velocidad de fase. Ellos observaron que los cambios de presión y efectos de la atenuación son producto de la conectividad entre fracturas.

#### **1.4. Hipótesis**

La conectividad de fracturas produce un efecto de atenuación en el campo de ondas que puede ser observado en los sismogramas sintéticos.

#### **1.5. Objetivo General**

Evaluar a través de simulaciones numéricas el efecto de la conectividad de fracturas en el campo de onda elástico.

##### **1.5.1. Objetivos específicos**

- Evaluar la sensibilidad de los datos sísmicos a las fracturas conectadas y ortogonales.
- Utilizando los parámetros de las fracturas, obtener modelos elásticos y anisotrópicos equivalentes utilizando el método T-Matrix.
- Valorar el efecto de la longitud de fracturas y grado de conectividad en los datos sísmicos sintéticos.
- Evaluar el efecto de la frecuencia en el campo de onda en fracturas ortogonales y conectadas.

## Capítulo 2. Teoría elástica y medios equivalentes

---

### 2.1. Teoría elástica

Debido a que las rocas son deformables, muchas propiedades de las rocas son sensibles a los esfuerzos aplicados, por lo cual en esta sección revisaremos las características principales de la anisotropía para comprender la física de la propagación de ondas en medios elásticos anisotrópicos y proporcionar la base para los desarrollos teóricos de los medios investigados en el presente trabajo.

#### 2.1.1. Anisotropía

En griego antiguo, la palabra *ανισοζ* significa diferente, desigual, y *τροφοζ*, dirección; por lo que anisotropía indica el concepto de direcciones no equivalentes (Vanucci, 2018). Otra definición de anisotropía es *variación de las propiedades físicas dependiendo de la dirección en la cual es medida* (Sheriff, 2002).

La anisotropía está presente en casi todas las rocas, debido a su proceso de formación (sedimentación y/o presión tectónica), por lo cual la isotropía es una anomalía (Tsvankin y Grechka, 2011). Además, las estructuras y los materiales creados por la naturaleza pueden ser anisotrópicos, como huesos, hojas o madera, donde la materia se organiza a lo largo de direcciones preferenciales (por ejemplo, a lo largo de la vertical) por razones biológicas (Vanucci, 2018).

Se debe describir el efecto de la dependencia de la dirección, y esto conduce a un aumento del número de parámetros que se utilizarán para la descripción del fenómeno, además deben tenerse en cuenta las posibles simetrías, ya que normalmente dan algunas relaciones sobre los parámetros que describen la propiedad (Ikelle y Amundsen, 2005).

#### 2.1.2. Ley de Hooke y ecuación de onda

La ley de Hooke establece que para esfuerzos suficientemente pequeños, la deformación es proporcional al esfuerzo (Stein y Wysession, 2003). Para un medio anisotrópico, la ley de Hooke puede ser escrita como

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad (1)$$

donde  $\epsilon_{ij}$  y  $\sigma_{kl}$  denotan los componentes del tensor de deformación de segundo orden y el tensor de esfuerzos, respectivamente. En la ecuación 1 se utiliza la convención de suma de Einstein, la cual indica una suma sobre índices repetido ( $i,j,k,l = 1,2,3$ ).  $S_{ijkl}$  denota los componentes del tensor de conformidad de cuarto orden.

La ecuación 1 puede invertirse para expresar los componentes del tensor de esfuerzos en términos del tensor de deformación, de la siguiente manera

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}, \quad (2)$$

donde  $C_{ijkl}$  denota los componentes del tensor de rigidez de cuarto orden. Los tensores de segundo orden  $\epsilon$  y  $\sigma$  poseen las siguientes simetrías

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}, \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (4)$$

Los tensores de cuarto orden  $S$  y  $C$  poseen las siguientes simetrías

$$S_{ijkl} = S_{ijlk}, \quad (5)$$

$$S_{ijkl} = S_{jikl}, \quad (6)$$

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}, \quad (7)$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl}. \quad (8)$$

Las relaciones mencionadas en las Ecuaciones 3-8 reducen el número de elementos independientes en  $S_{ijkl}$  y  $C_{ijkl}$  de 81 a 36, haciendo posible introducir la convencional notación matricial de Voigt, en la cual los pares de índices  $ij$  y  $kl$  se abrevian por índices individuales de acuerdo a la notación de la Tabla 1.

**Tabla 1.** Convención de índices en notación de Voigt.

| $ij(kl)$ | $I(J)$ |
|----------|--------|
| 11       | 1      |
| 22       | 2      |
| 33       | 3      |
| 23,32    | 4      |
| 13,31    | 5      |
| 12,21    | 6      |

Cada uno de los elementos de los tensores  $\sigma_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}$ ,  $C_{ijkl}$  y  $S_{ijkl}$  está asociado con una matriz de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \frac{1}{2}\epsilon_6 & \frac{1}{2}\epsilon_5 \\ \frac{1}{2}\epsilon_6 & \epsilon_2 & \frac{1}{2}\epsilon_4 \\ \frac{1}{2}\epsilon_5 & \frac{1}{2}\epsilon_4 & \epsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Con esa convención, las ecuaciones 1 y 2 pueden ser reescritas de la siguiente manera

$$\epsilon_i = S_{ij}\sigma_j, \quad (11)$$

y

$$\sigma_i = C_{ij}\epsilon_j. \quad (12)$$

Finalmente, la conservación de energía elástica requiere una simetría adicional

$$S_{ijkl} = S_{klij} , \quad (13)$$

$$C_{ijkl} = C_{klij} . \quad (14)$$

y el número de elementos independientes de los tensores  $C$  y  $S$  es reducido de 36 a 21 para los medios anisotrópicos más generales. Este número puede reducirse aun más si el medio muestra simetría.

Para deformaciones infinitesimales, el tensor de deformación se aproxima por el tensor de deformación de Cauchy

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) , \quad (15)$$

donde  $u$  es el desplazamiento,  $x$  es la posición. El esfuerzo y la deformación están relacionadas por las derivadas en desplazamiento, las cuales caracterizan al material. Si incluimos un termino fuente que perturbe el medio,  $f_i(x, t)$ , y combinando la ley de Hooke con la segunda ley de Newton conduce a la ecuación de onda que relaciona la rigidez con el desplazamiento (Ecuación de movimiento) y rige la propagación de ondas sísmicas compresionales (onda P) y de cizalla (onda S) con velocidades que dependen de las propiedades elásticas del material

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i(x, t) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} , \quad (16)$$

donde  $\rho$  es la densidad y  $t$  es el tiempo. Las soluciones nos dan el vector de desplazamiento, por lo tanto los tensores de esfuerzo y deformación como una función del espacio y tiempo. Para este enfoque se considero una región homogénea, dentro de un material elástico.

### 2.1.3. Clases de simetría

Se dice que los materiales para el caso anisotrópico más general con 21 constantes independientes poseen simetría *triclínica*, la clase de simetría más baja, una clase que no contiene simetría rotacional, excepto la trivial de 180° (Ikelle y Amundsen, 2005). En el extremo opuesto están los materiales en el que cada plano, es un plano de simetría. Estos materiales son isotrópicos y solo se requieren dos constantes elásticas independientes para definir el tensor elástico

$$C_{ISO} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (17)$$

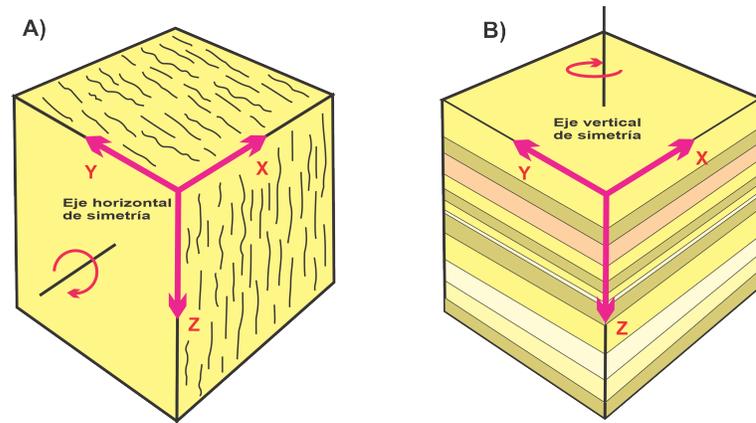
donde  $\lambda$  y  $\mu$  son las llamadas contantes de Lamé y están relacionadas con la velocidad de onda P, y de onda S, de la siguiente manera

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (18)$$

y

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (19)$$

Entre estos dos extremos (isotrópico y triclínico), hay otras diversas clases de simetría. La más común en geofísica de exploración es la de los materiales con simetría transversal (Liu y Martinez, 2012). Para estos materiales, hay un solo eje de simetría rotacional, de modo que, en direcciones perpendiculares a estos, las propiedades del material son invariantes. Por esta razón, los materiales de este tipo se describen comúnmente como *transversalmente isotropicos* o TI para abreviar. Los medios con simetría hexagonal se describen mediante cinco constantes de rigidez independientes



**Figura 3.** Isotropía Transversal (TI) es el modelo anisotrópico más empleado en geofísica aplicada. A) HTI (Horizontal Transverse Isotropy) cuando el eje de simetría es horizontal y B) VTI (Vertical Transverse Isotropy) cuando el eje de simetría es vertical.

(Ikelle y Amundsen, 2005). Las propiedades de las ondas elásticas que viajan a través de dichos medios dependen del ángulo entre la dirección de propagación y el eje de simetría.

Si el eje de simetría es vertical, el medio se llama VTI (Vertical Transverse Isotropy) y el tensor de rigidez tiene la siguiente forma

$$C_{VTI} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{11} - 2C_{66} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} - 2C_{66} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Según De Vallejo *et al.* (2002) las causas comunes para la anisotropía VTI en el subsuelo son delgadas capas horizontales o el alineamiento preferencial de fracturas o minerales durante su formación (ver Figura 3B). Este último está bien documentado para las lutitas, en las que las partículas de arcilla en forma de plaquetas están alineadas horizontalmente (ver Jakobsen *et al.*, 2003a). Las capas horizontales finas en una escala mucho más pequeña que la longitud de onda sísmica están presentes en muchas cuencas sedimentarias o fracturas horizontales, y durante mucho tiempo se ha reconocido que esta es la fuente de anisotropía VTI observada en datos de campo

(Backus, 1962; Thomsen, 1986).

Otro caso importante de anisotropía transversal está representada por isotropía transversal horizontal o HTI (ver Figura 3A), donde el eje de simetría se encuentra en el plano horizontal, con el tensor de rigidez de la siguiente forma

$$C_{HTI} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{33} & C_{33} - 2C_{44} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{33} - 2C_{44} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Los materiales que contienen fracturas verticales alineadas presentan anisotropía HTI. El descubrimiento de fracturas verticales a menudo puede estar relacionado con la dirección del esfuerzo de compresión horizontal máximo. Por lo tanto, un régimen de esfuerzos horizontales no uniformes también se consideran como una de las causas más comunes de anisotropía HTI (Lorenz *et al.*, 1996). Trabajos como los de Nishizawa (1982); Saenger y Shapiro (2002) y Schoenberg y Douma (1998), evalúan los efectos de la velocidad sísmica debido a este tipo de anisotropía.

La clase de simetría más relevante para el presente trabajo por el hecho de caracterizar medios con fracturas verticales y horizontales es la ortorrómbica. Este tipo de materiales posee tres planos de simetría ortogonales y se define utilizando nueve constantes elásticas independientes

$$C_{ORTO} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Una causa común de esta forma de anisotropía en cuencas sedimentarias es una

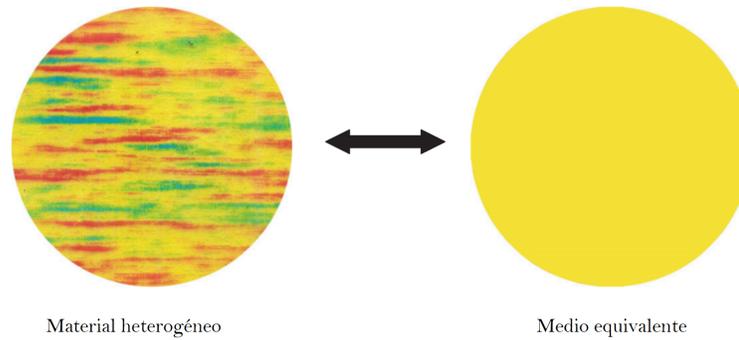
combinación de capas delgadas horizontales y fracturas alineadas verticalmente (ej. VTI y HTI) (Bush y Crampin, 1991). Los sistemas de simetría hexagonal y ortorrómbica son el foco principal de las aplicaciones sísmicas actuales, aunque existen otro tipo de simetrías descritas en la Tabla 2.

**Tabla 2.** Clases de simetría, desde el sistema más bajo (triclínico) hasta el sistema más alto que es un medio isotrópico. También se muestra a la derecha un ejemplo de la posible causa de la simetría.

| Clase de simetría   | Número de constantes elásticas | Ejemplos  |
|---------------------|--------------------------------|---|
| <b>Triclínico</b>   | 21                             |   |
| <b>Monoclínico</b>  | 11                             | Capas finas y fracturas de inmersión.   |
| <b>Ortorrómbico</b> | 9                              | Conjunto de fracturas ortogonales, fracturas verticales en medio estratificado horizontalmente. |
| <b>Hexagonal</b>    | 5                              | Un conjunto de fracturas verticales, estratos finos o lutitas.                                  |
| <b>Cúbico</b>       | 3                              | Sal de mesa. No se ha encontrado rocas con simetría cubica.                                     |
| <b>Isotrópico</b>   | 2                              | Distribución homogénea  |

Específicamente, anisotropía sísmica se refiere a la dependencia de la velocidad sísmica con respecto al ángulo. Para los medios geológicos, estas direcciones preferenciales surgen debido a su modo de emplazamiento o son dictadas por condiciones externas. Cuando una roca isotrópica contiene una distribución de inclusiones, tales como fracturas llenas de gas o líquido, que tienen orientaciones preferenciales, el medio resultante tendrá una anisotropía sísmica (Pyrak-Nolte y Cook, 1987). Debido a que la corteza de la tierra está constituida de fracturas, la anisotropía inducida por fracturas es un factor en muchos yacimientos de hidrocarburos (Aguilera, 1998).

Dado que la velocidad sustenta gran parte de la investigación en geofísica, la anisotropía de la velocidad afecta cada etapa de la exploración sísmica, desde la adquisición y el procesamiento, hasta la interpretación (Ikelle y Amundsen, 2005). Las formas de los frentes de onda en medios anisotrópicos pueden ser muy complejas dependiendo de las propiedades elásticas de los medios, siendo una regla general que una onda es más sensible a las fracturas cuando su dirección de propagación o dirección de polarización es perpendicular a las caras de las fracturas (Liu y Martinez, 2012). En geofísica aplicada, el interés principal es la anisotropía presente en rocas sedimentarias, o con-



**Figura 4.** Modelo de un medio equivalente. Este proceso es llamado homogenización, un material heterogéneo puede ser remplazado por un sólido homogéneo cuyas propiedades físicas macroscópicas son las mismas que el sólido original.

juntos de fracturas, siendo este último el enfoque del presente trabajo.

## 2.2. Teoría de medios equivalentes

Para modelar la respuesta de las ondas sísmicas en una roca fracturada, utilizamos el concepto llamado *Teoría de Medios Equivalentes* (TME); este es un proceso en el cual un sólido heterogéneo con una distribución de fracturas discretas (u otro tipo de inclusiones) se reemplaza matemáticamente por un medio homogéneo (Backus, 1962); sin embargo, el medio homogéneo y el medio original (ver Figura 4) tienen las mismas propiedades elásticas. Un material heterogéneo puede ser reemplazado por un material homogéneo efectivo o equivalente dentro de un *volumen elemental representativo* (VER) (Liu y Martinez, 2012). Considere una pieza de roca con un tamaño lineal  $L$  y un volumen  $V$ . Cualquier volumen de roca contiene, generalmente, pequeñas heterogeneidades tales como fracturas, cuya longitud está denotada por  $l$ . Las propiedades elásticas del medio puede ser descrito por el tensor de rigidez  $C(x)$  y debido a que varias heterogeneidades se encuentran en el volumen de roca, se asume que  $l \ll L$ .

Dado que la roca se define como estadísticamente homogénea, cualquier región del dominio es idéntica (Jakobsen *et al.*, 2003a), así que el desplazamiento de una onda sísmica es casi constante dentro del volumen  $V$ . Además, en nuestro VER, este campo de desplazamiento a gran escala permanece sin cambios cuando reemplazamos este volumen en particular por uno diferente que tenga las mismas propiedades elásticas promedio, o más precisamente, el mismo tensor de rigidez efectivo  $C_e$ . Por lo

tanto, podemos decir que  $C_e$ , *homogeniza* el tensor de rigidez original  $C(x)$  (Tsvankin y Grechka, 2011).

Esto se puede realizar siempre y cuando las escalas de las heterogeneidades (fracturas, inclusiones, espesor de la capa, etc.) sean más pequeñas que la longitud de onda sísmica (Grechka y Kachanov, 2006a; Hudson, 1980; Jakobsen *et al.*, 2003a). La aplicación de estos métodos es posible gracias a la diferencia significativa entre las longitudes de ondas sísmicas típicas ( $10^{+1}$  a  $10^{+2}m$ ) y las longitudes de fracturas ( $10^{-2}$  a  $10^{-1}m$ ) (Tsvankin y Grechka, 2011).

Hay muchas TME (ver Mavko y Mukerji, 2009) de las cuales varias han sido ampliamente adaptadas al área de física de rocas para aplicaciones en las geociencias. Aunque teóricamente varios modelos están disponibles, los supuestos utilizados en sus derivaciones a veces limitan su aplicabilidad.

La descripción detallada de los patrones de fractura requiere muchos parámetros, tales como (Liu y Martinez, 2012)

- Densidad.
- Orientación.
- Longitud.
- Espaciado entre fracturas.
- Apertura.
- Conectividad.
- Propiedades de fluidos (tipos, saturación, presión de poro)
- Propiedades de la matriz o roca huésped.

### **2.2.1. Teoría de Hudson y Schoenberg**

Los modelos más empleados en la industria son los de Hudson (1980) y Schoenberg (1980). Una característica de la teoría de Hudson (1980) es que la formulación de

sus ecuaciones desde el planteamiento del modelo están directamente relacionadas con la microestructura de las fracturas. El modelo de Hudson (1980,1981) se basa en un análisis de la teoría de dispersión del campo de un sólido elástico con grietas o inclusiones elipsoidales. Dadas las características de la teoría es posible modelar cada conjunto de fracturas con características diferentes del fluido o material contenido en las fracturas o relación de aspecto.

Se puede resumir el modelo de Hudson (1980,1981) en las siguientes suposiciones y limitaciones

- Requiere formas de la fractura idealizadas con pequeñas relaciones de aspecto y con baja densidad de fracturas.
- Fracturas aisladas con respecto al fluido.
- Genera valores anómalos a altos valores de densidad.
- Las ecuaciones están disponibles para conjuntos de múltiples fracturas.

Schoenberg (1980) propuso un modelo para analizar el comportamiento de la propagación de ondas a través de las interfases discontinuas (imperfectas). El enfoque para modelar los efectos de las fracturas es representarlas como capas delgadas para las cuales los módulos elásticos son más pequeños (más suaves) que los de la roca huésped no fracturada. El llamado *Linear Slip Theory* de (Schoenberg, 1980) consiste en una superficie imperfecta que separa dos medios elásticos donde los desplazamientos a través de esta superficie son considerados discontinuos, mientras que el esfuerzo de tracción es continuo a través de la interfaz.

El Linear Slip Theory se puede resumir

- Asume que la roca no fracturada es isotrópica, lineal y elástica.
- Las fracturas se asumen planas.
- Los desplazamientos se consideran discontinuos.

Analizando a las TME propuestos por Schoenberg (1980) y Hudson (1980), podemos observar que de las principales diferencias entre ellas es que la teoría de Schoenberg

(1980) agrega el efecto de las fracturas al tensor de conformidad de la roca huésped, mientras que la teoría de Hudson (1980) hace lo mismo con la rigidez, aunque la diferencia parezca menor porque la conformidad y la rigidez son recíprocos. Otro aspecto importante es que Hudson (1980) expresa las constantes elásticas efectivas a través de parámetros geométricos como la densidad de fractura, mientras que la de Schoenberg (1980) carece de un enlace directo a la microestructura.

### 2.2.2. Método T-Matrix

El método T-Matrix es moderno y adecuado en aplicaciones de física de rocas. El enfoque T-Matrix toma en cuenta las interacciones entre las inclusiones basado en funciones de correlación de puntos múltiples. Emplea la teoría de inclusión de Jakobsen *et al.* (2003a) donde las inclusiones se consideran embebidas dentro de una matriz homogénea.

El tensor de rigidez efectivo se describe como

$$C_T^* = C^{(0)} + \langle T_1 \rangle (I - \langle T_1 \rangle^{-1} X)^{-1}, \quad (23)$$

donde  $C^{(0)}$  es la matriz de rigidez de cuarto orden de la matriz homogénea o roca huésped

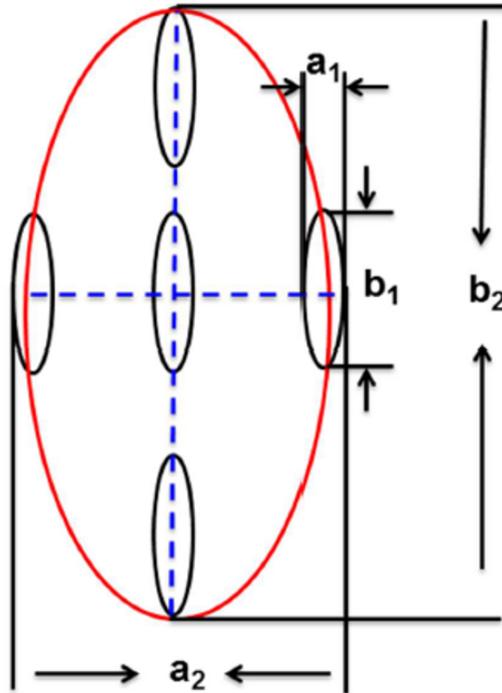
$$\langle T_1 \rangle = \sum_{r=1}^N v^{(r)} t^{(r)}, \quad (24)$$

$$t^{(r)} = \delta C^{(r)} (I - G^{(r)} \delta C^{(r)})^{-1}, \quad (25)$$

donde

$$\delta C^{(r)} = C^{(r)} - C^{(0)}. \quad (26)$$

La población de inclusiones está dividida en familias de inclusiones,  $r = 1, 2, 3 \dots n$



**Figura 5.** Ilustración esquemática de una sección transversal 2D de una distribución de fracturas 3D en un modelo T-Matrix. La relación de aspecto de las fracturas individuales es  $a_1/b_1$ , y la relación de aspecto de la distribución de fracturas es  $a_2/b_2$ . Las líneas que conectan entre la fractura central y las que lo rodean indican la interacción entre fracturas

teniendo la misma forma y orientación cuyo tensor de rigidez es  $C^{(r)}$ .

El tensor  $G^{(r)}$  está conectado con el tensor de Eshelby (1957) en el caso que la matriz contenga inclusiones con simetría hexagonal o un medio transversalmente isotrópico (TI) de la siguiente manera (Alkhimenkov, 2017)

$$G^{(r)} = -S^{(r)} : S^{(0)}, \quad (27)$$

donde  $S^{(r)}$  es el tensor de Eshelby (1957) y las componentes  $S_{ijkl}$  están dadas por (Jakobsen y Johansen, 2005)

$$S^{(0)} = (C^{(0)})^{-1}, \quad (28)$$

donde  $S^{(0)}$  es el tensor de conformidad del medio homogéneo y es simétrico  $S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}$ .

$X$  es una corrección de segundo orden para los efectos de la inclusión del tensor

$$X = - \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N v^{(r)} t^{(r)} G_d^{(rs)} v^{(s)} t^{(s)}. \quad (29)$$

Aquí  $G_d^{(rs)}$  es un tensor de cuarto orden, caracteriza la distribución espacial entre inclusiones a través de un esquema donde supone una inclusión central y otras inclusiones que la rodean (ver Figura 5), este parámetro involucra un grado de interacción entre las inclusiones.  $v^{(r)}$  es la concentración volumétrica de la inclusión tipo  $r$ .  $G_d^{(rs)}$  representa los dos puntos de interacción entre el  $r$ -ésimo conjunto y el  $s$ -ésimo conjunto de inclusiones (Mavko y Mukerji, 2009). La definición de la relación de aspecto de inclusiones y la relación de aspecto de la distribución espacial son esquemáticamente descritos en la Figura 5.

Escogimos este método dado que simula explícitamente las interacciones elásticas y permite evaluar la influencia de la distribución espacial de fracturas en el tensor de rigidez efectivo. A diferencia de métodos basados en NIA (Noninteraction approximation) desarrollados por Grechka y Kachanov (2006a) y el *Linear Slip Method* como Schoenberg (1980), que han tenido inexactitudes previamente documentadas (Hu y Mcmechan, 2009) para alta densidad de fracturas, debido a que no generan un comportamiento físicamente coherente.

## Capítulo 3. Métodos numéricos para la propagación de ondas

---

El desafío de investigar las propiedades físicas de las fracturas ha impulsado el desarrollo de nuevos métodos de modelado numérico. Hay muchos métodos que se han propuesto en la literatura para incluir directamente las fracturas en los esquemas numéricos (De Basabe *et al.*, 2016). Por ejemplo, Vlastos *et al.* (2003), modelaron la propagación de ondas sísmicas con distribuciones discretas de fracturas utilizando el método pseudoespectral; Saenger *et al.* (2004) y Saenger y Shapiro (2002), incorporan una inclusión de baja velocidad y baja densidad en un esquema de diferencias finitas; Carcione *et al.* (2012) utilizaron elementos finitos donde explícitamente usaron una condición discontinua de desplazamiento usando el *linear-slip model* de Schoenberg (1980); los trabajos de Vamaraju *et al.* (2018, 2020) y De Basabe *et al.* (2016) demuestran la efectividad del método de Galerkin Discontinuo al permitir incluir discontinuidades en el campo de desplazamiento para simular fracturas o fallas en un modelo; Vasilyeva *et al.* (2019) usaron el método de elementos finitos generalizado de multiescala para un medio viscoelástico fracturado, en el dominio de la frecuencia.

En la opinión de Leviant *et al.* (2019), un método numérico exitoso para resolver la propagación de onda en medios fracturados deberá cumplir los siguientes requerimientos

- Basarse tanto como sea posible en la física fundamental y las leyes de la mecánica de medios continuos, con una mínima inclusión de coeficientes empíricos.
- Utilizar los algoritmos más efectivos de métodos numéricos que tomen en cuenta las características específicas de la propagación de ondas en medios fracturados.
- Permitir especificar cada fractura sin limitar sustancialmente el número de fracturas.
- Asegurar un alto grado de precisión en los cálculos para evitar oscilaciones espurias.
- Una alta velocidad de cómputo que permita realizar el modelado numérico de campos de onda en tiempos razonables.

Dado que el objetivo es simular el efecto de las fracturas en la propagación de ondas, se describen brevemente algunas metodologías que permiten su implementación. Cada una ofrece una manera diferente de incluir las fracturas en los modelos con sus respectivas ventajas y desventajas.

### **3.1. Método de diferencias finitas**

La variedad de métodos de diferencias finitas es amplia por ser relativamente fáciles de implementar y lo suficiente flexibles como para aplicar a dominios complejos, además de que proporcionan precisión y eficiencia computacional aceptables (Leviant *et al.*, 2019).

Los primeros algoritmos de este tipo fueron introducidos por Coates y Schoenberg (1995), quienes presentan un método para modelar los efectos de una falla de deslizamiento con diferencias finitas usando una condición discontinua de desplazamiento. En las últimas décadas, el método se ha utilizado ampliamente en estudios relacionados a las fracturas. Saenger *et al.* (2004) y Saenger y Shapiro (2002) incorporan una inclusión de baja velocidad y baja densidad en un esquema de diferencias finitas; Wu *et al.* (2005) incluyen fracturas saturadas en un modelado directo con diferencias finitas usando la formulación de un medio equivalente; Fang *et al.* (2013) emplean este método para el análisis de la dispersión de fracturas en modelos de dos y tres dimensiones.

### **3.2. Método de elementos espectrales**

Este método fue introducido por Patera (1984) para dinámica de fluidos. Los principales atributos del método es que permite utilizar bases de orden superior, su capacidad de manejar modelos con topografía abrupta, una representación precisa de ondas superficiales y refractadas, su eficiencia computacional y que se puede paralelizar a gran escala (Komatitsch *et al.*, 2000).

Ha sido exitosamente aplicado a problemas de propagación de onda acústica en 2D y 3D relacionado a medios isotrópicos por Seriani y Priolo (1994), proporcionando mejor precisión que el método de diferencias finitas. Fue introducido a la propagación de ondas elásticas por Komatitsch y Vilotte (1998) y ganó popularidad al aplicarse a pro-

blemas de sismología regional y mundial (Komatitsch *et al.*, 2005). El método también se ha aplicado con éxito a problemas que involucran la propagación de ondas en medios elásticos anisotrópicos con regiones fluidas y solidas por Komatitsch *et al.* (2000) o para el modelado de ondas Rayleigh en medios viscoelásticos por Ping *et al.* (2013). En el estudio de medios fracturados, Martin *et al.* (2008) simulan la propagación de ondas en un modelo fracturado de un asteroide empleando mallas no estructuradas, con el objetivo de estudiar la propagación de ondas sísmicas resultantes del impacto de dichos modelos y mas recientemente Ponomarenko *et al.* (2020) emplean un esquema que utiliza el método de elementos espectrales con el linear-slip model de Schoenberg (1980) para un medio heterogéneo en tres dimensiones.

### **3.3. Método de Galerkin discontinuo**

Las simulaciones de propagación de onda se harán con el método de Galerkin discontinuo. De Basabe *et al.* (2016) han propuesto un nuevo esquema que incorpora fracturas usando el Linear Slip Model (Schoenberg, 1980) dentro del método de Galerkin Discontinuo de Penalización Interior (IP-DGM) para la propagación de ondas elásticas. Trabajos como los de Vamaraju *et al.* (2018, 2020), Moller y Friederich (2019) y Zhan *et al.* (2017) han demostrado la efectividad de este método para la caracterización de fracturas.

El método de Galerkin Discontinuo es una generalización del método de elementos finitos que utiliza funciones discontinuas en las fronteras de los elementos (De Basabe *et al.*, 2016). Las ventajas de este método incluyen la capacidad para manejar mallas no estructuradas, y la paralelización en computadoras de alto rendimiento. El método es adecuado para incorporar fracturas o fallas ya que los grados de libertad en cada elemento no están compartidos con los elementos vecinos. También hereda las ventajas del método de elementos finitos porque puede incorporar condiciones de frontera tipo Dirichlet, Neumann o Robin, además de que permite añadir topografía y heterogeneidades arbitrarias. La estabilidad de este método para la propagación de ondas ha sido estudiado por De Basabe y Sen (2010).

### 3.3.1. Formulación débil de la ecuación de onda para incluir fracturas

El método para incluir fracturas dentro de las simulaciones de propagación de ondas está basada en la siguiente formulación débil de la ecuación de onda por De Basabe *et al.* (2016):

encontrar  $u \in X$  tal que para todo  $v \in X$

$$\sum_{E \in \Omega_h} ((\rho \partial_{tt} u, v)_E + B_E(u, v)) + \sum_{\gamma \in \Gamma_c} J_\gamma^c(u, v) + \sum_{\gamma \in \Gamma_f} J_\gamma^f(u, v) = \sum_{E \in \Omega_h} (f, v)_E, \quad (30)$$

donde  $u_i, v_i$  son los campos de desplazamiento,  $X = X^d, X = span\{\phi_i\}_{i=1}^N$ ,  $\phi_i$  son las funciones base discontinuas, N es el número total de funciones base,  $\Omega_h$  denota una partición de elementos finitos del dominio  $\Omega$ ,  $\Gamma_c$  y  $\Gamma_f$  son los conjuntos de las caras entre los elementos donde el dominio es continuo y fracturado respectivamente,  $\rho = \rho(x)$  es la densidad,  $\lambda = \lambda(x)$  y  $\mu = \mu(x)$  son los parámetros de Lamé, f es el vector fuente,  $\tau_i$  es el vector de tracción, y

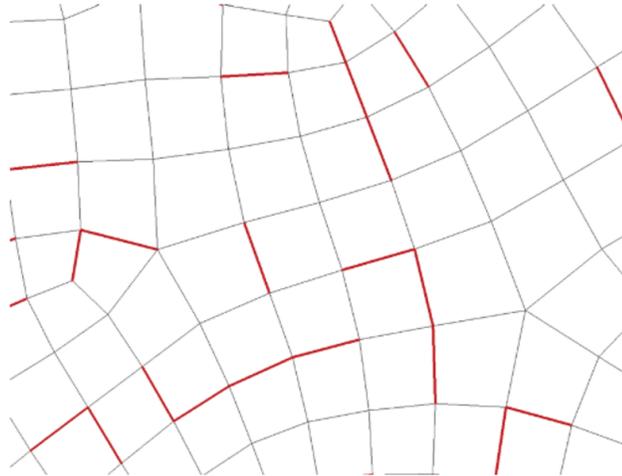
$$(u, v)_E = \int_E u_i v_i dx, \quad (31)$$

$$B_E(u, v) = \int_E (\lambda(u_{i,i} v_{j,j} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) v_{i,j}) dx, \quad (32)$$

$$J_\gamma^c(u, v) = - \int_\gamma \tau_i(u) [v_i] d\gamma + S \int_\gamma \tau_i(v) [u_i] d\gamma + \frac{R}{|\gamma|} \int_\gamma \lambda + 2\mu [u_i] [v_i] d\gamma, \quad (33)$$

$$J_\gamma^f(u, v) = \int_\gamma Z_{ij}^{-1} [u_j] [v_i] d\gamma, \quad (34)$$

donde R es el parámetro de penalización y S toma diferentes valores dependiendo de la formulación de IP-DGM



**Figura 6.** Ejemplo de un mallado de elementos finitos para un modelo fracturado. Las fracturas se indican con gruesas líneas rojas (De Basabe *et al.*, 2016).

- Simétrico (SIPG),  $S = -1$ ,
- No simétrico (NIPG),  $S = 1$ ,
- Incompleto (IIPG),  $S = 0$ .

La formulación empleada en las simulaciones es SIPG al ser la que mejor se adapta para la propagación de ondas en medios con fracturas.

Hay que notar que el término  $J_\gamma^f$  impone las condiciones de fractura, donde  $Z$  es la matriz de conformidad de la fractura y se puede escribir como

$$Z_{ij} = Z_N n_i n_j + Z_T (\delta_{ij} - n_i n_j), \quad (35)$$

donde  $Z_T$  y  $Z_N$  son los componentes normal y tangencial de la matriz de conformidad,  $n_i$  son los componentes del vector normal a la fractura y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. En consecuencia, si la conformidad tiende a cero sería equivalente a asignar una penalización tendiendo a infinito y actuaría como una fractura sellada.

Se asume en la Ecuación 30 que las fracturas están en las interfaces entre los elementos en el mallado de elementos finitos (ver Figura 6) para ser capaz de apropiadamente simular la discontinuidad. Fracturas de diferentes geometrías o ángulo entre

ellas pueden ser simuladas ajustando el mallado de elementos finitos a las fracturas. En nuestro caso las fracturas tendrán ángulos de 90°.

### 3.4. Código Seismic Wave Propagation

*Seismic Wave Propagation* (SWP) es un código escrito en lenguaje C++ por De Basabe (2009) para simular la propagación de ondas tanto acústicas como elásticas en 2D y 3D. Su principal característica es que integra diversos métodos de simulación numérica para la discretización en espacio y tiempo para la ecuación de onda elástica y acústica, por lo tanto permite comparar la precisión de los métodos.

La versatilidad del código permite diseñar una amplia variedad de experimentos de propagación de ondas y crear modelos que repliquen mejor las condiciones del subsuelo, algunos de ellos se explican en la tabla 3.

El código genera diferentes archivos de salida:

- **Gráficas instantáneas** - Registro de los campos de onda, las cuales se guardan en archivos binarios, por ejemplo NetCDF o Exodus.
- **Trazas sintéticas** - Series de tiempo de los campos de onda. El número y localización depende del diseño de los modelos.
- **Sismogramas** - Funciones del tiempo que guardan el campo de ondas en un punto. El número y localización de puntos es configurable en el archivo de entrada.

**Tabla 3.** Parámetros de entrada para el software SWP.

| <b>Parámetro</b>                              | <b>Descripción</b>  |
|---|---|
| Modelo físico                                 | Hay 4 disponibles: Acústico, elástico, fracturado, anisotrópico                           |
| Dimensiones                                   | 2D o 3D   |
| Malla   | Tipo de malla   |
| Método para discretización en tiempo          | Diferencias finitas de 2do. orden, Runge-Kutta de 4to. orden y Lax-Wendroff de 4to. orden |
| Condiciones de frontera                       | Neumann, Taper o periódicas   |
| Receptores                                    | Número de receptores y su posición  |
| <b>Fuentes</b>                                |   |
| Tipo  | Fuente puntual, onda plana compresional u onda plana de corte                             |
| Función de la fuente                          | Función Gaussiana u ondícula de Ricker  |
| Ancho de tiempo                               | Desfasamiento en tiempo   |
| Ancho de fuente                               | Área de distribución de la fuente   |
| Frecuencia                                    | Frecuencia de la fuente   |
| Vector de la fuente                           | Polarización de la fuente   |
| <b>Parámetros Método Galerkin Discontinuo</b> |   |
| Formulación                                   | SIPG, IIPG o NIPG   |
| Funciones base                                | Nodal-GLL, Nodal-Gauss y Modal-Legendre   |
| <b>Parámetros de fractura</b>                 |   |
| Tipo  | Fracturas verticales, horizontales o aleatorias   |
| $Z_t$ y $Z_n$                                 | Componentes normal y tangencial de la matriz de conformidad                               |

## Capítulo 4. Diseño de experimentos

---

En este capítulo se describen los experimentos llevados a cabo para la simulación de propagación de ondas elásticas en medios con fracturas conectadas y no conectadas. También se describen las características de los modelos fracturados y los parámetros involucrados para evaluar el efecto de las fracturas en el campo de ondas, permitiendo evaluar los efectos de la conectividad de fracturas en función del grado de conectividad y la longitud de las mismas. También se describe la construcción de los modelos anisótropos, así como el control de calidad y procesamiento de los datos de la simulación.

Finalmente, se especifica la implementación del método T-Matrix para la obtención de las matrices de rigidez efectivas y así evaluar la efectividad del método de caracterizar la interacción entre fracturas.

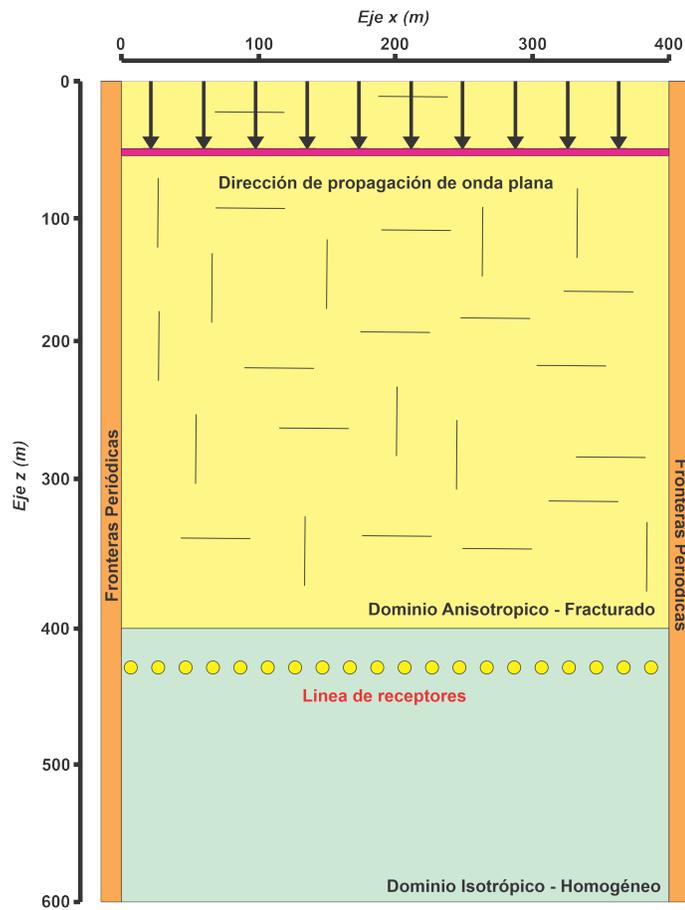
### 4.1. Diseño de modelos

Se planteó un dominio fracturado de 400 x 400m y por debajo de este, un dominio isotrópico - homogéneo de 400 x 200m sin fracturas (ver Figura 7).

Aunque las ondas de corte (ondas S) son ideales para la detección de fracturas, estas ondas no son usadas comúnmente en campo debido a los altos costos y las dificultades de acoplar ondas de corte en el subsuelo (Tsvankin y Grechka, 2011), por lo que se consideró como fuente una onda plana compresional (onda P) generada en la superficie. Una característica importante de las ondas planas es que no sufren atenuación por divergencia esférica.

Las condiciones de frontera laterales (ver Figura 7) son periódicas, dado que la onda plana propagada es infinita a la izquierda y a la derecha, estas fronteras evitaran que se generen reflexiones no deseadas a los extremos. En las fronteras superior e inferior se usan condiciones de superficie libre, limitándonos a estudiar el efecto de transmisión de la onda propagada y no así la onda reflejada.

Bajo el dominio que contiene las fracturas, se ubica una línea con 20 receptores equidistantes. Para los valores de onda P, onda S y densidad del medio se escogieron



**Figura 7.** Diseño para las simulaciones numéricas del proyecto. Se considera un dominio anisotrópico - fracturado (parte superior) y un dominio isotrópico-homogéneo (parte inferior) con fronteras periódicas a ambos lados del modelo y una línea de receptores.

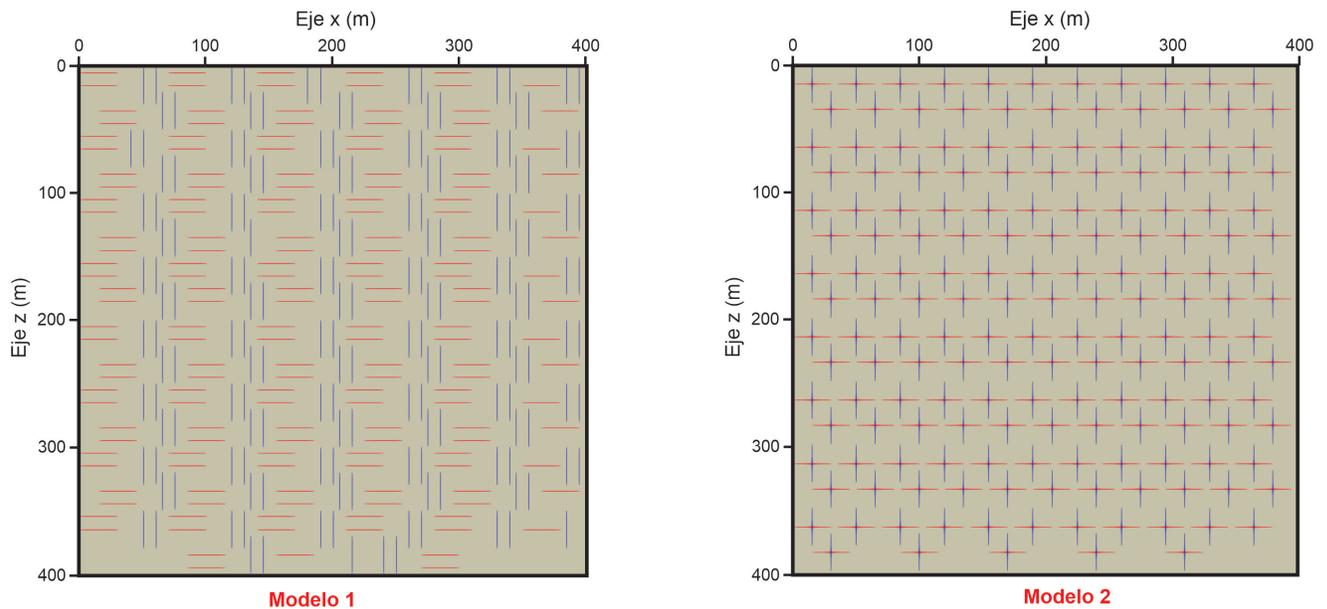
valores promedio de rocas carbonatadas (ver tabla 4) que se caracterizan por su alto contenido de fracturas.

#### 4.2. Modelos anisotrópicos

Las propiedades físicas de las rocas dependen de los puntos ensayados (heterogeneidad), de la dirección considerada para su determinación (anisotropía) y del volumen involucrado (efecto escala) (De Vallejo *et al.*, 2002). Este volumen, el más pequeño considerado representativo del comportamiento del macizo rocoso para una determinada propiedad, es el *volumen elemental representativo* (Liu y Martinez, 2012). Los modelos representados en este proyecto son mayores que los volúmenes de roca que se estudian en laboratorio habitualmente (ver Shao y Pyrak-Nolte, 2015), permitiendo a las discontinuidades tener un efecto considerable en el campo de ondas.

**Tabla 4.** Parámetros de los modelos

| <b>Características del modelo</b>   |                           |
|-------------------------------------|---------------------------|
| Dimensiones subdominio fracturado   | 400 x 400 [m]             |
| Dimensiones subdominio homogéneo    | 400 x 200 [m]             |
| Velocidad de onda P                 | 3200 [m/s]                |
| Velocidad de onda S                 | 1600 [m/s]                |
| Densidad                            | 2500 [kg/m <sup>3</sup> ] |
| <b>Características de la fuente</b> |                           |
| Frecuencias                         | 60, 75, 90 y 105 Hz       |
| Función fuente                      | Ricker                    |

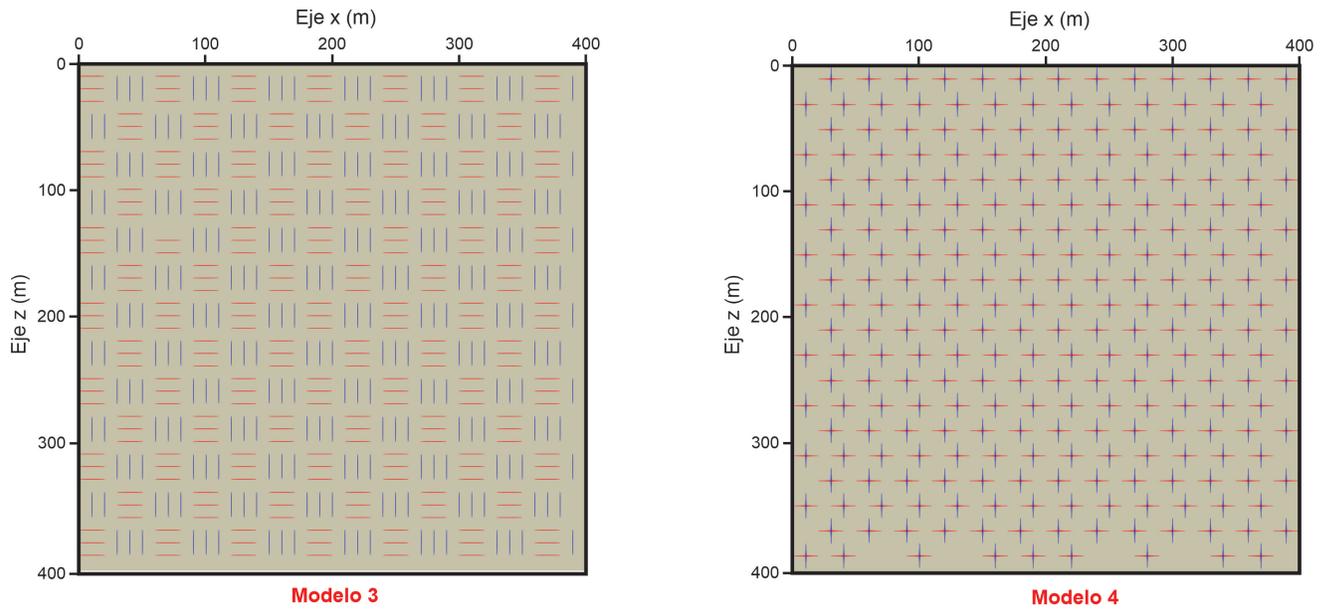


**Figura 8.** Longitud de fractura de 30 m. Modelo 1 (izquierda) con fracturas discretas no conectadas y Modelo 2 (derecha) con fracturas discretas conectadas ortogonalmente.

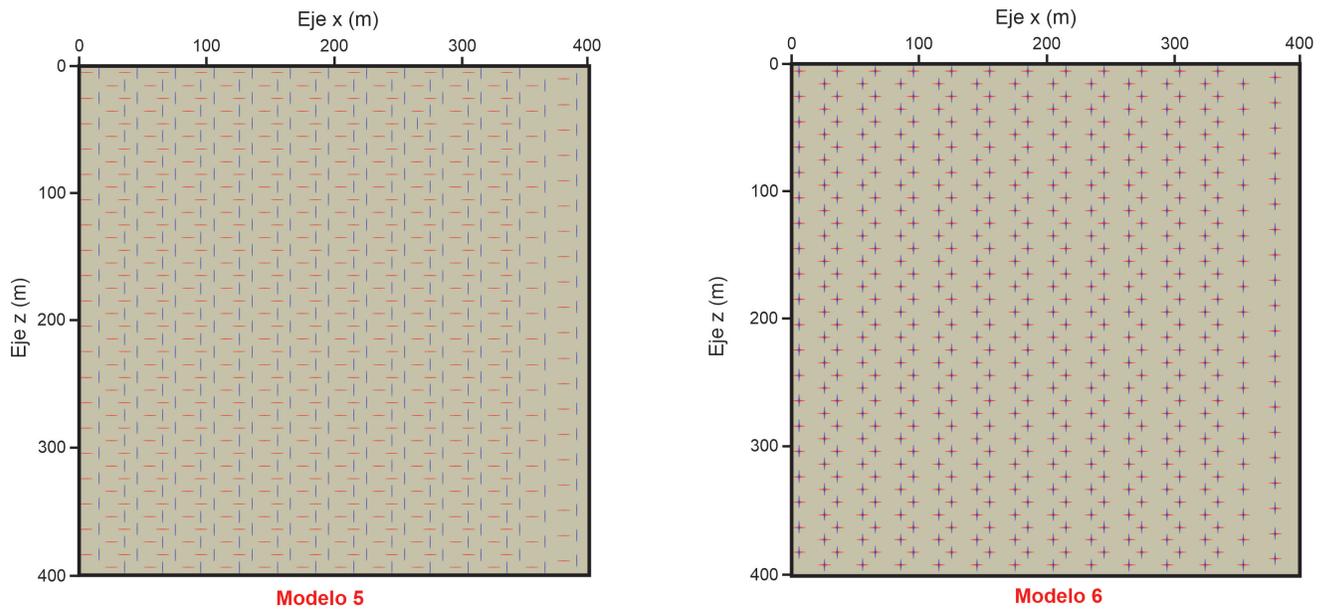
Dado que el principal objetivo es analizar la diferencia entre los campos de onda sísmicos correspondiente a los sistemas de fracturas conectados y desconectados ortogonalmente, se propusieron una serie de experimentos que permitan evaluar esta propiedad. Además, el diseño de los modelos fue planteado de tal manera que permita observar el efecto que tiene la longitud de las fracturas así como el grado de conectividad en el campo de ondas.

El IP-DGM permite incluir fracturas discretas como pequeñas discontinuidades entre las fronteras de los elementos (ver Figura 6), siendo posible ubicar espacialmente cada una de las fracturas y precisar tanto la longitud como su orientación en el modelo.

Se generaron volúmenes representativos con una distribución idealizada u homo-



**Figura 9.** Longitud de fractura de 20 m. Modelo 3 (izquierda) con fracturas discretas no conectadas y Modelo 4 (derecha) con fracturas discretas conectadas ortogonalmente.



**Figura 10.** Longitud de fractura de 10 m. Modelo 5 (izquierda) con fracturas discretas no conectadas y Modelo 6 (derecha) con fracturas discretas conectadas ortogonalmente.

**Tabla 5.** Características de los modelos anisotrópicos

| MODELOS NO CONECTADOS |                   |                        |                     | MODELOS CONECTADOS |                   |                        |                     |
|-----------------------|-------------------|------------------------|---------------------|--------------------|-------------------|------------------------|---------------------|
| Nombre                | Longitud fractura | Parámetros de fractura |                     | Nombre             | Longitud fractura | Parámetros de fractura |                     |
|                       |                   | $Z_t$                  | $Z_n$               |                    |                   | $Z_t$                  | $Z_n$               |
| <i>Modelo 1</i>       | <b>30 m</b>       | $8 \times 10^{-10}$    | $2 \times 10^{-10}$ | <i>Modelo 2</i>    | <b>30 m</b>       | $8 \times 10^{-10}$    | $2 \times 10^{-10}$ |
| <i>Modelo 3</i>       | <b>20 m</b>       | $8 \times 10^{-10}$    | $2 \times 10^{-10}$ | <i>Modelo 4</i>    | <b>20 m</b>       | $8 \times 10^{-10}$    | $2 \times 10^{-10}$ |
| <i>Modelo 5</i>       | <b>10 m</b>       | $8 \times 10^{-10}$    | $2 \times 10^{-10}$ | <i>Modelo 6</i>    | <b>10 m</b>       | $8 \times 10^{-10}$    | $2 \times 10^{-10}$ |

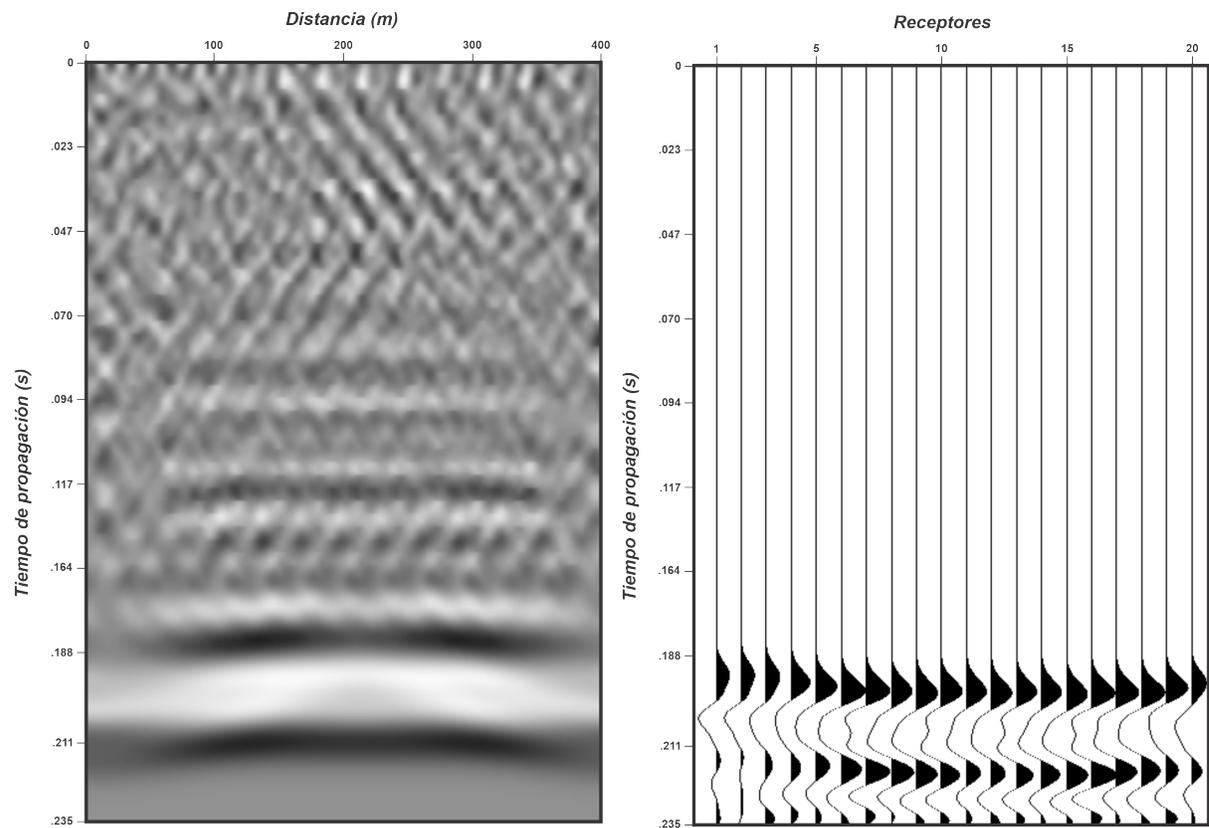
génea de las fracturas, con el mismo número de fracturas horizontales y verticales (ver Figuras 8-10). La densidad de fractura permanece constante en todos los modelos así como las propiedades físicas de las fracturas  $Z_t$  y  $Z_n$ , para que el efecto en el campo de ondas sea producto de la conectividad.

En la naturaleza, los sistemas de fractura en las rocas se encuentran dispersos y distribuidos en varias direcciones preferenciales dependiendo del estado de esfuerzos durante su formación, a pesar de esto, los modelos generados simulan convenientemente rocas fracturadas donde la conectividad ortogonal de fracturas favorece la permeabilidad de las rocas para la transmisión de fluidos.

Las dimensiones de los elementos de nuestra malla es de 10 x 10 m, que es el tamaño más pequeño de las inclusiones que podemos incorporar en los modelos. La variación del tamaño de los elementos tiene un impacto directo en el tiempo de ejecución del programa, siendo de 18 minutos para cada uno de nuestros modelos.

Se empleó el programa *XWIGB* de Seismic Unix para ratificar el correcto arribo de la señal registrada en los receptores así como visualizar que las amplitudes tengan coherencia con un arribo de onda P de la fuente. También se usó *XIMAGE* que nos permite graficar el campo de ondas a lo largo del dominio fracturado. (ver Figura 11).

La visualización de la malla que contiene las fracturas es mediante *Paraview*, con los archivos de salida tipo *EXODUS*. Estos archivos contienen la información referente a la distribución geométrica de las fracturas en el volumen representativo para validar que están perfectamente ubicadas de acuerdo a los criterios de diseño.



**Figura 11.** (Izquierda) Visualización de la herramienta *XIMAGE* para el modelo 3, se observa el efecto que tienen las fracturas en el campo de ondas. Tiempo de propagación .235 s. (Derecha) Herramienta *XWIGB* la cual despliega las formas de onda registradas en los 20 receptores.

### 4.3. Implementación del método T-Matrix

Con este método se busca evaluar el efecto de la conectividad entre fracturas y replicar lo más posible los modelos con fracturas discretas. La obtención del tensor de rigidez efectivo va a permitir realizar las simulaciones numéricas como si tuviéramos un medio con fracturas, ya que en el irá contenida toda la información referente a las fracturas como su distribución y densidad.

La implementación de T-Matrix se desarrolló a través del lenguaje *Python* con las librerías *Math* para la notación matemática y *NumPy* para almacenar eficientemente las matrices y vectores.

Se emplean las Ecuaciones 23 - 26 para obtener el tensor de rigidez efectivo. Para la implementación numérica, en lugar de la notación de Voigt comúnmente usada, se utiliza la notación de Kelvin para tensores de cuarto orden en términos de matrices de 6x6. Esta notación es más eficiente porque las operaciones matriciales pueden ser

realizadas de acuerdo con las reglas matriciales usuales del álgebra lineal (Mavko y Mukerji, 2009).

El tensor de cuarto orden está dado en la notación de Kelvin (o Mandel) por

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \sqrt{2}C_{1123} & \sqrt{2}C_{1131} & \sqrt{2}C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & \sqrt{2}C_{2223} & \sqrt{2}C_{2231} & \sqrt{2}C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & \sqrt{2}C_{3323} & \sqrt{2}C_{3331} & \sqrt{2}C_{3312} \\ \sqrt{2}C_{2311} & \sqrt{2}C_{2322} & \sqrt{2}C_{2333} & 2C_{2323} & 2C_{2331} & 2C_{2312} \\ \sqrt{2}C_{3111} & \sqrt{2}C_{3122} & \sqrt{2}C_{3133} & 2C_{3123} & 2C_{3131} & 2C_{3112} \\ \sqrt{2}C_{1211} & \sqrt{2}C_{1222} & \sqrt{2}C_{1233} & 2C_{1223} & 2C_{1231} & 2C_{1212} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Esta representación tiene la ventaja de que los productos de matriz-matriz coinciden con el doble producto interno de tensores de cuarto orden como los de la Ecuación 27 y la inversa coinciden también, por lo que

$$[A : B] = [A] \cdot [B], \quad (37)$$

y

$$[A^{-1}] = [A]^{-1}, \quad (38)$$

donde  $\cdot$  es el usual producto interno entre matrices y la inversa del tensor de cuarto orden es la inversa de este tensor en la notación de Kelvin.

La teoría no requiere que  $C^0$  sea isotrópico, pero el análisis se facilita si asumimos que así sea el caso (Alkhimenkov, 2017). A partir de las Ecuaciones 17 a 19 se genera el tensor de referencia isotrópico, calculando los valores  $\lambda$  y  $\mu$  a partir de las velocidades de onda P y S de la Tabla 4. Esta roca huésped va a tener las mismas propiedades elásticas del medio en el que se propagó la onda en los modelos con fracturas discretas.



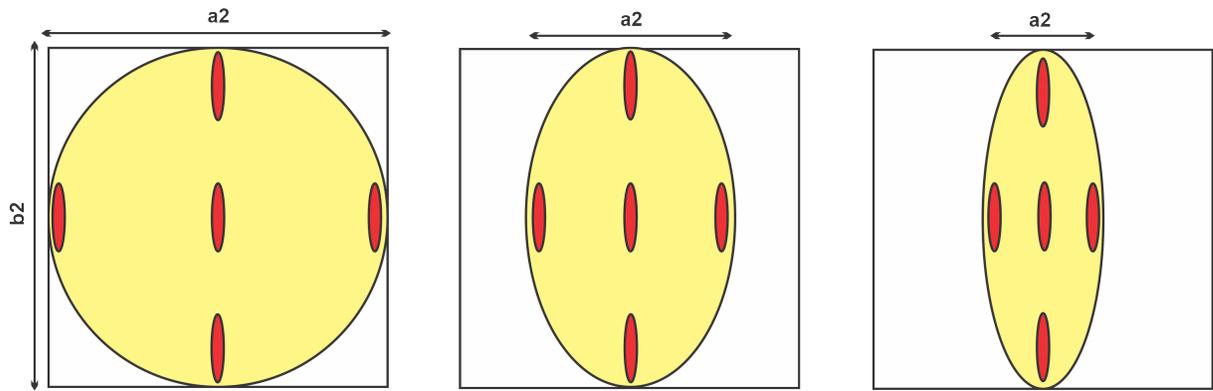
**Figura 12.** La misma densidad de fractura puede ser causada por fracturas grandes (izquierda) o por varias fracturas pequeñas (derecha), por lo que T-Matrix no permite caracterizar la longitud de fracturas.

La Ecuación 24 requiere el cálculo de la densidad de fractura que es función del radio y número de fracturas así como del volumen que las contiene (Liu y Martinez, 2012). La misma densidad de fractura puede ser causada por unas pocas fracturas de gran tamaño o un conjunto de varias fracturas pequeñas (ver Figura 12), siendo una desventaja del método al no poder evaluar el efecto de la longitud de fracturas. Cuando la densidad de fractura es pequeña, las distancias entre las fracturas son grandes, y el efecto de cada fractura es independiente de la existencia de otras fracturas, de manera que la interacción puede ser ignorada y así el tensor de rigidez efectivo incluye solo la suma de los efectos de las fracturas individuales (Zhao *et al.*, 2016).

Las propiedades elásticas de las fracturas se incluyen a través del tensor llamado t-matrix de la fractura individual,  $t^r$ , con las Ecuaciones 25 y 26. Si  $r$  representa una cavidad saturada de fluido, entonces  $C^r$  está relacionado con el módulo de Bulk del fluido que lo satura (Jakobsen *et al.*, 2003a). En el caso del presente proyecto se plantean fracturas secas. De acuerdo con Nakagawa y Schoenberg (2007), es posible caracterizar las propiedades elásticas de las fracturas secas en términos de los componentes normal y tangencial de las fracturas,  $Z_t$  y  $Z_n$  de la siguiente manera

$$Z_t = \frac{h}{\mu^f}, \quad (39)$$

$$Z_n = \frac{h}{K^f + \frac{4}{3}\mu^f}, \quad (40)$$



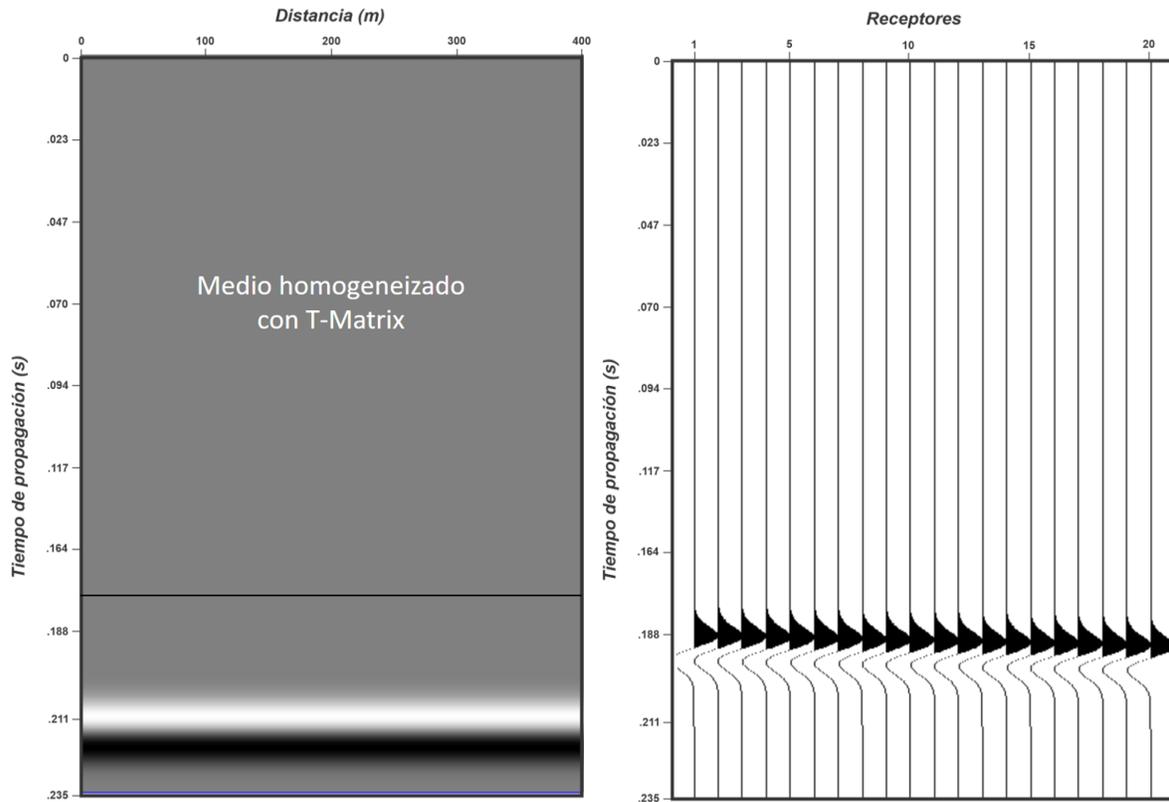
**Figura 13.** Efecto de la relación de aspecto de correlación espacial ARD. A altas densidades de fractura la selección de este valor juega un rol importante para la interacción de fracturas.

donde  $K^f$  y  $\mu^f$  son el módulo de Bulk y de corte de las fracturas secas, respectivamente, y  $h$  su apertura, definida por la relación de aspecto de la fractura,  $h = a/c$ , donde el semieje menor de la elipse es  $a$  y el semieje mayor de la elipse es  $c$ ; de aquí que si  $h$  es pequeña, la fractura es plana o cerrada. Considerando los valores de  $Z_t$  y  $Z_n$  en la Tabla 5, empleados en los modelos con fracturas discretas y una apertura de .01 que refleja una fractura cerrada, obtenemos .049 GPa para  $K^f$  y .0125 GPa para  $\mu^f$ . Estos valores permiten construir el tensor  $C^r$  y así relacionar las propiedades elásticas de las fracturas del medio equivalente con aquellas definidas en los modelos discretos.

El trabajo de Jakobsen y Johansen (2005) da los componentes para calcular  $S_{ijkl}^r$ , relacionándolo con el tensor de Eshelby (1957) en el caso de un medio transversalmente isotrópico como es nuestro caso, dado que se trabaja con fracturas puramente horizontales y verticales. Esto permite evaluar el tensor de cuarto orden  $G^r$  con la Ecuación 27. El tensor  $G^r$  puede ser calculado para inclusiones con cualquier forma y orientación, pero entonces se pierde la simplicidad de la Ecuación 27.

La Ecuación 27 para el cálculo de  $G^r$  dada por Jakobsen y Johansen (2005) requiere de la razón de aspecto de la fractura ( $a_1/b_1$ ) (ver Figura 5), esta ecuación puede ser usada de la misma manera para obtener el tensor  $G^{rs}$  de la Ecuación 29, pero ahora empleando la razón de aspecto de correlación espacial o de distribución (ARD) ( $a_2/b_2$ ) (Alkhimenkov, 2017).

Esta razón de aspecto es usada para estimar las interacciones entre las inclusio-



**Figura 14.** (Izquierda) Campo de ondas propagándose a través de un medio con fracturas homogeneizado por el método T-Matrix. (Derecha) Formas de ondas registradas en los 20 receptores (derecha).

nes más cercanas entre sí. Cuando el valor de  $ARD$  es cambiado, la distancia relativa vertical y horizontal entre las fracturas cambia (ver Figura 13), así a altas densidades de fractura la distribución de fracturas juega un papel importante (Zhao *et al.*, 2016), por lo que las interacciones entre fracturas son fuertemente dependientes de la distribución espacial controlada por  $ARD$ .

Algunas teorías de medios equivalentes infieren implícitamente solo para fracturas orientadas y distribuidas aleatoriamente que a altas densidades de fractura, las fracturas deben de interactuar (Budiansky, 1965; Nishizawa, 1982; Hornby *et al.*, 1994), pero T-Matrix tiene este factor geométrico a través del tensor  $G^{rs}$  para estimar los efectos de interacción entre las inclusiones.

Para buscar la mayor correlación entre los modelos con fracturas discretas (ver Figuras 8-10) y los caracterizados a través de T-Matrix, se plantearon dos familias de inclusiones. Cada familia tendrá la misma forma y propiedades elásticas pero diferente orientación, una con fracturas horizontales (VTI) y otra con fracturas verticales (HTI),

cuyos tensores de rigidez son  $C_1^r$  y  $C_2^r$ , respectivamente. Cada familia aporta la mitad de la densidad total, por lo que el tensor de rigidez efectivo final contendrá el efecto de ambas familias en un medio homogeneizado.

Se mantuvieron las mismas características de diseño con respecto a los dominios, ubicación de fuentes y fronteras para las simulaciones con el método T-Matrix. La Figura 14 muestra el campo de desplazamiento de la onda propagada a través del dominio homogeneizado por el método T-Matrix y los sismogramas. La figura permite corroborar que las simulaciones se realizaron de acuerdo a los criterios de diseño y que no existen problemas de dispersión en los datos.

Con los archivos generados por las simulaciones numéricas, no es posible un tratamiento más sofisticado de los datos para buscar posibles diferencias entre los modelos discretos conectados y no conectados, menos aún una comparación con T-Matrix. Para eso, se trabajaron los archivos como datos matriz con MATLAB para obtener una traza promediada de los 20 receptores, la cual va a contener toda la información referente al campo de ondas propagado. Este primer procesamiento permite ubicar mejor nuestros datos en fase y amplitud para así poder extraer información que permita generar conclusiones acerca de la naturaleza de los medios fracturados.

## Capítulo 5. Resultados y discusión

---

En este capítulo se analizan los sismogramas de las simulaciones numéricas con fracturas discretas y el medio equivalente T-Matrix. Se muestran los espectros de frecuencia de los modelos discretos para mostrar el efecto de la conectividad. Con la transformada de ondícula y un análisis de coherencia en el plano tiempo-frecuencia, se estudia la correlación de los sismogramas en los modelos conectados y no conectados, para finalmente hacer una comparación de las series de tiempo obtenidas con T-Matrix y los modelos discretos, y así evaluar la efectividad del método para caracterizar medios fracturados.

### 5.1. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier (TF) es un método matemático empleado para transformar señales entre el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia (Torrence y Compo, 1998). La TF permite calcular la contribución de cada frecuencia en la señal y así obtener el espectro de frecuencias de una función; es decir, con la TF se obtiene un solo espectro de frecuencias para toda la función (Kumar y Foufoula-Georgiou, 1997). Se utiliza para pasar una señal al dominio de la frecuencia y así obtener información que no es evidente en el dominio temporal. Por ejemplo, es más fácil saber sobre que ancho de banda se concentra la energía de una señal analizándola en el dominio de la frecuencia.

Para el cálculo de la TF discreta, se realizó una transformada rápida con la paquetería MATLAB usando la función *fft*. La transformada rápida de Fourier es un algoritmo que reduce el tiempo de cálculo, cuyo único requisito es que el número de puntos en la serie tiene que ser una potencia de 2 ( $2^n$  puntos).

Las ecuaciones con las que MATLAB calcula la TF  $Y = \text{fft}(X)$  y la transformada inversa  $X = \text{ifft}(Y)$ , son respectivamente:

$$Y(k) = \sum_{j=1}^n X(j) W_n^{(j-1)(k-1)}, \quad (41)$$

$$X(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y(k) W_n^{-(j-1)(k-1)}, \quad (42)$$

donde

$$W_n = e^{(-2\pi i)/n}. \quad (43)$$

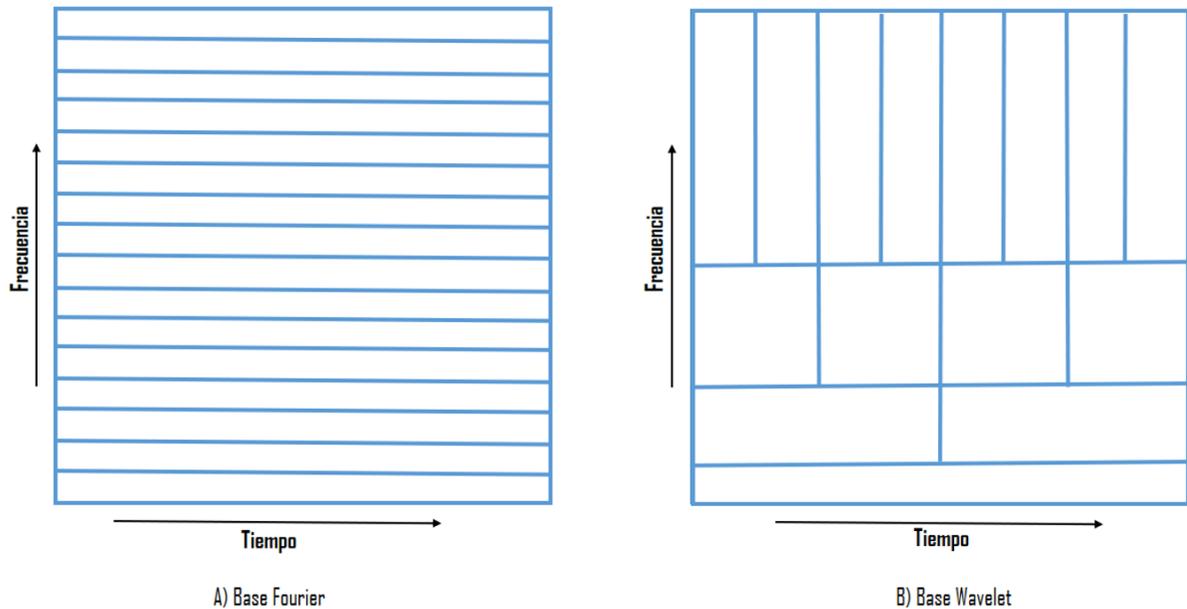
Las ecuaciones anteriores se aplican dado que se tiene una señal discreta con un conjunto de  $n$  pares de datos  $(t_n, X_n)$ , igualmente espaciados en el tiempo por un intervalo  $\Delta t$ .

## 5.2. Análisis de ondículas

Las transformadas de ondículas se originaron en la geofísica a principios de los 80's para el análisis de señales sísmicas (Kumar y Foufoula-Georgiou, 1997). Desde entonces, avances significativos en la teoría de ondículas han permitido su aplicación en otras áreas de estudio. El poder del análisis de ondículas está siendo explotado para el estudio de procesos no estacionarios, detección de singularidades, análisis de fenómenos transitorios y compresión de señales en diversas áreas como la sismología, meteorología, climatología, oceanología, telecomunicaciones, etc.

La idea básica de esta transformada es usar un plano tiempo-frecuencia que indique el contenido de frecuencias de una señal en cada tiempo, a diferencia del caso de las bases de Fourier, obtenemos una localización exacta en frecuencia, pero ninguna en el tiempo (Kumar y Foufoula-Georgiou, 1997), que se representa mediante largas celdas horizontales en la Figura 15 (A).

La transformada de ondícula está basada en una descomposición en bandas del plano tiempo-frecuencia. En este esquema, las frecuencias más altas pueden localizarse bien en el tiempo, pero la incertidumbre en la localización aumenta a medida que aumenta la frecuencia, lo que se refleja como celdas más altas y delgadas con un aumento de la frecuencia (Torrence y Compo, 1998). Consecuentemente, el eje de las frecuencias está participando finamente solo cerca de las frecuencias bajas (Ver Figura 15B).



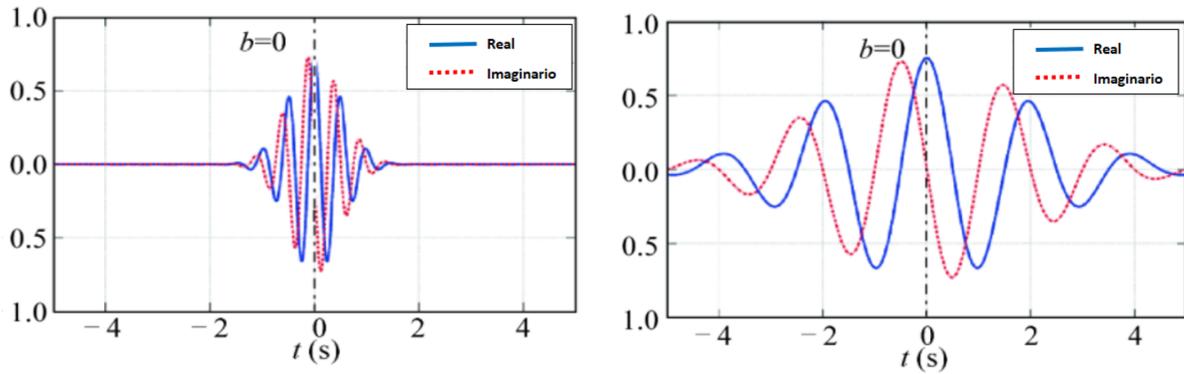
**Figura 15.** Bases tiempo-frecuencia empleadas en A) Transformada de Fourier y B) Transformada de ondícula. (Kumar y Foufoula-Georgiou, 1997).

Se asume una función de ondícula,  $\psi(\eta)$ , con media de cero y localizada en tiempo y frecuencia (Grinsted *et al.*, 2004). En particular, la ondícula de Morlet, está definida como

$$\psi_0(\eta) = \pi^{-1/4} e^{iw_0\eta} e^{-1/2\eta^2}, \quad (44)$$

donde  $w_0$  y  $\eta$  son la frecuencia y el tiempo respectivamente. Esta ondícula tiene valores en el dominio complejo, lo que permite extraer información sobre la amplitud y la fase del proceso que se analiza. Cuando se utilizan ondículas para fines de extracción de características, la ondícula de Morlet (con  $w_0 = 6$ ) es una buena opción, ya que proporciona un buen balance entre la localización en tiempo y frecuencia (Torrence y Compo, 1998), por lo tanto, restringimos nuestro tratamiento a esta ondícula, aunque existe una variedad de las mismas.

La transformada de ondícula de una serie de tiempo ( $X_n, n = 1, \dots, N$ ) con intervalos de tiempo uniformes  $\delta t$ , esta definida por Grinsted *et al.* (2004) como:



**Figura 16.** Ondícula de Morlet. Se muestra el efecto de dilatación que tiene el parámetro de escala  $s$ , ambos en la misma localización  $b = 0$ .

$$W(s, b) = \sqrt{\frac{\delta t}{s}} \sum_{n=0}^{N-1} X_n \psi_0 \left[ \frac{(n-b)\delta t}{s} \right], \quad (45)$$

donde  $\psi_0$  es la ondícula base (Morlet),  $s$  es un parámetro de escala y  $b$  es un parámetro de localización.  $s$  tiene un efecto de dilatación ( $s > 1$ ) o contracción ( $s < 1$ ) de la función  $\psi_0$  (ver Figura 16), y cambiando  $b$  tiene el efecto de analizar la función sobre diferentes puntos en el tiempo. Por lo que, variando la escala de ondícula  $s$  y trasladarlo a lo largo de tiempo, se puede construir una imagen que muestre la amplitud contra la escala y cómo esta amplitud varía con el tiempo.

La transformada de ondícula es lineal; es decir, la transformada de ondículas de la suma de dos señales es la suma de las transformadas individuales de cada señal, además de que conserva la energía de la señal propagada (Kumar y Foufoula-Georgiou, 1997).

La transformada tiene artefactos de borde porque la ondícula no está completamente localizada en tiempo. Por lo tanto, es útil introducir el llamado cono de influencia (CDI), que es el área en la que la potencia de la ondícula causada por una discontinuidad en los bordes decae exponencialmente de acuerdo a Grinsted *et al.* (2004).

Dadas dos series de tiempo,  $X_n$  y  $Y_n$ , con transformadas de ondículas  $W^X$  y  $W^Y$ , el *espectro cruzado* de las ondículas está definido como (Torrence y Compo, 1998):

$$W^{XY}(s, b) = W^X(s, b)W^Y(s, b). \quad (46)$$

Este método de comparación de dos señales proporciona el desarrollo de interacción de dos procesos. El *espectro cruzado* representa la covarianza entre las dos series de tiempo, por lo que mide la relación lineal entre estas dos series (Torrence y Compo, 1998).

Otra herramienta útil para la comparación de series es la medición de que tan coherente es el *espectro cruzado* en el espacio tiempo-frecuencia. Siguiendo Grinsted *et al.* (2004), se define la coherencia de dos señales como

$$R(s, b) = \frac{|W^X(s, b)W^Y(s, b)|^2}{(|W^X(s, b)|^2) \cdot (|W^Y(s, b)|^2)}. \quad (47)$$

La coherencia es una medida del grado de correlación como función de la frecuencia, por lo que es una herramienta para identificar posibles relaciones entre dos procesos. En este contexto, no es posible distinguir entre correlaciones positivas o negativas.

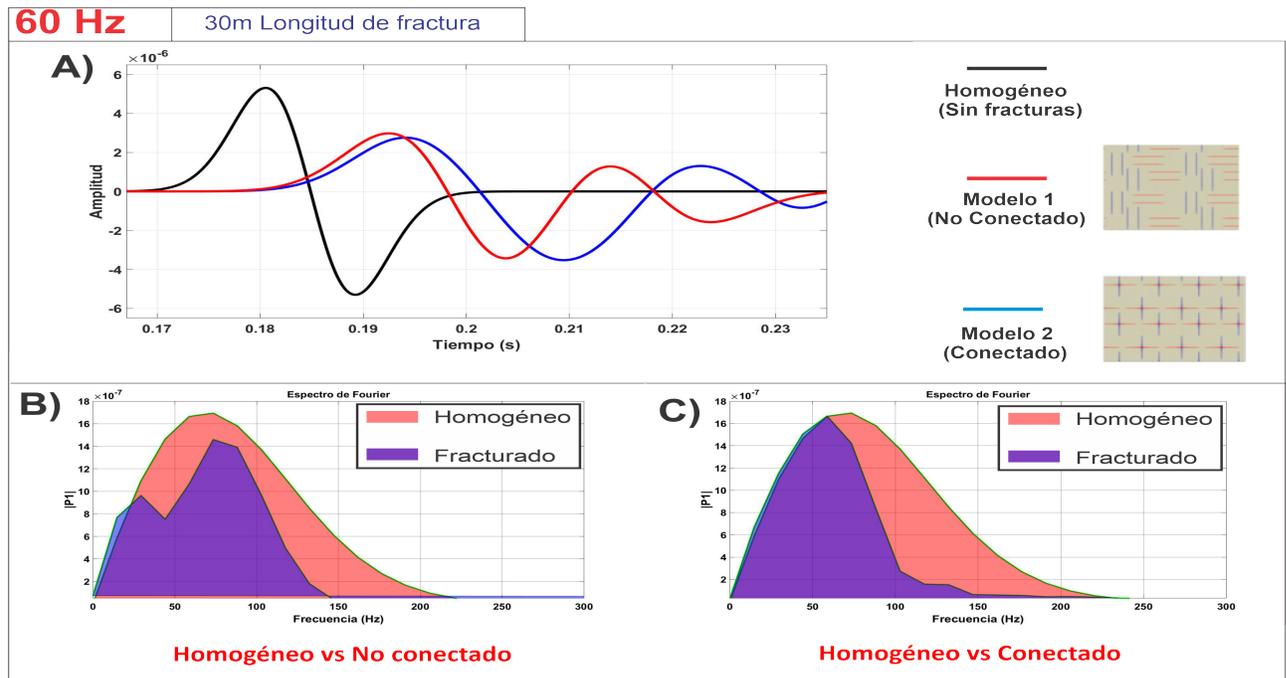
### 5.3. Espectros de frecuencia

Se sabe que el comportamiento espectral de un medio que contiene fracturas es similar a un filtro que atenúa las frecuencias más altas (Pyrak-Nolte, 1996), por lo que se espera que nuestros resultados tengan dicho comportamiento, pero no se ha evaluado si este comportamiento es similar si analizamos medios con fracturas conectadas y no conectadas. En esta sección se comparan los resultados de la transformada rápida de Fourier en función del medio homogéneo (sin fracturas), para resaltar la diferencia entre un medio fracturado y un medio que no contiene fracturas.

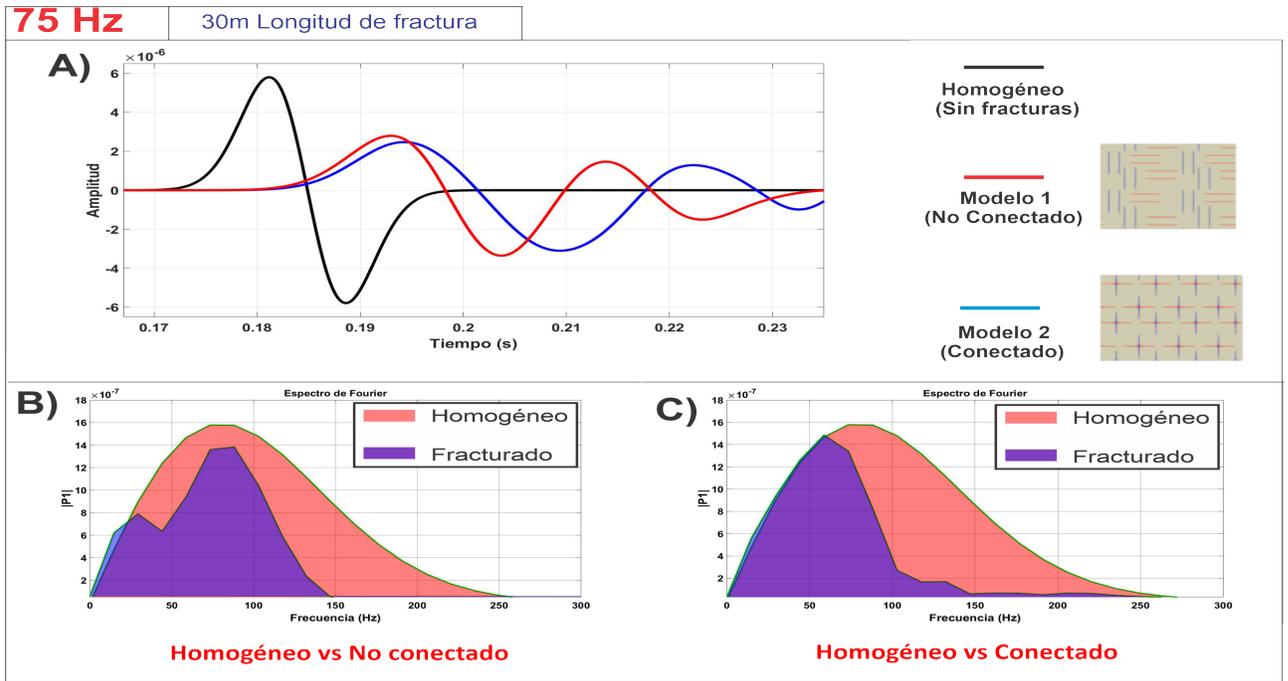
Se realizaron simulaciones numéricas a 60 Hz, 75 Hz, 90 Hz y 105 Hz, las cuales se encuentran en el rango de frecuencias empleadas en exploración sísmica. Los resultados (ver Figuras 17 - 28) permiten también estimar el efecto que tienen la longitud de fractura y el grado de conectividad en función de los diferentes modelos fracturados diseñados para las simulaciones.

Las Figuras 17 a 20 muestran las series de tiempo promediadas y espectros de los modelos 1 y 2 con longitud de fractura de 30 m y del modelo homogéneo, en función de las cuatro frecuencias. Las series de tiempo muestran un evidente retraso y atenuación del campo de ondas producto de la inclusión de fracturas en comparación con el modelo homogéneo. La diferencia en las formas de onda de los modelos con fracturas revelan un efecto debido a la conectividad.

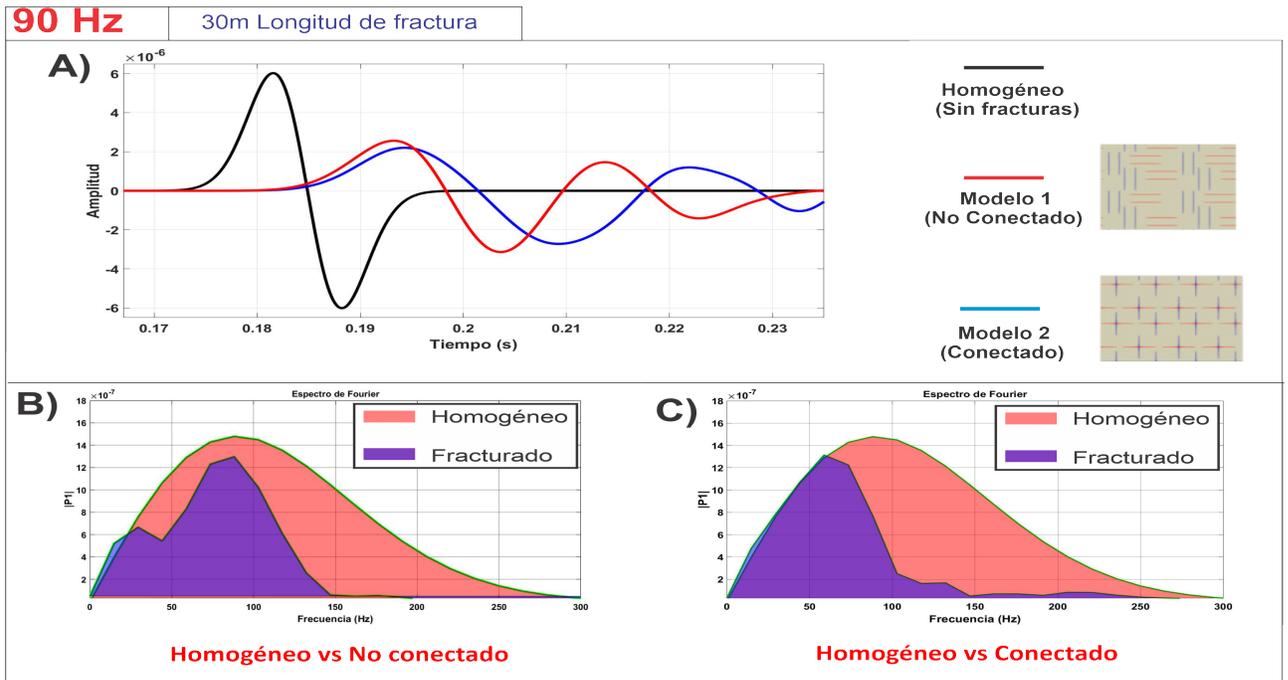
El espectro del modelo homogéneo indica una distribución uniforme de frecuencias alcanzando su máximo en la frecuencia de la fuente. Los espectros de las fracturas conectadas presentan el efecto de filtros pasa-bajas reportado en la literatura (Pyrak-Nolte, 1996), donde el contenido de frecuencias se agrupa hacia las frecuencias más bajas. Los modelos con fracturas no conectadas muestran también un efecto de filtros pasa-bajas, pero las frecuencias más bajas se dividen en dos altos espectrales muy marcados, este comportamiento se mantiene constante a lo largo de las cuatro frecuencias de estudio (Figuras 17 a 20), mostrando un pico alrededor de los 30 Hz, descendiendo a los 40 Hz y volviendo a alcanzar un máximo a los 90 Hz. Este comportamiento no ha sido reportado previamente en la literatura y aporta información acerca de la naturaleza de las ondas elásticas al propagarse por medios fracturados.



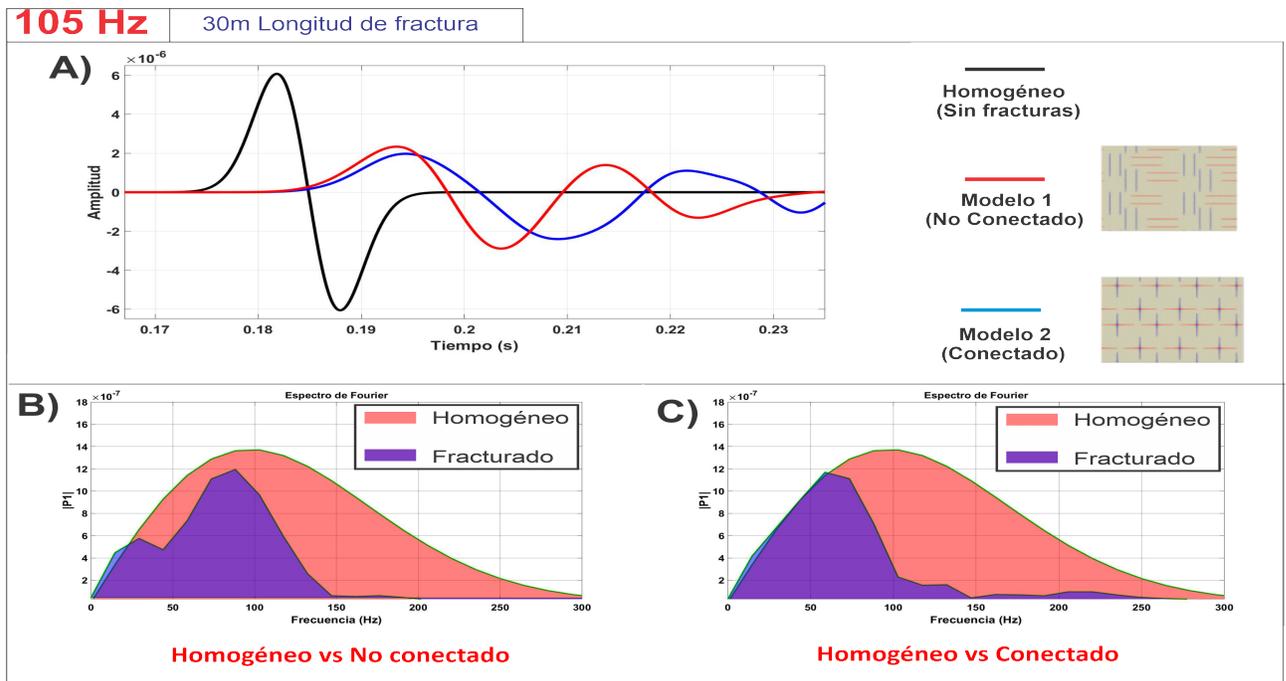
**Figura 17.** Resultados 60 Hz y longitud de fractura 30 m. A) Trazas promediadas. B) Análisis espectral homogéneo vs no conectado. C) Análisis espectral homogéneo vs conectado.



**Figura 18.** Resultados 75 Hz y longitud de fractura 30 m. A) Trazas promediadas. B) Análisis espectral homogéneo vs no conectado. C) Análisis espectral homogéneo vs conectado.



**Figura 19.** Resultados 90 Hz y longitud de fractura 30 m. A) Trazas promediadas. B) Análisis espectral homogéneo vs no conectado. C) Análisis espectral homogéneo vs conectado.

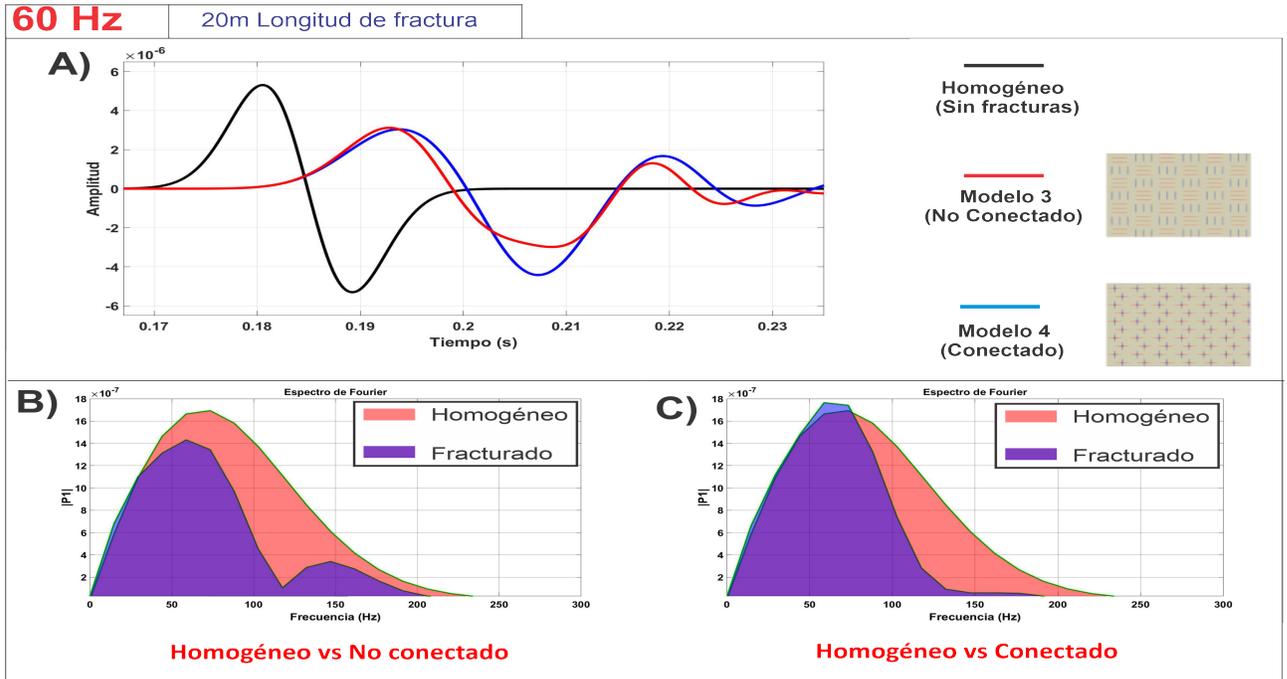


**Figura 20.** Resultados 105 Hz y longitud de fractura 30 m. A) Trazas promediadas. B) Análisis espectral homogéneo vs no conectado. C) Análisis espectral homogéneo vs conectado.

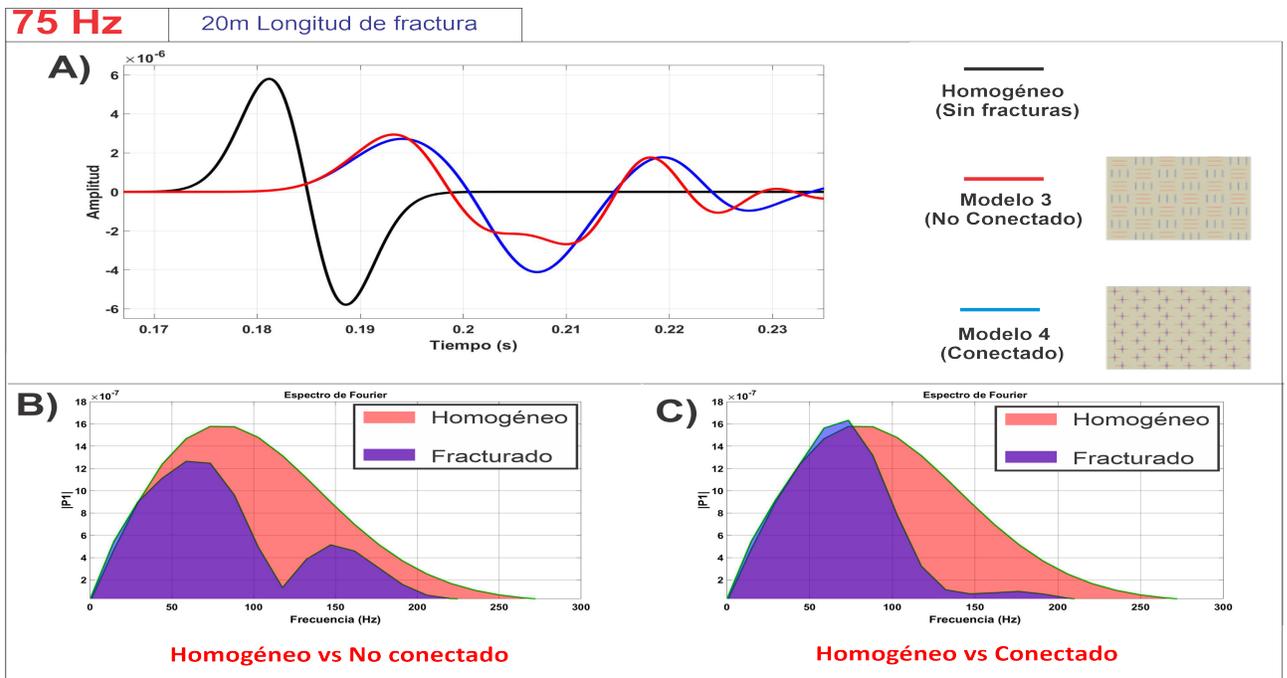
Las Figuras 21 a 24 muestran las series de tiempo promediadas de los modelos 3 y 4 con longitud de fractura de 20 m y la del modelo homogéneo que no contiene fracturas, en función de las 4 frecuencias. A pesar de la disminución de la longitud con respecto a los modelos anteriores, el efecto de retraso y atenuación se mantiene presente con respecto a la muestra homogénea. La diferencia en las formas de onda de los modelos con fracturas conectadas y no conectadas se mantiene presente.

El comportamiento espectral de los modelos conectados se mantiene al atenuar las frecuencias más altas y agrupando el total de su contenido espectral en un pequeño rango de frecuencias bajas. Similar a los modelos anteriores, el comportamiento espectral de los modelos con fracturas no conectadas presentan dos picos claramente identificables. El pico con mayor energía alcanza su máximo a los 70 Hz aproximadamente y desciende drásticamente alcanzando un mínimo a los 110-120 Hz, mientras que el segundo pico alcanza su máximo a los 150 Hz. El comportamiento varía a lo largo de las cuatro frecuencias, en las frecuencias de 60 y 75 Hz (Figuras 21 y 22) la mayoría de la energía se encuentra contenida en el primer pico de frecuencias más bajas, mientras que en las frecuencias de estudio de 90 y 105 Hz (Figuras 23 y 24) las frecuencias se encuentran distribuida más uniformemente a lo largo de los dos altos

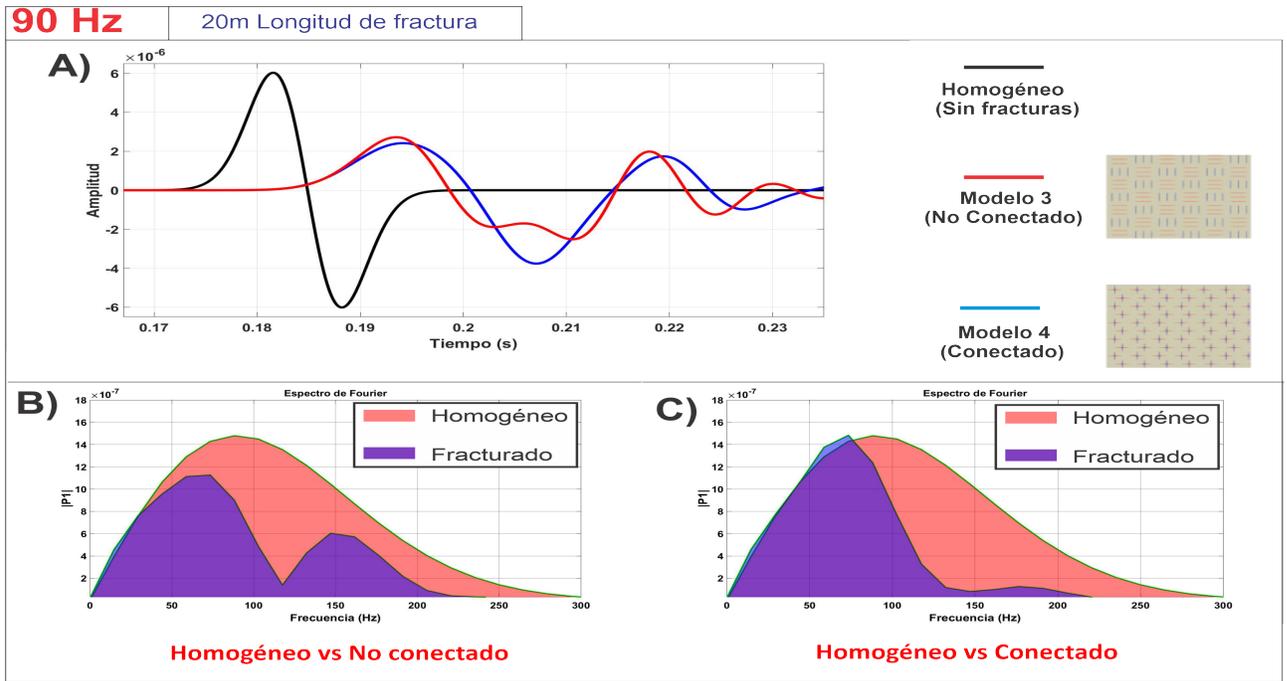
espectrales.



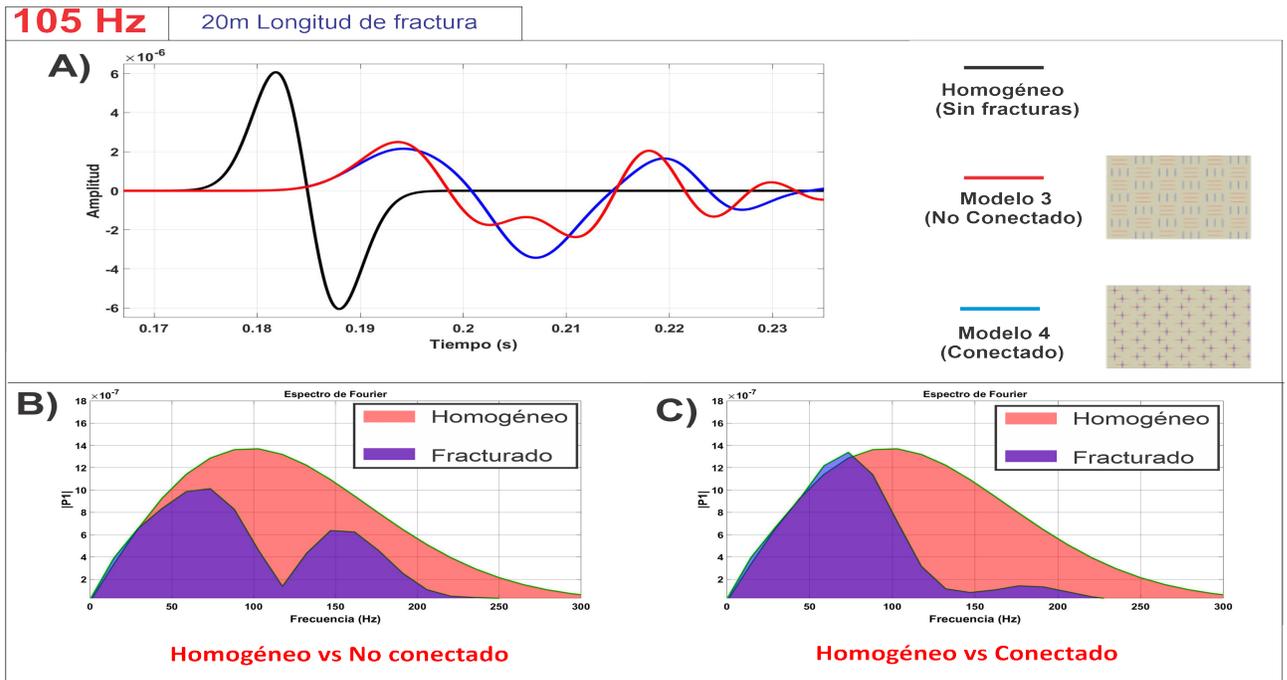
**Figura 21.** Resultados 60 Hz y longitud de fractura 20 m. A) Trazas promediadas. B) Análisis espectral homogéneo vs no conectado. C) Análisis espectral homogéneo vs conectado.



**Figura 22.** Resultados 75 Hz y longitud de fractura 20 m. A) Trazas promediadas. B) Análisis espectral homogéneo vs no conectado. C) Análisis espectral homogéneo vs conectado.



**Figura 23.** Resultados 90 Hz y longitud de fractura 20 m. A) Trazas promediadas. B) Análisis espectral homogéneo vs no conectado. C) Análisis espectral homogéneo vs conectado.

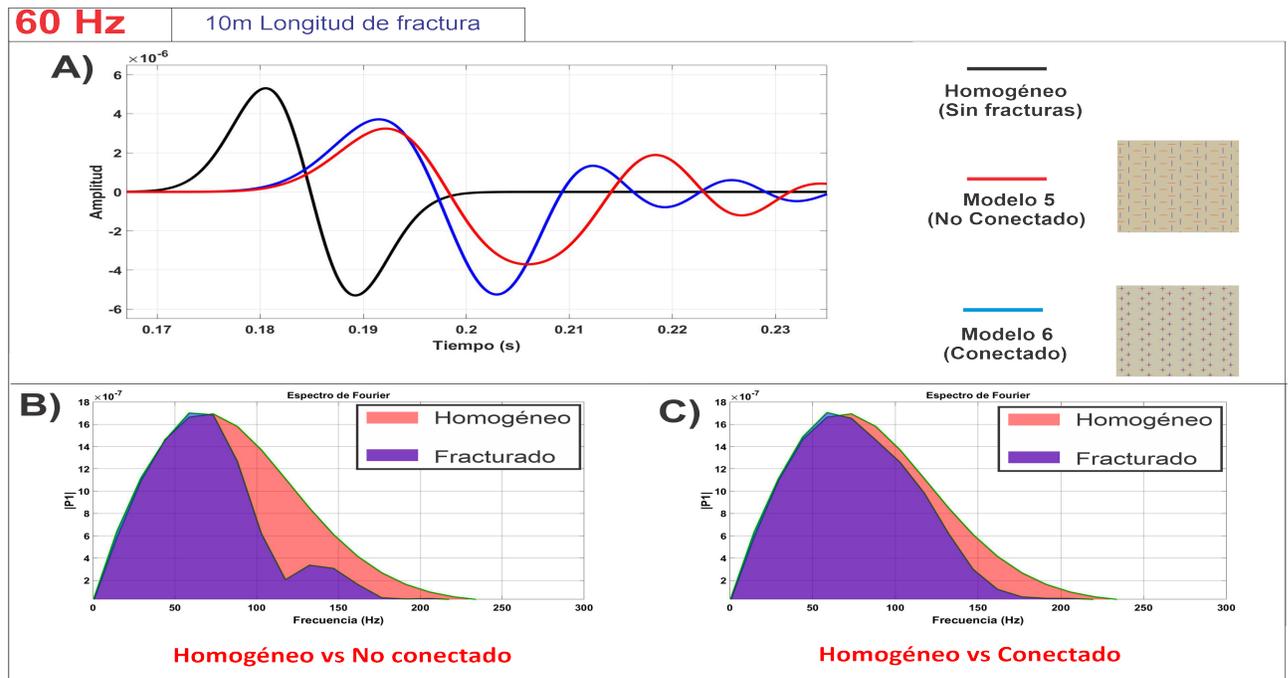


**Figura 24.** Resultados 105 Hz y longitud de fractura 20 m. A) Trazas promediadas. B) Análisis espectral homogéneo vs no conectado. C) Análisis espectral homogéneo vs conectado.

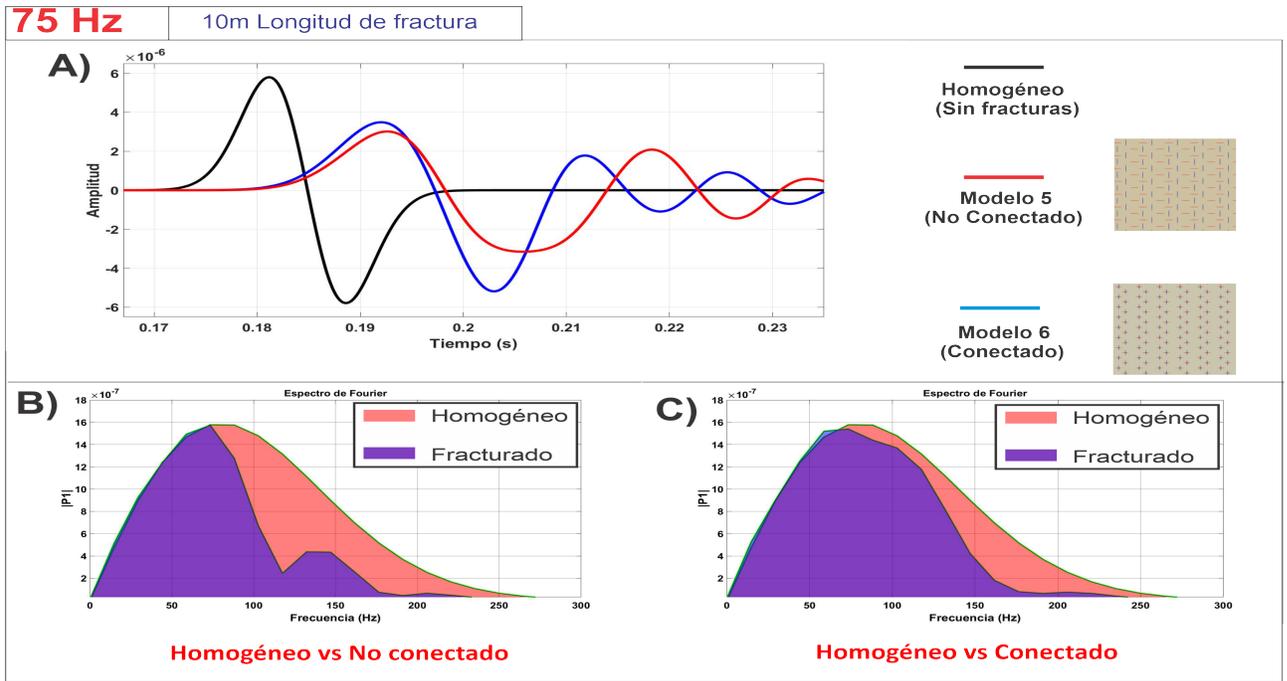
Las Figuras 25 a 28 muestran las series de tiempo promediadas de los modelos 5 y 6 con longitud de fractura de 10 m y la del modelo homogéneo que no contiene

fracturas, en función de las cuatro frecuencias. A pesar de la disminución de la longitud de fractura con respecto a los modelos anteriores, el efecto de retraso y atenuación se mantiene presente con respecto a la muestra homogénea. En las formas de onda en los modelos de fracturas conectadas y no conectadas es perceptible el desfase entre los dos modelos.

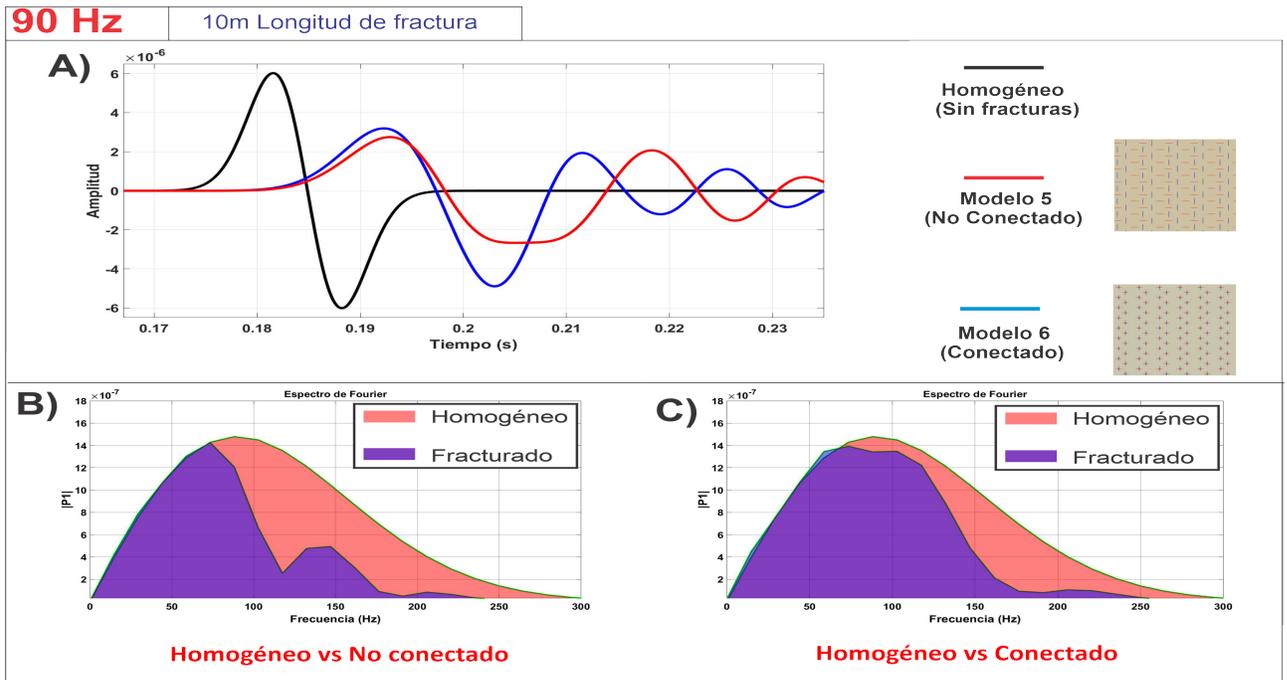
El análisis espectral con las fracturas más pequeñas estudiadas muestra también rasgos particulares. En los modelos con fracturas conectadas se mantienen el efecto de atenuación de frecuencias altas, pero la magnitud disminuye considerablemente con respecto a los modelos anteriores, por ejemplo en la Figura 25 (C), la comparación del espectro fracturado con el homogéneo, muestra solo un pequeño rango de atenuación de frecuencias, lo que indica que cuanto más pequeño sea el tamaño de la fractura, menor será el efecto de atenuación del medio con fracturas conectadas ortogonalmente.



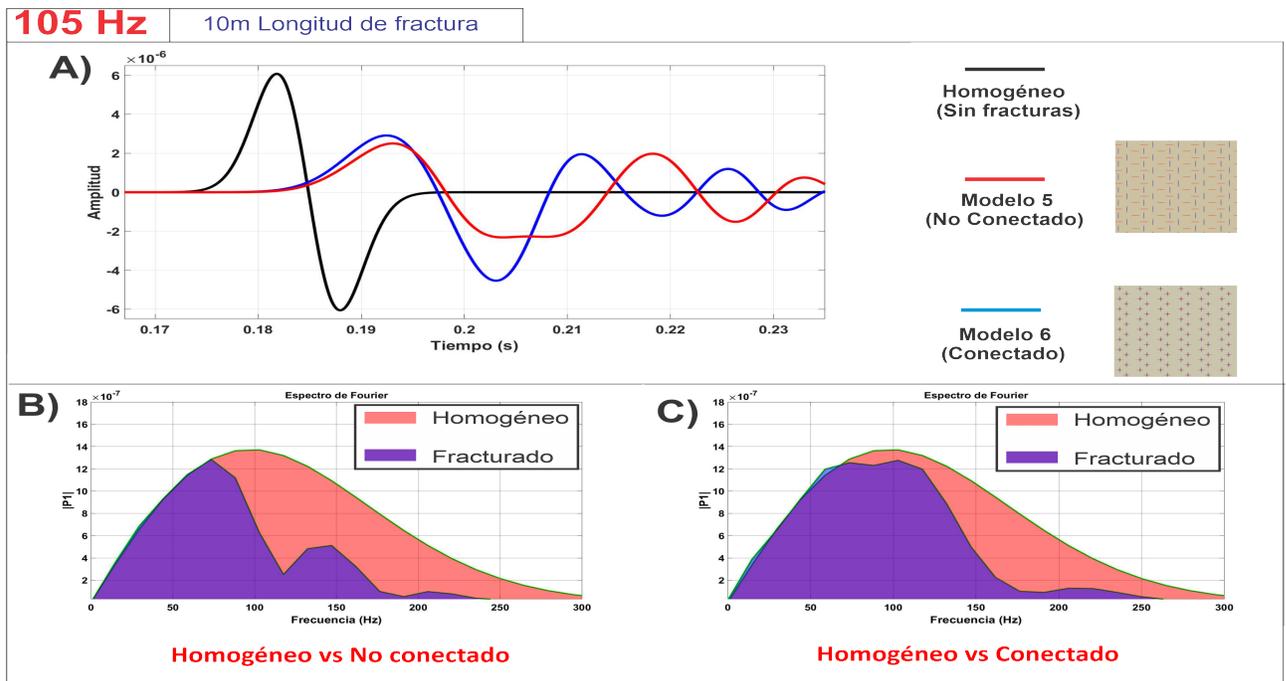
**Figura 25.** Resultados 60 Hz y longitud de fractura 10 m. A) Trazas promediadas. B) Análisis espectral homogéneo vs no conectado. C) Análisis espectral homogéneo vs conectado.



**Figura 26.** Resultados 75 Hz y longitud de fractura 10 m. A) Trazas promediadas. B) Análisis espectral homogéneo vs no conectado. C) Análisis espectral homogéneo vs conectado.



**Figura 27.** Resultados 90 Hz y longitud de fractura 10 m. A) Trazas promediadas. B) Análisis espectral homogéneo vs no conectado. C) Análisis espectral homogéneo vs conectado.

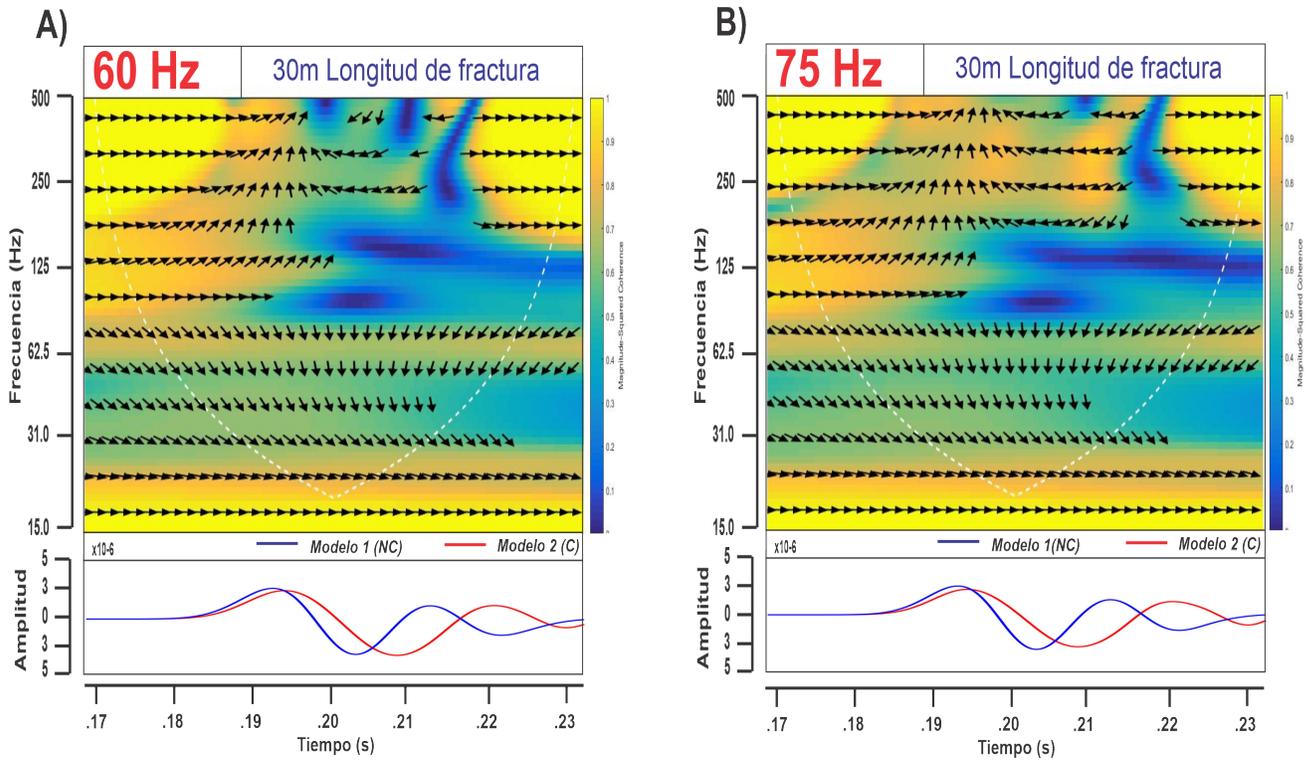


**Figura 28.** Resultados 105 Hz y longitud de fractura 10 m. A) Trazas promediadas. B) Análisis espectral homogéneo vs no conectado. C) Análisis espectral homogéneo vs conectado.

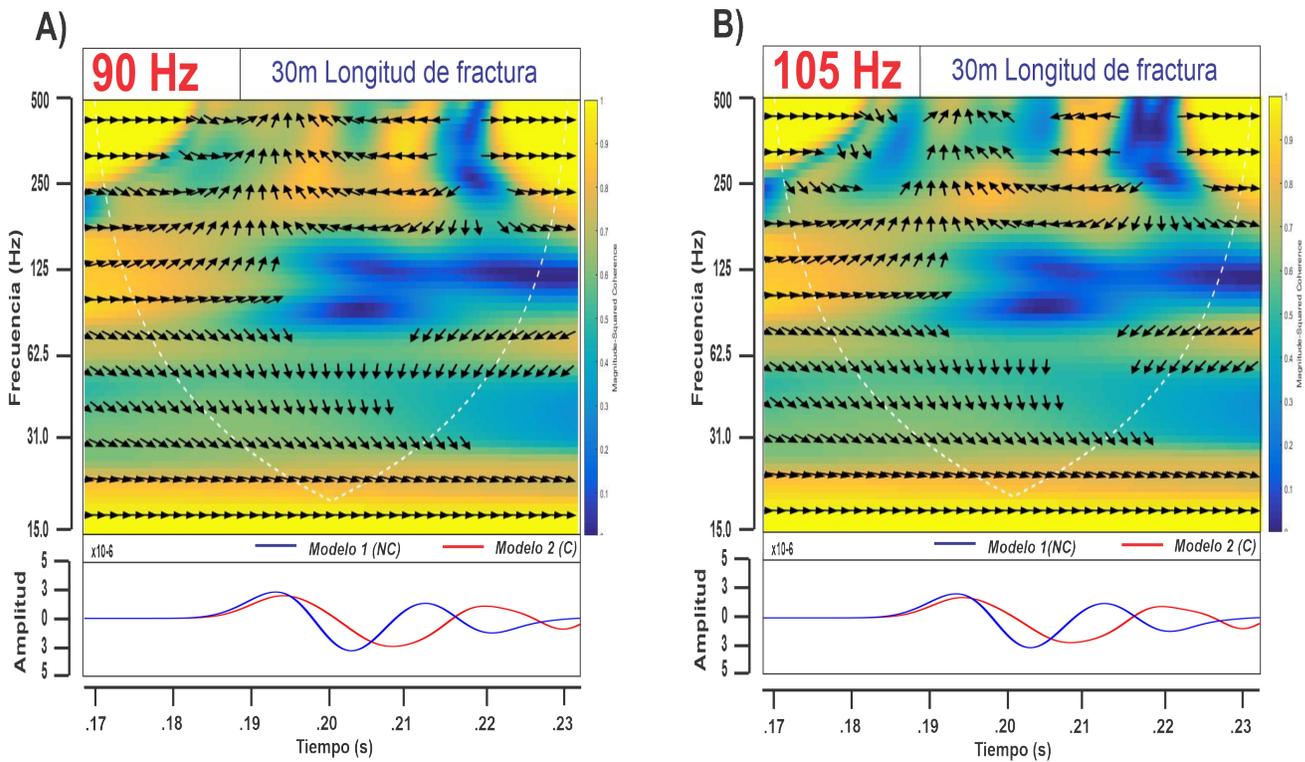
En los espectros no conectadas se mantiene el fenómeno de la partición del contenido de frecuencias en dos altos espectrales. El comportamiento de estos dos picos es similar a los de los modelos 3 y 4, donde el primer alto espectral alcanza su máximo a frecuencias de 70 Hz aproximadamente, descendiendo drásticamente de nuevo a frecuencias de 110-120 Hz y vuelve a ascender a una frecuencia de 140 Hz. A diferencia de los modelos anteriores la relación entre ambos picos se mantiene constante, mostrando una mayor cantidad de energía en el rango de frecuencias bajas.

#### 5.4. Comparación de sismogramas en el plano tiempo-frecuencia

Se aplicó el método de coherencia a través del programa *MATLAB* para estudiar mejor las correlaciones entre los modelos conectados y no conectados. Es importante señalar para la interpretación de los datos que la correlación implica una relación lineal entre los fenómenos considerados, evidenciando las zonas donde los procesos de atenuación toman lugar. La coherencia toma valores entre 0 y 1. Si la coherencia entre dos señales es alta, las flechas indican la fase entre los fenómenos: flechas a  $0^\circ$  (horizontal apuntando a la derecha) indica que ambos fenómenos están en fase y flechas a  $180^\circ$  (horizontal apuntando a la izquierda) indican que ambos fenómenos están en anti-fase.



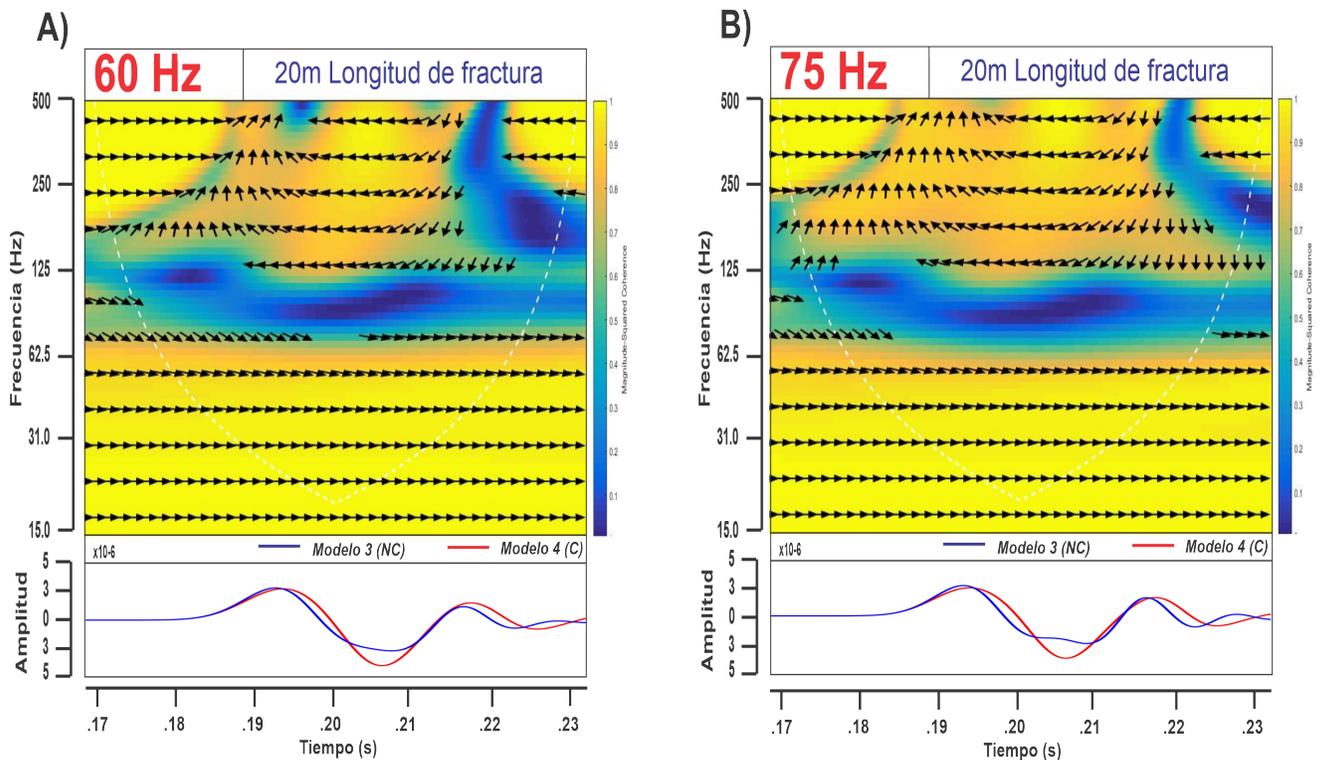
**Figura 29.** Análisis de coherencia con longitud de fractura de 30 m. Modelo 1 (No conectado) y Modelo 2 (conectado). A) 60 Hz. B) 75 Hz.



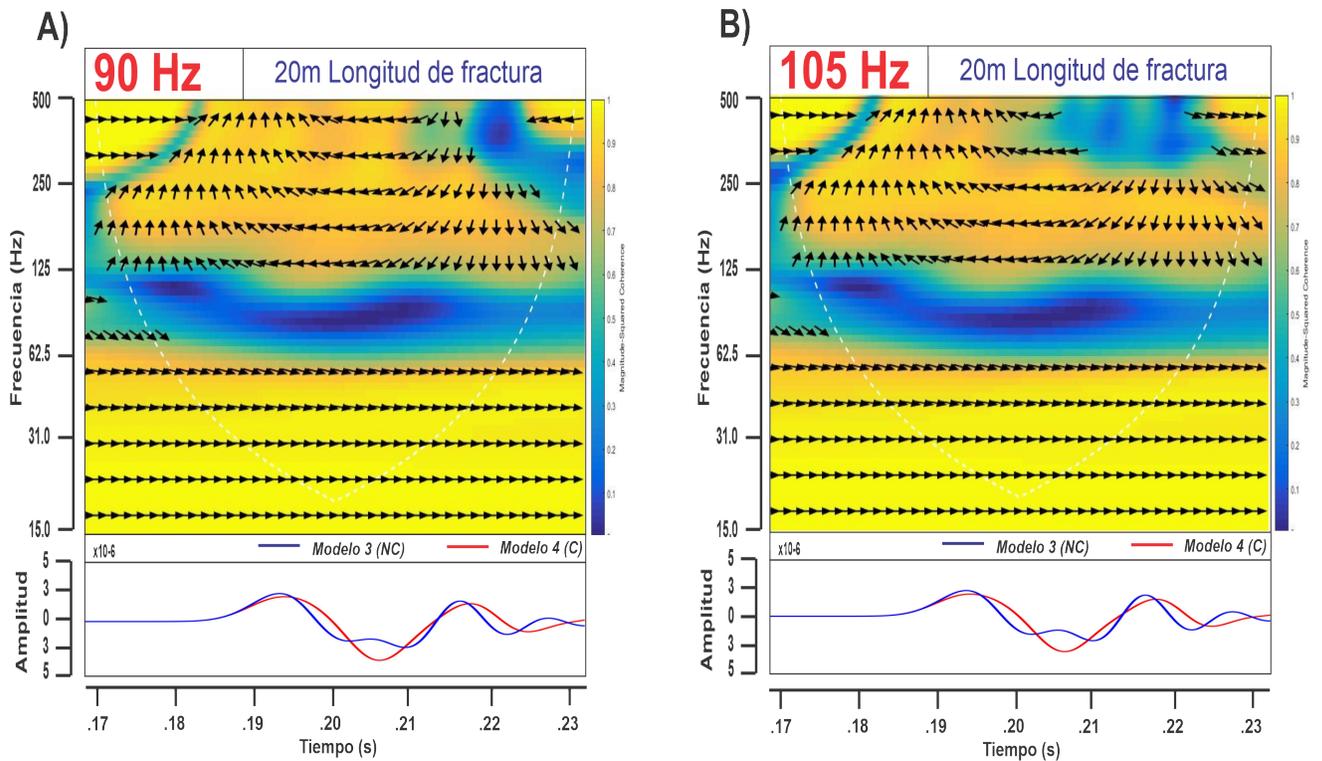
**Figura 30.** Análisis de coherencia con longitud de fractura de 30 m. Modelo 1 (No conectado) y Modelo 2 (conectado). A) 90 Hz. B) 105 Hz.

Las Figuras 29 y 30 muestran los resultados del análisis de coherencia de los modelos 1 y 2 con longitud de fractura de 30 m. El dominio de los datos se encuentra en el plano tiempo-frecuencia y la línea punteada muestra el cono de influencia.

La correlación máxima con datos en fase se encuentra a lo largo de todo el dominio temporal desde las frecuencias más bajas hasta los 30 Hz aproximadamente. Después de ese rango de frecuencias, la correlación disminuye, mostrando datos desfasados 90°. El área en la que no existe correlación es una ventana en el rango de las frecuencias entre los 70 Hz y los 150 Hz (área azul), lo que refleja que las series entre fracturas conectadas y no conectadas para esta longitud de fracturas no muestran una correlación lineal en amplitud y fase producto de la conectividad.



**Figura 31.** Análisis de coherencia con longitud de fractura de 20 m. Modelo 3 (No conectado) y Modelo 4 (conectado). A) 60 Hz. B) 75 Hz.

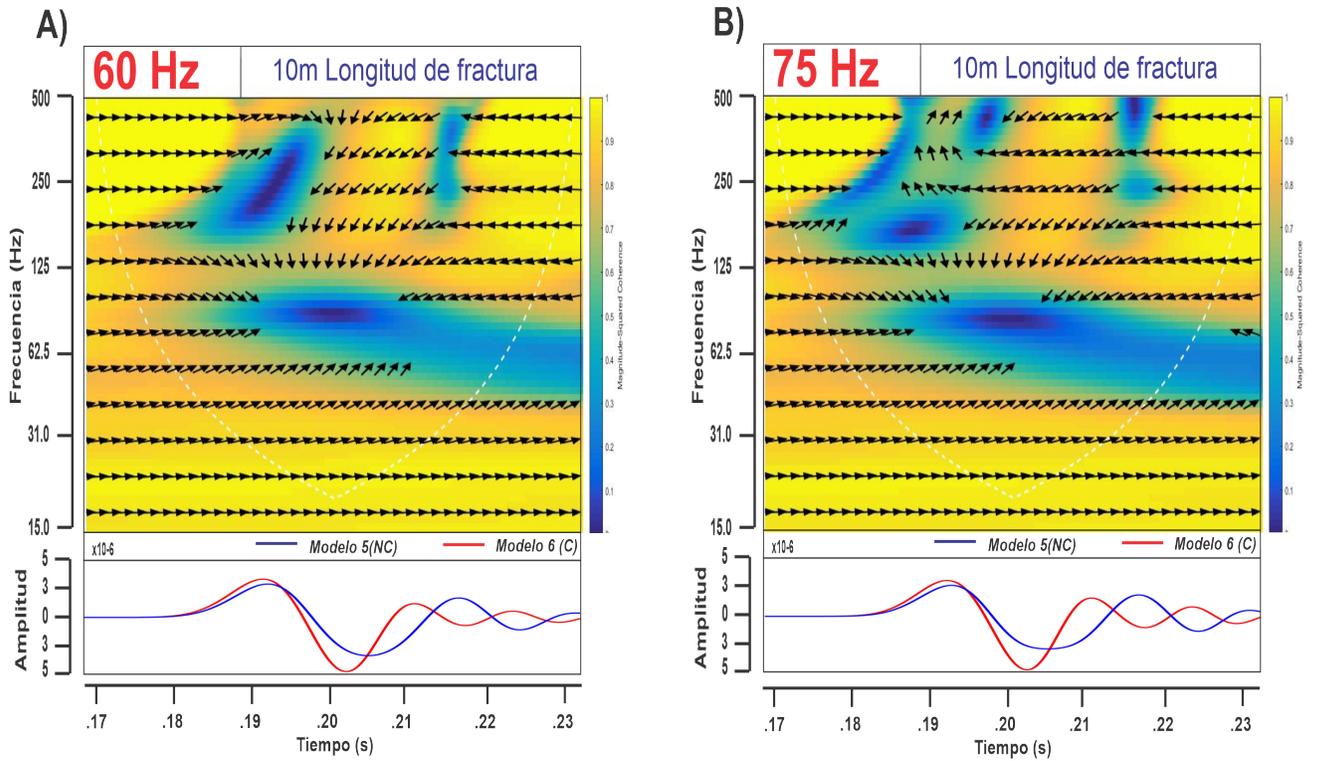


**Figura 32.** Análisis de coherencia con longitud de fractura de 20 m. Modelo 3 (No conectado) y Modelo 4 (conectado). A) 90 Hz. B) 105 Hz.

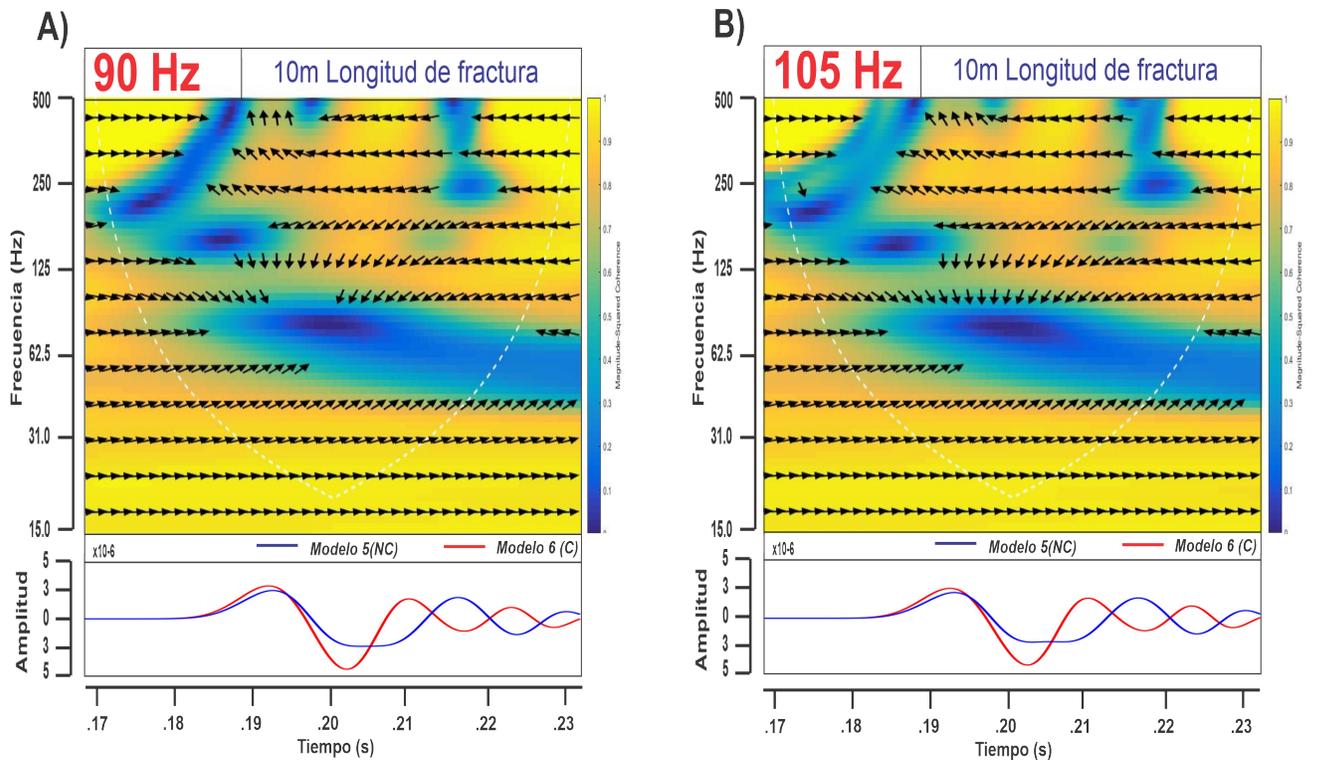
Las Figuras 31 y 32 muestran los resultados del análisis de coherencia de los modelos 3 y 4 con longitud de fractura de 20 m.

La correlación máxima con datos en fase se encuentra a lo largo de todo el dominio temporal desde las frecuencias más bajas hasta los 65 Hz aproximadamente. Posterior a este rango de frecuencias se muestra un área azul que refleja la nula correlación entre las series de tiempo, alcanzando hasta los 130 Hz y se mantiene constante en las cuatro frecuencias de estudio. Esta área azul refleja la poca relación en fase y amplitud producto de la conectividad entre fracturas.

Las Figuras 33 y 34 muestran los resultados del análisis de coherencia de los modelos 3 y 4 con longitudes de fractura de 10 m.



**Figura 33.** Análisis de coherencia con longitud de fractura de 10 m. Modelo 5 (No conectado) y Modelo 6 (conectado). A) 60 Hz. B) 75 Hz.



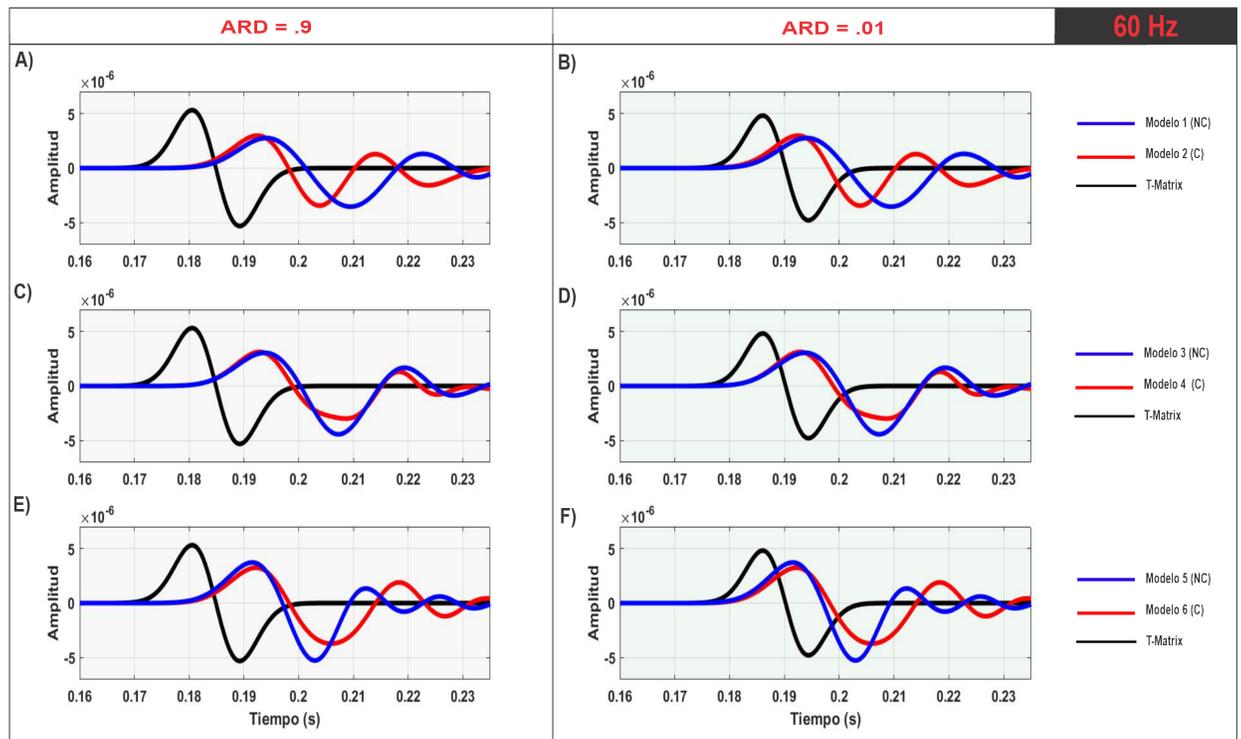
**Figura 34.** Análisis de coherencia con longitud de fractura de 10 m. Modelo 5 (No conectado) y Modelo 6 (conectado). A) 90 Hz. B) 105 Hz.

Las frecuencias en fase y correlacionadas son desde las más bajas hasta los 55 Hz aproximadamente. El área de nula correlación se encuentra de nuevo reducida (área azul) en función de los modelos anteriores, en este caso reduciéndose a una ventana entre las frecuencias de 60 Hz a 90 Hz, indicando que conforme disminuimos la longitud de fractura, el efecto de la conectividad se va reduciendo y las series muestran una mayor correlación en amplitud y fase.

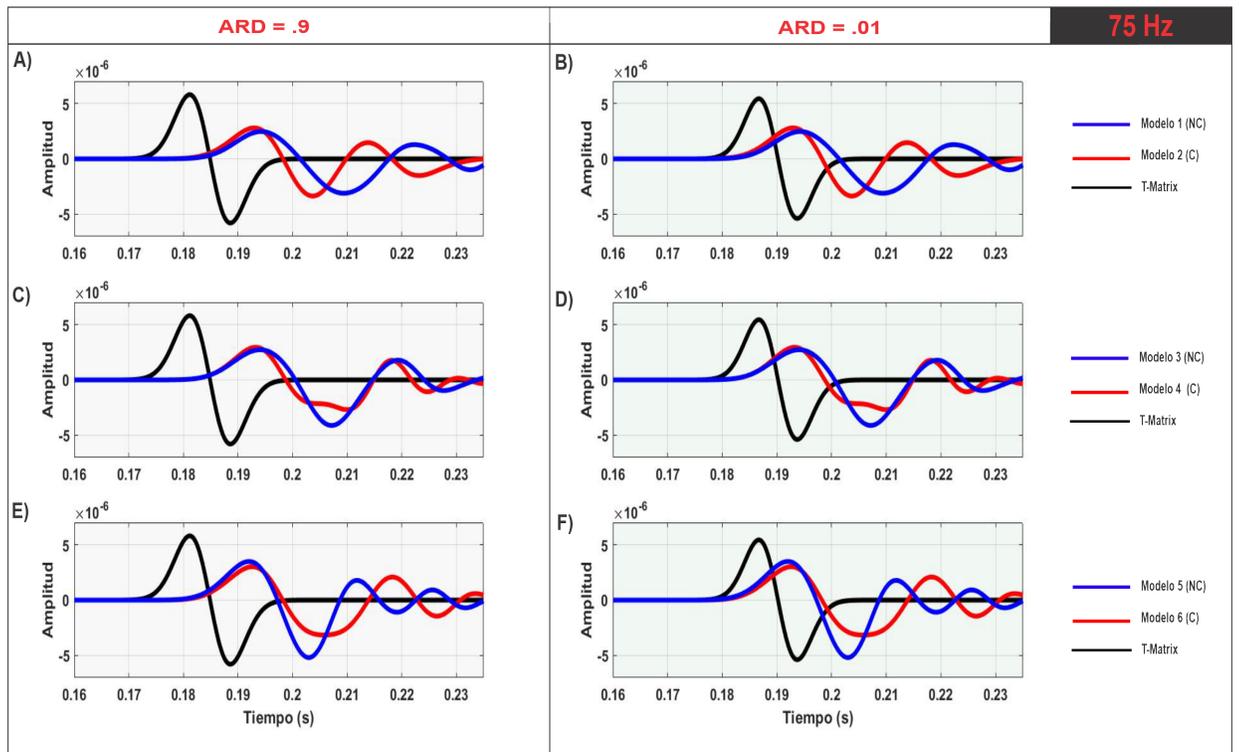
### 5.5. Comparación con T-Matrix

Esta sección presenta los sismogramas sintéticos obtenidos de las simulaciones numéricas hechas con T-Matrix, donde se busco replicar los modelos con fracturas discretas.

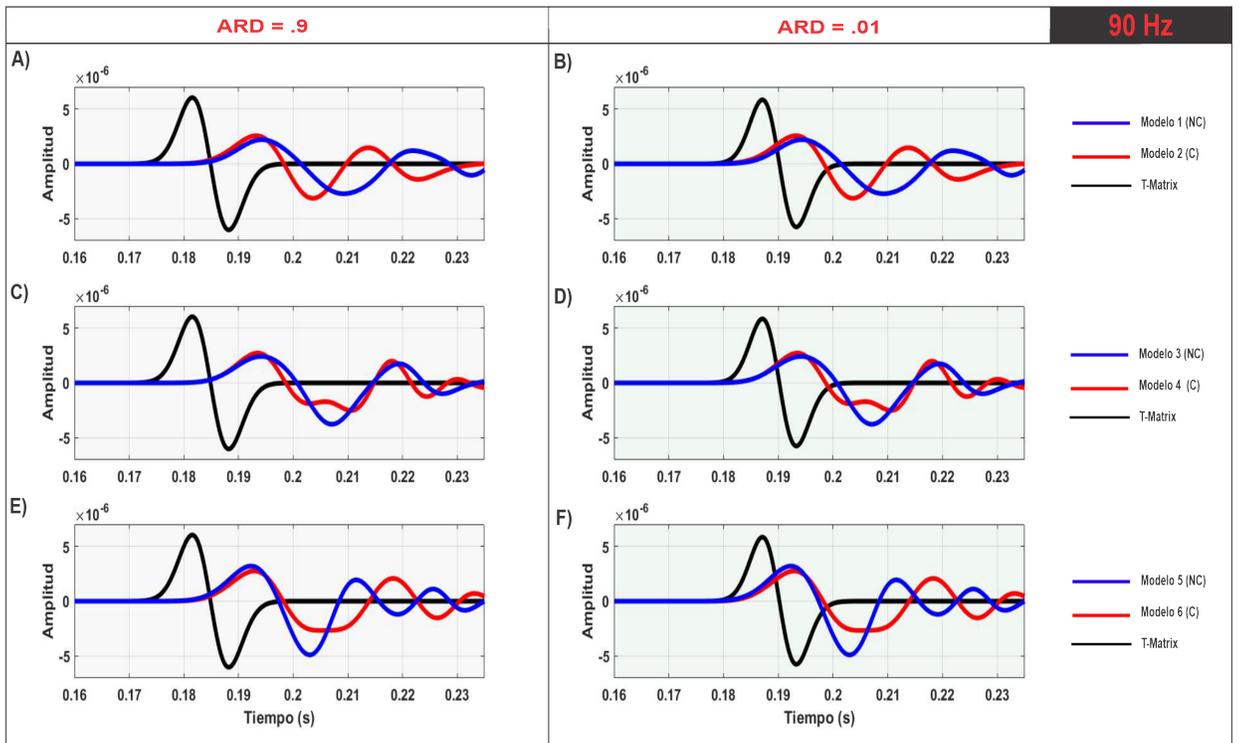
Las Figuras 35 a 38 muestran las series de tiempo promedio de T-Matrix en comparación con cada uno de los modelos discretos. Observar que las series de tiempo de T-Matrix en estas figuras no cambian el variar la longitud de fracturas o la conectividad.



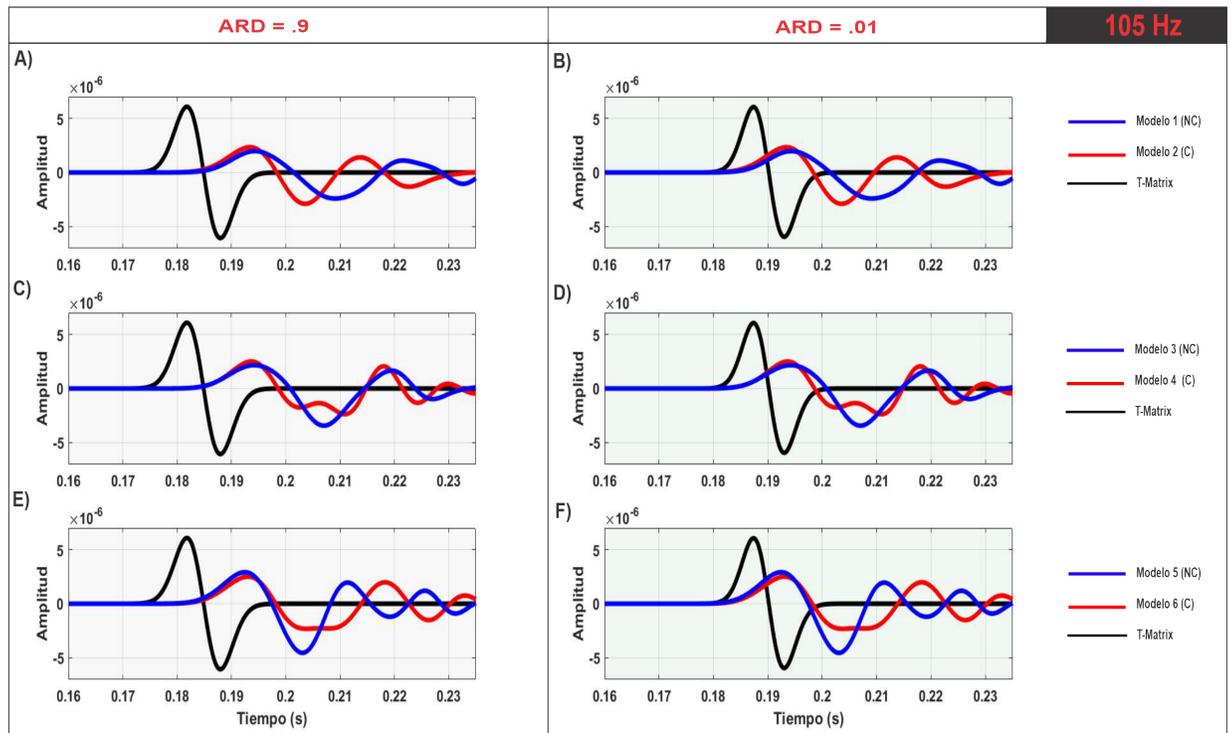
**Figura 35.** Resultados simulaciones método T-Matrix, con los parámetros ARD 0.9 (izquierda) y ARD .01 (derecha). Comparación entre resultados de medios equivalentes y modelos con fracturas discretas a 60Hz.



**Figura 36.** Resultados simulaciones método T-Matrix, con los parámetros ARD 0.9 (izquierda) y ARD .01 (derecha). Comparación entre resultados de medios equivalentes y modelos con fracturas discretas a 75Hz.



**Figura 37.** Resultados simulaciones método T-Matrix, con los parámetros ARD 0.9 (izquierda) y ARD .01 (derecha). Comparación entre resultados de medios equivalentes y modelos con fracturas discretas a 90Hz.



**Figura 38.** Resultados simulaciones método T-Matrix, con los parámetros  $ARD$  0.9 (izquierda) y  $ARD$  .01 (derecha). Comparación entre resultados de medios equivalentes y modelos con fracturas discretas a 105Hz.

Dado que el factor geométrico  $ARD$  refleja la interacción entre un conjunto de fracturas (ver Figura 13), se optó por evaluar la efectividad de este parámetro para aproximar mejor los modelos discretos. Se escogió un valor de 0.9 que refleja una distribución de fracturas más dispersa, donde las fracturas se encuentran más lejanas entre sí y un valor de 0.01 que supone una mayor cercanía entre fracturas simulando un grado de interacción entre las mismas.

Los resultados reflejan la importancia del factor geométrico  $ARD$ . Cuando las inclusiones se encuentran más cercanas entre sí, se observa que las series de tiempo aproximan mejor en fase a los modelos discretos, aunque la amplitud producto de las simulaciones con T-Matrix es más grande, debido a que el método no incluye mecanismos de atenuación (Jakobsen *et al.*, 2003a).

## Capítulo 6. Conclusiones

---

1. El método de Galerkin Discontinuo Simétrico de Penalización Interior implementado por De Basabe *et al.* (2016) con base en la teoría de Schoenberg (1980) del Linear Slip Theory (LSM) es un método eficiente para incluir fracturas discretas con distribución aleatoria en la simulación de propagación de ondas elásticas. Permite incluir fracturas entre las caras de los elementos de la malla permitiéndonos definir la distribución geométrica de las fracturas.
2. El efecto de la conectividad de fracturas es perceptible en fase y amplitud en los sismogramas. Este se puede cuantificar cuando se trabajan altas densidades de fractura en los volúmenes representativos.
3. Los espectros de frecuencia muestran el comportamiento espectral de filtros pasa-bajas esperado en medios con fracturas conectadas, pero en medios con fracturas no conectadas los espectros presentan dos picos claramente definidos que hacen referencia a que el espectro se descompone en dos bandas de frecuencias. Este comportamiento no es constante, varía en función de la longitud de fracturas, la distribución y la frecuencia de la fuente.
4. Los mapas de coherencia reflejan áreas de poca o nula correlación entre los sismogramas de medios con fracturas conectadas y no conectadas. Estas áreas se mantienen prácticamente constantes conforme varía la frecuencia, reflejando el poco efecto de la frecuencia en la coherencia. Se observó que a menor longitud de fractura la correlación entre los modelos conectados y no conectados en el plano tiempo-frecuencia aumenta.
5. El medio equivalente T-Matrix permite obtener modelos anisotrópicos equivalentes a los modelos con fracturas discretas conectadas, principalmente cuando el factor geométrico *ARD* refleja mayor interacción entre las familias de fracturas. Resultó efectivo para la caracterización de fracturas en medios con geometrías complejas y el efecto de interacción entre las mismas.

## 6.1. Trabajo futuro y recomendaciones

1. Jakobsen *et al.* (2003a) no contempla los parámetros de atenuación ni viscoelásticidad en su formulación, limitándose a estudiar familias de inclusiones secas contenidas en un medio homogéneo. Para un desarrollo más sofisticado de este método, se sugiere Jakobsen *et al.* (2003b), que unifica el tratamiento de los mecanismos de flujo en rocas con inclusiones, tomando en cuenta la interacción entre las fracturas y el medio poroso evaluando el efecto de transmisión de fluidos.
2. Los resultados buscan dar continuidad al tema de la conectividad de fracturas para generar una discusión más amplia. Debido a que fue posible identificar el mecanismo de atenuación de frecuencias a través del análisis del espectro de Fourier, se sugiere estudiar más a fondo este fenómeno considerándolo como una herramienta con potencial de ser empleada en el procesamiento de datos sísmicos multicomponente para distinguir zonas de conectividad de fracturas.
3. Los resultados podrían aportar información acerca de la geometría y orientación de las fracturas, a través de la integración de diversos métodos como registros de pozo, en específico registros sónicos, perfiles sísmicos verticales, información geológica o incluso de AVO acimutal.

## Literatura citada

- Aguilera, R. (1998). Geologic aspects of naturally fractured reservoirs. *The Leading Edge*, **17**: 1667–1670.
- Alkhimenkov, Y. (2017). The t-matrix approach for the mathematical modeling of the effective elastic properties of hydrocarbon reservoirs. *Physics of the Solid Earth*, **53**: 477–487.
- Backus, G. E. (1962). Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *Geophysical Research*, **36**: 4427–4440.
- Berkowitz, B. (2000). Scaling of fracture connectivity in geological formations. *Geophysical Research Letters*, **27**(14): 2061–2064.
- Bratton, T., Canh, N., y Que, N. (2006). The nature of naturally fractured reservoir. *Oilfield Review*, **18**: 4–23.
- Budiansky, B. (1965). On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of solids*, **13**: 223–227.
- Bush, I. y Crampin, S. (1991). Paris basin vsps, case history establishing combinations of fine-layer or lithologic anisotropy and crack anisotropy from modelling shear-wavefields near point singularities. *Geophysical Journal International*, **107**: 433–447.
- Carcione, J., Picotti, S., y Santos, J. (2012). Numerical experiments of fracture-induced velocity and attenuation anisotropy. *Geophysical Journal International*, **191**: 1179–1191.
- Coates, R. y Schoenberg, M. (1995). Finite-difference modeling of faults and fractures. *Geophysics*, **60**: 1514–1526.
- Crampin, S. (1984). Effective anisotropic elastic constants for wave propagation through cracked solids. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **76**: 133–145.
- De Basabe, J. D. (2009). *High-order finite element methods for seismic wave propagation*. Tesis de doctorado, The University of Texas at Austin.
- De Basabe, J. D. y Sen, M. K. (2010). Stability of the high-order finite elements for acoustic or elastic wave propagation with high-order time stepping. *Geophysical Journal International*, pp. 577–590.
- De Basabe, J. D., Sen, M. K., y Wheeler, M. F. (2016). Elastic wave propagation in fractured media using the discontinuous Galerkin method. *Geophysics*, **81**(4): T163–T174.
- De Vallejo, L. I., Ferrer, M., Ortuño, L., y Oteo, C. (2002). *Ingeniería Geológica*. Pearson Education.
- Eshelby, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **241**(1226): 1516–1521.
- Fang, X., Fehler, M., Chen, T., Burns, D., y Zhu, Z. (2013). Sensitivity analysis of fracture scattering. *Geophysics*, **78**: T1–T10.

- Grechka, V. y Kachanov, M. (2006a). Effective elasticity of fractured rocks: A snapshot of the work in progress. *Geophysics*, **71**(6): W45–W58.
- Grechka, V. y Kachanov, M. (2006b). The influence of crack shape on the effective elasticity of fractured rocks. *Geophysics*, **71**(5): D143–D160.
- Grechka, V. y Kachanov, M. (2006c). Effective elasticity of rocks with closely spaced and intersecting cracks. *Geophysics*, **71**(3): D85–D91.
- Grinsted, A., Moore, J. C., y Jevrejeva, S. (2004). Application of the cross wavelet transform and wavelet coherence to geophysical time series. *Nonlinear Processes in Geophysics*, **11**: 561–566.
- Gu, B., Nihei, T., y Myer, L. (1996). Numerical simulation of elastic wave propagation in fractured rock with boundary integral equation method. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **101**: 15933–15943.
- Helbig, K. y Thomsen, L. (2005). 75-plus years of anisotropy in exploration and reservoir seismics: A historical review of concepts and methods. *Geophysics*, **70**.
- Hornby, B., Schwartz, L. M., y Hudson, J. A. (1994). Anisotropic effective-medium modeling of the elastic properties of shales. *Geophysics*, **59**: 1570–1583.
- Hu, Y. y Mcmechan, G. (2009). Comparison of effective stiffness and compliance for characterizing cracked rocks. *Geophysics*, **74**.
- Hudson, J. A. (1980). Overall Properties of a cracked solid. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **88**(2): 371–384.
- Hudson, J. A. (1981). Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **64**(1): 133–150.
- Ikelle, L. y Amundsen, L. (2005). *Introduction to petroleum seismology*. Society of Exploration Geophysicists.
- Jakobsen, M. y Johansen, T. A. (2005). The effects of drained and undrained loading on viscoelastic waves in rock-like composites. *International Journal of Solids and Structures*, **42**: 1597–1611.
- Jakobsen, M., Hudson, J., y Johansen, T. A. (2003a). T-matrix approach to shale acoustics. *Geophysical Journal International*, **154**: 533–558.
- Jakobsen, M., Johansen, T. A., y McCann, C. (2003b). The acoustic signature of fluid flow in complex porous media. *Journal of Applied Geophysics*, **54**: 219–246.
- Kachanov, M. (1992). Effective elastic properties of cracked solids: Critical review of some basic concepts. *Applied Mechanics Reviews*, **45**(8): 304–335.
- Komatitsch, D. y Vilotte, J. (1998). The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **88**: 368–392.
- Komatitsch, D., Barnes, D., y Tromp, J. (2000). Simulation of anisotropic wave propagation based upon a spectral element method. *Geophysics*, **65**: 1251–1260.

- Komatitsch, D., Tsuboi, S., y Tromp, J. (2005). The spectral element method in seismology. *Geophysical Monograph*, **157**: 205–227.
- Kosloff, D. y Baysal, E. (1982). Forward modeling by a fourier method. *Geophysics*, **47**(10): 1402–1412.
- Kumar, P. y Foufoula-Georgiou, E. (1997). Wavelet analysis for geophysical applications. *Review of Geophysics*, **35**(4): 385–412.
- Legarth, B., Huenges, y Zimmermann, G. (2005). Hydraulic fracturing in a sedimentary geothermal reservoir: Results and implications. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **42**: 1028–1041.
- Leviant, V., Kvasov, I., y Petrov, I. (2019). *Numerical modeling of seismic responses from fractured reservoirs by the Grid-Characteristic method*. Society of Exploration Geophysicists.
- Liu, E. y Martinez, A. (2012). *Seismic fracture characterization: Concepts and practical applications*. EAGE Publications.
- Liu, E., Crampin, S., Queen, J., y Rizer, W. (1993). Behaviour of shear-waves in rocks with two sets of parallel cracks. *Geophysical Journal International*, **113**: 509–517.
- Liu, E., Hudson, J. A., Crampin, S., Rizer, W. D., y Queen, J. H. (1995). Seismic properties of a general fracture. *Mechanics of Jointed and Faulted Rock*, pp. 673–678.
- Lorenz, J. C., Warpinski, N. R., y Teufel, L. (1996). Natural fracture characteristics and effects. *The Leading Edge*, **15**: 909–911.
- Martin, R., Komatitsch, D., Blitz, C., y Le Goff, N. (2008). Simulation of seismic wave propagation in an asteroid based upon an unstructured MPI Spectral-Element method: Blocking and Non-blocking communication strategies. *High Performance Computing for Computational Science - VECPAR 2008*, pp. 350–363.
- Mavko, G. y Mukerji, T. (2009). *The rock physics handbook*. Cambridge University Press, segunda edición.
- Moller, T. y Friederich, W. (2019). Simulation of elastic wave propagation across fractures using a nodal discontinuous Galerkin method—theory, implementation and validation. *Geophysical Journal International*, **219**: 1900–1914.
- Nakagawa, S. y Schoenberg, M. (2007). Poroelastic modeling of seismic boundary conditions across a fracture. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **122**(2): 831–847.
- Nishizawa, O. (1982). Seismic velocity anisotropy in a medium containing oriented cracks—transversely isotropic case. *Journal of Physics of the Earth*, **30**: 331–347.
- Novikov, M., Caspari, E., Holliger, K., Lisitsa, V., Quintal, B., y Rubino, J. (2017). Numerical study of fracture connectivity response in seismic wavefields. *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2017*, pp. 3786–3790.
- Patera, A. (1984). A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, **54**: 468–488.

- Ping, P., Yang, B., Xu, Y., y Zhang, Y. (2013). Seismic wave modeling in viscoelastic VTI media by using Spectral Element method. *Near Surface Geophysics Asia Pacific Conference*, pp. 480–483.
- Ponomarenko, R., Sabitov, D., y Charara, M. (2020). Spectral element simulation of elastic wave propagation through fractures using linear slip model: microfracture detection for CO2 storage. *Geophysical Journal International*, **223**: 1794–1804.
- Pyrak-Nolte, L, J. (1996). The seismic response of fractures and the interrelations among fracture properties. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences Geomechanics Abstracts*, **33**: 787–802.
- Pyrak-Nolte, L. y Cook, N. (1987). Seismic visibility of fractures. *American Rock Mechanics Association*.
- Rubino, J., Müller, T., Guarracino, L., Milani, M., y Holliger, K. (2014). Seismoacoustic signatures of fracture connectivity. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **119**: 2252–2271.
- Rubino, J., Caspari, E., Milani, M., Holliger, K., y Muller, T. (2015). Seismic anisotropy in fractured low-permeability formations: The effects of hydraulic connectivity. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, **34**: 3219–3223.
- Saenger, H. y Shapiro, A. (2002). Effective velocities in fractured media: a numerical study using the rotated staggered finite-diference grid. *Geophysical Prospecting*, **50**: 183–194.
- Saenger, H., Kruger, O., y Shapiro, A. (2004). Effective elastic properties of randomly fractured soils: 3d numerical experiments. *Geophysical Prospecting*, **52**: 183–195.
- Schoenberg, M. (1980). Elastic wave behaviour across linear slip interfaces. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **68**(5): 1516–1521.
- Schoenberg, M. y Douma, J. (1998). Elastic wave propagation in media with parallel fractures and aligned cracks. *Geophysical Prospecting*, **36**: 571–590.
- Seriani, G. y Priolo, E. (1994). Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous medias. *Finite Elements in Analysis and Design*, **16**: 337–348.
- Shao, S. y Pyrak-Nolte, L. J. (2015). Elastic wave propagation in media with orthogonal fracture networks. *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2015*, pp. 514–518.
- Sheriff, R. (2002). *Encyclopedic Dictionary of Applied Geophysics*. Society of Exploration Geophysicists.
- Stearns, D. y Friedman, M. (1972). Reservoirs in fractured rock. *Stratigraphic Oil and Gas Fields-Classification*, **16**.
- Stein, S. y Wysession, M. (2003). *An introduction to seismology, earthquakes and earth structure*. Wiley-Blackwell.
- Thomsen, L. (1986). Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, **51**: 1954–1966.
- Torrence, C. y Compo, G. (1998). A practical guide to wavelet analysis. *Bulletin of the American Meteorological Society*, **79**(1): 61–78.

- Tsvankin, I. y Grechka, V. (2011). *Seismology of azimuthally anisotropic media and seismic fracture characterization*. Society of Exploration Geophysicists.
- Tsvankin, I., Gaiser, G., Grechka, V., Van der Baan, M., y Thomsen, L. (2010). Seismic anisotropy in exploration and reservoir characterization: An overview. *Geophysics*, **75**: 15–29.
- Vamaraju, J., Sen, M. K., De Basabe, J., y Wheeler, M. F. (2018). Enriched Galerkin finite element approximation for elastic wave propagation in fractured media. *Journal of Computational Physics*, **372**: 726–747.
- Vamaraju, J., Sen, M. K., De Basabe, J., y Wheeler, M. F. (2020). A hybrid Galerkin finite element method for seismic wave propagation in fractured media. *Geophysical Journal International*, **221**: 857–878.
- Vanucci, P. (2018). *Anisotropic Elasticity*. Springer.
- Vasilyeva, M., Chung, E. T., Wun Cheng, S., Wang, Y., y Prokopev, G. (2019). Nonlocal multicontinua upscaling for multicontinua flow problems in fractured porous media. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **355**: 258–267.
- Vershimin, A. y Sabitiv, D. (2011). Spectral element modeling of acoustic logging in anisotropic viscoelastic media. *2nd International Scientific and Practical Conference – Modern Seismic Methods for Oil and Gas Prospecting in Complex Structures*.
- Vlastos, S., Liu, I., Main, I., y Li, X. (2003). Numerical simulation of wave propagation in media with discrete distributions of fractures: Effects of fracture sizes and spatial distributions. *Geophysical Journal International*, **152**: 649–668.
- Wu, C., Harris, J., Nihei, K., y Nakagawa, S. (2005). Two-dimensional finite-difference seismic modeling of an open fluid-filled fracture: Comparison of thin-layer and linear-slip models. *Geophysics*, **70**: T57–T62.
- Zhan, Q., Sun, Q., Ren, Q., Fang, Y., Wang, H., y Liu, Q. (2017). A discontinuous Galerkin method for simulating the effects of arbitrary discrete fractures on elastic wave propagation. *Geophysical Journal International*, **210**: 1219–1230.
- Zhang, J. (2005). Elastic wave modeling in fractured media with an explicit approach. *Geophysics*, **70**: T75–T85.
- Zhao, L., Han, D., Yao, Q., y Yan, F. (2013). Modeling the effect of pore and crack interactions on the effective elastic properties of fractured porous rocks. *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2013*, pp. 2900–2904.
- Zhao, L., Yao, Q., Han, D., y Yan, F. (2016). Characterizing the effect of elastic interactions on the effective elastic properties of porous, cracked rocks. *Geophysical Prospecting*, **64**: 157–169.