Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California

---

Doctorado en Ciencias
en Ciencias de la Tierra
con orientación en Sismología

Medidas de robustez, incertidumbre y markovianidad para estimaciones markovianas y semi-markovianas (con memoria de un paso) de peligro sísmico. Aplicación a las regiones de Japón y México

Tesis
para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Doctor en Ciencias

Presenta:

Quiriat Jearim Gutiérrez Peña

Ensenada, Baja California, México
2021

Tesis defendida por

Quiriat Jearim Gutiérrez Peña

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Fidencio Alejandro Nava Pichardo
Director de tesis

Miembros del comité

Dra. Ewa Glowacka

Dr. Raúl Ramón Castro Escamilla

Dr. Víctor Hugo Márquez Ramírez

Dr. Javier Alejandro González Ortega
Coordinador del Posgrado en Ciencias de la Tierra

Dr. Pedro Negrete Regagnon
Director de Estudios de Posgrado

Quiriat Jearim Gutiérrez peña © 2021
Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis.

Resumen de la tesis que presenta **Quiriat Jearim Gutiérrez Peña** como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Ciencias de la Tierra con orientación en Sismología.

Medidas de robustez, incertidumbre y markovianidad para estimaciones markovianas y semi-markovianas (con memoria de un paso) de peligro sísmico. Aplicación a las regiones de Japón y México

Resumen aprobado por:

_____

Dr. Fidencio Alejandro Nava Pichardo
Director de tesis

Presentamos medidas para cuantificar robustez, incertidumbre, markovianidad, y significatividad de resultados de análisis markovianos para la evaluación del peligro sísmico (la probabilidad de que ocurra uno o más sismos en un rango de magnitud y en ventanas de tiempo y espacio dadas). Proponemos también el uso de un discriminante basado en dichas medidas, adecuadamente normalizadas, que permite asignar una calificación a los resultados de una evaluación, así como escoger entre varios modelos cuál es el que da mejores resultados. Aplicamos las medidas y el discriminante mencionados a la estimación del peligro sísmico en Japón y México, usando la base de datos del catálogo del ISC. Definimos como sistema un área geográfica sísmicamente activa dividida en regiones y los estados markovianos corresponden a dichas regiones; después de cada sismo el sistema se encuentra en el estado correspondiente a la región donde ocurrió el sismo. Delimitamos las regiones con base en las principales estructuras tectónicas y en la sismicidad. Probamos dos estrategias: una sola magnitud umbral para todas las regiones y magnitudes umbral diferentes para cada región que resulten en poblaciones similares para todas las regiones. Se observa que para ambas estrategias magnitudes umbral $M_w \geq 7$ resultan en estimaciones más markovianas y, en general, mejores, que las resultantes de magnitudes umbral menores. De los modelos óptimos para Japón obtenidos para ambas estrategias encontramos que existe fuerte interacción entre las regiones uno (trinchera de las Kuriles) y dos (trinchera de Japón); la región dos tiene fuerte interacción con la región uno y cuatro (trincheras de Nankai y Ryukyu) ; la región tres (trinchera Izu-Bonin) tiene fuerte interacción con ella misma; la región cuatro tiene fuerte interacción con ella misma y con la región dos; la región cuatro y tres tienen poca interacción entre ellas. Para modelos con magnitudes umbral lo suficientemente grandes para tener buena markovianidad, no hubo suficientes datos para caracterizar los intervalos de transición entre cada par de estados, ni para transiciones agrupadas por estado inicial. Sólo fue posible caracterizar al conjunto global de todos los intervalos observados como una posible distribución exponencial. La aplicación del método a México tiene la limitante de que los datos son escasos, por lo que, los resultados son poco confiables; pero a pesar de esto, se observa mayor markovianidad para magnitudes umbral mayores de 6.9 y el modelo óptimo resulta para $M^T = 7.1$, resultados que coinciden con los de Japón. Dado que es razonable suponer que la ocurrencia de un sismo grande pueda influir en la actividad de la región sismogénica más allá del siguiente gran sismo, implementamos un modelo semi-markoviano con memoria de un paso antes del presente. Aunque los datos no son suficientes para caracterizar completamente la semi-markovianidad del sistema usado, los resultados sugieren que, dados más datos, el peligro sísmico en el sistema analizado podría probablemente ser mejor descrito por un tratamiento semi-markoviano.

Palabras clave: Cadenas de Markov, Peligro Sísmico, México, Japón

Abstract of the thesis presented **by Quiriat Jearim Gutiérrez Peña** as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Earth Sciences with orientation Seismology.

Robustness, uncertainty and Markovianity measures for Markovian and semi-Markovian (one-step memory) estimates of seismic hazard. Application to the regions of Japan and Mexico.

Abstract approved by:

_____

Dr. Fidencio Alejandro Nava Pichardo
Thesis Director

We present measures to quantify robustness, uncertainty, Markovianity, and significance of Markovian analysis results for the evaluation of seismic hazard (the probability that one or more earthquakes will occur in a given magnitude range and time and space windows). We also propose the use of a discriminant based on these measures, properly normalized, which allows rating the results of an evaluation and choosing which model, among several, gives the best results. We apply the aforementioned measures and discriminant to the estimation of seismic hazard in Japan and in Mexico, using the ISC catalog database. We define a system as a seismically active geographic area divided into regions which constitute the Markovian states; after each earthquake the system is said to be in the state corresponding to the regions where earthquake occurred. We define the regions based on the main tectonic structures and on seismicity. We tested two strategies: a single threshold magnitude for all regions, and different threshold magnitudes for each region that result in similar populations for all regions. It is observed that for both strategies threshold magnitudes $M^T \geq 7.0$ result in estimates that are more Markovian and, in general, better, than those resulting from lower threshold magnitudes. From the optimal models for Japan from both strategies, we find that there is a strong interaction between regions one (Kuril trench) and two (Japan trench); region two has strong interaction with region one and four (Nankai and Ryukyu trenches); region three (Izu-Bonin trench) has strong interaction with itself; region four has strong interaction with itself and with region two; region four and three have little interaction between them. For models with threshold magnitudes large enough to have good markovianity, there were not enough data to characterize the transition intervals between each pair of states, nor for transitions grouped by initial state. It was only possible to characterize the global set of all observed intervals as a possible exponential distribution. The application of the method to Mexico is limited because data are few, therefore, the results are not very reliable; but, despite this, markovianity is seen to be larger for threshold magnitudes above 6.9 and the optimal model results for $M^T = 7.1$, results that coincide with those for Japan. Since it is reasonable to assume that the occurrence of a large earthquake can influence the activity of the seismogenic region beyond the next large earthquake, we implemented a semi-Markovian model with memory of one step before the present. Although the data are not sufficient to fully characterize the semi-Markovianity of the system used, the results suggest that for more abundant data the seismic hazard in the analyzed system would probably be better described by a semi-Markovian treatment.

Keywords: Markov Chains, Seismic Hazard, Mexico, Japan

Dedicatoria

A mi madre Rosario y a mi padre Joaquín porque sin tener idea de que es lo que estudiaba siempre me apoyaron. A mi esposa Sandra por su apoyo, sus ánimos y por cuidar a nuestro hijo mientras yo estudiaba.

Agradecimientos

A mi asesor el Dr. Alejandro Nava por su inmensa ayuda, apoyo, paciencia y por compartir sus conocimientos durante estos cuatro años.

A los miembros del comité por sus sugerencias y comentarios que ayudaron a mejorar esta tesis.

A Paul que me abrió las puertas de su casa y por todos los consejos que me dio.

Finalmente quiero agradecer al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE), por haberme permitido estudiar en el mismo, y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por apoyarme económicamente con los estudios.

Tabla de contenido

Página

Resumen en español…… ii

Resumen en inglés…… iii

Dedicatorias…… iv

Agradecimientos…… v

Lista de figuras…… ix

Lista de tablas…… xi

Lista de Símbolos…… xii

Capítulo 1. Introducción

1.1 Antecedentes…… 2

1.2 Justificación …… 4

1.3 Hipótesis…… 4

1.4 Objetivos…… 5

1.4.1 Objetivo general …… 5

1.4.2 Objetivos específico…… 5

Capítulo 2. Metodología

2.1 Proceso de Markov…… 6

2.2 Probabilidades markovianas a múltiples pasos…… 7

2.3 Estimación empírica de probabilidades…… 8

2.3.1 Transiciones y probabilidades…… 8

2.3.2 Probabilidades estacionarias empíricas…… 10

2.4 Métodos para medir estabilidad, robustez, e incertidumbre para estimaciones de probabilidad markoviana …… 12

2.4.1 Estabilidad…… 12

2.4.2 Robustez…… 14

2.4.3 Incertidumbre y tamaño de muestra…… 16

2.4.4 Otras fuentes de incertidumbres…… 19

2.5 Métodos para medir la markovianidad…… 19

2.5.1 Markovianidad de la convergencia a las probabilidades estacionarias…… 20

2.5.2 Markovianidad de las diferencias absolutas entre *P* y Π …… 20

2.5.3 Markovianidad del traslape de Bhattacharyya entre *P* y Π 21
2.5.4 Markovianidad de la entropía de la MPT..... 22
2.5.5 Markovianidad de la distancia Kullback-Leibler..... 23
2.6 Método para evaluar un modelo a través de la normalización de medidas y discriminante..... 24
2.6.1 Robustez..... 24
2.6.2 Incertidumbre y tamaño de muestra..... 25
2.6.3 Markovianidad de convergencia de probabilidades de estado estacionarias..... 25
2.6.4 Markovianidad de la diferencia absoluta entre *P* y Π 26
2.6.5 Markovianidad del no traslape de Bhattacharyya de *P* y Π 26
2.6.6 Markovianidad de la entropía de la matriz..... 26
2.6.7 Markovianidad de la distancia Kullback-Leibler..... 27
2.7 Discriminante..... 27
2.8 Peligro sísmico y tiempo..... 28
2.8.1 Intervalos fijos..... 28
2.8.2 Intervalos libres..... 28

Capítulo 3. Aplicación y Resultados

3.1 Sistema y estados..... 30
3.2 Zonas posibles de aplicación 30
3.3 Japón..... 31
3.3.1 Marco tectónico..... 31
3.3.2 Sismicidad..... 32
3.3.3 Regiones..... 37
3.3.4 Aplicación..... 38
3.3.5 Primera estrategia: Una sola magnitud umbral..... 39
3.3.6 intervalos de tiempo para la primera estrategia..... 47
3.3.7 Segunda estrategia..... 55
3.3.8 Intervalos de tiempo para la segunda estrategia..... 63
3.3.9 Conclusiones para ambas estrategias..... 65
3.4 Trinchera mexicana..... 66
3.4.1 Marco tectónico y sismicidad..... 67
3.4.2 Regiones..... 69
3.4.3 Peligro markoviano 70

3.4.4 Primera estrategia para la trinchera mexicana…… 70
3.4.5 Segunda estrategia para la trinchera mexicana…… 76
3.4.6 Conclusiones para la trinchera mexicana…… 83

Capítulo 4. Modelo semi-markoviano

4.1 Sistema semi-markoviano..... 84
4.2 Probabilidades semi-markovianas a múltiples pasos.…… 85
4.3 Estimación empírica de probabilidades de transición semi-markovianas…… 87
4.3.1 Transiciones y probabilidades semi-markovianas…….. 87
4.3.2 Probabilidades empíricas semi-markovianas a múltiples pasos…….. 89
4.4 Markovianidad para sistemas semi-markovianos…… 90

Capítulo 5. Sistema semi-markoviano: Aplicación y Resultados

5.1 Sistema y estados 91
5.2 Aplicación…….. 91

Capítulo 6. Discusiones y Conclusiones

Literatura citada…….. 100

Lista de figuras

Figura		Página
1	Robustez…….	15
2	Errores……	17
3	Marco tectónico de Japón……	32
4	Perfiles sísmicos en las trincheras de Japón y Kuriles……	34
5	Perfiles sísmicos en la trinchera Izu-Bonin……..	35
6	Perfiles sísmicos en las trincheras de Nankai y Ryukyu……	36
7	Regiones…….	37
8	Perfiles sísmicos paralelos a las trincheras de Japón y Kuryles……..	38
9	Medidas de markovianidad……	42
10	Medidas de markovianidad normalizadas……	43
11	Discriminante para el primer conjunto de pesos……..	44
12	Discriminante para el segundo conjunto de pesos……..	44
13	Discriminante para el tercer conjunto de pesos……..	45
14	Discriminante para el cuarto conjunto de pesos……..	46
15	Intervalo global……..	48
16	Histograma y distribución del Intervalo global……	49
17	$\Delta\tau$ vs ε_{rms} ……	50
18	Intervalos por estado inicial……..	51
19	Ajuste de distribución exponencial a intervalos por estado inicial……	52
20	Intervalos markovianos……	54
21	Medidas de markovianidad para la segunda estrategia……	58
22	Medidas de markovianidad normalizadas para la segunda estrategia……..	59
23	Discriminante para el primer conjunto de pesos, segunda estrategia……..	60

24	Discriminante para el segundo conjunto de pesos, segunda estrategia……..	60
25	Discriminante para el tercer conjunto de pesos, segunda estrategia……	61
26	Discriminante para el cuarto conjunto de pesos, segunda estrategia……..	62
27	Intervalo global para la segunda estrategia……	64
28	Histograma y distribución del Intervalo global para la segunda estrategia……	65
29	Marco tectónico de México……	67
30	Perfiles sísmicos para México……..	68
31	Regiones para México……	69
32	Medidas de markovianidad para México……..	72
33	Medidas de markovianidad normalizadas para México……..	73
34	Discriminante para el primer conjunto de pesos para México, primera estrategia…….	74
35	Discriminante para el segundo conjunto de pesos para México, primera estrategia…	74
36	Discriminante para el tercer conjunto de pesos para México, primera estrategia…….	75
37	Discriminante para el cuarto conjunto de pesos para México, primera estrategia…….	75
38	Medidas de markovianidad para México, segunda estrategia……..	78
39	Medidas de markovianidad normalizadas para México, segunda estrategia……..	79
40	Discriminante para el primer conjunto de pesos para México, segunda estrategia……	80
41	Discriminante para el segundo conjunto de pesos para México, segunda estrategia…	80
42	Discriminante para el tercer conjunto de pesos para México, segunda estrategia…….	81
43	Discriminante para el cuarto conjunto de pesos para México, segunda estrategia…….	82
44	Matriz de probabilidades de transición semi-markoviana para $N_S = 4$ ……..	85
45	Matrices Θ, Ξ y *P* semi-markovianas para $N_S = 4$ ……	89

Lista de tablas

Tabla		Página
1	Las matrices Θ, Ξ, π y *P* para todas las magnitudes umbral consideradas.....	39
2	Las matrices Θ, Ξ, π y *P* para todos los grupos considerados……	55
3	Las matrices Θ, Ξ, π y *P* para todas las magnitudes umbral consideradas para México……	70
4	Las matrices Θ, Ξ, π y *P* para todos los grupos considerados para México……	76
5	Número total de transiciones *N*, y las matrices Q y X; para todas las magnitudes umbral consideradas……	92
6	Matrices *P* y π ; para todas las magnitudes umbral consideradas……	93

Lista de símbolos

N_s Número de estados.

$k(n)$ Estado del sistema en la prueba *n.*

$\hat{P}$ Matriz de probabilidades de transición exacta o teórica.

$\hat{p}_{ij}$ Elemento de la matriz $\hat{P}$.

P Matriz de probabilidades de transición empírica.

p_{ij} Elemento de la matriz P.

$\hat{\Pi}$ Matriz de probabilidades estacionarias exactas o teóricas.

$\hat{\pi}_j$ Elemento de la matriz $\hat{\Pi}$.

Π Matriz de probabilidades estacionarias empíricas.

π_j Elemento de la matriz Π.

N Número total de transiciones.

Θ Matriz de transiciones.

θ_{ij} Elemento de la matriz Θ.

Ξ Matriz o vector cuyos elementos son el número total de transiciones que hay en cada renglón de la matriz Θ.

ξ_i Elemento de la matriz Ξ.

P_0 Vector de probabilidades de ocurrencia de cada estado.

p_{0j} elemento del vector P_0.

P^+ Matriz de probabilidades aumentadas.

p_{ij}^+ Elemento de la matriz P^+.

P^- Matriz de probabilidades disminuidas.

p_{ij}^+ Elemento de la matriz P^-.

p_{im} La probabilidad más baja de P.

ρ Robustez para P.

ε Error esperado absoluto promedio.

N_r Número de realizaciones.

U	Matriz de probabilidades uniforme.
u_{ij}	Elemento de la matriz *U*.
M_6	Markovianidad de la convergencia a las probabilidades estacionarias.
δ	Diferencias absolutas entre *P* y Π .
β	Traslape de Bhattacharyya entre *P* y Π .
S^P	Entropía para la matriz *P.*
S^π	Entropía para las probabilidades estacionarias.
S	Diferencia entre la entropía S^P y S^π .
S^U	Entropía para la matriz *U.*
κ	Entropía relativa o distancia Kullback-Leibler.
$\hat{\rho}$	Robustez normalizada para P .
$\hat{\varepsilon}$	Error esperado absoluto promedio normalizado.
$\hat{M}_6$	Markovianidad de la convergencia a las probabilidades estacionarias normalizada.
$\hat{\delta}$	Diferencias absolutas normalizadas.
$\hat{\beta}$	Traslape de Bhattacharyya normalizado.
$\hat{S}$	Diferencia entre la entropía S^P y S^π normalizada.
$\hat{\kappa}$	Distancia Kullback-Leibler normalizada.
Q	Discriminante.
$w_{(\bullet)}$	Pesos asignados a las diferentes medidas de markovianidad.
t_n	Tiempo de ocurrencia del *n´*ésimo sismo.
$\tau_m^{[ij]}$	Intervalos de tiempo para cada transición particular.
$\tau_m^{[i]}$	Intervalos de tiempo de las transiciones que inician desde cada estado *i.*
τ_n	Intervalos de tiempo para todas las transiciones.
Δt	Ancho de clase en el histograma de los intervalos de tiempo.
M^T	Umbral de magnitud dado.

Capítulo 1. Introducción

Para disminuir los posibles daños, tanto humanos como materiales, que pueden causar los terremotos es importante la correcta evaluación del *peligro sísmico*, así como de su confiabilidad y estabilidad. Entendemos por peligro sísmico la probabilidad de ocurrencia de sismos en ventanas espaciales, temporales y de magnitud.

La predicción determinista de un gran sismo (determinación del hipocentro, tiempo de ocurrencia y magnitud de un sismo) es intrínsecamente imposible porque no se conoce suficientemente bien el mecanismo de ruptura sísmica y no es posible conocer con detalle los esfuerzos, deformaciones y resistencia de los enormes volúmenes de roca, la mayor parte de ellos a kilómetros de profundidad, que participan en el proceso sismogénico. Además, el proceso sismogénico es un proceso físicamente complejo, críticamente auto organizado, que nunca se repite exactamente, por lo que es necesario considerar las componentes imponderables del proceso como componentes aleatorias y tratar al proceso como estocástico.

Existen distintos métodos para la estimación del peligro sísmico, algunos métodos se basan en modelos sofisticados del paradigmático rebote elástico, como autómatas celulares con componentes estocásticas. Otros modelos utilizan estadísticas de fenómenos asociados con los niveles de esfuerzo en las zonas sismogénicas, como los que estudian la distribución de magnitudes de Gutenberg Richter, los *gaps* (brechas) sísmicos, dimensiones fractales y entropía de la sismicidad. Por último, podemos mencionar análisis estadísticos de la ocurrencia de grandes sismos, en los cuales puede no aparecer explícitamente un modelo físico. El más sencillo de estos modelos es el poissoniano, que ignora completamente la física del proceso sismogénico, se basa únicamente en el número promedio de sismos por unidad de tiempo y no tiene memoria: tiempo, magnitud, y ubicación de sismos precedentes, no importa cuán grandes, no cambian las probabilidades de sismos futuros (Anagnos y Kiremidjian, 1988); a pesar de sus limitaciones el modelo poissoniano es ampliamente utilizado en estudios de riesgo sísmico.

Los modelos markovianos, que serán descritos más adelante, estudian estadísticas de la ocurrencia observable de interés y han sido ampliamente utilizados en varios campos de la ciencia (Suchard et al., 2001; Mau et al., 2004; Hopcroft et al., 2007). A diferencia de lo que puede ser suficiente en otros campos, en las aplicaciones sismológicas de estimación de peligro sísmico, dadas las posibles consecuencias de la aplicación de los resultados, es de capital importancia saber cuán confiables y

significativos son éstos. Por tanto, nos hemos abocado a proponer medidas que cuantifiquen confiabilidad, estabilidad, significatividad y aplicabilidad, de un estudio markoviano. Con dichas medidas es posible, además, escoger el óptimo entre diferentes modelos o conjuntos de parámetros, y proponemos una manera de hacer esta elección.

Para ilustrar la aplicación de las medidas que proponemos, en el presente trabajo estimamos el peligro sísmico markoviano para la región alrededor de Japón, con resultados muy satisfactorios que, al calificar diferentes modelos, brindan información sobre el proceso sísmico en sí.

Por último, hicimos la prueba de caracterizar las distribuciones de los intervalos de tiempo entre transiciones, y la posibilidad de que las probabilidades de transición sean semi-markovianas, esto es, que dependan del estado presente y también del estado anterior, pero, desafortunadamente, encontramos que no hay suficientes datos para lograr resultados confiables en estos aspectos. Sin embargo nuestros resultados tentativos sugieren que estos aspectos dan resultados útiles con aplicaciones que cuenten con mayor número de datos.

1.1 Antecedentes

Los modelos markovianos son una herramienta empleada en muchos campos de investigación, incluyendo lingüística, comunicación, meteorología, economía y otros (Khmelev et al., 2001; Fritchman, 1967; Raible et al., 1999; Grant et al., 1991); en sismología una de las varias aplicaciones de los modelos markovianos es a la estimación de peligro sísmico.

Un modelo markoviano (finito) consiste de un sistema que tiene un número finito de estados, y las transiciones entre estados ocurren estocásticamente con probabilidades que dependen únicamente del estado en que se encuentra el sistema antes de la transición. En aplicaciones sismológicas el sistema es usualmente una área geográfica sísmicamente activa y los estados pueden ser diversos niveles de esfuerzos sobre una falla, niveles de liberación de energía, diferentes rangos de magnitud, la ocurrencia o ausencia de sismos en zonas determinadas, la combinación de ocurrencia o ausencia de un sismo grande junto con algún precursor (gas radón, sismos premonitores, quietud sísmica), etc.

Los diversos trabajos que estiman el peligro sísmico mediante cadenas de Markov (e.g. Knopoff, 1971; Hagiwara, 1975; Patwardhan et al., 1980; Fujinawa, 1991; Yildiz and Demir, 1999; Heng Tsai 2001;

Nava et al., 2005; Votsi et al., 2010; Ünal et al. 2011; Ramin Sadeghian, 2012; Votsi et al., 2013) pueden, en su mayoría, ser divididos en dos categorías en ambas de las cuales incidiremos:

- Modelos markovianos.

Como ejemplo de modelo markoviano, Nava et al. (2005) estimaron peligro sísmico utilizando un modelo markoviano para Japón; como estados definieron la ocurrencia o no de un sismo en las cuatro regiones en que estaba dividido su sistema, por lo tanto, el estado resultaba ser un número binario donde el 0 representaba la ausencia y el 1 la ocurrencia de uno o más sismos en la región correspondiente. Usaron el catálogo de la ISC de 1964-2000 con sismos de magnitud $M_W \geq 5.5$; el estado del sistema fue muestreado a intervalos regulares de 0.1 años; por último compararon los resultados markovianos con métodos sin memoria como el de Poisson y la distribución uniforme, para comprobar que sus resultados tienen probabilidades muy pequeñas de resultar de una adivinación puramente aleatoria.

Nosotros presentaremos aquí un estudio markoviano, que será descrito en detalle

en los capítulos 2 y 3 de esta tesis y que da resultados altamente satisfactorios.

- Modelos semi-markovianos .

Los modelos semi-markovianos son modificaciones del modelo markoviano. Un ejemplo, muy citado, es el de Patwardhan et al. (1980), donde aparte del cálculo de la matriz de probabilidades de transición postulan funciones de probabilidad, Weibull o log-normal, para el tiempo de espera entre transiciones.

Nosotros presentaremos aquí un modelo semi-markoviano consistente en analizar cadenas de

Markov considerando memoria de un paso previo al actual. Aunque los datos no son suficientes para caracterizar completamente la semi-markoviedad del sistema usado, los resultados sugieren que el peligro sísmico en el sistema analizado podría ser mejor descrito por un tratamiento semi-markoviano.

Independientemente de que el modelo usado sea markoviano o semi-markoviano, es de suma importancia saber qué tan confiables y significativas son sus estimaciones de peligro sísmico y la aportación principal de esta tesis es cómo cuantificar las medidas de confiabilidad y los resultados de cada

modelo, para poder decidir cuál modelo o conjunto de parámetros es óptimo dentro de los límites permitidos por los datos.

Dicha cuantificación es particularmente importante para aplicaciones sismológicas que utilizan sismos de gran magnitud, dado que la relativa escasez de sismos grandes y la limitada extensión de la mayoría de los catálogos sísmicos limita la confiabilidad de las estimaciones markovianas del peligro sísmico; mientras que en muchas aplicaciones, incluyendo algunas sismológicas, existen abundantes datos que permiten estimaciones confiables del peligro.

1.2 Justificación

Para que una estimación de peligro sísmico sea de utilidad, es necesario saber qué tan confiable y significativa es. Como se mencionó anteriormente, los modelos Markovianos son ampliamente usados, pero generalmente no se especifica cuán confiables son sus estimaciones de las probabilidades de transición. Por lo tanto, es de primera importancia encontrar maneras de cuantificar incertidumbre, robustez y significatividad para estudios de peligro sísmico markoviano.

1.3 Hipótesis

Las hipótesis son:

1. La relación entre sismos de gran magnitud ocurridos en distintas regiones de un área geográfica sísmicamente activa da lugar a probabilidades de transición markovianas (Nava et al., 2005).

2. Es posible caracterizar robustez, incertidumbre y significatividad de las estimaciones de las probabilidades markovianas y/o semi-markovianas.

3. Puede ser posible caracterizar la distribución de intervalos de tiempo para las transiciones entre estados.

4. Es razonable esperar que la ocurrencia de un sismo grande influya en la actividad sísmica de una región sismogénica más allá del siguiente gran sismo. Exploraremos la posibilidad de analizar una secuencia de transiciones mediante un modelo semi-markoviano con memoria del estado anterior al presente.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Diseñar e implementar medidas que permitan evaluar la confiabilidad y markovianidad de estimaciones de probabilidades de transición obtenidas para diferentes modelos y un método para comparar dichas medidas que permita elegir el modelo óptimo. Explorar la posibilidad de caracterizar distribuciones de tiempos de recurrencia y la posibilidad de utilizar un modelo semi-markoviano con memoria de un paso previo al actual.

1.4.2. Objetivos específicos

1. Desarrollar e implementar medidas de estabilidad, robustez e incertidumbre para la matriz de probabilidades de transición.

2. Desarrollar e implementar diversas medidas para la markovianidad.

3. Diseñar e implementar un discriminante para elegir el modelo óptimo.

4. Caracterizar intervalos de tiempo para las transiciones entre estados.

5. Aplicar medidas y discriminante para determinar el modelo óptimo para estimar el peligro sísmico markoviano para Japón y México.

6. Explorar la posibilidad del uso de un modelo semi-markoviano para estimar el peligro sísmico. Aplicarlo a Japón.

Capítulo 2. Metodología

En este capítulo presentamos un breve resumen de algunos conceptos básicos acerca de cadenas de Markov que serán usados más adelante (2.1 a 2.3), presentamos métodos que proponemos para evaluar y comparar modelos markovianos (2.4 a 2.7) y métodos para caracterización de intervalos entre ocurrencia de sismos en modelos que consideran transiciones con tiempos libres (2.8).

2.1 Proceso de Markov

Un proceso de Markov finito es un proceso estocástico, con un número finito N_S de estados denotados como $\{k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N_S\}$, $N_S > 1$, para el cual la probabilidad de transición del estado actual a un estado dado en la siguiente realización, i.e., al siguiente paso (llamaremos *paso* a cada subsecuente realización) depende sólo del estado actual, y no de algún estado previo. Sea $k(n)$ el estado del sistema en la prueba *n*, entonces

$$\mathrm{Pr}\left[k(n+1) \mid k(n),\ k(n-1),\ \ldots,\ k(0)\right] = \mathrm{Pr}\left[k(n+1) \mid k(n)\right], \tag{1}$$

i.e., el sistema no tiene memoria de estados que han ocurrido antes del presente. Sean $k(n) = i$ y $k(n+1) = j$, entonces si las probabilidades de transición entre estos estados son siempre las mismas, independientemente de la realización, la cadena de Markov es homogénea, y podemos escribir

$$\mathrm{Pr}\left[k(n+1) = j \mid k(n) = i\right] = \hat{p}_{ij}, \tag{2}$$

donde el sombrero denota probabilidad exacta o teórica.

Considerando todas las posibles transiciones entre estados, las probabilidades de transición son representables como una matriz cuadrada

$$\hat{P} = \left[\hat{p}_{ij};\ i,\ j = 1,\ \ldots,\ N_S\right]. \tag{3}$$

Una *cadena de Markov* es una secuencia de valores de alguna variable aleatoria que corresponde a un proceso de Markov, por lo que la probabilidad de un valor depende sólo del valor que lo precede (de ahí “cadena”).

2.2 Probabilidades markovianas a múltiples pasos

Sea $k(m)=i$, entonces la probabilidad de que *n* pasos después el sistema esté en el estado $k(m+n)=j$, es

$$\mathrm{Pr}\left[k(m+n)=j \mid k(m)=i\right]=\hat{p}_{ij}^{(n)}, \tag{4}$$

donde $\hat{p}_{ij}^{(n)}$ es un elemento $(i,\ j)$ de la matriz $\hat{P}^n$ (ecuación Chapmann-Kolmogorov).

Si existen números $\hat{\pi}=\left[\hat{\pi}_j;\ j=1,\ \ldots,\ N_s\right]$ tales que

$$\lim_{n\to\infty}\hat{p}_{ij}^{(n)}=\hat{\pi}_j,\ \ \forall\, i, \tag{5}$$

con

$$\sum_{j=1}^{N_s}\hat{\pi}_j=1, \tag{6}$$

entonces en el límite las probabilidades de transición son

$$\lim_{n\to\infty}\hat{P}^n=\hat{\Pi}=\left\{\begin{array}{c}\hat{\pi}\\ \vdots\\ \hat{\pi}\end{array}\right\}, \tag{7}$$

de manera que ya no dependen del estado actual, el sistema representado por la matriz de transición es *ergódico*, y las probabilidades $\hat{\pi}_j$ son llamadas probabilidades estacionarias.

Una matriz de transición de Markov $\hat{P}$ es ergódica si todos los estados comunican, i.e., si se puede alcanzar cualquier estado desde cualquier otro estado con probabilidad distinta de cero; por lo tanto, $\hat{P}$ es ergódica si para algún *n* $\hat{p}_{ij}^{(n)}>0,\ \ \forall\, i,\ j$.

2.3 Estimación empírica de probabilidades

Cuando estudiamos un sistema real, supuestamente markoviano, para el cual las probabilidades de transición son estimadas de la cadena de Markov observada, i.e. a partir de la secuencia finita observada de $N+1$ valores de estados tomados por la variable aleatoria *k*

$$\{k(n);\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N\}\ .$$

2.3.1 Transiciones y probabilidades

La matriz cuadrada de transiciones Θ es construida mediante el conteo de las transiciones observadas entre estados sucesivos:

$$\Theta=\left[\theta_{ij};\ i,\ j=1,\ \ldots,\ N_S\right], \tag{8}$$

donde θ_{ij} es el número observado de transiciones del estado *i* al estado *j*.

A partir de aquí, ilustraremos los conceptos de la estimación empírica de probabilidad y evaluación de confianza, robustez, y significancia, mediante el uso de un conjunto de datos sintético con 80 transiciones para un sistema con cuatro estados $N_S=4$, y la matriz de transición:

$$\Theta=\begin{bmatrix} 3 & 12 & 3 & 1 \\ 12 & 11 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 11 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix};$$

tanto el número de estados como el pequeño número de transiciones son típicos para estudios de ocurrencias de sismos de gran magnitud.

Sea ξ_i el número total de transiciones que se originaron del estado *i*

$$\xi_i=\sum_{j=1}^{N_S}\theta_{ij}\ , \tag{9}$$

y con el número total de transiciones originadas en cada estado formamos el vector

$$\Xi = \left[\xi_i ;\ i = 1, \ldots ,\ N_S \right].$$

Para nuestro ejemplo

$$\Xi = \begin{bmatrix} 19 \\ 30 \\ 17 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

De las matrices Θ y Ξ, se construye la matriz de probabilidades de transición (MPT) empírica, $P = \left[p_{ij} ;\ i,\ j = 1, \ldots ,\ N_S \right]$, como

$$p_{ij} = \frac{\theta_{ij}}{\xi_i}, \tag{10}$$

así que

$$\sum_{j=1}^{N_S} p_{ij} = 1,\ \forall\, i\,. \tag{11}$$

Esta MPT, *P*, es la evaluación del peligro sísmico resultante del estudio, porque si el sistema está actualmente en algún estado *i*, la probabilidad para que el siguiente estado sea *j* es dado por p_{ij}.

Para nuestro ejemplo

$$P = \begin{bmatrix} 0.157895 & 0.631579 & 0.157895 & 0.052632 \\ 0.400000 & 0.366667 & 0.200000 & 0.033333 \\ 0.058824 & 0.176471 & 0.117647 & 0.647059 \\ 0.142857 & 0.285714 & 0.500000 & 0.071429 \end{bmatrix}.$$

Recuérdese que la ley de Borel de los grandes números nos dice que p_{ij} dado por (10) tenderá a la probabilidad "verdadera" $\hat{p}_{ij}$ cuando $\xi_i \to \infty$; una condición imposible de alcanzar cuando tratamos con sismos de gran magnitud. En estas aplicaciones debe ser mantenido en mente que las probabilidades

estimadas están basadas solamente en números usualmente pequeños de realizaciones de un proceso aleatorio, así que las estimaciones de probabilidad conllevan incertidumbres que deben ser estimadas para aplicaciones de peligro sísmico. Cómo estas incertidumbres dependen del número de transiciones será discutido después.

2.3.2 Probabilidades estacionarias empíricas

Las probabilidades estacionarias empíricas, aproximadas, Π , son obtenidas de P^n después de un número finito de pasos, *n*, cuando la convergencia es alcanzada para una precisión dada (i.e., para un número dado de decimales), i.e. para cada columna

$$\pi_j = p_{ij}^{(n)}, \ \forall\, i\,, \tag{12}$$

entonces

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \end{bmatrix}; \ \pi \equiv \left[\pi_1, \ \pi_2, \ldots, \ \pi_{N_s} \right]. \tag{13}$$

La precisión deseada es elegida según cuantos decimales pueden ser considerados posiblemente significativos en una estimación de probabilidad; también hay que considerar que un gran número de decimales está sujeto a ruido numérico. En lo que sigue consideraremos precisión de seis decimales.

Para nuestro ejemplo, las probabilidades estacionarias son logradas, para seis decimales de precisión, para P^{20} :

$$\pi = \left[0.221533 \quad 0.367246 \quad 0.227177 \quad 0.184044 \right].$$

Dado que las probabilidades estacionarias no dependen del estado inicial, es interesante compararlas con las probabilidades de ocurrencia de cada estado, obtenidas empíricamente del número de veces que ocurrió un estado dado, dividido por el número total de ocurrencias de estados. Tales

probabilidades,

$$P_0 = \left[p_{01}, \ldots, p_{0N_s} \right], \tag{14}$$

pueden ser estimadas de la matriz Θ como

$$p_{0j} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N_s} \theta_{ij}; \; j = 1, \ldots, N_s . \tag{15}$$

Para nuestro ejemplo, las probabilidades de la ocurrencia de estados son

$$P_0 = \left[0.225000 \quad 0.375000 \quad 0.225000 \quad 0.175000 \right],$$

las cuales difieren de las probabilidades estacionarias porque $N = 80$ es una muestra relativamente pequeña. Se puede tener una buena coincidencia para el quinto o sexto lugar decimal para $N > 250$. Por ejemplo para un conjunto de datos sintético con 250 transiciones, y la matriz de transición

$$Q = \begin{bmatrix} 13 & 29 & 11 & 4 \\ 28 & 16 & 15 & 11 \\ 10 & 7 & 2 & 38 \\ 6 & 18 & 29 & 13 \end{bmatrix},$$

las probabilidades estacionarias son logradas para, P^{17}:

$$p = \begin{bmatrix} 0.228000 & 0.280000 & 0.228000 & 0.264000 \end{bmatrix},$$

y las probabilidades de la ocurrencia de estados son

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.228000 & 0.280000 & 0.228000 & 0.264000 \end{bmatrix}.$$

2.4 Métodos para medir estabilidad, robustez, e incertidumbre para estimaciones de probabilidad markoviana

Una simple determinación de las probabilidades de transición no será muy útil para la evaluación del peligro sísmico si no hay estimación acerca de cuán confiables son. En lo que sigue consideraremos algunos aspectos de este problema que dependen mayormente del tamaño de la muestra usada para la estimación de las probabilidades.

2.4.1 Estabilidad

Una estimación empírica de las probabilidades markovianas es esencialmente un proceso continuo, porque, en general, cualquier dato nuevo cambiara las estimaciones (la única excepción es cuando el dato nuevo contribuye a una probabilidad previa $p_{ij} = 1$, lo cual es una rareza). Lo que sigue es adaptado de Nava et al. (2005).

Supongamos que hemos determinado la MPT markoviana, y supongamos que el estado actual es el estado *i*, cuando ocurre una nueva transición al estado *k*, la p_{ij} estimada cambia de $p_{ij} = \theta_{ij} / \xi_i$ (10) a una probabilidad aumentada

$$p_{ij}^{+} = \frac{\theta_{ij} + 1}{\xi_i + 1};\ j = k\,, \tag{16}$$

y $N_s - 1$ probabilidades disminuidas

$$p_{ij}^{-} = \frac{\theta_{ij}}{\xi_i + 1};\ j \neq k\,. \tag{17}$$

Los cambios correspondientes son

$$\Delta p_{ij}^{+} = p_{ij}^{+} - p_{ij} = \frac{1 - p_{ij}}{\xi_i + 1};\ j = k\,, \tag{18}$$

y

$$\Delta p_{ij}^{-} = p_{ij}^{-} - p_{ij} = \frac{-p_{ij}}{\xi_i + 1};\ j \neq k\ ; \tag{19}$$

cuanto menor sean los valores absolutos de estos cambios, las estimaciones de probabilidad son más estables.

Estos posibles cambios pueden usarse como límites inferior y superior para las probabilidades estimadas, y estas posibles variaciones deberían tomarse en cuenta al considerar un pronóstico. Así, antes de que ocurra el evento *j* las probabilidades pueden ser expresadas como

$$p_{ij}^{-} \leq p_{ij} \leq p_{ij}^{+}\ . \tag{20}$$

Para nuestro ejemplo, las probabilidades de transición *P* son complementadas por los límites de incertidumbre de (17) y (16) mostrados abajo

$$P^{-} \qquad\qquad P^{+}$$

$$\begin{bmatrix} 0.150000 & 0.600000 & 0.150000 & 0.050000 \\ 0.387097 & 0.354839 & 0.193548 & 0.032258 \\ 0.055556 & 0.166667 & 0.111111 & 0.611111 \\ 0.133333 & 0.266667 & 0.466667 & 0.066667 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.200000 & 0.650000 & 0.200000 & 0.100000 \\ 0.419355 & 0.387097 & 0.225806 & 0.064516 \\ 0.111111 & 0.222222 & 0.166667 & 0.666667 \\ 0.200000 & 0.333333 & 0.533333 & 0.133333 \end{bmatrix}.$$

Es claro de (19) que el mayor cambio posible causado por una nueva transición resulta cuando la transición es al estado con la probabilidad más baja (y la menor cantidad de transiciones) $p_{im} = \min\{p_{ij};\ j = 1, \ldots,\ N_s\}$ así que ésta es la probabilidad a ser usada para el peor caso posible de la estimación de cambio. De (11), $\sum_{j \neq m} \Delta p_{ij}^{-} = -\Delta p_{im}^{+}$, así que el cambio absoluto total más grande posible para toda la fila es

$$\Delta_i = 2\Delta p_{im}^{+} = 2\frac{1 - p_{im}}{\xi_i + 1}; \tag{21}$$

para el peor caso posible, $p_{im}=0$, Δ_i depende solamente de ξ_i y varia del mayor valor de 1, para $\xi_i=1$ a 0 para $\xi_i \to \infty$.

Sin embargo, $\xi_i=1$ es una proposición absurda; una distribución de N_S estados podría difícilmente ser estimada de una sola transición; lo que lleva a la pregunta de cuál es el valor mínimo razonable para ξ_i. Dado que nosotros queremos un ξ_i que garantice que el peor cambio posible no sea demasiado grande, si establecemos que el cambio máximo permitido para el peor caso sea menor que la probabilidad uniforme, $\Delta_i^{max} < 1/N_S$, entonces de (21), $\xi_i > 2N_S - 1$, así que siempre necesitaremos $\xi_i \geq 2N_S$.

2.4.2 Robustez

Decimos que una estimación markoviana del peligro sísmico del estado *i* es robusta si las probabilidades $\left[p_{ij};\ j=1,\ \ldots,\ N_S \right]$ del renglón completo *i* de la matriz *P* no es sustancialmente cambiado por una nueva observación.

Una estimación será robusta si los posibles cambios son pequeños; por lo tanto, definimos la robustez del renglón *i* como

$$\rho_i = 1 - \Delta_i = 1 - 2\frac{1-p_{im}}{\xi_i + 1}. \qquad (22)$$

La figura 1 ilustra como la robustez incrementa rápidamente con ξ_i para varias p_{im}; el valor real de p_{im} hace una diferencia significativa para $\xi_i < 50$; en todos los casos $\rho_i \geq 0.95$ para $\xi_i \geq 39$, y $\rho_i \geq 0.98$ para $\xi_i \geq 99$, así que la robustez es una preocupación real sólo para muestras pequeñas.

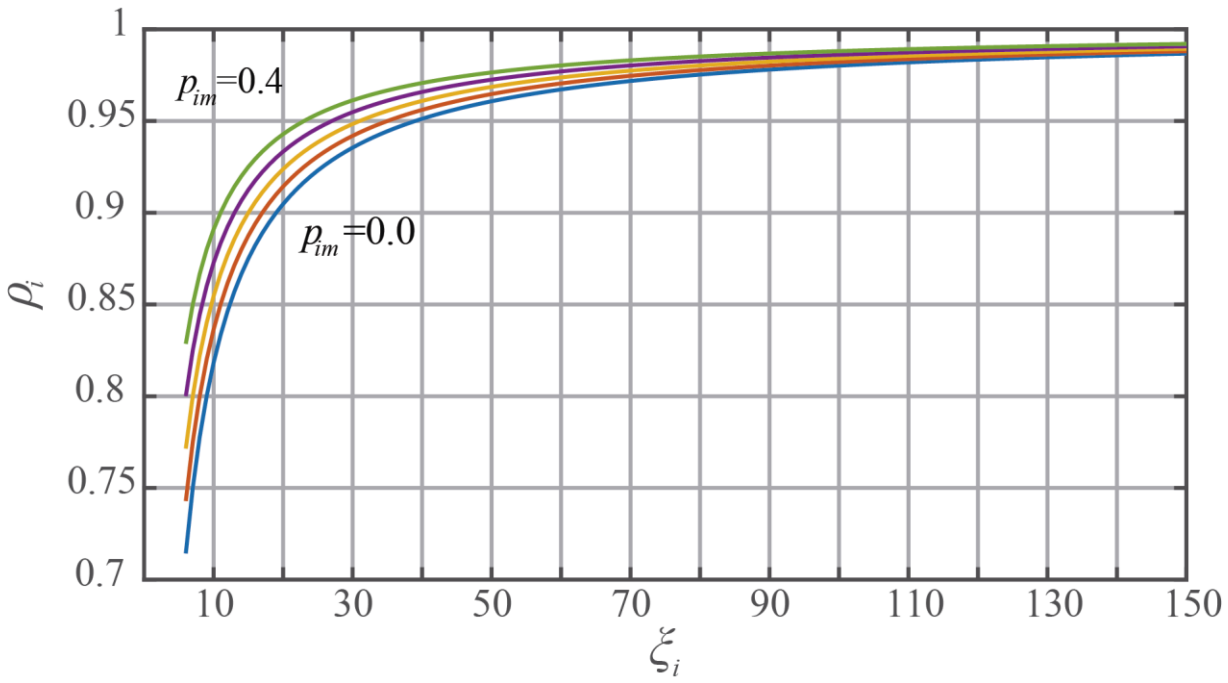


Figura 1. Robustez. Robustez de los renglones como función de ξ_i para $p_{im} = 0.0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4$.

Baja robustez significa que no hay suficientes observaciones para hacer una estimación confiable de las distribuciones de probabilidad de transición, así que solo renglones robustos de la MPT deberían ser usados para hacer pronósticos. Permítasenos mencionar aquí que muchos estudios (e.g. Knopoff, 1971; Hagiwara, 1975; Patwardhan et al., 1980; Fujinawa, 1991; Yildiz and Demir, 1999; Votsi et al., 2010; Ünal et al. 2011; Ramin Sadeghian, 2012; Votsi et al., 2013) reportan solamente sus matrices *P*, sin siquiera mencionar cuantos datos fueron usados para obtenerlas, y mucho menos declaran los valores de Ξ así que el lector no tiene idea acerca de la confiabilidad de las probabilidades de transición establecidas. Ya que para un número dado *N* los valores de ξ_i pueden variar ampliamente de un renglón a otro, es extremadamente importante que Ξ siempre sea reportada.

Para una medida de robustez para toda la MPT, recordemos que la fuerza de una cadena es la de su eslabón más débil, por lo que podemos usar como estimación de robustez de toda la matriz el valor del reglón menos robusto:

$$\rho = \min\{\rho_i;\ i = 1, \ldots,\ N_s\}. \tag{23}$$

Para nuestro ejemplo, las estimaciones de robustez de los renglones obtenidas de (22) son

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9053 \\ 0.9376 \\ 0.8954 \\ 0.8762 \end{bmatrix},$$

y la robustez para toda la MPT es $\rho = 0.8762$.

Otro aspecto de robustez diferente, no tratado aquí, es para estimaciones de estados definidos para intervalos en tiempo o espacio, o alguna otra clase de intervalo, es cuánto cambian las probabilidades de transición si el tiempo de inicio o la duración del intervalo o algún otro parámetro de intervalo es ligeramente cambiado. Si las probabilidades medidas no cambian mucho cuando los intervalos son ligeramente modificados, entonces el sistema es estable.

2.4.3 Incertidumbre y tamaño de muestra

Para muchas aplicaciones sismológicas, particularmente aquellas que tratan con eventos de magnitud grande, las muestras tienden a ser pequeñas, casi siempre del orden de algunas decenas, mientras estimaciones confiables de las probabilidades “verdaderas” requieren grandes muestras. Cuán pequeña puede ser una muestra y todavía ser útil, y cuán grandes son las incertidumbres asociadas con muestras pequeñas, son preguntas difíciles que necesitan ser consideradas en orden de estimar cuán confiables son las estimaciones de peligro sísmico de un estudio dado.

Para ilustrar este punto, podemos mencionar que la MPT que estamos usando como un ejemplo, fue una realización numérica aleatoria de una muestra de 80 transiciones basadas en las probabilidades

de transición “verdaderas” (postuladas) mostradas abajo

$$\hat{P}=\begin{bmatrix} 0.200000 & 0.600000 & 0.120000 & 0.080000 \\ 0.450000 & 0.250000 & 0.200000 & 0.100000 \\ 0.100000 & 0.150000 & 0.100000 & 0.650000 \\ 0.150000 & 0.200000 & 0.450000 & 0.200000 \end{bmatrix};$$

una comparación de estas probabilidades “verdaderas”, $\hat{p}_{ij}$ con aquellas que resultan de la realización “observada”, p_{ij}, de la sección 2.3, ilustra que las probabilidades “empíricas” difieren de las “verdaderas”; denotando las diferencias absolutas (error) por

$$\varepsilon_{ij}=\left|\hat{p}_{ij}-p_{ij}\right|, \tag{24}$$

para el ejemplo $\max\varepsilon_{ij}=0.11670$, y $\bar{\varepsilon}=0.04574$ con desviación estándar de 0.0376.

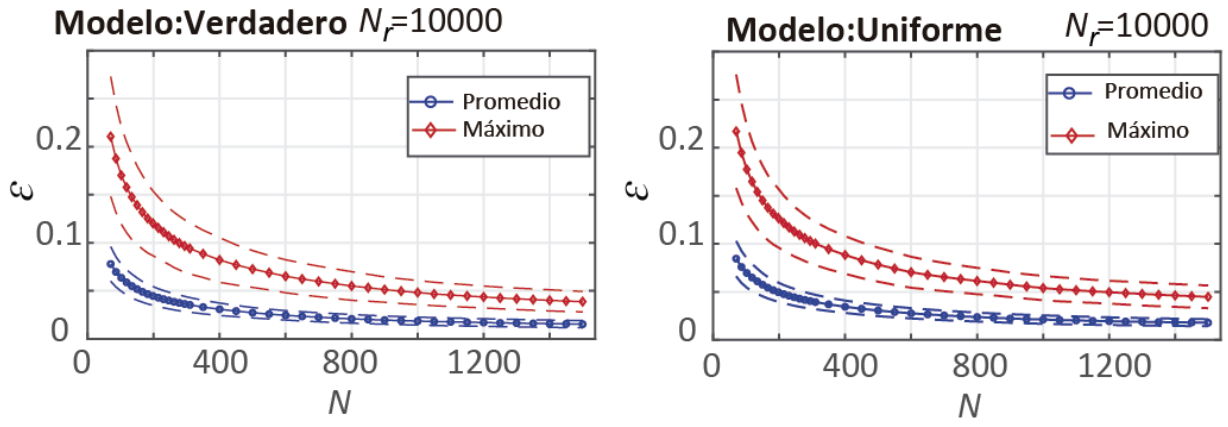


Figura 2. Errores. Errores absolutos promedios (círculos) y máximos (diamantes); la línea punteada abajo y arriba sobre cada curva es la $\pm$ desviación estándar correspondiente.

Para ilustrar cómo los errores estimados dependen del tamaño de muestra, usamos estas probabilidades “verdaderas” para hacer la estimación de Monte Carlo de los errores que pueden ser esperados de muestras de diferentes tamaños. La figura 2 muestra, a la izquierda, los errores absolutos máximos y medios promediados sobre $N_r=10{,}000$ realizaciones para diferente tamaño de muestras.

Para comparación, a la derecha de la figura 2 son mostrados los mismos errores para una matriz de probabilidad uniforme con $p_{ij} = 1/N_S, \ \forall\, i,\ j$.

Es claro que muestras pequeñas pueden llevar a desviaciones bastante grandes de las verdaderas probabilidades de transición, pero, a menos que alguna información adicional esté disponible, no hay nada que hacer para mejorar las estimaciones de probabilidad, excepto incrementar el tamaño de muestra. Desafortunadamente, en muchos casos no es posible incrementar el tamaño de muestra por las limitaciones del catálogo; en estos casos, las posibles diferencias entre las probabilidades verdaderas y las estimadas son un factor importante a tomar en cuenta cuando evaluamos la confiabilidad del pronóstico basado sobre las probabilidades de transición observadas.

Para cualquier longitud de muestra dada, la magnitud de los errores depende también de las características de la matriz particular; ellos son más grandes para matrices cercanas a la uniforme, y son menores para matrices "picudas" (matrices que tienen renglones con una probabilidad grande y muchas pequeñas). Por lo tanto, para evaluar las incertidumbres en nuestra matriz observada *P*, supondremos que ésta es representativa de la MPT "verdadera" que caracteriza el sistema markoviano y según la cual, nuestra realización particular observada fue generada aleatoriamente, entonces los errores en las cadenas aleatoria resultantes de *P* no deberían ser muy diferentes a aquellos para la MPT verdadera.

Para estimar los errores posibles usamos el enfoque de Monte Carlo: basado en *P*, generamos N_r realizaciones de cadenas aleatorias de *N* elementos; para cada cadena *k* obtenemos la MPT sintética $\hat{P}$ y obtenemos los N_S^2 errores absolutos

$$\varepsilon_{k,ij} = \left| \hat{p}_{ij} - p_{ij} \right|, \ i,\ j = 1,\ \ldots,\ N_S; \tag{25}$$

finalmente, obtenemos el promedio y la desviación estándar de los $N_\varepsilon = N_r N_S^2$ errores absolutos. La estimación del error esperado absoluto promedio debido al tamaño de muestra

$$\varepsilon = \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^{N_r} \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{j=1}^{N_S} \varepsilon_{k,ij} \ . \tag{26}$$

2.4.4 Otras fuentes de incertidumbres

Además de esta incertidumbre básica, otras incertidumbres en las estimaciones de probabilidad son las asociadas a incertidumbres en los datos. Por ejemplo, si se estudia las transiciones entre magnitudes de sismos o clases de magnitudes, el hecho de que las magnitudes son en realidad redondeadas a una décima es un factor a considerar; igualmente, las incertidumbres en la localización deberían ser consideradas cuando se estudia transiciones en el espacio, etc. Cuando usamos umbrales de magnitud, errores en la determinación de la magnitud pueden causar ya sea "brechas" en los datos o la inclusión de eventos que no deberían participar, ambos casos resultan en transiciones aparentes erróneas.

Los efectos de las incertidumbres en los datos sobre las probabilidades de transición pueden ser difícil o imposible de estimar en forma cerrada, pero se pueden hacer estimaciones utilizando métodos de Monte Carlo, donde variaciones aleatorias (ojalá realistas) son aplicadas a los datos, y las variaciones probables de las probabilidades son estimadas de los resultados de un gran número de realizaciones.

2.5 Métodos para medir la markovianidad

Los resultados de una estimación del peligro sísmico markoviana será significante solo si el sistema estudiado, según aparece a través de la cadena observada, resulta ser de hecho markoviano.

Por lo tanto, los resultados markovianos deberían ser verificados contra la hipótesis nula, H0, que es que las transiciones observadas y las probabilidades de transición observadas son debidas al azar y no dependen del estado inicial. La matriz de probabilidades de transición que no dependen del estado inicial y viene inmediatamente a la mente es la MPT uniforme, *U*, donde cada renglón es una distribución uniforme, i.e. $u_{ij} = 1/N_S$, $\forall\, i,\ j$. Sin embargo, para ser más estrictos, usaremos la más realista MPT H0 de las probabilidades de ocurrencias de estados estacionaria Π (13).

Llamaremos m*arkovianidad* de un sistema y del modelo que lo representa, a la disimilitud en constitución y en propiedades entre la matriz *P* y la de la hipótesis nula, Π.

Propondremos cinco medidas de markovianidad basadas en diferencias entre *P* y Π fácilmente evaluables; ellas son ejemplos de posibles medidas y el lector puede desear establecer sus propias

medidas. Para determinar cuán significante es una diferencia, es necesario conocer el rango de cada medida; algunos limites pueden ser determinados teóricamente mientras que otros pueden ser estimados de la distribución H0. Algunos de los limites teóricos no son prácticos por la limitación de los datos y las propiedades de las MPT markovianas, en cuyo caso usaremos los limites observados entre los diferentes modelos estudiados.

2.5.1 Markovianidad de la convergencia a las probabilidades estacionarias

Una manera simple y directa de cuantificar la markovianidad de una MPT es midiendo cuántas veces tiene que multiplicarse una MPT por si misma hasta alcanzar las probabilidades estacionarias con una precisión dada (las probabilidades en cada columna son iguales a un número dado de decimales, para todas las columnas). Denotaremos esta medida por M_p, donde *p* especifica el número de lugares decimales requeridos. Como mencionamos anteriormente, nosotros consideramos seis decimales una precisión razonable, así que trabajaremos con M_6.

Esta es una medida muy importante porque mide cuán importante es la influencia del estado inicial, con base en cuántas transiciones son necesarias para que la memoria del estado inicial se pierda.

Para nuestro ejemplo, como mencionamos anteriormente, las probabilidades estacionarias son alcanzadas a seis lugares decimales, para P^{20}, así que una medida de su markovianidad es $M_6 = 20$.

2.5.2 Markovianidad de las diferencias absolutas entre *P* y P

La diferencia absoluta entre un elemento de *P* y el correspondiente elemento de Π es

$$\delta_{ij} = \left| p_{ij} - \pi_j \right| , \tag{27}$$

y la diferencia absoluta promedio total para la matriz completa es

$$\delta = \frac{1}{N_S^2} \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{j=1}^{N_S} \delta_{ij} \, , \tag{28}$$

que tendrá un valor mínimo de cero cuando $P = \Pi$.

Para nuestro ejemplo $\delta = 0.14733$.

2.5.3 Markovianidad del traslape de Bhattacharyya entre *P* y P

El coeficiente de Bhattacharyya (Bhattacharyya, 1943) mide el traslape entre dos distribuciones de probabilidad; el traslape entre las probabilidades de transición markovianas y las estacionarias para el renglón *i* de la MPT es

$$b_i = \sum_{j=1}^{N_S} \sqrt{p_{ij} \pi_j} \; ; \;\; i = 1, \; \ldots , \;\; N_S \; ; \tag{29}$$

y $0 \leq b_i \leq 1$; es igual a uno para $p_{ij} = p_j , \forall \; j$, y sería igual a cero cuando probabilidades distintas de cero en una distribución correspondan a probabilidades cero en la otra distribución, lo cual no puede pasar porque no hay probabilidades cero en π .

Dado que estamos interesados en diferencias en lugar de traslapes, definiremos el no traslape para el renglón *i* como

$$\beta_i = 1 - b_i = 1 - \sum_{j=1}^{N_S} \sqrt{p_{ij} \pi_j} \; ; \;\; i = 1, \; \ldots , \;\; N_S \; , \tag{30}$$

y el no traslape promedio de Bhattacharyya para toda la matriz será

$$\beta = \frac{1}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} \beta_i \; ; \tag{31}$$

$\beta = 0$ para $P = \Pi$ (traslape total), y tendrá valores más grandes (siempre <1) cuando el no traslape entre *P* y Π es alto.

Para el ejemplo $\beta = 0.064157$.

2.5.4 Markovianidad de la entropía de la MPT

Dado que la MPT markoviana debería ser menos homogénea, i.e. menos desordenada, que la de la H0, ya sea la de probabilidad uniforme o alguna otra con probabilidad independiente del estado actual, podemos usar una medida de orden, como la entropía, para medir la diferencia entre un sistema markoviano y uno de H0.

La entropía de Shannon del renglón *i* de la matriz *P* es definido como (Shannon, 1948)

$$S_i^P = -h\sum_{j=1}^{N_S} p_{ij} \log_2 p_{ij} , \tag{32}$$

donde *h* es una constante positiva convencional que relaciona las entropías calculadas usando logaritmos con diferente base; usaremos *h*=1 y la entropía será expresada en bits. De acuerdo a la definición de Shannon (1948) de la autoinformación ("información sorpresa") de una estimación de probabilidad, la información de la transición de un estado *i* a un estado *j* es

$$I_{ij} = -\log_2 p_{ij} , \tag{33}$$

así que S_i^P es el valor esperado de información en el renglón *i*, y nosotros consideraremos la entropía total de la MPT, *P*, dada por la suma

$$S^P = \sum_{i=1}^{N_S} S_i^P . \tag{34}$$

Cuando p_{ij} tiende a cero o a uno, el termino correspondiente en (32) tiende a cero, así que probabilidades muy bajas o muy altas contribuyen poco a la entropía; en realidad, la entropía alcanza su valor máximo,

igual a $N_S \log_2 N_S$, para la distribución de probabilidad uniforme con $p_{ij} = 1/N_S$, $\forall\, i,\ j$, y su valor mínimo sería cero para *P* constituido por unos y ceros.

Si bien es posible tomar la entropía de la probabilidad uniforme como una referencia, es más realista tomar como entropía de referencia la entropía de las probabilidades estacionarias de los estados, las cuales son las mismas para cualquier renglón, de manera que la entropía de referencia total es

$$S^{\pi} = -N_S \sum_{j=1}^{N_S} \pi_j \log_2 \pi_j \ . \tag{35}$$

La diferencia entre la entropía observada (34) y la entropía de referencia de la hipótesis nula (35),

$$S = S^{P} - S^{\pi} \ , \tag{36}$$

será nuestra medida de orden de un sistema markoviano comparado con un sistema que no depende del estado actual.

Para nuestro ejemplo, la entropía es $S^{P} = 6.3173$ bit, la cual es más pequeña que la entropía H0 $S^{\pi} = 7.7903$ bit y que la uniforme $S^{U} = 8.0000$ bit. La diferencia de entropías $S = -1.4786$ bit, la cual es una disminución sustancial.

2.5.5 Markovianidad de la distancia Kullback-Leibler

La *entropía relativa* o *distancia Kullback-Leibler* (Kullback y Leibler, 1951), entre la distribución $p_i = \left[p_{i1},\ p_{i2},\ \ldots,\ p_{iN_S} \right]$ y la distribución de probabilidad de referencia $\pi_i = \left[\pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_{N_S} \right]$, es definida como

$$\kappa_i = \sum_{j=1}^{N_S} p_{ij} \log_2 \left(\frac{p_{ij}}{\pi_j} \right) , \tag{37}$$

y la distancia *K-L* promedio para toda la matriz *P* es

$$\kappa = \frac{1}{N_S}\sum_{i=1}^{N_S}\kappa_i = \frac{1}{N_S}\sum_{i=1}^{N_S}\sum_{j=1}^{N_S} p_{ij}\,\mathrm{log}_2\left(\frac{p_{ij}}{\pi_j}\right), \tag{38}$$

la cual es siempre bien definida porque π no tiene elementos nulos. $\kappa = 0$ cuando *P* y Π son idénticas.

Para nuestro ejemplo, $\kappa = 0.375167$.

2.6 Método para evaluar un modelo a través de la normalización de medidas y discriminante

Como mencionamos antes, las distintas medidas que usamos para calificar un modelo, robustez, incertidumbre y markovianidad, tienen diferentes unidades, magnitudes, limites, y comportamientos, así que ahora propondremos maneras de normalizarlas para que la información que cada una de ellas proporciona sea compatible con la información de las otras. Las normalizaciones que proponemos, son adaptadas a nuestro sistema particular que estamos estudiando; otros investigadores considerando sistemas similares o diferentes pueden hacer sus propios esquemas de normalización.

Como mencionamos anteriormente, dado que todas las medidas son diferentes, y tienen diferentes rangos de valores, las normalizaciones son en consecuencia diferentes y están diseñadas para diferenciar entre valores buenos y malos en los rangos reales observados, aunque tomando en cuenta limites teóricos siempre que sea posible. Normalizaremos linealmente todas las medidas al rango de cero (peor caso, indeseable) a uno (perfecto, deseable).

Por supuesto no hay una única manera de hacer las normalizaciones, así que las que presentamos aquí deberían ser consideradas como sugerencias; otras maneras de normalización y funciones pueden ser elegidas por cada investigador.

2.6.1 Robustez

Como un indicador de la robustez de toda la MPT (sección 2.4.2), usamos la robustez mínima (23).

La robustez ρ tiende a uno conforme ξ_i incrementa y, dado que el mínimo aceptable ξ_i es $2N_S$, su valor mínimo es

$$\rho_0 = 1 - \frac{2}{2N_S + 1}. \tag{39}$$

Por lo tanto, la robustez normalizada es

$$\hat{\rho} = \frac{\rho - \rho_0}{1 - \rho_0}. \tag{40}$$

2.6.2 Incertidumbre y tamaño de muestra

La incertidumbre mínima (sección 2.4.3) es, por supuesto, cero, pero como fue mencionado en la sección 2.4.3 el número necesario de muestras ni es alcanzable para la clase de aplicaciones que estamos considerando aquí; por lo tanto, usaremos como error mínimo ε_0 al más pequeño ε para todo el grupo de modelos. Usaremos como el mayor error permitido por encima del cual no hay confianza en las probabilidades medidas, $\varepsilon_x = 1/2N_S$, y calcularemos el error normalizado $\hat{\varepsilon}$ como

$$\hat{\varepsilon} = \begin{cases} 1 - \dfrac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_x - \varepsilon_0}; & \varepsilon_0 \le \varepsilon \le \varepsilon_x \\ 0; & \varepsilon > \varepsilon_x \end{cases}. \tag{41}$$

2.6.3 Markovianidad de convergencia de probabilidades de estado estacionarias

Definimos la medida M_p (sección 2.5.1) como el número de veces que una MPT tiene que ser multiplicada por sí misma en orden de alcanzar las probabilidades estacionarias con una precisión dada M_p, donde *p* especifica el número de lugares decimales. Aquí, trabajaremos con M_6.

En orden de normalizar esta medida, notemos que su valor mínimo es cero, y no tiene un valor superior a priori; por lo tanto, usaremos como valor superior, M_{6x}, el valor máximo observado para todo

el conjunto de modelos, y normalizaremos como

$$\hat{M}_6 = \frac{M_6}{M_{6x}}. \tag{42}$$

2.6.4 Markovianidad de la diferencia absoluta entre *P* y P

El valor mínimo que la diferencia absoluta promedio δ (28) (sección 2.5.2) puede tomar es obviamente cero cuando $P = \Pi$; usaremos como valor máximo, δ^x, el valor más alto observado para todo el conjunto de modelos, y normalizaremos como

$$\hat{\delta} = \frac{\delta}{\delta^x}. \tag{43}$$

2.6.5 Markovianidad del no traslape de Bhattacharyya de *P* y P

El no traslape promedio de Bhattacharyya de las distribuciones de los renglones de *P* y P, b, fue definido por (31) en la sección 2.5.3. Esta medida es igual a cero para $p_{ij} = \pi_j$, $\forall j$, pero el límite teórico máximo de uno no es realista, porque π no tiene elementos nulos. Por lo tanto, usaremos como máximo, β^x, el valor más alto observado, y normalizaremos como

$$\hat{\beta} = \frac{\beta}{\beta^x}. \tag{44}$$

2.6.6 Markovianidad de la entropía de la matriz

La diferencia de entropía *S* (sección 2.5.4) tiene valor máximo de cero para $S^P = S^\pi$, pero el valor mínimo de $-S^\pi$ no es realista porque S^P nunca es cero, por lo tanto, usaremos como valor mínimo S^m el

valor de entropía más bajo observado para todo el conjunto de modelos, y normalizaremos como

$$\hat{S} = 1 - \frac{S - S^m}{-S^m}. \tag{45}$$

2.6.7 Markovianidad de la distancia Kullback-Leibler

La entropía relativa κ (sección 2.5.5) es igual a cero para $p_{ij} = \pi_j$, $\forall j$, pero su valor máximo no es realista; usaremos el valor máximo observado para todo el conjunto de modelos, κ^x, y normalizaremos como

$$\hat{\kappa} = \frac{\kappa}{\kappa^x}. \tag{46}$$

2.7 Discriminante

Hemos propuesto siete medidas normalizadas que califican diferentes aspectos de un estudio markoviano, todas oscilan de 0 (mala) a 1 (buena). Una suma de todas las medidas, divididas por siete, puede ser una estimación de la bondad general del estudio, pero, dado que no todas las medidas son igualmente importantes, asignaremos a cada una un peso que califica su importancia relativa, para definir el discriminante

$$Q = w_\rho \hat{\rho} + w_\varepsilon \hat{\varepsilon} + w_{M_6} \hat{M}_6 + w_\delta \hat{\delta} + w_\beta \hat{\beta} + w_S \hat{S} + w_\kappa \hat{\kappa}, \tag{47}$$

donde

$$\sum w_{(\bullet)} = 1. \tag{48}$$

En realidad, asignamos subjetivamente los valores de importancia relativa $q_{(\bullet)}$ de donde los pesos son derivados como $w_{(\bullet)} = q_{(\bullet)} \Big/ \sum q_{(\bullet)}$.

2.8 Peligro sísmico y tiempo

Como se mencionó anteriormente, la estimación del peligro sísmico involucra establecer ventanas de espacio, magnitud y tiempo. A continuación, discutiremos las ventanas de tiempo aplicables a estudios markovianos para intervalos fijos y para intervalos libres.

2.8.1 Intervalos fijos

En muchos estudios markovianos es común definir las cadenas, i.e. las secuencias de estados, a partir de los estados que toma un sistema para tiempos equidistantes

$$t_n = t_0 + n\Delta t;\ \ n = 1,\ \ldots,\ N,$$

en cuyo caso la estimación de peligro es aplicable durante el intervalo $(t_N,\ t_N + \Delta t)$.

2.8.2 Intervalos libres

Es posible considerar modelos markovianos en los que el intervalo de tiempo entre estados subsecuentes sea libre, esto es, que dependa de alguna manera de procesos, que pueden ser estocásticos, en el sistema estudiado. Por ejemplo, en el capítulo de aplicación consideramos un modelo en el cual la transición de un estado a otro depende de la ocurrencia de un sismo mayor de una magnitud determinada; en la realidad los sismos no ocurren de manera periódica, por lo que los intervalos, i.e. las diferencias de tiempo, entre la ocurrencia de estados son variables:

$$\tau_n = t_n - t_{n-1};\ \ n = 1,\ \ldots,\ N. \qquad (49)$$

donde t_n es el tiempo de ocurrencia del *n´*ésimo sismo.

En este tipo de modelos, la estimación de peligro no se aplica a un intervalo fijo; dado que no se sabe cuándo ocurrirá el siguiente sismo, las probabilidades de transición son especificadas, en principio,

"para el próximo estado", cuando quiera que éste vaya a ocurrir.

¿Es posible, sin embargo, decir algo respecto a qué tan grande puede esperarse que sea un intervalo? Los sismos, y por tanto las transiciones, no ocurren de forma periódica, de manera que habrá intervalos de distintos largos; por otro lado, la duración del catálogo junto con el requerimiento de un número mínimo de transiciones ponen cota máxima al posible largo de los intervalos. Surge la pregunta de ¿cómo están distribuidos los intervalos sobre el rango temporal finito? En ausencia de un modelo físico que favorezca a alguna distribución determinada, es necesario recurrir a las observaciones para buscar respuesta a la pregunta.

A continuación, veremos qué información acerca de los intervalos podemos obtener a partir de las observaciones. De nuevo, la mayor limitante será la cantidad de observaciones, necesariamente pequeña para sismos de gran magnitud, por lo que consideramos tres opciones:

♦ La opción óptima, que llamaremos *markoviana*, es caracterizar la distribución de intervalos para cada transición particular, considerando por separado las transiciones entre cada par de estados *i* y *j*.

$$\tau_m^{[ij]} = t_n - t_{n-1} \;\mid\; k(n-1)=i,\; k(n)=j \;\; \forall\, n;\;\; m=1,\, \ldots,\;\; \theta_{ij}\,. \tag{50}$$

♦ La segunda opción, que llamaremos *por estado inicial*, para casos donde no hay suficiente número de observaciones para alguna o algunas transiciones particulares, consiste en agrupar todas las transiciones que inician desde cada estado *i*,

$$\tau_m^{[i]} = t_n - t_{n-1} \;\mid\; k(n-1)=i \;\; \forall\, n;\;\; m=1,\, \ldots,\;\; \xi_i\,. \tag{51}$$

♦ La última opción, que llamaremos *global*, para casos donde no hay suficientes transiciones para caracterizar la distribución de transiciones según las opciones previas, es agrupar todos los intervalos observados, definidos en la ecuación (49).

Si, para cualquiera de estas opciones el o los histogramas de las transiciones observadas permiten identificar algún tipo de distribución conocido, entonces es posible escoger los parámetros de dicha distribución que mejor ajusten los datos, y determinar, con base en las propiedades de la distribución, probabilidades de qué tan grande puede ser el intervalo de aplicación de la estimación de peligro.

Capítulo 3. Aplicación y Resultados

Ahora procederemos a aplicar nuestras medidas propuestas y la calificación basada en el discriminante a los modelos de un sistema real, para mostrar cómo trabajan y cómo pueden extraer información sobre la aplicabilidad en estudios de peligro sísmico markoviano.

3.1 Sistema y estados

Consideraremos un sistema que consiste de un área geográfica sísmicamente activa, dividida en N_S regiones que corresponden a las estructuras tectónicas principales sísmicamente activas. Cada estado del sistema corresponde a la región donde ha ocurrido el último gran sismo (por encima de un umbral de magnitud dado M^T). Por ejemplo, si el último gran sismo ocurrió en la región número uno, el sistema se encuentra actualmente en el estado uno; si el siguiente gran sismo ocurre en la región tres, el sistema ahora estará en el estado tres, y habrá ocurrido una transición del estado uno al tres.

El esquema físico detrás de nuestro modelo es que sismos muy grandes tienen áreas de ruptura y deslizamientos sísmicos lo suficientemente grandes para influenciar regionalmente los movimientos de placas tectónicas y, por lo tanto, la sismicidad futura. Si esta hipótesis es correcta o no, será mostrado por la markovianidad o no markovianidad de nuestros resultados.

3.2 Zonas posibles de aplicación

Queremos probar el método para varias zonas, pero necesitamos zonas con el mayor número posible de sismos grandes que sean relevantes para el peligro sísmico. La primer zona que viene a la mente para aplicar nuestro método es Japón, porque tiene gran actividad sísmica, catálogos instrumentales con más de 100 años y gran cobertura instrumental. Consideramos aplicar el método a China porque tiene un largo catálogo histórico, pero el número de sismos $M_W \geq 7$ es muy bajo (91 sismos) y no podemos delimitar las regiones con suficiente confianza. Otra zona posible es en el Pacífico Oeste, esta zona tiene suficientes datos pero tiene el inconveniente de ser una zona tectónicamente demasiado compleja. La

segunda zona donde aplicamos nuestro método es la trinchera de México, aunque aquí hay menos sismos que en china con $M_W \geq 7$, la zona es tectónicamente “sencilla”.

3.3 Japón

Elegimos como ejemplo de aplicación de nuestro método de evaluación un área de estudio que incluye a Japón y las principales zonas de subducción a su alrededor, ya que esta área combina características tales como alta sismicidad (en promedio hay un sismo $M_w = 7$ por año [Matsu’ura, 2017]), existen varias redes sísmicas que en conjunto suman más de 2000 instrumentos (sismómetros, acelerómetros y GPS) (Okada et al., 2004), y cuenta con un catálogo instrumental con más de 100 años de registro. Además, aunque los procesos tectónicos en Japón son complejos, son relativamente más simples que las de otras áreas en el oeste de la placa del Pacífico que tienen tasas de sismicidad similares.

3.3.1 Marco tectónico

Japón está localizado en la zona de convergencia de cuatro placas, donde dos placas oceánicas interactúan con dos placas continentales. La placa oceánica del Pacífico subduce debajo de la placa Amuria y de la placa Okhotsk (en las trincheras de Japón y Kuril), y la placa de Filipinas (en la trinchera Izu-Bonin), con velocidades relativas de alrededor de 9 cm/año, 9 cm/año y 5 cm/año, respectivamente (Ismail-Zadeh et al., 2013); mientras que la placa de Filipinas subduce debajo de la placa Amuria con dirección norte-noroeste y velocidad de aproximadamente 5 cm/año (Ishibashi, 2004). Las placas continentales Amuria y Okhotsk convergen con velocidad de aproximadamente 1 a 2 cm/año y en dirección este-oeste (Ishibashi, 2004) (figura 3).

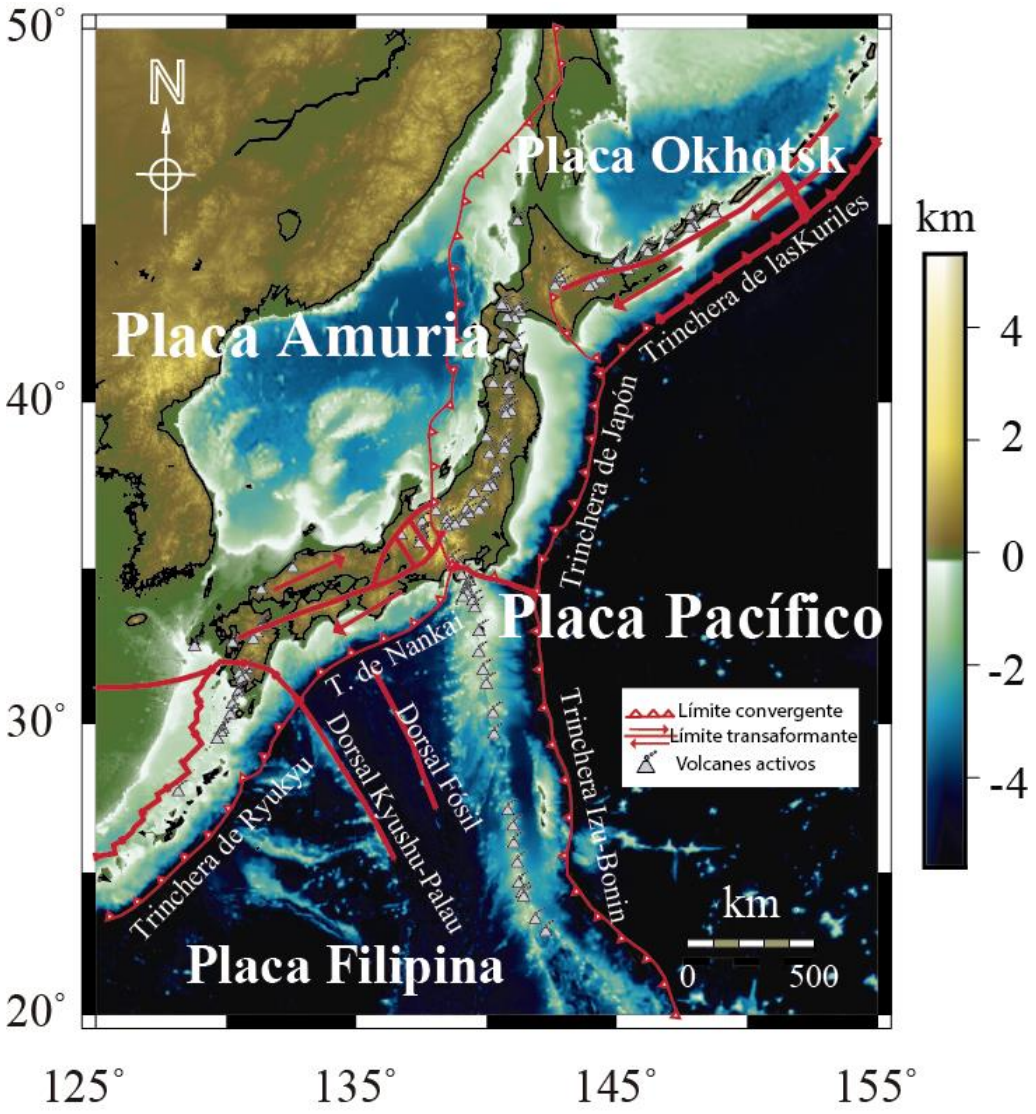


Figura 3. Marco tectónico de Japón. Las líneas rojas indican las estructuras tectónicas principales, los colores indica la topografía. Modificado de Gulick et al. (2004) y de Lee et al. (2016).

3.3.2 Sismicidad

Debido a las interacciones de las cuatro placas, la actividad sísmica dentro y alrededor de Japón es muy alta (figura 4a). La Figura 4a muestra la sismicidad de Japón (catálogo del USGS, 1913-2017); en la parte norte de la placa del Pacífico (las trincheras de Japón y Kuriles) la sismicidad alcanza casi los 600 km de profundidad y la mayoría de los sismos con magnitud $M_w \geq 7$ son someros (80 a 150 km) (figura 4a y 4b), esto puede deberse a que las trincheras de Japón y de las Kuriles se asemejan a trincheras del tipo Chileno, por lo que hay fuerte acoplamiento de las placas tectónicas en esta región (Uyeda y Kanamori,

1979). En la parte oeste de la placa del Pacífico (trinchera Izu-Bonin) se puede observar que los sismos alcanzan casi los 700 km de profundidad (figura 5a y 5b); pero algo que resalta es la baja sismicidad somera con magnitud $M_w \geq 7$, esto tal vez es ocasionado por el débil acoplamiento que hay entre la placa del Pacífico y la Filipina, ya que la trinchera Izu-Bonin es del tipo Mariana (Uyeda y Kanamori, 1979) (figura 5b). Según Obayashi et al. (2009) la placa del Pacífico está fracturada aproximadamente entre la trinchera de Japón y la trinchera Izu-Bonin (cerca de la latitud 35° y longitud 140°), y a profundidad ~300 km comienza una brecha entre ambas trincheras. La sismicidad correspondiente a la interacción entre la placa de Amuria y la Filipina tiene profundidad de alrededor de 300 km, y la sismicidad con magnitud $M_w \geq 7$ es somera; en la región donde subduce la dorsal fósil por debajo de la placa Amuria la sismicidad es muy baja (figura 6a y 6b), según Ide et al. (2010) en esa zona la placa Filipina está dividida debido al fracturamiento provocado por la interacción dorsal-trinchera.

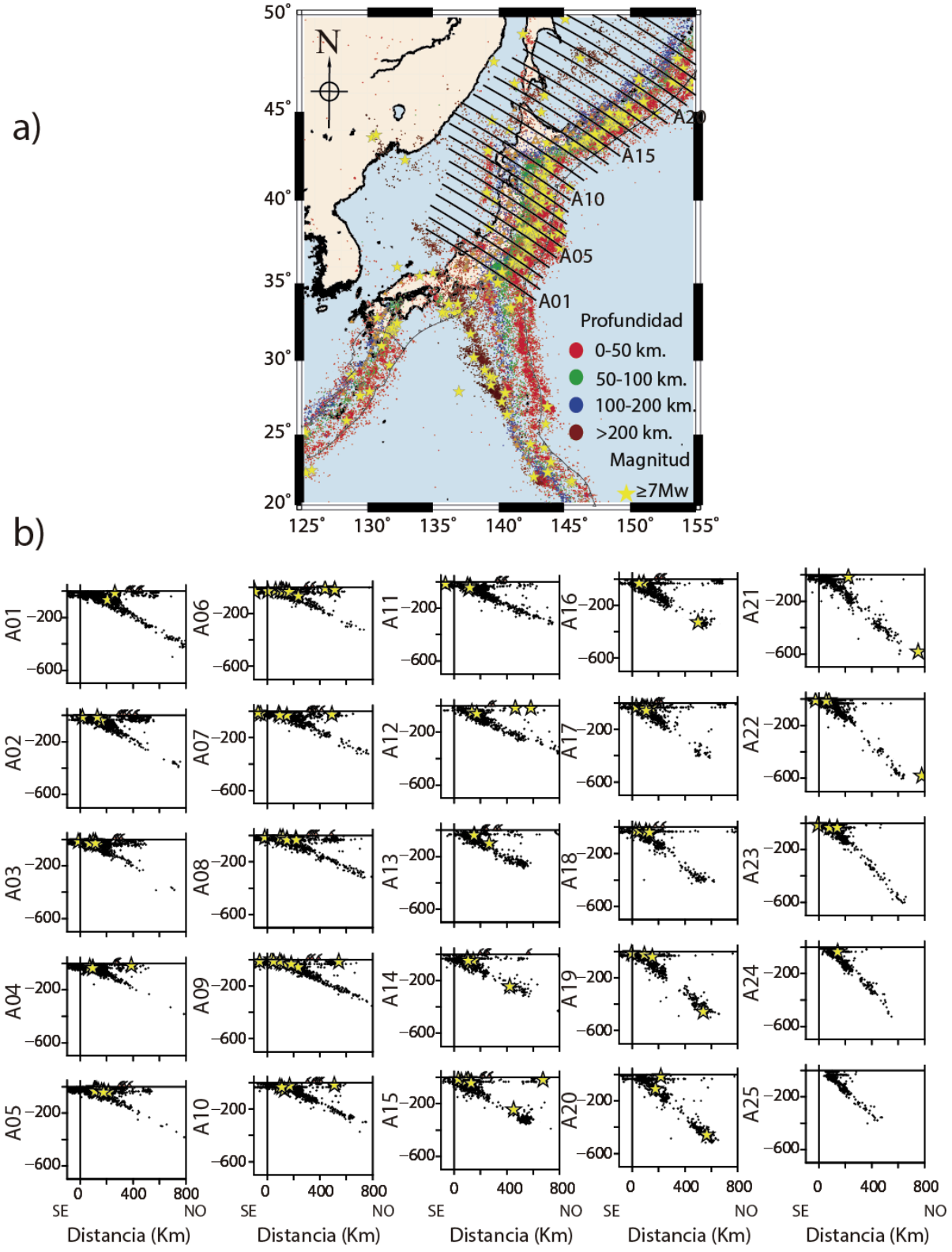


Figura 4. Perfiles sísmicos en las trincheras de Japón y Kuriles. a) Sismicidad de Japón (catálogo del USGS, 1913-2017), los diferentes colores indican la profundidad, las estrellas indican sismos con $M_W \geq 7$, y las líneas negras son los perfiles en el mapa. b) Perfiles sísmicos, la línea negra vertical indica el inicio de la trinchera.

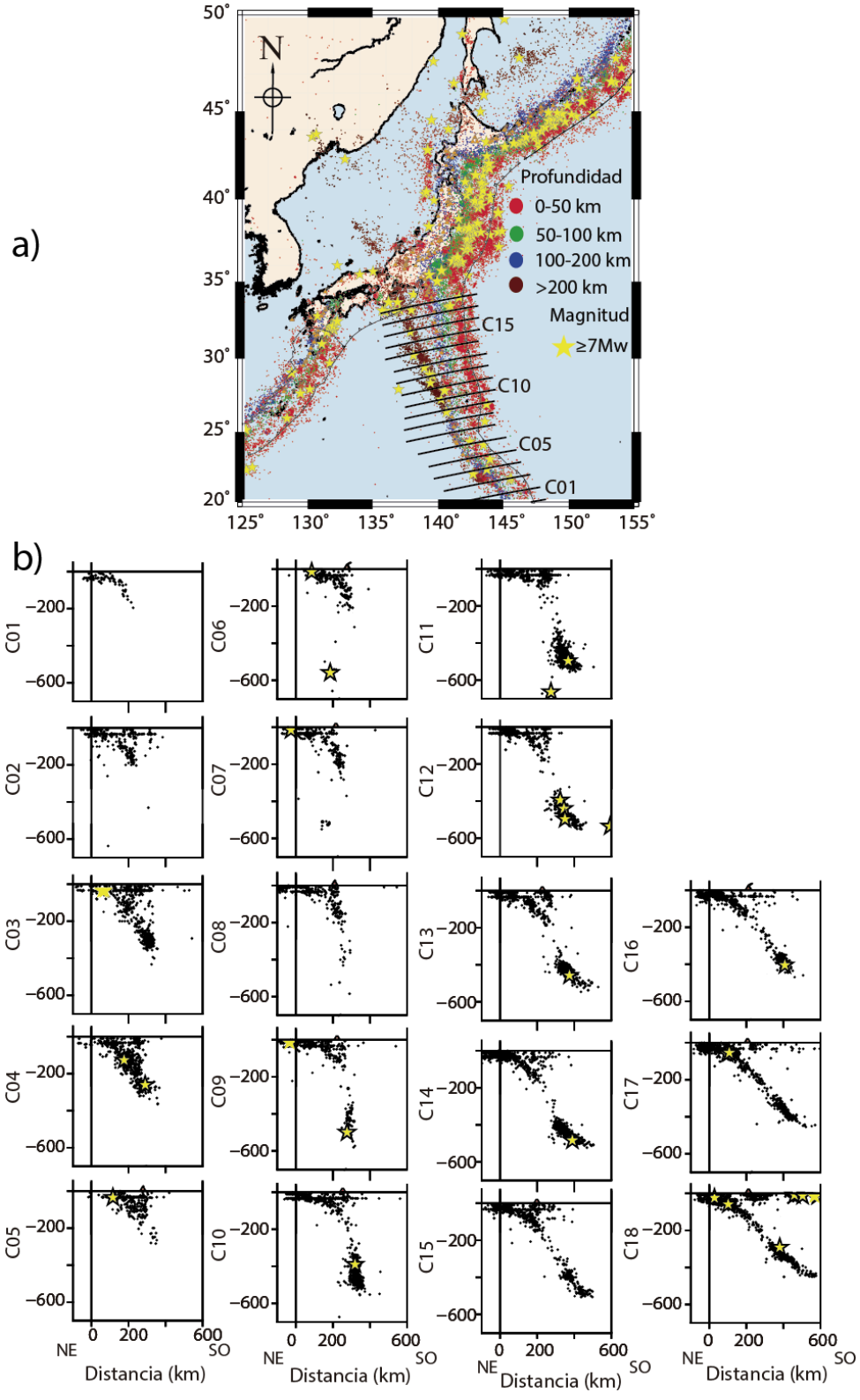


Figura 5. Perfiles sísmicos en la trinchera Izu-Bonin. a) Sismicidad de Japón (catálogo del USGS, 1913-2017), los diferentes colores indican la profundidad, las estrellas indican sismos con $M_W \geq 7$, y las líneas negras son los perfiles en el mapa. b) Perfiles sísmicos, la línea negra vertical indica el inicio de la trinchera.

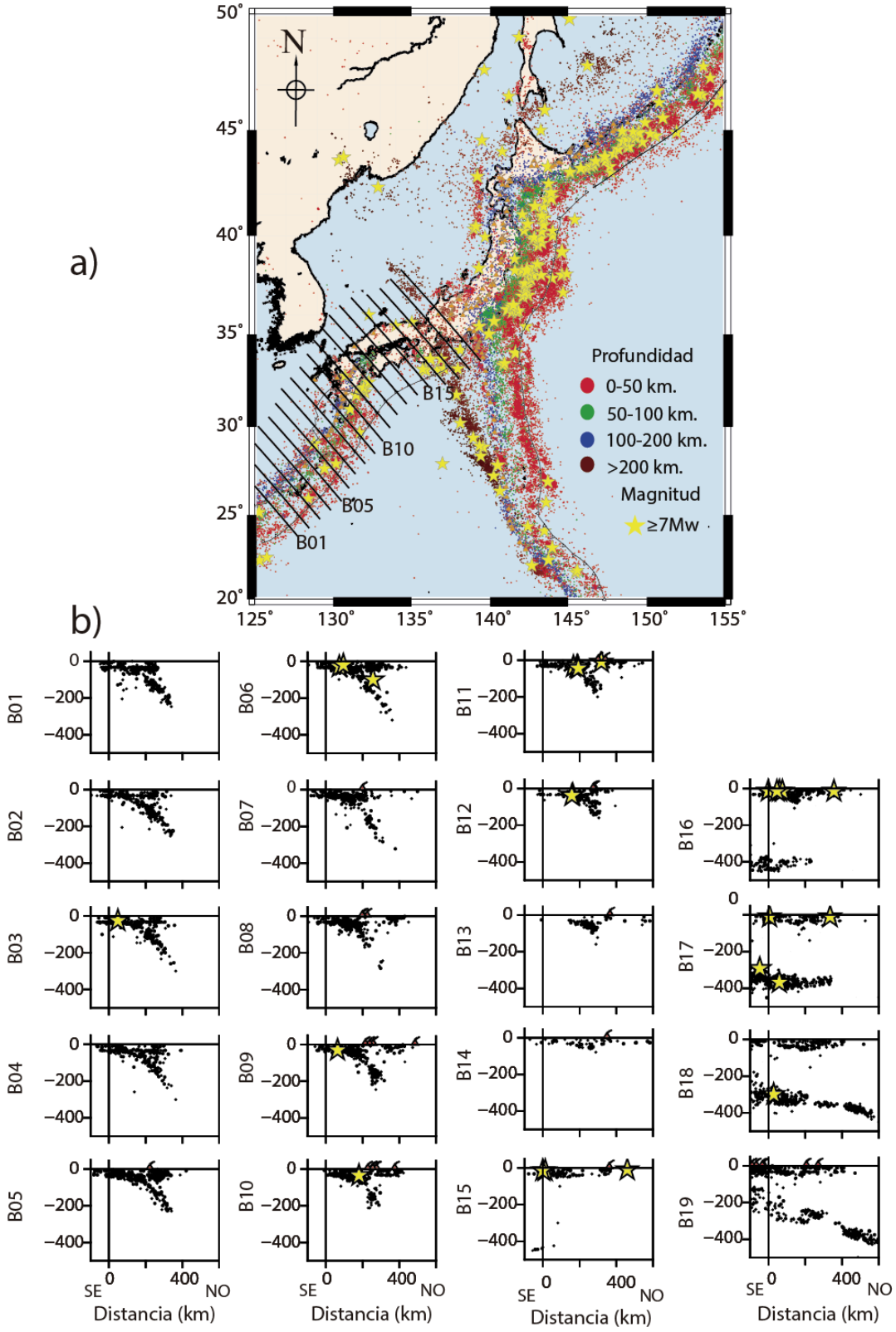


Figura 6. Perfiles sísmicos en las trincheras de Nankai y Ryukyu. a) Sismicidad de Japón (catálogo del USGS, 1913-2017), los diferentes colores indican la profundidad, las estrellas indican sismos con $M_w \geq 7$, y las líneas negras son los perfiles en el mapa. b) Perfiles sísmicos, la línea negra vertical indica el inicio de la trinchera.

3.3.3 Regiones

Con base en la tectónica y la sismicidad del área de estudio, definimos cuatro regiones mostradas en la figura 7; cada región corresponde a un proceso de subducción principal. Éste es el mayor número de regiones compatible con el número de sismos grandes.

Las regiones uno y dos corresponden a la subducción de la placa del Pacífico debajo de las placas de Okhost y Amuria (las trincheras de Japón y Kuriles) respectivamente (Ishibashi, 2004). Para determinar el límite entre estas dos regiones, hicimos cuatro perfiles paralelos a la trinchera para observar la subducción de la placa del Pacífico (figura 8). Los perfiles muestran diferentes buzamientos para las partes suroeste y noreste de la placa del Pacífico, y el cambio en el buzamiento coincide con el cambio de acimut en la trinchera.

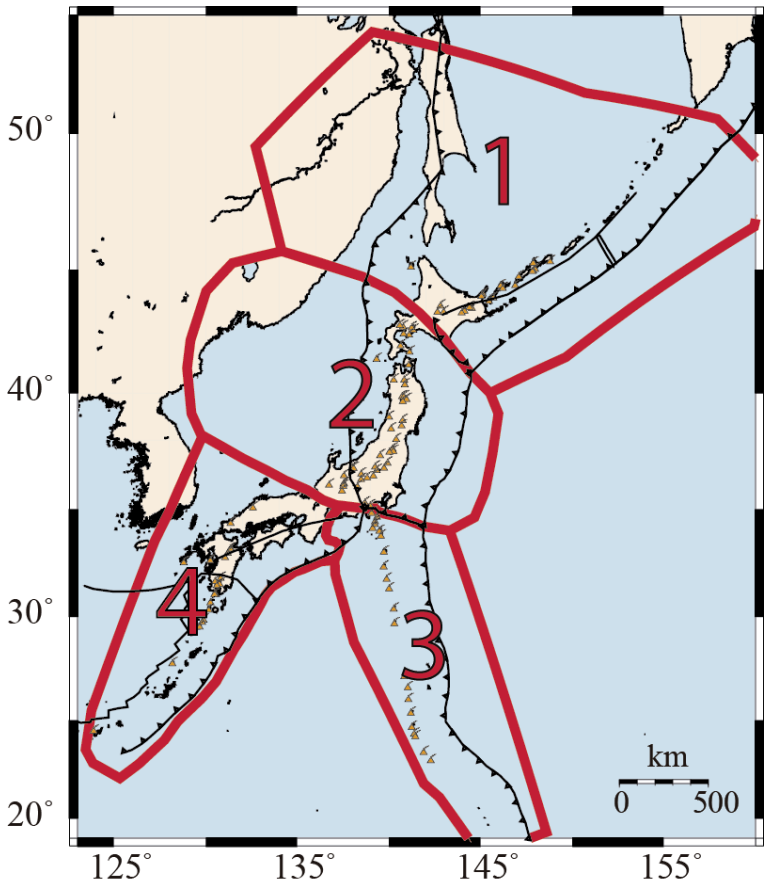


Figura 7. Regiones. Líneas rojas indican los límites de las cuatro regiones, los triángulos naranjas indican volcanes activos.

La región tres contiene la sismicidad y las estructuras tectónicas correspondientes a la interacción

entre la placa del Pacífico y la Filipina (Trinchera Izu-Bonin) (Lallemand, 2016). La región cuatro contiene la sismicidad y las estructuras tectónicas de las interacciones de las placas Amuria y Filipina (las trincheras de Ryukyu y Nankai) (Lee y Kim, 2016).

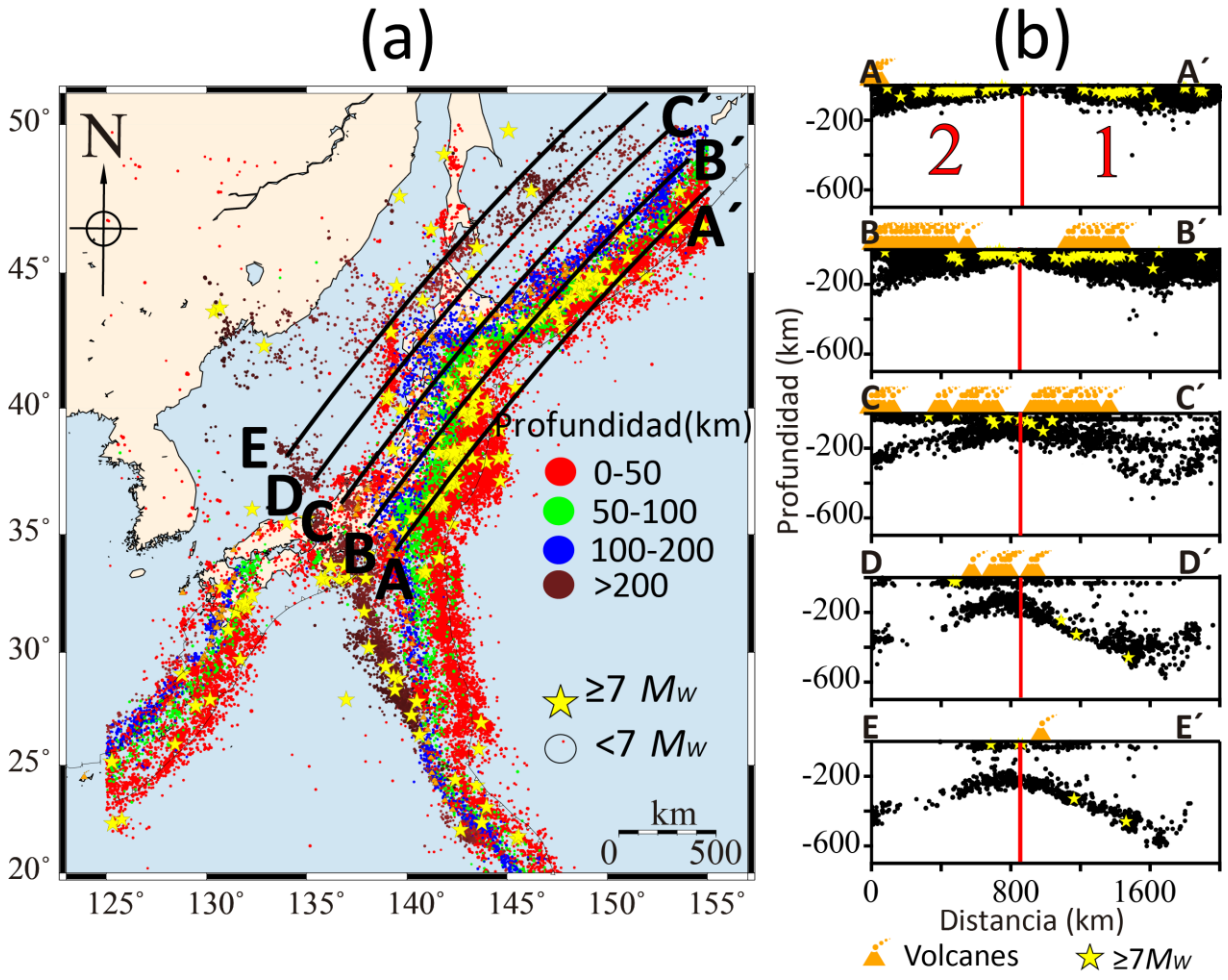


Figura 8. Perfiles sísmicos paralelos a las trincheras de Japón y Kuryles. a) Sismicidad de Japón (catálogo del USGS, 1913-2017), los diferentes colores indican la profundidad, las estrellas indican sismos con $M_w \geq 7$, y las líneas negras son los perfiles en el mapa. b) Perfiles sísmicos, la línea roja indica el límite entre la región uno y dos, los triángulos naranjas indican volcanes activos.

3.3.4 Aplicación

Usamos dos estrategias para calcular el peligro sísmico para Japón, en ambas estrategias utilizamos el mismo sistema y estados; para la primer estrategia usamos la misma magnitud umbral para todas las regiones. Como se puede apreciar en la figura 8, la cantidad de sismos para las distintas regiones

es diferente; por lo tanto, usamos como segunda estrategia para la estimación del peligro sísmico magnitudes umbral distintas para cada región, de manera que el número de sismos sea lo más homogéneo posible sobre todas las regiones.

3.3.5 Primera estrategia: Una sola magnitud umbral

Para ilustrar el esquema de las medidas, la calificación y el discriminante, construiremos diferentes modelos utilizando las mismas regiones pero diferentes magnitudes umbral globales, y elegiremos la magnitud umbral que resulte en el mejor compromiso entre markovianidad e incertidumbre.

Usaremos datos del catálogo sísmico (1904-2016) del ISC (International Seismological Centre); este catálogo reporta magnitudes $M_w \geq 5.5$ por lo que podemos estar seguros que magnitudes superiores a $M_w = 6.5$ estarán completas. De aquí en adelante usaremos magnitudes umbral, M^T, que van desde $M_w = 6.5$, bajo el cual (como será visto después) los eventos son demasiado pequeños para afectar significativamente el movimiento de placas, a $M_w = 7.4$, que es la mayor magnitud para la que tenemos suficientes datos para cumplir con la condición requerida de $\xi_i \geq 2N_s$.

La tabla 1 muestra el número total de transiciones *N*, y las matrices Θ, Ξ, P y π para todas las magnitudes umbral consideradas. Nótese que, aunque *P* expresa los resultados finales del estudio, conocer Θ o *N* y Ξ es esencial para evaluar los resultados.

Tabla 1. Las matrices Θ, Ξ, P y π para todas las magnitudes umbral consideradas.

M^T	N	Θ				Ξ	P				π
											M_6
6.5	449	45	38	21	16	120	0.375000	0.316667	0.175000	0.133333	
		42	48	25	37	152	0.276316	0.315789	0.164474	0.243421	
		14	28	25	18	085	0.164706	0.329412	0.294118	0.211765	0.267261 0.338530 0.189310 0.204900
		19	38	14	21	092	0.206522	0.413043	0.152174	0.228261	08
6.6	375	34	33	17	12	096	0.354167	0.343750	0.177083	0.125000	
		32	38	25	31	126	0.253968	0.301587	0.198413	0.246032	
		12	26	22	14	074	0.162162	0.351351	0.297297	0.189189	0.256000 0.336000 0.197333 0.210667
		18	29	10	22	079	0.227848	0.367089	0.126582	0.278481	08

		26	32	13	13	084	0.309524	0.380952	0.154762	0.154762	
6.7	317	29	34	17	28	108	0.268519	0.314815	0.157407	0.259259	
		13	17	17	09	056	0.232143	0.303571	0.303571	0.160714	0.264984 0.340694 0.176656 0.217666
		16	25	09	19	069	0.231884	0.362319	0.130435	0.275362	08
		21	25	11	11	068	0.308824	0.367647	0.161765	0.161765	
6.8	253	27	32	12	20	091	0.296703	0.351648	0.131868	0.219780	
		12	12	11	08	043	0.279070	0.279070	0.255814	0.186047	0.268775 0.359684 0.169960 0.201581
		08	22	09	12	051	0.156863	0.431373	0.176471	0.235294	07
		15	22	09	11	057	0.263158	0.385965	0.157895	0.192982	
6.9	212	22	23	12	17	074	0.297297	0.310811	0.162162	0.229730	
		09	12	11	05	037	0.243243	0.324324	0.297297	0.135135	0.268814 0.348733 0.180139 0.202314
		11	17	06	10	044	0.250000	0.386364	0.136364	0.227273	07
		10	23	07	08	048	0.208333	0.479167	0.145833	0.166667	
7	173	22	16	11	11	060	0.366667	0.266667	0.183333	0.183333	
		09	06	10	05	030	0.300000	0.200000	0.333333	0.166667	0.277081 0.340489 0.180242 0.202188
		07	14	03	11	035	0.200000	0.400000	0.085714	0.314286	09
		09	17	06	06	038	0.236842	0.447368	0.157895	0.157895	
7.1	134	14	14	09	10	047	0.297872	0.297872	0.191489	0.212766	
		08	06	11	01	026	0.307692	0.230769	0.423077	0.038462	0.283664 0.342448 0.204094 0.169794
		07	09	01	06	023	0.304348	0.391304	0.043478	0.260870	12
		09	11	04	06	030	0.300000	0.366667	0.133333	0.200000	
7.2	105	12	08	06	09	035	0.342857	0.228571	0.171429	0.257143	
		03	05	08	02	018	0.166667	0.277778	0.444444	0.111111	0.283550 0.323770 0.184954 0.207726
		06	10	01	05	022	0.272727	0.454545	0.045455	0.227273	12
		08	09	03	06	026	0.307692	0.346154	0.115385	0.230769	
7.3	082	12	06	04	06	028	0.428571	0.214286	0.142857	0.214286	
		03	05	04	00	012	0.250000	0.416667	0.333333	0.000000	0.315385 0.331361 0.161538 0.191716
		03	07	02	04	016	0.187500	0.437500	0.125000	0.250000	10
		07	08	03	05	023	0.304348	0.347826	0.130435	0.217391	
7.4	068	10	04	03	05	022	0.454545	0.181818	0.136364	0.227273	
		03	03	01	01	008	0.375000	0.375000	0.125000	0.125000	0.337570 0.311187 0.132196 0.219046
		03	06	02	04	015	0.200000	0.400000	0.133333	0.266667	08

Ahora veamos como difieren los resultados para las diferentes magnitudes umbral, y si hay resultados que serían estimaciones de peligro útiles.

Para el primer renglón: transiciones del estado uno, recuérdese que la región uno está cerca sólo de la región dos, por lo que podemos esperar que estas dos regiones tengan fuerte interacción. Efectivamente, las probabilidades p_{11} y p_{12} son consistentemente más grandes que el resto, con p_{11} mayor para $M^T < 6.7$ y p_{12} mayor para $M^T \geq 6.7$.

Para el segundo renglón: p_{22} tiene la mayor probabilidad para $M^T < 7.0$, y p_{21} tiene la mayor probabilidad para $M^T \geq 7.0$.

Para el renglón tres: $p_{32} > p_{33}$ para $M^T < 7.0$, después p_{33} es más alto (excepto para $M^T \geq 7.3$). Curiosamente, para $M^T \geq 6.7$ $p_{31} > p_{34}$ aunque la región 4 está más cerca de la región 3 que la región 1.

Para el renglón cuatro: p_{42} es siempre el más grande y p_{43} el más pequeño. Parece que las regiones tres y cuatro interactúan a través de la región dos.

Algo que llama la atención es la baja probabilidad de p_{34} y p_{43}, a pesar que las regiones 3 y 4 están geográficamente juntas, pero no interactúan entre sí como lo hacen las regiones 1 y 2.

Para decidir cuál es el mejor modelo, i.e., cuál es la magnitud umbral optima, procederemos a evaluar las medidas de estabilidad, exactitud y markovianidad.

La figura 9 muestra los valores de las siete medidas diferentes para cada magnitud umbral, y para referencia, el número de transiciones (arriba, izquierda). Es aparente el problema de juzgar cuál es el mejor modelo, porque las medidas tienen diferentes magnitudes, unidades y características, i.e., algunas medidas son buenas cuando sus valores son altos (ρ, M_6, δ, β, y κ) y otras cuando sus valores son bajos (ε y S).

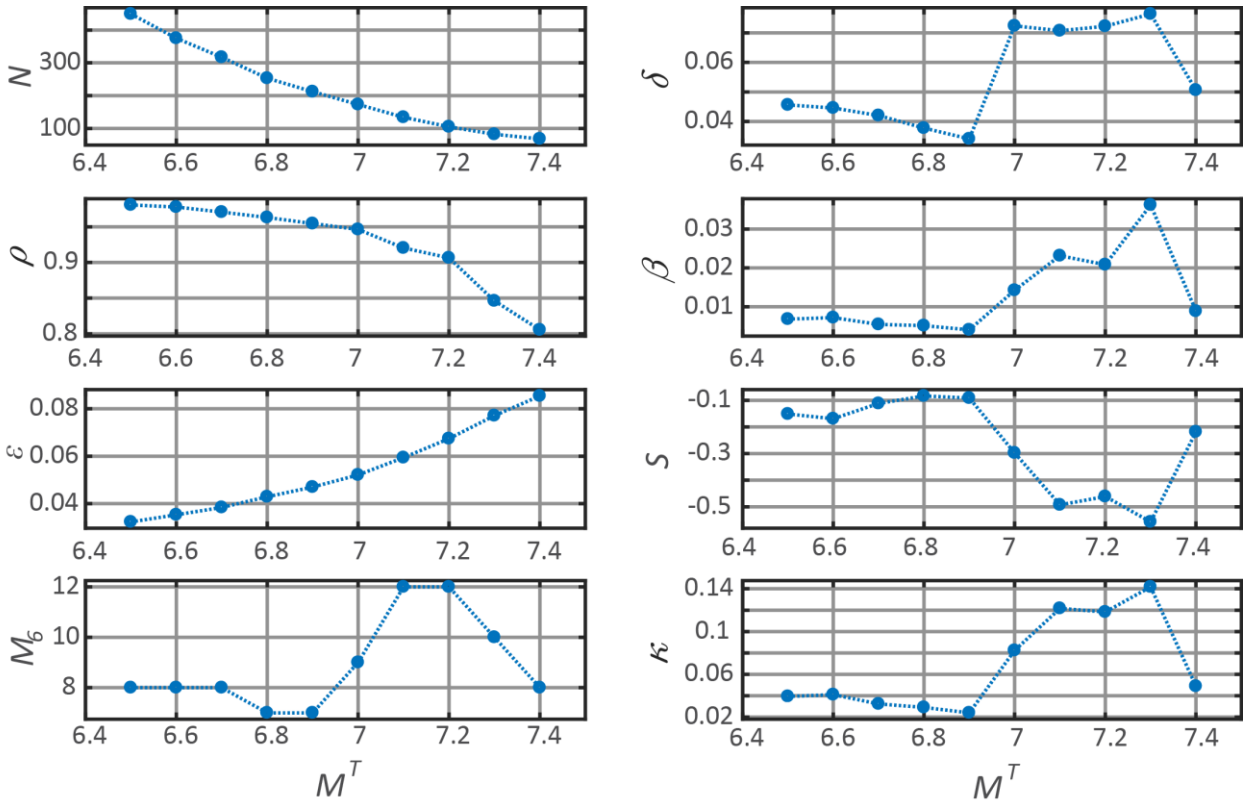


Figura 9. Medidas de markovianidad. La parte superior izquierda muestra el número de transiciones para referencia.

La figura 10 muestra las medidas normalizadas; ahora, para todas ellas los valores altos son deseables y los valores bajos son indeseables. Medidas que dependen más o menos directamente del número de muestras disminuyen conforme aumenta la magnitud, mientras que las medidas de markovianidad presentan valores altos para magnitudes de 7.1 a 7.3. Como las normalizaciones son lineales, las medidas no cambian de forma al ser normalizadas; sus unidades cambian y los valores negativos de algunas medidas son ahora positivos.

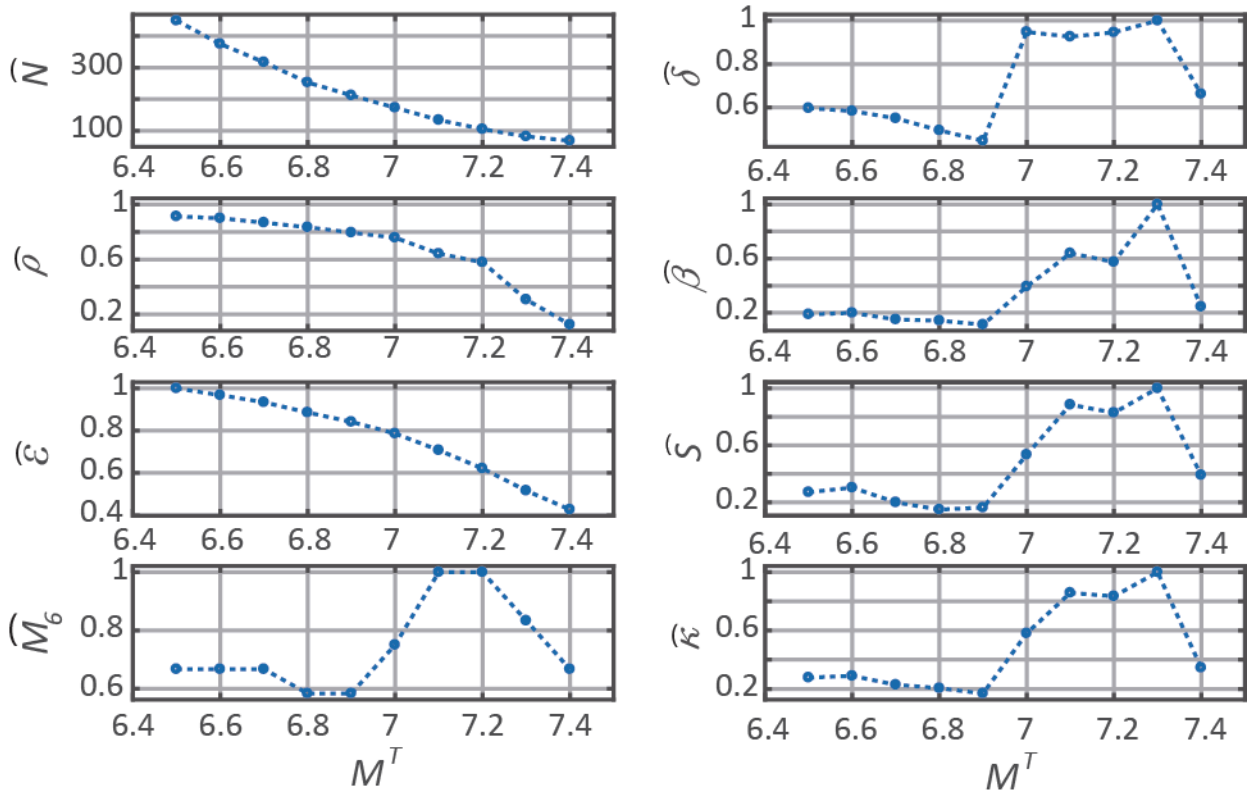


Figura 10. Medidas de markovianidad normalizadas. La parte superior izquierda muestra el número de transiciones para referencia.

El siguiente paso es aplicar el discriminante (47) utilizando las medidas normalizadas para las diferentes magnitudes umbral, para elegir la magnitud umbral óptima. Mostraremos el comportamiento del discriminante para diferentes conjuntos de pesos tentativos.

La figura 11 muestra los valores del discriminante para pesos iguales para todas las medidas. El valor pico del discriminante es para $M^T = 7.3$, y el segundo valor muy cercano es para $M^T = 7.1$.

Considerando a ε como la medida más importante, porque mide la incertidumbre esperada asociada con el tamaño de muestra, y grandes incertidumbres hacen que los resultados no sean confiables, asignamos a esta medida tres veces la importancia de las otras medidas, lo que da como resultado los valores del discriminante mostrados en la figura 12; la magnitud umbral óptima para este conjunto de pesos es $M^T = 7.1$.

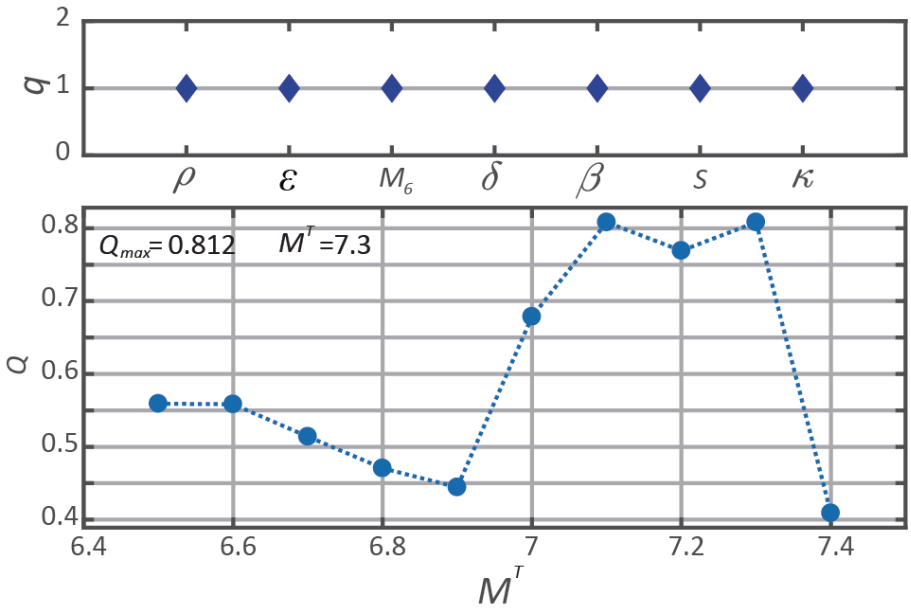


Figura 11. Discriminante para el primer conjunto de pesos. Parte superior: valores de importancia asignados para las medidas $\left(q_{\rho}=1,\ q_{\varepsilon}=1,\ q_{M_6}=1,\ q_{\delta}=1,\ q_{\beta}=1,\ q_{S}=1,\ q_{\kappa}=1,\right)$. Parte inferior: valor del discriminante para cada magnitud umbral.

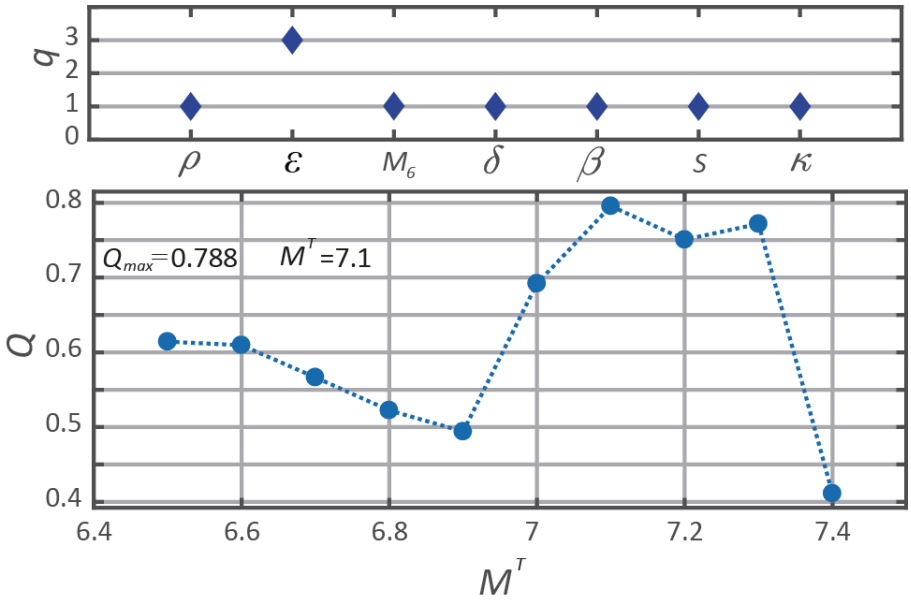


Figura 12. Discriminante para el segundo conjunto de pesos. Parte superior: valores de importancia asignados para las medidas $\left(q_{\rho}=1,\ q_{\varepsilon}=3,\ q_{M_6}=1,\ q_{\delta}=1,\ q_{\beta}=1,\ q_{S}=1,\ q_{\kappa}=1,\right)$. Parte inferior: valor del discriminante para cada magnitud umbral.

Ahora, consideraremos a M_6, aunque no tan importante como ε, es también una medida importante (por razones mencionadas anteriormente), le asignaremos dos veces la importancia de las otras medidas. Los valores del discriminante resultantes se muestran en la figura 13, donde otra vez la magnitud óptima es $M^T = 7.1$.

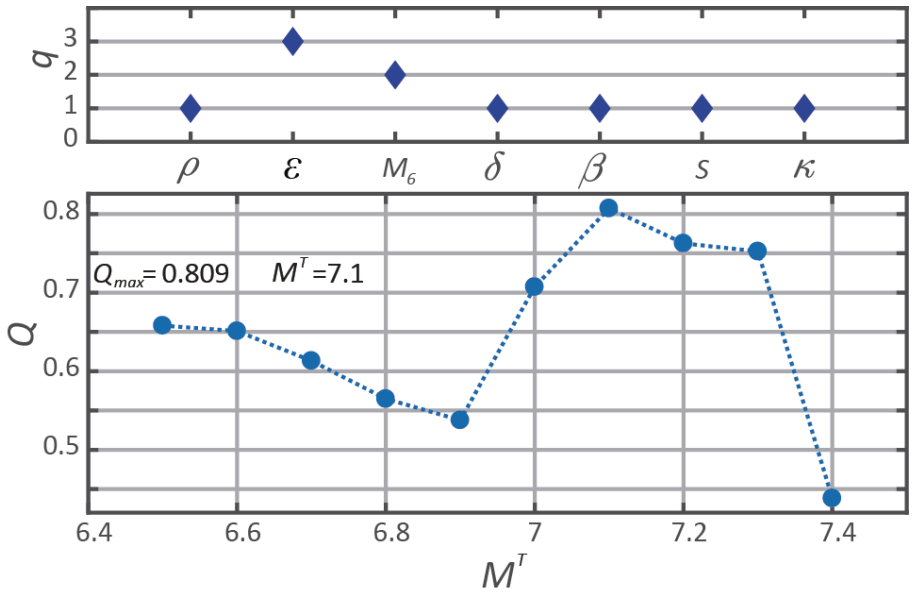


Figura 13. Discriminante para el tercer conjunto de pesos. Parte superior: valores de importancia asignados para las medidas $\left(q_\rho = 1,\ q_\varepsilon = 3,\ q_{M_6} = 2,\ q_\delta = 1,\ q_\beta = 1,\ q_S = 1,\ q_\kappa = 1,\right)$. Parte inferior: valor del discriminante para cada magnitud umbral.

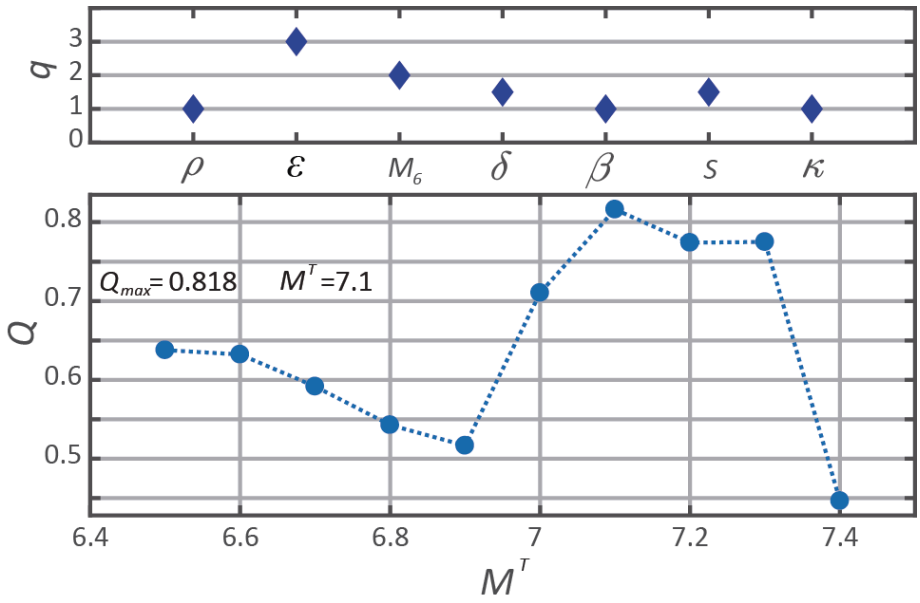


Figura 14. Discriminante para el cuarto conjunto de pesos. Parte superior: valores de importancia asignados para las medidas $\left(q_\rho = 1,\ q_\varepsilon = 3,\ q_{M_6} = 2,\ q_\delta = 1.5,\ q_\beta = 1,\ q_S = 1.5,\ q_\kappa = 1,\right)$. Parte inferior: valor del discriminante para cada magnitud umbral.

Finalmente, presentamos el último conjunto de pesos obtenido del caso anterior, ahora le damos a δ y *S* una vez y media la importancia de β y κ. Se podría argumentar que δ, *S* y β, κ miden cosas similares, pero las dos primeras son más directas; el valor pico del discriminante es para $M^T = 7.1$ (figura 14).

Como los pesos se asignan subjetivamente, es importante asignarlos con cuidado, moderación y de acuerdo con razones explicables y defensibles; particularmente si un cambio en los pesos conduce a un cambio en la elección del mejor modelo. De acuerdo con estos criterios y viendo que todos los conjuntos de pesos, excepto el conjunto con pesos iguales para todas las medidas, resultaron en discriminantes con máximo para $M^T = 7.1$, y que otros cambios razonables a estos conjuntos de pesos no conducen a alguna magnitud umbral preferible diferente, elegimos el conjunto de pesos de la figura 13 como el más simple que toma en cuenta las características más importantes de las diversas medidas, y el modelo con $M^T = 7.1$ como el más confiable.

Por lo tanto, con respecto al peligro sísmico del área de estudio, podemos decir de la MPT para $M^T = 7.1$ que después de un gran sismo en la región uno, el siguiente probablemente ocurrirá en la región

dos; un evento en la región dos probablemente se repita en la región dos o será seguido por un evento en la región uno; un evento en la región tres probablemente se repetirá o, con probabilidad algo menor, será seguido por un evento en la región uno, mientras que la ocurrencia del siguiente evento en la región cuatro es bastante improbable; finalmente, un evento en la región cuatro probablemente será seguido por uno en la región dos o en la región uno, pero tiene muy poca probabilidad de ser seguido por uno en la región tres.

Pero la estimación del peligro sísmico no es el único resultado de esta aplicación; nuestras medidas y el discriminante nos dicen algo acerca del proceso sísmico en sí y acerca de la aplicabilidad del modelo markoviano a la región de estudio. Todas las medidas de markovianidad tienen valores bajos para $M^T < 7.0$ y para $M^T > 7.3$, lo cual puede explicarse recordando que cada magnitud umbral da como resultado una cadena de Markov diferente. Dependiendo de dónde ocurran y de las condiciones de esfuerzo prevalentes en la región hipocentral, eventos con $M^T < 7.0$ pueden no ser lo suficientemente grandes para influir significativamente los movimientos de la placa, por lo que muchos eslabones en las cadenas observadas pueden no estar realmente relacionados, i.e., la cadena incluye eslabones extráneos. En el otro extremo, mientras que los sismos muy grandes seguramente influirán el movimiento de placa, al considerar una magnitud umbral demasiado grande, estamos descartando transiciones que deben tenerse en cuenta, i.e., faltan eslabones en la cadena observada. Por lo tanto, parece que el modelo markoviano es aplicable a la región para el rango de magnitud 7.1 a 7.3, y la medida M_6 nos dice que el modelo markoviano se aplica mejor a la región de estudio para las magnitudes umbral 7.1 y 7.2, que dan la mejor solución de compromiso entre eslabones extráneos y faltantes en las cadenas de Markov.

3.3.6 intervalos de tiempo para la primera estrategia

A continuación, estimaremos las aproximaciones para la especificación del tiempo de ocurrencia de la sección 2.8, para lo cual usaremos los intervalos de tiempo para la magnitud umbral óptima $M^T = 7.1$ de la estrategia uno, dado que queremos contar con el mayor número de intervalos compatible con la markovianidad del sistema.

Según se mostrará más adelante, los intervalos por transición determinada, $\tau^{[ij]}$ son definitivamente demasiado pocos para caracterizar distribuciones y sólo dos $\tau^{[i]}$ tienen suficientes

elementos para sugerir que no difieren mayormente de la estimación global.

La primera aproximación para la especificación del tiempo de ocurrencia es el intervalo global (sección 2.8.2). La figura 15 muestra los intervalos de tiempo para $M^T = 7.1$; el intervalo promedio observado es $\overline{\tau} = 0.82013$ años y la desviación estándar es $s_\tau = 0.88159$. La similaridad entre media y desviación estándar, que se observa también para $M^T = 7.2$ y $M^T = 7.3$, es característica de la distribución exponencial. Por tanto, se procedió a investigar si la distribución exponencial

$$p(\tau) = \lambda e^{-\lambda \tau}, \tag{52}$$

donde $\lambda = 1/\overline{\tau}$, ajusta razonablemente bien las observaciones.

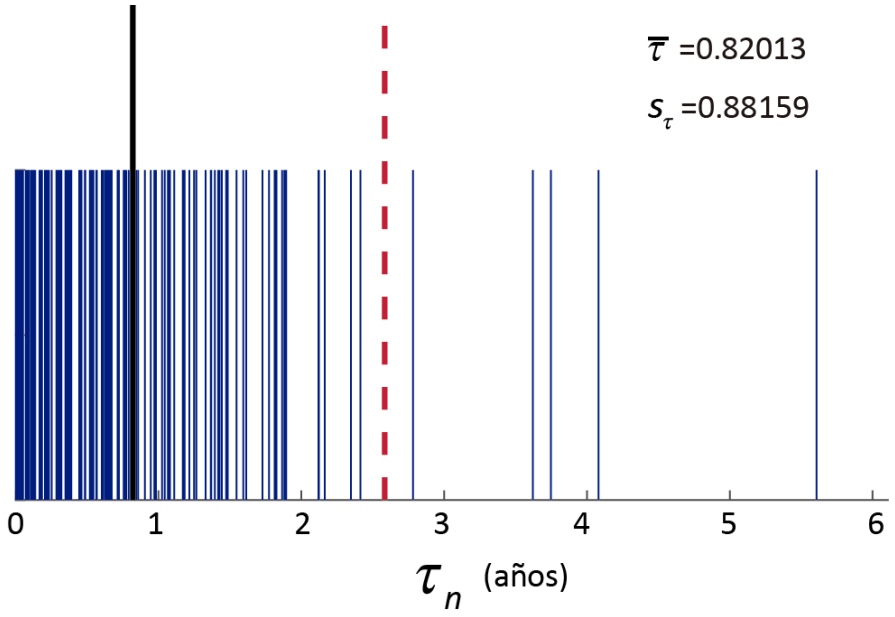


Figura 15. Intervalo global. La línea negra continua representa el promedio $\overline{\tau}$, la línea roja discontinua indica dos desviaciones estándar, las líneas azules indican todos los intervalos $\tau^{[ij]}$.

La figura 16 muestra el histograma global de intervalos, así como la densidad de probabilidad exponencial y su correspondiente cumulativa para $\lambda = 1.219 a^{-1}$ que es, naturalmente, la densidad total de intervalos en el tiempo; el ajuste es sorprendentemente bueno considerando el reducido número de

muestras.

De la cumulativa puede calcularse que hay probabilidad de 0.5 de que el siguiente sismo ocurra antes de 0.5685 años; hay probabilidad de 0.75 de que el siguiente intervalo sea menor de 1.1368 años; hay probabilidad de 0.90 de que el intervalo sea menor de 1.8884 años; hay probabilidad de 0.95 de que el intervalo sea menor de 2.4569 años; y es muy poco probable, sólo 0.01 que sea mayor de 3.7769 años.

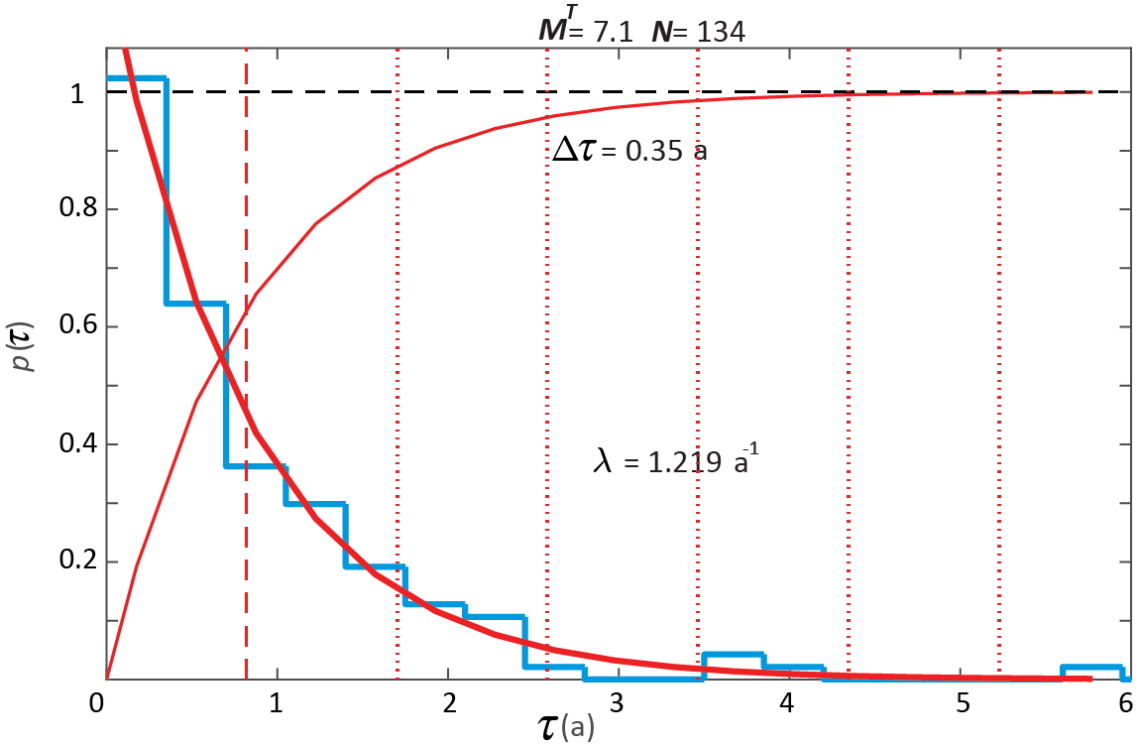


Figura 16. Histograma y distribución del Intervalo global. Histograma (azul), la línea discontinua vertical indica la media $\overline{\tau}$ y las líneas punteadas verticales indican distancias de la media múltiplos de la desviación estándar. La densidad de probabilidad exponencial se muestra como la curva roja gruesa y la curva roja delgada corresponde a la distribución cumulativa.

Seleccionamos el ancho de clase, $\Delta\tau$, óptimo, utilizado en la figura 16, con base en el error cuadrático medio ε_{rms} entre el histograma y la distribución

$$\varepsilon_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(p(\tau_i)-\hat{p}(\tau_i)\right)^2}{n}};\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{53}$$

donde $p(\tau_i)$ son los datos observados, $\hat{p}(\tau_i)$ son los valores para la distribución exponencial (ecuación 52), y *n* es el número de clases del histograma. La figura 17 muestra ε_{rms} para diferentes $\Delta\tau$, observamos que el primer mínimo de ε_{rms} es para $\Delta\tau = 0.35$; para $\Delta\tau > 0.35$ existen otros mínimos pero las clases son demasiado grandes para el número de datos por lo que no tiene sentido utilizar estos intervalos.

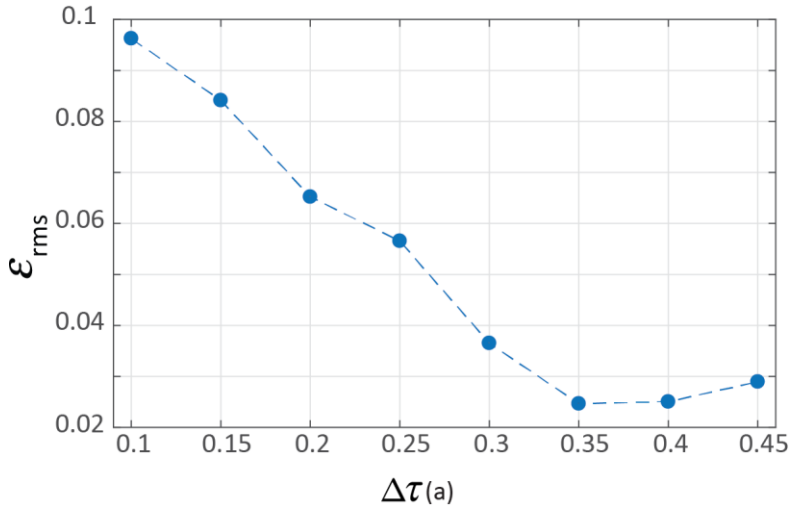


Figura 17. D*t* **vs** e_{rms} **.** El eje horizontal es el incremento de tiempo en años, el eje vertical es el error cuadrático medio.

La segunda aproximación para la especificación del tiempo de ocurrencia es por estado inicial (sección 2.8.2), que agrupa todos los intervalos por estado inicial *i*; la figura 18 muestra los intervalos observados y los correspondientes histogramas.

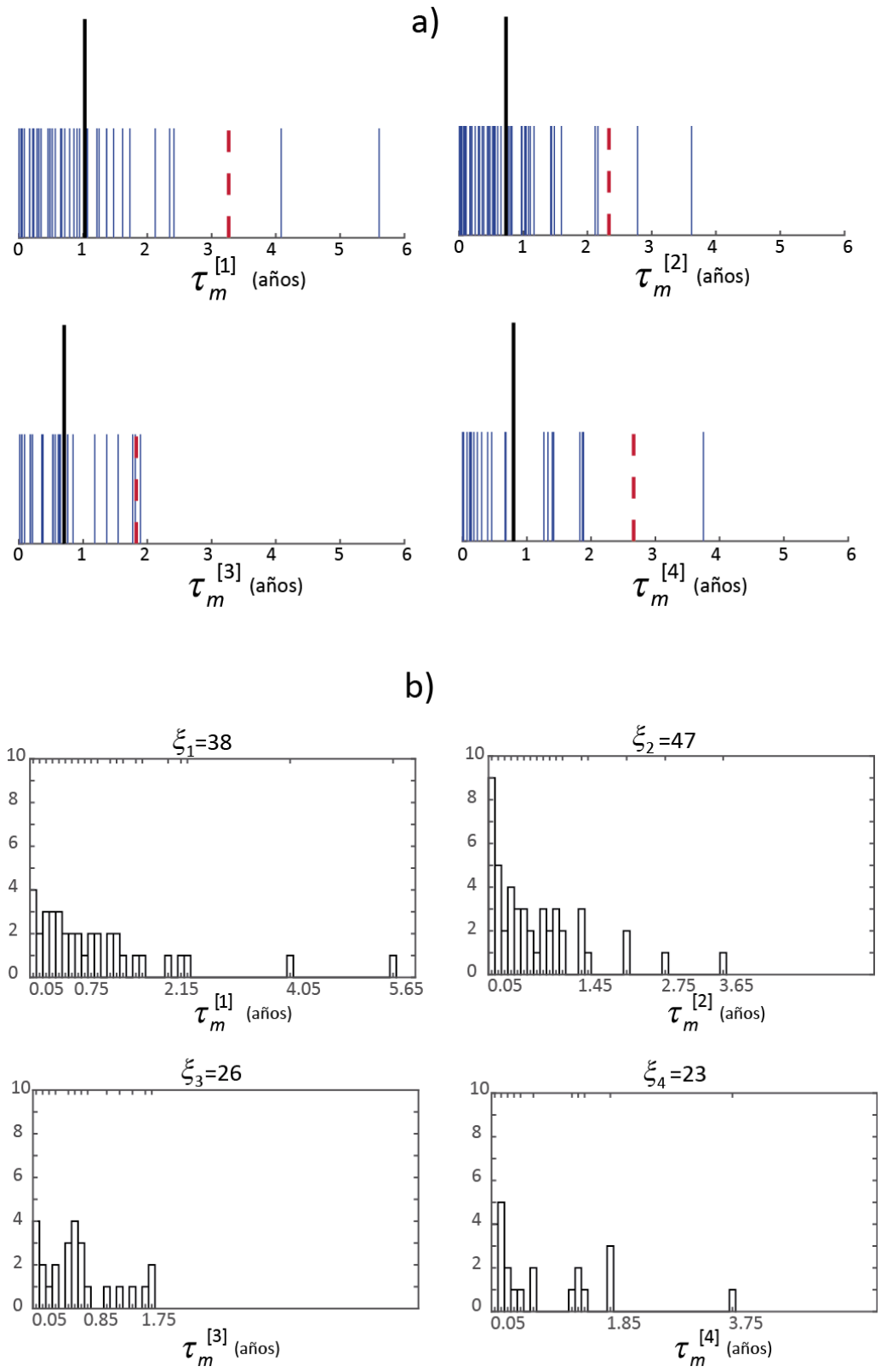


Figura 18. Intervalos por estado inicial. a) intervalos por estado inicial, línea negra continua representa el promedio $\bar{\tau}^{[i]}$, la línea roja discontinua indica dos desviaciones estándar, las líneas azules indican los intervalos $\tau^{[i]}$. b) histogramas para los intervalos $\tau^{[i]}$.

De la figura 18 puede verse que sólo los intervalos $\tau^{[1]}$ y $\tau^{[2]}$ tienen suficientes datos como para sugerir algún tipo de distribución identificable. La figura 19 muestra en detalle los histogramas para $\tau^{[1]}$ y $\tau^{[2]}$ y su ajuste a distribuciones exponenciales. Puede apreciarse que, si bien los datos no son suficientes para identificar alguna distribución dada, los resultados no contradicen la suposición de distribución exponencial.

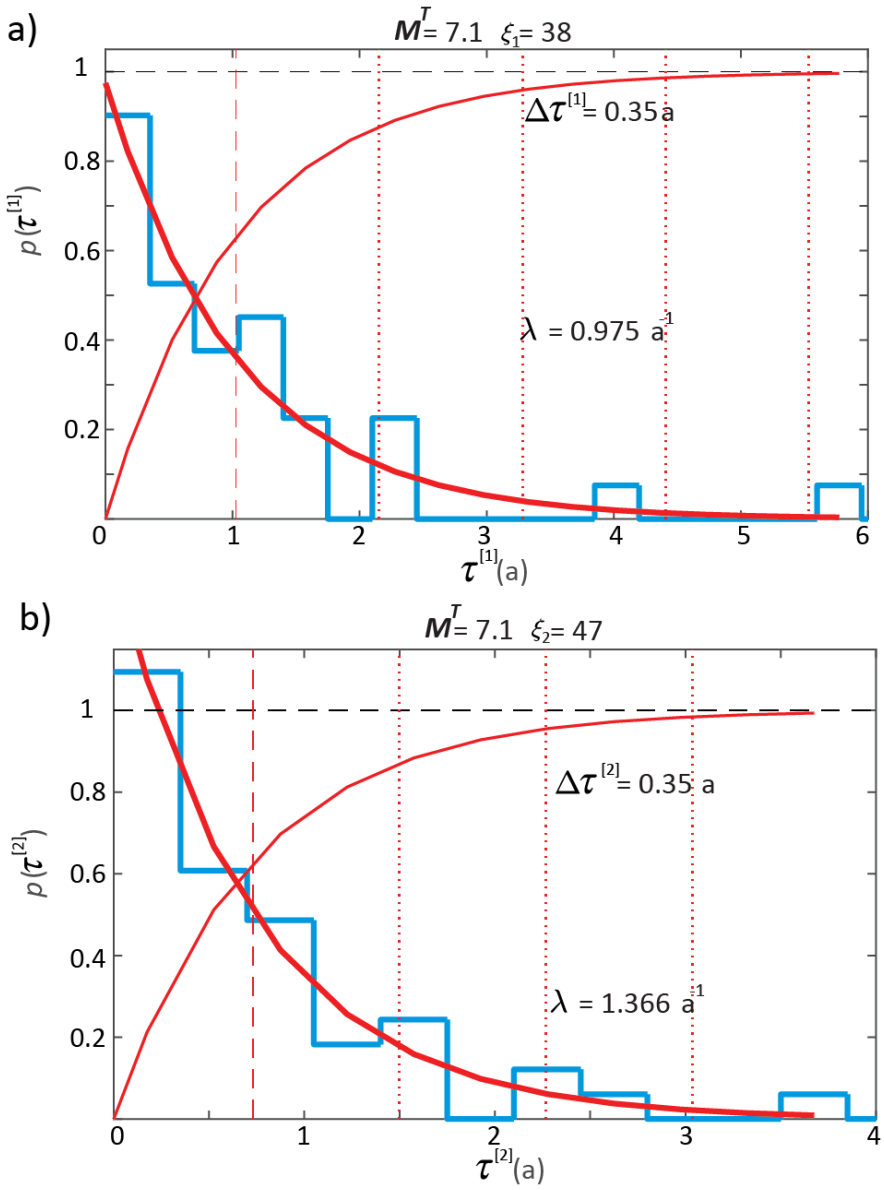


Figura 19. Ajuste de distribución exponencial a intervalos por estado inicial. a) Intervalo $\tau^{[1]}$. b) Intervalo $\tau^{[2]}$. Para ambas figuras, histograma (azul), la línea discontinua vertical indica la media $\bar{\tau}$ y las líneas punteadas verticales indican distancias de la media múltiplos de la desviación estándar. La densidad de probabilidad exponencial se muestra como la curva roja gruesa y la curva roja delgada corresponde a la distribución cumulativa.

La última especificación del intervalo de ocurrencia es la markoviana que caracteriza las distribuciones de intervalos para cada transición (sección 2.8.2). La figura 20 muestra los intervalos $\tau^{[ij]}$ para cada transición y sus correspondientes histogramas; podemos ver que ninguna transición tiene suficientes intervalos para definir una distribución estadísticamente significativa.

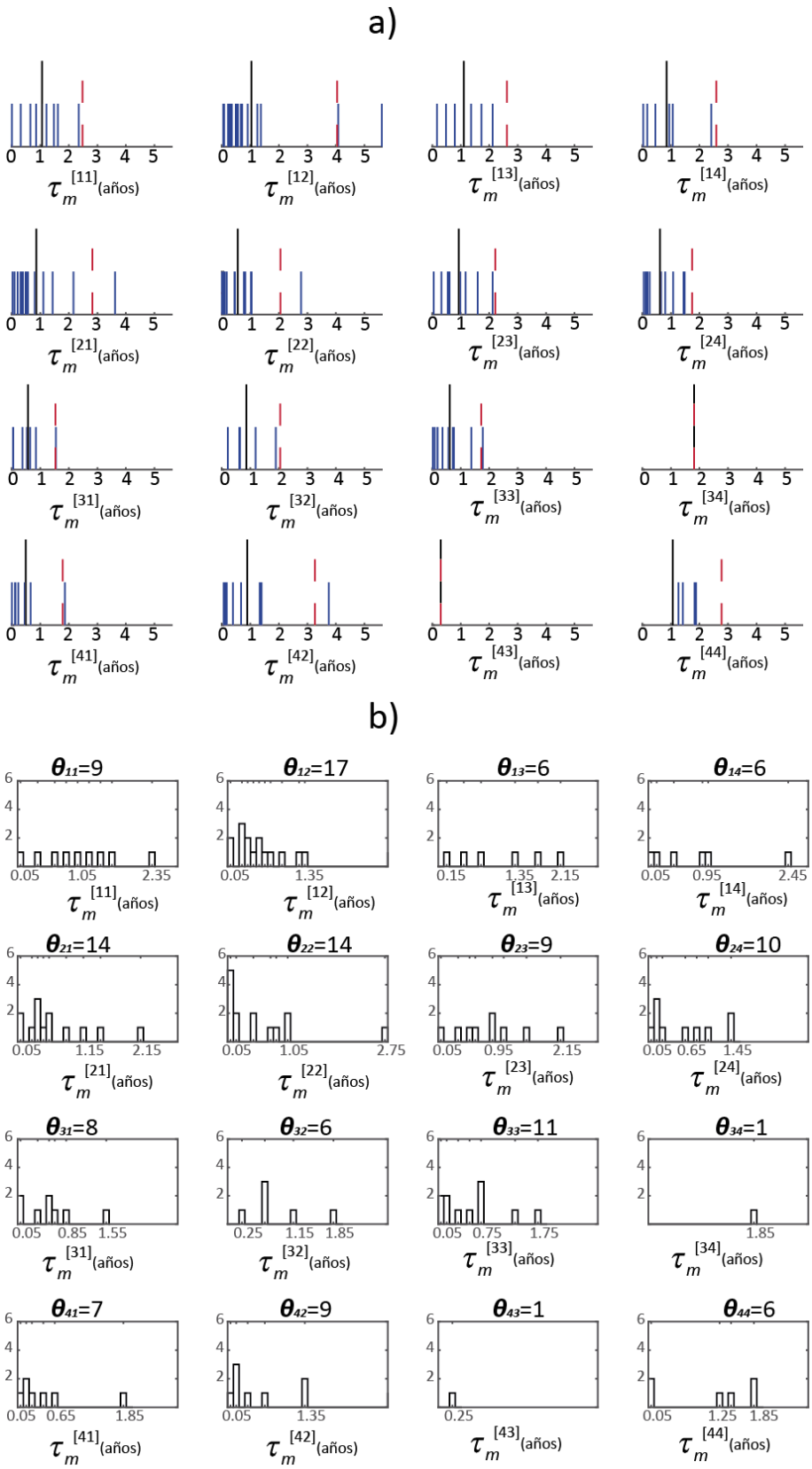


Figura 20. Intervalos markovianos. a) intervalos para cada transición particular, línea negra continua representa el promedio $\overline{\tau}^{[ij]}$, la línea roja discontinua indica dos desviaciones estándar, las líneas azules indican los intervalos $\tau^{[ij]}$

. b) histogramas para los intervalos $\tau^{[ij]}$.

Dado que no se cuenta con suficientes datos para caracterizar las distribuciones de intervalos para las transiciones markovianas, ni para transiciones agrupadas por estado inicial, necesitamos recurrir a la utilización del intervalo global. El histograma del intervalo global es ajustado bastante bien por la distribución exponencial, pero la distribución exponencial de intervalos implica que el número de ocurrencias es poissoniano y, por tanto, que la ocurrencia de los sismos tiene distribución uniforme en el tiempo; la distribución poissoniana implica ausencia de memoria, pero puede deberse a que la distribución global de intervalos es, en principio, mezcla de 16 distribuciones potencialmente distintas.

3.3.7 Segunda estrategia

Como se mencionó anteriormente la segunda estrategia para estimar el peligro sísmico consiste en utilizar magnitudes umbral distintas para cada región, para tener sismicidad lo más homogénea posible sobre todas las regiones. Por lo tanto, para el esquema de las medidas, la calificación y el discriminante, construiremos diferentes modelos utilizando las mismas regiones, pero diferentes grupos de magnitudes umbrales, y elegiremos el grupo que resulte en el mejor compromiso entre markovianidad y número de datos.

Usamos el mismo catálogo sísmico y, también usamos las magnitudes umbrales mínimas y máximas ($M^T = 6.5$ y $M^T = 7.4$ respectivamente) de la primera estrategia, para generar los distintos grupos.

Tabla 2. Las matrices Q, X, P y ρ para todos los grupos considerados.

	N	Θ	Ξ	P				π
								M_6
Grupo 1								
		18 19 16 15	68	0.264706	0.279412	0.235294	0.220588	
6.8 6.9 6.5 6.6	306	21 15 17 21	74	0.283784	0.202703	0.229730	0.283784	
		15 19 33 18	85	0.176471	0.223529	0.388235	0.211765	0.222222 0.241830 0.277778 0.258170
		14 21 19 25	79	0.177215	0.265823	0.240506	0.316456	7
Grupo 2								
		12 16 16 13	57	0.210526	0.280702	0.280702	0.228070	
6.9 7 6.6 6.7	260	18 09 15 18	60	0.300000	0.150000	0.250000	0.300000	
		14 18 28 14	74	0.189189	0.243243	0.378378	0.189189	0.219231 0.230769 0.284615 0.265385
		13 17 15 24	69	0.188406	0.246377	0.217391	0.347826	8
Grupo 3								

					10	15	13	10	48	0.208333	0.312500	0.270833	0.208333		
7	7.1	6.7	6.8	202	16	08	11	12	47	0.340426	0.170213	0.234043	0.255319		
					13	12	21	10	56	0.232143	0.214286	0.375000	0.178571	0.237624	0.232673	0.277228	0.252475
					09	12	11	19	51	0.176471	0.235294	0.215686	0.372549	8			
Grupo 4															
					08	11	10	09	38	0.210526	0.289474	0.263158	0.236842		
7.1	7.2	6.9	6.9	154	10	05	08	12	35	0.285714	0.142857	0.228571	0.342857		
					08	08	13	08	37	0.216216	0.216216	0.351351	0.216216	0.246327	0.227015	0.248222	0.278437
					12	11	07	14	44	0.272727	0.250000	0.159091	0.318182	9			
Grupo 5															
					07	07	08	08	30	0.233333	0.233333	0.266667	0.266667		
7.2	7.3	7	7	123	10	05	06	07	28	0.357143	0.178571	0.214286	0.250000		
					05	07	11	07	30	0.166667	0.233333	0.366667	0.233333	0.242316	0.219935	0.253407	0.284342
					08	08	06	13	35	0.228571	0.228571	0.171429	0.371429	8			
Grupo 6															
					06	08	07	05	26	0.230769	0.307692	0.269231	0.192308		
7.3	7.4	7.1	7.1	97	06	03	05	08	22	0.272727	0.136364	0.227273	0.363636		
					08	03	12	03	26	0.307692	0.115385	0.461538	0.115385	0.268546	0.215728	0.281955	0.233771
					06	07	03	07	23	0.260870	0.304348	0.130435	0.304348	11			
Grupo 7															
					04	08	06	05	23	0.173913	0.347826	0.260870	0.217391		
7.4	7.4	7.1	7.1	94	06	03	05	08	22	0.272727	0.136364	0.227273	0.363636		
					08	03	12	03	26	0.307692	0.115385	0.461538	0.115385	0.245303	0.222667	0.290753	0.241277
					05	07	04	07	23	0.217391	0.304348	0.173913	0.304348	11			
Grupo 8															
					07	08	03	05	23	0.304348	0.347826	0.130435	0.217391		
7.4	7.4	7.2	7.1	86	07	03	04	08	22	0.318182	0.136364	0.181818	0.363636		
					04	03	08	03	18	0.222222	0.166667	0.444444	0.166667	0.266215	0.243940	0.225187	0.264658
					05	07	04	07	23	0.217391	0.304348	0.173913	0.304348	12			

La tabla 2 muestra las distintas magnitudes umbral de cada grupo, el número total de transiciones *N*, y las matrices Q, X, P y p para todos los grupos considerados. Ahora veamos como difieren los resultados para los diferentes grupos.

Para el primer renglón: la probabilidad p_{12} es consistentemente más grande que el resto, excepto para el grupo 2 donde p_{12} y p_{13} tienen la misma probabilidad, y para el grupo 5 donde p_{12} tiene probabilidad baja. Resultados similares se obtuvieron para la primera estrategia, lo que confirma la fuerte interacción entre la región uno y dos.

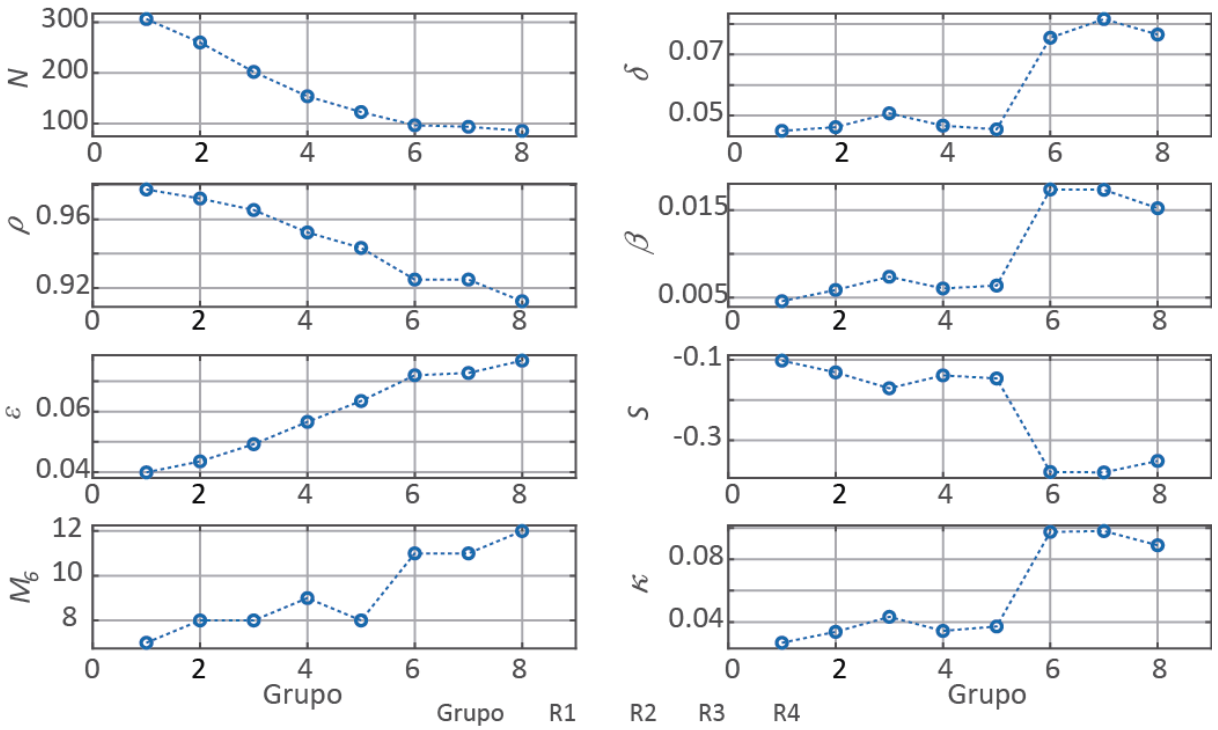
Para el segundo renglón: p_{21} y p_{24} en ocasiones tienen la misma probabilidad (grupos 1 y 2), a veces p_{21} tiene la mayor probabilidad (grupos 3 y 5), y a veces p_{24} tiene la mayor probabilidad (grupos 4, 6, 7, y 9). Por lo que, la región dos tiene una fuerte interacción con las regiones 1 y 4. Algo curioso es que p_{22} es siempre la menor probabilidad para todos los grupos, en cambio para la primera estrategia p_{22} es mayor para $M^T < 7.0$. Algo en lo que coinciden ambas estrategias es la baja interacción entre la región dos y tres.

Para el tercer renglón: p_{33} siempre es la mayor probabilidad; para los grupos 4 al 8 p_{32} y p_{34} tienen la misma probabilidad y ésta es la menor (excepto para el grupo 5). La región tres tiene una fuerte interacción con ella misma (resultados similares se obtuvieron para la primera estrategia), algo curioso es que la mayoría de la sismicidad en esta región tiene profundidad mayor a 300 km y a partir de esa profundidad existe una brecha entre la región 3 y 4; la región tres interactúa poco con la región cuatro y dos.

Para el cuarto renglón: p_{44} es la mayor probabilidad para los grupos 1 al 5, para los grupos 6 al 8 p_{42} y p_{44} son iguales y tienen la mayor probabilidad. Para los grupos 1 al 3 p_{41} tiene la menor probabilidad, y para los grupos 4 al 8 p_{43} tiene la menor probabilidad. La región cuatro tiene una fuerte interacción con ella misma y con la región 2, y tiene poca interacción con la región tres y uno.

Para decidir cuál es el mejor modelo, procederemos a evaluar las medidas de estabilidad, exactitud y markovianidad.

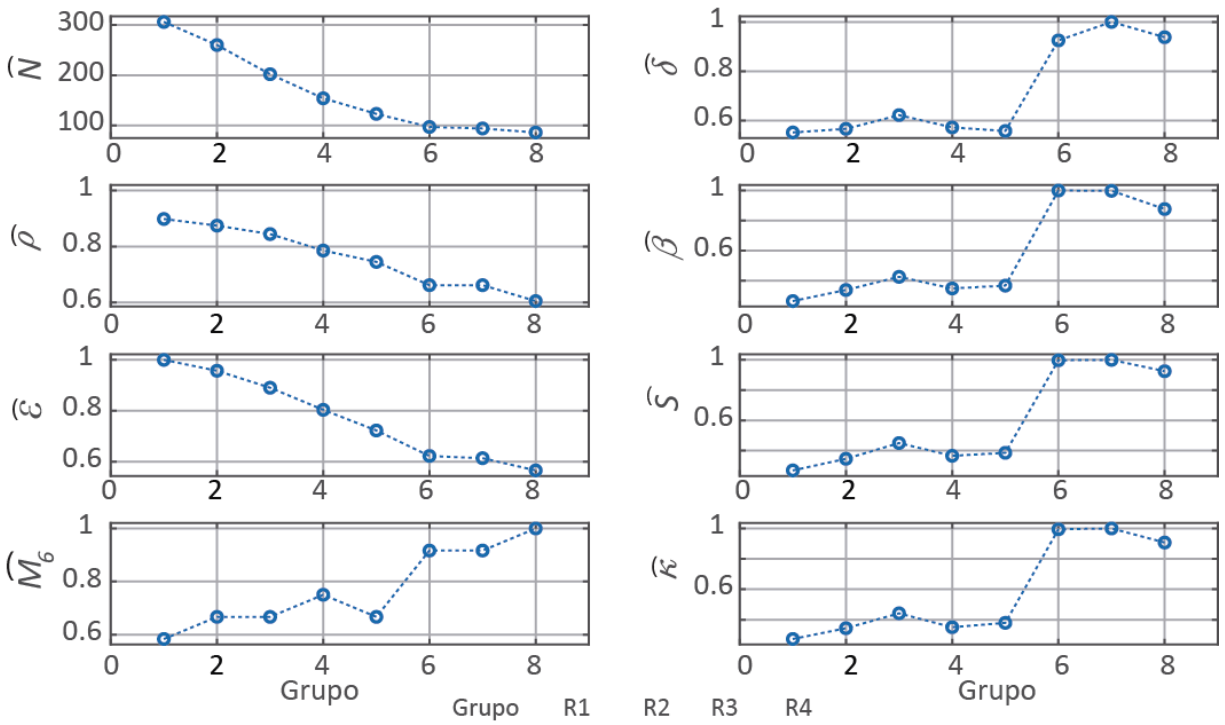
La figura 21 muestra los valores de las siete medidas para los ocho grupos. Aquí también tenemos el problema de juzgar cuál es el mejor modelo.



Grupo	R1	R2	R3	R4
1	6.8	6.9	6.5	6.6
2	6.9	7.0	6.6	6.7
3	7.0	7.1	6.7	6.8
4	7.1	7.2	6.9	6.9
5	7.2	7.3	7.0	7.0
6	7.3	7.4	7.1	7.1
7	7.4	7.4	7.1	7.1
8	7.4	7.4	7.2	7.1

Figura 21. Medidas de markovianidad para la segunda estrategia. La gráfica superior izquierda muestra el número de transiciones para referencia.

La figura 22 muestra las medidas normalizadas para la segunda estrategia; aquí también para todas ellas los valores altos son deseables y los valores bajos son indeseables.



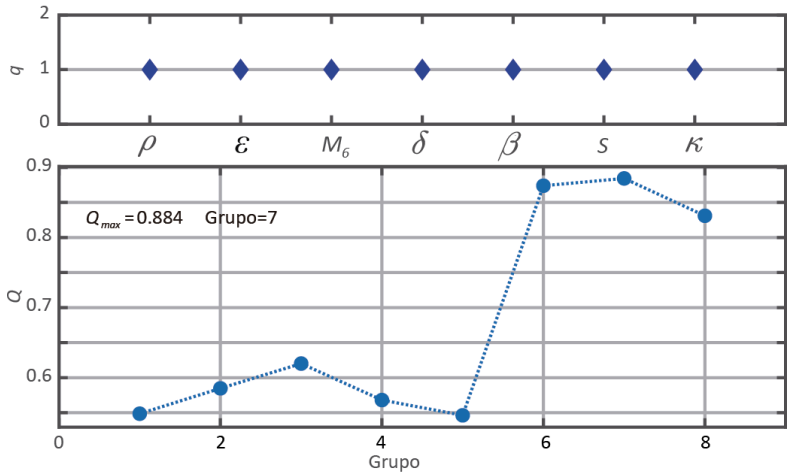
Grupo	R1	R2	R3	R4
1	6.8	6.9	6.5	6.6
2	6.9	7.0	6.6	6.7
3	7.0	7.1	6.7	6.8
4	7.1	7.2	6.9	6.9
5	7.2	7.3	7.0	7.0
6	7.3	7.4	7.1	7.1
7	7.4	7.4	7.1	7.1
8	7.4	7.4	7.2	7.1

Figura 22. Medidas de markovianidad normalizadas para la segunda estrategia. La gráfica superior izquierda muestra el número de transiciones para referencia.

Ahora aplicaremos el discriminante (47) utilizando las medidas normalizadas de la figura 22 para los diferentes grupos, para elegir el grupo óptimo. Mostraremos el comportamiento del discriminante para los mismos conjuntos de pesos de la primera estrategia.

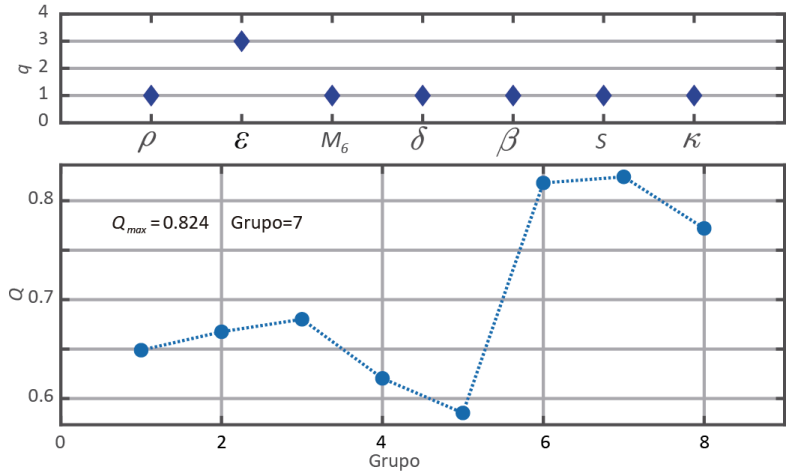
La figura 23 muestra los valores del discriminante para pesos iguales para todas las medidas. El valor pico del discriminante es para el grupo 7, y el segundo valor muy cercano es para el grupo 6.

La figura 24 muestra los valores del discriminante considerando el conjunto de pesos de la figura 12, el grupo óptimo para este conjunto de pesos es para el grupo 7.



Grupo	R1	R2	R3	R4
1	6.8	6.9	6.5	6.6
2	6.9	7.0	6.6	6.7
3	7.0	7.1	6.7	6.8
4	7.1	7.2	6.9	6.9
5	7.2	7.3	7.0	7.0
6	7.3	7.4	7.1	7.1
7	7.4	7.4	7.1	7.1
8	7.4	7.4	7.2	7.1

Figura 23. Discriminante para el primer conjunto de pesos, segunda estrategia. Parte superior: valores de importancia asignados para las medidas $\left(q_\rho = 1,\ q_\varepsilon = 1,\ q_{M_6} = 1,\ q_\delta = 1,\ q_\beta = 1,\ q_S = 1,\ q_\kappa = 1,\right)$. Parte inferior: valor del discriminante para cada grupo.

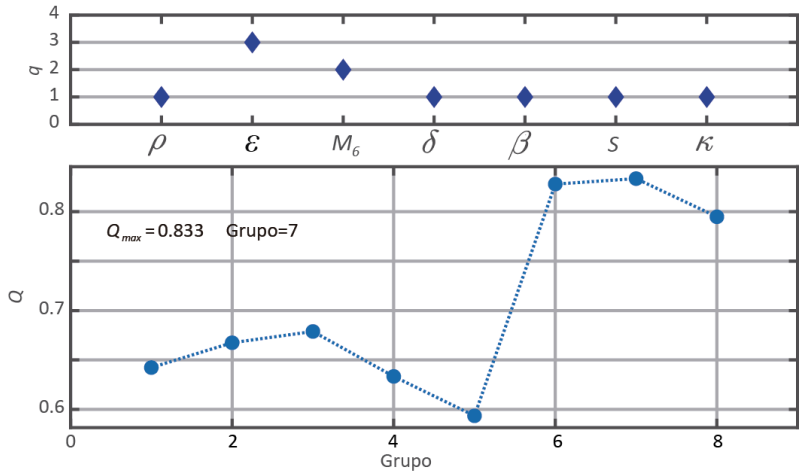


Grupo	R1	R2	R3	R4
1	6.8	6.9	6.5	6.6
2	6.9	7.0	6.6	6.7
3	7.0	7.1	6.7	6.8
4	7.1	7.2	6.9	6.9
5	7.2	7.3	7.0	7.0
6	7.3	7.4	7.1	7.1
7	7.4	7.4	7.1	7.1
8	7.4	7.4	7.2	7.1

Figura 24. Discriminante para el segundo conjunto de pesos, segunda estrategia. Parte superior: valores de importancia asignados para las medidas $\left(q_\rho = 1,\ q_\varepsilon = 3,\ q_{M_6} = 1,\ q_\delta = 1,\ q_\beta = 1,\ q_S = 1,\ q_\kappa = 1,\right)$. Parte inferior: valor del discriminante para cada grupo.

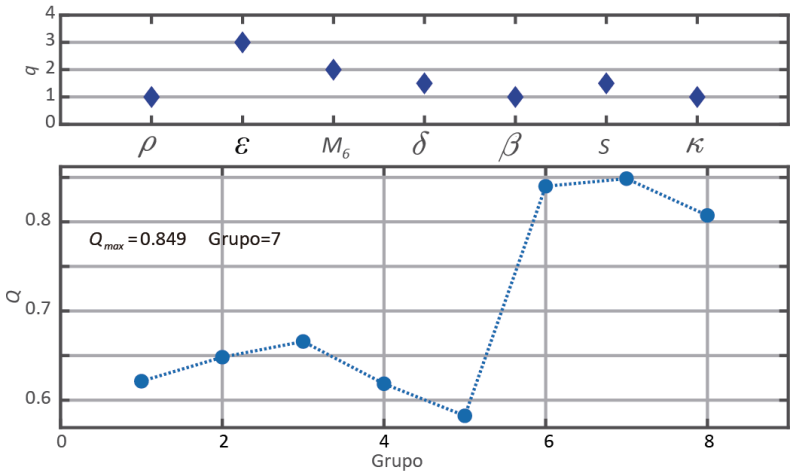
La figura 25 muestra los valores del discriminante considerando el conjunto de pesos de la figura 13, el grupo óptimo para este conjunto de pesos es para el grupo 7.

Finalmente, en la figura 26 presentamos el último conjunto de pesos derivados de la figura 14, el valor pico para el discriminante también es para el grupo 7.



Grupo	R1	R2	R3	R4
1	6.8	6.9	6.5	6.6
2	6.9	7.0	6.6	6.7
3	7.0	7.1	6.7	6.8
4	7.1	7.2	6.9	6.9
5	7.2	7.3	7.0	7.0
6	7.3	7.4	7.1	7.1
7	7.4	7.4	7.1	7.1
8	7.4	7.4	7.2	7.1

Figura 25. Discriminante para el tercer conjunto de pesos, segunda estrategia. Parte superior: valores de importancia asignados para las medidas $\left(q_{\rho}=1,\ q_{\varepsilon}=3,\ q_{M_6}=2,\ q_{\delta}=1,\ q_{\beta}=1,\ q_{S}=1,\ q_{\kappa}=1,\right)$. Parte inferior: valor del discriminante para cada grupo.



Grupo	R1	R2	R3	R4
1	6.8	6.9	6.5	6.6
2	6.9	7.0	6.6	6.7
3	7.0	7.1	6.7	6.8
4	7.1	7.2	6.9	6.9
5	7.2	7.3	7.0	7.0
6	7.3	7.4	7.1	7.1
7	7.4	7.4	7.1	7.1
8	7.4	7.4	7.2	7.1

Figura 26. Discriminante para el cuarto conjunto de pesos, segunda estrategia. Parte superior: valores de importancia asignados para las medidas $\left(q_\rho = 1,\ q_\varepsilon = 3,\ q_{M_6} = 2,\ q_\delta = 1.5,\ q_\beta = 1,\ q_S = 1.5,\ q_\kappa = 1,\right)$. Parte inferior: valor del discriminante para cada grupo.

Se puede apreciar que todos los conjuntos de pesos resultaron en discriminantes con un máximo para el grupo 7, y que otros cambios razonables a estos conjuntos de pesos no conducen a un grupo preferible diferente, elegimos el conjunto de pesos de la figura 25, y el modelo para el grupo 7 como el más confiable.

Por lo tanto, con respecto al peligro sísmico del área de estudio para la segunda estrategia, podemos decir de la MPT para el grupo 7 ($M_W = 7.4,\ M_W = 7.4,\ M_W = 7.1,\ M_W = 7.1$, para las regiones 1, 2, 3 y 4 respectivamente) que: después de un sismo en la región uno, el siguiente probablemente ocurrirá en la región dos; un evento en la región dos probablemente será seguido por un evento en la región 4, pero es poco probable que el evento se repita en la misma región; un evento en la región tres probablemente se repetirá o, con una probabilidad menor, le seguirá uno en la región uno, pero el siguiente evento en la región dos o cuatro es poco probable; finalmente, un evento en la región cuatro probablemente se repetirá o, será seguido por un evento en la región dos, pero el siguiente evento es bastante improbable en la región tres.

Nuestras medidas y el discriminante para la segunda estrategia nos indican que, todas las medidas de markovianidad tienen valores bajos para los grupos del 1 al 5; a partir del grupo 6 los valores de markovianidad incrementan notoriamente.

3.3.8 intervalos de tiempo para la segunda estrategia

A continuación, estimaremos las aproximaciones para la especificación del tiempo de ocurrencia (sección 2.8) para la segunda estrategia, usaremos los intervalos de tiempo para el grupo 7, ya que, es el grupo de magnitudes umbral óptimo (7.4, 7.4, 7.1, 7.1, para las regiones 1, 2, 3 y 4 respectivamente).

Para la segunda estrategia los intervalos por transición determinada, $\tau^{[ij]}$ y los intervalos que sólo dependen del estado inicial, $\tau^{[i]}$, son definitivamente demasiado pocos (ver tabla 2) para caracterizar distribuciones, por lo que, recurriremos al uso del intervalo global.

La figura 27 muestra el intervalo global (sección 2.8.2) para la segunda estrategia, el intervalo promedio observado es $\overline{\tau} = 1.133$ años y la desviación estándar es $s_{\tau} = 1.122$, otra vez hay similaridad entre media y desviación estándar, por lo que podemos tratar de ajustar la distribución exponencial (52) de nuevo.

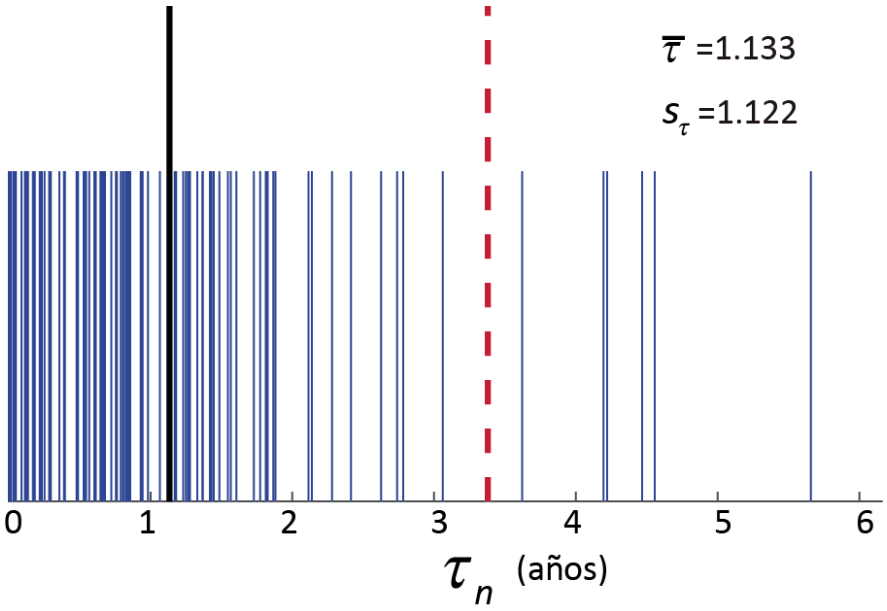


Figura 27. Intervalo global para la segunda estrategia. La línea negra continua representa el promedio $\overline{\tau}$, la línea roja discontinua indica dos desviaciones estándar, las líneas azules indican todos los intervalos $\tau^{[ij]}$.

La figura 28 muestra el histograma global de intervalos, así como la densidad de probabilidad exponencial y su correspondiente cumulativa para $\lambda = 0.855 a^{-1}$; otra vez el ajuste es sorprendentemente bueno considerando el reducido número de muestras.

De la cumulativa puede calcularse que hay probabilidad de 0.5 de que el siguiente sismo ocurra antes de 0.8104 años; hay probabilidad de 0.75 de que el siguiente intervalo sea menor de 1.6208 años; hay probabilidad de 0.90 de que el intervalo sea menor de 2.6920 años; hay probabilidad de 0.95 de que el intervalo sea menor de 3.5024 años; y es muy poco probable, sólo 0.01 que sea mayor de 5.3840 años.

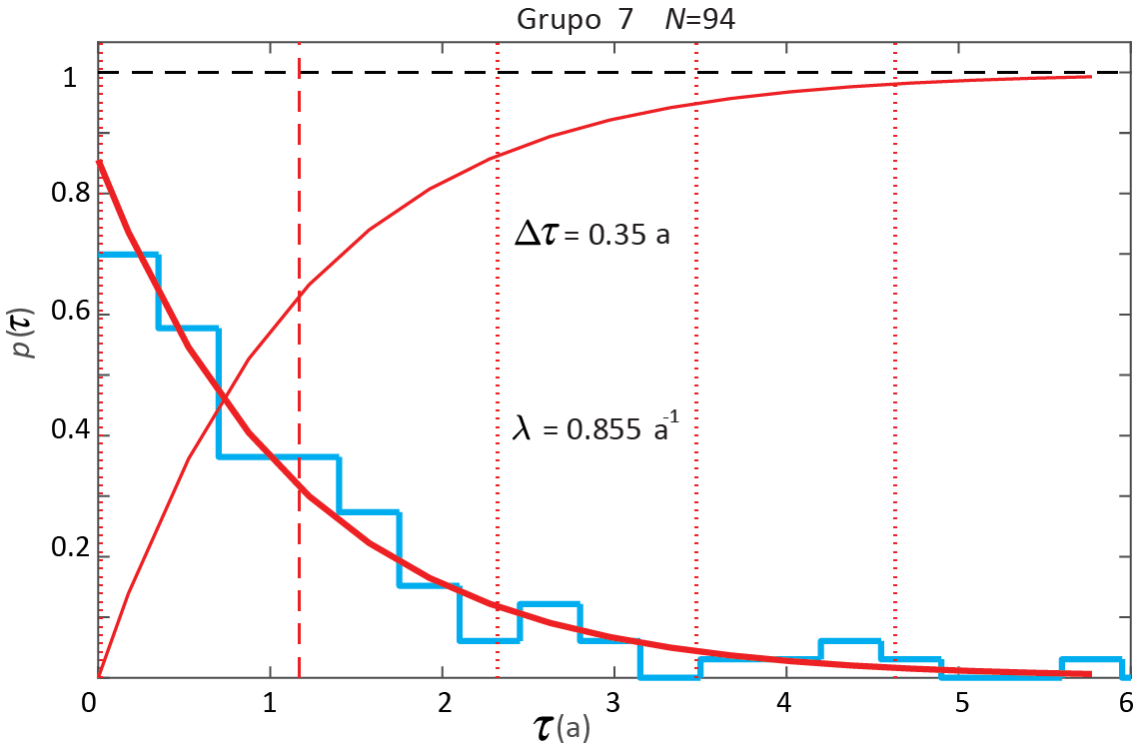


Figura 28. Histograma y distrbución del Intervalo global para la segunda estrategia. Histograma (azul), la línea discontinua vertical indica la media $\bar{\tau}$ y las líneas punteadas verticales indican distancias de la media múltiplos de la desviación estándar. La densidad de probabilidad exponencial se muestra como la curva roja gruesa y la curva roja delgada corresponde a la distribución cumulativa.

Otra vez las aproximaciones por estado inicial y markoviana no tienen la cantidad de datos suficientes, por lo que, recurrimos a la utilización del intervalo global.

3.3.9 Conclusiones para ambas estrategias

Ahora analizaremos si el uso de las dos estrategias para estimar el peligro sísmico conduce a resultados similares o contradictorios.

De las MPT (tablas 1 y 2) percibimos que ambas estrategias coinciden en que para la región uno existe fuerte interacción con la región dos; la región dos tiene fuerte interacción con la región uno y cuatro, y poca interacción con la región tres; la región tres tiene fuerte interacción con ella misma, algo curioso es que los sismos grandes de la región tres se encuentran a profundidades $\geq$ 300 km, y en esta profundidad

existe una brecha en la placa del Pacífico que coincide con los límites de la región dos y tres; la región cuatro tiene fuerte interacción con ella misma y con la región dos, y por último la región cuatro y tres tienen poca interacción entre ellas.

El discriminante y las medidas de markovianidad de ambas estrategias coinciden en que, para sismos con $M_w < 7.0$ el sistema es menos markoviano que para sismos con rango de magnitud de 7.0 a 7.4, lo que puede explicarse por eslabones espurios en las cadenas de transición observadas, respectivamente.

Para el modelo con el mejor compromiso entre markovianidad y número de transiciones de la primera y segunda estrategia, magnitud umbral $M^T = 7.1$ y el grupo 7 respectivamente. Coinciden en que para el renglón uno p_{12} es la mayor probabilidad; para el segundo renglón los resultados son diferentes para ambas estrategias, aunque cabe resaltar que la diferencia en transiciones es más del doble, $\xi_2 = 47$ para la primera estrategia y $\xi_2 = 22$ para la segunda estrategia; los renglones 3 y 4 coinciden para ambas estrategias.

Respecto a los intervalos de tiempos de ambas estrategias, recurrimos a la utilización del intervalo global, ya que, este intervalo tiene la cantidad de datos suficientes para identificar algún tipo de distribución; la distribución exponencial se ajusta bastante bien para los intervalos globales de ambas estrategias, aunque el uso de la distribución exponencial tiene implicaciones mencionadas anteriormente; de la cumulativa hay probabilidad de 0.95 de que los intervalos sean menor a 2.4 y 3.5 años para la primera y segunda estrategia respectivamente. Las aproximaciones para los intervalos por estado inicial y markoviana de ambas estrategias no tienen la cantidad de datos suficientes para definir una distribución estadísticamente significativa.

3.4 Trinchera mexicana

Para la trinchera mexicana utilizaremos la misma definición de sistema y estados que en la sección 3.1.

Aunque en esta zona la cantidad de sismos de alta magnitud ($M_w \geq 7$) es baja, la tectónica es lo suficientemente sencilla como para permitir delimitar las regiones.

3.4.1 Marco tectónico y sismicidad

Consideraremos la parte de la trinchera mexicana donde subduce la Placa de Cocos, al sur de la placa oceánica de Rivera que subduce oblicuamente debajo de la placa Norteamericana (Gutiérrez et al., 2015; Demets et al., 2010). La subducción de la placa de Cocos bajo la placa Norteamericana cambia drásticamente desde el noroeste hacia el sureste (Espíndola et al., 2017), la velocidad relativa (consideramos la placa norteamericana fija) de la placa de Cocos va de 5 cm/año en la parte norte a 7 cm/año en la parte sur (Demets et al., 2010). La placa Caribe tiene movimiento relativo de este a noreste con respecto a la placa Norteamericana y el borde entre estas dos placas es transformante (figura 29), la velocidad relativa de la placa Caribe es aproximadamente 2 cm/año (Weber et al., 2015). Por último, la placa de Norteamericana se mueve aproximadamente hacia el suroeste con velocidad de 2.3 cm/año.

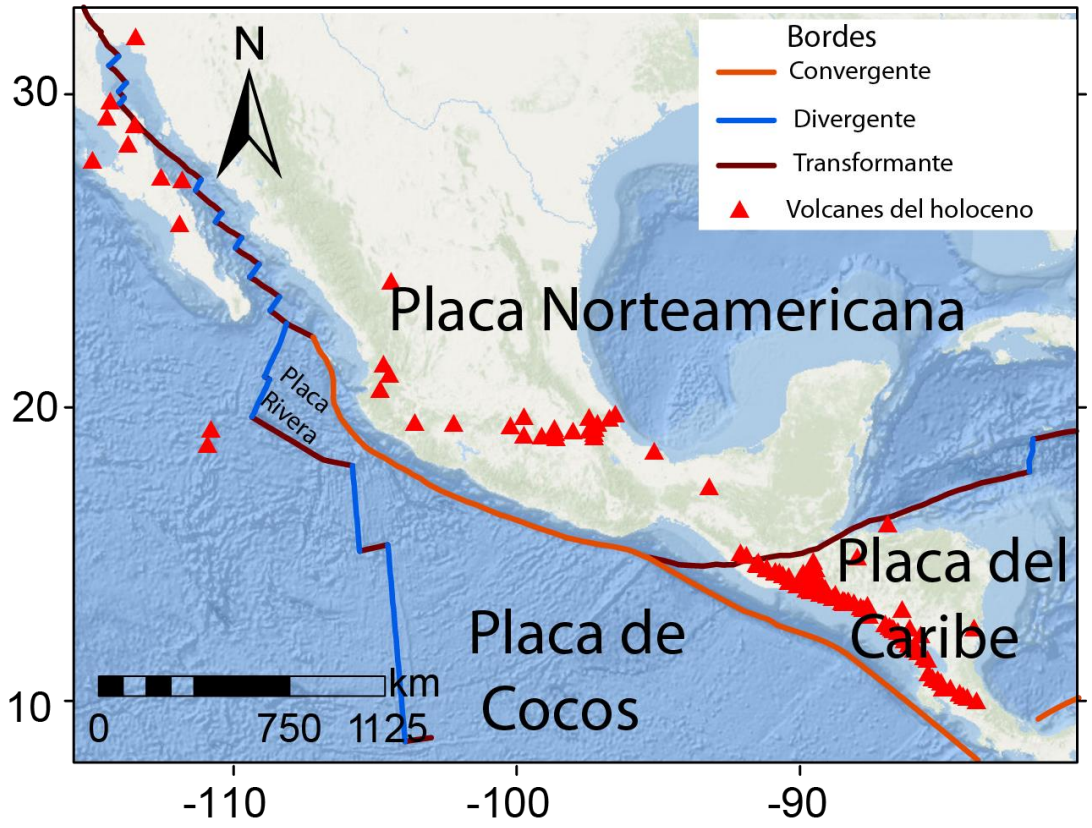


Figura 29. Marco tectónico de México. Las líneas indican las estructuras tectónicas principales.

La sismicidad en la trinchera mexicana es causada por la interacción de las cuatro placas mencionadas. La figura 30 a) muestra la sismicidad de la trinchera mexicana (catálogos USGS 1970-2017 y SSN 1990-2017); los sismos más profundos no sobrepasan los 300 km de profundidad, y hay muy pocos sismos $M_W \geq 7$ en la parte norte de la trinchera mexicana, la mayoría de los sismos $M_W \geq 7$ son someros, lo que puede deberse a que la trinchera mexicana se asemeja a la trinchera del tipo Chileno, por lo que hay fuerte acoplamiento de las placas tectónicas en esta región (Uyeda y Kanamori, 1979). De las secciones sísmicas (figura 30 b) vemos que una parte de la placa de Cocos tiene subducción subhorizontal (perfiles D y E), y que su buzamiento cambia drásticamente a partir del perfil F.

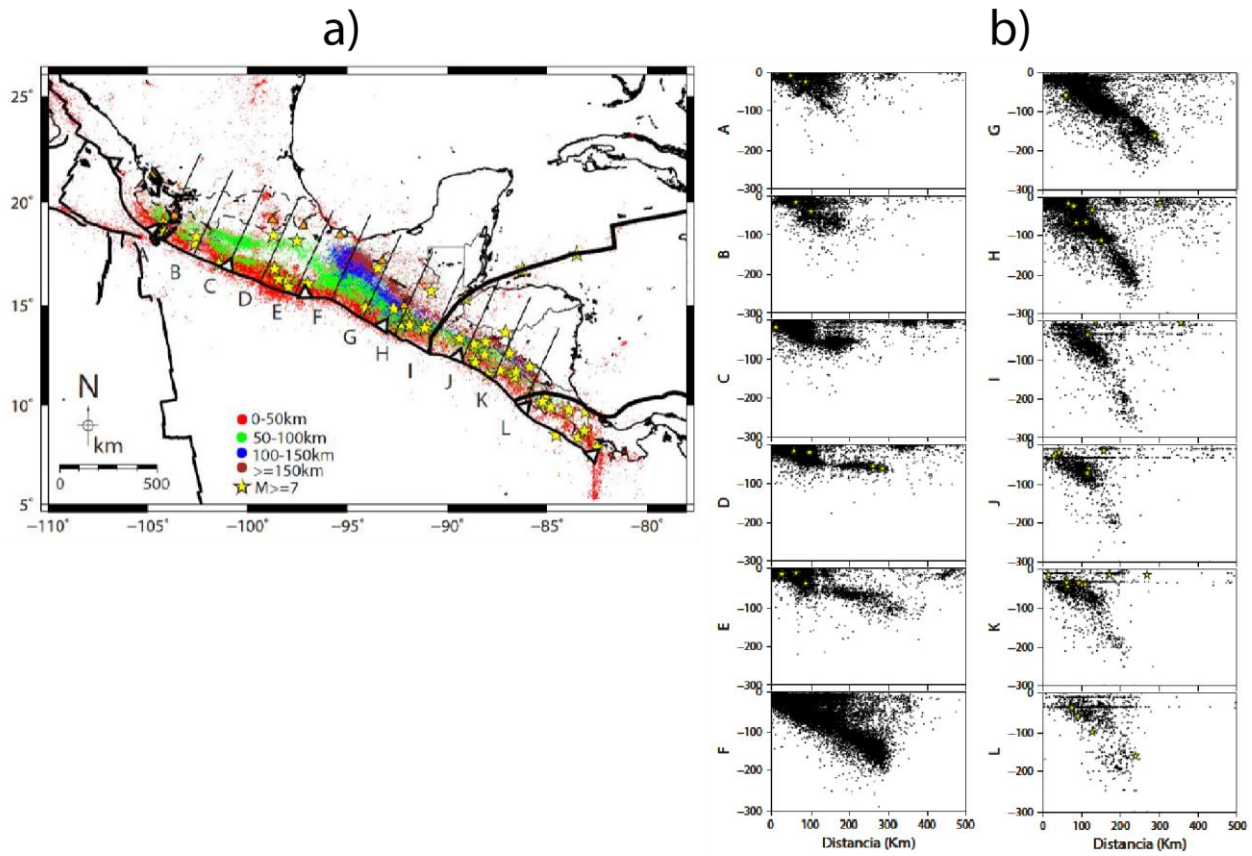


Figura 30. Perfiles sísmicos para México. a) sismicidad de México (catálogos USGS 1970-2017 y SSN 1990-2017), los diferentes colores indican la profundidad, las estrellas indican sismos con $M_W \geq 7$, y las líneas negras son los perfiles en el mapa. b) Perfiles sísmicos.

3.4.2 Regiones

Definimos las regiones con base en las estructuras tectónicas principales y la sismicidad.

Aunque es muy tentador utilizar la zona de la placa de Rivera como una región, esta no tiene suficientes sismos de alta magnitud para estimaciones markovianas; por lo tanto, definimos solamente 3 regiones mostradas en la figura 31.

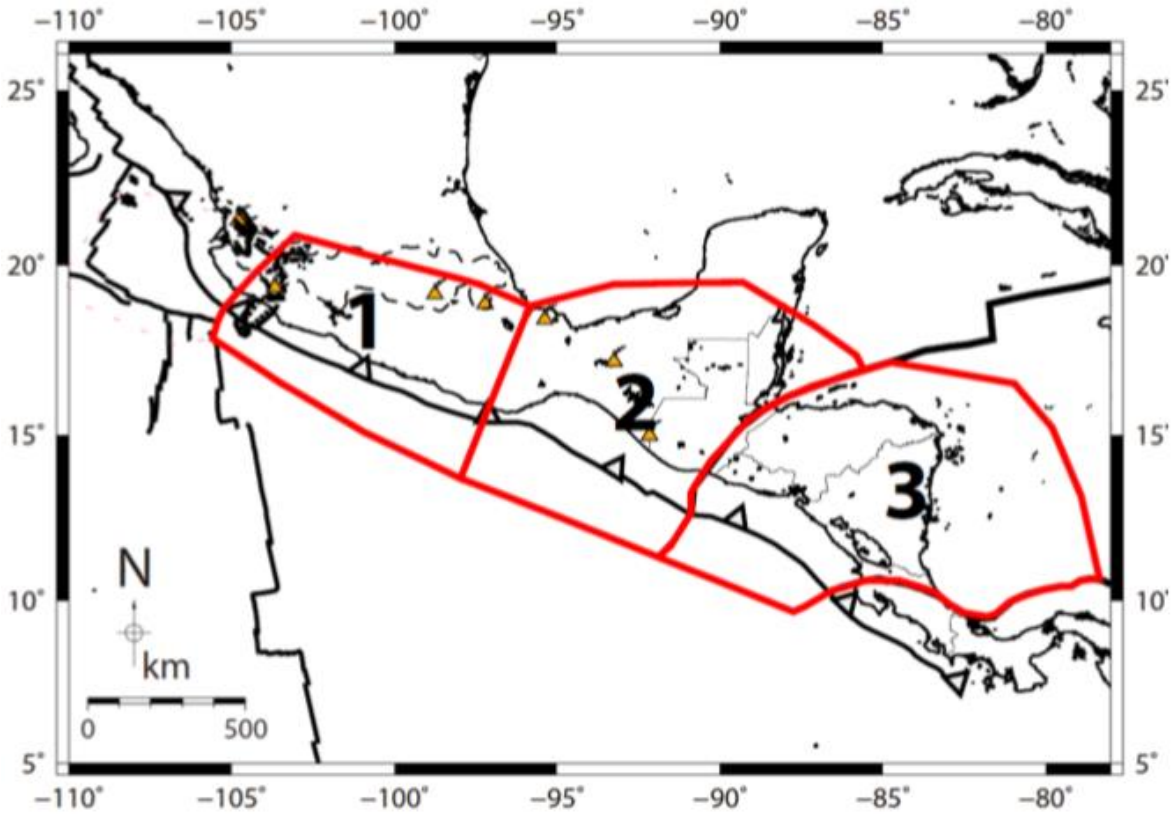


Figura 31. Regiones para México. Líneas rojas indican los límites de las tres regiones, los triángulos naranjas indican volcanes activos.

La región uno corresponde a la sismicidad que hay en el límite entre las placas de Rivera y Cocos, y a la zona donde la subducción de la placa de Cocos es horizontal (perfiles C-E). La región dos abarca desde donde el buzamiento de la placa de Cocos cambia drásticamente (perfil F) hasta el límite entre las placas Norteamericana y la del Caribe. La región tres contiene la sismicidad y las estructuras tectónicas correspondientes a la interacción entre la placa de Cocos y la placa del Caribe.

3.4.3 Peligro markoviano

Usamos dos estrategias para calcular el peligro sísmico para la trinchera mexicana, en ambas estrategias utilizamos el mismo sistema y estados; para la primera estrategia usamos la misma magnitud umbral para todas las regiones. Para la segunda estrategia utilizamos magnitudes umbral distintas para cada región.

3.4.4 Primera estrategia para la trinchera mexicana

Construiremos diferentes modelos utilizando las mismas regiones pero diferentes magnitudes umbral globales, y elegiremos la magnitud umbral que resulte en el mejor compromiso entre markovianidad e incertidumbre.

Usamos datos del catálogo sísmico (1904-2016) del ISC; la magnitud mínima es la misma que usamos para Japón $M_w = 6.5$, y la mayor magnitud para la que tenemos suficientes datos para cumplir con la condición requerida de $\xi_i \geq 2N_s$ es para $M_w = 7.2$

La tabla 3 muestra el número total de transiciones *N*, y las matrices Θ, Ξ, P y π para todas las magnitudes umbral consideradas.

Tabla 3. Las matrices Θ, Ξ, π y *P* para todas las magnitudes umbral consideradas.

M^T	N	Θ			Ξ	**P**			π		
6.5	**155**	**29**	**17**	**16**	**62**	**0.467742**	**0.274194**	**0.258065**	M_6		
		18	**17**	**16**	**51**	**0.352941**	**0.333333**	**0.313725**	**0.392703**	**0.335951**	**0.271345**
		14	**18**	**10**	**42**	**0.333333**	**0.428571**	**0.238095**	**08**		
6.6	**133**	**25**	**15**	**14**	**54**	**0.462963**	**0.277778**	**0.259259**			
		15	**14**	**14**	**43**	**0.348837**	**0.325581**	**0.325581**	**0.397535**	**0.331279**	**0.271186**
		13	**15**	**08**	**36**	**0.361111**	**0.416667**	**0.222222**	**08**		
6.7	**113**	**21**	**12**	**13**	**46**	**0.456522**	**0.260870**	**0.282609**			
		14	**13**	**10**	**37**	**0.378378**	**0.351351**	**0.270270**	**0.397055**	**0.328764**	**0.274181**

		10	12	08	30	0.333333	0.400000	0.266667	06	
6.8	091	18	12	08	38	0.473684	0.315789	0.210526		
		13	10	09	32	0.406250	0.312500	0.281250	0.404321	0.353476	0.242203
		06	10	05	21	0.285714	0.476190	0.238095	07	
6.9	079	18	10	08	36	0.500000	0.277778	0.222222		
		12	07	07	26	0.461538	0.269231	0.269231	0.440400	0.332168	0.227432
		05	09	03	17	0.294118	0.529412	0.176471	08	
7.0	065	11	10	08	29	0.379310	0.344828	0.275862		
		12	03	06	21	0.571429	0.142857	0.285714	0.430556	0.325192	0.244253
		05	08	02	15	0.333333	0.533333	0.133333	12	
7.1	057	09	11	07	27	0.333333	0.407407	0.259259		
		11	01	05	17	0.647059	0.058824	0.294118	0.458090	0.297978	0.243933
		06	05	02	13	0.461538	0.384615	0.153846	16	
7.2	048	08	09	06	23	0.347826	0.391304	0.260870		
		11	02	02	15	0.733333	0.133333	0.133333	0.457355	0.312650	0.229995
		03	04	03	10	0.300000	0.400000	0.300000	11	

De la tabla 3 notamos que para el primer renglón de la matriz *P* las probabilidades p_{11} y p_{12} son consistentemente más grandes que las demás, con p_{11} mayor para $M^T \leq 7.0$ y p_{12} mayor para $M^T \geq 7.1$.

Para el segundo renglón p_{21} siempre es la mayor probabilidad, y tiene valores mayores a 0.5 para $M^T \geq 7.0$.

Para el renglón tres p_{33} siempre tiene el menor valor.

Ahora, para decidir cuál es el mejor modelo, procederemos a evaluar las medidas de markovianidad.

La figura 32 muestra los valores de las siete medidas diferentes para cada magnitud umbral. Otra vez tenemos el problema de juzgar cuál es el mejor modelo.

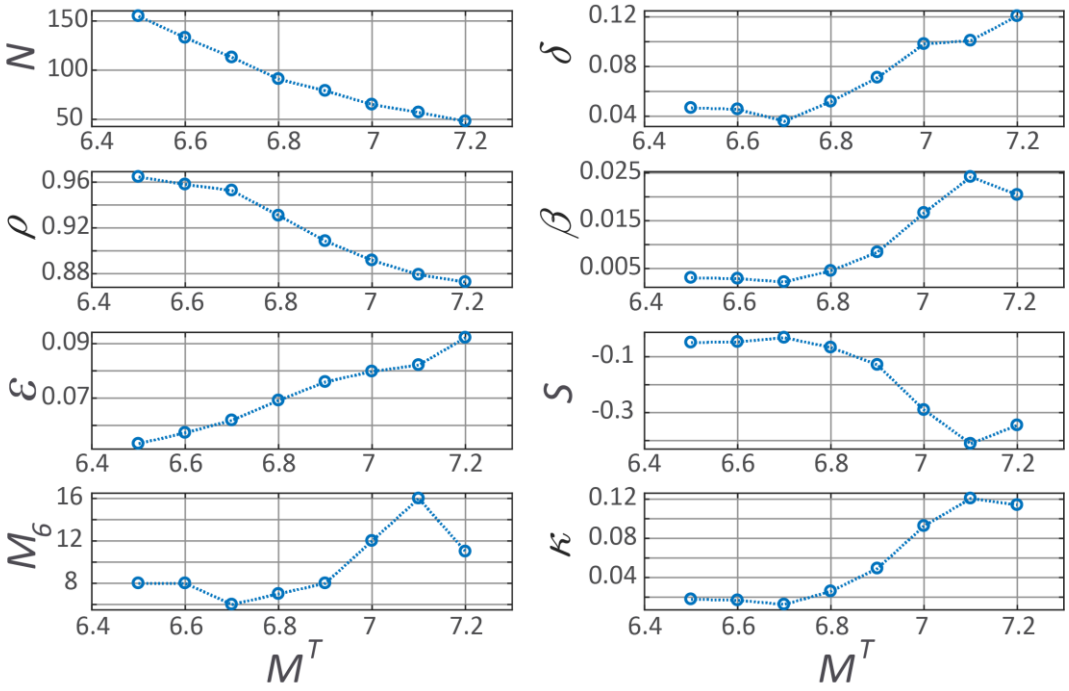


Figura 32. Medidas de markovianidad para México. La parte superior izquierda muestra el número de transiciones para referencia.

La figura 33 muestra las medidas normalizadas. Medidas que dependen más o menos directamente del número de muestras disminuyen conforme aumenta la magnitud, mientras que las medidas de markovianidad presentan valores altos para magnitudes de 7.0 a 7.2.

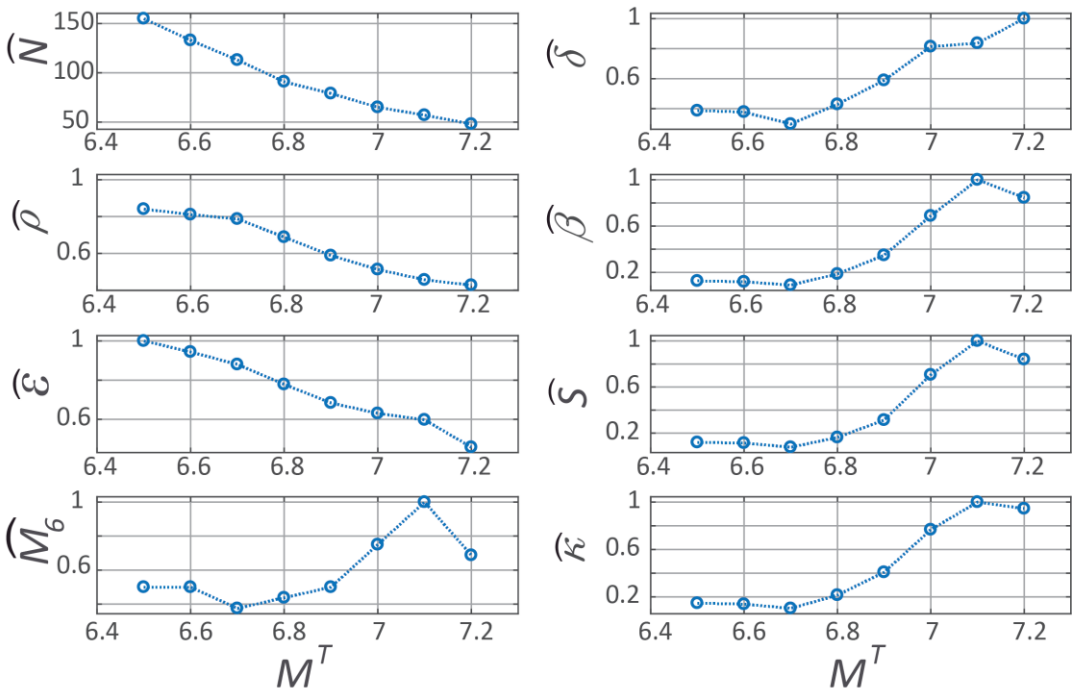


Figura 33. Medidas de markovianidad normalizadas para México. La parte superior izquierda muestra el número de transiciones para referencia.

Aplicamos el discriminante (47) utilizando las medidas normalizadas para las diferentes magnitudes umbral, para elegir la magnitud umbral óptima para la trinchera mexicana. Mostraremos el comportamiento del discriminante para los mismos conjuntos de pesos utilizados para Japón.

La figura 34 muestra los valores del discriminante para pesos iguales para todas las medidas. El valor pico del discriminante es para $M^T = 7.1$.

Considerando a ε como la medida más importante, asignamos a esta medida tres veces la importancia de las otras medidas, lo que da como resultado los valores del discriminante mostrados en la figura 35; la magnitud umbral óptima para este conjunto de pesos es $M^T = 7.1$.

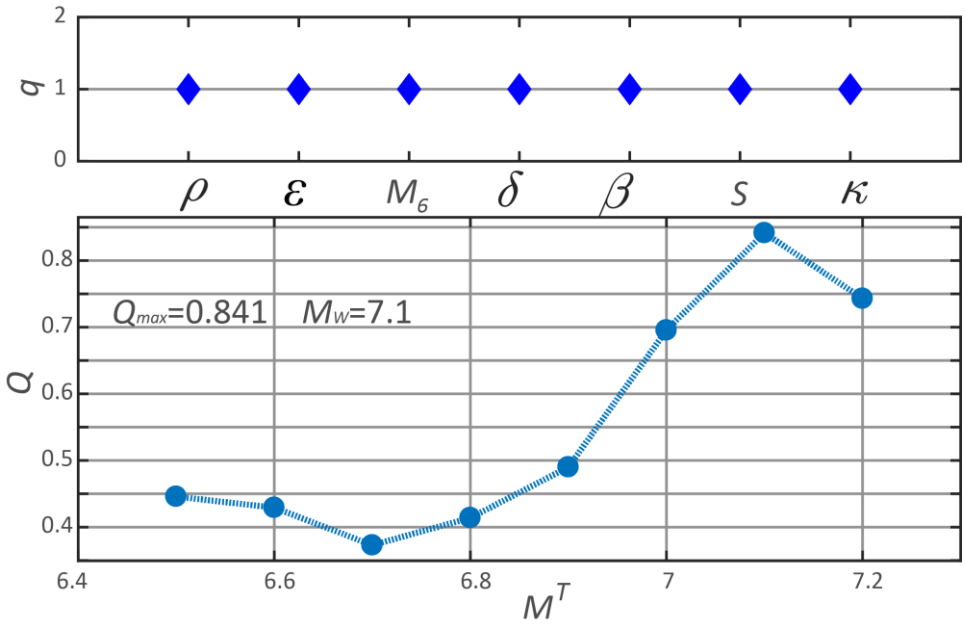


Figura 34. Discriminante para el primer conjunto de pesos para México, primera estrategia. Parte superior: valores de importancia asignados para las medidas $\left(q_\rho = 1,\ q_\varepsilon = 1,\ q_{M_6} = 1,\ q_\delta = 1,\ q_\beta = 1,\ q_S = 1,\ q_\kappa = 1\right)$. Parte inferior: valor del discriminante para cada magnitud umbral.

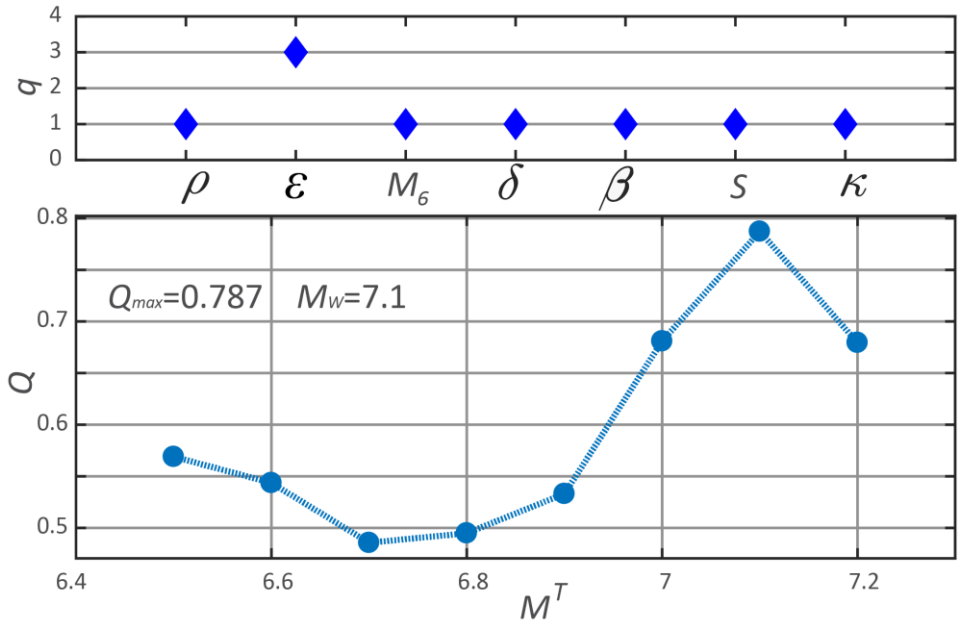


Figura 35. Discriminante para el segundo conjunto de pesos para México, primera estrategia. Parte superior: valores de importancia asignados para las medidas $\left(q_\rho = 1,\ q_\varepsilon = 3,\ q_{M_6} = 1,\ q_\delta = 1,\ q_\beta = 1,\ q_S = 1,\ q_\kappa = 1\right)$. Parte inferior: valor del discriminante para cada magnitud umbral.

Ahora, asignaremos a M_6 dos veces la importancia de las otras medidas. Los valores del discriminante resultantes se muestran en la figura 36, donde otra vez la magnitud óptima es $M^T = 7.1$.

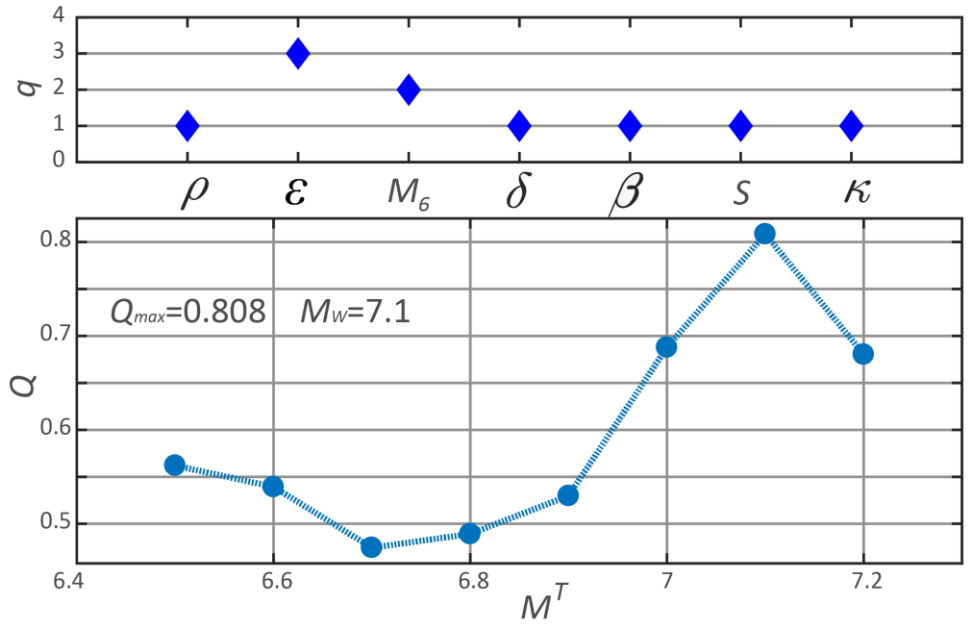


Figura 36. Discriminante para el tercer conjunto de pesos para México, primera estrategia. Parte superior: valores de importancia asignados para las medidas $\left(q_\rho = 1,\ q_\varepsilon = 3,\ q_{M_6} = 2,\ q_\delta = 1,\ q_\beta = 1,\ q_S = 1,\ q_\kappa = 1\right)$. Parte inferior: valor del discriminante para cada magnitud umbral.

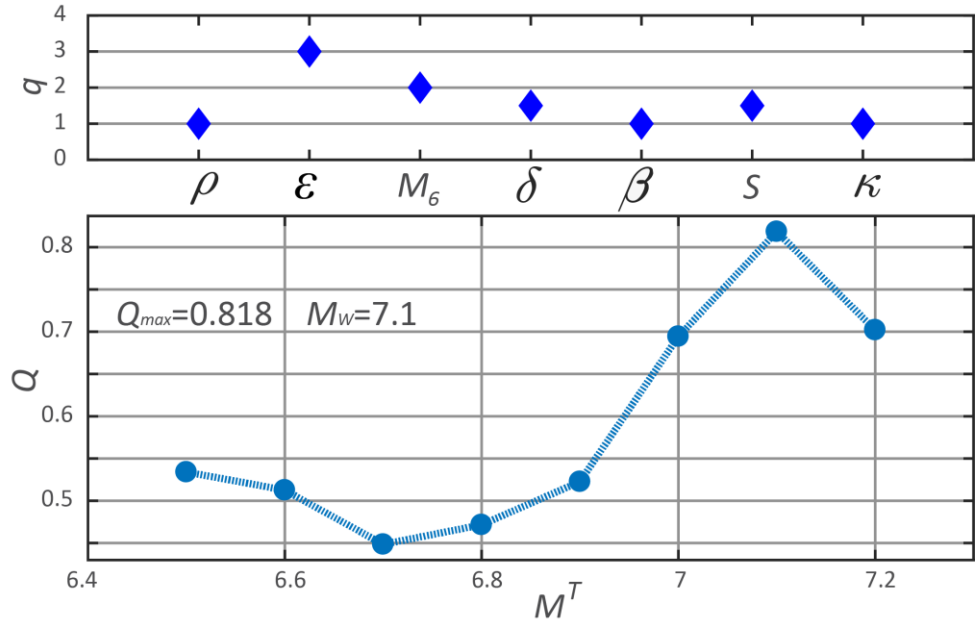


Figura 37. Discriminante para el cuarto conjunto de pesos para México, primera estrategia. Parte superior: valores

de importancia asignados para las medidas $\left(q_\rho = 1,\ q_\varepsilon = 3,\ q_{M_6} = 2,\ q_\delta = 1.5,\ q_\beta = 1,\ q_S = 1.5,\ q_\kappa = 1\right)$. Parte inferior: valor del discriminante para cada magnitud umbral.

Finalmente, presentamos el último conjunto de pesos obtenido del caso anterior, ahora damos a δ y *S* una vez y media la importancia de β y κ. El valor pico del discriminante es para $M^T = 7.1$ (figura 37).

Todos los conjuntos de pesos resultaron en discriminantes con máximo para $M^T = 7.1$, y otros cambios razonables a estos conjuntos de pesos no conducen a alguna otra magnitud umbral preferible, elegimos el conjunto de pesos de la figura 36 como el más simple que toma en cuenta las características más importantes de las diversas medidas, y el modelo con $M^T = 7.1$ como el más confiable.

Por lo tanto, con respecto al peligro sísmico de la trinchera mexicana, podemos decir, con base en la MPT para $M^T = 7.1$, que después de un gran sismo en la región uno, el siguiente probablemente ocurrirá en la región dos; un evento en la región dos probablemente será seguido por un evento en la región uno, pero es bastante improbable que se repita; un evento en la región tres probablemente será seguido por uno en la región dos o en la región uno, pero tiene muy poca probabilidad de repetirse.

3.4.5 Segunda estrategia para la trinchera mexicana

La segunda estrategia para estimar el peligro sísmico para la trinchera mexicana consiste en utilizar magnitudes umbral distintas para cada región, para tener sismicidad lo más homogénea posible sobre todas las regiones.

Usamos el mismo catálogo sísmico y, también usamos las magnitudes umbrales mínimas y máximas (6.5 y 7.2 respectivamente) de la primera estrategia para la trinchera mexicana, para generar los distintos grupos.

Tabla 4. Las matrices Θ, Ξ, π y *P* para todos los grupos considerados.

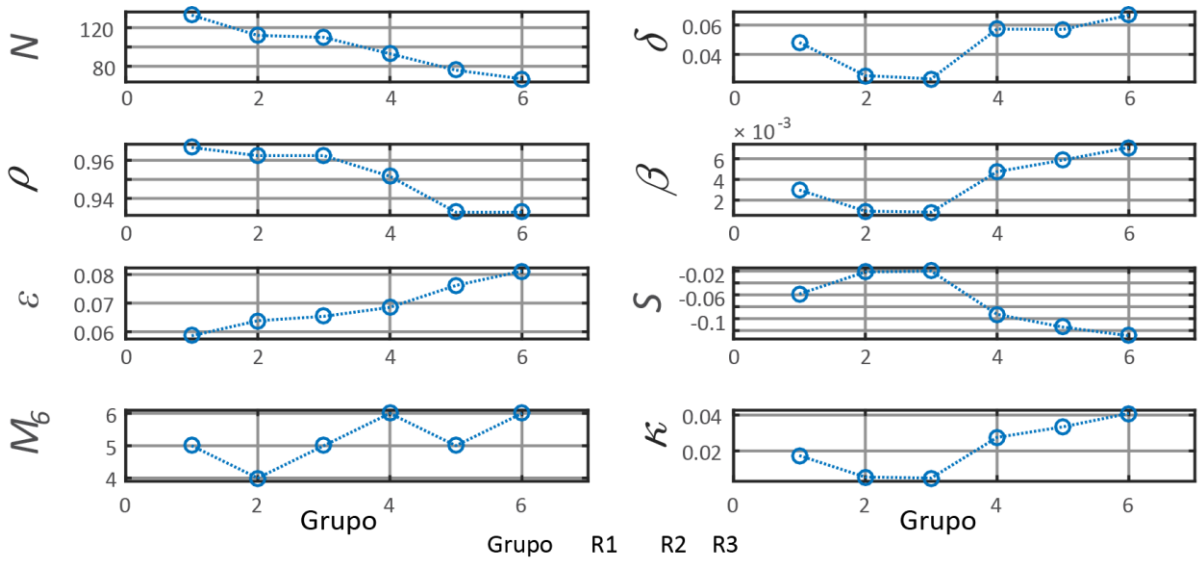
	N	Θ	Ξ	*P*	π M_6
Grupo 1	47	20 13 14		0.425532 0.276596 0.297872	

6.7	6.6	6.5	133	13	14	17	44	0.295455	0.318182	0.386364	0.344853	0.331842	0.323305	
				13	17	12	42	0.309524	0.404762	0.285714	05			
Grupo 2														
				14	11	14	39	0.358974	0.282051	0.358974				
6.8	6.7	6.6	112	13	13	11	37	0.351351	0.351351	0.297297	0.338822	0.331086	0.330092	
				11	13	12	36	0.305556	0.361111	0.333333	04			
Grupo 3														
				12	11	14	37	0.324324	0.297297	0.378378				
6.9	6.7	6.6	110	13	13	11	37	0.351351	0.351351	0.297297	0.327126	0.336948	0.335927	
				11	13	12	36	0.305556	0.361111	0.333333	05			
Grupo 4														
				9	9	12	30	0.300000	0.300000	0.400000				
7.0	6.8	6.7	93	13	9	10	32	0.406250	0.281250	0.312500	0.311253	0.345551	0.343196	
				7	14	10	31	0.225806	0.451613	0.322581	06			
Grupo 5														
				10	9	9	28	0.357143	0.321429	0.321429				
7.1	6.9	6.8	76	12	7	7	26	0.461538	0.269231	0.269231	0.353745	0.343755	0.302500	
				5	10	7	22	0.227273	0.454545	0.318182	05			
Grupo 6														
				7	7	9	23	0.304348	0.304348	0.391304				
7.2	7.0	6.8	67	10	5	7	22	0.454545	0.227273	0.318182	0.327581	0.330281	0.342139	
				5	10	7	22	0.227273	0.454545	0.318182	06			

La tabla 4 muestra las distintas magnitudes umbral de cada grupo, el número total de transiciones *N*, y las matrices Q, X, P y D para todos los grupos considerados.

Para decidir cuál es el modelo óptimo, procederemos a evaluar las medidas de estabilidad, exactitud y markovianidad.

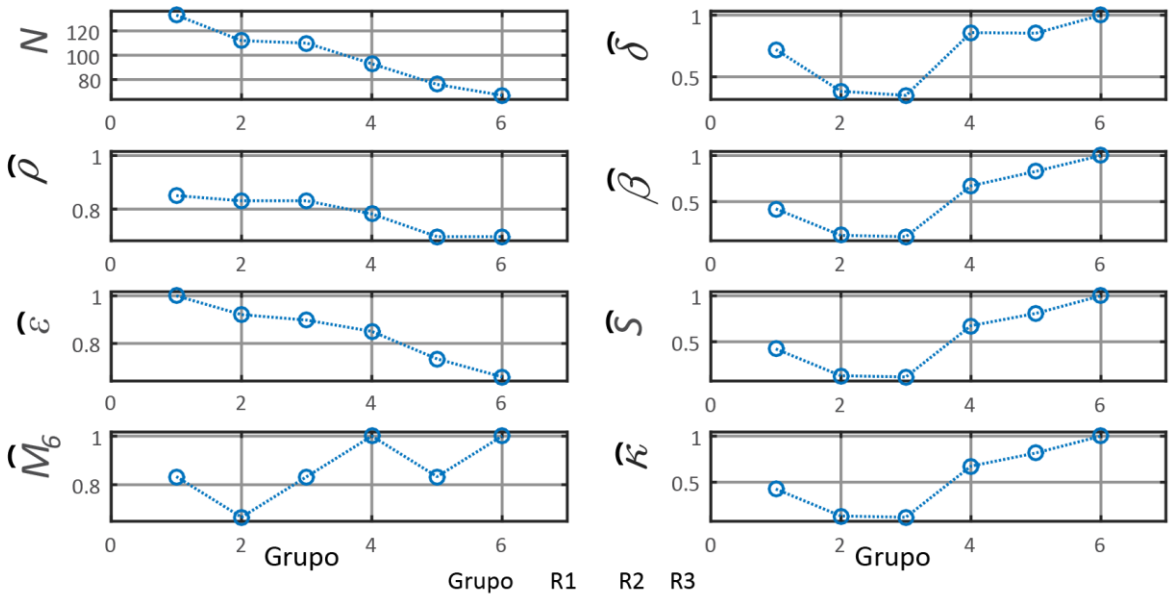
La figura 38 muestra los valores de las siete medidas para los seis grupos.



Grupo	R1	R2	R3
1	6.7	6.6	6.5
2	6.8	6.7	6.6
3	6.9	6.7	6.6
4	7.0	6.8	6.7
5	7.1	6.9	6.8
6	7.2	7.0	6.8

Figura 38. Medidas de markovianidad para México, segunda estrategia. La gráfica superior izquierda muestra el número de transiciones para referencia.

La figura 39 muestra las medidas normalizadas para la segunda estrategia; aquí también para todas ellas los valores altos son deseables y los valores bajos son indeseables.



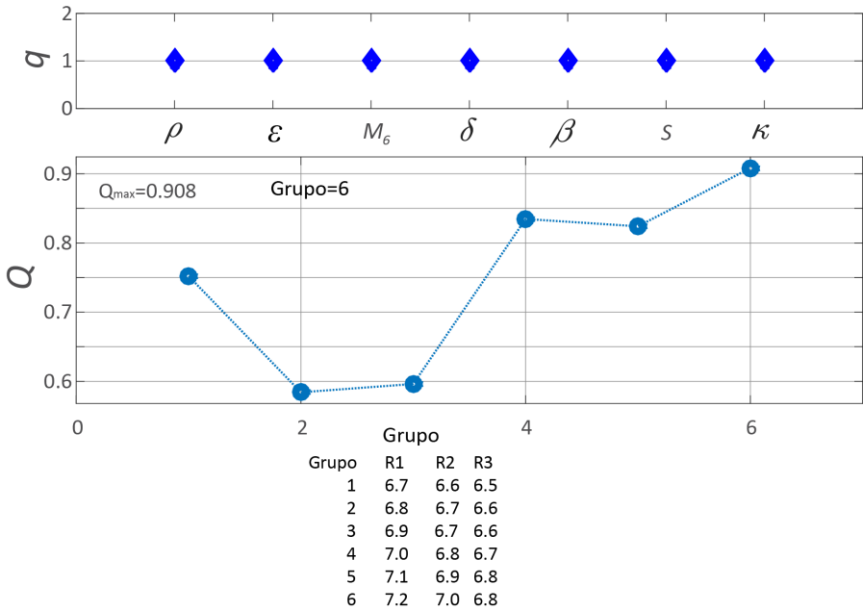
Grupo	R1	R2	R3
1	6.7	6.6	6.5
2	6.8	6.7	6.6
3	6.9	6.7	6.6
4	7.0	6.8	6.7
5	7.1	6.9	6.8
6	7.2	7.0	6.8

Figura 39. Medidas de markovianidad normalizadas para México, segunda estrategia. La gráfica superior izquierda muestra el número de transiciones para referencia.

Ahora aplicaremos el discriminante (47) utilizando las medidas normalizadas de la figura 39 para los diferentes grupos, para elegir el grupo óptimo. Mostraremos el comportamiento del discriminante para los mismos conjuntos de pesos de la primera estrategia.

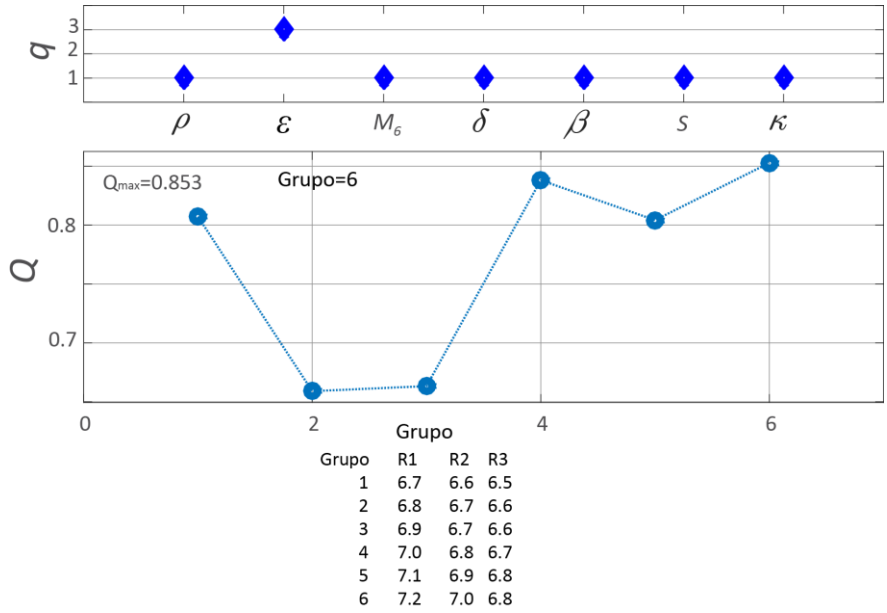
La figura 40 muestra los valores del discriminante para pesos iguales para todas las medidas. El valor pico del discriminante es para el grupo 6.

La figura 41 muestra los valores del discriminante considerando el conjunto de pesos de la figura 35, el grupo óptimo para este conjunto de pesos es para el grupo 6.



Grupo	R1	R2	R3
1	6.7	6.6	6.5
2	6.8	6.7	6.6
3	6.9	6.7	6.6
4	7.0	6.8	6.7
5	7.1	6.9	6.8
6	7.2	7.0	6.8

Figura 40. Discriminante para el primer conjunto de pesos para México, segunda estrategia. Parte superior: valores de importancia asignados para las medidas $\left(q_\rho = 1,\ q_\varepsilon = 1,\ q_{M_6} = 1,\ q_\delta = 1,\ q_\beta = 1,\ q_S = 1,\ q_\kappa = 1,\right)$. Parte inferior: valor del discriminante para cada grupo.

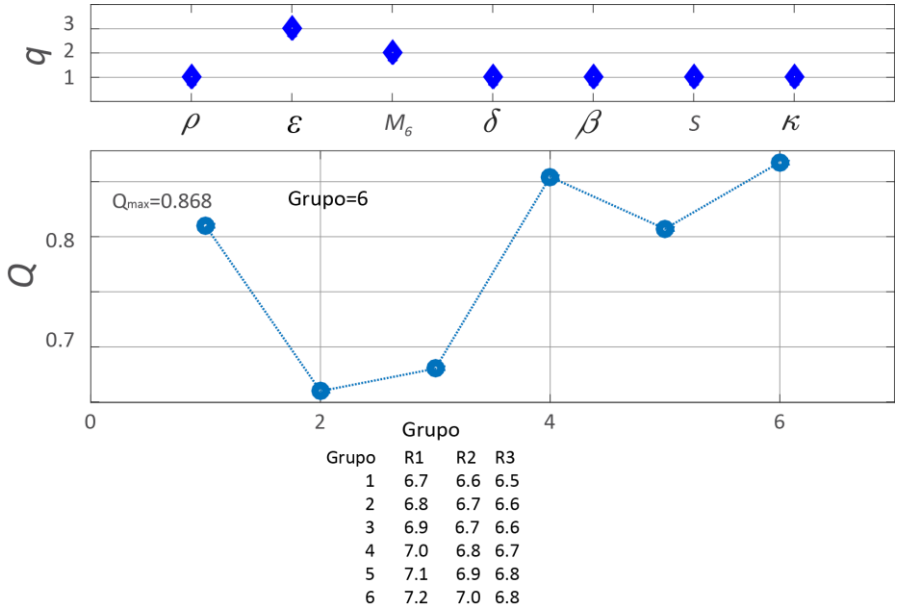


Grupo	R1	R2	R3
1	6.7	6.6	6.5
2	6.8	6.7	6.6
3	6.9	6.7	6.6
4	7.0	6.8	6.7
5	7.1	6.9	6.8
6	7.2	7.0	6.8

Figura 41. Discriminante para el segundo conjunto de pesos para México, segunda estrategia. Parte superior: valores de importancia asignados para las medidas $\left(q_\rho = 1,\ q_\varepsilon = 3,\ q_{M_6} = 1,\ q_\delta = 1,\ q_\beta = 1,\ q_S = 1,\ q_\kappa = 1,\right)$. Parte inferior: valor del discriminante para cada grupo.

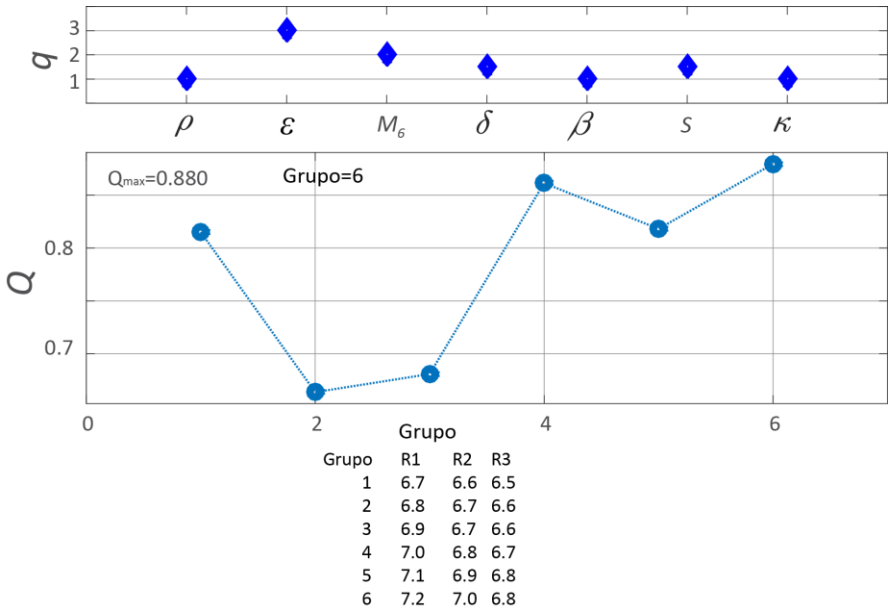
La figura 42 muestra los valores del discriminante considerando el conjunto de pesos de la figura 36, el grupo óptimo para este conjunto de pesos es para el grupo 6.

Finalmente, en la figura 43 presentamos el último conjunto de pesos derivados de la figura 37, el valor pico para el discriminante también es para el grupo 6.



Grupo	R1	R2	R3
1	6.7	6.6	6.5
2	6.8	6.7	6.6
3	6.9	6.7	6.6
4	7.0	6.8	6.7
5	7.1	6.9	6.8
6	7.2	7.0	6.8

Figura 42. Discriminante para el tercer conjunto de pesos para México, segunda estrategia. Parte superior: valores de importancia asignados para las medidas $\left(q_{\rho}=1,\ q_{\varepsilon}=3,\ q_{M_6}=2,\ q_{\delta}=1,\ q_{\beta}=1,\ q_{S}=1,\ q_{\kappa}=1,\right)$. Parte inferior: valor del discriminante para cada grupo.



Grupo	R1	R2	R3
1	6.7	6.6	6.5
2	6.8	6.7	6.6
3	6.9	6.7	6.6
4	7.0	6.8	6.7
5	7.1	6.9	6.8
6	7.2	7.0	6.8

Figura 43. Discriminante para el cuarto conjunto de pesos para México, segunda estrategia. Parte superior: valores de importancia asignados para las medidas $\left(q_{\rho}=1,\ q_{\varepsilon}=3,\ q_{M_6}=2,\ q_{\delta}=1.5,\ q_{\beta}=1,\ q_{S}=1.5,\ q_{\kappa}=1,\right)$. Parte inferior: valor del discriminante para cada grupo.

Se puede apreciar que todos los conjuntos de pesos resultaron en discriminantes con un máximo para el grupo 6, elegimos el conjunto de pesos de la figura 42, y el modelo para el grupo 6 como el más confiable.

Por lo tanto, con respecto al peligro sísmico de la trinchera mexicana para la segunda estrategia, podemos decir de la MPT para el grupo 6 ($M_W=7.2,\ M_W=7.0,\ M_W=6.8$, para las regiones 1, 2 y 3 respectivamente) que: después de un sismo en la región uno, el siguiente probablemente ocurrirá en la región tres; un evento en la región dos probablemente será seguido por un evento en la región 1; un evento en la región tres probablemente será seguido por un evento en la región 2 o, con una probabilidad menor, se repetirá.

Nuestras medidas y el discriminante para la segunda estrategia nos indican que, todas las medidas de markovianidad tienen valores bajos para los grupos del 1 al 3; a partir del grupo 4 los valores de markovianidad incrementan notoriamente.

3.4.6 Conclusiones para la trinchera mexicana

El discriminante y las medidas de markovianidad coinciden para ambas estrategias en que, para sismos con $M_w < 7.0$ el sistema es menos markoviano que para sismos con $M_w \geq 7.0$.

El modelo con el mejor compromiso entre markovianidad y número de transiciones de la primera y segunda estrategia, es para la magnitud umbral $M^T = 7.1$ y el grupo 6 respectivamente.

Un inconveniente de la aplicación del método a la trinchera mexicana es la poca cantidad de datos disponibles, ya que, los resultados son poco confiables; pero a pesar de esto, los resultados obtenidos para la trinchera mexicana respecto a la magnitud umbral óptima coinciden con los resultados para Japón.

Capítulo 4. Modelo semi-markoviano

4.1 Sistema semi-markoviano

Dado que sismos muy grandes producen cambios de esfuerzos y deformación que pueden modificar el movimiento de las placas tectónicas, podemos especular si la influencia de tal evento puede extenderse sobre más de un paso. Por lo tanto, exploraremos un sistema, que llamaremos semi-markoviano, para el cual las probabilidades de transición dependen no solamente del estado actual sino también del estado inmediatamente anterior.

Sea $k(n)$ el estado del sistema en la prueba número *n*, entonces

$$\Pr\left[k(n+1) \mid k(n), k(n-1), \ldots, k(0)\right] = \Pr\left[k(n+1) \mid k(n), k(n-1)\right], \tag{54}$$

i.e., el sistema no tiene memoria sobre estados que han ocurrido antes del estado actual y el estado previo a éste; tiene memoria de UN PASO. Sean $k(n-1) = h$, $k(n) = i$ y $k(n+1) = j$, entonces si las probabilidades de transición entre estados son siempre las mismas, independientemente de la realización, la cadena de Markov es homogénea, y podemos escribir

$$\Pr\left[k(n+1) = j \mid k(n) = i, k(n-1) = h\right] = \hat{p}_{hij}, \tag{55}$$

donde el sombrero denota probabilidad exacta o teórica.

Considerando todas las posibles transiciones entre estados, las probabilidades de transición son representables como una matriz cúbica $N_S \times N_S \times N_S$

$$\hat{P} = \left[\hat{p}_{hij}; h, i, j = 1, \ldots, N_S\right]. \tag{56}$$

Podemos visualizar a $\hat{P}$ como un conjunto de N_S "páginas" cada una de las cuales es una matriz cuadrada que corresponde al estado *h* ocurrido antes de la transición de *i* a *j* (figura 44).

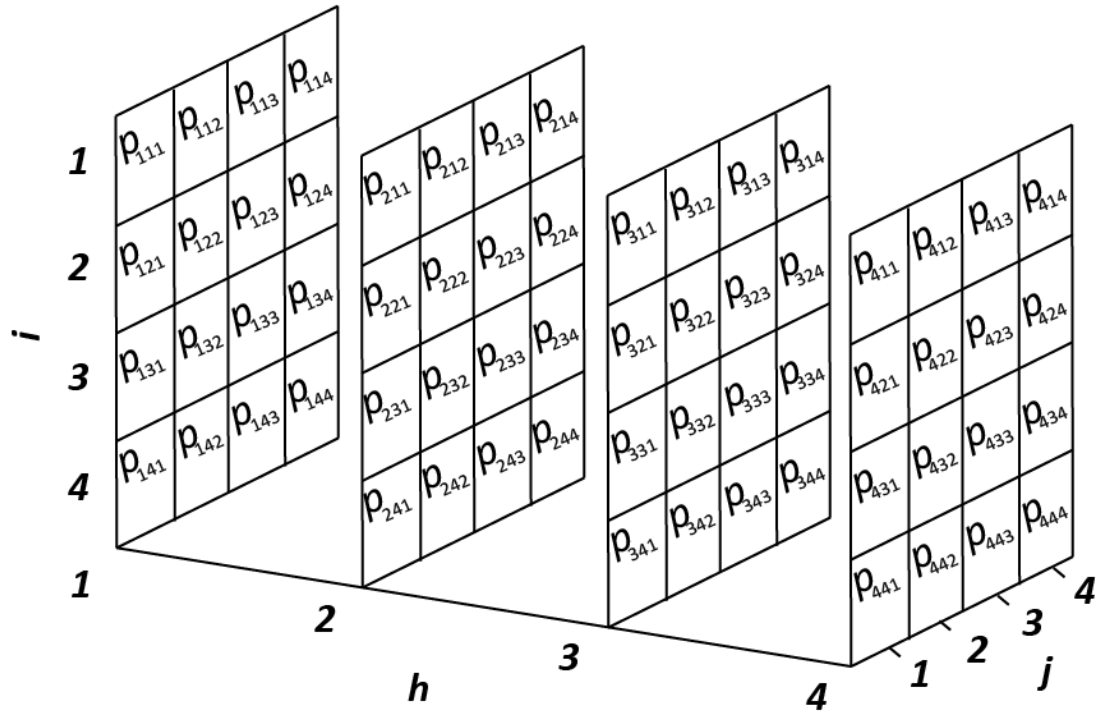


Figura 44. Matriz de probabilidades de transición semi-markoviana para $N_S = 4$.

4.2 Probabilidades semi-markovianas a múltiples pasos

La probabilidad $\hat{p}^{(2)}_{hij}$ a dos pasos es la probabilidad que

en dos pasos el estado *j* sea alcanzado, dado que el estado actual es *i* y el estado anterior fue *h*. Construiremos esta probabilidad a partir de la suma de las probabilidades de todos los caminos posibles que comienzan en *i*, con *h* como estado previo, y alcanzado *j* después de dos pasos:

$$\hat{p}^{(2)}_{hij} = \sum_{m=1}^{N_S} \hat{p}_{him}\hat{p}_{imj}; \forall h,i,j, = 1,\ldots,N_S \,. \tag{57}$$

Definimos el producto de dos de estas matrices de probabilidad de transición cúbicas particulares $\hat{P}$ como el algoritmo (57), donde el factor $\hat{p}_{him}$ pertenece a la primera matriz y el factor $\hat{p}_{imj}$ pertenece a la

segunda, así que

$$\hat{P}^{(2)} = \hat{P}^2. \tag{58}$$

La probabilidad a tres pasos será, asimismo, la suma de probabilidades para todos los caminos posibles de tres pasos entre el estado *i* y el estado *j*, dado que el estado previo a *i* fue *h*:

$$\begin{aligned} \hat{p}_{hij}^{(3)} &= \sum_{m=1}^{N_S}\sum_{n=1}^{N_S} \hat{p}_{him}\hat{p}_{imn}\hat{p}_{mnj}; \quad h,i,j = 1,\ldots,N_S, \\ \hat{p}_{hij}^{(3)} &= \sum_{m=1}^{N_S} \hat{p}_{him}\sum_{n=1}^{N_S} \hat{p}_{imn}\hat{p}_{mnj} = \sum_{m=1}^{N_S} \hat{p}_{him}\hat{p}_{imj}^{(2)}; \end{aligned} \tag{59}$$

así que

$$\hat{P}^{(3)} = \hat{P}\,\hat{P}^{(2)} = \hat{P}\,\hat{P}^2 = \hat{P}^3, \tag{60}$$

de acuerdo a nuestra definición de producto.

Puede ser probado por inducción (hecho, pero no mostrado aquí) que

$$\hat{P}^{(q+1)} = \hat{P}\,\hat{P}^{(q)} = \hat{P}^{q+1}, \quad q. \tag{61}$$

Note que

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(2)}\hat{P} &= \sum_m \hat{p}_{him}^{(2)}\hat{p}_{imj} = \sum_m\sum_n \hat{p}_{hin}\hat{p}_{inm}\hat{p}_{imj} = \sum_n \hat{p}_{hin}\sum_m \hat{p}_{inm}\hat{p}_{imj} \\ &1 \sum_n \hat{p}_{hin}\sum_m \hat{p}_{inm}\hat{p}_{nmj} = \sum_m \hat{p}_{him}\hat{p}_{imj}^{(2)} = \hat{P}\,\hat{P}^{(2)} \end{aligned},$$

i.e. nuestro producto de la matriz semi-markoviana no es conmutativo porque la última suma en el primer renglón no corresponde a nuestra definición de producto.

Sean $k(m-1) = h$ y $k(m) = i$, entonces la probabilidad de que *n* pasos después el sistema esté en el estado $k(m+n) = j$, es

$$\Pr\left[k(m+n) = j \mid k(m) = i, k(m-1) = h\right] = \hat{p}_{hij}^{(n)}, \tag{62}$$

donde $\hat{p}_{hij}^{(n)}$ es el elemento (*h*, *i*, *j*) de la matriz $\hat{P}^n$.

Si existen números $\hat{p} = \left[\hat{p}_j ; j = 1, \ldots, N_S \right]$ tales que

$$\lim_{n \to \infty} \hat{p}_{hij}^{(n)} = \hat{p}_j , \quad h, i , \tag{63}$$

con

$$\sum_{j=1}^{N_S} \hat{p}_j = 1 . \tag{64}$$

Entonces en el límite las probabilidades de transición son

$$\lim_{n \to \infty} \hat{P}^n = \hat{P} ; \quad \hat{P} = \left[\hat{p}_{hij} = \hat{p}_j ; h, i, j = 1, \ldots, N_S \right], \tag{65}$$

de manera que ya no dependen del estado actual ni del estado previo. Entonces, el sistema representado por la matriz cúbica de transición es ergódico, y las probabilidades $\hat{p}_j$ son llamadas probabilidades estacionarias.

4.3 Estimación empírica de probabilidades de transición semi-markovianas

Sea $\{ k(n) ; n = -1, 0, 1, 2, \ldots, N \}$ la cadena de semi-Markov observada con *N*+2 ocurrencias de estados, ordenadas en el tiempo, donde $k(n)$ es el estado del sistema en el paso o número de prueba *n*.

4.3.1 Transiciones y probabilidades semi-markovianas

Sea q_{hij} el número de veces que una transición del estado *i* al estado *j*, con el estado *h* siendo el estado antes de *i*, es observado; de las *N* transiciones observadas (la primer transición observada es del segundo al tercer estado que ocurre); construimos la matriz de transiciones cúbica $N_S \times N_S \times N_S$ observada

(figura 45)

$$Q = \left\{ q_{hij};\ h, i, j = 1, \ldots, N_S \right\}; \tag{66}$$

que consta de N_S páginas, cada página corresponde al estado *h* que ocurre antes de la transición de *i* a *j* y muestra el número de transiciones de *i* a *j* que ocurren después de *h*.

Sea Ξ la matriz con elementos

$$x_{hi} = \sum_{j=1}^{N_S} q_{hij}, \tag{67}$$

que contabiliza cuántas transiciones iniciaron de *i* después de *h*. Entonces

$$p_{hij} = \frac{q_{hij}}{x_{hi}}, \tag{68}$$

por lo que

$$\sum_{j=1}^{N_S} p_{hij} = 1, \quad h, i, \tag{69}$$

i.e. cada página es una matriz de probabilidad.

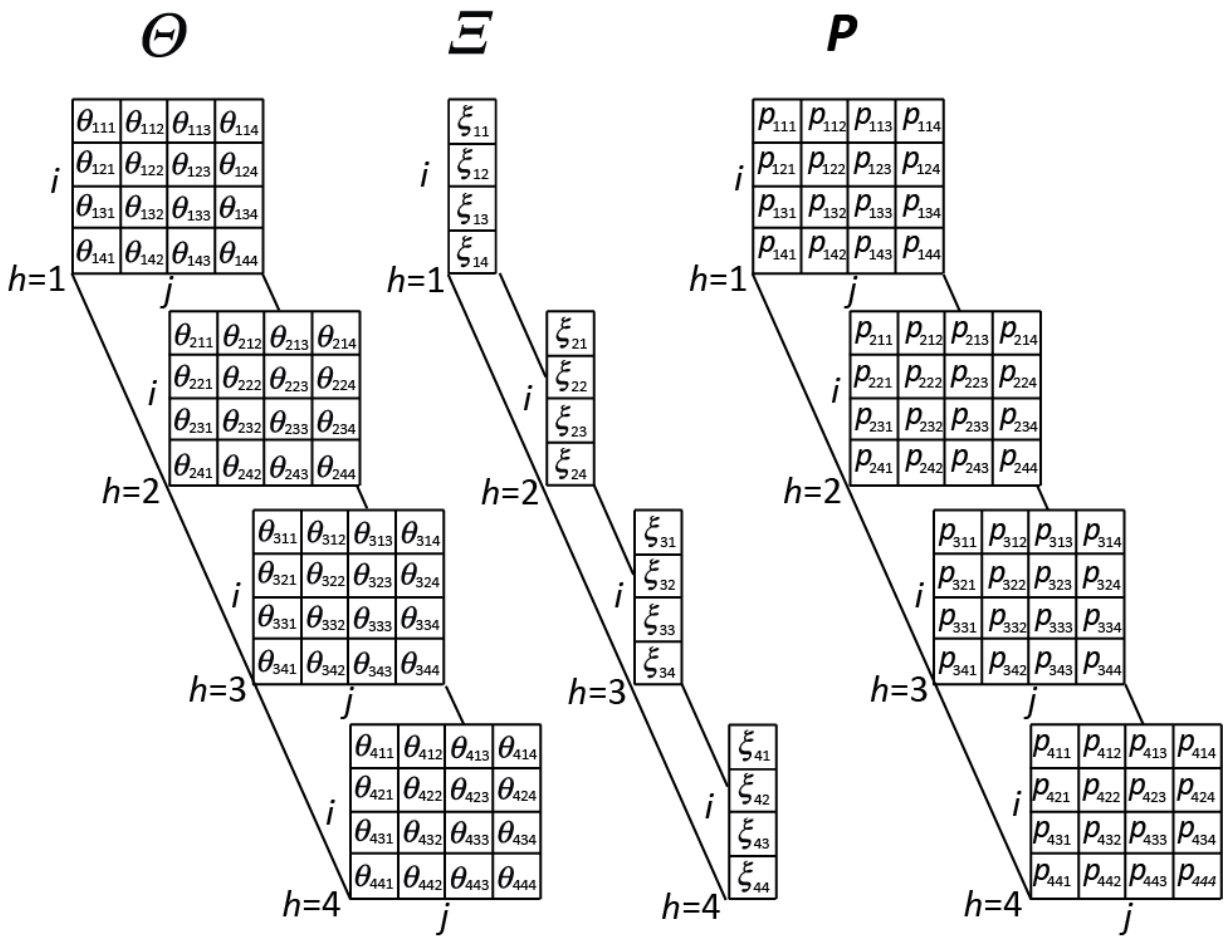


Figura 45. Matrices Q, X y *P* semi-markovianas para $N_s = 4$.

4.3.2 Probabilidades empíricas semi-markovianas a múltiples pasos

Igual que, como para Markov, las probabilidades estacionarias empíricas, aproximadas, semi-markovianas, Π , son obtenidas de P^n después de un número finito de pasos, *n*, cuando la convergencia es alcanzada para una precisión dada (i.e., para un número dado de decimales). En lo que sigue consideraremos precisión de seis decimales.

4.4 Markovianidad para sistemas semi-markovianos

En esta sección podríamos definir nuevamente las medidas de robustez, incertidumbre y markovinidad del capítulo 2, pero ahora para sistemas semi-markovianos; no lo haremos pero el lector puede hacerlo simplemente adaptando nuestras medidas para matrices cúbicas; la razón por la que no desarrollaremos este tema es por la poca disponibilidad de datos que existe, como se mostró en el capítulo 3, la cantidad de sismos grandes con dificultad cumplió la cantidad mínima de transiciones solicitada; esa misma cantidad de transiciones tendría que ser repartida en la matriz cúbica de $4\times4\times4$ para sistemas semi-markovianos, por lo tanto, habría varios renglones de la matriz Q que no cumplirían con la cantidad de transiciones mínima, y también podrían existir renglones con cero transiciones.

Capítulo 5. Sistema semi-markoviano: Aplicación y Resultados

Ahora procedemos a estimar la cadena semi-markoviana, la matriz de transiciones y la MPT para un sistema semi-markoviano; el área de estudio, las cuatro regiones y el catálogo sísmico serán los mismos que utilizamos en el capítulo 3. Como se verá más adelante la estimación del peligro sísmico semi-markoviano no es confiable por la poca cantidad de datos disponibles.

5.1 Sistema y estados

El sistema semi-markoviano considerado es la misma área geográfica sísmicamente activa del capítulo 3, dividida en $N_S = 4$ regiones y cada estado del sistema semi-markoviano corresponde a la región donde ha ocurrido el último gran sismo (por encima de un umbral de magnitud dado M^T). Para el sistema semi-markoviano las probabilidades de transición dependen no solamente del estado actual sino también del estado inmediatamente anterior. Por ejemplo, si los dos últimos grandes sismos ocurrieron en las regiones número uno y tres, y si el siguiente gran sismo ocurre en la región número dos, habrá ocurrido una transición del estado tres al dos, con el estado uno siendo el estado anterior al tres, y el sistema ahora estará en el estado dos.

5.2 Aplicación

Para la estimación del peligro sísmico semi-markoviano para Japón usamos la misma magnitud umbral para todas las regiones. Construiremos diferentes modelos utilizando las mismas regiones para diferentes magnitudes umbral globales. Usaremos el mismo catálogo sísmico de la sección 3.3.5.

La tabla 5 muestra el número total de transiciones *N*, y las matrices Q y X; la tabla 6 muestra las matrices *P* y p para todas las magnitudes umbral consideradas; Nótese que, aunque *P* expresa los resultados finales del estudio, conocer Q o *N* y X; es esencial para evaluar los resultados.

Tabla 5. Número total de transiciones *N*, y las matrices Θ y Ξ ; para todas las magnitudes umbral consideradas.

M_T	N	$q_{1\,ij}$	$x_{1\,i}$	$q_{2\,ij}$	$x_{2\,i}$	$q_{3\,ij}$	$x_{3\,i}$	$q_{4\,ij}$	$x_{4\,i}$
6.5	448	19 12 09 05	45	15 14 07 06	42	08 03 02 01	14	03 09 03 04	19
		12 11 04 11	38	11 18 09 10	48	10 09 04 05	28	09 10 08 11	38
		01 04 09 07	21	02 11 06 06	25	07 09 07 02	25	04 04 03 03	14
		03 06 02 05	16	09 14 05 09	37	03 07 04 03	17	04 10 03 04	21
6.6	374	13 10 05 06	34	10 13 07 02	32	06 03 02 01	12	05 07 03 03	18
		09 07 08 09	33	06 12 09 11	38	10 09 04 03	26	07 10 04 08	29
		00 04 07 06	17	03 11 06 05	25	07 06 07 02	22	02 05 02 01	10
		03 03 01 05	12	09 09 04 09	31	03 05 02 03	13	03 11 03 05	22
6.7	316	08 09 03 06	26	08 12 05 04	29	07 03 02 01	13	03 08 03 02	16
		09 07 06 10	32	07 13 06 08	34	05 08 02 02	17	08 06 03 08	25
		03 03 03 04	13	02 07 06 02	17	05 05 06 01	17	03 02 02 02	09
		03 04 00 06	13	07 07 04 10	28	02 02 02 02	08	04 11 03 01	19
6.8	252	05 07 05 04	21	08 14 03 02	27	06 02 02 02	12	02 02 01 03	08
		08 07 05 05	25	07 13 05 07	32	04 06 00 02	12	08 06 02 06	22
		04 01 02 04	11	01 06 03 02	12	03 03 05 00	11	04 02 01 02	09
		01 03 01 06	11	01 07 07 05	20	02 04 01 00	07	04 07 00 01	12
6.9	211	04 05 02 04	15	05 11 04 02	22	02 04 01 02	09	04 02 02 03	11
		06 08 05 03	22	06 06 04 07	23	05 03 01 03	12	05 06 02 04	17
		03 02 02 02	09	02 04 04 01	11	03 03 05 00	11	01 03 00 02	06
		01 03 01 06	11	04 05 05 03	17	02 03 00 00	05	04 05 00 01	10
7	172	02 04 02 02	10	06 11 03 02	22	01 05 01 02	09	01 03 01 02	07
		08 08 04 03	23	06 03 03 04	16	03 01 01 01	06	05 04 02 03	14
		03 00 03 01	07	03 02 03 02	10	03 02 04 01	10	00 02 00 01	03
		01 02 01 04	08	02 04 01 04	11	02 02 01 00	05	02 06 00 03	11
7.1	133	02 05 01 01	09	05 05 02 02	14	01 04 02 01	08	01 03 01 02	07
		05 04 04 04	17	05 05 01 03	14	03 01 01 01	06	01 04 02 02	09
		02 01 03 00	06	03 01 03 01	08	03 03 05 00	11	00 01 00 00	01
		01 01 01 03	06	04 04 00 02	10	01 00 00 00	01	01 04 00 01	06
7.2	104	03 03 02 01	09	03 05 01 03	12	01 02 00 00	03	02 01 01 02	06
		04 03 01 03	11	04 01 00 03	08	03 01 00 01	05	01 03 04 02	10
		00 00 02 01	03	02 02 01 01	06	01 03 04 00	08	00 00 01 00	01
		01 02 01 02	06	02 05 00 02	09	02 00 00 00	02	01 03 00 01	05
7.3	81	01 02 03 02	08	04 05 00 03	12	01 02 00 00	03	02 00 00 01	03
		05 02 01 01	09	03 01 00 02	06	03 01 00 01	05	01 02 02 02	07
		01 00 01 00	02	02 02 00 00	04	00 03 01 00	04	00 00 02 00	02
		01 03 02 00	06	00 02 00 04	06	00 00 00 00	00	02 02 00 00	04
7.4	67	01 03 02 01	07	03 03 01 03	10	01 01 00 01	03	02 01 00 00	03
		05 01 01 01	08	01 01 00 02	04	03 00 00 00	03	01 02 01 02	06

01	01	00	00	02	01	01	00	01	03	00	01	00	00	01	01	00	01	00	02
00	03	02	00	05	02	01	00	02	05	00	00	00	01	01	01	02	00	01	04

Tabla 6. Matrices *P* y p ; para todas las magnitudes umbral consideradas.

M^T p_{12} p_{23} p M_6

0.422222	0.266667	0.200000	0.111111	0.357143	0.333333	0.166667	0.142857				
0.315789	0.289474	0.105263	0.289474	0.229167	0.375000	0.187500	0.208333				
0.047619	0.190476	0.428571	0.333333	0.080000	0.440000	0.240000	0.240000				
0.187500	0.375000	0.125000	0.312500	0.243243	0.378378	0.135135	0.243243				
6.5								0.267733	0.337300	0.189801	0.205165
								16			

p_{13} p_{24}

0.571429	0.214286	0.142857	0.071429	0.157895	0.473684	0.157895	0.210526				
0.357143	0.321429	0.142857	0.178571	0.236842	0.263158	0.210526	0.289474				
0.280000	0.360000	0.280000	0.080000	0.285714	0.285714	0.214286	0.214286				
0.176471	0.411765	0.235294	0.176471	0.190476	0.476190	0.142857	0.190476				
0.382353	0.294118	0.147059	0.176471	0.312500	0.406250	0.218750	0.062500				
0.272727	0.212121	0.242424	0.272727	0.157895	0.315789	0.236842	0.289474				
0.000000	0.235294	0.411765	0.352941	0.120000	0.440000	0.240000	0.200000				
0.250000	0.250000	0.083333	0.416667	0.290323	0.290323	0.129032	0.290323				
6.6								0.256651	0.334492	0.197761	0.211097
								14			
0.500000	0.250000	0.166667	0.083333	0.277778	0.388889	0.166667	0.166667				
0.384615	0.346154	0.153846	0.115385	0.241379	0.344828	0.137931	0.275862				
0.318182	0.272727	0.318182	0.090909	0.200000	0.500000	0.200000	0.100000				
0.230769	0.384615	0.153846	0.230769	0.136364	0.500000	0.136364	0.227273				
0.307692	0.346154	0.115385	0.230769	0.275862	0.413793	0.172414	0.137931				
0.281250	0.218750	0.187500	0.312500	0.205882	0.382353	0.176471	0.235294				
0.230769	0.230769	0.230769	0.307692	0.117647	0.411765	0.352941	0.117647				
0.230769	0.307692	0.000000	0.461538	0.250000	0.250000	0.142857	0.357143				
6.7								0.265799	0.338604	0.177585	0.218012
								13			
0.538462	0.230769	0.153846	0.076923	0.187500	0.500000	0.187500	0.125000				
0.294118	0.470588	0.117647	0.117647	0.320000	0.240000	0.120000	0.320000				
0.294118	0.294118	0.352941	0.058824	0.333333	0.222222	0.222222	0.222222				
0.250000	0.250000	0.250000	0.250000	0.210526	0.578947	0.157895	0.052632				
0.238095	0.333333	0.238095	0.190476	0.296296	0.518519	0.111111	0.074074				
0.320000	0.280000	0.200000	0.200000	0.218750	0.406250	0.156250	0.218750				
0.363636	0.090909	0.181818	0.363636	0.083333	0.500000	0.250000	0.166667				
0.090909	0.272727	0.090909	0.545455	0.050000	0.350000	0.350000	0.250000				

6.8									0.269982	0.357661	0.170467	0.201890
	0.500000	0.166667	0.166667	0.166667	0.250000	0.250000	0.125000	0.375000	17			
	0.333333	0.500000	0.000000	0.166667	0.363636	0.272727	0.090909	0.272727				
	0.272727	0.272727	0.454545	0.000000	0.444444	0.222222	0.111111	0.222222				
	0.285714	0.571429	0.142857	0.000000	0.333333	0.583333	0.000000	0.083333				
	0.266667	0.333333	0.133333	0.266667	0.227273	0.500000	0.181818	0.090909				
	0.272727	0.363636	0.227273	0.136364	0.260870	0.260870	0.173913	0.304348				
	0.333333	0.222222	0.222222	0.222222	0.181818	0.363636	0.363636	0.090909				
	0.090909	0.272727	0.090909	0.545455	0.235294	0.294118	0.294118	0.176471				
6.9									0.269998	0.345823	0.181489	0.202690
	0.222222	0.444444	0.111111	0.222222	0.363636	0.181818	0.181818	0.272727	18			
	0.416667	0.250000	0.083333	0.250000	0.294118	0.352941	0.117647	0.235294				
	0.272727	0.272727	0.454545	0.000000	0.166667	0.500000	0.000000	0.333333				
	0.400000	0.600000	0.000000	0.000000	0.400000	0.500000	0.000000	0.100000				
	0.200000	0.400000	0.200000	0.200000	0.272727	0.500000	0.136364	0.090909				
	0.347826	0.347826	0.173913	0.130435	0.375000	0.187500	0.187500	0.250000				
	0.428571	0.000000	0.428571	0.142857	0.300000	0.200000	0.300000	0.200000				
	0.125000	0.250000	0.125000	0.500000	0.181818	0.363636	0.090909	0.363636				
7									0.279070	0.343023	0.174419	0.203488
	0.111111	0.555556	0.111111	0.222222	0.142857	0.428571	0.142857	0.285714	15			
	0.500000	0.166667	0.166667	0.166667	0.357143	0.285714	0.142857	0.214286				
	0.300000	0.200000	0.400000	0.100000	0.000000	0.666667	0.000000	0.333333				
	0.400000	0.400000	0.200000	0.000000	0.181818	0.545455	0.000000	0.272727				
	0.222222	0.555556	0.111111	0.111111	0.357143	0.357143	0.142857	0.142857				
	0.294118	0.235294	0.235294	0.235294	0.357143	0.357143	0.071429	0.214286				
	0.333333	0.166667	0.500000	0.000000	0.375000	0.125000	0.375000	0.125000				
	0.166667	0.166667	0.166667	0.500000	0.400000	0.400000	0.000000	0.200000				
7.1									0.285714	0.345865	0.195489	0.172932
	0.125000	0.500000	0.250000	0.125000	0.142857	0.428571	0.142857	0.285714	21			
	0.500000	0.166667	0.166667	0.166667	0.111111	0.444444	0.222222	0.222222				
	0.272727	0.272727	0.454545	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000				
	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.166667	0.666667	0.000000	0.166667				
	0.333333	0.333333	0.222222	0.111111	0.250000	0.416667	0.083333	0.250000				
	0.363636	0.272727	0.090909	0.272727	0.500000	0.125000	0.000000	0.375000				
	0.000000	0.000000	0.666667	0.333333	0.333333	0.333333	0.166667	0.166667				
	0.166667	0.333333	0.166667	0.333333	0.222222	0.555556	0.000000	0.222222				
7.2									0.284698	0.322651	0.181393	0.211258
	0.333333	0.666667	0.000000	0.000000	0.333333	0.166667	0.166667	0.333333	21			
	0.600000	0.200000	0.000000	0.200000	0.100000	0.300000	0.400000	0.200000				
	0.125000	0.375000	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000				
	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.200000	0.600000	0.000000	0.200000				

0.125000	0.250000	0.375000	0.250000		0.333333	0.416667	0.000000	0.250000
0.555556	0.222222	0.111111	0.111111		0.500000	0.166667	0.000000	0.333333
0.500000	0.000000	0.500000	0.000000		0.500000	0.500000	0.000000	0.000000
0.166667	0.500000	0.333333	0.000000		0.000000	0.333333	0.000000	0.666667

7.3

0.333333	0.666667	0.000000	0.000000		0.666667	0.000000	0.000000	0.333333
0.600000	0.200000	0.000000	0.200000		0.142857	0.285714	0.285714	0.285714
0.000000	0.750000	0.250000	0.000000		0.000000	0.000000	1.000000	0.000000
NaN	NaN	NaN	NaN		0.500000	0.500000	0.000000	0.000000

0.142857	0.428571	0.285714	0.142857		0.300000	0.300000	0.100000	0.300000
0.625000	0.125000	0.125000	0.125000		0.250000	0.250000	0.000000	0.500000
0.500000	0.500000	0.000000	0.000000		0.333333	0.333333	0.000000	0.333333
0.000000	0.600000	0.400000	0.000000		0.400000	0.200000	0.000000	0.400000

7.4

0.349461	0.315787	0.121432	0.213320

28

0.333333	0.333333	0.000000	0.333333		0.666667	0.333333	0.000000	0.000000
1.000000	0.000000	0.000000	0.000000		0.166667	0.333333	0.166667	0.333333
0.000000	1.000000	0.000000	0.000000		0.500000	0.000000	0.500000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	1.000000		0.250000	0.500000	0.000000	0.250000

De la tabla 5 apreciamos que sólo las magnitudes umbral 6.5 a 6.7 cumplen con el requerimiento (sección 2.4.1) de tener mínimo $2N_S$ transiciones en todos sus renglones; y aunque los modelos para esas magnitudes umbral tienen suficientes transiciones, es probable que la markovianidad sea baja como se vio en el capítulo 3; para magnitudes umbral $M^T > 7.0$ sólo algunos renglones tienen la cantidad mínima de transiciones para ser confiables.

De la primera estrategia (sección 3.3.4 concluimos que la magnitud umbral óptima para Markov es $M^T = 7.1$, al analizar esa misma magnitud umbral para semi-Markov, vemos que, en general, los resultados son similares; aunque, como mencionamos anteriormente, sólo algunos renglones son confiables. Por ejemplo, en las páginas 1 y 2 de la matriz cúbica para $M^T = 7.1$ X_{11}, X_{12}, X_{21} y X_{22} concentran la mayoría de las transiciones para esas páginas, por lo que, la fuerte interacción entre la región uno y dos continúa; en la página tres, el renglón tres tiene la mayor cantidad de transiciones y el reglón cuatro solo tiene una transición, de manera que, continúa la fuerte interacción de la región tres con ella misma, y la poca interacción de la región tres con la región cuatro.

Aun con la poca confianza que tienen nuestros resultados semi-markovianos debido a la falta de datos, observamos como las probabilidades de transición sí dependen del estado actual y también del estado inmediatamente anterior; por ejemplo, los mismos renglones *i* de las diferentes páginas de Q, no son iguales y varían según el estado inmediatamente anterior *h*, por lo que, esto nos sugiere que el sistema sí es semi-markoviano. También como se mostró anteriormente, en general, los resultados semi-markovianos son similares a los markovianos. Para obtener resultados más confiables, proponemos repetir el análisis dentro de doscientos años cuando el catálogo contenga más datos.

Capítulo 6. Discusiones y conclusiones

No es posible determinar si los resultados de un estudio de peligro sísmico markoviano son útiles y confiables si únicamente es reportada la matriz de probabilidades de transición, *P*; por lo que deberían ser también reportadas estimaciones de incertidumbre, robustez, y markovianidad de las probabilidades de transición. Alternativamente, deberían ser reportadas, además de *P*, la matriz de transiciones Θ o la matriz Ξ junto con el número total de transiciones *N*.

Proponemos un conjunto de medidas para modelos markovianos que, con base en la información mencionada anteriormente, cuantifican robustez, incertidumbre, y markovianidad. Además, dado que las diferentes medidas tienen diferentes unidades, magnitudes y comportamientos, proponemos una forma de normalizarlas para hacerlas comparables.

Por lo general, no existe una forma única de modelar un sistema dado, los modelos pueden ser muy diferentes entre sí, pero incluso los modelos que tienen las mismas características, pero diferentes conjuntos de parámetros pueden dar lugar a estimaciones de peligro sísmico muy distintas; por lo tanto, es muy importante poder decidir cuál de los modelos propuestos es el mejor. Proponemos una forma de elegir entre diferentes modelos aplicando las medidas normalizadas mencionadas anteriormente mediante el uso de un discriminante.

Como ejemplo, aplicamos nuestras medidas y método de decisión al área alrededor de Japón y a la trinchera mexicana; implementamos dos estrategias para estimar el peligro sísmico, en ambas estrategias utilizamos el mismo sistema y estados; el sistema para Japón se modeló con cuatro regiones y cuatro estados correspondientes a en cuál de las regiones ocurrió el sismo más reciente con magnitud igual o mayor a una magnitud umbral dada; el sistema para la trinchera mexicana se modeló con tres regiones y tres estados. En la primer estrategia para Japón usamos la misma magnitud umbral para todas las regiones, y exploramos modelos con magnitudes umbral de $M_w = 6.5$ a $M_w = 7.4$; nuestros resultados muestran la solución de compromiso óptima para $M_w = 7.1$; el comportamiento esperado del sistema es discutido en secciones previas. Para la segunda estrategia para Japón utilizamos magnitudes umbral distintas para cada región, a manera de tener números de sismos en cada región lo más homogéneos posible, construimos diferentes modelos utilizando las mismas regiones, pero diferentes grupos de magnitudes umbrales; el grupo óptimo fue el 7 ($M_w = 7.4$, $M_w = 7.4$, $M_w = 7.1$, y $M_w = 7.1$, para las regiones uno, dos, tres y cuatro,

respectivamente). En la primer estrategia para la trinchera mexicana también usamos la misma magnitud umbral para todas las regiones, y utilizamos modelos con magnitudes umbral de $M_w = 6.5$ a $M_w = 7.2$; la solución de compromiso óptima es para $M_w = 7.1$. Para la segunda estrategia para la trinchera mexicana también utilizamos magnitudes umbral distintas para cada región, construimos diferentes modelos utilizando las mismas regiones, pero diferentes grupos de magnitudes umbrales; el grupo óptimo fue el 6 ($M_w = 7.2$, $M_w = 7.0$ y $M_w = 6.8$, para las regiones uno, dos y tres, respectivamente).

Nuestras medidas también arrojan algo de luz sobre el sistema mismo. Para la primer estrategia de Japón y de la trinchera mexicana nuestros resultados indican que para magnitudes menores que 7.0 el sistema es menos markoviano que para magnitud mayores que 7.0; en la segunda estrategia de Japón y de la trinchera mexicana también observamos que el sistema es menos markoviano para magnitudes menores que 7.0; en ambas estrategias esto puede explicarse por eslabones espurios o faltantes en las cadenas de transición observadas.

Por supuesto, las medidas, normalizaciones, y el discriminante que proponemos no son únicos, y los lectores pueden implementar las suyas propias para evaluar los resultados del análisis de peligro sísmico markoviano. Cualesquiera que sean las medidas utilizadas, exhortamos a todos los interesados en estudios de peligro sísmico markoviano a informar acerca de sus matrices de transición Ξ, para que otros puedan evaluar sus resultados.

Dado que definimos un sistema cuyos intervalos entre transiciones son libres, intentamos determinar si los intervalos para Japón están distribuidos de alguna manera que permitiera estimar su probabilidad; para ello utilizamos los modelos óptimos, dado que los modelos con magnitudes umbral bajas, que cuentan con mayor número de sismos, no son markovianos. Encontramos que, para la magnitud umbral $M_w = 7.1$ y el grupo 7 no hay suficientes datos para caracterizar las distribuciones de intervalos para las transiciones individuales, ni para transiciones agrupadas por estado inicial; por lo tanto, utilizamos el conjunto global de intervalos para todas las transiciones. Encontramos que la distribución exponencial ajusta bastante bien a los datos del conjunto global, pero esta distribución implica ausencia de memoria que puede ser explicada porque se está analizando intervalos que pueden corresponder a dieciséis distribuciones distintas. De la distribución cumulativa hay probabilidad de 0.95 de que los intervalos sean menores a 2.4 y 3.5 años para la primera y segunda estrategia respectivamente. La trinchera mexicana no tiene suficientes datos para determinar los intervalos

Como primera estimación del peligro sísmico utilizamos un sistema markoviano cuyas conclusiones mencionamos en los párrafos anteriores, y como segunda estimación exploramos el uso de un sistema semi-markoviano para el cual las probabilidades de transición dependen no solamente del estado actual sino también del estado inmediatamente anterior. Desafortunadamente la poca cantidad de datos disponibles ocasiona que nuestros resultados semi-markovianos no sean muy confiables, pero, aún con este inconveniente, nuestros resultados sugieren que un modelo semi-markoviano podría dar una mejor evaluación del peligro sísmico que un modelo estrictamente markoviano, lo que significa que los efectos de los grandes sismos pueden influir en más de un sismo siguiente.

Literatura citada

Bhattacharyya, A. 1943. On a measure of divergence between two statistical populations defined by their probability distributions. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society. 35, 99-109.

Fritchman, B. 1967. A binary channel characterization using partitioned Markov chains, in IEEE Transactions on Information Theory. 13(2), 221-227.

Fujinawa, Y. 1991. A method for estimating earthquake occurrence probability using first and multiple-order Markov chain models. Nat Hazards. 4, 7–22. https://doi.org/10.1007/BF00126556.

Grant, M.; Steven, T. 1991. Are stock returns predictable?. A test using Markov Chains. The journal of finance. 46(1), 239-263. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1991.tb03751.x.

Gulick, S.; Bangs N. 2004. Negative polarity at the frontal thrust—is free gas the culprit?: insights from nankai accretionary prism off cape muroto using seismiclogging integration. In: Mikada, H.; Moore, G.; Taira, A.; Becker, K.; Moore, J.; Klaus, A. (2004). Proceedings of the Ocean Drilling Program, Scientific Results. https://doi.org/10.2973/odp.proc.sr.190196.353.2004

Hagiwara, Y. 1975. A stochastic model of earthquake occurrence and the accompanying horizontal land deformation. Tectonophysics. 26(1–2), 91-101. https://doi.org/10.1016/0040-1951(75)90115-8.

Heng, T. 2002. Estimates of earthquake recurrences in the Chiayi–Tainan area, Taiwan. Elsevier, 63(1–2), 157-168. https://doi.org/10.1016/S0013-7952(01)00079-5.

Ide, S.; Shiomi, K.; Mochizuki, K.; Tonegawa, T.; Kimura, G. 2010. Split Philippine Sea plate beneath Japan. Geophys. Res. 37(21). https://doi.org/10.1029/2010GL044585

International Seismological Centre. 2013. On-line Bulletin, http://www.isc.ac.uk, Internatl. Seismol. Cent., Thatcham, United Kingdom.

Ishibashi, K. (2004). Status of historical seismology in Japan. Annals of Geophysics. 47, 2-3. https://doi.org/10.4401/ag-3305

Ismail-Zadeh, A.; Honda, S.; Tsepelev, I. 2013. Linking mantle upwelling with the lithosphere descent and the Japan Sea evolution: a hypothesis. Sci Rep. 3(1137). https://doi.org/10.1038/srep01137

Khmelev, D. V.; Tweedie, F. J. 2001. Using Markov Chains for Identification of Writer, Literary and Linguistic Computing. 16(3), 299–307. https://doi.org/10.1093/llc/16.3.299

Knopoff, L. 1971. A stochastic model for the occurrence of main sequence earthquakes, J. Geophys. Res. 75, 5745–5756.

Kullback, S.; Leibler, R. A. 1951. On information and sufficiency. Ann. Math. Statist. 22(1), 79-86. https://projecteuclid.org/euclid.aoms/1177729694

Lallemand, S. 2016. Philippine Sea Plate inception, evolution, and consumption with special emphasis on the early stages of Izu-Bonin-Mariana subduction. Prog. in Earth and Planet. Sci. 3**,** 15. https://doi.org/10.1186/s40645-016-0085-6

Lee G. H.; Kim H. J. 2016. Crustal Structure and Tectonic Evolution of the East Sea. In: Chang KI. et al. (eds) Oceanography of the East Sea (Japan Sea). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-22720-7_17

Matsu'ura, R.S. 2017. A short history of Japanese historical seismology: past and the present. Geosci. Lett. 4, 3. https://doi.org/10.1186/s40562-017-0069-4

Nava, F.; Herrera, C.; Frez, J.; Glowacka, E. 2005. Seismic hazard evaluation using Markov chains; Application to the Japan area. PAGEOPH 162, 1347-1366.

Obayashi, M.; Yoshimitsu, J.; Fukao, Y. 2009. Tearing of Stagnant Slab. Science. 324(5931), 1173-1175. https://doi.org/10.1126/science.1172496

Okada, Y.; Kasahara, K.; Hori, S.; Obara, K.; Sekiguchi, S.; Fujiwara, F.; Yamamoto, A. 2004. Recent progress of seismic observation networks in Japan —Hi-net, F-net, K-NET and KiK-net. Earth Planet. 56, 15-28. https://doi.org/10.1186/BF03353076.

Patwardhan, A.; Kulkarni, R.; Tocher, D. 1980. A semi Markov model for characterizing recurrence of great earthquakes. Bull. Seism. Soc. Am. 70, 323-347.

Raible, C.; Bischof, G.; Fraedrich, K.; Kirk, E. 1999. Statistical single-station short-term forecasting of temperature and probability of precipitation: area interpolation and NWP combination, American meteorological society. 14, 203-214. https://doi.org/10.1175/1520-0434(1999)014<0203:SSSSTF>2.0.CO;2.

Ramin, S. 2012. Forecasting time and place of earthquakes using a Semi-Markov model (with case study in Tehran province). Journal of Industrial Engineering International. 8(1). https://www.jiei-tsb.com/content/8/1/20.

Reid, H. 1910. The mechanism of the Earthquake. The California Earthquake of April 18, 1906. En: Report of the State Earthquake Investigation Commission (Editors) Carnegie Institution. Washington D.C. 2: 16-1 8p.

Rikitake, T. 1976. Recurrence of great earthquakes at subduction zones, Elsevier, Tectonophysics. 35(4), 335-362. https://doi.org/10.1016/0040-1951(76)90075-5

Shannon, C. 1948. A mathematical theory of communication. The Bell System Technical Journal, 27(379-423), 623-656.

Ünal, S.; Celebioglu, S. 2011. A Markov chain modelling of the earthquakes occurring in Turkey, Gazi University Journal of Science. 24(2), 263–274.

Uyeda, S.; Kanamori, H. 1979. Back-Arc opening and the mode of subduction. Journal of geophysical research. 84, B3. https://doi.org/10.1029/JB084iB03p01049

Votsi, I.; Limnios, N.; Tsaklidis, G.; Papadimitriou, E. 2010. Semi-markov models for seismic hazard assessment in certain areas of Greece. Bulletin of the Geological Society of Greece. 43, 2200-2209.

Votsi, I.; Tsaklidis, G.; Limnios, N.; Papadimitriou, E.; Vallianatos, F. 2013. A Markov model for seismic hazard analysis along the Hellenic subduction Zone (Greece). Bulletin of the Geological Society of Greece, 47(3), 1376-1385. https://doi.org/10.12681/bgsg.10934.

Yildiz, A.; Demir K. 1999. An application of the semi-Markov model for earthquake occurrences in North Anatolia, Turkey. Journal of the Balkan geophysical society, 2(4), 90-99.