

**Centro de Investigación Científica y de Educación  
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias  
en Electrónica y Telecomunicaciones  
con orientación en Instrumentación y Control**

---

**Sincronización de giroscopios**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

**Fernando Luján Aguirre**

Ensenada, Baja California, México

2021

Tesis defendida por

**Fernando Luján Aguirre**

y aprobada por el siguiente Comité

---

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos  
Director de tesis

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez

Dr. Jonatán Peña Ramírez

Dr. Carlos Alberto Brizuela Rodríguez



---

Dra. María del Carmen Maya Sánchez  
Coordinadora del Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

---

Dr. Pedro Negrete Regagnon  
Director de Estudios de Posgrado

*Fernando Luján Aguirre © 2021*

*Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis*

Resumen de la tesis que presenta Fernando Luján Aguirre como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

## **Sincronización de giroscopios**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Director de tesis

El avance de la tecnología ha permitido a países en vías de desarrollo colocar nanosatélites en órbita. Controlar el desplazamiento y la orientación, de estos vehículos es crucial para el cumplimiento de las misiones, es por esto que varias técnicas económicas se han desarrollado como respuesta para cumplir los requisitos de volumen y de potencia, para ello se utilizan varios giroscopios que deben operar coordinadamente para lograr un buen comportamiento del sistema. El uso de una estrategia de sincronización robusta es, en consecuencia, de gran importancia. Los giroscopios no son solamente útiles para medir la orientación de algún vehículo u objeto sino que también son capaces de dirigirlo hacia un punto deseado y ser poco sensibles a perturbaciones externas. En este trabajo se presentan diversos tipos de algoritmos sincronizantes; acoplamiento estático, dinámico, además un algoritmo de observación y de sincronización robusta, y sus aplicaciones en diferentes modelos de giroscopios (disco giratorio, rueda de reacción y giroscopio controlador de momento). Los resultados analíticos obtenidos se ilustran mediante simulaciones numéricas. Entre estos algoritmos se encontró que, el acoplamiento dinámico no es superior al acoplamiento estático en sentido de robustez, por lo que, el algoritmo de sincronización robusta demostró ser superior a todos los demás.

**Palabras clave: sincronización, giroscopio, control robusto.**

Abstract of the thesis presented by Fernando Luján Aguirre as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Electronics and Telecommunications with orientation in Control and Instrumentation.

## **Gyroscope synchronization**

Abstract approved by:

---

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos  
Thesis Director

Advances in technology have enabled developing countries to place nanosatellites in orbit. Since controlling the displacement and orientation of these vehicles is crucial for mission accomplishment, several cost-effective techniques have been developed in response to meet the volume and power requirements using several gyroscopes that must be operated in a coordinated manner to achieve good system performance. The use of a robust synchronization strategy is therefore of great importance. Gyroscopes are not only useful for measuring the orientation of a vehicle or object but are also capable of steering it to a wanted point and are not very sensitive to external disturbances. In this work, several types of synchronizing algorithms are presented: static, dynamic coupling, as well as an observation and robust synchronization algorithm, and their applications in different gyroscope models (rotating disk, reaction wheel and moment-controlling gyroscope). The analytical results obtained are illustrated by numerical simulations. It was found that dynamic coupling is not superior to static coupling in terms of robustness, and the robust synchronization algorithm proved to be superior to all others.

**Keywords: synchronization, gyroscope, robust control**

## **Dedicatoria**

***A mi esposa Nayeli...***

## **Agradecimientos**

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, en especial al departamento de Electrónica y Telecomunicaciones por darme la oportunidad de realizar mis estudios de posgrado y de rodearme de estudiantes y profesores admirables.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría (CVU: 960173).

A mi director de tesis, el Dr. Joaquín Álvarez Gallegos, por su paciencia, por su confianza, por estar siempre al pendiente, por compartirme su conocimiento y por su gran apoyo durante la realización de este proyecto.

A los integrantes de mi comité de tesis, Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez, Dr. Jonatán Peña Ramírez y Dr. Carlos Alberto Brizuela Rodríguez por su guía, comentarios y correcciones durante la realización del proyecto.

Al Dr. Francisco Javier Mendieta Jiménez por su interés en mi proyecto de tesis y sus comentarios.

A mis compañeros, por apoyarme durante todo el transcurso de la maestría, por sus comentarios y por escucharme.

A mi familia que desde el principio me apoyó a realizar mis estudios.

# Tabla de contenido

	Página
Resumen en español .....	ii
Resumen en inglés .....	iii
Dedicatoria .....	iv
Agradecimientos .....	v
Lista de figuras .....	viii
Lista de tablas .....	xi
<b>Capítulo 1. Introducción.</b>	
1.1. Antecedentes .....	3
1.2. Planteamiento del problema .....	6
1.3. Justificación .....	7
1.4. Hipótesis .....	7
1.5. Objetivos .....	7
1.5.1. Objetivo general .....	7
1.5.2. Objetivos específicos .....	7
1.6. Historia. ....	8
1.7. Funcionamiento básico del giroscopio y la rueda de reacción. ....	9
1.8. Modelos. ....	9
<b>Capítulo 2. Esquemas de sincronización.</b>	
2.1. Introducción. ....	13
2.2. Control local. ....	14
2.3. Acoplamiento estático. ....	16
2.3.1. Configuración unidireccional. ....	16
2.3.2. Configuración bidireccional. ....	19
2.4. Acoplamiento dinámico. ....	21
2.4.1. Configuración unidireccional. ....	22
2.4.2. Configuración bidireccional. ....	22
2.5. Sincronización robusta. ....	23
2.5.1. Observador robusto. ....	25
<b>Capítulo 3. Sincronización de discos y ruedas de reacción.</b>	
3.1. Introducción. ....	27
3.2. Disco giratorio. ....	27
3.2.1. Modelo. ....	27
3.2.2. Acoplamiento estático unidireccional. ....	28
3.2.3. Acoplamiento estático bidireccional. ....	30
3.3. Rueda de reacción. ....	33
3.3.1. Análisis del sistema. ....	34
3.3.1.1. Análisis de estabilidad. ....	34
3.3.1.2. Análisis de controlabilidad. ....	36

## Tabla de contenido (continuación)

3.3.1.3. Análisis de observabilidad. . . . .	36
3.3.2. Sincronización entre ruedas de reacción. . . . .	37
3.3.2.1. Acoplamiento estático unidireccional. . . . .	37
3.3.2.2. Acoplamiento estático bidireccional. . . . .	38
3.3.2.3. Acoplamiento dinámico unidireccional. . . . .	38
3.3.2.4. Acoplamiento dinámico bidireccional. . . . .	41
3.3.2.5. Observador robusto. . . . .	43
3.3.2.6. Sincronización robusta. . . . .	49
3.3.2.7. Sincronización robusta en sus distintas configuraciones. . . . .	52
3.4. Conclusiones. . . . .	54

### Capítulo 4. Giroscopio controlador de momento.

4.1. Introducción. . . . .	57
4.2. Modelos. . . . .	57
4.3. Obtención de la tasa angular mediante la generación de pares. . . . .	59
4.3.1. Cuaterniones. . . . .	60
4.3.2. Controlador linealizante por retroalimentación. . . . .	63
4.3.3. Modelo cinemático del giroscopio. . . . .	67
4.3.4. Lógica de dirección. . . . .	69
4.3.5. Resultados numéricos . . . . .	70
4.4. Sincronización entre marcos del giroscopio de controlador de momento. . . . .	71
4.4.1. Control local.-Seguimiento de la tasa angular por el giroscopio controlador de momento. . . . .	72
4.4.2. Controles sincronizantes robustos. . . . .	72
4.5. Conclusiones. . . . .	73

### Capítulo 5. Conclusiones.

Literatura citada . . . . .	78
-----------------------------	----



## Lista de figuras

Figura	Página
1. Partes que constituyen a un giroscopio mecánico, el presente es uno de 2 grados de libertad. . . . .	2
2. Ejemplos de giroscopios. . . . .	3
3. Coordinación de 2 giroscopios para lograr la orientación de un vehículo. . .	4
4. Léon Foucault (1819 - 1868). Imagen tomada de Europa Press (2019). . . .	8
5. Giroscopio de Foucault. Imagen tomada de Sommeria (2017). . . . .	8
6. Vector del par externo $T_{in}$ influenciando a la dirección de $H(a)$ y a la magnitud del momento angular (b). . . . .	10
7. Modelos giroscópicos utilizados. . . . .	11
8. Modelos giroscópicos utilizados (continuación). . . . .	12
9. Esquema sobre niveles de control. Dentro de los nodos se encuentran los sistemas $\Sigma_i$ cuyas partes son los sistemas $S_i$ a sincronizar y los controles locales $U_i$ encargados de imponer una dinámica hacia $S_i$ . Los controles sincronizantes $V_i$ fungen como mediadores entre los sistemas $\Sigma_i$ para que estos actúen de manera coordinada. Se aprecia además a las conexiones entre ambos nodos, las cuales están dadas por las salidas $y_i$ . . . . .	14
10. Diagrama de bloques de la sincronización con acoplamiento estático en configuración unidireccional. . . . .	17
11. Diagrama de bloques del sistema del error. . . . .	19
12. Diagrama de bloques del acoplamiento estático en configuración bidireccional. . . . .	21
13. Esquema del disco giratorio. . . . .	27
14. Resultado numérico de acoplamiento estático entre dos discos giratorios en configuración unidireccional. Los valores de los parámetros para el control local (ecuación 61 y 62) para $k_0$ y $k_1$ fueron, respectivamente, 10 y 6.32; la referencia $y_d$ fue igual a $\pi$ ; el valor de inercia $J$ del disco fue de $0.0273 \text{ Kg} - m^2$ . La fuerza de acoplamiento $k$ para el acoplamiento estático (ecuación 63) se fijó en 1. Las condiciones iniciales para la posición y la velocidad del sistema $m$ fueron, respectivamente, $\theta_m(0) = 0$ y $\omega_m(0) = 0$ ; para el sistema $s$ fueron, $\theta_s(0) = 1$ y $\omega_s(0) = 0$ . . . . .	30
15. Salidas del sistema del error (66). . . . .	31
16. Resultado numérico de acoplamiento estático entre dos discos giratorios en configuración bidireccional. Los valores de los parámetros para los controles locales (ecuación 61 y 62) para $k_0$ y $k_1$ fueron, respectivamente, 10 y 6.32; la referencia $y_d$ fue igual a $\pi$ ; el valor de inercia $J$ del disco fue de $0.0273 \text{ Kg} - m^2$ . La fuerza de acoplamiento $k$ para el acoplamiento estático se fijó en 1. Las condiciones iniciales para la posición y la velocidad del sistema $m$ fueron, respectivamente, $\theta_m(0) = 0$ y $\omega_m(0) = 0$ ; para el sistema $s$ fueron, $\theta_s(0) = 1$ y $\omega_s(0) = 0$ . . . . .	32

## Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
17. Salidas del sistema del error (73). . . . .	33
18. Esquema de la rueda de reacción. . . . .	35
19. Resultado numérico de acoplamiento dinámico entre dos ruedas de reacción en configuración unidireccional. Los valores de los parámetros para el control local (ecuación 61 y 62) para $k_0$ y $k_1$ fueron, respectivamente, 10 y 6.32; la referencia $y_d$ fue igual a $\pi$ ; los valores de inercia $J_B$ y $J_C$ fueron de $0.018 \text{ Kg} - m^2$ y $0.0230 \text{ Kg} - m^2$ , respectivamente. La valores de acoplamiento $k$ y $\alpha$ se fijaron en 1 para ambos. Las condiciones iniciales para la posición y la velocidad del sistema $m$ fueron, respectivamente, $\theta_m(0) = 0$ y $\omega_m(0) = 0$ ; para el sistema $s$ fueron, $\theta_s(0) = 1$ y $\omega_s(0) = 0$ . . .	41
20. Salidas del sistema del error (93). . . . .	42
21. Resultado numérico de acoplamiento dinámico entre dos ruedas de reacción en configuración bidireccional. Los valores de los parámetros para el control local (ecuación 61 y 62) para $k_0$ y $k_1$ fueron, respectivamente, 10 y 6.32; la referencia $y_d$ fue igual a $\pi$ ; los valores de inercia $J_B$ y $J_C$ fueron de $0.018 \text{ Kg} - m^2$ y $0.0230 \text{ Kg} - m^2$ , respectivamente. La valores de acoplamiento $k$ y $\alpha$ se fijaron en 1 para ambos. Las condiciones iniciales para la posición y la velocidad del sistema $m$ fueron, respectivamente, $\theta_m(0) = 0$ y $\omega_m(0) = 0$ ; para el sistema $s$ fueron, $\theta_s(0) = 1$ y $\omega_s(0) = 0$ . . .	44
22. Desempeño del observador robusto del sistema $s$ en presencia de condiciones iniciales distintas y sin perturbaciones. . . . .	46
23. Desempeño del observador robusto del sistema $s$ en presencia de condiciones iniciales distintas y con perturbaciones. . . . .	47
24. Error entre la salida deseada $y_d$ y la salida $y$ del sistema (104). . . . .	48
25. Error entre la salida deseada $y_d$ y la salida $y$ del sistema (104). . . . .	49
26. Error entre la salida deseada $y_d$ y la salida $y$ del sistema (104) con inyección de $\gamma_s$ . . . . .	50
27. Conexiones entre una red de 2 nodos, el parámetro $\beta_{s,m}$ simboliza la conexión desde el sistema $\Sigma_m$ hacia $\Sigma_s$ , a su vez, $\beta_{m,s}$ la conexión desde $\Sigma_s$ hacia $\Sigma_m$ . Si existe la conexión $\beta_{ij}$ entonces $\beta_{ij} > 0$ de otra manera es cero.	51
28. Sincronización robusta bidireccional. $p = 0.1, v = 0.1$ . . . . .	53
29. Sincronización robusta bidireccional. $p = 0.1, v = 0.1$ . . . . .	54
30. Sincronización robusta unidireccional. $p = 100 \times 10^3, v = 100$ . . . . .	55

## Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
31. Giroscopio controlador de momento. El marco $B$ está unido al marco $A$ y el disco $D$ al marco $C$ ; el disco tiene una velocidad constante $\Omega$ , cuando se introduce el par $T_{in}^m$ , los cuerpos $C$ y $D$ giran, lo que produce un par de salida $T_{out}$ . . . . .	57
32. Punto con coordenadas en $(1, 0, 0)$ rotado rotado $45^\circ$ . alrededor del eje $(0.7071, 0.7071, 0)$ . . . . .	62
33. Punto con coordenadas en $(0, 1, 0, 0)$ es rotado hacia $g(v) = \{0, 0.8535, 0.1464, -0.5\}$ con un cuaternión calculado con un vector ortogonal a estos dos puntos. Nótese que con ambos cuaterniones es posible realizar una misma rotación. El vector amarillo representa a la parte vectorial de $v^\perp$ y el rojo a la parte vectorial de $q$ . . . . .	64
34. Obtención del modelo cinemático del giroscopio. La primer secuencia de movimiento sucede cuando se gira alrededor del eje $\hat{\sigma}_o$ , el segundo en el eje $\hat{\sigma}_i$ (Dzielski <i>et al.</i> , 1988). . . . .	68
35. Gráfico sobre tasa angular y propagación del cuaternión con $q_{13}^0 = \{1, 0, 0, 0\}$ y $q_{1,3}^f = \{0.7697, 0, -0.5263, 0.3636\}$ . . . . .	70
36. Gráfico sobre tasa angular y propagación del cuaternión con $q_{13}^0 = \{1, 0, 0, 0\}$ y $q_{1,3}^f = \{0.9238, 0, 0, 0.3826\}$ . . . . .	71
37. Gráfico sobre el desempeño del control local para el giroscopio controlador de momento u del observador robusto. . . . .	73
38. Sincronización en configuración anti-fase entre los sistemas $m$ y $s$ . . . . .	74
39. Estimación de la perturbación del sistema $s$ . . . . .	74

## Lista de tablas

Tabla	Página
1.	Diversas configuraciones para el giroscopio controlador de momento. 5
2.	Criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio del denominador de la función de transferencia (91). . . . . 39
3.	Criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio (95). . . . . 40
4.	Criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio del denominador de la función de transferencia (97). . . . . 42
5.	Criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio del polinomio (95). . . . . 43
6.	Controles sincronizantes robustos para distintas configuraciones. . . . . 52
7.	Valores de inercia para los sistemas (118) y (119) (Parks, s.f). . . . . 59
8.	Controles sincronizantes robustos para distintas configuraciones para el giroscopio controlador de momento. . . . . 73

## Capítulo 1. Introducción.

---

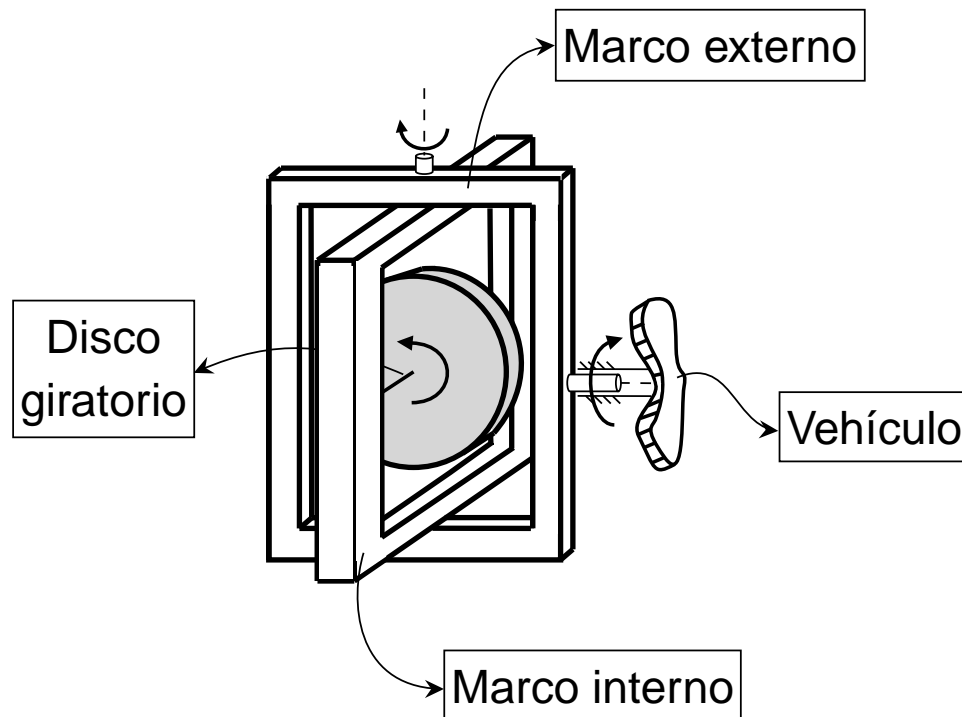
Un giroscopio es un instrumento que mide la posición y velocidad angular de algún objeto (o vehículo) en donde este se haya montado, estas mediciones son útiles para conocer el estado del objeto y para controlar al mismo, por lo que el giroscopio tiene diversas aplicaciones en el campo de la ingeniería. Estos aparatos se categorizan de acuerdo a su principio físico de operación, entre ellos se encuentran los ópticos, vibratorios y mecánicos (Giménez Martínez *et al.*, 2014).

El principio de funcionamiento de los giroscopios de tipo óptico consiste en enviar con un transmisor dos haces de luz a través de un anillo (interferómetro) que llegan posteriormente a un receptor en donde son medidos. Los haces de luz se interfieren entre sí, produciendo un patrón (señal), este patrón depende de la velocidad angular del sistema en donde esté montado el giroscopio óptico (Bitar, 2021).

El principio de funcionamiento de los giroscopios del tipo estructura vibrante es el de efecto Coriolis. Dentro de estos dispositivos se miden las fuerzas tangenciales y radiales a las que es sometida una masa, con el cálculo de estas fuerzas es posible conocer a la velocidad angular del sistema. A estos dispositivos se les conoce también como giroscopios micro-electromecánicos o giroscopios SMEM (MEMS, por sus siglas en inglés) los cuales por su tamaño y bajo consumo energético son ampliamente utilizados en teléfonos celulares, cámaras, consolas de videojuegos, etc (Antonello y Oboe, 2011).

El giroscopio mecánico consiste de un disco montado en una estructura de uno o más grados de libertad (Parks, s.f) (figura 1). El principio básico de funcionamiento de los giroscopios mecánicos es el de la conservación del momento angular (España, 2016). Si el disco del giroscopio gira a gran velocidad, su vector de momento angular se resistirá a cambiar de dirección cuando la estructura se mueve a su alrededor (Scarborough, 1958), esto se debe a que el vector de torsión aplicado a la estructura no tiene efecto sobre el vector de momento angular del disco. Estos sistemas son utilizados ampliamente como instrumentos de navegación; se les puede encontrar en aviones, cohetes, misiles, barcos y satélites (Yau, 2008; Travis, 2020); en la figura 2 se pueden apreciar a los tipos de giroscopios anteriormente mencionados.

Además de determinar la orientación de vehículos, otra aplicación interesante es

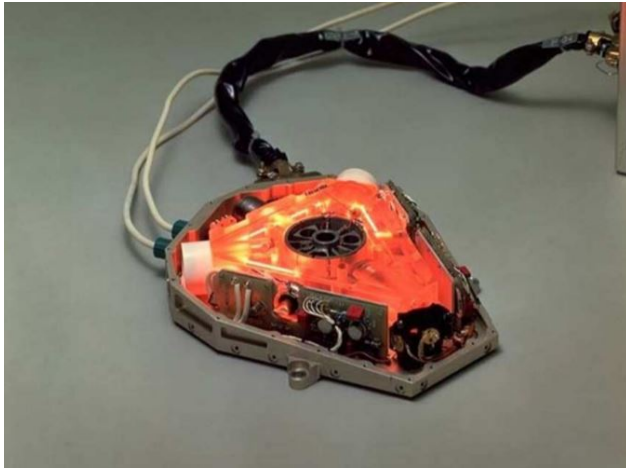


**Figura 1.** Partes que constituyen a un giroscopio mecánico, el presente es uno de 2 grados de libertad.

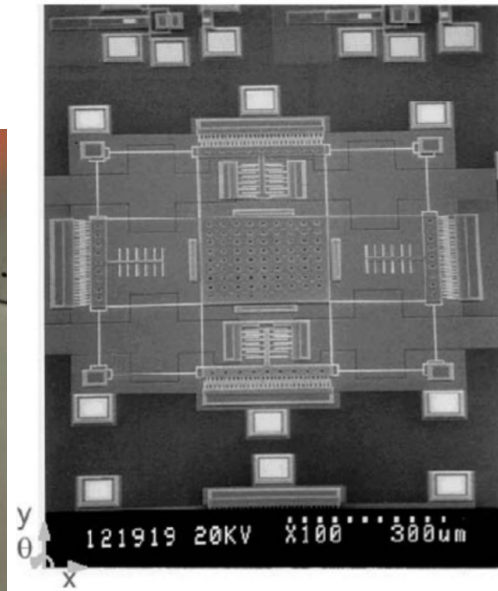
la de proporcionar un par mediante la manipulación de los marcos (a este aparato se le conoce como giroscopio controlador de momento (GCM) o control moment gyroscope (CMG) en inglés), donde el movimiento de estos permite la orientación del disco (Steyn, 2015; Travis, 2020). Las aplicaciones de este tipo de giroscopio son específicas para vehículos que tienen recursos limitados para orientarse (p.ej. propelente y velocidad), ya que estos dispositivos almacenan gran cantidad de momento angular que puede ser abastecido por electricidad. Los giroscopios controladores de momento se usan principalmente para orientar satélites cuyas misiones son de larga duración dado que, si la orientación se obtuviera mediante propulsores, se necesitarían misiones adicionales para proveer propelente, lo que resultaría en un mantenimiento costoso.

En ocasiones, se requiere el uso de dos o más GCM para orientar vehículos espaciales grandes como la estación espacial internacional; en este caso, los GCM deben actuar de manera coordinada de tal manera que la suma de los vectores del cambio en el momento angular (pares) coincidan con el vector del par requerido (figura 3).

En este proyecto de tesis se propone sincronizar dos giroscopios en varias de sus configuraciones (tabla 1), cuya suma de los pares generados resulte en un par en una dirección específica. Se realiza un estudio analítico y experimental de la sincronización



(a) Giroscopio óptico, de Rabeendran (2008).



(b) Giroscopio SMEM, de Piyabongkarn *et al.* (2005)



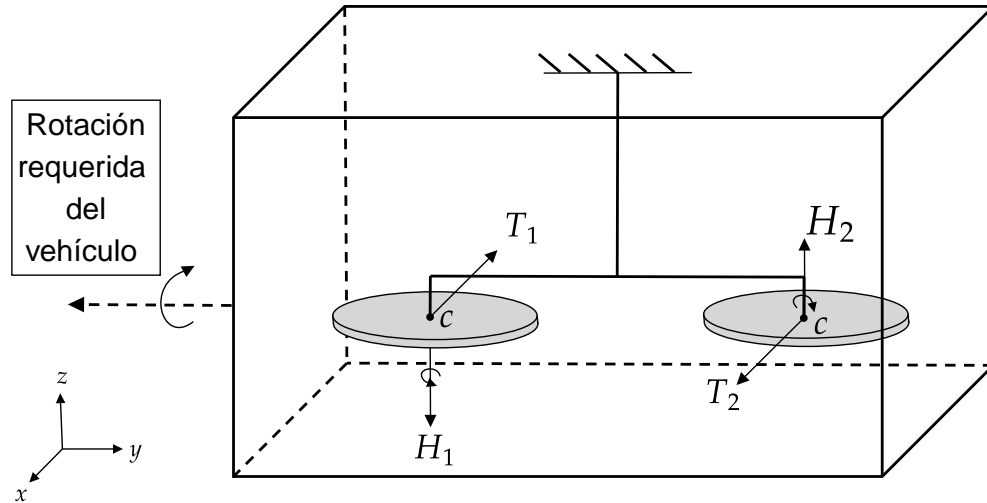
(c) Giroscopio de control de momento, de Parks (s.f).

**Figura 2.** Ejemplos de giroscopios.

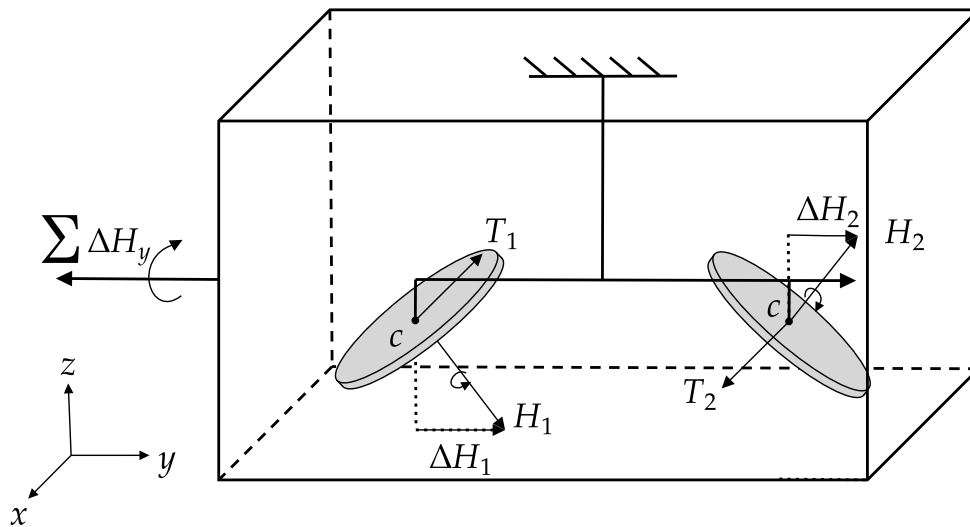
de dos giroscopios no necesariamente idénticos, así como diseño de técnicas de acoplamiento que permitan una sincronización robusta frente a perturbaciones externas, incertidumbres paramétricas, o dinámicas no modeladas.

### 1.1. Antecedentes

Li *et al.* (2013) propusieron un sistema de control de orientación satelital que cons-



(a) En esta figura se muestra a un vehículo que cuenta con un arreglo giroscópico que consta de dos discos. En este ejemplo, se supone que el vehículo requiere orientarse sobre el eje  $y$ . Los discos tienen un momento angular denotado por los vectores  $H_1$  y  $H_2$ . Para lograr el objetivo es necesario orientar a los discos en dirección  $x$  con los pares  $T_1$  y  $T_2$  sobre el punto  $c$ .

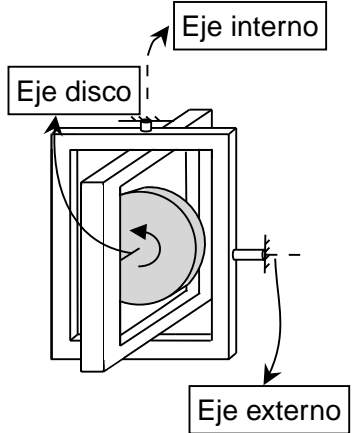
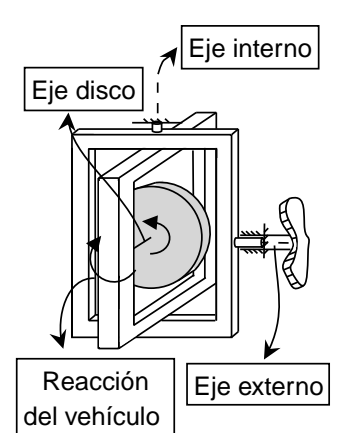
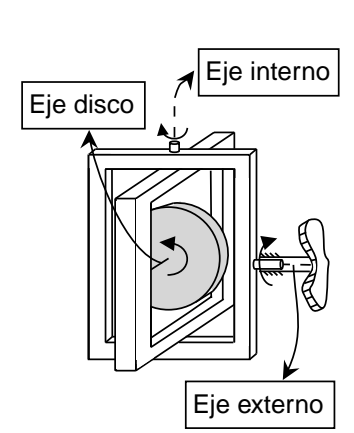


(b) Los pares y los momentos angulares producen un cambio en el momento angular del vehículo ( $\Sigma\Delta H_x$ ).

**Figura 3.** Coordinación de 2 giroscopios para lograr la orientación de un vehículo.



**Tabla 1.** Diversas configuraciones para el giroscopio controlador de momento.

			
Esquemas			
Configuración	Disco giratorio.	Rueda de reacción.	Giroscopio controlador de momento.
Movimiento	Solamente en el eje del disco. Ejes internos y externos bloqueados.	Orientación del vehículo en sentido contrario a la rotación del disco. Ejes internos y externos bloqueados.	Orientación del vehículo en cualquier punto del espacio. Ejes internos y externos libres.

ta de 2 configuraciones para el apuntado fino. La primera configuración consiste de 3 ruedas de reacción, la segunda de 3 pares magnéticos y una rueda de reacción. En esta última configuración se requiere una rueda de reacción ya que los pares magnéticos solamente pueden actuar en 2 dimensiones; con la ayuda de la rueda se accede a la tercera dimensión. Esta solución satisface las dimensiones de un nano-satélite CubeSat de 1U.

En el trabajo de Steyn (2015), para alcanzar los objetivos de control, se utiliza un arreglo de 2 giroscopios de 2 grados de libertad, con lo cual se logra un consumo mínimo de potencia, bajo volumen, y gran generación de par. Este diseño proporciona un mejor desempeño en estos 3 aspectos que en el trabajo de Nagabhushan (2009), el cual consiste de un arreglo piramidal de 4 giroscopios con un solo grado de libertad.

Se ha explorado con anterioridad el uso de giroscopios para mantener la orientación de vehículos espaciales. Tal es el caso de la estación espacial internacional (ISS por sus siglas en inglés) que cuenta con 4 de estos aparatos cuyos discos tienen la capacidad de girar a  $6600rpm$  (revoluciones por minuto) y generar pares de hasta  $258Nm$  (Gurrisi *et al.*, 2010). El arreglo giroscópico es el preferido para la obtención de pares, ya que no requiere uso de propelente para cumplir sus objetivos de orientación y de contrarrestar perturbaciones ambientales. Sin embargo, una de las principales desventajas de usar giroscopios para el control de orientación es la saturación de éstos, es por esto que en la ISS se cuenta con sistemas auxiliares como pares magnéticos,

propulsión a chorro, y par de gradiente de gravedad (Pothiwala, 1990).

En el trabajo de Roopaei *et al.* (2010) se menciona que la sincronización de 2 giroscopios se utiliza con frecuencia en vehículos espaciales con viajes de larga duración (Zhou *et al.*, 2005), y que las no linealidades de la entrada hacia los actuadores no debe ignorarse, ya que estas pueden degradar con rapidez a los dispositivos e incluso causar fallas totales. Se propuso la sincronización de dos giroscopios caóticos en donde las fronteras de incertidumbres y perturbaciones externas son desconocidas y se realizó un controlador difuso (fuzzy) adaptativo de modos deslizantes para afrontar el problema de sincronización de giroscopios caóticos.

Chen *et al.* (2013) proponen un controlador difuso y de modos deslizantes para el seguimiento de 2 giroscopios caóticos sin presencia del fenómeno de “chattering”, típico de controladores discontinuos.

Farivar y Shoorehdeli (2012) también proponen la sincronización de dos giroscopios caóticos idénticos y un controlador difuso basado en la regla de Lyapunov tolerante a fallas de sensado y perturbaciones externas.

Los giroscopios como fuente de par en vehículos espaciales son adecuados por su tolerancia a perturbaciones externas, propiedad otorgada por la conservación del momento angular; sin embargo, la sincronización de estos requiere de un buen desempeño de los controladores, ya que la maquinaria puede llegar a ser sensible a un mal diseño, y en el peor de los casos esto puede llevar a una pérdida total del vehículo.

## **1.2. Planteamiento del problema**

Como se ha mencionado anteriormente, el uso de giroscopios es abundante en aplicaciones aeronáuticas, aeroespaciales, incluso en el uso doméstico, tanto así que son objetos de constante estudio y están sujetos a ser mejorados cada vez más para reducir fallas e incrementar su confiabilidad Yau (2008). La consideración de sistemas no idénticos es muy importante en la práctica, ya que estos no pueden ser iguales por muy parecidos que sean; es por esto que para que un sistema sea seguro y que se comporte de una manera en particular, se debe tener en cuenta la búsqueda de controladores diseñados especialmente para sistemas no idénticos, robustos frente a

incertidumbres paramétricas y perturbaciones.

### **1.3. Justificación**

El avance de la tecnología ha permitido crear misiones espaciales cada vez más pequeñas y eficientes; en consecuencia, universidades de países emergentes se han posibilitado en tener acceso al espacio mediante el desarrollo de aparatos innovadores. Además está previsto que constelaciones de pequeños satélites servirán para misiones científicas más grandes y permanentes (Toorian *et al.*, 2008; Woellert *et al.*, 2011). Es por eso que es importante avanzar en el campo de la sincronización de giroscopios y la generación de sistemas económicos y robustos es crucial para las futuras misiones espaciales.

### **1.4. Hipótesis**

La hipótesis principal del problema abordado en esta tesis es que es posible, mediante el uso de técnicas de control robusto, reducir el error en estado estacionario (de referencia y de sincronización) de un par de giroscopios no idénticos, con respecto a diversos esquemas de sincronización.

### **1.5. Objetivos**

#### **1.5.1. Objetivo general**

El objetivo general de este proyecto de tesis es contribuir al conocimiento de las propiedades de sincronización y al diseño de técnicas de sincronización robusta de sistemas giroscópicos.

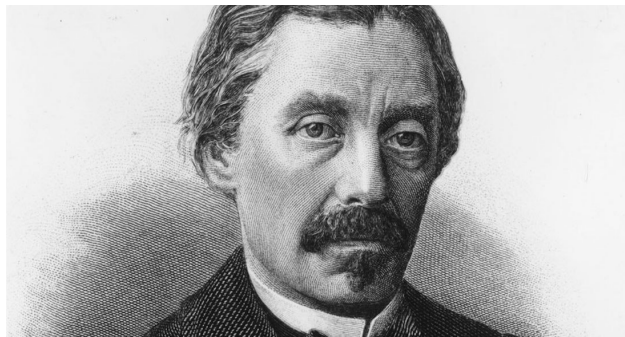
#### **1.5.2. Objetivos específicos**

- Modelar y analizar las propiedades dinámicas de giroscopios clásicos.
- Diseñar algoritmos de control de giroscopios mecánicos, con buen desempeño.

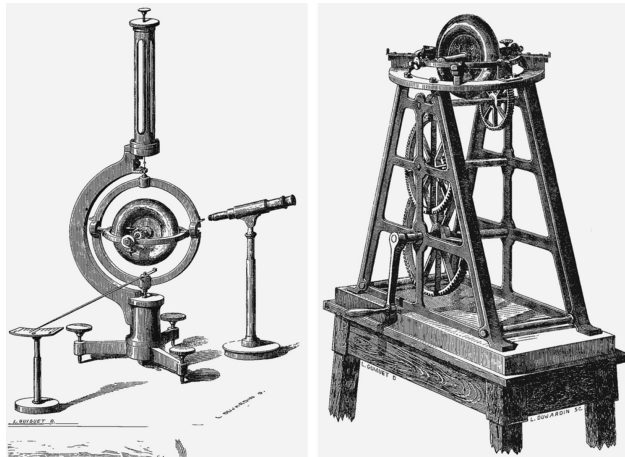
- Diseñar algoritmos de sincronización de dos giroscopios en configuración unidireccional (líder/seguidor) y en configuración bidireccional con diversos tipos de acoplamientos. Ilustrar los resultados con simulaciones numéricas y con experimentos.

### 1.6. Historia.

La palabra giroscopio (“gyroscope” en inglés) es una palabra compuesta que proviene del griego “gyros” que significa “para ver” y “skopein” que significa “rotación”; fue acuñada por el científico francés Léon Foucault (figura 4), quien en 1852 realizó un aparato para estudiar la rotación de la tierra (figura 5). Este giroscopio se basaba en una rueda giratoria que permanecía fijamente orientada en el espacio debido a la conservación del momento angular; el experimento consistía en observar, mediante un microscopio, cómo su laboratorio (el cual está fijo con respecto a la Tierra) giraba alrededor del giroscopio.



**Figura 4.** Léon Foucault (1819 - 1868). Imagen tomada de Europa Press (2019).



**Figura 5.** Giroscopio de Foucault. Imagen tomada de Sommeria (2017).

### 1.7. Funcionamiento básico del giroscopio y la rueda de reacción.

El principio básico del giroscopio es que el momento angular del disco permanecerá constante, a menos que se le aplique un par externo  $T$  (segunda Ley de Newton). La tasa de cambio del momento angular  $H$  es igual al par  $T$  (Lawrence, 2012):

$$T = \frac{d}{dt}(H), \quad (1)$$

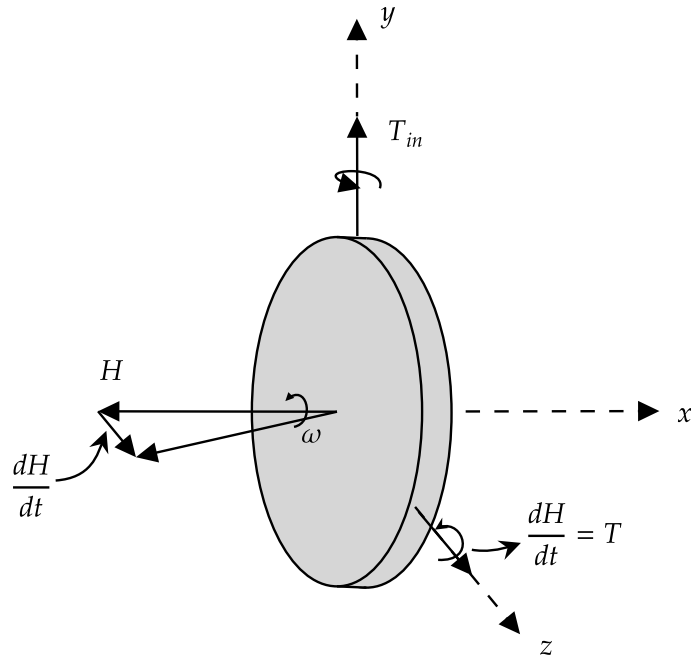
Esto significa que al aplicar un par de entrada a la rueda, ésta deberá cambiar la dirección de su momento angular, lo que produce la llamada precesión del giroscopio (figura 6(a)). Si el par aplicado está en la misma dirección del momento angular, entonces se producirá solamente un cambio en la magnitud del momento angular (Lawrence, 2012), esto es (ver figura 6(b)):

$$T = J \frac{d}{dt}(\omega) = J\alpha, \quad (2)$$

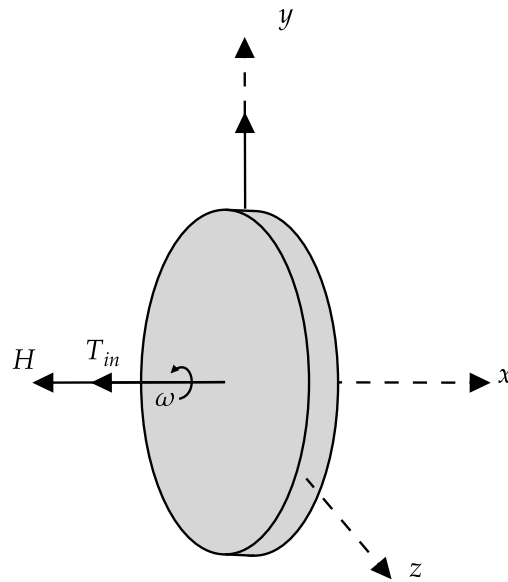
en donde  $J$  es el momento de inercia sobre el eje de giro de la rueda y  $\alpha$  es el cambio en la velocidad angular ( $\omega$ ). Estas dos concepciones sobre cómo influye un par, ya sea ortogonal o en la misma dirección del eje de giro del disco, es lo que diferencia a la rueda de reacción y al giroscopio visto como actuador. En otras palabras el giroscopio es una rueda de reacción que se puede orientar dependiendo de cuántos marcos se disponga o de cuántos grados de libertad se tengan.

### 1.8. Modelos.

A lo largo de esta tesis se abordarán 4 modelos giroscópicos, de 2 de ellos se obtienen controladores sincronizantes con sus respectivos controladores internos; para los 2 restantes solamente los controladores internos. Dichos modelos se ilustran en las figuras 7 y 8.

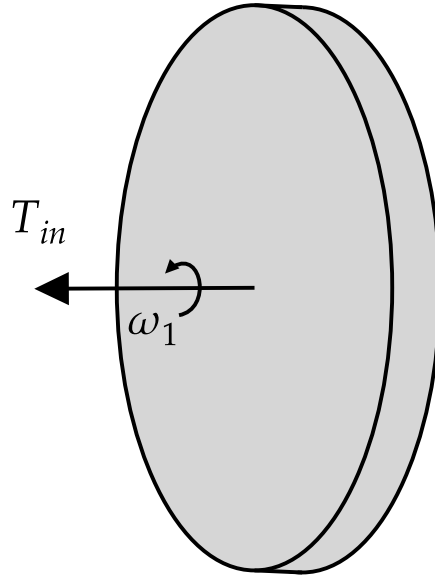


(a) Vectores involucrados en la precesión del giroscopio. Para este caso la dirección del par  $T$  es ortogonal al momento angular.

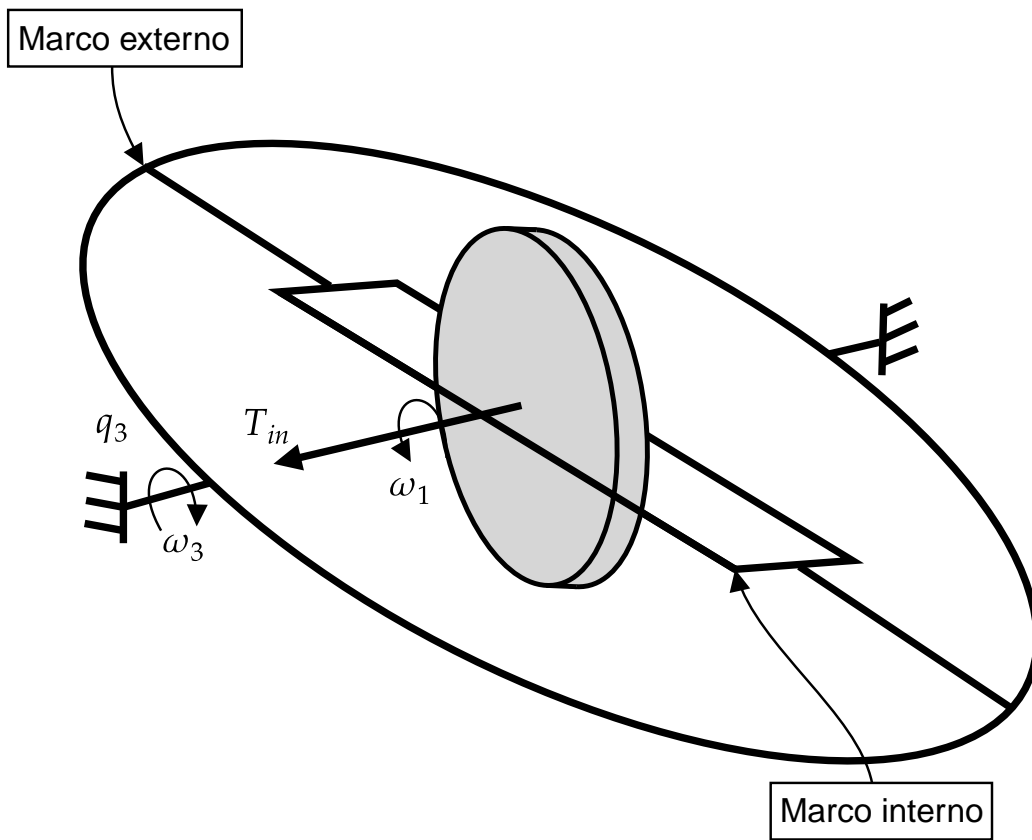


(b) El par  $T$  está en la misma dirección que el momento angular  $H$ .

**Figura 6.** Vector del par externo  $T_{in}$  influenciando a la dirección de  $H$ (a) y a la magnitud del momento angular (b).

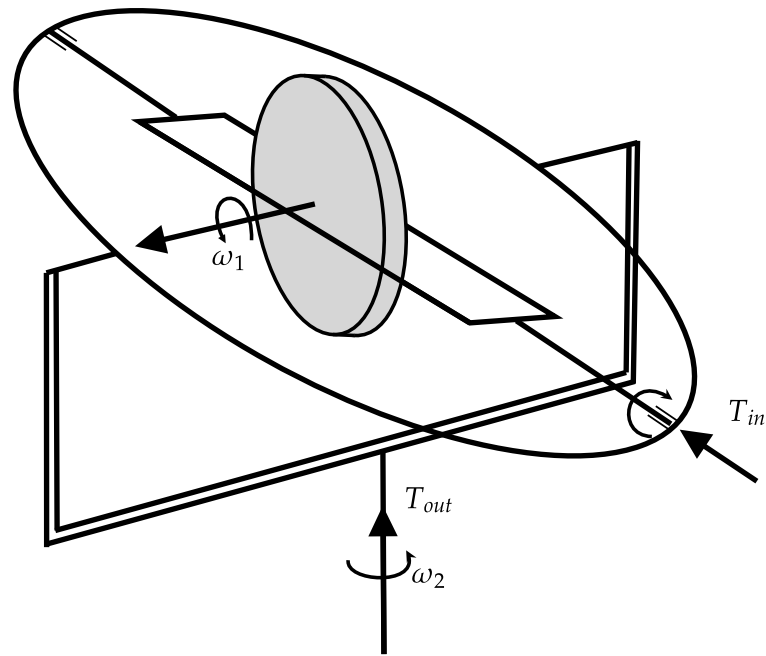


(a) Disco giratorio.

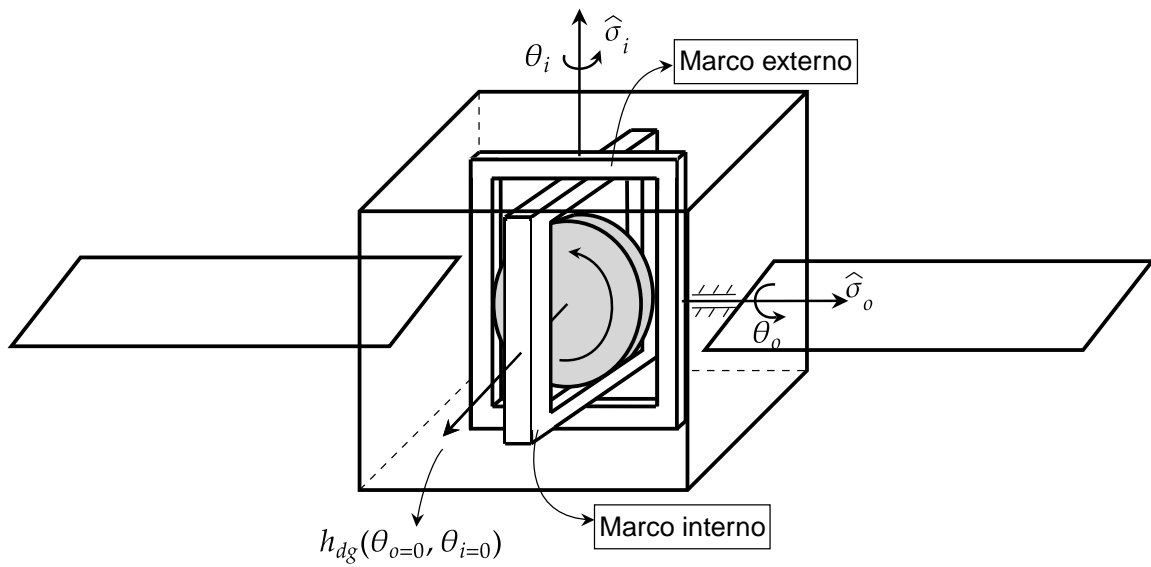


(b) Rueda de reacción.

**Figura 7.** Modelos giroscópicos utilizados.



(a) Giroscopio controlador de momento.



(b) Modelo rígido de una nave espacial (Dzielski *et al.* (1988); Bang *et al.* (2004)).

**Figura 8.** Modelos giroscópicos utilizados (continuación).



## Capítulo 2. Esquemas de sincronización.

---

### 2.1. Introducción.

El inicio del estudio del fenómeno de la sincronización empezó con Christiaan Huygens (1629 – 1695) cuando se dio cuenta que los péndulos de 2 relojes ajustaban sus ritmos cuando éstos se colgaban juntos en una viga de madera. A partir de la observación cualitativa de Huygens, el estudio de la sincronización se ha ido asentando y formalizando. La sincronización se da de manera natural entre seres vivos, en sistemas mecánicos, objetos celestes, sistemas biológicos, sistemas químicos, etc.

En Pikovsky *et al.* (2001) se define a la sincronización como un ajuste de ritmos entre objetos que oscilan debido a interacciones débiles entre éstos a través de un medio. Esto quiere decir que la sincronización ocurre cuando 2 o más elementos de un sistema oscilan a una misma frecuencia debido al intercambio de energía e información, si no existe este intercambio entonces los sistemas deberán de ser capaces de oscilar a su propia frecuencia.

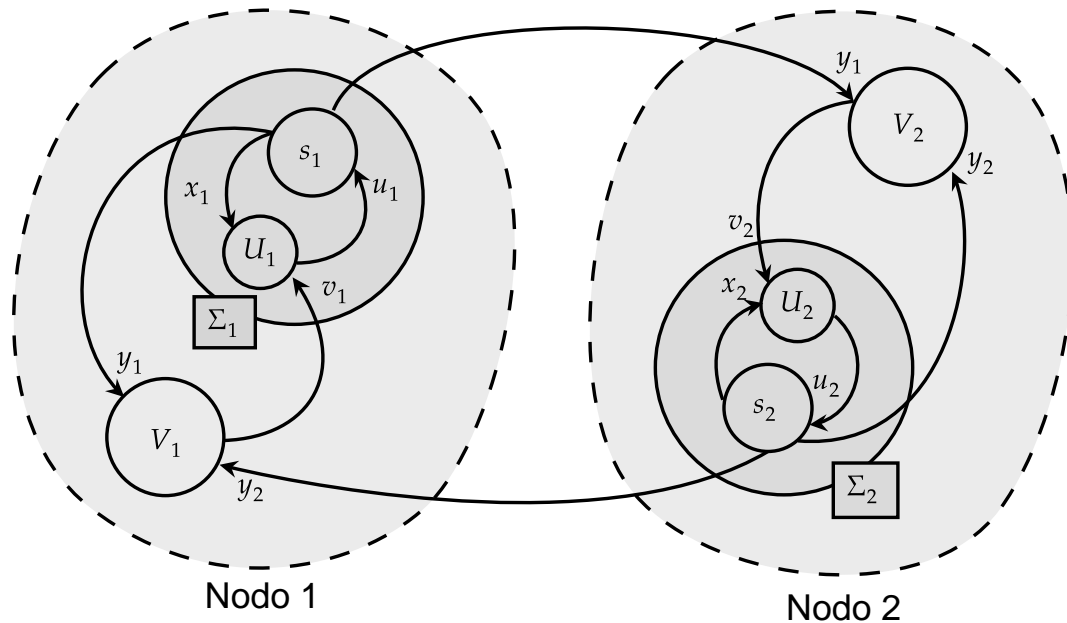
En este trabajo se entiende como sincronización cuando las posiciones de 2 sistemas convergen y además existe algún tipo de acoplamiento entre ambos que permite intercambio de información. En otras palabras, se mide el comportamiento de los sistemas y se ajusta su interacción para que ambos se sincronicen. Esto último se puede ver como un problema de control en donde se quiere que en conjunto los estados de un sistema exhiban un comportamiento deseado, o sea, que ejecuten una sincronización controlada. El marco ideal de sincronización se da cuando se considera que los sistemas a sincronizar son idénticos, por lo que este escenario es el punto de partida, a partir de ahí el marco de aplicación se da cuando existen diferencias entre los sistemas, por lo que es necesario diseñar un sistema de control que absorba estas diferencias.

En el contexto de este trabajo se necesitan dinámicas particulares de los sistemas para poder desempeñar una tarea, por lo tanto, adicionalmente de lograr la sincronización, los sistemas deben de ser capaces de seguir señales de referencia. Para tal propósito, se requieren 2 niveles de control: uno encargado de llevar a un sistema hacia una dinámica dada; y otro para que lo hagan de manera coordinada. En la figura 9 se muestran estos niveles de control. Los sistemas  $\Sigma_i$  con  $i = 1, 2$  se componen de un

subsistema  $S_i$  con su respectivo control local  $U_i$  (impone una señal de referencia) y los controles sincronizantes  $V_i$  coordinan a ambos nodos.

Para el caso de la figura 9 la configuración de sincronización es bidireccional, dado que existen 2 conexiones entre nodos, una que va desde el nodo 1 hacia el nodo 2 y otra en sentido contrario. El caso en donde solamente haya una conexión (en cualquier sentido) se le conoce como configuración unidireccional.

Para lograr los objetivos postulados anteriormente, y previo a encontrar controles que permitan la sincronización, se diseña un control local.



**Figura 9.** Esquema sobre niveles de control. Dentro de los nodos se encuentran los sistemas  $\Sigma_i$  cuyas partes son los sistemas  $S_i$  a sincronizar y los controles locales  $U_i$  encargados de imponer una dinámica hacia  $S_i$ . Los controles sincronizantes  $V_i$  fungen como mediadores entre los sistemas  $\Sigma_i$  para que estos actúen de manera coordinada. Se aprecia además a las conexiones entre ambos nodos, las cuales están dadas por las salidas  $y_i$ .

## 2.2. Control local.

El control local puede diseñarse utilizando cualquier técnica que garantice un desempeño satisfactorio para generar la dinámica requerida. Una técnica conveniente, cuando se dispone de un modelo razonablemente exacto (o lo más cercano a la realidad que se pueda) es la llamada linealización por retroalimentación de estado. Si el

sistema no es lineal, el control puede contener términos que cancelen los componentes no lineales. Para el caso de sistemas lineales se utiliza un control tal que el sistema retroalimentado adquiera la forma controlable. Se ofrece a continuación un resumen para el caso general. Para sistemas que pueden expresarse en la forma canónica controlable, es posible usar una entrada de control, denotada  $u$ , que cancele dinámicas del sistema. Por ejemplo, supóngase que el sistema tiene la forma:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}) + \tilde{g}(\tilde{x})u, \quad (3)$$

$$y = \tilde{h}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Se busca entonces una transformación  $x = \varphi(\tilde{x})$  tal que, en las coordenadas  $x$  dicho sistema tenga la forma (Slotine y Li, 1991):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= f(x) + g(x)u, \\ y &= x_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Si  $g(x) \neq 0$  la entrada  $u$  tiene la forma:

$$u = \frac{1}{g(x)}(v(x) - f(x)), \quad (6)$$

donde

$$v = y_d^{(n)} - k_0 e - k_1 \dot{e} \cdots - k_{n-1} e^{(n-1)}, \quad (7)$$

donde  $e(t) = y(t) - y_d(t)$  es el error de seguimiento,  $y(t)$  es la salida del sistema,  $k_i$  ( $i = 0, 1, n-1$ ) son constantes a seleccionar tal que el polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^n + k_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + k_1\lambda + k_0, \quad (8)$$

tenga todas sus raíces con parte real negativa.

Para el caso de sistemas lineales, es claro que la transformación  $\varphi$  es una función

lineal, al igual que la función  $f$  (ecuación (5)). Un análisis similar puede realizarse para sistemas con varias entradas y salidas,  $u, y \in \mathbb{R}^m$

El control local es un elemento dentro de un nodo que permite manipular a los sistemas de manera conveniente. Sin este elemento podría lograrse sincronización, sin embargo, se desea que se realicen tareas específicas de manera coordinada. Como se mencionó anteriormente, la sincronización solamente se puede dar entre sistemas que intercambian información entre ellos. Esta información se envía mediante un medio al que se le conoce como acoplamiento. A continuación se ilustran técnicas de sincronización a través de diferentes acoplamientos.

## 2.3. Acoplamiento estático.

### 2.3.1. Configuración unidireccional.

Considérese dos sistemas independientes modelados por las ecuaciones siguientes (Brown *et al.*, 1994):

$$\dot{x}_m = F(x_m) + Bu_m, \quad (9)$$

$$y_m = Cx_m,$$

$$\dot{x}_s = F(x_s) + Bu_s, \quad (10)$$

$$y_s = Cx_s,$$

donde,  $x_m, x_s \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_m, u_s, y_m, y_s \in \mathbb{R}^m$ ,  $B \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ,  $C \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , el campo vectorial  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es derivable. Las entradas  $u_i$ ,  $i \in \{m, s\}$  se componen de dos términos:

$$u_i = u_{z,i} + u_{l,i}, \quad (11)$$

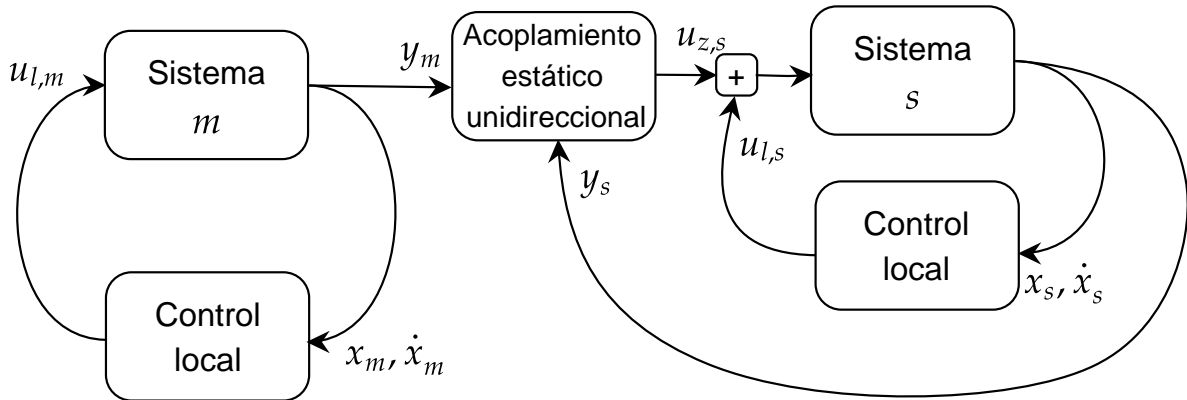
donde  $u_{z,i}$  es la entrada de control sincronizante y  $u_{l,i}$  es la entrada de control local. Para la configuración unidireccional se tiene que  $u_{z,m} = 0$ , por lo que  $u_m = u_{l,m}$ , utilizado para imponerle al nodo  $m$  una dinámica conveniente. Por su parte, el nodo  $s$  tiene la forma:

$$u_s = u_{z,s} + u_{l,s}. \quad (12)$$

Una estrategia de sincronización ampliamente usada es el acoplamiento estático, que tiene la forma:

$$u_{z,s} = k(y_m - y_s) = kC(x_m - x_s), \quad (13)$$

donde  $k \in \mathbb{R}$  representa a la fuerza de acoplamiento. El diagrama de bloques para dicha configuración se ilustra en la figura 10.



**Figura 10.** Diagrama de bloques de la sincronización con acoplamiento estático en configuración unidireccional.

Considérese el error de sincronización dado por:

$$e = x_m - x_s, \quad (14)$$

cuya dinámica es modelada por:

$$\dot{e} = -kBCe + p(x_m, x_m - e), \quad (15)$$

donde:

$$p(\cdot) = F(x_m) - F(x_s) |_{x_s=x_m-e} B(u_{l,m} - u_{l,s}). \quad (16)$$

Supóngase que  $F(0) = 0$  y que  $F(x_i)$  se puede expresar como:

$$F(x_i) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(0)x_i + \phi(x_i) = Ax_i + \phi(x_i), \quad (17)$$

donde

$$\phi(x_i) = F(x_i) - Ax_i = o(\|x_i\|^2). \quad (18)$$

Entonces la dinámica del error se puede expresar como:

$$\dot{e} = (A - kBC)e + \gamma(x_m, e) = \bar{A}e + \gamma(t, e) \quad (19)$$

donde

$$\gamma(t, e) = \phi(x_m) - \phi(x_m - e) + B(u_{l,m} - u_{l,s}) \quad (20)$$

Nótese que ambos sistemas son idénticos, por lo que si el control local de ambos es igual, entonces la perturbación está descrita por:

$$\gamma(t, e) = \phi(x_m) - \phi(x_m - e) \quad (21)$$

Nótese igualmente que  $\gamma$  es una perturbación desvanescente, es decir,  $\gamma(t, 0) = 0$ . Es bien conocido que, dado el sistema  $\dot{x} = f(x) + \gamma(t, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f, \gamma$  campos vectoriales Lipschitz,  $f(0) = 0$  y  $\gamma$  es desvanescente, entonces, si el equilibrio  $x = 0$  del sistema  $\dot{x} = f(x)$  es exponencialmente estable, y existe  $\rho > 0$  tal que,  $\|\gamma\| < \rho\|x\| \forall t$ , entonces el origen  $x = 0$  del sistema perturbado es exponencialmente estable. En consecuencia, el origen del sistema (19) será exponencialmente estable si existe una constante  $k \in \mathbb{R}$  tal que la matriz  $\bar{A} = A - kBC$  es estrictamente Hurwitz. Si los controles locales no son iguales, pero la diferencia es acotada, es decir  $|u_{l,m}(t) - u_{l,s}(t)| < r, \forall t$  entonces el error no será cero sino que tendrá un valor proporcional a la cota  $r$ .

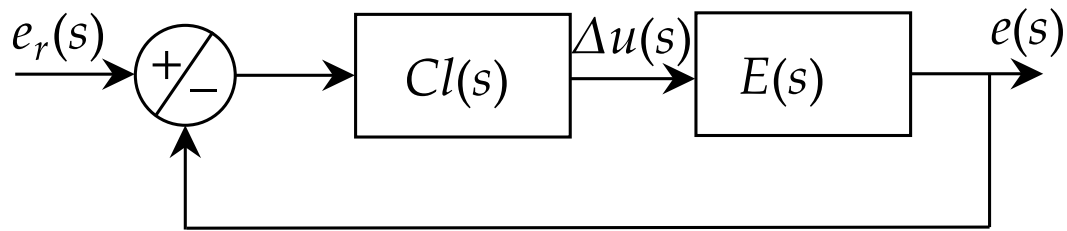
Considerando que ambos sistemas son lineales, se tiene a la dinámica del error (15) como:

$$\dot{e} = A(x_m - x_s) + B(u_m - u_s), \quad (22)$$

$$\dot{e} = Ae + B[u_{l,m} - (kCe + u_{l,s})], \quad (23)$$

$$\dot{e} = \underbrace{(A - kBC)}_{\bar{A}} e + B \underbrace{(u_{l,m} - u_{l,s})}_{\Delta u}. \quad (24)$$

El diagrama de bloques del sistema del error (ecuación (24)) se presenta en la figura



**Figura 11.** Diagrama de bloques del sistema del error.

11. La función de transferencia  $Cl(s)$  representa a la diferencia  $\Delta u$  entre los controles locales  $u_{l,m}$  y  $u_{l,s}$  y  $E(s)$  al sistema del error  $e$ . Para realizar el análisis de estabilidad de esta configuración, se debe de encontrar a la función de transferencia que relaciona  $e(s)$  y a  $e_r(s)$ :

$$e(s) = \Delta u(s)E(s), \quad (25)$$

$$\Delta u(s) = (e_r(s) - e(s))Cl(s). \quad (26)$$

Reemplazando a (26) en (25) se encuentra dicha relación:

$$T(s) = \frac{e(s)}{e_r(s)} = \frac{Cl(s)E(s)}{Cl(s)E(s) + 1}. \quad (27)$$

Encontrando a las raíces del polinomio en el denominador de (27) o los cambios de signos de sus raíces, se determina si es posible sincronizar con el acoplamiento estático.

### 2.3.2. Configuración bidireccional.

Para la sincronización con acoplamiento estático en configuración bidireccional, considérense los sistemas (9) y (10), a los cuales se les denominarán como sistema  $m$  y  $s$ , respectivamente. El error de sincronización se define de la siguiente manera:

$$e = x_m - x_s. \quad (28)$$

Para esta configuración el control sincronizante  $u_{z,i}$  es:

$$u_{z,s} = kC(x_m - x_s) = kCe, \quad (29)$$

$$u_{z,m} = kC(x_s - x_m) = -kCe. \quad (30)$$

La dinámica del error es la siguiente:

$$\dot{e} = \dot{x}_m - \dot{x}_s = F(x_m) + Bu_m - [F(x_s) + Bu_s]. \quad (31)$$

Reemplazando a (29) y (30) en (11) se tiene:

$$u_m = kCe + u_{l,m}, \quad (32)$$

$$u_s = -kCe + u_{l,s}. \quad (33)$$

Reemplazando a (29) y a (30) en (31) se obtiene  $\dot{e}$  como:

$$\dot{e} = F(x_m) - F(x_s) - 2kBCe + B(u_{lm} - u_{ls}). \quad (34)$$

Similar al caso anterior, si el campo vectorial  $F(\cdot)$  puede expresarse como:

$$F(x_i) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(0)x_i + \phi(x_i) = Ax_i + \phi(x_i), \quad (35)$$

donde

$$\phi(x_i) = F(x_i) - Ax_i = o(\|x_i\|^2), \quad (36)$$

entonces la dinámica del error está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ax_m + \phi_m - Ax_s - \phi_s + B(u_m - u_s), \\ \dot{e} &= Ax_m + \phi_m - Ax_s - \phi_s - 2kBCe + B(u_m - u_s), \\ \dot{e} &= (A - 2kBC)e + \gamma(t, e), \end{aligned} \quad (37)$$

donde  $\gamma(t, e) = \phi(x_m) - \phi(x_m - e) + B(u_{l,m} - u_{l,s})$ . Se tiene entonces un resultado similar al caso anterior.

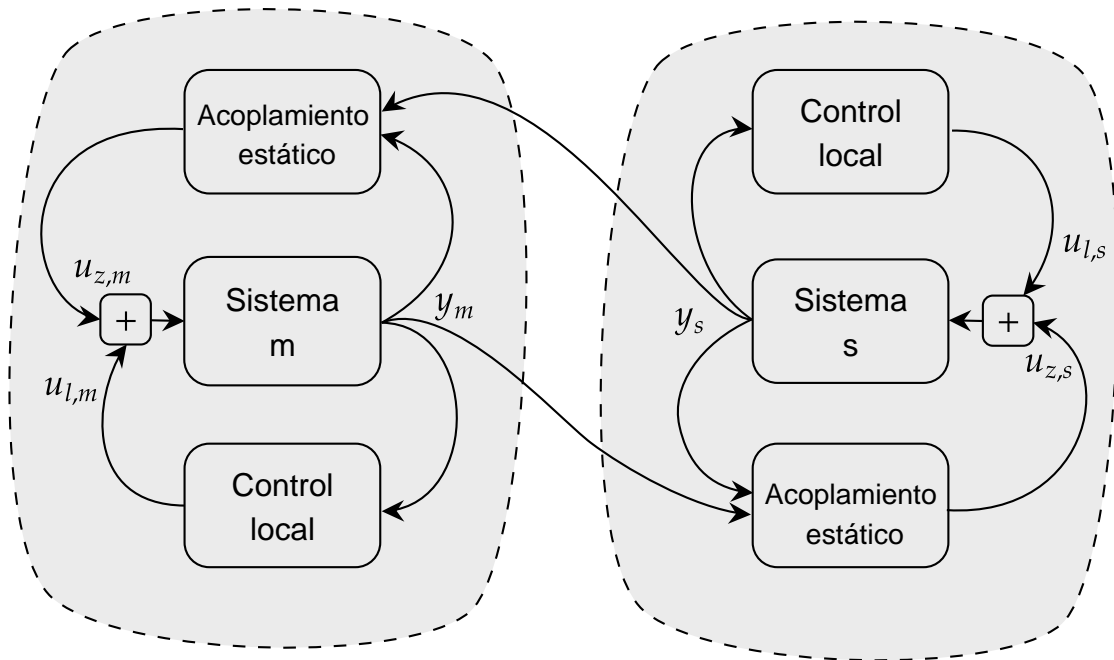
Considerando que ambos sistemas son lineales y que las condiciones iniciales son



diferentes, se tiene a la dinámica del error 37 como:

$$\dot{e} = \underbrace{(A - 2kBC)}_{\tilde{A}} e + \underbrace{B(u_{l,m} - u_{l,s})}_{\Delta u}. \quad (38)$$

Un esquema para esta configuración se puede apreciar en la figura 12. El análisis



**Figura 12.** Diagrama de bloques del acoplamiento estático en configuración bidireccional.

de estabilidad se realiza de manera similar al acoplamiento estático en configuración unidireccional, en donde se deben de encontrar las raíces o los cambios de signos de las raíces del polinomio en el denominador de la función de transferencia  $T(s)$  ( ver ecuación (27)).

#### 2.4. Acoplamiento dinámico.

En ocasiones no es posible lograr la sincronización entre sistemas con el acoplamiento estático (García Montes, 2018). El acoplamiento dinámico ofrece más parámetros de diseño, por lo que es posible sincronizar a sistemas utilizando este acoplamiento y que no eran sincronizables al utilizar el acoplamiento estático.

### 2.4.1. Configuración unidireccional.

Considérese de nuevo a los sistemas (9) y (10) en donde el acoplamiento dinámico está dado por (García Montes, 2018):

$$\dot{h} = -\alpha h + u_h, \quad (39)$$

en donde  $u_h = kC(x_m - x_s)$ , por lo que  $u_i$  resulta de la siguiente manera:

$$u_m = u_{l,m} \quad (40)$$

$$u_s = u_{l,s} - h \quad (41)$$

De manera similar que en los acoplamientos estáticos, para realizar el análisis de estabilidad del acoplamiento dinámico, el denominador de la función de transferencia (27) debe tener sus raíces con parte real negativa. El sistema del error para esta configuración es:

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ kC & -\alpha \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} e \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u, \quad (42)$$

donde  $\Delta u = u_{l,m} - u_{l,s}$ .

### 2.4.2. Configuración bidireccional.

Considérese de nuevo al acoplamiento dinámico de la ecuación (39) y al error de sincronización (28), por lo que los controles totales para los sistemas  $m$  y  $s$  tienen la forma:

$$u_m = u_{l,m} + h, \quad (43)$$

$$u_s = u_{l,s} - h. \quad (44)$$

Por lo que la dinámica del error para esta configuración es:

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 2B \\ kC & -\alpha \end{bmatrix}}_{\check{A}} \begin{bmatrix} e \\ h \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\check{B}} \Delta u. \quad (45)$$

De manera similar a la sección anterior, para realizar el análisis de estabilidad del acoplamiento dinámico, el denominador de la función de transferencia (27) debe tener sus raíces con parte real negativa.

## 2.5. Sincronización robusta.

En Alvarez *et al.* (2014) se propone un algoritmo general para encontrar controladores sincronizantes para sistemas de segundo orden de la forma:

$$\ddot{q}_i = f_i(t, q_i, \dot{q}_i) + \gamma_i(t, q_i, \dot{q}_i) + v_i(q, \dot{q}) \quad (46)$$

, donde  $q_i$  son las salidas de los sistemas y  $\dot{q}_i$  su derivada,  $f_i$  es una función conocida,  $\gamma_i$  es una perturbación acotada y  $v_i$  es el control sincronizante.

La solución a este algoritmo depende de la topología de la red, ya sea entre las conexiones de dichos sistemas y de si se desea que las salidas de estos se sincronicen en fase, o en anti-fase. Además se propone un observador robusto, que aunado a la convergencia exponencial de los estados del sistema en cuestión, estima perturbaciones o incertidumbres paramétricas.

Como se mencionó antes, la sincronización depende de la topología de la red en cuestión, las interconexiones y el error de sincronización entre los sistemas. Este error

se puede representar mediante la matriz de interconexión  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \sum_{j=2}^K \beta_{1,j} & -\beta_{1,2} & \cdots & -\beta_{1,K} \\ -\beta_{2,1} & \sum_{j=1, j \neq 2}^K \beta_{2,j} & \cdots & -\beta_{2,K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_{K,1} & -\beta_{K,2} & \cdots & \sum_{j=1}^{K-1} \beta_{K,j} \end{bmatrix}, \quad (47)$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_K^{-1} \end{bmatrix}, \quad (48)$$

donde  $\beta_{i,j}$  representa la conexión del sistema  $j$  hacia el sistema  $i$ , si existe dicha conexión entonces  $\beta_{i,j} > 0$  si no  $\beta_{i,j} = 0$ ,  $K$  es el número de sistemas en la red. La matriz  $\mathcal{A}$  contiene a las constantes de proporción de sincronización entre las salidas de los sistemas, es decir,  $\alpha$  representa un escalamiento de la salida, de hecho, con  $\alpha_i$  se determina si la salida de un sistema se sincroniza en anti-fase con otra (haciendo a  $\alpha_i < 0$ ). Esto se puede apreciar de mejor manera mediante el error de sincronización:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\alpha_i^{-1} q_i(t) - \alpha_j^{-1} q_j(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} e_{ij}(t) = 0, \quad \forall i, j \in K. \quad (49)$$

El error relacionado con las posiciones de los  $K$  sistemas se puede escribir en términos de las matrices (47) y (48):

$$\varepsilon(t) = \mathcal{L}\mathcal{A}q(t) = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}q(t). \quad (50)$$

La obtención de controles sincronizantes consiste en resolver la siguiente ecuación para  $v$ :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}}v = -\mathcal{L}_{\mathcal{A}}f - C_p\varepsilon - C_v\dot{\varepsilon}, \quad (51)$$

donde  $f$  es un vector que contiene a las  $K$  funciones correspondientes a  $\ddot{q}_i$  (ver ecuación (46)),  $C_p$  y  $C_v$  son matrices diagonales positivas definidas.

En ocasiones, dependiendo de la configuración de la red, no es posible encontrar los  $K$  controles en la ecuación (51), sin embargo, haciendo dependiente a un control de

los otros se puede resolver para los restantes  $k-1$  controles independientes. Mediante el Lemma de Schur se puede encontrar una equivalencia de la matriz  $\mathcal{L}_A$ :

$$\hat{\mathcal{L}}_A \doteq T^{-1}\mathcal{L}_AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \hat{l}_{12} & \dots & \hat{l}_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_{K-1} & \hat{l}_{K-1,K} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (52)$$

donde  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, K-1$ ) son los valores propios de la matriz  $\mathcal{L}_A$ . Como se puede apreciar, el último valor de la diagonal principal de  $\hat{\mathcal{L}}_A$  es cero, el cual corresponde a  $\lambda_K = 0$ . Dicha equivalencia  $\hat{\mathcal{L}}_A$ , transforma a la ecuación (51) en:

$$\hat{\mathcal{L}}_A \hat{v} = -\hat{\mathcal{L}}_A \hat{f} - \hat{C}_p \varepsilon - \hat{C}_v \dot{\varepsilon}, \quad (53)$$

donde  $\hat{v} = T^{-1}v$ ,  $\hat{f} = T^{-1}f$ ,  $\hat{C}_p = T^{-1}C_p$ ,  $\hat{C}_v = T^{-1}C_v$ . Dado que, tanto en las ecuaciones (51) y (53) dependen de  $\varepsilon$  y de su derivada  $\dot{\varepsilon}$ , es necesaria la elaboración de un observador.

### 2.5.1. Observador robusto.

En Alvarez *et al.* (2014) también se propone el diseño de un observador robusto que resuelve el problema de tener a la derivada de  $\varepsilon$  en los controles sincronizantes. Dicho observador esta dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{1i} &= \hat{x}_{2i} + c_{1i}(x_{1i} - \hat{x}_{1i}), \\ \dot{\hat{x}}_{2i} &= f_i(t, \hat{x}_{1i}, \hat{x}_{2i}) + v_i + c_{2i}(x_{1i} - \hat{x}_{1i}) + c_{3i} \text{sign}(x_{1i} - \hat{x}_{1i}). \end{aligned} \quad (54)$$

Este observador, además de converger sus estados exponencialmente con los estados originales del sistema, mediante el término discontinuo es capaz de estimar a la perturbación  $\gamma_i$  del sistema (46):

$$\gamma(t, x) \approx \hat{\gamma}(t, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{c_{3i} \text{sign}(x_{1i} - \hat{x}_{1i})}. \quad (55)$$

La cual puede ser calculada mediante un filtro pasa-bajas de segundo orden para eliminar términos de alta frecuencia provocados por la función signo:

$$\frac{X_f(s)}{U_f(s)} \doteq F(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2}, \quad (56)$$

donde los términos  $X_f$  y  $U_f$  son las transformadas de Laplace de la salida y de la entrada de filtro  $F(s)$  respectivamente, por lo que la estimación de  $\gamma_i$  es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_f(t) \approx \bar{\gamma}(t, x) \approx \gamma(t, x). \quad (57)$$

Este algoritmo es bastante completo, en el sentido de que además de proporcionar controles sincronizantes dependiendo de la topología de una red en cuestión, ofrece un observador robusto que converge exponencialmente con los estados del sistema, y además estima perturbaciones e incertidumbres paramétricas, haciendo que los errores de sincronización sean pequeños. Además, es posible reducir más el error, al reaprovechar la estimación de perturbación e inyectarla en el control 6, como se verá más adelante.

En los siguientes capítulos se aplicaran los esquemas de sincronización anteriores para saber si es posible sincronizar a diversos mecanismos giroscópicos.

## Capítulo 3. Sincronización de discos y ruedas de reacción.

---

### 3.1. Introducción.

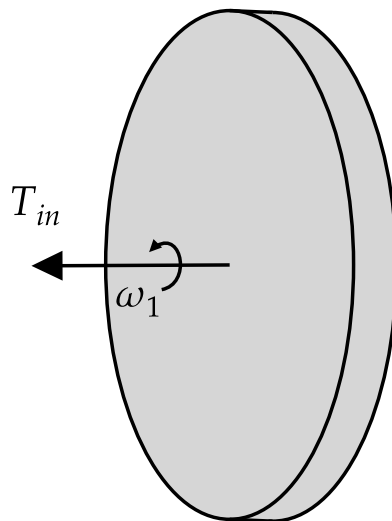
En este capítulo se describirá la aplicación de los algoritmos anteriores para sincronizar a 2 discos giratorios y 2 ruedas de reacción. Se analizaron los modelos dinámicos de los mismos, se describen sus controles locales así como los sincronizantes, y se presentan resultados numéricos.

### 3.2. Disco giratorio.

Este caso se incluye dentro de la sincronización de giroscopios dado que el principio fundamental de un giroscopio mecánico es la generación de pares. Estos pares dependen directamente del giro de estos discos.

#### 3.2.1. Modelo.

Considérese dos disco giratorios cuyos modelos están dados por la figura 13 y la ecuación (58) (Parks, s.f).



**Figura 13.** Esquema del disco giratorio.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_m &= \omega_{1,m} \\ \dot{\omega}_{1,m} &= \frac{T_{in}^m}{J} \\ y_m &= \theta_m \end{aligned} \right\} \text{Sistema } m. \quad (58)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_s &= \omega_{1,s} \\ \dot{\omega}_{1,s} &= \frac{T_{in}^s}{J} \\ y_s &= \theta_s \end{aligned} \right\} \text{Sistema } s.$$

Donde  $\theta_i$  con  $i = \{m, s\}$  es el desplazamiento angular,  $\omega_{1,i}$  es la velocidad angular,  $T_{in}^i$  es la entrada de control y  $J$  es el momento de inercia.

Los controles locales para ambos sistemas, de acuerdo a la sección 2.2 son:

$$u_{l,m} = \frac{1}{I}(\ddot{y}_d - k_0 e - k_1 \dot{e}), \quad (59)$$

$$u_{l,s} = \frac{1}{I}(\ddot{y}_d - k_0 e - k_1 \dot{e}), \quad (60)$$

donde  $I = \frac{1}{J}$  y  $e$  es el error de seguimiento  $e = \theta_i - y_d$  y los parámetros  $k_0$  y  $k_1$  son escogidos de tal manera que el polinomio  $p(\rho) = \rho^2 + k_1 \rho + k_0$  tenga sus raíces con parte real negativa, o sea:

$$k_1 = 2\sqrt{k_0}, \quad (61)$$

$$k_0 > 0. \quad (62)$$

### 3.2.2. Acoplamiento estático unidireccional.

Siguiendo el esquema de sincronización de la sección 2.3.1 (ver figura 10) se tiene que  $u_{z,s}$  está dado por la expresión:

$$u_{z,s} = kC(\theta_m - \theta_s), \quad (63)$$



por lo que los controles totales para ambos sistemas adquieren la forma:

$$T_{in}^m = u_{l,m}, \quad (64)$$

$$T_{in}^s = u_{l,s} + u_{z,s}. \quad (65)$$

La dinámica del error (24) para este caso tiene la siguiente forma:

$$\dot{e} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} e + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}}_{B} \Delta u. \quad (66)$$

Para saber si el sistema del error en lazo cerrado (15) es estable se encontraron las funciones de transferencia del control local y del sistema del error en lazo abierto:

$$Cl(s) = \frac{1}{I}(k_0 + k_1s), \quad (67)$$

$$E(s) = \frac{I}{s^2 + Ik}, \quad (68)$$

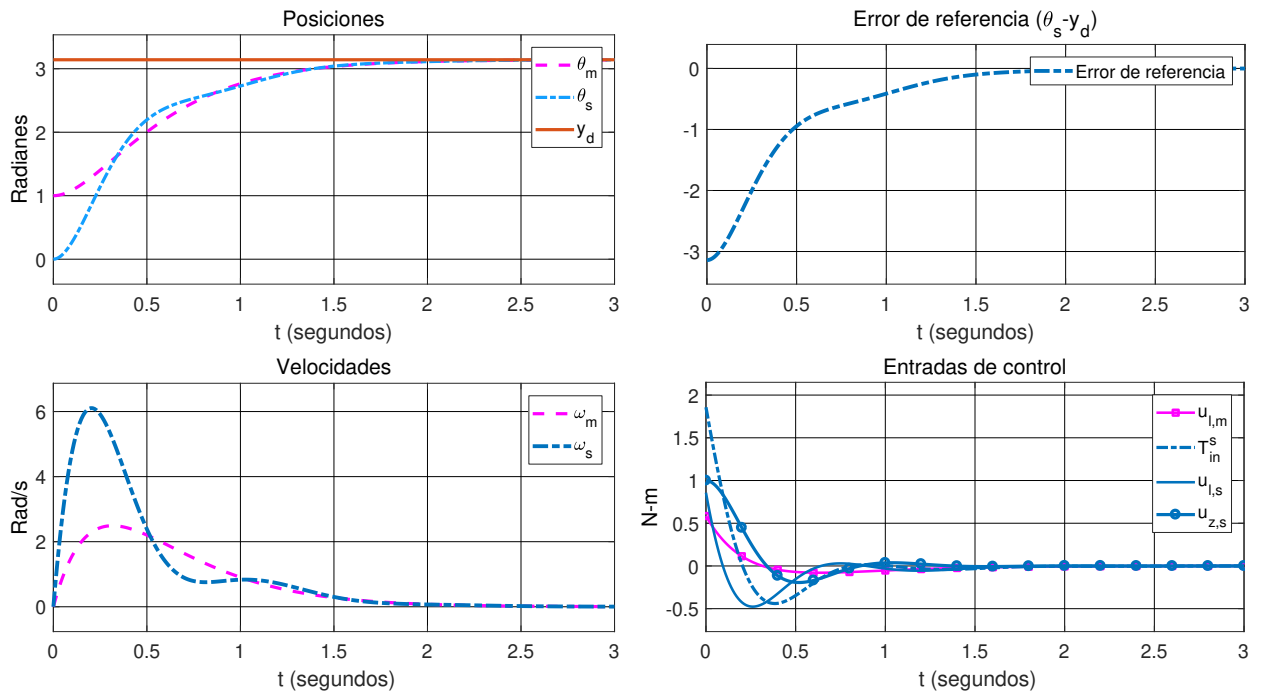
de tal manera que sustituyendo a (67) y (68) en (27) se obtiene a la función de transferencia del sistema del error en lazo cerrado:

$$T(s) = \frac{k_1s + k_0}{s^2 + k_1s + k_0 + Ik}. \quad (69)$$

Es conocido que el polinomio  $s^2 + as + b$  tiene raíces con parte real negativa si  $a$  y  $b$  son positivos, entonces el valor de  $k_1$  del polinomio en el denominador de (69) debe ser mayor que cero y  $k > -\frac{k_0}{I}$  para que las raíces de este polinomio tengan parte real negativa. De esto último, se puede decir que es posible sincronizar 2 discos giratorios con acoplamiento estático unidireccional. Es importante mencionar que ambos sistemas tienen un control local; si  $u_{l,i} = 0$ , entonces los discos no se pueden sincronizar con acoplamiento estático. Ambos discos se pueden sincronizar si están controlados localmente.

En la figura 14 se muestra el resultado numérico de sincronizar 2 discos giratorios con este esquema de sincronización. Como se puede apreciar, las posiciones de ambos sistemas convergen aún cuando las posiciones iniciales son diferentes y cómo la posición del sistema  $s$  sigue a la del sistema  $m$ . También se observan las velocidades

de ambos sistemas, los controles locales y el sincronizante.



**Figura 14.** Resultado numérico de acoplamiento estático entre dos discos giratorios en configuración unidireccional. Los valores de los parámetros para el control local (ecuación 61 y 62) para  $k_0$  y  $k_1$  fueron, respectivamente, 10 y 6.32; la referencia  $y_d$  fue igual a  $\pi$ ; el valor de inercia  $J$  del disco fue de  $0.0273 \text{ Kg-m}^2$ . La fuerza de acoplamiento  $k$  para el acoplamiento estático (ecuación 63) se fijó en 1. Las condiciones iniciales para la posición y la velocidad del sistema  $m$  fueron, respectivamente,  $\theta_m(0) = 0$  y  $\omega_m(0) = 0$ ; para el sistema  $s$  fueron,  $\theta_s(0) = 1$  y  $\omega_s(0) = 0$ .

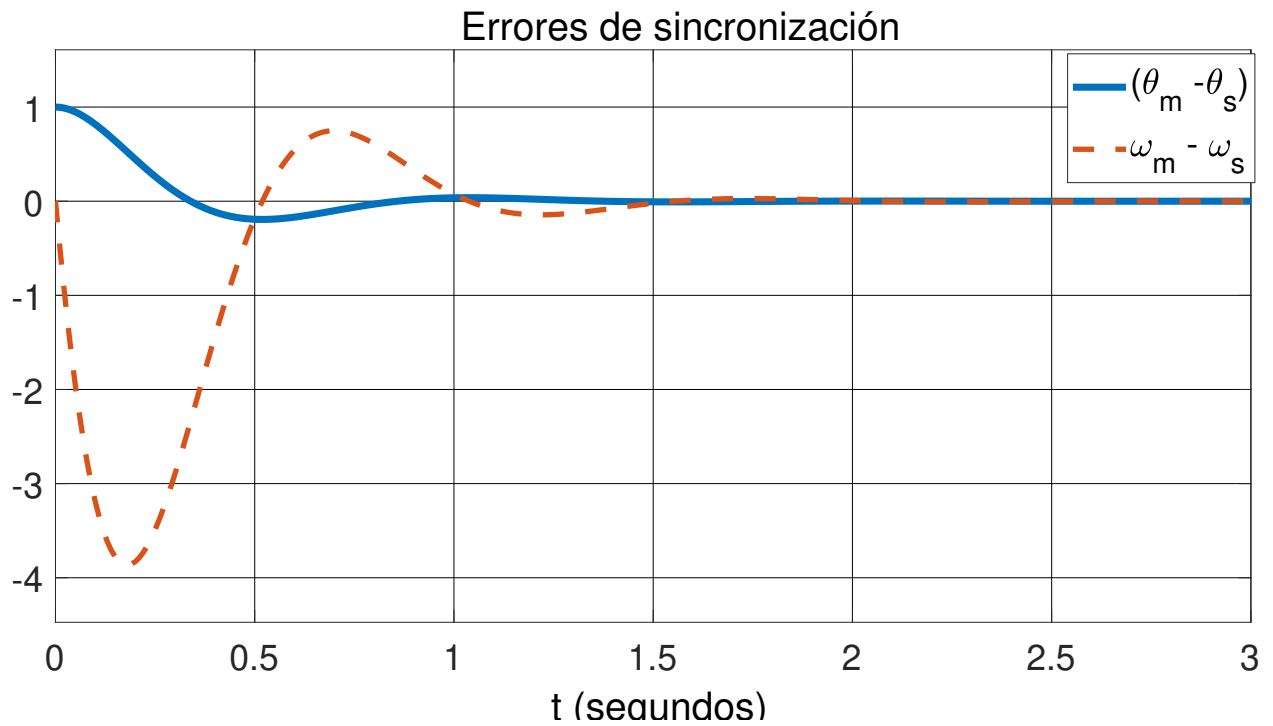
En la figura 15 se muestra la dinámica del error (66). Si  $\Delta u = 0$ , el sistema del error se comporta como si estuviera en lazo abierto, por lo tanto, los valores propios de la matriz  $\tilde{A}$  determinan la estabilidad del sistema cuando esto sucede:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-Ik}, \quad (70)$$

como se puede apreciar los valores propios de esta matriz son complejos conjugados sin parte real, por lo que el sistema del error es marginalmente estable.

### 3.2.3. Acoplamiento estático bidireccional.

Considérense de nuevo los sistemas de la ecuación (58). En este caso, el control sincronizante se inyecta en ambos sistemas, los cuales son denominados como  $m$  y  $s$ .



**Figura 15.** Salidas del sistema del error (66).

Los controles totales para ambos sistemas son:

$$T_{in}^m = u_{l,m} + u_{z,m}, \quad (71)$$

$$T_{in}^s = u_{l,s} + u_{z,s}. \quad (72)$$

El esquema en general para esta configuración se ilustra en la figura 12. La dinámica del error (38) para este caso tiene la siguiente forma:

$$\dot{e} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2k}{J} & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} e + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}}_B \Delta u. \quad (73)$$

Para saber si el sistema del error en lazo cerrado (73) es estable, se encontraron las funciones de transferencia del control local y del sistema del error en lazo abierto:

$$Cl(s) = \frac{1}{I}(k_0 + sk_1), \quad (74)$$

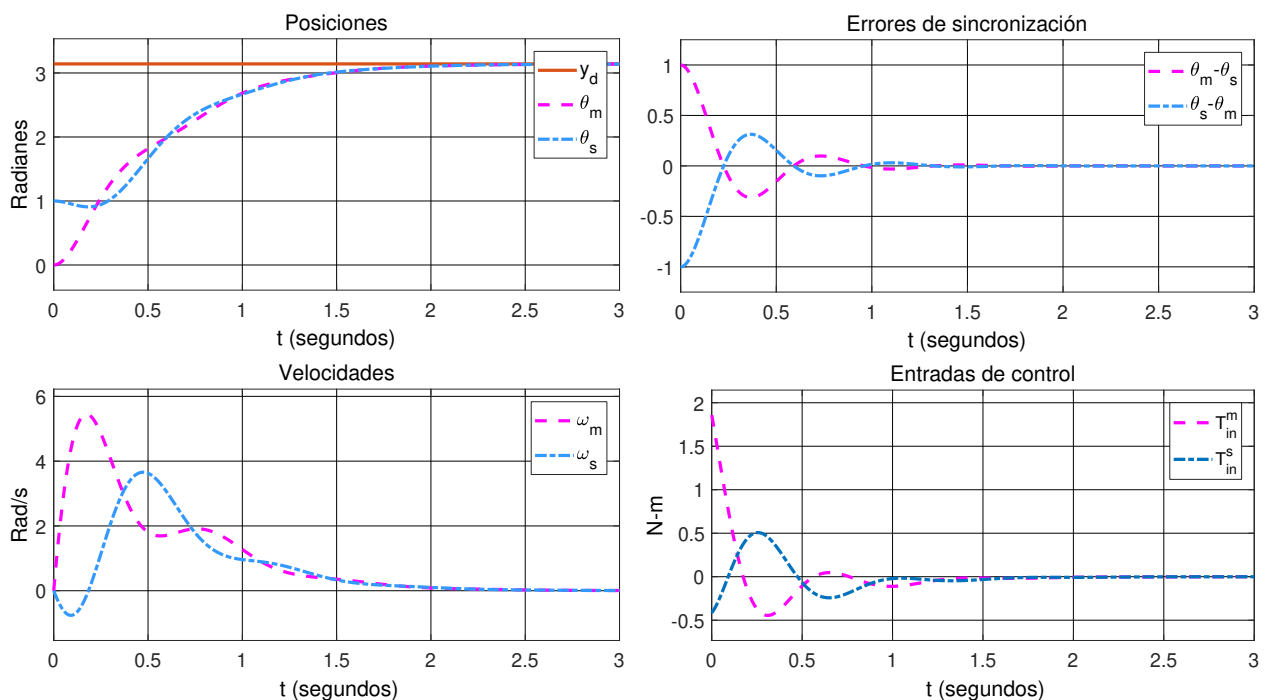
$$E(s) = \frac{I}{s^2 + 2Ik'}, \quad (75)$$

de tal manera que sustituyendo a (74) y (75) en (27) se obtiene a la función de transferencia del sistema del error en lazo cerrado:

$$T(s) = \frac{k_1 s + k_0}{s^2 + k_1 s + k_0 + 2Ik}. \quad (76)$$

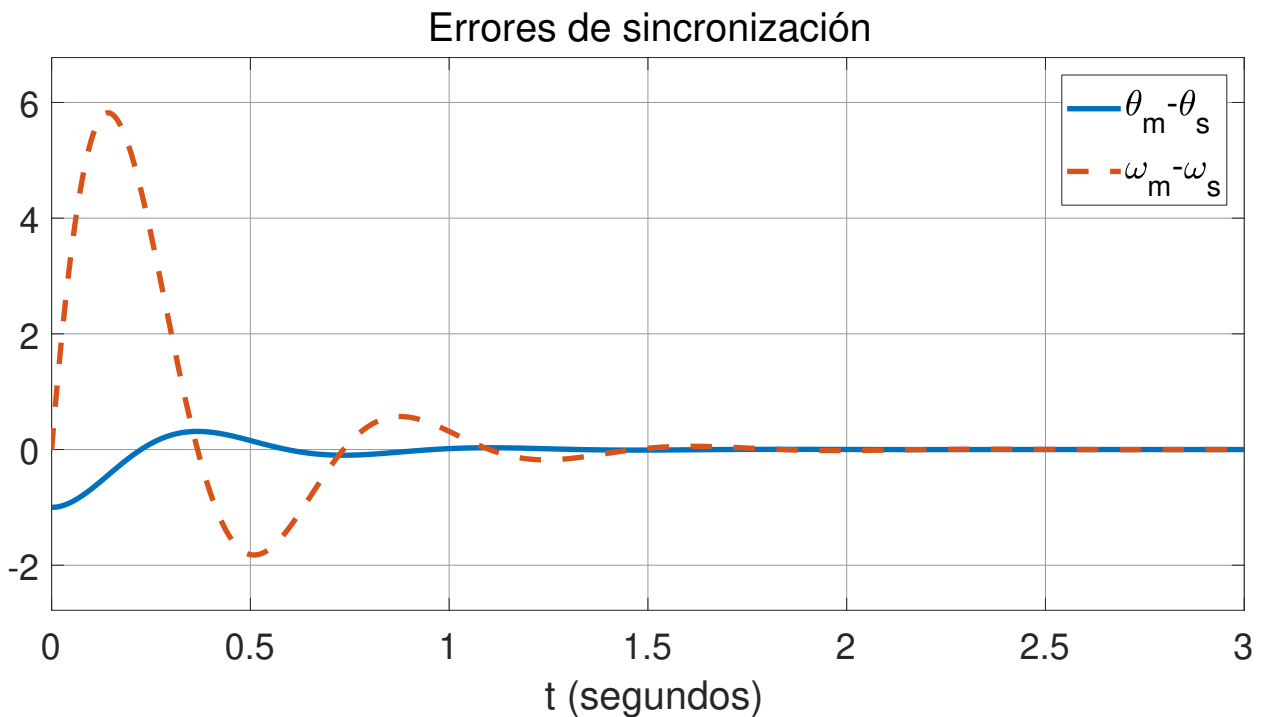
De manera similar al polinomio (69), el valor de  $k_1$  debe ser mayor que cero y  $k > -\frac{k_0}{2I}$  para que las raíces del polinomio en el denominador de (76) tengan parte real negativa. De esto último, se puede decir que es posible sincronizar a dos discos de reacción con acoplamiento estático bidireccional.

En la figura 16 se muestra el resultado numérico de sincronizar dos discos giratorios con este esquema de sincronización. Como se puede apreciar, las posiciones de ambos sistemas convergen aún cuando las posiciones iniciales son diferentes. También se observan las velocidades de ambos sistemas, los controles locales y el sincronizante. En la figura 17 se muestra a la dinámica del error (73). Si  $\Delta u = 0$ , el sistema del error



**Figura 16.** Resultado numérico de acoplamiento estático entre dos discos giratorios en configuración bidireccional. Los valores de los parámetros para los controles locales (ecuación 61 y 62) para  $k_0$  y  $k_1$  fueron, respectivamente, 10 y 6.32; la referencia  $y_d$  fue igual a  $\pi$ ; el valor de inercia  $J$  del disco fue de  $0.0273 \text{ Kg} - \text{m}^2$ . La fuerza de acoplamiento  $k$  para el acoplamiento estático se fijó en 1. Las condiciones iniciales para la posición y la velocidad del sistema  $m$  fueron, respectivamente,  $\theta_m(0) = 0$  y  $\omega_m(0) = 0$ ; para el sistema  $s$  fueron,  $\theta_s(0) = 1$  y  $\omega_s(0) = 0$ .

se comporta como si estuviera en lazo abierto, por lo tanto, los valores propios de la



**Figura 17.** Salidas del sistema del error (73).

matriz  $\tilde{A}$  determinan la estabilidad del sistema cuando esto sucede:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-2Ik}, \quad (77)$$

como se puede apreciar los valores propios de esta matriz son complejos conjugados sin parte real, por lo que la estabilidad del sistema del error será marginalmente estable.

### 3.3. Rueda de reacción.

A continuación se aplicaran los algoritmos de sincronización a 2 ruedas de reacción. La sincronización entre ruedas de reacción es importante dado que en aplicaciones en donde se requiera tener varios de estos aparatos, se requiere que operen de manera conjunta para sumar sus momentos angulares y lograr un objetivo deseado.

Considérese 2 ruedas de reacción cuyos modelos están dados en la ecuación (78) y de las que se presenta un esquema en la figura 18. La variable  $q_{3,i}$  ( $i = m, s$ ) corresponde a la posición del marco exterior  $B$  y  $\omega_{3,i}$  a su velocidad,  $T_{in}^m$  es el par aplicado al disco. A continuación se presentan los análisis de estabilidad, controlabilidad y obser-

vabilidad para el modelo de la rueda de reacción (los resultados de estos análisis serán similares a los análisis del disco giratorio, dado que comparten la misma estructura, ver ecuaciones (58)) y (78).

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q}_{3,m} \\ \dot{\omega}_{3,m} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} q_{3,m} \\ \omega_{3,m} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_B+J_C} \end{bmatrix}}_B T_{in'}^m \\ y_m &= q_{3,m}, \end{aligned} \right\} \text{Sistema } m, \quad (78)$$

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q}_{3,s} \\ \dot{\omega}_{3,s} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{3,s} \\ \omega_{3,s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_B+J_C} \end{bmatrix} T_{in'}^s \\ y_s &= q_{3,s}, \end{aligned} \right\} \text{Sistema } s.$$

### 3.3.1. Análisis del sistema.

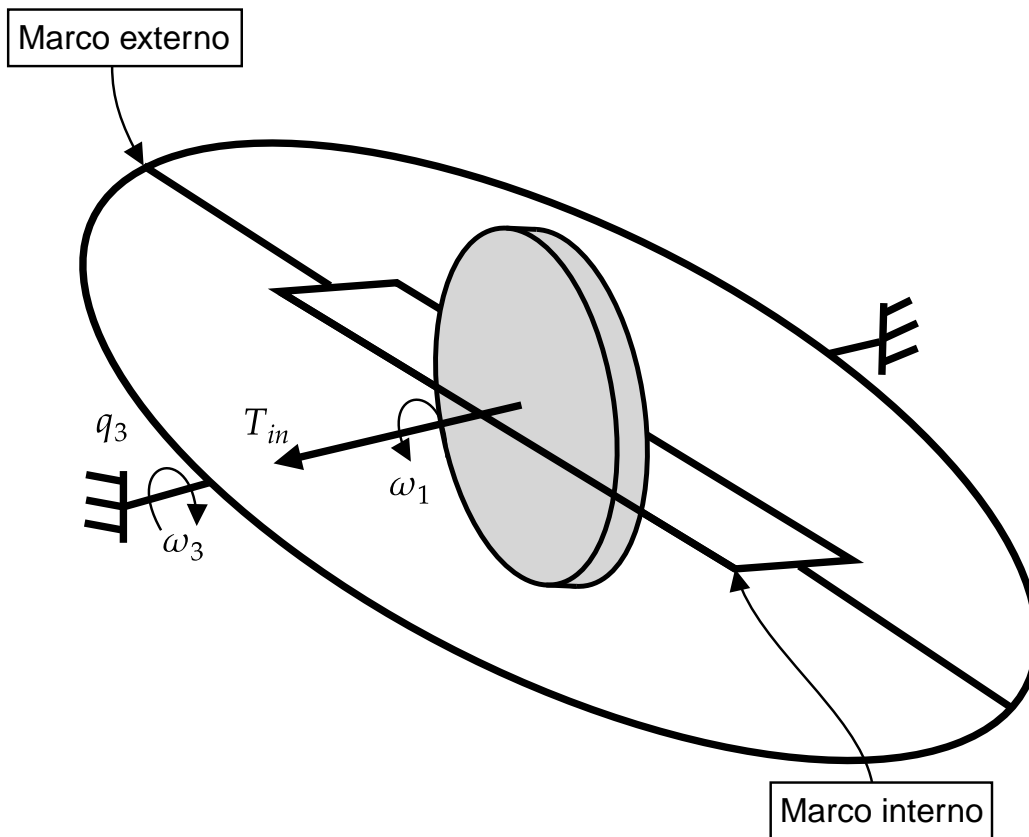
#### 3.3.1.1. Análisis de estabilidad.

Dado que los sistemas de la ecuación (78) son lineales se puede realizar el análisis de estabilidad mediante el lugar de las raíces del sistema en lazo abierto. Sabiendo que ambos sistemas tienen la forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (79)$$

$$y = Cx, \quad (80)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado, y las matrices de parámetros son  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ . Para poder realizar el análisis hay que calcular la transformada de Laplace



**Figura 18.** Esquema de la rueda de reacción.

de la ecuación (79) y de (80) y encontrar la función de transferencia:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\dot{x}\} &= A\mathcal{L}\{x\} + B\mathcal{L}\{u\}, \\
 sX(s) &= AX(s) + BU(s), \\
 (sI - A)X(s) &= BU(s), \\
 X(s) &= (sI - A)^{-1}BU(s).
 \end{aligned} \tag{81}$$

Ahora de la salida:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{y\} &= C\mathcal{L}\{x\}, \\
 Y(s) &= CX(s).
 \end{aligned} \tag{82}$$

Sustituyendo la ecuación (81) en (82) se obtiene la función de transferencia.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B. \quad (83)$$

Sustituyendo a cualquiera de los sistemas de la ecuación (78) en (83) se obtiene la función de transferencia en lazo abierto del sistema:

$$G(s) = -\frac{1}{s^2 (J_B + J_C)}. \quad (84)$$

Como se puede apreciar, se tienen dos polos en cero, por lo que el sistema en lazo abierto es inestable.

### 3.3.1.2. Análisis de controlabilidad.

Para que un sistema de la forma (79) sea controlable, la siguiente ecuación debe de tener rango completo:

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B], \quad (85)$$

donde  $n$  es la dimensión del sistema,  $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Sustituyendo las matrices  $A$  y  $B$  de la ecuación (78) en (85) se tiene:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & -23.4 \\ -23.4 & 0 \end{bmatrix},$$

en donde  $\mathcal{C}$  tiene rango 2, por lo tanto el sistema es controlable.

### 3.3.1.3. Análisis de observabilidad.

Similar al caso de controlabilidad, la observabilidad se puede verificar con un simple criterio de rango. Considérese de nuevo el sistema (79), se define la matriz de



observabilidad ( $\mathcal{O}$ ) como:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (86)$$

donde  $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $n$  es la dimensión del sistema. Sustituyendo las matrices  $A$  y  $B$  de la ecuación (78) en (86) se tiene:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la cual tiene rango 2, por lo tanto el sistema es observable.

### 3.3.2. Sincronización entre ruedas de reacción.

#### 3.3.2.1. Acoplamiento estático unidireccional.

Considérese a los modelos de ruedas de reacción y el acoplamiento estático de la sección 2.3.1. Los controles locales para ambos sistemas son similares a los utilizados en el disco giratorio:

$$u_{l,m} = \frac{1}{I}(\ddot{y}_d - k_0 e - k_1 \dot{e}), \quad (87)$$

$$u_{l,s} = \frac{1}{I}(\ddot{y}_d - k_0 e - k_1 \dot{e}), \quad (88)$$

donde  $I = -\frac{1}{J_B + J_C}$ , por lo tanto, las funciones de transferencia para el control local y el sistema del error en lazo abierto tienen la siguiente forma:

$$Cl(s) = \frac{1}{I}(k_0 + sk_1), \quad (89)$$

$$E(s) = \frac{I}{s^2 + Ik}, \quad (90)$$

por lo tanto, la función de transferencia (27) es:

$$T(s) = \frac{k_1 s + k_0}{s^2 + k_1 s + k_0 + Ik}. \quad (91)$$

Como se puede apreciar en la ecuación (91) el valor de  $k_1$  debe ser mayor que cero y  $k < -\frac{k_0}{I}$  para que no haya raíces con parte real positiva. De esto último, se puede decir que es posible sincronizar a dos ruedas de reacción con acoplamiento estático unidireccional con los controles locales (87) y (88). Este resultado es similar al de la sección 3.2.2, por lo que los resultados numéricos de las figuras 14 y 15 son también similares a los resultados para las ruedas de reacción.

### 3.3.2.2. Acoplamiento estático bidireccional.

Considérese al acoplamiento estático en configuración bidireccional de la sección 2.3.2, la función de transferencia del sistema del error para esta configuración resulta:

$$T(s) = \frac{k_1 s + k_0}{s^2 + k_1 s + k_0 + 2Ik}. \quad (92)$$

El criterio para que las raíces del polinomio en el denominador de (92) sean todas negativas es el mismo que el que se presenta en la sección 3.3.2.1, por lo tanto es posible sincronizar a 2 ruedas de reacción con este esquema de sincronización. Los resultados numéricos de la sincronización de los discos giratorios con acoplamiento estático en configuración bidireccional son similares a los resultados para las ruedas de reacción.

### 3.3.2.3. Acoplamiento dinámico unidireccional.

Considérese el acoplamiento dinámico de la sección 2.4.2. Reemplazando a  $A$ ,  $B$  de los sistemas de la ecuación 78 y haciendo a  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ , se tiene a la dinámica del

error para el acoplamiento dinámico (ecuación (42):

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ k & 0 & -\alpha \end{bmatrix}}_{\ddot{A}} \begin{bmatrix} e \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u. \quad (93)$$

La función de transferencia del sistema del error en lazo cerrado de la ecuación 93 es:

$$T(s) = \frac{I^2 k_1 s^2 + I^2 (k_0 + k_1 \alpha) s + I^2 k_0 \alpha}{s^3 + (\alpha + I^2 k_1) s^2 + I^2 (k_0 + k_1 \alpha) s + I^2 k_0 \alpha - Ik}. \quad (94)$$

En la tabla 2 se muestra el criterio de Routh-Hurwitz para determinar los cambios de signo de las raíces del polinomio del denominador de (94). Como se puede observar

**Tabla 2.** Criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio del denominador de la función de transferencia (91).

$s^3$	1	$I^2(k_0 + k_1 \alpha)$
$s^2$	$\alpha + I^2 k_1$	$I^2 k_0 \alpha - Ik$
$s^1$	$\frac{I^4 k_1 (k_0 + k_1 \alpha + \frac{\alpha^2}{I^2}) + Ik}{\alpha + I^2 k_1}$	0
$s^0$	$I^2 k_0 \alpha - Ik$	

cada celda de la segunda columna tiene que ser mayor que cero para que no haya cambios de signo. Los valores de  $k_0$  y  $k_1$  (correspondientes al control local) son, respectivamente, 10 y  $2\sqrt{10}$  y el valor de  $I$  es de  $-24.39(Kg - m^2)^{-1}$ , por lo tanto, el primer criterio a cumplir es que  $\alpha > -3762.37$ ; haciendo a  $\alpha = 1$ , se cumple con el primer criterio y se tiene al segundo criterio a cumplir, o sea que,  $k < 1.49 \times 10^6$ . El tercer criterio a cumplir es de que  $k > -243.90$ , por lo tanto haciendo a  $k = 1$  se cumple con el segundo y tercer criterio. De lo anterior, se puede decir que es posible sincronizar a dos ruedas de reacción con acoplamiento dinámico en configuración unidireccional.

Si  $\Delta u = 0$  el sistema del error (93) se comporta como si estuviera en lazo abierto, por lo tanto los valores propios de la matriz  $\ddot{A}$  determina la estabilidad del sistema del error cuando esto pasa. El polinomio característico de  $\ddot{A}$  es:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 - Ik, \quad (95)$$

La tabla 3 corresponde al criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio (95). Como se

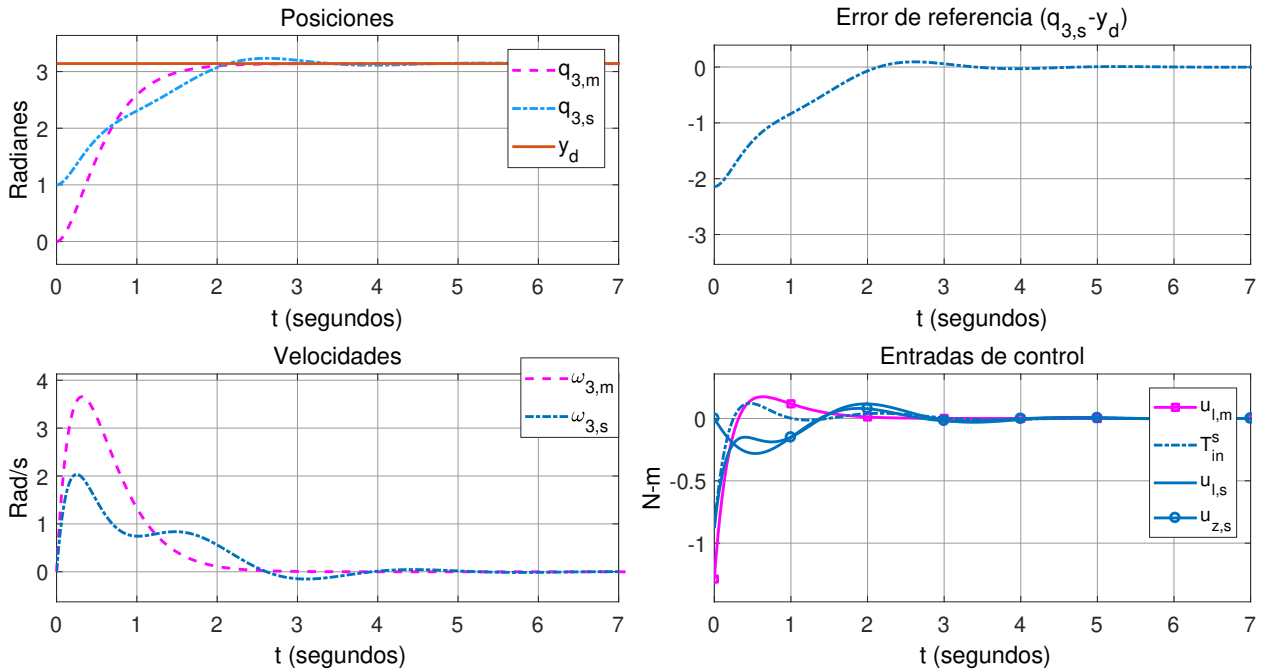
**Tabla 3.** Criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio (95).

$\lambda^3$	1	0
$\lambda^2$	$\alpha$	$-Ik$
$\lambda^1$	$\frac{Ik}{\alpha}$	0
$\lambda^0$	$-Ik$	

puede apreciar, el primer criterio para que no haya cambios de signo en las raíces del polinomio es de que  $\alpha > 0$ , el segundo es de que  $k < 0$  (independientemente de  $\alpha$ ) y el tercero es de que  $k > 0$ , por lo tanto, no existe un valor de  $k$  que satisfaga a ambos criterios y que al mismo tiempo haga que todos los valores propios de  $\ddot{A}$  sean negativos.

En la figura 19 se muestra el resultado numérico de sincronizar 2 ruedas de reacción con este esquema de sincronización. Como se puede apreciar, las posiciones de ambos sistemas convergen aún cuando las posiciones iniciales son diferentes y como la posición del sistema  $s$  sigue a la del sistema  $m$ . También se observan las velocidades de ambos sistemas, los controles locales y el sincronizante.

En la figura 20 se muestra a las salidas del sistema del error (93). Como se mencionó antes, si  $\Delta u = 0$ , el sistema del error se comporta en lazo abierto, por lo que independientemente de los valores de  $k$  y  $\alpha$  este sistema es inestable.



**Figura 19.** Resultado numérico de acoplamiento dinámico entre dos ruedas de reacción en configuración unidireccional. Los valores de los parámetros para el control local (ecuación 61 y 62) para  $k_0$  y  $k_1$  fueron, respectivamente, 10 y 6.32; la referencia  $y_d$  fue igual a  $\pi$ ; los valores de inercia  $J_B$  y  $J_C$  fueron de  $0.018 \text{ Kg-m}^2$  y  $0.0230 \text{ Kg-m}^2$ , respectivamente. Los valores de acoplamiento  $k$  y  $\alpha$  se fijaron en 1 para ambos. Las condiciones iniciales para la posición y la velocidad del sistema  $m$  fueron, respectivamente,  $\theta_m(0) = 0$  y  $\omega_m(0) = 0$ ; para el sistema  $s$  fueron,  $\theta_s(0) = 1$  y  $\omega_s(0) = 0$ .

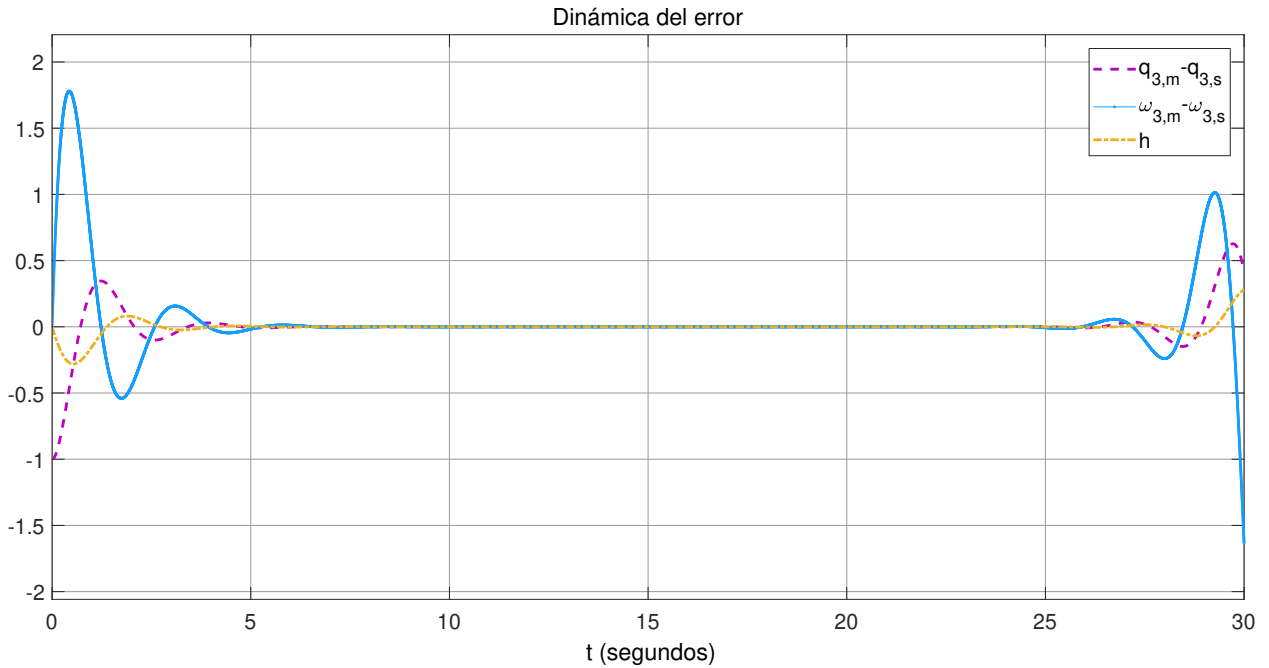
### 3.3.2.4. Acoplamiento dinámico bidireccional.

Considérese el acoplamiento dinámico de la sección 2.4.2. Reemplazando a  $A$ ,  $B$  de los sistemas de la ecuación 78 y haciendo a  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ , se tiene a la dinámica del error para el acoplamiento dinámico en configuración bidireccional (ecuación (45):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{h} \end{bmatrix}}_{\dot{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2I \\ k & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u. \quad (96)$$

La función de transferencia del sistema del error en lazo cerrado de la ecuación (96) es:

$$T(s) = \frac{I^2 k_1 s^2 + I^2 (k_0 + k_1 \alpha) s + I^2 k_0 \alpha}{s^3 + (\alpha + I^2 k_1) s^2 + I^2 (k_0 + k_1 \alpha) s + I^2 k_0 \alpha - 2Ik}. \quad (97)$$



**Figura 20.** Salidas del sistema del error (93).

En la tabla 4 se muestra el criterio de Routh-Hurwitz para determinar los cambios de signo de las raíces del polinomio (97). Como se puede observar cada celda de la

**Tabla 4.** Criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio del denominador de la función de transferencia (97).

$s^3$	1	$I^2(k_0 + k_1\alpha)$
$s^2$	$\alpha + I^2k_1$	$I^2k_0\alpha - Ik$
$s^1$	$\frac{I^4k_1(k_0 + k_1\alpha + \frac{\alpha^2}{I^2}) + 2Ik}{\alpha + I^2k_1}$	0
$s^0$	$I^2k_0\alpha - Ik$	

segunda columna tiene que ser mayor que cero para que no haya cambios de signo. El primer criterio a cumplir es que  $\alpha > -3762.37$ ; haciendo a  $\alpha = 1$ , se cumple con el primer criterio y se tiene al segundo criterio a cumplir, o sea que,  $k < 1.68 \times 10^5$ . El tercer criterio a cumplir es de que  $k > -243.90$ , por lo tanto haciendo a  $k = 1$  se cumple con el segundo y tercer criterio. De lo anterior, se puede decir que es

posible sincronizar a 2 ruedas de reacción con acoplamiento dinámico en configuración bidireccional.

Si  $\Delta u = 0$  el sistema del error (96) se comporta como si estuviera en lazo abierto, por lo tanto los valores propios de la matriz  $\ddot{A}$  determinan la estabilidad del sistema del error cuando esto pasa. El polinomio característico de  $\ddot{A}$  es:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 - 2Ik, \quad (98)$$

La tabla 5 corresponde al criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio 98. Como se

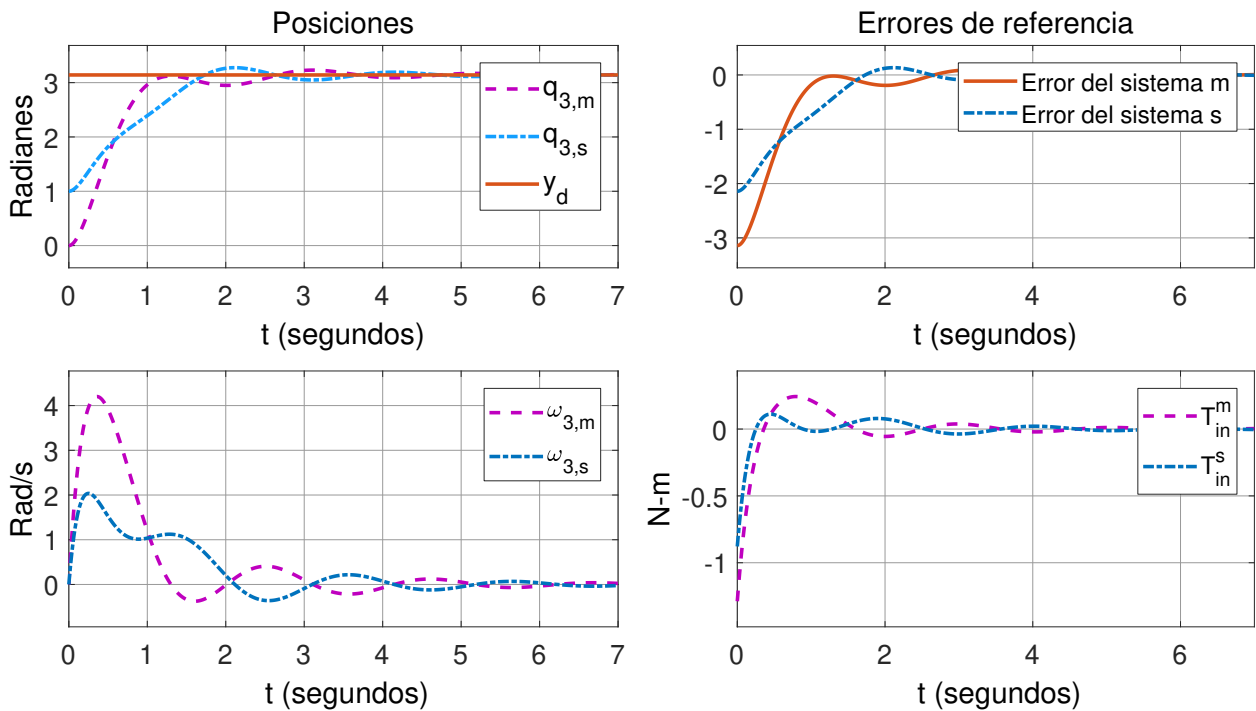
**Tabla 5.** Criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio del polinomio (95).

$\lambda^3$	1	0
$\lambda^2$	$\alpha$	$-2Ik$
$\lambda^1$	$\frac{2Ik}{\alpha}$	0
$\lambda^0$	$-2Ik$	

puede apreciar, el primer criterio para que no haya raíces con parte real positiva es de que  $\alpha > 0$ , el segundo es de que  $k < 0$  (independientemente de  $\alpha$ ) y el tercero es de que  $k > 0$ , por lo tanto, no existe un valor de  $k$  que satisfaga a ambos criterios y que al mismo tiempo haga que todos los valores propios de  $\ddot{A}$  sean negativos. Como se mencionó antes, si  $\Delta u = 0$ , el sistema del error se comporta en lazo abierto, por lo que independientemente de los valores de  $k$  y  $\alpha$  este sistema es inestable, por lo que se espera un resultado similar al que se ilustra en la figura 20.

### 3.3.2.5. Observador robusto.

En todos los casos anteriores se observó que el controlador local necesita la velocidad del sistema, y en el algoritmo de sincronización robusta de la sección 2.5. Dado



**Figura 21.** Resultado numérico de acoplamiento dinámico entre dos ruedas de reacción en configuración bidireccional. Los valores de los parámetros para el control local (ecuación 61 y 62) para  $k_0$  y  $k_1$  fueron, respectivamente, 10 y 6.32; la referencia  $y_d$  fue igual a  $\pi$ ; los valores de inercia  $J_B$  y  $J_C$  fueron de  $0.018 \text{ Kg-m}^2$  y  $0.0230 \text{ Kg-m}^2$ , respectivamente. Los valores de acoplamiento  $k$  y  $\alpha$  se fijaron en 1 para ambos. Las condiciones iniciales para la posición y la velocidad del sistema  $m$  fueron, respectivamente,  $\theta_m(0) = 0$  y  $\omega_m(0) = 0$ ; para el sistema  $s$  fueron,  $\theta_s(0) = 1$  y  $\omega_s(0) = 0$ .

que, en los sistemas previamente abordados solo se tiene acceso a la posición, es necesario el diseño de un observador robusto que estime a los estados de los sistemas.

Si se desea que la salida de las ruedas de reacción siga a una función sinusoidal, el control local (6) adquiere la siguiente forma:

$$u_{l,i} = \frac{1}{I} (v(e, \dot{e}) - f(q_3^i, \omega_3^i)),$$

$$v = \ddot{y}_d - k_0 e - k_1 \dot{e}, \quad (99)$$

$$e = y_d - q_3^i,$$

$$y_d = \text{sen}(2\pi\omega t), \quad (100)$$

con  $i = m, s$ . En la sección 2.5.1 se propone el uso de un observador robusto, con el cual es posible estimar perturbaciones e incertidumbres paramétricas del sistema además de estimar a los estados. Para la rueda de reacción, el observador robusto



(54) adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{q}}_{3,i} &= \hat{\omega}_{3,i} + c_{1,i}(q_{3,i} - \hat{q}_{3,i}) \\ \dot{\hat{\omega}}_{3,i} &= Iu_{l,i} + u_{z,i} + c_{2,i}(q_{3,i} - \hat{q}_{3,i}) + c_{3,i}\text{sign}(q_{3,i} - \hat{q}_{3,i})\end{aligned}\quad (101)$$

En la figura 22(a) se muestra la posición y velocidad del sistema  $s$ , en este caso, no se añadieron incertidumbres ni perturbaciones, sin embargo las condiciones iniciales del sistema  $s$  se eligieron distintas a las del observador; en esta figura se puede apreciar a la referencia, la posición real y la posición observada, también a la velocidad actual y a la velocidad observada, en la figura 22(b) se muestran los respectivos errores de observación. Para probar el desempeño del observador en presencia de incertidumbres paramétricas y perturbaciones además de tener condiciones iniciales distintas, se definió a una función y una diferencia en el parámetro de inercia:

$$\xi = \text{sen}(q_{3,s}), \quad (102)$$

$$\Delta I = 1(\text{Kg} - \text{m}^2)^{-1}, \quad (103)$$

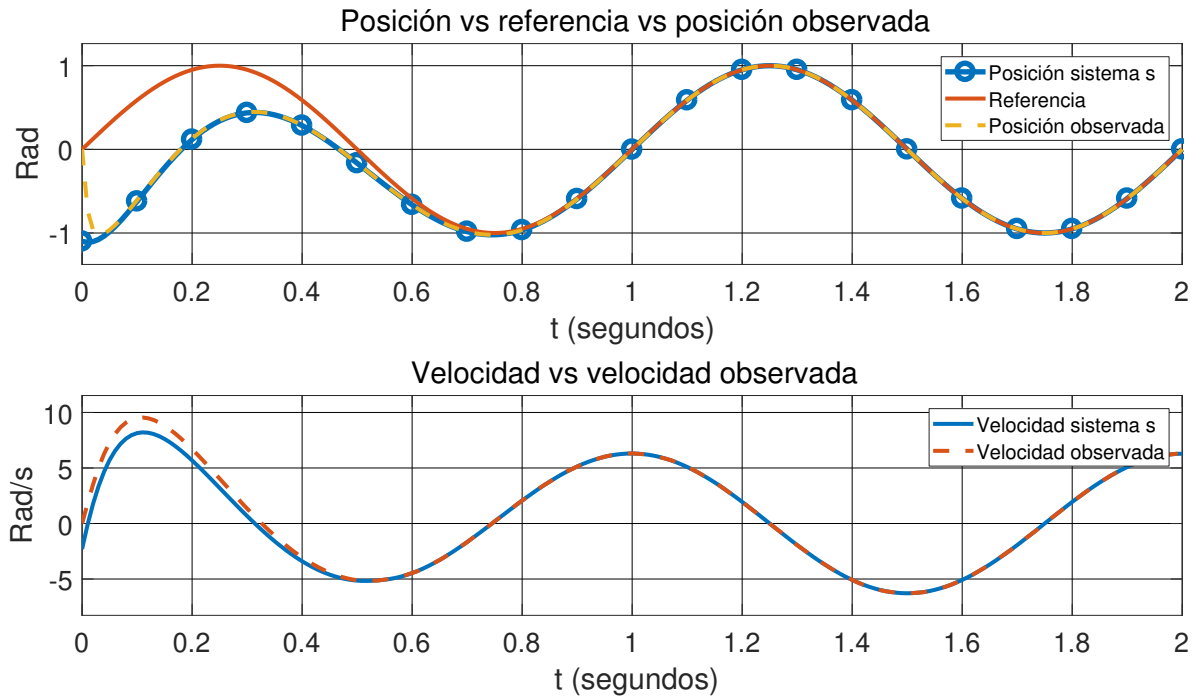
por lo que el sistema  $s$  resulta:

$$\begin{aligned}\dot{q}_{3,s} &= \omega_{3,s} \\ \dot{\omega}_{3,s} &= \text{sen}(q_{3,s}) + \left( \overbrace{\frac{1}{J_B + J_C}}^I + \Delta I \right) u_{l,s}.\end{aligned}\quad (104)$$

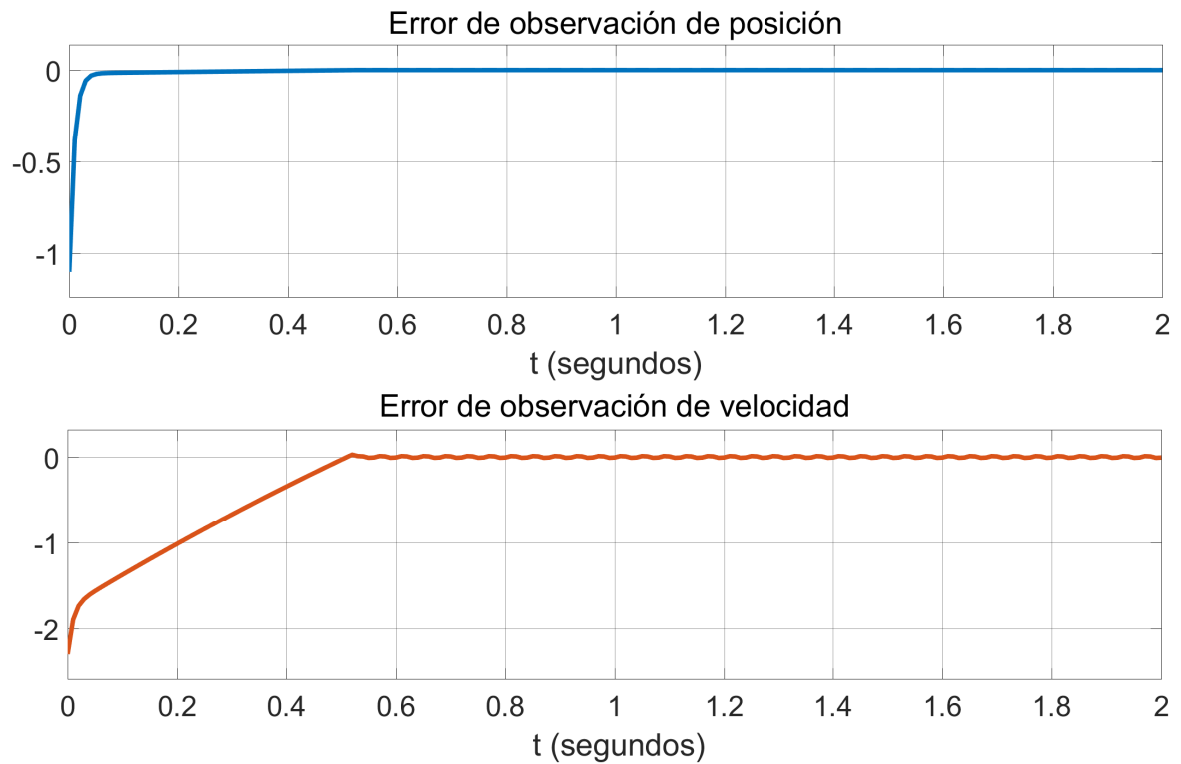
El sistema (104) es diferente al considerado por el control local, el observador y por el control sincronizante, esta diferencia desconocida se agrupa en  $\gamma_s$ :

$$\gamma_s = \text{sen}(q_{3,s}) + \Delta I u_{l,s}. \quad (105)$$

En la figura 23(a) se muestra la posición y velocidad del sistema  $s$  perturbado, se puede apreciar a la referencia, la posición real y la posición observada, también a la velocidad actual y a la velocidad observada, en la figura 23(b) se muestran los respectivos errores de observación. Los parámetros de  $c_{1,s}$ ,  $c_{2,s}$  y  $c_{3,s}$  del observador fueron los mismos que en el caso anterior.

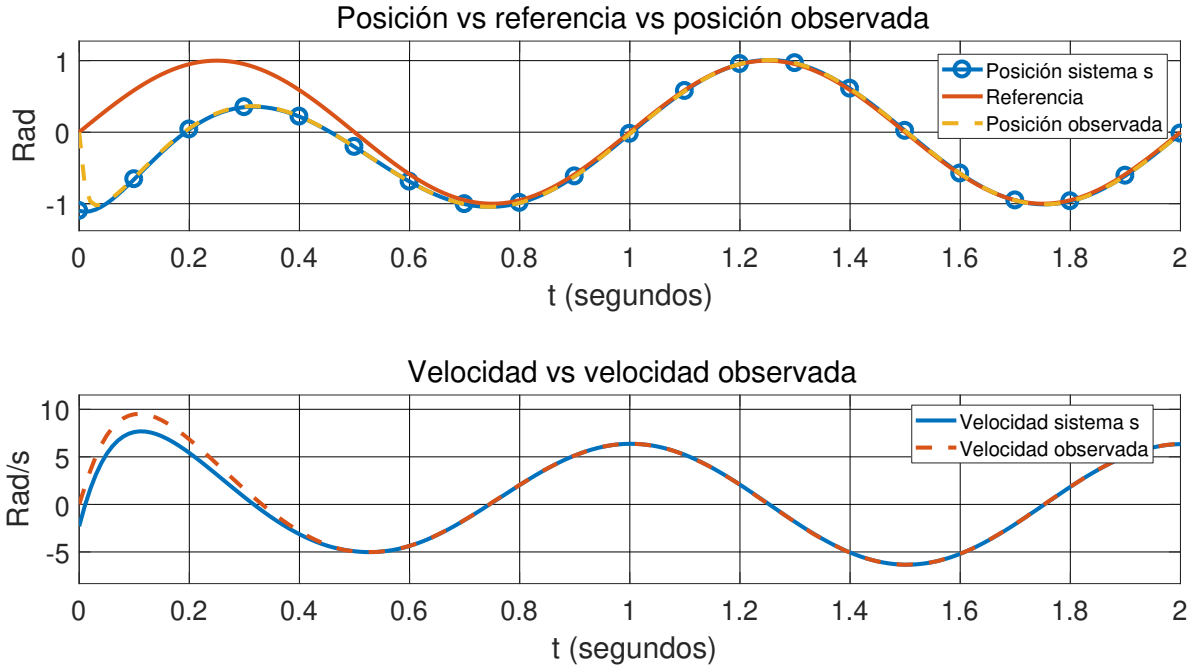


(a) Observador del sistema  $s$ , los parámetros de  $c_{1,s}$ ,  $c_{2,s}$ ,  $c_{3,s}$  son respectivamente, 100, 50 y 3. Las condiciones iniciales del observador para la posición y velocidad son  $\hat{q}_{3,s} = 0$  y  $\hat{\omega}_{3,s} = 0$ , y para el sistema  $s$ ,  $q_{3,s} = -1.1$  y  $\omega_{3,s} = -2.3$ .

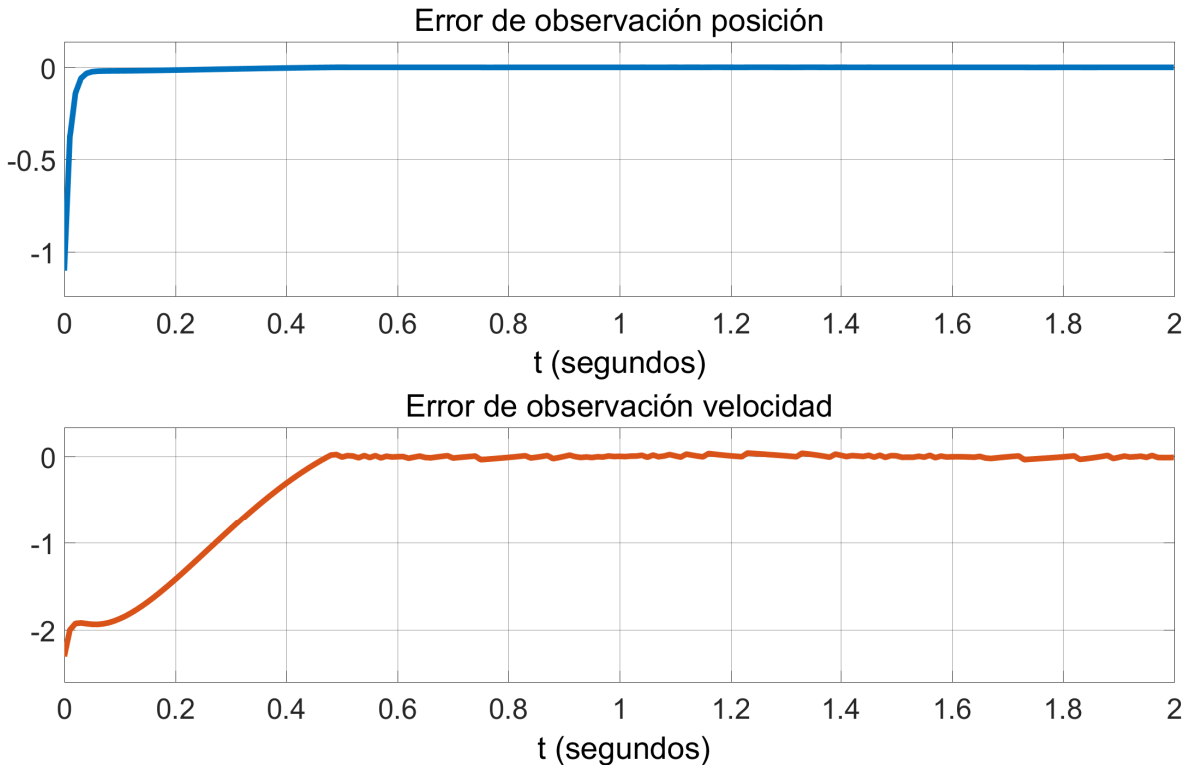


(b) Errores de observación (entre la posición y la velocidad) del sistema  $s$ .

**Figura 22.** Desempeño del observador robusto del sistema  $s$  en presencia de condiciones iniciales distintas y sin perturbaciones.



(a) Observador del sistema  $s$ , los parámetros de  $c_{1,s}$ ,  $c_{2,s}$ ,  $c_{3,s}$  son respectivamente, 100, 50 y 3. Las condiciones iniciales del observador para la posición y velocidad son  $\hat{q}_{3,s} = 0$  y  $\hat{\omega}_{3,s} = 0$ , y para el sistema  $s$ ,  $q_{3,s} = -1.1$  y  $\omega_{3,s} = -2.3$ .



(b) Errores de observación (entre la posición y la velocidad) del sistema  $s$ .

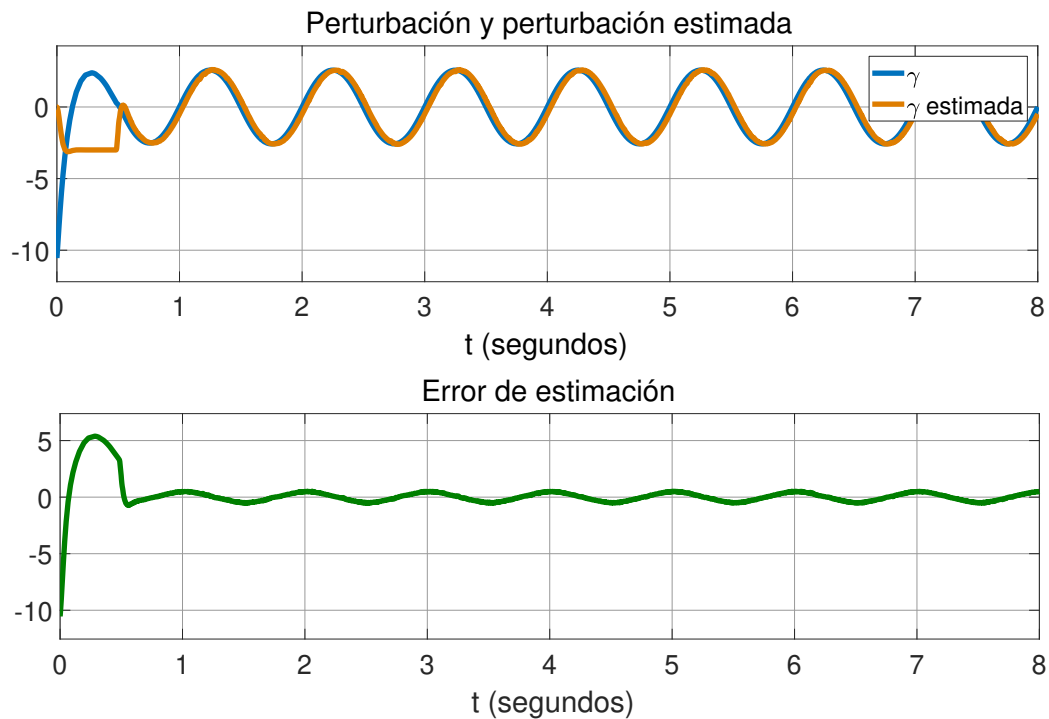
**Figura 23.** Desempeño del observador robusto del sistema  $s$  en presencia de condiciones iniciales distintas y con perturbaciones.

La estimación de la velocidad proporcionada por el observador es suficiente para mantener al error de referencia ( $y_d - q_{3,s}$ ) alrededor de cero, como se aprecia en la figura 25, sin embargo, esto se puede mejorar al inyectar a la estimación de perturbación e incertidumbres paramétricas en el control local (99).

Extrayendo al término  $c_{3,s} \text{sign}(q_{3,s} - \hat{q}_{3,s})$  de la ecuación (101), el cual es la entrada del filtro (56) y cuya salida es  $x_f(t)$ , se tiene a la estimación de las perturbaciones e incertidumbres paramétricas. Seleccionando a la frecuencia de corte en 50Hz este filtro adquiere la siguiente forma:

$$F(s) = \hat{\gamma}_s = \frac{(50\text{Hz})^2}{s^2 + \sqrt{2}(50\text{Hz})s + (50\text{Hz})^2}. \quad (106)$$

En la figura 24 se muestra a la perturbación  $\gamma_s$  introducida, a su estimación  $\hat{\gamma}_s$  y al error  $\gamma_s - \hat{\gamma}_s$ .

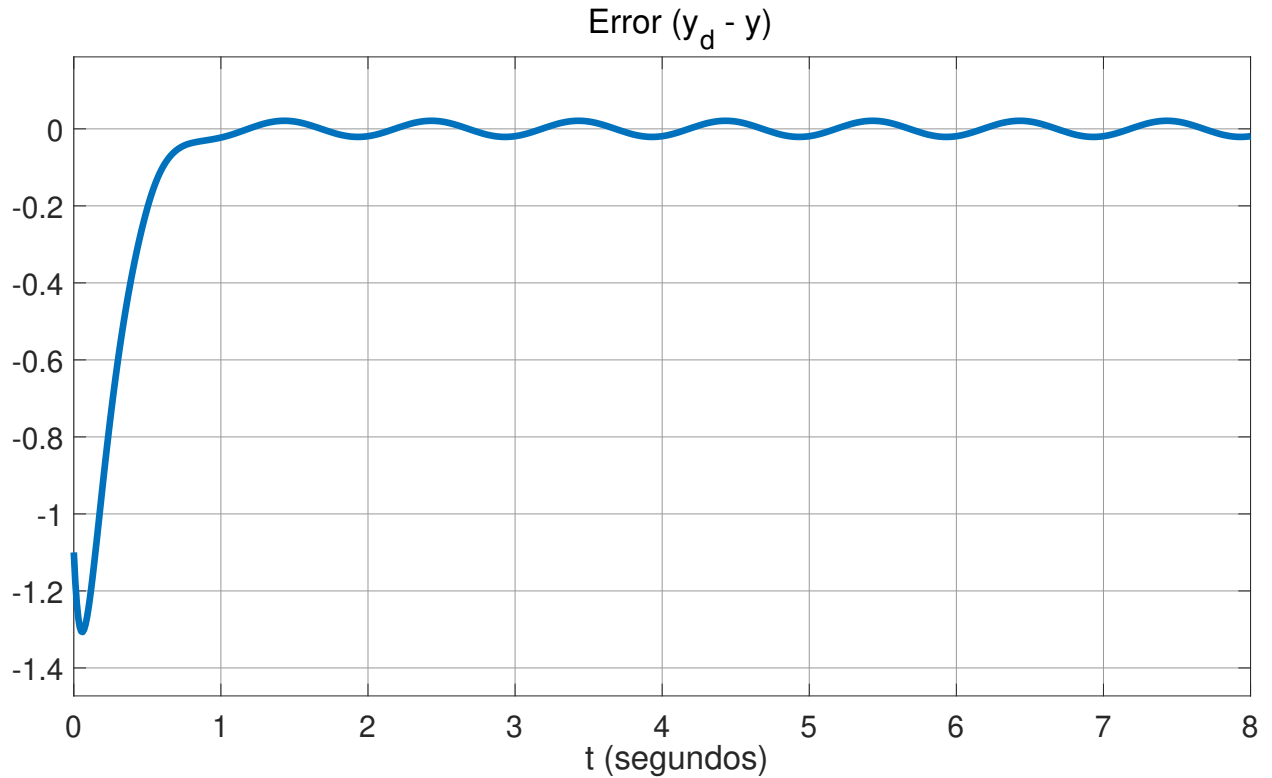


**Figura 24.** Error entre la salida deseada  $y_d$  y la salida y del sistema (104).

Como se mencionó, si se inyecta a  $\hat{\gamma}_s$  en el control local, se tiene una mejora en el error de referencia  $y_d - y$ , por lo que el control local toma la siguiente forma:

$$u_{l,s} = \frac{1}{I}(v(e) - \hat{\gamma}_s). \quad (107)$$

En la figura 26 se muestra al error de referencia con la inyección  $\hat{\gamma}_s$ , como se puede apreciar, la magnitud en estado estacionario es menor que si no se inyectara a  $\hat{\gamma}_s$ .



**Figura 25.** Error entre la salida deseada  $y_d$  y la salida  $y$  del sistema (104).

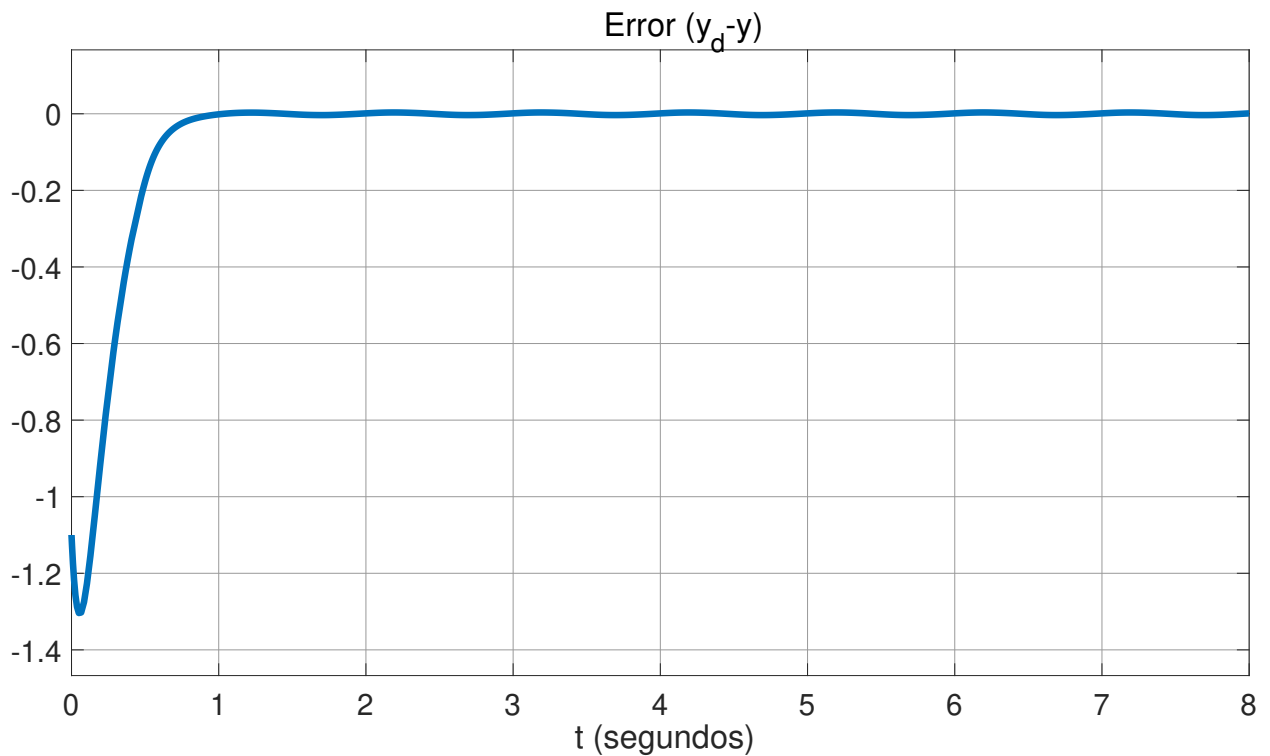
### 3.3.2.6. Sincronización robusta.

Considérese el esquema de sincronización de la sección 2.5, la matriz  $\mathcal{L}$  compuesta por los parámetros  $\beta_{i,j}$  (los cuales simbolizan a las conexiones existentes entre sistemas) de acuerdo con la figura 27 es:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \beta_{1,2} & -\beta_{1,2} \\ -\beta_{2,1} & \beta_{2,1} \end{bmatrix}. \quad (108)$$

La matriz  $\mathcal{L}_A$  (multiplicación entre  $\mathcal{L}$  y  $A$ ) es:

$$\mathcal{L}_A = \begin{bmatrix} \alpha_1^{-1}\beta_{1,2} & -\alpha_2^{-1}\beta_{1,2} \\ -\alpha_1^{-1}\beta_{2,1} & \alpha_2^{-1}\beta_{2,1} \end{bmatrix}. \quad (109)$$



**Figura 26.** Error entre la salida deseada  $y_d$  y la salida  $y$  del sistema (104) con inyección de  $\gamma_s$ .

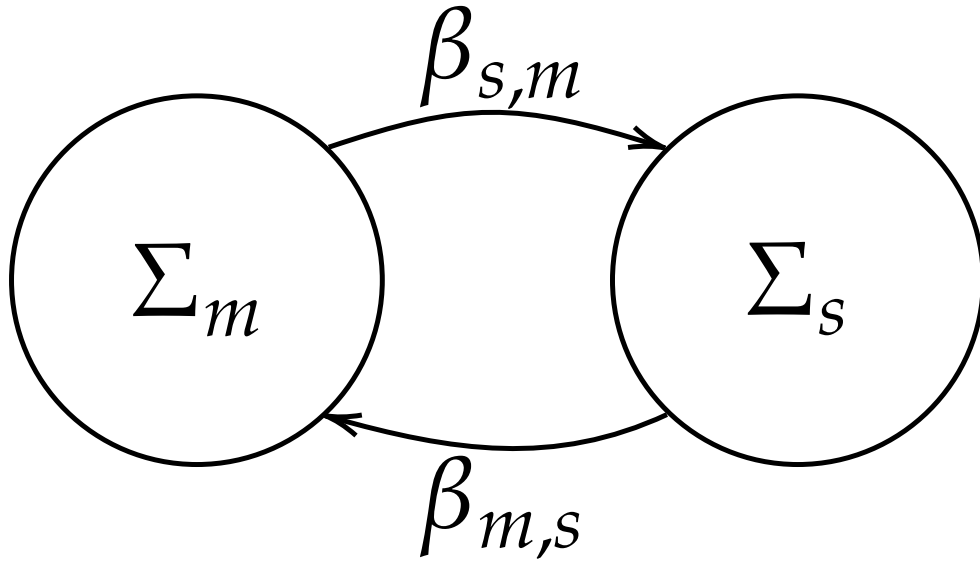
Teniendo a esta última matriz, el error (50) y su dinámica resultan:

$$\varepsilon(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1^{-1}\beta_{1,2} & -\alpha_2^{-1}\beta_{1,2} \\ -\alpha_1^{-1}\beta_{2,1} & \alpha_2^{-1}\beta_{2,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{3,m} \\ q_{3,s} \end{bmatrix}, \quad (110)$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1^{-1}\beta_{1,2} & -\alpha_2^{-1}\beta_{1,2} \\ -\alpha_1^{-1}\beta_{2,1} & \alpha_2^{-1}\beta_{2,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{3,m} \\ \dot{q}_{3,s} \end{bmatrix}. \quad (111)$$

El campo vectorial  $f$  correspondiente a las ruedas de reacción se obtiene de la ecuación (78) y además suponiendo que hay perturbaciones e incertidumbres paramétricas, el vector  $f$  de la ecuación (46) es:

$$f = \begin{bmatrix} Iu_{l,m} + \hat{\gamma}_m \\ Iu_{l,s} + \hat{\gamma}_s \end{bmatrix}. \quad (112)$$



**Figura 27.** Conexiones entre una red de 2 nodos, el parámetro  $\beta_{s,m}$  simboliza la conexión desde el sistema  $\Sigma_m$  hacia  $\Sigma_s$ , a su vez,  $\beta_{m,s}$  la conexión desde  $\Sigma_s$  hacia  $\Sigma_m$ . Si existe la conexión  $\beta_{i,j}$  entonces  $\beta_{i,j} > 0$  de otra manera es cero.

Las funciones  $\hat{\gamma}_m$  y  $\hat{\gamma}_s$  son estimadas con las ecuaciones (55) y (56). Las matrices  $C_p$  y  $C_v$  de la ecuación (51) son:

$$C_p = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}, \quad (113)$$

$$C_v = \begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}. \quad (114)$$

La matriz  $T$  de la ecuación (52) se constituye de los vectores propios de  $\mathcal{L}_A$ :

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{m,s}}{\sqrt{\beta_{m,s}^2 + \beta_{s,m}^2}} & \frac{1}{\alpha_m \sqrt{\alpha_m^{-2} + \alpha_s^{-2}}} \\ -\frac{\beta_{s,m}}{\sqrt{\beta_{m,s}^2 + \beta_{s,m}^2}} & \frac{1}{\alpha_m^{-2} \alpha_s^{-1} \sqrt{\alpha_m^{-2} + \alpha_s^{-2}}} \end{bmatrix}. \quad (115)$$

La inversa de  $T$  es igual que su transpuesta:

$$T^{-1} = T' = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{m,s}}{\sqrt{\beta_{m,s}^2 + \beta_{s,m}^2}} & -\frac{\beta_{s,m}}{\sqrt{\beta_{m,s}^2 + \beta_{s,m}^2}} \\ \frac{1}{\alpha_m \sqrt{\alpha_m^{-2} + \alpha_s^{-2}}} & \frac{1}{\alpha_m^{-2} \alpha_s^{-1} \sqrt{\alpha_m^{-2} + \alpha_s^{-2}}} \end{bmatrix}. \quad (116)$$

De la ecuación (51) solamente se puede extraer a un control independiente, por lo que, en el caso de sincronización unidireccional, en fase y en anti-fase, se puede utilizar a esta ecuación sin problemas, dado que  $u_{z,s} = 0$ . Si se requiere sincronizar en configuración bidireccional, resolviendo a la ecuación (53) se encuentra que los controles  $u_{z,m} = u_{z,s}$ , por lo que es suficiente encontrar un solo control independiente. Resolviendo a (51) se tiene al control sincronizante de manera general:

$$u_{z,i} = \left[ \frac{\alpha_m}{\alpha_s} \left( \hat{\gamma}_s + b_s T_s^{in} + pq_{3,s} + v\dot{q}_{3,s} \right) \right] - \left( \hat{\gamma}_m + b_m T_m^{in} + pq_{3,m} + v\dot{q}_{3,m} \right). \quad (117)$$

En la tabla 6 se muestran los distintos controladores para cada una de las distintas configuraciones suponiendo que  $\alpha_m = \alpha_s = 1$ .

**Tabla 6.** Controles sincronizantes robustos para distintas configuraciones.

Configuración		Controlador sincronizante
Unidireccional	Fase	$v_m = 0$
		$v_s = \left( \hat{\gamma}_s + b_s T_s^{in} + pq_{3,s} + v\dot{q}_{3,s} \right) - \left( \hat{\gamma}_m + b_m T_m^{in} + pq_{3,m} + v\dot{q}_{3,m} \right)$
	Anti-fase	$v_m = 0$
		$v_s = - \left( \hat{\gamma}_s + b_s T_s^{in} + pq_{3,s} + v\dot{q}_{3,s} \right) - \left( \hat{\gamma}_m + b_m T_m^{in} + pq_{3,m} + v\dot{q}_{3,m} \right)$
Bidireccional	Fase	$v_m = \left( \hat{\gamma}_s + b_s T_s^{in} + pq_{3,s} + v\dot{q}_{3,s} \right) - \left( \hat{\gamma}_m + b_m T_m^{in} + pq_{3,m} + v\dot{q}_{3,m} \right)$ $v_s = \left( \hat{\gamma}_s + b_s T_s^{in} + pq_{3,s} + v\dot{q}_{3,s} \right) - \left( \hat{\gamma}_m + b_m T_m^{in} + pq_{3,m} + v\dot{q}_{3,m} \right)$

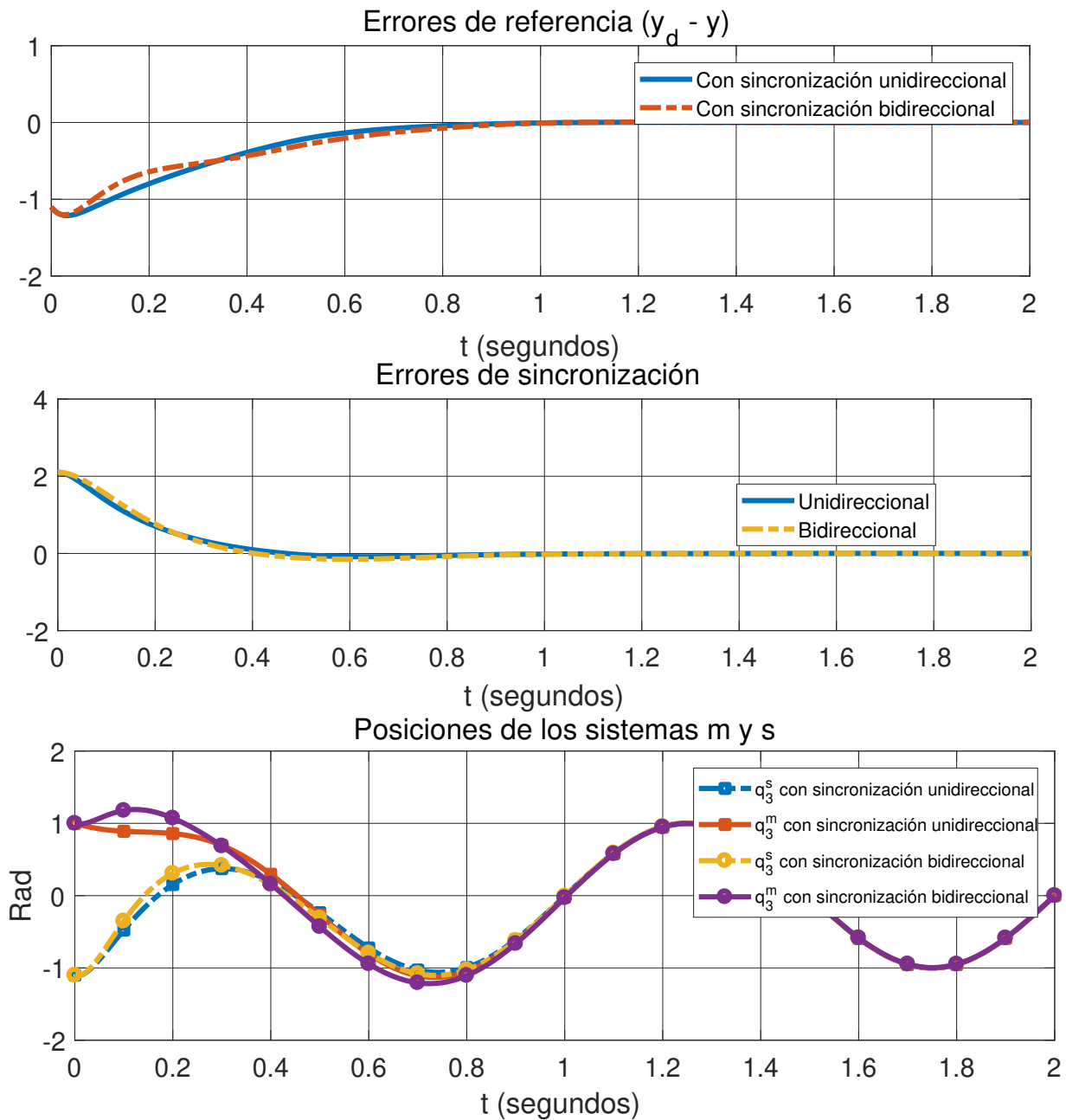
A continuación se muestran los resultados numéricos de la sincronización de dos ruedas de reacción en las configuraciones de la tabla 6.

### 3.3.2.7. Sincronización robusta en sus distintas configuraciones.

En la figura 28 se muestran los errores de sincronización en las configuraciones unidireccional y bidireccional, al igual que los errores de seguimiento, además a las posiciones de los sistemas  $m$  y  $s$  para las configuraciones mencionadas. En ambos casos se logra la sincronización de las posiciones y el seguimiento de la señal de referencia.

En la figura 29 se muestran los errores de seguimiento de la señal de referencia para distintas combinaciones entre sincronización unidireccional, bidireccional, con in-

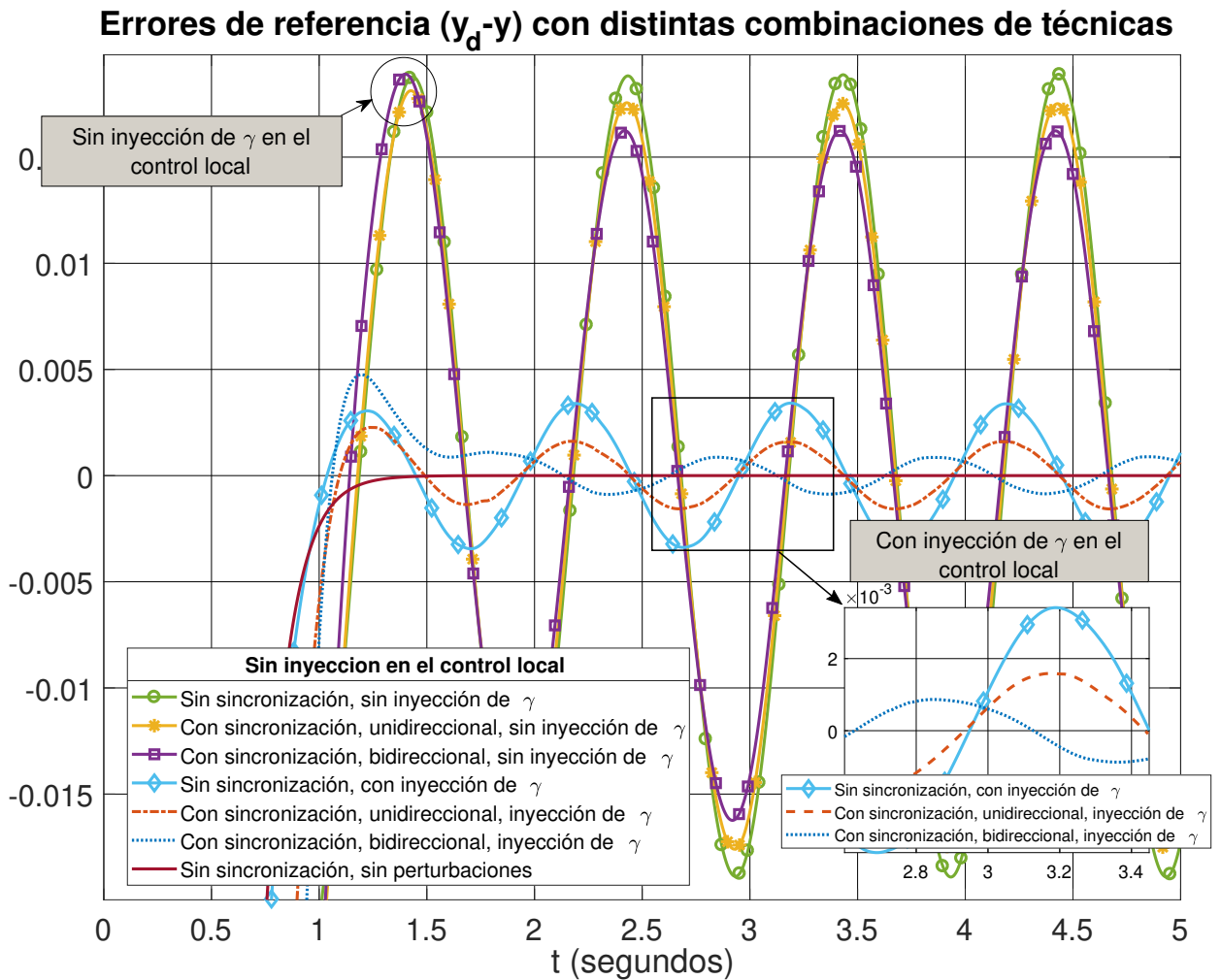




**Figura 28.** Sincronización robusta bidireccional.  $p = 0.1$ ,  $v = 0.1$

yección de la estimación de perturbación en el control local, y sin inyección. Como se puede apreciar, los errores en estado estacionario de mayor magnitud, son aquellos en donde no hay inyección de  $\hat{\gamma}_s$  en el control local; entre los errores de menor magnitud en estado estacionario se destaca a aquellos en donde existe sincronización entre los sistemas, en donde, la configuración bidireccional tiene la menor.

En la figura 30 se muestra el error de sincronización en la configuración unidireccional en antifase, además de las posiciones de los sistemas  $m$  y  $s$ .

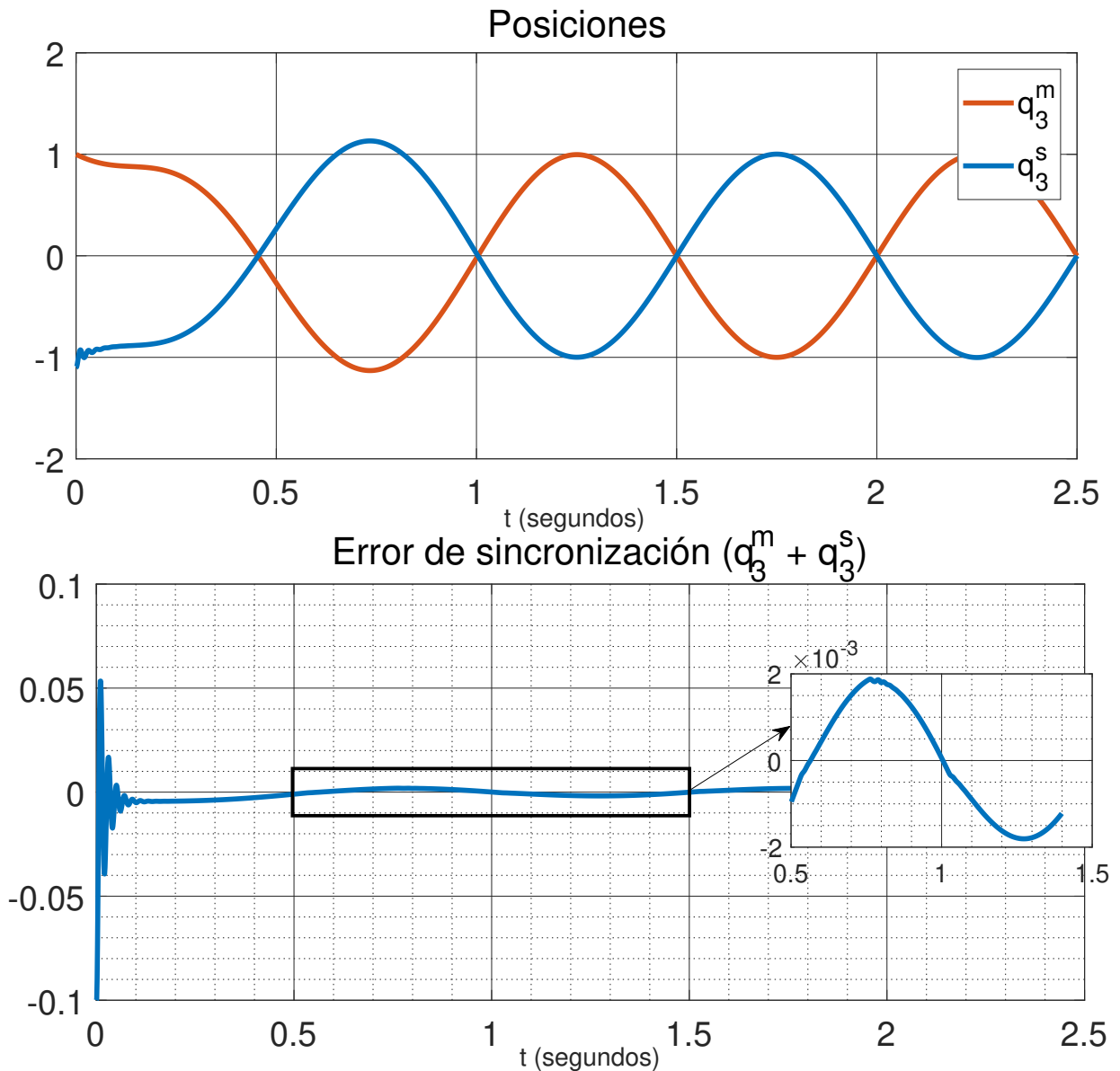


**Figura 29.** Sincronización robusta bidireccional.  $p = 0.1$ ,  $v = 0.1$

### 3.4. Conclusiones.

Es posible sincronizar con el acoplamiento estático unidireccional y bidireccional, sin embargo, los sistemas del error en lazo abierto (esto sucede cuando la diferencia de los controles es igual a cero o cuando los controles locales son también igual a cero) para estos acoplamientos son marginalmente estables. Esto quiere decir que si existe alguna perturbación acotada, eventualmente puede haber inestabilidad en los sistemas.

Es posible sincronizar con el acoplamiento dinámico unidireccional y bidireccional, sin embargo, los sistemas del error en lazo abierto para estos acoplamientos son no estables. Esto significa que si los controles son iguales entre sí, o iguales a cero, los



**Figura 30.** Sincronización robusta unidireccional.  $p = 100 \times 10^3$ ,  $v = 100$ .

sistemas serán inestables.

No es mejor el dinámico al estático en el sentido de que el sistema del error sea estable y en que los parámetros de sintonización para el acoplamiento dinámico permitan que se mejore el rendimiento del control sincronizante. En otras palabras, el acoplamiento dinámico para estos casos, no ofrece prestaciones superiores que el acoplamiento estático.

Además de que sea posible sincronizar a estos sistemas con el algoritmo de sincronización robusta, en conjunto con el observador robusto, estos ofrecen prestaciones

frente a perturbaciones y dinámicas no modeladas.

La estimación de las perturbaciones otorgada por el observador robusto se puede aprovechar para mejorar el rendimiento del control local, reduciendo así a los errores de sincronización y de referencia.

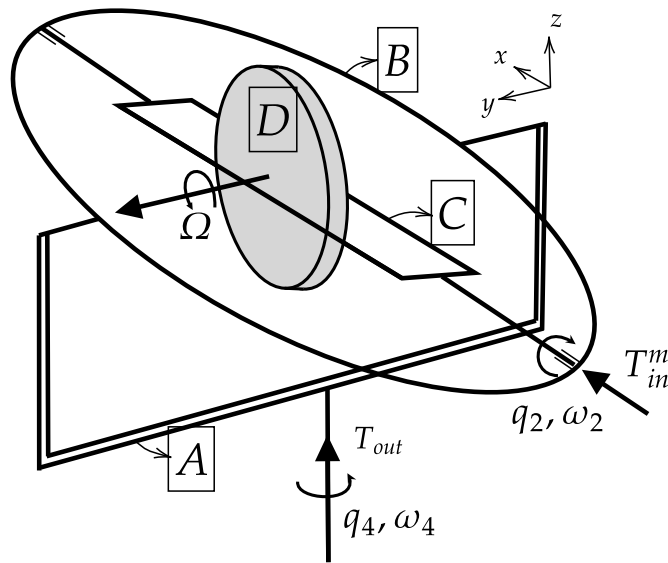
## Capítulo 4. Giroscopio controlador de momento.

### 4.1. Introducción.

En este capítulo se describen a los modelos de un giroscopio controlador de momento, un algoritmo para obtener la tasa angular de los marcos de este y se obtuvieron resultados numéricos. Se encontró un observador robusto, y algoritmos de sincronización robusta para el marco externo del giroscopio.

### 4.2. Modelos.

En Parks (s.f) se presenta el modelo del giroscopio controlador de momento ilustrado en la figura 31 y en el conjunto de ecuaciones (118) y (119) descrito por el siguiente



**Figura 31.** Giroscopio controlador de momento. El marco  $B$  está unido al marco  $A$  y el disco  $D$  al marco  $C$ ; el disco tiene una velocidad constante  $\Omega$ , cuando se introduce el par  $T_{in}^m$ , los cuerpos  $C$  y  $D$  giran, lo que produce un par de salida  $T_{out}$ .

conjunto de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q}_{4,m} \\ \dot{\omega}_{2,m} \\ \dot{\omega}_{4,m} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{J_D \Omega}{I_C + I_D} \\ 0 & -\frac{J_D \Omega}{I_D + K_A + K_B + K_C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{4,m} \\ \omega_{2,m} \\ \omega_{4,m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_C + I_D} \\ 0 \end{bmatrix} T_{in}^m \\ \begin{bmatrix} \dot{q}_{2,m} \\ \dot{\omega}_{2,m} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-(J_D \Omega)^2}{(I_D + K_A + K_B + K_C)(I_C + I_D)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{2,m} \\ \omega_{2,m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_C + I_D} \end{bmatrix} T_{in}^m \end{aligned} \right\} \text{Sistema } m \quad (118)$$

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q}_{4,s} \\ \dot{\omega}_{2,s} \\ \dot{\omega}_{4,s} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{J_D \Omega}{I_C + I_D} \\ 0 & -\frac{J_D \Omega}{I_D + K_A + K_B + K_C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{4,s} \\ \omega_{2,s} \\ \omega_{4,s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_C + I_D} \\ 0 \end{bmatrix} T_{in}^s \\ \begin{bmatrix} \dot{q}_{2,s} \\ \dot{\omega}_{2,s} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-(J_D \Omega)^2}{I_D + K_A + K_B + K_C(I_C + I_D)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{2,s} \\ \omega_{2,s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_C + I_D} \end{bmatrix} T_{in}^s \end{aligned} \right\} \text{Sistema } s \quad (119)$$

en donde  $q_{2,i}$  y  $\omega_{2,i}$  (con  $i = m, s$ ) son las posiciones y velocidades del marco  $C$  de los sistemas  $m$  y  $s$ , respectivamente y  $q_{4,i}$  y  $\omega_{4,i}$  son las posiciones y velocidades del marco  $A$  de los sistemas  $m$  y  $s$ , respectivamente.  $K_A$  corresponde al factor de inercia del marco  $A$  en torno al eje  $z$ ;  $K_B$  corresponde al factor de inercia del marco  $B$  en torno al eje  $z$ ;  $I_C$  y  $K_C$  corresponden a los factores de inercia del marco  $C$  en torno al eje  $x$  y  $z$ , respectivamente; los parámetros  $I_D$  y  $J_D$  corresponden a los factores de inercia del disco  $D$  entorno a los ejes  $x$  y  $y$ , respectivamente (los valores para cada factor se ilustran en la tabla 7). Nótese que la entrada de control  $T_{in}^i$  es la misma para para cada par de sistemas, por lo que el marco  $A$  es subactuado, de esto último, surge el problema de generar una señal de referencia (también conocida como tasa angular) para que el marco  $C$  genere un par  $T_{out}$  de tal manera que el marco  $A$  se oriente en una dirección deseada, a este problema también se le conoce como lógica de dirección o “steering logic” en inglés.

En Bang *et al.* (2004) se presenta un algoritmo para encontrar una señal de par para orientar a un vehículo espacial hacia una dirección deseada. Con la obtención de esta señal surge un problema similar al descrito anteriormente; se requiere de otra señal que comande a los marcos del giroscopio controlador de momento, de tal manera que los movimientos de estos marcos generen el par deseado.

**Tabla 7.** Valores de inercia para los sistemas (118) y (119) (Parks, s.f).

Elemento	Valor ( $kg - m^2$ )
$I_D$	0.015
$J_D$	0.027
$I_C$	0.0092
$K_C$	0.022
$K_A$	0.067
$K_B$	0.030

En Dzielski *et al.* (1988) se presenta un modelo cinemático de un giroscopio controlador de momento, el cual es elemento para resolver el problema de lógica de dirección.

En Wie (2005) se presenta un algoritmo robusto de escape a singularidades que resuelve el problema de dirección.

#### **4.3. Obtención de la tasa angular mediante la generación de pares.**

Para orientar a un vehículo espacial, es necesario aplicarle pares, los cuales dependen de la orientación y velocidad inicial del vehículo así como de su inercia. La orientación es una posición relativa de un sistema de referencia con respecto a otro que está fijo en el espacio. Existen varias representaciones a estas posiciones relativas, entre ellas los cuaterniones, los cuales son útiles para representar rotaciones en tres dimensiones y su derivada se interpreta como la orientación de un objeto en

el espacio. A esta derivada también se le conoce como ecuación de propagación del cuaternión (Canseco, 2001), en el contexto de la referencia, esta derivada es utilizada para conocer la orientación de un manipulador robótico. En Dzielski *et al.* (1988) la derivada del cuaternión es utilizada para representar la orientación de un vehículo espacial. A continuación se presenta una introducción a los cuaterniones.

#### 4.3.1. Cuaterniones.

Los ángulos de Euler contienen singularidades al momento de calcular ángulos de orientación con respecto a un sistema de referencia (problema inverso) (Canseco, 2001), a este fenómeno se le conoce como "gimball lock" (bloqueo de marco en español) y sucede cuando dos marcos del giroscopio están alineados, lo que dificulta el cálculo exacto de la posición del vehículo. Estas singularidades se evitan parcialmente al evitar pasar por estos ángulos (véase a España (2016)); sin embargo es posible realizar estos cálculos sin tener un problema de singularidad. Los cuaterniones son especialmente útiles para transformar o rotar un vector o punto de un sistema de referencia a otro, además la interpretación del cuaternión desde el punto de vista escalar-vector resulta cómodo, ya que a diferencia de los ángulos de Euler, es posible encontrar un eje de giro y un sólo ángulo para llegar a una posición deseada desde un punto inicial; de hecho es posible encontrar un cuaternión teniendo solamente a dos puntos en el espacio (punto inicial y punto de llegada). Se definen a los cuaterniones unitarios como:

$$q = \{\eta, \epsilon\}, \quad (120)$$

con  $\eta, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon = [\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3]^T \in \mathbb{R}^3$ ,  $\eta$  representa a la parte escalar del cuaternión, mientras que  $\epsilon$  representa la parte vectorial o imaginaria.

Una propiedad importante de los cuaterniones unitarios es su magnitud; que es igual a 1:

$$\|q\| = \eta^2 + \|\epsilon\|^2 = 1. \quad (121)$$



La multiplicación entre dos cuaterniones  $p$  y  $q$  es:

$$\begin{aligned}
 pq = & \eta_p \eta_q - \epsilon_{1,p} \epsilon_{1,q} - \epsilon_{2,p} \epsilon_{2,q} - \epsilon_{3,p} \epsilon_{3,q} \\
 & + (\eta_p \epsilon_{1,q} + \epsilon_{1,p} \eta_q + \epsilon_{2,p} \epsilon_{3,q} - \epsilon_{3,p} \epsilon_{2,q}) i \\
 & + (\eta_p \epsilon_{2,q} - \epsilon_{1,p} \epsilon_{3,q} + \epsilon_{2,p} \eta_q + \epsilon_{3,p} \epsilon_{1,q}) j \\
 & + (\eta_p \epsilon_{3,q} + \epsilon_{1,p} \epsilon_{2,q} - \epsilon_{2,p} \epsilon_{1,q} + \epsilon_{3,p} \eta_q) k.
 \end{aligned} \tag{122}$$

En donde  $\epsilon_{1,p} \dots \epsilon_{3,p}$  son los valores vectoriales de  $p$  y  $\epsilon_{1,q} \dots \epsilon_{3,q}$  son los valores vectoriales de  $q$ ,  $i$ ,  $j$  y  $k$  son las componentes vectoriales del cuaternión.

La representación de un punto en el espacio en notación de cuaternión se hace con la parte escalar  $\eta = 0$  como:

$$v = \{0, v_1, v_2, v_3\}. \tag{123}$$

La rotación de  $v$  se realiza mediante la transformación  $g(v)$  (Canseco, 2001):

$$g(v) = qvq^*, \tag{124}$$

la parte vectorial de esta multiplicación está dada por:

$$(\eta^2 - \epsilon^T \epsilon)v + 2\eta(\epsilon \times v) + 2\epsilon(\epsilon^T v). \tag{125}$$

El conjugado de  $q$  ( $q^*$ ) es también el inverso multiplicativo de  $q$  (Dzielski *et al.*, 1988):

$$q^* = q^{-1}. \tag{126}$$

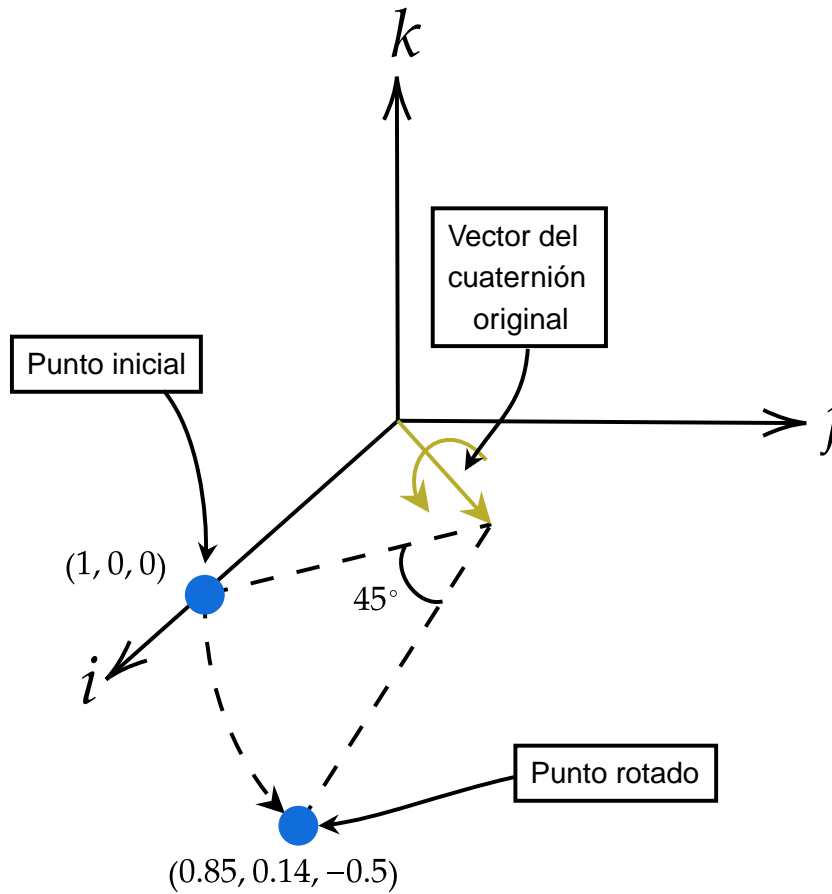
La expresión (120) también se puede expresar de la siguiente manera:

$$q = \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\epsilon \right\}. \tag{127}$$

En donde  $\theta$  representa el ángulo de giro sobre el eje  $e$  expresado en coordenadas del sistema de referencia inercial.

En la figura 32 se puede ver un ejemplo de la transformación (124); un punto  $v$  con coordenadas  $v = \{0, 1, 0, 0\}$  es multiplicado por el cuaternión  $q = \left\{ \cos\left(\frac{45}{2}\right), \sin\left(\frac{45}{2}\right)(.7071, .7071, 0) \right\}$ , y luego por su conjugado, lo que resulta en

una rotación de  $45^\circ$  alrededor del vector  $\epsilon = [.7071, .7071, 0]$ . Un problema más com-



**Figura 32.** Punto con coordenadas en  $(1, 0, 0)$  rotado  $45^\circ$  alrededor del eje  $(0.7071, 0.7071, 0)$

plicado es determinar qué cuaternión rota al punto  $v$  hacia  $g(v)$  ya que existen varias soluciones para una misma transformación; una de ellas se encuentra cuando se considera al vector ortogonal que existe entre los puntos  $v$  y  $g(v)$ . Teniendo a ambos puntos como:

$$v = \{0, v_1, v_2, v_3\}, \quad (128)$$

$$g(v) = \{0, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}. \quad (129)$$

La parte vectorial se determina mediante el producto cruz entre la parte vectorial de  $v$  y  $g(v)$ :

$$v^\perp = \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{\vec{v} \times \vec{g}(v)}{\|\vec{v} \times \vec{g}(v)\|} \right\} = \{\eta^\perp, v_1^\perp, v_2^\perp, v_3^\perp\}. \quad (130)$$

Para calcular a  $\eta^\perp$  se puede utilizar a la propiedad del ángulo que existe entre dos vectores que están en el mismo plano y a las propiedades trigonométricas del medio ángulo:

$$\cos(\theta) = \frac{\tilde{v} \cdot \tilde{g}(v)}{\|\tilde{v}\| \cdot \|\tilde{g}(v)\|} \quad (131)$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta)}{2}}, \quad (132)$$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}}, \quad (133)$$

reemplazando a (131) en (132) y en (133) se tiene a  $v^\perp$  como:

$$v^\perp = \left\{ \sqrt{\frac{\|\tilde{v}\| \cdot \|\tilde{g}(v)\| + \tilde{v} \cdot \tilde{g}(v)}{2\|\tilde{v}\| \cdot \|\tilde{g}(v)\|}}, \sqrt{\frac{\|\tilde{v}\| \cdot \|\tilde{g}(v)\| - \tilde{v} \cdot \tilde{g}(v)}{2\|\tilde{v}\| \cdot \|\tilde{g}(v)\|}} \left[ \frac{\tilde{v} \times \tilde{g}(v)}{\|\tilde{v} \times \tilde{g}(v)\|} \right] \right\}. \quad (134)$$

En la figura 33 se muestra al ejemplo anterior, teniendo a  $v$  y a  $g(v)$  como:

$$v = \{0, 1, 0, 0\}, \quad (135)$$

$$g(v) = \{0, 0.8535, 0.1464, -0.5\}. \quad (136)$$

Utilizando a (134) y se obtiene al cuaternión que describe a la rotación de  $v$  hacia  $v(g)$ :

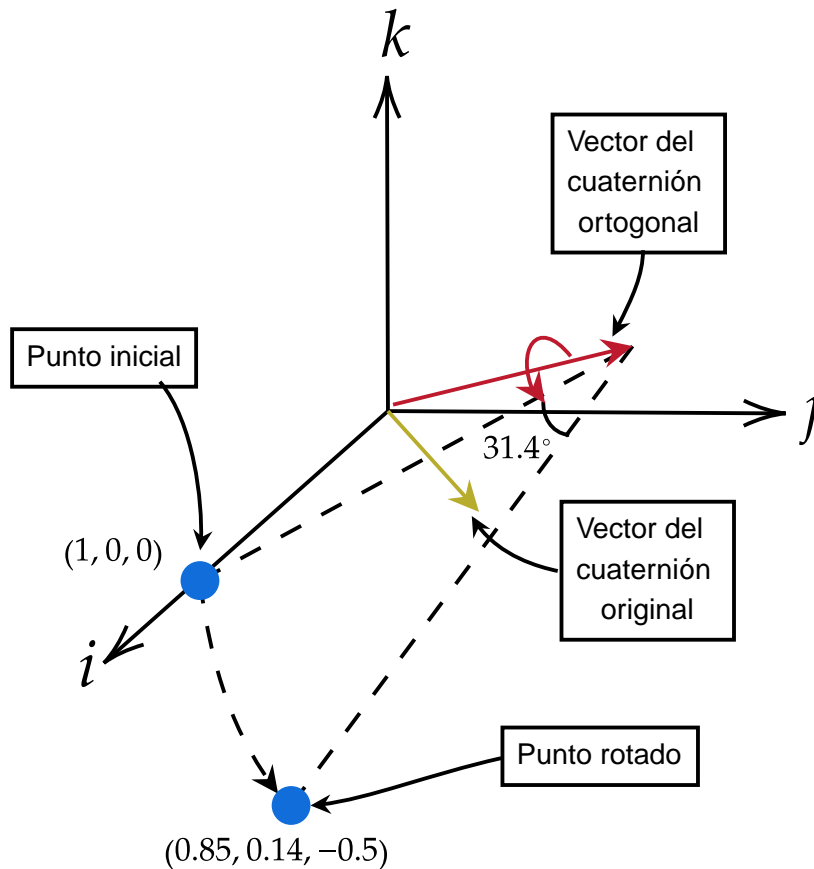
$$v^\perp = \{0.9626, 0, 0.2596, 0.0760\}. \quad (137)$$

Como se puede mostrar en la figura 33 existe más de un cuaternión que es equivalente a una rotación, y uno de esos cuaterniones se puede determinar al obtener el vector ortogonal.

#### 4.3.2. Controlador linealizante por retroalimentación.

En Dzielski *et al.* (1988) la derivada del cuaternión está dada por la siguiente expresión:

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \{0, I^{-1}(q^* h^l q) - h_{cmg}(\theta)\} q, \quad (138)$$



**Figura 33.** Punto con coordenadas en  $(0, 1, 0, 0)$  es rotado hacia  $g(v) = \{0, 0.8535, 0.1464, -0.5\}$  con un cuaternión calculado con un vector ortogonal a estos dos puntos. Nótese que con ambos cuaterniones es posible realizar una misma rotación. El vector amarillo representa a la parte vectorial de  $v^\perp$  y el rojo a la parte vectorial de  $q$ .

donde  $I$  es la matriz de inercia del vehículo,  $q$  es un cuaternión unitario,  $h^I$  es el momento angular de la nave con respecto al sistema de referencia fijo,  $h_{cmg}$  es el momento angular del giroscopio con respecto al sistema fijo en el vehículo,  $\theta$  representa a los ángulos de los marcos del giroscopio

Como se puede observar en la ecuación (138) la orientación del vehículo depende de su momento angular total, del momento angular que proporciona el giroscopio integrado y este a su vez de los ángulos de sus marcos. En Bang *et al.* (2004) se utiliza también la derivada del cuaternión y además la ecuación dinámica de un satélite:

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = u, \quad (139)$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular del vehículo con respecto al sistema de referencia fijo

en él,  $u$  es la entrada de control (par).

Con este conjunto de ecuaciones se puede representar la dinámica de un satélite en términos de su orientación y de los momentos angulares.

En Bang *et al.* (2004) se propone un controlador linealizante por retroalimentación. La técnica consiste en encontrar una relación diferencial lineal entre la salida y la entrada, o dicho en otras palabras derivar la salida múltiples veces hasta que la entrada de control  $u$  aparezca, y que ésta cancele las no linealidades Slotine y Li (1991). Considérese un sistema con múltiple entrada y múltiple salida de la forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (140)$$

$$y(t) = h(x(t)), \quad (141)$$

donde  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones vectoriales en  $\mathbb{R}^n$ . Como se mencionó antes se tiene que derivar a la salida múltiples veces:

$$\begin{aligned} y_i^{(1)} &= L_f h_i(x), \\ y_i^{(2)} &= L_f^{\rho_i-1} h_i(x), \\ &\vdots \\ y_i^{(\rho_i)} &= L_f^{\rho_i} h_i(x) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_f^{\rho_i-1} h_i(x) u_j, \end{aligned} \quad (142)$$

los términos  $L_f^k h(x)$  se les conoce como la derivada de Lie. De la ecuación (142) el término  $L_{g_j} L_f^{\rho_i-1} h_i(x) u_j$  tiene que ser distinto de cero para alguna  $j$ , esto quiere decir, que de cumplir con esa condición el sistema tiene un grado relativo bien definido y que se puede encontrar la relación diferencial con esta técnica. A esta ecuación se le

puede separar en un vector y una matriz:

$$F(x) = \begin{bmatrix} L_f^{\rho_1} h_1(x) \\ L_f^{\rho_2} h_2(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m} h_m(x) \end{bmatrix}, \quad (143)$$

$$G(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}, \quad (144)$$

en donde  $m$  es el tamaño del vector  $h(x)$ . Nótese que las ecuaciones (143) y (144) en conjunto crean a la ecuación (142). Para completar esta estructura sólo falta multiplicar a  $G(x)$  por  $u$ , obteniendo así:

$$Y^{(\rho)} = F(x) + G(x)u, \quad (145)$$

la entrada  $u$  cancela las no linealidades e impone una entrada de control auxiliar  $v$ :

$$u = G^{-1}(F(x) + v), \quad (146)$$

por lo que  $Y^\rho = v$ . A los términos  $G^{-1}(F(x))$  y  $G^{-1}v$  se les puede renombrar respectivamente como  $\alpha(x) + \beta(x)v$ .

El controlador para el sistema (138) y (139) propuesto en Bang *et al.* (2004) el cual

cumple con la forma (146), es el siguiente:

$$u = \beta^{-1}[\ddot{r}(t) - \alpha(t) - c_1(\dot{y}(t) - \dot{r}(t)) - c_0(y(t) - r(t))], \quad (147)$$

$$\alpha = \frac{1}{4}\omega \times (\omega \times q_{13}) - \frac{1}{4}\omega^T q_{13}\omega + \frac{1}{2}(\tilde{q} + q_4 I_{3 \times 3})(I^{-1}\omega) \times (I\omega), \quad (148)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\tilde{q} + q_4 I_{3 \times 3})I^{-1}um, \quad (149)$$

$$r = q_{13}^0 + (q_{13}^f - q_{13}^0)(1 - e^{-t/\tau}), \quad (150)$$

$$\dot{r} = (q_{13}^f - q_{13}^0)\left(\frac{1}{\tau}\right)(e^{-t/\tau}), \quad (151)$$

$$\ddot{r} = (q_{13}^f - q_{13}^0)\left(\frac{1}{\tau^2}\right)(e^{-t/\tau}), \quad (152)$$

$$\dot{y} = q_{i3} = -\frac{1}{2}\omega \times q_{13} + \frac{1}{2}q_4\omega, \quad (153)$$

$$\tilde{q} = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (154)$$

donde el término  $r$  y sus derivadas corresponden a la referencia a seguir por el sistema,  $c_1$  y  $c_0$  son constantes,  $q_{13}^0$  y  $q_{13}^f$  es la parte vectorial del cuaternión inicial y el deseado respectivamente, y  $\tau$  es una constante de tiempo.

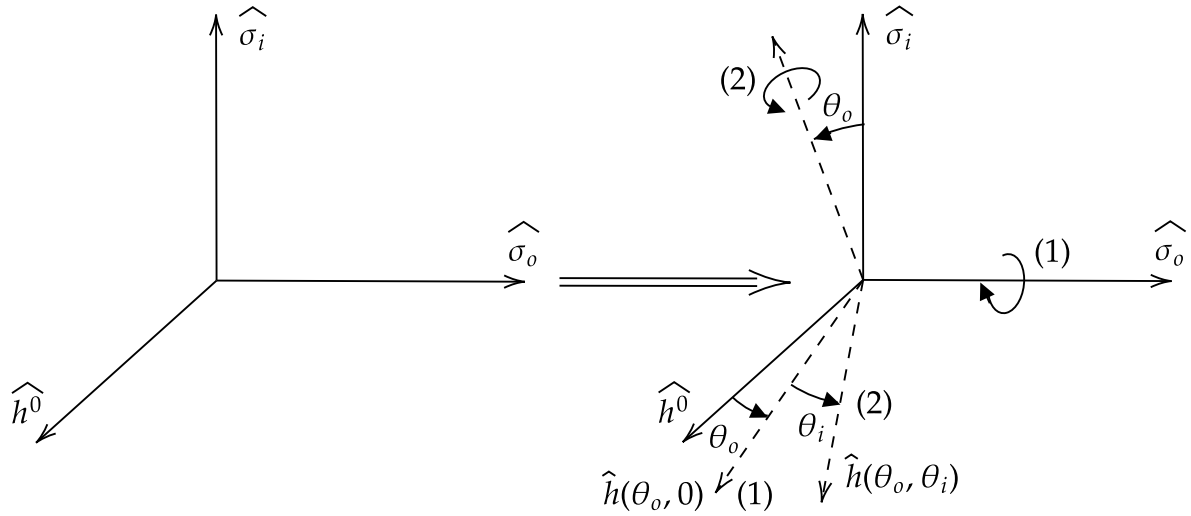
### 4.3.3. Modelo cinemático del giroscopio.

En Dzielski *et al.* (1988) se define al vector del momento angular en términos de los ángulos de los marcos que componen al giroscopio. El modelo se obtuvo realizando dos secuencias de giro, primero el marco externo y luego el interno de un giroscopio de 2 grados de libertad (ver figura 1); el sistema de referencia utilizado es cuando ambos ángulos  $\theta_o$  y  $\theta_i$  están fijos en cero (ver figura 34). Los vectores del momento angular en la primera y segunda secuencia están dados por :

$$\hat{h}(\theta_o, 0) = \cos(\theta_o)\hat{h}^0 - \sin(\theta_o)\hat{\sigma}_i, \quad (155)$$

$$\hat{h}(\theta_o, \theta_i) = \cos(\theta_i)\hat{h}(\theta_o, 0) + \sin(\theta_i)\hat{\sigma}_o. \quad (156)$$

Sustituyendo a 155 en 156 se tiene:



**Figura 34.** Obtención del modelo cinemático del giroscopio. La primer secuencia de movimiento sucede cuando se gira alrededor del eje  $\hat{\sigma}_o$ , el segundo en el eje  $\hat{\sigma}_i$  (Dzielski *et al.*, 1988).

$$\hat{h}(\theta_o, \theta_i) = \cos(\theta_i) [\cos(\theta_o)\hat{h}^0 - \sin(\theta_o)\hat{\sigma}_i] + \sin(\theta_i)\hat{\sigma}_o. \quad (157)$$

Escalando a (157) por  $h_{mag}$  se obtiene finalmente al vector de momento angular en términos de  $\theta_o$  y de  $\theta_i$ :

$$h_{cmg}(\theta_o, \theta_i) = h_{mag} \{ \cos(\theta_i) [\cos(\theta_o)\hat{h}^0 - \sin(\theta_o)\hat{\sigma}_i] + \sin(\theta_i)\hat{\sigma}_o \}. \quad (158)$$

La ecuación que describe a la dinámica de un vehículo espacial en términos del momento angular y de los ángulos del giroscopio está dada por (Dzielski *et al.*, 1988):

$$\tau = \dot{h} = \omega \times h + D[h_{cmg}(\theta)]\dot{\theta}. \quad (159)$$

La expresión  $D[h_{cmg}(\theta)]$  es el Jacobiano de la función vectorial que relaciona a los ángulos del giroscopio con la dirección del momento angular, en este caso es la ecuación (158). Dado que  $\tau = u$ , la ecuación (159) se puede igualar con la ecuación (139) y se obtiene:

$$I\dot{\omega} + \omega \times \overbrace{I\omega}^h = \omega \times h + D[h_{cmg}(\theta)]\dot{\theta}, \quad (160)$$

$$D[h_{cmg}(\theta)]\dot{\theta} = -I\dot{\omega} = \tau, \quad (161)$$



la cual es la relación entre el par y los ángulos del giroscopio.

#### 4.3.4. Lógica de dirección.

La ecuación (161) se puede escribir de la siguiente manera:

$$A\dot{x} = \tau, \quad (162)$$

donde  $A$  es la matriz Jacobiana mencionada anteriormente de dimensión de  $3 \times n$ ; a  $\dot{x}$  se le conoce como la lógica de dirección pseudoinversa; la dimensión de esta es igual al número de ángulos a desplazar en el giroscopio, o sea,  $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$  (Wie, 2005). La manera más sencilla de obtener una solución a la ecuación (162) es encontrar la pseudoinversa:

$$A^+ = A^T(AA^T)^{-1}. \quad (163)$$

Sin embargo, esta solución no es robusta ya que si  $AA^T$  no tiene rango completo la pseudoinversa no existe, y se dice que la lógica de dirección encontró un estado singular Wie (2005). En esta referencia se propone un algoritmo robusto para solucionar el problema:

$$A^\# = WA^T[AWA^T + V]^{-1}, \quad (164)$$

$$P^{-1} \equiv V = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon_3 & \epsilon_2 \\ \epsilon_3 & 1 & \epsilon_1 \\ \epsilon_2 & \epsilon_1 & 1 \end{bmatrix} > 0, \quad (165)$$

$$Q^{-1} \equiv W = \begin{bmatrix} W_1 & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & W_2 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & W_3 & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & W_4 \end{bmatrix} > 0, \quad (166)$$

$$\epsilon_i = \epsilon_o \text{sen}(\omega t + \phi_i), \quad (167)$$

$$\lambda = \lambda_0 e^{-\mu|AA^T|}. \quad (168)$$

### 4.3.5. Resultados numéricos

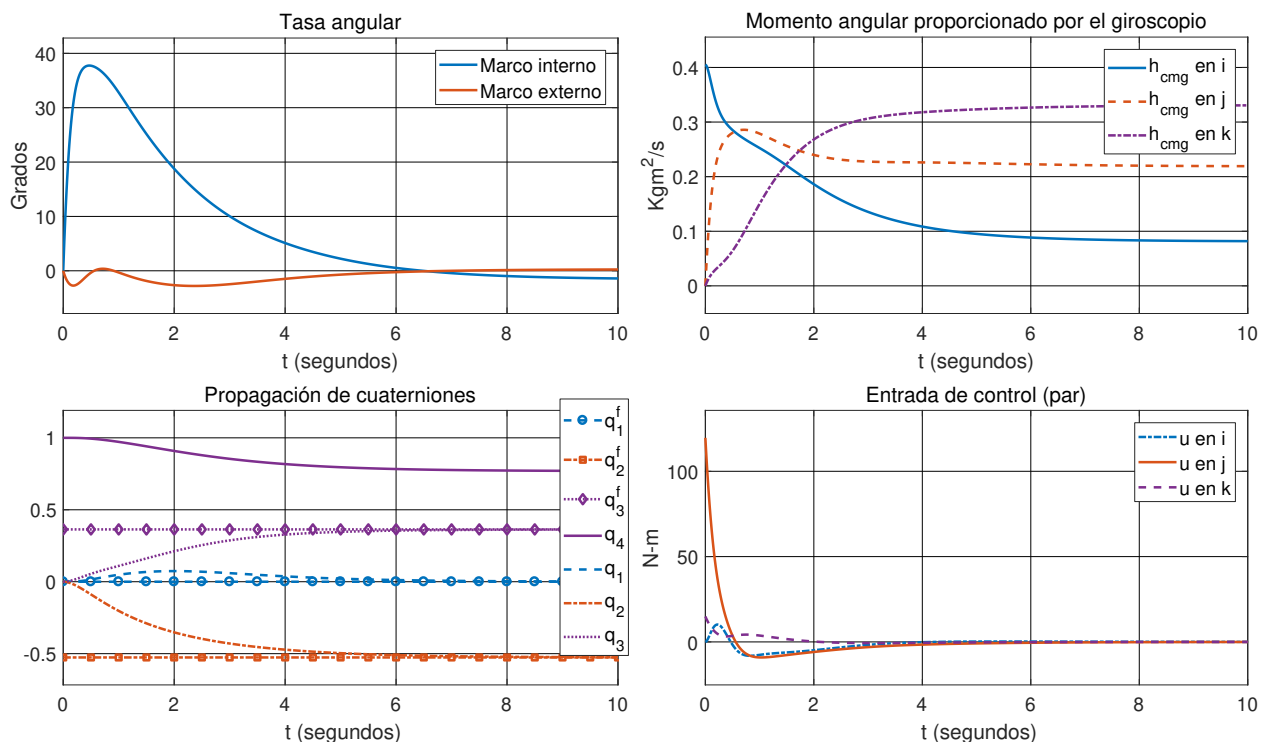
Se puso a prueba el controlador anterior junto con la solución al problema de dirección. Se realizaron 2 ejemplos; en ambos se introduce una señal de referencia para que el vehículo se oriente de acuerdo a esta. La condición inicial de orientación para ambos ejemplos es  $q_{13}^0 = \{1, 0, 0, 0\}$  y  $h_{mag} = 15$  y una matriz de inercia dada por:

$$I = \begin{bmatrix} 37.037 & 0 & 0 \\ 0 & -41.32 & 0 \\ 0 & 0 & 7.46 \end{bmatrix} \text{ kg} - \text{m}^2. \quad (169)$$

Para el primer caso, se supone que se quiere llegar a la coordenada  $(0.1816, 0.5590, 0.8090)$ , utilizando a la ecuación (134) se obtiene al cuaternión que describe a dicha rotación, la cual es la referencia a seguir por el controlador:

$$v^\perp = q^f = \{0.7697, 0, -0.5262, 0.3636\}. \quad (170)$$

En la figura 35 se muestra el resultado correspondiente. Para el segundo caso, se

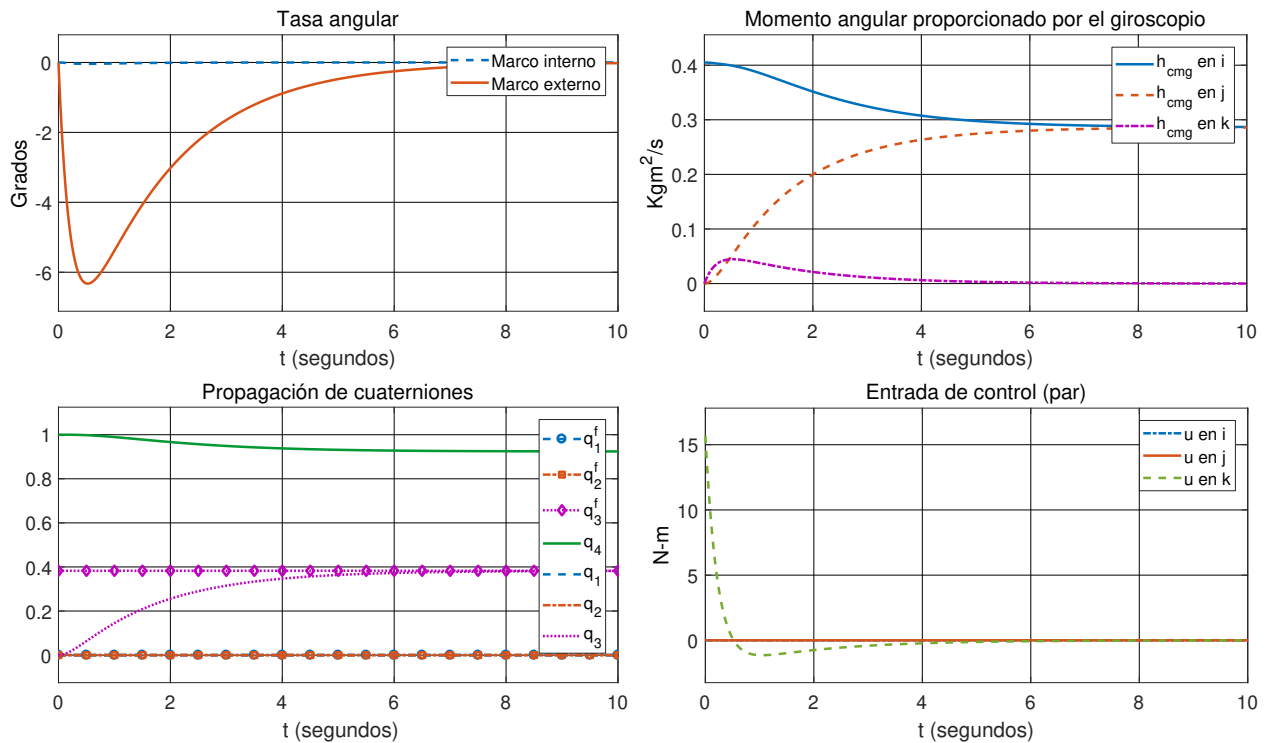


**Figura 35.** Gráfico sobre tasa angular y propagación del cuaternión con  $q_{13}^0 = \{1, 0, 0, 0\}$  y  $q_{1,3}^f = \{0.7697, 0, -0.5263, 0.3636\}$ .

quiere que el vehículo se oriente sobre el eje  $k$  con un ángulo de  $45^\circ$ , el cuaternión que describe a esta rotación es el siguiente:

$$v^\perp = q^f = \left\{ \cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right), \sin\left(\frac{45^\circ}{2}\right)[0, 0, 1] \right\} = \{0.9238, 0, 0, 0.3826\}. \quad (171)$$

En la figura 36 se muestra este resultado.



**Figura 36.** Gráfico sobre tasa angular y propagación del cuaternión con  $q_{13}^0 = \{1, 0, 0, 0\}$  y  $q_{1,3}^f = \{0.9238, 0, 0, 0.3826\}$ .

#### 4.4. Sincronización entre marcos del giroscopio de controlador de momento.

En la sección anterior se obtuvo la tasa angular para que los marcos de un giroscopio controlador de momento produzca pares necesarios para que un vehículo se oriente de manera deseada. El marco  $C$  de la figura 31 corresponde al marco externo de la figura 1, por lo que, si se orienta a este marco como en el ejemplo de la figura 36 la posición  $q_4$  de la figura 31 será similar a la posición del vehículo espacial. Para sincronizar a 2 de estos marcos se requiere primeramente un control local.

#### 4.4.1. Control local.-Seguimiento de la tasa angular por el giroscopio controlador de momento.

Para controlar al marco  $C$  anteriormente mencionado, se puede utilizar a la técnica de la sección 2.2. El modelo del marco  $C$  está dado por (ver conjunto de ecuaciones (118) y (119)):

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{2,m} \\ \dot{\omega}_{2,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-(J_D \Omega)^2}{(I_D + K_A + K_B + K_C)(I_C + I_D)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{2,m} \\ \omega_{2,m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_C + I_D} \end{bmatrix} T_{in}^m \quad (172)$$

Por lo que el control local 6 adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u_{l,m} &= \frac{1}{I_3} (v - I_2 q_{2,m}), \\ v &= \ddot{q}_{2,m}^{ref} - k_0 (q_{2,m} - q_{2,m}^{ref}) - k_1 (\dot{q}_{2,m} - \dot{q}_{2,m}^{ref}), \\ I_2 &= \frac{-(J_D \Omega)^2}{(I_D + K_A + K_B + K_C)(I_C + I_D)}, \\ I_3 &= \frac{1}{I_C + I_D}, \end{aligned} \quad (173)$$

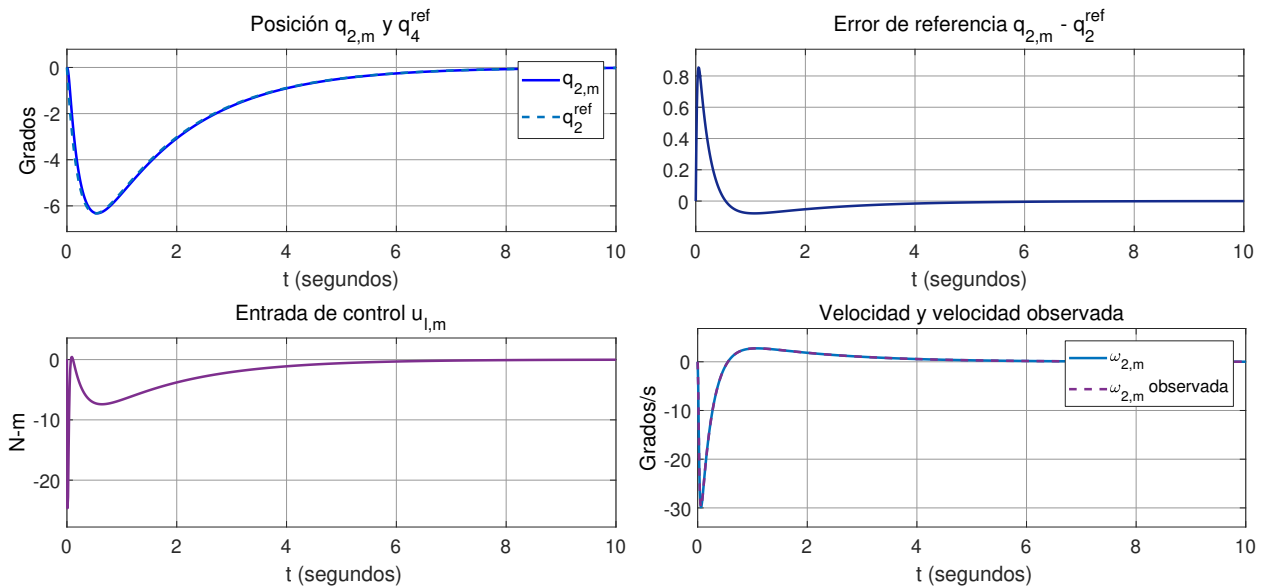
con  $k_0 = 10$  y  $k_1 = 2\sqrt{k_0}$ . En la figura 37 se muestra a la posición del marco  $C$ , al error de referencia y la entrada de control; también se muestra a la velocidad y velocidad observada, la cual se obtuvo utilizando el observador robusto de la sección 2.5.1 el cual tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \hat{q}_{2,m} &= \hat{\omega}_{2,m} + c_{1,m} (q_{2,m} - \hat{q}_{2,m}), \\ \hat{\omega}_{2,m} &= I_2 \hat{q}_2 + I_3 u_{l,m} + u_{z,m} + c_{2,m} (q_{2,m} - \hat{q}_{2,m}) + c_{3,m} \text{sign}(q_{2,m} - \hat{q}_{2,m}), \end{aligned} \quad (174)$$

donde  $u_{z,m} = 0$ ,  $c_1 = 100$ ,  $c_2 = 10$ ,  $c_3 = 10$ .

#### 4.4.2. Controles sincronizantes robustos.

Para sincronizar a los marcos de 2 giroscopios controladores de momentos se utilizó el algoritmo de sincronización robusta de la sección 2.5. En la tabla 8 se muestran distintos controles sincronizantes en distintas configuraciones. En el sistema  $s$  se agregó un parámetro de incertidumbre  $\Delta I_2 = -1$  a partir del segundo 2 de simulación para



**Figura 37.** Gráfico sobre el desempeño del control local para el giroscopio controlador de momento  $u$  del observador robusto.

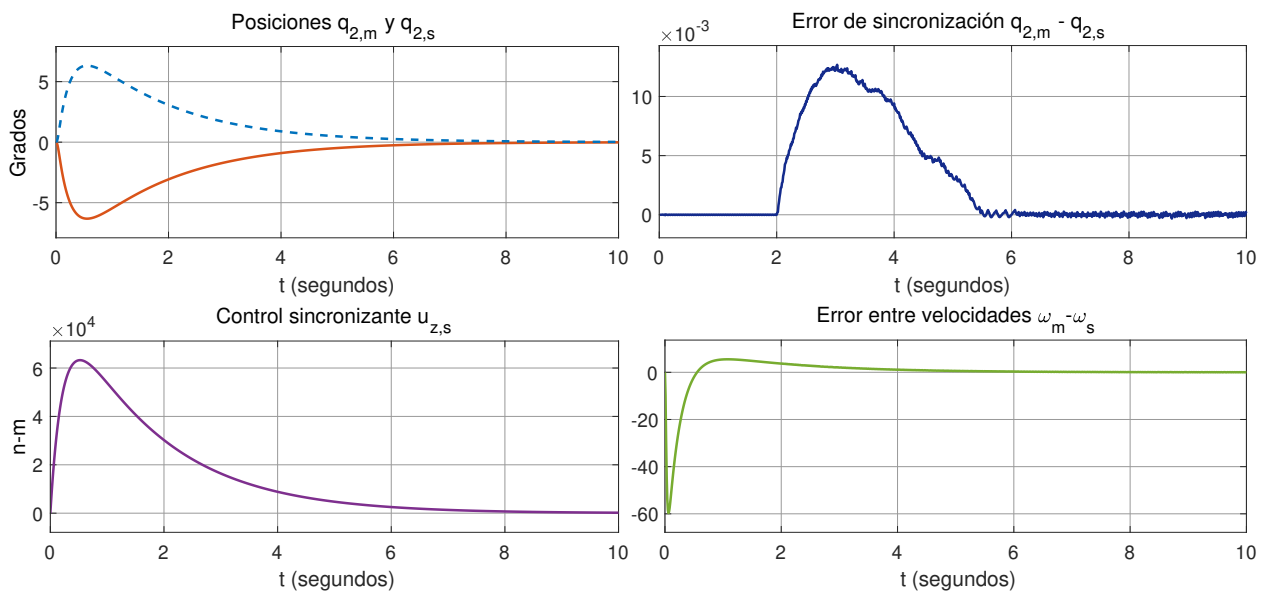
que ambos sistemas sean distintos. En la figura 38 se muestra a la sincronización en anti-fase entre ambos sistemas y en la figura 39 se muestra a la estimación de la perturbación (proporcionado por el observador robusto) provocada por el cambio en el factor de inercia.

**Tabla 8.** Controles sincronizantes robustos para distintas configuraciones para el giroscopio controlador de momento.

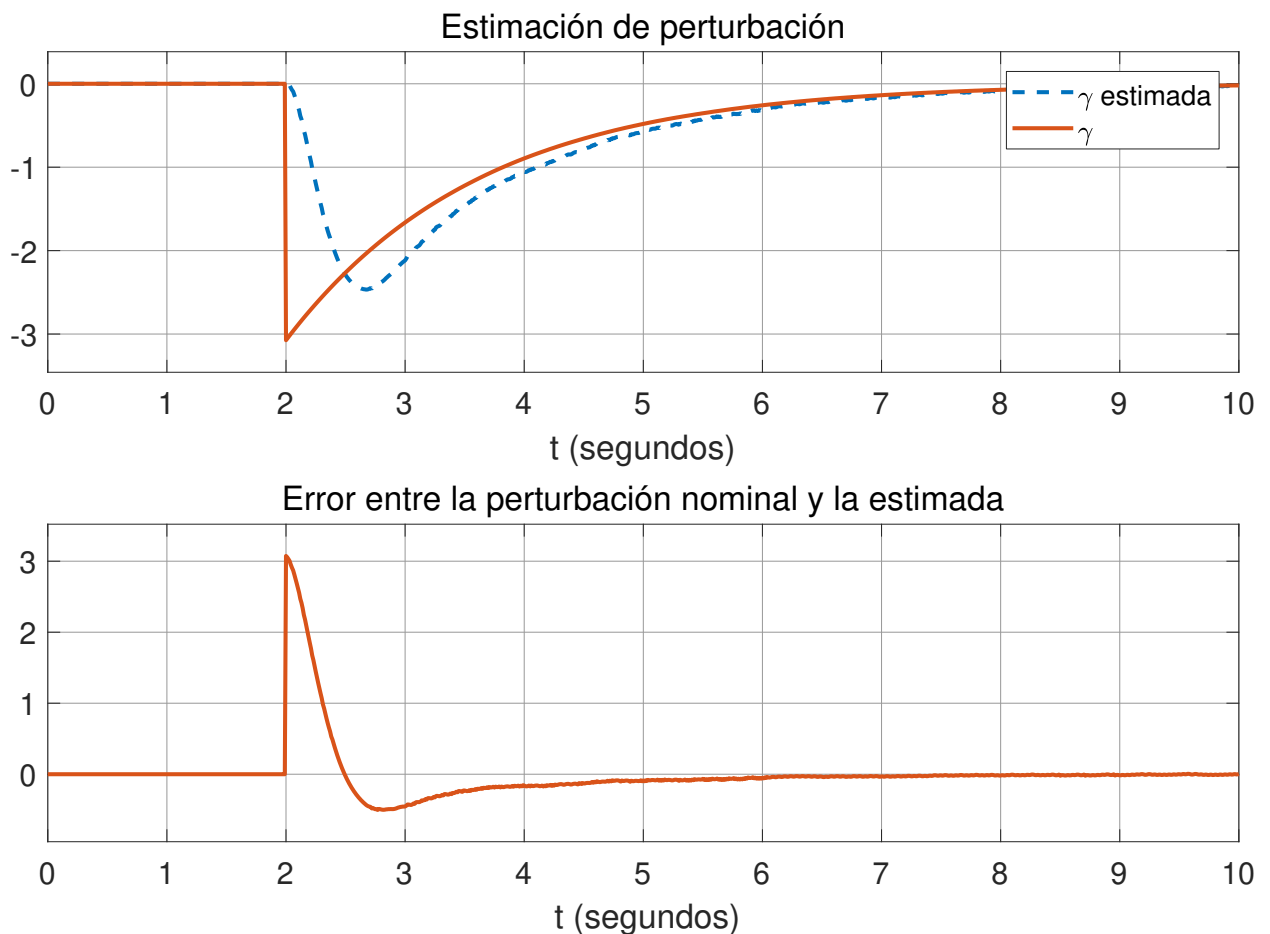
Configuración		Controlador sincronizante
Unidireccional	Fase	$v_m = 0$
		$v_s = (\hat{\gamma}_s + I_3 u_{l,s} + p q_{2,s} + v \dot{q}_{2,s}) - (\hat{\gamma}_m + I_3 u_{l,m} + p q_{2,m} + v \dot{q}_{2,m})$
	Anti-fase	$v_m = 0$
		$v_s = -(\hat{\gamma}_s + I_3 u_{l,s} + p q_{2,s} + v \dot{q}_{2,s}) - (\hat{\gamma}_m + I_3 u_{l,m} + p q_{2,m} + v \dot{q}_{2,m})$
Bidireccional	Fase	$v_s = (\hat{\gamma}_s + I_3 u_{l,s} + p q_{2,s} + v \dot{q}_{2,s}) - (\hat{\gamma}_m + I_3 u_{l,m} + p q_{2,m} + v \dot{q}_{2,m})$ $v_m = (\hat{\gamma}_s + I_3 u_{l,s} + p q_{2,s} + v \dot{q}_{2,s}) - (\hat{\gamma}_m + I_3 u_{l,m} + p q_{2,m} + v \dot{q}_{2,m})$

#### 4.5. Conclusiones.

Se empleó un algoritmo para encontrar la tasa angular de un giroscopio controlador de momento de 2 grados de libertad, basado en un controlador que usa cuaterniones para describir la orientación. Este algoritmo se puede emplear para orientar a



**Figura 38.** Sincronización en configuración anti-fase entre los sistemas  $m$  y  $s$ .



**Figura 39.** Estimación de la perturbación del sistema  $s$ .

un vehículo espacial en cualquier dirección en el espacio; el giroscopio controlador de momento con subactuación en uno de los ejes es un caso especial al caso anterior-

mente mencionado al bloquear al marco interno. Es posible sincronizar a los marcos externos con un algoritmo robusto.

El objetivo de girar al marco externo es que el vehículo se oriente hacia una referencia dada. Cuando se quiere que el giroscopio subactuado se oriente hacia la misma referencia que en el vehículo espacial, el error de referencia no es cero, dado que la simplificación de este modelo considera el movimiento del marco externo en un intervalo pequeño de grados. Esto se puede mejorar al considerar un modelo no simplificado, sin embargo habrá que obtener nuevos algoritmos de sincronización.

## Capítulo 5. Conclusiones.

---

En este trabajo se describieron y analizaron distintos modelos de giroscopios, de los cuales se obtuvieron controles locales, necesarios para probar algoritmos de sincronización en distintas configuraciones. Se realizaron además experimentos numéricos para probar lo anteriormente mencionado.

A pesar de que el acoplamiento dinámico suele ser mejor que el acoplamiento estático, en este caso demostró tener las mismas prestaciones que el acoplamiento estático en el sentido de que el sistema del error es inestable cuando este está en lazo abierto.

El algoritmo de sincronización robusto demostró ser mejor que los dos anteriormente mencionados, dado que los errores de sincronización se encuentran alrededor de cero en presencia de perturbaciones e incertidumbres paramétricas.

El observador robusto utilizado converge con los estados de los sistemas de tal manera que es posible cumplir con los objetivos del control local y de sincronización. Además la estimación de perturbación permite reducir a los errores anteriormente mencionados.

La estimación de perturbación también se puede aprovechar para inyectarla como una no linealidad en el control local, mejorando aún más el rendimiento de este, lo que provoca que los errores de referencia y de sincronización disminuyan.

La sincronización de dos sistemas no idénticos es posible con las técnicas de sincronización robusta, observador robusto y un control local. Este conjunto de técnicas, se puede apreciar como un método para lograr que un sistema (disco giratorio, rueda de reacción y marco externo de un giroscopio mecánico) logre los objetivos de seguimiento de una señal dada, es decir, si se conoce solamente a la parte lineal del sistema o si existen perturbaciones, se puede obtener un buen seguimiento de la señal de referencia.

Al menos en simulaciones numéricas fue posible la sincronización robusta, por lo que es de interés realizar la experimentación en un laboratorio para determinar la



efectividad de este algoritmo en un ambiente real de trabajo.

El control de orientación del modelo de un vehículo espacial se pudo obtener en este trabajo. La determinación del cuaternión de referencia con el algoritmo propuesto da flexibilidad al momento de darle instrucciones al controlador linealizante por retroalimentación, dado que, el problema de determinar qué cuaternión describe alguna rotación se reduce a encontrar las coordenadas de un punto en el espacio hacia donde el vehículo se desea que sea orientado.

La aplicación de un giroscopio controlador de momento para orientar vehículos espaciales se da por la necesidad de no tener que depender de la generación de pares mediante el uso de propelente. Otra causa obvia pero que es poco mencionada en la literatura, es de que en el espacio en donde operan los satélites y naves espaciales hay muy poca atmósfera, por lo tanto, no es posible usar superficies de control para orientar a estos aparatos. De esto último, se puede decir que el uso de las superficies de control es válido en ambientes en donde haya arrastre aerodinámico, o cuando la velocidad de una aeronave sea suficiente como para generar pares por este arrastre. Un giroscopio controlador de momento abordo de una aeronave o un submarino proporcionaría generación de pares cuando estos alcancen velocidades críticas. Cuando una aeronave entra en una situación de pérdida de sustentación, la posibilidad de esta de orientarse es nula, dado que no hay arrastre aerodinámico que permita la generación de pares. En el caso de un submarino, si se desea que este sea orientado habrá que desplazarlo primero. El uso de un giroscopio controlador de momento, podría utilizarse para situaciones de emergencia, incluso, se podrían diseñar vehículos que dependan únicamente de este tipo de giroscopios para orientarse, lo que podría significar una mejora en rendimiento, prestaciones y seguridad.

## Literatura citada

- Alvarez, J., Cuesta, R., y Rosas, D. (2014). Robust output synchronization of second-order systems. *The European Physical Journal Special Topics*, **223**(4): 757–772.
- Antonello, R. y Oboe, R. (2011). MEMS Gyroscopes for Consumers and Industrial Applications. En: I. Minin (ed.), *Microsensors*. IntechOpen, pp. 253–280.
- Bang, H., Lee, J.-S., y Eun, Y. (2004). Nonlinear attitude control for a rigid spacecraft by feedback linearization. *KSME International Journal*, **18**: 203–210.
- Bitar, A. (2021). How does a ring laser gyroscope work? Consultado el: 20 de agosto de 2021, de <https://aerospace.honeywell.com/us/en/learn/about-us/blogs/how-does-ring-laser-gyroscope-work>.
- Brown, R., Rulkov, N. F., y Tracy, E. R. (1994). Modeling and synchronizing chaotic systems from time-series data. *Phys. Rev. E*, **49**: 3784–3800.
- Canseco, E. d. C. G. (2001). *Regulación de postura de manipuladores robóticos mediante cuaterniones unitarios*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.
- Chen, S.-C., Kuo, C.-L., Lin, C.-H., Hsu, C.-H., y Tsui, C.-K. (2013). Applications of fuzzy sliding mode control for a gyroscope system. En: *Abstract and Applied Analysis*. Hindawi, Vol. 2013.
- Dzielski, J., Bergmann, E., Paradiso, J., Rowell, D., y Wormley, D. (1988). An approach to CMG steering using feedback linearization. Reporte técnico, NASA Technical Reports Server.
- España, M. (2016). *Sistemas de Navegación Integrada con Aplicaciones*. CONAE. p. 315.
- Europa Press (2019). A 200 años de Léon Foucault, el físico que demostró la rotación de la Tierra, 5 citas para recordarlo. Consultado el: 17 de agosto de 2021, de <https://www.sinembargo.mx/18-09-2019/3647600>.
- Farivar, F. y Shoorehdeli, M. A. (2012). Fault tolerant synchronization of chaotic heavy symmetric gyroscope systems versus external disturbances via Lyapunov rule-based fuzzy control. *ISA Transactions*, **51**(1): 50–64.
- García Montes, E. (2018). *Sincronización de sistemas vía acoplamiento dinámico*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California.
- Giménez Martínez, J., Loeff, E., y García Moreno, E. (2014). Estudio de la navegación de un planeador autónomo submarino. En: *XXXV Jornadas de Automática, Valencia, España, 3-5 de septiembre*. Comité Español de Automática (CEA), p. 45. ISBN-13: 978-84-697-0589-6.
- Gurrisi, C., Seidel, R., Dickerson, S., Didziulis, S., Frantz, P., y Ferguson, K. (2010). Space Station Control Moment Gyroscope Lessons Learned. *Aerospace Mechanisms Symposium*, pp. 161–176.
- Lawrence, A. (2012). *Modern inertial technology: navigation, guidance, and control*. Springer Science & Business Media.

- Li, J., Post, M., Wright, T., y Lee, R. (2013). Design of Attitude Control Systems for CubeSat-Class Nanosatellite. *Journal of Control Science and Engineering*, **2013**: 657182.
- Nagabhushan, V. (2009). *Development of control moment gyroscopes for attitude control of small satellites*. Tesis de doctorado, University of Florida.
- Parks, T. R. (s.f). *Gyroscope ECP750 manual*. Educational Control Products.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., y Kurths, J. (2001). *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge Nonlinear Science Series. Cambridge University Press.
- Piyabongkarn, D., Rajamani, R., y Greminger, M. (2005). The development of a mems gyroscope for absolute angle measurement. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **13**(2): 185–195.
- Pothiawala, Asis ans Dahleh, M. A. (1990). H [infinity] optimal control for the attitude control and momentum management of the space station. Reporte técnico, Massachusetts Institute of Technology. Laboratory for Information and Decision Systems.
- Rabeendran, N. (2008). *A Study of Ring Laser Gyroscopes*. Tesis de maestría, University of Canterbury. Physics and Astronomy.
- Roopaei, M., Zolghadri Jahromi, M., John, R., y Lin, T. C. (2010). Unknown nonlinear chaotic gyros synchronization using adaptive fuzzy sliding mode control with unknown dead-zone input. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **15**(9): 2536–2545.
- Scarborough, J. B. (1958). *The Gyroscope*. Interscience Publ.
- Slotine, J.-J. E. y Li, W. (1991). *Applied nonlinear control*, Vol. 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ.
- Sommeria, J. (2017). Foucault and the rotation of the earth. *Comptes Rendus Physique*, **18**(9): 520 – 525. Science in the making: The Comptes rendus de l'Académie des sciences throughout history.
- Steyn, D. (2015). *Variable Speed Scissored Pair Dual Gimbal Control Moment Gyro for Nano-Sattelites*. Tesis de maestría, Faculty of Engineering at Stellenbosch University.
- Toorian, A., Diaz, K., y Lee, S. (2008). The cubesat approach to space access. En: *2008 IEEE Aerospace Conference*. pp. 1–14.
- Travis, H. (2020). Introduction to Satellite Attitude Control. En: *Advances in Spacecraft Attitude Control*. IntechOpen.
- Wie, B. (2005). New Singularity Escape/Avoidance Steering Logic for Control Moment Gyro Systems. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, **28**: 948–956.
- Woellert, K., Ehrenfreund, P., Ricco, A. J., y Hertzfeld, H. (2011). Cubesats: Cost-effective science and technology platforms for emerging and developing nations. *Advances in Space Research*, **47**(4): 663–684.

- Yau, H. T. (2008). Synchronization and anti-synchronization coexist in two-degree-of-freedom dissipative gyroscope with nonlinear inputs. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **9**(5): 2253–2261.
- Zhou, D., Shen, T., y Tamura, K. (2005). Adaptive Nonlinear Synchronization Control of Twin-Gyro Precession. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **128**(3): 592–599.