

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias
en Electrónica y Telecomunicaciones
con orientación en Instrumentación y Control**

**Sincronización externa de robots móviles
empleando acoplamiento dinámico**

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

York Alfredo Vara Herrera

Ensenada, Baja California, México

2021

Tesis defendida por

York Alfredo Vara Herrera

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. César Cruz Hernández

Codirector de tesis

Dr. Adrian Arellano Delgado

Codirector de tesis

Dr. Rigoberto Martínez Clark

Dr. Javier Pliego Jiménez

Dr. Serguei Stepanov



Dra. María del Carmen Maya Sánchez

Coordinadora del Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dr. Pedro Negrete Regagnon

Director de Estudios de Posgrado

York Alfredo Vara Herrera © 2021

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis

Resumen de la tesis que presenta York Alfredo Vara Herrera como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

Sincronización externa de robots móviles empleando acoplamiento dinámico

Resumen aprobado por:

Dr. César Cruz Hernández

Codirector de tesis

Dr. Adrian Arellano Delgado

Codirector de tesis

En este trabajo de tesis de maestría se aborda el problema de sincronización externa de dos redes dinámicas complejas con robots móviles diferenciales como nodos, empleando acoplamiento dinámico y una configuración de acoplamiento maestro y esclavo con un control por retroalimentación dinámica. Acoplamientos dinámicos son implementados tanto para la sincronización interna de las redes, así como para la sincronización externa entre dichas redes. Lo anterior con la finalidad de analizar ventajas y desventajas del esquema de acoplamiento dinámico propuesto. De los resultados obtenidos en este trabajo de tesis, se observó que una de las principales ventajas del esquema de acoplamiento propuesto al utilizar un sistema intermediario que permite acoplar indirectamente los nodos de las redes (ya sea interna o externamente), es precisamente aislar las señales de control entre los sistemas involucrados, con lo que se puede evitar daño a los nodos por amplitudes de señales de control indeseadas. Además, el error en estado estacionario se ve notablemente disminuido para el esquema de acoplamiento propuesto, con la desventaja de presentar oscilaciones en el estado transitorio.

Palabras clave: sincronización interna, sincronización externa, acoplamiento dinámico, robots móviles, redes complejas

Abstract of the thesis presented by York Alfredo Vara Herrera as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Electronics and Telecommunications with orientation in Instrumentation and Control.

Outer synchronization of mobile robots by using dynamic coupling

Abstract approved by:

Dr. César Cruz Hernández

Thesis Co-Director

Dr. Adrian Arellano Delgado

Thesis Co-Director

This Master of science thesis addresses the outer synchronization problem of two complex dynamic networks with differential mobile robots as nodes by using dynamic coupling, on a master-slave configuration and a dynamic feedback control law. Dynamic coupling is implemented in order to reach both inner and outer synchronization between the networks. The above with the purpose of analyze advantages and disadvantages of the proposed coupling scheme. From the obtained results, it was observed that one of the main advantages of the proposed coupling scheme when using an intermediary system that allows indirect coupling of the nodes of the networks (either internally or externally), is precisely to isolate the control signals between the involved systems, whereby damage to nodes by unwanted control signal amplitudes can be avoided. Furthermore, the steady-state error is remarkably reduced for the proposed coupling scheme, with the disadvantage of presenting oscillations in the transient state.

Keywords: inner synchronization, outer synchronization, mobile robot, dynamic coupling, complex networks

Dedicatoria

A Katia y Alexa Vara Herrera, así como las mentes jóvenes que velan por una mejor sociedad...

Agradecimientos

A Dios por permitirme realizar y concluir el presente trabajo de tesis.

A mis padres, Estela Herrera y Pablo Vara por su valiosa compañía, su apoyo incondicional, cariño y enseñanzas a lo largo de estos años.

A mis hermanas, Katia y Alexa por acompañarme en esta aventura llamada vida y mostrarme un punto de vista diferente para cada situación.

A las pequeñas integrantes de la familia, Manchitas y Chanti por su compañía en las noches de estudio y ser la principal fuente deestrés durante esta etapa.

A mis amigos dentro y fuera del ámbito académico, por su amistad, su tiempo, sus consejos, las palabras de aliento y buenos deseos.

Al Dr. César Cruz y Dr. Adrian Arellano, por la atención brindada para el desarrollo de este trabajo, así como sus valiosos consejos y orientación durante mi formación académica.

A los miembros del comité, Dr. Rigoberto Martínez, Dr. Javier Pliego y Dr. Serguei Stepanov, por los comentarios y sugerencias para mejorar este trabajo de tesis. Gracias por su tiempo y la orientación brindada.

A los miembros del DET, miembros del comité de tesis y compañeros de clase, por su amistad y compañía durante esta etapa de mi vida.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por la educación recibida, así como el uso de instalaciones y equipo requerido para realizar el trabajo de investigación de esta tesis de maestría.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría. No. de becario: 902944

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico recibido a través del Proyecto de Investigación en Ciencia Básica entre instituciones, "Sincronización de Sistemas Complejos y Algunas Aplicaciones". Ref. 166654 y continuación (A1-S-31628).

Tabla de contenido

Página

Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	ix

Capítulo 1. Introducción

1.1. Redes Complejas	1
1.2. Comportamientos colectivos	2
1.3. Sincronización	2
1.4. Antecedentes	4
1.4.1. Antecedentes de sincronización externa	4
1.4.2. Antecedentes de acoplamiento dinámico	5
1.4.3. Antecedentes de robots móviles en comportamientos colectivos	6
1.5. Planteamiento del problema	7
1.6. Motivación	7
1.7. Hipótesis	8
1.8. Objetivos	8
1.8.1. Objetivos particulares	8
1.9. Metodología	9

Capítulo 2. Preliminares

2.1. Teoría de grafos	12
2.2. Modelo matemático del robot móvil	13
2.3. Linealización por retroalimentación dinámica	15
2.3.1. Acoplamiento difusivo (estático) y dinámico	18

Capítulo 3. Análisis comparativo de los acoplamientos difusivo y dinámico en sincronización interna de redes

3.1. Primer caso: acoplamiento difusivo vs dinámico	24
3.1.1. Seguimiento de la trayectoria infinito	25
3.1.2. Seguimiento de la trayectoria deltoide	28
3.1.3. Seguimiento de la trayectoria elefante	31
3.2. Segundo caso: acoplamiento maestro-esclavo difusivo vs maestro-esclavo dinámico	34
3.2.1. Seguimiento de la trayectoria infinito	34
3.2.2. Seguimiento de la trayectoria deltoide	38
3.2.3. Seguimiento de la trayectoria elefante	41
3.3. Discusión	44

3.4.	Análisis comparativo en sincronización de redes con topología de cadena y anillo	45
3.5.	Discusión	53
3.6.	Conclusiones	54
Capítulo 4. Sincronización externa de redes: simulación numérica		
4.1.	Anticolisión	56
4.2.	Resultados numéricos	57
4.3.	Conclusión	63
Capítulo 5. Sincronización externa de redes: emulación de implementación experimental		
5.1.	Emulación de implementación experimental	66
5.2.	Conclusión	73
Capítulo 6. Conclusiones		
6.1.	Sugerencias y trabajo futuro	75
6.2.	Posibles aplicaciones	76
Literatura citada		77
Anexo A. Código de MATLAB utilizado para la emulación de la implementación experimental con CoppeliaSim		81

Lista de figuras

Figura	Página
1. Ilustraciones de ejemplos de redes complejas y sus comportamientos colectivos.	2
2. Christiaan Huygens (1629[Pleaseinsertintopreamble]1695), ilustración tomada de (Pikovsky <i>et al.</i> , 2003).	3
3. Experimento de Huygens con dos relojes de péndulo colocados sobre un soporte en común, ilustración tomada de (Pikovsky <i>et al.</i> , 2003).	6
4. Primera etapa: análisis comparativo entre un acoplamiento difusivo y el acoplamiento dinámico propuesto.	9
5. Segunda etapa: sincronización y formación externa utilizando el acoplamiento dinámico propuesto en el acoplamiento externo y un acoplamiento interno difusivo.	10
6. Tercera etapa: sincronización y formación externa utilizando el acoplamiento dinámico propuesto tanto en el acoplamiento externo como en el interno.	10
7. Leonhard Euler y los 7 puentes de Königsberg, ilustración tomada de la web.	12
8. Arquitectura del modelo de un robot móvil de tracción diferencial.	14
9. Esquema correspondiente al acoplamiento difusivo.	18
10. Esquema correspondiente al acoplamiento dinámico.	20
11. Diagrama correspondiente al primer caso analizado de las simulaciones.	21
12. Diagrama correspondiente al segundo caso analizado en las simulaciones.	22
13. Gráfica correspondiente a la trayectoria infinito del primer caso.	25
14. Gráficas correspondientes a la dinámica de x , y y θ de los robots móviles maestros, para la trayectoria infinito del primer caso.	26
15. Gráfica correspondiente a la dinámica de los estados del acoplamiento dinámico para la trayectoria infinito del primer caso.	26
16. Gráfica correspondiente al error de los robots maestros respecto a la trayectoria infinito del primer caso.	27
17. Gráfica correspondiente a la norma euclidiana de los robots maestros respecto a la trayectoria infinito del primer caso.	27
18. Gráfica correspondiente a la trayectoria deltoide del primer caso.	29
19. Gráficas correspondientes a la dinámica de x , y y θ de los robots móviles maestros, para la trayectoria deltoide del primer caso.	29
20. Gráfica correspondiente a la dinámica de los estados del acoplamiento dinámico para la trayectoria deltoide del primer caso.	30

21. Gráfica correspondiente al error de los robots maestros respecto a la trayectoria deltoide del primer caso.	30
22. Gráfica correspondiente a la norma euclidiana de los robots maestros respecto a la trayectoria deltoide del primer caso.	31
23. Gráfica correspondiente a la trayectoria elefante del primer caso.	32
24. Gráficas correspondientes a la dinámica de x , y y θ de los robots móviles maestros, para la trayectoria elefante del primer caso.	32
25. Gráfica correspondiente a la dinámica de los estados del acoplamiento dinámico para la trayectoria elefante del primer caso.	33
26. Gráfica correspondiente al error de los robots maestros respecto a la trayectoria elefante del primer caso.	33
27. Gráfica correspondiente a la norma euclidiana de los robots maestros respecto a la trayectoria elefante del primer caso.	34
28. Gráfica correspondiente a la trayectoria infinito del segundo caso.	35
29. Gráficas correspondientes a la dinámica de x , y y θ de los robots móviles esclavos, para la trayectoria infinito del segundo caso.	36
30. Gráfica correspondiente a la dinámica de los estados del acoplamiento dinámico para la trayectoria infinito del segundo caso.	36
31. Gráfica correspondiente al error de los robots esclavos respecto a la trayectoria infinito del segundo caso.	37
32. Gráfica correspondiente a la norma euclidiana de los robots esclavos respecto a la trayectoria infinito del segundo caso.	37
33. Gráfica correspondiente a la trayectoria deltoide del segundo caso.	38
34. Gráficas correspondientes a la dinámica de x , y y θ de los robots móviles esclavos, para la trayectoria deltoide del segundo caso.	39
35. Gráfica correspondiente a la dinámica de los estados del acoplamiento dinámico para la trayectoria deltoide del segundo caso.	39
36. Gráfica correspondiente al error de los robots esclavos respecto a la trayectoria deltoide del segundo caso.	40
37. Gráfica correspondiente a la norma euclidiana de los robots esclavos respecto a la trayectoria deltoide del segundo caso.	40
38. Gráfica correspondiente a la trayectoria elefante del segundo caso.	41
39. Gráficas correspondientes a la dinámica de x , y y θ de los robots móviles esclavos, para la trayectoria elefante del segundo caso.	42
40. Gráfica correspondiente a la dinámica de los estados del acoplamiento dinámico para la trayectoria elefante del segundo caso.	42
41. Gráfica correspondiente al error de los robots maestros respecto a la trayectoria elefante del segundo caso.	43

42. Gráfica correspondiente a la norma euclidiana de los robots maestros respecto a la trayectoria elefante del segundo caso.	43
43. Diagrama correspondiente a las redes con topología en cadena utilizada en el análisis comparativo.	45
44. Diagrama correspondiente a las redes con topología en anillo utilizada en el análisis comparativo.	46
45. Gráficas correspondientes a la dinámica de x , y y θ de los robots móviles R_{5dif} y R_{5din} , para la topología en cadena, con la trayectoria deseada infinito.	48
46. Gráfica correspondiente al error de los robots R_{5dif} y R_{5din} , respecto a la trayectoria deseada infinito.	49
47. Gráfica correspondiente a la norma euclidiana de los robots R_{5dif} y R_{5din} , respecto a la trayectoria deseada infinito.	49
48. Gráficas correspondientes a la dinámica de x , y y θ de los robots móviles R_{5dif} y R_{5din} , para la topología en anillo, con la trayectoria deseada: infinito.	52
49. Gráfica correspondiente al error de los robots R_{5dif} y R_{5din} , respecto a la trayectoria deseada infinito.	52
50. Gráfica correspondiente a la norma euclidiana de los robots R_{5dif} y R_{5din} , respecto a la trayectoria deseada infinito.	53
51. Diagrama correspondiente a la simulación de la sincronización externa entre 2 redes con topologías diferentes (estrella y cadena).	58
52. Gráfica correspondiente a las trayectorias trazadas por cada uno de los robots móviles de ambas redes.	60
53. Gráficas correspondientes a la dinámica de x , y y θ de los robots móviles de ambas redes.	60
54. Gráfica correspondiente a los estados del acoplamiento dinámico de los robots móviles de ambas redes.	61
55. Gráfica correspondiente al error de los robots esclavos respecto al robot maestro de la red en topología estrella.	61
56. Gráfica correspondiente al error de los robots esclavos respecto al robot maestro de la red en topología cadena.	62
57. Gráfica correspondiente al error de los robots: R_{Ei} para $i = 2, \dots, 5$ y R_{Ci} para $i = 1, \dots, 5$, respecto al robot maestro R_{E1}	62
58. Software CoppeliaSim, ilustraciones tomadas de www.coppeliarobotics.com	65
59. Captura de la interfaz de trabajo del simulador CoppeliaSim.	65
60. Vista general del robot Khepera III. 1) Sensores infrarrojos, 2) Sensores ultrasónicos, 3) Puerto serial, 4) Puerto USB, 5) Conector para cargador, 6) Reset, 7) On/Off, 8) Puerto serial.	65

61. Diagrama correspondiente a la emulación de la implementación experimental de la sincronización externa entre dos redes con topología estrella: a) redes sin acoplamiento externo, b) redes con acoplamiento externo dinámico.	67
62. Gráfica correspondiente a las trayectorias trazadas por cada uno de los robots móviles de ambas redes.	68
63. Gráficas correspondientes a la dinámica de x , y de los robots móviles de ambas redes.	69
64. Gráficas correspondientes a la dinámica de θ de los robots móviles de ambas redes.	70
65. Gráfica correspondiente a los estados del acoplamiento dinámico de los robots móviles de ambas redes.	70
66. Gráfica correspondiente al error de los robots esclavos respecto al robot maestro de la red maestro M.	71
67. Gráfica correspondiente al error de los robots esclavos respecto al robot maestro de la red esclavo E.	71
68. Gráfica correspondiente al error de los robots: R_{Mi} para $i = 2, \dots, 5$ y R_{Ei} para $i = 1, \dots, 5$, respecto al robot maestro R_{M1}	72
69. Captura correspondiente al resultado gráfico obtenido de la emulación de la implementación experimental con el software CoppeliaSim.	72

Capítulo 1. Introducción

Una *red* puede ser definida sencillamente como un conjunto de nodos interconectados, donde un nodo es el elemento básico de la red y posee ciertas características dependiendo de la naturaleza red en consideración (Wang, 2002). Estos nodos pueden ser cualquier cosa dependiendo del contexto, hablando de la Internet podrían ser routers conectados por enlaces físicos como la fibra óptica, pueden ser documentos en la red informática mundial (WWW), incluso pueden ser artículos científicos en una red de referencias. Las redes pueden ser descritas mediante un *grafo*: un conjunto de puntos (nodos) unidos por líneas (aristas) que representan de manera abstracta la red en cuestión, lo que facilita su análisis y estudio. Cabe mencionar que existen diferentes configuraciones de acoplamiento para los nodos en las redes, a estas estructuras se les denomina *topologías* y describen la forma en que los nodos de una red se encuentran conectados entre sí.

1.1. Redes Complejas

. En las últimas décadas, las redes complejas han adquirido una atención considerable por parte de muchos campos científicos, como las matemáticas, la física, la biología, las ciencias sociales e ingeniería. La teoría de grafos que ha llevado de la mano el estudio de estas redes, es considerada una herramienta matemática muy poderosa para describir y caracterizar los sistemas naturales como las redes neuronales, enjambres y redes sociales, así como las redes creadas por el hombre como Internet, redes de telecomunicaciones, redes de tráfico, etc. (Sun *et al.*, 2015) (ver figura 1).

Una *red compleja* puede definirse como un conjunto de nodos interconectados, donde cada nodo es una unidad dinámica y el comportamiento de la red se encuentra mayormente influenciada por la forma en la que los nodos se encuentran conectados (Li y Xue, 2010), es decir, su *complejidad* depende de dos aspectos principales: *su estructura topológica y la riqueza dinámica de sus nodos*.

Las redes con una topología compleja son descritas por un grafo aleatorio, sin embargo, se puede intuir que muchas redes complejas reales no son completamente regulares ni completamente aleatorias. Es importante caracterizar la estructura de redes complejas, ya que la estructura siempre afecta el funcionamiento y comportamiento



Figura 1. Ilustraciones de ejemplos de redes complejas y sus comportamientos colectivos.

de un sistema dinámico, especialmente uno complejo, el cual solo puede ser entendido al comprender las interacciones internas entre sus componentes individuales.

1.2. Comportamientos colectivos

Debido a las dinámicas no lineales que las redes de sistemas dinámicos pueden presentar, estas han recibido gran cantidad de atención, pues son importantes en el modelado de varios sistemas reales de gran escala (Wang, 2002). Las interacciones entre los distintos agentes dentro de una red dinámica compleja, permiten un flujo de información, que en situaciones específicas puede producir alguno de los llamados comportamientos colectivos emergentes, los cuales, a diferencia del comportamiento que puede presentar un nodo aislado, sugieren un cierto grado superior de inteligencia por parte de la red. Algunos de los *comportamientos colectivos emergentes* más conocidos son: sincronización, formación, agregación, movimiento coordinado, cita y forrajeo, entre otros (Martínez-Clark, 2019).

1.3. Sincronización

Entre las propiedades de las redes complejas, la *sincronización* es uno de los principales comportamientos emergentes, ya que numerosos estudios han revelado que este es un fenómeno universal y tiene un amplio número de aplicaciones en sistemas del mundo real. La sincronización es un fenómeno que fue reconocido en un princi-



Figura 2. Christiaan Huygens (1629–1695), ilustración tomada de (Pikovsky *et al.*, 2003).

pio por el científico holandés Christian Huygens en 1665 (ver figura 2), y que en los últimos años ha sido extensamente estudiado por varios campos de investigación y aplicación del conocimiento, pues diversos sistemas en la naturaleza han mostrado una tendencia a operar en sincronía, como son por ejemplo, las células responsables del latir de nuestro corazón. La palabra sincronización se deriva del griego *σύν* (*sýn*), “unido” y *χρόνος* (*chrónos*), “tiempo”, por lo que la palabra *síncrono* se refiere al evento en el que dos fenómenos ocurren al mismo tiempo. Este fenómeno universal puede ser descrito mediante un esquema basado en dinámicas no lineales (Pikovsky *et al.*, 2001).

Gran parte de las investigaciones registradas en la literatura, se han centrado en sincronización y el comportamiento producido dentro de una red compleja (*sincronización interna*), donde cada nodo de la red alcanza el mismo estado síncrono. Sin embargo, en el mundo real también existen otros tipos de sincronización para las redes complejas, como *sincronización externa*, donde la sincronización entre dos redes complejas compuestas por nodos y topologías de conexión diferentes, es sin duda un problema interesante y que por tanto, vale la pena investigar (Wu *et al.*, 2009).

A continuación, se mencionan algunos ejemplos de sincronización externa de redes, en el reino animal se tienen las interacciones presa-depredador, en redes sociales se tienen aquellas redes formadas por la interacción entre países desarrollados y aquellos que se encuentran en desarrollo, otros ejemplos son la interacción de la red de educadores con la red de investigadores acoplados por la vía de internet, la red informática mundial o la propagación de enfermedades infecciosas (Li *et al.*, 2007). La existencia

de redes de gran escala ha alentado a investigadores a realizar trabajos para analizar la sincronización entre dos redes, pues el estudio en comportamientos colectivos dentro de una red y entre dos redes es de amplio interés.

Por otra parte, un tema en particular sobre sincronización de redes complejas que ha estado en constante desarrollo, es la sincronización y formación de redes de robots móviles, con la finalidad de lograr emular y comprender mejor los comportamientos colectivos emergentes en la naturaleza (parvadas volando en sincronía en la migración, el movimiento coordinado en bancos de peces para evadir depredadores, forrajeo en colonias de hormigas, por mencionar algunos), donde a partir de los resultados obtenidos se han logrado realizar aplicaciones como transporte de objetos, exploración y recolección de información en ambientes a los que el ser humano no puede acceder fácilmente, búsqueda y rescate, así como patrullaje y vigilancia, entre otros (Vara, 2018).

Es así, que utilizar grupos de robots para resolver problemas cooperativamente, presenta la principal ventaja de aumentar la eficiencia y efectividad de la tarea del sistema, además de que la fabricación de varios robots simples en general resulta ser más barata que la de un robot único y completamente equipado (López-Parra, 2017).

1.4. Antecedentes

1.4.1. Antecedentes de sincronización externa

Respecto a trabajos realizados sobre sincronización externa, en Wu *et al.* (2009) se hace mención a las primeras investigaciones realizadas sobre sincronización externa entre redes con topologías de conexión idénticas (Li *et al.*, 2009), mientras que no idénticas se reportan en Tang *et al.* (2008), además este trabajo incluye resultados numéricos donde se presenta el término de sincronización externa generalizada, para referirse a la sincronización entre dos redes complejas que pueden tener topologías y/o nodos con dinámicas iguales o diferentes.

En Arellano-Delgado *et al.* (2015), se reportan resultados numéricos y experimentales correspondientes a la sincronización entre redes complejas que tienen osciladores idénticos como nodos, pero que se encuentran conectados en topologías distintas y

cada nodo tiene una oscilación natural diferente, lo anterior tiene el objetivo de emular el comportamiento colectivo de luciérnagas destellando con la finalidad de ayudar a comprender uno de los diversos comportamientos colectivos encontrados en la naturaleza.

Los autores en Arellano-Delgado *et al.* (2018) realizan sincronización externa entre redes complejas caóticas con osciladores de Chua, los cuales se encuentran conectados en topología de mundo pequeño. Además presentan los resultados numéricos correspondientes a los casos de sincronización unidireccional y bidireccional, y a partir de ellos, determinan umbrales para el valor de la fuerza de acoplamiento que permite alcanzar sincronización externa utilizando el menor número de conexiones.

En Sun *et al.* (2012), se logra sincronización externa de dos redes complejas dinámicas empleando un acoplamiento discontinuo estático, sin embargo este tipo de acoplamiento tiene precisamente la desventaja de que el control se hace a través de acoplar y desacoplar los nodos de las redes en ciertos instantes de tiempo, lo que en la mayoría de los casos, requiere el monitoreo del error entre los nodos, así como la obtención adecuada de la tasa del periodo y la tasa de encendido-apagado, lo cual agrega cálculo computacional al acoplamiento.

1.4.2. Antecedentes de acoplamiento dinámico

Actualmente, existen diferentes técnicas para inducir sincronización tanto interna como externa. En la conocida configuración maestro y esclavo puede utilizarse un acoplamiento difusivo (estático), donde una señal de error entre los estados del sistema maestro y esclavo es empleada como entrada de control para lograr sincronización, este acoplamiento es el acoplamiento convencional o “estándar” debido a su relativa sencillez. Por otra parte, un esquema de sincronización que resulta muy interesante y prometedor (sobre el cual este trabajo de tesis está basado), es la configuración maestro y esclavo con acoplamiento dinámico presentada en Pena Ramirez *et al.* (2018). La bondad por naturaleza que ofrece este tipo de acoplamiento basado en el fenómeno observado por Huygens en 1665, se describe detalladamente en Peña Ramirez *et al.* (2014) y Pena Ramirez *et al.* (2016), donde se identifica que la sincronización se alcanza gracias a una interacción indirecta entre los sistemas mediante una estructura que

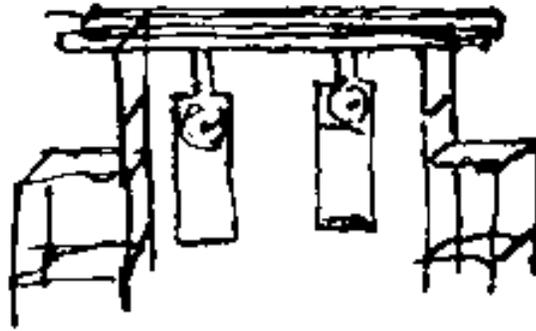


Figura 3. Experimento de Huygens con dos relojes de péndulo colocados sobre un soporte en común, ilustración tomada de (Pikovsky *et al.*, 2003).

los acopla, en el caso del experimento de Huygens (ver figura 3), dos relojes acoplados por una barra rígida, también se concluye que la rigidez juega un papel importante para la sincronización en fase y antifase de los sistemas acoplados.

En Pena Ramirez *et al.* (2018) se presentan las mejoras obtenidas al sustituir el acoplamiento estático (convencional) por un acoplamiento dinámico para inducir sincronización en osciladores mecánicos, así como entre dos sistemas caóticos, en los cuales, no se logra alcanzar sincronía al utilizar acoplamiento estático. En Ramirez *et al.* (2016), se realiza la sincronización de dos péndulos invertidos subactuados y en Velasco (2018) se desarrolla un arreglo de neuronas electrónicas, en ambos casos se utilizó un acoplamiento dinámico para alcanzar sincronización interna. En Arellano-Delgado *et al.* (2021), se aborda la sincronización externa de redes caóticas utilizando un acoplamiento dinámico y presenta las mejoras de la aplicación del esquema propuesto.

1.4.3. Antecedentes de robots móviles en comportamientos colectivos

Por otra parte, la comunidad científica ha realizado diversos trabajos con el fin de lograr ciertas aplicaciones utilizando comportamientos colectivos con robots móviles. Como ejemplo, Martínez-Clark (2014) presenta una aplicación de patrullaje empleando una formación de agentes, en López-Parra (2017) se hace uso de la sincronización en un grupo de robots móviles para el seguimiento de una trayectoria, por su parte Cetina-Denis (2017) emplea la teoría del caos para el diseño de trayectorias de vigilancia o patrullaje, mientras que Martínez-Clark (2019) propone algoritmos para la emergencia de comportamientos colectivos en enjambres robóticos y a su vez

Hernández-Valente (2018) presenta resultados numéricos correspondientes a la sincronización entre robots aéreos y terrestres.

1.5. Planteamiento del problema

A pesar de la existencia de diversos esquemas de sincronización funcionales, se optó por centrarse en la ya tradicional configuración maestro y esclavo empleando un acoplamiento dinámico, por las ventajas y mejoras que presenta respecto al acoplamiento difusivo para resolver el problema de sincronización (mencionadas en la literatura). De lo anterior, en este trabajo de tesis, se pretende emplear por primera vez un acoplamiento dinámico en una configuración maestro y esclavo de dos redes dinámicas complejas con robots móviles de tracción diferencial como nodos. Esto con el objetivo de alcanzar, así como posiblemente mejorar la sincronización externa de dichas redes, lo cual tiene múltiples aplicaciones como realizar tareas de búsqueda y rescate, exploración, vigilancia y patrullaje, por mencionar algunas.

1.6. Motivación

Al inicio de la automatización industrial, el uso de los robots estaba concentrado en operaciones simples, tareas repetitivas que no requerían demasiada precisión. Sin embargo, el progreso debido a las investigaciones en el campo de la robótica, ha propiciado el nacimiento de nuevas formas de trabajo para los robots, en especial el trabajo colectivo, ya que grupos de robots móviles tienen la capacidad de resolver tareas de manera más objetiva y eficaz al trabajar en conjunto. A la par se encuentra el desarrollo de diferentes técnicas para lograr dichas tareas y objetivos con la finalidad de mejorar resultados y optimizar procesos, permitiendo así una evolución gradual en el campo de la robótica, el cual es un fenómeno inherente del medio que nos rodea.

Es por ello que tener conocimiento de cómo funcionan y/o surgen los comportamientos colectivos en la naturaleza (como sincronización externa), es parte fundamental en este tipo de investigaciones. Debido a que emular y comprender mejor estos comportamientos colectivos, se obtiene la capacidad de pulir y optimizar los procesos que ocurren durante dicho comportamiento colectivo. Por ejemplo, se tiene

el caso del acoplamiento dinámico basado en el fenómeno observado por Huygens en 1665, ver figura 3, cuyas ventajas han sido registradas en la literatura y es precisamente por las cuales se ha seleccionado como el acoplamiento a utilizar en este trabajo de tesis.

1.7. Hipótesis

Es posible alcanzar sincronización externa y formación de dos redes compuestas por robots móviles de tracción diferencial, utilizando una ley de control de linealización por retroalimentación dinámica y un acoplamiento dinámico, en conjunción con la teoría de sistemas complejos y teoría de grafos.

1.8. Objetivos

Con la realización de este trabajo de tesis se pretendió alcanzar el siguiente **objetivo general**:

Aplicar control utilizando linealización por retroalimentación dinámica con acoplamiento dinámico para sincronización y formación externa entre redes compuestas con robots móviles de tracción diferencial.

1.8.1. Objetivos particulares

- Realizar el análisis comparativo entre un acoplamiento difusivo y acoplamiento dinámico propuesto.
- Simular la sincronización externa y formación de dos redes de robots móviles de tracción diferencial, utilizando el acoplamiento dinámico propuesto como acoplamiento externo.
- Simular la sincronización externa y formación de dos redes de robots móviles de tracción diferencial, utilizando el acoplamiento dinámico propuesto tanto como acoplamiento interno como acoplamiento externo.

- Implementar la sincronización externa y formación de dos redes de robots móviles de tracción diferencial, utilizan acoplamiento dinámico como acoplamiento interno y externo

1.9. Metodología

La metodología empleada para alcanzar el objetivo general en este trabajo de tesis se describe a continuación. Se pretende utilizar una ley de control de linealización por retroalimentación dinámica (Luca y Benedetto, 1993) y se empleará un acoplamiento no convencional para la sincronización externa entre dos redes de robots móviles de tracción diferencial. Para la demostración formal de los resultados analíticos, se recurrirá a la teoría de estabilidad de Lyapunov para sistemas no lineales (Khalil, 2002), a la teoría de sistemas dinámicos (Fradkov *et al.*, 1999), así como a la teoría de sistemas complejos (Wang, 2002) y teoría de grafos.

Como **primera etapa** de este trabajo de tesis se propone alcanzar sincronización y formación de dos robots móviles en configuración maestro y esclavo, con lo que se podrá realizar un análisis comparativo (cuantitativo o cualitativo, según convenga) entre un acoplamiento difusivo y el acoplamiento dinámico propuesto en esta tesis (ver figura 4), lo anterior con la finalidad de analizar ventajas o desventajas del método adoptado. Para alcanzar esta primera etapa, se utilizará una linealización por retroalimentación dinámica al modelo cinemático de un robot móvil tipo diferencial y únicamente se sustituye el acoplamiento difusivo (convencional) presentado en (Luca y Benedetto, 1993), por el acoplamiento dinámico propuesto.

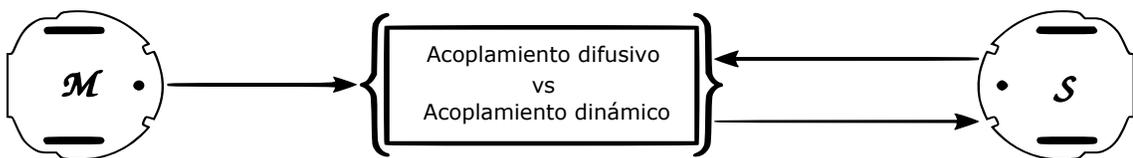


Figura 4. Primera etapa: análisis comparativo entre un acoplamiento difusivo y el acoplamiento dinámico propuesto.

Como **segunda etapa** de este trabajo de tesis, se pretende alcanzar sincronización externa entre dos redes de robots móviles, con el objetivo de lograr una determinada formación. Primeramente, se utilizará un acoplamiento difusivo como acoplamiento externo entre ambas redes, el cual posteriormente será sustituido por el acoplamiento dinámico propuesto. Mientras que un acoplamiento difusivo será utilizado para alcanzar sincronización interna de cada red para ambos casos, esto nuevamente con el

propósito de comparar los resultados obtenidos en cada uno de los casos (ver figura 5).

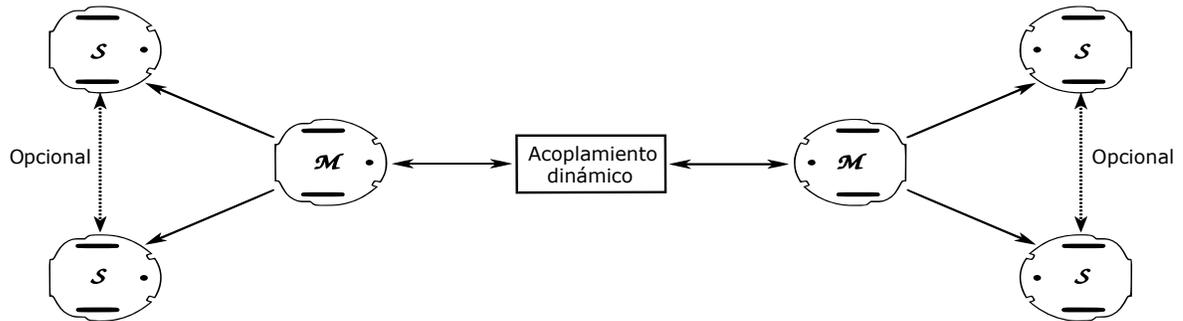


Figura 5. Segunda etapa: sincronización y formación externa utilizando el acoplamiento dinámico propuesto en el acoplamiento externo y un acoplamiento interno difusivo.

Como **tercera** y última **etapa** de este trabajo de tesis, se pretende realizar sincronización externa y formación de dos redes de robots móviles, utilizando el acoplamiento dinámico propuesto tanto como acoplamiento externo como acoplamiento interno (ver figura 6).

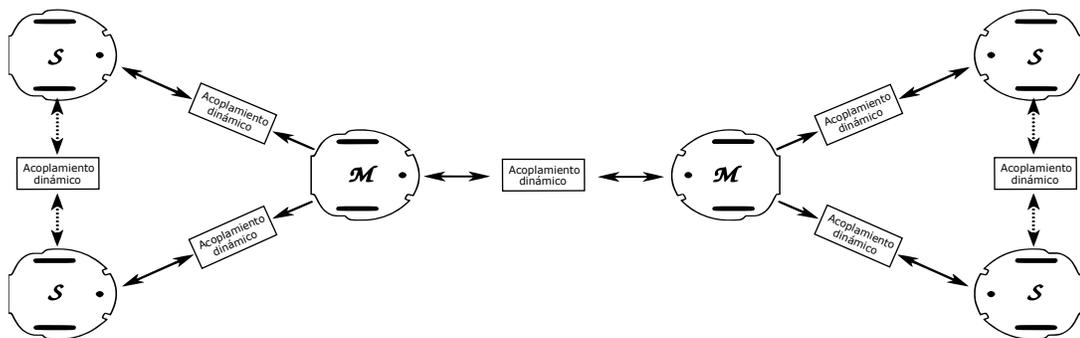


Figura 6. Tercera etapa: sincronización y formación externa utilizando el acoplamiento dinámico propuesto tanto en el acoplamiento externo como en el interno.

Por otra parte, una vez completadas las tres etapas de este trabajo de tesis, se pretende analizar la posible implementación de la llamada sincronización combinatoria, propuesta en Runzi *et al.* (2011), la cual se basa en dividir la señal a transmitir en m números de partes, para luego ser transmitida a través de m números de sistemas maestros (para este trabajo $m = 2$), esto con el objetivo de añadir un grado más de seguridad al momento de transmitir la señal de control, pues en la literatura se han mencionado las ventajas de esta técnica innovativa en el campo de las comunicaciones seguras.

Además, se buscará implementar una forma de seleccionar al robot más indicado para fungir como robot maestro, con el objetivo de realizar una tarea determinada

de manera óptima. En primera instancia, se pretende seleccionar al robot maestro de manera arbitraria, sin embargo debido a que ésta no es la manera más correcta de hacerlo, se buscará diseñar un algoritmo que permita seleccionar a un robot dependiendo de ciertas características o parámetros, como podría ser el robot con la menor distancia respecto a un objetivo.

Capítulo 2. Preliminares

2.1. Teoría de grafos

La teoría de grafos tiene su origen en el siglo XVIII, cuando Leonhard Euler en 1736 dió una solución al célebre problema de los siete puentes de Königsberg. Este consistía en encontrar un camino que recorriera los siete puentes del río Pregel de modo que se recorrieran todos los puentes pasando una sola vez por cada uno de ellos y regresar al punto de partida. Euler desarrollo un método para resolver este problema mediante un grafo. Dando inicio a lo que sería la teoría de grafos, la cual permite modelar redes que componen los diversos sistemas que se encuentran en la naturaleza, en las ciencias sociales y en la ingeniería facilitando su estudio y comprensión.



Figura 7. Leonhard Euler y los 7 puentes de Königsberg, ilustración tomada de la web.

Aunado a esto, existen cuatro matrices de interés asociadas a un grafo G : la matriz de adyacencia, la matriz de grado, la matriz laplaciana y la matriz de acoplamiento, las cuales serán utilizadas en este trabajo de tesis.

La *matriz de adyacencia* $\mathbf{M}(G)$ es una matriz cuadrada de dimensión $N \times N$, donde N es el número de nodos en la red y sus elementos m_{ij} estan dados por

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si hay conexión entre los nodos } i \text{ y } j, \\ 0 & \text{para otro caso.} \end{cases}$$

La *matriz de grado* $\mathbf{D}(G)$, es una matriz diagonal de dimensión $N \times N$, donde N representa el número de nodos de la red, sus elementos se encuentran dados por

$$d_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^N m_{ik} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{para otro caso.} \end{cases}$$

La *matriz laplaciana* $\mathbf{L}(G)$, es una matriz de dimensión $N \times N$ que esta dada por la diferencia entre la matriz de grado $\mathbf{D}(G)$ y la matriz de adyacencia $\mathbf{M}(G)$, y sus elementos estan dados por

$$l_{ij} = \begin{cases} d_{ij} & \text{si } i = j, \\ -1 & \text{si hay conexión entre los nodos } i \text{ y } j, \\ 0 & \text{para otro caso.} \end{cases}$$

La *matriz de acoplamiento* $\mathbf{A}(G)$ se define como la matriz laplaciana negativa,

$$\mathbf{A}(G) = -\mathbf{L}(G)$$

la cual, será utilizada en las técnicas de control para sincronizar las redes con robots móviles, en los siguientes capítulos.

2.2. Modelo matemático del robot móvil

El *modelo cinemático* empleado para el robot móvil unicycle es descrito como sigue (Luca y Benedetto, 1993):

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad (1)$$

$$\dot{y} = v \sin \theta, \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = \omega, \quad (3)$$

donde las entradas v y w son las velocidades lineales y angulares del robot a lo largo del eje vertical respectivamente, definidas para un robot móvil de tracción diferencial

como sigue:

$$v = \frac{v_L + v_R}{2}, \quad (4)$$

$$w = \frac{v_R - v_L}{l}, \quad (5)$$

con v_R y v_L como las velocidades lineales de las llantas derecha e izquierda respectivamente (relacionadas a las velocidades angulares como $w_L = \frac{v_L}{r}$ y $w_R = \frac{v_R}{r}$), l es la distancia entre las ruedas y r el radio de la llanta (ver figura 8).

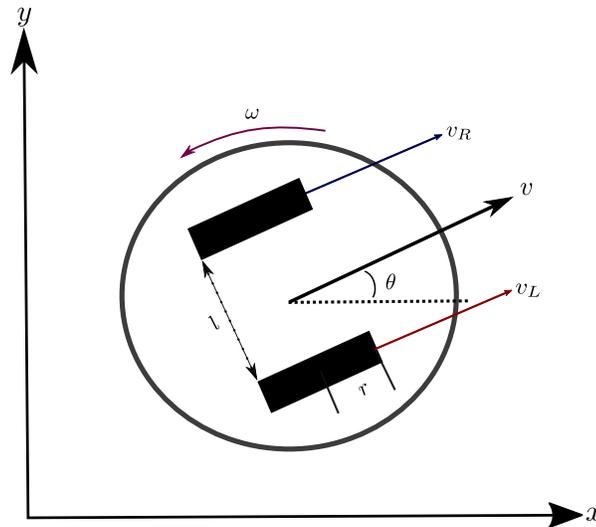


Figura 8. Arquitectura del modelo de un robot móvil de tracción diferencial.

Un sistema antideslizamiento genérico no lineal puede ser descrito como sigue,

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^L, \quad (6)$$

donde \mathbf{q} es el vector de estados del robot móvil diferencial, $\mathbf{u} = [v \ \omega]^T$ es el vector de entradas del robot móvil diferencial y \mathbf{F} está definida por:

$$\mathbf{F} = [f_1(\cdot) \ f_2(\cdot)], \quad (7)$$

con

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

por lo tanto

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega. \quad (10)$$

2.3. Linealización por retroalimentación dinámica

La técnica de control de linealización por retroalimentación dinámica empleada en este trabajo de tesis se basa en el trabajo de Luca y Benedetto (1993). Como su nombre lo indica, esta técnica utiliza una retroalimentación de sus propios estados con lo cual se logra un determinado objetivo de control. El reto de la linealización por retroalimentación dinámica para el sistema (6), consiste en encontrar, de ser posible, un compensador de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \mathbf{a}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{b}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi})\mathbf{u}, \\ \mathbf{w} &= \mathbf{c}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{d}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}), \end{aligned} \quad (11)$$

con estado $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^k$ y entrada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^v$. Un compensador para el robot móvil diferencial (10) es presentado a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}} &= u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta, \\ \mathbf{w} &= \frac{u_2 \cos \theta - u_1 \sin \theta}{\xi}, \end{aligned} \quad (12)$$

con $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ siendo $u_1 = \ddot{x}$ y $u_2 = \ddot{y}$, es decir, aceleraciones para cada eje coordenado y $v = \xi$. Nótese la singularidad que presenta el sistema cuando $\xi = 0$. Como se puede apreciar, el conjunto de ecuaciones (12) son obtenidas particularmente para nuestro caso, basándonos en la técnica presentada en Luca y Benedetto (1993), donde se obtendrán diferentes resultados dependiendo del sistema utilizado.

Permítase definir la *trayectoria deseada* como $(x_d(t), y_d(t))$, la cual, el robot móvil de tracción diferencial debe seguir. La ley de control para el seguimiento de la trayec-

toría deseada, en coordenadas cartesianas, puede proponerse como sigue:

$$u_1 = c_1(\dot{x}_d(t) - \dot{x}) + c_2(x_d(t) - x), \quad (13)$$

$$u_2 = c_3(\dot{y}_d(t) - \dot{y}) + c_4(y_d(t) - y), \quad (14)$$

con $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ y apropiadamente seleccionadas.

Un sistema dinámico n -dimensional se puede describir como

$$\dot{\mathbf{x}}_i = f(\mathbf{x}_i) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (15)$$

donde $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in \mathfrak{R}^n$ son las variables de estado del nodo i , $u_i = u_{i1} \in \mathfrak{R}$ es la señal de entrada del nodo i .

La señal de entrada del nodo i se define por

$$u_{i1} = c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

donde $c > 0$ representa la *fuerza de acoplamiento*, $\Gamma \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal constante de ceros y unos, se asume que $\Gamma = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$ con $r_i = 1$ para una i en específico y $r_j = 0$ para $j \neq i$, y $\mathbf{A} = a_{ij} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ es la *matriz de acoplamiento*.

Los elementos de la diagonal de \mathbf{A} se definen como

$$a_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{i,j} = - \sum_{j=1, j \neq i} a_{j,i}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (17)$$

si el grado del nodo i es d_i entonces

$$a_{ii} = -d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (18)$$

Un nodo aislado tiene una sola entrada u_{i1} y una sola salida $y_{i1} = g_i(\mathbf{x}_i)$, con $g_i(\cdot)$, como una función no lineal del vector de estado.

La red dinámica (15)-(16) alcanza sincronización asintótica, si (Wang, 2002)

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_N(t), \quad \text{conforme } t \rightarrow \infty, \quad (19)$$

ya que la condición de acoplamiento (17) garantiza que el estado de sincronización, $\mathbf{s}(t) \in \mathfrak{R}^n$ de un nodo aislado, satisfaga

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = f(\mathbf{s}(t)), \quad (20)$$

donde $\mathbf{s}(t)$ puede ser un punto de equilibrio, una órbita periódica o un atractor caótico.

Por tanto, la estabilidad del estado de sincronización de la red

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_N(t) = \mathbf{s}(t), \quad (21)$$

se determina por la dinámica de un nodo aislado, es decir la función no lineal $f(\mathbf{s}(t))$, el coeficiente de acoplamiento c , la matriz $\mathbf{\Gamma}$ y la matriz de acoplamiento \mathbf{A} .

Teorema [(Wang, 2002);(Wang y Chen, 2002)] considere la red dinámica (15)-(16). Sean

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N, \quad (22)$$

los valores propios de \mathbf{A} . Supongase que existe una matriz diagonal $\mathbf{D} > 0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ y dos constantes $\tilde{d} < 0$ y $\tau > 0$, tal que

$$[Df(\mathbf{s}(t)) + d\mathbf{\Gamma}]^T \mathbf{D} + \mathbf{D}[Df(\mathbf{s}(t)) + d\mathbf{\Gamma}] \leq -\tau \mathbf{I}_n, \quad (23)$$

para toda $d \leq \tilde{d}$. Además si

$$c\lambda_2 \leq \tilde{d}, \quad (24)$$

entonces el estado de sincronización (21) de la red dinámica (15)-(16) es exponencialmente estable.

Nota. Dado que $\lambda_2 \leq 0$ y $\tilde{d} \leq 0$, la desigualdad (24) es equivalente a

$$c \geq \left| \frac{\tilde{d}}{\lambda_2} \right|. \quad (25)$$

2.3.1. Acoplamiento difusivo (estático) y dinámico

El acoplamiento convencional empleado en este trabajo de tesis, es el *acoplamiento difusivo*, que se encuentra definido por

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{F}(\mathbf{x}_m), \quad (26)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{F}(\mathbf{x}_s) + c\mathbf{C}(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s), \quad (27)$$

donde \mathbf{x}_m y \mathbf{x}_s son vectores de estado n -dimensionales, correspondientes al sistema maestro y esclavo respectivamente, la función \mathbf{F} es generalmente suave y no lineal, c es la *fuerza de acoplamiento* y \mathbf{C} es una matriz elegida adecuadamente, ver figura 9.

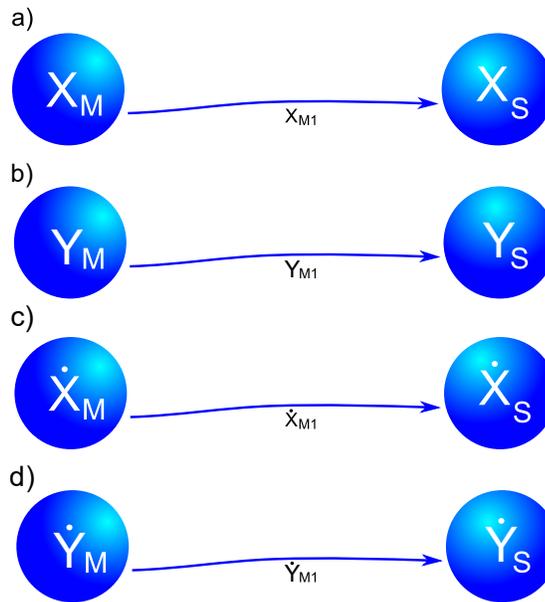


Figura 9. Esquema correspondiente al acoplamiento difusivo.

Mientras que, el *acoplamiento dinámico* inspirado por el experimento de Huygens, se encuentra descrito por

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{F}(\mathbf{x}_m), \quad (28)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{F}(\mathbf{x}_s) - \mathbf{B}_1 \mathbf{h}, \quad (29)$$

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{G}\mathbf{h} - c\mathbf{B}_2(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s), \quad (30)$$

donde $\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_s \in \mathfrak{R}^n$, son los vectores de estado del sistema maestro y esclavo respectivamente, $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T$ con $h_i \in \mathfrak{R}$, $i = 1, 2$, son las variables de estado del acoplamiento dinámico, se asume que el campo vectorial \mathbf{F} es lo suficientemente suave, y c es la

fuerza de acoplamiento, $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ y $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ son las matrices de acoplamiento. La matriz \mathbf{B}_1 indica a cuales ecuaciones del sistema esclavo se les aplica el acoplamiento dinámico, mientras que la matriz \mathbf{B}_2 indica que estados del sistema maestro estan acoplados a los del sistema esclavo. La matriz \mathbf{G} esta definida por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

donde γ_1 , γ_2 y α son constantes de diseño positivas (Pena Ramirez *et al.*, 2018), ver figura 10.

Con la finalidad de de aplicarse en la sincronización y formación de robots móviles de tracción diferencial con el esquema de sincronización maestro-esclavo, las ecuaciones de los acoplamientos difusivo (26)-(27) y dinámico (28)-(30), son adecuadas y se obtienen las siguientes ecuaciones en su forma normal. Para el acoplamiento difusivo las ecuaciones quedan descritas como sigue:

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{F}(\mathbf{x}_m, c\mathbf{C}\mathbf{u}_m(\dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}}_m, \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_m)), \quad (32)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{F}(\mathbf{x}_s, c\mathbf{C}\mathbf{u}_s(\dot{\mathbf{x}}_m - \dot{\mathbf{x}}_s, \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s)), \quad (33)$$

para el acoplamiento dinámico las ecuaciones quedan expresadas como:

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{F}(\mathbf{x}_m, c\mathbf{C}\mathbf{u}_m(\dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}}_m, \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_m)), \quad (34)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{F}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s(\mathbf{B}_1 \mathbf{h})), \quad (35)$$

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{G}\mathbf{h} - c\mathbf{B}_2(\dot{\mathbf{x}}_m - \dot{\mathbf{x}}_s, \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s), \quad (36)$$

donde $\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_s \in \mathbb{R}^2$, son los vectores de entradas del sistema maestro y esclavo respectivamente. Para nuestro caso en particular, las matrices \mathbf{C} , \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 quedan definidas como sigue:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

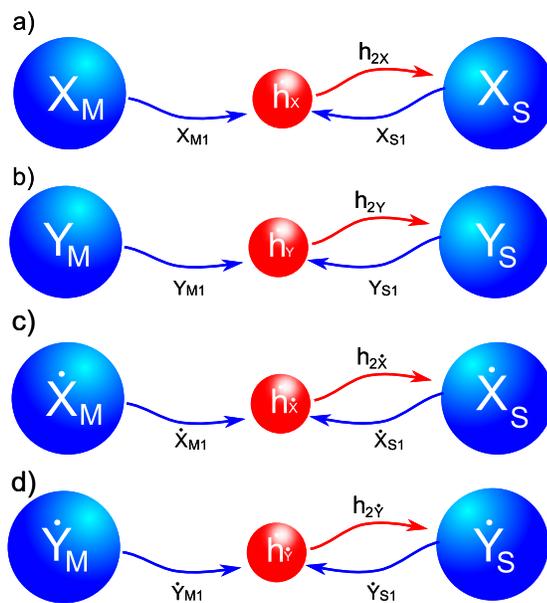


Figura 10. Esquema correspondiente al acoplamiento dinámico.

Capítulo 3. Análisis comparativo de los acoplamientos difusivo y dinámico en sincronización interna de redes

Para llevar a cabo los primeros análisis comparativos correspondientes a este trabajo de tesis, se abordaron dos casos o escenarios (ver figuras 11 y 12). En el primero de ellos, se tienen dos robots móviles diferenciales que serán usados posteriormente como maestros M_1 y M_2 , cada uno emplea un “acoplamiento” diferente (difusivo o dinámico) para cumplir la tarea de seguimiento de trayectoria deseada, esto con la finalidad de comparar el desempeño que presenta cada uno de los acoplamientos ante el seguimiento de trayectorias. Para el segundo escenario, se agrega un robot móvil diferencial como esclavo S_1 y S_2 a cada robot maestro del primer escenario (ver figura 12), siendo estos acoplados mediante el mismo esquema que los respectivos maestros utilizan para el seguimiento de la trayectoria deseada.

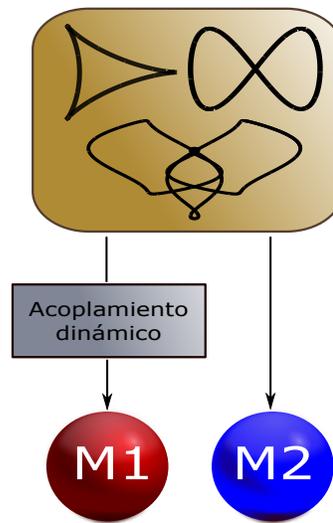


Figura 11. Diagrama correspondiente al primer caso analizado de las simulaciones.

Nota. El acoplamiento dinámico que se encuentra entre la trayectoria deseada y el robot M_1 , existe para todos los escenarios posteriores a este, pero es omitido en el diagrama por simplicidad del mismo.

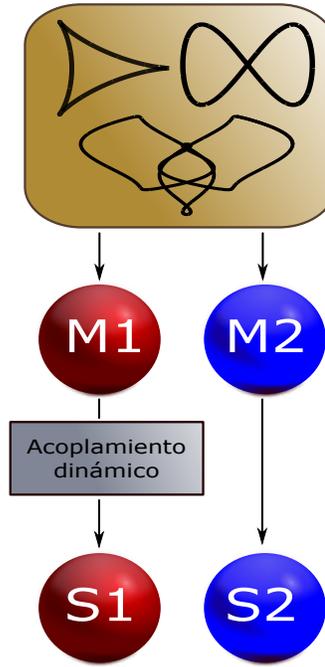


Figura 12. Diagrama correspondiente al segundo caso analizado en las simulaciones.

Considerando el modelo cinemático del robot móvil diferencial (10) e implementando las ecuaciones (15) y (16), el acoplamiento entre dos robots móviles de tracción diferencial esta descrito como sigue

$$\mathbf{m} \begin{cases} \dot{x}_m = \frac{V_{Rm} + V_{Lm}}{2} \cos(\theta_m), \\ \dot{y}_m = \frac{V_{Rm} + V_{Lm}}{2} \text{sen}(\theta_m), \\ \dot{\theta}_m = \omega_m = \frac{u_{2m}(\theta_m) - u_{1m} \text{sen}(\theta_m)}{\xi_m}, \\ \dot{\xi}_m = u_{1m} \cos(\theta_m) + u_{2m} \text{sen}(\theta_m), \end{cases} \quad (40)$$

donde las entradas de control u_{1m} y u_{2m} corresponden a la ley de control diseñada para que el robot móvil maestro cumpla con el seguimiento de la trayectoria deseada (x_d, y_d) . Para el robot móvil esclavo, el modelo cinemático queda como

$$\mathbf{s} \begin{cases} \dot{x}_s = \frac{V_{Rs} + V_{Ls}}{2} \cos(\theta_s), \\ \dot{y}_s = \frac{V_{Rs} + V_{Ls}}{2} \text{sen}(\theta_s), \\ \dot{\theta}_s = \omega_s = \frac{u_{2s}(\theta_s) - u_{1s} \text{sen}(\theta_s)}{\xi_s}, \\ \dot{\xi}_s = u_{1s} \cos(\theta_s) + u_{2s} \text{sen}(\theta_s), \end{cases} \quad (41)$$

donde u_{1s} y u_{2s} son las entradas correspondientes al acoplamiento maestro y esclavo

empleado. Las entradas de control empleando el acoplamiento difusivo quedan descritas como sigue:

$$u_{1s} = c_1(\dot{x}_m(t) - \dot{x}_s) + c_2(x_m(t) - x_s), \quad (42)$$

$$u_{2s} = c_3(\dot{y}_m(t) - \dot{y}_s) + c_4(y_m(t) - y_s), \quad (43)$$

con $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ serán seleccionadas apropiadamente.

Para el acoplamiento dinámico propuesto, las entradas de control quedan definidas como:

$$u_{1s} = \beta_1 h_{2x} + \beta_1 h_{2\dot{x}}, \quad (44)$$

$$u_{2s} = \beta_2 h_{2y} + \beta_2 h_{2\dot{y}}, \quad (45)$$

donde el *acoplamiento dinámico* utilizado es concebido basándose en un sistema masa-resorte-amortiguador de segundo orden descrito por:

$$\mathbf{h}_x \begin{cases} \dot{h}_{1x} = -h_{1x} + h_{2x}, \\ \dot{h}_{2x} = -\gamma_1 h_{1x} - \gamma_2 h_{2x} - k(x_m + \beta_1 x_s - \beta_1 \Delta_x), \end{cases} \quad (46)$$

$$\mathbf{h}_{\dot{x}} \begin{cases} \dot{h}_{1\dot{x}} = -h_{1\dot{x}} + h_{2\dot{x}}, \\ \dot{h}_{2\dot{x}} = -\gamma_1 h_{1\dot{x}} - \gamma_2 h_{2\dot{x}} - k(\dot{x}_m + \beta_1 \dot{x}_s), \end{cases} \quad (47)$$

$$\mathbf{h}_y \begin{cases} \dot{h}_{1y} = -h_{1y} + h_{2y}, \\ \dot{h}_{2y} = -\gamma_1 h_{1y} - \gamma_2 h_{2y} - k(y_m + \beta_2 y_s - \beta_2 \Delta_y), \end{cases} \quad (48)$$

$$\mathbf{h}_{\dot{y}} \begin{cases} \dot{h}_{1\dot{y}} = -h_{1\dot{y}} + h_{2\dot{y}}, \\ \dot{h}_{2\dot{y}} = -\gamma_1 h_{1\dot{y}} - \gamma_2 h_{2\dot{y}} - k(\dot{y}_m + \beta_2 \dot{y}_s), \end{cases} \quad (49)$$

donde γ_1 y γ_2 son constantes positivas, k es la fuerza de acoplamiento, Δ_x y Δ_y son desplazamientos en las cordenadas x y y respectivamente. Dichos desplazamientos son introducidos para separar los robots en el plano (x, y) .

Con el objetivo de comparar los resultados obtenidos en las simulaciones, se calcularon dos errores diferentes. El primero es el error convencional obtenido al realizar la resta de la trayectoria trazada por el robot móvil en cuestión (x_r, y_r) , respecto a la trayectoria deseada en cada unidad de tiempo. El cual es presentado solamente de manera gráfica:

$$e_x = x_d - x_r, \quad (50)$$

$$e_y = y_d - y_r. \quad (51)$$

Para obtener un valor de error específico se procedió a calcular la norma euclidiana para cada unidad de tiempo

$$\|\vec{E}\| = \sqrt{(x_d - x_r)^2 + (y_d - y_r)^2}, \quad (52)$$

la cual se grafica y posteriormente se suma para obtener dicho valor, $Eu = \sum \|\vec{E}\|$. Nótese que para este análisis comparativo del esquema de acoplamiento propuesto, tanto el error convencional como la norma euclidiana se calculan para robots aislados siguiendo trayectorias deseadas independientes e idénticas.

3.1. Primer caso: acoplamiento difusivo vs dinámico

En este escenario, se someten dos robots móviles de tracción diferencial M_1 y M_2 con condiciones iniciales $\mathbf{x}_{Mi}(0) = (x_{Mi}(0) = 0, y_{Mi}(0) = 0, \theta_{Mi}(0) = 0, \xi_{Mi}(0) = 0.02)^T$, $\mathbf{h}_{Mi}(0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ y $\Delta_{x_{Mi}} = \Delta_{y_{Mi}} = 0$, con $i = 1, 2$, a seguir tres trayectorias deseadas: infinito o lemniscata, deltoide y elefante, con el propósito de realizar un análisis comparativo entre ambos acoplamientos (difusivo y dinámico); más adelante, estos robots serán utilizados como maestros para otros robots, ver figura 11.

3.1.1. Seguimiento de la trayectoria infinito

En la figura 13 se muestra la gráfica correspondiente a la *trayectoria deseada infinito* de color negro, la trayectoria realizada por el robot M_2 con acoplamiento difusivo de color verde y la trayectoria realizada por el robot M_1 con acoplamiento dinámico de color azul, empleando los valores para los parámetros $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = k = 20$, $\gamma_1 = -3$ y $\gamma_2 = 3$. En la cual, se puede observar que ambos robots logran seguir la trayectoria deseada de manera fiel y sin problemas. La figura 14 presenta la dinámica de los estados x , y y θ correspondiente a cada robot, las cuales parecen ser casi idénticas a primera vista. En la figura 15 se muestran las dinámicas correspondientes a los estados del sistema utilizado como acoplamiento dinámico. La gráficas de la figura 16 presentan las dinámicas de los errores en x y y respectivamente, tomando como referencia la trayectoria deseada. Para el caso del error en x , es posible observar que a diferencia de la dinámica no suave que presenta el error del acoplamiento difusivo, el error del acoplamiento dinámico se mantiene en valores muy pequeños cercanos a cero. En el caso del error en y , ambas dinámicas de los errores presentan oscilaciones de amplitud muy pequeña, sin embargo cabe mencionar que el error correspondiente al robot con acoplamiento dinámico es menor. Los valores obtenidos al calcular la norma euclidiana son $Eu_{dif} = 11.0806$ y $Eu_{din} = 6.3755$ (ver figura 17).

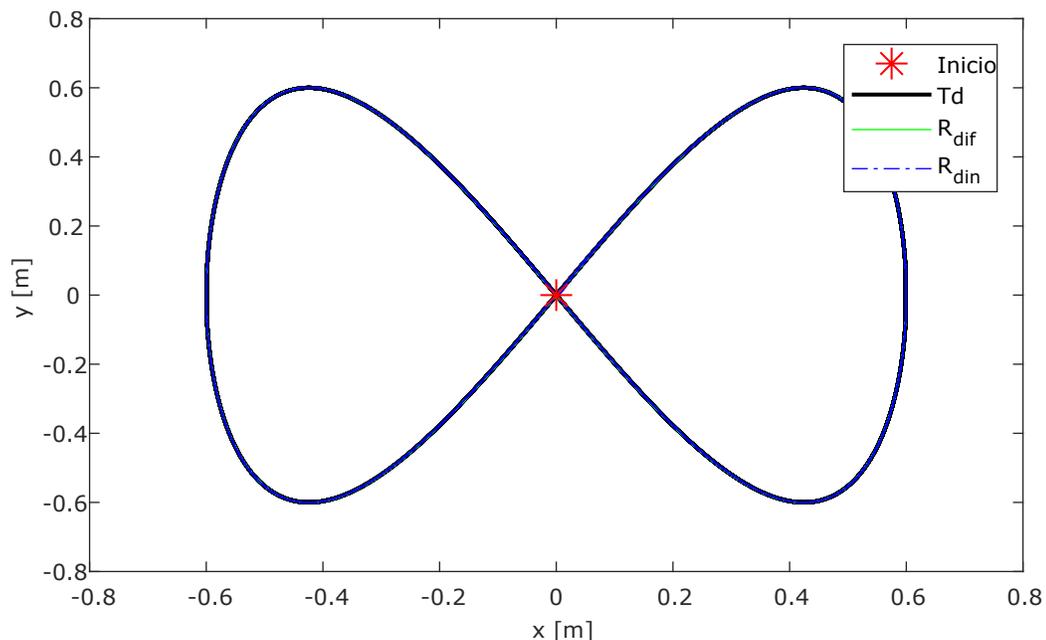


Figura 13. Gráfica correspondiente a la trayectoria infinito del primer caso.

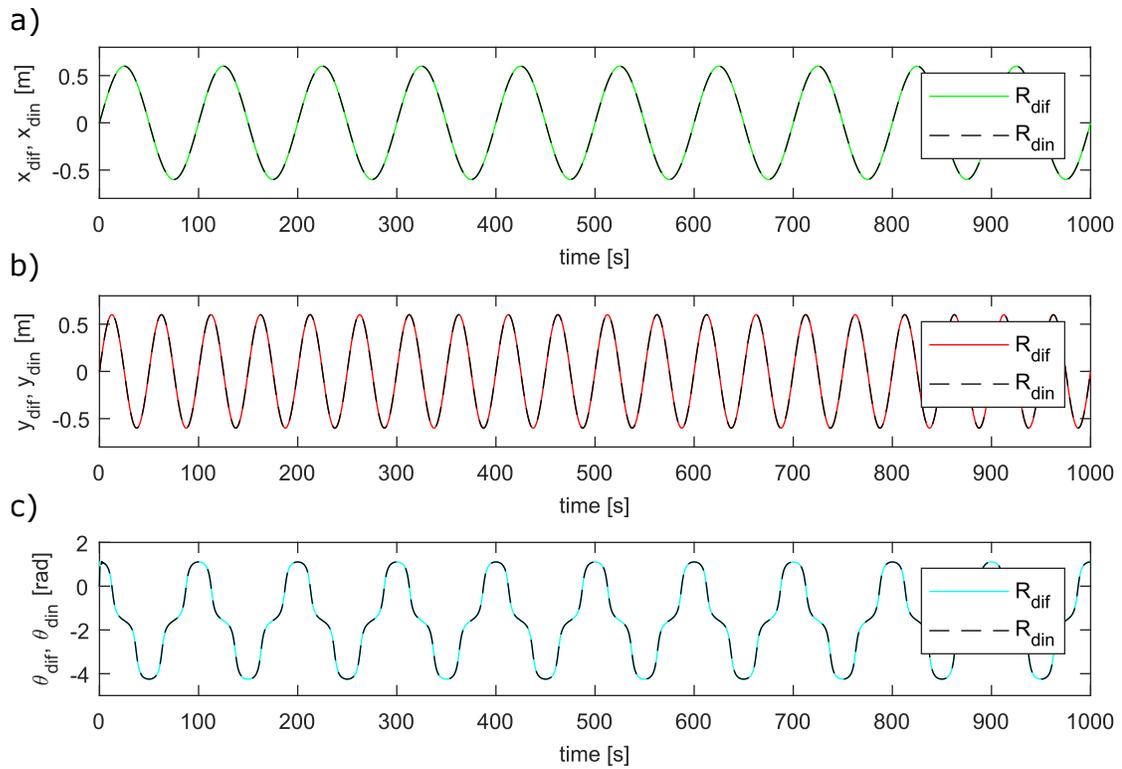


Figura 14. Gráficas correspondientes a la dinámica de x , y y θ de los robots móviles maestros, para la trayectoria infinito del primer caso.

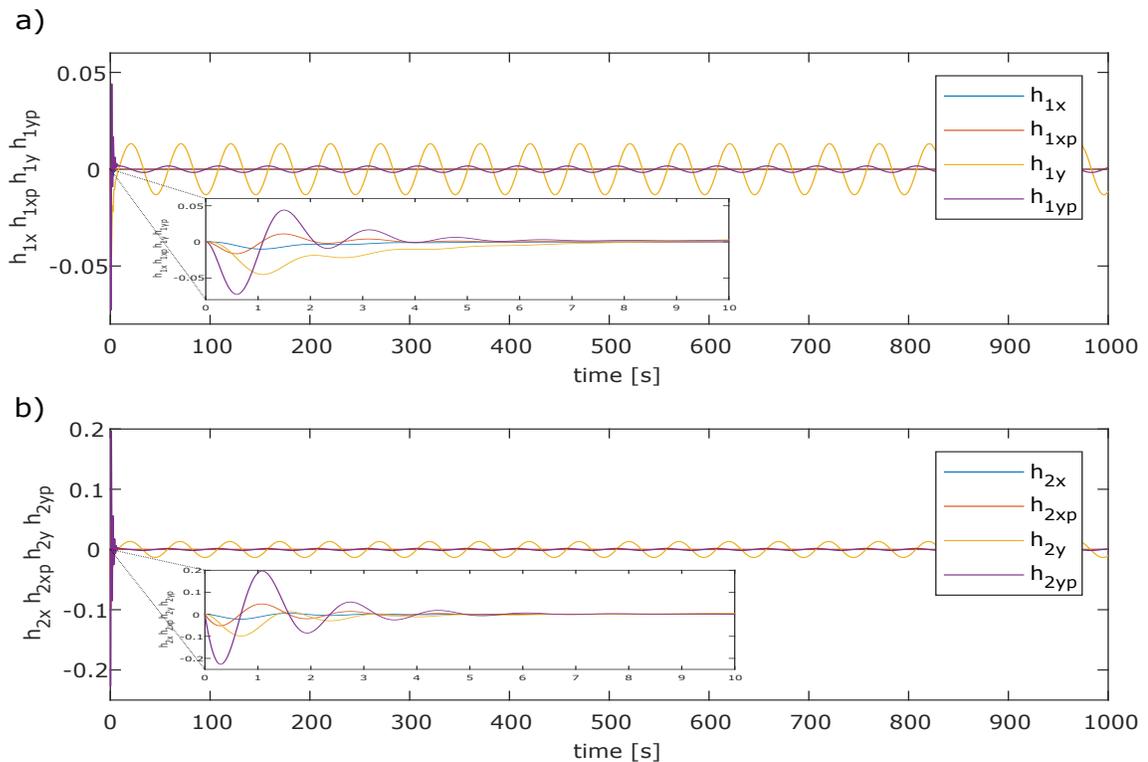


Figura 15. Gráfica correspondiente a la dinámica de los estados del acoplamiento dinámico para la trayectoria infinito del primer caso.

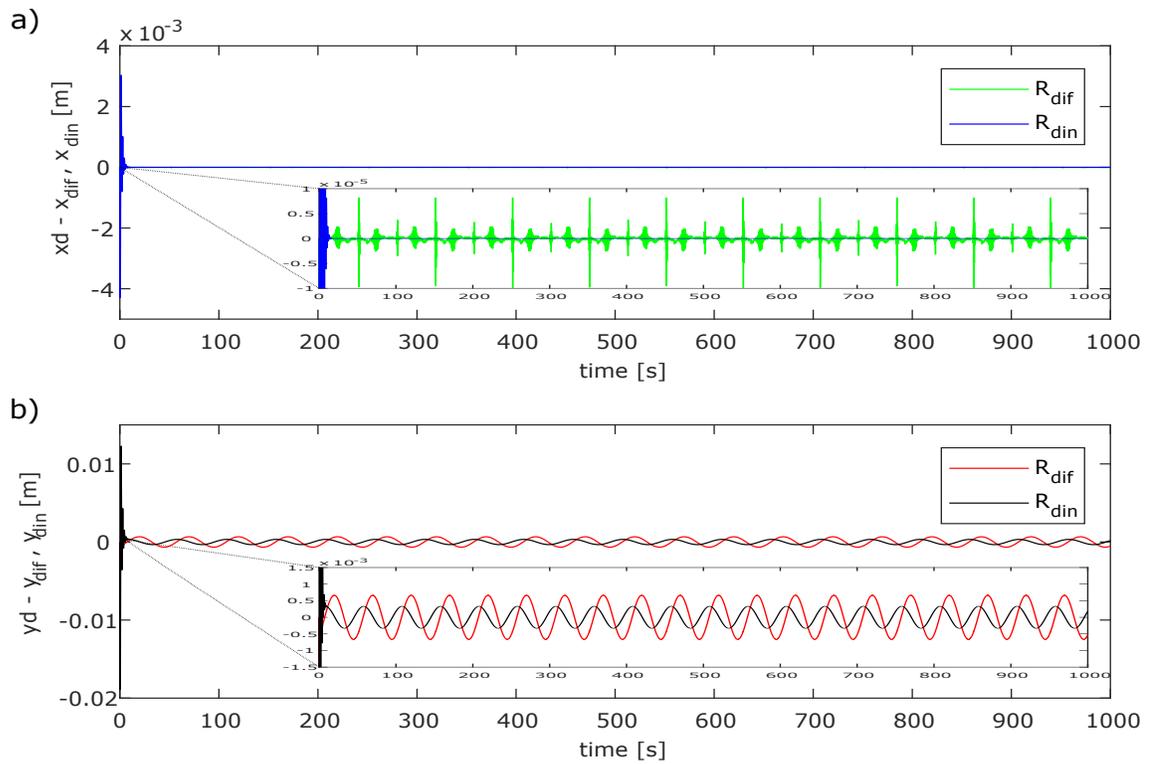


Figura 16. Gráfica correspondiente al error de los robots maestros respecto a la trayectoria infinito del primer caso.

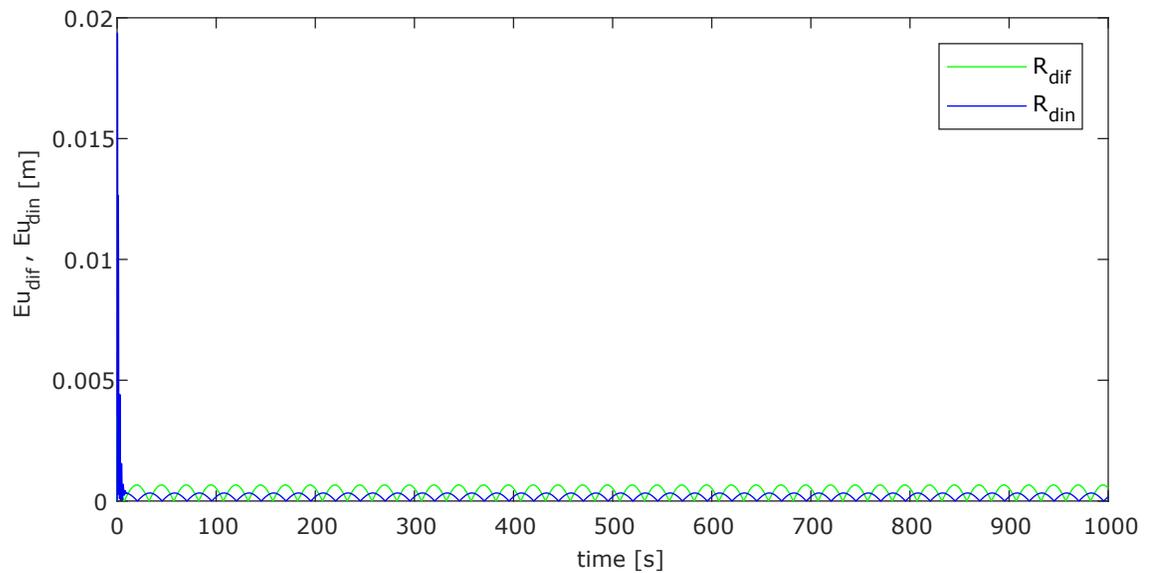


Figura 17. Gráfica correspondiente a la norma euclidiana de los robots maestros respecto a la trayectoria infinito del primer caso.

3.1.2. Seguimiento de la trayectoria deltoide

La figura 18 muestra la gráfica correspondiente a la *trayectoria deseada deltoide* (color negro), la trayectoria realizada por el robot con acoplamiento difusivo (color verde) y la trayectoria realizada por el robot con acoplamiento dinámico (color azul), empleando los valores para los parámetros $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = k = 20$, $\gamma_1 = 5$ y $\gamma_2 = 15$. En ella se observa que ambos robots realizan la trayectoria deseada con un cierto grado de error en y , además de que el error por parte del robot con acoplamiento dinámico es mayor en el transitorio pero que no presenta mayores problemas para el seguimiento en estado estacionario. La figura 19 presenta la dinámica de los estados x , y y θ correspondiente a cada robot, las cuales son muy similares, con pequeñas diferencias en el transitorio. En la figura 20 se muestran las dinámicas correspondientes a los estados del sistema utilizado como acoplamiento dinámico. La gráficas de la figura 21 presentan la dinámica de los errores en x y y respectivamente, tomando como referencia la trayectoria deseada. Para el caso del error en x , es posible observar que a pesar de que el error del robot con acoplamiento difusivo se mantiene en valores pequeños, este sigue siendo mayor que el error del robot con acoplamiento dinámico, además de presentar picos aproximadamente cada 180 unidades de tiempo. Por otra parte, como se comentó anteriormente, el error de ambos robots en y es muy similar. Los valores obtenidos al calcular la norma euclidiana son $Eu_{dif} = 9.1027 \times 10^2$ y $Eu_{din} = 9.3413 \times 10^2$ (ver figura 22).

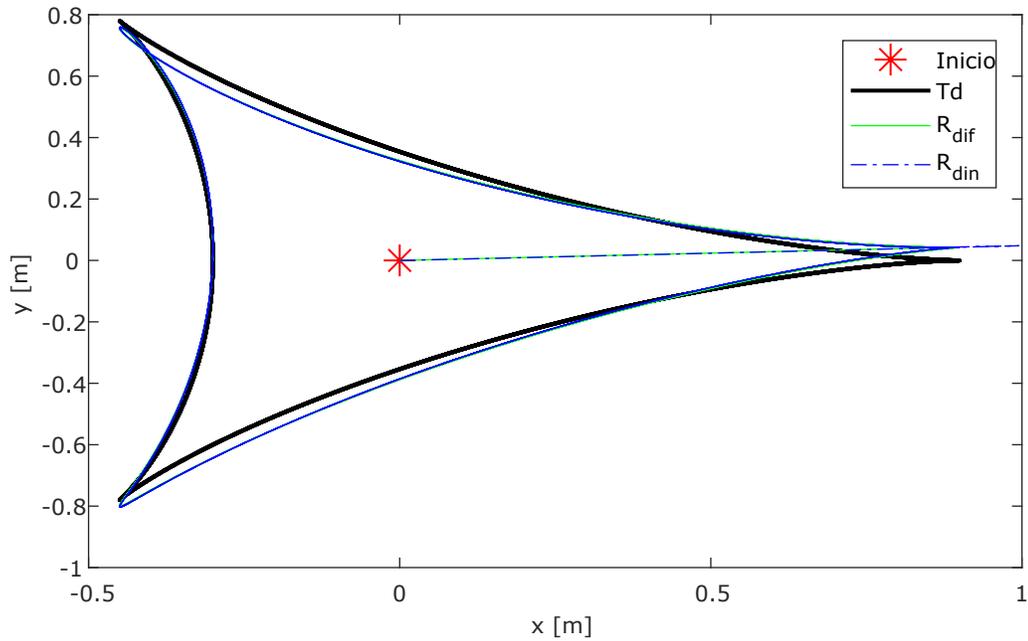


Figura 18. Gráfica correspondiente a la trayectoria deltoide del primer caso.

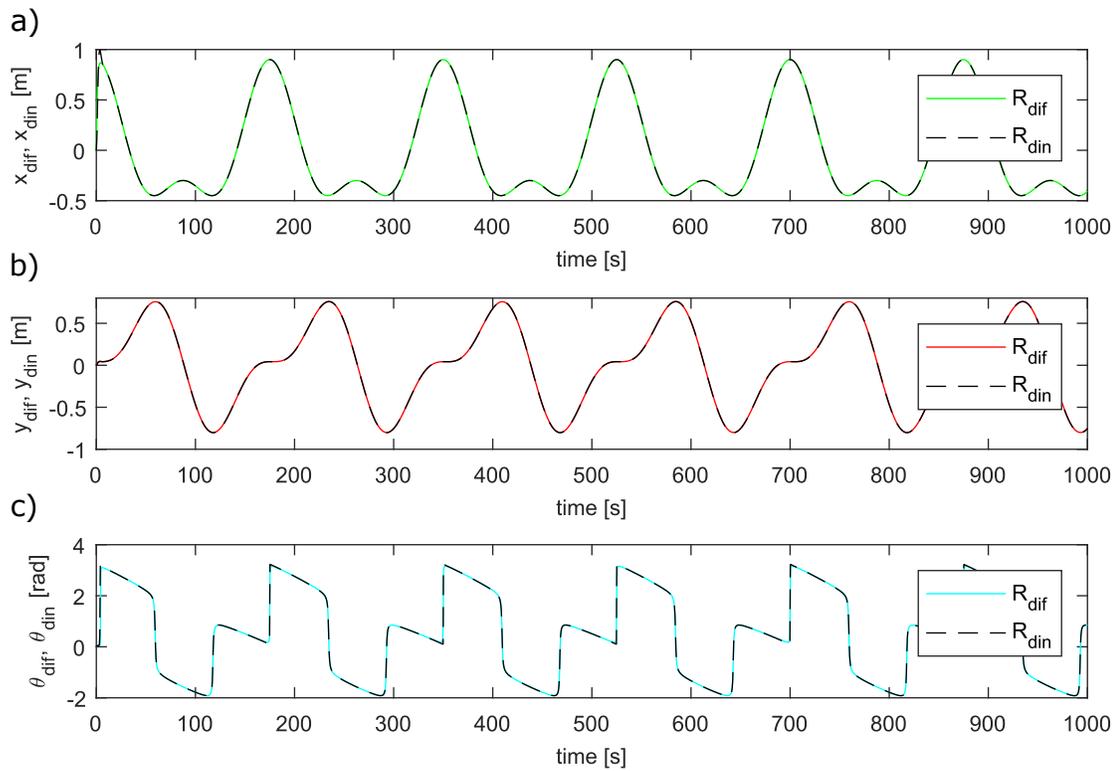


Figura 19. Gráficas correspondientes a la dinámica de x , y y θ de los robots móviles maestros, para la trayectoria deltoide del primer caso.

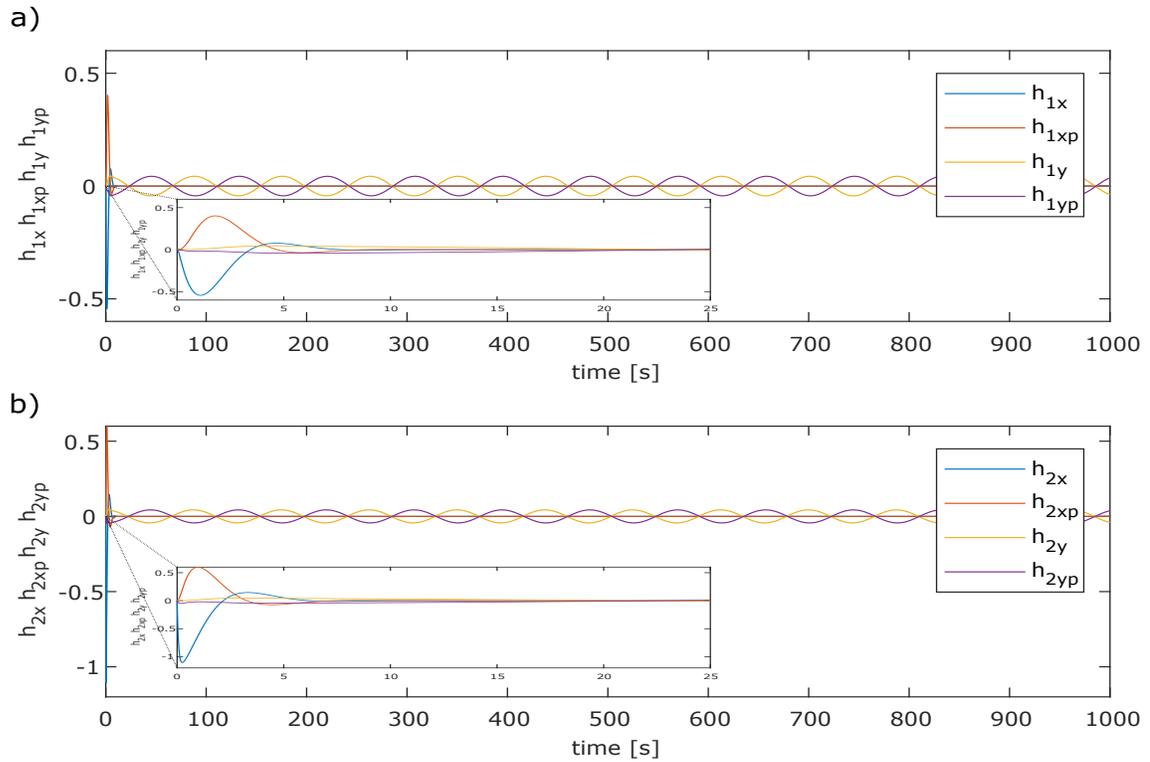


Figura 20. Gráfica correspondiente a la dinámica de los estados del acoplamiento dinámico para la trayectoria deltoide del primer caso.

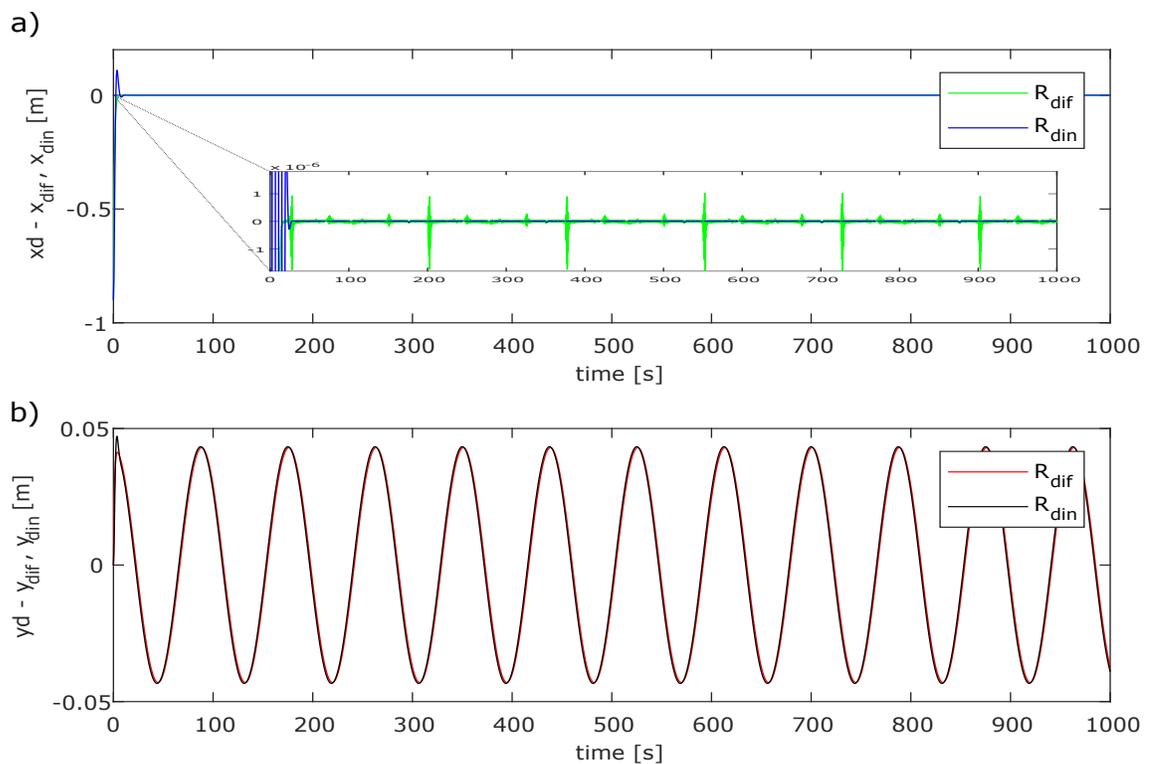


Figura 21. Gráfica correspondiente al error de los robots maestros respecto a la trayectoria deltoide del primer caso.

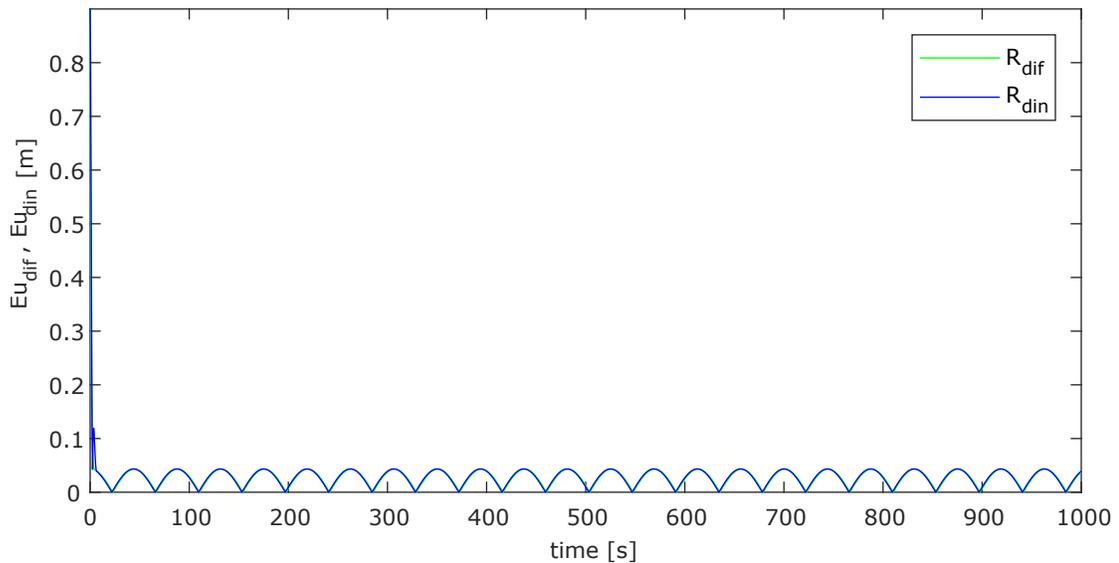


Figura 22. Gráfica correspondiente a la norma euclidiana de los robots maestros respecto a la trayectoria deltoide del primer caso.

3.1.3. Seguimiento de la trayectoria elefante

En la figura 23 se muestra la gráfica correspondiente a la *trayectoria deseada elefante* (color negro), la trayectoria realizada por el robot M_2 con acoplamiento difusivo (color verde) y la trayectoria realizada por el robot M_1 con acoplamiento dinámico (color azul), empleando los valores para los parámetros $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = k = 10$, $\gamma_1 = 1.7$ y $\gamma_2 = 6$. Donde se observa que ambos robots alcanzan a trazar la trayectoria deseada elefante de manera satisfactoria. La figura 24 presenta las dinámicas de los estados x , y y θ correspondientes a cada robot. En la figura 25 se muestran las dinámicas correspondientes a los estados del sistema utilizado como acoplamiento dinámico. La gráficas de la figura 26 presentan las dinámicas de los errores en x y y respectivamente, tomando como referencia la trayectoria deseada elefante. En ambos casos, x y y , el error correspondiente al robot M_2 con acoplamiento difusivo presenta dinámicas no suaves con una amplitud mayor que la del error del robot M_1 con acoplamiento dinámico. Los valores obtenidos al calcular la norma euclidiana son $Eu_{dif} = 61.3957$ y $Eu_{din} = 68.3059$ (ver figura 27).

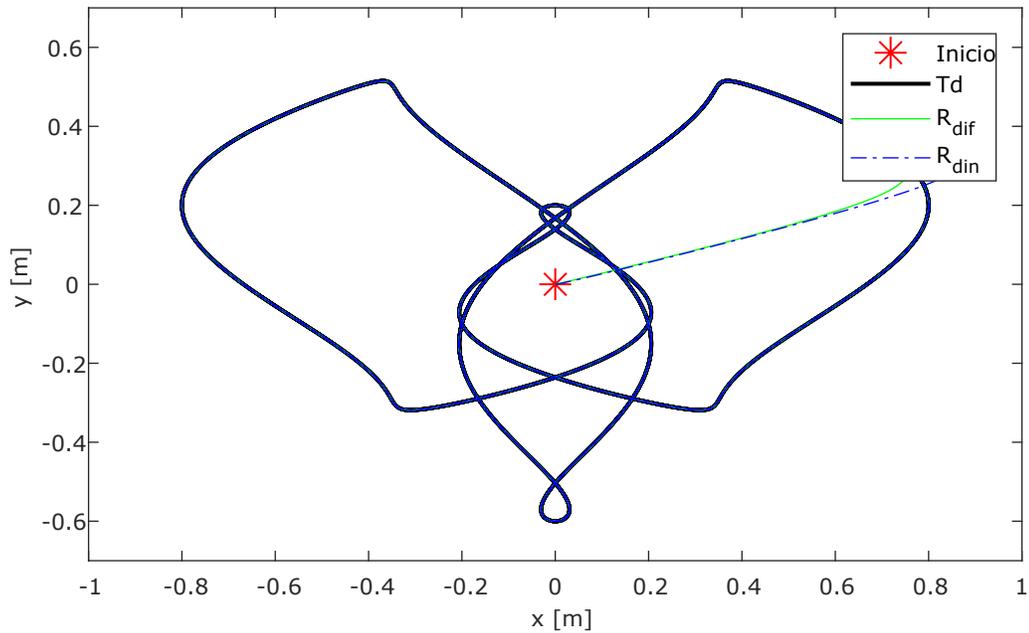


Figura 23. Gráfica correspondiente a la trayectoria elefante del primer caso.

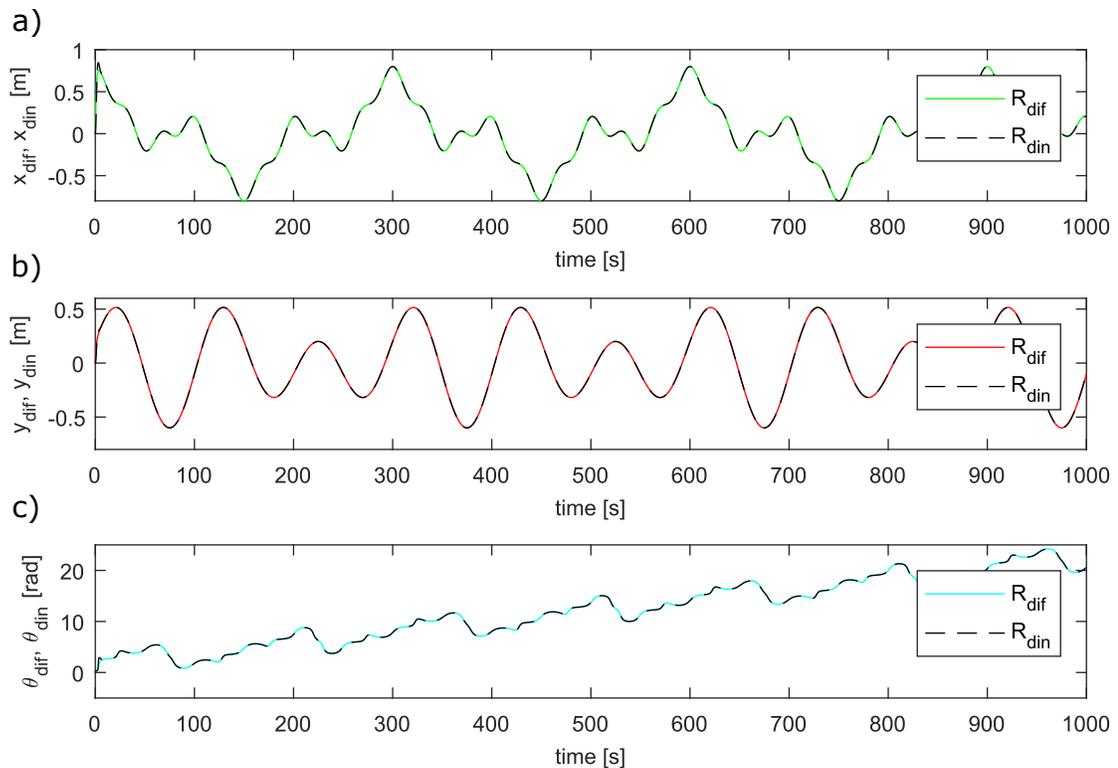


Figura 24. Gráficas correspondientes a la dinámica de x , y y θ de los robots móviles maestros, para la trayectoria elefante del primer caso.

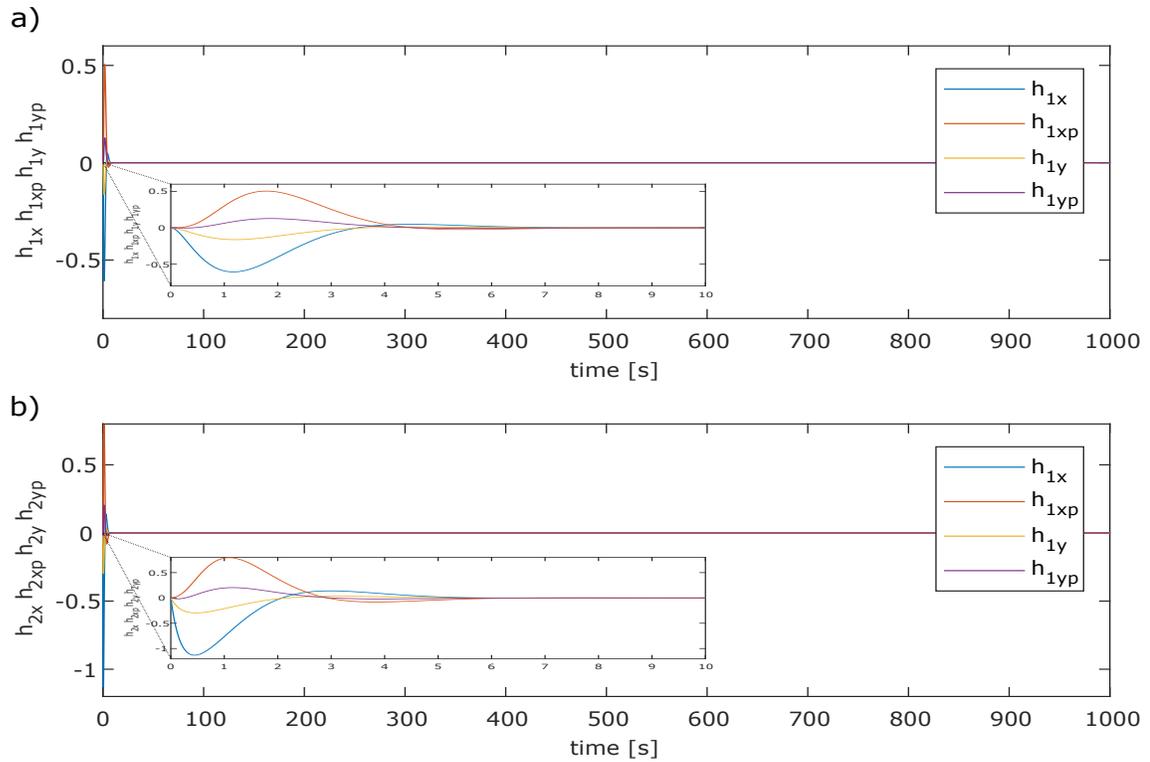


Figura 25. Gráfica correspondiente a la dinámica de los estados del acoplamiento dinámico para la trayectoria elefante del primer caso.

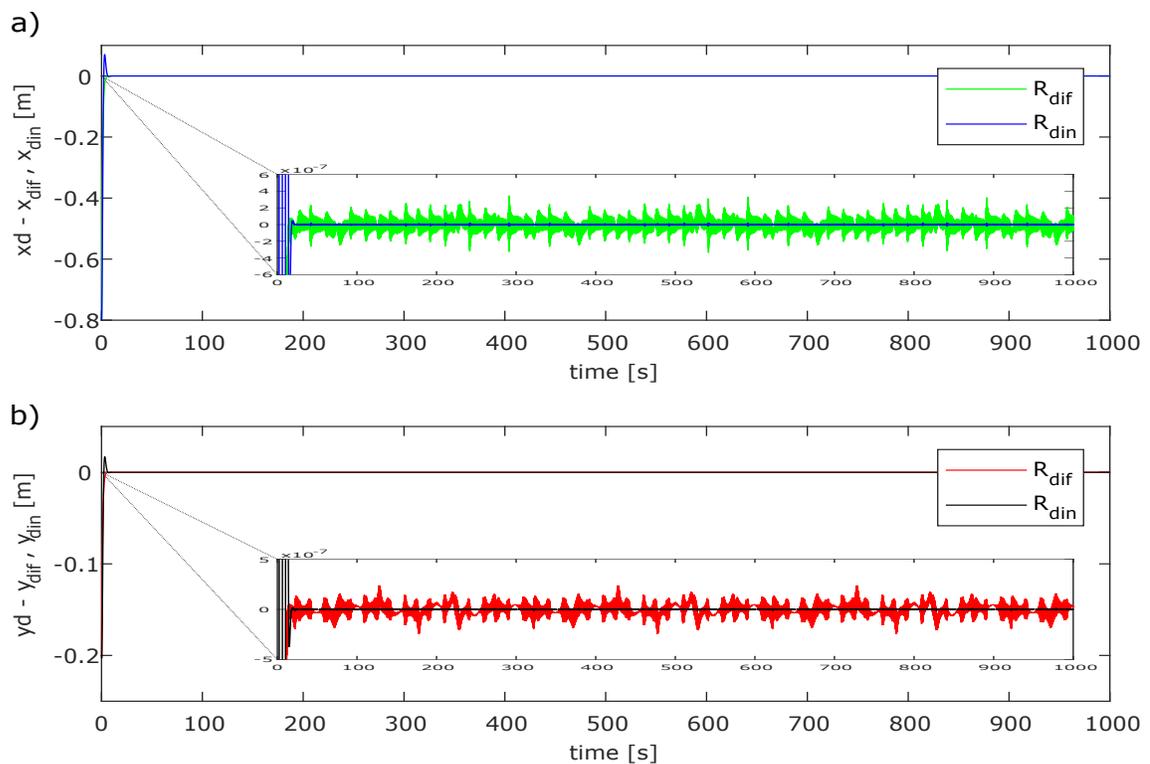


Figura 26. Gráfica correspondiente al error de los robots maestros respecto a la trayectoria elefante del primer caso.

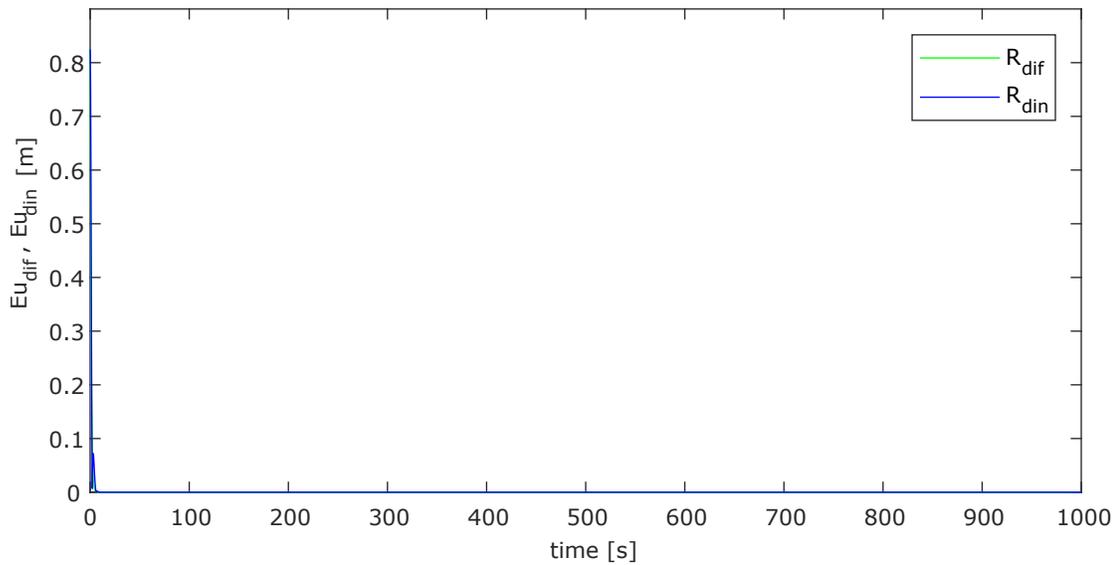


Figura 27. Gráfica correspondiente a la norma euclidiana de los robots maestros respecto a la trayectoria elefante del primer caso.

3.2. Segundo caso: acoplamiento maestro-esclavo difusivo vs maestro-esclavo dinámico

En este escenario, a cada robot M_1 y M_2 se le agrega un robot esclavo S_1 (vía acoplamiento dinámico) y S_2 (vía acoplamiento difusivo), respectivamente. Nuevamente se somete a las estructuras $M_1 - S_1$ y $M_2 - S_2$ a seguir tres trayectorias deseadas: infinito o lemniscata, deltoide y elefante, con el propósito de realizar un análisis comparativo entre ambas estructuras (ver figura 12).

Las condiciones iniciales utilizadas son: $\mathbf{x}_{M_i}(0) = (x_{M_i}(0) = 0, y_{M_i}(0) = 0, \theta_{M_i}(0) = 0, \xi_{M_i}(0) = 0.02)^T$, $\mathbf{x}_{S_j}(0) = (x_{S_j}(0) = 0, y_{S_j}(0) = 0, \theta_{S_j}(0) = 0, \xi_{S_j}(0) = 0.05)^T$, $\mathbf{h}_{M_i}(0) = \mathbf{h}_{S_j}(0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ y $\Delta_{x_{M_i}} = \Delta_{y_{M_i}} = \Delta_{x_{S_j}} = \Delta_{y_{S_j}} = 0$, con $i = 1, 2$ y $j = 1$.

3.2.1. Seguimiento de la trayectoria infinito

En la figura 28 se muestra la gráfica correspondiente a la *trayectoria deseada infinito*, la trayectoria realizada por el robot esclavo con acoplamiento difusivo S_2 y la trayectoria realizada por el robot esclavo con acoplamiento dinámico S_1 , empleando los valores para los parámetros $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = k = 20$, $\gamma_1 = -3$ y $\gamma_2 = 3$. Se observa que los robots esclavos S_1 y S_2 logran seguir la trayectoria trazada por sus respectivos maestros M_1 y M_2 (ver figura 28). La figura 29 presenta las dinámicas de

los estados x , y y θ correspondiente a cada robot esclavo, las cuales son muy similares. En la figura 30 se muestran las dinámicas correspondientes a los estados del sistema utilizado como acoplamiento dinámico maestro y esclavo. La gráficas de la figura 31 presentan la dinámica de los errores en x y y respectivamente, tomando como referencia la trayectoria deseada. En ellas se puede identificar un incremento en ambos errores tanto para el robot S_2 con acoplamiento difusivo como para el dinámico S_1 . Los valores obtenidos al calcular la norma euclidiana son $Eu_{dif} = 26.00043$ y $Eu_{din} = 16.69002$ (ver figura 32).

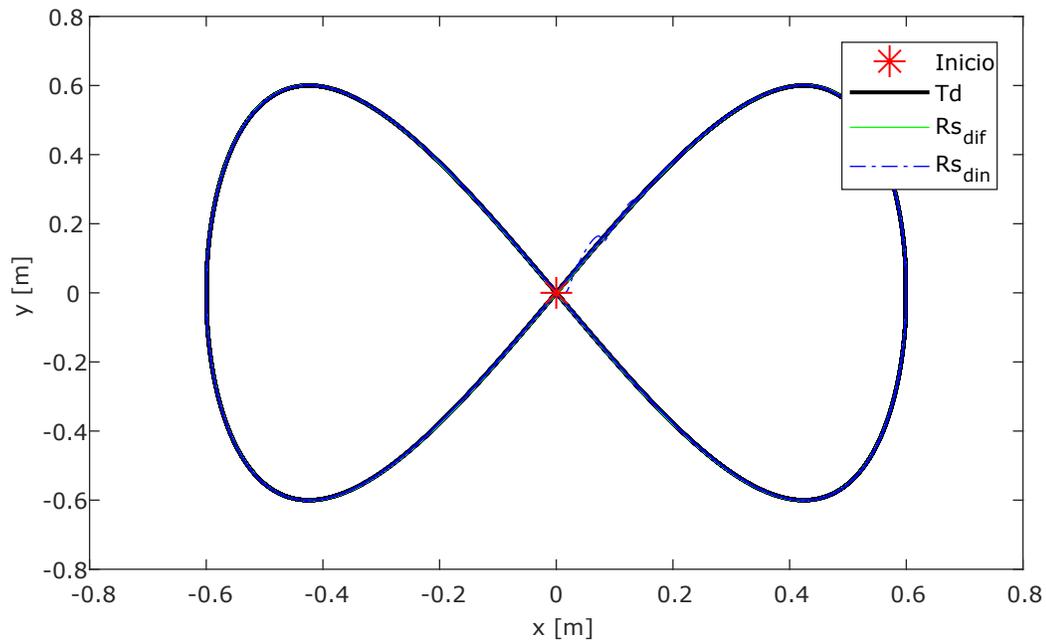


Figura 28. Gráfica correspondiente a la trayectoria infinito del segundo caso.

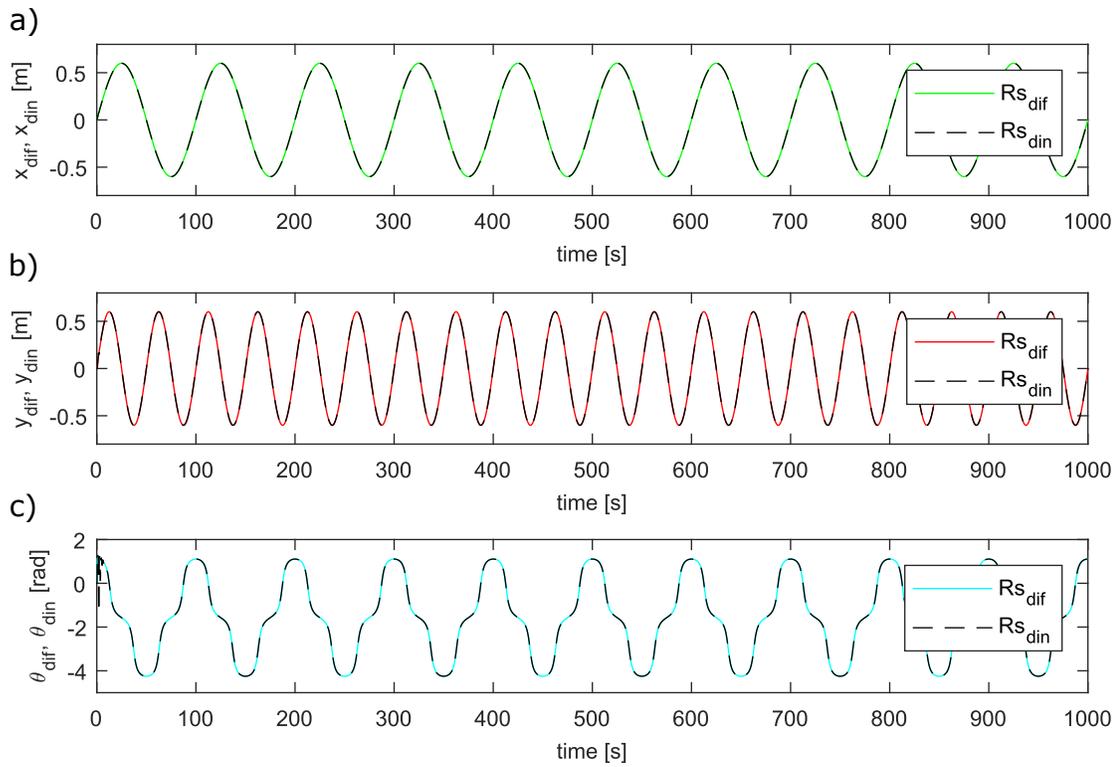


Figura 29. Gráficas correspondientes a la dinámica de x , y y θ de los robots móviles esclavos, para la trayectoria infinito del segundo caso.

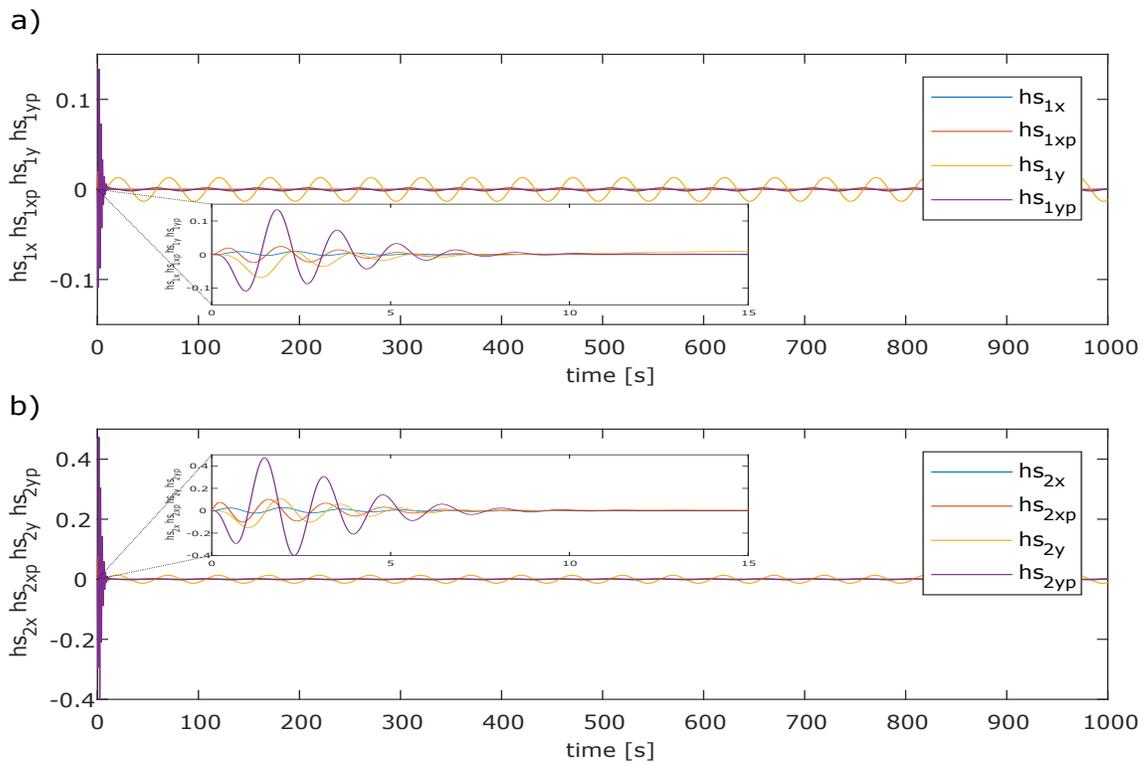


Figura 30. Gráfica correspondiente a la dinámica de los estados del acoplamiento dinámico para la trayectoria infinito del segundo caso.

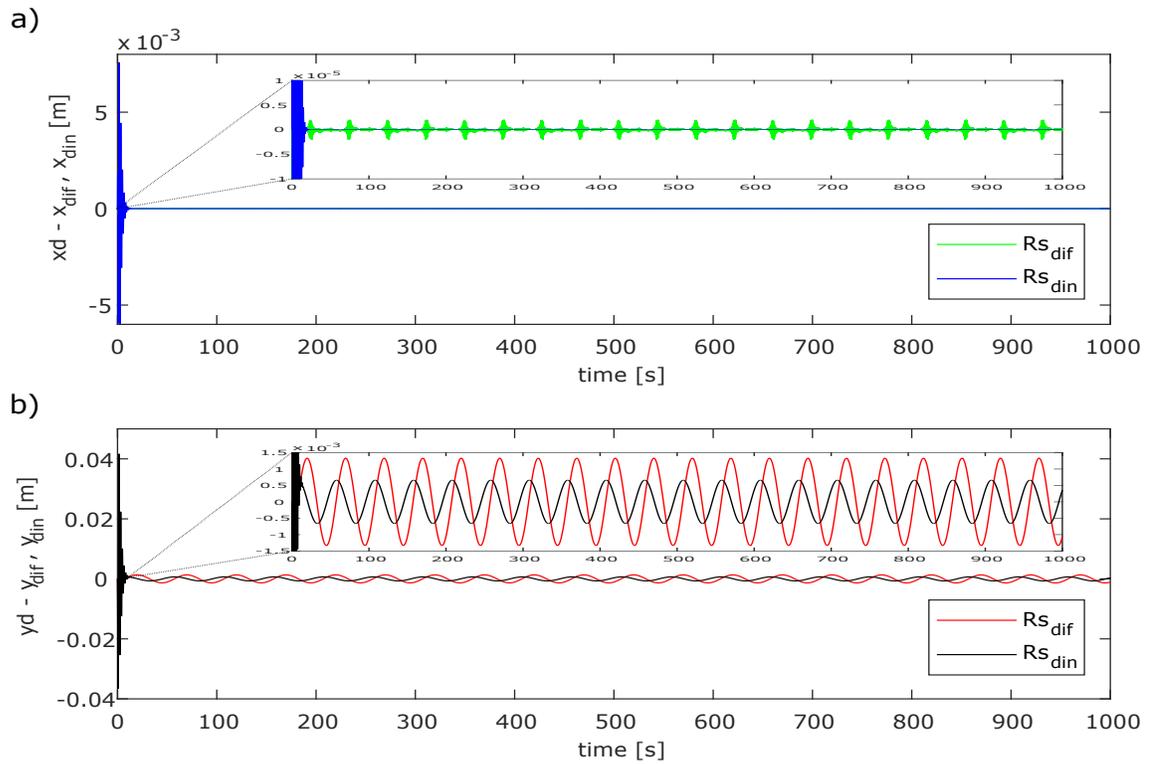


Figura 31. Gráfica correspondiente al error de los robots esclavos respecto a la trayectoria infinito del segundo caso.

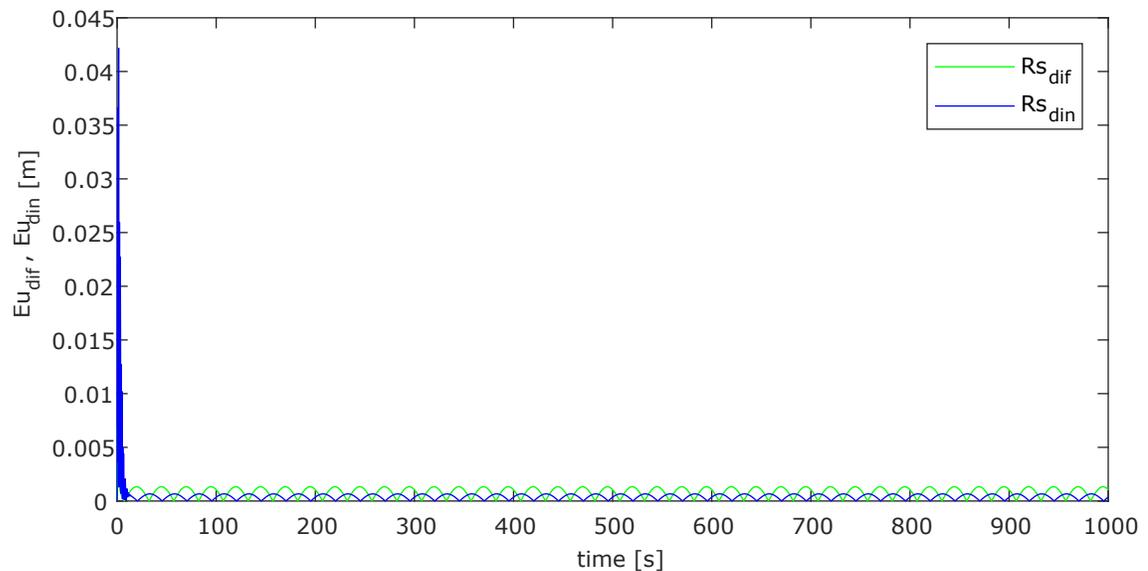


Figura 32. Gráfica correspondiente a la norma euclidiana de los robots esclavos respecto a la trayectoria infinito del segundo caso.

3.2.2. Seguimiento de la trayectoria deltoide

La figura 33 muestra la gráfica correspondiente a la *trayectoria deseada deltoide*, la trayectoria realizada por el robot S_2 con acoplamiento difusivo y la trayectoria realizada por el robot S_1 con acoplamiento dinámico, empleando los valores para los parámetros $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = k = 20$, $\gamma_1 = 5$ y $\gamma_2 = 15$. En ella, se observa que los robots esclavos S_1 y S_2 realizan la trayectoria con un cierto desfase en y , ligeramente mayor que el de sus respectivos maestros M_1 y M_2 (ver figura 18). La figura 34 presenta la dinámica de los estados x , y y θ correspondiente a cada robot. Se observa que las dinámicas de x y y son muy similares con pequeñas diferencias en el transitorio, pero es en el estado θ donde se presenta una diferencia muy notable, debida posiblemente a un giro que el robot S_2 con acoplamiento difusivo estaría realizando. A pesar de este giro, el robot S_2 no presenta dificultad para continuar con el seguimiento de la trayectoria. En la figura 35 se muestran las dinámicas correspondientes a los estados del sistema utilizado como acoplamiento dinámico. La gráficas de la figura 36 presentan la dinámica de los errores en x y y respectivamente, tomando como referencia la trayectoria deltoide deseada. Es posible apreciar un ligero incremento en el error de seguimiento por parte de ambos robots esclavos tanto en x como en y . Los valores obtenidos al calcular la norma euclidiana son $Eu_{dif} = 9.5860 \times 10^2$ y $Eu_{din} = 10.5071 \times 10^2$ (ver figura 37).

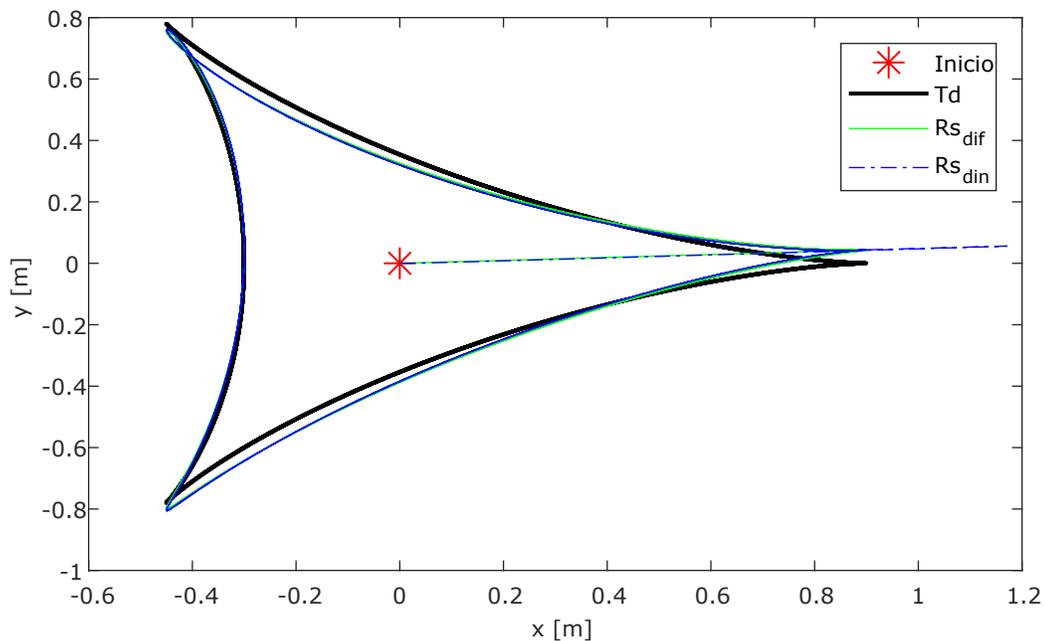


Figura 33. Gráfica correspondiente a la trayectoria deltoide del segundo caso.

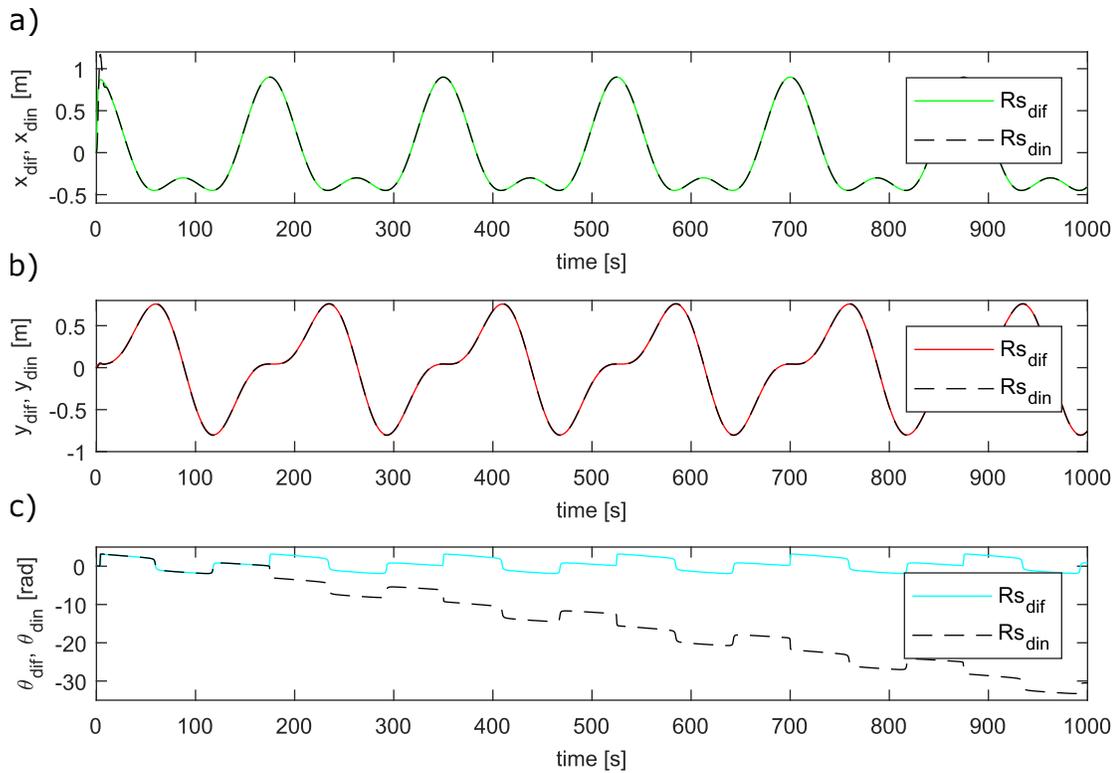


Figura 34. Gráficas correspondientes a la dinámica de x , y y θ de los robots móviles esclavos, para la trayectoria deltoide del segundo caso.

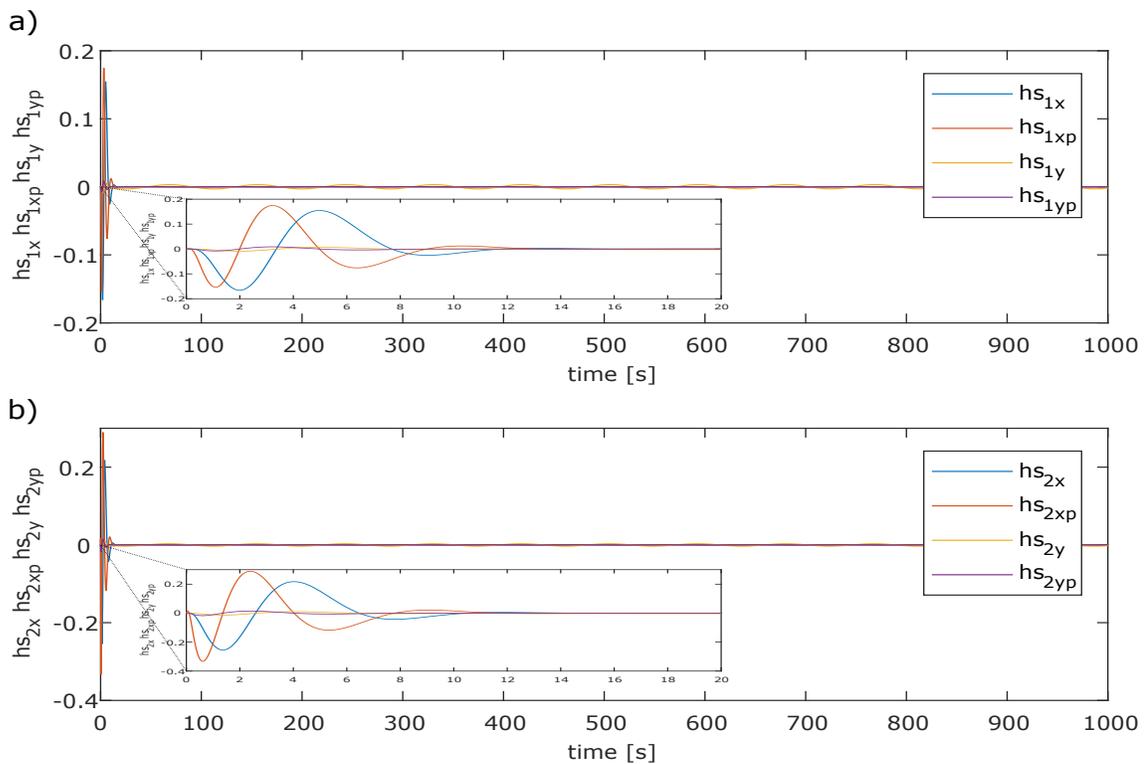


Figura 35. Gráfica correspondiente a la dinámica de los estados del acoplamiento dinámico para la trayectoria deltoide del segundo caso.

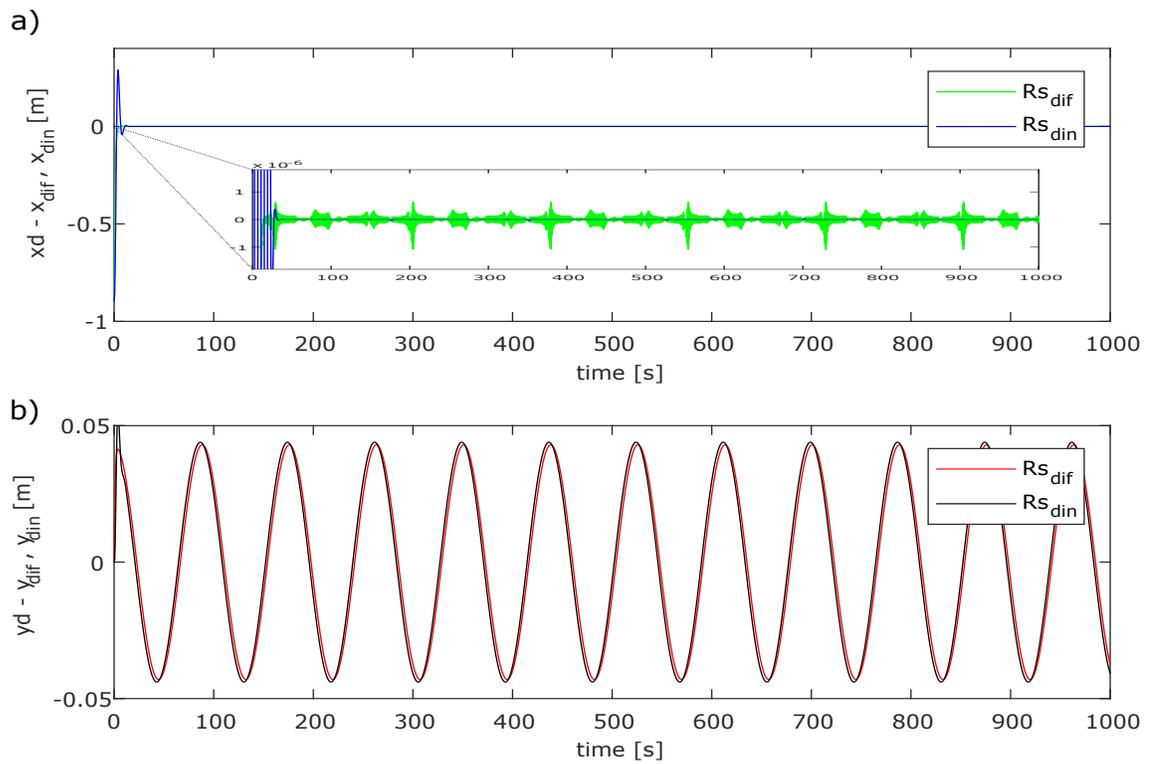


Figura 36. Gráfica correspondiente al error de los robots esclavos respecto a la trayectoria deltoide del segundo caso.

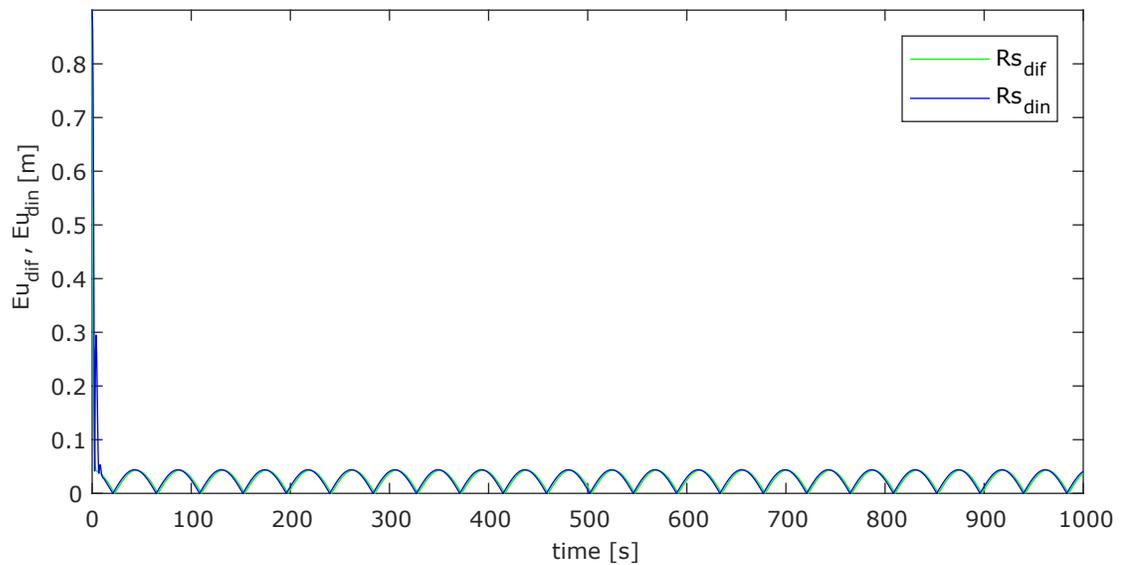


Figura 37. Gráfica correspondiente a la norma euclidiana de los robots esclavos respecto a la trayectoria deltoide del segundo caso.

3.2.3. Seguimiento de la trayectoria elefante

En la figura 38 se muestra la gráfica correspondiente a la *trayectoria deseada elefante*, la trayectoria realizada por el robot con acoplamiento difusivo y la trayectoria realizada por el robot con acoplamiento dinámico, empleando los valores de los parámetros $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = k = 10$, $\gamma_1 = 1.7$ y $\gamma_2 = 6$. Se observa que ambos robots alcanzan a trazar la trayectoria de sus respectivos maestros de manera satisfactoria (ver figura 23). La figura 39 presenta la dinámica de los estados x , y y θ correspondiente a cada robot. En la figura 40 se muestran las dinámicas correspondientes a los estados del sistema utilizado como acoplamiento dinámico. La gráficas de la figura 41 presentan la dinámica de los errores en x y y respectivamente, tomando como referencia la trayectoria elefante deseada. En ambos casos, tanto para el robot S_2 con acoplamiento difusivo como para el robot S_1 con acoplamiento dinámico, los errores presentan un incremento en su amplitud. Sin embargo, el error correspondiente al acoplamiento difusivo es mayor que el del acoplamiento dinámico. Los valores obtenidos al calcular la norma euclidiana son $Eu_{dif} = 72.55$ y $Eu_{din} = 97.87$ (ver figura 42).

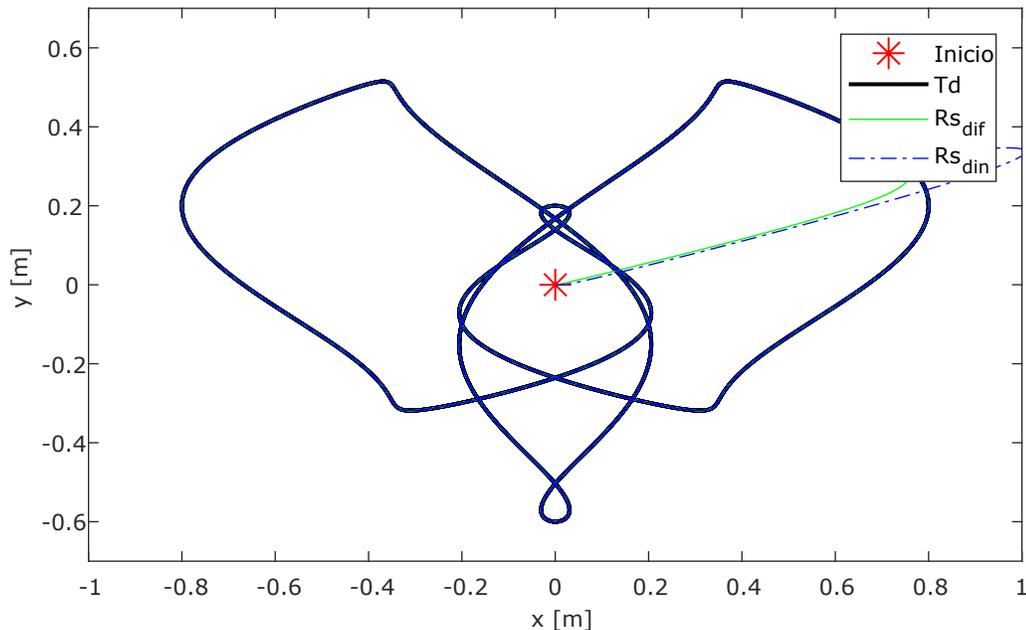


Figura 38. Gráfica correspondiente a la trayectoria elefante del segundo caso.

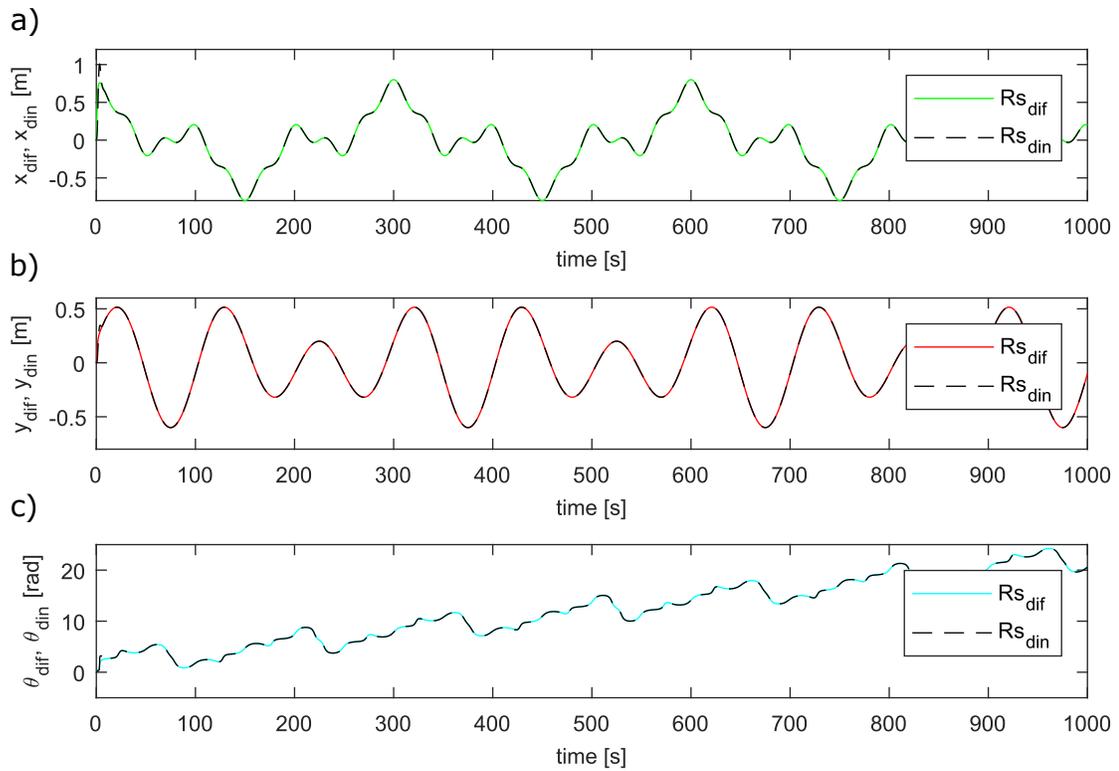


Figura 39. Gráficas correspondientes a la dinámica de x , y y θ de los robots móviles esclavos, para la trayectoria elefante del segundo caso.

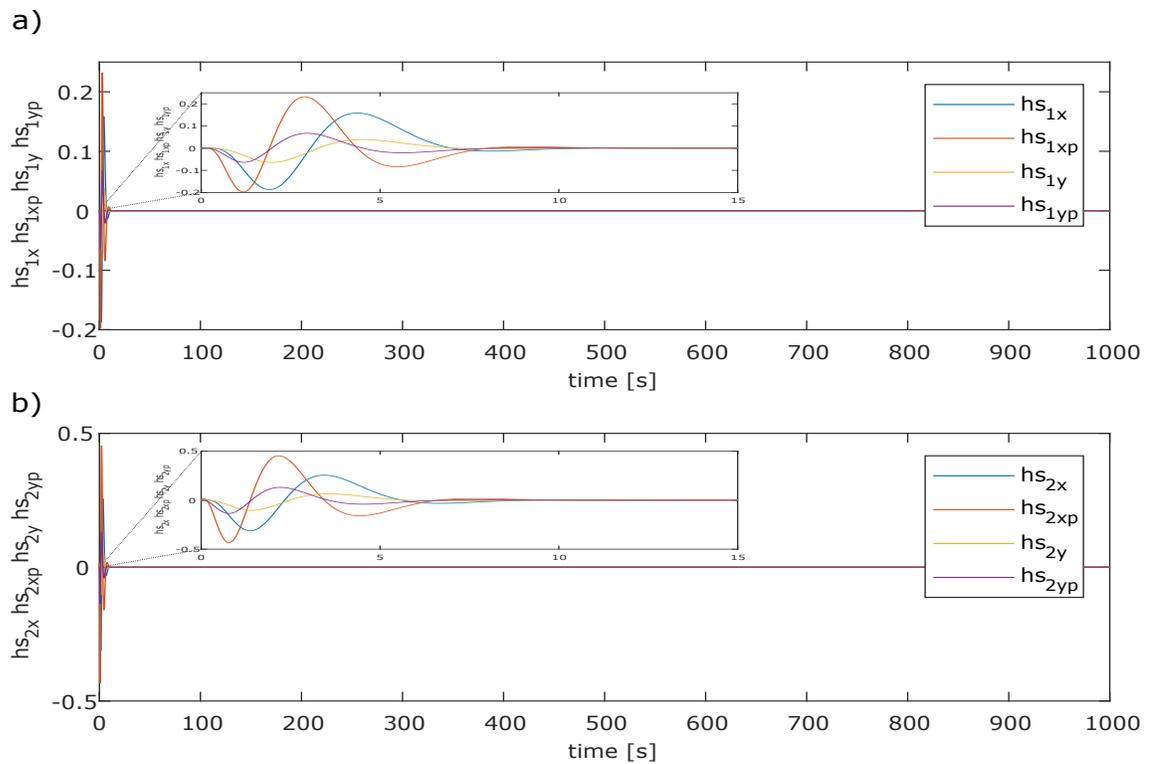


Figura 40. Gráfica correspondiente a la dinámica de los estados del acoplamiento dinámico para la trayectoria elefante del segundo caso.

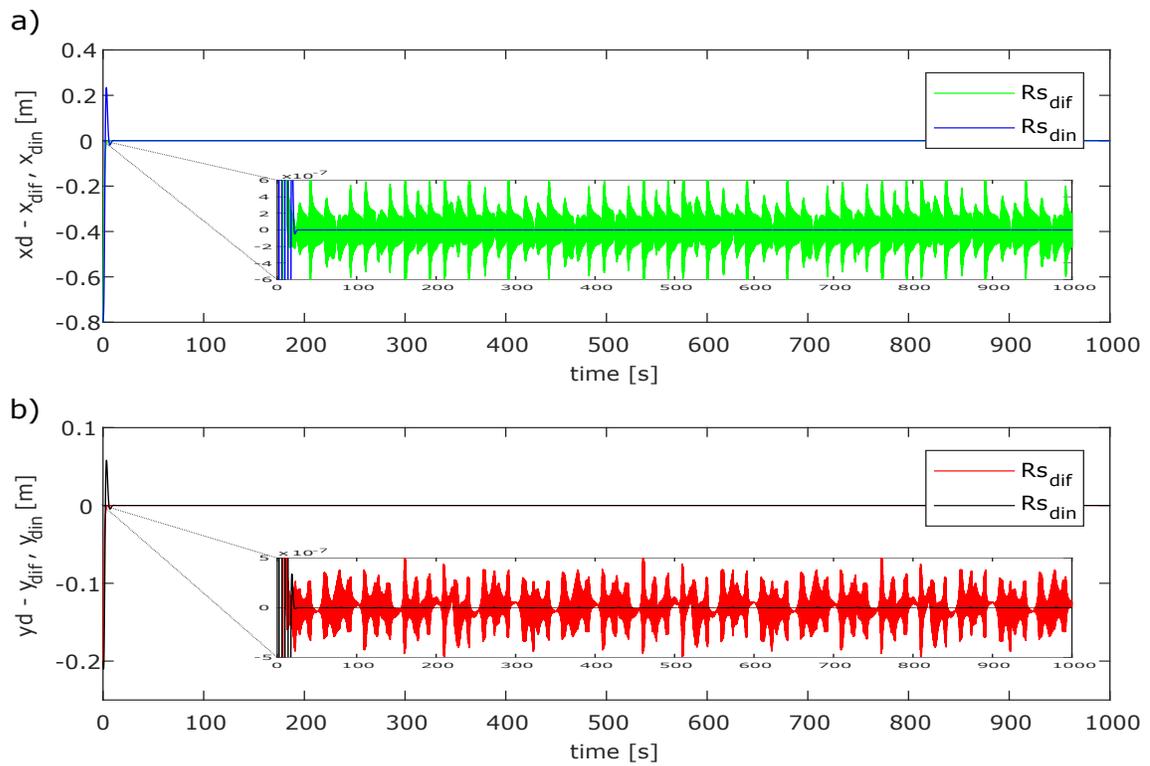


Figura 41. Gráfica correspondiente al error de los robots maestros respecto a la trayectoria elefante del segundo caso.

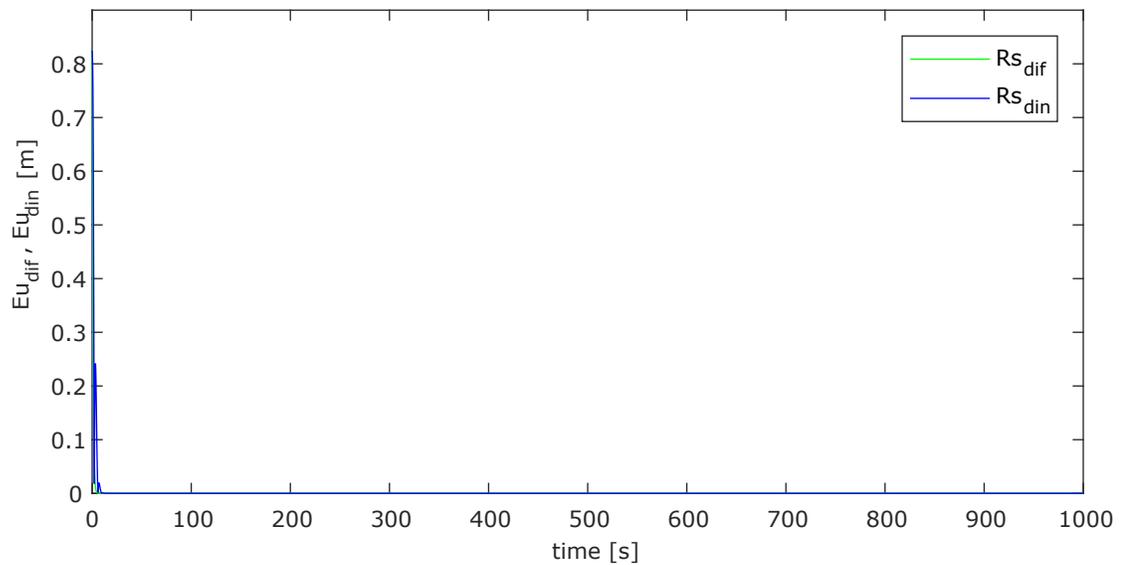


Figura 42. Gráfica correspondiente a la norma euclidiana de los robots maestros respecto a la trayectoria elefante del segundo caso.

3.3. Discusión

De los resultados obtenidos en estos dos primeros escenarios, se puede observar que para el estado transitorio, el acoplamiento dinámico presenta un error mayor respecto al del acoplamiento difusivo. El cual, puede ser igualado o incluso reducido a un valor menor al de este último, al seleccionar los valores correctos para γ_1 y γ_2 . Sin embargo, la etapa que realmente es de nuestro interés para su análisis, es la del estado estacionario. Donde fácilmente se observa el buen desempeño que ofrece el acoplamiento dinámico respecto al difusivo, pues en los casos presentados para las 3 diferentes trayectorias deseadas, su error convencional es mucho menor y más suave. En el caso de la norma euclidiana, para las trayectorias deltoide y elefante, el valor correspondiente a la suma de norma euclidiana para el acoplamiento dinámico es mayor que el del difusivo. Esto se debe precisamente al error presentado en el transitorio por parte del acoplamiento dinámico. No obstante, como se puede apreciar en las gráficas correspondientes, si sólo se toma en cuenta el estado estacionario, este valor claramente sería mucho menor al del acoplamiento difusivo. Cabe mencionar que el acoplamiento dinámico, al ser un sistema independiente al sistema que nos interesa controlar, permite utilizar valores grandes en los parámetros sin poner en riesgo nuestro sistema de interés (nodos de las redes).

3.4. Análisis comparativo en sincronización de redes con topología de cadena y anillo

Debido a que el principal objetivo de este trabajo de tesis es la sincronización externa de redes dinámicas complejas empleando acoplamientos dinámicos. También se realizaron simulaciones numéricas correspondientes a la **sincronización interna de redes** compuestas por 5 robots móviles de tracción diferencial como nodos, las cuales se encuentran acoplados en las topologías de *cadena* y *anillo* (ver figuras 43 y 44). Lo anterior, con la finalidad de observar el desempeño que presenta cada uno de los acoplamientos (dinámico y difusivo), frente a diferentes topologías de conexión, al acoplar un cierto número de robots esclavos al robot maestro R_1 .

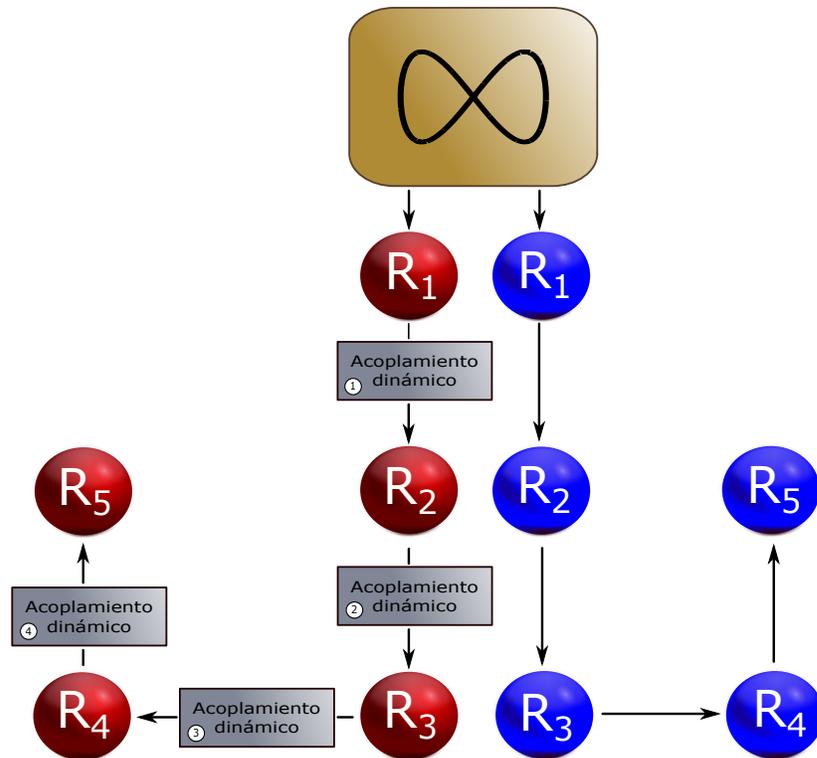


Figura 43. Diagrama correspondiente a las redes con topología en cadena utilizada en el análisis comparativo.

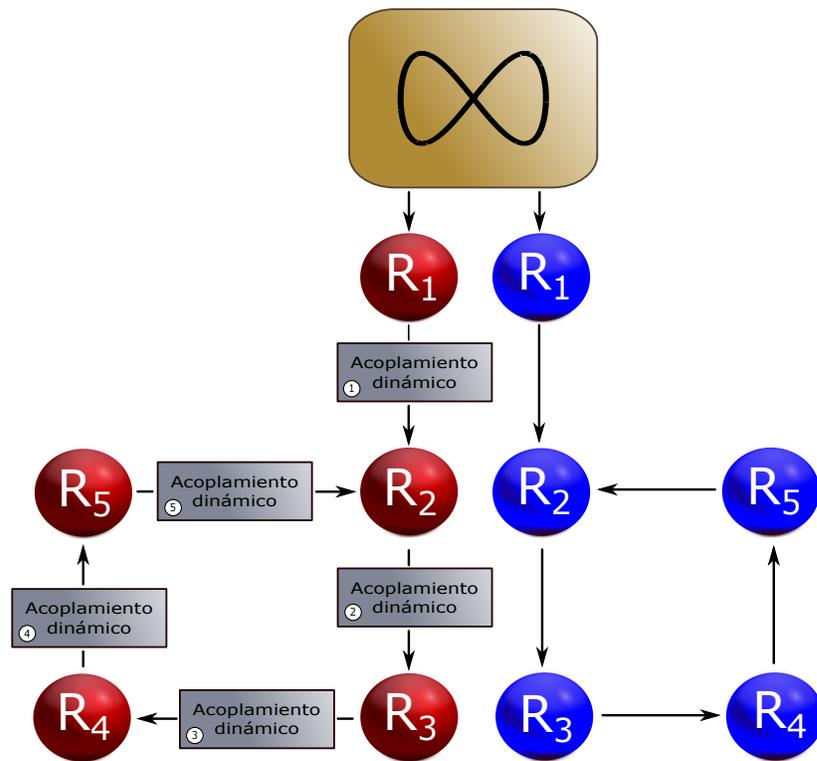


Figura 44. Diagrama correspondiente a las redes con topología en anillo utilizada en el análisis comparativo.

Redes con topología en cadena

La *matriz de acoplamiento* correspondiente a la red con topología de conexión en cadena mostrada en la figura 43, compuesta por 5 robots móviles de tracción diferencial ($N = 5$), es la siguiente:

$$\mathbf{A}_{cadena} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Las entradas de control para $i = 2, \dots, N$ de los robots móviles diferenciales esclavos R_i , $i = 2, \dots, 5$ que emplean el acoplamiento difusivo quedan descritas como sigue:

$$u_{1i} = c_{1i} \sum_{j=1}^N a_{ji} x_j + c_{2i} \sum_{i=1}^N a_{ij} \dot{x}_i, \quad (54)$$

$$u_{2i} = c_{3i} \sum_{j=1}^N a_{ji} y_j + c_{4i} \sum_{i=1}^N a_{ij} \dot{y}_i. \quad (55)$$

$$(56)$$

Para los robots móviles diferenciales esclavos R_i , $i = 1, \dots, N$ que utilizan el acoplamiento dinámico, las entradas de control quedan definidas como:

$$u_{1i} = \beta_{1i} \sum_{j=1}^N \mu_{ji} h_{2x_i} + \beta_{1i} \sum_{i=1}^N \mu_{ij} h_{2\dot{x}_i}, \quad (57)$$

$$u_{2i} = \beta_{2i} \sum_{j=1}^N \mu_{ji} h_{2y_i} + \beta_{2i} \sum_{i=1}^N \mu_{ij} h_{2\dot{y}_i}, \quad (58)$$

donde μ_{ji} y μ_{ij} son los elementos de una matriz de m renglones (robots) y n columnas (acoplamientos dinámicos), formada por "unos" y "ceros". Colocando un 1 al robot esclavo con su acoplamiento dinámico correspondiente y 0 para otro caso. La matriz correspondiente a la red en cadena mostrada en la figura 43, es la siguiente

$$\mathbf{M}_{cadena} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (59)$$

mientras que los estados \mathbf{h} son descritos por (46)-(49), donde \mathbf{x}_m y \mathbf{x}_s son los estados de los robots móviles maestro y esclavo que corresponden al acoplamiento dinámico en cuestión.

En la figura 45 se muestra la gráfica correspondiente a la *trayectoria deseada infinito* utilizada en este análisis comparativo, así como las trayectorias trazadas por los robots móviles R_{5dif} y R_{5din} , empleando los valores de los parámetros $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = k = 60$, $\gamma_1 = -9$ y $\gamma_2 = 9$. Donde se observa a primera vista que ambos acoplamientos cumplen correctamente con el objetivo de sincronización, pues ambos robots logran seguir la trayectoria de manera correcta. Sin embargo, una vez analizando las

gráficas que corresponden a los errores (ver figura 46), se encuentra que para el eje x , el error que presenta el acoplamiento difusivo es mucho mayor al del acoplamiento dinámico. Incluso se podría decir, que el error del acoplamiento difusivo no tiende a cero en el estado estacionario, sino que sus valores se mantienen oscilando entre -1.5×10^{-3} y 1.5×10^{-3} . Mientras que el error del acoplamiento dinámico presenta un par de oscilaciones en el estado transitorio para luego alcanzar un valor muy cercano a cero en aproximadamente 10 unidades de tiempo. En el caso del eje y , ambos errores mantienen sus valores oscilando entre -2×10^{-3} y 2×10^{-3} , siendo el error del acoplamiento difusivo mayor. Los valores obtenidos al calcular la norma euclidiana son $Eu_{dif} = 164.1885$ y $Eu_{din} = 98.7744$ (ver figura 47).

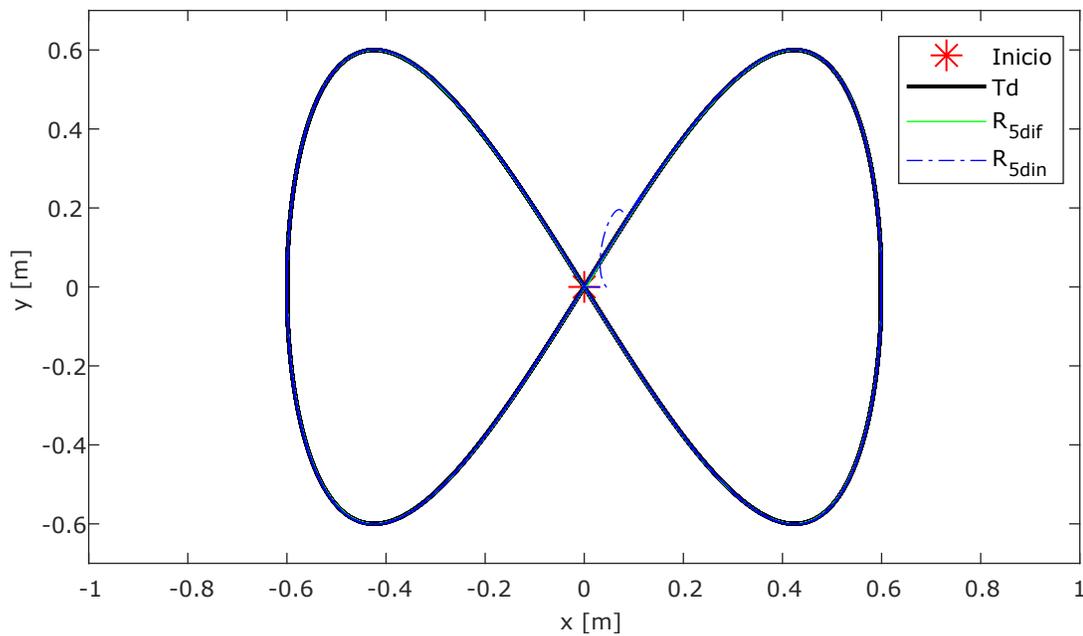


Figura 45. Gráfica correspondientes a la dinámica de x , y y θ de los robots móviles R_{5dif} y R_{5din} , para la topología en cadena, con la trayectoria deseada infinito.

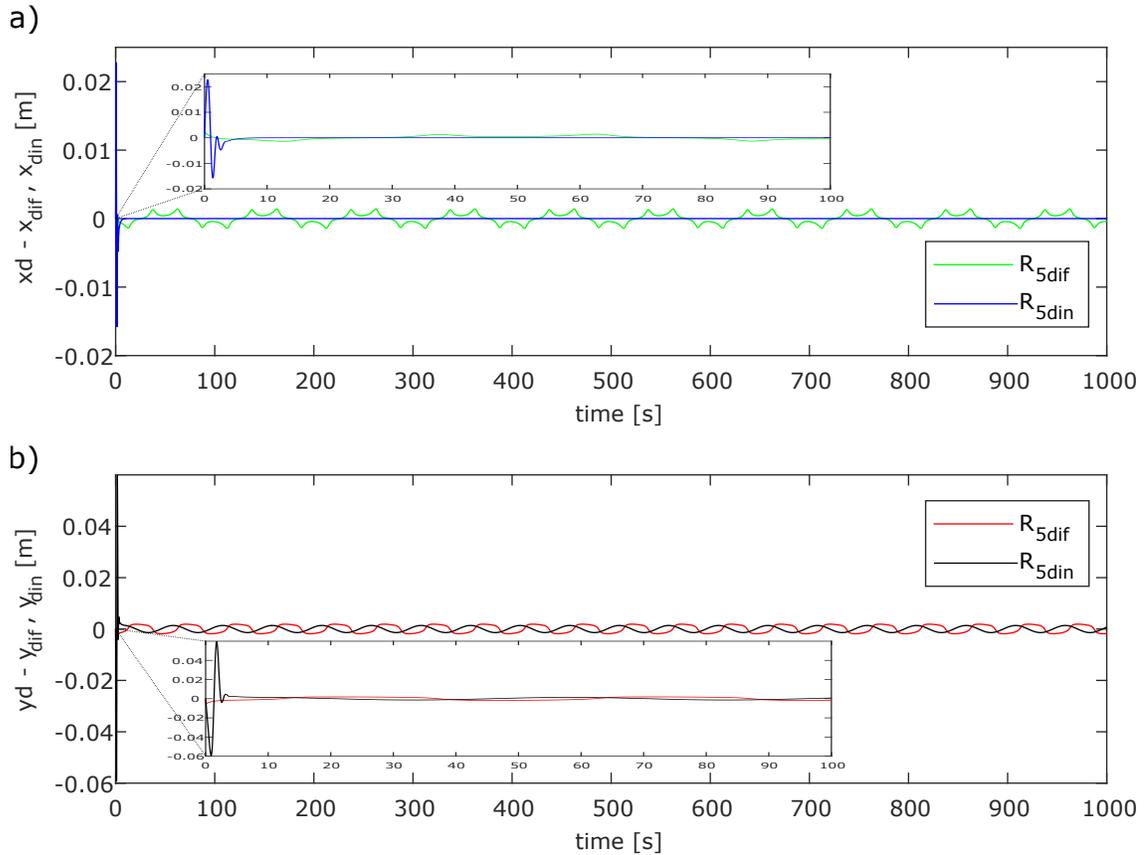


Figura 46. Gráfica correspondiente al error de los robots R_{5dif} y R_{5din} , respecto a la trayectoria deseada infinito.

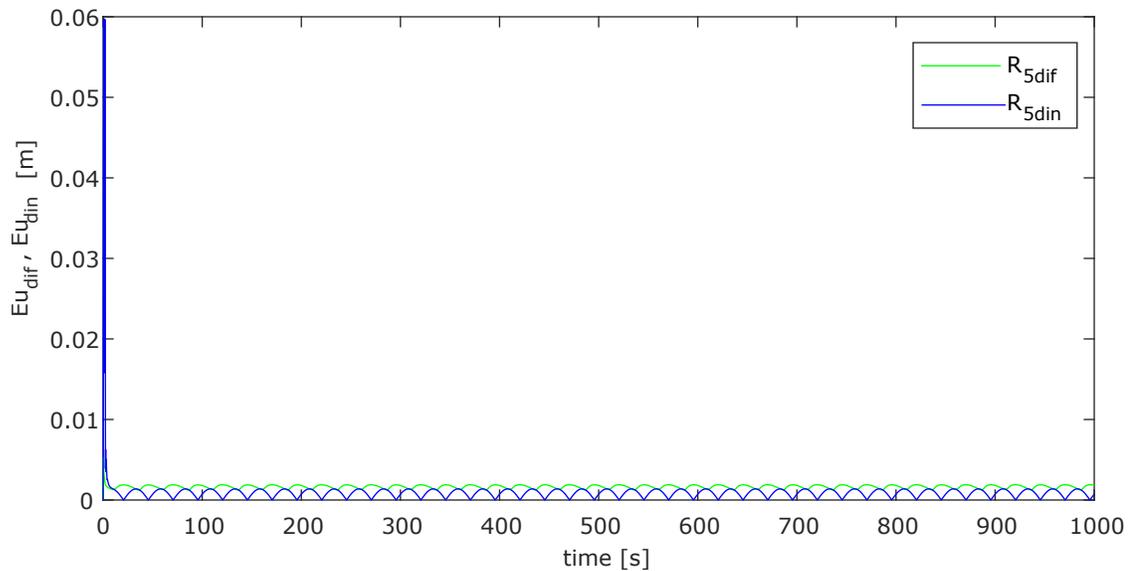


Figura 47. Gráfica correspondiente a la norma euclidiana de los robots R_{5dif} y R_{5din} , respecto a la trayectoria deseada infinito.

Redes con topología en anillo

La *matriz de acoplamiento* correspondiente a la red con topología de conexión en anillo mostrada en la figura 44, compuesta con 5 robots móviles diferenciales ($N = 5$), es la siguiente,

$$\mathbf{A}_{cadena} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (60)$$

Las entradas control para $i = 2, 3, \dots, N$, para los robots móviles diferenciales esclavos que emplean el acoplamiento difusivo quedan descritas como sigue:

$$u_{1i} = c_{1i} \sum_{j=1}^N a_{ji} x_j + c_{2i} \sum_{i=1}^N a_{ij} \dot{x}_i, \quad (61)$$

$$u_{2i} = c_{3i} \sum_{j=1}^N a_{ji} y_j + c_{4i} \sum_{i=1}^N a_{ij} \dot{y}_i. \quad (62)$$

$$(63)$$

Para los robots móviles diferenciales esclavos que utilizan el acoplamiento dinámico, las entradas de control quedan definidas como:

$$u_{1i} = \beta_{1i} \sum_{j=1}^N \mu_{ji} h_{2x_i} + \beta_{1i} \sum_{i=1}^N \mu_{ij} h_{2\dot{x}_i}, \quad (64)$$

$$u_{2i} = \beta_{2i} \sum_{j=1}^N \mu_{ji} h_{2y_i} + \beta_{2i} \sum_{i=1}^N \mu_{ij} h_{2\dot{y}_i}, \quad (65)$$

donde μ_{ji} y μ_{ij} son los elementos de la siguiente matriz

$$\mathbf{M}_{anillo} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (66)$$

mientras que los estados \mathbf{h} son descritos por (46)-(49), donde x_m y x_s son los estados de los robots móviles maestro y esclavo que corresponden al acoplamiento dinámico en cuestión.

La figura 48 muestra la gráfica correspondiente a la trayectoria deseada infinito, así como las trayectorias trazadas por los robots móviles R_{5dif} y R_{5din} , empleando los valores de los parámetros $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = k = 90$, $\gamma_1 = -11$ y $\gamma_2 = 11$. En ella se observa, al igual que en el caso de la topología en cadena, que ambos acoplamientos permiten realizar la correcta sincronización interna de la red, por lo que ambos robots móviles esclavos logran seguir la trayectoria de manera correcta. Además de que en esta ocasión se identifica una mayor oscilación en el estado transitorio, por parte del robot que emplea acoplamiento dinámico, lo cual no presenta mayor problema una vez se encuentra en estado estacionario. Al analizar las gráficas correspondientes a los errores en los ejes x y y , en las figuras 49 y 50, se corrobora la presencia de las oscilaciones ya mencionadas. En el estado estacionario, para ambos errores de los acoplamientos, se observa una dinámica muy similar a la observada en el caso de la topología en cadena. La principal diferencia es que la amplitud de los errores en este caso, es menor al del caso anterior, oscilando entre -1×10^{-3} y 1×10^{-3} para el error del acoplamiento difusivo en el eje x . Y para el eje y , entre -1.8×10^{-3} y 1.8×10^{-3} , siendo los errores del acoplamiento difusivo mayores a los mostrados por el acoplamiento dinámico. Los valores obtenidos al calcular la norma euclidiana son $Eu_{dif} = 343.7682$ y $Eu_{din} = 329.2925$ (ver figura 50).

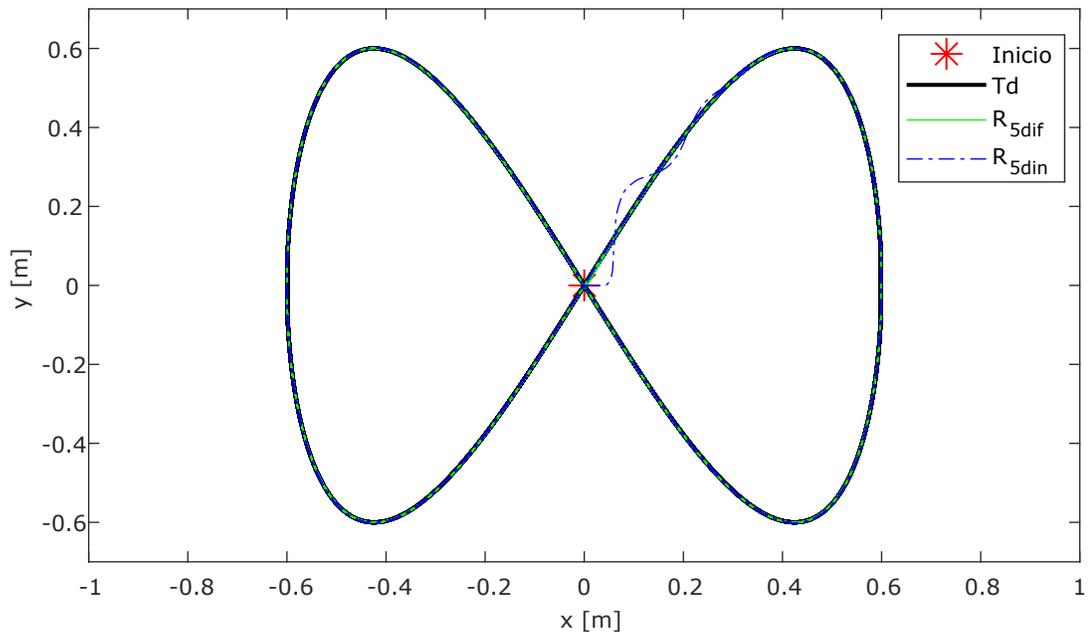


Figura 48. Gráficas correspondientes a la dinámica de x , y y θ de los robots móviles R_{5dif} y R_{5din} , para la topología en anillo, con la trayectoria deseada: infinito.

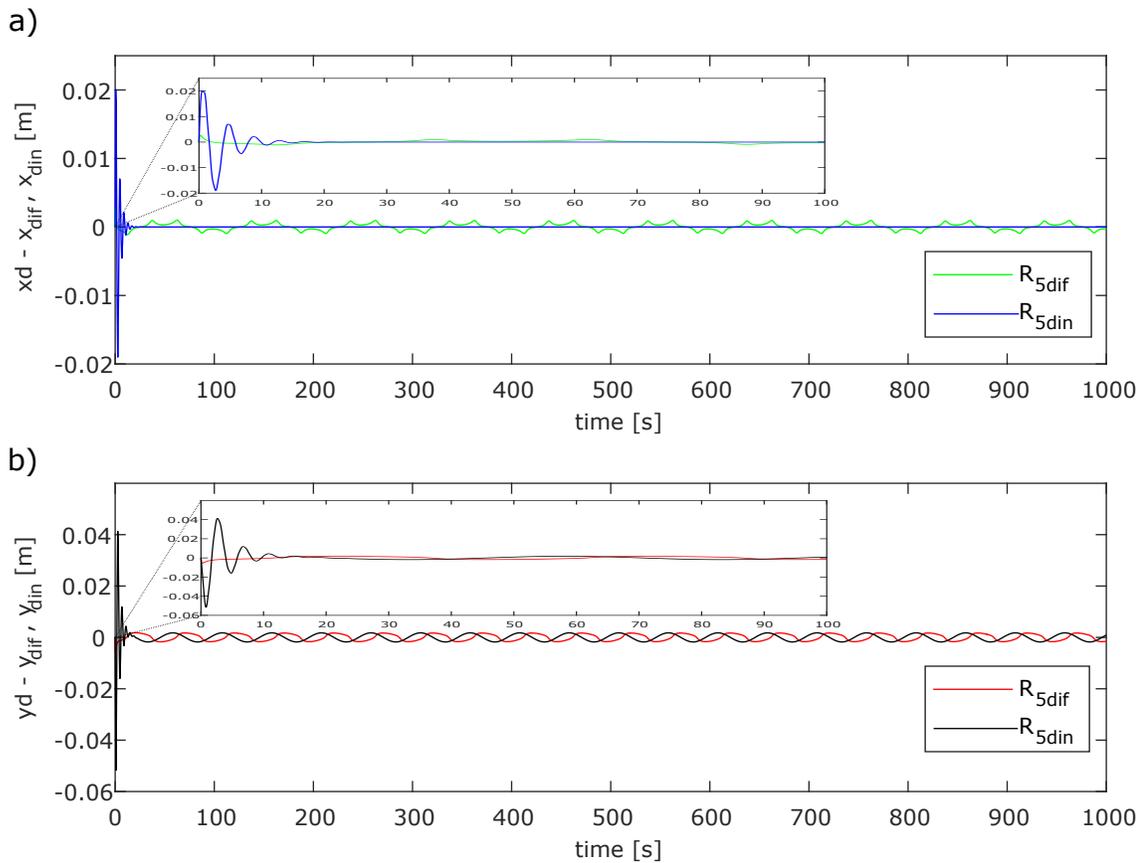


Figura 49. Gráfica correspondiente al error de los robots R_{5dif} y R_{5din} , respecto a la trayectoria deseada infinito.

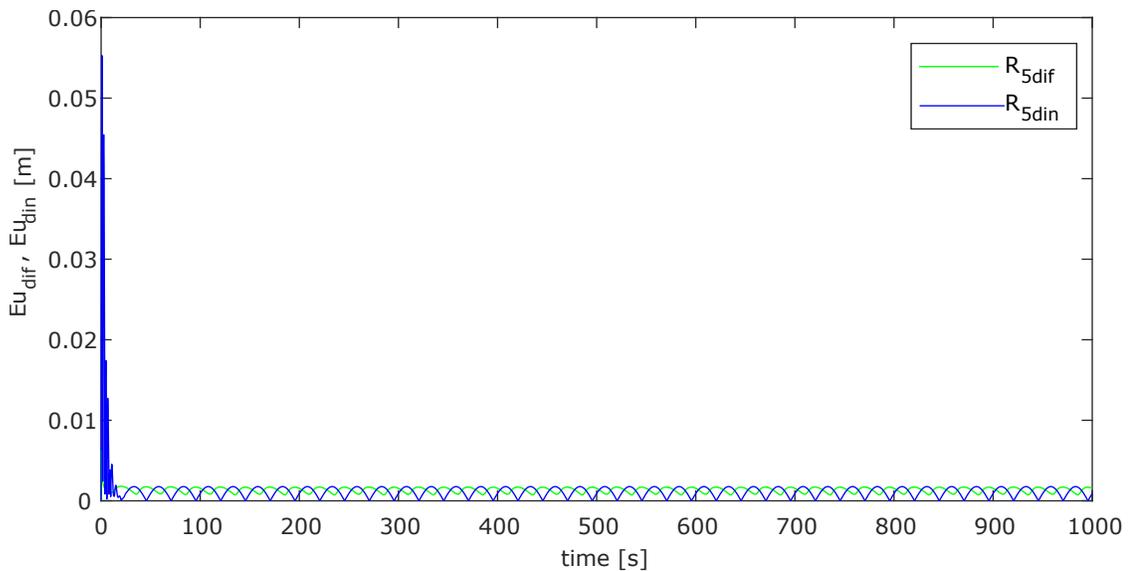


Figura 50. Gráfica correspondiente a la norma euclidiana de los robots R_{5dif} y R_{5din} , respecto a la trayectoria deseada infinito.

3.5. Discusión

Además de los resultados obtenidos y presentados en este análisis comparativo correspondiente a las topologías cadena y anillo, también se realizaron las simulaciones para las trayectorias deltoide y elefante (mostradas en los primeros 2 escenarios). Sin embargo, debido a que los resultados obtenidos fueron similares a los ya mostrados (para la trayectoria infinito) y además reforzaron los puntos que se mencionan a continuación, se decidió omitirlos con la finalidad de no hacer muy extensa esta primera parte del análisis:

- Independientemente de la trayectoria deseada o topología de conexión utilizada, el error mostrado por el acoplamiento dinámico en estado estacionario siempre es menor al del acoplamiento difusivo. Lo anterior se cumple siempre y cuando los valores de los parámetros $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = k$, γ_1 y γ_2 sean correctamente seleccionados. Cabe mencionar que la diferencia entre estos dos errores en el eje x , es muy grande, incluso las magnitudes se encuentran en escalas diferentes.
- Agregar robots esclavos a la red tiene un impacto directo en la magnitud de los errores, además de requerir ganancias con valores mayores para no perder la sincronía interna de la red. El acoplamiento que se ve más afectado por esta situación es el difusivo, y esto se observa en las gráficas de los errores. Mientras que el error del acoplamiento dinámico se mantiene muy pequeño, lo cual

es deseable ya que se pretende trabajar con sincronización externa entre redes donde se espera una mayor cantidad de nodos, en este caso robots móviles.

- El acoplamiento dinámico suele presentar oscilaciones en el estado transitorio, las cuales pueden afectar el desempeño inicial de una red con muchos nodos, si es que los parámetros no son elegidos correctamente. Pues estas oscilaciones pueden ser reducidas si dichos parámetros se eligen adecuadamente. A pesar de ello, se identificó que este acoplamiento alcanza el estado estacionario en menos unidades de tiempo, que el acoplamiento difusivo.
- Los errores en el eje y para ambos acoplamientos es generalmente mayor y presenta oscilaciones, por lo que se espera un cierto desfase en dicho eje al momento del seguimiento de trayectorias.
- A pesar de que ambos acoplamientos muestran buena funcionalidad al utilizar trayectorias deseadas con cambios abruptos de dirección, como el caso de la deltoide, se espera que se utilicen trayectorias sin dichos cambios de dirección. Pues podría presentar un problema al momento de utilizar un número mayor de robots móviles esclavos.

3.6. Conclusiones

En este tercer capítulo de la tesis, se realizaron las primeras simulaciones numéricas para el análisis comparativo entre los acoplamientos difusivo y dinámico, tomando en cuenta los dos escenarios mostrados en las figuras 11 y 12. Donde en un primer escenario se sometió a dos robots móviles de tracción diferencial a seguir tres trayectorias deseadas: lemniscata, deltoide y elefante. Esto con el objetivo de observar el desempeño de cada uno de los acoplamientos al realizar diferentes trayectorias no suaves. Para el segundo caso a cada robot del primer escenario, se le agregó un robot esclavo (convirtiéndolos en robots maestros), de igual manera se les dió la tarea de seguir las tres trayectorias ya mencionadas. Posteriormente se procedió a realizar la sincronización interna de dos redes de 5 robots móviles de tracción diferencial como nodos (cada red cuenta con 1 robot maestro y 4 robots esclavos), acopladas en 2 diferentes topologías: anillo y cadena. Para este último caso, solamente se empleo la trayectoria lemniscata como trayectoria deseada. De los resultados numéricos obtenidos se observó que a pesar de que ambos acoplamientos presentan un error de

seguimiento muy pequeño al momento de realizar el seguimiento de trayectoria, se identifica que el error de seguimiento en estado estacionario correspondiente a el acoplamiento dinámico es notablemente menor que el correspondiente al acoplamiento difusivo, ver figura 16 donde el error para el acoplamiento dinámico es aproximadamente 500 veces menor. Especialmente en el caso de la sincronización externa entre redes, que es el material que se mostrará en el siguiente capítulo. Es por las características ya mencionadas que a partir de este punto se utilizará el acoplamiento dinámico para cumplir con el objetivo de este trabajo de tesis.

Capítulo 4. Sincronización externa de redes: simulación numérica

En este capítulo, se procede a realizar las primeras simulaciones correspondientes a la **sincronización externa de dos redes complejas** con 5 robots móviles de tracción diferencial como nodos, las cuales se encuentran acopladas con topologías diferentes (ver figura 51). La primera de ellas, emplea una topología de conexión en estrella y su trayectoria deseada a seguir es la trayectoria de infinito, esta red cumplirá el rol de maestro una vez que se alcance la sincronización externa. La segunda red se encuentra conectada en topología de cadena y su trayectoria deseada es la trayectoria elefante (ver diagrama a) de la figura 51). Sin embargo, después de ciertas unidades de tiempo, ésta se convertirá en la red esclavo y tendrá como objetivo seguir la trayectoria trazada por la red maestro (ver diagrama b) de la figura 51).

4.1. Anticolisión

Con la finalidad de evitar colisiones entre los robots móviles diferenciales de ambas redes, las entradas de control fueron modificadas tomando como referencia el trabajo realizado en Martínez-Clark (2014), por lo que las entradas de control quedan definidas como sigue:

$$u_{1i} = \beta_{1i} \sum_{j=1}^N \mu_{ji} h_{2x_i} + \beta_{1i} \sum_{i=1}^N \mu_{ij} h_{2\dot{x}_i} + \sum_{k=1, k \neq i}^M -\delta_{ik} \text{sign}(x_k - x_i), \quad (67)$$

$$u_{2i} = \beta_{2i} \sum_{j=1}^N \mu_{ji} h_{2y_i} + \beta_{2i} \sum_{i=1}^N \mu_{ij} h_{2\dot{y}_i} + \sum_{k=1, k \neq i}^M -\delta_{ik} \text{sign}(y_k - y_i), \quad (68)$$

donde μ_{ji} y μ_{ij} son los elementos de una matriz \mathbf{M} , N es el número de robots que componen la red, M es el número total de robots (ambas redes) y δ_{ij} es el *coeficiente de anticolisiones*, el cual toma los siguientes valores

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } \|\vec{E}\| > d \\ \delta, & \text{si } \|\vec{E}\| \leq d. \end{cases} \quad (69)$$

d es la distancia umbral de colisión (en metros), $\|\vec{E}\|$ es la norma euclidiana y $sign(e)$ se define como

$$sign(e) = \begin{cases} 1, & \text{si } e > 0 \\ 0, & \text{si } e = 0 \\ -1, & \text{si } e < 0. \end{cases} \quad (70)$$

mientras que los estados \mathbf{h} son descritos por (46)-(49), donde \mathbf{x}_m y \mathbf{x}_s son los estados de los robots móviles maestro y esclavo que corresponden al acoplamiento dinámico en cuestión.

4.2. Resultados numéricos

La matriz \mathbf{M} correspondiente a ambas redes es la que se muestra a continuación

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (71)$$

Para la sincronización externa de las redes de la figura 51 a), un acoplamiento dinámico es agregado, como se muestra en el diagrama b) de la figura 51. El cual toma como maestro al robot maestro de la red en topología en estrella y como robot esclavo al robot maestro de la red en topología en cadena. Por lo que las entradas de control para el nuevo robot esclavo se definen como en (45) y los estados \mathbf{h} son descritos por (46)-(49).

Las posiciones iniciales utilizadas en esta simulación fueron generadas de manera aleatoria tomando valores entre 0 y 4. Para los resultados mostrados a continuación, las posiciones iniciales de los robots son las siguientes:

$$\mathbf{x}(0) = (0.15, 3.54, 3.65, 3.18, 0.39, 1.04, 1.34, 2.71, 0.54, 2.88)^T, \quad (72)$$

$$\mathbf{y}(0) = (0.42, 2.61, 1.97, 3.11, 2.86, 3.61, 3.56, 1.33, 2.79, 0.79)^T, \quad (73)$$

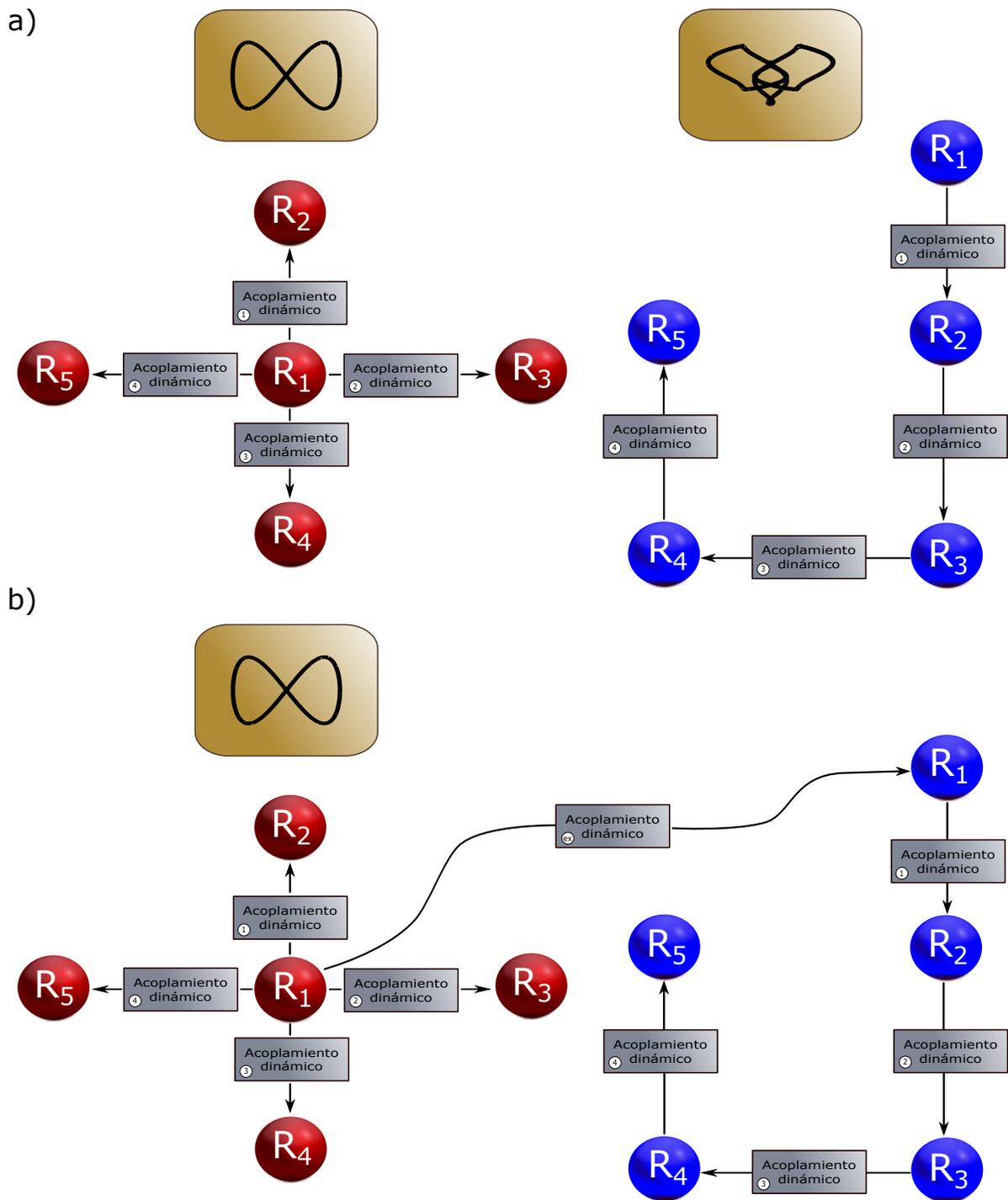


Figura 51. Diagrama correspondiente a la simulación de la sincronización externa entre 2 redes con topologías diferentes (estrella y cadena).

las distancias de los robots en topología estrella respecto a su maestro R_1 son:

$$\Delta_x = [2, 4, 6, 8], \quad (74)$$

$$\Delta_y = [0, 0, 0, 0], \quad (75)$$

y para los robots en topología en cadena, las distancias respecto a su maestro son:

$$\Delta_x = [2, 2, 2, 2], \quad (76)$$

$$\Delta_y = [0, 0, 0, 0]. \quad (77)$$

La distancia umbral de colisión seleccionada fue de $0.5m$ y el coeficiente de anticollisiones utilizado fue $\delta_{ij} = 3$.

En la figura 52 se muestra la gráfica correspondiente a la simulación de la sincronización externa entre dos redes con diferente topología y diferente trayectoria deseada. En ella se muestran las trayectorias trazadas por cada uno de los robots móviles pertenecientes a cada una de las redes. Se identifica de un tono verde a la red en topología en estrella, mientras que a la red en topología en cadena le corresponde un tono morado. Los valores de los parámetros empleados en esta simulación fueron $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = k = 90$, $\gamma_1 = -11$ y $\gamma_2 = 11$, tanto para la sincronización interna de cada red como para la sincronización externa entre ambas redes.

En la figura 53 se presentan las gráficas correspondientes a las dinámicas de los estados x , y y θ para cada uno de los robots móviles de ambas redes. Donde se observa que durante las primeras 300 unidades de tiempo, cada una de las redes se encuentra realizando su respectiva trayectoria deseada. Es a partir de las 300 unidades de tiempo que la sincronización externa sucede y la red en topología en cadena pasa a ser la red esclavo de la red en topología en estrella. Para poder apreciar de mejor manera este proceso, se optó por mover al robot maestro de la red esclavo $4m$ positivos en el eje y respecto a su posición inicial para llevar a la red esclavo a la posición con $y = 0$ (ver figura 52).

La figura 54 presenta los estados h correspondientes a cada uno de los acoplamientos dinámicos utilizados tanto en la sincronización interna como externa de cada una de las redes. En las figuras 55 y 56, se muestran los errores de los robots esclavos respecto a su maestro, para las redes en topología estrella y cadena respectivamente. Para la sincronización externa, en la figura 57, se muestra el error de todos los robots respecto al robot maestro de la red en topología estrella.

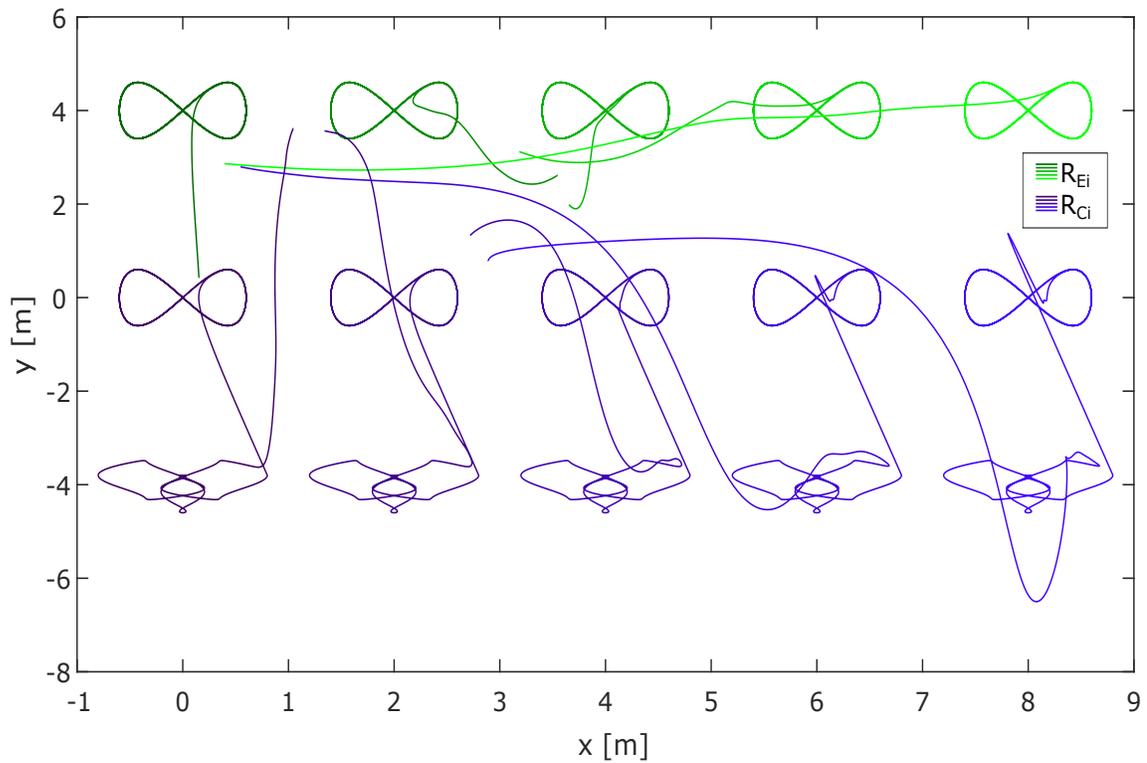


Figura 52. Gráfica correspondiente a las trayectorias trazadas por cada uno de los robots móviles de ambas redes.

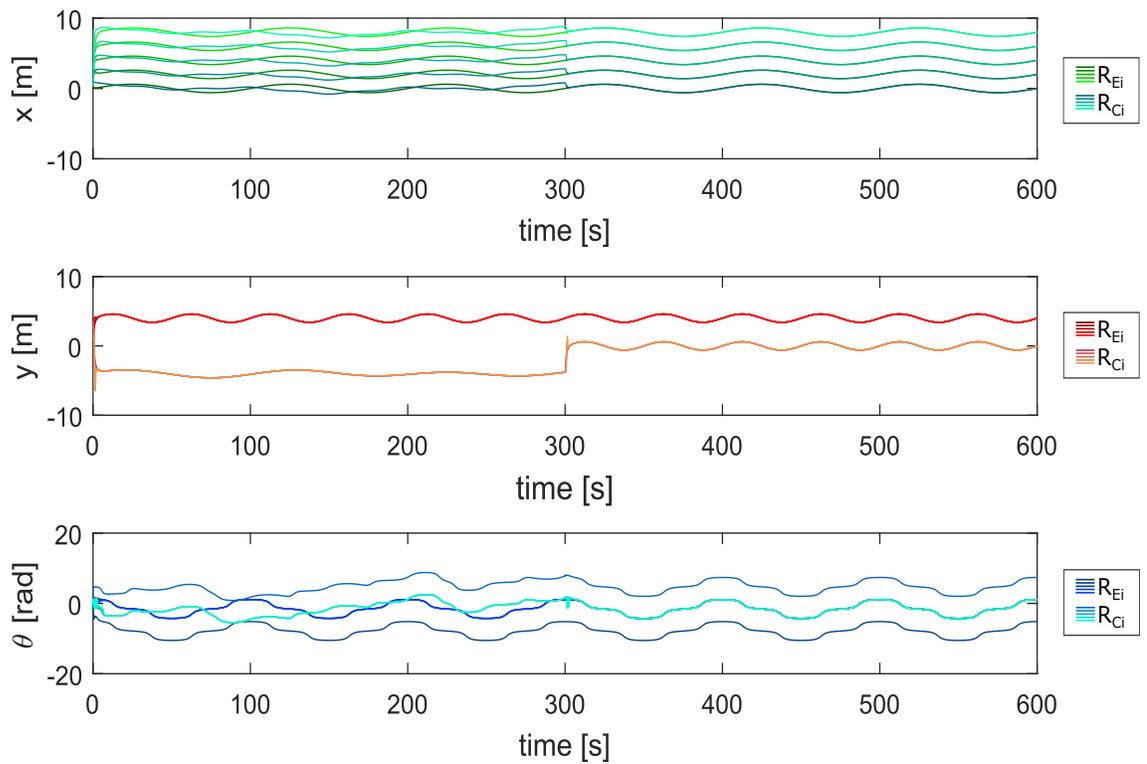


Figura 53. Gráficas correspondientes a la dinámica de x , y y θ de los robots móviles de ambas redes.

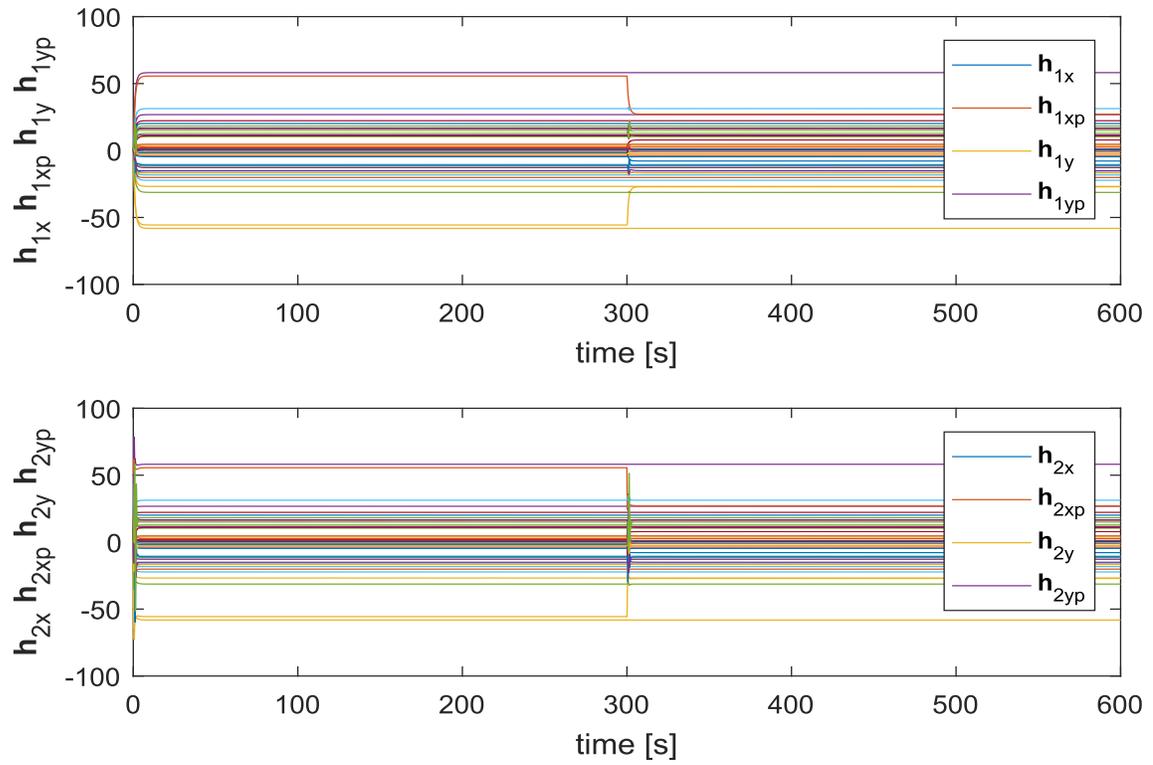


Figura 54. Gráfica correspondiente a los estados del acoplamiento dinámico de los robots móviles de ambas redes.

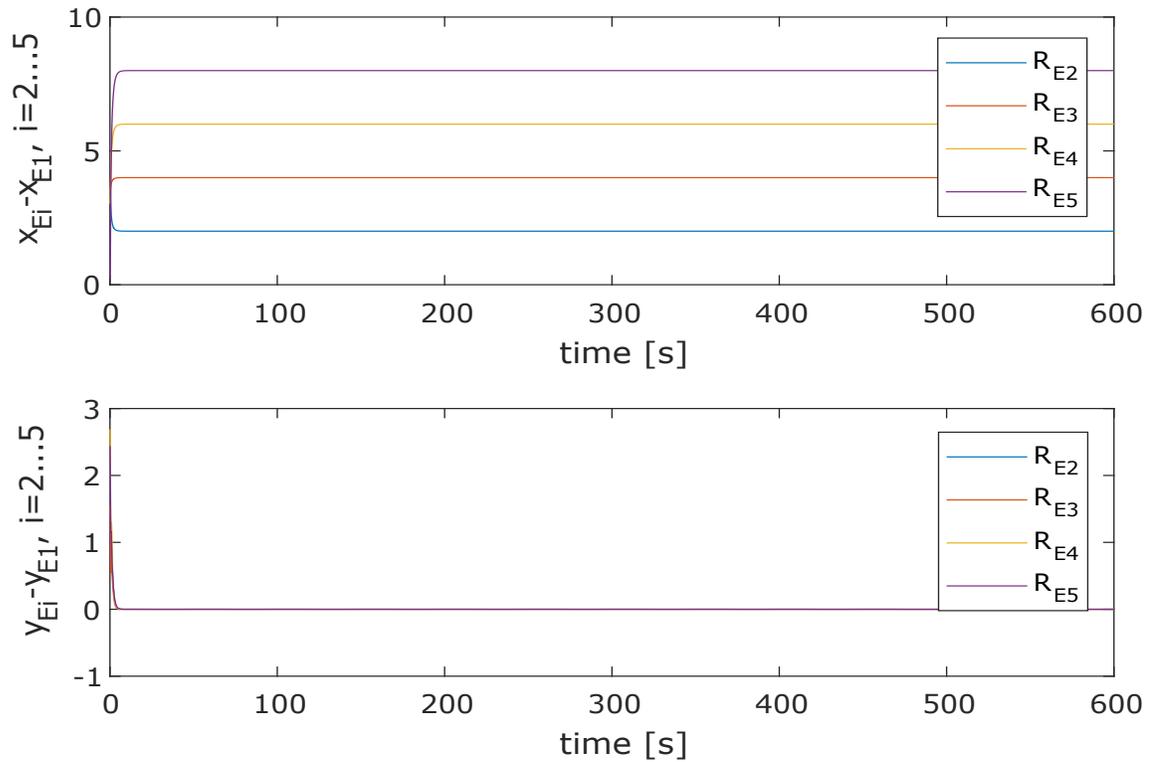


Figura 55. Gráfica correspondiente al error de los robots esclavos respecto al robot maestro de la red en topología estrella.

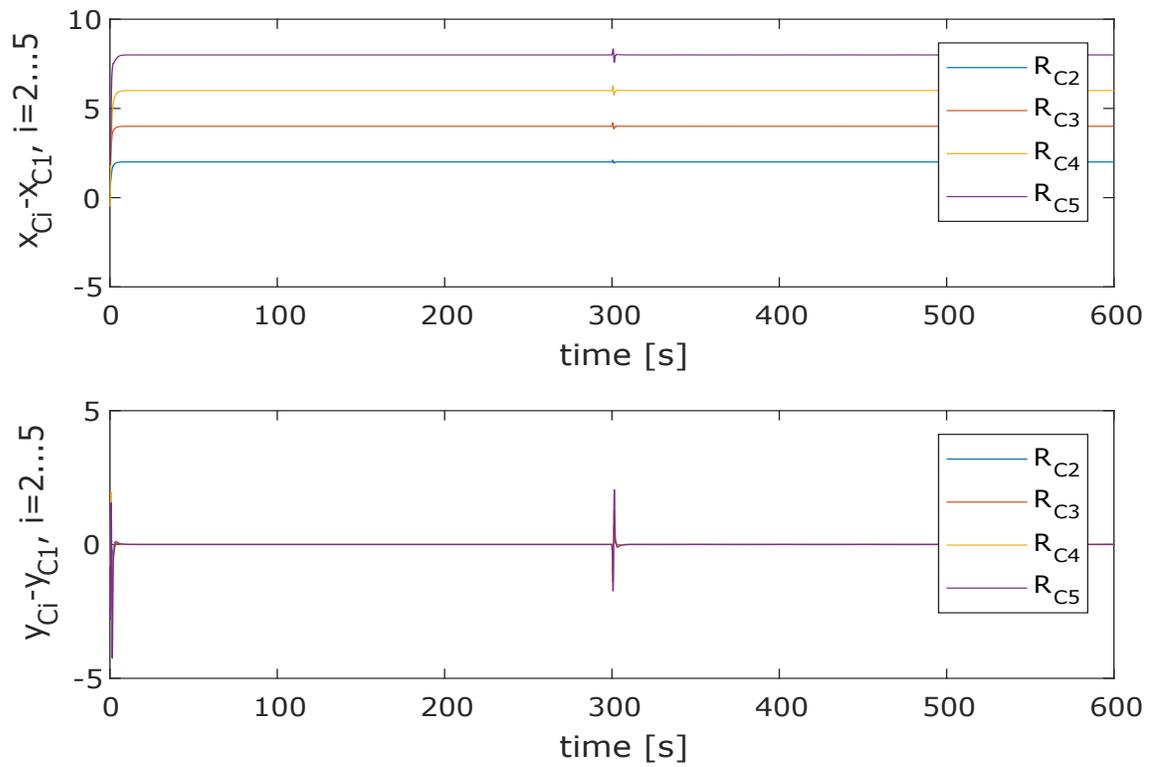


Figura 56. Gráfica correspondiente al error de los robots esclavos respecto al robot maestro de la red en topología cadena.

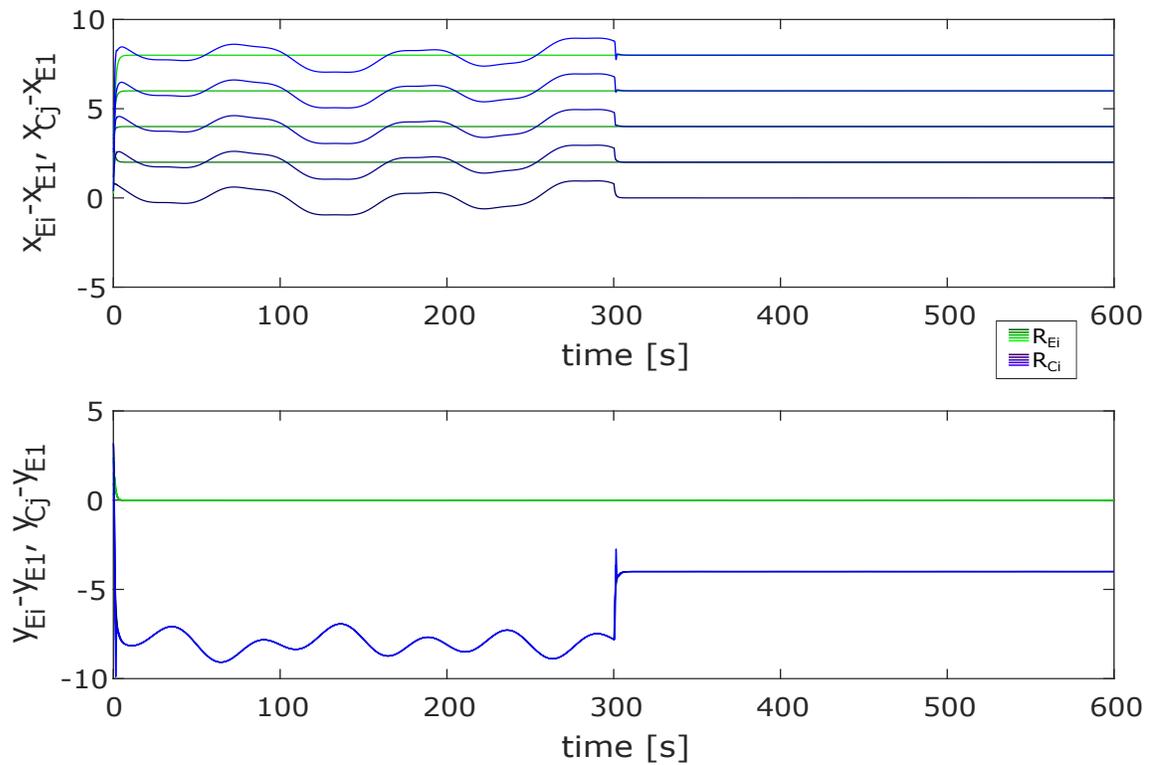


Figura 57. Gráfica correspondiente al error de los robots: R_{E_i} para $i = 2, \dots, 5$ y R_{C_i} para $i = 1, \dots, 5$, respecto al robot maestro R_{E_1}

4.3. Conclusión

En este cuarto capítulo del presente trabajo de tesis, se realizó la simulación correspondiente al objetivo principal de esta tesis, el cual es la sincronización externa de dos redes complejas con robots móviles diferenciales como nodos empleando acoplamiento dinámico. Las redes utilizadas en este capítulo se encuentran compuestas por 5 robots móviles de tracción diferencial y están acopladas en dos topologías diferentes (cada red cuenta con 1 robot maestro y 4 robots esclavos). La primera de ellas es la red con topología de estrella y su trayectoria deseada es la trayectoria infinito o lemniscata, la segunda red es la red con topología en cadena y su trayectoria deseada es la trayectoria elefante. Donde después de un determinado número de unidades de tiempo, la segunda red se convierte en la red esclava de la primera, tomando como trayectoria deseada la trayectoria que el robot maestro de la primera red se encuentra trazando, la cual es la trayectoria infinito. Además, un algoritmo para evadir colisiones entre los robots ha sido añadido, con la finalidad de evitar cualquier daño que pueda ocurrir debido a una colisión en la implementación experimental. Cabe mencionar que al utilizar diferentes topologías a las empleadas en este capítulo (tanto para la conexión interna como para el acoplamiento externo de las redes), así como la adición de más nodos a las redes, se espera que los resultados continúen siendo favorables con su grado de error correspondiente. Este error podría reducirse en primera instancia seleccionando otros valores de ganancias para los acoplamientos, diferentes valores para los parámetros γ_1 y γ_2 y, de ser requerido, se recomendaría optar por otra topología que pueda reducir dicho error. De los resultados numéricos obtenidos se observa que el error de seguimiento tiende a cero tanto para el caso de la sincronización interna como externa, y los estados \mathbf{h} se encuentran acotados. De lo anterior se concluye que estos resultados numéricos son favorables y que entonces se puede proceder a una implementación experimental, con el propósito de validar el trabajo realizado y presentado en los capítulos que hasta esta instancia conforman la tesis.

Capítulo 5. Sincronización externa de redes: emulación de implementación experimental

Con el objetivo de validar los resultados obtenidos en el capítulo anterior, correspondiente a la simulación numérica de la sincronización externa entre dos redes mediante acoplamiento dinámico. Debido a la situación que actualmente se vive por la pandemia Covid-19, lo cual impidió realizar los experimentos en el laboratorio, como alternativa se optó por emular la implementación experimental del presente trabajo de tesis mediante el software CoppeliaSim (anteriormente llamado V-REP).

CoppeliaSim es un simulador de robots desarrollado por la compañía suiza Coppelia Robotics AG (ver figuras 58 y 59), el cual permite simular diversos robots dentro de un entorno como si se tratase de un experimento realizado en un laboratorio. Este simulador permite el desarrollo de algoritmos de control, automatización y diseño de prototipos, por mencionar algunas aplicaciones. Además de presentar la bondad de brindar un acceso total a las funciones de su versión profesional (o versión comercial), a estudiantes y profesores con fines educativos y de investigación.

En la figura 59, se muestra la interfaz de trabajo del simulador CoppeliaSim donde se puede observar diversos robots móviles Khepera III (ver figura 60) esparcidos en el área de simulación. El Khepera III es un robot móvil compacto diseñado y fabricado por la también compañía suiza K-Team, cuyos robots se han convertido en robots estándares en el ámbito de investigación. Es por ello que el robot móvil diferencial Khepera III se escogió para realizar la implementación experimental de este trabajo de tesis. Además, cabe mencionar que el laboratorio de *Sincronización y Sistemas Complejos* del Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones de CICESE (laboratorio donde se planteó realizar el trabajo experimental en primera instancia), cuenta con un grupo de ellos, un conjunto de cámaras Optitrack y una mesa de trabajo para dicha implementación experimental.



Figura 58. Software Coppeliasim, ilustraciones tomadas de www.coppeliarobotics.com

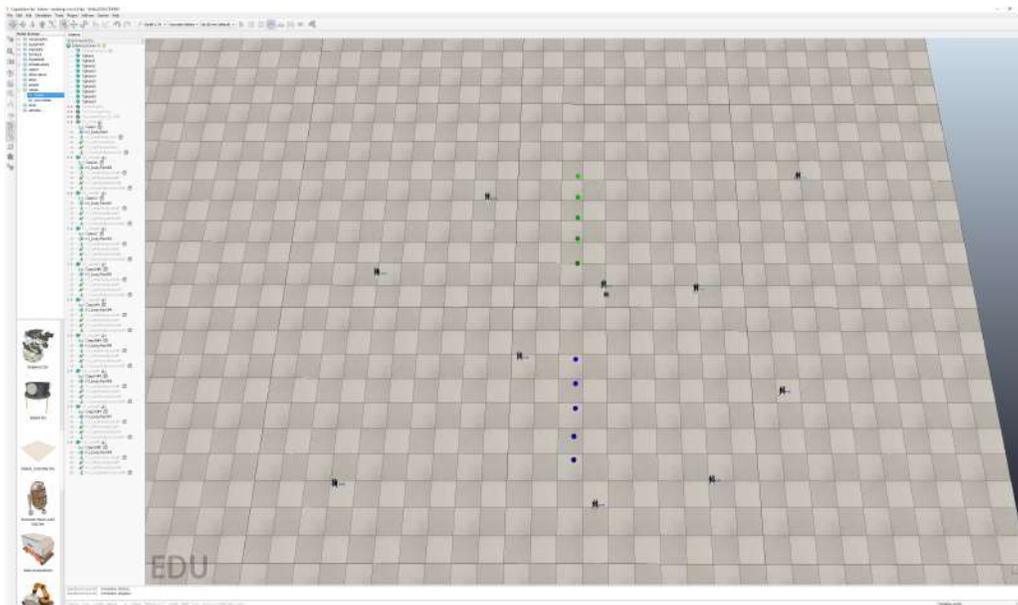


Figura 59. Captura de la interfaz de trabajo del simulador Coppeliasim.

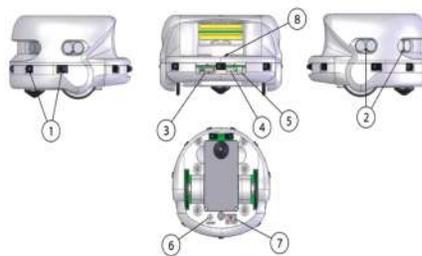


Figura 60. Vista general del robot Khepera III. 1) Sensores infrarrojos, 2) Sensores ultrasónicos, 3) Puerto serial, 4) Puerto USB, 5) Conector para cargador, 6) Reset, 7) On/Off, 8) Puerto serial.

5.1. Emulación de implementación experimental

Con la finalidad de obtener mejor seguimiento de las trayectorias deseadas por parte de ambas redes (ver figura 61), se decidió utilizar una topología de conexión en estrella tanto para la red maestro (M) como para la red esclavo (E). Al igual que en la simulación numérica realizada en el capítulo anterior, la red maestro tiene como trayectoria deseada una lemniscata, mientras que la red esclavo en un principio (antes del acoplamiento externo dinámico) debe realizar la trayectoria con forma de elefante para posteriormente sincronizarse con la red maestro y trazar la trayectoria lemniscata correspondiente. En el Anexo A, se presenta el código de MATLAB utilizado para la emulación de la implementación experimental con CoppeliaSim.

Las posiciones iniciales utilizadas fueron seleccionadas de manera arbitraria al colocar cada uno de los robots en el área de trabajo de la emulación experimental. Para los resultados mostrados a continuación, las posiciones iniciales de los robots son las siguientes:

$$x(0) = (-0.85, 1.47, 4.1, 3.18, 6.09, 8.57, 2.32, 3.89, 6.19, 7.74)^T, \quad (78)$$

$$y(0) = (-0.87, 0.9, -1.14, -1.22, 1.42, -2.69, -5.57, -5.12, 2.79, -3.4)^T. \quad (79)$$

La distancia umbral de colisión seleccionada fue de $0.5m$ y el coeficiente de anticollisiones utilizado fue $\delta_{ij} = 1$.

En la figura 62 se muestra la gráfica correspondiente a las trayectorias trazadas por cada uno de los robots móviles de tracción diferencial de cada red. De un tono verde se identifica a las trayectorias de los robots pertenecientes a la red maestro y de un tono azul a las trayectorias de los robots de la red esclavo. Los valores de los parámetros empleados en esta emulación fueron $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = k = 6$, $\gamma_1 = 0.4$ y $\gamma_2 = 0.10$, tanto para la sincronización interna de cada red como para la sincronización externa entre las redes.

Para ambas redes es posible observar un cierto grado de error en la etapa transitoria, este error se hace particularmente más notorio en la red esclavo al momento que ocurre la sincronización externa. Esto se debe al error en la etapa transitoria que presenta el acoplamiento dinámico, el cual ha sido mencionado en capítulos anteriores, además del cambio de cierta manera abrupto en la trayectoria que la red esclavo se

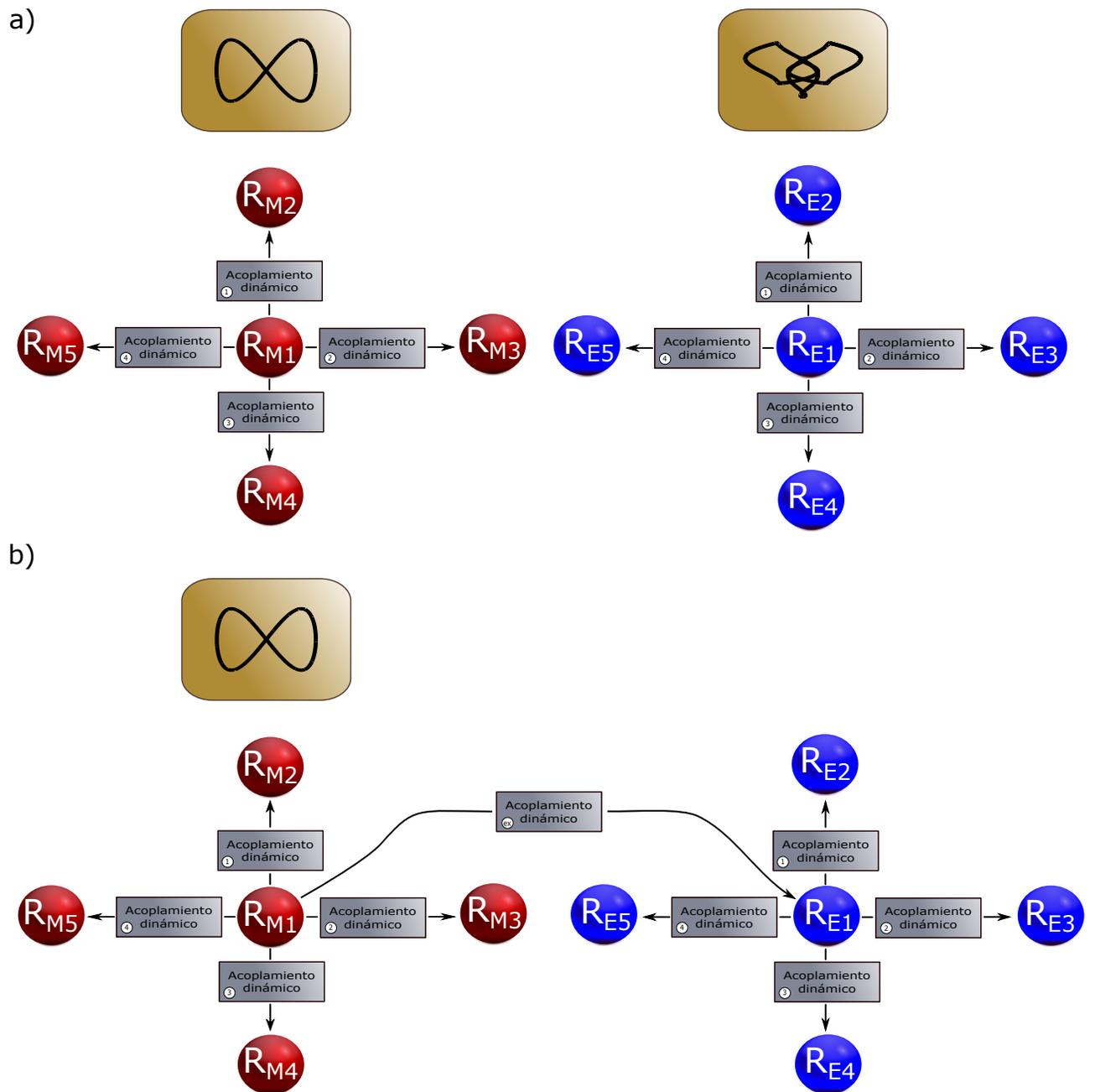


Figura 61. Diagrama correspondiente a la emulación de la implementación experimental de la sincronización externa entre dos redes con topología estrella: a) redes sin acoplamiento externo, b) redes con acoplamiento externo dinámico.

encuentra trazando y la distancia que existe entre la posición actual de los robots de dicha red y su ahora nueva trayectoria deseada. Es por ello que los robots de la red esclavo trazan una curva para poder alcanzar la trayectoria deseada que impone su red maestro.

Por otra parte, los robots móviles $R_{M2}-R_{M5}$ de la red maestro presentan una especie de pequeña vuelta en la curva inferior izquierda de la lemniscata, esto se debe al distanciamiento que tanto los robots de la red maestro como esclavo toman al momento de cruzarse para no colisionar (producto del algoritmo anticollisiones).

Las figuras 63 y 64 muestran las dinámicas correspondientes a los estados x , y y θ de cada uno de los robots móviles de ambas redes. En ellas se corrobora que durante las primeras 250 unidades de tiempo, la red esclavo se encuentra trazando la trayectoria deseada con forma de elefante. Una vez que la sincronización externa se pone en marcha (en 250 unidades de tiempo), los robots de la red esclavo proceden a dirigirse hacia la nueva trayectoria deseada. En estas gráficas, se logra apreciar de mejor manera los errores correspondientes a los transitorios y movimientos anticollision ya mencionados.

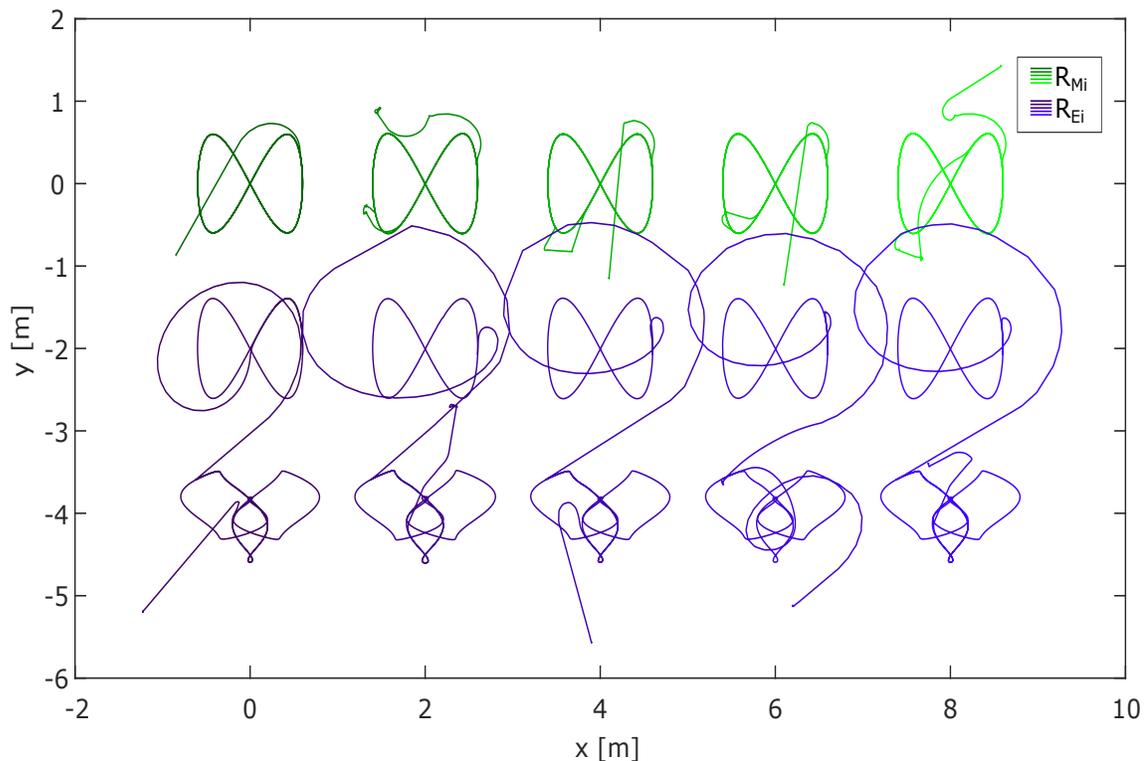


Figura 62. Gráfica correspondiente a las trayectorias trazadas por cada uno de los robots móviles de ambas redes.

En la figura 65 se presenta la dinámica de los estados h correspondientes a cada uno de los acoplamientos dinámicos utilizados, tanto en la sincronización interna como externa de cada una de las redes. En las figuras 66 y 67 se muestran los errores de los robots esclavos respecto a su maestro para cada una de las redes. Y la figura 68

muestra el error correspondiente a todos los robots respecto al robot maestro de la red maestra. De la misma manera que sucede en las gráficas de los estados x , y y θ , es posible apreciar las dinámicas de los errores correspondientes al transitorio así como a la evasión de colisiones.

Finalmente en la figura 69 se muestra una captura correspondiente al resultado obtenido en la emulación con el software CoppeliaSim. Donde se observan las trayectorias trazadas por cada uno de los robots, de la misma forma que en la figura 62 las trayectorias de los robots de la red maestra son representados con un tono verde y las trayectorias de los robots de la red esclavo con un tono azul.

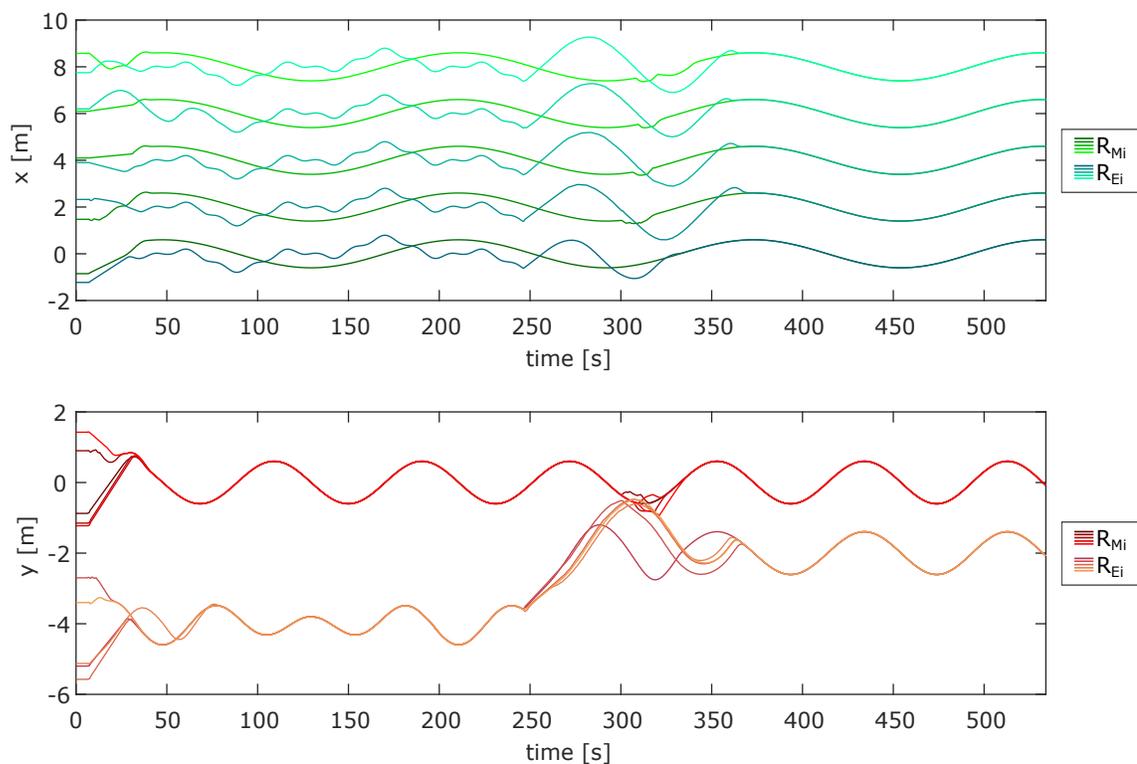


Figura 63. Gráficas correspondientes a la dinámica de x , y de los robots móviles de ambas redes.

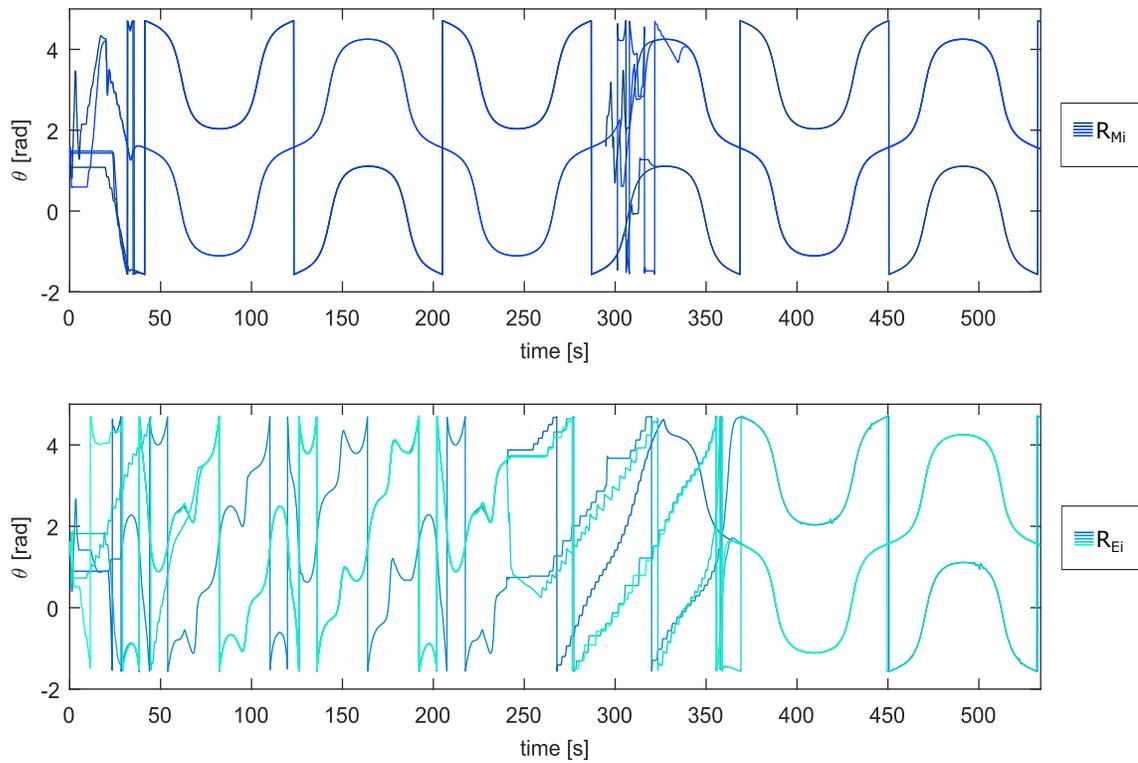


Figura 64. Gráficas correspondientes a la dinámica de θ de los robots móviles de ambas redes.

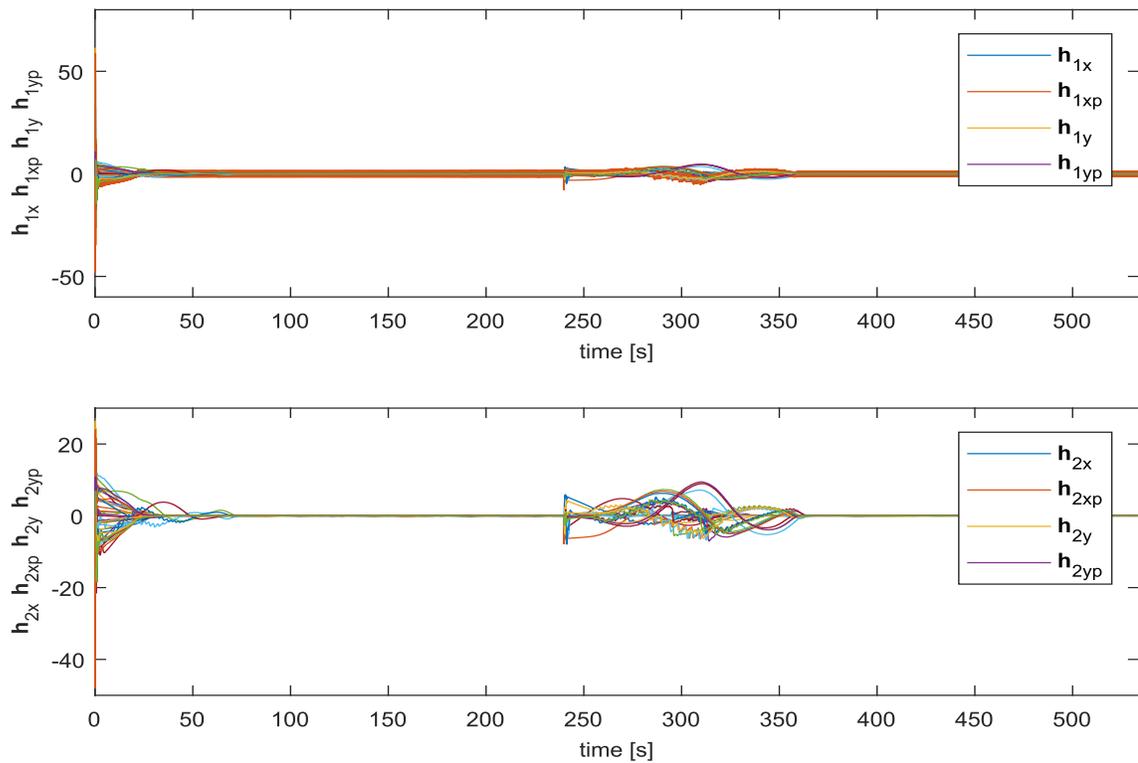


Figura 65. Gráfica correspondiente a los estados del acoplamiento dinámico de los robots móviles de ambas redes.

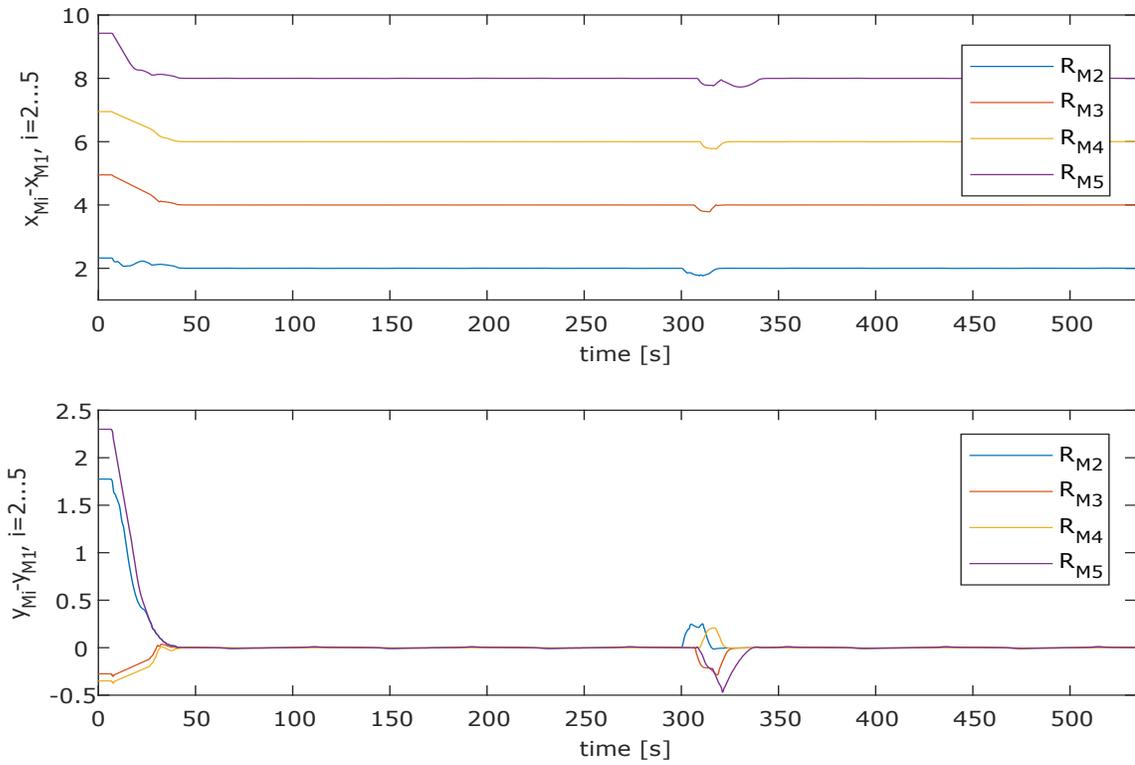


Figura 66. Gráfica correspondiente al error de los robots esclavos respecto al robot maestro de la red maestro M.

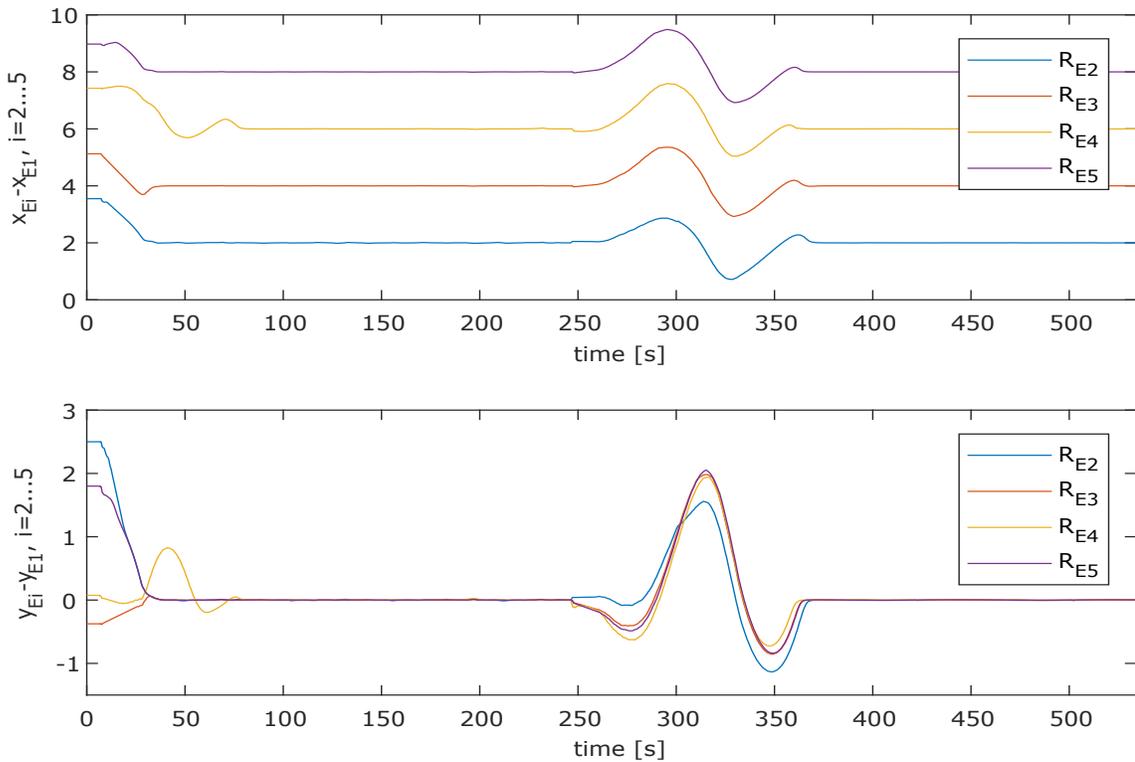


Figura 67. Gráfica correspondiente al error de los robots esclavos respecto al robot maestro de la red esclavo E.

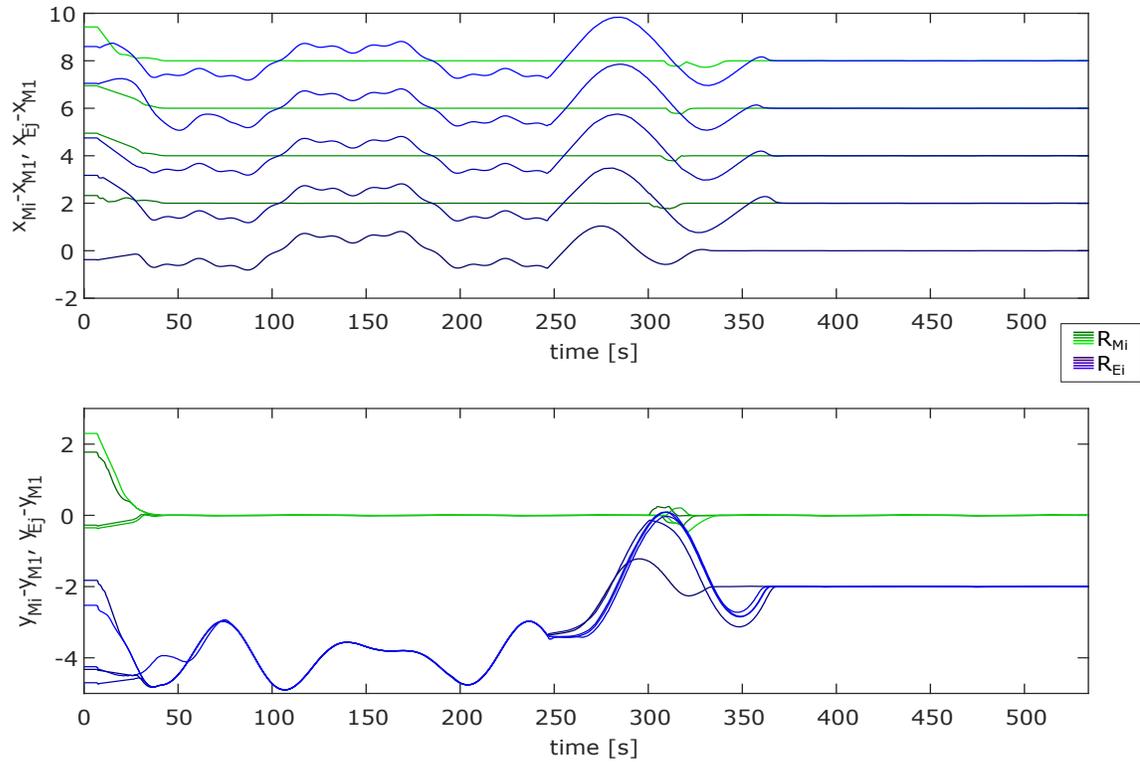


Figura 68. Gráfica correspondiente al error de los robots: R_{M_i} para $i = 2, \dots, 5$ y R_{E_i} para $i = 1, \dots, 5$, respecto al robot maestro R_{M_1}

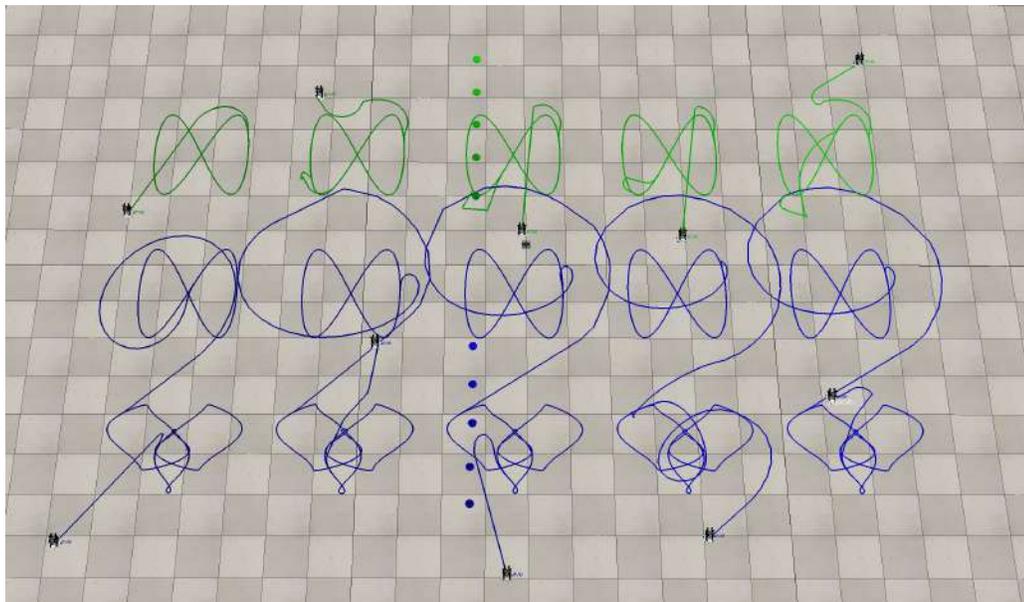


Figura 69. Captura correspondiente al resultado gráfico obtenido de la emulación de la implementación experimental con el software CoppeliaSim.

5.2. Conclusión

En este quinto capítulo de la tesis, se realizó la emulación de la implementación experimental correspondiente al trabajo realizado en el capítulo anterior. Las redes utilizadas en este capítulo se encuentran compuestas por 5 robots móviles de tracción diferencial y están acopladas en dos topologías diferentes (cada red cuenta con 1 robot maestro y 4 robots esclavos). La primera de ellas es la red con topología de estrella y su trayectoria deseada es la trayectoria infinito o lemniscata, la segunda red es la red con topología en cadena y su trayectoria deseada es la trayectoria elefante. Donde después de un determinado número de unidades de tiempo, la segunda red se convierte en la red esclava de la primera, tomando como trayectoria deseada la trayectoria que el robot maestro de la primera red se encuentra trazando, la cual es la trayectoria infinito. Cabe mencionar que a pesar de emplear el simulador CoppeliaSim para llevar a cabo dicha tarea, este software posee características y funciones que llegan a emular de manera muy fiel un entorno propio de una implementación experimental, lo que genera resultados muy cercanos a los que se obtendrían en una implementación experimental. Es importante hacer mención que diversas propiedades y parámetros como la fricción del suelo y/o materiales no son tomados en cuenta en esta emulación. Por lo que resultados de una propia implementación experimental respecto a los obtenidos en este capítulo podrían diferir de cierta manera, pero sin presentar una diferencia notable en el error de seguimiento de trayectoria. De ser requerido, lo anterior podría ser llevado a una segunda emulación donde se tomen en cuenta dichos parámetros para obtener así resultados aún más cercanos a los esperados en la realidad, utilizando los parámetros del entorno para la implementación experimental. De los resultados obtenidos en este capítulo, se verifica y valida el esquema de sincronización externa de redes que se ha desarrollado a lo largo de este trabajo de tesis. Se ha logrado alcanzar por primera vez la sincronización externa de dos redes dinámicas complejas con robots móviles de tracción diferencial como nodos, empleando acoplamientos dinámicos, obteniendo resultados satisfactorios para un entorno virtual de una implementación experimental.

Capítulo 6. Conclusiones

En este sexto y capítulo final de la presente tesis, se describen las conclusiones más importantes sobre los resultados obtenidos en el desarrollo del trabajo de investigación realizado. Además, se mencionan sugerencias para mejorar los resultados obtenidos, así como trabajo futuro que podría extender el trabajo presentado.

En este trabajo de tesis de maestría, se propuso y se alcanzó por primera vez la sincronización externa de dos redes complejas con robots móviles diferenciales como nodos empleando acoplamiento dinámico. En primera instancia se realizó el análisis comparativo entre el acoplamiento difusivo (convencional o estándar, utilizado en la literatura para la sincronización de robots móviles) y el acoplamiento dinámico propuesto. Donde se indentificó que la principal ventaja que presenta el acoplamiento dinámico (que emplea un *sistema intermediario*), para lograr sincronización tanto interna como externa, es aislar las señales de control entre los sistemas involucrados, lo cual permite evitar daños que pudieran producirse en los nodos de las redes debido a amplitudes de señales de control indeseadas. También se indentificó que el error correspondiente al estado estacionario al utilizar un acoplamiento dinámico, se ve notablemente reducido, donde en el mejor de los casos para el error del acoplamiento difusivo, es una magnitud del error de aproximadamente 500 veces mayor al del acoplamiento dinámico. La principal desventaja que presenta el acoplamiento dinámico, son oscilaciones en el estado transitorio, pero que no representan un mayor problema para el cumplimiento de la tarea de seguimiento de trayectoria.

Las redes empleadas para cumplir el principal objetivo de este trabajo de tesis de maestría, tanto en la simulación numérica como en la emulación de la implementación experimental, se encuentran compuestas por 5 robots móviles de tracción diferencial y están acopladas en dos topologías diferentes (cada red cuenta con 1 robot maestro y 4 robots esclavos). La primera de ellas es la red con topología de estrella y su trayectoria deseada es la trayectoria infinito o lemniscata, la segunda red es la red con topología en cadena y su trayectoria deseada es la trayectoria elefante.

Por otra parte, agregar robots esclavos a la red tiene un impacto directo en la magnitud de los errores, además de requerir ganancias con valores mayores para no perder la sincronía interna de la red. A pesar de que el acoplamiento dinámico presenta cierta versatilidad al momento de elegir ganancias debido a que es un sistema externo a los sistemas de interés, es necesario elegir las ganancias de manera correcta para lograr la sincronización y formación de redes que contengan un mayor número de robots. Además, una de las consideraciones a tomar en cuenta es que, aunque se obtuvo un error de seguimiento pequeño al utilizar trayectorias deseadas con cambios abruptos de dirección, como el caso de la deltoide, se espera que se utilicen trayectorias sin dichos cambios de dirección. Lo anterior podría presentar un problema al momento de utilizar un número mayor de robots móviles esclavos.

6.1. Sugerencias y trabajo futuro

- El trabajo desarrollado en esta tesis, fue centrado en la sincronización externa de dos redes dinámicas complejas con robots móviles de tracción diferencial como nodos empleando acoplamiento dinámico, sin embargo esto también podría realizarse empleando un mayor número de redes e incluso redes complejas con diferentes nodos, es decir, la sincronización externa entre robots móviles de tracción diferencial y cuadricópteros (por mencionar un ejemplo).
- Diseñar un algoritmo para reducir la velocidad de los robots momentos previos a que ocurra la sincronización externa, con la finalidad de reducir el efecto que producen los cambios abruptos en el seguimiento de trayectoria.
- Implementar la sincronización combinada con la finalidad de brindar seguridad en posibles aplicaciones de vigilancia, donde seguramente los intrusos desearán obtener información del funcionamiento de las redes de robots móviles.
- Desarrollar e implementar un algoritmo que permita seleccionar al robot más apto para fungir como robot maestro en una determinada tarea o aplicación.

6.2. Posibles aplicaciones

Mientras que para la realización de las aplicaciones enlistadas a continuación se requiere de técnicas de control y esquemas más sofisticados, el trabajo realizado en esta tesis conforma una base más entre las ya reportadas en la literatura de la robótica móvil. Una base que pretende facilitar y ayudar a mejorar de cierta manera los resultados que pudieran obtenerse durante el diseño de esquemas especializados para cada una de las siguientes posibles aplicaciones:

- Tareas de búsqueda y rescate
- Exploración y reconocimiento
- Limpieza de un área
- Transporte colectivo de objetos
- Vigilancia y patrullaje

Literatura citada

- Arellano-Delgado, A., Cruz-Hernández, C., López Gutiérrez, R. M., y Posadas-Castillo, C. (2015). Outer synchronization of simple firefly discrete models in coupled networks. *Mathematical Problems in Engineering*, **2015**: 1–14.
- Arellano-Delgado, A., López-Gutiérrez, R. M., Martínez-Clark, R., y Cruz-Hernández, C. (2018). Small-world outer synchronization of small-world chaotic networks. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, **13**(10): 1–11.
- Arellano-Delgado, A., López-Gutiérrez, R. M., Méndez-Ramírez, R., Cardoza-Avenidaño, L., y Cruz-Hernández, C. (2021). Dynamic coupling in small-world outer synchronization of chaotic networks. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **423**: 132928.
- Cetina-Denis, J. J. (2017). *Diseño de trayectorias caóticas en robots móviles*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.
- Ding, K. y Han, Q. L. (2011). Outer synchronization between two complex dynamical networks with nonidentical coupling structures via time-varying delay feedback control. *Proceedings of the 2011 Australian Control Conference, AUCC 2011*, **2011**(November): 211–216.
- Fradkov, A. L., Miroshnik, I. V., y Nikiforov, V. O. (1999). *Nonlinear and adaptive control of complex systems*. Springer Netherlands.
- Gao, M. y Sheng, L. (2011). Local and global synchronization criteria for a generalized complex dynamical network model. *Proceedings of the 2011 Chinese Control and Decision Conference, CCDC 2011*, **2011**(1): 779–783.
- García-Montes, E. (2018). *Sincronización de sistemas vía acoplamientos dinámicos*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.
- Geng, L. y Xiao, R. (2017). Outer synchronization and parameter identification approach to the resilient recovery of supply network with uncertainty. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **482**: 407–421.
- Hernández, D. (2007). *Sincronización robusta de redes de sistemas dinámicos*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.
- Hernández-Valente, E. A. (2018). *Sincronización heterogénea de robots terrestres y aéreos*. Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de Baja California.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, Inc., tercera edición.
- Khan, A., Khattar, D., y Prajapati, N. (2017). Dual combination combination multi switching synchronization of eight chaotic systems. *Chinese Journal of Physics*, **55**(4): 1209–1218.
- Li, C., Sun, W., y Kurths, J. (2007). Synchronization between two coupled complex networks. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, **76**(4): 1–6.
- Li, C., Xu, C., Sun, W., Xu, J., y Kurths, J. (2009). Outer synchronization of coupled discrete-time networks. *Chaos*, **19**(1): 1–7.

- Li, H. (2010). Adaptive synchronization of complex dynamical networks with non-delayed and delayed coupling. *2010 Chinese Control and Decision Conference, CCDC 2010*, **2010**: 4010–4014.
- Li, Z. y Chen, G. (2006). Global synchronization and asymptotic stability of complex dynamical networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, **53**(1): 28–33.
- Li, Z. y Xue, X. (2010). Outer synchronization of coupled networks using arbitrary coupling strength. *Chaos*, **20**(2): 1–7.
- Liu, Y. C. y Lin, D. (2012). Adaptive synchronization on complex dynamical networks. *2012 5th International Conference on Biomedical Engineering and Informatics, BMEI 2012*, **2012**(Bmei): 1232–1235.
- López-Parra, A. (2017). *Formación en grupos de robots móviles*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.
- Luca, A. D. E. y Benedetto, M. D. D. I. (1993). Control of nonholonomic systems vya dynamic compensation. *Kybernetika*, **29**(6): 593–608.
- Martínez-Clark, R. (2014). *Control de comportamientos colectivos en grupos de robots móviles*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.
- Martínez-Clark, R. (2019). *Control de enjambres robóticos*. Tesis de doctorado, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.
- Mei, J., Jiang, M., y Huang, Z. (2011). Outer synchronization between two complex networks with identical and nonidentical topological structures. *Proceedings of 4th International Workshop on Advanced Computational Intelligence, IWACI 2011*, **2011**: 757–762.
- Peña Ramirez, J., Aihara, K., Fey, R. H., y Nijmeijer, H. (2014). Further understanding of Huygens' coupled clocks: The effect of stiffness. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **270**: 11–19.
- Pena Ramirez, J., Olvera, L. A., Nijmeijer, H., y Alvarez, J. (2016). The sympathy of two pendulum clocks: Beyond Huygens' observations. *Scientific Reports*, **6**(March): 1–16.
- Pena Ramirez, J., Arellano-Delgado, A., y Nijmeijer, H. (2018). Enhancing master-slave synchronization: The effect of using a dynamic coupling. *Physical Review E*, **98**(1): 1–10.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., y Kurths, J. (2001). *Science synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge U. Press.
- Ramirez, J. P., Garcia, R. C., y Alvarez, J. (2016). Synchronization of two inverted pendula via dynamic coupling. *2016 Australian Control Conference, AuCC 2016*, **2016**: 87–92.
- Resmi, V., Ambika, G., y Amritkar, R. E. (2010). Synchronized states in chaotic systems coupled indirectly through a dynamic environment. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, **81**(4): 1–7.

- Runzi, L., Yinglan, W., y Shucheng, D. (2011). Combination synchronization of three classic chaotic systems using active backstepping design. *Chaos*, **21**(4): 043114.
- Schröder, M., Mannattil, M., Dutta, D., Chakraborty, S., y Timme, M. (2015). Transient uncoupling induces synchronization. *Physical Review Letters*, **115**(5): 054101.
- Sun, J., Shen, Y., Zhang, G., Xu, C., y Cui, G. (2013). Combination-combination synchronization among four identical or different chaotic systems. *Nonlinear Dynamics*, **73**(3): 1211–1222.
- Sun, J., Li, N., y Fang, J. (2018). Combination-combination projective synchronization of multiple chaotic systems using sliding mode control. *Advances in Mathematical Physics*, **2018**: 1–10.
- Sun, W., Wang, R., Wang, W., y Cao, J. (2010). Analyzing inner and outer synchronization between two coupled discrete-time networks with time delays. *Cognitive Neurodynamics*, **4**(3): 225–231.
- Sun, W., Wu, Y., Zhang, J., y Qin, S. (2015). Inner and outer synchronization between two coupled networks with interactions. *Journal of the Franklin Institute*, **352**(8): 3166–3177.
- Sun, Y., Li, W., y Zhao, D. (2012). Outer synchronization between two complex dynamical networks with discontinuous coupling. *Chaos*, **22**(4): 1–9.
- Suykens, J. A., Carrant, P. F., y Chua, L. O. (1997). Master-slave synchronization using dynamic output feedback. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **7**(3): 671–679.
- Tang, H., Chen, L., Lu, J., y Tse, C. K. (2008). Adaptive synchronization between two complex networks with nonidentical topological structures. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **387**(22): 5623–5630.
- Tian, J., Qiu, H., Chen, Z., y Chen, Y. (2013). Poincaré section analysis to measure synchronization in coupled Hamiltonian systems. *Modern Physics Letters B*, **27**(5): 2109–2112.
- Vara, Y. (2018). *Diseño de trayectorias para robots móviles tipo diferencial*. Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de Baja California.
- Velasco, G. (2018). *Desarrollo de un arreglo de neuronas electrónicas con aplicaciones en sincronización de sistemas*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.
- Wang, X. F. (2002). Complex networks: Topology, dynamics and synchronization. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, **12**(5): 885–916.
- Wang, X. F. y Chen, G. (2002). Synchronization in small-world dynamical networks. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, **12**(1): 187–192.
- Wu, X., Zheng, W. X., y Zhou, J. (2009). Generalized outer synchronization between complex dynamical networks. *Chaos*, **19**(1): 013109.

- Yadav, V. K. y Das, S. (2019). Combination synchronization of fractional order n-chaotic systems using active backstepping design. *Nonlinear Engineering*, **8**(1): 597–608.
- Yang, L., Liu, Y., y Han, H. (2015). A novel cross-coupled synchronizing control method of industrial robot for trajectory tracking. *Proceedings of 2015 International Conference on Mechanical Engineering, Automation and Control Systems, MEACS 2015*, **2015**: 7–10.
- Yang, L. X. (2010). Generalized synchronization of complex dynamical networks with different nodes and different orders. *Proceedings - 2010 International Workshop on Chaos-Fractal Theories and Applications, IWCFTA 2010*, **2010**(2): 39–42.
- Yang, X. S. (2000). Some aspects of synchronization in coupled systems. *Proceedings of the World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)*, **5**(1): 3225–3228.
- Zhou, J., Chen, J., y Lu, J. A. (2014a). Some notes for synchronization in complex networks. *Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference, CCC 2014*, **1**(1): 2856–2860.
- Zhou, L. y Wang, C. (2016). Hybrid combinatorial synchronization on multiple sub-networks of complex network with unknown boundaries of uncertainties. *Optik*, **127**(22): 11037–11048.
- Zhou, L., Wang, C., He, H., y Lin, Y. (2015). Time-controllable combinatorial inner synchronization and outer synchronization of anti-star networks and its application in secure communication. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **22**(1-3): 623–640.
- Zhou, X., Xiong, L., y Cai, X. (2014b). Combination-combination synchronization of four nonlinear complex chaotic systems. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**: 1–14.

Anexo A. Código de MATLAB utilizado para la emulación de la implementación experimental con CoppeliaSim

```

clear all; clc; close all;

i = 1; k = 1; t(1)=0;
k1=[1;1;1;1;1;1;1;1;1;1];
k2=[1;1;1;1;1;1;1;1;1;1];
xi(:, i)=[0.05;0.05;0.05;0.05;0.05;0.05;0.05;0.05;0.05;0.05];
V(:)=[0.1;0.1;0.1;0.1;0.1;0.1;0.1;0.1;0.1;0.1];

x(:, i) = [0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
y(:, i) = [0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
theta(:, i) =[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
phi(:, i)=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];

Vl(:, i)=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
Vr(:, i)=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];

h1x(:, i)=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
h1y(:, i)=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
h2x(:, i)=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
h2y(:, i)=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];

h1xp(:, i)=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
h2xp(:, i)=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
h1xpp(:, i)=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
h2xpp(:, i)=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];

h1yp(:, i)=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
h2yp(:, i)=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
h1ypp(:, i)=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
h2ypp(:, i)=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];

```

```

%Conectarse con el simulador
vrep=remApi('remoteApi');
clientID=vrep.simxStart('127.0.0.1',19999,true,true,5000,5);
if (clientID ~= -1)
    %Robot1
    [err, motor_izquierdo]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
        'K3_leftWheelMotor', vrep.simx_opmode_one_shot_wait);
    [err, motor_derecho]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
        'K3_rightWheelMotor', vrep.simx_opmode_one_shot_wait);
    [err, kh_body]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
        'K3_bodyPart1', vrep.simx_opmode_one_shot_wait);
    [err, marca1]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
        'Sphere', vrep.simx_opmode_one_shot_wait);

    %Robot2
    [err, marca2]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
        'Sphere2', vrep.simx_opmode_one_shot_wait);
    [err, motor_izquierdo_0]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
        'K3_leftWheelMotor#0', vrep.simx_opmode_one_shot_wait);
    [err, motor_derecho_0]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
        'K3_rightWheelMotor#0', vrep.simx_opmode_one_shot_wait);
    [err, kh_body_0]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
        'K3_bodyPart1#0', vrep.simx_opmode_one_shot_wait);

    %Robot3
    [err, marca3]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
        'Sphere1', vrep.simx_opmode_one_shot_wait);
    [err, motor_izquierdo_1]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
        'K3_leftWheelMotor#1', vrep.simx_opmode_one_shot_wait);
    [err, motor_derecho_1]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
        'K3_rightWheelMotor#1', vrep.simx_opmode_one_shot_wait);
    [err, kh_body_1]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...

```

```
'K3_bodyPart1#1', vrep.simx_opmode_one-shot_wait);

%Robot4
[err, marca4]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
'Sphere3', vrep.simx_opmode_one-shot_wait);
[err, motor_izquierdo_2]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
'K3_leftWheelMotor#2', vrep.simx_opmode_one-shot_wait);
[err, motor_derecho_2]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
'K3_rightWheelMotor#2', vrep.simx_opmode_one-shot_wait);
[err, kh_body_2]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
'K3_bodyPart1#2', vrep.simx_opmode_one-shot_wait);

%Robot5
[err, marca5]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
'Sphere4', vrep.simx_opmode_one-shot_wait);
[err, motor_izquierdo_3]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
'K3_leftWheelMotor#3', vrep.simx_opmode_one-shot_wait);
[err, motor_derecho_3]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
'K3_rightWheelMotor#3', vrep.simx_opmode_one-shot_wait);
[err, kh_body_3]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
'K3_bodyPart1#3', vrep.simx_opmode_one-shot_wait);

%Robot6
[err, marca6]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
'Sphere5', vrep.simx_opmode_one-shot_wait);
[err, motor_izquierdo_4]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
'K3_leftWheelMotor#4', vrep.simx_opmode_one-shot_wait);
[err, motor_derecho_4]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
'K3_rightWheelMotor#4', vrep.simx_opmode_one-shot_wait);
[err, kh_body_4]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
'K3_bodyPart1#4', vrep.simx_opmode_one-shot_wait);
```

```
%Robot7
```

```
[err, marca7]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...  
'Sphere6', vrep.simx_opmode_oneshot_wait);  
[err, motor_izquierdo_5]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...  
'K3_leftWheelMotor#5', vrep.simx_opmode_oneshot_wait);  
[err, motor_derecho_5]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...  
'K3_rightWheelMotor#5', vrep.simx_opmode_oneshot_wait);  
[err, kh_body_5]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...  
'K3_bodyPart1#5', vrep.simx_opmode_oneshot_wait);
```

```
%Robot8
```

```
[err, marca8]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...  
'Sphere7', vrep.simx_opmode_oneshot_wait);  
[err, motor_izquierdo_6]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...  
'K3_leftWheelMotor#6', vrep.simx_opmode_oneshot_wait);  
[err, motor_derecho_6]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...  
'K3_rightWheelMotor#6', vrep.simx_opmode_oneshot_wait);  
[err, kh_body_6]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...  
'K3_bodyPart1#6', vrep.simx_opmode_oneshot_wait);
```

```
%Robot9
```

```
[err, marca9]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...  
'Sphere8', vrep.simx_opmode_oneshot_wait);  
[err, motor_izquierdo_7]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...  
'K3_leftWheelMotor#7', vrep.simx_opmode_oneshot_wait);  
[err, motor_derecho_7]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...  
'K3_rightWheelMotor#7', vrep.simx_opmode_oneshot_wait);  
[err, kh_body_7]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...  
'K3_bodyPart1#7', vrep.simx_opmode_oneshot_wait);
```

```
%Robot10
```

```
[err, marca10]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...  
'Sphere9', vrep.simx_opmode_oneshot_wait);
```

```
[err, motor_izquierdo_8]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
'K3_leftWheelMotor#8', vrep.simx_opmode_one-shot_wait);
[err, motor_derecho_8]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
'K3_rightWheelMotor#8', vrep.simx_opmode_one-shot_wait);
[err, kh_body_8]=vrep.simxGetObjectHandle(clientID, ...
'K3_bodyPart1#8', vrep.simx_opmode_one-shot_wait);
```

```
pause(0.1);
```

```
while (vrep.simxGetConnectionId(clientID)~= -1)
```

```
    %Mientras la simulacion este activa hay que correr el bucle
```

```
    %Cambiar la velocidad de los motores
```

```
    %Robot1
```

```
vrep.simxSetJointTargetVelocity(clientID, ...
motor_izquierdo,k1(1),vrep.simx_opmode_streaming);
```

```
vrep.simxSetJointTargetVelocity(clientID, ...
motor_derecho,k2(1),vrep.simx_opmode_streaming);
```

```
    %Robot2
```

```
vrep.simxSetJointTargetVelocity(clientID, ...
motor_izquierdo_0,k1(2),vrep.simx_opmode_streaming);
```

```
vrep.simxSetJointTargetVelocity(clientID, ...
motor_derecho_0,k2(2),vrep.simx_opmode_streaming);
```

```
    %Robot3
```

```
vrep.simxSetJointTargetVelocity(clientID, ...
motor_izquierdo_1,k1(3),vrep.simx_opmode_streaming);
```

```
vrep.simxSetJointTargetVelocity(clientID, ...
motor_derecho_1,k2(3),vrep.simx_opmode_streaming);
```

```
    %Robot4
```

```
vrep.simxSetJointTargetVelocity(clientID, ...
motor_izquierdo_2,k1(4),vrep.simx_opmode_streaming);
```

```
vrep.simxSetJointTargetVelocity(clientID, ...
motor_derecho_2,k2(4),vrep.simx_opmode_streaming);
```

```
    %Robot5
```

```
vrep.simxSetJointTargetVelocity(clientID, ...
```

```
motor_izquierdo_3,k1(5),vrep.simx_opmode_streaming);
vrep.simxSetJointTargetVelocity(clientID, ...
motor_derecho_3,k2(5),vrep.simx_opmode_streaming);
%Robot6
vrep.simxSetJointTargetVelocity(clientID, ...
motor_izquierdo_4,k1(6),vrep.simx_opmode_streaming);
vrep.simxSetJointTargetVelocity(clientID, ...
motor_derecho_4,k2(6),vrep.simx_opmode_streaming);
%Robot7
vrep.simxSetJointTargetVelocity(clientID, ...
motor_izquierdo_5,k1(7),vrep.simx_opmode_streaming);
vrep.simxSetJointTargetVelocity(clientID, ...
motor_derecho_5,k2(7),vrep.simx_opmode_streaming);
%Robot8
vrep.simxSetJointTargetVelocity(clientID, ...
motor_izquierdo_6,k1(8),vrep.simx_opmode_streaming);
vrep.simxSetJointTargetVelocity(clientID, ...
motor_derecho_6,k2(8),vrep.simx_opmode_streaming);
%Robot9
vrep.simxSetJointTargetVelocity(clientID, ...
motor_izquierdo_7,k1(9),vrep.simx_opmode_streaming);
vrep.simxSetJointTargetVelocity(clientID, ...
motor_derecho_7,k2(9),vrep.simx_opmode_streaming);
%Robot9
vrep.simxSetJointTargetVelocity(clientID, ...
motor_izquierdo_8,k1(10),vrep.simx_opmode_streaming);
vrep.simxSetJointTargetVelocity(clientID, ...
motor_derecho_8,k2(10),vrep.simx_opmode_streaming);
```

```
%Ganancias
```

```
% D=1;
```

```
% gam2=0.15;
```

```
% gam1=0.05;
```

```

%%%%%%%%%%
%Lemniscata
%   D=12;
%   gam2=0.25;
%   gam1=0.25;
%%%%%%%%%%
    D=6;
    gam2=0.10;
    gam1=0.40;
    r=20.5/1000;
    L=88.41/1000;
    T = 0.05;
    vel=0.01;
    t(k + 1) = t(k) + T;

%Trayectorias
%Trayectoria infinito
    xd1=.6*sin(2*pi/100*t(k));
    yd1=.6*sin(2*pi/50*t(k));

    xdp1=.6*(2*pi/100)*cos(2*pi/100*t(k));
    ydp1=.6*(2*pi/50)*cos(2*pi/50*t(k));

    xdpp1=-.6*(2*pi/100)*(2*pi/100)*sin(2*pi/100*t(k));
    ydpp1=-.6*(2*pi/50)*(2*pi/50)*cos(2*pi/50*t(k));

%Elefante

f=2*pi/100;
    s=0.4;
    a=1; b=3; c=3 ;d=1;
    j=3;ke=2;
    xd2=s*(cos(a*t(k)*f)+cos(b*t(k)*f).^j);

```

```

xdp2=s*(a*f*-sin(a*t(k)*f)-b*j*f*sin(b*t(k)*f)*cos(b*t(k)*f)^(j-1));
yd2=s*(sin(c*t(k)*f)-sin(d*t(k)*f).^ke)+0.2-4;
ydp2=s*(c*f*cos(c*t(k)*f)-d*ke*f*cos(d*t(k)*f)*sin(d*t(k)*f)^(ke-1));
xdpp2=-s*(a^2*f^2*cos(a*f*t(k)) + b^2*f^2*j*cos(b*f*t(k)) ...
*cos(b*f*t(k))^(j - 1) - b^2*f^2*j*sin(b*f*t(k))^2 ...
*cos(b*f*t(k))^(j - 2)*(j - 1));
ydp2=-s*(c^2*f^2*sin(c*f*t(k)) - d^2*f^2*ke*sin(d*f*t(k)) ...
*sin(d*f*t(k))^(ke - 1) + d^2*f^2*ke*cos(d*f*t(k))^2*sin(d*f*t(k)) ...
^(ke - 2)*(ke - 1));

% Posicion deseada la cual seguira el primer robot
[err,ang]=vrep.simxGetObjectOrientation(clientID, kh_body,-1, ...
vrep.simx_opmode_streaming);
th(1,i)=ang(3)+pi/2;
[err,pos]=vrep.simxGetObjectPosition(clientID, kh_body,-1, ...
vrep.simx_opmode_streaming);
x(1,i)=pos(1);% Posicion actual del primer robot
y(1,i)=pos(2);
ep1=[x(1,i) y(1,i) 0.6];
vrep.simxSetObjectPosition(clientID, marca1,-1,ep1, ...
vrep.simx_opmode_streaming); %esfera que sigue al primer robot

%Robot2 + Esfera
[err,ang_0]=vrep.simxGetObjectOrientation(clientID, kh_body_0,-1, ...
vrep.simx_opmode_streaming);
[err,pos_0]=vrep.simxGetObjectPosition(clientID, kh_body_0,-1, ...
vrep.simx_opmode_streaming);
th(2,i)=ang_0(3)+pi/2;
x(2,i)=pos_0(1);
y(2,i)=pos_0(2);
ep2=[x(2,i) y(2,i) 0.6];
vrep.simxSetObjectPosition(clientID, marca2,-1,ep2, ...
vrep.simx_opmode_streaming);

```

```

%Robot3 + Esfera
[err , ang_1]=vrep.simxGetObjectOrientation(clientID , kh_body_1,-1, ...
vrep.simx_opmode_streaming);
[err , pos_1]=vrep.simxGetObjectPosition(clientID , kh_body_1,-1, ...
vrep.simx_opmode_streaming);
th(3,i)=ang_1(3)+pi/2;
    x(3,i)=pos_1(1);
    y(3,i)=pos_1(2);
    ep3=[x(3,i) y(3,i) 0.6];
    vrep.simxSetObjectPosition(clientID , marca3,-1,ep3, ...
    vrep.simx_opmode_streaming);

%Robot4 + Esfera
[err , ang_2]=vrep.simxGetObjectOrientation(clientID , kh_body_2,-1, ...
vrep.simx_opmode_streaming);
[err , pos_2]=vrep.simxGetObjectPosition(clientID , kh_body_2,-1, ...
vrep.simx_opmode_streaming);
th(4,i)=ang_2(3)+pi/2;
    x(4,i)=pos_2(1);
    y(4,i)=pos_2(2);
    ep4=[x(4,i) y(4,i) 0.6];
    vrep.simxSetObjectPosition(clientID , marca4,-1,ep4,...
    vrep.simx_opmode_streaming);

%Robot5 + Esfera
[err , ang_3]=vrep.simxGetObjectOrientation(clientID , kh_body_3,-1, ...
vrep.simx_opmode_streaming);
[err , pos_3]=vrep.simxGetObjectPosition(clientID , kh_body_3,-1, ...
vrep.simx_opmode_streaming);
th(5,i)=ang_3(3)+pi/2;
    x(5,i)=pos_3(1);
    y(5,i)=pos_3(2);

```

```

ep5=[x(5,i) y(5,i) 0.6];
vrep.simxSetObjectPosition(clientID , marca5,-1,ep5, ...
vrep.simx_opmode_streaming);

%Robot6 + Esfera
[err , ang_4]=vrep.simxGetObjectOrientation(clientID , kh_body_4,-1, ...
vrep.simx_opmode_streaming);
[err , pos_4]=vrep.simxGetObjectPosition(clientID , kh_body_4,-1, ...
vrep.simx_opmode_streaming);
th(6,i)=ang_4(3)+pi/2;
x(6,i)=pos_4(1);
y(6,i)=pos_4(2);
ep6=[x(6,i) y(6,i) 0.6];
vrep.simxSetObjectPosition(clientID , marca6,-1,ep6, ...
vrep.simx_opmode_streaming);

%Robot7 + Esfera
[err , ang_5]=vrep.simxGetObjectOrientation(clientID , kh_body_5,-1, ...
vrep.simx_opmode_streaming);
[err , pos_5]=vrep.simxGetObjectPosition(clientID , kh_body_5,-1, ...
vrep.simx_opmode_streaming);
th(7,i)=ang_5(3)+pi/2;
x(7,i)=pos_5(1);
y(7,i)=pos_5(2);
ep7=[x(7,i) y(7,i) 0.6];
vrep.simxSetObjectPosition(clientID , marca7,-1,ep7, ...
vrep.simx_opmode_streaming);

%Robot8 + Esfera
[err , ang_6]=vrep.simxGetObjectOrientation(clientID , kh_body_6,-1, ...
vrep.simx_opmode_streaming);
[err , pos_6]=vrep.simxGetObjectPosition(clientID , kh_body_6,-1, ...
vrep.simx_opmode_streaming);

```

```

th(8,i)=ang_6(3)+pi/2;
x(8,i)=pos_6(1);
y(8,i)=pos_6(2);
ep8=[x(8,i) y(8,i) 0.6];
vrep.simxSetObjectPosition(clientID , marca8,-1,ep8, ...
vrep.simx_opmode_streaming);

%Robot9 + Esfera
[err ,ang_7]=vrep.simxGetObjectOrientation(clientID , kh_body_7,-1, ...
vrep.simx_opmode_streaming);
[err ,pos_7]=vrep.simxGetObjectPosition(clientID , kh_body_7,-1, ...
vrep.simx_opmode_streaming);
th(9,i)=ang_7(3)+pi/2;
x(9,i)=pos_7(1);
y(9,i)=pos_7(2);
ep9=[x(9,i) y(9,i) 0.6];
vrep.simxSetObjectPosition(clientID , marca9,-1,ep9, ...
vrep.simx_opmode_streaming);

%Robot10 + Esfera
[err ,ang_8]=vrep.simxGetObjectOrientation(clientID , kh_body_8,-1, ...
vrep.simx_opmode_streaming);
[err ,pos_8]=vrep.simxGetObjectPosition(clientID , kh_body_8,-1, ...
vrep.simx_opmode_streaming);
th(10,i)=ang_8(3)+pi/2;
x(10,i)=pos_8(1);
y(10,i)=pos_8(2);
ep10=[x(10,i) y(10,i) 0.6];
vrep.simxSetObjectPosition(clientID , marca10,-1,ep10, ...
vrep.simx_opmode_streaming);

```

%Velocidades

%Robot1

$xx(1) = V(1) * \cos(th(1, i));$

$yy(1) = V(1) * \sin(th(1, i));$

%Robot2

$xx(2) = V(2) * \cos(th(2, i));$

$yy(2) = V(2) * \sin(th(2, i));$

%Robot3

$xx(3) = V(3) * \cos(th(3, i));$

$yy(3) = V(3) * \sin(th(3, i));$

%Robot4

$xx(4) = V(4) * \cos(th(4, i));$

$yy(4) = V(4) * \sin(th(4, i));$

%Robot5

$xx(5) = V(5) * \cos(th(5, i));$

$yy(5) = V(5) * \sin(th(5, i));$

%Robot6

$xx(6) = V(6) * \cos(th(6, i));$

$yy(6) = V(6) * \sin(th(6, i));$

%Robot7

$xx(7) = V(7) * \cos(th(7, i));$

$yy(7) = V(7) * \sin(th(7, i));$

%Robot8

$xx(8) = V(8) * \cos(th(8, i));$

$yy(8) = V(8) * \sin(th(8, i));$

%Robot9

$xx(9) = V(9) * \cos(th(9, i));$

$yy(9) = V(9) * \sin(th(9, i));$

%Robot10

$xx(10) = V(10) * \cos(th(10, i));$

$yy(10) = V(10) * \sin(th(10, i));$

```

beta1=-1;
beta2=-1;
%%disx=[0 2 4 6 8 0 2 2 2 2];
disx=[0 2 4 6 8 0 2 4 6 8];
disy=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Anticolisiones
rx=zeros(1,10);
ry=zeros(1,10);
ki=2;
m=0.5;
rr=1;

for ri=1:10
    for rj=ki:10

        neu=sqrt((x(ri,i)-x(rj,i))^2+(y(ri,i)-y(rj,i))^2);

        if neu<=m
            rij(ri,rj)=rr;
            rij(rj,ri)=rr;

            rx(ri)=rx(ri)-rr*sign(x(rj,i)-x(ri,i));
            ry(ri)=ry(ri)-rr*sign(y(rj,i)-y(ri,i));
            rx(rj)=rx(rj)-rr*sign(x(ri,i)-x(rj,i));
            ry(rj)=ry(rj)-rr*sign(y(ri,i)-y(rj,i));

        else
            rij(ri,rj)=0;
            rij(rj,ri)=0;

            rx(ri)= rx(ri);

```

```

        ry(ri)=ry(ri);
        rx(rj)=rx(rj);
        ry(rj)=ry(rj);
    end

end

ki=ki+1;

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Entradas
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Switch para sincronizacion interna/externa
    if k>2930
        in=0;
        ex=1;
    else
        in=1;
        ex=0;
    end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Estrella
% Robot1 Maestro
    u1(1)=xdpp1+beta1*h2x(1,i)+beta1*h2xp(1,i)+rx(1);
    u2(1)=ydpp1+beta2*h2y(1,i)+beta2*h2yp(1,i)+ry(1);
% Robot2
    u1(2)=xdpp1+beta1*h2x(2,i)+beta1*h2xp(2,i)+rx(2);
    u2(2)=ydpp1+beta2*h2y(2,i)+beta2*h2yp(2,i)+ry(2);
% Robot3
    u1(3)=xdpp1+beta1*h2x(3,i)+beta1*h2xp(3,i)+rx(3);
    u2(3)=ydpp1+beta2*h2y(3,i)+beta2*h2yp(3,i)+ry(3);

```

```

%Robot4
    u1(4)=xdpp1+beta1*h2x(4,i)+beta1*h2xp(4,i)+rx(4);
    u2(4)=ydpp1+beta2*h2y(4,i)+beta2*h2yp(4,i)+ry(4);
%Robot5
    u1(5)=xdpp1+beta1*h2x(5,i)+beta1*h2xp(5,i)+rx(5);
    u2(5)=ydpp1+beta2*h2y(5,i)+beta2*h2yp(5,i)+ry(5);
%Cadena
%Robot6 Maestro
    u1(6)=in*xdpp2+ex*xdpp1+beta1*h2x(6,i)+beta1*h2xp(6,i)+rx(6);
    u2(6)=in*ydpp2+ex*ydpp1+beta2*h2y(6,i)+beta2*h2yp(6,i)+ry(6);
%Robot7
    u1(7)=in*xdpp2+ex*xdpp1+beta1*h2x(7,i)+beta1*h2xp(7,i)+rx(7);
    u2(7)=in*ydpp2+ex*ydpp1+beta2*h2y(7,i)+beta2*h2yp(7,i)+ry(7);
%Robot8
    u1(8)=in*xdpp2+ex*xdpp1+beta1*h2x(8,i)+beta1*h2xp(8,i)+rx(8);
    u2(8)=in*ydpp2+ex*ydpp1+beta2*h2y(8,i)+beta2*h2yp(8,i)+ry(8);
%Robot9
    u1(9)=in*xdpp2+ex*xdpp1+beta1*h2x(9,i)+beta1*h2xp(9,i)+rx(9);
    u2(9)=in*ydpp2+ex*ydpp1+beta2*h2y(9,i)+beta2*h2yp(9,i)+ry(9);
%Robot10
    u1(10)=in*xdpp2+ex*xdpp1+beta1*h2x(10,i)+beta1*h2xp(10,i)+rx(10);
    u2(10)=in*ydpp2+ex*ydpp1+beta2*h2y(10,i)+beta2*h2yp(10,i)+ry(10);

%Calculando W con el cambio de coordenadas
    %Robot 1
    W(1) = (u2(1)*cos(th(1,i)) - u1(1)*sin(th(1,i)))/(xi(1,k));
    %Robot2
    W(2) = (u2(2)*cos(th(2,i)) - u1(2)*sin(th(2,i)))/(xi(2,k));
    %Robot3
    W(3) = (u2(3)*cos(th(3,i)) - u1(3)*sin(th(3,i)))/(xi(3,k));
    %Robot4
    W(4) = (u2(4)*cos(th(4,i)) - u1(4)*sin(th(4,i)))/(xi(4,k));

```

```

%Robot5
W(5) = (u2(5)*cos(th(5,i)) - u1(5)*sin(th(5,i)))/(xi(5,k));
%Robot6
W(6) = (u2(6)*cos(th(6,i)) - u1(6)*sin(th(6,i)))/(xi(6,k));
%Robot7
W(7) = (u2(7)*cos(th(7,i)) - u1(7)*sin(th(7,i)))/(xi(7,k));
%Robot8
W(8) = (u2(8)*cos(th(8,i)) - u1(8)*sin(th(8,i)))/(xi(8,k));
%Robot9
W(9) = (u2(9)*cos(th(9,i)) - u1(9)*sin(th(9,i)))/(xi(9,k));
%Robot9
W(10) = (u2(10)*cos(th(10,i)) - u1(10)*sin(th(10,i)))/(xi(10,k));

%Calculo de las entradas (velocidades angulares)
%Robot 1
Wl(1) = (xi(1,k)/r) - ((L*W(1))/(2*r));
Wr(1)= (xi(1,k)/r) + ((L*W(1))/(2*r));
wl(1) = LimOmega(Wl(1), 0.476, 7.68);
wr(1) = LimOmega(Wr(1), 0.476, 7.68);
k1(1)=wl(1);
k2(1)=wr(1);
Vl(1,i+1) = r*Wl(1);
Vr(1,i+1) = r*Wr(1);
V(1) = (Vl(1,i+1) + Vr(1,i+1))/2;
%Robot 2
Wl(2) = (xi(2,k)/r) - ((L*W(2))/(2*r));
Wr(2)= (xi(2,k)/r) + ((L*W(2))/(2*r));
wl(2) = LimOmega(Wl(2), 0.476, 7.68);
wr(2) = LimOmega(Wr(2), 0.476, 7.68);
k1(2)=wl(2);
k2(2)=wr(2);
Vl(2,i+1) = r*Wl(2);
Vr(2,i+1) = r*Wr(2);

```

```

V(2) = (Vl(2,i+1) + Vr(2,i+1))/2;
%Robot 3
Wl(3) = (xi(3,k)/r) - ((L*W(3))/(2*r));
Wr(3)= (xi(3,k)/r) + ((L*W(3))/(2*r));
wl(3) = LimOmega(Wl(3), 0.476, 7.68);
wr(3) = LimOmega(Wr(3), 0.476, 7.68);
k1(3)=wl(3);
k2(3)=wr(3);
Vl(3,i+1) = r*Wl(3);
Vr(3,i+1) = r*Wr(3);
V(3) = (Vl(3,i+1) + Vr(3,i+1))/2;
%Robot 4
Wl(4) = (xi(4,k)/r) - ((L*W(4))/(2*r));
Wr(4)= (xi(4,k)/r) + ((L*W(4))/(2*r));
wl(4) = LimOmega(Wl(4), 0.476, 7.68);
wr(4) = LimOmega(Wr(4), 0.476, 7.68);
k1(4)=wl(4);
k2(4)=wr(4);
Vl(4,i+1) = r*Wl(4);
Vr(4,i+1) = r*Wr(4);
V(4) = (Vl(4,i+1) + Vr(4,i+1))/2;
%Robot 5
Wl(5) = (xi(5,k)/r) - ((L*W(5))/(2*r));
Wr(5)= (xi(5,k)/r) + ((L*W(5))/(2*r));
wl(5) = LimOmega(Wl(5), 0.476, 7.68);
wr(5) = LimOmega(Wr(5), 0.476, 7.68);
k1(5)=wl(5);
k2(5)=wr(5);
Vl(5,i+1) = r*Wl(5);
Vr(5,i+1) = r*Wr(5);
V(5) = (Vl(5,i+1) + Vr(5,i+1))/2;
%Robot 6
Wl(6) = (xi(6,k)/r) - ((L*W(6))/(2*r));

```

```

Wr(6)= (xi(6,k)/r) + ((L*W(6))/(2*r));
wl(6) = LimOmega(Wl(6), 0.476, 7.68);
wr(6) = LimOmega(Wr(6), 0.476, 7.68);
k1(6)=wl(6);
k2(6)=wr(6);
Vl(6,i+1) = r*Wl(6);
Vr(6,i+1) = r*Wr(6);
V(6) = (Vl(6,i+1) + Vr(6,i+1))/2;
%Robot 7
Wl(7) = (xi(7,k)/r) - ((L*W(7))/(2*r));
Wr(7)= (xi(7,k)/r) + ((L*W(7))/(2*r));
wl(7) = LimOmega(Wl(7), 0.476, 7.68);
wr(7) = LimOmega(Wr(7), 0.476, 7.68);
k1(7)=wl(7);
k2(7)=wr(7);
Vl(7,i+1) = r*Wl(7);
Vr(7,i+1) = r*Wr(7);
V(7) = (Vl(7,i+1) + Vr(7,i+1))/2;
%Robot 8
Wl(8) = (xi(8,k)/r) - ((L*W(8))/(2*r));
Wr(8)= (xi(8,k)/r) + ((L*W(8))/(2*r));
wl(8) = LimOmega(Wl(8), 0.476, 7.68);
wr(8) = LimOmega(Wr(8), 0.476, 7.68);
k1(8)=wl(8);
k2(8)=wr(8);
Vl(8,i+1) = r*Wl(8);
Vr(8,i+1) = r*Wr(8);
V(8) = (Vl(8,i+1) + Vr(8,i+1))/2;
%Robot 9
Wl(9) = (xi(9,k)/r) - ((L*W(9))/(2*r));
Wr(9)= (xi(9,k)/r) + ((L*W(9))/(2*r));
wl(9) = LimOmega(Wl(9), 0.476, 7.68);
wr(9) = LimOmega(Wr(9), 0.476, 7.68);

```

```

k1(9)=wl(9);
k2(9)=wr(9);
Vl(9,i+1) = r*Wl(9);
Vr(9,i+1) = r*Wr(9);
V(9) = (Vl(9,i+1) + Vr(9,i+1))/2;
%Robot 10
Wl(10) = (xi(10,k)/r) - ((L*W(10))/(2*r));
Wr(10)= (xi(10,k)/r) + ((L*W(10))/(2*r));
wl(10) = LimOmega(Wl(10), 0.476, 7.68);
wr(10) = LimOmega(Wr(10), 0.476, 7.68);
k1(10)=wl(10);
k2(10)=wr(10);
Vl(10,i+1) = r*Wl(10);
Vr(10,i+1) = r*Wr(10);
V(10) = (Vl(10,i+1) + Vr(10,i+1))/2;

```

```
%Integradores
```

```
%robot 1 Maestro
```

```
xi(1,k + 1) = xi(1,k) + T*((u1(1)*cos(th(1,i))) + ...
(u2(1)*sin(th(1,i))));
```

```
%robot 2
```

```
xi(2,k + 1) = xi(2,k) + T*((u1(2)*cos(th(2,i))) + ...
(u2(2)*sin(th(2,i))));
```

```
%robot 3
```

```
xi(3,k + 1) = xi(3,k) + T*((u1(3)*cos(th(3,i))) + ...
(u2(3)*sin(th(3,i))));
```

```
%robot 4
```

```
xi(4,k + 1) = xi(4,k) + T*((u1(4)*cos(th(4,i))) + ...
(u2(4)*sin(th(4,i))));
```

```
%robot 5
```

```
xi(5,k + 1) = xi(5,k) + T*((u1(5)*cos(th(5,i))) + ...
(u2(5)*sin(th(5,i))));
```

```

%robot 6 Maestro
xi(6,k + 1) = xi(6,k) + T*((u1(6)*cos(th(6,i))) + ...
(u2(6)*sin(th(6,i))));
%robot 7
xi(7,k + 1) = xi(7,k) + T*((u1(7)*cos(th(7,i))) + ...
(u2(7)*sin(th(7,i))));
%robot 8
xi(8,k + 1) = xi(8,k) + T*((u1(8)*cos(th(8,i))) + ...
(u2(8)*sin(th(8,i))));
%robot 9
xi(9,k + 1) = xi(9,k) + T*((u1(9)*cos(th(9,i))) + ...
(u2(9)*sin(th(9,i))));
%robot 10
xi(10,k + 1) = xi(10,k) + T*((u1(10)*cos(th(10,i))) + ...
(u2(10)*sin(th(10,i))));

%Acoplamiento 1
h1x(1,k+1)=-h1x(1,i)+h2x(1,i);
h2x(1,k+1)=-gam1*h1x(1,i)-gam2*h2x(1,i)-D*(xd1+beta1*x(1,i)- ...
beta1*disx(1));
h1xp(1,k+1)=-h1xp(1,i)+h2xp(1,i);
h2xp(1,k+1)=-gam1*h1xp(1,i)-gam2*h2xp(1,i)-D*(xdp1+beta1*xx(1));
h1y(1,k+1)=-h1y(1,i)+h2y(1,i);
h2y(1,k+1)=-gam1*h1y(1,i)-gam2*h2y(1,i)-D*(yd1+beta2*y(1,i)- ...
beta2*disy(1));
h1yp(1,k+1)=-h1yp(1,i)+h2yp(1,i);
h2yp(1,k+1)=-gam1*h1yp(1,i)-gam2*h2yp(1,i)-D*(ydp1+beta2*yy(1));

%Acoplamiento 2
h1x(2,k+1)=-h1x(2,i)+h2x(2,i);
h2x(2,k+1)=-gam1*h1x(2,i)-gam2*h2x(2,i)-D*(x(1,i)+beta1*x(2,i)- ...
beta1*disx(2));
h1xp(2,k+1)=-h1xp(2,i)+h2xp(2,i);

```

```

h2xp(2,k+1)=-gam1*h1xp(2,i)-gam2*h2xp(2,i)-D*(xx(1)+beta1*xx(2));
h1y(2,k+1)=-h1y(2,i)+h2y(2,i);
h2y(2,k+1)=-gam1*h1y(2,i)-gam2*h2y(2,i)-D*(y(1,i)+beta2*y(2,i)- ...
beta2*disy(2));
h1yp(2,k+1)=-h1yp(2,i)+h2yp(2,i);
h2yp(2,k+1)=-gam1*h1yp(2,i)-gam2*h2yp(2,i)-D*(yy(1)+beta2*yy(2));

```

```
%Acoplamiento 3
```

```

h1x(3,k+1)=-h1x(3,i)+h2x(3,i);
h2x(3,k+1)=-gam1*h1x(3,i)-gam2*h2x(3,i)-D*(x(1,i)+beta1*x(3,i)- ...
beta1*disx(3));
h1xp(3,k+1)=-h1xp(3,i)+h2xp(3,i);
h2xp(3,k+1)=-gam1*h1xp(3,i)-gam2*h2xp(3,i)-D*(xx(1)+beta1*xx(3));
h1y(3,k+1)=-h1y(3,i)+h2y(3,i);
h2y(3,k+1)=-gam1*h1y(3,i)-gam2*h2y(3,i)-D*(y(1,i)+beta2*y(3,i)- ...
beta2*disy(3));
h1yp(3,k+1)=-h1yp(3,i)+h2yp(3,i);
h2yp(3,k+1)=-gam1*h1yp(3,i)-gam2*h2yp(3,i)-D*(yy(1)+beta2*yy(3));

```

```
%Acoplamiento 4
```

```

h1x(4,k+1)=-h1x(4,i)+h2x(4,i);
h2x(4,k+1)=-gam1*h1x(4,i)-gam2*h2x(4,i)-D*(x(1,i)+beta1*x(4,i)- ...
beta1*disx(4));
h1xp(4,k+1)=-h1xp(4,i)+h2xp(4,i);
h2xp(4,k+1)=-gam1*h1xp(4,i)-gam2*h2xp(4,i)-D*(xx(1)+beta1*xx(4));
h1y(4,k+1)=-h1y(4,i)+h2y(4,i);
h2y(4,k+1)=-gam1*h1y(4,i)-gam2*h2y(4,i)-D*(y(1,i)+beta2*y(4,i)- ...
beta2*disy(4));
h1yp(4,k+1)=-h1yp(4,i)+h2yp(4,i);
h2yp(4,k+1)=-gam1*h1yp(4,i)-gam2*h2yp(4,i)-D*(yy(1)+beta2*yy(4));

```

```
%Acoplamiento 5
```

```
h1x(5,k+1)=-h1x(5,i)+h2x(5,i);
```

```
h2x(5,k+1)=-gam1*h1x(5,i)-gam2*h2x(5,i)-D*(x(1,i)+beta1*x(5,i)- ...
beta1*disx(5));
```

```
h1xp(5,k+1)=-h1xp(5,i)+h2xp(5,i);
```

```
h2xp(5,k+1)=-gam1*h1xp(5,i)-gam2*h2xp(5,i)-D*(xx(1)+beta1*xx(5));
```

```
h1y(5,k+1)=-h1y(5,i)+h2y(5,i);
```

```
h2y(5,k+1)=-gam1*h1y(5,i)-gam2*h2y(5,i)-D*(y(1,i)+beta2*y(5,i)- ...
beta2*disy(5));
```

```
h1yp(5,k+1)=-h1yp(5,i)+h2yp(5,i);
```

```
h2yp(5,k+1)=-gam1*h1yp(5,i)-gam2*h2yp(5,i)-D*(yy(1)+beta2*yy(5));
```

```
%Acoplamiento 6
```

```
h1x(6,k+1)=-h1x(6,i)+h2x(6,i);
```

```
h2x(6,k+1)=-gam1*h1x(6,i)-gam2*h2x(6,i)-D*(in*xd2+ex*x(1,i)+ ...
beta1*x(6,i)-beta1*disx(6));
```

```
h1xp(6,k+1)=-h1xp(6,i)+h2xp(6,i);
```

```
h2xp(6,k+1)=-gam1*h1xp(6,i)-gam2*h2xp(6,i)-D*(in*xdp2+ex*xx(1)+ ...
beta1*xx(6));
```

```
h1y(6,k+1)=-h1y(6,i)+h2y(6,i);
```

```
h2y(6,k+1)=-gam1*h1y(6,i)-gam2*h2y(6,i)-D*(in*yd2+ex*(y(1,i)-2)+ ...
beta2*y(6,i)-beta2*disy(6));
```

```
h1yp(6,k+1)=-h1yp(6,i)+h2yp(6,i);
```

```
h2yp(6,k+1)=-gam1*h1yp(6,i)-gam2*h2yp(6,i)-D*(in*ydp2+ex*yy(1)+ ...
beta2*yy(6));
```

```
%Acoplamiento 7
```

```
h1x(7,k+1)=-h1x(7,i)+h2x(7,i);
```

```
h2x(7,k+1)=-gam1*h1x(7,i)-gam2*h2x(7,i)-D*(x(6,i)+beta1*x(7,i)- ...
beta1*disx(7));
```

```
h1xp(7,k+1)=-h1xp(7,i)+h2xp(7,i);
```

```
h2xp(7,k+1)=-gam1*h1xp(7,i)-gam2*h2xp(7,i)-D*(xx(6)+beta1*xx(7));
```

```
h1y(7,k+1)=-h1y(7,i)+h2y(7,i);
```

```
h2y(7,k+1)=-gam1*h1y(7,i)-gam2*h2y(7,i)-D*(y(6,i)+beta2*y(7,i)- ...
beta2*disy(7));
```

```

h1yp(7,k+1)=-h1yp(7,i)+h2yp(7,i);
h2yp(7,k+1)=-gam1*h1yp(7,i)-gam2*h2yp(7,i)-D*(yy(6)+beta2*yy(7));

%Acoplamiento 8
h1x(8,k+1)=-h1x(8,i)+h2x(8,i);
h2x(8,k+1)=-gam1*h1x(8,i)-gam2*h2x(8,i)-D*(x(6,i)+beta1*x(8,i)- ...
beta1*disx(8));
h1xp(8,k+1)=-h1xp(8,i)+h2xp(8,i);
h2xp(8,k+1)=-gam1*h1xp(7,i)-gam2*h2xp(8,i)-D*(xx(6)+beta1*xx(8));
h1y(8,k+1)=-h1y(8,i)+h2y(8,i);
h2y(8,k+1)=-gam1*h1y(8,i)-gam2*h2y(8,i)-D*(y(6,i)+beta2*y(8,i)- ...
beta2*disy(8));
h1yp(8,k+1)=-h1yp(8,i)+h2yp(8,i);
h2yp(8,k+1)=-gam1*h1yp(8,i)-gam2*h2yp(8,i)-D*(yy(6)+beta2*yy(8));

%Acoplamiento 9
h1x(9,k+1)=-h1x(9,i)+h2x(9,i);
h2x(9,k+1)=-gam1*h1x(9,i)-gam2*h2x(9,i)-D*(x(6,i)+beta1*x(9,i)- ...
beta1*disx(9));
h1xp(9,k+1)=-h1xp(9,i)+h2xp(9,i);
h2xp(9,k+1)=-gam1*h1xp(9,i)-gam2*h2xp(9,i)-D*(xx(6)+beta1*xx(9));
h1y(9,k+1)=-h1y(9,i)+h2y(9,i);
h2y(9,k+1)=-gam1*h1y(9,i)-gam2*h2y(9,i)-D*(y(6,i)+beta2*y(9,i)- ...
beta2*disy(9));
h1yp(9,k+1)=-h1yp(9,i)+h2yp(9,i);
h2yp(9,k+1)=-gam1*h1yp(9,i)-gam2*h2yp(9,i)-D*(yy(6)+beta2*yy(9));

%Acoplamiento 10
h1x(10,k+1)=-h1x(10,i)+h2x(10,i);
h2x(10,k+1)=-gam1*h1x(10,i)-gam2*h2x(10,i)-D*(x(6,i)+beta1*x(10,i) ...
- beta1*disx(10));
h1xp(10,k+1)=-h1xp(10,i)+h2xp(10,i);
h2xp(10,k+1)=-gam1*h1xp(10,i)-gam2*h2xp(10,i)-D*(xx(6)+beta1*xx(10));

```

```
h1y(10,k+1)=-h1y(10,i)+h2y(10,i);
h2y(10,k+1)=-gam1*h1y(10,i)-gam2*h2y(10,i)-D*(y(6,i)+beta2*y(10,i) ...
-beta2*disy(10));
h1yp(10,k+1)=-h1yp(10,i)+h2yp(10,i);
h2yp(10,k+1)=-gam1*h1yp(10,i)-gam2*h2yp(10,i)-D*(yy(6)+beta2*yy(10));
```

```
k = k + 1;
    i=i+1;
    pause(0.08)
end
```

```
end
```

```
vrep.simxFinish(clientID);
```