

**Centro de Investigación Científica y de Educación  
Superior de Ensenada, Baja California**



---

**Maestría en Ciencias  
en Óptica con orientación en Óptica Física**

---

**Reconstrucción de estados cuánticos resueltos en el  
tiempo mediante tomografía homodina**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

**Gisell Lorena Osorio Osorio**

Ensenada, Baja California, México

2021

Tesis defendida por

**Gisell Lorena Osorio Osorio**

y aprobada por el siguiente Comité

---

Dr. Francisco Antonio Domínguez Serna  
Director de tesis

Dra. Karina Garay Palmett

Dr. Serguei Stepanov

Dr. Raúl Rangel Rojo

Dr. Fernando Rojas Íñiguez

Dr. Rafael Andrés Cabral Tena



---

Dra. Karina Garay Palmett  
Coordinadora del Posgrado en Óptica

---

Dr. Pedro Negrete Regagnon  
Director de Estudios de Posgrado

*Gisell Lorena Osorio Osorio © 2021*

*Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis*

Resumen de la tesis que presenta Gisell Lorena Osorio Osorio como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Óptica con orientación en Óptica Física.

## **Reconstrucción de estados cuánticos resueltos en el tiempo mediante tomografía homodina**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Francisco Antonio Domínguez Serna  
Director de tesis

En este trabajo se diseñó y simuló un protocolo de tomografía homodina resuelta en el tiempo para la reconstrucción de estados cuánticos, enfocado en estados pulsados producidos mediante el fenómeno del mezclado de cuatro ondas estimulado en una fibra óptica de cristal fotónico comercial. En particular, se consideró el caso no degenerado en emisión. Se reporta el análisis teórico de este proceso no lineal a partir de la teoría vectorial clásica de amplificación paramétrica en fibra óptica y desde un formalismo cuántico, utilizando un enfoque en el cuadro de Heisenberg. El análisis clásico incluyó el estudio de los modos transversales soportados en la fibra óptica mediante el software MODE Solutions, y la solución numérica de las ecuaciones no lineales de Schrödinger acopladas que describen la propagación de los campos, utilizando un algoritmo de Fourier por paso dividido. Mediante estos análisis se determinaron las distribuciones espaciales y los perfiles espectrales de los campos involucrados. Se encontró que la propagación de los campos en esta fibra óptica está gobernada por efectos no lineales, tales como la auto-modulación de fases y modulación de fases cruzadas inducidas por los campos de bombeo, mientras que los efectos dispersivos juegan un papel relativamente menor. Estos resultados ponen de manifiesto la viabilidad de la implementación del experimento de mezclado de cuatro ondas estimulado y fueron fundamentales para la formulación del diseño experimental de detección homodina. A partir de los análisis mencionados se simuló datos de cuadraturas del campo, medibles en un experimento de detección homodina, utilizando un método Monte-Carlo. Se utilizó un algoritmo de estimación de máxima verosimilitud para reconstruir la matriz de densidad y la función de Wigner de la señal de interés. Finalmente, se presentan los avances en la implementación experimental. Se espera que los resultados teóricos y experimentales de esta tesis contribuyan con la construcción de una plataforma para caracterizar estados no clásicos de la luz y con el diseño de nuevas fuentes pulsadas en un intervalo amplio de frecuencias, generadas a partir de la amplificación paramétrica en medios no lineales de tercer orden.

**Palabras clave:** tomografía cuántica, detección homodina, amplificación paramétrica, fibra óptica de cristal fotónico.

Abstract of the thesis presented by Gisell Lorena Osorio Osorio as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Optics with orientation in Physical Optics.

## **Reconstruction of time-resolved quantum states by quantum tomography**

Abstract approved by:

---

Dr. Francisco Antonio Domínguez Serna  
Thesis Director

In this work, we design and simulate a time-resolved homodyne tomography protocol to reconstruct quantum states, focused on pulsed states produced by the stimulated four-wave mixing process in a commercial photonic crystal fiber. In particular, the case of non-degenerate emission was considered. This nonlinear process's theoretical analysis is reported from the vector theory of parametric amplification in optical fibers and from a quantum formalism using a Heisenberg picture approach. The classical analysis included the study of the transverse modes supported in the optical fiber, which was carried out using the MODE Solutions software, and the numerical solution of the coupled nonlinear Schrödinger equations that describe the propagation of the fields using a Split-step type algorithm. These analyses determined the spatial distributions and spectral profiles of the fields involved in this process. It was found that the propagation of the fields in this optical fiber is governed by nonlinear effects, such as self-phase modulation and cross-phase modulation induced by the pumping fields, while the dispersive effects play a relatively minor role. These results show the feasibility of implementing the stimulated four-wave mixing experiment and were fundamental for formulating the homodyne detection experimental design. Field-quadrature data, measurable in a homodyne detection experiment, were simulated using a Monte-Carlo method from the analyses mentioned earlier. The density matrix and the Wigner function of the signal of interest were reconstructed using a maximum likelihood estimation algorithm. Finally, the advances in the experimental implementation are presented. This thesis's theoretical and experimental results are expected to contribute to the construction of a platform to characterize non-classical states of light and the design of new pulsed sources in a wide range of frequencies generated from parametric amplification in third-order nonlinear mediums.

**Keywords: quantum tomography, homodyne detection, parametric amplification, photonic crystal fiber.**

## **Dedicatoria**

***A mamá, papá, Vale, Harold, Kathe y Beto.***

## Agradecimientos

Agradezco con el alma a mi familia, por ser mi inspiración. A Beto, por su dulce compañía en este camino, y a la familia Acevedo Carrera por hacerme sentir como en casa.

Mi más grande admiración y sincera gratitud al doctor Francisco Antonio Domínguez y a la doctora Karina Garay Palmett, por haberme dado la oportunidad de aprender y crecer tanto en el grupo de investigación. Son mi ejemplo a seguir, mis grandes mentores. Muchas gracias por su paciencia, su confianza y su apoyo.

Muchas gracias a mis sinodales por su tiempo y sus valiosos aportes que, sin lugar a dudas, enriquecieron este proyecto.

Un agradecimiento muy especial a la psicóloga Yahaira Castañeda por su paciente escucha, por todos sus consejos y por su inconmensurable ayuda durante los tiempos más difíciles de la pandemia.

Todo mi cariño y gratitud a los profesores de la maestría, por haberme enseñado tanto acerca de la magia de la luz. Sin lugar a dudas, más allá de ser excelentes científicos, también son grandes seres humanos.

Les agradezco con mi corazón a todos los integrantes del Laboratorio de Interacciones No Lineales y Óptica Cuántica-LINOC, por su compañía, sus palabras de ánimo cuando el experimento se desalineaba o fallaba y también sus animosas celebraciones cuando salían bien las cosas.

Muchas gracias a mis compañeros de generación. Un gusto haber coincidido con ustedes. Los mejores deseos a todos.

También les agradezco con mi corazón a mis queridos amigos de Chiza y de Pereira, por su compañía en la distancia y por alegrar mis días.

Agradezco sobremanera a todas las personas que pertenecen al departamento de óptica. En todos encontré amabilidad, hospitalidad, cálidas sonrisas. También me hicieron sentir como en casa.

Un agradecimiento muy especial para el doctor Wencel de la Cruz por su apoyo, el cual fue fundamental para el desarrollo y la culminación de este proyecto. En particular, agradezco el acceso que se tuvo al software de simulación por medio del convenio que se tuvo con el Laboratorio Nacional de Nanofabricación, perteneciente al Centro de Nanociencias y Nanotecnología de la UNAM. También le agradezco sobremanera por el apoyo a través del proyecto de ayudantía, adscrito al Sistema Nacional de Investigadores, el cual me permitió seguir adelante.

El desarrollo de este proyecto también fue posible gracias al apoyo del Laboratorio Nacional de Materia Cuántica: Materia Ultrafría e Información Cuántica (LANMAC).

Gracias al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por darme la oportunidad de formarme como científica al lado de investigadores altamente capacitados y con una educación de excelente calidad.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría. No. de becario: 728823.

Finalmente, gracias a la bonita Ensenada, con sus atardeceres inigualables, que ahora se siente como mi segundo hogar.

# Tabla de contenido

	Página
Resumen en español .....	ii
Resumen en inglés .....	iii
Dedicatoria .....	iv
Agradecimientos .....	v
Lista de figuras .....	ix
Lista de tablas .....	xiv
<b>Capítulo 1. Introducción</b>	
1.1. Objetivos .....	6
1.1.1. Objetivo general .....	6
1.1.2. Objetivos específicos .....	7
1.2. Estructura de la tesis .....	7
<b>Capítulo 2. Teoría de la tomografía cuántica</b>	
2.1. Introducción .....	9
2.2. Teoría cuántica de la luz .....	9
2.2.1. Cuantización del campo electromagnético .....	12
2.2.2. Estados coherentes .....	15
2.3. Tomografía cuántica .....	21
2.3.1. Matriz de densidad .....	23
2.3.2. Función de Wigner .....	24
2.3.3. Detección homodina balanceada .....	26
2.3.3.1. Detección homodina en el régimen pulsado .....	29
2.3.4. Algoritmos de reconstrucción de estados cuánticos en experi- mentos de tomografía homodina .....	31
2.3.4.1. Reconstrucción de máxima verosimilitud (MaxLik) .....	32
2.3.4.2. Algoritmo de funciones patrones .....	36
<b>Capítulo 3. Amplificación paramétrica en una fibra óptica de cristal fotónico</b>	
3.1. Introducción .....	38
3.2. Fibras ópticas de cristal fotónico .....	39
3.3. Mezclado de cuatro ondas y amplificación paramétrica .....	43
3.4. Modelo para la propagación de pulsos en una fibra óptica de cristal fotónico .....	46
3.4.1. Consideraciones del modelo .....	47
3.4.1.1. Polarización no lineal .....	50
3.4.2. Ecuaciones acopladas de las amplitudes de los campos .....	55
3.4.3. Caso particular: Campos con polarización lineal paralela a los ejes principales de la fibra .....	60

## Tabla de contenido (continuación)

3.4.3.1. Normalización de las ecuaciones acopladas de amplitud y regímenes de propagación. . . . .	62
3.5. Métodos numéricos . . . . .	67
3.5.1. Solución de los modos transversales por medio de diferencias finitas. . . . .	67
3.5.2. Algoritmo de Fourier por paso dividido . . . . .	69
3.6. Enfoque mecánico-cuántico de la amplificación paramétrica en una fibra óptica de cristal fotónico . . . . .	73
3.7. Avances en la implementación experimental . . . . .	87
3.7.1. Antecedente: Empatamiento de fases de la PCF NL-PM-750: . . .	88
3.7.2. Desarrollo experimental . . . . .	91
3.7.3. Resultados y discusión . . . . .	94
3.7.4. Resumen y comentarios . . . . .	96

### Capítulo 4. Diseño y simulación del experimento de tomografía homodina

4.1. Introducción . . . . .	99
4.2. Diseño experimental . . . . .	100
4.2.1. Preparación del estado a caracterizar: . . . . .	100
4.2.1.1. Modos transversales propagantes: modelado computacional.104	
4.2.1.2. Mezclado de cuatro ondas en la fibra de cristal fotónico NL-PM-750: Solución numérica de las ecuaciones acopladas de amplitud. . . . .	109
4.2.2. Experimento de detección homodina . . . . .	118
4.2.3. Algoritmos de reconstrucción implementados . . . . .	130
4.3. Simulación del experimento de tomografía homodina . . . . .	134
4.4. Resumen . . . . .	141

### Capítulo 5. Conclusiones

<b>Literatura citada</b> . . . . .	149
<b>Anexo: Derivación del algoritmo MaxLik</b> . . . . .	161

# Lista de figuras

Figura	Página
1. (a) Ejemplo de una muestra de puntos experimentales de cuadraturas del campo de un estado coherente medido mediante detección homodina, a una fase fija. (b) Ejemplo de la gráfica de la función de Wigner de un estado coherente. . . . .	3
2. Esquema de las etapas de un experimento de tomografía homodina en óptica cuántica. . . . .	4
3. Esquema del proceso de mezclado de cuatro ondas estimulado. El acoplamiento inicial de los campos de bombeo $\vec{E}_{p1}$ y $\vec{E}_{p2}$ además de un campo semilla $\vec{E}_s$ genera una amplificación del mismo al propagarse a lo largo del medio no lineal, así como la aparición de un campo acompañante $\vec{E}_i$ . . . . .	5
4. Distribución de probabilidad del número de fotones para un estado coherente con amplitud $\alpha = 2$ . . . . .	18
5. (a) Ejemplo de la distribución de campo eléctrico para un estado coherente arbitrario en $ \vec{r}  = 0$ . (b) Representación cualitativa de un estado coherente análoga a la representación en el espacio de fase cuántico. . . . .	19
6. Función de Wigner de un estado coherente y sus proyecciones en dos planos paralelos a los ejes, las cuales corresponden a sus funciones marginales. . . . .	26
7. Esquema simplificado de un arreglo experimental de detección homodina balanceada . . . . .	27
8. Ilustración del proceso de estimación de máxima verosimilitud: Para encontrar la distribución que mejor describe los puntos experimentales (representados por los puntos azules), se postula una distribución inicial $f_1(x)$ y se varían sus parámetros de manera sistemática hasta encontrar la distribución que mejor se ajuste, que en este caso corresponde con $f_3(x)$ . $f_2(x)$ corresponde con una distribución postulada en un paso intermedio en el proceso de maximización. . . . .	33
9. Vista longitudinal de una fibra óptica y diagrama del fenómeno de reflexión total interna en el núcleo de la misma. . . . .	40
10. Esquema de una fibra óptica de cristal fotónico con núcleo sólido. El índice de refracción de la cubierta se aproxima a un modelo de índice efectivo que depende de los parámetros "d" y $\Lambda$ de la fibra, y de la longitud de onda de la luz acoplada a la fibra. Imagen recuperada de NKT-Photonics (2020) . . . . .	40
11. Curva del índice efectivo del revestimiento de una PCF en función de la razón $\lambda/\Lambda$ para distintos valores de $d/\Lambda$ . Imagen recuperada de Saitoh y Koshiba (2005). . . . .	41

## Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
12. (a) Esquema del proceso de mezclado de cuatro ondas espontáneo. (b) Diagrama de energías del proceso de mezclado de cuatro ondas, donde $\omega_{p1}$ y $\omega_{p2}$ son las frecuencias de los campos de bombeo, $\omega_s$ es la frecuencia del campo señal y $\omega_i$ es la frecuencia del campo acompañante, además se cumple que $\omega_{p1} + \omega_{p2} = \omega_s + \omega_i$ . La dirección de las flechas simboliza la creación (hacia abajo) o aniquilación (hacia arriba) de un fotón en el modo correspondiente. . . . .	44
13. (a) Perfil transversal de la fibra óptica NL-PM-750 de NKT Photonics. Micrografía SEM, tomada de De la Torre Robles (2021a). Los agujeros resaltados tienen un diámetro mayor al resto de agujeros que rodean el núcleo de la fibra, lo cual genera birrefringencia. Las etiquetas X y Y indican los dos ejes de simetría ortogonales en la sección transversal de la fibra. (b) Parámetro de dispersión de la fibra a lo largo de cada uno de los ejes principales. La dispersión de la fibra fue caracterizada por De la Torre Robles (2021a). . . . .	49
14. Esquema del proceso de mezclado de cuatro ondas estimulado. El acoplamiento inicial de los campos de bombeo $\vec{E}_{p1}$ y $\vec{E}_{p2}$ además de un campo semilla $\vec{E}_s$ genera una amplificación del mismo al propagarse a lo largo del medio no lineal, así como la aparición de un campo acompañante $\vec{E}_i$ . . . . .	50
15. (a) Espectro de un pulso exhibiendo el ensanchamiento simétrico característico del fenómeno de automodulación de fases (SPM). (b) y (c) Espectros de dos pulsos exhibiendo un ensanchamiento espectral asimétrico inducido por el fenómeno de modulación de fases cruzadas (XPM). Recuperados de Agrawal (2019). . . . .	55
16. (a) Diseño 3D de una fibra óptica microestructurada en el software MODE. (b) Ejemplo de una malla de simulación definida alrededor de la estructura de agujeros de una fibra microestructurada. . . . .	69
17. Esquema del algoritmo de Fourier por paso dividido simetrizado. (a) y (b) representan el procedimiento básico para el cálculo de la propagación de un campo en un segmento de la fibra. (c) representa un ejemplo de la repetición del cálculo para los segmentos consecutivos. . . . .	73
18. (a) Función de Wigner de un estado comprimido o <i>squeezed</i> . (b) Función de Wigner de un estado <i>gato de Schrödinger</i> . . . . .	75
19. Evolución de los estados cuánticos en el medio no lineal. . . . .	81
20. <i>Diagrama de empatamiento de fases</i> : Contornos $\Delta\vec{k} = 0$ para la PCF NL-PM 750. Estos contornos fueron calculados a partir de las curvas de dispersión de la fibra caracterizadas por De la Torre Robles (2021a). . . . .	90

## Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
21. Arreglo experimental para la generación del proceso de mezclado de cuatro ondas espontáneo en una fibra de cristal fotónico. . . . .	91
22. (a) Contornos $\Delta k = 0$ para la PCF NL-PM 750, considerando los diferentes procesos mezcla de polarización. * y o representan valores experimentales. (b) Dependencia del número de cuentas experimentales medidas en el máximo de la señal visible en función de la potencia promedio acoplada del bombeo. . . . .	95
23. (a) Espectro del láser bombeo, centrado en $\lambda_p = 740.8nm$ . (b) Espectros de las señales generadas en la región visible. (c) Espectro de la señal generada en la región del infrarrojo. Son de interés las señales con pico máximo en $\lambda = 532nm$ y en $\lambda = 1220nm$ . . . . .	96
24. (a) Espectros de las señales generadas en la región visible para un bombeo centrado en $\lambda = 740.8 nm$ . (b) Espectros de las señales generadas en la región visible para un bombeo centrado en $\lambda = 741 nm$ . Se muestra como referencia el espectro del campo semilla, centrado en $\lambda = 532 nm$ . . . . .	98
25. Esquema de las etapas de un experimento de tomografía homodina en óptica cuántica. . . . .	100
26. Arreglo experimental para la generación del proceso de mezclado de cuatro estimulado en una fibra de cristal fotónico. . . . .	102
27. a) Corroboración de la concordancia entre el perfil simulado y el perfil de la micrografía SEM de la fibra NL-PM-750 en una región cercana al núcleo. b) Curvas de los índices de refracción efectivos de los modos fundamentales $HE_{11}^x$ y $HE_{11}^y$ , simuladas mediante el software MODE solutions (Lumerical). . . . .	105
28. Distribuciones espaciales de los modos considerando las longitudes de onda centrales $\lambda_p = 740.8nm$ (bombeos 1 y 2), $\lambda_i = 532nm$ (campo acompañante) y $\lambda_s = 1220nm$ (campo señal), con las polarizaciones definidas para el proceso de interés $XYXX$ . Los campos están normalizados al valor máximo de la componente dominante. . . . .	107
29. Curvas de los parámetros de dispersión de la fibra PCF NL-PM-750. $v_g$ : Velocidad de grupo, $\beta_2$ : Parámetro de dispersión de la velocidad de grupo (GVD), $\beta_3$ : Parámetro de dispersión de tercer orden, definidas en las ecuaciones 246, 247 y 248. . . . .	112
30. Evolución del perfil temporal de los campos al propagarse a lo largo de la fibra: (a) Componente X del bombeo, (b) Campo acompañante. (c) Campo señal. $P(t)$ : Potencia instantánea, $z$ : Distancia en la dirección de propagación, $t$ : Tiempo propio del bombeo 1. . . . .	114

## Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
31. Evolución del espectro de los pulsos al propagarse a lo largo de la fibra NL-PM-750 (espectros normalizados): (a) Componente X del bombeo. (b) Componente Y del bombeo. (c) Campo acompañante. (d) Campo señal. $I(\omega)$ : Intensidad normalizada al máximo del espectro en unidades arbitrarias, $z$ : Distancia en la dirección de propagación, $\lambda$ : Longitud de onda. . . . .	115
32. (a) Efecto de desplazamiento de las dos componentes de polarización del bombeo a la salida de la fibra. (b) Acercamiento al espectro del campo acompañante a la salida de la fibra. . . . .	116
33. Relación de la potencia generada del campo señal con respecto a la potencia del bombeo y la potencia de la semilla. . . . .	118
34. Diseño del arreglo experimental de detección homodina. (DH1: Divisor de haz 90/10. DH2: Divisor de haz 50/50. E4-5:Espejos. L4-5: Lentes para acoplar las fibras del detector homodino. Detector homodino: Detector diferencial acoplado a fibras PDB570-C (Thorlabs). Osciloscopio digital Waverunner 3054 Teledyne Lecroy. Modulador de fase: Placa de cristal líquido LCC1115-C (Thorlabs) en configuración de modulación de fase controlada por voltaje.) . . . . .	122
35. Espectro de frecuencias del ruido electrónico del detector ( $0 \mu W$ ) y del ruido de shot para un oscilador local de onda continua a diferentes potencias. Tomado de Osorio (2018). . . . .	124
36. Caracterización del retardo de la placa de cristal líquido LCC1115-C (Thorlabs) considerando una fuente láser de onda continua a $\lambda = 1550 nm$ . La curva a $25^\circ C$ fue tomada de Thorlabs (2011) y la curva a $17^\circ C$ fue medida en el laboratorio utilizando la metodología de Davis (1981). . . . .	127
37. (a) Representación gráfica del algoritmo de <i>aceptación y rechazo</i> . (b)Valores de cuadraturas del campo simuladas mediante un algoritmo de <i>Aceptación y Rechazo</i> . . . . .	135
38. Matriz de densidad $\hat{\rho}$ reconstruida en la base de Fock mediante el algoritmo <i>MaxLik</i> . (a) Representación de las amplitudes de los elementos $\hat{\rho}_{nm}$ en forma de diagrama de barras. (b) Representación de las amplitudes de los elementos $\hat{\rho}_{nm}$ en forma de mapa de colores. . . . .	137
39. Elementos de la diagonal principal de la matriz de densidad reconstruida en la base de número. Estos elementos se pueden interpretar como la distribución del número de fotones de la señal que se caracterizó. La línea azul representa la tendencia de una distribución de probabilidad de Poisson $P(n)$ con valor esperado $n=7,42$ . . . . .	140

## Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
40. (a) Función de Wigner del estado reconstruido. (b) Vista superior de la función de Wigner reconstruida. . . . .	141
41. Diseño experimental final para la tomografía cuántica de estados coherentes pulsados, generados mediante la amplificación paramétrica en una fibra óptica de cristal fotónico altamente no lineal. . . . .	142

## Lista de tablas

Tabla

Página

1. Valores de la longitud de onda del bombeo para las cuales se estima que se genera el campo acompañante centrado en  $\lambda = 532 \text{ nm}$ , junto con el valor de la longitud de onda central del respectivo campo señal y el proceso que da origen a estas señales de acuerdo con la condición de empatamiento de fases. . . . . 94

# Capítulo 1. Introducción

---

Nos encontramos en medio de la segunda revolución de la mecánica cuántica. La primera revolución permitió, por ejemplo, el desarrollo de transistores y láseres (Aspect, 2007), la segunda se trata de la manipulación y aplicación tecnológica de los sistemas cuánticos individuales, como átomos y fotones. (Williams, 2007; Hanacek, 2018). Es por esto que es necesario el desarrollo de metodologías para una completa caracterización de este tipo de sistemas, lo cual no es una tarea trivial, por la naturaleza misma de estos.

En general, el estado físico de un sistema es la descripción matemática que contiene toda la información posible del mismo, de tal manera que, a través del conocimiento de éste en adición a las leyes de la física, es posible predecir su comportamiento (D'Ariano *et al.*, 2003). Otros autores argumentan que la noción de *estado físico* no necesariamente implica tener toda la información del sistema, si no más bien, tener una descripción completa y relevante del mismo, consistente con la información que el observador o el experimentador posee (Pusey *et al.*, 2012; Boughn, 2019). Es de aclarar que existen diferentes nociones de un *estado* en física y su definición dependerá principalmente del contexto o área de la física que se esté estudiando; esto se debe principalmente a que en diferentes contextos se utilizan diferentes modelos matemáticos para describir los sistemas que son objeto de estudio. En áreas como la termodinámica, por ejemplo, el estado físico está asociado a variables termodinámicas como la temperatura, el volumen o la presión. En ese sentido, de acuerdo a los postulados de la mecánica cuántica, se tiene que el *estado cuántico* de un sistema puro está descrito por un vector de estado  $|\psi\rangle$  o, de manera más general, por un operador de densidad  $\hat{\rho}$  (Cohen-Tannoudji *et al.*, 2020).

Es de resaltar que conocer el estado cuántico de un sistema no es un asunto trivial debido a que en este tipo de sistemas hay limitaciones debido a su naturaleza misma. Por un lado, realizar mediciones en un sistema cuántico implica perturbarlo o modificarlo de alguna manera y, por otro lado, debido al principio de incertidumbre de Heisenberg, no se podrán conocer características complementarias del sistema (como la posición y el momento) de manera simultánea y precisa, es decir, no se podrá conocer el estado del mismo en su completa complejidad (Leonhardt, 1997). Una solución a este problema es preparar múltiples copias del sistema y realizar diferentes

experimentos en cada una de las copias; luego, se puede inferir el estado cuántico a partir de las distribuciones estadísticas de las cantidades medidas. Un procedimiento de este tipo se conoce como *tomografía cuántica* (D'Ariano *et al.*, 2003).

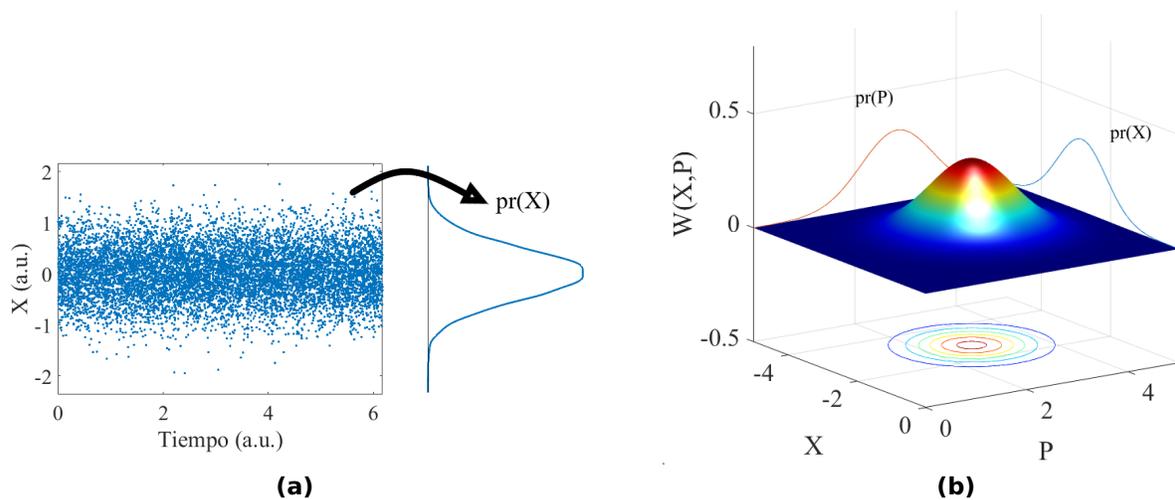
La reconstrucción de estados cuánticos es uno de los problemas en la teoría cuántica contemporánea sobre los cuales se ha incrementado notablemente el interés (Toninelli *et al.*, 2019; Blésin *et al.*, 2019). El conocimiento del estado físico de sistemas cuánticos es fundamental para un gran número de aplicaciones, en especial en áreas como información cuántica, que requieren una caracterización detallada de los estados cuánticos involucrados (Raymer y Beck, 2004). Una vez se conoce el estado cuántico es posible calcular distribuciones de diferentes cantidades medibles, incluso si estas no han sido medidas directamente. Llamamos la atención en particular estados cuánticos del campo electromagnético o de luz, debido no sólo a que son bastante asequibles a nivel experimental (hoy en día se cuenta con fuentes láser de alta calidad, dispositivos ópticos que procesan la luz con gran precisión, e incluso detectores rápidos y altamente eficientes), si no también a sus posibles aplicaciones prácticas en áreas como la metrología, las tecnologías de la información y la comunicación, la física básica e incluso la computación cuántica (Lvovsky, 2004; Leonhardt, 1997).

Precisamente, en la óptica cuántica, contamos con una técnica bastante simple y altamente eficiente para cumplir con esta labor: la tomografía homodina, una técnica que ha sido ampliamente implementada de manera experimental mediante la *detección homodina balanceada* (DHB), un esquema sugerido por primera vez en este contexto por Vogel y Risken (1989), y demostrada de manera experimental por primera vez por Smithey *et al.* (1993). Por medio de la DHB se pueden obtener mediciones de las cuadraturas de un campo, las cuales representan la amplitud compleja del mismo (Leonhardt, 1997). Las distribuciones estadísticas de las cuadraturas a su vez corresponden con la transformada de Radon de la función de Wigner. La función de Wigner es una representación de los estados cuánticos en el espacio de fase y corresponde con la transformada de Fourier de la matriz de densidad del estado en cuestión en coordenadas rotadas, definida como:

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dy \hat{\rho}(x + y, x - y) e^{-2ipy/\hbar}, \quad (1)$$

donde  $x$  y  $y$  son variables de posición,  $p$  es una variable de momento y  $\hat{\rho}$  es la matriz

de densidad (Wigner, 1932; Bertrand y Bertrand, 1987; Leonhardt, 1997). Se podría pensar que las mediciones que obtenemos en la DHB (las distribuciones marginales del campo), son las sombras de la función de Wigner, proyectadas en un plano, vistas desde diferentes perspectivas, tal como se puede apreciar en el ejemplo presentado en la figura 1. Una vez que se conocen las distribuciones de las cuadraturas del campo de la señal es posible reconstruir ya sea la matriz de densidad de la señal o su representación en el espacio de fase cuántico a través de la función de cuasi-probabilidad de Wigner, dependiendo del algoritmo de reconstrucción implementado.

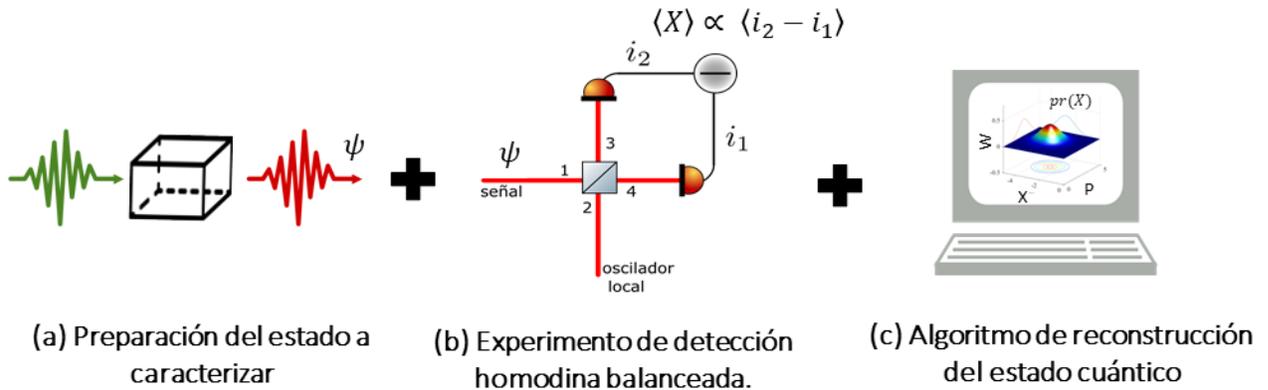


**Figura 1.** (a) Ejemplo de una muestra de puntos experimentales de cuadraturas del campo de un estado coherente medido mediante detección homodina, a una fase fija. (b) Ejemplo de la gráfica de la función de Wigner de un estado coherente.

Un experimento de tomografía homodina consta típicamente de tres etapas, las cuales se muestran en la figura 2, las cuales consisten en:

1. La preparación del estado a caracterizar: En óptica cuántica nos interesa estudiar estados del campo electromagnético en general (por ejemplo la luz láser, o los campos resultados como resultado de alguna interacción entre luz y materia).
2. La implementación de un experimento de detección homodina.
3. La implementación de un algoritmo computacional para el análisis de los datos experimentales y la determinación de diferentes distribuciones estadísticas de los campos bajo estudio que nos permitan conocer el estado cuántico que se preparó

previamente o, en otras palabras, permita reconstruir la función de Wigner o la matriz de densidad.



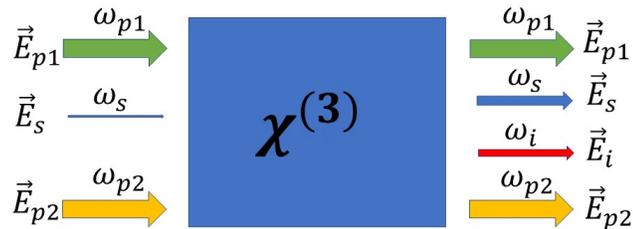
**Figura 2.** Esquema de las etapas de un experimento de tomografía homodina en óptica cuántica.

La tomografía cuántica se ha aplicado para la reconstrucción de una variedad de estados cuánticos y se ha convertido en una herramienta fundamental en la investigación en el área de información cuántica (Paris y Rehacek, 2004; Lvovsky y Raymer, 2009). Se destacan la reconstrucción de estados coherentes pulsados (Cooper *et al.*, 2013), estados de fotón individual anunciados (Lvovsky *et al.*, 2001), estados comprimidos (o *squeezed*) (Breitenbach *et al.*, 1997), gatos de Schrödinger (Tiunov *et al.*, 2020; Nehra *et al.*, 2019), estados entrelazados (Cialdi *et al.*, 2016), estados coherentes con fotones añadidos (Zavatta *et al.*, 2004), entre otros. En el contexto de la óptica cuántica, los métodos teóricos y experimentales más simples para producir estados cuánticos fotónicos de alta calidad están basados en diversos procesos de la *óptica no lineal* (McCusker y Kwiat, 2009; Dell'Anno *et al.*, 2006; Caspani *et al.*, 2017). Por ejemplo, fuentes de fotones individuales anunciados han sido generadas mediante los procesos de *conversión paramétrica descendente espontánea* (U'Ren *et al.*, 2005) y *mezclado de cuatro ondas espontáneo* (Fan y Migdall, 2007). En el laboratorio LINOC se tiene experiencia en el análisis y la generación de este tipo de fuentes (Garay-Palmett *et al.*, 2016; Domínguez-Serna y Garay-Palmett, 2021).

El objetivo de esta tesis consiste precisamente en el diseño y la simulación de un protocolo de tomografía homodina resuelta en el tiempo, en el cual se busca reconstruir de la matriz de densidad y la función de Wigner de estados coherentes de onda pulsada sintonizados en el infrarrojo, producidos mediante el proceso de mezclado de

cuatro ondas estimulado en una fibra óptica de cristal fotónico.

Por un lado, los estados coherentes son estados apropiados para la descripción de campos electromagnéticos generados por fuentes coherentes, como la luz láser. Por otro lado, el mezclado de cuatro ondas es un fenómeno óptico no lineal que se origina debido a la susceptibilidad no lineal de tercer orden del material, en el que interactúan cuatro campos denominados campos de bombeo ( $\vec{E}_{p_1}(\omega_{p_1})$  y  $\vec{E}_{p_2}(\omega_{p_2})$ ), señal ( $\vec{E}_s(\omega_s)$ ) y acompañante ( $\vec{E}_i(\omega_i)$ ), con frecuencias  $\omega_{p_1}, \omega_{p_2}, \omega_s$  y  $\omega_i$ , respectivamente. En esta interacción paramétrica se cumplen condiciones de conservación de momento y energía, tal que  $\omega_{p_1} + \omega_{p_2} = \omega_s + \omega_i$ . Nos interesa el proceso estimulado para el cual, considerando el acoplamiento de los bombeos y un campo señal de entrada, se producirá la amplificación de la señal y la aparición del campo acompañante (Agrawal, 2013). Lo anterior se puede ver esquemáticamente en la figura 3. Particularmente, en esta tesis nos enfocaremos en el proceso estimulado considerando bombeos degenerados (es decir,  $\omega_{p_1} = \omega_{p_2}$ ). En este proyecto, se propone un bombeo de un láser pulsado de titanio-zafiro sintonizado en  $\lambda_p = 740.8nm$  y el láser semilla de entrada tiene una longitud de onda de  $\lambda_s = 532nm$ . Con lo anterior, es posible generar un haz coherente pulsado con la misma tasa de repetición del bombeo, sintonizado a  $\lambda_i = 1220nm$  (nuestra señal de interés).



**Figura 3.** Esquema del proceso de mezclado de cuatro ondas estimulado. El acoplamiento inicial de los campos de bombeo  $\vec{E}_{p_1}$  y  $\vec{E}_{p_2}$  además de un campo semilla  $\vec{E}_s$  genera una amplificación del mismo al propagarse a lo largo del medio no lineal, así como la aparición de un campo acompañante  $\vec{E}_i$ .

El fenómeno del mezclado de cuatro ondas es útil para una gran variedad de aplicaciones, entre ellas, puede dar origen al fenómeno de amplificación paramétrica en una fibra óptica, la cual es precisamente la aplicación de interés en el presente trabajo. El fenómeno de amplificación paramétrica en fibras se caracteriza por ser rápido y compatible con potencias altas (Hansryd *et al.*, 2002). Asimismo, la generación del campo acompañante puede usarse para producir nuevas longitudes de onda (Wang *et al.*, 2011), lo cual permite generar fuentes nuevas de luz láser en regiones del es-

pectro donde faltan fuentes adecuadas (por ejemplo, las tecnologías láser ultrarrápidas existentes no son fácilmente sintonizables en la región infrarroja, a excepción de algunas líneas láser específicas (Carpeggiani *et al.*, 2020)). Los dispositivos que tienen esta aplicación se conocen como *convertidores de longitud de onda* y tienen un gran potencial en el contexto de las telecomunicaciones. Los amplificadores de fibra óptica también tienen utilidad en áreas relacionadas con las tecnologías cuánticas (Marhic, 2008), procesamiento de señales ópticas (Radic y McKinstrie, 2005), muestreo óptico (Li *et al.*, 2001), entre otros.

Finalmente, para resumir, la motivación de este trabajo se puede englobar en los dos siguientes puntos:

- El diseño y la simulación de un experimento de tomografía homodina resuelta en el tiempo considerando condiciones experimentales realistas, como un pilar para la construcción de una plataforma para caracterizar estados no clásicos de la luz, como fotones individuales, estados comprimidos (squeezed), entre otros, en el Laboratorio de Interacciones No Lineales y de Óptica Cuántica (LINOC) del CICESE.
- Se espera que los resultados teóricos y experimentales de esta tesis contribuyan también con el diseño de nuevas fuentes pulsadas alternas en un intervalo amplio de frecuencias, generadas a partir del fenómeno de la amplificación paramétrica utilizando medios no lineales de tercer orden.

## **1.1 Objetivos**

### **1.1.1 Objetivo general**

Diseñar y simular un experimento de tomografía homodina resuelta en el tiempo para la reconstrucción de la matriz de densidad y la función de Wigner de estados coherentes de onda pulsada producidos mediante el proceso de mezclado de cuatro ondas estimulado en una fibra óptica de cristal fotónico.

### 1.1.2 Objetivos específicos

- Analizar el proceso de mezclado de cuatro ondas estimulado desde la teoría cuántica y a partir de la teoría de amplificación paramétrica en fibra óptica.
- Preparar una fuente de estados coherentes pulsados, sintonizados en el infrarrojo, a través del proceso de mezclado de cuatro ondas estimulado en una fibra óptica de cristal fotónico y medir el espectro de la señal generada para demostrar la existencia del proceso.
- Diseñar y simular un experimento de detección homodina balanceada para el estudio de estados coherentes de onda pulsada.
- Implementar los algoritmos de *estimación de máxima verosimilitud* o *MaxLik* y de *funciones patrones* para la reconstrucción de la matriz de densidad del estado a caracterizar a partir de las mediciones de cuadratura simuladas previamente.
- Determinar la validez de la matriz de densidad reconstruida mediante la comparación con simulaciones tipo Monte-Carlo del estado a caracterizar.

## 1.2 Estructura de la tesis

En el capítulo 2 se aborda la teoría de los elementos básicos que constituyen un experimento de tomografía homodina en el contexto de la óptica cuántica, empezando por la definición de los estados coherentes definidos en el tiempo, el concepto del *estado cuántico* de un sistema, la matriz de densidad y la distribución de cuasi-probabilidad de Wigner como dos representaciones generales de los mismos, entre otros. Asimismo, se presentan la detección homodina balanceada en el régimen pulsado, que es la técnica experimental central en este protocolo, y los algoritmos más utilizados para determinar el estado cuántico de un sistema a partir de mediciones experimentales: la *estimación de máxima verosimilitud (MaxLik)* y la reconstrucción por *funciones patrones*.

El capítulo 3 se centra en describir y analizar el proceso mediante el cual se propone la generación de estados coherentes pulsados: el mezclado de cuatro ondas

estimulado no degenerado, también conocido como *amplificación paramétrica*, en una fibra óptica de cristal fotónico altamente no lineal. Se estudió este mecanismo desde la teoría electromagnética clásica y desde la teoría cuántica. También se explican los métodos computacionales que se utilizaron para analizar los modelos teóricos desarrollados y los avances en la implementación experimental.

En el capítulo 4 se discuten los parámetros finales del diseño propuesto para implementar el experimento de tomografía homodina. Se plantean tres etapas de desarrollo: la preparación del estado a caracterizar, la implementación del experimento de detección homodina balanceada y el análisis de datos mediante los algoritmos de reconstrucción de estados cuánticos. El diseño de la primera etapa se elaboró con base en los modelos teóricos y los avances en la implementación experimental detallados en el capítulo anterior. En esta etapa también se presentan dos análisis numéricos basados en la solución de los modelos teóricos introducidos en el capítulo 3: el análisis modal para la determinación de las distribuciones de los campos involucrados en la amplificación paramétrica, y el análisis de propagación para determinar las amplitudes, y las distribuciones temporales y espectrales de los campos.

Posteriormente se discuten los aspectos técnicos del experimento de detección homodina, las características del proceso de adquisición, análisis de datos, y los algoritmos de reconstrucción de la matriz de densidad y la función de Wigner de la señal de interés. Terminando, se presenta la simulación final del experimento de tomografía cuántica considerando condiciones realistas. Las conclusiones se exponen en el capítulo 5.

## Capítulo 2. Teoría de la tomografía cuántica

---

### 2.1 Introducción

En este capítulo se presentan el marco teórico y las herramientas básicas que constituyen un experimento de tomografía cuántica en el ámbito de la óptica, con el propósito de establecer los fundamentos generales del protocolo experimental que se propone en esta tesis. En primer lugar, se hace una revisión breve del contexto histórico que llevó al desarrollo de la teoría cuántica de la luz y, en especial, a la formulación de los *estados coherentes*, que son de interés central en este trabajo. Posteriormente, se presenta el concepto de la tomografía cuántica y se abordan algunos conceptos básicos necesarios para la descripción de un protocolo experimental de este tipo. Se presenta la técnica experimental central en este proceso, la detección homodina balanceada, y, finalmente, se presentan los algoritmos más utilizados para la reconstrucción de estados cuánticos en este régimen.

### 2.2 Teoría cuántica de la luz

*“Of course we have had light quanta on earth for eons, in fact ever since the good Lord said: “let there be quantum electrodynamics” – which is a modern translation, of course, from the biblical Aramaic”.*

Roy J. Glauber (Premio Nóbel de Física 2005) – *Conferencia Nóbel 2005.*

¿Qué es la luz? Esta es una pregunta que ha intrigado a seres humanos de todas las culturas desde los albores de la humanidad; múltiples teorías acerca de su naturaleza han sido desarrolladas por siglos. En la antigua Grecia, por ejemplo, filósofos griegos como Pitágoras, Demócrito, Empédocles, Platón, Aristóteles, entre otros, desarrollaron múltiples teorías de la luz hace más de 2500 años. También se tienen contribuciones importantes a su entendimiento desde el mundo árabe; uno de sus grandes exponentes fue Ibn al-Haythan, más conocido como Alhazen, quien por si solo escribió 14 libros

de óptica, en el décimo siglo de la era moderna (Hecht, 2017). En fin, los fenómenos de la luz han fascinado a científicos en todas las épocas y culturas, sin embargo, en lo que respecta a este trabajo, nos concentraremos particularmente en los desarrollos de los siglos XIX y XX, que han llevado a un entendimiento completo de la luz, y para los cuales se ha logrado un consenso en la comunidad científica. Esta revisión breve se hace principalmente para poner en perspectiva el contexto histórico que llevó al desarrollo de la teoría cuántica de la luz y, en especial, a la formulación de los estados coherentes, que son de interés central en este trabajo.

A partir de la teoría electromagnética propuesta por James Clerk Maxwell en el siglo XIX, la luz se ha interpretado como un fenómeno ondulatorio. La teoría de Maxwell, que sintetizó de una manera muy elegante los conocimientos que se tenían en su época sobre los campos eléctricos y magnéticos, permite explicar que la luz consiste de una combinación de campos electromagnéticos oscilantes que se propagan a través del espacio. Esta teoría es comprobada por diferentes experimentos, como los realizados por Thomas Young y Augustin Fresnel, en los cuales se observaron fenómenos como la interferencia y la difracción de la luz, respectivamente, y cuyos resultados se pueden explicar por medio de la teoría ondulatoria (Hecht, 2017; Migdall *et al.*, 2013).

A inicios del siglo XX, la física se creía terminada, de hecho, en palabras que se le atribuyen al científico británico William Thompson, más conocido como Lord Kelvin, se pensaba que *la física era un conjunto perfectamente armonioso y en lo esencial acabado* (Davies *et al.*, 1992), sin embargo, pocos años después surgen resultados contra-intuitivos en algunos experimentos que desafían esta suposición, y dan lugar más adelante al nacimiento de ramas nuevas de la física, como la relatividad y la mecánica cuántica.

Precisamente, la historia de la teoría cuántica empieza con Max Planck, el 14 de diciembre de 1900, día en el cual, en una conferencia de la Sociedad Física Alemana, Planck presenta su trabajo sobre "la teoría de la ley de distribución de energía del espectro normal" (Planck, 1900). Planck estudió un fenómeno conocido como la radiación de cuerpo negro; basó su modelo en el oscilador armónico (modelo que explica, por ejemplo, el movimiento de un sistema masa-resorte o de un péndulo) y encontró una fórmula de distribución de radiación en la cual asumió que esos osciladores armónicos tenían energías discretas y regularmente espaciadas, en paquetes de energía

que denominó *cuantos* (Eisberg y Resnick, 1985; Glauber, 2006). Esto dio paso a un cambio de paradigmas en la física, desencadenando lo que se conoce como la primera revolución de la mecánica cuántica.

Un poco más adelante, en 1905 para ser exactos, Einstein retoma la hipótesis de los "cuantos" de Planck para explicar el efecto fotoeléctrico. Trabajos posteriores del mismo Einstein, Bohr, Schrödinger, Heisenberg, entre otros, confirmaron esta noción de los "cuantos de energía", logrando estructurar y verificar el marco teórico de la *mecánica cuántica*. En esta nueva formulación, se enuncia que la radiación electromagnética está compuesta por pequeños paquetes de energía, llamados fotones. Se tiene entonces que la luz exhibe ambos tipos de comportamiento: onda y partícula (Migdall *et al.*, 2013; Hecht, 2017).

Justamente en 1927, Paul Dirac, un ingeniero electricista y físico inglés, logra combinar la formulación de Maxwell de la luz con la de un oscilador cuántico, en un procedimiento conocido como la *cuantización del campo electromagnético* (Dirac, 1927). Nace entonces la electrodinámica cuántica, y con ella, una descripción cuántica formal de la luz (Milton, 2009; Schweber, 2011; Cruz y Cruz y Rosas Ortiz, 2008).

El desarrollo de las bases de la electrodinámica cuántica permite el posterior desarrollo de una nueva área, la óptica cuántica, en la que se destacan trabajos como el de Fock, quien formula los estados de Fock, que son estados con un número definido de partículas (Fock, 1932), y más adelante, trabajos como el de Roy Glauber, quien desarrolla la teoría cuántica de la coherencia óptica, y formula los tan aclamados estados coherentes de la luz, centrales en este trabajo, desarrollo por el cual le dan en 2005 el premio Nóbel de física (Glauber, 1963a,b,c).

De manera simultánea a los estudios teóricos de Glauber, se estaba dando otra revolución justamente en el mundo experimental, lo cual se derivó en la invención del láser, un invento que dividió la historia de la mecánica cuántica en dos, y dio paso a otra revolución, la famosa *segunda revolución de la mecánica cuántica*, la *tecnología cuántica*. Esta revolución se trata del control de sistemas cuánticos individuales, como los átomos y los fotones, y su aplicación en la era de la información (Hanacek, 2018). En particular, los estados coherentes de Glauber son estados apropiados para la descripción de campos electromagnéticos generados por fuentes coherentes como la luz

láser.

La invención del láser le abrió paso a un sinnúmero de aplicaciones y fue una introducción para el descubrimiento de múltiples fenómenos novedosos y exóticos, tales como aquellos estudiados en la óptica no lineal, la generación de estados no clásicos de la luz, como los estados comprimidos o *squeezed*, utilizados, por ejemplo, en la detección de ondas gravitacionales en el *Observatorio de ondas gravitacionales por interferometría láser* (LIGO, por sus siglas en inglés), entre muchas otras aplicaciones. La luz es una herramienta fundamental para la demostración experimental de los principios de la mecánica cuántica, así como una candidata bastante apta para la aplicación tecnológica de los mismos: hoy en día se cuenta con fuentes láser de alta calidad, así como detectores altamente eficientes. También es una herramienta bastante útil para investigar diferentes propiedades de la materia (Leonhardt, 1997).

A continuación, se presentan brevemente algunos conceptos mencionados en el anterior recuento histórico, que son centrales en el desarrollo de este trabajo, como la cuantización del campo electromagnético, y las principales propiedades de algunos estados cuánticos de la luz, como los estados coherentes, así como otros conceptos fundamentales en la tomografía cuántica.

### 2.2.1 Cuantización del campo electromagnético

*“The career of a young theoretical physicist consists of treating the harmonic oscillator in ever-increasing levels of abstraction.”*<sup>1</sup>

Sidney Coleman (físico teórico estadounidense).

Este famoso procedimiento se basa en hacer una analogía formal entre las oscilaciones de un campo electromagnético con el modelo del oscilador armónico. Se busca encontrar la distribución de un campo radiante que se propaga en el espacio libre en ausencia de cargas o fuentes, con la particularidad de que, para normalizar las soluciones a este problema, se considera conveniente suponer que el campo está confinado en un cubo ficticio de volumen  $V$ . Esto es equivalente a considerar fronteras *“virtua-*

<sup>1</sup>Se dice que esta frase, atribuida a Sidney Coleman, fue pronunciada en una de sus clases en la universidad de Harvard (Schwichtenberg, J., No-Nonsense Classical Mechanics.).

les" en el problema, de tal manera que se tienen condiciones de frontera periódicas, para finalmente extender esta solución a todo el espacio (Grynberg *et al.*, 2010). Este método se conoce como "normalización en la caja".

Por simplicidad, aquí se tratará el caso uni-modal en una dimensión, según está descrito en el libro de Gerry y Knight (2005). Para esto, partimos de suponer un campo radiante confinado en una cavidad unidimensional a lo largo del eje  $z$  con paredes perfectamente conductoras en  $z = 0$  y  $z = L$ , de tal manera que el campo eléctrico se anula en las fronteras, y en ausencia de fuentes de radiación internas, se tendrán los siguientes campos eléctrico y magnético que satisfacen las ecuaciones de Maxwell:

$$E_x(z, t) = \left( \frac{2w^2}{V\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} q(t) \sin(kz), \quad (2)$$

$$B_y(z, t) = \left( \frac{\mu_0\epsilon_0}{k} \right) \left( \frac{2w^2}{V\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \dot{q}(t) \cos(kz), \quad (3)$$

donde  $w$  es la frecuencia del modo,  $k$  es el número de onda asociado,  $\epsilon_0$  es la permitividad dieléctrica del vacío,  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío y  $V = L^3$  es el volumen efectivo de la cavidad;  $q(t)$  es un factor dependiente del tiempo asociado con la amplitud de los campos con unidades de  $[\sqrt{J}s]$  y  $\dot{q}(t) = dq/dt$ .

El hamiltoniano, una función que representa la energía total del sistema, para este caso está dado por la siguiente integral de volumen:

$$H = \frac{1}{2} \int dV' [\epsilon_0 E_x^2 + \frac{1}{\mu_0} B_y^2]. \quad (4)$$

Resolviendo, se encuentra:

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + w^2 q^2), \quad p(t) = \dot{q}(t). \quad (5)$$

Esta expresión es equivalente al hamiltoniano de un oscilador armónico de masa unitaria. De esta manera, comparando con tal modelo, se puede establecer la equivalencia de las variables  $p$  y  $q$  con sus respectivos operadores  $\hat{p}$  y  $\hat{q}$ , que satisfacen la relación de conmutación canónica  $[\hat{q}, \hat{p}] = \hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar$ , en donde  $\hbar$  es la constante de Planck reducida<sup>2</sup>. También es conveniente introducir los operadores aniquilación y creación,

<sup>2</sup>La cual se define como la constante de Planck dividida entre  $2\pi$ .

de manera similar a como se opera en el modelo del oscilador armónico cuántico:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q} + i\hat{p}), \quad (6)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q} - i\hat{p}). \quad (7)$$

Reescribiendo las expresiones para los operadores de campos eléctrico y magnético se tiene:

$$\hat{E}_x(z, t) = E_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\sin(kz), \quad (8)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = -iB_0(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)\cos(kz), \quad (9)$$

donde:

$$E_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V}}, \quad B_0 = \frac{\mu_0}{k} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \hbar \omega^3}{V}}. \quad (10)$$

Y teniendo en cuenta la dependencia en el tiempo de los operadores de aniquilación asociados a la amplitud compleja del campo  $\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t}$ , se puede reescribir el operador de campo de la siguiente manera:

$$\hat{E}_x(z, t) = E_0(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t})\sin(kz), \quad (11)$$

donde  $\hat{a} \equiv \hat{a}(0)$ . A partir de la anterior descripción, se pueden introducir los llamados *operadores de cuadratura*, definidos como:

$$\hat{X} = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (12)$$

$$\hat{P} = \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \quad (13)$$

los cuales son fundamentales para este trabajo, puesto que son las cantidades observables en un experimento de detección homodina. Además se puede reescribir el operador de campo de la siguiente manera:

$$\hat{E}_x(z, t) = 2E_0\sin(kz)[\hat{X}\cos(\omega t) + \hat{P}\sin(\omega t)]. \quad (14)$$

Se puede observar que los operadores de cuadratura están asociados con la amplitud

del campo oscilante y están fuera de fase por  $90^\circ$  el uno del otro (están en cuadratura).

Una manera conveniente de expresarlos es mediante *el operador de cuadratura generalizada*, que es el siguiente:

$$\hat{X}(\theta) = \frac{\hat{a}e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}}{2}, \quad (15)$$

de tal manera que  $\hat{X}(0) = \hat{X}$  y  $\hat{X}(\pi/2) = \hat{P}$ .

Finalmente, es interesante revisar una expresión en notación de operadores más general para campos eléctricos multimodales y no monocromáticos, con los que uno suele trabajar en el ámbito experimental. En este caso, basado en el libro de Migdall *et al.* (2013), se tiene la siguiente expresión para un campo eléctrico en la posición  $\vec{r}$  y tiempo  $t$ :

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \sum_j [\hat{E}_j^{(+)}(\vec{r}, t) + \hat{E}_j^{(-)}(\vec{r}, t)], \quad (16)$$

donde  $\hat{E}_j^{(-)}(\vec{r}, t)$  es el conjugado hermitiano de  $\hat{E}_j^{(+)}(\vec{r}, t)$  y:

$$\hat{E}_j^{(+)}(\vec{r}, t) = \int d\omega \epsilon_j \hat{e}_j F_j^*(\omega) \hat{a}_j(\omega) e^{i(\vec{k}_j \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (17)$$

donde  $\epsilon_j = i\sqrt{\hbar\omega_j/2\epsilon_0 V}$ , de manera similar a la ecuación 10,  $\hat{e}_j$  es un vector unitario que describe la polarización del campo,  $F_j^*(\omega)$  representa el perfil espectral del paquete de onda,  $\vec{k}_j$  es el vector de onda a la frecuencia  $\omega_j$  y  $\hat{a}_j(\omega)$  es el operador de aniquilación continuo que cumple con la relación de conmutación:

$$[\hat{a}_j(\omega), \hat{a}_j^\dagger(\omega')] = \delta(\omega - \omega'). \quad (18)$$

### 2.2.2 Estados coherentes

Los estados coherentes corresponden a estados con una dinámica bastante similar al comportamiento de un campo clásico, que tienen amplitud y fase relativamente bien definidas, y experimentalmente, corresponden a estados cuasi-clásicos producidos por láseres ideales (Loudon, 2000).

La formulación de estos estados, desde el punto de vista de la teoría cuántica de

la luz, se atribuye al físico Roy Glauber en la década de 1960 (Glauber, 1963a,b,c); sin embargo, existen indicios de su existencia desde el año 1926, año en el cual el físico E. Schrödinger propone estados oscilatorios de mínima incertidumbre equivalentes, al estudiar el modelo del oscilador armónico simple en el contexto de la naciente mecánica cuántica (Schrödinger, 1926).

En 1963, Roy Glauber desarrolla la teoría cuántica de la coherencia óptica. En uno de sus trabajos, él menciona que pocos problemas de la física habían recibido tanta atención como la dualidad onda-partícula de la luz y su solución había culminado precisamente en el desarrollo de la teoría cuántica del campo electromagnético, la cual es una teoría sumamente versátil. Sin embargo, a él le preocupaba que los problemas de la óptica se habían estudiado muy poco desde este enfoque, en especial, en lo relacionado con la estadística de fotones. La electrodinámica cuántica se estudiaba en términos de estados con un número de fotones definido, pero en óptica usualmente se trabaja con estados con muchos fotones e incertidumbre intrínseca. Sus estudios se derivaron en la formulación y popularización de los estados coherentes (Glauber, 1963a).

Glauber denominó a estos estados como *coherentes* precisamente porque surgen de manera natural discutiendo el concepto de coherencia óptica. La coherencia es uno de los conceptos más importantes en la óptica y se relaciona con la habilidad de que la luz exhiba efectos de interferencia. Un campo óptico es denominado coherente cuando existe una relación fija de fase entre los valores del campo eléctrico a diferentes tiempos o en diferentes ubicaciones (Paschotta, 2008a).

Matemáticamente, los estados coherentes se pueden definir como (Furusawa, 2015):

(i) Eigenestados del operador de aniquilación:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (19)$$

(ii) Aquellos estados obtenidos por la aplicación del *operador de desplazamiento* en el estado vacío:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle, \quad (20)$$

donde  $D(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})$ .

(iii) Estados cuánticos con mínima relación de incertidumbre.

### Algunas propiedades:

- El estado de vacío es también un estado coherente con amplitud  $\alpha = 0$ .
- Los estados coherentes también se pueden representar en la base de Fock o de número de la siguiente manera:

$$|\alpha\rangle = \sum_n e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (21)$$

- *Estadística de fotones:* La distribución del número de fotones para un estado coherente es Poissoniana. Esta es también la distribución aproximada de fotones de un láser intenso ideal (Glauber, 2006):

$$P_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^{2n}}{n!} = e^{-\bar{N}} \frac{\bar{N}^n}{n!}. \quad (22)$$

$P_n$  es la probabilidad de encontrar  $n$  fotones en un estado coherente con amplitud  $\alpha$ . También se cumplen las siguientes relaciones:

(i) Número promedio de fotones:

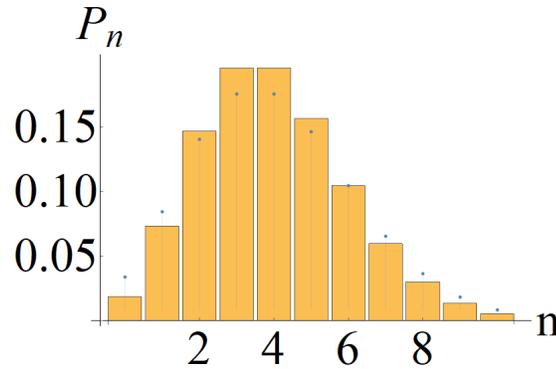
$$\bar{N} = \langle \hat{N} \rangle = |\alpha|^2. \quad (23)$$

(ii) Varianza del número de fotones:

$$(\Delta \hat{N})^2 = \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2 = |\alpha|^2 = \bar{N}. \quad (24)$$

Las anteriores relaciones son características de estadísticas poissonianas. Se puede ver un ejemplo en la figura 4.

- *Campo Electromagnético clásico análogo:* Este está relacionado directamente con el valor esperado del operador de campo  $\hat{E} = iE_0 (\hat{a} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)})$ , tal



**Figura 4.** Distribución de probabilidad del número de fotones para un estado coherente con amplitud  $\alpha = 2$

como se aprecia a continuación:

$$\begin{aligned} \langle \hat{E} \rangle &= \langle \alpha | \hat{E} | \alpha \rangle = iE_0 \langle \alpha | \hat{a} e^{i(\vec{k} \cdot \hat{r} - \omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(\vec{k} \cdot \hat{r} - \omega t)} | \alpha \rangle \\ &= iE_0 \left( \alpha e^{i(\vec{k} \cdot \hat{r} - \omega t)} - \alpha^* e^{-i(\vec{k} \cdot \hat{r} - \omega t)} \right) = 2 E_0 |\alpha| \text{sen}(\vec{k} \cdot \hat{r} - \omega t - \theta). \end{aligned} \quad (25)$$

$E_0$  está definido de acuerdo a la ecuación 10,  $\vec{k}$  es el vector de onda a la frecuencia  $\omega$ ,  $\hat{r}$  es el vector de posición y  $\alpha$  es la amplitud compleja del estado coherente. En la última relación se tuvo en cuenta la notación exponencial  $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ , para la cual  $|\alpha|$  representa la amplitud y  $\theta$  la fase del estado coherente. Es de resaltar que el valor esperado del operador de campo electromagnético se asemeja a la expresión para un campo electromagnético clásico, es por esto que se afirma que son los estados más asequibles a nivel experimental.

Así mismo:

$$\langle \hat{E}^2 \rangle = E_0^2 (1 + 4|\alpha|^2 \text{sen}^2(\vec{k} \cdot \hat{r} - \omega t - \theta)). \quad (26)$$

También se tiene:

$$(\Delta \hat{E})^2 = \langle \hat{E}^2 \rangle - \langle \hat{E} \rangle^2 = E_0^2 = \frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V}. \quad (27)$$

Es decir, la incertidumbre en el campo eléctrico para los estados coherentes es constante e independiente de la amplitud de los mismos. En la figura 5a se puede ver una representación del valor esperado del campo eléctrico para un estado coherente en donde se tuvieron en cuenta las anteriores relaciones.

■ *Valor esperado y varianza de los operadores de cuadratura:*

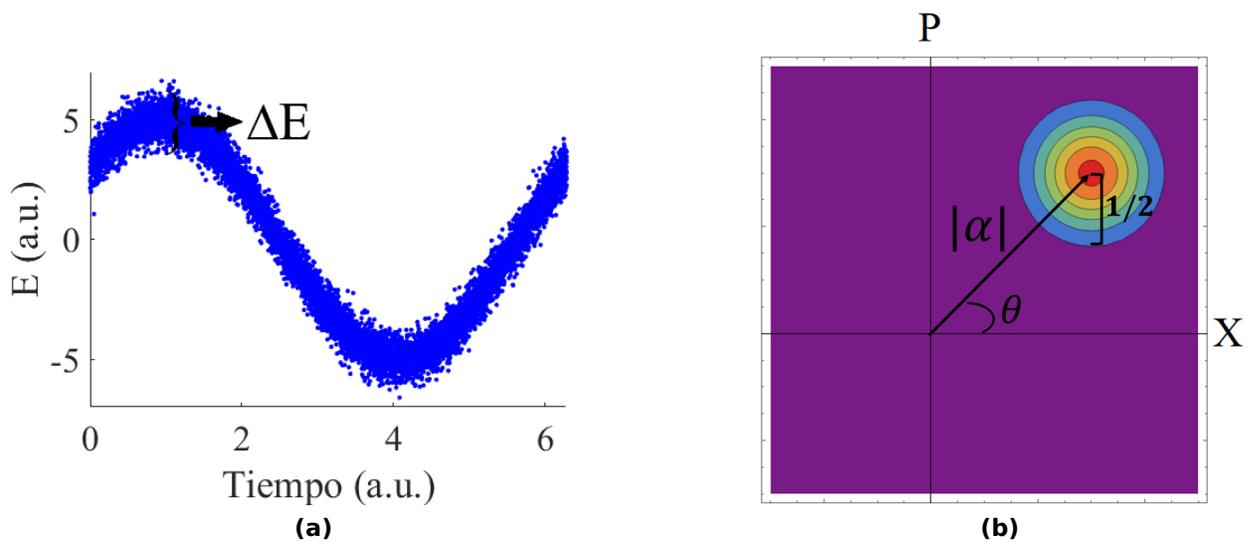
Teniendo en cuenta la definición de los operadores de cuadratura, se tiene:

$$\langle \hat{X} \rangle = |\alpha| \cos(\theta), \quad (28) \quad \langle \hat{P} \rangle = |\alpha| \sin(\theta), \quad (31)$$

$$\langle \hat{X}^2 \rangle = |\alpha|^2 \cos^2(\theta) + \frac{1}{4}, \quad (29) \quad \langle \hat{P}^2 \rangle = |\alpha|^2 \sin^2(\theta) + \frac{1}{4}, \quad (32)$$

$$(\Delta \hat{X})^2 = \langle \hat{X}^2 \rangle - \langle \hat{X} \rangle^2 = \frac{1}{4}, \quad (30) \quad (\Delta \hat{P})^2 = \langle \hat{P}^2 \rangle - \langle \hat{P} \rangle^2 = \frac{1}{4}. \quad (33)$$

De las ecuaciones 30 y 33 se puede notar que  $\Delta \hat{X} \cdot \Delta \hat{P} = \frac{1}{4}$ , con lo cual se puede concluir que los estados coherentes son estados con mínima incertidumbre. También es común encontrar una representación de los estados coherentes de manera similar a la figura 5b, teniendo en cuenta las relaciones encontradas en las ecuaciones 28, 30, 31 y 33, donde los dos ejes representan las variables de cuadratura. Esta representación es análoga a una representación de los estados coherentes en el *Espacio de Fase Cuántico*.



**Figura 5.** (a) Ejemplo de la distribución de campo eléctrico para un estado coherente arbitrario en  $|\vec{r}| = 0$ . (b) Representación cualitativa de un estado coherente análoga a la representación en el espacio de fase cuántico.

**Estados coherentes no monocromáticos:** Debido a que en este trabajo nos interesa trabajar con estados definidos en el tiempo y no monocromáticos, es importante revisar una descripción más general para los mismos. Para esto se seguirá un tratamiento similar al de Yang *et al.* (2008).

Empezamos definiendo estados coherentes asociados con una forma de onda muy

general:

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha\hat{A}_i^\dagger - \alpha^*\hat{A}_i} |0\rangle, \quad (34)$$

donde:

$$\hat{A}_i^\dagger = \int dk \phi_i(k) \hat{b}_k^\dagger \quad (35)$$

es el operador de creación de un paquete de onda de fotón individual con la estructura espectral dada por la función  $\phi_i(k)$  para el campo asociado y está normalizada de acuerdo a:

$$\int \phi_i^*(k) \phi_j(k) dk = \delta_{ij}. \quad (36)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones 34, 35 y 36, se pueden demostrar las siguientes relaciones:

$$\text{Relación de conmutación: } [\hat{A}_i, \hat{A}_j^\dagger] = \delta_{ij}. \quad (37)$$

$$\text{Ecuación de eigenvalores para el operador } \hat{A}_i: \hat{A}_i |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \quad (38)$$

$$\text{Número de fotones esperado: } \langle \alpha | \hat{N} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i | \alpha \rangle = |\alpha|^2. \quad (39)$$

*Distribuciones marginales de las cuadraturas del campo:*

$$|\langle x_\phi | \alpha \rangle|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2[x_\phi - (\alpha_r \cos\phi + \alpha_i \sin\phi)]^2}, \quad (40)$$

donde  $x_\phi$  son los valores propios del operador de cuadratura generalizada, definido como:

$$\hat{X}_\phi = \frac{1}{2} (\hat{A}_i^\dagger e^{i\phi} + \hat{A}_i e^{-i\phi}). \quad (41)$$

Y donde  $\alpha_r$  y  $\alpha_i$  son las partes real e imaginaria, respectivamente, de la amplitud del estado coherente  $|\alpha\rangle$ .

## 2.3 Tomografía cuántica

*Can we “see” the “quantum things”?*

*Not quiet! Seeing quantum objects means disturbing them, in general. [...] We cannot see the things as they are because as soon as we watch them they behave differently.*

U. Leonhardt, *Measuring the Quantum State of Light*, 1997

Es importante recordar que, en general, el estado físico de un sistema es la descripción matemática del mismo que contiene información completa y relevante, y que, de acuerdo a los postulados de la mecánica cuántica, el *estado cuántico* de un sistema está caracterizado de manera más general por una *matriz de densidad*, la cual se definirá más adelante en este capítulo.

Cabe señalar que el concepto del estado cuántico contiene dentro de sí cierto grado de abstracción. En las clases de mecánica cuántica de licenciatura se tiene un primer acercamiento a este concepto por medio de la *función de onda*, de la cual se enseña que está asociada a una *amplitud de probabilidad* y que nos permite calcular valores esperados de cantidades observables o medibles acerca del sistema (Cohen-Tannoudji *et al.*, 1977). La abstracción del estado cuántico radica entonces en el problema de la medición. ¿Se puede medir el estado cuántico de un sistema? La respuesta a esta pregunta es **isí!**, al menos de manera indirecta. El problema central de la tomografía cuántica consiste precisamente en la determinación experimental del estado cuántico de sistemas físicos.

La reconstrucción del estado cuántico no es una tarea trivial, pues existen limitaciones en este tipo de sistemas; por ejemplo, realizar mediciones en un sistema cuántico implica perturbarlo, y, por otro lado, como consecuencia del principio de incertidumbre de Heisenberg, no se podrán conocer características complementarias del sistema de manera completa y precisa (Leonhardt, 1997). Una solución a este problema es preparar múltiples copias del sistema y realizar diferentes experimentos en cada una de las copias para luego inferir el estado cuántico a partir de las distribuciones estadísticas de las cantidades medidas. Un procedimiento de este tipo se conoce como *tomografía cuántica* (D’Ariano *et al.*, 2003) y ha sido ampliamente implementado de manera ex-

perimental mediante la *detección homodina balanceada*, una técnica que se abordará con más profundidad más adelante en este capítulo.

El problema de la reconstrucción del estado de sistemas cuánticos ha sido abordado desde mediados del siglo pasado, teniendo como pioneros: a Fano (1957), quien denominó como “quorum” al conjunto de observables suficientes para una completa determinación del estado de un sistema; a Vogel y Risken (1989) quienes encontraron que las distribuciones de cuadratura de los campos corresponden con la transformada de Radon de la función de Wigner, que es una representación de los estados cuánticos en el espacio de fase, y proponen por primera vez la técnica de la detección homodina para su reconstrucción; a Smithey *et al.* (1993) quien realizó la implementación de un experimento de este tipo, en base a la teoría propuesta por Vogel y Risken, entre otros.

La belleza de este área se puede apreciar en la forma en que permite traer a tierra un concepto bastante abstracto de la física moderna, como se mencionó previamente, sin embargo, es necesario señalar también que, gracias a los avances de la tecnología actual, se hace necesario su desarrollo. Expertos afirman que nos encontramos en medio de la segunda revolución de la mecánica cuántica (Williams, 2007; Hanacek, 2018) y es por esto que es necesario contar con protocolos para caracterizar los sistemas cuánticos involucrados, labor que cumple la tomografía cuántica. La tomografía cuántica se ha aplicado a una variedad de estados cuánticos y se ha convertido en una herramienta fundamental en la investigación en el área de información cuántica (Paris y Rehacek, 2004; Lvovsky *et al.*, 2001; Lvovsky y Raymer, 2009; Cialdi *et al.*, 2016; Nehra *et al.*, 2019; Tiunov *et al.*, 2020). Se pueden encontrar casos de aplicación también en la industria, por ejemplo, en la reconocida empresa de cómputo cuántico en dispositivos fotónicos integrados, Xanadú, en donde se realizan este tipo de protocolos (Nehra *et al.*, 2019; Vaidya *et al.*, 2020).

En este trabajo se busca diseñar y simular un experimento de tomografía homodina. Típicamente, un experimento de este tipo consta de tres etapas. La primera, es la preparación del estado a caracterizar, la segunda, es la implementación de un experimento de detección homodina para obtener mediciones de cuadratura de la señal de interés, y, finalmente, el análisis estadístico de los datos experimentales mediante el uso de algoritmos de reconstrucción del estado cuántico. De esta manera, a continuación se presentarán: los conceptos de la matriz de densidad y la función de Wigner,

que son los objetos matemáticos que entendemos como los estados cuánticos a reconstruir; la teoría de la detección homodina balanceada, y, finalmente, los algoritmos de reconstrucción con los que se trabajó en este proyecto.

### 2.3.1 Matriz de densidad

El conocimiento del estado físico de un sistema junto con las reglas de la evolución del mismo, es decir, las leyes físicas que lo rigen, son herramientas muy poderosas que permiten predecir su comportamiento, lo cual tiene un inmenso interés práctico en muchas áreas tecnológicas. En la mecánica clásica, por ejemplo, el estado físico de un sistema en un tiempo fijo  $t_0$  se define especificando su posición y momento. Si se lanza una pelota, por ejemplo, se podrá predecir dónde caerá y en cuánto tiempo. Pero, ¿qué pasa en sistemas de escalas atómicas? En tal caso, se necesita estudiar el sistema desde el paradigma de la mecánica cuántica. El problema central es entonces conocer cuál es la descripción matemática del estado de este tipo de sistemas en un tiempo dado.

En mecánica cuántica se define a un conjunto de sistemas preparados idénticamente como *estados puros*, los cuales son descritos por un vector de onda ( $|\psi\rangle$ ), que corresponde a un vector normalizado perteneciente a un espacio de Hilbert  $H$ . Sistemas tales como ensambles estadísticos, sistemas producto de una medición o, en general, sistemas para los cuales no se tiene información completa, son definidos como estados “mixtos” (Cohen-Tannoudji *et al.*, 1977). Para describir tales sistemas es preciso acudir al formalismo de las matrices de densidad. Este concepto fue originado de la conexión entre la mecánica cuántica y la mecánica estadística, y fue propuesto independientemente por Landau y Von Neumann en 1927. De acuerdo con Fano (1957), la matriz de densidad juega un rol bastante similar a las funciones de distribución de la física estadística clásica.

Para introducir el formalismo de la matriz de densidad, asumimos que tenemos al menos información estadística del sistema. El estado del sistema puede ser  $|\psi_1\rangle$  con una probabilidad  $p_1$ , o puede ser  $|\psi_2\rangle$  con una probabilidad  $p_2$ , etc., donde  $p_1 + p_2 + \dots = \sum_i p_i = 1$ . Se tiene entonces una *mezcla estadística* o una *superposición incoherente*<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Sin términos de interferencia.

de estados. Teniendo en cuenta que el valor esperado para un observable físico  $A$  para un estado  $|\psi\rangle$  está dado por:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \text{Tr}[\hat{A} |\psi\rangle \langle \psi|]. \quad (42)$$

Se tiene que el valor esperado del observable  $A$  para los estados mixtos está dado por (Jacobs, 2014):

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle \\ &= \sum_i p_i \text{Tr}[\hat{A} |\psi_i\rangle \langle \psi_i|] \\ &= \text{Tr} \left[ \hat{A} \left( \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right) \right] = \text{Tr}[\hat{A} \hat{\rho}], \end{aligned} \quad (43)$$

donde  $\hat{\rho}$  es la matriz de densidad y está definida como  $\hat{\rho} \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ .

Además se cumple:

- Para estados puros:  $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ ,  $\text{Tr}[\hat{\rho}^2] = \text{Tr}[\hat{\rho}] = 1$ .
- Para estados mixtos:  $\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$ ,  $\text{Tr}[\hat{\rho}^2] \leq 1$ .

También es importante mencionar que en ambos casos,  $\text{Tr}[\hat{\rho}] = 1$ , y que los elementos de la diagonal de la matriz de densidad tienen una interpretación probabilística.

### 2.3.2 Función de Wigner

En mecánica clásica, el estado de un sistema está completamente especificado en un instante de tiempo si se conoce la posición y el momento de cada uno de sus constituyentes. Esta combinación de los espacios de posición y momento se conoce como el *espacio de fase*. De esta manera, el estado de cada partícula está representado como un *punto* en este espacio, y el estado del sistema en general corresponde con

una *distribución de probabilidad* que, entre otras características, debe ser no-negativa y normalizada (Beiser, 1969).

En la mecánica cuántica, sin embargo, es preciso considerar que la medición simultánea y precisa de variables conjugadas (como la posición y el momento) no es posible, debido al principio de incertidumbre de Heisenberg, por lo cual uno se podría cuestionar el sentido del espacio de fase desde este paradigma. Con todo, es innegable la utilidad de las distribuciones de probabilidad para predecir la estadística de observaciones. Es aquí donde surge la función de Wigner como una alternativa para caracterizar completamente a los estados cuánticos y como la representación más notable de los mismos en el *espacio de fase cuántico* (Leonhardt, 1997). La función de Wigner fue postulada por Eugene Wigner (1932) en su artículo "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium". Se denomina como una "distribución de cuasi-probabilidad" y corresponde con la transformada de Fourier de la matriz de densidad del estado en cuestión en coordenadas rotadas. Se define como:

$$\begin{aligned} W(x, p) &\equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\left(x - \frac{q}{2}\right) \psi\left(x + \frac{q}{2}\right) e^{ipq/\hbar} dq \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle x - \frac{q}{2} \left| \hat{\rho} \right| x + \frac{q}{2} \right\rangle e^{ipq/\hbar} dq, \end{aligned} \quad (44)$$

donde  $x$  y  $q$  son variables de posición,  $p$  es una variable de momento y  $\hat{\rho}$  es la matriz de densidad.

En 1987, Bertrand y Bertrand estudian las propiedades de esta función y encuentran que la integración con respecto a cada variable puede ser interpretada como una marginalización, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x, p) dp = |\psi(x)|^2 = pr(x), \quad (45)$$

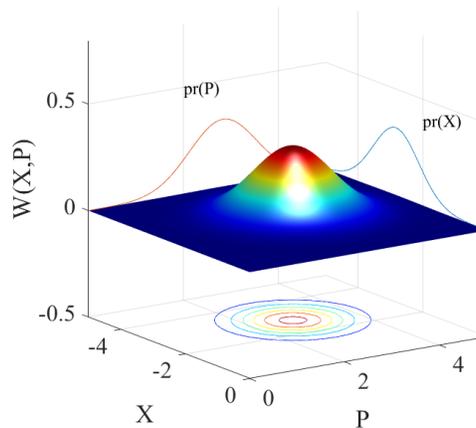
$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x, p) dx = |\psi(p)|^2 = pr(p). \quad (46)$$

Las anteriores son las conocidas distribuciones marginales para la posición y el momento, y pueden ser interpretadas como proyecciones de densidad de la función de Wigner sobre un plano en el espacio de fase, lo cual se puede ver de manera esquemática en la figura 6.

Llama también la atención el trabajo de Vogel y Risken, quienes en 1989 publican un trabajo proponiendo por primera vez la técnica de la detección homodina para la reconstrucción de distribuciones de cuasiprobabilidad. Vogel y Risken determinan una relación entre las distribuciones marginales de la función  $W(x, p)$  en términos de las cuadraturas del campo, las cuales se pueden obtener experimentalmente por medio de la detección homodina:

$$pr(x, \theta) \equiv \langle x | \hat{U}(\theta) \hat{\rho} \hat{U}^\dagger(\theta) | x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W(x \cos \theta - p \sin \theta, x \sin \theta + p \cos \theta) dp, \quad (47)$$

siendo  $x$  y  $p$  las variables canónicas análogas a las cuadraturas de un campo de radiación electromagnética,  $\theta$  una fase arbitraria, y  $\hat{U}(\theta)$  el operador de cambio de fase o rotación definido como  $\hat{U}(\theta) \equiv \exp(-i\theta \hat{n})$ , siendo  $\hat{n}$  el operador de número. Integrales como la ecuación 47 son conocidas como *transformaciones de Radon*, las cuales son operaciones naturales en la tomografía, usualmente utilizadas en el área de las imágenes médicas y el reconocimiento de patrones.



**Figura 6.** Función de Wigner de un estado coherente y sus proyecciones en dos planos paralelos a los ejes, las cuales corresponden a sus funciones marginales.

### 2.3.3 Detección homodina balanceada

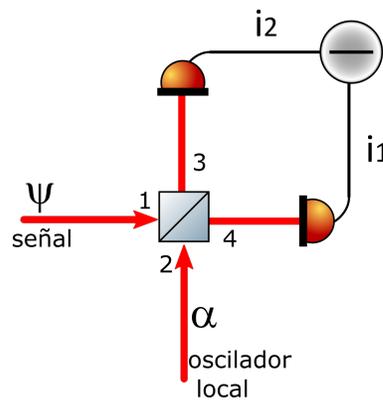
La detección homodina balanceada (DHB) es un procedimiento utilizado en el procesamiento de señales para caracterizar y amplificar una señal mediante la interferencia de la misma con otra señal de referencia con la misma frecuencia. La idea de la detección homodina, de hecho, surgió con la tecnología de microondas desarrollada en la segunda guerra mundial (Leonhardt, 1997). Este esquema experimental

presenta grandes ventajas, como la cancelación del ruido técnico y las inestabilidades del campo de referencia; fue sugerido por primera vez en el contexto de la tomografía cuántica por Vogel y Risken (1989) y fue utilizado de manera experimental por primera vez para la reconstrucción de estados cuánticos por Smithey *et al.* (1993).

El esquema básico de un experimento de detección homodina balanceada es mostrado en la figura 7. La señal a caracterizar está definida por un operador de campo eléctrico dado por:

$$\hat{E}_x(z, t) = E_0 (\hat{a}_1(t) + \hat{a}_1^\dagger(t)) \sin(kz), \quad (48)$$

donde  $\hat{a}_1(t)$  y  $\hat{a}_1^\dagger(t)$  son operadores relacionados con la amplitud compleja del campo y son análogos a los operadores de aniquilación y creación en el oscilador armónico.



**Figura 7.** Esquema simplificado de un arreglo experimental de detección homodina balanceada

En un divisor de haz 50/50, la señal es interferida con un láser coherente intenso, denominado *el oscilador local*, que proporciona la fase de referencia. La fase del oscilador local se varía y las fotocorrientes correspondientes a los campos de salida del divisor de haz son medidas a través de dos fotodetectores, para posteriormente ser procesadas y sustraídas por medios electrónicos. La diferencia de las fotocorrientes es la cantidad de interés dado que contiene los términos de interferencia entre la señal y el oscilador local.

El divisor de haz es modelado como un dispositivo con dos entradas y dos salidas que cumplen con la siguiente transformación:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \end{pmatrix} = \mathbb{B} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau & -r \\ r & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}, \quad (49)$$

donde  $\tau$  es la transmisividad y  $r$  es la reflectividad. Considerando lo anterior, se tiene que la relación entre las señales de entrada y salida de un divisor de haz 50/50 es:

$$\hat{a}_3 = \frac{(\hat{a}_1 - \hat{a}_2)}{\sqrt{2}}, \quad (50)$$

$$\hat{a}_4 = \frac{(\hat{a}_1 + \hat{a}_2)}{\sqrt{2}}. \quad (51)$$

Por simplicidad, se considera que la fotocorriente medida es proporcional al número de fotones incidentes sobre el fotodetector, y por lo tanto:

$$\hat{I} = \hat{n}_4 - \hat{n}_3 = \hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 - \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1. \quad (52)$$

Ahora, recordando que el oscilador local está descrito como un estado coherente intenso, de tal manera que cumple con la ecuación de eigenvalores dada por  $\hat{a}_2 |a\rangle_2 = \alpha |a\rangle_2$ , y que su amplitud cumple con la relación  $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$ , se tiene:

$$\langle I_\phi \rangle = 2|\alpha| \left\langle \frac{\hat{a}_1 e^{-i\phi} + \hat{a}_1^\dagger e^{i\phi}}{2} \right\rangle = 2|\alpha| \langle X_\phi \rangle, \quad (53)$$

donde  $\langle X_\phi \rangle$  es el valor esperado de las cuadraturas generalizadas del campo de la señal a caracterizar (Smithey *et al.*, 1993; Leonhardt, 1997; Lvovsky y Raymer, 2009). Adicionalmente, la varianza de la diferencia de fotocorrientes está dada por (Esposito, 2011):

$$(\Delta I_\phi)^2 = \langle I_\phi^2 \rangle - \langle I_\phi \rangle^2, \quad (54)$$

donde

$$\langle I_\phi^2 \rangle = 4|\alpha|^2 \langle (\hat{a}_1 e^{-i\phi} + \hat{a}_1^\dagger e^{i\phi})^2 \rangle + \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle. \quad (55)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se tiene que la proporcionalidad entre las cuadraturas del campo y la diferencia de fotocorrientes se mantendrá si y sólo si  $|\alpha|^2 \gg \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle$ , de tal manera que:

$$\langle X_\phi^2 \rangle = \frac{\langle I_\phi^2 \rangle}{4|\alpha|^2}. \quad (56)$$

### 2.3.3.1 Detección homodina en el régimen pulsado

El desarrollo anterior sirve como una primera aproximación para entender la detección homodina balanceada, sin embargo, dado que en este proyecto se busca caracterizar campos resueltos en el tiempo, es preciso estudiar una generalización de las relaciones fundamentales en este protocolo tomando en cuenta la dependencia temporal de los campos involucrados.

Para empezar, recordamos que la cantidad de interés es la diferencia de fotocorrientes en el experimento de detección homodina, la cual se define así:

$$\langle \hat{I} \rangle = \langle \hat{n}_4 - \hat{n}_3 \rangle = \langle \psi | \hat{n}_4 - \hat{n}_3 | \psi \rangle. \quad (57)$$

Recordando el esquema experimental (figura 7), se tiene que la señal a caracterizar se encuentra en un estado arbitrario  $|\psi_1\rangle$ , mientras que el oscilador local está dado por luz láser intensa, la cual produce un campo en un estado coherente, el cual llamaremos  $|\alpha_2\rangle$ , y que, dado que ambos haces son independientes, el estado total de entrada está dado por el producto tensorial  $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle$  (Grynberg *et al.*, 2010). Adicionalmente, el operador de número en base continua está dado por  $\hat{n}_i = \int d\omega \hat{a}_i^\dagger(\omega) \hat{a}_i(\omega)$ , entonces:

$$\langle \hat{I} \rangle = \langle \psi_1 | \otimes \langle \alpha_2 | \left[ \int d\omega \hat{a}_4^\dagger(\omega) \hat{a}_4(\omega) - \int d\omega \hat{a}_3^\dagger(\omega) \hat{a}_3(\omega) \right] | \alpha_2 \rangle \otimes | \psi_1 \rangle. \quad (58)$$

Ahora, considerando la relación 52, resultante de la transformación del divisor de haz 50:50 (ec. 49), se tiene:

$$\begin{aligned} \langle \hat{I} \rangle &= \langle \psi_1 | \otimes \langle \alpha_2 | \int d\omega \hat{a}_1^\dagger(\omega) \hat{a}_2(\omega) + \int d\omega \hat{a}_2^\dagger(\omega) \hat{a}_1(\omega) | \alpha_2 \rangle \otimes | \psi_1 \rangle \\ &= \langle \psi_1 | \otimes \left[ \int d\omega \hat{a}_1^\dagger(\omega) \langle \alpha_2 | \hat{a}_2(\omega) | \alpha_2 \rangle + \int d\omega \langle \alpha_2 | \hat{a}_2^\dagger(\omega) | \alpha_2 \rangle \hat{a}_1(\omega) \right] \otimes | \psi_1 \rangle. \end{aligned} \quad (59)$$

Dado que se busca encontrar una expresión general para campos pulsados, se consideraran estados coherentes asociados con una forma de onda muy general, de la siguiente manera:

$$|\alpha_2\rangle = e^{\alpha_2 \hat{A}_2^\dagger - \alpha_2^* \hat{A}_2}, \quad (60)$$

donde:

$$\hat{A}_2^\dagger = \int d\omega \phi_2(\omega) \hat{a}_2^\dagger(\omega), \quad y \quad \hat{A}_2 = \int d\omega \phi_2^*(\omega) \hat{a}_2(\omega). \quad (61)$$

Ahora, teniendo en cuenta el lema de Baker-Hausdorff (Sakurai y Napolitano, 1994), se puede demostrar que:

$$\langle \alpha_2 | \hat{a}_2(\omega) | \alpha_2 \rangle = \alpha_2 \phi_2(\omega) \quad y \quad \langle \alpha_2 | \hat{a}_2^\dagger(\omega) | \alpha_2 \rangle = \alpha_2^* \phi_2^*(\omega). \quad (62)$$

La amplitud  $\alpha_2$  es una cantidad compleja, de manera que se puede expresar como  $\alpha_2 = |\alpha_2| e^{i\theta}$  y está relacionada con el número de fotones esperado del oscilador local, de la siguiente manera:

$$\langle \hat{n}_2 \rangle = |\alpha_2|^2. \quad (63)$$

Considerando lo anterior, se tendrá que el valor esperado de la diferencia de las fotocorrientes es:

$$\langle \hat{I} \rangle = |\alpha_2| \langle \psi_1 | \left[ \int d\omega \phi_2(\omega) \hat{a}_1^\dagger(\omega) e^{i\theta} + \int d\omega \phi_2^*(\omega) \hat{a}_1(\omega) e^{-i\theta} \right] | \psi_1 \rangle. \quad (64)$$

Definiendo un nuevo operador de aniquilación para describir a la amplitud compleja para el campo de la señal a caracterizar, pero pesada con respecto a la forma espectral del oscilador local se tiene:

$$\hat{A}_{12} = \int d\omega \phi_2^*(\omega) \hat{a}_1(\omega). \quad (65)$$

Entonces:

$$\langle \hat{I} \rangle = |\alpha_2| \langle \psi_1 | \left[ \hat{A}_{12}^\dagger e^{i\theta} + \hat{A}_{12} e^{-i\theta} \right] | \psi_1 \rangle. \quad (66)$$

De manera que se puede definir un operador de cuadraturas del campo de la señal, pesado con respecto a la estructura espectral del oscilador local:

$$\hat{X}_\theta^{12} = \frac{\hat{A}_{12}^\dagger e^{i\theta} + \hat{A}_{12} e^{-i\theta}}{2}. \quad (67)$$

Finalmente:

$$\langle \hat{I} \rangle = 2|\alpha_2| \langle \psi_1 | \hat{X}_\theta^{12} | \psi_1 \rangle = 2|\alpha_2| \langle \hat{X}_\theta^{12} \rangle. \quad (68)$$

Vale la pena estudiar el caso particular para el cual la señal a caracterizar es tam-

bién un estado coherente pulsado, puesto que este es uno de los objetivos principales de este trabajo. Si se considera un estado de entrada  $|\psi_1\rangle = |\alpha_1\rangle$ , se tendrá que la diferencia de fotocorrientes es equivalente a:

$$\langle \hat{I} \rangle = |\alpha_1||\alpha_2|e^{i(\theta_1-\theta_2)} \int d\omega \phi_1(\omega)\phi_2(\omega) + |\alpha_1||\alpha_2|e^{-i(\theta_1-\theta_2)} \int d\omega \phi_1^*(\omega)\phi_2^*(\omega). \quad (69)$$

Se puede observar que la diferencia de fotocorrientes es proporcional a las amplitudes de la señal y del oscilador local, y, asimismo, depende de la diferencia de fase entre estos y del traslape espectral de los mismos. Esto resalta la importancia de que haya una relación fija de fase entre ambos campos y de que se busca que el traslape espectral sea máximo, lo cual explica que se busque que en los experimentos de tomografía homodina tanto el oscilador local como la señal provengan de una misma fuente en común.

### 2.3.4 Algoritmos de reconstrucción de estados cuánticos en experimentos de tomografía homodina

La palabra tomografía proviene etimológicamente de las raíces griegas *tomos*, que significa *corte*, y *grafos*, que significa *escritura*, y se refiere a la reconstrucción de la imagen de una sección transversal de un objeto a partir de sus proyecciones. Un ejemplo de este tipo de procedimientos es la tomografía axial computarizada, una técnica de diagnóstico médico por imágenes, en cuyo caso lo que interesa es reconstruir imágenes del interior del cuerpo humano. En contraste, el objetivo principal de la tomografía cuántica es reconstruir el estado cuántico de algún sistema.

Precisamente, esta última área fue nombrada de tal manera debido a los trabajos de Bertrand y Bertrand (1987) y Vogel y Risken (1989). De la sección 2.3.2, se recuerda que Bertrand y Bertrand habían propuesto una nueva derivación de la función de Wigner a partir de sus propiedades matemáticas, encontrando que la integración en cada variable da lugar a una marginalización. Identificando los valores de las distribuciones marginales es posible reconstruir la función de Wigner a partir de tales proyecciones. Es por esto que, históricamente, el primer algoritmo utilizado para la reconstrucción de estados cuánticos fue el *algoritmo de retroproyecciones filtradas*, el cual es ampliamente utilizado en el área de la tomografía axial computarizada para el análisis de

imágenes médicas.

Las bases matemáticas para la reconstrucción de imágenes a partir de sus proyecciones fueron planteadas por el matemático Johann Radon en 1917, proponiendo la transformada que lleva su nombre. Justamente, la reconstrucción de la imagen a partir de sus proyecciones se hace mediante la *transformada inversa de Radón*, y el *algoritmo de retro-proyecciones filtradas* permite calcularla eficientemente de manera computacional (Feldkamp *et al.*, 1984). Este método se basa en el *teorema de las "rebanadas" de Fourier* (Dance *et al.*, 2014), el cual relaciona la transformada de Radón de un objeto, con su transformada de Fourier en dos dimensiones (Blackledge, 2006). La primera reconstrucción experimental de la función de Wigner y, consiguientemente de la matriz de densidad, estuvo a cargo del equipo de Smithey *et al.* (1993) utilizando este método.

Posteriormente fueron desarrollados otros algoritmos más robustos y eficientes que permiten incluso reconstruir la matriz de densidad sin la necesidad de determinar la función de Wigner previamente, como el algoritmo de *reconstrucción de máxima verosimilitud* (*Maximum Likelihood*) (Hradil, 1997; Lvovsky, 2004) o el algoritmo de reconstrucción por *funciones patronas* (D'Ariano *et al.*, 2003). El algoritmo *MaxLik* consiste en la determinación de la matriz de densidad con máxima probabilidad de producir los valores de cuadratura obtenidos experimentalmente; es una técnica de inferencia estadística. Mientras que el algoritmo de *funciones patronas* explota el análisis estadístico y la comparación de los trazos experimentales obtenidos con respecto a los valores esperados teóricamente.

#### **2.3.4.1 Reconstrucción de máxima verosimilitud (MaxLik)**

La estimación de máxima verosimilitud<sup>4</sup> es un método de inferencia estadística muy versátil cuyo objetivo, de manera general, es encontrar los parámetros de la distribución de probabilidad para la cual los datos observados en un experimento son los más probables (Rossi, 2018). La herramienta principal de este método es la determinación y maximización de un funcional de verosimilitud, que precisamente cuantifica esa probabilidad. Existen varias alternativas para esta labor; una de ellas es la maxi-

---

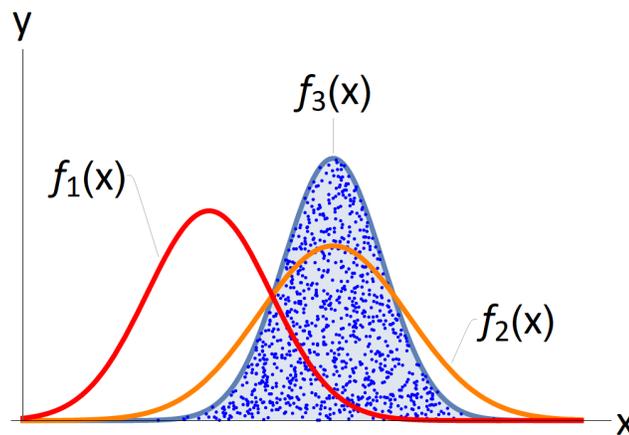
<sup>4</sup>Proviene del término en inglés *maximum likelihood estimation*.

mización analítica del funcional, sin embargo, en muchas ocasiones será necesario el uso de métodos numéricos.

La implementación numérica de un algoritmo de este tipo consta por lo general de los siguientes pasos:

1. Asumir una distribución de probabilidad inicial.
2. Evaluar la probabilidad de que los datos experimentales sigan tal distribución.
3. ¿La probabilidad es máxima? Si la respuesta es no, variar un poco los parámetros de la distribución y repetir la evaluación hasta encontrar un máximo global.

A modo de ejemplo, en la figura 8 se muestra una ilustración de cómo funciona este proceso: Inicialmente se cuenta con un conjunto de datos experimentales representados por los puntos azules. La pregunta es: ¿qué distribución de probabilidad predice la generación de tales datos?. El primer paso será entonces asumir una distribución inicial, por ejemplo la función  $f_1(x)$ . Sin embargo, como se puede observar en la figura 8, sólo unos pocos datos podrían ser explicados mediante tal función, por lo cual la probabilidad conjunta de que todos los datos sean generados por  $f_1(x)$  es muy baja. El siguiente paso será variar un poco los parámetros de  $f_1(x)$ , como el ancho medio y/o el valor central, con lo cual llegamos a una distribución diferente que, en este caso,



**Figura 8.** Ilustración del proceso de estimación de máxima verosimilitud: Para encontrar la distribución que mejor describe los puntos experimentales (representados por los puntos azules), se postula una distribución inicial  $f_1(x)$  y se varían sus parámetros de manera sistemática hasta encontrar la distribución que mejor se ajuste, que en este caso corresponde con  $f_3(x)$ .  $f_2(x)$  corresponde con una distribución postulada en un paso intermedio en el proceso de maximización.

denominamos  $f_2(x)$ . Se evalúa nuevamente la probabilidad de que los datos experimentales sigan esta nueva distribución. En el caso de  $f_2(x)$  la probabilidad es más alta en comparación con  $f_1(x)$ , sin embargo no es máxima: aún hay datos que no son explicados por  $f_2(x)$ . Es por esto que es necesario seguir variando los parámetros de manera sistemática hasta encontrar la distribución que mejor se ajuste, que en este caso sería  $f_3(x)$ .

En el contexto de la tomografía cuántica homodina, el algoritmo de estimación de máxima verosimilitud, también conocido como *MaxLik*, consiste en encontrar los elementos de la matriz de densidad cuya probabilidad de generar los datos de cuadratura obtenidos experimentalmente sea máxima, cuidando además de que la matriz de densidad reconstruida tenga sentido físico. El algoritmo clásico fue propuesto en 1920 por Fisher, y en óptica cuántica ha tenido como pioneros a Hradil (1997), Banaszek (1998), entre otros, e implementado por Lvovsky en 2004 como un algoritmo iterativo.

A continuación, se presenta de manera general el método propuesto por Lvovsky. Para empezar, se consideran una serie de mediciones sobre un sistema descrito por la matriz de densidad  $\hat{\rho}$ , en el cual cada medición proyecta el estado del sistema en un eigenestado del aparato de medición  $|x_j\rangle$ , que es registrado un número  $n_j$  de veces, de tal manera que el número total de mediciones es  $\sum_j n_j = N$  y la frecuencia relativa de cada medición es  $f_j = n_j/N$ . En específico,  $|x_j\rangle$  corresponde con los estados propios del operador de cuadratura del campo, siendo este el observable en un experimento de detección homodina balanceada. Teniendo en cuenta lo anterior, la probabilidad de obtener cada medición está dada por:

$$p r_j = \langle x_j | \rho | x_j \rangle. \quad (70)$$

Y la probabilidad conjunta total de registrar  $N$  datos es expresada mediante el funcional de verosimilitud, que se define de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}(\hat{\rho}) = \prod_j \langle x_j | \hat{\rho} | x_j \rangle^{n_j}. \quad (71)$$

Se busca entonces encontrar la matriz de densidad para la cual la función anterior es máxima, es decir, para la cual hay una máxima probabilidad de reproducir las medi-

ciones experimentales. Considerando la maximización del funcional de verosimilitud planteada por Hradil (1997), se encuentra que el funcional de probabilidad definido en la ecuación 71 será máximo para la matriz de densidad que cumple con las siguientes relaciones:

$$\hat{R}(\hat{\rho}_0)\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_0\hat{R}(\hat{\rho}_0) \propto \hat{\rho}_0, \quad (72)$$

$$\hat{R}(\hat{\rho}_0)\hat{\rho}_0\hat{R}(\hat{\rho}_0) \propto \hat{\rho}_0. \quad (73)$$

Se introdujo el operador de proyección  $\hat{R}(\hat{\rho})$ :

$$\hat{R}(\hat{\rho}) = \sum_j \frac{f_j}{\langle x_j | \hat{\rho} | x_j \rangle} |x_j\rangle\langle x_j| = \sum_j \frac{f_j}{Tr(\hat{\Pi}_j \hat{\rho})} \hat{\Pi}_j, \quad (74)$$

donde  $\hat{\Pi}_j = |x_j\rangle\langle x_j|$  y  $Tr(A)$  indica la traza de la matriz  $A$  (suma de los elementos de la diagonal principal). En el anexo se presenta el método propuesto por Hradil (1997) para maximizar el funcional de verosimilitud de manera analítica, en el cual se deducen las relaciones anteriores.

La relación 73 es la base para este algoritmo iterativo, que se puede ver como un caso especial del algoritmo clásico de maximización de la esperanza (*expectation-maximization*, EM). Intuitivamente, se pueden interpretar estas relaciones de la siguiente forma: dado que podemos asociar a la frecuencia relativa  $f_j$  con la probabilidad estadística<sup>5</sup> de obtener una serie de mediciones  $x_j$ , se encuentra que se tendrá una máxima probabilidad si  $f_j$  es proporcional a  $\langle x_j | \hat{\rho} | x_j \rangle$ ;  $\langle x_i | \hat{\rho} | x_i \rangle$  se interpreta como la probabilidad teórica de obtener unas mediciones  $x_j$  para un sistema descrito por una matriz de densidad  $\hat{\rho}$ . Si la probabilidad teórica es aproximada a la probabilidad experimental, la matriz de densidad hallada será la correcta. Por tanto,  $\hat{R}(\hat{\rho})$  es proporcional a la matriz identidad  $\hat{I}$ , dado que  $\sum_j |x_j\rangle\langle x_j| \approx \hat{I}$ .

Para empezar, se escoge una matriz de densidad inicial (por ejemplo la matriz identidad), y luego se aplican iteraciones repetitivas

$$\hat{\rho}^{(k+1)} = \mathcal{N}[\hat{R}(\hat{\rho}^{(k)})\hat{\rho}^{(k)}\hat{R}(\hat{\rho}^{(k)})], \quad (75)$$

donde  $\mathcal{N}$  denota normalización a una traza unitaria.

---

<sup>5</sup>Recordando que la probabilidad de ocurrencia de un suceso se define como el cociente que resulta de dividir el número de casos favorables entre el número de casos posibles.

En este esquema es bastante útil realizar la reconstrucción en la base de Fock o de número, de tal manera que el operador  $\hat{\Pi}_j$  queda expresado de la siguiente manera:

$$\hat{\Pi}_j(\theta, \mathbf{x}) = \sum_m \sum_n \langle n | \theta_j, x_j \rangle \langle \theta_j, x_j | m \rangle |n\rangle \langle m|, \quad (76)$$

donde:

$$\langle n | \theta, x \rangle = e^{in\theta} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{H_n(\sqrt{2x})}{\sqrt{2^n n!}} e^{-x^2}, \quad (77)$$

con  $H_n$  denotando los polinomios de Hermite.

### 2.3.4.2 Algoritmo de funciones patrones

Mediante este método es posible conocer los elementos de la matriz de densidad y el valor esperado de diferentes observables directamente a partir de los datos experimentales sin tener que pasar por el paso intermedio de encontrar la función de Wigner, mediante un esquema de transformación lineal inversa, en el cual se evalúan y promedian las mediciones de cuadraturas del campo evaluadas en un conjunto de funciones de muestreo, denominadas *funciones patrones* (Leonhardt *et al.*, 1995; D'Ariano *et al.*, 2003).

El problema de encontrar un procedimiento para determinar el estado cuántico de un sistema a partir de múltiples copias del mismo fue abordado por primera vez por Fano en 1957. De acuerdo con Fano, el valor esperado de un operador puede ser estimado mediante la medición de una serie de observables, llamado "quorum", suficientes para la determinación completa del estado del sistema. Específicamente en la detección homodina, el quorum de observables está dado por los operadores de cuadratura ( $\hat{x}_\phi$ , con  $\phi \in [0, 2\pi]$ ).

En este esquema, el estimador  $R[\hat{O}](x, \phi)$  o "función patrón" es una función de los eigenvalores  $x$  del quorum de operadores  $\hat{x}_\phi$ . Integrando el estimador con la probabilidad  $p(x, \phi)$  de obtener una medición  $x$ , el valor medio o esperado del operador  $\hat{O}$ , se obtiene de la siguiente manera:

$$\langle \hat{O} \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\pi} \int_R p(x, \phi) R[\hat{O}](x, \phi) dx. \quad (78)$$

donde  $p(x, \phi)$  es la distribución de probabilidad de cuadraturas a una fase fija (la cual

se obtiene en el experimento de detección homodina). En el trabajo reportado por D'Ariano *et al.* (2003) se puede encontrar una derivación teórica completa de las funciones patrones.

Richter (1996) encontró una fórmula no trivial para el estimador de los productos normalmente ordenados de los operadores de creación y aniquilación (aquí representando las amplitudes del campo), dada por:

$$R[\hat{a}^{\dagger n} \hat{a}^m](x, \phi) = \frac{e^{i(m-n)\phi} H_{n+m}(\sqrt{2}x\phi)}{\sqrt{(2)^{n+m} \binom{n+m}{n}}}, \quad (79)$$

donde  $H_k$  es el polinomio de Hermite de orden  $k$ . Teniendo en cuenta la relación anterior, se pueden estimar valores esperados de operadores, tales como el número esperado de fotones, la amplitud compleja del campo, entre otros, mediante los siguientes estimadores:

$$R[\hat{a}^{\dagger} \hat{a}](x_i, \phi_i) = 2x_i^2 - \frac{1}{2}, \quad R[\hat{a}](x_i, \phi_i) = 2e^{i\phi_i} x_i. \quad (80)$$

# Capítulo 3. Amplificación paramétrica en una fibra óptica de cristal fotónico

---

## 3.1 Introducción

Típicamente, un protocolo de tomografía homodina consta de tres etapas. La primera, es la preparación del estado a caracterizar, la segunda, es la implementación de un experimento de detección homodina para obtener mediciones de cuadratura de la señal de interés, y, finalmente, el análisis estadístico de los datos experimentales mediante el uso de algoritmos de reconstrucción del estado cuántico.

En este proyecto se busca estudiar y diseñar un experimento para reconstruir el estado cuántico de los estados generados mediante el proceso de amplificación paramétrica, también conocido como el mezclado de cuatro ondas estimulado, en una fibra óptica de cristal fotónico. Es necesario estudiar de manera completa el mecanismo físico de generación de estos estados, desde la teoría de propagación de campos electromagnéticos en este tipo de fibras, así como desde la teoría cuántica, para tener un entendimiento profundo de las características de la señal que estudiaremos en el proceso de caracterización y, de esta manera, encontrar los parámetros adecuados en el diseño experimental del protocolo de tomografía cuántica. En este capítulo se muestran precisamente los estudios teóricos y numéricos que se desarrollaron desde estos dos enfoques, considerando condiciones realistas del experimento, y los avances en la implementación experimental. Por medio de estos estudios se determinaron condiciones para las cuales es factible la generación de la amplificación paramétrica.

Es preciso resaltar que el estudio de la generación de este tipo de fenómenos no lineales en medios guiados es un problema estimulante y con una gran belleza, ya que involucra múltiples áreas de trabajo, como la óptica no lineal, la electrodinámica de guías de onda, y el modelamiento de problemas de la física mediante ecuaciones diferenciales parciales, por decir algunos ejemplos. En particular, las fibras ópticas de cristal fotónico son unos medios guiados interesantísimos que ofrecen una gran variedad de aplicaciones, debido a su versatilidad en la generación de efectos no lineales, de polarización, y de dispersión, lo cual da lugar a un control de la luz que no tiene precedentes en otro tipo de medios guiados (Knight, 2003).

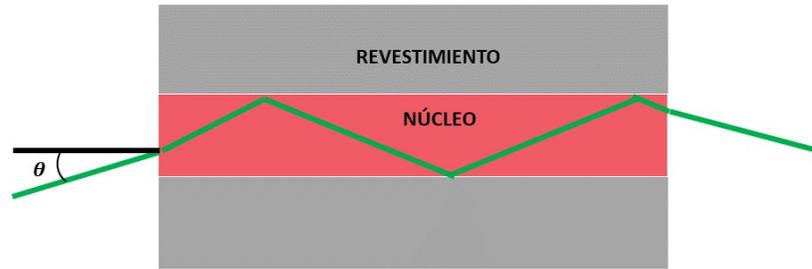
También es importante mencionar que la metodología abordada en este trabajo para estudiar la propagación de luz en este tipo de fibras es suficientemente general como para adaptar este estudio a cualquier tipo de guía de onda óptica, simplemente variando la definición del perfil transversal de la guía y ajustando el estado de polarización de los campos interactuantes. A continuación se presenta una descripción general de las fibras ópticas de cristal fotónico y del fenómeno de la amplificación paramétrica, posteriormente se presentan los modelos teóricos y numéricos desarrollados, y, finalmente, se presentan los avances en la implementación experimental.

## 3.2 Fibras ópticas de cristal fotónico

A grandes rasgos, el problema que nos interesa estudiar en esta primera etapa es el guiado de la luz a lo largo de unos elementos ópticos bastante interesantes que están revolucionando el mundo de la metrología, las telecomunicaciones, la fotónica, entre otros, y son precisamente las fibras ópticas (en particular, una sub-clase de fibras ópticas, denominadas *fibras de cristal fotónico*, las cuales se explicarán con más detalle más adelante). *El concepto básico detrás del confinamiento de la luz en guías de onda es bastante simple. Un medio con un índice de refracción determinado incrustado en otro medio con un índice de refracción menor actúa como una "trampa" de luz adentro de la cual permanecen confinados los rayos de luz por múltiples reflexiones totales internas en los bordes* (Saleh y Teich, 1991).

Las fibras ópticas, en específico, son guías de onda cuyo perfil transversal tiene geometría circular. Se componen de dos cilindros concéntricos de un material dieléctrico con bajas pérdidas, como el vidrio; de manera coloquial se podrían describir como tuberías flexibles para la luz (Paschotta, 2010). En este caso, el efecto de guiado de la luz se logra a través del *núcleo* de la fibra, el cual tiene un índice de refracción mayor que el del medio que lo rodea, el cual se denomina *revestimiento* o *cladding* (ver figura 9). La reflexión total interna ocurre si el ángulo  $\theta$  del haz externo incidente en la fibra cumple con la condición  $\sin\theta < NA \equiv \sqrt{n_{\text{núcleo}}^2 - n_{\text{rev}}^2}$ , donde  $NA$  es denominada la apertura numérica de la fibra, y  $n_{\text{núcleo}}$  y  $n_{\text{rev}}$  son los índices de refracción del núcleo y el revestimiento, respectivamente.

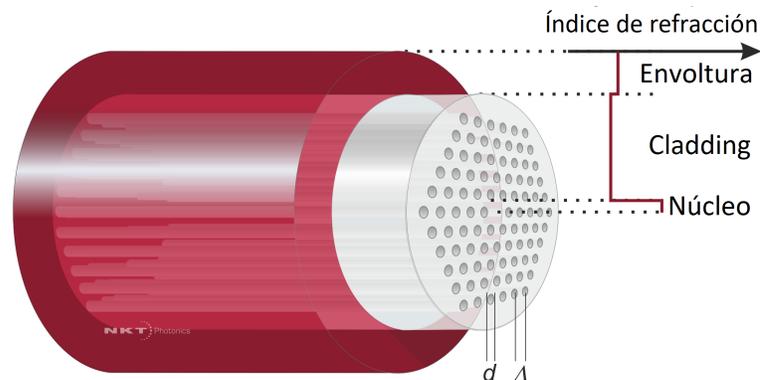
Las fibras ópticas de cristal fotónico (PCF, por sus siglas en inglés) también se



**Figura 9.** Vista longitudinal de una fibra óptica y diagrama del fenómeno de reflexión total interna en el núcleo de la misma.

conocen como *fibras microestructuradas*. Los cristales fotónicos son materiales cuyo índice de refracción tiene una modulación periódica en una escala de longitudes de onda ópticas, es decir, del orden de los micrómetros o nanómetros, lo cual conduce a la obtención de propiedades dispersivas únicas y adaptables, por lo cual se tendrá un alto control de la propagación de la luz a través de este tipo de estructuras (Knight *et al.*, 2002; Knight, 2003). Precisamente, las PCF se basan en estas propiedades inusuales de los cristales fotónicos. Aunque la idea de una fibra de cristal fotónico fue presentada por primera vez por Yeh *et al.* en 1978, el grupo de Philip St. J. Russel fue pionero en la fabricación y experimentación con este tipo de fibras ópticas en la década de 1990 (Knight *et al.*, 1997; Ortigosa-Blanch *et al.*, 2000).

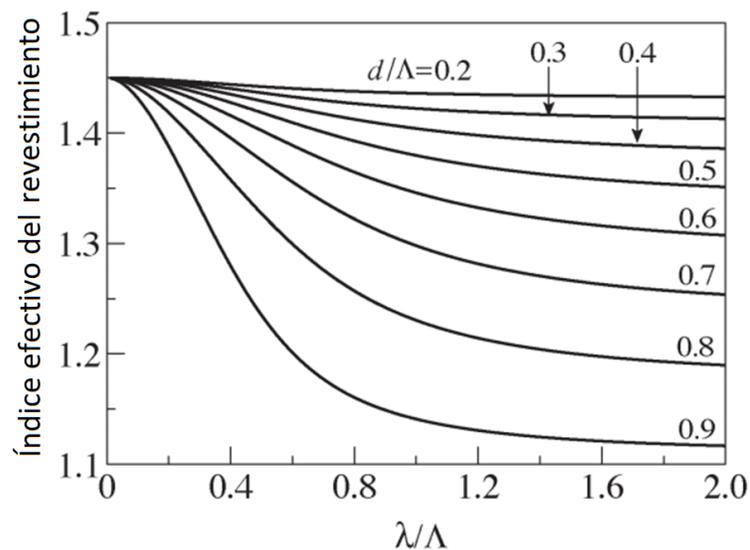
Un tipo de fibras de cristal fotónico muy utilizado consiste de un núcleo sólido de sílice rodeado de un arreglo de agujeros de aire, como la fibra que se muestra en la figura 10, en la cual se muestran algunos parámetros principales de la fibra, como el diámetro de los agujeros " $d$ " y el parámetro de la fibra  $\Lambda$ , conocido como el *pitch*, el



**Figura 10.** Esquema de una fibra óptica de cristal fotónico con núcleo sólido. El índice de refracción de la cubierta se aproxima a un modelo de índice efectivo que depende de los parámetros " $d$ " y  $\Lambda$  de la fibra, y de la longitud de onda de la luz acoplada a la fibra. Imagen recuperada de NKT-Photonics (2020)

cual es una medida de la distancia entre los agujeros de la estructura periódica.

Las propiedades de guiado de luz de este tipo de PCF pueden ser entendidas con un *modelo de índice efectivo*, en el cual la región del núcleo tiene un índice efectivo mayor, similar al núcleo en una fibra óptica convencional, y el índice de refracción del revestimiento se aproxima a un índice efectivo entre el de la sílice y el aire. Esto se debe a que el efecto que tiene el arreglo periódico de agujeros se manifiesta como una disminución del índice de refracción del revestimiento. En este caso, el índice efectivo depende de las razones  $d/\Lambda$  (conocido como la fracción de llenado), y  $\lambda/\Lambda$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz acoplada a la fibra (Agrawal, 2013). En la figura 11 se puede observar un ejemplo de esta dependencia. Es de resaltar que a mayor tamaño de los agujeros y menor distancia entre ellos, se puede lograr un mayor confinamiento de luz en la PCF, puesto que el contraste entre índices de refracción del núcleo y el revestimiento sería mayor, como se puede observar en la tendencia presentada en la figura 11.



**Figura 11.** Curva del índice efectivo del revestimiento de una PCF en función de la razón  $\lambda/\Lambda$  para distintos valores de  $d/\Lambda$ . Imagen recuperada de Saitoh y Koshiba (2005).

Varios autores afirman que *este tipo de estructuras nos permiten controlar la luz adentro de la fibra de formas que antes no eran posibles* (Buczynski, 2004; Russell, 2003), esto se debe a que, por ejemplo, se pueden manipular las siguientes propiedades mediante el diseño:

- Se puede manipular la dispersión de la fibra variando la estructura de agujeros (Knight *et al.*, 2000; Saitoh y Koshiba, 2005).
- Es posible obtener una apertura numérica muy alta, debido al alto contraste de índices de refracción entre el núcleo sólido y el revestimiento con la estructura de agujeros de aire, lo cual conlleva a un mayor confinamiento de la luz (Wadsworth *et al.*, 2004).
- Se pueden lograr áreas modales bastante pequeñas, lo cual conduce a una generación más eficiente de fenómenos ópticos no lineales (Agrawal, 2013).
- El diseño de patrones asimétricos en la estructura de agujeros conduce a una alta birrefringencia<sup>1</sup>, por lo cual se tiene un mayor control de la polarización (Ortigosa-Blanch *et al.*, 2000). Esto es aprovechado en la producción de fibras que mantienen la polarización.

La exploración de la gran variedad de posibles aplicaciones que tienen estas fibras ha atraído un gran interés en la comunidad científica. Algunos ejemplos de las aplicaciones de estos dispositivos son:

- Láseres de fibra óptica y amplificadores (Hansryd *et al.*, 2002; Andersen *et al.*, 2006).
- Comunicaciones en fibra óptica (Knight, 2003).
- Sensores de fibra óptica (Hoo *et al.*, 2003; De *et al.*, 2019).
- Dispositivos no lineales para la compresión de pulsos (Carpeggiani *et al.*, 2020), la generación de supercontinuo (el cual es útil en la técnica de tomografía de coherencia óptica) (Dudley *et al.*, 2006), amplificación paramétrica (Abdul Khudus *et al.*, 2016), entre otros.
- Óptica cuántica, por ejemplo, en la generación de pares de fotones correlacionados (Rarity *et al.*, 2005; Garay-Palmett *et al.*, 2007).

---

<sup>1</sup>La birrefringencia es la propiedad óptica de un material que tiene un índice de refracción que depende de la polarización y de la dirección de propagación de la luz. (Hecht, 2017)

### 3.3 Mezclado de cuatro ondas y amplificación paramétrica

Antes de profundizar en la teoría de la amplificación paramétrica, es importante introducir primero al campo en el que se estudian este tipo de fenómenos: *la óptica no lineal*.

La óptica no lineal, en general, se define como *el estudio de la interacción de luz láser intensa con la materia, o como el estudio de los fenómenos que ocurren como consecuencia de la modificación de las propiedades ópticas de un material por la presencia de luz* (Boyd, 2008), la cuestión es que sólo mediante la luz láser se puede obtener una intensidad lo suficientemente alta como para modificar las propiedades ópticas de algún material.

Los fenómenos no lineales se denominan como tal en el sentido de que ocurren cuando la respuesta de un material a un campo óptico aplicado depende de manera no lineal de la amplitud del campo. En el caso de los materiales dieléctricos, el origen de este tipo de respuesta está relacionado con el movimiento anarmónico de los electrones ligados por la influencia de un campo eléctrico externo aplicado (Butcher y Cotter, 1990). La respuesta de los materiales a campos externos en general se puede describir por medio del *vector de polarización eléctrica*  $\mathbf{P}$ , que es una medida de la densidad de momentos dipolares eléctricos inducidos por el campo externo en el material, y que, en la óptica convencional se suele considerar proporcional a la amplitud del campo eléctrico  $\mathbf{E}$ . Sin embargo, cuando el campo eléctrico es lo suficientemente intenso, ya no se puede considerar que la polarización inducida sea lineal, si no que satisface una relación más general:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \epsilon_0 \chi^{(3)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots, \quad (81)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica en el vacío, y  $\chi^{(i)}$  es la susceptibilidad eléctrica de orden  $i$ . Es de resaltar que esta expansión de Taylor converge solo si los términos de orden creciente disminuyen en magnitud, por lo cual se tendrá que la respuesta de los materiales a los procesos de órdenes más altos tiende a ser cada vez más baja.

Los fenómenos que resultan de la polarización de segundo orden son distintos de

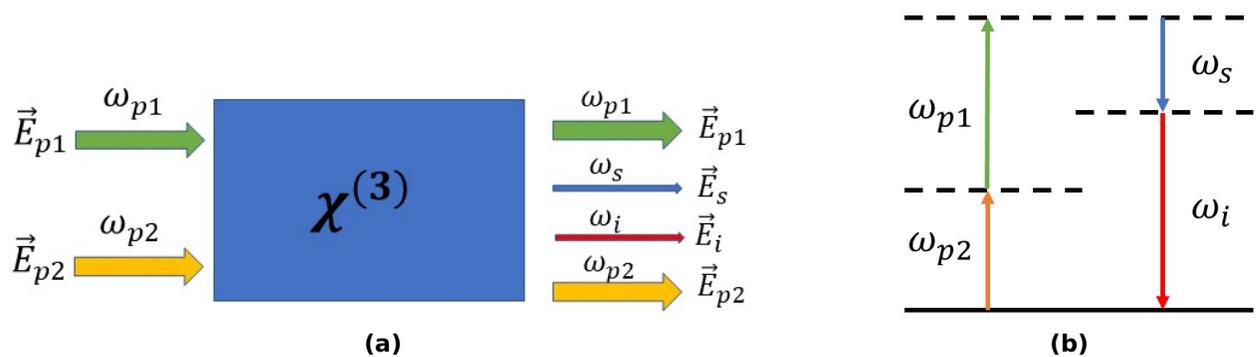
los que resultan de la polarización de tercer orden. Por ejemplo, los procesos ópticos no lineales de segundo orden sólo ocurren en cristales con geometrías definidas, y en particular, no ocurren en materiales centro-simétricos, por lo cual, por ejemplo, usualmente no se observarán este tipo de fenómenos en fibras ópticas, para las cuales sí se observarán efectos derivados de la susceptibilidad de tercer orden, tales como la generación del tercer armónico, la refracción no lineal, entre otros (Boyd, 2008; Agrawal, 2013).

En este trabajo se pondrá un especial énfasis en el fenómeno de *mezclado de cuatro ondas* (FWM, por sus siglas en inglés), el cual es un fenómeno óptico no lineal que se origina debido a la susceptibilidad de tercer orden del material, en el que interactúan cuatro campos denominados campos de bombeo ( $\vec{E}_{p1}$  y  $\vec{E}_{p2}$ ), señal ( $\vec{E}_s$ ) y acompañante ( $\vec{E}_i$ ), con frecuencias  $\omega_{p1}$ ,  $\omega_{p2}$ ,  $\omega_s$  y  $\omega_i$ , respectivamente (Ver figura 12a). En esta interacción paramétrica se cumplen condiciones de conservación de energía y momento, tal que:

$$\omega_{p1} + \omega_{p2} = \omega_s + \omega_i, \quad (82)$$

$$\Delta\vec{k} = \vec{k}(\omega_{p1}) + \vec{k}(\omega_{p2}) - \vec{k}(\omega_s) - \vec{k}(\omega_i) = 0, \quad (83)$$

donde  $\vec{k}(\omega_i)$  es el vector de onda, para el cual se cumple que  $|\vec{k}(\omega_i)| = n(\omega_i) \omega_i/c$ , donde  $n$  es el índice de refracción efectivo del modo a la frecuencia  $\omega_i$  y  $c$  es la velocidad de la luz.



**Figura 12.** (a) Esquema del proceso de mezclado de cuatro ondas espontáneo. (b) Diagrama de energías del proceso de mezclado de cuatro ondas, donde  $\omega_{p1}$  y  $\omega_{p2}$  son las frecuencias de los campos de bombeo,  $\omega_s$  es la frecuencia del campo señal y  $\omega_i$  es la frecuencia del campo acompañante, además se cumple que  $\omega_{p1} + \omega_{p2} = \omega_s + \omega_i$ . La dirección de las flechas simboliza la creación (hacia abajo) o aniquilación (hacia arriba) de un fotón en el modo correspondiente.

La generación del fenómeno de FWM sólo es significativa si se cumplen en simul-

táneo las relaciones 82 y 83, lo que se conoce como la condición de *empatamiento de fases*, lo cual implica una elección específica de las longitudes de onda de los campos de entrada, así como de los parámetros de la fibra. De hecho, el FWM se conoce como un proceso paramétrico precisamente porque involucra la modulación de un parámetro del medio, en este caso, el índice de refracción (Agrawal, 2013).

Particularmente en este trabajo es de interés el proceso degenerado (para el cual  $\omega_{p1} = \omega_{p2}$ , es decir, el FWM es generado con un sólo haz de bombeo), y estimulado, para el cual, considerando el acoplamiento del campo de bombeo y un campo señal de entrada, se producirá la amplificación de la señal y la aparición de un campo acompañante con frecuencia  $\omega_i = 2\omega_p - \omega_s$  (Marhic *et al.*, 2004). El proceso de mezclado de cuatro ondas estimulado también se conoce como *amplificación paramétrica* y es por esto que los dispositivos que funcionan a partir de este fenómeno en fibras ópticas se conocen como *amplificadores paramétricos de fibra óptica* (o FOPAs, por sus siglas en inglés) (Sylvestre *et al.*, 2009; Taghizadeh *et al.*, 2018).

El fenómeno de amplificación paramétrica en fibras se caracteriza por ser rápido y compatible con potencias altas (Hansryd *et al.*, 2002). Asimismo, la generación del campo acompañante puede usarse para producir nuevas longitudes de onda (Wang *et al.*, 2011), lo cual permite generar fuentes nuevas de luz láser en regiones del espectro donde faltan fuentes adecuadas (por ejemplo, las tecnologías láser ultrarrápidas existentes no son fácilmente sintonizables en la región infrarroja, a excepción de algunas líneas láser específicas (Carpeggiani *et al.*, 2020)). Los dispositivos que tienen esta aplicación se conocen como *convertidores de longitud de onda* y tienen un gran potencial en el contexto de las telecomunicaciones. Otra aplicación interesante de la amplificación paramétrica es la conversión de una señal de onda continua en un tren de pulsos con altas tasas de repetición a través de la modulación del bombeo (Hansryd *et al.*, 2002; Torounidis *et al.*, 2005). Los FOPAs también tienen utilidad en áreas relacionadas con las tecnologías cuánticas (Marhic, 2008), procesamiento de señales ópticas (Radic y McKinstrie, 2005), muestreo óptico (Li *et al.*, 2001), entre otros.

### 3.4 Modelo para la propagación de pulsos en una fibra óptica de cristal fotónico

La propagación de luz en fibras ópticas es un problema electromagnético, y por lo tanto el punto de inicio para su análisis son las *ecuaciones de Maxwell*:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (84)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (85)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (86)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (87)$$

donde  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  son los vectores de campo eléctrico y magnético, respectivamente,  $\mathbf{D}$  es el vector de desplazamiento eléctrico y  $\mathbf{B}$  es la densidad de flujo magnético. Estos últimos están relacionados con los dos primeros términos a través de las *relaciones constitutivas* de la siguiente manera:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (88)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (89)$$

donde  $\varepsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío,  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío, y  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{M}$  son la polarización eléctrica inducida y la magnetización inducida, respectivamente. Las relaciones constitutivas dadas por las ecuaciones 88 y 89 describen principalmente la respuesta del material al interactuar con el campo electromagnético aplicado.

El vector de densidad de corriente  $\mathbf{J}$  y la densidad de carga  $\rho$  representan las fuentes de campo eléctrico. En el caso de la propagación de luz en fibras ópticas hay ausencia de estos tipos de fuentes, y por lo tanto  $\mathbf{J} = 0$  y  $\rho = 0$ . Este tipo de medio tampoco es magnético, y por lo tanto  $\mathbf{M} = 0$ .

Calculando el rotacional de la expresión 84 y utilizando la identidad vectorial

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (90)$$

se puede obtener la siguiente ecuación de onda para el campo eléctrico:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (91)$$

La ecuación anterior es la principal herramienta para estudiar la propagación de luz en guías de onda y los procesos de interacción de luz con materia, en general.

Considerando la ecuación de onda y las condiciones particulares de la guía de onda de estudio, es posible encontrar ciertas distribuciones de campos ópticos que se mantienen constantes a lo largo de la propagación, excepto por un cambio en la fase y la potencia, y se denominan *modos de guía de onda* (Paschotta, 2008d). Las fibras ópticas soportan un número finito de modos guiados, los cuales se diferencian entre sí por su distribución espacial, polarización e *índice de refracción efectivo*. El índice de refracción efectivo contiene información sobre la velocidad de fase de la luz en la guía de onda, y no sólo depende de la longitud de onda, si no que también depende del modo propagante, es decir, no es sólo una propiedad del material, si no que depende también del diseño de la guía o la fibra (Saleh y Teich, 1991; Paschotta, 2008b).

### 3.4.1 Consideraciones del modelo

El modelo teórico desarrollado que se presentará fue inspirado por la implementación previa de un experimento para la generación del fenómeno de mezclado de cuatro ondas en una fibra óptica de cristal fotónico comercial, altamente no lineal. Los adelantos en la implementación experimental mencionada se presentarán al final de este capítulo. La metodología utilizada para el desarrollo del modelo teórico está basada en la teoría de Agrawal (2019).

#### a) Sobre el medio no lineal:

La fibra utilizada en el experimento que inspiró este modelo es la NL-PM-750 de NKT-Photonics. En general, se trata de una fibra óptica de sílice pura, con un núcleo de alrededor de  $1.8 \mu m$  de diámetro, que mantiene la polarización, y que tiene dos longitudes de onda de cero dispersión, una cerca a 750 nm y otra cerca a 1260 nm (NKT-Photonics, 2012). Todas estas son características importantes que se tuvieron en

cuenta en el planteamiento del modelo teórico, que se revisarán con mayor detalle en el siguiente capítulo, y que se incluyeron en las consideraciones del modelo relacionadas con el medio no lineal que se presentan a continuación:

- La fibra es monomodal para todas las frecuencias en el rango de trabajo.
- Las pérdidas son despreciables en el rango de longitudes de onda de trabajo (baja atenuación en la fibra) <sup>2</sup>.
- La fibra es birrefringente y mantiene la polarización.

*Nota:* En este caso, la birrefringencia en la fibra es un efecto geométrico y se debe a una anisotropía estructural inducida por una asimetría en el perfil transversal de la fibra (Mondal, 2020; Libori *et al.*, 2001; Suzuki *et al.*, 2001). En particular, dos de los agujeros de aire centrales tienen un diámetro mayor al resto de los agujeros circundantes al núcleo, los cuales están señalados en la figura 13a.

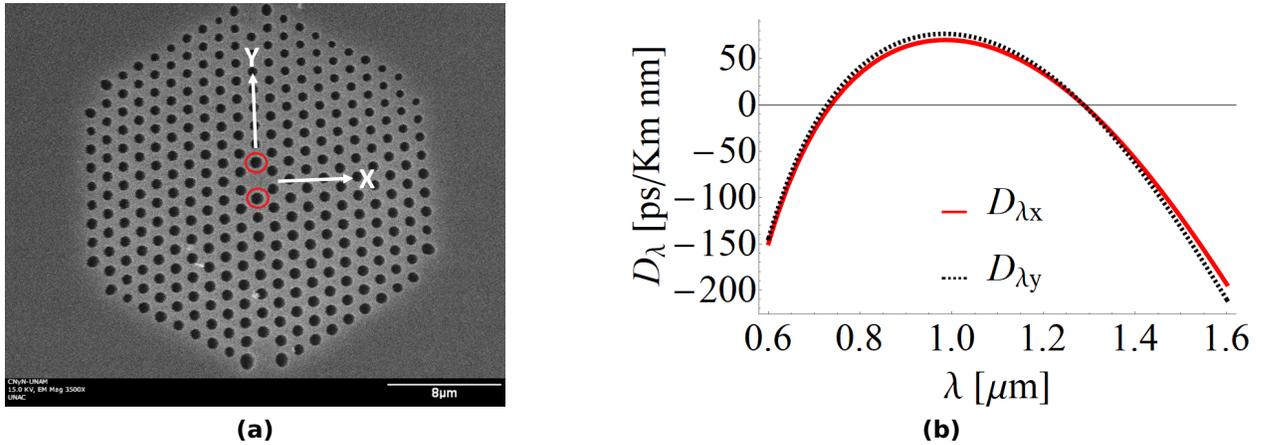
Se pueden definir dos ejes de simetría ortogonales en la sección transversal de la fibra, denominados como los *ejes principales*, a lo largo de los cuales se conserva el estado de polarización lineal de la luz incidente. Estos ejes son llamados *ejes lento y rápido*, considerando la velocidad a la cual viaja la luz con polarización lineal paralela a ellos adentro de la fibra (Agrawal, 2019). En este trabajo se etiquetaron como  $X$  y  $Y$  (ver figura 13a), respectivamente. Los ejes principales ofrecen un sistema natural de coordenadas para descomponer los estados de polarización de los campos ópticos incidentes.

- La dispersión de la fibra es conocida.

*Nota:* Las curvas de los índices de refracción de la fibra a lo largo de cada uno de los ejes principales (etiquetadas como  $n_x(\lambda)$  y  $n_y(\lambda)$ ) fueron caracterizadas en un trabajo previo del grupo de investigación, llevado a cabo por Daniel De la Torre Robles en su tesis doctoral. En ese trabajo, se tomaron mediciones de los espectros de emisión de los campos señal y acompañante como función de diferentes longitudes de onda del campo de bombeo en un experimento de mezclado de cuatro ondas espontáneo utilizando la misma fibra óptica de cristal fotónico con la que se trabajó en esta tesis. Teniendo en cuenta este conjunto de espectros medidos,

---

<sup>2</sup>Esto se consideró debido a que la atenuación de la fibra no excedió los 85 dB/Km en las longitudes de onda de trabajo (NKT-Photonics, 2012), lo cual implica que la transmisión es superior a 98% en ese rango, teniendo en cuenta que la longitud de la fibra utilizada es de aproximadamente un metro.



**Figura 13.** (a) Perfil transversal de la fibra óptica NL-PM-750 de NKT Photonics. Micrografía SEM, tomada de De la Torre Robles (2021a). Los agujeros resaltados tienen un diámetro mayor al resto de agujeros que rodean el núcleo de la fibra, lo cual genera birrefringencia. Las etiquetas X y Y indican los dos ejes de simetría ortogonales en la sección transversal de la fibra. (b) Parámetro de dispersión de la fibra a lo largo de cada uno de los ejes principales. La dispersión de la fibra fue caracterizada por De la Torre Robles (2021a).

se usó un análisis de regresión basado en un algoritmo genético para inferir la dispersión de la fibra (Garay-Palmett *et al.*, 2016; De la Torre Robles, 2021b).

En la figura 13 se puede ver una gráfica del *parámetro de dispersión de la fibra*, definido como

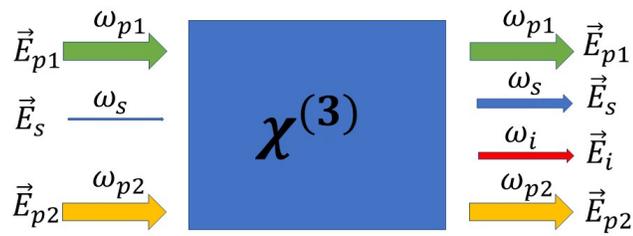
$$D_{\lambda i} = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n_i}{d\lambda^2}, \quad (92)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda,  $c$  es la velocidad de la luz, y  $n_i$  ( $i = x$  o  $y$ ) son los índices de refracción de la fibra a lo largo de cada uno de los ejes principales, inferidos en el trabajo previo del grupo.

## b) Sobre las fuentes:

En primer lugar, es preciso recordar que en el fenómeno de mezclado de cuatro ondas se da la interacción de cuatro campos denominados campos de bombeo ( $\vec{E}_{p_1}$  y  $\vec{E}_{p_2}$ ), señal ( $\vec{E}_s$ ) y acompañante ( $\vec{E}_i$ ) en un medio con características especiales que, en nuestro caso, fueron descritas en la sección anterior y, que considerando el acoplamiento del campo de bombeo y un campo señal de entrada (también conocido como campo semilla), se producirá la amplificación de la señal y la aparición de un campo acompañante. En la figura 14 se muestra esto de manera esquemática.

Es preciso ahora describir algunas características sobre los campos que se consi-



**Figura 14.** Esquema del proceso de mezclado de cuatro ondas estimulado. El acoplamiento inicial de los campos de bombeo  $\vec{E}_{p1}$  y  $\vec{E}_{p2}$  además de un campo semilla  $\vec{E}_s$  genera una amplificación del mismo al propagarse a lo largo del medio no lineal, así como la aparición de un campo acompañante  $\vec{E}_i$ .

deraron en este estudio. En particular, los cuatro campos se pueden diferenciar entre ellos en cuanto a sus amplitudes, a si son campos pulsados o de onda continua, en sus estados de polarización y en sus frecuencias. A continuación se presenta una compilación de estas características de manera general:

- En este modelo se trabajó en el régimen de la aproximación de bombeo inagotable, es decir, se consideraron bombeos intensos (en comparación con los campos semilla y acompañante), y con potencia aproximadamente constante a lo largo de la propagación en la fibra. La amplitud inicial del campo acompañante es cero.
- El bombeo es pulsado, y los pulsos tienen una duración del orden de picosegundos. El campo semilla es de onda continua.
- Se considerará inicialmente que los cuatro campos tienen una polarización arbitraria, sin embargo, más adelante se estudiará un caso particular para el cual tienen polarización lineal paralela a alguno de los ejes principales de la fibra, de manera que la derivación del modelo sea lo más general posible.
- En un principio se considera el caso general para el cual los campos tienen diferentes frecuencias:  $\omega_{p1}$  y  $\omega_{p2}$ , en el caso de los bombeos, y  $\omega_s$  y  $\omega_i$  en el caso de los campos señal y acompañante, respectivamente. Posteriormente se hace énfasis en el caso de FWM con bombeos degenerados en frecuencia, lo cual implica que  $\omega_{p1} = \omega_{p2}$ .

### 3.4.1.1 Polarización no lineal

En este trabajo se consideró un vector de polarización eléctrica de la forma:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_{NL} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^{(3)} : \mathbf{E} \mathbf{E} \mathbf{E}, \quad (93)$$

en concordancia con la relación general descrita en la ecuación 81. Se puede notar que el vector de polarización eléctrica consta de dos partes, correspondientes a las respuestas lineal y no lineal del material. Se restringió el estudio de la no linealidad a los procesos de tercer orden. Es de resaltar que la susceptibilidad no lineal de segundo orden  $\chi^{(2)}$  es nula en materiales con simetría de inversión, como los vidrios de sílice y, por lo tanto, las fibras ópticas de este material normalmente no exhibirán efectos no lineales de segundo orden, dejando la polarización de tercer orden como el término dominante de la respuesta no lineal (Agrawal, 2019).

Los fenómenos asociados con  $\chi^{(3)}$  se pueden subdividir en dos clases:

- No linealidades rápidas, asociadas con la respuesta electrónica del material. La respuesta instantánea de los electrones conduce a no linealidades tipo *Kerr*.
- No linealidades lentas, asociadas con la respuesta nuclear y las vibraciones moleculares. Este tipo de respuestas conducen a no linealidades tipo *Raman*.

La respuesta nuclear es significativamente más lenta que la respuesta electrónica. Para fibras ópticas de sílice, la respuesta Raman ocurre en una escala de 60-70 fs. De acuerdo con Agrawal (2019), si un pulso óptico es mayor que esa escala, se pueden tratar ambas respuestas como instantáneas. En este caso, se consideraron bombeos con pulsos de picosegundos y, por lo tanto, se trabajó afuera de aquel régimen. Así mismo, de acuerdo con Marhic *et al.* (2004), en amplificadores de fibras donde se cumple la condición de empatamiento de fases, la amplificación paramétrica excede la ganancia Raman, de manera que este último se puede ver como una perturbación relativamente menor. Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, únicamente se incluyeron efectos no lineales rápidos o instantáneos en este estudio.

### **Formalismo matemático para el cálculo de $\mathbf{P}_{NL}$ :**

En general, la susceptibilidad no lineal de tercer orden  $\chi_{ijkl}^{(3)}$  es un tensor de cuarto rango, donde *ijkl* se refiere a las componentes cartesianas de los campos, y se puede relacionar directamente con las polarizaciones de los mismos, en cuanto a que

coinciden con el mismo sistema de referencia. En este trabajo se consideran campos polarizados transversalmente a la dirección de propagación  $z$ .

En un medio isotrópico, como el vidrio de sílice, los únicos elementos del tensor  $\chi^{(3)}$  diferentes de cero<sup>3</sup> satisfacen las siguientes relaciones:

$$\chi_{xxxx}^{(3)} = \chi_{yyyy}^{(3)}, \quad (94) \quad \chi_{xyxy}^{(3)} = \chi_{yxxy}^{(3)}, \quad (96)$$

$$\chi_{xxyy}^{(3)} = \chi_{yyxx}^{(3)}, \quad (95) \quad \chi_{xyyx}^{(3)} = \chi_{yxyx}^{(3)}. \quad (97)$$

Además, se tiene que:

$$\chi_{xxxx} = \chi_{xxyy} + \chi_{xyxy} + \chi_{xyyx}. \quad (98)$$

Las magnitudes relativas de estas tres componentes depende de los mecanismos físicos que contribuyen a la  $\chi^{(3)}$ , y en el caso del vidrio de sílice, la contribución principal es de origen electrónico y las tres tienen una magnitud aproximadamente igual (Duguay y Hansen, 1969).

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores, se puede escribir el tensor  $\chi^{(3)}$  para el vidrio de sílice de la siguiente manera:

$$\chi_{ijkl}^{(3)} = \frac{1}{3} \chi_{xxxx}^{(3)} [\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}], \quad (99)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker, definida de tal forma que  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  y cero si  $i \neq j$  (Boyd, 2008; Agrawal, 2019).

También se tiene que la polarización no lineal de tercer orden se define como un producto vectorial de Kronecker (Drummond y Hillery, 2014), de la siguiente manera:

$$P_{NLi}^{(3)} = \varepsilon_0 \left[ \chi^{(3)} : \mathbf{EEE} \right]_i = \varepsilon_0 \sum_{i,j,k,l} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l. \quad (100)$$

Y considerando las relaciones 99 y 100 se puede demostrar que:

$$\mathbf{P}_{NL}^{(3)} = \varepsilon_0 \chi_{xxxx}^{(3)} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}. \quad (101)$$

<sup>3</sup>Considerando coordenadas transversales a la dirección de propagación  $z$

La relación anterior es particularmente importante si se quiere estudiar el fenómeno de mezclado de cuatro ondas en fibras ópticas considerando campos con polarización arbitraria.

En el mezclado de cuatro ondas, el campo eléctrico total se puede expresar como una suma de los cuatro campos interactuantes y en la aproximación de envolvente de variación lenta, es útil separar la parte que varía rápido en los campos de la parte que varía lento, de manera que:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 [\mathbf{E}_j e^{-i\omega_j t} + \mathbf{E}_j^* e^{i\omega_j t}]. \quad (102)$$

Cuando el producto  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}$  está expandido considerando el campo total definido en la ecuación 102, se encuentra que contiene 512 términos. Vale la pena, entonces, simplificar un poco esta expansión, descomponiendo la polarización no lineal de manera similar a como se descompuso el campo y separar los términos de interés de acuerdo con la frecuencia a la que oscila la parte rápida de cada uno de ellos:

$$\mathbf{P}_{NL} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 [\mathbf{P}_{NLj} e^{-i\omega_j t} + \mathbf{P}_{NLj}^* e^{i\omega_j t}]. \quad (103)$$

Ahora, sustituyendo la ecuación 102 en la ecuación 101, y reuniendo los términos que oscilan a frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , se encuentra que la polarización no lineal a las frecuencias de los bombeos es:

$$\mathbf{P}_{NLi}(\omega_i) = \frac{\epsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left[ \overbrace{(\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_i) \mathbf{E}_i^* + 2(\mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{E}_i) \mathbf{E}_i}^{SPM} + \underbrace{2(\mathbf{E}_j \cdot \mathbf{E}_j^*) \mathbf{E}_i + 2(\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j) \mathbf{E}_j^* + 2(\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j^*) \mathbf{E}_j}_{XPM} \right], \quad (104)$$

donde  $i, j = 1$  o  $2$ , con  $i \neq j$ , recordando que se usó la aproximación de bombeos inagotables.

De manera similar, se encuentra que la polarización no lineal a las frecuencias de los campos señal y acompañante está dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{NLk}^{(3)} = \frac{\epsilon_0}{2} \chi_{xxxx}^{(3)} & \left[ \underbrace{(\mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{E}_k + (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_k) \mathbf{E}_1^* + (\mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_k) \mathbf{E}_1}_{XPM} \right. \\
& + \underbrace{(\mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{E}_2) \mathbf{E}_k + (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_k) \mathbf{E}_2^* + (\mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{E}_k) \mathbf{E}_2}_{XPM} \\
& \left. + \underbrace{(\mathbf{E}_l^* \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{E}_2 e^{-i\Delta\omega t} + (\mathbf{E}_l^* \cdot \mathbf{E}_2) \mathbf{E}_1 e^{-i\Delta\omega t} + (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) \mathbf{E}_l^* e^{-i\Delta\omega t}}_{FWM} \right], \tag{105}
\end{aligned}$$

donde  $k, l = 3$  o  $4$ ,  $k \neq l$ , y  $\Delta\omega = \omega_3 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_2$ .

La interacción de las cuatro ondas consideradas conduce a la generación de tres efectos no lineales instantáneos, a los cuales se les pueden asociar distintos términos de las polarizaciones no lineales definidas en las ecuaciones 104 y 105, los cuales están etiquetados como *SPM*, *XPM* y *FWM*, por sus siglas en inglés, y corresponden con los fenómenos de *auto-modulación de fases*, *modulación de fases cruzadas* y *mezclado de cuatro ondas*, respectivamente.

Es de resaltar que en medios Kerr<sup>4</sup> la presencia de luz intensa modifica el índice de refracción del material de acuerdo con la relación:

$$n = n_0 + n_2 I, \tag{106}$$

donde  $n_0$  es el índice de refracción lineal,  $I$  es la intensidad óptica asociada con el campo propagante, y  $n_2$  es el índice de refracción no lineal. Ya que un cambio en el índice de refracción implica un cambio en la constante de propagación<sup>5</sup> y, de esta manera, un cambio en la fase debido a la propagación, entonces la presencia de un campo intenso en un medio Kerr modifica su propia fase (dando lugar a *SPM*) y la fase de otros campos que se estén propagando en el mismo medio (dando lugar a *XPM*) (Marhic, 2008).

Dado que la generación de los fenómenos de *SPM* y *XPM* depende de la intensidad de los campos que los inducen y, dado que usualmente se usan bombeos intensos en experimentos de mezclado de cuatro ondas estimulado, no se pueden despreciar los términos asociados a estos. Sin embargo, en este estudio sólo se incluyeron los efectos

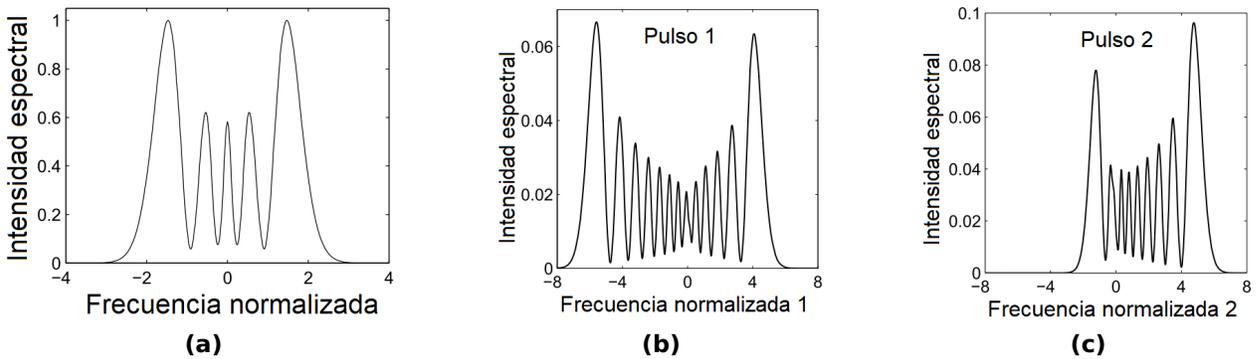
<sup>4</sup>Medios cuya no linealidad se origina de la susceptibilidad no lineal de tercer orden  $\chi^{(3)}$ .

<sup>5</sup>Recordando que la constante de propagación  $k(\omega)$  está relacionada con el índice de refracción por medio de la relación de dispersión  $k(\omega) = n(\omega) \omega/c$ , donde  $\omega$  es una variable de frecuencia y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío.

de *SPM* y *XPM* inducidos por los campos de bombeo, mientras que los inducidos por los campos señal y acompañante se despreciaron por sus potencias relativamente bajas.

Tanto *SPM* como *XPM* inducen cambios espectrales en los campos. Generalmente se manifiestan como un ensanchamiento acompañado de una estructura oscilatoria a lo largo del espectro. En el primer caso, el espectro adquiere una estructura oscilatoria simétrica, mientras que en el segundo caso, adquiere una estructura asimétrica, de manera similar al caso representado en la figura 15, recuperada de Agrawal (2019).

*SPM* y *XPM* también pueden modificar el estado de polarización de los campos al propagarse en medios Kerr si se producen cambios de fase diferentes para cada componente de polarización, generando un fenómeno conocido como *rotación no lineal de la polarización* (Hofer *et al.*, 1992; Lin y Agrawal, 2004a).



**Figura 15.** (a) Espectro de un pulso exhibiendo el ensanchamiento simétrico característico del fenómeno de automodulación de fases (*SPM*). (b) y (c) Espectros de dos pulsos exhibiendo un ensanchamiento espectral asimétrico inducido por el fenómeno de modulación de fases cruzadas (*XPM*). Recuperados de Agrawal (2019).

### 3.4.2 Ecuaciones acopladas de las amplitudes de los campos

Los cuatro campos definidos en la ecuación 102 se propagan a lo largo de la fibra de acuerdo con la ecuación de onda definida en la ecuación 91. Para resolver esta ecuación se hace uso del método de separación de variables, suponiendo campos eléctricos de la forma:

$$\mathbf{E}_j(x, y, z, t) = f_j(x, y) \mathbf{A}_j(z, t) e^{i(\beta_{0j}z - \omega_{0j}t)}, \quad (107)$$

donde  $f_j(x, y)$  representa la distribución del campo en el plano transversal a la dirección de propagación  $z$  (también se conoce como distribución modal),  $\mathbf{A}_j(z, t)$  es un vector de Jones de dos dimensiones que representa la envolvente de variación lenta de cada componente del campo eléctrico en el plano  $x - y$ , y  $\beta_{0j}$  es la constante de propagación a la frecuencia central de cada campo. En esta factorización se tuvieron en cuenta algunas consideraciones resumidas en la sección 3.4.1, se asumió que la componente longitudinal de los campos es despreciable y que los efectos no lineales no afectan de manera significativa la distribución de los modos transversales, de manera similar a Lin y Agrawal (2004b).

Es conveniente expresar la ecuación de onda (ec. 91) en el dominio de Fourier considerando el campo total definido en la ec. 102 y el vector de polarización definido en la ec. 93:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \left[ \nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}_j(\mathbf{r}, \omega_j - \omega_{0j}) + \frac{\omega_j^2}{c^2} \{1 + \chi_{ij}^{(1)}(\omega_j - \omega_{0j})\} \tilde{\mathbf{E}}_j(\mathbf{r}, \omega_j - \omega_{0j}) + \frac{\omega_j^2}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{P}_{NLj}(\mathbf{r}, \omega_j - \omega_{0j}) \right] = 0, \quad (108)$$

donde  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  y  $\tilde{\mathbf{E}}_j(\mathbf{r}, \omega - \omega_{0j})$  es la transformada de Fourier del campo definido en la ec. 107, dada por:

$$\tilde{\mathbf{E}}_j(\mathbf{r}, \omega_j - \omega_{0j}) = f_j(x, y) \tilde{\mathbf{A}}_j(z, \omega_j - \omega_{0j}) e^{i\beta_{0j}z}, \quad (109)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{A}}_j(z, \omega_j - \omega_{0j}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(z, t) e^{i(\omega_j - \omega_{0j})t} dt. \quad (110)$$

Sustituyendo la ec. 109 en la ec. 108, y agrupando los términos semejantes, se pueden encontrar dos conjuntos de ecuaciones:

$$\nabla_{\mathcal{T}}^2 f_j(x, y) + \left[ \frac{\omega_j^2}{c^2} n^2(\omega_j - \omega_{0j}) - \beta_j^2(\omega_j) \right] f_j(x, y) = 0, \quad (111)$$

$$2i\beta_{0j} \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}_j(z, \omega_j - \omega_{0j})}{\partial z} + \{\beta_j^2(\omega_j) - \beta_{0j}^2\} \tilde{\mathbf{A}}_j(z, \omega_j - \omega_{0j}) = -\frac{\omega_j^2}{\varepsilon_0 c^2} \frac{e^{-i\beta_{0j}z}}{f_j(x, y)} \mathbf{P}_{NLj}(\mathbf{r}, \omega_j - \omega_{0j}), \quad (112)$$

donde  $\nabla_T^2$  es el operador Laplaciano transversal, definido como  $\nabla_T^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ . Se tendrán entonces una ecuación para las distribuciones transversales (ec. 111) y una ecuación de evolución (ec. 112) para cada uno de los cuatro campos interactuantes.

En la ecuación 111 se utilizó la relación  $n^2(\omega) = \{1 + \chi^{(1)}(\omega)\}$ , considerando que el material de la fibra óptica no es magnético, y para obtener la ecuación 112 se utilizó la aproximación de envolvente de variación lenta<sup>6</sup>.

La ecuación 111 es la ecuación de Helmholtz, también conocida como la ecuación de eigenvalores, y permite determinar la distribución espacial de los modos  $f_j(x, y)$ , conocidos como los *modos transversales propagantes*, así como la constante de propagación de los mismos  $\beta_j(\omega)$ ; y a partir de la ecuación 112 se obtendrán las cuatro ecuaciones acopladas de las amplitudes de los campos interactuantes en el proceso de mezclado de cuatro ondas.

Teniendo en cuenta que el ancho espectral de los campos satisface la condición  $\Delta\omega_j \ll \omega_{0j}$  es posible simplificar un poco la ecuación de evolución. Por un lado, utilizamos la aproximación  $\beta_j^2(\omega_j) - \beta_{0j}^2 \approx 2\beta_{0j}(\beta_j(\omega_j) - \beta_{0j})$ , y, por otro lado, podemos hacer una aproximación a primer orden de la variable de frecuencia considerando que  $\omega_j = \omega_{0j} \left(1 + \frac{\omega_j - \omega_{0j}}{\omega_{0j}}\right)$ , de tal manera que la ec. 112 se puede reescribir como:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}_j(z, \omega_j - \omega_{0j})}{\partial z} - i\{\beta_j(\omega_j) - \beta_{0j}\} \tilde{\mathbf{A}}_j(z, \omega_j - \omega_{0j}) = i \frac{1}{2n(\omega_{0j})} \frac{\omega_{0j}}{\varepsilon_0 c} \frac{e^{-i\beta_{0j}z}}{f_j(x, y)} \mathbf{P}_{NLj}(\mathbf{r}, \omega_j - \omega_{0j}), \quad (113)$$

recordando que  $\beta_{0j} = n(\omega_{0j})\omega_{0j}/c$ .

Es útil expandir  $\beta_j(\omega_j)$  en una serie de Taylor alrededor de la frecuencia central  $\omega_{0j}$ :

$$\beta_j(\omega_j) = \beta_{0j} + \beta_{1j}(\omega_j - \omega_{0j}) + \frac{1}{2}\beta_{2j}(\omega_j - \omega_{0j})^2 + \frac{1}{6}\beta_{3j}(\omega_j - \omega_{0j})^3 + \dots, \quad (114)$$

donde

$$\beta_{mj} = \left. \frac{d^m \beta_j}{d\omega_j^m} \right|_{\omega_j = \omega_{0j}} \quad (m = 1, 2, 3\dots), \quad (115)$$

<sup>6</sup>Lo cual simplifica el análisis, ya que implica que  $\frac{\partial^2 A_j(z, \omega)}{\partial z^2} \approx 0$

recordando que el subíndice  $j$  indica el campo correspondiente ( $j=1,2,3$  o  $4$ ). En adelante, los términos  $\beta_{mj}$  serán denominados *términos de dispersión*.

En este punto podemos regresar al dominio del tiempo mediante la transformada inversa de Fourier (TIF). En términos más sencillos, es posible calcular la TIF a los términos de dispersión reemplazando  $\omega_j - \omega_{0j}$  por el operador diferencial  $i\partial/\partial t$ , obteniendo la siguiente expresión para la evolución de las amplitudes  $\mathbf{A}(z, t)$ :

$$\frac{\partial \mathbf{A}_j(z, t)}{\partial z} + \beta_{1j} \frac{\partial \mathbf{A}_j(z, t)}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_{2j} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_j(z, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{6} \beta_{3j} \frac{\partial^3 \mathbf{A}_j(z, t)}{\partial t^3} + \dots = i \frac{1}{2n(\omega_{0j})} \frac{\omega_{0j}}{\epsilon_0 c} \frac{e^{-i\beta_{0j}z}}{f_j(x, y)} \mathbf{P}_{NLj}(\mathbf{r}, t), \quad (116)$$

Sólo resta por definir dos parámetros adicionales y normalizar la amplitud de los campos para llegar a la forma final de las ecuaciones acopladas. Para esto, se definen el *coeficiente del índice no lineal*  $\bar{n}_2$  y el *coeficiente Kerr*  $n_2$ , mejor conocido como el índice de refracción no lineal, como:

$$\bar{n}_2 = \frac{3}{8n} \text{Re}\{\chi_{xxxx}^{(3)}\}, \quad (117) \quad n_2 = \frac{2\bar{n}_2}{\epsilon_0 n c}, \quad (118)$$

respectivamente.

Es conveniente normalizar la amplitud  $A_j(z, t)$  de tal manera que  $|A_j(z, t)|^2$  tenga unidades de potencia. Debido a que el promedio temporal de la potencia está dado por:

$$P_j(z, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 n c |A_j(z, t)|^2 \iint |f_j(x, y)|^2 dx dy, \quad (119)$$

normalizamos la amplitud  $A_j(z, t)$  por medio de la siguiente sustitución:

$$A_j(z, t) \rightarrow \frac{A_j(z, t)}{\left[ \frac{1}{2} \epsilon_0 n c \iint |f_j(x, y)|^2 dx dy \right]^{1/2}}. \quad (120)$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones 104, 105, 107, 117, 118 y 120 en la ecuación 116, e integrando sobre el plano transversal, obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales acopladas para los campos de bombeo ( $j = 1, 2$ ), señal ( $j = 3$ ) y acompañante ( $j = 4$ ):

$$\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial z} + \hat{D}_1[\mathbf{A}_1] = i \frac{n_2 \omega_{01}}{3c} \left[ f_{11}(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1) \mathbf{A}_1^* + 2f_{11}(\mathbf{A}_1^* \cdot \mathbf{A}_1) \mathbf{A}_1 + 2f_{12}(\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_2^*) \mathbf{A}_1 + \right. \\ \left. 2f_{12}(\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1) \mathbf{A}_2^* + 2f_{12}(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2^*) \mathbf{A}_2 \right], \quad (121)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial z} + \hat{D}_2[\mathbf{A}_2] = i \frac{n_2 \omega_{02}}{3c} \left[ f_{22}(\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_2^* + 2f_{22}(\mathbf{A}_2^* \cdot \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_2 + 2f_{21}(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1^*) \mathbf{A}_2 + \right. \\ \left. 2f_{21}(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_1^* + 2f_{21}(\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1^*) \mathbf{A}_1 \right], \quad (122)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_3}{\partial z} + \hat{D}_3[\mathbf{A}_3] = i \frac{2n_2 \omega_{03}}{3c} \left[ f_{31}(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1^*) \mathbf{A}_3 + f_{31}(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_3) \mathbf{A}_1^* + f_{31}(\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_1^*) \mathbf{A}_1 + \right. \\ \left. f_{32}(\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_2^*) \mathbf{A}_3 + f_{32}(\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_3) \mathbf{A}_2^* + f_{32}(\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_2^*) \mathbf{A}_2 + \right. \\ \left. f_{3412} \left\{ (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_4^*) \mathbf{A}_2 + (\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_4^*) \mathbf{A}_1 + (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_4^* \right\} e^{i(\Delta\beta z - \Delta\omega t)} \right], \quad (123)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_4}{\partial z} + \hat{D}_4[\mathbf{A}_4] = i \frac{2n_2 \omega_{04}}{3c} \left[ f_{41}(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1^*) \mathbf{A}_4 + f_{41}(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_4) \mathbf{A}_1^* + f_{41}(\mathbf{A}_4 \cdot \mathbf{A}_1^*) \mathbf{A}_1 + \right. \\ \left. f_{42}(\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_2^*) \mathbf{A}_4 + f_{42}(\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_4) \mathbf{A}_2^* + f_{42}(\mathbf{A}_4 \cdot \mathbf{A}_2^*) \mathbf{A}_2 + \right. \\ \left. f_{4312} \left\{ (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_3^*) \mathbf{A}_2 + (\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_3^*) \mathbf{A}_1 + (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_3^* \right\} e^{i(\Delta\beta z - \Delta\omega t)} \right], \quad (124)$$

donde  $f_{ij}$  y  $f_{ijkl}$  son integrales de traslape de las distribuciones de los modos transversales, definidas como:

$$f_{ij} = \frac{\langle |f_i|^2 |f_j|^2 \rangle}{\langle |f_i|^2 \rangle \langle |f_j|^2 \rangle}, \quad (125) \quad f_{ijkl} = \frac{\langle f_i^* f_j^* f_k f_l \rangle}{[\langle |f_i|^2 \rangle \langle |f_j|^2 \rangle \langle |f_k|^2 \rangle \langle |f_l|^2 \rangle]^{1/2}}, \quad (126)$$

donde la notación  $\langle \rangle$  denota integración sobre las coordenadas transversales  $x$  y  $y$ , recordando que las distribuciones  $f_j$  están definidas en el plano transversal  $x - y$ .

Las cuatro ecuaciones resultantes también son conocidas como *ecuaciones no lineales de Schrödinger acopladas*.

También se tiene que:

$$\Delta\omega = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4, \quad (127) \quad \Delta\beta = \beta_{01} + \beta_{02} - \beta_{03} - \beta_{04}. \quad (128)$$

Es de resaltar que los términos dependientes de  $\Delta\beta$  y  $\Delta\omega$  en las ecuaciones 123 y 124 corresponden con los términos de FWM, y a su vez, las condiciones 127 y 128 definen la condición de empatamiento de fases, lo cual implica que la eficiencia en la generación del fenómeno de FWM necesariamente dependerá de que se cumpla esta condición.

$\hat{D}_j$  lo nombramos como *el operador de dispersión*, y se define como

$$\hat{D}_j = \beta_{1j} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_{2j} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{6} \beta_{3j} \frac{\partial^3}{\partial t^3} + \dots \quad (129)$$

En el caso de que se necesite incluir un término de pérdidas en el cálculo, será posible hacerlo mediante el operador  $\hat{D}_j$ , simplemente restando el coeficiente  $-\alpha$  a los términos de dispersión, correspondiente al coeficiente de atenuación del material.

Un punto a resaltar en el procedimiento que se ha seguido en esta sección para determinar las ecuaciones acopladas de las amplitudes de los campos es que naturalmente se ha llegado a la definición de un parámetro importante para establecer la eficiencia de la generación de los fenómenos ópticos no lineales de tercer orden, y es conocido como el *parámetro no lineal*  $\gamma$ . De manera general:

$$\gamma(\omega) = \frac{n_2 \omega}{c A_{eff}}, \quad (130)$$

donde  $A_{eff}$  es el área efectiva de los modos. Para los fenómenos de SPM y XPM se tiene que  $A_{eff} = 1/f_{ij}$  y para FWM,  $A_{eff} = 1/f_{ijkl}$ , de modo que:

$$\gamma_{ij} = \frac{n_2 \omega_0 f_{ij}}{c}, \quad (131)$$

$$\gamma_{ijkl} = \frac{n_2 \omega_0 f_{ijkl}}{c}. \quad (132)$$

El parámetro  $\gamma$  tiene unidades de  $W^{-1}/m$ .

### 3.4.3 Caso particular: Campos con polarización lineal paralela a los ejes principales de la fibra

En general, las amplitudes  $\mathbf{A}_j(z, t)$  se pueden representar por vectores de Jones de la forma  $\mathbf{A}_j(z, t) = A_j(z, t) \hat{\mathbf{e}}_j$ , donde  $A_j(z, t)$  es un escalar complejo con unidades de raíz cuadrada de potencia ( $\sqrt{W}$ ), y  $\hat{\mathbf{e}}_j$  es un vector unitario. A su vez,  $\hat{\mathbf{e}}_j$  se puede describir en términos de los vectores unitarios  $\hat{\mathbf{e}}_x = [1 \ 0]^t$  y  $\hat{\mathbf{e}}_y = [0 \ 1]^t$ , que representan estados de polarización lineal paralelos a los ejes principales de la fibra, X y Y, respectivamente. De manera que:

$$\mathbf{A}_j(z, t) = A_{jx}(z, t) \hat{\mathbf{e}}_x + A_{jy}(z, t) \hat{\mathbf{e}}_y. \quad (133)$$

Si bien se puede dar el caso para el cual los cuatro campos interactuantes en el FWM tengan polarizaciones arbitrarias, por simplicidad, en esta sección nos concentraremos en el caso para el cual los campos tienen polarización lineal paralela a los ejes principales de la fibra. Para esto, es necesario recordar las simetrías del tensor de susceptibilidad no lineal de tercer orden  $\chi_{ijkl}^{(3)}$  para la sílice, definidas en las relaciones 94, 95, 96, 97 y 98, las cuales limitan las combinaciones de polarización que se pueden utilizar. En esta sección nos concentraremos en particular en el caso XYYX, sin embargo, el análisis se puede adaptar para cualquier otro caso.

La elección del caso XYYX, implica la siguiente combinación de polarizaciones:

$$\mathbf{A}_1 = A_1 \hat{e}_x, \quad (134) \quad \mathbf{A}_2 = A_2 \hat{e}_y, \quad (135) \quad \mathbf{A}_3 = A_3 \hat{e}_y, \quad (136) \quad \mathbf{A}_4 = A_4 \hat{e}_x. \quad (137)$$

Ahora, teniendo en cuenta que  $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$ , donde  $i, j = x$  o  $y$ , que  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker, y sustituyendo las ecuaciones 134, 135, 136 y 137 en las ecuaciones 121, 122, 123 y 124, respectivamente, se tendrán las siguientes ecuaciones acopladas de las amplitudes de los campos:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \hat{D}_1[A_1] = i \left( \gamma_{11}|A_1|^2 + \frac{2}{3}\gamma_{12}|A_2|^2 \right) A_1, \quad (138)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \hat{D}_2[A_2] = i \left( \frac{2}{3}\gamma_{21}|A_1|^2 + \gamma_{22}|A_2|^2 \right) A_2, \quad (139)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} + \hat{D}_3[A_3] = i \left( \frac{2}{3}\gamma_{31}|A_1|^2 + 2\gamma_{32}|A_2|^2 \right) A_3 + i \left( \frac{2}{3}\gamma_{3412}A_1A_2 \right) A_4^* e^{i(\Delta\beta z - \Delta\omega t)}, \quad (140)$$

$$\frac{\partial A_4}{\partial z} + \hat{D}_4[A_4] = i \left( 2\gamma_{41}|A_1|^2 + \frac{2}{3}\gamma_{42}|A_2|^2 \right) A_4 + i \left( \frac{2}{3}\gamma_{3412}A_1A_2 \right) A_3^* e^{i(\Delta\beta z - \Delta\omega t)}. \quad (141)$$

Vale la pena resaltar que este caso de estudio final corresponde con las condiciones que se tuvieron en cuenta en la implementación experimental previa que inspiró el desarrollo de este modelo teórico. También es necesario precisar que, en particular, se estudia el caso de FWM con bombeo degenerado, lo cual implica que se tendrá un solo campo bombeo, pero en este caso, consideramos que tiene una polarización

arbitraria, de tal manera que:

$$\mathbf{A}_p(z, t) = A_{px}(z, t)\hat{e}_x + A_{py}(z, t)\hat{e}_y, \quad (142)$$

donde  $A_{px}(z, t)$  y  $A_{py}(z, t)$  son las componentes en  $x$  y  $y$ , respectivamente, de la amplitud total  $\mathbf{A}_p(z, t)$  del campo de bombeo. Por simplicidad, se considerará que la amplitud  $A_1(z, t)$  describe la evolución de la componente  $A_{px}(z, t)$  y la amplitud  $A_2(z, t)$  describe la evolución de la componente  $A_{py}(z, t)$ .

### 3.4.3.1 Normalización de las ecuaciones acopladas de amplitud y regímenes de propagación.

En el estudio de la propagación de pulsos ópticos en fibras ópticas es preciso considerar efectos como las pérdidas, la dispersión y los no lineales. Dependiendo del ancho inicial y la potencia pico de los pulsos incidentes, dominarán ya sean los efectos dispersivos o los no lineales. En nuestro caso, por un lado, se encontró que las pérdidas son despreciables en el rango de frecuencias de trabajo, por lo cual no se incluyeron. La dispersión, por otro lado, juega un papel crítico en la propagación de los pulsos, puesto que diferentes componentes espectrales asociadas con los pulsos viajan a diferentes velocidades y esto puede limitar la interacción entre los campos (Agrawal, 2019).

Para conocer el régimen dominante en la propagación se puede hacer un ejercicio bastante interesante, que consiste en normalizar las ecuaciones acopladas de las amplitudes de los campos y ajustar el sistema de referencia temporal al marco propio de uno de los campos de bombeo, el cual coincide con el marco que se mueve a la misma velocidad que el máximo de su envolvente. Este marco de referencia también se conoce como el *marco retardado*.

Inicialmente, recordamos que las amplitudes están normalizadas de tal forma que  $|A_j(z, t)|^2$  tiene unidades de potencia, y que  $A_j(z, t)$  corresponde al término de variación lenta en el campo. De esta manera, si consideramos campos de bombeo gaussianos, podemos definir a sus amplitudes iniciales como:

$$A_j(0, t) = \sqrt{P_{pj}} e^{-t^2/2T_{0j}^2}, \quad j = 1, 2. \quad (143)$$

donde  $P_{pj}$  es la potencia pico, y  $T_{0j}$  es el ancho medio a la altura  $1/e$  en la curva de intensidad. Se define  $T_0 \equiv T_{01}$  como el ancho del bombeo <sup>7</sup>.

En primer lugar, introducimos una variable adimensional para el tiempo:

$$\tau = \frac{T}{T_0} = \frac{t - \beta_{11}z}{T_0}, \quad (144)$$

lo cual nos permite ajustar las ecuaciones de las amplitudes al marco de referencia del bombeo 1. También normalizamos la coordenada  $z$  con respecto a la longitud de la fibra  $L$  introduciendo otra variable adimensional:

$$\xi = \frac{z}{L}. \quad (145)$$

La dispersión se acotará hasta el tercer orden. Utilizando la regla de la cadena, se encuentra que:

$$\frac{\partial A_j(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{T_0} \frac{\partial A_j(\xi, \tau)}{\partial \tau}, \quad (146) \quad \frac{\partial^3 A_j(z, t)}{\partial t^3} = \frac{1}{T_0^3} \frac{\partial^3 A_j(\xi, \tau)}{\partial \tau^3}, \quad (148)$$

$$\frac{\partial^2 A_j(z, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{T_0^2} \frac{\partial^2 A_j(\xi, \tau)}{\partial \tau^2}, \quad (147) \quad \frac{\partial A_j(z, t)}{\partial z} = \frac{1}{L} \frac{\partial A_j(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \frac{\beta_{11}}{T_0} \frac{\partial A_j(\xi, \tau)}{\partial \tau}. \quad (149)$$

Si reemplazamos desde la ecuación 143 hasta la ecuación 145 en las ecuaciones acopladas de amplitud que van desde la ecuación 138 hasta la ecuación 141, se obtienen las siguientes ecuaciones de amplitud en el marco retardado:

$$\frac{\partial A_1(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \hat{D}_{\tau 1}[A_1(\xi, \tau)] = iL \left( \gamma_{11}|A_1(\xi, \tau)|^2 + \frac{2}{3}\gamma_{12}|A_2(\xi, \tau)|^2 \right) A_1(\xi, \tau), \quad (150)$$

$$\frac{\partial A_2(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \hat{D}_{\tau 2}[A_2(\xi, \tau)] = iL \left( \frac{2}{3}\gamma_{21}|A_1(\xi, \tau)|^2 + \gamma_{22}|A_2(\xi, \tau)|^2 \right) A_2(\xi, \tau), \quad (151)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_3(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \hat{D}_{\tau 3}[A_3(\xi, \tau)] = iL \left( \frac{2}{3}\gamma_{31}|A_1(\xi, \tau)|^2 + 2\gamma_{32}|A_2(\xi, \tau)|^2 \right) A_3(\xi, \tau) + \\ iL \left( \frac{2}{3}\gamma_{3412}A_1(\xi, \tau)A_2(\xi, \tau) \right) A_4^*(\xi, \tau)e^{i(\Delta\beta z - \Delta\omega t)}, \end{aligned} \quad (152)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_4(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \hat{D}_{\tau 4}[A_4(\xi, \tau)] = iL \left( 2\gamma_{41}|A_1(\xi, \tau)|^2 + \frac{2}{3}\gamma_{42}|A_2(\xi, \tau)|^2 \right) A_4(\xi, \tau) + \\ iL \left( \frac{2}{3}\gamma_{4312}A_1(\xi, \tau)A_2(\xi, \tau) \right) A_3^*(\xi, \tau)e^{i(\Delta\beta z - \Delta\omega t)}, \end{aligned} \quad (153)$$

<sup>7</sup>Para FWM con bombeos degenerados, también se tendrá que  $T_0 \equiv T_{01} = T_{02}$ .

donde  $\hat{D}_{\tau j}$  es el operador de dispersión normalizado<sup>8</sup> en el marco retardado, definido como

$$\hat{D}_{\tau 1} = \frac{i L}{2 L_{d1}} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{1 L}{6 L_{tod1}} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} \quad (154)$$

$$\hat{D}_{\tau j} = \frac{L}{L_{wj}} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{i L}{2 L_{dj}} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{1 L}{6 L_{todj}} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} \quad (j = 2, 3, 4.) \quad (155)$$

Adicionalmente, se introdujeron tres escalas de longitud conocidas como *la longitud de walk-off*  $L_{wj}$ , *la longitud de dispersión*  $L_{dj}$ , y *la longitud de dispersión de tercer orden*  $L_{todj}$ , definidas de la siguiente manera:

$$L_{wj} = \frac{T_0}{\beta_{1j} - \beta_{11}}, \quad (156)$$

$$L_{dj} = \frac{T_0^2}{\beta_{2j}}, \quad (157)$$

$$L_{todj} = \frac{T_0^3}{\beta_{3j}}. \quad (158)$$

Los términos  $\beta_{mj}$  son los parámetros de dispersión definidos en la ecuación 115, evaluados a la frecuencia central de cada campo ( $\omega_{0j}$ ,  $j = 1, 2, 3$  o  $4$ ). Dependiendo de las magnitudes relativas de  $L_{wj}$ ,  $L_{dj}$ ,  $L_{todj}$  y la longitud de la fibra  $L$ , los pulsos se propagarán de maneras muy diferentes a lo largo de la fibra óptica. Vale la pena analizar con un poco más de detalle qué significan al menos estos primeros tres términos.

Por un lado, recordamos que el término  $\beta_{1j}$  está definido como  $\beta_{1j} = d\beta_j/d\omega$  evaluado en  $\omega_{0j}$ .  $\beta_j$  es la constante de propagación. En este punto, es necesario introducir *la velocidad de grupo*  $v_g$ , que es la velocidad con la que se propagan los puntos de máxima amplitud de los pulsos, y que se define como  $v_g = d\omega/d\beta$ , lo cual implica que  $\beta_{1j} = 1/v_{gj}(\omega_{0j})$  y que en últimas, *la longitud de walk-off*  $L_{wj}$  depende de la diferencia de los inversos de las velocidades de grupo de los campos 2, 3 y 4 con respecto al campo 1. Precisamente  $L_{wj}$  es *una medida de la distancia sobre la que dos pulsos inicialmente superpuestos se separan entre sí como resultado de sus diferentes velocidades*. Ese desplazamiento ("*walk-off*") juega un papel importante en la generación de efectos ópticos no lineales, puesto que la interacción no lineal entre los diferentes campos para de ocurrir cuando el pulso que se mueve más rápido atraviesa completamente al pulso más lento (Agrawal, 2019).

<sup>8</sup>Normalizado en las dimensiones temporal (con respecto al ancho temporal de los pulsos de bombeo) y espacial (en la dirección de propagación, con respecto a la longitud de la fibra.)

Por otro lado, la  $\beta_{2j}$  también se conoce como el parámetro de *la dispersión de la velocidad de grupo* (GVD, por sus siglas en inglés), y es responsable del ensanchamiento o compresión temporal de los pulsos al propagarse por la fibra. Otro punto es que, si la dispersión de tercer orden es dominante, se puede generar una distorsión en los pulsos de tal manera que desarrollan una estructura oscilatoria cerca de uno de sus bordes y se vuelven asimétricos.

Finalmente, para analizar el régimen de propagación no lineal, vale la pena definir un *operador no lineal*, de manera similar a como se definió el operador de dispersión en la sección 3.4.2, lo cual se puede visualizar más fácil si reescribimos el conjunto de ecuaciones de evolución (ec. 150 a ec. 153) de forma matricial:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \xi} = \hat{D}_\tau \vec{A} + \hat{N} \vec{A}, \quad (159)$$

donde  $\vec{A}$  es el vector de las amplitudes de los campos,  $\hat{D}_\tau$  es el operador matricial de dispersión, y  $\hat{N}$  es el operador matricial no lineal.  $\vec{A}$  y  $\hat{D}_\tau$  están dados por:

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4^* \end{bmatrix}, \quad (160) \quad \hat{D}_\tau = \begin{bmatrix} -\hat{D}_{\tau 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{D}_{\tau 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{D}_{\tau 3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\hat{D}_{\tau 4}^* \end{bmatrix}. \quad (161)$$

Los elementos  $\hat{D}_{\tau j}$  están definidos en las ecuaciones 154 y 155, y  $\hat{N}$  está compuesto de dos partes:

$$\hat{N} = \hat{N}_{PM} + \hat{N}_{FWM}. \quad (162)$$

La primera parte,  $\hat{N}_{PM}$ , corresponde con los términos de modulación de fases (tanto auto-modulación de fases o SPM, como modulación de fases cruzadas o XPM), y la segunda parte,  $\hat{N}_{FWM}$ , corresponde con los términos de mezclado de cuatro ondas o FWM. De modo que:

$$\hat{N}_{PM} = i L \begin{bmatrix} \gamma_{11}|A_1|^2 + \frac{2}{3}\gamma_{12}|A_2|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\gamma_{21}|A_1|^2 + \gamma_{22}|A_2|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\gamma_{31}|A_1|^2 + 2\gamma_{32}|A_2|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma_{41}|A_1|^2 + \frac{2}{3}\gamma_{42}|A_2|^2 \end{bmatrix}, \quad (163)$$

$$\hat{N}_{FWM} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i L \left( \frac{2}{3}\gamma_{3412} A_1 A_2 \right) e^{i(\Delta\beta z - \Delta\omega t)} \\ 0 & 0 & -i L \left( \frac{2}{3}\gamma_{4312} A_1^* A_2^* \right) e^{-i(\Delta\beta z - \Delta\omega t)} & 0 \end{bmatrix}, \quad (164)$$

Ahora, con fines de tener una mejor visualización, reescribimos las amplitudes de los bombeos en términos de amplitudes normalizadas  $U$ :

$$A_j(z, t) = \sqrt{P_{pj}} U_j(z, t), \quad j = 1, 2. \quad (165)$$

Reemplazando la ecuación 165 en las matrices 163 y 164, se tiene que:

$$\hat{N}_{PM} = i \begin{bmatrix} \frac{L}{L_{NL11}}|U_1|^2 + \frac{2}{3}\frac{L}{L_{NL12}}|U_2|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\frac{L}{L_{NL21}}|U_1|^2 + \frac{L}{L_{NL22}}|U_2|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\frac{L}{L_{NL31}}|U_1|^2 + 2\frac{L}{L_{NL32}}|U_2|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\frac{L}{L_{NL41}}|U_1|^2 + \frac{2}{3}\frac{L}{L_{NL42}}|U_2|^2 \end{bmatrix}, \quad (166)$$

$$\hat{N}_{FWM} = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\frac{L}{L_{NL3412}} U_1 U_2 e^{i(\Delta\beta z - \Delta\omega t)} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}\frac{L}{L_{NL4312}} U_1^* U_2^* e^{-i(\Delta\beta z - \Delta\omega t)} & 0 \end{bmatrix}, \quad (167)$$

donde

$$L_{NLij} = \frac{1}{\gamma_{ij} P_{pj}}, \quad (168)$$

$$L_{NLijkl} = \frac{1}{\gamma_{ijkl} \sqrt{P_{pk} P_{pl}}}. \quad (169)$$

$L_{NL}$  se denomina *la longitud no lineal* y define la escala de longitud a partir de la cual dominan los efectos no lineales a lo largo de la fibra óptica. Es decir, sólo se tendrá una generación eficiente de los diferentes efectos ópticos no lineales si la longitud de la fibra  $L$  es mayor que  $L_{NL}$  ( $L \gg L_{NL}$ ).

De las matrices definidas en las ecuaciones 163 y 164 se resalta que los procesos co-polarizados tienen más peso relativo que los procesos de interacción de campos con polarizaciones cruzadas. Si analizamos por ejemplo el término de modulación de fases cruzadas del campo 3  $\left(\frac{2}{3} \frac{L}{L_{NL31}} |U_1|^2 + 2 \frac{L}{L_{NL32}} |U_2|^2\right)$  y recordando que se había definido una polarización  $X$  para el campo 1,  $Y$  para el campo 2, y  $Y$  para el campo 3, podemos observar que la XPM inducida por el campo 2 tiene un peso relativo mayor.

## 3.5 Métodos numéricos

### 3.5.1 Solución de los modos transversales por medio de diferencias finitas.

En la sección 3.4.2 se introdujo la ecuación de Helmholtz (ecuación 111) que define las distribuciones transversales de los campos que se propagan en la fibra óptica, y cuya solución no es trivial, puesto que depende de la geometría de la misma. Entre los diferentes tipos de guías de onda ópticas sólo unas pocas estructuras simples, tales como las guías de onda planas (tipo *slab*) y las fibras ópticas de índice escalonado, tienen solución analítica (Snyder y Love, 1983; Saleh y Teich, 1991; Yariv *et al.*, 2007). Para estructuras más complejas es necesario usar métodos numéricos para encontrar una solución. Recordamos que estas soluciones de las distribuciones del campo eléctrico se denominan *modos*.

Algunos de los métodos numéricos existentes incluyen los solucionadores de modos propios por medio de diferencias finitas (Schweig y Bridges, 1984; Zhu y Brown,

2002), solucionadores de elementos finitos (Obayya *et al.*, 2000; Selleri *et al.*, 2001), entre otros (Saad, 1985; Chiang, 1994; DeWolf y Gordon, 2017). En este trabajo se utilizó el simulador comercial MODE de la compañía de software Lumerical Solutions ©. MODE es un simulador especializado en el diseño de dispositivos fotónicos. Una de sus funcionalidades está enfocada en el análisis modal, utilizando un método conocido como *solución de modos propios por medio de diferencias finitas* (FDE, por sus siglas en inglés). El método implementado en MODE está basado en el trabajo de Zhu y Brown (2002).

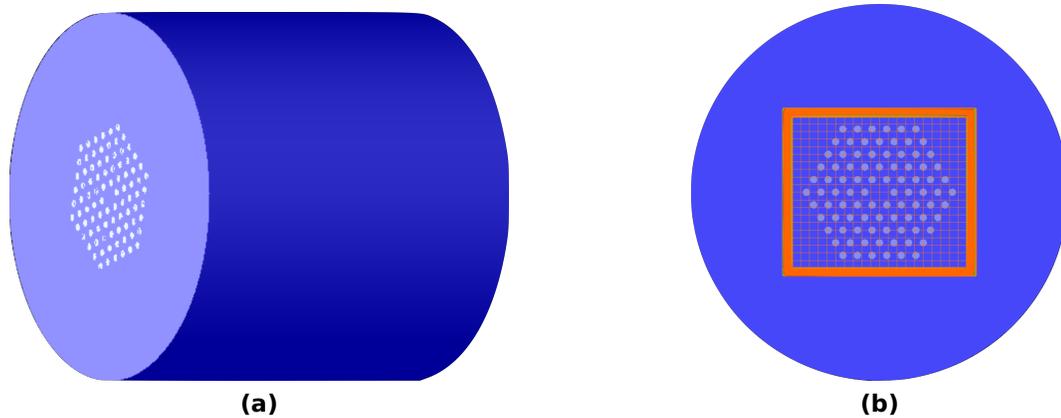
El método FDE soluciona las ecuaciones vectoriales de Maxwell a una frecuencia específica en un esquema de discretización de diferencias finitas. En este esquema se representan las funciones  $f(x, y)$  por sus valores  $f_{nm} \approx f(n\Delta x, m\Delta y)$  en puntos discretos  $(n, m)$  de la malla separados por una distancia  $(\Delta x, \Delta y)$ , y sus derivadas por diferencias en la malla (por ejemplo,  $df/dx \approx (f_{n+1,m} - f_{n-1,m})/2\Delta x$ ). Este solucionador usa una malla rectangular de dos dimensiones para discretizar la sección transversal de la guía de onda, y dado que requiere de la división de esta en subregiones muy pequeñas, es adecuado para el modelamiento de medios no homogéneos y con condiciones de frontera complicadas (Lumerical, 2020a).

El software usa una interfaz de diseño 3D asistido por ordenador, la cual permite especificar las propiedades del material para cada región de la sección transversal de la guía de onda, y la longitud de onda de interés. En la figura 16a se puede ver un ejemplo del diseño final de una fibra óptica microestructurada en MODE, y en la figura 16b se puede ver un ejemplo de una malla de evaluación definida sobre el diseño de la fibra microestructurada que se mencionó previamente como ejemplo. Las cantidades fundamentales de la simulación (propiedades del material, geometría de la guía de onda, campos eléctrico y magnético) son calculados en cada punto de la malla.

En este punto es conveniente recordar que la ecuación 111 también es conocida como la *ecuación de eigen-valores* o *valores propios*. A continuación se va a presentar el por qué. En primer lugar, reescribimos la ecuación 111 de la siguiente manera:

$$\nabla_T^2 f_j(x, y) = -\kappa^2(\omega_j) f_j(x, y), \quad (170)$$

donde  $\nabla_T^2$  es el operador Laplaciano transversal,  $\kappa^2(\omega_j) = \frac{\omega_j^2}{c^2} n^2(\omega_j) - \beta_j^2(\omega_j)$ ,



**Figura 16.** (a) Diseño 3D de una fibra óptica microestructurada en el software MODE. (b) Ejemplo de una malla de simulación definida alrededor de la estructura de agujeros de una fibra microestructurada.

$n(\omega)$  es el índice de refracción y  $\beta_j$  es la constante de propagación del modo.

En la ecuación anterior, se puede notar que al lado izquierdo de la igualdad se realiza una operación a una función  $f_j(x, y)$ , y se tiene que si  $f_j(x, y)$  es realmente un modo electromagnético permitido, el resultado será una constante multiplicada por la función original  $f_j(x, y)$ . Esta situación surge a menudo en la física-matemática, y se conoce como un *problema de eigen-valores* (Joannopoulos *et al.*, 2008). Si el resultado de una operación sobre una función es la función misma, multiplicada por una constante, entonces la función se denomina una *eigen-función* o *eigen-vector* de ese operador, y la constante multiplicativa se llama el *eigen-valor*<sup>9</sup>.

En el método FDE precisamente se formulan las ecuaciones de Maxwell como un problema matricial de eigen-valores y se resuelven utilizando propiedades del álgebra lineal para encontrar los eigen-vectores, que en este caso corresponden con las distribuciones espaciales de los modos (es por esto que se denominan modos propios), y los eigen-valores, con los cuales se pueden calcular las constantes de propagación para cada uno de ellos.

### 3.5.2 Algoritmo de Fourier por paso dividido

La propagación de pulsos ópticos en fibras ópticas no lineales se modela mediante la ecuación no lineal de Schrödinger (ENLS), la cual fue introducida en este trabajo a

<sup>9</sup>*Eigen-función* viene de la palabra *Eigenfunktion* que significa *función propia o característica*, y *eigen-valor* viene del alemán *Eigenwert*, que significa el valor propio o característico.

partir de la ecuación 116, denominándola como la ecuación de evolución de las amplitudes de los campos eléctricos en la fibra óptica. Las soluciones exactas o analíticas de esta ecuación no lineal en derivadas parciales usualmente están asociadas con algunos casos específicos y en general simples (Todorov, 2018; Agrawal, 2019). Dentro de las soluciones de la ENLS se resalta, por ejemplo, la generación de un tipo de ondas especiales conocidas como *solitones ópticos*, los cuales surgen como resultado de la interacción entre los efectos dispersivos y los no lineales en la fibra óptica. Este tipo de paquetes de onda se pueden propagar por largas distancias sin distorsionarse, por lo cual se suelen calificar como soluciones *fascinantes e importantes* de la ENLS, con aplicaciones en el área de las telecomunicaciones.

Por otro lado, en este trabajo es de interés la solución de un *sistema de ENLS acopladas*, definidas en las ecuaciones 121 a 124. La cuestión es que, si en general es difícil resolver analíticamente una ecuación del tipo ENLS, en la práctica, resolver un sistema de ecuaciones acopladas de esta clase supondrá un desafío mayor, por lo cual comúnmente se usa un enfoque numérico para su análisis. No obstante, es importante mencionar que en el caso para el cual se trabaja con campos monocromáticos o cuasi-monocromáticos sí se podrán encontrar soluciones analíticas aproximadas, tales como las que se presentan en el capítulo 10 del libro de Agrawal (2019).

Un método que se ha usado extensivamente para resolver los problemas de propagación de pulsos en fibra ópticas no lineales es el método de Fourier por paso dividido, también conocido como el método split-step o SSFM, por sus siglas en inglés (Li *et al.*, 2014; Taha y Xu, 2005; Zhang y Wang, 2004; Ismail y Taha, 2001) . Para entender la filosofía detrás del método SSFM, es útil reescribir la ecuación no lineal de Schrödinger de esta manera:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = (\hat{D} + \hat{N})A, \quad (171)$$

donde  $\hat{D}$  es el operador diferencial de dispersión, y  $\hat{N}$  es el operador no lineal, en el que se incluyen los términos relacionados con los efectos no lineales presentes en la propagación (Agrawal, 2019).

Es de notar que precisamente la ecuación 159 es una generalización de esta expresión, lo cual permite resolver el sistema de ecuaciones acopladas como una extensión

al caso vectorial de la ENLS. En nuestro caso, los operadores de dispersión y no lineal están definidos de la ecuación 161 a 164.

En general, la dispersión y la no linealidad ocurren de manera simultánea, sin embargo, el método SSFM opera con una solución aproximada, asumiendo que cuando el pulso óptico se propaga a través de una pequeña distancia, los efectos lineales y no lineales actúan independientemente. Matemáticamente, esto se podría describir así:

$$A(z + h, T) \approx \exp(h\hat{D}) \exp(h\hat{N}) A(z, T). \quad (172)$$

Es de notar que una solución formal de la ecuación 171 tiene la forma:

$$A(z + h, T) = \exp[h(\hat{D} + \hat{N})] A(z, T), \quad (173)$$

para  $\hat{D}$  y  $\hat{N}$  independientes de  $z$ . Comparando con la fórmula de Baker-Hausdorff:

$$\exp(\hat{a})\exp(\hat{b}) = \exp\left(\hat{a} + \hat{b} + \frac{1}{2}[\hat{a}, \hat{b}] + \frac{1}{12}[\hat{a} - \hat{b}, [\hat{a}, \hat{b}]] + \dots\right), \quad (174)$$

donde  $[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}$ , se puede observar que si  $\hat{a} = h\hat{D}$  y  $\hat{b} = h\hat{N}$ , se tendrá que el término de error dominante del método SSFM es resultado del conmutador  $\frac{1}{2}h^2[\hat{D}, \hat{N}]$ , dado que los operadores de dispersión y no lineal no conmutan (Agrawal, 2019). En específico en el contexto de las ecuaciones acopladas de amplitud, se tiene que ambos son operadores matriciales, entonces por regla general no conmutan entre sí.

La motivación de calcular los efectos dispersivos y no lineales de manera separada radica en que el efecto de la dispersión sobre la propagación se puede calcular más fácil y rápidamente en el dominio de la frecuencia por medio del algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT), mientras que conviene estudiar el efecto de la no linealidad en el dominio del tiempo. Recordemos que el operador  $\hat{D}$  está definido en función de derivadas del tiempo de distintos órdenes y que el efecto de calcular su transformada de Fourier se puede ver en términos más sencillos como un reemplazo del operador  $\partial/\partial T$  por el término  $-i\omega$ , es decir, se pasa del cálculo de derivadas en el dominio del tiempo a multiplicaciones en el dominio de las frecuencias.

En este trabajo se implementó una variación de este método, que se conoce como *el algoritmo de Fourier de paso dividido simetrizado*, el cual mejora la precisión de

los resultados y se diferencia con el algoritmo tradicional simplemente en la manera en la que se aplican los operadores a lo largo de la fibra. En este caso, el efecto de la dispersión se incluye en el medio del segmento en lugar de en la frontera con el segmento siguiente (Agrawal, 2019), y en consecuencia la propagación se calcula del siguiente modo:

$$A(z + h, T) \approx \exp\left(\frac{h}{2}\hat{N}\right) \exp(h\hat{D}) \exp\left(\frac{h}{2}\hat{N}\right) A(z, T), \quad (175)$$

y la aplicación de este esquema sobre múltiples pasos sucesivos resultará en la siguiente expresión:

$$A(L, T) \approx e^{-\frac{1}{2}h\hat{N}} \left( \prod_{m=1}^M e^{h\hat{N}} e^{h\hat{D}} \right) e^{\frac{1}{2}h\hat{N}} A(0, T), \quad (176)$$

donde  $L = Mh$  es la longitud total de la fibra.

Así pues, se asume que la fibra está dividida en un número grande de segmentos, cada uno con una longitud  $h$ , luego, la propagación se lleva a cabo en cinco pasos para cada segmento:

1. La no linealidad actúa sola en el dominio del tiempo en una distancia  $h/2$ .

$$A'(z + h/2, T) = \exp\left(\frac{h}{2}\hat{N}\right) A(z, T). \quad (177)$$

2. Se calcula la transformada de Fourier del campo resultante en el paso 1, de manera que pasamos al dominio de las frecuencias.

$$A'(z + h/2, \omega) = \mathcal{F} \left[ \exp\left(\frac{h}{2}\hat{N}\right) A(z, T) \right]. \quad (178)$$

3. La dispersión actúa sobre el campo resultante en el paso 2 en el dominio de las frecuencias.

$$A''(z + h, \omega) = \exp(h\hat{D}(\omega)) \mathcal{F} \left[ \exp\left(\frac{h}{2}\hat{N}\right) A(z, T) \right]. \quad (179)$$

4. Se calcula la transformada inversa de Fourier del campo resultante en el paso 3,

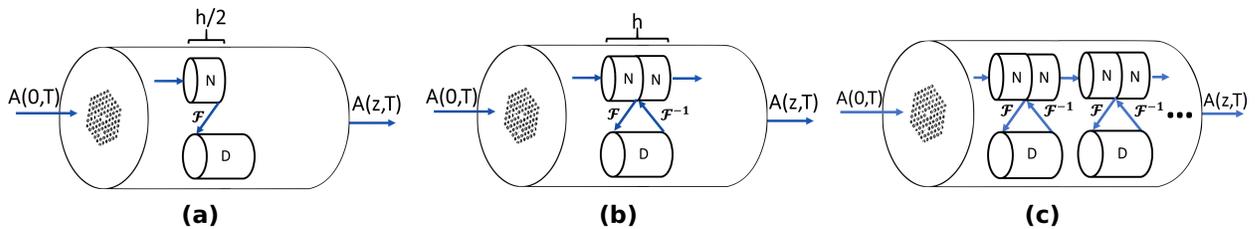
de manera que se regresa al dominio del tiempo.

$$A''(z+h, T) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \exp(h\hat{D}(\omega)) \mathcal{F} \left[ \exp\left(\frac{h}{2}\hat{N}\right) A(z, T) \right] \right]. \quad (180)$$

5. La no linealidad actúa sola nuevamente en el dominio del tiempo en una distancia  $h/2$  restante para ese segmento.

$$A(z+h, T) = \exp\left(\frac{h}{2}\hat{N}\right) \mathcal{F}^{-1} \left[ \exp(h\hat{D}(\omega)) \mathcal{F} \left[ \exp\left(\frac{h}{2}\hat{N}\right) A(z, T) \right] \right]. \quad (181)$$

Una vez se realiza este último paso, se reinicia el ciclo y se hace este mismo procedimiento para cada segmento de la fibra hasta que se llega al final de la longitud de propagación (de Negreiros Júnior *et al.*, 2018). En la figura 17 se representa este procedimiento de manera esquemática. Los pasos 1,2 y 3 corresponden con el proceso presentado en la subfigura 17a y los pasos 4 y 5 corresponden con la subfigura 17b. La subfigura 17c muestra un ejemplo de la repetición del ciclo para diferentes segmentos consecutivos.



**Figura 17.** Esquema del algoritmo de Fourier por paso dividido simetrizado. (a) y (b) representan el procedimiento básico para el cálculo de la propagación de un campo en un segmento de la fibra. (c) representa un ejemplo de la repetición del cálculo para los segmentos consecutivos.

### 3.6 Enfoque mecánico-cuántico de la amplificación paramétrica en una fibra óptica de cristal fotónico

Una de las aplicaciones más interesantes de la mecánica cuántica experimental es la *ingeniería de estados cuánticos*, un campo que estudia técnicas de preparación, manipulación y caracterización de estados cuánticos asociados con un sistema físico particular (Blatt *et al.*, 2013). En el contexto de la óptica cuántica, los métodos teóricos y experimentales más simples para producir estados cuánticos fotónicos de alta calidad están basados en diversos procesos de la *óptica no lineal* (McCusker y Kwiat, 2009;

Dell'Anno *et al.*, 2006; Caspani *et al.*, 2017). Por ejemplo, fuentes de fotones individuales anunciados han sido generadas mediante los procesos de *conversión paramétrica descendente* (U'Ren *et al.*, 2005) y *mezclado de cuatro ondas* (Fan y Migdall, 2007), ambos procesos espontáneos y no degenerados<sup>10</sup>. En estos procesos, idealmente, los fotones son emitidos por pares en dos distintos modos (señal y acompañante), los cuales pueden ser divididos en diferentes caminos o canales. La detección de un fotón en un canal anuncia la existencia del fotón acompañante, o en otras palabras, colapsa el estado del otro canal al de un estado de fotón individual (Furusawa, 2015). En el laboratorio LINOc se tiene experiencia en el análisis y la generación de este tipo de fuentes (Garay-Palmett *et al.*, 2016; Domínguez-Serna y Garay-Palmett, 2021).

Por otro lado, en este trabajo en particular nos interesa estudiar los estados generados mediante el proceso de mezclado de cuatro ondas *estimulado* y no degenerado en emisión, en una fibra óptica de cristal fotónico. Este proceso también es conocido como *amplificación paramétrica no degenerada*. Recordemos que en este fenómeno, considerando el acoplamiento de un campo láser intenso, denominado campo de bombeo, y un campo señal de entrada en la fibra óptica altamente no lineal, se producirá la amplificación de la señal y la aparición del campo acompañante. Precisamente el campo acompañante es el que se propone caracterizar mediante tomografía homodina. Dado que en este proyecto se consideran estados coherentes como campos de bombeo y señal, nos preguntamos si el campo acompañante heredará la estadística de los campos de entrada, o dicho de otro modo, nos preguntamos qué tipo de estado cuántico describe esta señal generada.

Resulta que la amplificación paramétrica es un fenómeno muy utilizado para la generación de una variedad de estados cuánticos de luz, dentro de los cuales se destacan los estados comprimidos (o *squeezed*) (Lvovsky, 2015), los gatos de Schrödinger (Neergaard-Nielsen *et al.*, 2006; Ourjoumtsev *et al.*, 2006), los estados entrelazados<sup>11</sup>(Leonhardt, 2010), los estados coherentes con fotones añadidos (Zavatta *et al.*, 2004), etc. Si bien todos estos estados se preparan mediante protocolos diferentes, la producción de cada uno tiene como base la amplificación paramétrica en medios no lineales y se diferencian entre sí, además, por su estadística, por cómo se distribuyen

<sup>10</sup>Espontáneos: Sin presencia de un campo semilla. No degenerados: Esto quiere decir que los fotones generados señal y acompañante tienen diferente frecuencia.

<sup>11</sup>También se conocen como *estados de vacío comprimido de dos modos* o estados *Einstein-Podolski-Rosen*.

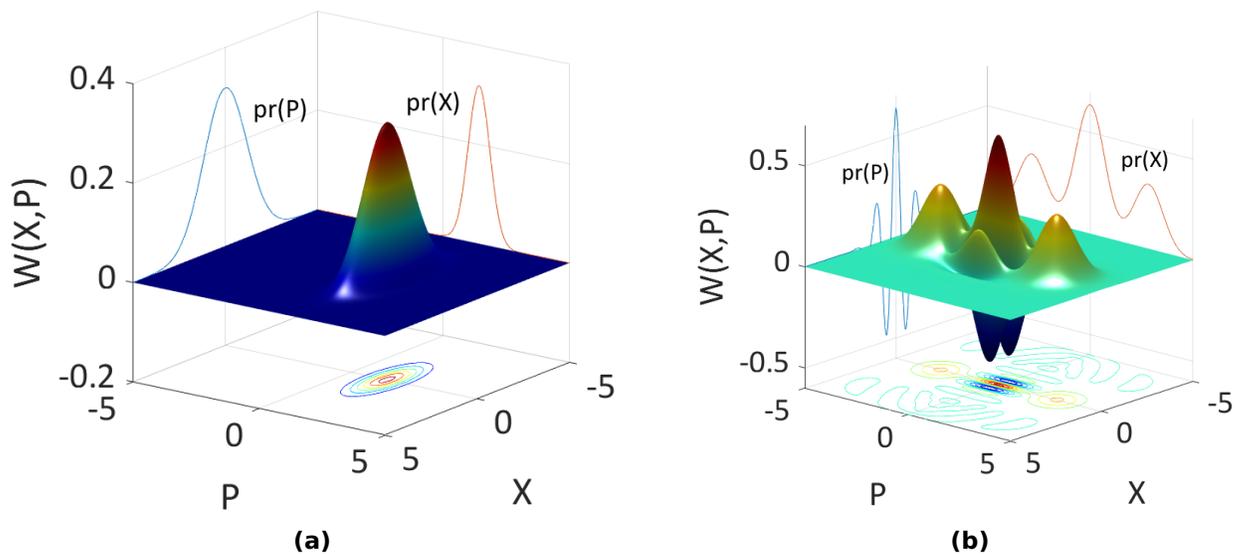
en el espacio de fase cuántico, entre otras propiedades. No nos detendremos con los detalles de cada uno de estos estados, sin embargo, es necesario tener en cuenta estos antecedentes para hacer el análisis teórico del proceso de interés en este proyecto. En la figura 18 se muestra un ejemplo de las representaciones en el espacio de fase de un estado comprimido y de un estado gato de Schrödinger.

El punto de partida para analizar la dinámica del proceso de interés es la determinación del Hamiltoniano de interacción, que es el operador que corresponde con la energía total del sistema. De manera simplificada, el Hamiltoniano que describe el mezclado de cuatro ondas tiene la siguiente forma:

$$\hat{\mathcal{H}}_{int} \propto 2i\gamma\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_i^\dagger + h.c., \quad (182)$$

donde  $\gamma$  es el parámetro no lineal,  $\hat{a}_1$  y  $\hat{a}_2$  corresponden con las amplitudes de los campos de bombeo,  $\hat{a}_s^\dagger$  y  $\hat{a}_i^\dagger$  corresponden con las amplitudes de los campos señal y acompañante, respectivamente, y  $h.c.$  es el término conjugado hermitiano. Si se asume un bombeo lo suficientemente intenso y coherente, se pueden reemplazar los términos  $\hat{a}_1$  y  $\hat{a}_2$  por sus amplitudes clásicas, de manera que:

$$\hat{\mathcal{H}}_{int} = i\kappa\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_i^\dagger + h.c., \quad (183)$$



**Figura 18.** (a) Función de Wigner de un estado comprimido o *squeezed*. (b) Función de Wigner de un estado *gato de Schrödinger*.

donde  $\kappa \propto 2\gamma\alpha_1\alpha_2$ . Los procesos paramétricos descritos por Hamiltonianos cuadráticos como el anterior en general están asociados con la generación de estados comprimidos de un modo, si el proceso es degenerado, y de dos modos, si el proceso no es degenerado.

El *squeezing* se puede entender como una desamplificación de los campos señal y acompañante para ciertos valores de fase relativa entre ellos (Agrawal, 2008). En el caso de los estados comprimidos de un modo, este efecto se evidencia en la reducción de la *incertidumbre en las cuadraturas del campo* para ciertos valores de fase, mientras que en el estado de dos modos, este efecto se evidencia en la reducción de la *incertidumbre en la suma y diferencia de las cuadraturas de los dos modos* (Leonhardt, 2010). Es importante tener en cuenta que el *squeezing* de dos modos no implica la generación de *squeezing* en cada modo de manera individual (Lvovsky, 2015).

Ahora bien, en este proyecto nos interesa precisamente reconstruir uno sólo de los modos generados, precisamente, el del campo acompañante que no fue sembrado. Al respecto, Leonhardt (2010) menciona que si nos concentramos en uno sólo de los modos, la amplificación paramétrica es equivalente a la amplificación lineal, donde el otro modo se promedia como ruido. Con todo y esto, ¿qué estado cuántico le corresponde entonces al modo de interés?

Con el fin de responder este interrogante, se llevó a cabo el estudio teórico que se va a presentar en la siguiente sección, pero antes, es apropiado revisar de manera rápida la dinámica simplificada de los campos señal y acompañante que resulta de la evolución considerando el Hamiltoniano 183, la cual está determinada por la ecuación de Heisenberg:

$$\frac{d\hat{a}_{s,i}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{a}_{s,i}, \hat{\mathcal{H}}_{int}] = \frac{\kappa}{\hbar} \hat{a}_{i,s}^\dagger, \quad (184)$$

donde los corchetes indican la operación de conmutación  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$  y  $\hbar$  es la constante de Planck reducida. Las soluciones de esta ecuación son:

$$\hat{a}_s(t) = \hat{a}_s(0)\cosh(\zeta) + \hat{a}_i^\dagger(0)\sinh(\zeta), \quad (185)$$

$$\hat{a}_i(t) = \hat{a}_i(0)\cosh(\zeta) + \hat{a}_s^\dagger(0)\sinh(\zeta), \quad (186)$$

con  $\zeta = \kappa t/\hbar$ . Se puede observar que hay un acoplamiento entre los modos y que, de manera individual, cada uno tiene forma de estado coherente<sup>12</sup> junto con un factor de amplificación; de aquí la hipótesis de que por medio de este proceso se pueden obtener estados coherentes.

A continuación se presenta una derivación del estado cuántico del modo no semillado más completa teniendo en cuenta, además, que los bombeos son pulsados.

### **1) Derivación del estado obtenido mediante mezclado de cuatro ondas estimulado no degenerado en emisión en una fibra de cristal fotónico para el modo no semillado: enfoque inverso en el cuadro de Heisenberg.**

Se estudió la derivación del estado cuántico del modo no semillado producido en este proceso, basado en la evolución de estados asintóticos en términos de un formalismo de Heisenberg inverso, de manera similar al tratamiento de Yang y colaboradores (Yang *et al.*, 2008). En esta sección se presenta el modelo desarrollado.

#### **Hamiltoniano que describe la interacción no lineal:**

En un medio no lineal de tercer orden  $\chi^{(3)}$  guiado, el Hamiltoniano relacionado con la interacción no lineal está dado por la integral de volumen:

$$\hat{H} = \int dV U_E, \quad (187)$$

donde  $U_E$  es la densidad de energía eléctrica. Además:

$$U_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}. \quad (188)$$

$\mathbf{D}$  es el vector de desplazamiento eléctrico, definido como:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (189)$$

---

<sup>12</sup>Coherente también en el sentido de que se conserva la estabilidad en la fase.

el cual consta de dos partes, correspondientes a la respuesta lineal y no lineal del material:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_L + \mathbf{D}_{NL}. \quad (190)$$

Además:

$$\mathbf{D}_L = \epsilon_0 n^2 \mathbf{E}, \quad (191)$$

$$\mathbf{D}_{NL} = \epsilon_0 \chi^{(3)} : \mathbf{E} \mathbf{E} \mathbf{E}, \quad (192)$$

donde

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4. \quad (193)$$

Cada uno definido como:

$$\mathbf{E}_\mu = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_\mu^{(+)}(\vec{r}, t) + \mathbf{E}_\mu^{(-)}(\vec{r}, t)], \quad (194)$$

Para simplificar el problema, se tendrán en cuenta las siguientes consideraciones:

- El proceso de interés es el mezclado de cuatro ondas estimulado, lo cual implica la presencia de un campo semilla inicial, y no degenerado en emisión, lo cual implica que las frecuencias de los fotones señal y acompañante son diferentes.
- Los campos se propagan en la misma dirección.
- Esquema de configuración co-polarizada ( $\chi_{xxxx}^{(3)}$ ).
- Propagación a lo largo de z.
- No hay traslape espectral entre los campos de bombeo, señal y acompañante.

Además, consideramos campos de bombeo pulsados de la forma:

$$\epsilon_\mu^{(+)}(\vec{r}, t) = i \int dk_\mu f_\mu(x, y) l_\mu(k_\mu) \hat{a}_\mu(k_\mu) e^{i(\omega_\mu t - k_\mu z)}, \quad (195)$$

donde  $k_\mu$  es la constante de propagación de cada campo,  $f_\mu(x, y)$  es la distribución transversal del modo,  $\tilde{\alpha}(\omega_\mu)$  es la envolvente espectral del campo, normalizadas de tal manera que:

$$\int dx \int dy |f_\mu(x, y)|^2 = 1, \quad (196)$$

$$\int d\omega_\mu |\tilde{\alpha}_\mu(\omega_\mu)|^2 = 1 \quad (197)$$

y  $l_\mu(\omega_\mu)$  es un término de amplitud definido como:

$$l_\mu(\omega_\mu) = \left[ \frac{\hbar\omega_\mu}{4\pi\epsilon_0 n^2(\omega_\mu)} \right]^{1/2}. \quad (198)$$

$n(\omega_\mu)$  es el índice de refracción del material del medio guiado, evaluado a la frecuencia  $\omega_\mu$ . Consideramos también un campo semilla de onda continua de la forma:

$$\epsilon_3^{(+)}(\vec{r}, t) = i A_3 f_3(x, y) l(\omega_3) \hat{a}_3 e^{-i[\omega_3 t - k_3 z]}, \quad (199)$$

donde:

$$A_3 = \sqrt{\frac{4\pi P_{avg3} n(\omega_3)}{\hbar\omega_3 c |\alpha_3|^2}}. \quad (200)$$

$P_{avg3}$  es la potencia promedio inicial del campo semilla, y  $|\alpha_3|^2$  es un término equivalente al número promedio de fotones, recordando la relación 23.

Ahora bien, teniendo en cuenta que la conservación de energía del proceso de mezclado de cuatro ondas restringe las frecuencias generadas por la ecuación:

$$\Delta\omega = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4 = 0, \quad (201)$$

y que también se debe cumplir el principio de conservación de momento:

$$\Delta k = k_1 + k_2 - k_3 - k_4 = 0, \quad (202)$$

nos interesa el proceso que cumple con la condición de empatamiento de fases ( $\Delta\omega = 0$ ,  $\Delta k = 0$ ):

$$[\mathbf{EEE}] = \frac{3}{4} \epsilon_2^{(+)} \epsilon_3^{(-)} \epsilon_4^{(-)} + h.c. \quad (203)$$

Teniendo en cuenta la ecuación 188, se tendrá una densidad de energía eléctrica asociada a este proceso:

$$U_E = \frac{3}{8} \epsilon_0 \chi^{(3)} [\epsilon_1^{(+)} \epsilon_2^{(+)} \epsilon_3^{(-)} \epsilon_4^{(-)} + \epsilon_1^{(-)} \epsilon_2^{(+)} \epsilon_3^{(-)} \epsilon_4^{(-)}] + h.c. \quad (204)$$

Se restringe este análisis al proceso de interés:

$$U_E = \frac{3}{8} \epsilon_0 \chi^{(3)} \epsilon_1^{(+)} \epsilon_2^{(+)} \epsilon_3^{(-)} \epsilon_4^{(-)} + h.c. \quad (205)$$

De esta manera, el hamiltoniano que describe el proceso no lineal que estamos estudiando (mezclado de cuatro ondas) es:

$$\hat{H}_{NL} = \int dk_1 \int dk_2 \int dk_4 s(k_1, k_2, k_3, k_4) \hat{a}(k_1) \hat{a}(k_2) \hat{a}^\dagger(k_3) \hat{a}^\dagger(k_4) + h.c., \quad (206)$$

donde

$$s(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{3}{8} \epsilon_0 \chi^{(3)} f_{eff} l(k_1) l(k_2) A_3 l(k_3) l(k_4) L \text{sinc}(\Delta k L/2) e^{i \Delta k L/2}. \quad (207)$$

$\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío,  $\chi^{(3)}$  es la susceptibilidad no lineal de tercer orden,  $f_{eff}$  es la integral de traslape de las distribuciones transversales de los campos para el FWM y  $L$  es la longitud de la fibra. La integral de traslape se define como:

$$f_{eff} = \frac{\langle f_1 f_2 f_3^* f_4^* \rangle}{[\langle |f_1|^2 \rangle \langle |f_2|^2 \rangle \langle |f_3|^2 \rangle \langle |f_4|^2 \rangle]^{1/2}}. \quad (208)$$

### Estados asintóticos y ecuaciones de operadores:

El Hamiltoniano lineal que involucra a los campos involucrados en este proceso es:

$$\hat{H}_L = \int dk_1 \hbar \omega_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \int dk_2 \hbar \omega_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \int dk_3 \hbar \omega_3 \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 + \int dk_4 \hbar \omega_4 \hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4. \quad (209)$$

Considerando un Hamiltoniano no lineal de acuerdo al proceso no lineal descrito en la sección anterior, se tiene entonces que nuestro Hamiltoniano total es:

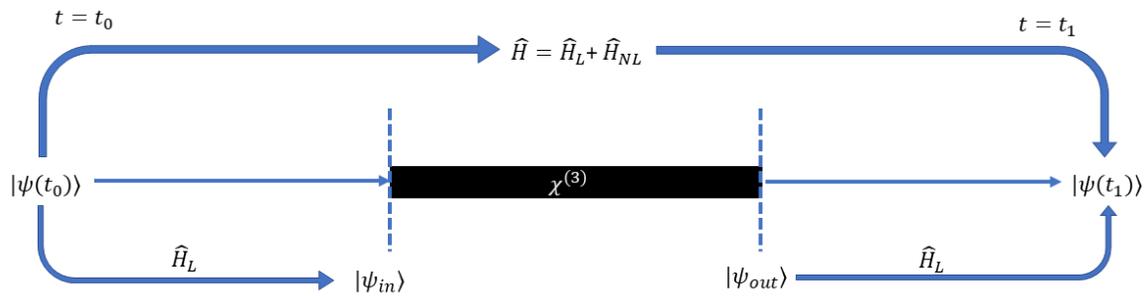
$$\hat{H} = \hat{H}_L + \hat{H}_{NL}. \quad (210)$$

Imaginamos un estado de entrada inicial  $|\psi(t_0)\rangle$  en  $t_0 \ll 0$  incidente en la región no lineal  $-L/2 < z < L/2$  con el campo electromagnético localizado en  $z \ll 0$  afuera

de la región no lineal, y buscamos el estado final  $|\psi(t_1)\rangle$  para un tiempo  $t_1 \gg 0$  tal que el campo electromagnético está localizado en  $z \gg 0$  que cumplen con la evolución dada por:

$$|\psi(t_1)\rangle = e^{-i\hat{H}(t_1-t_0)/\hbar} |\psi(t_0)\rangle. \quad (211)$$

Para este análisis, se tomará una estrategia de la teoría de esparcimiento, en la cual se toman los tiempos inicial  $t_0 \rightarrow -\infty$  y final  $t_1 \rightarrow \infty$  y se introducen estados de entrada y salida asintóticos.



**Figura 19.** Evolución de los estados cuánticos en el medio no lineal.

Imaginamos un estado inicial  $|\psi(t_0)\rangle$  que evolucionó de  $t = t_0$  a  $t = 0$  de acuerdo con  $\hat{H}_L$  (ver figura 19):

$$|\psi_{in}\rangle = e^{-i\hat{H}_L(0-t_0)/\hbar} |\psi(t_0)\rangle = e^{i\hat{H}_L t_0/\hbar} |\psi(t_0)\rangle. \quad (212)$$

El estado asintótico de salida  $|\psi_{out}\rangle$  está definido como el estado en  $t = 0$  que evolucionaría a  $|\psi(t_1)\rangle$  si la evolución ocurriera de acuerdo con  $\hat{H}_L$ :

$$e^{-i\hat{H}_L(t_1-0)/\hbar} |\psi_{out}\rangle = e^{-i\hat{H}_L t_1/\hbar} |\psi_{out}\rangle = |\psi(t_1)\rangle. \quad (213)$$

Entonces sustituyendo las ecs. 211 y 212 en la ecuación 213 podemos escribir:

$$\begin{aligned}
|\psi_{out}\rangle &= e^{i\hat{H}_L t_1/\hbar} |\psi(t_1)\rangle \\
&= e^{i\hat{H}_L t_1/\hbar} e^{-i\hat{H}(t_1-t_0)/\hbar} |\psi(t_0)\rangle \\
&= e^{i\hat{H}_L t_1/\hbar} e^{-i\hat{H}(t_1-t_0)/\hbar} e^{-i\hat{H}_L t_0/\hbar} |\psi_{in}\rangle \\
&= \hat{U}(t_1, t_0) |\psi_{in}\rangle.
\end{aligned} \tag{214}$$

Definiendo al operador unitario de evolución  $\hat{U}$  de manera general para todo tiempo  $t'$  y  $t$ , se tiene:

$$\hat{U}(t', t) = e^{i\hat{H}_L t'/\hbar} e^{-i\hat{H}(t'-t)/\hbar} e^{-i\hat{H}_L t/\hbar}. \tag{215}$$

Identificando este operador unitario, nos podemos concentrar en la no linealidad del medio de interacción. La evolución de cualquier estado inicial  $|\psi(t_0)\rangle$  a  $|\psi_{in}\rangle$  puede ser calculada fácilmente, y una vez se ha determinado el estado  $|\psi_{out}\rangle$ , el estado de interés  $|\psi(t_1)\rangle$  también se puede encontrar fácilmente.

**Características del operador  $\hat{U}$ :** Es de notar que  $\hat{U}(t, t) = 1$  para todo  $t$ . Ahora, si derivamos la ecuación 215, se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{U}(t', t)}{\partial t} &= e^{i\hat{H}_L t'/\hbar} \left[ \left( \frac{i\hat{H}}{\hbar} \right) e^{-i\hat{H}(t'-t)/\hbar} e^{-i\hat{H}_L t/\hbar} + e^{-i\hat{H}(t'-t)/\hbar} \left( -\frac{i\hat{H}_L}{\hbar} \right) e^{-i\hat{H}_L t/\hbar} \right]. \\
-i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t', t)}{\partial t} &= e^{i\hat{H}_L t'/\hbar} \left[ (\hat{H}) e^{-i\hat{H}(t'-t)/\hbar} e^{-i\hat{H}_L t/\hbar} - e^{-i\hat{H}(t'-t)/\hbar} (\hat{H}_L) e^{-i\hat{H}_L t/\hbar} \right] \\
&= e^{i\hat{H}_L t'/\hbar} \left[ e^{-i\hat{H}(t'-t)/\hbar} (\hat{H}) e^{-i\hat{H}_L t/\hbar} - e^{-i\hat{H}(t'-t)/\hbar} (\hat{H}_L) e^{-i\hat{H}_L t/\hbar} \right] \\
&= e^{i\hat{H}_L t'/\hbar} \left[ e^{-i\hat{H}(t'-t)/\hbar} (\hat{H}_L + \hat{H}_{NL}) e^{-i\hat{H}_L t/\hbar} - e^{-i\hat{H}(t'-t)/\hbar} (\hat{H}_L) e^{-i\hat{H}_L t/\hbar} \right] \\
&= e^{i\hat{H}_L t'/\hbar} e^{-i\hat{H}(t'-t)/\hbar} \hat{H}_{NL} e^{-i\hat{H}_L t/\hbar} \\
&= e^{i\hat{H}_L t'/\hbar} e^{-i\hat{H}(t'-t)/\hbar} \underbrace{e^{-i\hat{H}_L t/\hbar} e^{i\hat{H}_L t/\hbar}}_1 \hat{H}_{NL} e^{-i\hat{H}_L t/\hbar} \\
&= \hat{U}(t', t) V(t),
\end{aligned} \tag{216}$$

donde  $V(t) = e^{i\hat{H}_L t/\hbar} \hat{H}_{NL} e^{-i\hat{H}_L t/\hbar}$ .

Consideramos estados de entrada asintóticos de la forma:

$$|\psi_{in}\rangle = e^O |vac\rangle, \quad (217)$$

donde  $|vac\rangle$  es el estado de vacío y  $O$  es un operador de Schrödinger (es decir, invariante en el tiempo).

Tenemos entonces:

$$|\psi_{out}\rangle = U(t_1, t_0)e^O |vac\rangle. \quad (218)$$

Es de notar que  $\hat{H} |vac\rangle = \hat{H}_L |vac\rangle = 0$ , ya que tanto el Hamiltoniano lineal y no lineal involucran operadores de aniquilación a la derecha. De esta manera, también se tiene que  $U(t_1, t_0) |vac\rangle = U^\dagger(t_1, t_0) |vac\rangle = |vac\rangle$

Entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned} |\psi_{out}\rangle &= U(t_1, t_0)e^O U^\dagger(t_1, t_0) |vac\rangle \\ &= e^{U(t_1, t_0)OU^\dagger(t_1, t_0)} |vac\rangle \\ &\equiv e^{\bar{O}(t_0)} |vac\rangle, \end{aligned} \quad (219)$$

donde  $\bar{O}(t) = U(t_1, t)OU^\dagger(t_1, t)$  y satisface que  $\bar{O}(t_1) = O$ .

También se puede demostrar que:

$$i\hbar \frac{d\bar{O}_i(t)}{dt} = [\bar{O}_i(t), \hat{V}(t)], \quad (220)$$

donde

$$\hat{V}(t) = U(t_1, t)V(t)U^\dagger(t_1, t). \quad (221)$$

En nuestro caso:

$$\hat{V}(t) = \int dk_1 \int dk_2 \int dk_4 s(k_1, k_2, k_3, k_4, t) \bar{a}(k_1) \bar{a}(k_2) \bar{a}^\dagger(k_3) \bar{a}^\dagger(k_4) \quad (222)$$

$$s(k_1, k_2, k_3, k_4, t) = s(k_1, k_2, k_3, k_4) e^{-i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)t}. \quad (223)$$

Ahora bien, si se consideran estados asintóticos de entrada de la forma:

$$|\psi_{in}\rangle = |\alpha_p\rangle |\alpha_3\rangle = e^{\alpha_{k_p} \hat{A}_p^\dagger - hc} e^{\alpha_{k_3} \hat{a}^\dagger(k_3) - h.c} |vac\rangle, \quad (224)$$

donde

$$\hat{A}_p^\dagger = \int dk_p \phi(k_p) a^\dagger(k_p), \quad (225)$$

es decir, un campo de bombeo coherente pulsado y campo semilla de onda continua, podemos reescribirlos de la siguiente manera:

$$|\psi_{in}\rangle = e^{O_1} e^{O_2} |vac\rangle \quad (226)$$

y por lo tanto, cumplen con la evolución planteada en la ecuación 220, así como sigue:

$$\begin{aligned} |\psi_{out}\rangle &= U(t_1, t_0) e^{O_1} U^\dagger(t_1, t_0) U(t_1, t_0) e^{O_2} U^\dagger(t_1, t_0) |vac\rangle \\ &= \underbrace{e^{U(t_1, t_0) O_1 U^\dagger(t_1, t_0)}}_{\text{Evolución del bombeo.}} \underbrace{e^{U(t_1, t_0) O_2 U^\dagger(t_1, t_0)}}_{\text{Evolución de la semilla}} |vac\rangle \\ &= e^{\bar{O}_1(t_0)} e^{\bar{O}_2(t_0)} |vac\rangle. \end{aligned} \quad (227)$$

Considerando el estado de entrada definido en la ecuación 224 se tiene que el estado de salida tiene la forma:

$$|\psi_{out}\rangle = e^{\alpha_{k_p} \bar{A}_p^\dagger - hc} e^{\alpha_{k_3} \bar{a}^\dagger(k_3) - h.c} |vac\rangle, \quad (228)$$

donde los operadores  $\bar{A}_p^\dagger$  y  $\bar{a}^\dagger(k_3)$  definen la evolución del bombeo y del campo semilla, respectivamente, de acuerdo con la ecuación de Heisenberg 220.

Ahora, utilizando la aproximación de bombeo inagotable, dado que se definió que el bombeo es más intenso que la semilla y que se mantiene aproximadamente constante a lo largo de la propagación por la fibra, se tendrá que:

$$\bar{A}_p^\dagger(t) \approx \hat{A}_p^\dagger. \quad (229)$$

Vale la pena resaltar que la aproximación que se utilizó implica que el número de fotones del bombeo se conserva, y por lo tanto se podría considerar que el efecto de la propagación consiste en la adquisición una fase.

Para el campo semilla se tendrá la siguiente ecuación de evolución:

$$i\hbar \frac{d\bar{a}^\dagger(k_3)}{dt} = 2 \int dk_1 \int dk_2 \int dk_4 s(k_1, k_2, k_3, k_4) \alpha(k_1)\alpha(k_2) \hat{a}^\dagger(k_4) e^{-i(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4)t}. \quad (230)$$

En la anterior ecuación se aplicó la aproximación paramétrica para los campos de bombeo y por esto se reemplazó la notación de operadores a amplitudes clásicas  $\alpha(k_{1,2})$ . Integrando la ecuación 230 con respecto al tiempo se encuentra que:

$$\bar{a}(k_3) = \hat{a}(k_3) + \frac{2}{i\hbar} \int dk_1 \int dk_2 \int dk_4 s(k_1, k_2, k_3, k_4) \alpha(k_1)\alpha(k_2) \hat{a}^\dagger(k_4) \delta(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4), \quad (231)$$

Y reemplazando las ecuaciones 229 y 231 en la ecuación 228, se tendrá un estado de salida de la forma:

$$|\psi_{out}\rangle = e^{\alpha_{k_p}\hat{A}_p^\dagger - hc} e^{\alpha_{k_3}\bar{a}(k_3) - hc} |vac\rangle = |\alpha_{k_p}\rangle |\alpha_{k_3}\rangle |\psi_{out}^F\rangle, \quad (232)$$

donde

$$|\psi_{out}^F\rangle = e^{\alpha_{k_4}\hat{A}_4^\dagger - hc} |vac\rangle. \quad (233)$$

$|\psi_{out}^F\rangle$  es el estado de los fotones generados con frecuencia  $\omega_4$ . En la relación 232 se tuvo en cuenta que no hay traslape espectral entre los campos generados, debido a que en el experimento que inspiró este estudio los fotones generados se encuentran en bandas distantes entre ellos y con respecto al bombeo. Como referencia, en el proceso de interés para este proyecto, para un bombeo centrado en  $\lambda_p = 740.8nm$ , se generan un campo señal en  $\lambda_s = 1220nm$  y un campo acompañante en  $\lambda_i = 532nm$ .

El operador  $\hat{A}_4^\dagger$  en 233 se puede escribir en términos de una función de onda general, de manera que:

$$\hat{A}_4^\dagger = \int dk_4 \phi(k_4) \hat{a}^\dagger(k_4), \quad (234)$$

donde:

$$\phi(k_4) = \frac{2\pi i}{\hbar} \frac{\alpha_{k_3}^*}{\alpha_{k_4}} \int dk_1 \int dk_2 s(k_1, k_2, k_3, k_4) \alpha(k_1)\alpha(k_2) \delta(\omega_3 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_2), \quad (235)$$

normalizada de tal forma que  $\int |\phi(k_4)| dk_4 = 1$ , con lo que se tiene que:

$$|\alpha_4|^2 = \frac{4\pi^2}{\hbar^2} |\alpha_3|^2 \int d\omega_4 \int d\omega_1 \int d\omega'_1 \left[ \frac{1}{v_{g4}(\omega_4) \sqrt{v_{g1}(\omega_1)} \sqrt{v_{g1}(\omega'_1)} \sqrt{v_{g2}(\omega_3 + \omega_4 - \omega_1)}} \times \right. \\ \left. \frac{1}{\sqrt{v_{g2}(\omega_3 + \omega_4 - \omega'_1)}} s(\omega_1, \omega_3 + \omega_4 - \omega_1, \omega_3, \omega_4) s^*(\omega'_1, \omega_3 + \omega_4 - \omega'_1, \omega_3, \omega_4) \times \right. \\ \left. \alpha_1(\omega_1) \alpha_1(\omega'_1) \alpha_2(\omega_3 + \omega_4 - \omega_1) \alpha_2^*(\omega_3 + \omega_4 - \omega'_1) \right], \quad (236)$$

donde  $\hbar$  es la constante de Planck reducida,  $\alpha_3$  es la amplitud del campo semilla (campo 3),  $v_g(\omega)$  es la velocidad de grupo,  $s(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$  es la función de empata-  
miento de fases definida en 207 y  $\alpha_{1,2}$  son las envolventes espectrales del bombeo.

Siguiendo el procedimiento de Furusawa (2015) para encontrar las cuadraturas del campo se encuentra que:

$$\left| \langle x_\phi | \psi_{out}^F \rangle \right|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2[x_\phi - \text{Re}(\alpha_4) \cos \phi + \text{Im}(\alpha_4) \sin(\phi)]^2}, \quad (237)$$

donde  $x_\phi$  son los valores propios de las cuadraturas del campo definidas como:

$$\hat{X}_\phi = \frac{1}{2} (\hat{A}_4^\dagger e^{i\phi} + \hat{A}_4 e^{-i\phi}), \quad (238)$$

recordando que las cuadraturas del campo son las cantidades observables en un ex-  
perimento de detección homodina balanceada.

**Nota:** Es importante mencionar que la generación de estados tipo coherentes (como los presentados en la ecuación 233) por medio de la amplificación paramétrica sólo se da en condiciones muy particulares:

1. Amplificación paramétrica no degenerada en emisión, sin traslape espectral entre los bombeos y los campos señal y acompañante.
2. El estado coherente de salida se asoció al *modo no semillado*.
3. El estado total de salida (ec. 232) todavía tiene contribución del bombeo y el campo semilla. Experimentalmente, esto se puede corregir utilizando filtros para eliminar el ruido de esos campos.

El estudio anterior se realizó como un primer acercamiento al estudio de los estados cuánticos generados por medio de procesos de la óptica no lineal, tal como la amplificación paramétrica que se discutió recientemente. Si bien este análisis sirve como una primera guía, es preciso mencionar que sólo se trata de una aproximación al problema completo, puesto que se omitieron efectos sobre los campos, tales como la dispersión, la atenuación, o incluso otros efectos no lineales, como la auto-modulación de fases y la modulación de fases cruzadas que siempre estarán presentes por efecto de la refracción no lineal en este tipo de medios. La inclusión de tales efectos supone una mayor complejidad matemática, sin embargo, sería interesante realizar un análisis más completo que los incluya en proyectos futuros.

### **3.7 Avances en la implementación experimental**

La generación de interacciones no lineales en fibras ópticas ha atraído bastante interés en años recientes, en especial el mezclado de cuatro ondas, debido a la variedad de aplicaciones en áreas como las tecnologías cuánticas (Goudreau *et al.*, 2020), la metrología (Geng *et al.*, 2018), el procesamiento de señales (Hu *et al.*, 2015), entre otros. Precisamente, diversos investigadores del *Laboratorio de interacciones no lineales y óptica cuántica (LINOC)* de CICESE tienen una amplia trayectoria en el estudio de este tipo de efectos no lineales para generar fuentes no clásicas de luz, como fotones individuales o de parejas de fotones, entre otros (Garay-Palmett *et al.*, 2007; Cruz-Delgado *et al.*, 2016; Domínguez-Serna *et al.*, 2020; De la Torre Robles, 2021a), lo cual es precedente de esta tesis. En particular, este experimento tiene como antecedente principal el trabajo doctoral de Daniel de la Torre, en el cual propuso e implementó una fuente de parejas de fotones mediante el proceso de mezclado de cuatro ondas espontáneo en la fibra de cristal fotónico comercial NL-PM-750, y cuyos resultados más relevantes para este trabajo son la caracterización de la dispersión de la fibra óptica y las condiciones experimentales que ponen de manifiesto la viabilidad del proceso no lineal mencionado. El procedimiento de caracterización de la dispersión se describe con más detalle en la sección 3.4.1 y en la referencia De la Torre Robles (2021b).

Dicho lo anterior, vale la pena mencionar que el objetivo de este experimento es implementar un arreglo para la generación del mezclado de cuatro ondas espontáneo

no degenerado en emisión<sup>13</sup> en la PCF altamente no lineal NL-PM-750, utilizando un bombeo pulsado, con el fin de encontrar las condiciones para las cuales es viable la amplificación paramétrica de las señales generadas. La amplificación paramétrica es el procedimiento que se propone como fuente de estados coherentes pulsados sintonizados en el infrarrojo.

En un experimento de mezclado de cuatro ondas se deben establecer dos elementos principales: el medio de generación y los campos de entrada que darán origen al fenómeno mencionado (ver figura 12a). Es por esto que a continuación se describirán algunas características importantes del medio de generación, y en la sección del desarrollo experimental se describirán con más detalles las características del bombeo.

### 3.7.1 Antecedente: Empatamiento de fases de la PCF NL-PM-750:

El medio de generación que se utilizó en este experimento es la fibra óptica de cristal fotónico comercial, altamente no lineal NL-PM-750 de NKT-Photonics, tal como se mencionó en la sección 3.4.1. Se trata de una fibra óptica de sílice pura, con un núcleo de alrededor de  $1.8 \mu\text{m}$  de diámetro, rodeado de una red hexagonal de agujeros de aire (ver figura 13a). Esta fibra es birrefringente, mantiene la polarización<sup>14</sup>, tiene baja atenuación y es mono-modal en el rango de frecuencias de trabajo<sup>15</sup>.

Dentro de todas las características de la fibra óptica, nos interesan en especial dos propiedades que afectan directamente la generación del mezclado de cuatro ondas: el coeficiente no lineal  $\gamma$  y la dispersión de la fibra. De acuerdo con Agrawal, las fibras ópticas convencionales tienen valores de  $\gamma \approx 1(\text{Wkm})^{-1}$ , y las fibras con  $\gamma > 10(\text{Wkm})^{-1}$  son denominadas *fibras altamente no lineales*. En este caso, el fabricante reporta un coeficiente no lineal  $\gamma$  mayor a  $95(\text{Wkm})^{-1}$ , por lo cual esta fibra es una candidata ideal para la generación de fenómenos no lineales de tercer orden. Si bien es cierto que contar con una fibra altamente no lineal ofrece una ventaja inicial, es indispensable que además se cumpla con la *condición de empatamiento de fases* para que ocurra el FWM. Esta condición fue introducida en la sección 3.3 y depende de la dispersión de la fibra óptica.

<sup>13</sup>Lo cual implica que las señales que se generan tienen frecuencias distintas.

<sup>14</sup>Birrefringencia a  $780 \text{ nm} > 3 * 10^{-4}$ . Longitud de batido a  $1550 \text{ nm}$  es típicamente menor a  $2 \text{ mm}$ . Fuente: NKT-Photonics (2012).

<sup>15</sup>Longitud de onda de corte menor a  $650 \text{ nm}$ .

La introducción de la condición de empatamiento de fases, además, supone la adición de restricciones sobre las longitudes de onda de los campos involucrados y sus polarizaciones, teniendo en cuenta que estas últimas están restringidas por las geometrías del tensor de susceptibilidad no lineal de tercer orden  $\chi^{(3)}$  del material de la fibra óptica, las cuales fueron mencionadas en la sección 3.4.1.1. De ahí que, dada la naturaleza birrefringente de la fibra, se soporten diferentes modos de polarización etiquetados como  $XXXX$ ,  $YYYY$ ,  $XXYY$ ,  $YYXX$ ,  $XYXY$  y  $XYXX$ . Estos procesos están relacionados con diferentes combinaciones de polarización de los campos involucrados. En la convención del etiquetado anterior, las primeras dos letras representan las polarizaciones de los bombeos, la tercera letra está relacionada con la polarización del campo señal, y la última letra está relacionada con la polarización del campo acompañante, recordando que  $X$  y  $Y$  son estados de polarización lineal paralela a los ejes principales de la fibra.

En particular, se estudió el caso de FWM con bombeo degenerado, lo cual implica que se utilizó un solo campo de bombeo, y por lo tanto este proceso está gobernado por la ecuación de conservación de energía  $2\omega_p = \omega_s + \omega_i$ , en donde  $\omega_p$  es la frecuencia de bombeo,  $\omega_s$  es la frecuencia del campo señal, y  $\omega_i$  es la frecuencia del campo acompañante. Se utilizó un campo de bombeo con polarización lineal, sólo que no necesariamente paralela a uno de los ejes principales de la fibra, por lo cual las dos primeras letras de la etiqueta se asignarán al bombeo. Es decir, los procesos que empiezan con la etiqueta  $XX$  o  $YY$  implican que el bombeo está polarizado linealmente en  $X$  o  $Y$ , y los procesos que empiezan con la etiqueta  $XY$ , implican que la polarización del bombeo tiene ambas componentes, o sea que no es paralela a uno de los ejes principales de la fibra.

Se tendrá la siguiente condición de empatamiento de fases general:

$$\Delta\vec{k} = \vec{k}_{p1}(\omega_p) + \vec{k}_{p2}(\omega_p) - \vec{k}_s(\omega_s) - \vec{k}_i(2\omega_p - \omega_s) = 0, \quad (239)$$

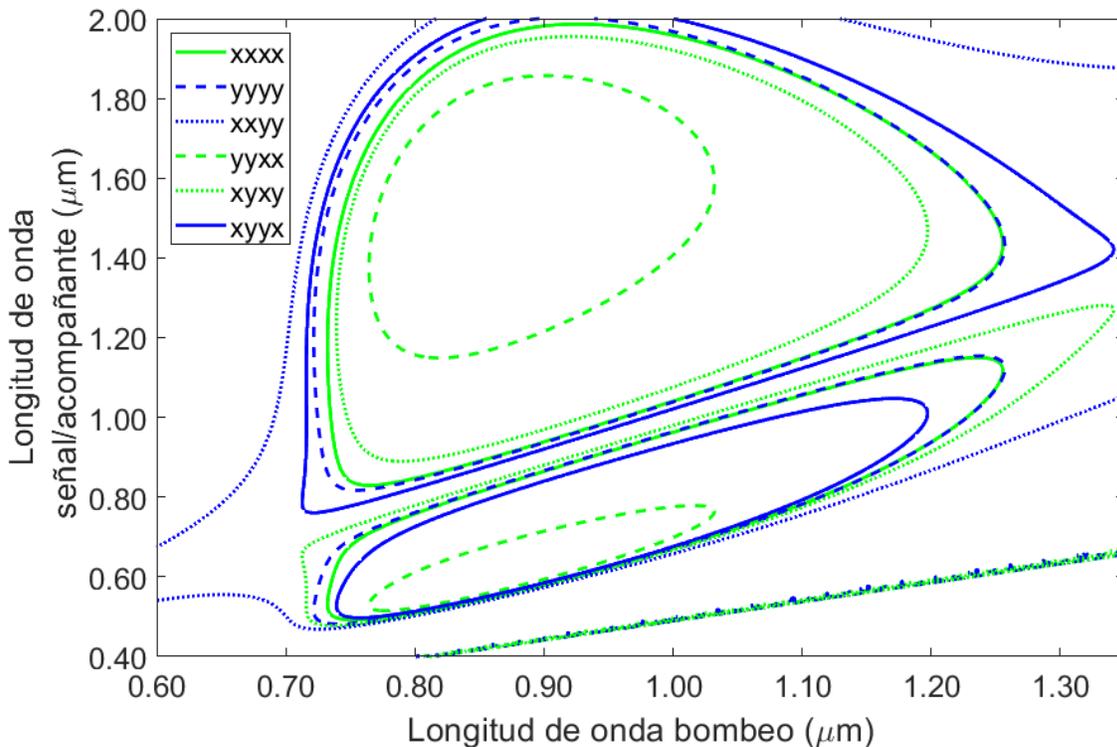
donde  $\vec{k}_j(\omega)$  es el vector de onda, para el cual se cumple que  $|\vec{k}_j(\omega)| = n_j(\omega) \omega/c$ , donde  $n_j(\omega)$  es el índice de refracción efectivo del modo a la frecuencia  $\omega$  y  $c$  es la velocidad de la luz. Hay que hacer notar que el subíndice  $j = x$  o  $y$ , y está relacionado con el estado de polarización de cada campo, esto, debido a que la fibra es birrefringente, y por lo tanto las curvas de los índices de refracción son diferentes a lo largo de cada uno

de los ejes principales de la misma. Para ilustrar lo anterior, se tomará como ejemplo la condición de empatamiento de fases del proceso  $XYXX$ :

$$\Delta k_{XYXX} = [n_x(\omega_p) \omega_p + n_y(\omega_p) \omega_p + n_y(\omega_s) \omega_s + n_x(\omega_i) \omega_i] / c + \phi_{NL} = 0, \quad (240)$$

con  $\omega_i = 2\omega_p - \omega_s$ .

El término  $\phi_{NL}$  en la expresión 240 se refiere a un corrimiento de fases inducido por los procesos de automodulación de fases (SPM) y modulación de fases cruzadas (XPM), y depende de la potencia del bombeo (Garay-Palmett *et al.*, 2013). Es importante mencionar que, a pesar de que se trate de la generación de FWM con bombeo degenerado, habrá presencia de modulación de fases cruzadas entre las dos componentes de polarización.



**Figura 20.** Diagrama de empatamiento de fases: Contornos  $\Delta \vec{k} = 0$  para la PCF NL-PM 750. Estos contornos fueron calculados a partir de las curvas de dispersión de la fibra caracterizadas por De la Torre Robles (2021a).

En la figura 20 se muestra el *diagrama de empatamiento de fases*, que representa los contornos para los cuales se cumple la relación 239 para la PCF NL-PM 750, considerando los seis procesos de mezcla de polarización mencionados. Esta figura



no es un procedimiento trivial, considerando el diámetro micrométrico del núcleo de la fibra. Un acoplamiento eficiente requiere del posicionamiento preciso del haz de luz enfocado en el núcleo, por esto se utilizaron espejos auxiliares (E1 y ED1) para la alineación del bombeo, y una lente objetivo de microscopio (L1) para su enfoque (magnificación 40X, apertura numérica  $NA=0.65$ ). Se trabajó con una eficiencia de acoplamiento en promedio de 43 %, considerando potencias de entrada promedio del orden de 40 mW.

Posterior al acoplamiento del campo de bombeo, se genera el proceso de mezclado de cuatro ondas en la PCF dando lugar a la aparición de dos campos, denominados *señal* y *acompañante*. Los campos generados son no degenerados en frecuencia y son emitidos en bandas espectrales ubicadas simétricamente alrededor del bombeo, determinadas por la condición de empatamiento de fases (Ver figura 20). Siguiendo la convención de la literatura, denominamos *campo señal* a aquel cuya longitud de onda central es mayor a la longitud de onda del bombeo, y *acompañante* a aquel cuya longitud de onda central es menor (Garay-Palmett *et al.*, 2013). Se utilizó una lente esférica (L2) para desacoplar y colimar las señales de salida.

Vale la pena mencionar que a la salida de la PCF se sigue contando con la presencia de gran parte del bombeo, puesto que se trata de un campo intenso, y es por esto que se necesita un sistema de filtrado para la detección de las señales generadas. Primeramente, se utilizó un espejo dicróico (ED2) para separar las señales generadas en el proceso. Este dispositivo óptico permite reflejar solamente la luz con longitud de onda menor a 950 nm; el campo señal es transmitido, dado que su longitud de onda es típicamente mayor a ese valor, mientras que el campo acompañante y el bombeo son reflejados. Adicionalmente, se utilizaron los filtros F1 (pasa-largas con longitud de onda de corte en 980 nm) y F2 (pasa-bajas con longitud de onda de corte en 700 nm) para suprimir el bombeo remanente.

Después del sistema de filtrado, se busca medir el espectro de emisión de las señales generadas, y para esto se usa un sistema de detección basado en un espectrógrafo tipo Czerny-Turner (Shamrock 750, Andor-Oxford Instruments), junto con un detector adecuado para cada una de las señales. Debido a que las señales generadas por FWM son muy tenues, es necesario utilizar láseres guías para poder acoplar las fibras que se conectan al monocromador (Fib1 y Fib2, multimodales). En el caso del campo acom-

pañante, el mismo láser de bombeo puede utilizarse como guía, removiendo temporalmente el filtro pasa-banda F2. En el caso del campo señal, se utilizó como guía un láser infrarrojo centrado en 1550 nm.

Debido a que los campos señal y acompañante se generan en bandas espectrales diferentes (infrarrojo y visible, respectivamente), es necesario ajustar el sistema de detección principalmente en dos aspectos:

1. Seleccionar la rejilla de difracción del espectrógrafo de manera que tenga mayor reflectividad de acuerdo con la banda espectral de trabajo.
2. Utilizar un fotodetector con alta responsividad para cada campo. En cuanto al campo señal, se utilizó un detector de fotones individuales de InGaAs/InP (ID230, ID Quantique). En cuanto al campo acompañante, se utilizó una cámara CCD intensificada (iStar DH334T).

Para la detección, procesamiento y exportación del espectro del campo señal fue necesario el uso de un software diseñado en el grupo de trabajo de LINOC; mientras que para el campo acompañante se usó el software comercial *Andor SOLIS*.

Finalmente, recordando que uno de los objetivos principales de este experimento es encontrar las condiciones para las cuales es viable la amplificación paramétrica de las señales generadas, se tuvieron en cuenta las siguientes condiciones:

1. El proceso de amplificación paramétrica se produce cuando, además de incidir el láser de bombeo se incide un segundo láser a la PCF, conocido como el *láser semilla*, cuya longitud de onda coincide con una de las señales generadas. En este caso, la longitud de onda del láser de bombeo es sintonizable en un rango amplio, por lo cual la única limitante es la longitud de onda del láser semilla, puesto que se plantea utilizar un láser centrado en una longitud de onda de 532 nm, no sintonizable. Se buscará entonces encontrar la longitud de onda y la polarización del bombeo para las cuales se genera un campo acompañante centrado en ese valor.
2. También se tiene que tener en cuenta que, debido a que en una etapa posterior se buscará caracterizar la señal amplificada por medio de tomografía homodina,

será necesario que el campo señal generado en el infrarrojo sea detectable por los fotodiodos del detector homodino.

### 3.7.3 Resultados y discusión

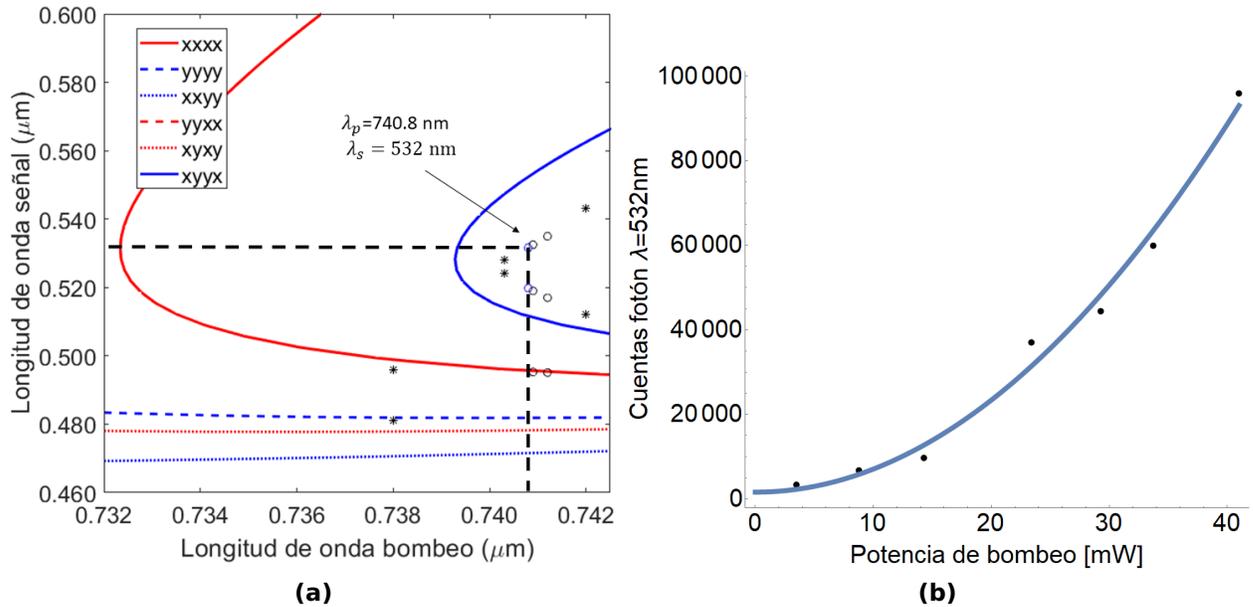
Se implementó el arreglo experimental mostrado en la figura 21 para realizar una exploración de los espectros de las señales generadas, considerando diferentes longitudes de onda del bombeo, y así corroborar la tendencia mostrada en el diagrama de empataamiento de fases teórico (figura 20). Inicialmente, se consideraron longitudes de onda del bombeo presentadas en la tabla 1, para las cuales se estimaba que se generaría el campo acompañante centrado en  $\lambda = 532 \text{ nm}$ , de acuerdo con la condición de empataamiento de fases.

**Tabla 1.** Valores de la longitud de onda del bombeo para las cuales se estima que se genera el campo acompañante centrado en  $\lambda = 532 \text{ nm}$ , junto con el valor de la longitud de onda central del respectivo campo señal y el proceso que da origen a estas señales de acuerdo con la condición de empataamiento de fases.

Longitud de onda del bombeo [nm]	Longitud de onda del campo señal [nm]	Proceso
687.1	970.0	XXYY
715.0	1089.8	XYXY
721.1	1118.9	YYYY
731.3	1169.4	XXXX
738.2	1205.3	XYYX
763.7	1352.7	YYXX

Como se mencionó previamente, se busca caracterizar posteriormente el campo señal mediante tomografía homodina y, revisando las características técnicas del detector homodino (PDB 570-C) se encontró que hay una mayor responsividad para las señales con longitud de onda mayor a 1200 nm. Adicionalmente, de acuerdo con el manual de datos del láser Ti:Sa se encontró que el láser no es muy estable en la región alrededor de  $760 \pm 10 \text{ nm}$ , y que para sintonizarlo en esta región es necesario hacer una purga con nitrógeno en la cavidad. Es por esto que se prefirió centrar la exploración alrededor de 738 nm.

En la figura 22a se muestran los valores experimentales de las longitudes de ondas centrales de las señales visibles medidas como función de diferentes longitudes de



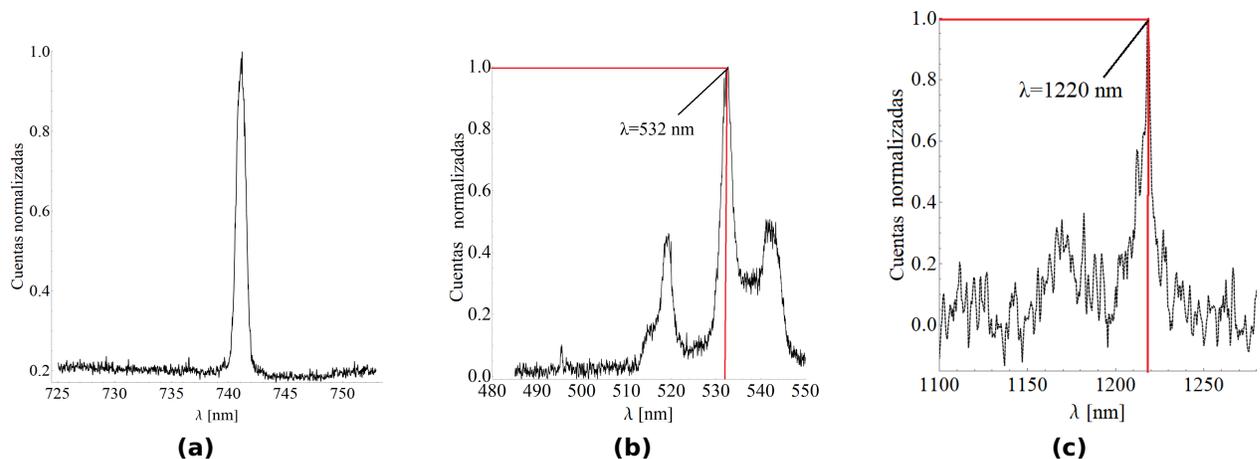
**Figura 22.** (a) Contornos  $\Delta k = 0$  para la PCF NL-PM 750, considerando los diferentes procesos mezcla de polarización. \* y o representan valores experimentales. (b) Dependencia del número de cuentas experimentales medidas en el máximo de la señal visible en función de la potencia promedio acoplada del bombeo.

onda del bombeo en un rango entre  $\lambda = 735 \text{ nm}$  y  $\lambda = 742 \text{ nm}$ . Se puede observar que hay una ligera discrepancia entre los valores obtenidos experimentalmente con respecto a los valores estimados mediante la condición de empatamiento de fases teórica. Esto se debe a que en el proceso de estimación de las curvas teóricas de la dispersión de la fibra realizado por De la Torre Robles (2021a) se contaron con pocos puntos experimentales en esta zona. Adicionalmente, es necesario recordar que se puede generar un corrimiento espectral de las señales generadas debido al término no lineal de la condición de empatamiento de fases (ver ec. 240), el cual depende de la potencia del bombeo.

Se encontró que, utilizando un bombeo con potencia promedio menor a 10 mW, el nivel de potencia de las señales generadas era indistinguible del ruido electrónico del detector. Variando la potencia promedio del bombeo en un rango entre 10 mW y 40 mW no se observó un corrimiento espectral considerable de las señales, sin embargo, sí se corroboró que el número de cuentas medidas en el máximo de las mismas sigue una tendencia cuadrática con respecto a la potencia promedio del bombeo, tal como lo predice la teoría (Garay-Palmett *et al.*, 2010). En la figura 22b se muestra un conjunto de cuentas máximas medidas para la señal visible centrada en  $\lambda = 532 \text{ nm}$  para

distintos valores de potencia promedio del bombeo, y la curva de ajuste  $f(x)=54.37x^2+1649.82$ , siendo  $x$  la potencia promedio en mW, calculada mediante el software *Mathematica* utilizando un modelo de regresión no lineal por ajuste de mínimos cuadrados.

Producto de la exploración antes descrita, se corroboró la generación del mezclado de cuatro ondas mediante la medición de los espectros de las señales generadas. Son de interés las señales centradas en  $\lambda = 532\text{nm}$  y en  $\lambda = 1220\text{nm}$ , considerando un bombeo centrado en  $\lambda = 740.8\text{nm}$ . En la figura 23 se muestran los espectros medidos. El proceso mezcla de polarización *XYXX* da origen a las señales mencionadas, de manera que para que se genere este proceso, el bombeo no debe ser paralelo a alguno de los ejes principales de la fibra. Lo anterior implica que al propagarse por la fibra, el bombeo va a adquirir cierto grado de elipticidad. Esto se tuvo en cuenta al momento de plantear el modelo teórico que se presentó en la sección 3.4 y en los análisis numéricos que se realizaron para complementar el diseño del experimento de tomografía cuántica, lo cual se va a mostrar en el siguiente capítulo.



**Figura 23.** (a) Espectro del láser bombeo, centrado en  $\lambda_p = 740.8\text{nm}$ . (b) Espectros de las señales generadas en la región visible. (c) Espectro de la señal generada en la región del infrarrojo. Son de interés las señales con pico máximo en  $\lambda = 532\text{nm}$  y en  $\lambda = 1220\text{nm}$ .

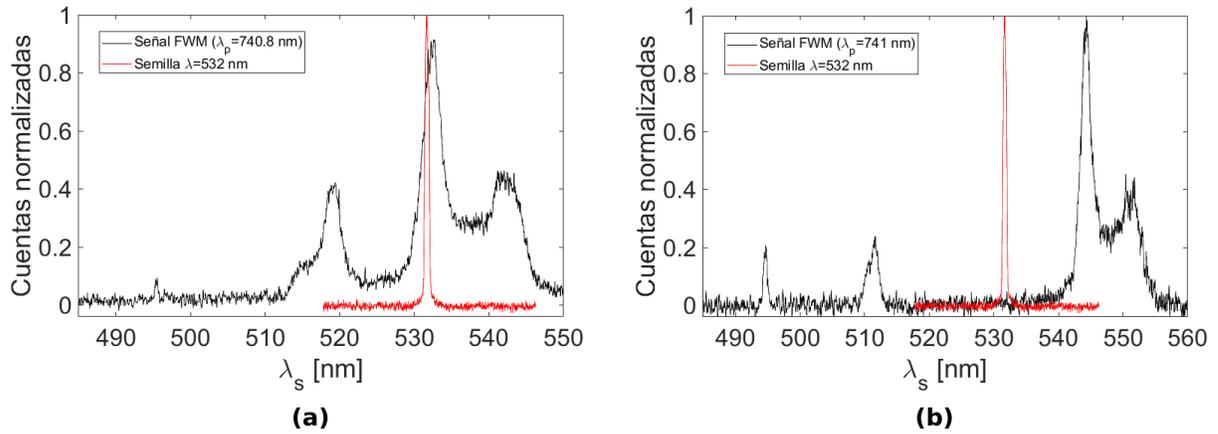
### 3.7.4 Resumen y comentarios

Por medio de este experimento se pudieron determinar condiciones realistas para las cuales se puede generar el fenómeno de amplificación paramétrica en la fibra óptica de cristal fotónico NL-PM-750. Se encontró que sintonizando el bombeo en  $\lambda =$

740 nm y ajustando la polarización del mismo, de manera que no sea paralela a alguno de los ejes principales de la fibra, es posible generar señales centradas en  $\lambda = 532 \text{ nm}$  y en  $\lambda = 1220 \text{ nm}$  mediante el mezclado de cuatro ondas. Para generar la amplificación paramétrica y proceder con la caracterización mediante tomografía homodina, bastará con acoplar el *láser semilla* ( $\lambda = 532 \text{ nm}$ ) y ajustar su estado de polarización.

A pesar de que este procedimiento suene sencillo, vale la pena mencionar algunos detalles importantes a tener en cuenta:

1. Para que se cumpla la condición de empatamiento de fases, el estado de polarización del láser semilla debe estar orientado de manera correcta, o si no, no se generará la amplificación esperada.
2. El acoplamiento del bombeo y la semilla a la fibra óptica no es trivial. Por un lado, exige una alineación muy precisa. Por otro lado, la dispersión cromática de la lente de acoplamiento provocará que la semilla se enfoque en otro punto diferente al bombeo, lo cual ocasiona que ambos no se puedan acoplar máximamente, entonces habrá que balancear las eficiencias de acoplamiento.
3. Es necesario garantizar la estabilidad de la longitud de onda del láser de bombeo, dado que una pequeña variación puede resultar en un corrimiento significativo de la longitud de onda de las señales generadas y, de esta manera, disminuir considerablemente la eficiencia de la amplificación de las señales. Esto se debe a que la señal de interés se encuentra en una región cercana al vértice del diagrama de empatamiento de fases para el proceso  $XYX$  donde, además, la curva tiene una pendiente elevada. En la figura 24 se puede ver un ejemplo del corrimiento de la longitud de onda central de la señal de interés debido al efecto de una variación pequeña de la longitud de onda central del bombeo. En este caso, se observa como al variar la longitud de onda del bombeo de 740.8 nm a 741 nm, se generó un corrimiento de alrededor de 10 nm en el máximo de la señal de interés. Se muestra como referencia el espectro del campo semilla, centrado en  $\lambda = 532 \text{ nm}$ . Para que se genere el fenómeno de amplificación paramétrica será necesario que haya un traslape espectral entre el campo semilla y la señal de interés.



**Figura 24.** (a) Espectros de las señales generadas en la región visible para un bombeo centrado en  $\lambda = 740.8$  nm. (b) Espectros de las señales generadas en la región visible para un bombeo centrado en  $\lambda = 741$  nm. Se muestra como referencia el espectro del campo semilla, centrado en  $\lambda = 532$  nm.

## Capítulo 4. Diseño y simulación del experimento de tomografía homodina

---

*“Los fenómenos cuánticos no ocurren en un espacio de Hilbert, ocurren en un laboratorio”.*

Asher Peres (2002) (Físico).

### 4.1 Introducción

En este proyecto se busca diseñar y simular un experimento de tomografía homodina resuelta en el tiempo para la reconstrucción de la matriz de densidad y la función de Wigner de los estados coherentes pulsados producidos mediante el proceso de mezclado de cuatro ondas estimulado (también conocido como amplificación paramétrica) en una fibra óptica de cristal fotónico. En este capítulo se presentan los parámetros finales del diseño propuesto, el cual se planteó con base en los estudios teóricos planteados en el capítulo anterior y los avances en la implementación experimental.

Es preciso recordar que un protocolo de tomografía homodina típicamente consta de tres etapas: la preparación del estado a caracterizar, la implementación de un experimento de detección homodina para obtener mediciones de cuadratura de la señal de interés, y, finalmente, el análisis estadístico de los datos experimentales mediante el uso de algoritmos de reconstrucción del estado cuántico (Ver esquema 25). Es por esto que la presentación del diseño experimental se dividió en estas tres etapas. Se presentan los detalles experimentales y las estrategias de implementación para cada una de ellas.

En la primera parte de este capítulo se reporta el análisis numérico del proceso de amplificación paramétrica en la fibra de cristal fotónico propuesta. Se estudió la distribución de los modos transversales propagantes por medio del simulador comercial MODE de la compañía de software Lumerical Solutions © y se implementó el método numérico de Fourier por paso dividido (SSFM) para resolver las ecuaciones diferenciales parciales acopladas de las amplitudes de los cuatro campos involucrados en el proceso. Estos métodos fueron introducidos en las secciones 3.5.1 y 3.5.2, respectivamente. Mediante el análisis modal fue posible hacer un cálculo más preciso del pará-

metro no lineal  $\gamma$ . Estos estudios se hicieron con el fin de determinar las características espectrales y la amplitud final de la señal generada de interés. Conocer la amplitud final de la señal a caracterizar es fundamental para la simulación de los valores de cuadratura en el experimento de tomografía homodina.

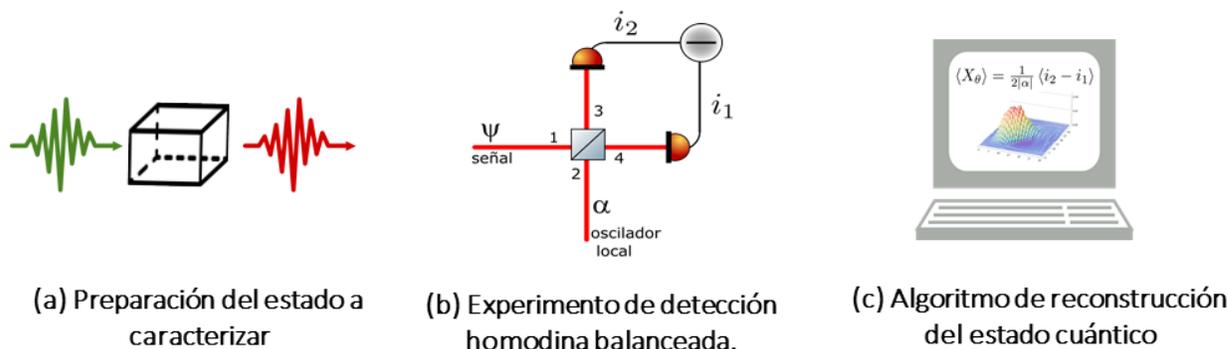
Posteriormente, se discute el diseño propuesto del arreglo de detección homodina y el protocolo de análisis de datos por medio de los algoritmos discutidos en la sección 2.3.4. Finalmente, se desarrolla la simulación del experimento de tomografía cuántica, presentando los datos de cuadraturas simulados por medio de un algoritmo de aceptación y rechazo, y el estado cuántico reconstruido.

## 4.2 Diseño experimental

### 4.2.1 Preparación del estado a caracterizar:

En esta sección se presentarán las características del diseño de la primera etapa, que consiste en la preparación del experimento de mezclado de cuatro ondas (FWM) estimulado. A modo de recordatorio, vale la pena destacar que en un experimento de FWM estimulado se deben establecer dos elementos principales: el medio de generación y los campos que darán lugar al fenómeno (bombeo y semilla). De manera que el problema de diseño se resume en encontrar las características idóneas de estos elementos, para los cuales es factible la generación de la amplificación paramétrica.

Como se mencionó en el capítulo 3, en este proyecto se propone utilizar como medio de generación la fibra óptica de cristal fotónico comercial NL-PM-750, de NKT-



**Figura 25.** Esquema de las etapas de un experimento de tomografía homodina en óptica cuántica.

Photonics (2012) que, en general, se trata de una fibra óptica de sílice pura, con un núcleo de alrededor de  $1.8 \mu\text{m}$  de diámetro y que mantiene la polarización. Los parámetros de la fibra más relevantes para el diseño experimental son *el parámetro no lineal  $\gamma$  y las curvas de dispersión*. El parámetro no lineal  $\gamma$  define la eficiencia con la cual se generarán los efectos ópticos no lineales de tercer orden, y en este caso, el fabricante reporta un valor de alrededor de  $95(W\text{ km})^{-1}$ . En la sección 4.2.1.1 se presenta un cálculo más preciso de este parámetro. Por otro lado, la dispersión de la fibra define la condición de empatamiento de fases mediante la cual se pueden determinar las longitudes de onda del bombeo y de la semilla para las cuales es eficiente la generación del mezclado de cuatro ondas. En la sección 3.7.1 se muestra esta condición de forma detallada.

Otro aspecto importante a considerar son las pérdidas que experimentan los campos al propagarse por la fibra. Estas pérdidas se atribuyen en general a tres fenómenos: dispersión o esparcimiento, absorción y radiación<sup>1</sup> (Hunsperger, 2009). Generalmente se cuantifican las pérdidas a través del coeficiente de atenuación. En el caso de la fibra NL-PM-750, el coeficiente de atenuación no excede los 85 dB/Km en el intervalo de frecuencias de trabajo (NKT-Photonics, 2012), y dado que la longitud de la fibra es menor a un metro, se tendrá una transmisión superior a 98 %.

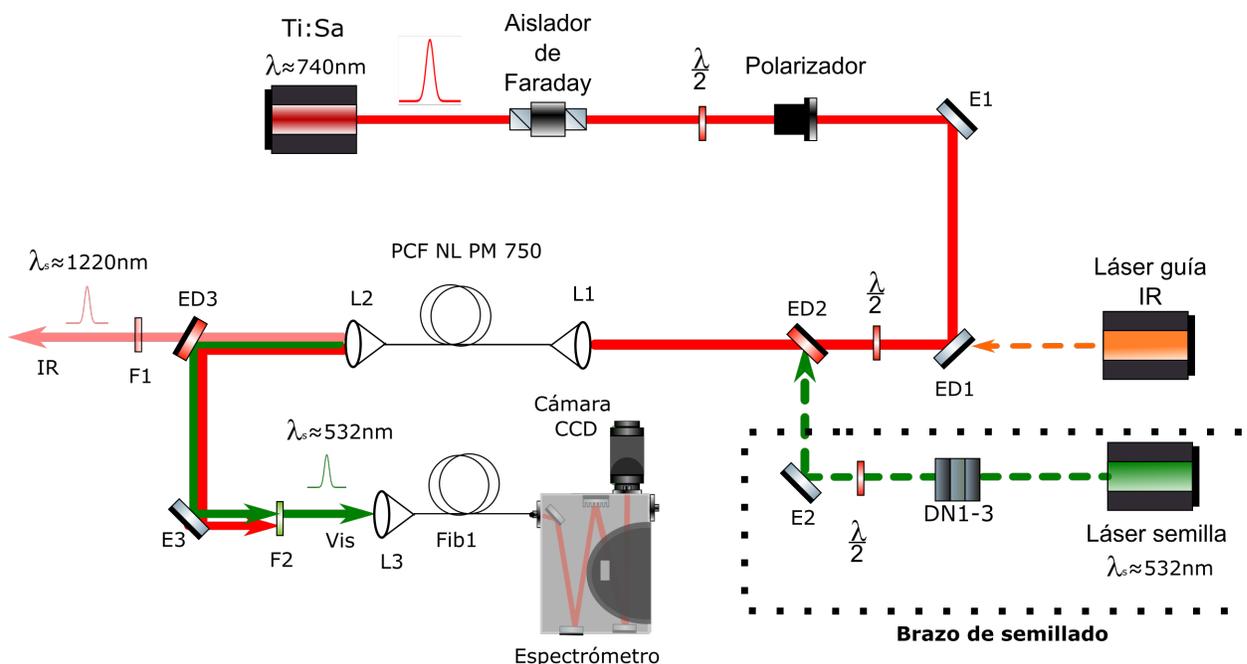
Como fuente de bombeo se propone un láser ultra-rápido de modos amarrados de titanio zafiro (Ti:Sa *Mode-locked* MIRA 900 P-Coherent), el cual emite trenes de pulsos menores a 3 ps con una tasa de repetición de 76MHz, sintonizable entre 700 nm y 980 nm, y con ancho espectral a la mitad del máximo (FWHM) de aproximadamente 0.4 nm. En la sección 3.4.1 se presentan con más detalle las características tanto del medio como del bombeo en el contexto de la definición de los modelos teóricos, y en las secciones 3.7.1 y 3.7.2 se presentan las características más relevantes en el contexto de la implementación experimental.

El arreglo experimental que se propone para el proceso de FWM estimulado está basado en aquel que se presentó en la sección 3.7 para el proceso espontáneo (Ver figura 26). Este arreglo cuenta con la adición de un *brazo de semillado*, identificado en el recuadro punteado en la figura 26, en comparación con el implementado anteriormente. El brazo de semillado incluye un láser verde de onda continua con longitud de

<sup>1</sup>Este tipo de pérdida puede llegar a ser considerable si la fibra es doblada en cierta dirección curva.

onda de 532 nm (denominado *el campo semilla*), filtros de densidad neutra (DN1-3) para controlar la intensidad y una placa de media onda ( $\lambda/2$ ) para ajustar la polarización. También se incluyen los espejos E2 y ED2 para lograr una alineación precisa previo al acoplado a la fibra óptica de cristal fotónico. ED2 es un espejo dicrótico, que transmite la luz con longitud de onda mayor a 650nm, por lo que en este caso permite la transmisión del bombeo y la reflexión del campo semilla, y por consiguiente ambos pueden ser acoplados a la fibra óptica de manera simultánea.

Es importante mencionar que el láser verde que se propone usar como semilla es el Verdi G5 de Coherent (2020), el cual a su vez corresponde con el láser de bombeo del Ti:Sa. Para este experimento se plantea dividir el láser Verdi antes de entrar a la cavidad del Ti:Sa mediante un divisor de haz de alta transmitancia<sup>2</sup>, de modo que el haz transmitido es acoplado a la cavidad del láser pulsado y el haz reflejado sirve como semilla para el experimento de amplificación paramétrica. Este dato es importante porque implica que la semilla (láser verde) y el bombeo (láser pulsado Ti:Sa) que son acoplados a la fibra óptica de cristal fotónico tienen una relación fija de fase, lo cual permite que la amplificación paramétrica sea estable y reproducible para todos los



**Figura 26.** Arreglo experimental para la generación del proceso de mezclado de cuatro estimulado en una fibra de cristal fotónico.

<sup>2</sup>Este proceso no se muestra en el arreglo experimental presentado en la figura 26. Este diagrama corresponde con una versión simplificada donde el brazo de semillado se muestra de manera independiente.

pulsos (Ciriolo *et al.*, 2017).

De acuerdo con los resultados obtenidos en los avances en la implementación experimental, se tiene que para lograr la generación del fenómeno de amplificación paramétrica en la fibra NL-PM-750 utilizando un campo semilla con longitud de onda de 532 nm, será necesario sintonizar el láser de bombeo en 740.8 nm y ajustar su polarización lineal en una orientación no paralela a los ejes principales de la fibra. Con lo anterior, se obtendrá un haz coherente pulsado, centrado en  $\lambda = 1220 \text{ nm}$ , con la misma tasa de repetición del bombeo.

A la salida de la fibra es preciso conservar una etapa de medición de espectros, que servirá como elemento de control. Mediante la medición del espectro de la señal visible, se podrá ajustar la sintonización de la longitud de onda del bombeo, de manera que sea lo más precisa posible para que la longitud de onda central de la señal visible coincida con la semilla (similarmente a como se muestra en la figura 24a), de modo que sí se genere la amplificación paramétrica.

El último aspecto a considerar es la intensidad del bombeo y la semilla para que se dé una amplificación suficiente de la señal que se busca caracterizar mediante detección homodina. Es importante estimar un rango de potencias adecuadas de trabajo para que sea factible la implementación del arreglo de caracterización y a fin de que la señal sea detectable por el detector homodino. Esto es, considerando que en este trabajo se planea aprovechar el fenómeno de amplificación paramétrica para generar el oscilador local, el cual es necesario para hacer el muestreo de la señal en la detección homodina. Un parámetro de referencia para determinar la potencia mínima detectable es *la potencia equivalente al ruido* del detector ( NEP, por sus siglas en inglés). En esta tesis se propone el uso del detector homodino PDB570C de Thorlabs (2019), con  $NEP = 1 \text{ pW}/\sqrt{\text{Hz}}$ , lo cual es equivalente a una potencia mínima de alrededor de 20nW considerando el ancho de banda del detector de 435MHz. Sin embargo, es importante tener en cuenta que también habrán pérdidas en el arreglo de caracterización, por lo cual la potencia mínima de la señal debe ser superior al NEP.

Para estimar el nivel de amplificación esperado de manera más confiable y para tener un entendimiento profundo de las características espectrales y temporales de la señal generada de interés, se presentan dos análisis numéricos basados en la so-

lución de los modelos teóricos introducidos en el capítulo 3. En resumen, los análisis numéricos que se presentan a continuación son: el análisis modal, mediante el cual se encuentran soluciones numéricas a la ecuación de Helmholtz (ec. 111) para los cuatro campos involucrados; y la solución de las ecuaciones no lineales de Schrödinger acopladas (ec. 150 a ec. 153). En conjunto nos otorgan una solución completa al problema de la propagación de campos en la fibra óptica de cristal fotónico que se utilizó en este proyecto.

#### **4.2.1.1 Modos transversales propagantes: modelado computacional.**

El primer paso para estudiar el problema de la generación del fenómeno de FWM estimulado en la fibra óptica de cristal fotónico es el análisis modal, es decir, encontrar las distribuciones transversales del campo eléctrico que son soluciones a las ecuaciones de Maxwell. Para esto se utilizó el simulador comercial MODE de la compañía de software Lumerical Solutions ©, el cual fue introducido en la sección 3.5.1.

Para implementar las simulaciones se requiere:

1. Definir la sección transversal de la fibra óptica.
2. Definir el índice de refracción de los materiales de la fibra en cada región de la sección transversal.
3. Definir una malla de simulación y las condiciones de frontera.

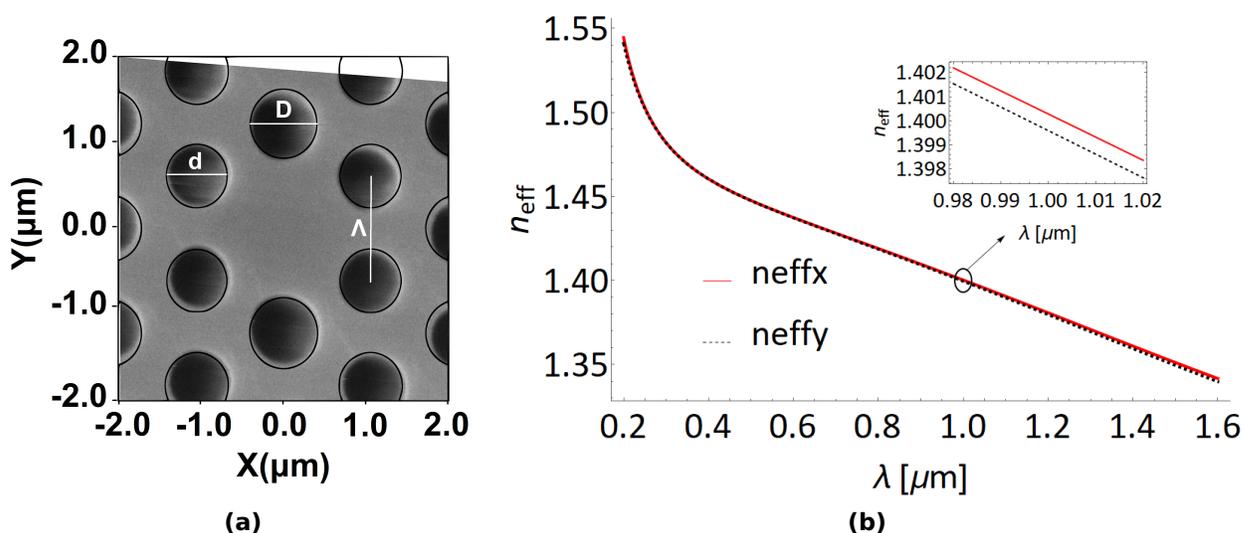
El perfil transversal de la fibra óptica NL-PM-750 fue analizado por medio de la técnica de microscopía electrónica de barrido (SEM) (De la Torre Robles, 2021a), y el post-procesamiento de imágenes se realizó por medio del software libre Fiji-ImageJ™ (Schindelin *et al.*, 2012). Esta es una fibra de cristal fotónico con cavidad hexagonal (compuesta de un arreglo de agujeros de aire) y con núcleo sólido, tal como se presenta en las figuras 13a y 27a. La sección transversal de la fibra presenta una asimetría en la región circundante al núcleo. En este caso, dos de los agujeros de aire centrales tienen un diámetro mayor al resto de los agujeros. En la figura 27a se indican los parámetros de la fibra que fueron analizados por medio del software ImageJ: los diámetros de los agujeros  $d$  y  $D$  ( $D > d$ ) y la distancia entre ellos  $\Lambda$  (también conocido como el

*pitch*). Se obtuvieron los siguientes valores:  $d=0.776\pm 0.024 \mu\text{m}$ ,  $D=0.850\pm 0.029 \mu\text{m}$ ,  $\Lambda = 1.282 \pm 0.023 \mu\text{m}$ , los cuales fueron utilizados para definir la estructura del perfil transversal de la fibra en el software MODE de *Lumerical*. Se verificó la concordancia entre el perfil simulado y el perfil de la micrografía SEM mediante la superposición del primero sobre el segundo (ver figura 27a).

El segundo aspecto a tener en cuenta es la definición del índice de refracción de los materiales de la fibra en cada región de la sección transversal. Se definió el índice de refracción  $n$  del material de la fibra de acuerdo con la ecuación de Sellmeier para la sílice pura (considerando la longitud de onda  $\lambda$  en  $\mu\text{m}$ ):

$$n^2(\lambda) = A_1 + \frac{B_1\lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2\lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3\lambda^2}{\lambda^2 - C_3}, \quad (241)$$

donde  $A_1 = 1$ ,  $B_1 = 0.6961663$ ,  $C_1 = 0.0046791$ ,  $B_2 = 0.4079426$ ,  $C_2 = 0.0135120$ ,  $B_3 = 0.8974794$  y  $C_3 = 97.934002$  (Malitson, 1965; Tan, 1998). Se asignó un índice de refracción  $n = 1$  para la estructura de agujeros.



**Figura 27.** a) Corroboración de la concordancia entre el perfil simulado y el perfil de la micrografía SEM de la fibra NL-PM-750 en una región cercana al núcleo. b) Curvas de los índices de refracción efectivos de los modos fundamentales  $HE_{11}^x$  y  $HE_{11}^y$ , simuladas mediante el software MODE solutions (Lumerical).

Se definió una malla de simulación centrada en el núcleo de la fibra, en un área de  $4 \mu\text{m} \times 4 \mu\text{m}$ , a fin de que se pudiera tener una mayor precisión en el cálculo. Cada punto de la malla está separado por una distancia  $\Delta x = \Delta y = 6.67 \text{nm}$ . Después de definir los puntos anteriores, se aplicaron condiciones de frontera apropiadas. Para

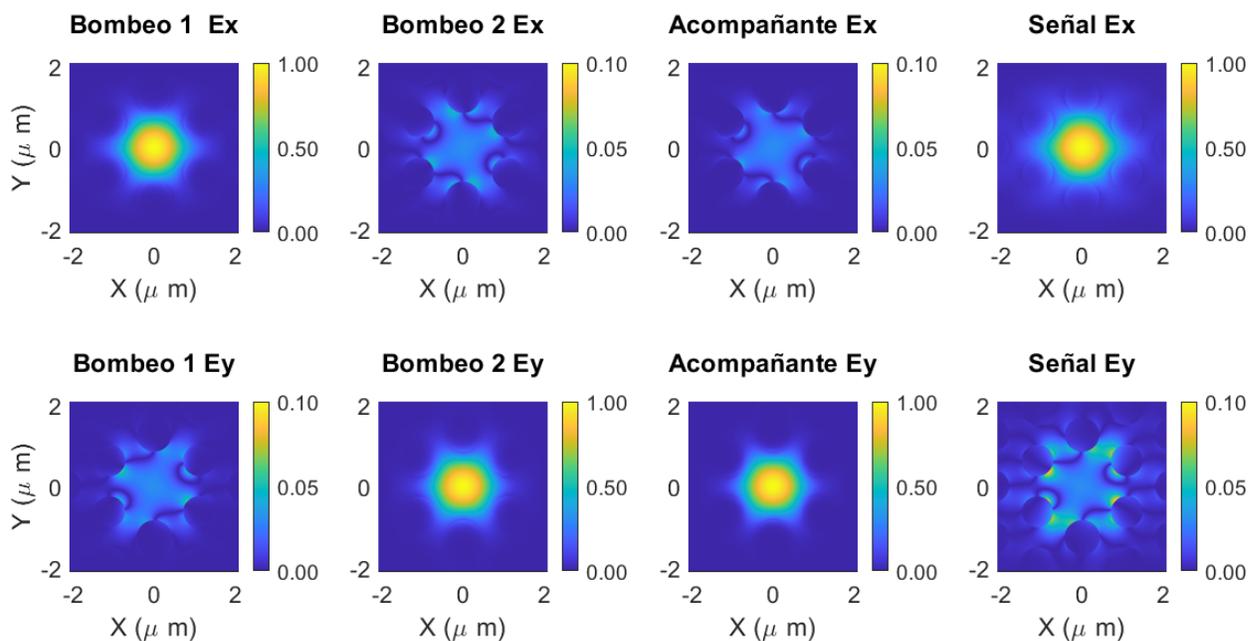
resolver este tipo de problemas, se recomienda el uso de la condición conocida como de *capas perfectamente combinadas* (*perfectly matched layer, PML*). Este es uno de los métodos más utilizados para truncar el dominio computacional, que consiste en añadir una capa absorbente alrededor de este, de tal manera que se eliminan reflexiones no deseadas en el borde de la región de simulación (Lumerical, 2020b).

## Resultados y discusión:

**1) Distribuciones espaciales de los modos:** Se calcularon las distribuciones espaciales de los modos soportados por la fibra a las longitudes centrales de los cuatro campos involucrados en el mezclado de cuatro ondas, de acuerdo con el diseño presentado previamente. Son de interés los modos confinados en el núcleo, puesto que aquellos que no lo están disipan energía rápidamente (Paschotta, 2008c). Se denominó como *modo fundamental* a aquel con el mayor índice de refracción efectivo a cada longitud de onda específica y con el perfil más similar a una distribución gaussiana. Este tipo de modos son los que proporcionan el mayor confinamiento de luz en el núcleo de la fibra (Saleh y Teich, 1991).

En guías de ondas, los modos suelen clasificarse como *transversal eléctrico* (TE), si no tienen componentes del campo eléctrico en la dirección de propagación, *transversal magnético* (TM), si no tienen componentes del campo magnético en la dirección de propagación, o *transversal electromagnético* (TEM) si se cumplen ambas condiciones. En fibras ópticas en general se obtienen unos modos denominados *híbridos* (HE o EH), que no cumplen con tales condiciones. Sin embargo, se puede dar el caso para el cual la componente longitudinal es mucho más débil que las componentes transversales en este tipo de modos, de tal manera que son aproximadamente TE, TM o TEM. Este es el caso que se da para la propagación de los campos en la fibra de cristal fotónico que se está analizando, de acuerdo con los resultados obtenidos en las simulaciones (98.9% TEM).

Con el objetivo de conservar la generalidad, en este trabajo nos concentramos en los modos fundamentales  $HE_{11}^x$  y  $HE_{11}^y$ . Este etiquetado está en concordancia con la convención que se presentó en la sección 3.4.1, para la cual se asignó la etiqueta X al estado de polarización lineal paralela al eje lento de la fibra, y Y al estado de



**Figura 28.** Distribuciones espaciales de los modos considerando las longitudes de onda centrales  $\lambda_p = 740.8nm$  (bombeos 1 y 2),  $\lambda_i = 532nm$  (campo acompañante) y  $\lambda_s = 1220nm$  (campo señal), con las polarizaciones definidas para el proceso de interés  $XYXX$ . Los campos están normalizados al valor máximo de la componente dominante.

polarización lineal paralela al eje rápido. El eje a lo largo del cual el índice de refracción efectivo es menor corresponde con el *eje rápido*, porque la velocidad de fase es mayor para la luz que se propaga en esa dirección (Agrawal, 2019), y, de la misma manera, el eje con mayor índice efectivo corresponde con el *eje lento* (ver figura 27).

En la figura 28 se muestran las amplitudes de las componentes transversales de los cuatro campos involucrados en el mezclado de cuatro ondas, para las cuales se consideraron las longitudes de onda centrales  $\lambda_p = 740.8nm$  (bombeos 1 y 2),  $\lambda_i = 532nm$  (campo acompañante) y  $\lambda_s = 1220nm$  (campo señal), con las polarizaciones definidas para el proceso de interés  $XYXX$ . Los campos están normalizados al valor máximo de la componente dominante. El cálculo de la distribución transversal de los modos nos permite conocer con mayor precisión el valor del área efectiva de cada uno de ellos, el cual es uno de los parámetros que más influyen en la generación de los efectos no lineales de tercer orden en la fibra óptica. Esto es, recordando que el área efectiva es inversamente proporcional al parámetro no lineal  $\gamma$ .

**2) Cálculo del parámetro no lineal  $\gamma$ :** El parámetro no lineal  $\gamma$  define la eficiencia con la cual se generarán los efectos ópticos no lineales de tercer orden. Previamente

se había mencionado que el fabricante reporta un valor de alrededor de  $95(W\ km)^{-1}$ , definido como resultado de la automodulación de fases para un campo con longitud de onda central  $\lambda = 780\ nm$ . Sin embargo, es preciso tener en cuenta que este parámetro no sólo depende de la longitud de onda de los campos si no también del área modal efectiva, la cual puede variar dependiendo del tipo de proceso no lineal en cuestión<sup>3</sup>.

Uno de los objetivos principales de este estudio es determinar las condiciones adecuadas para la generación del fenómeno de amplificación paramétrica en la PCF NL-PM-750 y, dado que se incluyeron los efectos de auto-modulación de fases, modulación de fases cruzadas y mezclado de cuatro ondas, es necesario hacer un cálculo más preciso de este coeficiente para cada uno de estos procesos. Una variación en este coeficiente influye de manera superlativa en la eficiencia de la generación de la amplificación paramétrica.

En esta sección se presenta el cálculo de los coeficientes  $\gamma$  para los fenómenos mencionados, de acuerdo con las ecuaciones 125, 126, 131 y 132, respectivamente. Se consideró un índice de refracción no lineal  $n_2 = 3.5 * 10^{-20}\ m^2/W$  para la sílice (Agrawal, 2019; Olivier *et al.*, 2004), y de  $n_2 = 7.9 * 10^{-24}\ m^2/W$  para el aire (de Souza *et al.*, 2017). Teniendo en cuenta las ecuaciones 131 y 132, y las distribuciones de los modos transversales que se calcularon por medio del software MODE (Lumerical), se obtuvieron los siguientes valores para los coeficientes  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= 168.1\ (W\ km)^{-1}, & \gamma_{31} &= 177.8\ (W\ km)^{-1}, \\ \gamma_{12} &= 168.4\ (W\ km)^{-1}, & \gamma_{32} &= 178.4\ (W\ km)^{-1}, \\ \gamma_{21} &= 168.4\ (W\ km)^{-1}, & \gamma_{41} &= 142.3\ (W\ km)^{-1}, \\ \gamma_{22} &= 168.9\ (W\ km)^{-1}, & \gamma_{42} &= 142.4\ (W\ km)^{-1}, \\ \gamma_{3412} &= \gamma_{4312} = 147.1\ (km\ W)^{-1}. \end{aligned}$$

Los términos  $\gamma_{ij}$  corresponden al coeficiente no lineal que resulta de la modulación de fase del campo  $i$  ocasionado por el campo  $j$ , y los términos  $\gamma_{ijkl}$  corresponden al coeficiente no lineal que resulta de la interacción de los cuatro campos en el mezclado de cuatro ondas, considerando los bombeos  $k$  y  $l$ . Otros autores reportan valores

<sup>3</sup>Esto se puede observar en la definición de este parámetro en las ecuaciones acopladas de amplitud de los campos en el mezclado de cuatro ondas ( ecs. 131, 132, y ec. 138 a ec. 141).

del orden de  $110 (W km)^{-1}$  para esta misma fibra (Ishii *et al.*, 2006; Erkintalo *et al.*, 2010). La principal diferencia con respecto al valor reportado por el fabricante podría atribuirse a la definición del área modal efectiva. Si se aproxima el área modal al área de un círculo con un diámetro igual al de la fibra ( $A_{eff} \approx 2.54 \mu m^2$ ), se obtiene un valor de  $\gamma$  aproximado al reportado por el fabricante. Sin embargo, del estudio realizado para calcular las distribuciones de los modos transversales se encontró que el área modal efectiva es menor a tal valor ( $A_{eff} \approx 1.8 \mu m^2 - 2.08 \mu m^2$ ), y a menor área modal efectiva, se obtiene un coeficiente  $\gamma$  mayor.

#### **4.2.1.2 Mezclado de cuatro ondas en la fibra de cristal fotónico NL-PM-750: Solución numérica de las ecuaciones acopladas de amplitud.**

El método de Fourier por paso dividido (SSFM) fue implementado en Matlab para analizar la propagación de los cuatro campos en el mezclado de cuatro ondas en la fibra mencionada. Por medio de este método se encontró la solución numérica al sistema de ecuaciones no lineales de Schrödinger acopladas que describen la propagación (ecs. 150 a 153). Se trabajó en la aproximación de bombeo inagotable, asumiendo que, además de acoplar el bombeo, también se acopla un *láser semilla* con la misma longitud de onda que la señal visible de interés, de manera que se genera una amplificación de las señales generadas (Agrawal, 2013). Se trabajó con la forma matricial del sistema de ecuaciones, tal como se muestra en la ecuación 159. En esta sección se presentarán los parámetros principales del algoritmo.

Los dos primeros aspectos a tener en cuenta son las definiciones de la ventana temporal y longitudinal de la simulación. Se siguieron las consideraciones presentadas en el libro *Nonlinear fiber optics* de Agrawal (2019) y en la tesis doctoral de Washburn (2002), las cuales son resumidas a continuación:

- La *ventana temporal* debe ser mucho más ancha que el ancho de los pulsos y debe ser lo suficientemente ancha como para que cubra cualquier ensanchamiento del pulso a lo largo de la fibra ocasionado por la dispersión al propagarse. Si la solución  $A_i(z, t)$  se extiende por fuera de la ventana de simulación, ocurren errores de *aliasing*, o solapamiento. Siguiendo la notación de Agrawal (2019), se define a

la ventana temporal por el intervalo  $-T_m \leq t \leq T_m$ .

Además de esto, también es importante especificar una resolución temporal adecuada. Si no hay un muestreo apropiado, también pueden ocurrir errores de *aliasing*. Aún más importante: en el método SSFM se utiliza el algoritmo de la *transformada rápida de Fourier* (FFT), y el uso de la FFT trae consigo restricciones sobre el muestreo temporal, ya que este influye en la resolución angular. Las resoluciones temporal y angular se definen como:

$$\delta t = \frac{2T_m}{N}, \quad (242)$$

$$\delta \omega = \frac{2\pi}{\delta t N}, \quad (243)$$

donde  $N$  es el número de puntos del vector temporal. Se deben buscar entonces valores de  $T_m$  y  $N$  lo suficientemente grandes, de manera que tanto los campos  $A_i(z, t)$  como su transformada de Fourier sean apropiadamente muestreadas. En este trabajo se definió una ventana con  $T_m = 128T_0$ , considerando  $T_{FWHM} \approx 3 \text{ ps}$  y  $T_{FWHM} = 2(\ln 2)^{1/2}T_0$ , donde  $T_0$  es el ancho medio a la altura  $1/e$  en la curva de intensidad de los pulsos del bombeo 1, y con un número de puntos  $N = 2^{14}$ . Con estos parámetros, se alcanza una resolución temporal de  $\delta t = 0.04 \text{ ps}$ , lo cual implica que al menos se tendrán 64 puntos muestreados en el ancho del pulso.

- La resolución espacial también debe ser cuidadosamente escogida. A modo de recordatorio, en este esquema se discretiza la longitud de propagación  $L$  (o sea, la longitud de la fibra), en un número de pasos  $M$ , de tal manera que el tamaño de cada paso será de  $h = L/M$ . En esta tesis se trabajó con un tamaño de paso constante; no obstante, también se podrían definir pasos variables o ajustables.

El tamaño máximo del paso depende de las propiedades dispersivas y no lineales del medio. En este sentido, se tomaron como referencia para acotar el tamaño del paso a las longitudes de dispersión  $L_{dj}$  (ec. 157) y no lineales  $L_{NL}$  (ecs. 168 y 169) que se presentaron en la sección 3.4.3.1.

Se obtuvieron los siguientes valores para las longitudes de dispersión:

$$L_{d1} = 3667.95 \text{ m},$$

$$L_{d3} = 73.16 \text{ m},$$

$$L_{d2} = 1175.42 \text{ m},$$

$$L_{d4} = 152.50 \text{ m},$$

donde el subíndice indica que el cálculo se hizo con respecto a la longitud de onda central de cada campo, en el siguiente orden: bombeo 1, bombeo 2, campo acompañante y campo señal. Los valores tan altos de las longitudes de dispersión de los bombeos se atribuyen a que su longitud de onda se encuentra cerca a la longitud de onda de cero dispersión de la fibra. Del cálculo anterior se resalta que, dado que la longitud de la fibra es menor a 1 m y este valor es mucho menor a las magnitudes de  $L_{dj}$ , se espera que los efectos dispersivos no sean significativos en la propagación.

Por otro lado, se calcularon las longitudes no lineales para una potencia promedio máxima del bombeo de 120 mW, teniendo en cuenta que este es uno de los niveles máximos considerados en la implementación experimental. Se obtuvo una longitud mínima de  $L_{NL} = 0.045$  m. Considerando lo anterior, se eligió un paso  $h \approx 9.4 * 10^{-3}$  m.

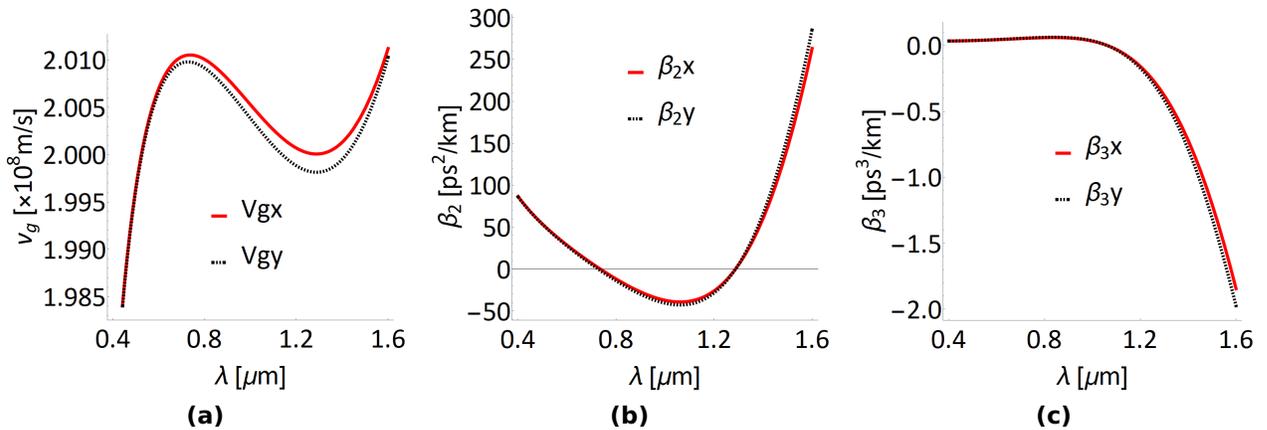
Una vez determinadas la resolución y las ventanas temporal y espacial, se presentan los parámetros de entrada del algoritmo, los cuales consisten principalmente de: las características iniciales de los campos, el parámetro no lineal para cada proceso y la dispersión de la fibra. En primer lugar, se considera el campo de bombeo pulsado y el campo semilla de onda continua, teniendo en cuenta las condiciones del experimento que inspiró este estudio. Recordando que en el modelo se normalizaron las amplitudes  $A_j(z, t)$ , de tal forma que  $|A_j(z, t)|^2$  tenga unidades de potencia, se consideró un bombeo inicial de la forma:

$$A_j(0, \tau) = \sqrt{P_{pj}} U_j(0, \tau), \quad j = 1, 2, \quad (244)$$

para representar a las componentes de polarización x y y.  $U_j(0, \tau)$  representa una distribución normalizada que puede ser ajustada dependiendo del perfil de los pulsos. En este trabajo se definieron pulsos gaussianos de la forma:

$$U(0, \tau) = e^{-\tau^2/2}. \quad (245)$$

Es de resaltar que en la formulación del perfil 245 se tuvo en cuenta la distinción entre las variables temporales  $t$  y  $\tau$ , siendo  $\tau$  una variable adimensional para el tiempo en el marco de referencia del bombeo 1 y normalizada con respecto al ancho medio



**Figura 29.** Curvas de los parámetros de dispersión de la fibra PCF NL-PM-750.  $v_g$ : Velocidad de grupo,  $\beta_2$ : Parámetro de dispersión de la velocidad de grupo (GVD),  $\beta_3$ : Parámetro de dispersión de tercer orden, definidas en las ecuaciones 246, 247 y 248.

a la altura  $1/e$  en la curva de intensidad, tal como se definió en la ecuación 144. Finalmente, se consideraron un campo señal nulo ( $A_4(0, \tau) = 0$ ) y un campo semilla de la forma  $A_3(0, \tau) = \sqrt{P_{avg_3}}$ .

En la figura 29 se muestran las curvas de los parámetros de dispersión  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y  $\beta_3$ . Estos términos fueron introducidos en el capítulo 3 (ec. 115) y se calcularon a partir de las curvas de los índices de refracción efectivos,  $n_x(\lambda)$  y  $n_y(\lambda)$ , que fueron caracterizadas por De la Torre Robles (2021a), por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\beta_1(\lambda) = \frac{1}{v_g(\lambda)} = \frac{1}{c} \left( n_{eff}(\lambda) - \lambda \frac{dn_{eff}(\lambda)}{d\lambda} \right), \quad (246)$$

$$\beta_2(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{d\beta_1(\lambda)}{d\lambda}, \quad (247) \quad \beta_3(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{d\beta_2(\lambda)}{d\lambda}. \quad (248)$$

Los últimos dos elementos por concretar son los operadores de dispersión y no lineal. Por un lado, el operador de dispersión se había definido como un operador diferencial, como se puede ver en las ecuaciones 161, 154 y 155. Una de las ventajas del algoritmo SSFM es que se calcula el efecto de la dispersión en el dominio de las frecuencias por medio de la transformada de Fourier, donde este operador toma la siguiente forma:

$$\hat{D}_{\tau 1}(\omega) = -\frac{i}{2} \frac{L}{L_{d1}} \omega^2 - \frac{i}{6} \frac{L}{L_{tod1}} \omega^3, \quad (249)$$

$$\hat{D}_{\tau j}(\omega) = -i \frac{L}{L_{wj}} \omega - \frac{i}{2} \frac{L}{L_{dj}} \omega^2 - \frac{i}{6} \frac{L}{L_{todj}} \omega^3, \quad (n = 2, 3, 4.). \quad (250)$$

$L$  es la longitud de la fibra, y las longitudes de dispersión  $L_{wj}$ ,  $L_{dj}$  y  $L_{todj}$  fueron definidas en las ecuaciones 156,157 y 158, respectivamente.

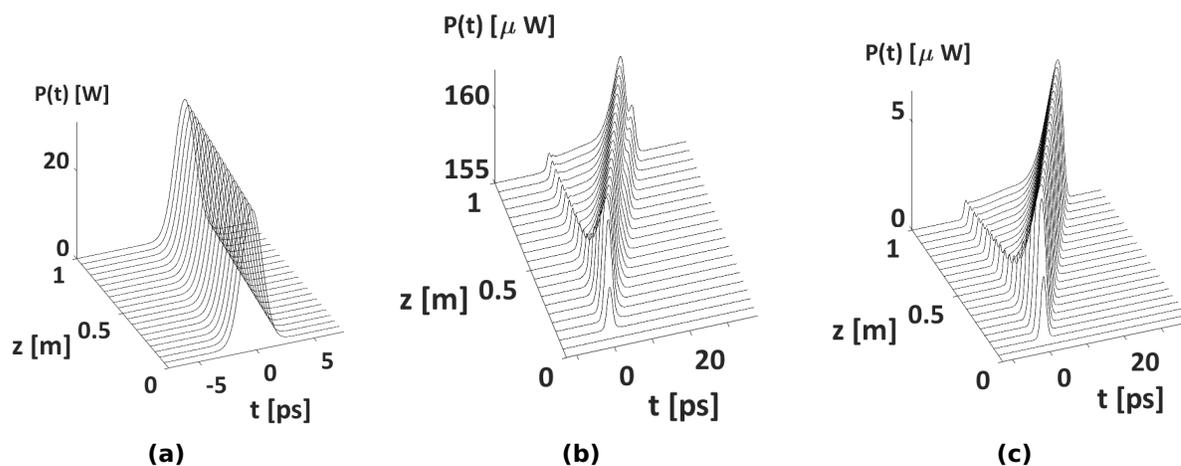
Recordando la relación 176 que forma la base para el algoritmo SSFM, se destaca que este es un algoritmo iterativo, y que cada iteración consiste de una aplicación sucesiva de los operadores no lineal y de dispersión. Un aspecto a resaltar es que, como se puede notar en las ecuaciones 249 y 250, los cambios de fase inducidos por la dispersión sólo dependen de cantidades constantes y por lo tanto, bastará con calcular el operador una sola vez. Por lo que se refiere al operador no lineal, definido en las ecuaciones 162,163 y 164, se advierte que éste depende de las amplitudes de los campos y, dado que cada una de ellas varía en cada iteración, será necesario re-calcular el operador no lineal en cada paso. Habiendo definido ya todos los elementos que componen el algoritmo SSFM, sólo bastará seguir la estructura tal como se definió en la sección 3.5.2. Se validó el algoritmo mediante la implementación de simulaciones de diferentes casos presentados en la literatura, en particular, el libro de texto *Nonlinear fiber optics* de Agrawal (2019), que es una referencia fundamental para el estudio de este tipo de fenómenos. Las simulaciones realizadas reproducen los resultados numéricos reportados en la referencia.

### **Resultados:**

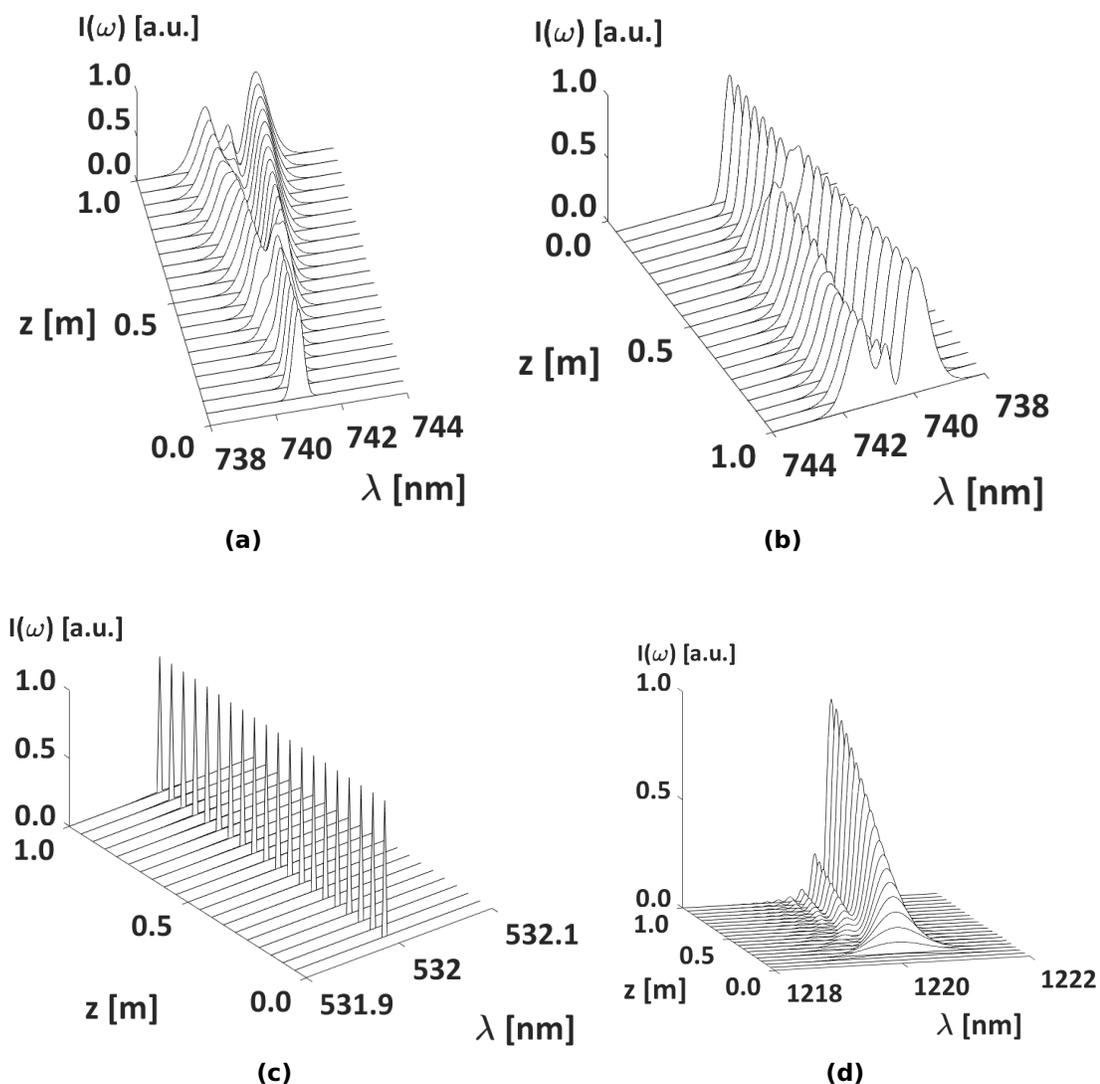
La evolución de los perfiles temporales y de los espectros de los campos involucrados en el mezclado de cuatro ondas estimulado se estudió mediante el algoritmo SSFM implementado, considerando diferentes condiciones iniciales. En primer lugar, se simuló el caso propuesto de propagación en la fibra PCF NL-PM-750, considerando un bombeo pulsado con potencia promedio  $P_{bombeo} = 15 \text{ mW}$ , con polarización lineal orientada a  $45^\circ$  de los ejes principales de la fibra, y un campo semilla de onda continua con potencia promedio  $P_{semilla} = 155 \text{ } \mu\text{W}$ , con polarización lineal paralela al eje rápido de la fibra. El nivel de potencia seleccionado para el bombeo es similar al que se consideró en la implementación experimental previa, presentada en la sección 3.7.

En las figuras 30 y 31 se muestran los resultados de la propagación. Es de notar que los cálculos se hicieron con el sistema de referencia temporal propio de la componente X del bombeo (ec. 144), el cual coincide con el marco que se mueve a la misma velocidad que el máximo de su envolvente. Es por esto que los tiempos negativos en las gráficas de la figura 30 corresponden con las componentes de los campos que van retrasadas con respecto al máximo de la componente X del bombeo.

Uno de los efectos más notables en el estudio de la propagación de pulsos de luz en fibras ópticas en el dominio del tiempo es el ensanchamiento de los mismos por efecto de la dispersión, como resultado de la dependencia del índice de refracción de los materiales con respecto a la frecuencia de la luz. Sin embargo, en esta simulación no se encontraron variaciones notables en el perfil temporal de intensidad del bombeo, como se puede observar en la figura 30a. Este comportamiento se esperaba, puesto que previamente se había determinado que la evolución de los pulsos en esta fibra estaba gobernada por los efectos no lineales, mientras que los efectos dispersivos juegan un papel relativamente menor, por la comparación de las longitudes de dispersión  $L_{dj}$  y no lineales  $L_{NL}$  con respecto a la longitud de la fibra. No obstante, sí se pudo observar un efecto relacionado con la dispersión y que vale la pena resaltar: el efecto de *walk-off* entre las dos componentes de polarización del bombeo, lo cual se puede apreciar en la figura 32a, que consiste en un desplazamiento entre las dos componentes que



**Figura 30.** Evolución del perfil temporal de los campos al propagarse a lo largo de la fibra: (a) Componente X del bombeo, (b) Campo acompañante. (c) Campo señal.  $P(t)$ : Potencia instantánea,  $z$ : Distancia en la dirección de propagación,  $t$ : Tiempo propio del bombeo 1.



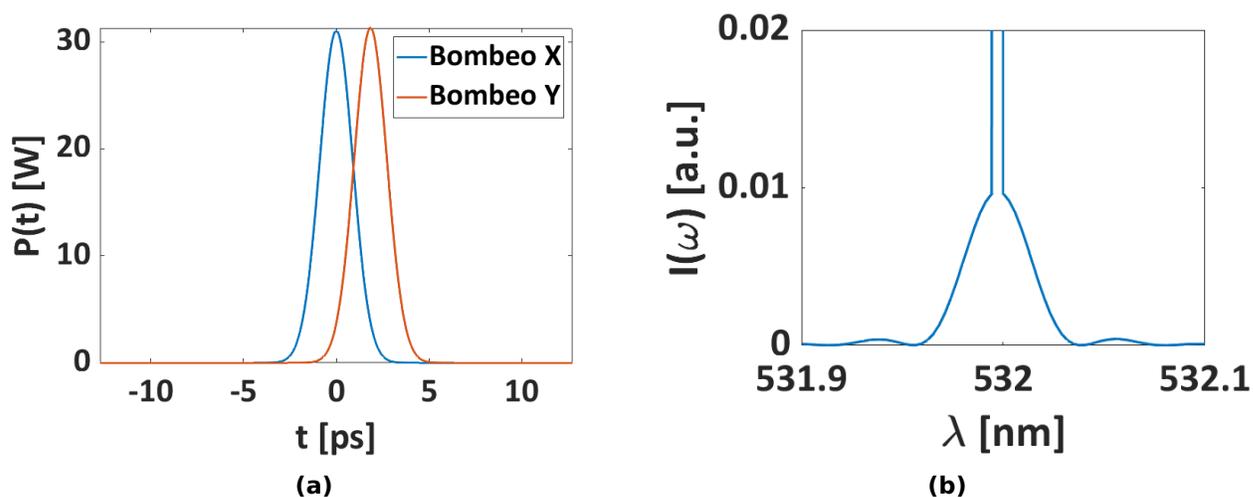
**Figura 31.** Evolución del espectro de los pulsos al propagarse a lo largo de la fibra NL-PM-750 (espectros normalizados): (a) Componente X del bombeo. (b) Componente Y del bombeo. (c) Campo acompañante. (d) Campo señal.  $I(\omega)$ : Intensidad normalizada al máximo del espectro en unidades arbitrarias,  $z$ : Distancia en la dirección de propagación,  $\lambda$ : Longitud de onda.

inicialmente estaban superpuestas, como resultado de sus diferentes velocidades de grupo. La consideración de ese desplazamiento es importante, puesto que la generación de los efectos no lineales para de ocurrir cuando el pulso que se mueve más rápido atraviesa completamente al pulso más lento (Agrawal, 2019).

La influencia que tuvieron los efectos no lineales en la propagación del bombeo se puede ver de manera más notoria en la evolución de los espectros. En las figuras 31a y 31b se destaca principalmente la incidencia de los fenómenos de auto-modulación de fases (SPM) y modulación de fases cruzadas (XPM) entre las dos componentes de

polarización del bombeo, lo cual se puede observar en la forma como se generó un ensanchamiento espectral y la aparición de una estructura de picos. Uno de los rasgos más notorios de la generación de XPM es la asimetría en los espectros. En ausencia de XPM se esperarían espectros simétricos y con menor ensanchamiento (Agrawal, 2019).

En la figura 30b se puede ver la evolución del perfil temporal del campo semilla, también denominado campo acompañante en este estudio. Se puede observar que inicialmente tenía un perfil de potencia constante, característico de un campo de onda continua, con un nivel inicial de  $155 \mu W$ . A lo largo de la propagación va adquiriendo una estructura pulsada, lo cual es resultado del fenómeno de amplificación paramétrica. A la salida de la fibra, se obtendrán pulsos centrados a una frecuencia igual a la del campo semilla y con la misma tasa de repetición del bombeo sobre un *pedestal* de potencia constante. El nivel del pedestal tiene un valor promedio igual a la potencia inicial de la semilla. El efecto del pedestal de potencia constante se puede constatar en el espectro del campo acompañante (figuras 31c y 32b), en donde se pueden resaltar dos contribuciones: el espectro de un campo de onda continua, caracterizado por ser una distribución típicamente lorentziana con un ancho bastante estrecho, similar a una distribución delta de Dirac, y una falda con una estructura más ancha, la cual corresponde con la contribución de la estructura pulsada que se fue formando sobre el pedestal. Este tipo de efectos ya se ha observado en experimentos de mezclado

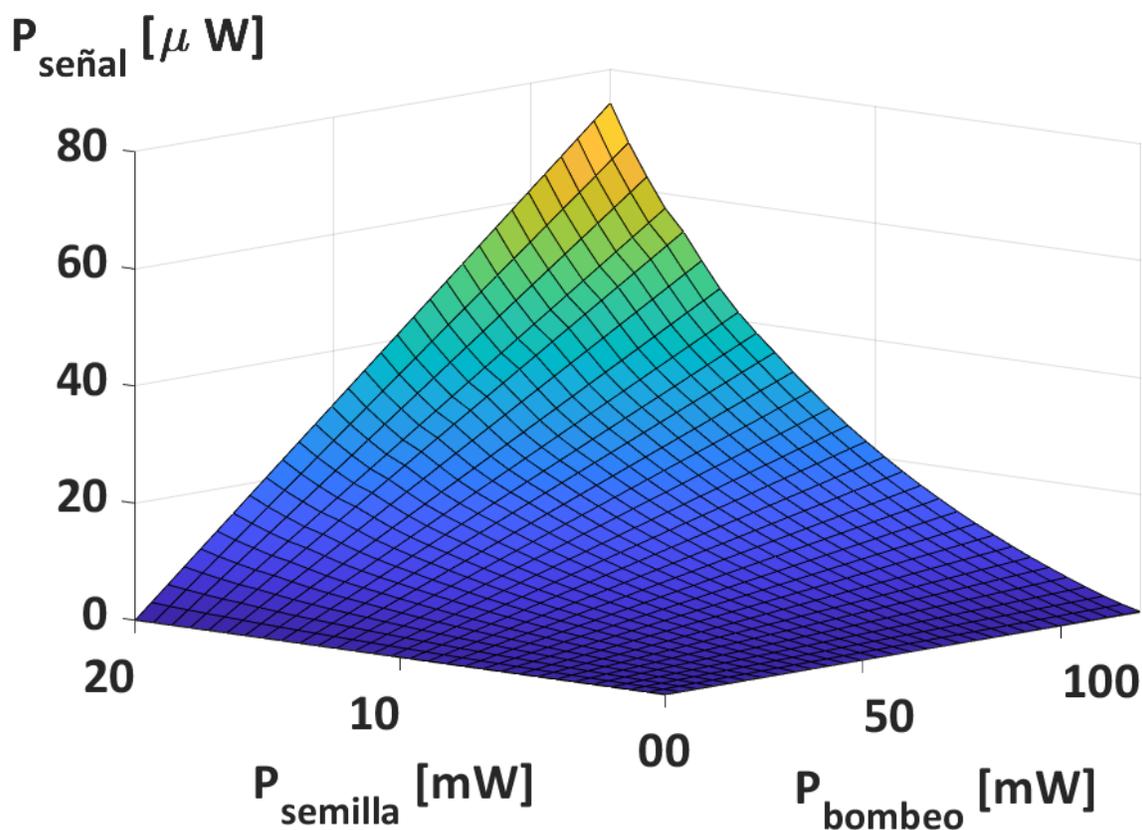


**Figura 32.** (a) Efecto de desplazamiento de las dos componentes de polarización del bombeo a la salida de la fibra. (b) Acercamiento al espectro del campo acompañante a la salida de la fibra.

de cuatro ondas estimulado con campos semilla de onda continua (Wei *et al.*, 2014; Lüpken *et al.*, 2021).

Finalmente, también se puede observar la generación de pulsos centrados a la frecuencia del campo señal ( $\lambda = 1220 \text{ nm}$ ) producidos mediante el fenómeno de amplificación paramétrica (ver figuras 30c y 31d). Los pulsos tienen un perfil temporal similar a los generados en el campo acompañante, sin embargo, se diferencia en que este campo no tiene contribución del pedestal de potencia constante, pues se consideró inicialmente nulo. Se resalta que el espectro a la salida de la fibra tiene una estructura de múltiples picos (fig. 31d), ocasionados por la modulación de fases del bombeo. Un efecto similar se observó en la implementación experimental del caso espontáneo (figura 23), lo cual da una luz a que en ese caso también se generó modulación de fases del bombeo y por esto se midió una estructura espectral similar.

Con base en simulaciones similares a la anterior, se calculó la potencia estimada del campo señal como función de diferentes valores de las potencias promedio del bombeo y de la semilla. En la figura 33 se muestran los resultados. Es importante estimar las intensidades del bombeo y la semilla adecuadas para las cuales se da una amplificación suficiente de la señal, de manera que sea factible la implementación del arreglo de caracterización mediante tomografía homodina. En la siguiente sección se presentarán con más detalle los criterios de selección de las potencias adecuadas, de acuerdo con el sistema de detección con el que se cuenta en el laboratorio.



**Figura 33.** Relación de la potencia generada del campo señal con respecto a la potencia del bombeo y la potencia de la semilla.

#### 4.2.2 Experimento de detección homodina

En esta sección se presentarán las características del diseño de la segunda etapa, que consiste en la implementación de un experimento de detección homodina balanceada (DHB). La DHB es un procedimiento que sirve para medir las componentes de cuadratura de campos ópticos, incluso a frecuencias ópticas altas (Leonhardt, 1997; Grynberg *et al.*, 2010), y que había sido introducido en la sección 2.3.3. De manera resumida, en un experimento de este tipo se hacen interferir la señal objeto de estudio con una señal de referencia, denominada *el oscilador local*, en un divisor de haz 50/50. El oscilador local se describe como una señal coherente que proporciona la fase de referencia para la medición de las cuadraturas. El resultado de la interferencia es detectado en cada puerto de salida del divisor de haz. La diferencia entre las fotocorrientes medidas es la cantidad relevante, puesto que es proporcional al valor medio de las cuadraturas de la señal de interés, de acuerdo con la relación 53 (o, en general para estados de banda ancha, de acuerdo con la ecuación 68).

A pesar de la sencillez aparente de la DHB, existen sutilezas relacionadas con la implementación experimental que pueden afectar de manera significativa el éxito de una medición de este tipo, y que se van a examinar en esta sección. En términos generales, se deben cumplir las condiciones fundamentales que garanticen la interferencia entre el oscilador local y la señal, las cuales se pueden sintetizar en dos criterios: *el empatamiento de los modos*<sup>4</sup> y *la estabilidad de la fase relativa* entre los dos campos. La primera condición implica que tanto la señal como el oscilador local deben tener la misma polarización y un traslape máximo entre sus distribuciones espaciales y espectros. Cualquier disimilitud entre estos parámetros se traducirá en pérdidas en la eficiencia de detección (Lvovsky y Raymer, 2009; Steinlechner *et al.*, 2018). La segunda condición implica que debe haber *coherencia* entre la señal y el oscilador local, o sea que la diferencia de fase entre ellos debe ser fija o constante; si la fase relativa entre ellos varía de manera aleatoria, no será posible observar el efecto de interferencia. Es por esto que típicamente se generan ambos campos a partir de una fuente común.

Uno de los grandes desafíos de la implementación de un experimento de tomografía homodina para la caracterización de estados cuánticos de luz consiste precisamente en encontrar un oscilador local adecuado para el muestreo de tales estados. De acuerdo con Leonhardt (2010), el diseño del oscilador local de manera que concuerde con la luz detectada tan perfectamente como sea posible es crucial en aplicaciones como la tomografía homodina de estados no clásicos de luz. En específico, en este trabajo se plantea la caracterización de estados coherentes pulsados generados mediante un proceso no lineal de tercer orden, aprovechando una de las aplicaciones más atractivas de la óptica no lineal, que es la generación de luz a nuevas longitudes de onda a partir de la amplificación paramétrica. Como resultado de tal interacción, se obtuvo un campo con las siguientes características:

- *Campo pulsado o definido en el tiempo*: Lo cual es resultado de que la amplificación paramétrica ocurre para cada pulso del bombeo. En el estudio numérico presentado en la sección 4.2.1.2, considerando un bombeo con pulsos con una duración de picosegundos, se encontró que los pulsos generados a la frecuencia de interés también tienen una duración de unos cuantos picosegundos. Pulsos con una duración en el dominio de los picosegundos o menores son comunmente

---

<sup>4</sup>En la literatura se conoce como *mode-matching*.

denominados *ultra-cortos*. El campo de interés también hereda la tasa de repetición del bombeo, que en este caso es del orden de 76 MHz, por lo cual también se considera *ultra-rápido*.

- *Frecuencia sintonizable*: La frecuencia central de la señal de interés puede variar de acuerdo con la condición de empatamiento de fases, sintonizando el bombeo y la semilla en frecuencias diferentes.
- *Espectro no gaussiano*: Se obtuvieron espectros ensanchados y con estructuras oscilatorias, producto de la auto-modulación de fases y modulación de fases cruzadas del bombeo.
- Distribución espacial determinada por la geometría de la fibra.

No es una tarea trivial encontrar osciladores locales pulsados, ultra-cortos, ultra-rápidos, a la misma frecuencia de la señal de interés y que puedan muestrear apropiadamente toda la riqueza espectral de señales como la que se plantea caracterizar en este trabajo. Si bien en este trabajo se busca diseñar un experimento para caracterizar estados coherentes como primera aproximación, es apropiado mencionar que por medio de procesos ópticos no lineales similares se pueden generar otro tipo de estados cuánticos (como fotones individuales, estados comprimidos, etc.), los cuales usualmente tendrán características similares. La solución que se propone al problema mencionado es generar tanto la señal como el oscilador local por medio del fenómeno de la amplificación paramétrica. Al considerar los osciladores locales auto-generados, se podrá cumplir a cabalidad con las dos condiciones mencionadas: un perfecto empatamiento de modos (puesto que habrá un traslape automático de los modos al ser generados en el mismo medio no lineal), y, dado que ambos campos son generados del mismo láser tendrán una fase relativa estable. Este constituye un pilar importante en la construcción de una plataforma de tomografía de estados cuánticos de luz, puesto que permitirá generar osciladores locales a la medida que pueden servir para muestrear todo tipo de estados no clásicos de la luz. Este enfoque se ha implementado previamente de manera exitosa, en trabajos como los de Kim y Kumar (1994), Boyer *et al.* (2008) y MacRae (2012).

El arreglo experimental que se propone para realizar la detección homodina se muestra en la figura 34. La señal pulsada con longitud de onda central  $\lambda = 1220 \text{ nm}$ ,

generada por mezclado de cuatro ondas estimulado en la fibra de cristal fotónico en la etapa anterior<sup>5</sup>, se divide entonces en dos brazos mediante el divisor de haz DH1. El brazo inferior corresponde con la señal y el superior corresponde con el oscilador local. En este punto es conveniente recordar que en un experimento de DHB se deben cumplir dos condiciones para que sea válida la relación de proporcionalidad entre las fotocorrientes detectadas y las cuadraturas del campo a caracterizar:

- La intensidad del oscilador local debe ser lo suficientemente alta, como para ser considerado como un campo clásico.
- La intensidad del oscilador local debe ser mayor al número promedio de fotones de la señal, para que se cumpla la relación 55, de manera que también concuerden las propiedades de ruido de la señal.

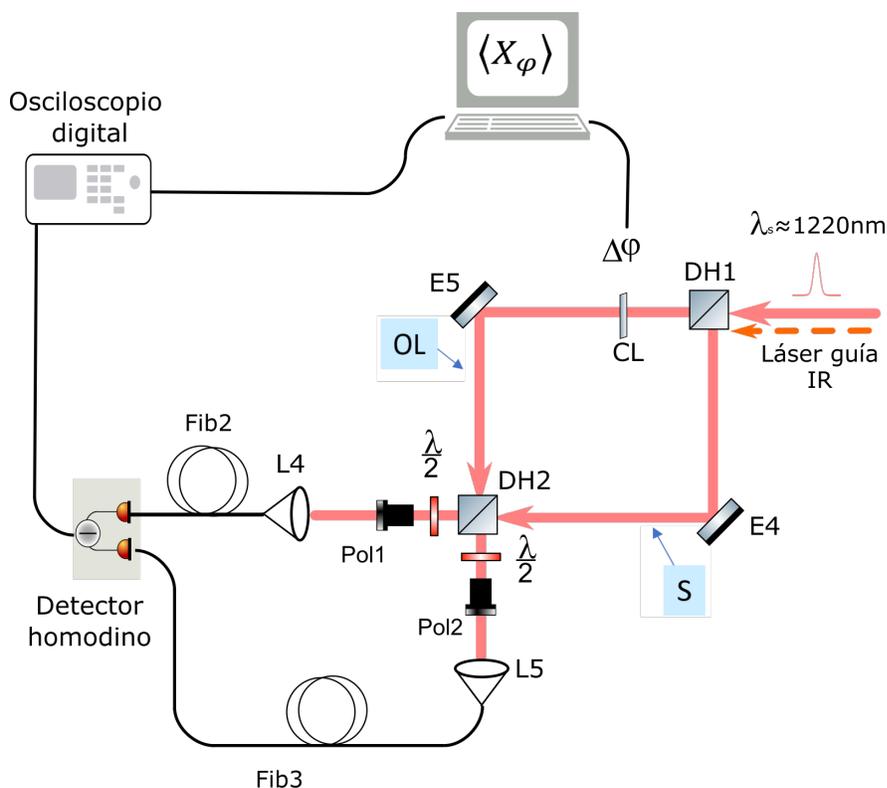
Por lo anterior, se propone una relación de transmisión/reflexión 90:10, para el divisor de haz DH1, de manera que no sea necesario añadir filtros adicionales para atenuar la señal. No será necesario hacer un acondicionamiento adicional de la señal.

Posteriormente, se incluye un mecanismo para el control de la fase del oscilador local (etiquetado como CL en la figura 34). Para este fin, se propone el uso de una placa de cristal líquido LCC1115-C (Thorlabs) en configuración de modulación de fase controlada por voltaje, el cual es el sistema con el que actualmente se cuenta en el laboratorio LINOC. El rango de longitudes de onda de trabajo para esta placa es de 1050 nm a 1700 nm. Adicionalmente, este dispositivo presenta la ventaja de que puede ser controlado mediante una computadora, por lo cual facilita la automatización de las mediciones.

La siguiente etapa consiste en la interferencia de la señal coherente a caracterizar y el oscilador local, por medio del divisor de haz 50:50 DH2. Para esto se requiere una cuidadosa alineación de los haces y, dado que se trata de campos pulsados, será necesario verificar que los pulsos del oscilador local y de la señal lleguen de manera simultánea al detector, lo cual se puede realizar monitoreando las dos entradas del mismo de manera individual para cada campo. También es recomendable efectuar

---

<sup>5</sup>Este arreglo es continuación del arreglo experimental presentado en la figura 26



**Figura 34.** Diseño del arreglo experimental de detección homodina. (DH1: Divisor de haz 90/10. DH2: Divisor de haz 50/50. E4-5:Espejos. L4-5: Lentes para acoplar las fibras del detector homodino. Detector homodino: Detector diferencial acoplado a fibras PDB570-C (Thorlabs). Osciloscopio digital Wavesurfer 3054 Teledyne Lecroy. Modulador de fase: Placa de cristal líquido LCC1115-C (Thorlabs) en configuración de modulación de fase controlada por voltaje.)

pruebas de correlación entre pulsos, las cuales se pueden realizar con el mismo sistema experimental (Esposito, 2011; Cooper *et al.*, 2013). Es de esperarse también que a la salida del DH2 no se cumpla con la relación transmisión/reflexión 50:50 de manera perfecta y, por esto es recomendable la adición de una placa de media onda y un polarizador en cada salida para compensar esa diferencia. La combinación de ambos elementos funciona como un mecanismo atenuador variable.

Otro aspecto muy importante a tener en cuenta es cómo verificar que efectivamente hay empatamiento de modos entre el oscilador local y la señal, o dicho de otra manera, cómo verificar que efectivamente hay interferencia entre ambos. El parámetro que se utiliza comúnmente para determinar lo anterior es justamente la *visibilidad de las franjas de interferencia* (Lvovsky *et al.*, 2001). La verificación de que haya empatamiento de los modos entre la señal y el oscilador local es un aspecto crítico en la DHB y es precisamente uno de los motivos por los cuales se recomiendan osciladores locales suficientemente intensos. Otra opción que se podría explorar es la auto-correlación

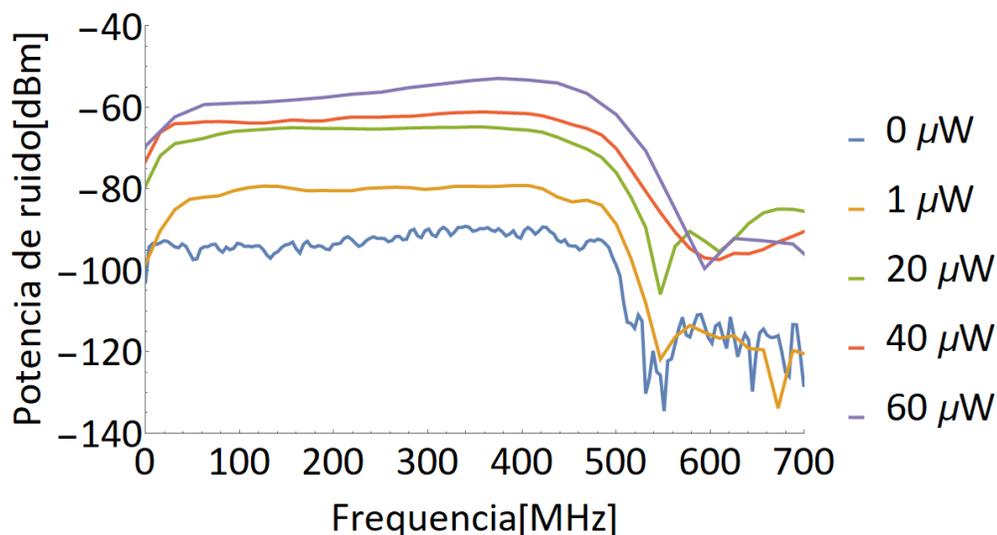
interferométrica entre diferentes pulsos (Esposito, 2011).

Vale la pena mencionar que, dado que la señal a caracterizar es luz infrarroja, es necesario el uso de tarjetas fotosensitivas para longitudes de onda en el infrarrojo (VRC2-Thorlabs) en el proceso de alineación. Asimismo, de la relación de la potencia generada del campo señal en el proceso de amplificación paramétrica presentada en la figura 33, se puede observar que los niveles de potencia son en general bajos, por lo cual se recomienda también utilizar un láser guía intenso, paralelo a la señal a caracterizar, por medio del cual se va a poder alinear de manera precisa el arreglo experimental de la DHB.

Para realizar la detección se propone usar un detector comercial, autobalanceado y acoplado a fibras (PDB570C-Thorlabs), consistente en 2 fotodiodos de avalancha balanceados (APD) y un amplificador de transimpedancia con ruido ultra-bajo que genera un voltaje proporcional a la diferencia entre la fotocorriente en los dos fotodiodos (las dos señales ópticas de entrada).

La implementación de un sistema de detección homodina en el dominio del tiempo requiere del cumplimiento de una serie de aspectos técnicos para la validez de sus medidas:

1. Los fotodiodos deberían exhibir respuestas temporales y eficiencias cuánticas similares (Cooper *et al.*, 2013). Es necesario determinar el rango de potencias del oscilador local para el cual la respuesta es lineal. En un estudio anterior del grupo se caracterizó la linealidad de los fotodiodos considerando un oscilador local de onda continua. Se encontró que la respuesta es lineal para potencias menores a  $80 \mu W$ . También se encontró que, si bien la respuesta de ambos detectores es similar, cada uno tiene un nivel de ruido electrónico ligeramente diferente, lo cual se puede manifestar como una sustracción imperfecta a la hora de realizar las mediciones.
2. La varianza del ruido de la señal diferencial detectada debería depender de manera lineal con respecto a la potencia del oscilador local. Esto indicaría que el detector está limitado sólo por el ruido de *shot* o ruido cuántico.
3. Además de trabajar en una región con respuesta lineal, también es necesario



**Figura 35.** Espectro de frecuencias del ruido electrónico del detector ( $0 \mu W$ ) y del ruido de shot para un oscilador local de onda continua a diferentes potencias. Tomado de Osorio (2018).

trabajar en condiciones para los cuales se tenga una relación señal/ruido (SNR) lo suficientemente alta como para que la señal sea distinguible del ruido, valga la redundancia. En la figura 35 se muestra el espectro de frecuencias del ruido de *shot* a diferentes potencias del oscilador local, el cual fue medido en un trabajo anterior en el grupo (Osorio, 2018). Se resalta que con una potencia mínima de  $1 \mu W$  es suficiente para obtener una SNR de alrededor de 15dBm con un láser de onda continua. Será necesario repetir esta caracterización para señales pulsadas o resueltas en el tiempo.

4. Dada la naturaleza pulsada de la señal que se busca caracterizar, es especialmente importante que el sistema de detección tenga una resolución temporal alta, lo cual es equivalente a que tenga un alto ancho de banda en frecuencias. El principal requisito es que se puedan distinguir los pulsos consecutivos en el sistema de detección.

De acuerdo con la guía técnica sobre detectores de alta velocidad de Newport (2021), incluso si la señal óptica de interés es rápida, la señal final medida será tan lenta como el componente más lento del sistema de detección. Esto incluye los fotodiodos, el osciloscopio, e incluso los conectores y cables. También de acuerdo con la misma guía técnica, no existe una regla definitiva para conocer el ancho de banda mínimo requerido para la medición de pulsos de luz, sin embargo, se recomienda un ancho de banda en promedio mayor a  $0.44/T$ , donde  $T$  es

el ancho completo a media altura (FWHM) en el perfil de intensidad del pulso.

En el caso de este proyecto, se consideran pulsos mínimos de 3 ps, tomando como referencia el bombeo, por lo cual se necesitaría un ancho de banda mínimo de 146 GHz. El esquema de detección estaría compuesto principalmente del detector diferencial autobalanceado PDB570C (Thorlabs), el cual tiene un ancho de banda de 435 MHz, y un osciloscopio digital Wavesurfer 3054 Teledyne LeCroy (2017), el cual tiene un ancho de banda de 500 MHz. Como resultado del límite del ancho de banda del sistema de detección, el perfil temporal medido no coincidirá exactamente con el perfil real de los pulsos.

Si bien los elementos mencionados resultan ser lentos para la detección de este tipo de pulsos, incluso los mejores osciloscopios disponibles en el mercado en el presente tienen anchos de banda máximos de alrededor de 50 GHz (Newport, 2021). Pero no todo está perdido: la tomografía homodina de este tipo de señales aún es posible. A continuación se presenta el análisis de lo que se esperaría de una medición semejante.

Lo primero que se debe tener en cuenta es que la señal medida corresponde con la convolución de la función de respuesta al impulso del sistema de detección y el perfil temporal de los pulsos (Sanders y Rasmussen, 1982). Los pulsos se podrán modelar como deltas de Dirac, dado que el ancho de estos es mucho menor que la resolución temporal del sistema y, por lo tanto, el perfil medido corresponderá precisamente con la función de respuesta al impulso de todo el sistema de detección. En el osciloscopio se esperaría entonces detectar pulsos con un ancho mucho mayor al de los reales.

Es de resaltar que, aunque se detecten pulsos ensanchados, es fundamental que no haya traslape entre ellos. La cantidad de referencia en este caso es la tasa de repetición del láser, que en este caso es del orden de 76 MHz. En este sentido, el ancho de banda del sistema de detección es lo suficientemente alto como para aislar los pulsos individuales de la señal.

El aspecto clave para determinar la viabilidad de la tomografía homodina es que, si bien el perfil temporal se ve alterado, la cantidad que realmente interesa en este experimento es la energía de cada pulso. Esto se debe a que las cuadraturas de la señal en realidad son proporcionales a esa cantidad, como se va a mostrar

más adelante. El cálculo de la energía por pulso se puede realizar de manera rápida mediante las siguientes relaciones:

$$E_{pulso} = \frac{P_{prom}}{f_{rep}} = \int_{-T/2}^{T/2} P(t)dt, \quad (251)$$

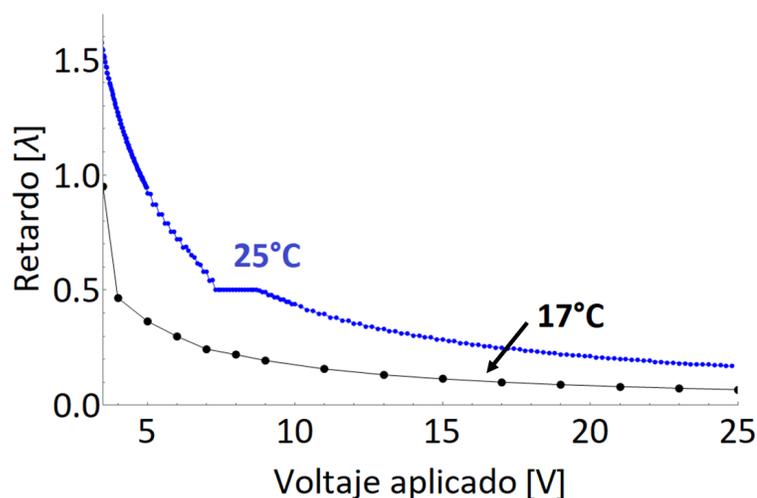
donde  $E_{pulso}$  es la energía por pulso,  $f_{rep}$  es la tasa de repetición del láser,  $T$ ,  $P_{prom}$  y  $P(t)$  son el periodo, la potencia promedio y la potencia instantánea de la señal, respectivamente.  $P_{prom}$  puede ser medida con un medidor de potencia convencional, y la curva  $P(t)$  es medida de manera indirecta puesto que en general es proporcional a la curva de voltaje detectada mediante el osciloscopio. Si la energía del pulso se conserva, entonces aún es válida la detección.

Diferentes trabajos reportan la viabilidad de este tipo de experimentos. Zavatta *et al.* (2002) reporta, por ejemplo, un experimento de tomografía homodina con un oscilador local emitiendo trenes de pulsos de 3 ps a una tasa de repetición de 82 MHz; la detección se realizó mediante un osciloscopio con un ancho de banda de 1 GHz. Se señala que, si bien se puede observar un ensanchamiento en los pulsos detectados (se detectó un ancho de 12 ns), el 93% de la energía de los mismos está contenida en esa ventana de 12 ns. Cooper *et al.* reporta la caracterización mediante tomografía homodina de una señal consistente de un tren de pulsos de 100 fs con una tasa de repetición de 80 MHz, y el ancho de banda de su sistema de detección es de 80 MHz. Y Esposito (2011) reporta también la caracterización de una señal con las mismas características que Cooper, sólo que el ancho de banda de su sistema de detección es de 350 MHz. Esposito también utilizó un detector homodino comercial.

## **Proceso de medición, adquisición y análisis de datos**

Después de verificar que se cumplen las condiciones descritas en la sección anterior, se dará paso al proceso de medición de cuadraturas de la señal a caracterizar. Cada medición consistirá de varias secuencias de pulsos para cada valor de fase relativa. Para esto, es necesario que previamente se tenga caracterizado el mecanismo para modular la fase.

En este proyecto se propone el uso de una placa retardadora variable de cristal



**Figura 36.** Caracterización del retardo de la placa de cristal líquido LCC1115-C (Thorlabs) considerando una fuente láser de onda continua a  $\lambda = 1550\text{nm}$ . La curva a  $25^\circ\text{C}$  fue tomada de Thorlabs (2011) y la curva a  $17^\circ\text{C}$  fue medida en el laboratorio utilizando la metodología de Davis (1981).

líquido LCC1115-C (Thorlabs, 2011). El retardo de la placa se determinó mediante la metodología propuesta por Davis (1981), para la cual se requieren dos polarizadores y un detector de potencia. La medición del retardo depende tan sólo de la tasa de extinción de los polarizadores. En el caso de la placa LCC1115-C, el retardo es controlado por voltaje, y varía dependiendo de la longitud de onda de la señal y de la temperatura ambiente. En la figura 36 se muestran las curvas de retardo, considerando una fuente láser de onda continua con longitud de onda  $\lambda = 1550\text{ nm}$ , a diferentes temperaturas. La curva de referencia a  $25^\circ\text{C}$  fue proporcionada por el fabricante, y la curva a  $17^\circ\text{C}$  fue medida en el laboratorio. Será necesario re-calibrar esta curva para las condiciones particulares del experimento de DHB.

Es de aclarar que los valores de fase relativa se suelen presentar en unidades de *radianes* y, en ese aspecto, en este experimento se requiere hacer un muestreo en un intervalo de  $[0, 2\pi]$ . En relación con las curvas presentadas en la figura 36, un retardo equivalente a una longitud de onda  $\lambda$  es equivalente a un retardo de  $2\pi$ .

Uno de los aspectos a considerar es el número de valores de fase relativa para los cuales se van a tomar mediciones de cuadraturas. En principio, la resolución del controlador de voltaje de la placa LCC1115-C es de 1 mV. La resolución de la fase depende de la longitud de onda de la señal y la temperatura, por ejemplo, para  $\lambda = 1550\text{ nm}$  y  $25^\circ\text{C}$ , se tendrá una resolución de fase mínima de  $10^{-5}\pi$  radianes, si se toma como referencia la curva de retardo presentada por el fabricante. De manera que

se podrían discretizar las mediciones en un número muy grande de fases relativas, teniendo en cuenta la resolución tan pequeña de este modulador.

Para la reconstrucción de estados coherentes se reporta en general un muestreo sobre un número pequeño de fases: Zavatta *et al.* (2002) reportan 25 valores, Cooper *et al.* (2013) reportan 7 valores y Esposito (2011) reporta 400 valores de fase. Si se busca caracterizar otro tipo de estados no clásicos, *más exóticos*<sup>6</sup>, se recomienda hacer un muestreo sobre un mayor número de fases relativas, de manera que se puedan caracterizar esos estados en toda su complejidad. También se debe mencionar que este parámetro depende del algoritmo de reconstrucción del estado cuántico elegido, y que otra alternativa bastante utilizada es hacer un barrido uniforme de fases en el intervalo de 0 a  $2\pi$  (Raymer y Beck, 2004; Lvovsky y Raymer, 2009). Esta última es la metodología que se eligió aquí para hacer la simulación de los datos de cuadratura.

Después de definir el protocolo para definir el muestreo de la fase relativa entre el oscilador local y la señal, los siguientes aspectos por definir serían: dentro de este esquema de detección, *¿qué es lo que denominamos como mediciones de las cuadraturas?* y también, *¿cuántos valores de cuadratura por cada fase son suficientes para reconstruir el estado cuántico de la señal?* Estos son los siguientes puntos a tratar en esta sección.

En primer lugar, en este esquema de detección, los fotodiodos convierten las señales ópticas de entrada en señales eléctricas que posteriormente son sustraídas por medios electrónicos. De ahí que el detector homodino entregue un voltaje de salida proporcional a la diferencia de las fotocorrientes de los dos fotodiodos. La señal resultante es visualizada y almacenada por medio del osciloscopio, en forma de una curva de voltaje instantáneo como función del tiempo. La relación entre las potencias ópticas de entrada y el voltaje de salida es la siguiente:

$$V_{out}(t) \approx R(\lambda) * G_{trans} * M * \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') [P_{in+}(t') - P_{in-}(t')] dt' + V_{residual},$$

donde  $R(\lambda)$  es la responsividad de los fotodiodos,  $G_{trans}$  es la ganancia de transimpedancia en la etapa de amplificación electrónica,  $M$  es la ganancia óptica ajustable en el detector diferencial utilizado,  $G(t-t')$  es la función de respuesta al impulso del

<sup>6</sup>Por ejemplo, estados de fotón individual, estados comprimidos o *squeezed*, etc.

sistema de detección (también conocida como *la función de Green*),  $P_{in+}$  y  $P_{in-}$  son las potencias ópticas de entrada y  $V_{residual}(t)$  es el voltaje residual debido al ruido y a la sustracción imperfecta en la detección (Sanders y Rasmussen, 1982; Thorlabs, 2019).

La relación entre las cuadraturas del campo y la diferencia de potencial detectada por el osciloscopio está directamente relacionada con el operador de número ( $\hat{n}$ ), que cuantifica el número promedio de fotones en cada pulso de la señal a caracterizar. En un experimento de detección homodina, se cumple la siguiente relación para el valor esperado de las cuadraturas ( $\langle \hat{X}_\phi \rangle$ ):

$$\langle \hat{X}_\phi \rangle = \frac{1}{2|\alpha_{OL}|} (\hat{n}_{in+} - \hat{n}_{in-}), \quad (252)$$

donde  $|\alpha_{OL}|$  es la amplitud del estado coherente que define al oscilador local.

El número promedio de fotones ( $\langle \hat{n}_i \rangle$ ) se puede calcular de manera aproximada dividiendo la energía total de cada pulso ( $E_{pulso}$ ) entre la energía promedio de un fotón ( $E_{fotón}$ ) con una frecuencia igual a la frecuencia central de la señal, de la siguiente manera:

$$\langle \hat{n}_i \rangle = \frac{E_{pulso}}{E_{fotón}} = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} P(t) dt}{hc/\lambda_{oi}}, \quad (253)$$

donde  $h$  es la constante de Planck,  $c$  es la velocidad de la luz y  $\lambda_{oi}$  es la longitud de onda central de la señal. Precisamente, la validez de las mediciones en este esquema depende de que la energía por pulso *verdadera* coincida con la energía por pulso *detectada*, es decir:

$$E_{pulso} \approx \int_{-T/2}^{T/2} G(t) * P(t) dt, \quad (254)$$

recordando que el perfil detectado de los pulsos corresponde con la convolución entre la respuesta al impulso del sistema de detección y el perfil real. El símbolo  $*$  indica la operación *convolución*. Considerando lo anterior, se podrán calibrar las mediciones de voltaje a unidades de cuadraturas adimensionales por medio de la siguiente relación:

$$\langle X_\phi \rangle = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} V_{out}(t) dt - \int_{-T/2}^{T/2} V_{residual}(t) dt}{2 * \eta G_{trans} M e |\alpha_{ol}|}, \quad (255)$$

donde  $T$  es el período de la señal,  $\eta$  es la eficiencia cuántica de los fotodiodos,  $e$  es la

carga del electrón y  $|\alpha_{ol}|$  es la amplitud del oscilador local (Cooper *et al.*, 2013). En la última ecuación se tuvo en cuenta la definición de la responsividad en términos de la eficiencia cuántica de los fotodetectores, dada por:

$$R(\lambda) = \frac{e\eta\lambda}{hc}. \quad (256)$$

Por cada pulso se tendrá un sólo valor de cuadratura, a una fase específica. Tanto el voltaje residual como las constantes de normalización del denominador de la ecuación 255 son determinadas únicamente adquiriendo muestras de cuadratura del estado de vacío que satisfacen las siguientes relaciones para el promedio y la varianza de las cuadraturas, respectivamente:  $\langle \hat{X}_\varphi \rangle = 0$  y  $Var(\hat{X}_\varphi) = 1/2$ . Los datos del estado de vacío se obtienen bloqueando la entrada del oscilador local DH2 correspondiente al brazo de la señal en el arreglo experimental presentado en la figura 34.

El último punto por considerar es la cantidad necesaria de valores de cuadraturas por cada fase, de manera que sea factible la reconstrucción del estado cuántico de la señal. Al respecto, es necesario tener en cuenta que los algoritmos de reconstrucción de estados cuánticos en general están basados en métodos de *inferencia estadística*, lo cual implica la necesidad de disponer de un conjunto relativamente grande de mediciones. Entre más grande sea la cantidad de datos disponibles, más exacto será el análisis estadístico. En la literatura se presentan casos como los siguientes: Esposito (2011) reporta un muestreo de 400 datos de cuadratura para cada fase, lo cual significa que tomó 160000 datos en total. Zavatta *et al.* (2002) reportan un muestreo de 32000 datos de cuadratura para cada fase, para un total de 800000 puntos. Y Lvovsky y Mlynek (2002) reporta un muestreo total de 14000 puntos.

### 4.2.3 Algoritmos de reconstrucción implementados

La tercera y última etapa del diseño del experimento de tomografía homodina corresponde precisamente con la implementación de los algoritmos de reconstrucción de estados cuánticos. En la sección 2.3.4 se presentó una perspectiva histórica de este tema, y se introdujeron los dos algoritmos que se eligieron para el desarrollo de este proyecto: el algoritmo de *estimación de máxima verosimilitud* o *MaxLik*, para la reconstrucción de la matriz de densidad y de la función de Wigner, y el de *funciones*

*patrones*, que permite calcular el valor esperado de diferentes observables, tales como la amplitud compleja de los estados coherentes, el número esperado de fotones, entre otros.

El algoritmo de *funciones patrones* implementado está basado en la teoría de G. D'Ariano *et al.* (2003). La implementación consistió de la evaluación numérica de la integral del estimador de probabilidad definida en la ecuación 78, para los operadores de número, de aniquilación y de cuadraturas, definidos a partir de la fórmula de Richter (ecuación 79). La evaluación numérica de la ecuación 78 se hizo de manera aproximada a través de la siguiente suma finita, tal como lo proponen D'Ariano *et al.*:

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R[\hat{O}](x_i, \phi_i), \quad (257)$$

donde  $N$  corresponde con el número total de mediciones de cuadratura,  $R[\hat{O}]$  es la función patrón del operador  $\hat{O}$ , y  $(x_i, \phi_i)$  es el conjunto de pares de datos de cuadratura a cada fase específica. Esta evaluación se hizo por medio del software *Mathematica*, de manera similar a un proyecto anterior del grupo (Osorio, 2018).

Por otra parte, el código que se utilizó para implementar el algoritmo *MaxLik* tiene como componente principal la paquetería de Matlab desarrollada por Jeff Lundeen (2008), la cual se basa en la teoría de A. Lvovsky (2004). El código que se implementó se divide en tres etapas:

- *Pre-procesamiento de datos:*
  - Importación de las mediciones de diferencia de potencial para cada valor de fase relativa en formatos compatibles con el osciloscopio digital wavesurfer 3054 Teledyne Lecroy (.txt, .dat).
  - Calibración de las mediciones de voltaje a unidades de cuadratura adimensionales de acuerdo con la relación 255. Los datos calibrados se guardan en una tabla organizados por pares en formato  $(X_i, \phi_i)$ , correspondientes a los valores de cuadratura y de fase relativa entre el oscilador local y la señal, respectivamente.
- *Algoritmo iterativo MaxLik:* Uso de la paquetería desarrollada por Lundeen (2008).

- Las entradas del algoritmo son precisamente los pares  $(X_i, \phi_i)$ , organizados en forma de matriz con dos columnas y  $N$  filas.  $N$  es el número total de mediciones.
- Definir una matriz de densidad inicial  $\hat{\rho}^{(0)}$ . En general, se define una matriz identidad normalizada con respecto a la traza. El aspecto más importante a considerar en este punto es la elección de las dimensiones de esta matriz inicial. Dado que la reconstrucción se hace en la base de Fock o de número, una guía para elegir este parámetro es calcular el número esperado de fotones de la señal teniendo en cuenta la intensidad de la misma, mediante la ecuación 253. Las dimensiones de la matriz de densidad deben ser necesariamente mayores a ese valor.
- El corazón de este algoritmo es la aplicación de iteraciones sucesivas donde se evalúa la siguiente expresión:

$$\hat{\rho}^{(k+1)} = \mathcal{N}[\hat{R}(\hat{\rho}^{(k)})\hat{\rho}^{(k)}\hat{R}(\hat{\rho}^{(k)})]. \quad (258)$$

$\mathcal{N}$  denota normalización a una traza unitaria. El principal elemento por determinar es el operador  $\hat{R}(\hat{\rho})$ , que en este contexto se define como:

$$\hat{R}(\hat{\rho}) = \sum_{j=1}^N \frac{\hat{\Pi}_j}{\text{Tr}(\hat{\Pi}_j \hat{\rho})}. \quad (259)$$

$\hat{\Pi}_j$  es denominado el operador de proyección de cuadraturas y se define como  $\hat{\Pi}_j = |x_j, \phi_j\rangle\langle x_j, \phi_j|$ . Este operador se puede representar de manera matricial en la base de número, en donde cada elemento de la matriz está definido de la siguiente manera:

$$\hat{\Pi}_{jmn} = \langle n|x_j, \phi_j\rangle\langle x_j, \phi_j|m\rangle. \quad (260)$$

Los elementos  $\langle n|x_j, \phi_j\rangle$  sólo dependen de los valores de las mediciones de cuadratura y fase, y se definen de acuerdo con la ecuación 77. Las dimensiones de los operadores  $\hat{R}(\hat{\rho})$  y  $\hat{\Pi}_j$  son las mismas que las de la matriz de densidad de inicialización.

- Los factores que determinan la cantidad de iteraciones son la convergencia de la matriz de densidad y la maximización del funcional de verosimilitud, definido en la ecuación 71. Después de cierto número de ciclos, el valor de

los elementos de  $\hat{\rho}^{(k)}$  permanece invariable, y el valor del funcional de verosimilitud crece hasta que alcanza un valor estable. Para estados coherentes se suele alcanzar la convergencia en pocas iteraciones (como referencia, alrededor de 15 y 20 son suficientes).

- *Visualización y exportación de resultados.*

## **Error experimental y validación de la reconstrucción**

Un tema muy importante que se debe examinar es qué tan precisa es la reconstrucción del estado cuántico considerando la metodología presentada. Al respecto, se deben tener en cuenta algunos puntos (Leonhardt, 1997):

- La precisión de los valores de cuadratura está limitada por las pérdidas en la detección.
- Teóricamente, se asume que hay un muestreo continuo con respecto a las fases de referencia, es decir, se asume que idealmente se hicieron mediciones de cuadraturas en un número *infinito* de fases en el intervalo  $[0, 2\pi]$ . Sin embargo, en un experimento real las cuadraturas se miden con respecto a un número finito de fases de referencia.
- Idealmente también se tendría un muestreo continuo de cuadraturas para cada fase, pero la realidad es que, además de medir un número finito de cuadraturas, también existen limitaciones relacionadas con la resolución del sistema de detección.
- La matriz de densidad está definida en el espacio de Hilbert de los estados ópticos que, en teoría, es de dimensiones infinitas. Sin embargo, en términos prácticos es necesario truncar las dimensiones de la matriz, lo cual podría inducir a errores si no se hace correctamente (Lvovsky, 2004).

Contemplando fuentes de error como las anteriores, es recomendable analizar la validez de los estados cuánticos reconstruidos. Para este fin, Lvovsky (2004) plantea una técnica simple, consistente en simular una cantidad considerable de conjuntos de

datos de cuadratura que estarían asociados al *estado real* o esperado, y luego aplicar el algoritmo de reconstrucción a cada conjunto de datos, de manera que se obtendrá una serie de matrices de densidad  $\hat{\rho}_k$ . La diferencia promedio entre tales matrices y la matriz experimental  $\hat{\rho}_{exp}$  ( $\langle |\hat{\rho}_{exp} - \hat{\rho}_k| \rangle$ ) evalúa la incertidumbre estadística asociada. Este método se conoce como *bootstrapping*.

### 4.3 Simulación del experimento de tomografía homodina

Se simularon varios conjuntos de datos de cuadraturas mediante un algoritmo de *Aceptación y Rechazo* (Mathworks, 2020). Este algoritmo es un caso especial de los métodos tipo *Monte Carlo*, y es una técnica simple para hacer un muestreo de datos que siguen una distribución de probabilidad  $pr(x)$ , a partir del uso de números aleatorios generados por computadora (Feiguin, 2009; Landau y Binder, 2015).

En la figura 37a se muestra una representación gráfica de este método. Para la implementación de este algoritmo se deben definir dos regiones en un plano: una región de comparación, en este caso representada por la *caja* definida desde  $x = a$  hasta  $x = b$  y desde  $y = 0$  hasta  $y = y_0$ , y una región definida por la distribución de probabilidad  $pr(x)$ . Después de esto, se genera un conjunto de puntos  $(x_i, y_i)$  aleatorios distribuidos a lo largo y ancho de la caja, como si se estuviesen lanzando dardos a un tablero. Sólo se aceptarán los puntos que "*caigan*" adentro de la región definida por la distribución  $pr(x)$  (por ejemplo, un punto señalado por el dardo azul en la figura 37a), y el resto se rechazan.

La distribución de probabilidad que se tomó como referencia para la simulación de datos de cuadratura es precisamente la expresión para las distribuciones marginales de las cuadraturas del campo de los estados coherentes de banda ancha, la cual se definió en la ecuación 237. A manera de recordatorio:

$$pr(x_\phi, \phi) = \left| \langle x_\phi | \psi_{out}^F \rangle \right|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2[x_\phi - Re(\alpha_4)\cos\phi + Im(\alpha_4)\sin(\phi)]^2}. \quad (261)$$

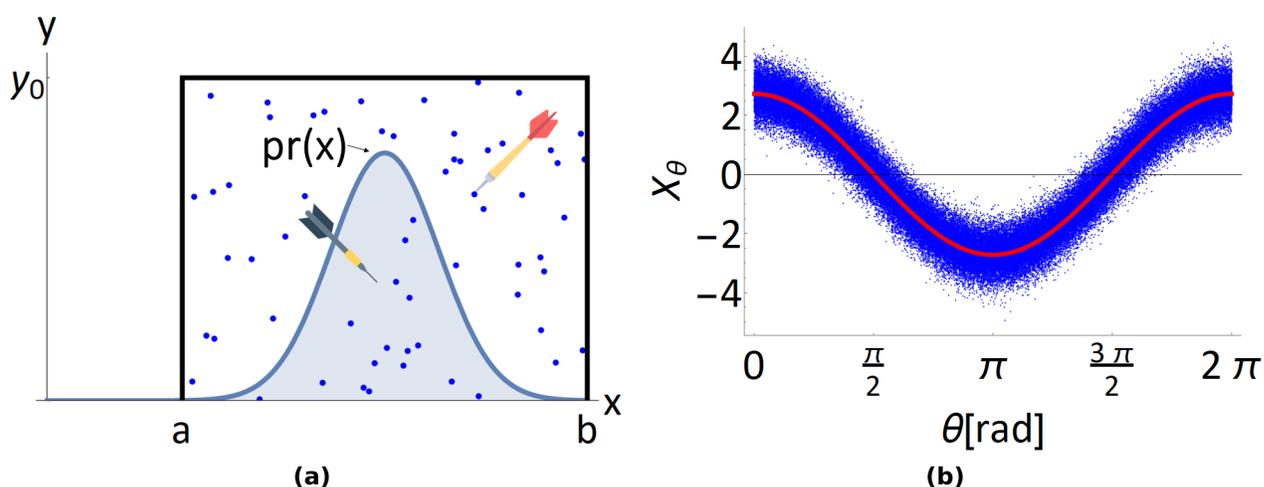
Los datos se simularon considerando un barrido en un intervalo de fases relativas  $\phi = [0, 2\pi]$ .  $\alpha_4$  corresponde con la amplitud del campo de interés de salida en el proceso de amplificación paramétrica, la cual se determinó en la sección 3.6, y se

define mediante la ecuación 236.

Uno de los objetivos del proyecto es simular los valores de cuadraturas que serían resultado de las mediciones en el experimento de detección homodina balanceada, es por esto que el cálculo de la amplitud del estado de salida  $\alpha_4$  se hizo considerando condiciones realistas del experimento. Algunas de esas consideraciones fueron:

- Bombeo con perfil espectral gaussiano y con potencia inicial de 15 mW.
- Campo semilla de onda continua y con potencia inicial de 155  $\mu$ W.
- Velocidad de grupo y empatamiento de fases definidos a partir de las propiedades de dispersión de la fibra óptica definidas en las secciones 3.4.1 y 3.7.1.
- Área efectiva de los modos y parámetro no lineal  $\gamma$  de la fibra de acuerdo a los resultados presentados en la sección 4.2.1.1.

También se tuvo en cuenta que en el arreglo experimental de detección homodina balanceada se contempla una etapa de atenuación inicial (ver sección 4.2.2), por lo cual la potencia real de la señal a caracterizar sería de un 10% de la potencia inicial. Considerando lo anterior, se obtendría un estado coherente con un número esperado de fotones  $n_4 = 7.42$  y una amplitud  $|\alpha_4| = 2.72$ . Se simularon 20 conjuntos de 100000 datos de cuadratura. En la figura 37b se muestra un conjunto de valores de cuadraturas simuladas para este estado coherente. Se resalta que la distribución de



**Figura 37.** (a) Representación gráfica del algoritmo de *aceptación y rechazo*. (b) Valores de cuadraturas del campo simuladas mediante un algoritmo de *Aceptación y Rechazo*.

los datos sigue una tendencia cosenoidal, tal como se espera para estados coherentes, de acuerdo con la ecuación 28.

Por medio del algoritmo de *funciones patrones* se corroboró que los datos simulados sí correspondieran con la amplitud definida. Se calcularon los valores esperados para los operadores de número  $\langle \hat{n} \rangle$ , de aniquilación  $\langle \hat{a} \rangle = \alpha$  y de cuadraturas  $\langle \hat{X} \rangle$ . Para los dos primeros se encontraron los siguientes valores:  $\langle \hat{n} \rangle = 7.41 \pm 0.02$  y  $\langle \hat{a} \rangle = 2.7225(\pm 0.0002) + i0.0002(\pm 0.0002)$ . Por medio del cálculo del valor esperado de las cuadraturas a diferentes fases se graficó la curva de tendencia roja que se presenta en la figura 37b.

Se implementó la reconstrucción de la matriz de densidad en la base de número o de Fock mediante el algoritmo *MaxLik* para los 20 conjuntos de datos. En la figura 38 se muestran dos representaciones de la matriz de densidad promedio reconstruida.

Hasta este punto, el concepto de la matriz de densidad se ha presentado únicamente mediante el formalismo matemático, por lo cual las representaciones anteriores pueden resultar abstractas; es por esto que para interpretarlas se plantean los siguientes interrogantes: ¿qué significa esta matriz?, o en otras palabras ¿qué representan cada uno de sus elementos?, ¿qué relación tienen con las mediciones de cuadratura, conociendo que esta matriz es resultado de la implementación del algoritmo MaxLik que se presentó previamente?.

Para resolver los interrogantes planteados, vale la pena establecer los siguientes puntos:

1. La matriz de densidad  $\hat{\rho}$  inicialmente se había definido de la siguiente manera:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (262)$$

donde  $p_i$  representa la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado  $|\psi_i\rangle$ .

2. Conviene representar  $\hat{\rho}$  en la base de las cuadraturas  $|x_j, \phi_j\rangle$ , dado que son las

cantidades observables en un experimento de detección homodina:

$$\hat{\rho} = \sum_{jk} \rho_{jk} |x_j, \phi_j\rangle \langle x_k, \phi_k|, \quad (263)$$

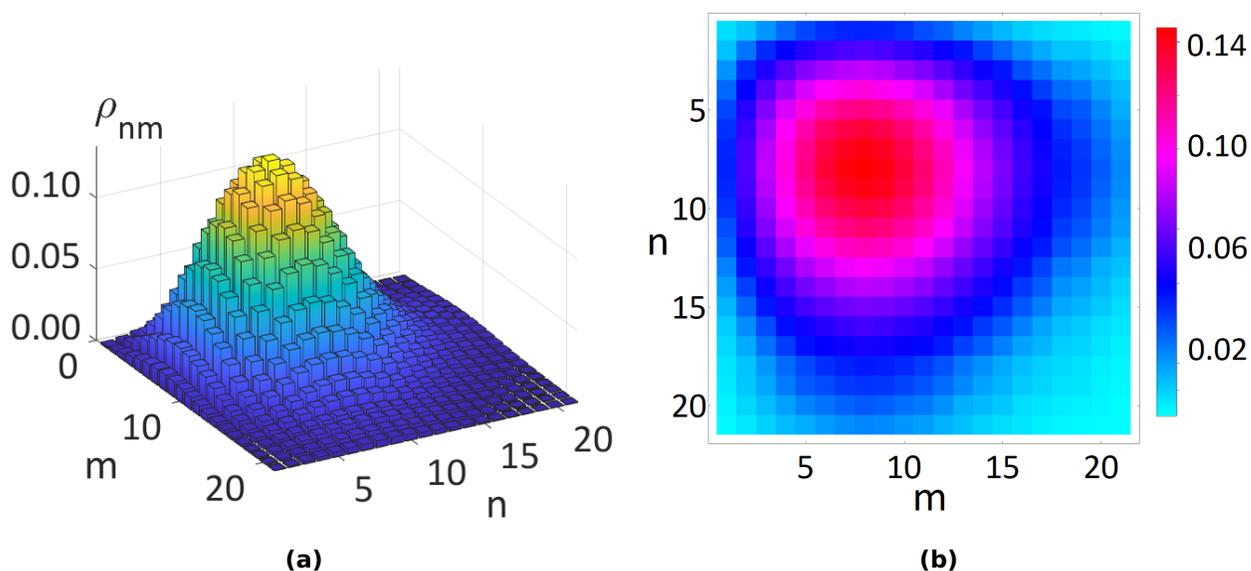
donde

$$\rho_{jk} = \sum_i \rho_i \langle x_j, \phi_j | \psi_i \rangle \langle \psi_i | x_k, \phi_k \rangle. \quad (264)$$

Llaman la atención los elementos  $\langle x_j, \phi_j | \psi_i \rangle$  y  $\langle \psi_i | x_k, \phi_k \rangle$ , los cuales tienen sentido físico y son conocidos como *las funciones de onda de las cuadraturas* (Leonhardt, 1997). El aspecto más importante de esta representación es que mediante la detección homodina balanceada se pueden medir justamente los elementos  $\rho_{jj}$ ; estos elementos son conocidos como *las distribuciones marginales de las cuadraturas* y definen la probabilidad de obtener una medición  $x_j$  a una fase  $\phi_j$ .

De modo que al implementar el algoritmo MaxLik uno esperaría obtener una matriz de densidad de la forma presentada en la ecuación 263, sin embargo, en la sección 4.2.3 y en este mismo apartado se mencionó que la reconstrucción se hizo en *la base de número o de Fock*. Utilizar esta base es conveniente por varios motivos, entre ellos:

- Es necesario usar la formulación matricial de los estados y operadores para la



**Figura 38.** Matriz de densidad  $\hat{\rho}$  reconstruida en la base de Fock mediante el algoritmo *MaxLik*. (a) Representación de las amplitudes de los elementos  $\rho_{nm}$  en forma de diagrama de barras. (b) Representación de las amplitudes de los elementos  $\rho_{nm}$  en forma de mapa de colores.

implementación computacional de los mismos. En este contexto conviene usar bases discretas y finitas.

- Por medio de esta representación se puede obtener de manera indirecta información sobre la distribución del número de fotones de la señal, o en otras palabras, sobre la estadística de fotones. Esto puede resultar de mucha importancia en áreas como la metrología, la óptica cuántica, entre otros.

O sea que, en síntesis, la matriz de densidad reconstruida tiene la siguiente forma:

$$\hat{\rho} = \sum_{m,n} \rho_{mn} |m\rangle \langle n|, \quad (265)$$

donde

$$\rho_{mn} = \sum_{jk} \rho_{jk} \langle m | x_j, \phi_j \rangle \langle x_k, \phi_k | n \rangle. \quad (266)$$

$|n\rangle, |m\rangle$  son eigen-estados del operador de número y los elementos  $\langle x, \phi | n \rangle$  dependen únicamente de los valores de cuadratura y fase, y fueron definidos en la ecuación 77. Los elementos  $\rho_{mn}$  son completamente determinados a través de las mediciones obtenidas mediante la detección homodina y el algoritmo MaxLik.

A manera de ilustración, vale la pena mostrar la representación matricial de los elementos de esta matriz. En la formulación matricial de la mecánica cuántica, los estados  $|n\rangle$  y  $\langle n|$  corresponden con vectores columna y fila, respectivamente, de la siguiente manera:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \begin{aligned} \langle 0| &= (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots), \\ \langle 1| &= (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots), \\ \langle 2| &= (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots), \\ &\vdots \end{aligned}$$

La dimensión de los vectores de estado es teóricamente infinita, sin embargo, en la implementación computacional se suelen acotar dependiendo de las condiciones experimentales.

Operaciones del tipo  $|n\rangle \langle m|$  dan origen a matrices<sup>7</sup>. Por ejemplo, la operación  $|0\rangle \langle 0|$  dará origen a la siguiente matriz:

$$|0\rangle \langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \quad (267)$$

Y de manera general, la matriz de densidad definida en la ecuación 265 tiene la siguiente forma:

$$\hat{\rho} = \sum_{m,n} \rho_{mn} |m\rangle \langle n| = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} & \rho_{02} & \\ \rho_{10} & \rho_{11} & \rho_{12} & \dots \\ \rho_{20} & \rho_{21} & \rho_{22} & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}. \quad (268)$$

El último interrogante que nos queda por resolver es cuál es el significado físico que tienen los elementos  $\rho_{nm}$ . Si se analizan los elementos de la diagonal principal, es decir aquellos para los cuales  $n = m$ , se puede demostrar que:

$$\rho_{nn} = \sum_i p_i |\langle n | \psi_i \rangle|^2, \quad (269)$$

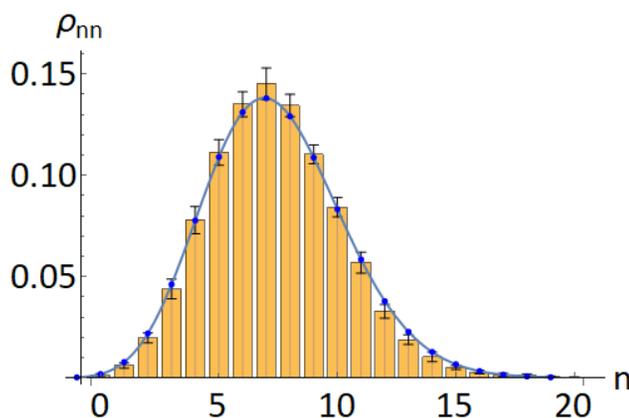
lo cual se puede interpretar como la probabilidad de que en una medición el sistema se encuentre en el estado  $|n\rangle$ . Los elementos de la diagonal se conocen como *poblaciones* (Cohen-Tannoudji *et al.*, 2020).

En el caso específico de las matrices de densidad construidas en la base de número, los elementos  $\rho_{nn}$  representan la distribución del número de fotones de la señal. En la figura 39 se muestran los elementos de la diagonal principal de la matriz de densidad promedio reconstruida; se graficaron en contraste a una distribución de Poisson (línea de tendencia azul) con valor promedio  $n=7.42$ , la cual coincide con la predicción teórica de la estadística de fotones para un estado coherente con el valor esperado de ese número de fotones (ver ecuación 22). Las barras de error corresponden con la

<sup>7</sup>De hecho, la operación  $|n\rangle \langle m|$  se define como la multiplicación de matrices usual.

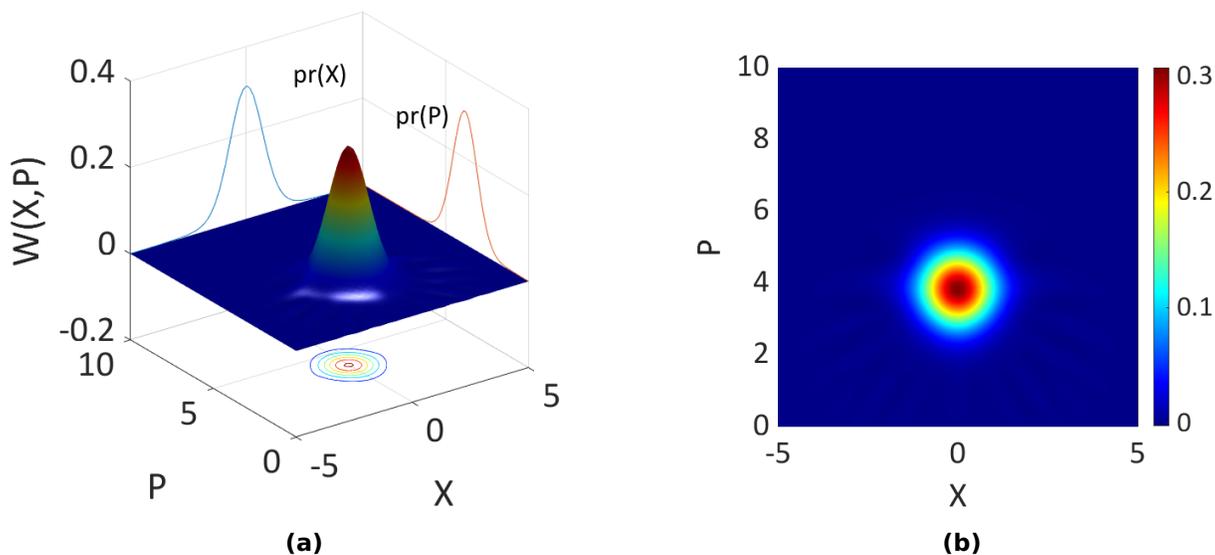
incertidumbre de las matrices de densidad simuladas a partir de los 20 conjuntos de datos.

Los elementos afuera de la diagonal son en general complejos, y se interpretan como superposiciones entre los estados  $|n\rangle$  y  $|m\rangle$ . Cohen-Tannoudji *et al.* mencionan que estos elementos representan efectos de interferencia entre los estados  $|n\rangle$  y  $|m\rangle$ , y que se denominan *coherencias*. Vale la pena mencionar que en las figuras 38a y 38b se representaron las amplitudes estos elementos.



**Figura 39.** Elementos de la diagonal principal de la matriz de densidad reconstruida en la base de número. Estos elementos se pueden interpretar como la distribución del número de fotones de la señal que se caracterizó. La línea azul representa la tendencia de una distribución de probabilidad de Poisson  $P(n)$  con valor esperado  $n=7,42$ .

Finalmente, con base en la matriz de densidad promedio calculada se determinó la función de Wigner del campo de interés por medio de la paquetería de Matlab desarrollada por Jeff Lundeen (2008). En las figuras 40a y 40b se presenta la función de Wigner resultante desde dos perspectivas diferentes. La distribución resultante es característica de estados coherentes: tiene un perfil gaussiano, centrado en un punto del espacio de fase cuántico diferente al origen; esto último, recordando que, en comparación, la distribución para el estado de vacío es también de perfil gaussiano, sólo que esta vez sí centrado en el origen.



**Figura 40.** (a) Función de Wigner del estado reconstruido. (b) Vista superior de la función de Wigner reconstruida.

## 4.4 Resumen

En este capítulo se presentó el diseño del experimento de tomografía cuántica, enfocado en estados coherentes pulsados generados mediante el fenómeno de amplificación paramétrica en una fibra óptica de cristal fotónico, altamente no lineal y comercial. Se plantea el desarrollo en tres etapas: la preparación del estado a caracterizar, la implementación de un experimento de detección homodina y el análisis de los datos mediante el uso de un algoritmo de reconstrucción de estados cuánticos. En la figura 41 se presenta el esquema experimental final que se propone, en el cual se agruparon los diseños presentados en las figuras 26 y 34.

La simulación del experimento de amplificación paramétrica se desarrolló en dos etapas: La primera consistió en la simulación de los modos guiados soportados por la fibra para cada modo interactuante a través del software MODE Solutions de Lumerical, así como el cálculo del traslape entre las distintas combinaciones de los cuatro campos que tienen empatamiento de fases. La segunda etapa consistió en el análisis numérico de las ecuaciones no lineales de Schrödinger acopladas que describen la propagación de los campos involucrados en el proceso. Este segundo modelo se analizó mediante un software propio donde se implementó el algoritmo de Fourier por paso dividido.



## Capítulo 5. Conclusiones

---

En esta tesis se llevó a cabo el diseño y la simulación de un experimento de tomografía homodina para la reconstrucción de estados cuánticos resueltos en el tiempo. En particular, nos concentramos en el estudio de los estados generados mediante el proceso de mezclado de cuatro ondas (FWM) estimulado en una fibra óptica de cristal fotónico (PCF), sin embargo, la metodología desarrollada es lo bastante general como para extender este tipo de análisis a otro tipo de estructuras o condiciones experimentales. El diseño se planteó en tres etapas:

- La preparación del estado a caracterizar.
- La implementación de un experimento de detección homodina balanceada para la medición de las cuadraturas de la señal a caracterizar.
- El análisis estadístico de los datos experimentales mediante algoritmos de reconstrucción de estados cuánticos.

Se presentaron los detalles experimentales y las estrategias de implementación de cada una de ellas.

El diseño de la primera etapa se elaboró con base en modelos teóricos del fenómeno de FWM estimulado, también denominado *amplificación paramétrica*, los cuales se desarrollaron desde dos perspectivas: por un lado, se usó un modelo basado en la teoría clásica electromagnética para investigar la dinámica de la propagación de los campos en la PCF propuesta y, por otro lado, se realizó un análisis desde el enfoque de la mecánica cuántica para estudiar la evolución del estado cuántico del modo de interés derivado de este proceso no lineal. Estos análisis se realizaron para tener un mayor entendimiento del mecanismo de generación de la señal que se propone caracterizar y, de esta manera, determinar los parámetros adecuados del diseño experimental.

El modelo clásico se basó en la teoría vectorial del FWM de Agrawal (2019) y se incluyeron los efectos de dispersión de los cuatro campos interactuantes, así como de auto-modulación de fases (SPM) y modulación de fases cruzadas (XPM) inducidas por los bombeos. Se trabajó en el régimen de bombeos intensos. Del planteamiento de este modelo se derivaron dos análisis complementarios: el estudio de los modos

transversales propagantes y el estudio de la evolución de las amplitudes de los campos por medio de las ecuaciones no lineales de Schrödinger acopladas. Es por esto que la simulación del experimento de amplificación paramétrica se desarrolló en dos etapas:

- La primera consistió en la simulación de los modos guiados soportados por la fibra para cada modo interactuante a través del software MODE Solutions de Lumerical, así como el cálculo del traslape entre las distintas combinaciones de los cuatro campos que tienen empatamiento de fases.
- La segunda etapa consistió en el análisis numérico de las ecuaciones no lineales de Schrödinger acopladas que describen la propagación de los campos involucrados en el proceso. Este segundo modelo se analizó mediante un software propio donde se implementó el algoritmo de Fourier por paso dividido.

Las simulaciones realizadas fueron inspiradas por la implementación experimental previa de un experimento de FWM espontáneo en la PCF comercial NL-PM-750 (NKT-Photonics, 2012), la cual también se presenta en esta tesis. Es de aclarar que las simulaciones se realizaron considerando el proceso semillado.

En el experimento mencionado se corroboró la generación del FWM mediante la medición de los espectros de las señales generadas de interés, centradas en  $\lambda = 1220nm$  (campo *señal*) y  $\lambda = 532nm$  (campo *acompañante*), considerando un bombeo centrado en  $\lambda = 740.8nm$ , las cuales están en buena concordancia con la condición de empatamiento de fases teórica para la PCF NL-PM-750, determinada en un trabajo anterior del grupo (De la Torre Robles, 2021b). Es de resaltar que la generación de estas señales se dan para un proceso con mezcla de polarizaciones XY para el bombeo<sup>1</sup>, Y para el campo acompañante, y X para el campo señal, recordando que X y Y son estados de polarización paralelos a los ejes lento y rápido de la fibra, respectivamente.

Por medio de este experimento se pudieron determinar condiciones realistas para las cuales se puede generar el fenómeno de amplificación paramétrica en la PCF utilizada. Para generar la amplificación paramétrica y proceder con la caracterización mediante tomografía homodina, bastará con acoplar el *láser semilla* ( $\lambda = 532 nm$ ) y ajustar su estado de polarización. La señal que se propone caracterizar median-

---

<sup>1</sup>Es decir, polarización lineal oblicua a los ejes principales de la fibra

te tomografía homodina corresponde con el campo no semillado, es decir, aquel con  $\lambda = 1220 \text{ nm}$ .

De los resultados de estas simulaciones se resaltan los siguientes aspectos:

- Mediante el análisis modal fue posible hacer un cálculo más preciso del parámetro no lineal  $\gamma$ , el cual define la eficiencia con la cual se generarán los efectos no lineales de tercer orden. Se obtuvo  $\gamma \approx 147(\text{km W})^{-1}$  para el FWM, y  $\gamma \approx 170(\text{km W})^{-1}$  para los procesos de modulación de fases (SPM y XPM). Como referencia, las fibras ópticas convencionales tienen un parámetro  $\gamma \approx 1(\text{km W})^{-1}$  y las fibras denominadas como *altamente no lineales* tienen un parámetro  $\gamma > 10(\text{km W})^{-1}$  (Agrawal, 2019), por lo cual esta fibra es una candidata ideal para la generación de fenómenos no lineales de tercer orden.
- Mediante el análisis de la evolución de las amplitudes de los campos interactuantes se determinaron sus características espectrales y perfiles temporales a lo largo de la propagación. En primer lugar, como se esperaba, se pudo observar la amplificación del campo semillado y la aparición de un campo acompañante<sup>2</sup> como resultado del proceso de amplificación paramétrica.

Adicionalmente, se encontró que la propagación en esta PCF de los cuatro campos definidos previamente está gobernada por los efectos no lineales, mientras que los efectos dispersivos juegan un papel relativamente menor. Esto se debe a que las longitudes de onda del bombeo y la señal consideradas son cercanas a las longitudes de onda de cero dispersión de la fibra. Se observó un efecto de desplazamiento o *walk-off* entre las dos componentes de polarización del bombeo como resultado de la diferencia entre sus velocidades de grupo. Ese desplazamiento podría afectar la eficiencia de la generación de la amplificación paramétrica.

La influencia de los efectos no lineales se pudo observar de manera más notoria en la evolución de los espectros de los cuatro campos. En especial, se observó un ensanchamiento y la aparición de una estructura de picos asimétricos en los espectros del bombeo y la señal de interés. Esto es característico de la generación de los fenómenos de SPM y XPM inducidos por el bombeo.

También se resaltan algunos rasgos particulares en la evolución del modo semi-

---

<sup>2</sup>Este es el campo que se busca caracterizar mediante tomografía homodina.

llado: dado que se consideró un campo semilla de onda continua, inicialmente éste tenía un perfil de potencia constante y a lo largo de la propagación fue adquiriendo una estructura pulsada sobre ese perfil constante como resultado de la amplificación paramétrica. El efecto de ese pedestal de potencia se puede constatar también en el espectro del campo semillado, en donde se resaltan dos contribuciones: el espectro de un campo de onda continua, similar a una distribución delta de Dirac, y una falda con una estructura más ancha, la cual corresponde con la contribución de la estructura pulsada.

En cuanto al modo no semillado, se observó la generación de pulsos centrados a la frecuencia del campo señal, con un perfil temporal similar al de los pulsos generados en el otro modo, sólo que sin la contribución del pedestal de potencia constante. Se destaca que la estructura espectral estimada para este campo es similar a la medida en el experimento que inspiró este estudio, lo cual da un indicio de que la estructura de doble pico medida se pueda explicar mediante la generación del efecto de XPM inducido por el bombeo, aún en el caso espontáneo.

En este trabajo es de interés el cálculo de la intensidad a la salida de la fibra de la señal a caracterizar para diferentes valores del bombeo y la semilla, debido a que el conocimiento de este parámetro es fundamental para verificar la viabilidad del arreglo de caracterización. Si la amplificación es insuficiente, es posible que la señal no sea perceptible por el detector homodino. Se encontró que incluso para una potencia promedio del bombeo del orden de 100 mW y una semilla del orden de 20 mW, la potencia estimada promedio de la señal de interés (el modo no semillado) es menor a 80  $\mu$ W. Dado que se obtuvo una potencia estimada bastante baja, se requerirá de un láser guía auxiliar para el montaje del arreglo experimental de detección homodina. Con todo, vale la pena mencionar que si bien la potencia estimada es baja, es superior a la potencia equivalente del ruido del detector, por lo cual se espera que aún sea detectable.

Estos resultados ponen de manifiesto que es factible la implementación del experimento de tomografía homodina para caracterizar los estados generados mediante amplificación paramétrica utilizando un oscilador local auto-referenciado.

En otro orden de ideas, se estudió la derivación del estado cuántico que describe el modo no semillado en el proceso de mezclado de cuatro ondas estimulado, basado

en la evolución de estados asintóticos en términos de un formalismo de Heisenberg, de manera similar al tratamiento de Yang y colaboradores (Yang *et al.*, 2008). Se destaca que, si bien es posible generar estados comprimidos o *squeezed* de dos modos mediante el proceso no lineal aquí expuesto, esto no implica que cada modo esté comprimido (Lvovsky, 2015). Del análisis del estado del modo no semillado, en particular, se encontró que éste se puede describir en términos similares a un *estado coherente* cuya amplitud está definida a partir de un término de amplificación, el cual depende de los traslapes de los espectros de las componentes del bombeo, de las amplitudes del bombeo y la semilla, del parámetro no lineal  $\gamma$  y la longitud de la fibra, y el empatamiento de fases entre los cuatro campos interactuantes. La definición del estado final encontrado se tuvo en cuenta para la simulación de los datos de cuadratura.

Posterior a los análisis teóricos y las simulaciones mencionadas, se presentaron las condiciones fundamentales para la implementación exitosa de un experimento de detección homodina balanceada para campos pulsados, se revisaron los aspectos técnicos que se requieren para verificar la validez de las mediciones y se mostraron las características del proceso de adquisición y análisis de datos. Se presentaron de manera general los algoritmos de *funciones patrones* y de *estimación de máxima verosimilitud* (MaxLik), los cuales se eligieron en este proyecto para la reconstrucción del estado cuántico de la señal pulsada, generada mediante la amplificación paramétrica. Se identificaron posibles fuentes de error y se expuso la técnica que se propone para cuantificar el error en la reconstrucción de los estados cuánticos, que consiste en comparar el estado reconstruido a partir de las mediciones experimentales, con respecto al *estado ideal*, reconstruido a partir de datos simulados.

Se simularon varios conjuntos de datos de cuadratura mediante un algoritmo de aceptación y rechazo, y se presentaron la matriz de densidad y la función de Wigner reconstruidas a partir de ellos. Ambas representaciones cumplen con funciones muy similares a las de las distribuciones de probabilidad de la mecánica estadística, sin embargo se pueden interpretar en dos contextos diferentes: la matriz de densidad permite conocer cómo se distribuye la probabilidad de medir ciertas cantidades observables en el sistema de interés, mientras que la función de Wigner muestra cómo se comporta el estado de éste en el espacio de fase cuántico.

Para finalizar, conviene destacar tres observaciones. Primero: Una de las ventajas

de la metodología desarrollada en este trabajo es que se plantea el uso de osciladores locales auto-generados, por lo cual se espera que haya una mayor eficiencia en las mediciones como resultado del traslape de modos automático entre la señal a caracterizar y el oscilador local. Segundo: Si bien en este trabajo se plantea la caracterización de estados coherentes de onda pulsada, vale la pena mencionar que esta metodología se puede extender fácilmente a la caracterización de estados comprimidos de dos modos, también conocidos como *twin beams*, simplemente sería necesario adicionar una etapa de detección homodina en el brazo de la señal acompañante en el arreglo experimental final. Finalmente, se espera que los resultados teóricos y experimentales de esta tesis contribuyan también con el diseño de nuevas fuentes pulsadas en un intervalo amplio de frecuencias, generadas a partir del fenómeno de la amplificación paramétrica utilizando medios no lineales de tercer orden.

## Literatura citada

- Abdul Khudus, M. I. M., De Lucia, F., Corbari, C., Lee, T., Horak, P., Sazio, P., y Brambilla, G. (2016). Phase matched parametric amplification via four-wave mixing in optical microfibers. *Optics Letters*, **41**(4): 761.
- Agrawal, G. (2013). Four-wave mixing. En: G. Agrawal (ed.), *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, Boston, 5ta. ed., Optics and Photonics, pp. 397 – 456.
- Agrawal, G. (2019). *Nonlinear fiber optics*. Academic Press, 6mo ed.
- Agrawal, G. P. (2008). *Applications of nonlinear fiber optics*. Elsevier, 2da. ed.
- Andersen, T. V., Schmidt, O., Limpert, J., Tünnermann, A., Aguergeray, C., y Cormier, E. (2006). Ultrashort pulse generation by fiber laser pumped parametric amplification. *Conference on Lasers and Electro-Optics and 2006 Quantum Electronics and Laser Science Conference, CLEO/QELS 2006*, pp. 3–4.
- Aspect, A. (2007). To be or not to be local. *Nature*, **446**(7138): 866–867.
- Banaszek, K. (1998). Maximum-likelihood estimation of photon-number distribution from homodyne statistics. *Physical Review A*, **57**(6): 5013.
- Beiser, A. (1969). Perspectives of modern physics. *McGraw-Hill series in fundamentals of physics..*
- Bertrand, J. y Bertrand, P. (1987). A tomographic approach to wigner's function. *Foundations of Physics*, **17**(4): 397–405.
- Blackledge, J. M. (2006). *Digital Image Processing: Mathematical and Computational Methods*. Woodhead Publishing Limited. pp. 246–272.
- Blatt, R., Milburn, G. J., y Lvovsky, A. (2013). The 20th anniversary of quantum state engineering. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys*, **46**(100201): 100201.
- Blésin, T., Matsushita, R., Akahane, K., y Ishi-Hayase, J. (2019). Quantum state tomography of ultrafast optical pulses at telecom wavelength by broadband balanced homodyne detection. En: P. R. Hemmer, A. L. Migdall, y Z. U. Hasan (eds.), *Advances in Photonics of Quantum Computing, Memory, and Communication XII*. International Society for Optics and Photonics, SPIE, Vol. 10933, pp. 88 – 99.
- Boughn, S. (2019). What are physical states? *arXiv preprint:1903.10348*.
- Boyd, R. W. (2008). *Nonlinear optics*. Academic Press, 3ra. ed.
- Boyer, V., Marino, A. M., Poeser, R. C., y Lett, P. D. (2008). Entangled images from four-wave mixing. *Science*, **321**(5888): 544–547.
- Breitenbach, G., Schiller, S., y Mlynek, J. (1997). Measurement of the quantum states of squeezed light. *Nature*, **387**(6632): 471–475.
- Buczynski, R. (2004). Photonic crystal fibers. *Acta Physica Polonica A*, **106**(2): 141–167.
- Butcher, P. N. y Cotter, D. (1990). *The Elements of Nonlinear Optics*. Cambridge University Press.

- Carpeggiani, P., Coccia, G., Fan, G., Kaksis, E., Pugžlys, A., Baltuška, A., Piccoli, R., Jeong, Y.-G., Rovere, A., Morandotti, R., *et al.* (2020). Extreme raman red shift: ultrafast multimode nonlinear space-time dynamics, pulse compression, and broadly tunable frequency conversion. *Optica*, **7**(10): 1349–1354.
- Caspani, L., Xiong, C., Eggleton, B. J., Bajoni, D., Liscidini, M., Galli, M., Morandotti, R., y Moss, D. J. (2017). Integrated sources of photon quantum states based on nonlinear optics. *Light: Science & Applications*, **6**(11): e17100–e17100.
- Chiang, K. (1994). Review of numerical and approximate methods for the modal analysis of general optical dielectric waveguides. *Opt Quant Electron*, **26**: S113–S134.
- Cialdi, S., Porto, C., Cipriani, D., Olivares, S., y Paris, M. G. (2016). Full quantum state reconstruction of symmetric two-mode squeezed thermal states via spectral homodyne detection and a state-balancing detector. *Physical Review A*, **93**(4): 043805.
- Ciriolo, A. G., Negro, M., Devetta, M., Cinquanta, E., Faccialà, D., Pusala, A., De Silvestri, S., Stagira, S., y Vozzi, C. (2017). Optical parametric amplification techniques for the generation of high-energy few-optical-cycles ir pulses for strong field applications. *Applied Sciences*, **7**(3): 265.
- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., y Laloë, F. (1977). *Quantum Mechanics vol 1 (Paris: Hermann)*. Wiley.
- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., y Laloe, F. (2020). *Quantum mechanics, Vol. 1: Basic concepts, tools and applications*. Wiley VCH, 2da. ed.
- Coherent (1997). *Picosecond Modelocked Titanium:Sapphire laser-Mira 900 P datasheet*. Coherent. Online. Consultado en: <https://www.coherent.com/assets/pdf/Mira-Optima-900-P-Data-Sheet.pdf>.
- Coherent (2020). *Verdi – High Performance CW Green Lasers*. Coherent. Online. Consultado en: <https://www.coherent.com/lasers/cw-solid-state/verdi>.
- Cooper, M., Söller, C., y Smith, B. J. (2013). High-stability time-domain balanced homodyne detector for ultrafast optical pulse applications. *Journal of Modern Optics*, **60**(8): 611–616.
- Cruz, F. C. (2008). Optical frequency combs generated by fourwave mixing in optical fibers for astrophysical spectrometer calibration and metrology. *Optics express*, **16**(17): 13267–13275.
- Cruz-Delgado, D., Ramirez-Alarcon, R., Ortiz-Ricardo, E., Monroy-Ruz, J., Dominguez-Serna, F., Cruz-Ramirez, H., Garay-Palmett, K., y U'Ren, A. (2016). Fiber-based photon-pair source capable of hybrid entanglement in frequency and transverse mode, controllably scalable to higher dimensions. *Scientific reports*, **6**(1): 1–9.
- Cruz y Cruz, S. y Rosas Ortiz, O. (2008). Estados coherentes y gatos de schrödinger. *CINVESTAV*, **27**: 30–37.
- Dance, D. R., Christofides, S., Maidment, A. D. A., McLean, I., y Ng, K. (2014). *Diagnostic radiology physics: A handbook for teachers and students*. International atomic energy agency. pp. 267–273.

- D'Ariano, G. M., Paris, M. G. A., y Sacchi, M. F. (2003). Quantum tomography. *Advances in Imaging and Electron Physics*, **128**: 205–308.
- Davies, P. C. W., Davies, P. C. W., y Brown, J. (1992). *Superstrings: A theory of everything?*. Cambridge University Press.
- Davis, W. C. (1981). Simplified wave plate measurements. *Applied optics*, **20**(17): 2879–2880.
- De, M., Gangopadhyay, T. K., y Singh, V. K. (2019). Prospects of photonic crystal fiber as physical sensor: An overview. *Sensors*, **19**(3): 464.
- De la Torre Robles, D. A. (2021a). *Análogo de radiación de Hawking a través del mezclado de cuatro ondas espontáneo*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav), Ciudad de México, México.
- De la Torre Robles, D. A. (2021b). Fiber-based photon-pair generation toward frequency-polarization hybrid entanglement. Manuscrito no publicado.
- de Negreiros Júnior, J. S., do Nascimento, D., Cavalcante, S., de Moraes, J. L., Marcelino, L. R., Magalhães, F. T. d. C. B., Barboza, R. R., de Carvalho, M. L. R. M., y de Freitas Guimarães, G. (2018). Ultrashort pulses propagation through different approaches of the split-step fourier method. *Journal of Mechatronics Engineering*, **1**(3): 2–11.
- de Souza, T. G., Barbano, E. C., Zilio, S. C., y Misoguti, L. (2017). Measurement of nonlinear refractive indices of air, oxygen, and nitrogen in capillary by changing the temporal width of short laser pulses. *JOSA B*, **34**(10): 2233–2237.
- Dell'Anno, F., De Siena, S., y Illuminati, F. (2006). Multiphoton quantum optics and quantum state engineering. *Physics reports*, **428**(2-3): 53–168.
- DeWolf, T. y Gordon, R. (2017). Complex coupled mode theory electromagnetic mode solver. *Optics Express*, **25**(23): 28337–28351.
- Dirac, P. A. M. (1927). The quantum theory of the emission and absorption of radiation. *Proceedings of the Royal Society of London. Serie A*, **114**(767): 243–265.
- Domínguez-Serna, F. A. y Garay-Palmett, K. (2021). Quantum state preparation and one qubit logic from third-order nonlinear interactions. *arXiv preprint arXiv:2103.04022*.
- Domínguez-Serna, F. A., U'Ren, A. B., y Garay-Palmett, K. (2020). Third-order parametric down-conversion: A stimulated approach. *Physical Review A*, **101**(3): 033813.
- Dowling, Jonathan P. y Milburn, G. J. (2003). Quantum technology: the second quantum revolution. *Phil. Trans. R. Soc. A.*, **361**(1809): 1655–1674.
- Drummond, P. D. y Hillery, M. (2014). *The Quantum Theory of Nonlinear Optics*. Cambridge University Press.
- Dudley, J. M., Genty, G., y Coen, S. (2006). Supercontinuum generation in photonic crystal fiber. *Reviews of modern physics*, **78**(4): 1135.
- Duguay, M. y Hansen, J.-W. (1969). An ultrafast light gate. *Applied physics letters*, **15**(6): 192–194.

- Eisberg, R. y Resnick, R. (1985). *Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei, and particles*. John Wiley & Sons, Ltd, 2da. ed.
- Erkintalo, M., Genty, G., y Dudley, J. (2010). Giant dispersive wave generation through soliton collision. *Optics letters*, **35**(5): 658–660.
- Esposito, M. (2011). *Design and experimental realization of a pulsed homodyne detector for optical quantum states characterization*. Tesis de maestría, Università Degli Studi Di Trieste.
- Fan, J. y Migdall, A. (2007). A broadband high spectral brightness fiber-based two-photon source. *Optics express*, **15**(6): 2915–2920.
- Fano, U. (1957). Description of states in quantum mechanics by density matrix and operator techniques. *Reviews of Modern Physics*, **29**(1): 74–93.
- Feiguin, A. E. (2009). von neumann rejection. Northeastern University. Online. Consultado en: <https://web.northeastern.edu/afeiguin/phys5870/phys5870/node66.html>.
- Feldkamp, L. A., Davis, L. C., y Kress, J. W. (1984). Practical cone-beam algorithm. *Josa a*, **1**(6): 612–619.
- Fisher, R. A. (1922). On the mathematical foundations of theoretical statistics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, **222**(594-604): 309–368.
- Fock, V. (1932). Konfigurationsraum und zweite quantelung. *Zeitschrift für Physik*, **75**(9-10): 622–647.
- Furusawa, A. (2015). *Quantum states of light*, Vol. 10. SpringerBriefs in Mathematical Physics-Springer. pp. 4–10.
- Garay-Palmett, K., McGuinness, H., Cohen, O., Lundeen, J., Rangel-Rojo, R., U'ren, A., Raymer, M., McKinstrie, C., Radic, S., y Walmsley, I. (2007). Photon pair-state preparation with tailored spectral properties by spontaneous four-wave mixing in photonic-crystal fiber. *Optics express*, **15**(22): 14870–14886.
- Garay-Palmett, K., U'Ren, A. B., y Rangel-Rojo, R. (2010). Conversion efficiency in the process of copolarized spontaneous four-wave mixing. *Physical Review A*, **82**(4): 043809.
- Garay-Palmett, K., Corona, M., y U'Ren, A. (2013). Spontaneous parametric processes in optical fibers: a comparison. *Revista Mexicana de Física*, **57**(3).
- Garay-Palmett, K., Cruz-Delgado, D., Dominguez-Serna, F., Ortiz-Ricardo, E., Monroy-Ruz, J., Cruz-Ramirez, H., Ramirez-Alarcon, R., y U'Ren, A. (2016). Photon-pair generation by intermodal spontaneous four-wave mixing in birefringent, weakly guiding optical fibers. *Physical Review A*, **93**(3): 033810.
- Geng, Y., Wang, L., Tan, X., Xu, Y., Hong, X., y Li, X. (2018). A compact four-wave mixing-based temperature fiber sensor with partially filled photonic crystal fiber. *IEEE Sensors Journal*, **19**(8): 2956–2961.
- Gerry, C. y Knight, P. (2005). *Introductory quantum optics*. Cambridge University Press.

- Glauber, R. J. (1963a). Coherent and incoherent states of the radiation field. *Physical Review*, **131**(6): 2766.
- Glauber, R. J. (1963b). Photon correlations. *Physical Review Letters*, **10**(3): 84.
- Glauber, R. J. (1963c). The quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.*, **130**: 2529–2539.
- Glauber, R. J. (2006). Nobel lecture: One hundred years of light quanta. *Reviews of Modern Physics*, **78**(4): 1267–1278.
- Goudreau, E. S., Kupchak, C., Sussman, B. J., Boyd, R. W., y Lundeen, J. S. (2020). Theory of four-wave mixing of cylindrical vector beams in optical fibers. *JOSA B*, **37**(6): 1670–1682.
- Grynberg, G., Aspect, A., y Fabre, C. (2010). *Introduction to quantum optics: from the semi-classical approach to quantized light*. Cambridge University Press.
- Hanacek, N. (2018). The second quantum revolution. NIST. Online. Consultado en: <https://www.nist.gov/topics/physics/introduction-new-quantum-revolution/second-quantum-revolution>.
- Hansryd, J., Andrekson, P. A., Westlund, M., Li, J., y Hedekvist, P. O. (2002). Fiber-based optical parametric amplifiers and their applications. *IEEE Journal on Selected Topics in Quantum Electronics*, **8**(3): 506–520.
- Hecht, E. (2017). *Optics*. Pearson Education Limited, 5ta. ed.
- Henri-Rousseau, O. y Blaise, P. (2011). *Quantum Oscillators*. John Wiley & Sons.
- Hofer, M., Ober, M., Haberl, F., y Fermann, M. (1992). Characterization of ultrashort pulse formation in passively mode-locked fiber lasers. *IEEE journal of quantum electronics*, **28**(3): 720–728.
- Hoo, Y. L., Jin, W., Shi, C., Ho, H. L., Wang, D. N., y Ruan, S. C. (2003). Design and modeling of a photonic crystal fiber gas sensor. *Applied Optics*, **42**(18): 3509–3515.
- Hradil, Z. (1997). Quantum-state estimation. *Physical Review A*, **55**(3): R1561.
- Hradil, Z., Řeháček, J., Fiurášek, J., y Ježek, M. (2004). 3 maximum-likelihood methods in quantum mechanics. En: *Quantum state estimation*. Springer, pp. 59–112.
- Hu, H., Jopson, R., Gnauck, A., Dinu, M., Chandrasekhar, S., Xie, C., y Randel, S. (2015). Parametric amplification, wavelength conversion, and phase conjugation of a 2.048-tbit/s wdm pdm 16-qam signal. *Journal of Lightwave Technology*, **33**(7): 1286–1291.
- Hunsperger, R. G. (2009). Losses in optical waveguides. En: *Integrated Optics*. Springer, pp. 107–128.
- Ishii, N., Teisset, C. Y., Köhler, S., Serebryannikov, E., Fuji, T., Metzger, T., Krausz, F., Baltuška, A., y Zheltikov, A. (2006). Widely tunable soliton frequency shifting of few-cycle laser pulses. *Physical Review E*, **74**(3): 036617.
- Ismail, M. y Taha, T. R. (2001). Numerical simulation of coupled nonlinear schrödinger equation. *Mathematics and Computers in Simulation*, **56**(6): 547–562.

- Jacobs, K. (2014). *Quantum measurement theory and its applications*. Cambridge University Press. pp. 15–21.
- Joannopoulos, J. D., Johnson, S. G., Winn, J. N., y Meade, R. D. (2008). *Photonic crystals*. Princeton university press, 2da. ed.
- Kim, C. y Kumar, P. (1994). Quadrature-squeezed light detection using a self-generated matched local oscillator. *Physical review letters*, **73**(12): 1605.
- Knight, J., Arriaga, J., Birks, T., Ortigosa-Blanch, A., Wadsworth, W., y Russell, P. S. J. (2000). Anomalous dispersion in photonic crystal fiber. *IEEE photonics technology letters*, **12**(7): 807–809.
- Knight, J., Birks, T., Mangan, B., y St. James Russell, P. (2002). Photonic Crystal Fibers: New Solutions in Fiber Optics. *Optics and Photonics News*, **13**(3): 26.
- Knight, J. C. (2003). Photonic crystal fibres. *Nature*, **424**(6950): 847–851.
- Knight, J. C., Birks, T. A., Russell, P. S. J., y Atkin, D. M. (1997). All-silica single-mode optical fiber with photonic crystal cladding. *Optics Letters*, **22**(7): 484.
- Landau, D. y Binder, K. (2015). *A guide to Monte Carlo simulations in statistical physics*. Cambridge university press, 4ta. ed.
- Landau, L. (1927). Das dämpfungsproblem in der wellenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, **45**(5-6): 430–441.
- LeCroy, T. (2017). *WaveSurfer 3000 Oscilloscopes datasheet*. Teledyne LeCroy. Online. Consultado en: <https://www.mouser.mx/datasheet/2/227/wavesurfer-3000-datasheet-461399.pdf>.
- Leonhardt, U. (1997). *Measuring the Quantum State of Light*. Cambridge Studies in Modern Optics. Cambridge University Press.
- Leonhardt, U. (2010). *Essential quantum optics: from quantum measurements to black holes*. Cambridge University Press.
- Leonhardt, U., Paul, H., y D'Ariano, G. M. (1995). Tomographic reconstruction of the density matrix via pattern functions. *Physical Review A*, **52**(6): 4899–4907.
- Li, J., Hansryd, J., Hedekvist, P. O., Andrekson, P. A., y Knudsen, S. N. (2001). 300 gbit/s eye-diagram measurement by optical sampling using fiber based parametric amplification. En: *OFC 2001. Optical Fiber Communication Conference and Exhibit. Technical Digest Postconference Edition (IEEE Cat. 01CH37171)*. IEEE, Vol. 4, pp. PD31–PD31.
- Li, X., Wang, Z., y Liu, H. (2014). The coupled nonlinear schrödinger equations describing power and phase for modeling phase-sensitive parametric amplification in silicon waveguides. *Journal of Applied Mathematics*, **2014**.
- Libori, S. B., Broeng, J., Knudsen, E., Bjarklev, A., y Simonsen, H. R. (2001). High-birefringent photonic crystal fiber. En: *Optical Fiber Communication Conference*. Optical Society of America, p. TuM2.
- Lin, Q. y Agrawal, G. P. (2004a). Vector theory of cross-phase modulation: Role of nonlinear polarization rotation. *IEEE journal of quantum electronics*, **40**(7): 958–964.

- Lin, Q. y Agrawal, G. P. (2004b). Vector theory of four-wave mixing: polarization effects in fiber-optic parametric amplifiers. *JOSA B*, **21**(6): 1216–1224.
- Loudon, R. (2000). *The quantum theory of light*. Oxford University Press, 3ra. ed.
- Lumerical (2020a). Finite difference eigenmode (fde) solver introduction. Ansys/Lumerical. Online. Consultado en: <https://support.lumerical.com/hc/en-us/articles/360034917233-FDE>.
- Lumerical (2020b). Pml boundary conditions in fdtd and mode. Ansys/Lumerical. Online. Consultado en: <https://support.lumerical.com/hc/en-us/articles/360034382674-PML-boundary-conditions-in-FDTD-and-MODE>.
- Lundeen, J. S. (2008). Matlab code to reconstruct the quantum state of light via the measured difference currents from balanced homodyne tomography. Online. Consultado en: <http://www.photonicquantum.info/Tools.html>.
- Lüpken, N. M., Würthwein, T., Boller, K.-J., y Fallnich, C. (2021). Optical parametric amplification in silicon nitride waveguides for coherent raman imaging. *Optics Express*, **29**(7): 10424–10433.
- Lvovsky, A. y Mlynek, J. (2002). Quantum-optical catalysis: generating nonclassical states of light by means of linear optics. *Physical review letters*, **88**(25): 250401.
- Lvovsky, A. I. (2004). Iterative maximum-likelihood reconstruction in quantum homodyne tomography. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, **6**(6): 556–559.
- Lvovsky, A. I. (2015). Squeezed light. *Photonics: Scientific Foundations, Technology and Applications*, **1**: 121–163.
- Lvovsky, A. I. y Raymer, M. G. (2009). Continuous-variable optical quantum-state tomography. *Reviews of Modern Physics*.
- Lvovsky, A. I., Hansen, H., Aichele, T., Benson, O., Mlynek, J., y Schiller, S. (2001). Quantum State Reconstruction of the Single-Photon Fock State. *Physical Review Letters*, **87**(5): 050402.
- MacRae, A. (2012). *An Atomic Source of Quantum Light*. Tesis de doctorado no publicada, University of Calgary, Calgary, AB.
- Malitson, I. H. (1965). Interspecimen comparison of the refractive index of fused silica. *Josa*, **55**(10): 1205–1209.
- Mandel, Leonard y Wolf, E. (1995). *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge university press.
- Marhic, M. E. (2008). *Fiber optical parametric amplifiers, oscillators and related devices*. Cambridge University Press.
- Marhic, M. E., Wong, K. K.-Y., Kalogerakis, G., y Kazovsky, L. G. (2004). Toward practical fiber optical parametric amplifiers and oscillators. *Optics and photonics news*, **15**(9): 20–25.

- Mathworks (2020). Generating pseudorandom numbers- matlab & simulink. acceptance-rejection methods [en línea]. <https://www.mathworks.com/help/stats/generating-random-data.html#br5k9hi-4>.
- McCusker, K. T. y Kwiat, P. G. (2009). Efficient optical quantum state engineering. *Physical review letters*, **103**(16): 163602.
- Migdall, A., Polyakov, S. V., Fan, J., y Bienfang, J. C. (2013). *Single-photon generation and detection: physics and applications*. Academic Press.
- Milton, K. A. (2009). *Compendium of Quantum Physics: concepts, experiments, history and philosophy*, capítulo Quantum Electrodynamics (QED), pp. 539–543. Greenberger, D., Hentschel, K. y Weinert, F., Springer.
- Mondal, K. (2020). A comparative study of birefringence in photonic crystal fiber employing various lattice geometries with all-circular air holes. *Optik*, **215**: 164699.
- Neergaard-Nielsen, J. S., Nielsen, B. M., Hettich, C., Mølmer, K., y Polzik, E. S. (2006). Generation of a superposition of odd photon number states for quantum information networks. *Physical review letters*, **97**(8): 083604.
- Nehra, R., Win, A., Eaton, M., Shahrokhshahi, R., Sridhar, N., Gerrits, T., Lita, A., Nam, S. W., y Pfister, O. (2019). Quantum state engineering and state tomography using photon-number-resolving measurements (Presentación en conferencia). En: K. S. Deacon (ed.), *Quantum Communications and Quantum Imaging XVII*. International Society for Optics and Photonics, SPIE, Vol. 11134.
- Newport (2021). *Insights into High-Speed Detectors and High-Frequency Techniques*. Newport. Online. Consultado en: <https://www.newport.com/n/insights-into-high-speed-detectors-and-high-frequency-techniques>.
- NKT-Photonics (2012). *NL-PM-750: Nonlinear Photonic Crystal Fiber*. NKT Photonics. Online. Consultado en: <https://www.nktphotonics.com/lasers-fibers/product/nonlinear-photonic-crystal-fibers/>.
- NKT-Photonics (2020). *Lasers and Fibers: Photonic crystal fibers [Fotografía]*. NKT Photonics. Online. Consultado en: <https://www.nktphotonics.com/lasers-fibers/technology/photonic-crystal-fibers/>.
- Obayya, S. S. A., Rahman, B. M. A., y El-Mikati, H. A. (2000). New full-vectorial numerically efficient propagation algorithm based on the finite element method. *J. Lightwave Technol.*, **18**(3): 409.
- Olivier, T., Billard, F., y Akhouayri, H. (2004). Z-scan studies of the nonlinear refractive index of fused silica in the nanosecond regime. En: *Optical Fabrication, Testing, and Metrology*. International Society for Optics and Photonics, Vol. 5252, pp. 391–401.
- Ortigosa-Blanch, A., Knight, J., Wadsworth, W., Arriaga, J., Mangan, B., Birks, T., y Russell, P. S. J. (2000). Highly Birefringent Photonic Crystal Fibers. *Optics and Photonics News*, **25**(18): 17.
- Osorio, G. L. (2018). *Reconstrucción de estados coherentes mediante tomografía homodina*. Tesis de licenciatura, Universidad Tecnológica de Pereira.

- Ourjoumtsev, A., Tualle-Brouiri, R., Laurat, J., y Grangier, P. (2006). Generating optical schrödinger kittens for quantum information processing. *Science*, **312**(5770): 83–86.
- Paris, M. y Rehacek, J. (2004). *Quantum State Estimation, Lecture Notes in Physics*, Vol. 649. Springer.
- Paschotta, R. (2008a). Coherence. En: *Encyclopedia of Laser Physics and Technology*. Wiley-VCH, 1era. ed.
- Paschotta, R. (2008b). Effective refractive index. En: *Encyclopedia of Laser Physics and Technology*. Wiley-VCH, 1era. ed.
- Paschotta, R. (2008c). Cladding modes. En: *Encyclopedia of Laser Physics and Technology*. Wiley-VCH, 1era. ed. Online. Consultado en: [https://www.rp-photonics.com/cladding\\_modes.html](https://www.rp-photonics.com/cladding_modes.html).
- Paschotta, R. (2008d). *Field guide to lasers*. SPIE press Bellingham.
- Paschotta, R. (2010). *Field Guide to Optical Fiber Technology*. SPIE Press Book. pp. 1–9.
- Peres, A. (2002). *Quantum theory: concepts and methods*, Vol. 72. Kluwer Academic Publishers.
- Phillips, M. R. y Darcie, T. E. (1997). Lightwave analog video transmission. *Optical Fiber Telecommunications IIIA*, pp. 523–559.
- Planck, M. (1900). On the theory of the energy distribution law of the normal spectrum. *Verh. Deut. Phys. Ges*, **2**: 237–245.
- Pusey, M. F., Barrett, J., y Rudolph, T. (2012). On the reality of the quantum state. *Nature Physics*, **8**(6): 475–478.
- Radic, S. y McKinstrie, C. J. (2005). Optical amplification and signal processing in highly nonlinear optical fiber. *IEICE transactions on electronics*, **88**(5): 859–869.
- Radon, J. (1917). Über die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte längs gewissermannigfaltigkeiten. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse*, **69**: 262–277.
- Rarity, J., Fulconis, J., Duligall, J., Wadsworth, W., y Russell, P. S. J. (2005). Photonic crystal fiber source of correlated photon pairs. *Optics express*, **13**(2): 534–544.
- Raymer, M. G. y Beck, M. (2004). Experimental quantum state measurement of optical fields and ultrafast statistical sampling. En: M. Paris y J. Řeháček (eds.), *Quantum state estimation*, Vol. 649 de *Lecture Notes in Physics*. Springer, Berlin, capítulo 7, pp. 235–295.
- Richter, T. (1996). Determination of occupation probabilities from time-averaged position distributions. *Physics Letters, Section A General, Atomic and Solid State Physics*, **53**: 1974.
- Rossi, R. J. (2018). *Mathematical statistics: an introduction to likelihood based inference*. John Wiley & Sons.

- Russell, P. S. J. (2003). Photonic crystal fibers. *Science*, **299**(358): 358–362.
- Saad, S. (1985). Review of numerical methods for the analysis of arbitrarily-shaped microwave and optical dielectric waveguides. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **33**(10): 894–899.
- Saitoh, K. y Koshiba, M. (2005). Numerical modeling of photonic crystal fibers. *Journal of lightwave technology*, **23**(11): 3580.
- Sakurai, J. y Napolitano, J. (1994). *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley, 2da. ed. p. 95.
- Saleh, B. E. A. y Teich, M. C. (1991). *Fundamentals of photonics*. John Wiley & Sons, Ltd. pp. 272–309.
- Sanders, A. y Rasmussen, A. (1982). A system for measuring energy and peak power of low-level 1064 nm laser pulses. Reporte técnico, U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Boulder, CO.
- Schindelin, J., Arganda-Carreras, I., Frise, E., Kaynig, V., Longair, M., Pietzsch, T., Preibisch, S., Rueden, C., Saalfeld, S., Schmid, B., *et al.* (2012). Fiji: an open-source platform for biological-image analysis. *Nature methods*, **9**(7): 676–682.
- Schrödinger, E. (1926). Der stetige Übergang von der mikro-zur makromechanik. *Naturwissenschaften*, **14**(28): 664–666.
- Schweber, S. S. (2011). *QED and the men who made it: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga*. Princeton Univ. Press.
- Schweig, E. y Bridges, W. (1984). Computer analysis of dielectric waveguides: A finite-difference method. *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, **32**(5): 531–541.
- Selleri, S., Vincetti, L., Cucinotta, A., y Zoboli, M. (2001). Complex fem modal solver of optical waveguides with pml boundary conditions. *Opt. Quant. Electron.*, **33**(4-5): 359–371.
- Shimoji, Y., Fay, A., Chang, R., y Djeu, N. (1989). Direct measurement of the nonlinear refractive index of air. *JOSA B*, **6**(11): 1994–1998.
- Smithey, D. T., Beck, M., Raymer, M. G., y Faridani, A. (1993). Measurement of the Wigner Distribution and the Density Matrix of a Light Mode Using Optical Homodyne Tomography: Application to Squeezed States and the Vacuum. *Physical Review Letters*, **70**(9): 1244–1247.
- Snyder, A. W. y Love, J. D. (1983). Waveguides with exact solutions. En: *Optical Waveguide Theory*. Springer, pp. 238–279.
- Steinlechner, S., Rohweder, N.-O., Korobko, M., Töyrä, D., Freise, A., y Schnabel, R. (2018). Mitigating mode-matching loss in nonclassical laser interferometry. *Physical review letters*, **121**(26): 263602.
- Suzuki, K., Kubota, H., Kawanishi, S., Tanaka, M., y Fujita, M. (2001). Optical properties of a low-loss polarization-maintaining photonic crystal fiber. *Optics Express*, **9**(13): 676–680.

- Sylvestre, T., Kudlinski, A., Mussot, A., Gleyze, J.-F., Jolly, A., y Maillotte, H. (2009). Parametric amplification and wavelength conversion in the 1040–1090 nm band by use of a photonic crystal fiber. *Applied Physics Letters*, **94**(11): 111104.
- Taghizadeh, M., Tavassoly, M. K., Hatami, M., y Pakarzadeh, H. (2018). One-pump fiber optical parametric amplifiers: from the pulsed to the continuous wave operation. *Optical Engineering*, **57**(5): 056103.
- Taha, T. R. y Xu, X. (2005). Parallel split-step fourier methods for the coupled nonlinear schrödinger type equations. *The Journal of Supercomputing*, **32**(1): 5–23.
- Tan, C. (1998). Determination of refractive index of silica glass for infrared wavelengths by ir spectroscopy. *Journal of Non-Crystalline Solids*, **223**(1-2): 158–163.
- Thorlabs (2011). *Multi-Wave Liquid Crystal Variable Retarders / Wave Plates*. Thorlabs. Online. Consultado en: [https://www.thorlabs.com/newgrouppage9.cfm?objectgroup\\_id=8454&pn=LCC1115-C](https://www.thorlabs.com/newgrouppage9.cfm?objectgroup_id=8454&pn=LCC1115-C).
- Thorlabs (2019). *Balanced amplified photodetectors PDB570C operation manual*. Thorlabs. Online. Consultado en: <https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=PDB570C>.
- Tiunov, E. S., (Vyborova), V. V. T., Ulanov, A. E., Lvovsky, A. I., y Fedorov, A. K. (2020). Experimental quantum homodyne tomography via machine learning. *Optica*, **7**(5): 448–454.
- Todorov, M. D. (2018). *Nonlinear Waves: Theory, Computer Simulation, Experiment*. Morgan & Claypool Publishers.
- Toninelli, E., Ndagano, B., Vallés, A., Sephton, B., Nape, I., Ambrosio, A., Capasso, F., Padgett, M. J., y Forbes, A. (2019). Concepts in quantum state tomography and classical implementation with intense light: a tutorial. *Adv. Opt. Photon.*, **11**(1): 67–134.
- Torounidis, T., Westlund, M., Sunnerud, H., Olsson, B. E., y Andrekson, P. A. (2005). Signal generation and transmission at 40, 80, and 160 Gb/s using a fiber-optical parametric pulse source. *IEEE Photonics Technology Letters*, **17**(2): 312–314.
- U'Ren, A. B., Silberhorn, C., Erdmann, R., Banaszek, K., Grice, W. P., Walmsley, I. A., y Raymer, M. G. (2005). Generation of pure-state single-photon wavepackets by conditional preparation based on spontaneous parametric downconversion. *Laser Physics*, **15**(1): 146–161.
- Vaidya, V. D., Morrison, B., Helt, L. G., Shahrokshahi, R., Mahler, D. H., Collins, M. J., Tan, K., Lavoie, J., Repeatingon, A., Menotti, M., Quesada, N., Pooser, R. C., Lita, A. E., Gerrits, T., Nam, S. W., y Vernon, Z. (2020). Broadband quadrature-squeezed vacuum and nonclassical photon number correlations from a nanophotonic device. *Science Advances*, **6**(39).
- Vogel, K. y Risken, H. (1989). Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase. *Physical Review A*, **40**(5): 2847–2849.

- Von Neumann, J. (1927). Wahrscheinlichkeitstheoretischer aufbau der quantenmechanik. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, **1927**: 245–272.
- Wadsworth, W. J., Percival, R. M., Bouwmans, G., Knight, J. C., Birks, T. A., Hedley, T. D., y Russell, P. S. J. (2004). Very High Numerical Aperture Fibers. *IEEE Photonics Technology Letters*, **16**(3): 843–845.
- Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., y Ye, K. (2016). *Probability and statistics for engineers and scientists*. Pearson Education, 9mo ed.
- Wang, Z., Liu, H., Huang, N., Sun, Q., y Wen, J. (2011). Influence of spectral broadening on femtosecond wavelength conversion based on four-wave mixing in silicon waveguides. *Applied optics*, **50**(28): 5430–5436.
- Washburn, B. R. (2002). *Dispersion and nonlinearities associated with supercontinuum generation in microstructure fibers*. Tesis de doctorado, Georgia Institute of Technology.
- Wei, X., Zhang, C., Xu, S., Yang, Z., Tsia, K. K., y Wong, K. K. (2014). Effect of the cw-seed's linewidth on the seeded generation of supercontinuum. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, **20**(5): 605–611.
- Wigner, E. (1932). On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.*, **40**: 749–759.
- Williams, C. J. (2007). Quantum information science, NIST, and future technological implications. NIST. Online. Consultado en: [https://www.nist.gov/system/files/documents/pml/div683/conference/Williams\\_2007.pdf](https://www.nist.gov/system/files/documents/pml/div683/conference/Williams_2007.pdf).
- Yang, Z., Liscidini, M., y Sipe, J. (2008). Spontaneous parametric down-conversion in waveguides: A backward heisenberg picture approach. *Physical Review A*, **77**(3): 033808.
- Yariv, A., Yeh, P., y Yariv, A. (2007). *Photonics: optical electronics in modern communications*, Vol. 6. Oxford University Press New York, 6mo ed.
- Yeh, P., Yariv, A., y Maron, E. (1978). Theory of Bragg Fiber. *J Opt Soc Am*, **68**(9): 1196–1201.
- Zavatta, A., Bellini, M., Ramazza, P. L., Marin, F., y Arecchi, F. T. (2002). Time-domain analysis of quantum states of light: noise characterization and homodyne tomography. *JOSA B*, **19**(5): 1189–1194.
- Zavatta, A., Viciani, S., y Bellini, M. (2004). Quantum-to-classical transition with single-photon-added coherent states of light. *science*, **306**(5696): 660–662.
- Zhang, X. y Wang, X. (2004). Soliton propagation in birefringent optical fibers near the zero-dispersion wavelength. *Optik*, **115**(1): 36–42.
- Zhu, Z. y Brown, T. G. (2002). Full-vectorial finite-difference analysis of microstructured optical fibers. *Opt. Express*, **10**(17): 853–864.

## Anexo: Derivación del algoritmo MaxLik

---

En la sección 2.3.4.1 se introdujo el algoritmo de estimación de máxima verosimilitud (MaxLik) para la estimación de la matriz de densidad  $\hat{\rho}$  para la cual es máxima la probabilidad de predecir un conjunto de datos experimentales de cuadratura  $\{x_i\}$ . Para hallar tal matriz de densidad es necesario maximizar el funcional de verosimilitud definido como:

$$\mathcal{L}(\hat{\rho}) = \prod_i^N \langle x_i | \hat{\rho} | x_i \rangle^{n_i}, \quad (270)$$

donde  $n_i$  indica el número de veces que se registró una medición  $x_i$  y  $|x_i\rangle$  son los estados propios del operador de cuadratura. El número total de mediciones es  $\sum_i n_i = N$  y la frecuencia relativa de cada medición es  $f_i = n_i/N$ . En este anexo se presenta el método propuesto por Hradil (1997) para maximizar el funcional de verosimilitud (ec. 270) de manera analítica. Se siguen los procedimientos presentados por D'Ariano *et al.* (2003) y Hradil *et al.* (2004).

Para empezar, se propone una matriz de densidad general de la forma:

$$\hat{\rho} = \sum_{\mu} y_{\mu}^2 |\psi_{\mu}\rangle \langle \psi_{\mu}|, \quad (271)$$

donde los elementos  $y_{\mu}$  son reales, y  $\sum_{\mu} y_{\mu}^2 = 1$ . La definición anterior es conveniente, recordando que la matriz de densidad debe cumplir con las siguientes características (Cohen-Tannoudji *et al.*, 2020):

- $Tr(\hat{\rho}) = 1$ : Esta condición se conoce como la *normalización de la traza*, y se debe a que la traza de  $\hat{\rho}$  tiene interpretación probabilística.
- La matriz de densidad es hermitiana, lo cual indica que tiene valores propios reales; de ahí que los valores  $y_{\mu}$  sean reales.
- La matriz de densidad también es un operador semi-definido positivo, lo cual indica que todos los valores propios son mayores o iguales a cero; de ahí la conveniencia de que se definan valores propios cuadráticos.

Teniendo en cuenta la definición 271 es útil definir los siguientes términos:

$$\langle x_i | \hat{\rho} | x_i \rangle = Tr(\hat{\rho} \hat{\Pi}_i) = \sum_{\mu} y_{\mu}^2 \langle \psi_{\mu} | \hat{\Pi}_i | \psi_{\mu} \rangle, \quad (272)$$

$$Tr(\hat{\rho}) = \sum_{\mu} y_{\mu}^2 = 1, \quad (273)$$

donde  $\hat{\Pi}_i = |x_i\rangle \langle x_i|$  y  $\sum_i \hat{\Pi}_i = \mathbb{1}$ , siendo  $\mathbb{1}$  el operador de identidad.

Para realizar análisis numéricos, es conveniente trabajar con el logaritmo natural del funcional de verosimilitud  $\mathcal{L}(\hat{\rho})$ ; maximizar el logaritmo natural de  $\mathcal{L}(\hat{\rho})$  es equivalente a maximizar  $\mathcal{L}(\hat{\rho})$ . Dado que se debe cuidar de que  $Tr[\hat{\rho}] = 1$  para que la matriz de densidad  $\hat{\rho}$  tenga sentido físico, se busca resolver el problema de optimización mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. La función a maximizar es entonces:

$$L(\hat{\rho}) = \ln[\mathcal{L}(\hat{\rho})^{1/N}] = \sum_i^N f_i \ln[Tr(\hat{\rho} \hat{\Pi}_i)] - \lambda Tr(\hat{\rho}), \quad (274)$$

donde  $\lambda$  es un multiplicador de Lagrange. La condición de maximización es  $\partial L / \partial y_{\mu} = 0$ , con la cual se llega a la siguiente expresión:

$$\sum_i^N f_i \frac{y_{\mu} \langle \psi_{\mu} | \hat{\Pi}_i | \psi_{\mu} \rangle}{Tr(\hat{\rho} \hat{\Pi}_i)} = \lambda y_{\mu} \quad (275)$$

Multiplicando a ambos lados de la igualdad por  $y_{\mu}$  y sumando sobre todas las  $\mu$  se encuentra que:

$$\sum_i^N f_i \frac{\sum_{\mu} y_{\mu}^2 \langle \psi_{\mu} | \hat{\Pi}_i | \psi_{\mu} \rangle}{Tr(\hat{\rho} \hat{\Pi}_i)} = \lambda \sum_{\mu} y_{\mu}^2, \quad (276)$$

pero recordando las relaciones 273 y 272, se puede concluir que  $\lambda = 1$ . Además, reescribiendo la ecuación 276 en términos de  $\hat{\rho}$  se encuentra que:

$$Tr\left(\sum_i \frac{f_i}{Tr(\hat{\rho} \hat{\Pi}_i)} \hat{\Pi}_i \hat{\rho}\right) = Tr(\hat{\rho}). \quad (277)$$

Es preciso mencionar que en la expresión anterior resalta el familiar operador iterativo  $\hat{R}(\hat{\rho})$  que es central en el algoritmo MaxLik, el cual se define como:

$$\hat{R} = \sum_i \frac{f_i}{Tr(\hat{\rho} \hat{\Pi}_i)} \hat{\Pi}_i. \quad (278)$$

Se tiene entonces que:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = \text{Tr}(\hat{R}\hat{\rho}). \quad (279)$$

Para que la anterior igualdad se cumpla, también se debe satisfacer que:

$$\hat{\rho} = \hat{R}\hat{\rho}, \quad (280)$$

lo cual sólo es posible si  $\hat{R}(\hat{\rho}) \approx \mathbb{1}$ , y a su vez esto sólo sería posible si  $f_i \approx \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\Pi}_i)$ .  $f_i$  se puede interpretar como la probabilidad experimental de obtener una medición  $x_i$ , recordando que en este contexto la probabilidad se define como el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles (Walpole *et al.*, 2016), mientras que  $\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\Pi}_i)$  se interpreta como la probabilidad teórica de obtener una medición  $x_i$ . Lo anterior se cumple sólo para la matriz de densidad con más probabilidad de reproducir los datos experimentales de cuadratura.