Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California



Maestría en Ciencias en Óptica con orientación en Óptica Física

Traslación espectral de estados cuánticos de luz en guías de onda de nitruro de silicio

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de Maestro en Ciencias

Presenta:

Alberto Acevedo Carrera

Ensenada, Baja California, México 2021 Tesis defendida por

Alberto Acevedo Carrera

y aprobada por el siguiente Comité

Dra. Karina Garay Palmett Codirectora de tesis Dr. Wencel José De La Cruz Hernández Codirector de tesis

Dr. Raúl Rangel Rojo Ma. Elena Solana Arellano Dr. Serguei Stepanov Dra. Noemí Abundiz Cisneros



Dra. Karina Garay Palmett Coordinadora del Posgrado en Óptica

Dr. Pedro Negrete Regagnon Director de Estudios de Posgrado

Alberto Acevedo Carrera © 2021

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis

Resumen de la tesis que presenta Alberto Acevedo Carrera como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Óptica con orientación en Óptica Física.

Traslación espectral de estados cuánticos de luz en guías de onda de nitruro de silicio

Resumen aprobado por:

Dra. Karina Garay Palmett

Codirectora de tesis

Dr. Wencel José De La Cruz Hernández

Codirector de tesis

En este trabajo se encontró un diseño realista de una guía de onda tipo cresta, de nitruro de silicio sobre dióxido de silicio en un substrato de silicio, cuyo propósito es que ésta tenga la capacidad de realizar la traslación espectral de una señal óptica, mediante el proceso óptico no lineal de tercer orden conocido como generación de diferencia de frecuencias (GDF). Este trabajo de tesis es motivado por la importancia que los dispositivos integrados tienen en aplicaciones encaminadas al diseño de compuertas cuánticas, las cuales son fundamentales en el área de la computación cuántica. La generación eficiente del proceso GDF en guías de onda depende en parte del índice de refracción de los materiales y de las dimensiones de la guía. Es por esto que, por un lado, se realizó un análisis estadístico sobre un conjunto de muestras de nitruro de silicio, sintetizado por pulverización catódica de radio frecuencia, con la intención de tener un valor estándar sobre el índice de refracción. Por otro lado, se realizó una simulación del índice de refracción efectivo de la guía de onda por medio de un método numérico de diferencias finitas, para distintas dimensiones de la guía de onda tipo cresta. Se realizó, además, un estudio teórico del proceso de GDF en guías de onda, en el cual se utilizó una analogía con el modelo del divisor de haz cuántico para explicar el proceso no lineal. Por medio de este estudio, se derivó una función que describe las propiedades espectrales del GDF y se determinó una condición que garantiza que esta función sea factorizable, la cual es necesaria para que la interacción no lineal se de a nivel de un solo modo temporal. Finalmente, se obtuvo un diseño experimental realista para una guía de onda de nitruro de silicio, la cual tendrá la capacidad de realizar la traslación espectral de una señal óptica de forma eficiente. De esta guía seleccionada se realizaron simulaciones del espectro y estimaciones de la eficiencia de la traslación.

Palabras clave: Óptica no lineal, Óptica cuántica, Generación de diferencia de frecuencia, Guías de onda

Abstract of the thesis presented by Alberto Acevedo Carrera as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Optics with orientation in physical optics.

Spectral translation of quantum states of light in silicon nitride waveguides

Abstract approved by:

Dra. Karina Garay Palmett

Dr. Wencel José De La Cruz Hernández

Thesis Co-Director

Thesis Co-Director

In this work, a realistic design of a ridge-type waveguide, made of silicon nitride on silicon dioxide on a silicon substrate, was found, the purpose of which is that it can carry out the spectral translation of an optical signal through the third-order nonlinear optical process known as frequency difference generation (DFG). This thesis work is motivated by the importance that integrated devices have in designing quantum gates, which are fundamental in guantum computing. The efficient generation of the DFG process in waveguides depends partly on the refractive index of the materials and the dimensions of the waveguide. That is why, on the one hand, statistical work was carried out on a set of silicon nitride samples synthesized by radiofrequency sputtering to have an expected value on the refractive index. On the other hand, a simulation of the effective refractive index of the waveguide was carried out employing a numerical method of finite differences for different dimensions of the ridge-type waveguide. In addition, a theoretical study of the DFG process in waveguides was carried out, in which an analogy with the quantum beam splitter model was used to explain the nonlinear process. In this study, a function was derived describing the spectral properties of DFG, and a condition was determined that guarantees that this function is factorable, which is necessary for the nonlinear interaction to occur at the level of a single temporal mode. Finally, a realistic experimental design was obtained for a silicon nitride waveguide, which will have the ability to carry out the spectral translation of an optical signal efficiently. Simulations of the spectra and translation efficiency were performed for the proposed waveguide.

Keywords: Nonlinear optics, Quantum optics, Difference frequency generation, Waveguides

Dedicatoria

A mis padres y amigos

Agradecimientos

Mi agradecimiento al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada en México (CICESE), a los investigadores, profesores y a todo el personal administrativo y de servicios generales que laboran ahí por haberme permitido cursar mis estudios de posgrado, así como al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CO-NACYT), por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría. No. de becario: 727395.

Siempre recordaré el apoyo, la guía, la paciencia y las grandes enseñanzas de mis codirectores de tesis la Dra. Karina Garay Palmett y el Dr. Wencel de la Cruz Hernández, gracias por todo.

Al Dr. Francisco Antonio Domínguez por todos sus consejos en el laboratorio y en la programación de Matlab, nunca olvidaré tu magistral habilidad de hacer preguntas "difíciles" en mis presentaciones. A mis sinodales que me acompañaron en esta travesía, confieso que no fue fácil, pero con sus enseñanzas logre dar pasos más firmes.

A Gisell mi compañera de vida, por toda tu ayuda y sabiduría en estos años. A mis amigos Sandino, Luis, Bilgai, Fernanda e Isaac por sus comentarios de apoyo, y a ti Meda por demostrarme el verdadero significado de la perseverancia a través de su eterna búsqueda.

A mis padres por todo el apoyo que siempre me han brindado.

A mis compañeros de maestría y del grupo de trabajo, por su apoyo en cada momento vivido. Apoyo que nos permitió enfrentar los momentos difíciles y salir airosos y porque no decirlo por hacer de los momentos felices verdaderas fiestas que nunca se olvidarán.

Tabla de contenido

Página

Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	viii
Lista de tablas	xiii

Capítulo 1. Introducción

1.1.	Antecedentes
1.2.	Hipótesis
1.3.	Objetivos
	1.3.1. Objetivo general
	1.3.2. Objetivos específicos 10
1.4.	Estructura de la tesis

Capítulo 2. Fundamentos teóricos

2.1.	Características de una onda electromagnética
2.2.	Ondas electromagnéticas
2.3.	Velocidad de grupo
2.4.	Óptica no lineal
	2.4.1. Índice de refracción no lineal
	2.4.2. Coeficiente no lineal efectivo
2.5.	Propagación de luz en guías de onda
2.6.	Cuantización del campo electromagnético

Capítulo 3. Generación de diferencia de frecuencias: modelo teórico

3.1.	Fuentes de fotones individuales basadas en óptica no lineal: 31
3.2.	Propuesta para generar DFG con fotones individuales:
3.3.	Divisor de haz cuántico
3.4.	Cálculo teórico del proceso de DFG
	3.4.1. Caso especial: traslación espectral de un estado de fotón indi-
	vidual mediante DFG
	3.4.2. Parámetro θ en términos de variables experimentales 45
3.5.	Estudio sobre la factorabilidad de la función de mapeo 47

Capítulo 4. Síntesis y caracterización óptica de los materiales utilizados en este trabajo.

4.1.	Propuesta del dispositivo:	55
4.2.	Síntesis de los materiales	58

Tabla de contenido (continuación)

	dica de radio frecuencia	59
4.3.	Caracterización por elipsometría	61
	4.3.1. Modelos de índice de refracción	62
4.4.	Índice de refracción de los materiales	64
	4.4.1. Muestra patrón	71
4.5.	Proceso de fabricación de las guías de onda	78
Capítulo	5. Diseño experimental para la demostración de trasla-	
ción espe	ectral por DFG	

і сэр		
5.1.	Descripción general de la propuesta.	30
5.2.	Propiedades de dispersión de guías de onda tipo cresta de Si ₃ N ₄ 8	31
	5.2.1. Cálculo de los modos de propagación y el índice de refracción	
	efectivo	32
5.3.	Propiedades de empatamiento de fases y desempatamiento de velo-	
	cidades de grupo	39
5.4.	Estrategia para el diseño de una guía de onda para la traslación es-	
	pectral de un estado de fotón individual	93
5.5.	Resultados	94
	5.5.1. Diseño experimental propuesto y su caracterización 9	97

Capítulo 6. Conclusiones

Literatura citada	 108
Anexo A	

Lista de figuras

Figura

1.	Esquema del proceso de generación de diferencia de frecuencia en un medio no lineal de tercer orden.
2.	Diseño de una guía de onda tipo cresta
3.	Campo eléctrico oscilante E y campo magnético B asociado con una ra- diación monocromática. Tomada de Andrews (1999)
4.	Clasificación de la luz en términos de su frecuencia y longitud de onda. Tomado de Andrews (1999)
5.	(a) Posición de un oscilador con respecto al tiempo cuando A=2 m, θ =0.3 π , T= π s (b) Onda viajera de longitud de onda λ y amplitud A
6.	Guía de onda plana. Recuperado de Saleh y Teich (2019)
7.	Condición de auto-consistencia: Cuando la onda se refleja dos veces se duplica a sí misma. Recuperado de Saleh y Teich (2019)
8.	Polarización para los modos (a) TE y (b) TM. Recuperado de Saleh y Teich (2019)
9.	(a) Esquema del proceso de DFG. A la salida del material no lineal se pue- de ver que puede haber un remanente de los campos de bombeo y del campo a trasladarse (S_1), los cuales se muestran con líneas punteadas. (b) Diagrama de energía del proceso DFG. Un fotón del bombeo 1 (P1) y un fotón del campo S1 son aniquilados, mientras que un fotón del bom- beo 2 (P2) y un fotón del campo S2 son creados. Esquema tomado de McGuinness <i>et al.</i> (2010).
10.	(a) Esquema del proceso de SFWM con bombeos degenerados. (b) Esque- ma de energía del proceso de SFWM con bombeo degenerado. Dos foto- nes del bombeo 1 (P1) son aniquilados, mientras que un fotón del campo S_1 y un fotón del campo acompañante son creados. Esquema adaptado de McGuinness <i>et al.</i> (2010).
11.	Propuesta para generar DFG con fotones individuales
12.	Representación esquemática de un divisor de haz tratado clásicamente. E_1 representa el haz incidente, E_2 representa el haz transmitido y E_3 representa el haz reflejado.
13.	Diagrama de un divisor de haz. \hat{a}_1 y \hat{a}_2 representan a los campos de entrada que interfieren en el divisor de haz para producir los campos de salida \hat{a}_3 y \hat{a}_4
14.	Aproximación de la función Sinc(x) a una gaussiana con el mismo ancho a media altura
15.	Esquema del diseño propuesto de la guía de onda tipo cresta

Página

Figura

16.	(a) Transmitancia y (b) curvas de índice de refracción de los materiales propuestos en el diseño de la guía de onda. Los grosores (G) para los materiales son los siguientes: $G_{Si_3N_4}=0.5 \ \mu m$, $G_{SiO_2}=1 \ \mu m$ y $G_{Si}=2 \ \mu m$ 57
17.	Oxidación térmica vía húmeda. Tomada y traducida de Halbleiter (2021) 59
18.	Esquema del proceso de pulverización catódica. Tomada de Aguayo Alva- rado (2021)
19.	Fotografía de un Elipsómetro M-200061
20.	(a) Parámetros Ψ y Δ medidos durante la caracterización de elipsometría. (b) Índice de refracción <i>n</i> y coeficiente de extinción <i>k</i> del silicio experi- mentales
21.	Comparación de la curva de índice de refracción del silicio medida ex- perimentalmente, etiquetada como Acevedo (2020), con respecto a las curvas reportadas en la literatura por Green (2008) y Schinke <i>et al.</i> (2015). 66
22.	 (a) Índice de refracción y coeficiente de extinción del dióxido de silicio. (b) Comparación de la curva de índice de refracción del dióxido de silicio medida experimentalmente, etiquetada como Acevedo (2020), con respecto a las curvas reportadas en la literatura por Rodríguez-de Marcos <i>et al.</i> (2016) y Gao <i>et al.</i> (2012)
23.	(a) Índice de refracción del nitruro de silicio para cada uno de los modelos de EMA (b) Coeficiente de extinción del nitruro de silicio
24.	Índice de refracción y coeficiente de extinción del silicio amorfo conside- rado en el modelo de EMA (Palik, 1998a)69
25.	Índice de refracción del nitruro de silicio considerado para el modelo de EMA
26.	Índice de refracción y coeficiente de extinción del dióxido de silicio \ldots . 71
27.	Índices de refracción, la izquierda corresponde a las curvas generadas a partir del modelo de Tauc-Lorentz, la derecha a partir del modelo de Sellmeier
28.	Índice de refracción efectivo del modo fundamental TM en una guía de onda de nitruro de silicio, la izquierda corresponde a las curvas generadas a partir del modelo de Tauc-Lorentz, la derecha a partir del modelo de Sellmeier

Figura	Página
29.	Diagrama de empatamiento de fases del proceso de generación de dife- rencia de frecuencias, la izquierda corresponde las curvas generadas con el modelo de Tauc-Lorentz, la derecha a partir del modelo de Sellmeier. La guía de onda corresponde a la mencionada para la figura 28
30.	Diagrama de empatamiento de fases para el proceso de SFWM, corres- pondiente a la guía de onda con índice de refracción efectivo mostrada en la figura 27. La izquierda corresponde a las curvas generadas a partir del modelo Tauc-Lorentz, la derecha a partir del modelo de Sellmeier 77
31.	Proceso de fabricación de las guías de onda. Tomada de Aguayo Alvarado (2021)
32.	Diseño de la guía de onda que se propone para la demostración de tras- lación espectral por DFG
33.	Ejemplo de una malla homogénea que consiste de un arreglo cuadriculado de 4 x 2. Recuperada de Fallahkhair <i>et al.</i> (2008)
34.	En esta imagen se observa como en los alrededores de la zona de explo- ración se genera una región donde se cumplen las nuevas condiciones de frontera. La definición de las capas PML evitan reflexiones no deseadas del campo eléctrico en el borde de la ventana de simulación. Recuperado de Berenger (1994)
35.	Componentes del modo fundamental TM de una guía de onda con $W = 1 \ \mu m$ y $h = 0.52 \ \mu m$
36.	Perfil transversal de modos TE de una guía de onda con $W = 1\mu m$ y $h = 0.52\mu m$ y para una longitud de onda de 400 nm. (a) Modo fundamental. (b) Primer modo de orden superior
37.	(a) Variación del índice de refracción efectivo de los modos fundamentales TM y TE soportados en guías de onda tipo cresta, considerando diferentes valores de ancho del núcleo y una altura fija. (b) Variación del índice de refracción efectivo de los modos fundamentales TM y TE soportados en guías de onda tipo cresta, considerando diferentes valores de altura del núcleo y un ancho fijo. Como referencia, se incluyeron las curvas de los índices de refracción de los materiales del núcleo y el sustrato
38.	Contornos de empatamiento de fases ($\Delta k = 0$) para el proceso DFG para una guía de onda con una altura de 0.55 μm y ancho de 1.34 μm . Se consideraron campos viajando en el modo fundamental TE y dos valores fijos para la longitud de onda del bombeo 2 (a) $\lambda_{P2} = 1.40 \ \mu m$ (b) $\lambda_{P2} =$ 1.55 μm , respectivamente. Como referencia, se incluyó una línea vertical señalando una longitud de onda del bombeo 1 centrada en 0.80 μm 89

Figura

39.	Contornos de empatamiento de fases ($\Delta k = 0$) para el proceso DFG para una guía de onda con una altura de 0.55 μm y ancho de 1.34 μm . Se consideraron campos viajando en el modo fundamental TM y dos valores fijos para la longitud de onda del bombeo 2 (a) $\lambda_{P2} = 1.40 \ \mu m$ (b) $\lambda_{P2} =$ 1.55 μm , respectivamente. Como referencia, se incluyó una línea vertical señalando una longitud de onda del bombeo 1 centrada en 0.80 μm 9	0
40.	Contornos de empatamiento de velocidades de grupo (a) GVM_1 , (b) GVM_2 y (c) GVM_3 para el proceso DFG para una guía de onda con una altura de 0.55 μm y ancho de 1.34 μm . Se consideraron campos viajando en el modo fundamental TM y un bombeo 2 con longitud de onda λ_{P2} = 1.55 μ m	1
41.	Función de intensidad espectral conjunta para SFWM cuando se cumple la condición GVM_3 (a), la condición GVM_1 (b) y la condición GVM_2 (c). Imagen recuperada de Garay-Palmett (2009).	1
42.	Función de mapeo no factorizable para una guía de onda con ancho de 3.04 μm y una altura de 0.74 μm , un láser de bombeo de pulsado centrado en 741 nm, un bombeo de onda continua en 1550nm y una señal a trasladar centrada en 1220 nm. La función está normalizada al máximo.	2
43.	Ejemplo de una función de mapeo factorizable y simétrica. Componentes: (a) Envolvente espectral del bombeo. (b) Función de empatamiento de fases. (c) Función de mapeo	3
44.	Función objetivo en términos de la altura del núcleo h y el semiancho de núcleo $W/2$, considerando la condición GVM_1 y que todos los campos se propagan en el modo fundamental TE	95
45.	Componentes de la función de mapeo resultante considerando la geome- tría de la guía de onda cuya función objetivo es mínima (ver figura 44), para $\sigma = 3.2$ THz y $L = 2.5$ cm. (a) Envolvente espectral del bombeo. (b) Función de empatamiento de fases. (c) Función de mapeo evaluada numéricamente	6
46.	Coeficientes de Schmidt para (a) el caso presentado en la figura 45 y (b) el ejemplo de la función de mapeo de la figura 42	7

Figura

Página

47.	Diagramas de empatamiento de fases y de GVM para todas las combina- ciones de polarización de los cuatro campos que participan en el proceso de DFG. (a) Corresponde al proceso XXXX, en donde la geometría que pro- porciona el menor valor de la función objetivo es aquella con h=0.502 μ m y w=1.228 μ m, y se satisface para la condición GVM_1 . (b) Corresponde al proceso YYYY y la geometría que proporciona el menor valor de la función objetivo es aquella con h=0.52 μ m y w=1 μ m, y se satisface para la con- dición GVM_2 . (c) Proceso XXYY y la geometría es h=0.58 μ m y w=1 μ m, para la condición GVM_2 . (d) Proceso YYXX y la geometría es h=0.58 μ m y w=1 μ m, para la condición GVM_3 . (e) Proceso XYXY y la geometría es h=0.58 μ m y w=3.4 μ m, para la condición GVM_3 . (f) Proceso YXYX y la geometría es h=0.57 μ m y w=1 μ m para la condición GVM_3	99
48.	Propuesta de diseño de una guía de onda para la implementación de DFG sin correlación espectral entre la señal a trasladar y la trasladada. Los parámetros de la fuente se ajustan a las condiciones experimentales del grupo de trabajo.	99
49.	Contorno de empatamiento de fases (curva negra) y contorno de GVM_2 (curva verde). La intersección sería la configuración de longitudes de onda que podría llevar a la factorización de la función de mapeo	100
50.	Componentes de la función de mapeo resultante para el diseño propuesto e identificado en la figura 49, para $\sigma = 20$ THz y $L = 2$ cm. (a) Envolvente espectral del bombeo. (b) Función de empatamiento de fases. (c) Función de mapeo evaluada numéricamente. Recordar que el análisis fue restrin- gido al caso en el que el bombeo 2 es un haz de onda continua	100
51.	Coeficientes de Schmidt correspondientes a la función de mapeo de la figura 50	101
52.	Espectro de (a) la señal a trasladarse y (b) la señal trasladada para el diseño de la figura 50	101
53.	Función objetivo con respecto al ancho y altura del guía de onda, alrede- dor del diseño propuesto, ver figura 48	102
54.	Parámetro de cooperatividad para un diseño de guía de onda con ancho de 1 μm y a diferentes valores de altura en un rango de 0.48 μm a 0.56 μm . La barra resaltada de color verde corresponde con la altura elegida para el diseño final de la guía de onda	102
55.	Porcentaje de traslación o no traslación de la señal de entrada con respecto a la potencia de bombeo 1 y para una potencia del bombeo 2 de 160 mW.	103

Lista de tablas

Tabla

1.	Valor del índice de refracción no lineal para los diferentes materiales propuestos en el diseño de la guía de onda tipo cresta
2.	Coeficientes de Sellmeier para el sustrato de Silicio. B_1, B_2 y B_3 son adimensionales
3.	Coeficientes de Sellmeier para el sustrato de dióxido de silicio. B_1 y E_{inf} son adimensionales
4.	Parámetros de fabricación
5.	Porcentaje de EMA
6.	Coeficientes de Tauc-Lorentz para el nitruro de silicio en el modelo de EMA. ($\varepsilon_r(\infty)$) es adimensional)
7.	Porcentajes del modelo de EMA para la muestra 5
8.	Coeficientes de Sellmeier para el sustrato de dióxido de silicio en el modelo de EMA
9.	Coeficientes de Sellmeier para la muestra patrón de Si_3N_4 72
10.	Coeficientes de Tauc-Lorentz para la muestra patrón de $Si_3N_4.(\varepsilon_r(\infty))$ es adimensional)
11.	Comparación de MSE de los ajustes usando los modelos de Sellmeier y de Tauc-Lorentz obtenidos de la primera muestra patrón (muestra 5) y aplicado a todas las muestras
12.	Coeficientes de Sellmeier ajustados a cada muestra
13.	Coeficientes de Tauc-Lorentz para los ajustes a cada muestra.($\varepsilon_r(\infty)$ es adimensional)
14.	Ajuste de modelos individualmente
15.	Valores del error cuadrático medio de las muestras cuando es apli- cado el modelo de la muestra 1
16.	Índice de refracción para una $\lambda = 1 \mu m$
17.	Índice de refracción efectivo para una $\lambda = 1 \mu m$

Capítulo 1. Introducción

La automatización, eficiencia, el ahorro de tiempo y esfuerzo son metas con las que es sencillo empatizar. Por ello, como civilización hemos construido e ingeniado infraestructura que aligere y mejore nuestras condiciones de vida. Un sistema de riego, un molino de agua, el uso de animales para la siembra son ejemplos tempranos de nuestra genialidad. Con el tiempo, lejos de terminar con los problemas, la vida misma nos presenta nuevos retos y la necesidad de encontrar soluciones a problemas más difíciles y abstractos, como el automatizar la resolución de operaciones matemáticas (Light, 1999). Se pueden recordar los tiempos en primaria y secundaria cuando profesores prohibían el uso de calculadoras en los problemas escolares, con el argumento de que no siempre estaríamos en posesión de una para acompañarnos. Hoy en día, sin embargo, existen calculadoras y computadoras de bolsillo capaces de resolver operaciones matemáticas, graficar e incluso cuentan con compiladores de código. Se comprende el pensamiento de tantos profesores de otras épocas, ya que era imposible imaginar el desarrollo tecnológico que a la fecha se ha alcanzado, sin duda el proceso de cambio es difícil de predecir.

Los primeros intentos de automatizar cálculos para problemas complejos, los podemos observar en la manera en que se reúne un grupo de personas con el objetivo de resolver operaciones matemáticas. Las tareas o funciones que hoy en día son realizadas a través de una computadora, en otras épocas eran realizadas por seres humanos, en específico mujeres reunidas en grupos numerosos para realizar una gran cantidad de acciones para calcular operaciones de balística, cálculos de trayectorias, consumo de combustible de cohetes, etc (Thompson, 2019). Recordando la invención de las primeras computadoras mecánicas daremos un gran salto a la década de los 70s, a finales para ser más exactos, cuando Intel saca al mercado el modelo 8086, uno de los primeros microprocesadores de arquitectura x86. La arquitectura x86 resulta tan exitosa, que hoy en día sigue siendo utilizada en los ordenadores, supercomputadoras y centros de datos (Morse, 2017). Por supuesto el diseño ha mejorado en rendimiento y capacidad a lo largo de los años.

La forma en la que aumentamos el poder de cómputo de un microprocesador, es decir el número de operaciones que realiza por segundo, es generalmente mediante el incremento del número de transistores que componen el microchip. Después de

observar el comportamiento de cómo aumentaba el número de transistores en una misma área, Gordon E. Moore (1965), cofundador de Intel, concluye una ley empírica que describe este comportamiento. Parafraseando esta ley establece que el número de componentes integrados en una misma área se duplicará cada 2 años si no es que más y que es bastante seguro que este comportamiento continuaría por lo menos diez años. Sin embargo, como bien lo dice posteriormente, este desarrollo continuó de buena manera por 35 años (Moore, 1995). No obstante, ninguna cantidad física puede continuar cambiando de forma exponencial para siempre. Por alguna razón u otra siempre se encontrará algo que limitará el crecimiento continuo. Esta es una realidad a la que nos estamos aproximando en nuestros días (Moore, 2003).

Si bien estamos llegando al fin de una era, esto solo marca el inicio de otra. La pregunta que sigue por responder es, ¿Cuál es el siguiente avance, a dónde vamos desde aquí?. Una de las propuestas al respecto que cuenta con más peso e interés en los últimos años, se ha dado en la forma de la computación cuántica. Una forma de hacer computación cambiando los clásicos valores de 1 y 0 (encendido y apagado) por la utilización de los conceptos de la mecánica cuántica, como la superposición de estados y el entrelazamiento para lograr un incremento sin precedentes en la capacidad de cómputo (Knill et al., 2001). Esto se podría apreciar en áreas como la criptografía, donde una computadora cuántica sería capaz de vulnerar la seguridad de los sistemas actuales para encriptación, con ello los métodos como la contraseña de nuestro correo electrónico podría ser decifrada rápidamente utilizando un método llamado algoritmo de Shor (Politi et al., 2009). El algoritmo también es ejecutable en una computadora común y corriente, a la cual me referiré como computadora clásica, sin embargo, el tiempo que le tomaría a una computadora clásica variaría entre unas horas hasta miles de años dependiendo de la complejidad. Esta es la razón por la que varios sitios web piden una combinación de números, letras, mayúsculas y algún carácter especial en las contraseñas, dado que intentar decifrarla con una computadora clásica sería una tarea en extremo demandante y porqué no, imposible.

Una vez identificada una solución a nuestros problemas futuros de poder de cómputo, ¿Cómo podemos crear este tipo de tecnologías cuánticas y tomar ventaja de ellas? Esa es la pregunta que varias empresas e investigadores tratan de resolver. La unidad más básica en la computación clásica es el bit, el cual puede ser 0 o 1, prendido o apagado, vivo o muerto. La unidad equivalente en computación cuántica es el qubit (quantum bit, en inglés), el cual en general se define como una superposición coherente entre los estados 0 y 1 (Nielsen y Chuang, 2019). Un ejemplo famoso en el que subyace el principio de superposición, es el experimento pensado del gato de Schrödinger (Bernstein, 2021), el cual plantea que un gato se encuentra encerrado dentro de una caja opaca que contiene una botella de gas venenoso y un dispositivo con una sola partícula radiactiva cuya probabilidad de desintegrarse en un tiempo dado es del 50%, de manera que si la partícula se desintegra, el veneno se libera y el gato muere. Al terminar el tiempo establecido, la probabilidad de que el gato esté vivo es del 50% y la probabilidad de que haya muerto tiene el mismo valor. Sucede que, en mecánica cuántica las partículas como los electrones tienen la propiedad de estar en dos lugares a la vez pudiendo ser detectados por dos receptores a la vez y dándonos a sospechar que el gato está vivo y muerto simultáneamente, a lo que llamamos superposición. Sin embargo, una vez que se abra la caja para comprobar el estado del gato, este tomará un estado determinado vivo o muerto.

Como no es económicamente, ni éticamente viable el utilizar gatos para preparar los qubits, se han utilizado sistemas cuánticos basados en electrones, iones y átomos.Por un lado, en el caso de los átomos que ha utilizar el spin, una característica de los electrones del átomo, para almacenar y procesar información cuántica (Pla *et al.*, 2012). Por otro lado, también es posible generar estos estados de superposición utilizando radiación, por ejemplo, utilizando luz en la forma de fotones individuales (Yoran y Reznik, 2003). Estos sistemas tienen una serie de ventajas con respecto a su contraparte basada en materia. En primer lugar, son robustos contra las pérdidas o decoherencia y segundo permiten la transferencia de información por entrelazamiento cuántico entre ubicaciones lejanas (McGuinness *et al.*, 2010). Además, se cuenta con la ventaja de que los estados cuánticos de fotones son fácilmente manipulables y se pueden realizar con gran precisión (O'Brien, 2007).

Recapitulando, para generar un Qubit se necesita una superposición de dos posibles estados de un sistema físico. Estos dos estados pueden ser cualquiera que nos sean útiles y fáciles de generar. En el caso de la utilización de radiación en forma de luz, es posible utilizar los diferentes grados de libertad con los que ésta cuenta. Por ejemplo, codificar información para realizar compuertas de un qubit por medio de la polarización, caso que ha sido ampliamente usado (Peters *et al.*, 2005). Otros posibles métodos para codificación sería controlando la frecuencia de las señales y el momento (Braunstein y Loock, 2005; Cohen *et al.*, 2009).

Los efectos cuánticos son particularmente fáciles de observar en los sistemas ópticos, por razones tales como su resistencia a la decoherencia, pero si hablamos de fotones individuales, en específico para su utilización en la preparación de qubits, se plantean ventajas adicionales, como el hecho de que estos son sistemas que están casi en su totalidad libres de ruido (O'Brien, 2007). Es por esto que en el presente se han propuesto y demostrado diversos protocolos de procesamiento de información utilizando luz en estados no clásicos. En lo particular, se han demostrado protocolos de cómputo cuántico con fotones individuales usando óptica lineal y mediciones proyectivas (Knill *et al.*, 2001; Kok *et al.*, 2007). No obstante, esfuerzos en investigación necesitan aún ser realizados a fin de alcanzar los requerimientos de eficiencia, confiabilidad y escalabilidad de los sistemas cuánticos.

Considerando lo anterior, y con el objetivo de colaborar al esfuerzo global de contar con una computadora cuántica, este trabajo forma parte de un proyecto más general que busca la generación de qubits de color, un estado de fotón individual descrito por la superposición entre dos posibles frecuencias (color), haciendo uso de los modos temporales del campo electromagnético (Lukens y Lougovski, 2017). Para ello se propone estudiar el proceso de generación de diferencia de frecuencia en un medio con no linealidad de tercer orden.

1.1 Antecedentes

Como ya se mencionó, en el proceso de preparación de qubits fotónicos se requiere de fuentes de fotones individuales. Existen diferentes mecanismos para la generación de estados de fotón individual en los que destacan: fuentes de puntos cuánticos (Yuan *et al.*, 2002), nano diamantes (Babinec *et al.*, 2010), moléculas individuales (Basché *et al.*, 1992), entre otros. Alternativamente, fotones individuales pueden generarse a partir de procesos ópticos no lineales (Ferretti y Gerace, 2012). Estos son fenómenos que derivan de la respuesta no lineal de la materia a la acción de un campo electromagnético intenso. La intensidad de la respuesta no lineal dependerá del cuadrado o la tercera potencia del campo eléctrico, si se están considerando las no linealidades de más bajo orden (Sutherland, 2003). Por poner un ejemplo más ameno al lector, se puede considerar el caso de un apuntador láser verde, instrumento bastante común para expositores. Este láser comienza su vida como un láser infrarrojo (1064 nm), al utilizarlo para iluminar un cristal no lineal se lleva a cabo el proceso no lineal de segundo orden conocido como generación de segundo armónico (Kleinman, 1962). El cristal no lineal toma dos fotones en el infrarrojo y los transforma en un fotón con el doble de la energía, es decir en el verde (532 nm). Cabe destacar que debido a que estos procesos dependen de la alta intensidad de la luz, por lo general solo es posible obtener una respuesta no lineal al utilizar luz láser (Boyd, 2020).

Para la generación de los estados de fotón individual por medio de óptica no lineal es posible utilizar por un lado, un proceso conocido como conversión paramétrica descendente espontánea (SPDC, por sus siglas en inglés) (Couteau, 2018). Las ventajas de este método residen en la facilidad de su implementación en el laboratorio, el cual involucra un cristal no lineal, obteniendo una alta generación de estados de fotón individual. Las fuentes de fotones que utilizan SPDC han sido históricamente las más utilizadas. SPDC es un proceso no lineal de segundo orden que ocurre sólo en cristales no centro-simétricos. Este fenómeno se genera cuando el cristal es iluminado por un haz de bombeo, el cual es lo suficientemente intenso como para que dentro del material se lleve a cabo el proceso no lineal. Esta interacción resulta en la aniquilación de un fotón del bombeo y la creación de dos fotones llamados comúnmente señal y acompañante, para los cuales se cumple la relación $\omega_p = \omega_s + \omega_i$, donde ω_p , ω_s y ω_i son las frecuencias del bombeo, la señal y la acompañante, respectivamente (Keller y Rubin, 1997). Cabe destacar que en este proceso se deben cumplir las condiciones de conservación de energía y de momento. Debido a las condiciones anteriores, las parejas de fotones exhiben correlaciones espectrales, de momento transversal y en el número de fotones emitidos. Las correlaciones tienen una naturaleza no clásica y dan lugar al entrelazamiento cuántico. En la medida en que este entrelazamiento se suprima es que es posible conseguir estados factorizables (Garay-Palmett, 2009). Por ejemplo, mediante el uso de filtros espectrales se pueden disminuir las correlaciones espectrales, yde esa manera de pueden conseguir estados de dos fotones factorizables y a partir de éstos estados de fotones individuales anunciados (Grice et al., 2001). Una configuración ampliamente utilizada consiste en dirigir uno de los fotones de la dupla para que sea detectado, dejando libre el segundo (Walborn *et al.*, 2010). En el caso de compuertas lógicas utilizadas en computación cuántica con óptica lineal, se requieren de paquetes de onda de un solo fotón en estado puro (Knill *et al.*, 2001).

Por el otro lado, se encuentra el proceso llamado mezclado de cuatro ondas espontáneo (SFWM, por sus siglas en inglés), el cual necesita de un material no lineal con una estructura cristalina no centrosimétrica o un material amorfo como es el caso del vidrio, para el que los efectos no lineales de más bajo orden deriven de la susceptibilidad eléctrica de tercer orden (Boyd, 2020). El proceso de SFWM tiene ciertas similitudes con el proceso de SPDC. Al igual que en el proceso de SPDC es mediado por las fluctuaciones del vacío (Reynaud et al., 2001), da lugar a la generación de estados de dos fotones con el matiz que se requiere la aniquilación de dos fotones del bombeo para generar el par (McGuinness et al., 2010), se deben cumplir con condiciones de conservación de energía y momento, el estado de dos fotones exhibe en general correlaciones en grados de libertad de variable continua y si es que estas correlaciones son suprimidas y el estado se produce de forma factorizable, se puede conducir a la implementación de estados de fotones individuales anunciados (Garay-Palmett, 2009). Se diferencia principalmente en que la eficiencia de generación escala linealmente con la potencia del bombeo y en que es un proceso flexible que puede implementarse en diferentes configuraciones, produciendo estados de dos fotones con distintas propiedades, acondicionadas para diversas aplicaciones.

Como se ha mencionado previamente, este trabajo forma parte de un proyecto encaminado a la implementación de compuertas cuánticas de un qubit en circuitos fotónicos integrados, en el que el proceso de DFG de tercer orden juega un rol esencial. Por ello, es importante plantear el estudio de los procesos de traslación espectral para realizar compuertas cuánticas. Es importante recalcar que con base en la generación del estado de fotón individual anunciado, es posible generar un arreglo integrado en un sustrato con todos los elementos de la compuerta (Boyd, 2020).

Si bien en el presente trabajo se consideran procesos no lineales de tercer orden, vale la pena mencionar que previamente se han reportados estudios de traslación espectral con la finalidad de implementar compuertas de pulsos en medios no lineales de segundo orden (Brecht *et al.*, 2011). Estas exploraciones se llevan a cabo con una combinación de dos sistemas: primero, una fuente de fotones individuales puros basada en SPDC, segundo, con el objetivo de manipular los estados cuánticos por medio de conversión de frecuencia es que se implementa un dispositivo que funciona con base en Generación de Diferencia de Frecuencia de segundo orden (Koshino, 2009). Es de este tipo de implementaciones que surge la idea de implementar un dispositivo basado en DFG en medios no lineales de tercer orden para lograr una traslación espectral de una señal.

El proceso de generación de diferencia de frecuencia de tercer orden se manifiesta como la traslación espectral de una señal que incide al medio no lineal. Consiste de una interacción de cuatro campos electromagnéticos, dos campos de bombeo, la señal a trasladar y la señal trasladada, ver figura 1. La traslación espectral está mediada por los dos haces de bombeo, esto quiere decir que la diferencia en frecuencia entre la señal a trasladar y la trasladada dependerá de la diferencia entre las frecuencias centrales de los bombeos(McGuinness *et al.*, 2010).



Figura 1. Esquema del proceso de generación de diferencia de frecuencia en un medio no lineal de tercer orden.

En este trabajo se estudia el proceso de DFG en guías de onda tipo cresta de nitruro de silicio, como la que se muestra en la figura 2. La selección del material se fundamenta en lo siguiente: primero, que tenga un índice de refracción no lineal alto; segundo, que sea transparente en el rango de longitudes de onda que se quiere trabajar correspondientes al intervalo entre 400 nm a 1600 nm. Materiales que cumplen estas condiciones existen varios, entre ellos está el vidrio (dióxido de silicio), el cual es un ejemplo de un material común capaz de llevar a cabo el proceso de diferencia de frecuencias. Cada material tiene un índice de refracción distinto y esto influye para elegir el material a utilizar. Recordemos que el índice de refracción es el valor de la relación de la velocidad de la luz en el material con respecto al vacío (Hecht, 2017). En un medio de tercer orden, este índice de refracción está compuesto por dos partes: una primera parte lineal a la que se suma una segunda parte no lineal, que es directamente proporcional a la intensidad del campo electromagnético que se propaga en el medio. Mientras mayor sea el valor de la parte no lineal del índice de refracción, más sencillo será poder observar el fenómeno (Boyd, 2020). Este fenómeno se denomina refracción no lineal y puede describirse como un proceso en el que un campo electromagnético, con la suficiente intensidad, modifica el índice de refracción que el mismo ve, de acuerdo a la relación $n = n_0 + n_2 I$ (Agrawal, 2000), donde n_o es el índice de refracción lineal, I es la intensidad del campo y n_2 es el índice de refracción no lineal, el cual es proporcional a la parte real de χ^3 .

Tabla 1. Valor del índice de refracción no lineal para los diferentes materiales propuestos en el diseño de la guía de onda tipo cresta.

Material	n ₂ (cm ² /W)
Si ₃ N ₄	$2.6X10^{-7}$
SiO ₂	2.25 <i>X</i> 10 ⁻⁸
Si	$4.5X10^{-6}$

El nitruro de silicio, además de ser transparente a frecuencias ópticas, exhibe una n_2 mayor que el dióxido de silicio como se observa en la tabla anterior (Rahim *et al.*, 2017), razón por la cual actualmente está siendo ampliamente usado para la generación de efectos no lineales en guías de onda (Blumenthal *et al.*, 2018). Además, se observa como el dióxido de silicio cuenta con un valor menor del índice de refracción no lineal (Gubler y Bosshard, 2000). Lo anterior motiva la selección del material no lineal para el estudio aquí descrito.



Figura 2. Diseño de una guía de onda tipo cresta

En este trabajo se plantea una guía de onda tipo cresta para la generación de

la diferencia de frecuencia, donde el nitruro de silicio toma el papel del núcleo y se encuentra sobre una plataforma de dióxido de silicio sobre silicio. La geometría de guía de onda seleccionada se considera rodeada en aire, lo cual contribuye a obtener el contraste dieléctrico necesario para atrapar la luz en el núcleo, funcionando como guía de onda. Fabricar estas guías como un dispositivo integrado disminuye el tamaño del arreglo. Esto se logra de la misma forma en la que se imprimen chips de computadoras clásicas en obleas de silicio, utilizando el proceso conocido como fotolitografía.

En resumidas cuentas, en este trabajo de tesis se tratarán con guías de ondas integradas tipo cresta de nitruro de silicio, las cuales cuentan con dimensiones de ancho, altura y largo específico, dado que estas características definirán si el proceso de traslación espectral de un estado de fotón se puede cumplir. En el presente documento se explica el proceso a seguir para el diseño de una guía de onda tipo cresta de nitruro de silicio con la capacidad de trasladar una señal en el espectro. Por último, es necesario resaltar que el proyecto tiene como objetivo final una implementación futura de este tipo de guías de onda como medios para la generación de procesos no lineales que conlleven al desarrollo de compuertas cuánticas.

1.2 Hipótesis

Es posible generar una traslación en frecuencia de estados de fotones individuales por medio de interacciones no lineales de tercer orden en medios guiados.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

El objetivo de este proyecto es estudiar la traslación espectral de estados cuánticos de fotón individual, mediante el proceso de generación de diferencia de frecuencias en guías de onda tipo cresta de nitruro de silicio (Si_3N_4). El estudio implica el diseño de una propuesta experimental.

1.3.2 Objetivos específicos

- Estudiar la teoría del proceso de diferencia de frecuencias en guías de onda con susceptibilidad eléctrica de tercer orden, $\chi^{(3)}$, considerando que la señal corresponde a un estado de fotón individual.
- Estudiar las propiedades de dispersión y de propagación de guías de onda de nitruro de silicio.
- Implementar una rutina numérica que permita identificar una guía de onda que cumpla con las condiciones de empatamiento de fases y de empatamiento de velocidades de grupo para el proceso de generación diferencia de frecuencias, en las longitudes de onda de interés y cuyas dimensiones correspondan con las restricciones del proceso de fabricación.
- Diseñar una propuesta con parámetros realistas, que conlleve a la demostración experimental de un proceso de generación de diferencia de frecuencia, acondicionado en sus propiedades de velocidad de grupo.
- Hacer simulaciones del espectro y la eficiencia de generación en el proceso de conversión de frecuencias que permitan validar el diseño propuesto.
- Familiarizarse con los procesos de síntesis y caracterización óptica del nitruro de silicio, así como con la técnica de fabricación de guías de onda por fotolitografía.

1.4 Estructura de la tesis

En el capítulo dos se describen los fundamentos teóricos necesarios para la comprensión de este trabajo, incluyendo temas como la propagación de la luz en guías de onda y la cuantización del campo electromagnético. En el capítulo tres se presenta la derivación de un modelo teórico del proceso no lineal de interés para la presente investigación, el cual corresponde con la generación de diferencia de frecuencias en guías de onda con susceptibilidad eléctrica de tercer orden. Asimismo, se analiza, como caso particular, la traslación espectral de un fotón individual mediante DFG. En el capítulo cuatro, se presenta una breve descripción de las técnicas de síntesis y la caracterización óptica de los materiales que se proponen en el diseño de la guía de onda mencionada, así como un análisis estadístico de sus características de dispersión. En el capítulo cinco se presenta la metodología implementada para realizar una exploración sistemática de los parámetros geométricos de la guía de onda y de las características de los láseres de bombeo, mediante la cual se encontró un diseño experimental adecuado para realizar el proceso de DFG, de acuerdo con el modelo teórico presentado en el capítulo tres. Para la determinación del diseño final se tuvieron en cuenta las limitantes impuestas por la infraestructura disponible. Finalmente, en el capítulo seis se presentan las principales conclusiones del trabajo.

Capítulo 2. Fundamentos teóricos

El objetivo de esta sección es resumir los conceptos de óptica fundamentales para la comprensión de este trabajo, cubriendo principalmente los temas de ondas electromagnéticas, ecuaciones de Maxwell, relación de dispersión, velocidad de grupo, óptica no lineal y propagación de luz en guías de onda.

2.1 Características de una onda electromagnética

La luz es un fenómeno de ondas descrito por los mismos principios que gobiernan todas las formas de radiación electromagnética. De la misma manera en que es posible distinguir a simple vista los diferentes colores del arcoiris que se forma luego de una lluvia, resulta posible discernir estos colores por otras características físicas. Estas son las propiedades que nos permiten distinguir ondas electromagnéticas. Para precisar cuáles son estas características que definen a una onda en particular, se utilizará el ejemplo de un oscilador armónico simple, debido a que permite analizar de manera sencilla el movimiento oscilatorio. Este sistema físico consiste en una masa atada a un resorte, el cual oscila en el tiempo; este sistema es descrito por la ley de Hooke (Hooge, 2016). Al empujar un bloque contra el resorte, este se comprime una distancia x. Aunque x parece ser simplemente una coordenada, para los resortes esto además representa un desplazamiento desde la posición de equilibrio. Experimentalmente tenemos que, para duplicar un desplazamiento determinado, se necesita duplicar la fuerza, mientras que triplicarlo requiere triplicar la fuerza. Esto significa que la fuerza ejercida por el resorte, debe ser proporcional al desplazamiento de x o bien:

$$\vec{F} = -k\vec{x}.\tag{1}$$

 \vec{F} se considera una fuerza de restitución, debido a que va siempre en la dirección contraria al desplazamiento inicial de la masa, k es la constante del resorte que se esté utilizando (Serway *et al.*, 2013).

Para obtener los parámetros que identifican a un sistema oscilatorio primero se encontrará la ecuación de movimiento para este resorte. Para resolver este sistema, es necesario como primer paso recordar la segunda ley de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$
 (2)

Igualando \vec{F} de las ecuaciones (1) y (2), y recordando que la aceleración es la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$
 (3)

De la ecuación anterior deriva entonces el primer parámetro que caracteriza a una onda: la **frecuencia**, cuyo valor nos dice el número de ciclos o vibraciones completas por unidad de tiempo que realiza la masa debido al resorte, en este caso:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$
(4)

En el caso de la luz, en lugar de ser una masa que oscila debido a un resorte, lo que se encuentra es un sistema en donde hay dos campos el eléctrico y el magnético, los cuales se encuentran oscilando uno con respecto al otro en el espacio, ver figura 3. Donde ν representa el número de ciclos de onda por unidad de tiempo (Andrews, 1999), por lo que la relación para la luz es:

$$\omega = 2\pi\nu. \tag{5}$$



Figura 3. Campo eléctrico oscilante E y campo magnético B asociado con una radiación monocromática. Tomada de Andrews (1999)

La frecuencia es aquella característica de las ondas electromagnéticas que nosotros a través de nuestros ojos identificamos en la forma de colores. Por ejemplo, lo que se denomina espectro visible comprende radiación electromagnética que va desde el violeta hasta el rojo, siendo el violeta la luz con frecuencia más alta, mientras que el rojo la de frecuencia más baja de esa parte del espectro electromagnético, ver figura 4 (Sliney, 2016).



Figura 4. Clasificación de la luz en términos de su frecuencia y longitud de onda. Tomado de Andrews (1999)

Con el primer concepto ya aclarado, sigamos definiendo más términos importantes. Reemplazando la ecuación 4 en 3 obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$
 (6)

Esta es la ecuación diferencial que representa al oscilador armónico y tiene la siguiente solución (Goldstein *et al.*, 2002) :

$$x(t) = ACos(\omega t - \theta), \tag{7}$$

la cual, representa el movimiento oscilatorio de la masa y cuenta con tres términos que la identifican A, ω y θ . Como se observa en la figura 5(a), A representa a la distancia máxima de desplazamiento vertical medida desde la posición de equilibrio y es la llamada **amplitud**, esta cantidad físicamente se relaciona principalmente con la intensidad de la luz (brillo). En la ecuación 7, t es la variable temporal. T en la figura 5(a) es el periodo de la oscilación, éste dice el tiempo necesario para que se termine un ciclo completo y se define como $T = 2\pi/\omega$. Por último el término θ es un factor de desfase.

El último parámetro que queda por identificar, es aquel que está definido como la distancia entre dos puntos sucesivos de comportamiento idéntico en la onda. Esta distancia es llamada **longitud de onda** y es representada típicamente por la letra griega λ (Serway *et al.*, 2013). Para explicar de manera más adecuada este concepto se introduce la onda viajera, la cual es una perturbación que se propaga con velocidad constante y con forma "fija" (Tipler y Mosca, 2021). La función de onda de una onda viajera es muy similar a la que se presentó en la ecuación 7 solo que en este caso también se incluye la dependencia espacial de la siguiente manera:

$$x(z,t) = A\cos(kz - \omega t + \theta), \tag{8}$$

donde *z* es la variable espacial y k el numero de onda y se define como:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$
(9)

De la ecuación 8 se puede ver que la onda es periódica tanto en el tiempo como en el espacio. El periodo espacial es justamente la longitud de onda, la cual está resaltada en la figura 5(b). La figura 5(b) muestra una onda que viaja a una velocidad v en la dirección positiva del eje z. La velocidad de la onda es igual a $V = \omega/k$.



Figura 5. (a) Posición de un oscilador con respecto al tiempo cuando A=2 m, θ =0.3 π , T= π s (b) Onda viajera de longitud de onda λ y amplitud A.

2.2 Ondas electromagnéticas

El estudio de las ondas electromagnéticas en medios materiales inicia con el planteamiento de las ecuaciones de Maxwell (Lax y Nelson, 1976), las cuales describen el actuar de los campo eléctricos (\vec{E}) y magnéticos (\vec{B}), considerando el caso en el que no hay cargas ni corrientes en los materiales.

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \tag{10}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{11}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\tag{12}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},\tag{13}$$

$$D = \varepsilon E + P, \tag{14}$$

$$B = \mu H + M. \tag{15}$$

A partir de las ecuaciones 10 - 13 se deriva la ecuación de onda. Para esto primero se aplica un rotacional ($\nabla \times$) a ambos lados de la ecuación (12)

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B}.$$
 (16)

Ahora para desarrollar el lado izquierdo es necesario utilizar la propiedad del triple producto obteniendo:

$$\nabla \nabla \cdot E - \nabla^2 E = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B}.$$
 (17)

Como se expresa en la ecuación (10), el producto del primer sumando del lado izquierdo de la ecuación 17 es igual cero y en el lado derecho se reemplaza la ecuación (17) quedando:

$$-\nabla^2 \vec{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad (18)$$

en donde el término $\mu\epsilon$ es el inverso de la velocidad de fase de la onda electromagnética (Born y Wolf, 2013).

$$\frac{1}{v^2} = \mu \varepsilon, \tag{19}$$

$$-\nabla^2 \vec{E} + \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$
 (20)

Las soluciones a la anterior ecuación diferencial toman muchas formas, pero por sencillez se utilizará aquí la solución correspondiente con las ondas planas, la cual tiene la siguiente forma:

$$\vec{E} = Re\left(Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right). \tag{21}$$

Reemplazando la expresión del campo eléctrico (21) en la ecuación de onda (20) y desarrollando las derivadas se obtiene el siguiente resultado :

$$-k^{2}\vec{E} + \frac{\omega^{2}\vec{E}}{v^{2}} = 0,$$
 (22)

por consiguiente:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}.$$
 (23)

Se puede relacionar la velocidad v con la velocidad de propagación de la luz en el vacío a través de la relación v = c/n, siendo *n* el índice de refracción del medio en el

que se propaga la onda y c la velocidad de la luz en el vacío. Sustituyendo se obtiene:

$$k = \frac{n\omega}{c}.$$
 (24)

La expresión (24) es conocida como la relación de dispersión y relaciona la rapidez de variación de la onda en el tiempo y en el espacio. Aunque esta relación parezca sencilla, hay que recordar que el índice de refracción es función de la frecuencia $n(\omega)$ (Born y Wolf, 2013). La relación de dispersión es un concepto importante para el entendimiento de este trabajo.

2.3 Velocidad de grupo

El siguiente concepto a explorar es la velocidad de grupo, concepto importante en este trabajo, debido a que la interacción no lineal bajo estudio comprende campos electromagnéticos pulsados con duración corta (Agrawal, 2000). Para definir la velocidad de grupo hay que comenzar primero con un concepto encontrado en el Teorema de Fourier. Cualquier onda ψ siempre que cumpla con ciertas condiciones, es posible describirla como la superposición de dos o mas ondas monocromáticas de diferentes frecuencias y amplitudes, es decir cualquier onda por más complicada que esta sea puede ser descrita como la suma de ondas más sencillas. Esto matemáticamente se describe de la siguiente manera:

$$\psi(r,t) = Re \int_0^\infty a_\omega(r) e^{-i[\omega t - g_\omega(r)]} d\omega, \qquad (25)$$

Donde Re indica que se toma en cuenta solo la parte real del resultado de la integral, $a_{\omega}(r)$ la amplitud de cada componente, t es el tiempo y $g_{\omega}(r)$ es un término de fase. El término velocidad de grupo hace referencia a la forma en la que se define una onda monocromática, apreciable en la ecuación (26). En esta ecuación una onda cuasimonocromática es definida como aquella donde las amplitudes de Fourier a_{ω} solo difieren de forma apreciable de cero, dentro de un rango pequeño alrededor de una frecuencia promedio $\bar{\omega}$; en este caso usualmente es un grupo de ondas las que cumplen con ésta definición por lo que se habla de éstas como un grupo de ondas o un paquete de ondas.

$$\bar{\omega} - \frac{1}{2}\Delta\omega \le \omega \le \bar{\omega} + \frac{1}{2}\Delta\omega \qquad (\Delta\omega/\bar{\omega} \ll 1).$$
(26)

Para ilustrar mejor, consideremos el ejemplo de una onda compuesta la cual puede describirse como una combinación de dos ondas. Para ser más precisos, el grupo está compuesto por dos ondas planas monocromáticas que comparten la misma amplitud, pero la segunda onda cuenta con una frecuencia y número de onda un poco diferente y ambas se propagan en la dirección de z. La suma de ambas ondas se escribe de la siguiente forma:

$$\psi(z,t) = a e^{-i(\omega t - kz)} + a e^{-i((\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)z)}.$$
(27)

Si se considera el valor promedio de la frecuencia es posible darle la siguiente forma:

$$\psi(z,t) = \alpha e^{-i(\bar{\omega}t - \bar{k}z)} \left(e^{i(\frac{1}{2}\Delta\omega t - \frac{1}{2}\Delta kz)} + e^{-i(\frac{1}{2}\Delta\omega t - \frac{1}{2}\Delta kz)} \right), \tag{28}$$

en donde:

$$\bar{\omega} = \omega + \frac{1}{2}\Delta\omega \qquad \bar{k} = \omega + \frac{1}{2}\Delta k,$$
 (29)

Utilizando la fórmula de Euler en la ecuación 28 se convierte en:

$$\psi(z,t) = a e^{-i(\bar{\omega}t - \bar{k}z)} \left[2Cos\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t - \frac{1}{2}\Delta kz\right) \right], \tag{30}$$

la cual representa a una onda modulada con una envolvente representada por el coseno. Esta envolvente se desplaza en el tiempo a una velocidad que en general es diferente a la velocidad de fase de la onda. La distancia entre los máximos de la envolvente se encuentran cada $\delta t = 4\pi/\Delta\omega$ para z fija o $\delta z = 4\pi/\Delta k$ para t fija, mientras que los máximos sucesivos para el caso de la función de fase se encuentran espaciados $\delta t = 2\pi/\Delta\omega$ y $\delta z = 2\pi/\Delta k$. De esta manera se puede calcular que la envolvente se propaga con una velocidad (Born y Wolf, 2013):

$$\nu_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k},\tag{31}$$

en el límite donde $\Delta \omega$ y $\Delta k \rightarrow 0$

$$\nu_g = \frac{d\omega}{dk},\tag{32}$$

es decir, la velocidad de grupo.

2.4 Óptica no lineal

La óptica no lineal es el estudio de los fenómenos que ocurren como consecuencia de que la luz modifique las propiedades ópticas de los materiales (Agrawal, 2000). Para lograr tal acontecimiento es necesaria una fuente de luz de alta potencia, es por esto, que por lo general solo la luz láser es lo suficientemente potente para modificar las propiedades ópticas del sistema. Los comienzos de la óptica no lineal están por ello directamente relacionados con la invención del primer láser en los años 60s (Maiman, 1960).

Llevar el nombre de **no lineal** en el título, hace referencia al hecho de que existen fenómenos que dependen de una manera no lineal al campo eléctrico aplicado al material. Para entender mejor esto, es necesario explicar la polarización macroscopica del material (\vec{P}). Iniciando por el caso más simple, el de la óptica lineal, la polarización inducida depende linealmente del campo eléctrico según la relación:

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E}(t). \tag{33}$$

En donde $\chi^{(1)}$ es conocida como la susceptibilidad lineal. Cuando un material se ve expuesto a un campo electromagnético tiende a distorsionar la distribución de cargas internas del material. Esto corresponde a la generación de momentos dipolares eléctricos, que después contribuyen con el campo total interno. Al momento dipolar resultante por unidad de volumen se le conoce con el nombre de polarización eléctrica (\vec{P}) . Para entender mejor esto es necesario explicar la polarización del medio. Para describir el caso no lineal es posible realizar una generalización realizando una expansión en serie de potencias del campo \vec{E} como (Boyd, 2020):

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 [\chi^{(1)} \vec{E}(t) + \chi^{(2)} \vec{E}^2(t) + \chi^{(3)} \vec{E}^3(t) + \dots],$$
(34)

donde $\chi^{(2)}$ y $\chi^{(3)}$ se conocen como susceptibilidades eléctricas de segundo y tercer orden, respectivamente. Si representamos entonces la expresión de la siguiente manera:

$$\vec{P}(t) = \vec{P}^{(1)} + \vec{P}^{(2)} + \vec{P}^{(3)} + \dots,$$
(35)

el primer término corresponde a la polarización lineal, $\vec{P}^{(2)}$ y $\vec{P}^{(3)}$ corresponden a la polarización de segundo y de tercer orden. En esta explicación se asumen los siguientes aspectos: primero que la polarización a un tiempo t depende solo del valor instantáneo de la potencia \vec{E} . En este análisis se asume que el medio por el que se propaga la luz no tiene pérdidas ni dispersión (Boyd, 2020).

2.4.1 Índice de refracción no lineal

En materiales amorfos y los cristales donde se da el segundo armónico, si son no centro simétricos, la susceptibilidad eléctrica de segundo orden es despreciable, por lo cual la respuesta no lineal de más bajo orden deriva de la susceptiblidad eléctrica de tercer orden. En consecuencia, el índice de refracción se describe por la siguiente relación:

$$n(\omega, I) = n_0 + n_2 I = n_0 + \bar{n}_2 |E|^2,$$
(36)

donde la I denota la intensidad promedio del campo óptico, dado por:

$$I = \frac{1}{2} n_0 \epsilon_0 c |E(\omega)|^2, \qquad (37)$$

У

$$\bar{n}_2 = \frac{3}{8n_0} Re(\chi^{(3)}_{_{XXXX}}), \tag{38}$$

donde;

$$\bar{n}_2 = \frac{1}{2} n_0 \varepsilon_0 c n_2. \tag{39}$$

El termino n_0 representa al índice de refracción lineal y el $\bar{n_2}$ es el coeficiente del índice no lineal relacionado con $\chi^{(3)}$, obteniendo la razón a la cual el índice de refracción cambia con el incremento de la intensidad del campo. El cambio del índice de refracción es un fenómeno ocasionalmente llamado Efecto Kerr Óptico por analogía con el tradicional efecto electro óptico, en el cual el índice de refracción del material aumenta de forma proporcional con el cuadrado de la potencia del campo eléctrico aplicado (Agrawal, 2000).

2.4.2 Coeficiente no lineal efectivo

El parámetro no lineal γ , está definido como:

$$\gamma = \frac{2\pi n_2}{(\lambda A_{eff})},\tag{40}$$

donde λ es la longitud de onda y A_{eff} es el área efectiva del modo de propagación de la luz en una guía de onda. El área efectiva depende de la geometría de la guía de onda, la cual determina la extensión espacial del modo propagado. En guías de onda con dimensiones transversales pequeñas y con alto contraste dieléctrico, el área efectiva se reduce significativamente, permitiendo valores de γ altos, aunque la n_2 sea baja. El índice de refracción no lineal es propio de cada material, de tal manera que una vez escogido el material, producir cambios en el valor de gamma se reduce a modificar la geometría de la guía de onda (Agrawal, 2000).

La magnitud de los efectos no lineales en guías de onda depende de γ , entre más alto sea su valor menor intensidad se requerirá para producir efectos no lineales medibles. Fibras ópticas convencionales, poseen un valor aproximado de $1W^{-1}/km$, valor muy pequeño como para que las fibras ópticas tengan un uso como medios no lineales para distancias cortas. La distancia de propagación mínima para poder observar procesos no lineales de tercer orden en guías de onda se conoce como longitud no lineal L_{NL} y está dada por

$$L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0},\tag{41}$$

donde P_o es la potencia pico de la fuente de bombeo. Aquí es posible observar que entre más alto sea el valor de gamma, para una misma potencia de bombeo, los efectos no lineales surgirán a longitudes de propagación más cortas. Cuando la longitud de la guía de onda es menor a L_{NL} los efectos no lineales no se manifiestan en la propagación de un pulso.

2.5 Propagación de luz en guías de onda

Una guía de onda es un conducto de luz que consiste en canales, franjas o cilindros de algún material dieléctrico, el cual se encuentra rodeado de otro material dieléctrico con índice de refracción menor. Para explicar como se logra confinar la luz dentro de
una guía, es conveniente utilizar la forma más sencilla que hay para modelar la luz, es decir, mediante el modelo de la óptica de rayos. En este modelo se describe la propagación de la luz como rayos perpendiculares a los frentes de onda que viajan por diferentes medios respetando una serie de reglas geométricas, es por esto que esta teoría también es conocida como óptica geométrica (Hecht, 2017; Saleh y Teich, 2019). Si bien es una teoría aproximada, ésta explica de forma satisfactoria una vasta cantidad de fenómenos que encontramos en nuestra vida cotidiana.

Se puede lograr el objetivo de guiar la luz en el espacio utilizando diferentes estrategias. Podríamos utilizar lentes de tal manera que, al manipular su posición, será posible encaminar la luz debido al fenómeno de refracción. La utilización de un sistema en donde rebote la luz de espejo a espejo es otra opción, sin embargo, el costo y lo poco práctico del arreglo lo imposibilitan. La opción ideal para guiar la luz es aquella basada en la refracción total interna en la frontera entre dos medios con índices de refracción diferentes.

El ejemplo más común de una guía de onda es el de una fibra óptica, normalmente utilizada en las telecomunicaciones, por ejemplo, las instalaciones de módems de internet en los hogares en los últimos años (Briglauer *et al.*, 2018). Este tipo de guías de onda es un conducto hecho con dos cilindros concéntricos de vidrio; el cilindro interior es llamado núcleo y tiene un índice de refracción mayor que el exterior, el cual lleva por nombre revestimiento. Los rayos de luz que viajan por la fibra óptica son totalmente reflejados en el revestimiento, sólo si estos rayos llegan con un ángulo mayor al ángulo crítico. Este ángulo es obtenido a partir de la relación conocida como Ley de Snell (Hecht, 2017), la cual permite determinar el ángulo de refracción cuando la luz se propaga de un material a otro con índice de refracción distinto. El ángulo crítico está dado por la siguiente relación, donde n_1 es el indice de refracción del primer material y n_2 del segundo:

$$\theta_c = \sin^{-1} \frac{n_2}{n_1}.\tag{42}$$

La óptica de rayos, sin embargo, no es capaz de explicar todos los fenómenos que ocurren en guías de onda, incluyendo algunos que competen en este trabajo. Es por ello que es necesario apoyarse de la interpretación de la teoría electromagnética. El fenómeno en particular que se quiere explicar para este trabajo es el de los modos de propagación en una guía de onda, lo cual se puede hacer a través del siguiente ejemplo de una manera sencilla. En la figura 6 se observa el caso de una guía de onda formada por dos espejos planos infinitos, ambos asumidos como ideales por lo que reflejan la luz sin perdidas.



Figura 6. Guía de onda plana. Recuperado de Saleh y Teich (2019).

Tomando como base el análisis de rayos en el cual se trazan los rebotes de la luz a lo largo de la guía, una forma sencilla de llevar a cabo el análisis electromagnético es asociar a cada rayo una onda electromagnética plana transversal al rayo (Saleh y Teich, 2019). El campo electromagnético es entonces la suma de estas ondas planas. Las ondas tendrán las siguientes características: longitud de onda $\lambda = \lambda_0/n$, número de onda $k = nk_0$ y velocidad de fase es $c = c_0/n$, donde n es el índice de refracción del material entre los espejos. Los parámetros que tienen un subíndice cero corresponden a los valores que tendrían éstos si las ondas se estuvieran propagando en el vacío. Para facilitar las cosas, se asume que la luz está linealmente polarizada a lo largo del eje x, mientras que la dirección en la que se propaga la onda se encuentra en el plano y-z formando un ángulo θ con el eje z. Como en el modelo de rayos la onda se refleja entre los espejos.

El siguiente paso es imponer la condición conocida como de auto-consistencia (Saleh y Teich, 2019). Esta requiere que la onda se refleje y se reproduzca a sí misma, de forma que solo se cuente con 2 ondas planas distintas. Los campos que cumplen con esta condición son los conocidos como eigen-modos o simplemente modos de una guía. Estos modos mantienen la misma distribución transversal y polarización para todas las distancias a lo largo de la guía de onda (Saleh y Teich, 2019).



Figura 7. Condición de auto-consistencia: Cuando la onda se refleja dos veces se duplica a sí misma. Recuperado de Saleh y Teich (2019).

Los ángulos de rebote que cumplen la condición de auto-consistencia se encuentran discretizados, no cualquier ángulo la cumple. Solo se cumplirá la condición para los rayos de luz que satisfagan la relación $\theta = \theta_m$, con:

$$Sen\theta_m = m\frac{\lambda}{2d} \qquad m = 1, 2, ..., \tag{43}$$

donde θ_m es el ángulo de rebote, cada valor de *m* representa a un ángulo de rebote distinto y el campo correspondiente es llamado modo *m*-ésimo. El primer modo tiene el ángulo de rebote más pequeño.

Los modos de orden superior viajan por la guía con constantes de propagación menores dado que la luz recorrerá más espacio conforme el ángulo sea más oblicuo. La constante de propagación para un modo es tradicionalmente representada como β_m .

Los valores de la constante de propagación para la geometría seleccionada aquí como ejemplo están dados por:

$$\beta_m^2 = k^2 - \frac{m^2 \pi^2}{d^2},\tag{44}$$

donde *k* es el número de onda determinado por la relación de dispersión $k = n\omega/c$ y *d* es el ancho de la guía de onda. De esta expresión se puede rescatar información útil para el entendimiento de este proyecto. Primero, la constante de propagación para el modo fundamental, es decir β_1 , es siempre menor al número de onda *k*. El modo

fundamental es además aquel que cuenta con la constante de propagación más alta de todos los modos. Segundo, si se analizan las constantes de propagación de dos modos, digamos el primero y el segundo, para la misma frecuencia de luz, recordando la definición original para la constante de propagación y dada la condición $\beta_1 > \beta_2$:

$$n_1 \frac{\omega}{c} > n_2 \frac{\omega}{c} \qquad \rightarrow n_1 > n_2. \tag{45}$$

Dado que la velocidad de la luz es una constante en el vacío y considerando que la frecuencia a analizar es la misma, se llega a la conclusión de que cada modo de propagación ve su propio índice de refracción. Este recibe justo el nombre de índice de refracción modal o índice de refracción efectivo (Saleh y Teich, 2019). Éste depende de los materiales de los que está conformada la guía de onda y se encontrará siempre en un intervalo entre el índice de refracción del núcleo y el revestimiento, a su vez depende de la geometría de la guía.

Los modos de propagación se pueden identificar por la forma de su distribución transversal. Este tipo de modos se denominan *modos transversales electromagnéticos* o TEM. Cada modo puede ser visto como una onda estacionaria en la dirección perpendicular a la dirección de propagación. Además, los modos cuyo campo eléctrico total oscila completamente en el plano transversal se denominan *transversales eléctricos* o TE, mientras que los modos cuyo campo magnético oscila completamente en el plano transversal se denominan *transversales magnéticos* o TM. Esto se puede ver de manera ilustrativa en la figura 8.



Figura 8. Polarización para los modos (a) TE y (b) TM. Recuperado de Saleh y Teich (2019).

2.6 Cuantización del campo electromagnético

Mediante este modelo es posible describir cómo la radiación electromagnética se puede entender de manera análoga a un conjunto de osciladores armónicos y como se pueden determinar las condiciones para las cuales existe cuantización de la energía (Ficek y Wahiddin, 2014). Para empezar, consideramos una onda electromagnética confinada en una cavidad uni-dimensional y con paredes perfectamente conductoras, de manera que el campo se anula en las fronteras. Se necesitan encontrar expresiones para los campos eléctrico y magnéticos que satisfacen las ecuaciones de Maxwell (ec. (10) a ec. (13)) teniendo en cuenta las condiciones de frontera planteadas. Se encuentran soluciones de la siguiente forma (Gerry *et al.*, 2005):

$$E_{x}(z,t) = \left(\frac{2\omega^{2}}{V\epsilon_{0}}\right)^{1/2} q(t)sen(kz), \qquad (46)$$

$$B_{y}(z,t) = \left(\frac{\mu_{0}\epsilon_{0}}{k}\right) \left(\frac{2\omega^{2}}{V\epsilon_{0}}\right)^{1/2} p(t)\cos(kz), \tag{47}$$

donde ω es la frecuencia del modo, k es el número de onda relacionado con la frecuencia, V es el volumen efectivo de la cavidad y q(t) es un factor de amplitud dependiente del tiempo.

El Hamiltoniano H que cuantifica la energía total del campo está dado por:

$$H = \frac{1}{2} \int dV \left[\epsilon_0 E_x^2(z,t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(z,t) \right] = \frac{1}{2} \left(p^2 + \omega^2 q^2 \right), \tag{48}$$

el cual, como se puede observar, es equivalente al Hamiltoniano de un oscilador armónico de masa unitaria (Gerry *et al.*, 2005). Las variables q y p se pueden asociar con la posición y el momento de un oscilador armónico, respectivamente. Lo que sigue, es continuar con un procedimiento similar a la cuantización del oscilador armónico, para lo cual se reemplazan las variables q y p por los operadores \hat{q} y \hat{p} que cumplen con la relación [\hat{q}, \hat{p}] = $\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar$. Por medio de éstos, se introducen los operadores de aniquilación \hat{a} y creación \hat{a}^{\dagger} , definidos como:

$$\hat{a} = (2\hbar\omega)^{-1/2} (\omega\hat{q} + i\hat{p}), \tag{49}$$

$$\hat{a}^{\dagger} = (2\hbar\omega)^{-1/2} (\omega \hat{q} - i\hat{p}),$$
 (50)

con lo cual se pueden escribir operadores de campo eléctrico y magnético del siguiente modo:

$$\hat{E}_{x}(z,t) = \mathcal{E}_{0}(\hat{a} + \hat{a}^{\dagger})sin(kz), \qquad (51)$$

$$\hat{B}_{y}(z,t) = \mathcal{B}_{0} \frac{1}{i} (\hat{a} - \hat{a}^{\dagger}) cos(kz),$$
(52)

donde $\mathcal{E}_0 = (\hbar \omega / \varepsilon_0 V)^{1/2}$ y $\mathcal{B}_0 = (\mu_0 / k) (\varepsilon_0 \hbar \omega^3 / V)^{1/2}$ representan el campo eléctrico y el magnético respectivamente (Gerry *et al.*, 2005).

Capítulo 3. Generación de diferencia de frecuencias: modelo teórico

En general, existe una variedad de fenómenos relacionados con la respuesta no lineal de tercer orden de los materiales. Éstos involucran la interacción de cuatro campos electromagnéticos en el medio no lineal, por lo cual en general estos se denominan interacciones de cuatro ondas. En este trabajo estamos interesados en el proceso de generación de diferencia de frecuencias, el cual puede conducir a la traslación espectral de una señal, mediada por la interacción con dos fuentes de bombeo.

A nivel de fotones individuales la traslación de frecuencias puede describirse como el proceso de aniquilación de un fotón de la señal a trasladar con frecuencia $\omega_{s1} (|\omega_{s_1}\rangle)$ y la creación simultánea de un fotón con frecuencia $\omega_{s2} (|\omega_{s_2}\rangle)$, siendo $\omega_{s_1} \neq \omega_{s_2}$; esto mediado por la interacción con dos fotones de bombeo a frecuencias ω_{p_1} y ω_{p_2} (Mc-Guinness *et al.*, 2010). Lo anterior se muestra de manera esquemática en la figura 9(b). Este proceso también se conoce como esparcimiento de Bragg (BS, por sus siglas en inglés). La conversión de frecuencias también puede ser producida mediante un proceso de amplificación paramétrica, basado en mezclado de cuatro ondas, sin embargo, esta configuración no es útil en este proyecto debido a que genera una mayor cantidad de ruido, derivado de la amplificación (McKinstrie *et al.*, 2005).

La razón de utilizar la configuración de BS en este trabajo es que en ésta solo se da una transformación del estado $|\omega_{s_1}\rangle$ al estado $|\omega_{s_2}\rangle$, en lugar de producirse una transferencia de energía del bombeo a las dos señales. Esto evita el ruido excesivo asociado con la ganancia en los procesos paramétricos, tales como la inestabilidad de modulación (modulation instability, en inglés), en los cuales se amplifican las fluctuaciones del vacío (McKinstrie *et al.*, 2005; Agha *et al.*, 2012).

Los procesos paramétricos que involucran la interacción de cuatro ondas están condicionados al cumplimiento de los principios de conservación de energía y momento. Para el caso de nuestro interés, la generación de diferencia de frecuencias, la conservación de energía impone la siguiente relación entre las frecuencias de los campos involucrados:

$$\omega_{P_1} + \omega_{S_1} = \omega_{S_2} + \omega_{P_2}. \tag{53}$$

Por otro lado, la conservación de momento está relacionada con el empatamiento de fases entre las ondas que interactúan, determinando la eficiencia máxima de conversión (Boyd, 2020). En el caso de DFG, esta condición se expresa como:

$$\vec{k}_{p1}(\omega_{p1}) + \vec{k}_{s1}(\omega_{s1}) = \vec{k}_{s2}(\omega_{s2}) + \vec{k}_{p2}(\omega_{p2}), \tag{54}$$

siendo $\vec{k}_{\mu}(\omega_{\mu})$ el vector de onda del campo oscilando a la frecuencia ω_{μ} ($\mu = p1, p2, s1, s2$).



Figura 9. (a) Esquema del proceso de DFG. A la salida del material no lineal se puede ver que puede haber un remanente de los campos de bombeo y del campo a trasladarse (S_1), los cuales se muestran con líneas punteadas. (b) Diagrama de energía del proceso DFG. Un fotón del bombeo 1 (P1) y un fotón del campo S1 son aniquilados, mientras que un fotón del bombeo 2 (P2) y un fotón del campo S2 son creados. Esquema tomado de McGuinness *et al.* (2010).

La figura 9(a) ilustra el proceso de BS o DFG. La señal S1 es combinada con los bombeos P_1 y P_2 para así generar la señal S_2 . El único requerimiento para este sistema es que los dos campos P_1 y P_2 tengan una diferencia de frecuencia ($\Delta \omega_{BS}$) igual a la diferencia de frecuencia entre la señal original y la trasladada, lo cual es consecuencia del principio de conservación de energía que determina la relación de frecuencias entre los campos (como se observa en la ecuación (53)). Este método para la generación de traslación de frecuencias ha sido demostrado en fibras ópticas de cristal fotónico (también conocidas como fibras microestructuradas). El método de esparcimiento de Bragg se presume de ser teóricamente sin ruido (McGuinness *et al.*, 2010).

El proceso de DFG se ha empleado para numerosas aplicaciones, entre ellas, la generación, detección y amplificación de luz coherente (Wang *et al.*, 2020; Kasture, 2017), o incluso la traslación espectral de campos ópticos no clásicos, como por ejemplo estados de fotones individuales anunciados (McGuinness *et al.*, 2010). De hecho, en esta tesis es de interés el estudio de la generación de diferencia de frecuencias considerando fotones individuales.

De acuerdo con McGuinness *et al.* (2010), para que el proceso de traslación espectral de estados de fotón individual anunciado resulte útil en redes cuánticas se deben cumplir dos condiciones:

- Preservar la naturaleza del estado original, como las correlaciones cuánticas con su pareja, siendo la única diferencia la frecuencia central. Esto para el caso de que el fotón original sea un subestado de una pareja de fotones.
- 2. Tiene que ser altamente eficiente, sin introducir ruido adicional.

Precisamente, es posible cumplir los mencionados requerimientos si realizamos la traslación de frecuencia usando óptica no lineal de tercer orden.

3.1 Fuentes de fotones individuales basadas en óptica no lineal:

De acuerdo con Migdall *et al.* (2013), las fuentes de fotones individuales se clasifican ya sea como probabilísticas o como deterministas. Las fuentes deterministas son aquellas en las cuales la emisión de fotones se da bajo demanda; algunos ejemplos de este tipo de fuentes son las basadas en puntos cuánticos (Senellart *et al.*, 2017), excitaciones de átomos o moléculas individuales (Kimble *et al.*, 1977), entre otros. Las fuentes probabilísticas son aquellas que están basadas en procesos de emisión de parejas de fotones, en las cuales uno de los fotones es usado para anunciar a su pareja, debido a que los dos son generados simultáneamente. Procesos como la conversión paramétrica descendente espontánea y el mezclado de cuatro ondas espontáneo son los más estudiados para la producción de pares de fotones y de fotones individuales anunciados en el contexto de la óptica no lineal. El proceso de SPDC se da principalmente en cristales con no linealidades de segundo orden, mientras que el SFWM se da en medios con no linealidades de tercer orden ($\chi^{(3)}$). Aquí nos concentramos en el SFWM, debido a que también es un proceso de tercer orden, así como la DFG.

En el SFWM, la propagación de uno o dos bombeos intensos a lo largo del medio $\chi^{(3)}$ conlleva a la generación de pares de fotones correlacionados, denominados *señal* y *acompañante*, cuyas frecuencias están relacionadas también por una condición de

empatamiento de fases (McMillan *et al.*, 2013). Esto se muestra de manera esquemática en la figura 10(a). Comúnmente se utiliza la configuración de un sólo bombeo. En este caso, el proceso se llama SFWM con bombeo degenerado, y las condiciones de conservación de energía y momento son las siguientes:

$$2\omega_{p1} = \omega_{s1} + \omega_i,\tag{55}$$

$$2\vec{k}_{p1}(\omega_{p1}) = \vec{k}_{s1}(\omega_{s1}) + \vec{k}_i(\omega_i), \tag{56}$$

donde ω_{p1} es la frecuencia del bombeo, ω_{s1} es la frecuencia de la señal y ω_i es la frecuencia del campo acompañante. Este proceso se puede explicar como que dos fotones del bombeo P_1 son aniquilados, mientras que un fotón del campo S_1 y un fotón del campo acompañante son creados. Las frecuencias de los fotones S_1 y acompañante están igualmente separadas de la frecuencia de bombeo por una cantidad $\Delta \omega_{MI}$. Esto se muestra en el diagrama 10(b).



Figura 10. (a) Esquema del proceso de SFWM con bombeos degenerados. (b) Esquema de energía del proceso de SFWM con bombeo degenerado. Dos fotones del bombeo 1 (P1) son aniquilados, mientras que un fotón del campo S_1 y un fotón del campo acompañante son creados. Esquema adaptado de McGuinness *et al.* (2010).

3.2 Propuesta para generar DFG con fotones individuales:

La traslación espectral de estados de fotón individual se podría demostrar a partir de un experimento como el que se ilustra esquemáticamente en la figura 11, el cual está compuesto de dos etapas: la primera, mediante la cual se genera un estado de fotón individual anunciado por medio de SFWM, y la segunda, mediante la cual se realiza por DFG la traslación espectral del estado de fotón individual generado. La propuesta planteada en esta tesis es similar a la realizada por McGuinness *et al.* (2010). No obstante, aquí se propone la demostración del proceso de DFG en guías de onda integradas basadas en nitruro de silicio; un medio que ofrece una alta no linealidad efectiva de tercer orden debido al alto índice de refracción no lineal del material y al alto confinamiento que se logra en estructuras guiadas de dimensiones micro y nanométricas.



Figura 11. Propuesta para generar DFG con fotones individuales.

La primera etapa representada en la figura 11 corresponde al proceso de SFWM. El acoplamiento de un campo de bombeo P_1 al primer medio $\chi^{(3)}$ conlleva a la generación de los fotones señal (S_1) y acompañante. El fotón acompañante pasará luego a ser detectado para anunciar la generación del fotón S_1 . A la salida del proceso de SFWM se puede ver que hay un remanente del bombeo. Posteriormente, la segunda etapa consiste en la generación de DFG. En esta etapa se van a acoplar el bombeo P_1 y el fotón individual S_1 provenientes de la primera etapa y un bombeo adicional P_2 , al segundo medio $\chi^{(3)}$. A la salida de la segunda etapa se tendrán entonces los remanentes de los bombeos P_1 y P_2 (los cuales se pueden filtrar), y la señal trasladada S_2 . En el diagrama se muestra la presencia de la señal a trasladarse S_1 a la salida, debido a que es posible que la traslación espectral no haya sido 100 % eficiente o que simplemente no se de.

A continuación se va a presentar el modelo del divisor de haz cuántico y luego se va adescribir el modelo del proceso de DFG para una configuración que desde el punto de vista práctico nos es de interés. Es importante revisar la teoría del divisor de haz, debido a que posteriormente es posible hacer una analogía entre éste y el proceso DFG.

3.3 Divisor de haz cuántico

Un dispositivo óptico muy utilizado y bastante conocido en un laboratorio de óptica es el divisor de haz, el cual fue creado en un principio con un objetivo en concreto: dividir en dos un haz de luz que llegue a incidir sobre este, tal como se ilustra en el esquema 12, en donde el divisor de haz está representado en específico por la línea punteada. Este dispositivo comúnmente se construye a partir de prismas o vidrios parcialmente reflectantes (Hecht, 2017).



Figura 12. Representación esquemática de un divisor de haz tratado clásicamente. E_1 representa el haz incidente, E_2 representa el haz transmitido y E_3 representa el haz reflejado.

De manera general, el divisor de haz se puede modelar como un dispositivo con dos entradas y dos salidas. De hecho, también se puede utilizar para recombinar dos haces de luz. En este caso, los dos haces de luz incidentes interfieren para producir dos haces de salida. En óptica cuántica, cuando se trabaja con haces coherentes, las amplitudes complejas de los campos eléctricos corresponden con los operadores de aniquilación respectivos (Leonhardt, 2010). Es esta representación en la forma de operadores la que es más conveniente para este trabajo. Esto se muestra de manera esquemática en la figura 13.



Figura 13. Diagrama de un divisor de haz. \hat{a}_1 y \hat{a}_2 representan a los campos de entrada que interfieren en el divisor de haz para producir los campos de salida \hat{a}_3 y \hat{a}_4 .

La relación entre los modos de entrada y salida indicados en la figura 13 es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_3\\ \hat{a}_4 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \hat{a}_1\\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}.$$
 (57)

B se conoce como la matriz de transformación del divisor de haz, y se define de forma simplificada así:

$$B = \begin{pmatrix} \tau & \rho \\ \rho & \tau \end{pmatrix},\tag{58}$$

donde τ es la transmitancia y ρ es la reflectividad.

En un contexto mecánico-cuántico es necesario encontrar un operador unitario \hat{U}_{BS} que implemente la transformación del divisor de haz de forma que se logre calcular el estado a la salida ($|\psi\rangle_{out}$) a partir del estado de entrada ($|\psi\rangle_{in}$) de la siguiente forma: $|\psi\rangle_{out} = \hat{U}_{BS} |\psi\rangle_{in}$.

En la literatura se define este operador de la siguiente manera (Henkel, 2013):

$$\hat{U}_{BS} = e^{i\theta(\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_2 + \hat{a}_2^{\dagger}\hat{a}_1)},\tag{59}$$

donde $\hat{a^{\dagger}}$ y \hat{a} son los operadores de creación y aniquilación de fotones 1 y 2. El operador \hat{U}_{BS} está parametrizado mediante un ángulo θ , el cual se puede relacionar con los coeficientes τ y ρ de la matriz en la ecuación 58, así:

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & i \, \sin\theta \\ i \, \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{60}$$

La importancia del divisor de haz en este trabajo se halla en que este es uno de los pocos dispositivos que son experimentalmente accesibles con los cuales es posible llevar a cabo el entrelazamiento de dos estados (Sanders, 1992). El entrelazamiento se encuentra en el corazón del desarrollo del procesamiento de información cuántica. Esto puede deberse a varias razones: uno, mejora la capacidad, la eficiencia y la seguridad en las comunicaciones y dos, es un tema central en la computación cuántica. Cabe mencionar también que, en computación cuántica, los qubits pueden estar altamente entrelazados (Kim *et al.*, 2002).

3.4 Cálculo teórico del proceso de DFG

Un componente importante de esta tesis fue la realización de un estudio teórico del proceso de DFG. El punto de partida consistió en la derivación del Hamiltoniano de interacción (Garay-Palmett *et al.*, 2007), el cual está dado por:

$$H(t) = \frac{3}{8} \epsilon_0 \chi^{(3)} \int dV \left(E_{P_1} E_{P_2}^* \epsilon_{S_1}^+ \epsilon_{S_2}^- + E_{P_1}^* E_{P_2} \epsilon_{S_1}^- \epsilon_{S_2}^+ \right), \tag{61}$$

donde $E_{P_1} \equiv E_{P_1}(\vec{r}, t)$ y $E_{P_2} \equiv E_{P_2}(\vec{r}, t)$ son los campos de bombeo , los cuales inicialmente se asumen como pulsados, es decir que tienen un ancho de banda. Asimismo, estos campos son considerados clásicos debido a que suelen ser intensos comparados con la señal a trasladar y la trasladada. A su vez, $\varepsilon_{S_1}^+ \equiv \hat{\varepsilon}_{S_1}(\vec{r}, t)$ y $\varepsilon_{S_2}^- \equiv \hat{\varepsilon}_{S_2}(\vec{r}, t)$ representan a los campos de la señal a trasladar y la trasladada, respectivamente, los cuales se asumen cuantizados dado que es de interés para esta tesis estudiar el proceso de traslación espectral por DFG de estados de fotón individual. Por último V es el volumen de interacción. Además se tuvieron en cuenta las siguientes consideraciones: Los campos se propagan en la misma dirección (a lo largo del eje de propagación de una guía de onda, eje z en el sistema de referencia considerado), la configuración se considera co-polarizada $(\chi^{(3)} = \chi_{xxxx}^{(3)})$ y los cuatro campos que interactúan viajan en el mismo modo espacial. Los campos de bombeo tienen la siguiente forma funcional (Corona et al., 2011):

$$E_{\mu} = A_{\mu} f_{\mu}(x, y) \int d\omega_{\mu} \tilde{\alpha}(\omega_{\mu}) e^{-i[\omega_{\mu}t - k_{\mu}z]}, \qquad (62)$$

en donde $\mu = P_1, P_2$. Esta representación es conveniente puesto que permite describir campos que no necesariamente son monocromáticos, recordando que los bombeos se asumieron pulsados. A_{μ} es la amplitud del campo y está dada por (Brecht *et al.*, 2011):

$$A_{\mu}^{2} = \frac{2P_{\mu}}{\epsilon_{0}cn\left|\int d\omega_{\mu}\tilde{\alpha}(\omega_{\mu})\right|^{2}},$$
(63)

f(x, y) representa la distribución transversal normalizada del modo de propagación, $\tilde{\alpha}(\omega_{\mu})$ es la envolvente espectral de los campos de bombeo. A su vez, P_{μ} es la potencia pico de los bombeos, c es la velocidad de la luz en el espacio libre y n el índice de refracción lineal del medio.

La forma funcional de los campos de la señal a trasladar y la trasladada es la siguiente:

$$\varepsilon_{\nu}^{+} = i\sqrt{\delta k_{\nu}} f_{\nu}(x, y) \sum_{k_{\nu}} l_{\nu}(k_{\nu}) \hat{a}_{k_{\nu}}^{\dagger} e^{-i[\omega_{\nu}t - k_{\nu}z]},$$
(64)

en donde $\nu = S_1, S_2$. δk es el espaciamiento entre modos, el cual está definido como $\delta k = 2\pi, /L_q$ donde L_q es la longitud de cuantización (Loudon, 2000) y l_{ν} es un término relacionado con la amplitud de los campos cuantizados, el cual está definido como (Corona *et al.*, 2011):

$$l_{\nu}(k) = \left[\frac{\hbar\omega_{\mu}(k)}{\pi\epsilon_0 n^2(\omega_{\mu}(k))}\right]^{1/2}.$$
(65)

Las distribuciones transversales y las envolventes espectrales de los campos están normalizadas de tal forma que:

$$\int \int dx dy |f(x, y)|^2 = 1, \tag{66}$$

$$\int d\omega |\tilde{\alpha}(\omega)|^2 = 1.$$
(67)

Para tener consistencia con la normalización que se definió en la ecuación 67, se definió a la envolvente espectral normalizada $\tilde{\alpha}(\omega_{\mu})$ en términos de una constante de

normalización α_{μ} :

$$\tilde{\alpha}(\omega_{\mu}) = \alpha_{\mu}\alpha(\omega_{\mu}), \tag{68}$$

donde $\alpha(\omega_{\mu})$ es la envolvente espectral adimensional.

Reemplazando las definiciones de los campos (ecs. (62) y (64)) y la ec. (68) dentro de la ecuación 61 se calcula el Hamiltoniano de interacción, obteniendo:

$$H(t) = \int dV \alpha_1 A_{P_1} \alpha_2 A_{P_2} \sqrt{\delta k_{S_1}} \sqrt{\delta k_{S_2}} f_{P_1} f_{P_2}^* f_{S_1} f_{S_2}^* \int \int d\omega_{P_1} d\omega_{P_2} \alpha(\omega_{P_1}) \alpha^*(\omega_{P_2}) \\ \sum_{k_{S_1}} \sum_{k_{S_2}} l(k_{S_1}) l(k_{S_2}) \hat{a}_{k_{S_1}} \hat{a}_{k_{S_2}}^\dagger e^{-i[\Delta \omega t]} e^{i\Delta kz} + H.C, \quad (69)$$

en donde *H.C.* simboliza el término conjugado hermítico. También se pueden observar los términos correspondientes al desempatamiento de fase y la relación entre las frecuencias de los campos interactuantes, la cual corresponde a la conservación de la energía cuando es igualada a cero:

$$\Delta k = k_{P_1} - k_{P_2} + k_{S_1} - k_{S_2},\tag{70}$$

$$\Delta\omega = \omega_{P_1} - \omega_{P_2} + \omega_{S_1} - \omega_{S_2}. \tag{71}$$

Con el objetivo de simplificar la expresión (69) se introducen las siguientes definiciones:

El traslape entre las distribuciones transversales de los cuatro campos:

$$f_{eff}(x,y) = \iint dx dy f_{P_1} f_{P_2}^* f_{S_1} f_{S_2}^*.$$
(72)

 El producto de las amplitudes de los bombeos y las constantes de normalización de las envolventes espectrales:

$$A = \alpha_1 A_{P_1} \alpha_2 A_{P_2}. \tag{73}$$

Reemplazando los factores definidos en las ecuaciones (72) y (73) en la ecuación (69)

se obtiene la siguiente expresión

$$H(t) = \frac{3}{8} \epsilon_0 \chi^{(3)} \sqrt{\delta k_{S_1}} \sqrt{\delta k_{S_2}} A f_{eff} \int \int d\omega_{P_1} d\omega_{P_2} \alpha(\omega_{P_1}) \alpha^*(\omega_{P_2})$$
$$\sum_{k_{S_1}} \sum_{k_{S_2}} l(k_{S_1}) l(k_{S_2}) \hat{a}_{k_{S_1}} \hat{a}^{\dagger}_{k_{S_2}} e^{-i(\Delta \omega t)} \int_0^L e^{i\Delta kz} dz + H.C.$$
(74)

Para seguir reduciendo esta expresión hay que enfocar nuestra atención en la integral con respecto a *z*, la cual está integrando sobre todo el largo de la guía de onda, L. El resultado de esta integral es:

$$\int_{0}^{L} e^{i\Delta kz} dz = LSinc\left[\frac{L}{2}\Delta k\right] e^{i\Delta k\frac{L}{2}}.$$
(75)

Ahora bien, el operador de evolución temporal correspondiente al proceso no lineal de DFG está dado por :

$$\hat{U} = e^{\frac{-i}{\hbar} \int H(t)dt},\tag{76}$$

donde $\hbar = h/2\pi$, con *h* la constante de Planck y H(t) dado por la ecuación (74).

A partir del operador de evolución temporal se puede conocer el estado de salida $|\psi_{out}\rangle$, dado un estado de entrada $|\psi_{in}\rangle$, mediante la relación

$$|\psi_{out}\rangle = \hat{U}|\psi_{in}\rangle. \tag{77}$$

En la ecuación (77) se puede observar como toda la información de la interacción no lineal se encuentra contenida en el operador de evolución temporal \hat{U} .

Como se observa en la ecuación (76), el operador de evolución está dado en términos de la integral del operador Hamiltoniano respecto al tiempo. Para realizar esta integral vemos que el único término afectado es el factor exponencial que incluye en su argumento la relación dada por la ecuación (71). Realizando esta integral obtenemos el siguiente resultado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Delta\omega t} dt = 2\pi\delta(\Delta\omega) = 2\pi\delta[(\omega_{P_1} + \omega_{S_1} - \omega_{S_2}) - \omega_{P_2}].$$
(78)

Reemplazando los resultados de las integrales (75) y (78) en la ecuación (74) se obtie-

ne la siguiente expresión:

$$\frac{-i}{\hbar} \int dt H(t) = \frac{-3(2\pi)i}{8\hbar} \epsilon_0 \chi^{(3)} \sqrt{\delta k_{S_1}} \sqrt{\delta k_{S_2}} A f_{eff} \int d\omega_{P_1} \alpha(\omega_{P_1}) \alpha^* (\omega_{P_1} + \omega_{S_1} - \omega_{S_2}) \\ \sum_{k_{S_1}} \sum_{k_{S_2}} l(k_{S_1}) l(k_{S_2}) \hat{a}_{k_{S_1}} \hat{a}^{\dagger}_{k_{S_2}} LSinc\left[\frac{L}{2}\Delta k\right] e^{i\Delta kL/2} + H.C.$$
(79)

Agrupando términos nuevamente, definimos:

$$\theta_0 = \frac{3}{8\hbar} \epsilon_0 \chi^{(3)} A(2\pi) f_{eff} L \qquad y \tag{80}$$

$$G(k_{S_1}, k_{S_2}) = \int d\omega_{P_1} \alpha(\omega_{P_1}) \alpha^*(\omega_{P_1} + \omega_{S_1} - \omega_{S_2}) Sinc\left[\frac{L}{2}\Delta k\right] e^{i\Delta k L/2} l(k_{S_1}) l(k_{S_2}).$$
(81)

Reemplazando estos nuevos términos (ecuaciones (80) y (81)) llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{-i}{\hbar} \int dt H(t) = -i\theta_0 \sqrt{\delta k_{S_1}} \sqrt{\delta k_{S_2}} \sum_{k_{S_1}} \sum_{k_{S_2}} \hat{a}_{k_{S_1}} \hat{a}^{\dagger}_{k_{S_2}} G(k_{S_1}, k_{S_2}) + H.C.$$
(82)

Ahora conviene expresar la ecuación (82) en variable continua, lo cual se logra en el límite $\delta k \rightarrow 0$, o equivalentemente $Lq \rightarrow \infty$. Teniendo en cuenta lo anterior, la conversión de suma a integral se hace sustituyendo la sumatoria por una integral dependiente de la frecuencia de la siguiente manera (Loudon, 2000):

$$\sum_{k_{\mu}} \rightarrow \frac{1}{\delta k_{\mu}} \int dk_{\mu} \rightarrow \frac{1}{\delta k_{\mu} v_{g_{\mu}}} \int d\omega_{\mu} \rightarrow \frac{1}{\delta \omega_{\mu}} \int d\omega_{\mu},$$
(83)

donde $v_{g_{\mu}}$ es la velocidad de grupo, la cual se define como $1/v_{g_{\mu}} = dk_{\mu}/d\omega_{\mu}$, y $\delta\omega_{\mu} = \delta k_{\mu}v_{g_{\mu}}$. Es importante mencionar que los operadores de aniquilación y creación discretos cumplen con la siguiente relación de conmutación:

$$\left[\hat{a}_{k_{\mu}}, \hat{a}_{k_{\nu}}^{\dagger}\right] = \hat{a}_{k_{\mu}}\hat{a}_{k_{\nu}}^{\dagger} - \hat{a}_{k_{\nu}}^{\dagger}\hat{a}_{k_{\mu}} = \delta_{k_{\mu},k_{\nu}}, \tag{84}$$

donde $\delta_{k_{\mu},k_{\nu}}$ es la función delta de Kronecker. A su vez, la función delta de Kronecker discreta está relacionada con la función delta de Dirac a través de la siguiente relación:

$$\delta_{k_{\mu},k_{\nu}} = \delta\omega_{\mu}\delta(\omega_{\mu} - \omega_{\nu}) \tag{85}$$

Considerando las relaciones anteriores, se encuentra que los operadores de aniquilación y creación continuos están relacionados con sus contrapartes discretas así (Loudon, 2000):

los cuales cumplen con la siguiente relación de conmutación:

$$\left[\hat{a}(\omega_{\mu}), \hat{a}^{\dagger}(\omega_{\nu})\right] = \hat{a}(\omega_{\mu})\hat{a}^{\dagger}(\omega_{\nu}) - \hat{a}^{\dagger}(\omega_{\nu})\hat{a}(\omega_{\mu}) = \delta(\omega_{\mu} - \omega_{\nu}), \tag{87}$$

donde $\delta(\omega_{\mu} - \omega_{\nu})$ es la función delta de Dirac.

Reemplazando las ecuaciones (83) y (86) en (82) se tiene:

$$\frac{-i}{\hbar}\int dt H(t) = -i\theta_0 \int d\omega_{S_1} \int d\omega_{S_2} G(\omega_{S_1}, \omega_{S_2}) \hat{a}(\omega_{S_1}) \hat{a}^{\dagger}(\omega_{S_2}) + H.C., \quad (88)$$

donde:

$$G(\omega_{S_1}, \omega_{S_2}) = \frac{1}{\sqrt{v_{g_{S_1}} v_{g_{S_2}}}} G(k_{S_1}(\omega_{S_1}), k_{S_2}(\omega_{S_2})),$$
(89)

con $G(k_{S_1}, k_{S_1})$ dada por la ecuación (81). La función $G(\omega_{S_1}, \omega_{S_2})$ es denominada función de mapeo, la cual describe las propiedades espectrales del proceso de DFG. En otras palabras, es la función conjunta que mapea las frecuencias de la señal de entrada en las frecuencias de la señal de salida. "La función de mapeo es proporcional a la amplitud de probabilidad de convertir un fotón con frecuencia ω_{s1} a uno ω_{s2} " (Domínguez-Serna y Garay-Palmett, 2021). Dado que la función de mapeo tiene una interpretación probabilística es necesario normalizarla, para ello se define la siguiente normalización:

$$G(\omega_{S_1}, \omega_{S_2}) = g\tilde{G}(\omega_{S_1}, \omega_{S_2})$$
(90)

donde *g* es la constante de normalización y tiene el valor de:

$$g = \sqrt{\int \int d\omega_{S_1} d\omega_{S_2} \left| G(\omega_{S_1}, \omega_{S_2}) \right|^2}, \qquad (91)$$

y $\tilde{G}(\omega_{S_1}, \omega_{S_2})$ es la función de mapeo normalizada, de tal forma que:

$$\int \int d\omega_{S_1} d\omega_{S_2} \left| \tilde{G}(\omega_{S_1}, \omega_{S_2}) \right|^2 = 1.$$
(92)

Al incluir el factor de normalización g en la ecuación (88), es posible definir una constante θ global:

$$\theta = g \ \theta_0. \tag{93}$$

Si asumimos que la función de mapeo es separable, es decir que se puede escribir como el producto de dos funciones, cada una dependiendo de cada variable, la función de mapeo normalizada introducida en la ecuación (90) se puede escribir como:

$$\tilde{G}(\omega_{S_1}, \omega_{S_2}) = G(\omega_{S_1})G(\omega_{S_2}), \tag{94}$$

y la ecuación (88) se puede escribir como:

$$\frac{-i}{\hbar}\int H(t)dt = -i\theta \int d\omega_{S_1}G(\omega_{S_1})\hat{a}(\omega_{S_1}) \int d\omega_{S_2}G(\omega_{S_2})\hat{a}^{\dagger}(\omega_{S_2}) + i\theta \int d\omega_{S_1}G^*(\omega_{S_1})\hat{a}^{\dagger}(\omega_{S_1}) \int d\omega_{S_2}G^*(\omega_{S_2})\hat{a}(\omega_{S_2}), \quad (95)$$

en donde se escribió el término conjugado hermitiano explícitamente. A partir de esta ecuación se definen los siguientes operadores:

$$\hat{A} = \int d\omega_{S_1} G(\omega_{S_1}) \hat{a}(\omega_{S_1}), \qquad (96)$$

$$\hat{B}^{\dagger} = \int d\omega_{S_2} G(\omega_{S_2}) \hat{a}^{\dagger}(\omega_{S_2}), \qquad (97)$$

$$\hat{A}^{\dagger} = \int d\omega_{S_1} G^*(\omega_{S_1}) \hat{a}^{\dagger}(\omega_{S_1}),$$
(98)

$$\hat{B} = \int d\omega_{S_2} G^*(\omega_{S_2}) \hat{a}(\omega_{S_2}).$$
(99)

Esta suposición de factorabilidad tiene como fin el modelar el proceso no lineal como un divisor de haz cuántico. Si se cumple la condición de factorabilidad es entonces posible reemplazar las ecuaciones (96) a (99) en la ecuación (95) obteniendo:

$$\frac{-i}{\hbar} \int H(t)dt = i\theta(\hat{A}^{\dagger}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}^{\dagger}).$$
(100)

A partir de la ecuación (100) podemos retomar la definición del operador de evolución

temporal (ecuación (76)) de modo que:

$$\hat{U} = e^{i\theta(\hat{A}^{\dagger}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}^{\dagger})}.$$
(101)

Como se puede observar se llegó a una expresión equivalente al operador del divisor de haz el cual se definió en la ecuación (59). En este caso el parámetro θ está asociado con la eficiencia de traslación espectral. El imponer la condición de factorabilidad de la función de mapeo en nuestra análisis se fundamenta en nuestro interés de lograr interacciones de estados de fotón individual que estén en un solo modo temporal.

Un aspecto a tener en cuenta es que las funciones $G(\omega_{s1})$ y $G(\omega_{s2})$ también deben estar normalizadas, de manera que se cumpla la siguiente relación de conmmutación:

$$[\hat{A}, \hat{A}^{\dagger}] = \int \int d\omega_1 d\omega'_1 G(\omega_1) G^*(\omega'_1) [\hat{a}(\omega_1), \hat{a}^{\dagger}(\omega'_1)] = \int d\omega_1 |G(\omega_1)|^2 = 1, \quad (102)$$

y de manera similar para \hat{B} . También asumimos que \hat{A} conmuta con \hat{B} , es decir, que no hay traslape espectral entre ellos, y por lo tanto $[\hat{A}, \hat{B}^{\dagger}] = 0$.

3.4.1 Caso especial: traslación espectral de un estado de fotón individual mediante DFG.

En el contexto de este trabajo se considera la traslación espectral de un estado de fotón individual incidente en el medio no lineal acondicionado para el proceso de DFG. Entonces, a partir de la ecuación (77) se puede calcular el estado a la salida del medio no lineal.

En general, el estado inicial (a la entrada del medio) se puede escribir como:

$$|\Psi\rangle_{in} = |A_{in}\rangle \otimes |B_{in}\rangle, \qquad (103)$$

dado que el operador de evolución temporal es de dos modos.

Se consideró que el estado de fotón individual se encuentra en el modo $|A_{in}\rangle$. Un fotón individual se puede definir matemáticamente de manera simple como la aplicación del operador de creación sobre el estado de vacío $(\hat{a}^{\dagger} | vac \rangle = |1\rangle)$, sin embargo, en general un estado de fotón individual exhibe una distribución espectral ($G_A(\omega)$), de tal forma que puede ser escrito como:

$$|A_{in}\rangle = \int d\omega \ G_A(\omega)\hat{a}^{\dagger}_A(\omega)|vac\rangle_A = \hat{A}^{\dagger}(\omega)|vac\rangle_A.$$
(104)

Por simplicidad, aquí se consideró también que hay traslape perfecto entre la distribución espectral del fotón de entrada, y la distribución $G(\omega_{S_1})$ del operador definido en la ecuación (96).

Por otro lado, se considera que el modo B a la entrada del medio no lineal está en el estado vacío, esto es:

$$|B_{in}\rangle = |vac\rangle_B, \qquad (105)$$

de modo que el estado total de entrada está dado por:

$$|\Psi\rangle_{in} = \int d\omega \ G_A(\omega) \hat{a}^{\dagger}_A |vac\rangle_A |vac\rangle_B = \hat{A}^{\dagger}(\omega) |vac\rangle, \qquad (106)$$

donde $|vac\rangle = |vac\rangle_A |vac\rangle_B$. Reemplazando (106) en la ecuación (77) se tiene:

$$|\Psi\rangle_{out} = \hat{U}\hat{A}^{\dagger} |vac\rangle.$$
(107)

Ahora, recordando que el operador \hat{U} es análogo al operador del divisor de haz y que es unitario (o sea que cumple con la relación $\hat{U}^{\dagger}\hat{U} = 1$, donde 1 es el operador de identidad), se introduce el operador identidad en la ecuación (107) de la siguiente manera:(107)

$$|\Psi\rangle_{out} = \hat{U}\hat{A}^{\dagger}\hat{U}^{\dagger}\hat{U}|\nu ac\rangle.$$
(108)

Pero $\hat{U}|vac\rangle = |vac\rangle$, por la presencia de los operadores de aniquilación \hat{A} y \hat{B} en \hat{U} (recordando que $\hat{A}|0\rangle = \hat{B}|0\rangle = 0$), entonces:

$$|\Psi\rangle_{out} = \hat{U}\hat{A}^{\dagger}(\omega)\hat{U}^{\dagger}|\nu ac\rangle, \qquad (109)$$

De manera explícita:

$$\hat{U}A^{\dagger}\hat{U}^{\dagger} = e^{i\theta(\hat{A}^{\dagger}\hat{B}-\hat{A}\hat{B}^{\dagger})}\hat{A}^{\dagger}e^{-i\theta(\hat{A}^{\dagger}\hat{B}-\hat{A}\hat{B}^{\dagger})}.$$
(110)

Usando la fórmula conocida como Baker-Campbell-Hausdorff se tiene que (Truax,

1985):

$$\hat{U}A^{\dagger}\hat{U}^{\dagger} = \hat{A}^{\dagger} + [i\theta(\hat{A}^{\dagger}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}^{\dagger}), \hat{A}^{\dagger}] + \frac{1}{2}[i\theta(\hat{A}^{\dagger}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}^{\dagger}), [i\theta(\hat{A}^{\dagger}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}^{\dagger}), \hat{A}^{\dagger}]] + \frac{1}{3!}... (111)$$

Se resuelven las relaciones de conmutación de la ecuación (111):

$$P1 = [i\theta(\hat{A}^{\dagger}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}^{\dagger}), \hat{A}^{\dagger}] = -i\theta B^{\dagger}, \qquad (112)$$

$$P2 = [i\theta(\hat{A}^{\dagger}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}^{\dagger}), P1] = \theta^{2}\hat{A}^{\dagger},$$
(113)

$$[i\theta(\hat{A}^{\dagger}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}^{\dagger}), P2] = -i\theta^{3}\hat{B}^{\dagger}, \qquad (114)$$

y así, sucesivamente. Agrupando los términos anteriores se encuentra que:

$$\hat{U}\hat{A}^{\dagger}\hat{U}^{\dagger} = \left(1 + \frac{\theta^2}{2} + \dots\right)\hat{A}^{\dagger} - i\left(\theta + \frac{\theta^3}{6} + \dots\right)B^{\dagger}$$
(115)

Esto se puede representar en la forma de senos y cosenos , de tal manera que el estado de salida queda expresado como:

$$|\Psi\rangle_{out} = (A^{\dagger}Cos\theta - iB^{\dagger}Sen\theta)|vac\rangle.$$
(116)

3.4.2 Parámetro θ en términos de variables experimentales.

Para encontrar una expresión del parámetro θ en términos de variables que se pueden controlar experimentalmente, se hace un análisis del proceso de DFG considerando una configuración de bombeo mixta, es decir un bombeo pulsado (P_1) y uno de onda continua (P_2). El parámetro θ se introdujo en las ecuaciones (80) y (93), y en la configuración mixta está dado de manera explícita por:

$$\theta = \frac{3\pi}{4\hbar} \epsilon_0 \chi^{(3)} \alpha_1 A_1 A_2 f_{eff} L \sqrt{\int \int d\omega_{S_1} d\omega_{S_2} \left| G(\omega_{S_1}, \omega_{S_2}) \right|^2}, \quad (117)$$

 A_1 y A_2 son las amplitudes de los bombeos y están definidos de distinto modo dependiendo de si el campo es pulsado o de onda continua (Brecht *et al.*, 2011). En el caso del campo de bombeo 1, la amplitud A_1 está dada por la ecuación (63), mientras que

46

para el caso del campo de bombeo 2, de onda continua, se tiene que la amplitud es:

$$A_2 = \sqrt{\frac{2P_{av_2}}{\epsilon_0 cn(\omega_{P_2}^o)}}.$$
(118)

Si se asume que el bombeo 1 tiene una envolvente espectral gaussiana de la forma:

$$\tilde{\alpha}(\omega_{P_1}) = \alpha_1 e^{-\left(\omega_{P_1} - \omega_{P_1}^0\right)^2 / \sigma_{P_1}^2},$$
(119)

con ω_{p1}^0 la frecuencia central y σ_{p_1} el ancho de banda, α_1 la constante de normalización dada por:

$$\alpha_1 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\sigma_{P_1}}}.$$
 (120)

Se puede demostrar que:

$$A_{1} = \sqrt{\frac{P_{av1}}{\epsilon_{0}cn(\omega_{P_{1}}^{o})\pi R'}},$$
(121)

donde P_{av1} es la potencia promedio y R la frecuencia de repetición del láser. Ahora, sustituyendo las ecuaciones (118),(120) y (121) en (117), obtenemos la siguiente expresión para el parámetro θ :

$$\theta = \frac{3\pi}{4\hbar} \epsilon_0 \chi^{(3)} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\sigma_{P_1}}} f_{eff} L \sqrt{\frac{2P_{a\nu_1}P_{a\nu_2}}{\epsilon_0^2 c^2 n(\omega_{P_1}^0) n(\omega_{P_2}^0) \pi R}} \sqrt{\int \int d\omega_{S_1} d\omega_{S_2} \left| G(\omega_{S_1}, \omega_{S_2}) \right|^2}.$$
(122)

Se introduce el parámetro no lineal γ para el proceso DFG (Garay-Palmett *et al.*, 2013):

$$\gamma = \frac{3\chi^{(3)} f_{eff} \sqrt{\omega_{P_1}^o \omega_{P_2}^o}}{4\epsilon_0 c^2 n(\omega_{P_1}^0) n(\omega_{P_2}^0)},$$
(123)

donde $n(\omega_{P_{\mu}}^{0})$ es el índice de refracción evaluado en las frecuencias centrales de los bombeos.

Al simplificar obtendremos la siguiente expresión para θ

$$\theta = \beta L \gamma \sqrt{\frac{P_{a\nu_1} P_{a\nu_2}}{\sigma_{P_1}}} \sqrt{\int \int d\omega_{S_1} d\omega_{S_2} \left| G(\omega_{S_1}, \omega_{S_2}) \right|^2}, \qquad (124)$$

en donde se observa su dependencia con variables experimentales tales como las

potencias promedios de los bombeos, el ancho de banda del bombeo 1 (σ_1), el largo de la guía de onda (L), el parámetro no lineal (γ) y por último un parámetro β que depende de los índices de refracción de los materiales, las frecuencias centrales de los bombeos y la tasa de repetición del bombeo uno. El parámetro β se expresa de la siguiente manera:

$$\beta = \frac{\epsilon_0 \pi c}{\hbar} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/4} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{\omega_{P_1}^0 \omega_{P_2}^0 R}}.$$
(125)

3.5 Estudio sobre la factorabilidad de la función de mapeo.

En esta sección se explorarán las condiciones que son necesarias para asegurar que la función que describe las propiedades espectrales del proceso de DFG sea separable y que por lo tanto se satisfaga la condición de la ecuación (94). Como ya se mencionó previamente, esta función está dada por la ecuación (81) y se ha denominado función de mapeo; a continuación se presenta una derivación de la forma explícita de ésta.

Función de mapeo:

La función de mapeo está dada por las ecuaciones (89) y (81). Definida en el espacio de frecuencias, ésta puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$G(\omega_{S_1}, \omega_{S_2}) = l(\omega_{S_1})l(\omega_{S_2})F(\omega_{S_1}, \omega_{S_2}).$$
(126)

donde se ha introducido la función:

$$F(\omega_{S_1}, \omega_{S_2}) = \int d\omega_{P_1} \alpha(\omega_{P_1}) \alpha^*(\omega_{P_2}) Sinc\left[\frac{L}{2}\Delta k\right] e^{i\Delta kL}, \qquad (127)$$

con Δk dado por la ecuación (70).

Para este análisis consideraremos inicialmente que ambos bombeos son de naturaleza pulsada y que exhiben una envolvente espectral gaussiana, de acuerdo con la ecuación (120).

Asimismo, con el fin de obtener una expresión analítica para la función de mapeo, se expande la constante de propagación $k(\omega)$ en serie de Taylor, alrededor de las frecuencias centrales, y mantenemos los términos hasta primer orden, esto es:

$$k(\omega_{\mu}) = k(\omega_{\mu}^{o}) + k'(\omega_{\mu}^{o})(\omega_{\mu} - \omega_{\mu}^{o}) \qquad \mu = P_{1}, P_{2}, S_{1}, S_{2},$$
(128)

donde $k'(\omega_{\mu}) = dk(\omega_{\mu})/d\omega_{\mu}$ es el inverso de la velocidad de grupo, definida en la ecuación (32).

Reemplazando (128) en la ecuación (70) se obtiene que:

$$\Delta k = \Delta k^{o} + [k'(\omega_{P_{1}}) - k'(\omega_{P_{2}})](\omega_{P_{1}} - \omega_{P_{1}}^{o}) - [k'(\omega_{P_{2}}) - k'(\omega_{S_{1}})](\omega_{S_{1}} - \omega_{S_{1}}^{o}) + [k'(\omega_{P_{2}}) - k'(\omega_{S_{2}})](\omega_{S_{2}} - \omega_{S_{2}}^{o}), \quad (129)$$

en donde:

$$\Delta k^{0} = k(\omega_{P_{1}}^{o}) - k(\omega_{P_{2}}^{o}) + k(\omega_{S_{1}}^{o}) - k(\omega_{S_{2}}^{o}).$$
(130)

 Δk^o representa el desempatamiento de fases evaluado en las frecuencias centrales ,el cual asumimos que es igual a cero, lo cual quiere decir que existe empatamiento de fases perfecto en las frecuencias centrales.

Se definen entonces términos de desempatamiento de velocidades de grupo en la forma:

$$\tau_{P_1} = L[k'(\omega_{P_1}) - k'(\omega_{P_2})], \tag{131}$$

$$\tau_{\mu} = L[k'(\omega_{P_2}) - k'(\omega_{\mu})], \qquad \mu = s_1 \circ s_2, \tag{132}$$

$$\nu_{\eta} = \omega_{\eta} - \omega_{\eta'}^{o}$$
, $\eta = P_1, P_2, S_1 \circ S_2$, (133)

a partir de los cuales se demuestra que:

$$L\Delta k = L\Delta k^{o} + \tau_{P}\nu_{P_{1}} - \tau_{S_{1}}\nu_{S_{1}} + \tau_{S_{2}}\nu_{S_{2}}.$$
(134)

Es conveniente ahora usar la forma integral de la función Sinc(x):

$$Sinc(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} d\zeta e^{ix\zeta},$$
 (135)

a partir de la cual y con ayuda de las ecuaciones (120), (130), (134) y (135), se puede

demostrar que se obtiene:

$$F(\nu_{S_1}, \nu_{S_2}) = \frac{1}{2} \int d\nu_{P_1} e^{\frac{-\nu_{P_1}^2 \sigma_{P_2}^2 - \nu_{P_2}^2 \sigma_{P_1}^2}{\sigma_{P_1}^2 \sigma_{P_2}^2}} \int_{-1}^{1} d\zeta e^{i\frac{L}{2}\Delta k(\zeta+1)}.$$
 (136)

Reemplazando el valor de $L\Delta k$ dado por (134) y reordenando las integrales:

$$F(\nu_{S_1}, \nu_{S_2}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} d\zeta e^{i\frac{1}{2}(L\Delta k^0 - \tau_{S_1}\nu_{S_1} + \tau_{S_2}\nu_{S_2})(\zeta+1)} \int d\nu_{P_1} e^{i\frac{1}{2}(\tau_{P_1}\nu_{P_1})(\zeta+1)} e^{\frac{-\nu_{P_1}^2 \sigma_{P_2}^2 - \nu_{P_2}^2 \sigma_{P_1}^2}{\sigma_{P_1}^2 \sigma_{P_2}^2}}.$$
(137)

Resolviendo primero la integral sobre v_{P1} y luego la integral sobre ζ , se puede demostrar que la ecuación (137) se reduce a (para más detalles ver el anexo A):

$$F(\nu_{S_1}, \nu_{S_2}) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\tau_{P_1}} e^{\frac{-(\nu_{S_1} - \nu_{S_2})^2}{\sigma_{P_2}^2 + \sigma_{P_1}^2}} e^{-B^2 L^2 \Delta k_{lin}^2} \left(erf\left(\frac{1}{2B} + iBL\Delta k_{lin}\right) - erf(iBL\Delta k_{lin}) \right), \quad (138)$$

donde B está dado por:

$$B = \frac{1}{\tau_{P_1}} \sqrt{\frac{\sigma_{P_1}^2 + \sigma_{P_2}^2}{\sigma_{P_1}^2 \sigma_{P_2}^2}},$$
(139)

erf(z) representa la función conocida como la función de error de Gauss (Abramowitz y Stegun, 1972), la cual se define como:

$$erf(z) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \qquad (140)$$

У

$$L\Delta k_{lin} = -(L\Delta k^0 - T_{S_1}\nu_{S_1} + T_{S_2}\nu_{S_2}), \qquad (141)$$

donde:

$$T_{\mu} = \tau_{\mu} + \frac{\tau_{P_1} \sigma_{P_1}^2}{\sigma_{P_1}^2 + \sigma_{P_2}^2}, \qquad \mu = s_1 \circ s_2, \qquad (142)$$

Caso particular función de mapeo factorizable:

Para realizar este análisis conviene definir a la función de mapeo del siguiente modo:

$$F(\nu_{S_1}, \nu_{S_2}) = \alpha(\nu_{S_1}, \nu_{S_2})\phi(\nu_{S_1}, \nu_{S_2}), \tag{143}$$

de manera similar al tratamiento de Grice y Walmsley (1997) para SPDC y Garay-Palmett *et al.* (2007) para SFWM. $\alpha(\nu_{S_1}, \nu_{S_2})$ se conoce como la función de envolvente espectral del bombeo y $\phi(\nu_{S_1}, \nu_{S_2})$ se conoce como la función de empatamiento de fases las cuales, de acuerdo a la ecuación (138), están dadas por:

$$\alpha(\nu_{S_1}, \nu_{S_2}) = \frac{\sqrt{\pi}\sigma_{P_1}\sigma_{P_2}}{4\sqrt{\sigma_{P_1}^2 + \sigma_{P_2}^2}} e^{\frac{-(\nu_{S_1} - \nu_{S_2})^2}{\sigma_{P_2}^2 + \sigma_{P_1}^2}},$$
(144)

$$\phi(\nu_{S_1}, \nu_{S_2}) = \int_{-1}^{1} d\zeta e^{-i\frac{1}{2}L\Delta k_{lin}(\zeta+1)} e^{-\left(\frac{\zeta+1}{4B}\right)^2}.$$
 (145)

Un caso interesante de estudio se presenta para cuando el parámetro B es muy grande $(B \rightarrow \infty)$. Se puede ver que esta condición se cumple si al menos uno de los anchos de banda de los bombeos es muy angosto $(\sigma_{P_1} \rightarrow 0 \text{ y/o } \sigma_{P_2} \rightarrow 0)$ o si el parámetro $\tau_{P_1} \rightarrow 0$. Esta última opción es descartada, dado que el caso de $\tau_{P_1} \rightarrow 0$ se da para cuando las frecuencias de ambos bombeos son iguales, lo cual no llevaría a la generación de diferencia de frecuencias (ver esquema en la figura 9(b)).

Asumir que al menos uno de los bombeos tiene un ancho de banda tendiendo a cero, corresponde a la situación experimental en la que tal bombeo proviene de un láser de onda continua. Es por esto que a partir de ahora nos concentramos en el caso para el cual el bombeo 1 es de onda pulsada, y el bombeo 2 es de onda continua.

Se puede demostrar que si $\sigma_2 \rightarrow 0$, entonces $B \rightarrow \infty$, en cuyo caso:

$$\phi(\nu_{S_1}, \nu_{S_2}) = 2e^{-i\frac{L}{2}\Delta k_{lin}}Sinc\left(\frac{L}{2}\Delta k_{lin}\right).$$
(146)

Para encontrar las condiciones para las cuales la función de mapeo es factorizable, conviene aproximar la función sinc en la ecuación (146) a una gaussiana con el mismo ancho a la mitad del máximo, de manera similar a como se muestra en la figura 14. Esto es:

$$Sinc(x) \approx e^{-\Gamma x^2}, \tag{147}$$

donde $\Gamma = 0.193$ (Garay-Palmett, 2009), con lo cual se tiene que:

$$F(\nu_{S_1}, \nu_{S_2}) \propto e^{\frac{-(\nu_{S_1} - \nu_{S_2})^2}{\sigma_{P_1}^2}} e^{-\frac{\Gamma}{4}(L\Delta k_{lin})^2} e^{-i\frac{L}{2}\Delta k_{lin}}$$
(148)



Figura 14. Aproximación de la función Sinc(x) a una gaussiana con el mismo ancho a media altura.

Reemplazando la definición de $L\Delta k_{lin}$ dada por la ecuación (141) en la ecuación (148) se encuentra que:

$$F(\nu_{S_1},\nu_{S_2}) \propto e^{\frac{-(\nu_{S_1}-\nu_{S_2})^2}{\sigma_{P_1}^2}} e^{-\frac{\Gamma}{4}(T_{S_1}\nu_{S_1}-T_{S_2}\nu_{S_2})^2} e^{-\frac{i}{2}(T_{S_1}\nu_{S_1}-T_{S_2}\nu_{S_2})},$$
 (149)

en donde se consideró que hay empatamiento de fases en las frecuencias centrales y por lo tanto $L\Delta k^0 = 0$.

Al expandir los términos cuadráticos de las funciones exponenciales en la ecuación (149) y simplificar, se obtiene:

_

$$F(\nu_{S_1}, \nu_{S_2}) \propto exp \left[-\left(\frac{1}{\sigma_{P_1}^2} + \frac{\Gamma}{4}T_{S_1}^2\right)\nu_{S_1}^2 + \left(\frac{2}{\sigma_{P_1}^2} + \frac{\Gamma}{2}T_{S_1}T_{S_2}\right)\nu_{S_1}\nu_{S_2} - \left(\frac{1}{\sigma_{P_1}^2} + \frac{\Gamma}{4}T_{S_2}^2\right)\nu_{S_2}^2 - \frac{i}{2}\left(T_{S_1}\nu_{S_1} - T_{S_2}\nu_{S_2}\right)\right]. \quad (150)$$

En consecuencia, para que la función de mapeo sea separable los términos cruza-

dos deben eliminarse, por lo que se debe cumplir entonces la relación:

$$\frac{2}{\sigma_1^2} + \frac{\Gamma}{2} T_{S_1} T_{S_2} = 0.$$
(151)

De esta relación se puede resaltar que para obtener un estado factorizable es necesario que $T_{S_1}T_{S_2} \leq 0$. Una alternativa para cumplir con esta condición es $T_{S_1} = 0$ o $T_{S_2} = 0$, siempre y cuando el ancho de banda del bombeo pulsado sea grande tal que $2/\sigma_1^2 \rightarrow 0$. En este trabajo nos concentramos en esta alternativa.

Ahora se analizarán las implicaciones de que $T_{S_1} = 0$ o $T_{S_2} = 0$. En primer lugar, los parámetros dados por T_{S_1} y T_{S_2} se reducen debido a la condición $\sigma_2 \rightarrow 0$, resultando en una simplificación de la ecuación (142) de la siguiente manera:

$$T_{S_1} = \tau_{S_1} + \tau_{P_1},\tag{152}$$

$$T_{S_2} = \tau_{S_2} + \tau_{P_1},\tag{153}$$

y al igualar estos términos a cero se encuentra que para que la función de mapeo sea separable, con un bombeo de banda ancha, se debe cumplir con una condición de empatamiento de velocidades de grupo (GVM, por sus siglas en inglés), en la forma

$$T_{s_1} = k'(\omega_{P_1}) - k'(\omega_{S_1}) = 0, \qquad (154)$$

$$T_{s_2} = k'(\omega_{P_1}) - k'(\omega_{S_2}) = 0.$$
(155)

Asumiendo que una de estas condiciones de GVM se cumplen, la ecuación (150) se puede reescribir como:

$$f(\nu_{s_1}, \nu_{s_2}) \propto f_{s_1}(\nu_{s_1}) f_{s_2}(\nu_{s_2}), \tag{156}$$

donde: Para el caso particular con $T_{S_1} = 0$:

$$f_{s_1}(\nu_{s_1}) = e^{-\frac{\nu_{s_1}^2}{\sigma_1^2}} \qquad y \tag{157}$$

$$f_{s_2}(\nu_{s_2}) = e^{-\left[\frac{\nu_{s_2}^2}{\sigma_1^2} + \frac{\Gamma}{4}T_{s_2}^2\nu_{s_2}^2 + \frac{i}{2}T_{s_2}\nu_{s_2}\right]}.$$
(158)

Para el caso particular con $T_{S_2} = 0$:

$$f_{s_2}(\nu_{s_2}) = e^{-\frac{\nu_{s_2}^2}{\sigma_1^2}} \qquad y \tag{159}$$

$$f_{s_1}(\nu_{s_1}) = e^{-\left[\frac{\nu_{s_1}^2}{\sigma_1^2} + \frac{\Gamma}{4}T_{s_1}^2\nu_{s_1}^2 - \frac{i}{2}T_{s_1}\nu_{s_1}\right]}.$$
 (160)

Finalmente existe el caso en el que $T_{S_1} = -T_{S_2}$ en el cual la condición de empatamiento de velocidades de grupo resulta en que las velocidades de grupo de los paquetes de onda señal a trasladar y señal trasladada están simétricamente desplazadas respecto a la velocidad de grupo del pulso de bombeo. La condición de empatamiento de velocidades de grupo es para este caso:

$$2k'(\omega_{P_1}) - k'(\omega_{S_1}) - k'(\omega_{S_2}) = 0,$$
(161)

Con lo que la ecuación separada resulta como:

$$f_{s_1}(\nu_{s_1}) = e^{-\left[\frac{\nu_{s_1}^2}{\sigma_1^2} + \frac{\Gamma}{4}T_{s_1}^2\nu_{s_1}^2 + \frac{i}{2}T_{s_1}\nu_{s_1}\right]} y$$
(162)

$$f_{s_2}(\nu_{s_2}) = e^{-\left[\frac{\nu_{s_2}^2}{\sigma_1^2} + \frac{\Gamma}{4}T_{s_2}^2\nu_{s_2}^2 + \frac{i}{2}T_{s_2}\nu_{s_2}\right]}.$$
 (163)

A modo de recapitulación, en este capítulo se presentó un estudio teórico del proceso de generación de diferencia de frecuencias. Se encontró que el operador de evolución temporal de este proceso es análogo al operador del divisor de haz, asumiendo condiciones para las cuales el estado de salida es separable. Se definió la función de mapeo, la cual describe las propiedades espectrales del DFG y se derivó una condición que garantiza que esta función sea factorizable. Esta condición depende principalmente de las propiedades de dispersión de la guía de onda y del ancho de banda de los bombeos. En la última subsección se desarrolló un caso en el cual se consideró un bombeo con ancho de banda grande , mientras que el otro bombeo con un ancho de banda muy angosto. Experimentalmente esto se puede aproximar a un láser de pulsos ultra cortos y un láser de onda continua, respectivamente. Se encontró que al utilizar bombeos con las características mencionadas se obtendría un estado separable si se cumple con una condición de empatamiento de velocidades de grupo entre el bombeo pulsado y la señal trasladada o la señal a trasladar.

Capítulo 4. Síntesis y caracterización óptica de los materiales utilizados en este trabajo.

El propósito de este proyecto es estudiar la traslación espectral de estados cuánticos de fotón individual, mediante el proceso de generación de diferencia de frecuencias (DFG) en guías de onda tipo cresta de nitruro de silicio (Si_3N_4). En este capítulo se presenta una breve descripción de las técnicas de síntesis y la caracterización óptica de los materiales que se proponen en el diseño de la guía de onda mencionada, de acuerdo con la infraestructura existente en el Laboratorio Nacional de Nanofabricación (LaNNaFab) del Centro de Nanociencias y Nanotecnología (CNyN) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). El análisis de los aspectos experimentales que se presentarán en este capítulo es fundamental para definir algunos parámetros importantes para simular y plantear un diseño realista de la guía de onda, resaltando que se espera que se pueda realizar una implementación futura de este tipo de procesos en el Laboratorio de Interacciones No Lineales y Óptica Cuántica (LINOC) del CICESE.

4.1 Propuesta del dispositivo:

En este trabajo se plantea el diseño de una guía de onda tipo cresta, como la que se muestra en la figura 15. La elección de esta geometría se debe a que permite alcanzar un alto contraste dieléctrico, dado que el núcleo se encuentra rodeado de aire, y, de esta manera, es posible obtener un confinamiento fuerte de la luz a lo largo de la guía. La guía de onda propuesta se compone de dos partes: un núcleo de nitruro de silicio, el cual se encuentra sobre una plataforma de dióxido de silicio sobre silicio.

La selección de los materiales se fundamenta en lo siguiente:

 El uso de un material para el núcleo con índice de refracción no lineal alto y que sea transparente en el rango de longitudes de onda que se quiere trabajar correspondiente al intervalo entre 400 nm a 1600 nm. Existen varios materiales que cumplen con estas condiciones, entre ellos, el vidrio (dióxido de silicio). Sin embargo, se eligió el nitruro de silicio debido a que tiene un índice de refracción



Figura 15. Esquema del diseño propuesto de la guía de onda tipo cresta.

no lineal mayor (Rahim *et al.*, 2017), tal como se presenta en la tabla 1, y se cuenta con la capacidad de sintetizarlo en el LaNNaFab por medio del método de pulverización catódica de radio frecuencia, el cual se va a presentar con más detalle más adelante. En la figura 16(a) se presenta la curva de transmitancia de los materiales propuestos para la guía de onda. Se puede observar que tanto el nitruro de silicio como el dióxido de silicio tienen una alta transmitancia en el intervalo de longitudes de onda de trabajo.

2. La elección del material del sustrato determina distintos aspectos relacionados con la viabilidad de la propagación de la luz a lo largo del núcleo de la guía. Por ejemplo, es necesario que éste tenga un índice de refracción menor que el material del núcleo, de tal forma que se garantice que la luz esté confinada en este último. En la figura 16(b) se muestran las curvas de los índices de refracción de los materiales propuestos para esta guía y que fueron medidas en este trabajo. Se puede observar que el dióxido de silicio tiene un índice de refracción menor al nitruro de silicio en el rango de longitudes de onda de trabajo. Es por esto que se eligió la plataforma de dióxido de silicio sobre silicio como sustrato de la guía de onda.

Una gran ventaja que tiene un sustrato como este, es que se tiene bastante experiencia en la fabricación de este tipo de dispositivos, los cuales están basados en la misma tecnología de fabricación de dispositivos electrónicos convencionales (Jordan, 2019; Dong *et al.*, 2014). Dicho de otra forma, la fabricación de guías de onda con este tipo de sustrato se logra de la misma forma en la que se imprimen chips de computadoras clásicas en obleas de silicio, utilizando el proceso conocido como fotolitografía. La capa de dióxido de silicio se conoce como *una capa amortiguadora* y tiene la función de aislar la guía de nitruro de silicio del sustrato de silicio, dado que éste, además de tener un alto índice de refracción, también tiene alta absorción en la región visible del espectro (Stutius y Streifer, 1977).



Figura 16. (a) Transmitancia y (b) curvas de índice de refracción de los materiales propuestos en el diseño de la guía de onda. Los grosores (G) para los materiales son los siguientes: $G_{Si_3N_4}=0.5 \ \mu m$, $G_{SiO_2}=1 \ \mu m$ y $G_{Si}=2 \ \mu m$.

En la figura 16, las curvas de transmitancia fueron obtenidas mediante el software *Open Filters* (Larouche y Martinu, 2008); las curvas de índice de refracción del silicio y el dióxido de silicio presentados fueron medidos a partir de muestras patrón del grupo de trabajo en el laboratorio de espectroscopía y caracterización óptica del CNyN (UNAM), y la curva del nitruro de silicio fue tomada de Luke *et al.* (2015). Es de resaltar que en este trabajo se hizo una caracterización óptica de los materiales mencionados para obtener su índice de refracción. Estos materiales han sido sintetizados en el grupo de trabajo y/o comprados. El índice de refracción de los materiales representa un factor importante para las simulaciones realizadas y por tanto debe ser muy bien conocido.

A pesar de que en este trabajo no se fabricaron las guías de onda, es necesario tener en cuenta las limitantes experimentales de fabricación para la realización de las simulaciones y la propuesta del diseño final. Es por esto que en este capítulo se presenta una descripción de las técnicas de síntesis de las guías de onda. Además, se presenta un estudio de los modelos de ajuste de las curvas de índice de refracción obtenidas mediante la caracterización óptica por medio de la técnica de elipsometría. Fue necesario realizar este estudio para definir el modelo con el cual se tiene mayor precisión de acuerdo con las mediciones experimentales.

De manera resumida, el procedimiento para la fabricación de las guías de onda en la UNaFab consiste de tres etapas: primero, la síntesis de una película delgada de dióxido de silicio sobre obleas de silicio mediante la técnica de oxidación térmica vía húmeda; segundo, el depósito de una película delgada de nitruro de silicio sobre la plataforma anterior, mediante la técnica de pulverización catódica de radio frecuencia y, finalmente, el grabado de la guía de onda mediante la técnica de fotolitografía. A continuación se presenta una descripción de las técnicas mencionadas.

4.2 Síntesis de los materiales

4.2.1 Oxidación térmica vía húmeda

Por medio de la técnica de oxidación térmica vía húmeda se sintetizaron películas delgadas de dióxido de silicio (SiO_2) sobre obleas de silicio. Las obleas de silicio fueron adquiridas comercialmente en la compañía University Wafer. El proceso de oxidación térmica se lleva a cabo en un horno con una temperatura alrededor de 1100°C. La cámara del horno consiste en un tubo de cuarzo en el cual es posible introducir las obleas de silicio. El cuarzo provee un buen medio donde llevar a cabo este proceso debido a que su punto de función se encuentra por encima de los 1500°C.

El proceso de oxidación inicia con la inyección de oxígeno en la cámara. El oxígeno es conducido a través de un recipiente que contiene agua a temperatura ambiente, es por esto que también hay presencia de vapor de agua en la cámara (Deal y Grove, 1965). La oxidación esta dada por la siguiente ecuación:

$$Si + 2H_2O \rightarrow SiO_2 + 2H_2. \tag{164}$$

El grosor del *SiO*₂ obtenido por está técnica va a depender del tiempo que dejemos la oblea de Si dentro del horno a las condiciones mencionadas anteriormente. Se puede
apreciar un esquema del proceso en la figura 17, en la cual se observan varias obleas de silicio dentro de la cámara del horno.



Figura 17. Oxidación térmica vía húmeda. Tomada y traducida de Halbleiter (2021)

4.2.2 Depósito de nitruro de silicio por medio de pulverización catódica de radio frecuencia

La técnica de pulverización catódica de radio frecuencia se utilizó en el LaNNaFab para depositar una película delgada de nitruro de silicio sobre la plataforma de dióxido de silicio sobre silicio, preparada previamente. A partir de esta capa se obtendrá posteriormente la guía de onda tipo cresta mediante fotolitografía. Para explicar esta técnica es conveniente, en primer lugar, explicar cuál es la técnica de pulverización catódica estándar y luego explicar cómo cambia al llamarla de radio frecuencia.

La pulverización catódica en su configuración más básica es un sistema diseñado para recubrir un substrato de otro material en la forma de una película delgada. El material a ser pulverizado se le llama blanco, en este caso silicio, y ambos, tanto el blanco como el sustrato, se encuentran en una cámara de vacío alineados de forma paralela uno del otro. Un ejemplo del sistema se observa en la figura 18.

La cámara de vacío es entonces activada para eliminar el aire dentro de ésta y después es introducido un gas inerte que será el responsable de pulverizar el blanco, este gas es usualmente gas Argón (Ar). Como el objetivo es sintetizar nitruro de silicio, a la cámara es también introducido nitrógeno (N_2) en forma de gas. Es entonces que se aplica un voltaje al blanco, de modo que se convierte en el cátodo del sistema, es decir, el lugar por donde saldrán los electrones al sistema. Una carga positiva es además aplicada al substrato. El gas de argón, siendo eléctricamente neutro, se ioniza

en un primer momento como resultado de las colisiones forzosas entre los átomos del gas y los electrones secundarios en el ambiente. En la superficie negativamente cargada se desprenden partículas que componen el blanco debido a la colisión de los iones de Ar que son acelerados sobre dicha superficie. Las partículas desprendidas del blanco luego se ven atraídas por la carga positiva del substrato. En este trayecto, las partículas de silicio reaccionan con el nitrogeno de la cámara, obteniendo el nitruro de silicio y depositándose de esta forma una capa delgada (Sigmund, 1969).



Figura 18. Esquema del proceso de pulverización catódica. Tomada de Aguayo Alvarado (2021)

La diferencia principal entre la pulverización catódica estándar y la de radiofrecuencia se encuentra en la forma del voltaje aplicado al blanco. En este último caso, se utiliza una señal de corriente alterna. La señal eléctrica oscila aproximadamente a una frecuencia de 13.56 MHz, lo cual es utilizado internacionalmente para las fuentes de potencia de radio frecuencia. Esta variación de la corriente se utiliza para evitar problemas de cargas eléctricas en superficies que no son conductoras durante la síntesis de la película delgada. En el caso de que se usen fuentes de corriente directa y si la superficie del blanco no es conductora, con el paso del tiempo iones positivos son producidos y se acumulan en la superficie, esto puede resultar en que cese por completo el depósito del material. Al alternar la potencia eléctrica, la superficie del blanco puede ser limpiada de la acumulación de carga con cada ciclo (Horwitz, 1983).

4.3 Caracterización por elipsometría

La elipsometría es un método óptico para obtener el índice de refracción de un material, mediante el análisis de los cambios en la polarización de la luz reflejada o transmitida desde una muestra. El nombre de elipsometría se debe al hecho de que la luz, por lo general, tiene polarización elíptica después de haber sufrido la reflexión en la muestra que se quiere analizar.

Este método de caracterización consta de una fuente de luz polarizada no monocromática para observar el comportamiento a diferentes longitudes de onda. La fuente de luz se encuentra en un brazo del dispositivo de caracterización (ver figura 19), mientras en el otro brazo se encuentra un sensor que medirá el cambio de polarización en la luz que se refleja por la muestra. El ángulo en el que se coloquen los brazos del dispositivo con respecto a la superficie de la muestra es escogido de manera que la sensitividad de la medición sea maximizada. Este método es útil para la caracterización de películas delgadas, con lo que es posible obtener el grosor de la muestra, los índices de refracción de los materiales y verificar la composición química de los materiales al comparar con curvas de índice de refracción encontradas en la literatura.



Figura 19. Fotografía de un Elipsómetro M-2000

4.3.1 Modelos de índice de refracción

Cuando una onda electromagnética interactúa con los electrones de valencia de un dieléctrico, la respuesta del medio en general depende de la frecuencia ω . Esta propiedad recibe el nombre de dispersión cromática y se manifiesta mediante la dependencia del índice de refracción con respecto a la frecuencia, n(ω), o a la longitud de onda, n(λ)¹. Desde un punto de vista fundamental, los orígenes de la dispersión está relacionada con diferentes resonancias características que puedan encontrarse en los medios, los cuales absorben la radiación electromagnética por medio de la oscilación de sus electrones (Agrawal, 2000).

El índice de refracción puede ser expresado a partir de funciones complejas y existen una gran variedad de funciones que se utilizan para definirla. Entre las funciones tenemos la de Sellmeier, la de Tauc-Lorentz y la del medio efectivo (EMA). Estas funciones fueron utilizadas en este trabajo para encontrar cuál representaba mejor las propiedades ópticas del nitruro de silicio sintetizado por el grupo de trabajo y que sería usado en las simulaciones para la definición del diseño de guía de onda para la demostración de DFG.

a. Sellmeier

Una de la formas de representar o ajustar la dependencia de $n(\lambda)$ es mediante la ecuación de Sellmeier dada por la ecuación (165):

$$n^{2}(\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^{m} \frac{B_{j}\lambda^{2}}{\lambda^{2} - \lambda_{j}^{2}},$$
(165)

donde la λ_j representa a la longitud de onda de resonancia y B_j representa el tamaño de la contribución de esa longitud de onda de resonancia. La sumatoria extiende el rango para distintas resonancias del material en el rango de longitudes de onda de interés del material (Agrawal, 2000).

Es también posible encontrar otras representaciones como la siguiente:

$$n^{2}(\lambda) = E_{inf} + \frac{B_{1}\lambda^{2}}{\lambda^{2} - \lambda_{1}^{2}} + IRPole \ \lambda^{2}$$
(166)

¹Recordando que $\omega = 2\pi c/\lambda$

en donde los términos E_{inf} e IRPole representan límites de la función de Sellmeier normal con una de las longitudes de onda de resonancia establecida como cero y la otra a un valor grande y finito, respectivamente (Herzinger *et al.*, 1998).

b. Tauc-Lorentz

El modelo de Tauc-Lorentz fue propuesto de forma empírica en el año de 1996 por Jellison y Modine (1996). El modelo ha sido empleado para distintos tipos de materiales amorfos, policristalinos y cristalinos. Este modelo utiliza como base la densidad conjunta de Tauc de los estados y los osciladores de Lorentz. Lo que es calculado en este modelo son los valores de la constante de permitividad (también conocida como función dieléctrica de los materiales) y a partir de éstas se calcula el índice de refracción del material (Chen y Shen, 2005). La función dieléctrica es calculada en dos partes, la imaginaria (ε_i) y la real (ε_r) las cuales están dadas por las ecuaciones (167) y (168) (HORIBA, 2021):

$$\varepsilon_{i} = \begin{cases} \frac{1}{E} \frac{AE_{0}C(E-E_{g})^{2}}{(E^{2}-E_{0}^{2})^{2}+C^{2}E^{2}} & E > E_{g} \\ 0 & E \le E_{g} \end{cases},$$
(167)

$$\varepsilon_r(E) = \varepsilon_r(\infty) + \frac{2}{\pi} P \int_{E_g}^{\infty} \frac{\zeta \varepsilon_i(\zeta)}{\zeta^2 - E^2} d\zeta, \qquad (168)$$

La parte real de la función dieléctrica es obtenida por medio de la integración de Kramers-Kronig. Existen 5 parámetros en el modelo de Tauc-Lorentz: La transición de elementos en la matriz A, energía de transición E_0 , parámetro de ensanchamiento C, banda prohibida E_g y la constante $\varepsilon_r(\infty)$ (Chen y Shen, 2005). Se puede encontrar la expresión ya desarrollada de la parte real de la función dieléctrica en el manual del elipsómetro de HORIBA (2021).

Para calcular el índice de refracción sólo resta realizar las siguientes operaciones:

$$\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_i, \tag{169}$$

$$n = \sqrt{\frac{|\varepsilon| + \varepsilon_r}{2}}.$$
(170)

c. Aproximación de medio efectivo

La aproximación de medio efectivo (EMA, por sus siglas en inglés), es un modelo

que pretende resolver un problema en específico, explicar la propagación de la luz a través de medios porosos o medios no completamente puros. En este tipo de arreglos lo que se presupone es que el material está conformado de una combinación lineal de distintos materiales (Khardani *et al.*, 2007). Por ejemplo, en este trabajo se podría considerar un sistema específico donde el nitruro de silicio esté conformado por una combinación del mismo nitruro de silicio y huecos vacíos por malformaciones durante la fabricación. El índice de refracción final es entonces un índice de refracción efectivo que dependerá de la proporción inicial de los materiales que lo conforman. Esto se representa de acorde a la ecuación (171):

$$\nu_A \frac{n_A - n_{eff}}{n_A + (d-1)n_{eff}} + \nu_B \frac{n_B - n_{eff}}{n_B + (d-1)n_{eff}} + \nu_C \frac{n_C - n_{eff}}{n_C + (d-1)n_{eff}} = 0,$$
(171)

donde d es la dimensión de las partículas y ν_m (m=A,B,C) son las fracciones de volumen que cada material ocupa en el material cumpliendo $\nu_A + \nu_B + \nu_C = 1$ (Khardani *et al.*, 2007).

4.4 Índice de refracción de los materiales

Se realizó una medición de elipsometría para cada uno de los materiales, con dos objetivos, primero, confirmar que realmente se obtuvo el material deseado en la síntesis y segundo, obtener una curva del índice de refracción de los materiales para su uso en la simulación de las guías de onda. En la figura 20(a) se muestran los datos obtenidos para la medición de elipsometría correspondiente al silicio, estos valores cuantifican el cambio de polarización de la luz al ser reflejada por la superficie de la muestra. En específico, los parámetros Ψ y Δ representan la diferencia de amplitud y fase entre las componentes perpendiculares (s) y paralelas (p) de las ondas reflejadas por la superficie de la muestra, con respecto al plano de incidencia (Hilfiker *et al.*, 2008). La ecuación fundamental de la elipsometría es la siguiente:

$$\rho = tan\Psi e^{i\Delta} = \frac{r_{\rho}}{r_s},\tag{172}$$

donde ρ es la relación compleja de los coeficientes de reflexión total, r_p y r_s son los coeficientes de Fresnel de reflexión, Δ es la diferencia de fase entre las dos componentes y $tan\Psi$ es igual a:

$$\tan \Psi = \frac{|r_{\rho}|}{|r_{s}|}.$$
(173)

A partir de la medición de los parámetros ψ y Δ es posible obtener de manera indirecta el índice de refracción de los materiales, por medio de los coeficientes de Fresnel.



Figura 20. (a) Parámetros Ψ y Δ medidos durante la caracterización de elipsometría. (b) Índice de refracción *n* y coeficiente de extinción *k* del silicio experimentales.

La curva del índice de refracción obtenida del silicio es como se observa en la figura 20(b) y se ajusta de buena forma a una curva de tipo Sellmeier con los coeficientes mostrados en la tabla 2, este ajuste tiene un error cuadrático medio de 1.79×10^{-5} :

Tabla 2. Coeficientes de Sellmeier para el sustrato de Silicio. B_1 , B_2 y B_3 son adimensionales.

	B ₁	λ ₁ (μm)	B ₂	λ ₂ (μm)	B ₃	λ ₃ (μm)
Parámetros	-8.08	-3.94	8.22	0.33	8.00	279.99

En la figura 21 se muestra una comparación de la curva de índice de refracción medida experimentalmente, etiquetada como Acevedo (2020), con respecto a las curvas reportadas en la literatura por Green (2008) y Schinke *et al.* (2015). Se observa que hay concordancia entre las curvas.

A su vez en la figura 22(a) se muestra la curva del índice de refracción para el dióxido de silicio. En este caso se utilizó el modelo de Sellmeier descrito anteriormente.



Figura 21. Comparación de la curva de índice de refracción del silicio medida experimentalmente, etiquetada como Acevedo (2020), con respecto a las curvas reportadas en la literatura por Green (2008) y Schinke *et al.* (2015).

En la figura 22(b) se presenta una comparación de la curva de índice de refracción del dióxido de silicio medida en el laboratorio con respecto a varios casos de la literatura. Si bien las curvas no son exactamente iguales, se observa que todas tienen un comportamiento similar. Las diferencias se pueden atribuir a una variación en las condiciones experimentales del depósito de las películas delgadas.



Figura 22. (a) Índice de refracción y coeficiente de extinción del dióxido de silicio. (b) Comparación de la curva de índice de refracción del dióxido de silicio medida experimentalmente, etiquetada como Acevedo (2020), con respecto a las curvas reportadas en la literatura por Rodríguez-de Marcos *et al.* (2016) y Gao *et al.* (2012).

Tabla 3. Coeficientes de Sellmeier para el sustrato de dióxido de silicio. B1 y Einf son adimensionales.

	<i>B</i> ₁	λ ₁ (μm)	IRPole (μm^{-2})	Einf
Parámetros	0.82	0.10	0.01	1.30

Debido a que la síntesis de las películas de Si_3N_4 por medio de la técnica de radio frecuencia involucra muchos parámetros, se tuvo la necesidad de hacer un estudio detallado de diferentes muestras para obtener un índice de refracción de este material en función de la frecuencia que fuese representativo para las diferentes muestras sintetizadas, ya que existen pequeñas diferencias en las mediciones de índice de refracción entre diferentes muestras sintetizadas. Estas diferencias fueron encontradas al adaptar un modelo de EMA por separado a cada muestra minimizando el error en el ajuste de los parámetros medidos con el elipsómetro. La cantidad que se tomó como referencia fue la raíz cuadrada del error cuadrático medio del modelo (MSE, por sus siglas en inglés), la cual está definida en el programa CompleteEase acorde a la ecuación (174):

$$MSE = \sqrt{\frac{1}{3n-m} \sum_{i=1}^{n} \left[(N_{E_i} - N_{G_i})^2 + (C_{E_i} - C_{G_i})^2 + (S_{E_i} - S_{G_i})^2 \right] \times 1000,}$$
(174)

donde *n* es el número de longitudes de onda muestreadas, *m* es el número de parámetros de ajuste, $N = cos(2\Psi)$, $C = sen(2\Psi)cos(\Delta)$ y $S = sen(2\Psi)sen(\Delta)$. En pocas palabras, el MSE suma en todas las longitudes de onda de medición las diferencias entre los datos medidos (señalados con el subíndice *E*) y los datos generados por el modelo (señalados con el subíndice *G*). El factor de 1000 se debe a la precisión del elipsómetro en términos de los parámetros *N*, *C* y *S*, que es aproximadamente igual a 0.001 (J.A Woollam Co., 2011). Cuanto menor sea el valor del MSE, mejor concordancia habrá entre los datos medidos y los generados por el modelo. De acuerdo con el manual del software CompleteEase, incluso valores de *MSE* ≈ 20 son considerados aceptables.

Las diferencias entre los índices de refracción de los distintos modelos de EMA se observan en la figura 23(a). Dada la complejidad que implicaría cambiar el algoritmo de simulación para cada nueva muestra de material fabricada en el laboratorio, se buscó estandarizar las mediciones para el material utilizado. Esta estandarización consistió en considerar las muestras sintetizadas de las que no se tenga registro que hayan sufrido ningún tipo de dificultad o percance durante su síntesis. Se utilizan entonces los datos de la medición de elipsometría de estas muestras para encontrar un modelo de índice de refracción capaz de representar a todas las muestras minimizando



el error cuadrático medio del ajuste de la curva del índice de refracción.

Figura 23. (a) Índice de refracción del nitruro de silicio para cada uno de los modelos de EMA (b) Coeficiente de extinción del nitruro de silicio.

En la tabla 4 se desglosan los parámetros de fabricación con los cuales se llegó a las muestras de la figura 23(a). Es necesario resaltar que la muestra 2 y 5 (rojo y verde en la figura 23(a)) se tratan de la misma muestra con la diferencia que estas corresponden a mediciones realizadas con elipsómetros distintos. Las muestras 1-4 fueron caracterizadas utilizando un elipsómetro con un rango de operación de 400 a 890 nm, la muestra 5 fue caracterizado en un rango de 300 a 1680 nm.

#	Tiempo de depósito (min)	P.T. (mTorr)	Grosor <i>Si</i> ₃ N ₄ (nm)	n (632.8 nm)	MSE(EMA)
1	240	6	712.8	2.03	29.4
2	275	6	748.3	2.00	35.6
3	228	10	697.9	2.00	38.3
4	60	10	217.7	1.92	15.6
5	275	6	776.5	2.01	29.6

Tabla 4. Parámetros de fabricación

La tabla 5 señala los porcentajes de participación de cada una de las componentes que conforman el modelo de EMA de cada muestra. En donde el principal componente es el nitruro de silicio, seguido por huecos de aire formados en la síntesis y por último silicio amorfo (ya que nuestro blanco es de silicio).

Muestra	Si ₃ N ₄ (%)	Huecos (%)	Silicio amorfo (%)
1	95.4	4	0.6
2	97.6	2	0.4
3	96.9	2.7	0.4
4	87.7	11.3	1

Tabla 5. Porcentaje de EMA

Para la generación del modelo de EMA en el software del elipsómetro (CompleteEase), el programa utiliza además un modelo o valores predefinidos para cada uno de los materiales que componen el EMA. En la figura 24 se muestra el índice de refracción utilizado para representar el silicio amorfo, el índice de refracción utilizado corresponde a la medición reportada por Palik (1998a).



Figura 24. Índice de refracción y coeficiente de extinción del silicio amorfo considerado en el modelo de EMA (Palik, 1998a)

El caso de los huecos es más sencillo debido a que en estos solo es el índice de refracción del aire, el cual tiene el valor de 1. El índice de refracción utilizado para representar el nitruro de silicio es también obtenido de Palik (1998b). La curva del índice de refracción del Si_3N_4 se presenta en la figura 25, curva que puede ser representada por medio de un modelo Tauc-Lorentz, cuyos parámetros están dados en la tabla 6.



Figura 25. Índice de refracción del nitruro de silicio considerado para el modelo de EMA

Tabla 6. Coeficientes de Tauc-Lorentz para el nitruro de silicio en el modelo de EMA. ($\varepsilon_r(\infty)$ es adimensional)

	A (eV)	C (eV)	$E_0(eV)$	$E_g(eV)$	$\varepsilon_r(\infty)$
Parámetros	131.63	2.78	8.34	4.81	1.65

La muestra 5 fue caracterizada utilizando un elipsómetro con mayor rango de trabajo de 300 a 1680 nm y, como es un rango de longitudes de onda grande, se ha tomado dicha medición como una referencia inicial. Esta medición fue analizada utilizando un modelo de EMA de tres materiales, nitruro de silicio, dióxido de silicio y silicio amorfo. Las contribuciones de cada uno de estos materiales (después de realizar los ajustes pertinentes) se observan en la tabla 7.

Tabla 7. Porcentajes del modelo de EMA para la muestra 5

Muestra	Si ₃ N ₄ (%)	<i>SiO</i> ₂ (%)	Silicio amorfo (%)
5	89.8	3.2	7

Los parámetros para el nitruro de silicio y el dióxido de silicio se encuentran en las tablas 6 y 8, respectivamente. Además es posible ver la forma del índice de refracción del dióxido de silicio en la figura 26. El ajuste para la muestra 5 tuvo un error cuadrático medio de 19.13, utilizando el modelo de EMA.



Figura 26. Índice de refracción y coeficiente de extinción del dióxido de silicio

Tabla 8. Coeficientes de Sellmeier para el sustrato de dióxido de silicio en el modelo de EMA

	<i>B</i> ₁	$\lambda_1(\mu m)$	IRPole (μm^{-2})	E _{inf}
Parámetros	0.76	0.11	0.01	1.35

Con la información anterior se procedió a la descripción del índice de refracción de las muestras sintetizadas en el laboratorio y que fueron consideradas para la estandarización.

4.4.1 Muestra patrón

Recordemos que la muestra 5 fue usada como nuestra primera muestra de referencia, y que su caracterización fue analizada a través del modelo de EMA, por medio del cual se modela el material y se extraen los índices de refracción. Este modelo tiene otro problema. Se puede observar en la figura 25 que el modelo de EMA predice valores negativos para el coeficiente de extinción k, hecho que no concuerda con el concepto físico de k para un material y lleva a errores computacionales. Por ello se realiza una exploración entre Sellmeier y Tauc-Lorentz con la finalidad de elegir el modelo que mejor reemplace al modelo de EMA y represente el índice de refracción del nitruro de silicio. A las mediciones del elipsómetro se le adaptaron dos modelos: Sellmeier y Tauc-Lorentz. Los parámetros de los ajustes de estos modelos se observan en las tablas 9 y 10. Con el fin de saber qué modelo representa mejor al nitruro de silicio y a su vez, cuál es más útil para nuestros intereses, usamos los valores de MSE y la predicción del empatamiento de fase usando los dos modelos de interés. El modelo ideal sería aquel que se adapte a un valor de MSE mínimo para todas las muestras y que las propiedades de empatamiento de fases de un proceso no lineal en guías de onda basadas en este material no varíen de forma significativa con cambios pequeños de geometría.

Tabla 9. Coeficientes de Sellmeier para la muestra patrón de *Si*₃*N*₄.

	<i>B</i> ₁	$\lambda_1(\mu m)$	IRPole (μm^{-2})	Einf
Parámetros	3.92	0.12	0.01	0

Tabla 10. Coeficientes de Tauc-Lorentz para la muestra patrón de $Si_3N_4.(\varepsilon_r(\infty))$ es adimensional)

	A (eV)	C (eV)	$E_0(eV)$	$E_g(eV)$	<i>ε</i> _r (∞)
Parámetros	126.26	2.15	10.54	4.1	0

Estos dos modelos fueron ajustados a las demás muestras (muestras de la 1 a la 4). En la tabla 11 se pueden observar los errores (MSE) obtenidos para los dos modelos en las diferentes muestras.

Tabla 🛛	11.	Comparación	de MSE c	le los aj	ustes u	sando lo	s modelos	de Selln	neier y c	de Tauc-Lo	orentz ob	te-
nidos d	le la	primera mue	stra patró	n (mues	stra 5)	y aplicad	o a todas	las mues	stras.			

Muestra	Sellmeier (MSE)	Tauc-Lorentz (MSE)
1	20.8	19.8
2	32.5	39.0
3	33.2	37.5
4	34.2	35.3
5	29.1	46.9

Como se puede observar en la tabla 11, se encontraron valores de MSE que van desde 19.8 hasta 46.9. Dado que se consideran valores aceptables aquellos menores a 20 (J.A Woollam Co., 2011), se decidió elegir una muestra patrón diferente para optimizar el MSE.

El siguiente paso fue ajustar individualmente un modelo de Sellmeier y Tauc-Lorentz a cada una de las muestras, tomando como semilla inicial la muestra patrón 1. Para esto se permitió la variación de los parámetros de ajuste para generar un nuevo mode-

Muestra	<i>B</i> ₁	λ_1 (μm)	IRPole (μm^{-2})	E _{inf}
1	3.99	0.12	0	0
2	3.99	0.11	0.05	0
3	4.03	0.11	0.10	0
4	3.71	0.10	0.16	0

Tabla 12. Coeficientes de Sellmeier ajustados a cada muestra

Tabla 13. Coeficientes de Tauc-Lorentz para los ajustes a cada muestra.($\varepsilon_r(\infty)$ es adimensional)

Muestra	A(eV)	C (eV)	$E_0(eV)$	$E_g(eV)$	<i>ε</i> _r (∞)
1	135.25	2.15	10.52	4.27	0
2	141.67	2.15	10.75	4.5	0
3	134.39	2.15	10.77	4.35	0
4	124.82	2.16	10.92	4.37	0

Tabla 14. Ajuste de modelos individualmente

Muestra	Sellmeier (MSE)	Tauc-Lorentz (MSE)
1	18.9	19.1
2	29.9	31.4
3	31.6	23
4	21.8	33.4

En la tabla 14 se puede observar como la muestra 1 es aquella con un MSE menor para ambos modelos. Como última exploración se tomaron los modelos para la muestra 1 y se les ajustó a las mediciones del elipsómetro de las demás muestras de la 2 a la 4. Con ello se observó que el modelo de la muestra 1 obtuvo valores por debajo de 20 para el error cuadrático medio, como se observa en la tabla 15.

Tabla 15. Valores del error cuadrático medio de las muestras cuando es aplicado el modelo de la muestra1

Muestra	Sellmeier (MSE)	Tauc-Lorentz (MSE)
1	18.9	19.1
2	36.9	37.1
3	37.4	36.6
4	42.4	38.2

Para tener una visión más global de cómo se están comportando los ajustes de ambos modelos y cómo difieren entre si, se graficaron las curvas de índice de refracción usando los modelos descritos por los parámetros de las tablas 12 y 13. Las gráficas de índice de refracción se observan en la figura 27. En la tabla 16 se observa una comparación de los índices de refracción obtenidos para una longitud de onda de 1 μm . En esta figura se puede apreciar del lado izquierdo las curvas generadas con el modelo de Tauc-Lorentz y de la derecha aquellas correspondientes con el modelo de Sellmeier. Es posible observar que existen variaciones pequeñas entre todas las curvas, sin embargo es posible observar una mayor separación entre índices de refracción en las curvas modeladas con Sellmeier. Además se observa un aglutinamiento de las curvas del modelo de Tauc-Lorentz, exceptuando por el caso de la muestra 4 (curva morada) donde cabe destacar que es aquella con el MSE más alto (como se observa en la tabla 14) y también aquella que se separa de las otras en la figura. Esto en principio podría no ser muy grave siempre y cuando se conserve la forma de la curva y por lo tanto la derivada de esta curva con respecto a la frecuencia. Si se observan cambios en la forma de la pendiente esto afectaría a las curvas de empatamiento de fases.



Figura 27. Índices de refracción, la izquierda corresponde a las curvas generadas a partir del modelo de Tauc-Lorentz, la derecha a partir del modelo de Sellmeier.

Muestra	Tauc-Lorentz	Sellmeier	
Patrón	2.00	2.00	
1	2.01	2.01	
2	2.00	2.02	
3	1.99	2.04	
4	1.92	1.98	

Tabla 16. Índice de refracción para una $\lambda = 1 \mu m$

Para comprobar cómo se ven afectadas las curvas de empatamiento de fases de un proceso no lineal particular, en primer lugar se simula el índice de refracción efectivo para una guía conformada por los tres materiales tratados en este trabajo. Esta guía, por el momento con propósitos demostrativos, tiene dimensiones de: altura 0.52 μm y ancho de 1 μm sobre una plataforma de silicio y dióxido de silicio con grosores de 2 y 1 μm , respectivamente. El índice de refracción efectivo variará debido a las diferencias en el índice de refracción de cada modelo de índice de refracción del nitruro de silicio. Esto se puede observar en la figura 28. En esta figura se observa un comportamiento similar al presentado al de la figura 27.



Figura 28. Índice de refracción efectivo del modo fundamental TM en una guía de onda de nitruro de silicio, la izquierda corresponde a las curvas generadas a partir del modelo de Tauc-Lorentz, la derecha a partir del modelo de Sellmeier.

Muestra	Tauc-Lorentz	Sellmeier	
Patrón	1.86	1.85	
1	1.87	1.87	
2	1.85	1.88	
3	1.86	1.90	
4	1.79	1.83	

Tabla 17. Índice de refracción efectivo para una $\lambda = 1 \mu m$

En las gráficas de empatamiento de fase (obtenidas usando los índices efectivos de la figura 28 y la teoría y el procedimiento descritos en los capítulos 3 y 5) se puede apreciar de mejor manera como estos pequeños cambios en los índices de refracción de los materiales afectan el diseño de una guía de onda. En la figura 29 se tiene de nuevo del lado izquierdo la curvas que proceden de utilizar el modelo de Tauc-Lorentz y en la derecha el de Sellmeier. Se puede observar en la figura que los pequeños cambios de índice de refracción se tradujeron en cambios mas apreciables en el caso de Sellmeier. Estos cambios son importantes debido a que hay que recordar que estas muestras representan a las mejores muestras de nitruro de silicio fabricadas en el grupo de trabajo por lo que, se espera que correspondan aproximadamente el mismo material en todas las muestras. Esto conllevaría que las curvas deben ser similares entre si. En la gráfica derecha de la figura 29 se observa cómo el modelo de la muestra 3 difiere en cientos de nanómetros del modelo de la muestra 1. Esto implicaría que las muestras 1 y 3 no son aptas para ser usadas en un arreglo óptico para la generación de DFG de las mismas características. Serían necesarios láseres con longitudes de onda muy distintas entre estas dos muestras o se esperaría una traslación en frecuencia a longitudes de onda muy distintas.



Figura 29. Diagrama de empatamiento de fases del proceso de generación de diferencia de frecuencias, la izquierda corresponde las curvas generadas con el modelo de Tauc-Lorentz, la derecha a partir del modelo de Sellmeier. La guía de onda corresponde a la mencionada para la figura 28.

También es posible observar la implicación de la diferencia de los índices de refracción en otros procesos no lineales, como es el mezclado de cuatro ondas espontáneo (ver capítulo 5), utilizado en general para la generación de fotones individuales, en donde también se observa una importante diferencia en los resultados, como se muestra en la figura 30.



Figura 30. Diagrama de empatamiento de fases para el proceso de SFWM, correspondiente a la guía de onda con índice de refracción efectivo mostrada en la figura 27. La izquierda corresponde a las curvas generadas a partir del modelo Tauc-Lorentz, la derecha a partir del modelo de Sellmeier.

En este estudio se encontró que el modelo de Sellmeier tiende a generar índices de

refracción que si bien son similares, al calcular el empatamiento de fases se obtienen marcadas diferencias para las diferentes muestras (diferencias del orden de decenas o cientos de nanómetros) en la sintonización de las señales. Por el contrario el modelo de Tauc-Lorentz se mostró mucho más robusto en los resultados obtenidos de empatamiento de fase y las diferencias son de apenas unos cuantos nanómetros. Es por esto que el modelo elegido para representar el índice de refracción del núcleo de nitruro de silicio de la guía es Tauc-Lorentz.

Finalmente entre los modelos de Tauc-Lorentz disponibles fue elegido el correspondiente a la muestra 1, el cual se aplicó a las demás muestras para verificar que el modelo es capaz de representar las propiedades ópticas de las muestras bajo estudio. Esta muestra se eligió por ser la que presentó un menor error cuadrático medio. Con el objetivo de discernir qué muestras de nitruro de silicio fabricado cumplen con el mínimo necesario para su aplicación en el laboratorio, se propuso utilizar la medición de MSE registrada por el elipsómetro al ajustarse el modelo de la muestra 1. Si el valor del error cuadrático medio de la medición de la muestra supera un valor de 30, vamos a considerar que la síntesis del nitruro de silicio en el laboratorio produjo un material diferente al nitruro de silicio que se está estandarizando. Para resaltar, el modelo elegido cuenta con las siguientes constantes de Tauc-Lorentz: 135.25 eV, 2.15 eV, 10.52 eV, 4.27 eV y 0 para A, C, E_0 , E_g , $\varepsilon_r(\infty)$, respectivamente.

En necesario destacar que este resultado debe aún ser validado experimentalmente y así verificar que efectivamente al realizar un proceso no lineal, la sintonización de las longitudes de onda es como predice Tauc-Lorentz o Sellmeier.

4.5 Proceso de fabricación de las guías de onda

A pesar de que en este trabajo no se fabricó la fuente de diferencia de frecuencia, se han tenido en cuenta todas las limitantes experimentales de fabricación para la propuesta final. En el grupo de trabajo, se cuenta con las herramientas básicas para fabricar las guías de ondas tipo cresta mediante la técnica de fotolitografía. Dicha técnica es utilizada ampliamente en el mundo para la fabricación de dispositivos tanto electrónicos como ópticos. La técnica de fotolitografía tiene un límite de resolución (mínimo tamaño de dispositivo que se puede fabricar) que depende del instrumento utilizado para dibujar el patrón de interés, el cual es del orden de 300 nm en el instrumento con que se cuenta en el grupo de trabajo (escritora láser), así como de la fotoresina utilizada para el proceso de grabado, la cual limita el tamaño mínimo a 800 nm. Estos valores de resolución serán tenidos en cuenta para los diseños de las guías.

El proceso de fabricación se puede simplificar con el esquema de la figura 31. En el primer paso, los materiales se encuentran previamente sintetizados. A grandes rasgos la técnica de fotolitografía consiste en: primero, colocar fotoresina sobre una muestra, que para nuestra propuesta es una plataforma conformada por películas delgadas de Si_3N_4 y SiO_2 sobre un sustrato de Si. La foto-resina es una sustancia sensible a luz y cuyo objetivo es el proteger a la capa de nitruro de silicio para que esta no se vea afectada por el proceso de decapado. Después de grabar la vista planar de lo que será nuestra guía de onda con la escritora láser, se tiene que hacer el revelado. Hasta aquí se tendrá el dibujo del patrón hecho sobre la fotoresina. Después se remueve el material de interés (Si_3N_4) utilizando técnicas de decapado. Por último se quita la fotoresina quedando el patrón hecho del material de interés. Más detalle de esta técnica se encuentra en la referencia Kastenmeier *et al.* (1996).



Figura 31. Proceso de fabricación de las guías de onda. Tomada de Aguayo Alvarado (2021)

Capítulo 5. Diseño experimental para la demostración de traslación espectral por DFG

5.1 Descripción general de la propuesta.

En esta tesis se propone la demostración del proceso de traslación espectral de un estado de fotón individual, por medio del proceso de generación de diferencia de frecuencias en una guía de onda tipo cresta de nitruro de silicio, como la mostrada en la figura 32. Las propiedades ópticas de los materiales que constituyen a la guía de onda fueron descritos en el capítulo anterior.

Para el propósito de la traslación espectral, se supone que el estado de fotón individual está en un estado puro, es decir puede ser descrito según la ecuación (104). Asimismo, se asume que la función de mapeo correspondiente al proceso de DFG es separable (ver ecuación (94)), de manera que el operador de evolución que describe a la interacción no lineal tenga la forma dada por la ecuación (101). Esta última suposición, como se verá más adelante, impone restricciones en el diseño de la geometría de la guía de onda, así como en las características de los láseres de bombeo.

En este capítulo se aborda el proceso de definición de una geometría de guía de onda y características de los láseres de bombeo, que conlleven a satisfacer los requisitos de factorabilidad de la función de mapeo, eficiencia óptima de conversión, condiciones de fabricación y régimen de operación acorde con la infraestructura disponible en el



Figura 32. Diseño de la guía de onda que se propone para la demostración de traslación espectral por DFG.

grupo de trabajo. De esta manera, el resultado principal de la tesis lo constituye la propuesta de diseño experimental, la cual sentará las bases para el desarrollo posterior de un dispositivo integrado para la demostración de DFG y su caracterización.

5.2 Propiedades de dispersión de guías de onda tipo cresta de Si₃N₄

La guía de onda tipo cresta o *ridge* que se propone está conformada por un núcleo de nitruro de silicio, el cual se encuentra sobre una plataforma de dióxido de silicio sobre silicio. Las ondas de luz se propagan a lo largo del núcleo de la guía en forma de *modos*, ondas electromagnéticas que se diferencian entre sí por su polarización, por una distribución transversal invariante y por su índice efectivo (Selvaraja y Sethi, 2018).

Nos interesa en particular operar en el régimen monomodal, es decir, aquel para el cual se propaga sólo un modo, denominado el *modo fundamental*, el cual tiene el índice efectivo mayor y un perfil transversal más similar a una gaussiana. Esto se logra reduciendo las dimensiones del núcleo (Saleh y Teich, 2019). Asimismo, en este trabajo es importante determinar de manera precisa el índice efectivo puesto que éste no sólo determina las propiedades de dispersión de la guía, si no que además está directamente relacionado con la eficiencia de generación de DFG, a través de la condición de empatamiento de fases que se introdujo en la ecuación (54). En esta sección se tratará principalmente lo relacionado con las propiedades de dispersión de la guía, y en la siguiente sección se presentarán con más detalle las propiedades de empatamiento de fases.

Para analizar las propiedades de dispersión de las guías de onda de interés en este trabajo, un primer paso es calcular los modos de propagación y su correspondiente índice de refracción efectivo. Para ello, se utilizó una paquetería numérica de uso libre denominada Wgmodes (Fallahkhair *et al.*, 2008), la cual resuelve el problema electromagnético de modos en guías de onda dieléctricas a partir del formalismo que se describe a continuación.

5.2.1 Cálculo de los modos de propagación y el índice de refracción efectivo

A partir de las ecuaciones (13) y (12)) del capítulo 2 se puede obtener la siguiente ecuación para las distribuciones transversales de los campos magnéticos:

$$\nabla \times (\epsilon^{-1} \nabla \times \vec{H}) = \omega^2 \mu_0 \vec{H}, \tag{175}$$

donde se asumió que el material es no magnético y que el campo magnético tiene la forma $\vec{H}(r,t) = \vec{H}(r)e^{-i(k_z z - \omega t)}$, donde $\vec{H}(r) = (Hx, Hy, Hz)$, y el tensor de permitividad dieléctrica ϵ , tiene la forma:

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0\\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & 0\\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}.$$
 (176)

Esta forma del tensor de permitividad dieléctrica es característica de materiales con anisotropía transversal, lo cual quiere decir que es adecuado para describir materiales birrefringentes, por ejemplo. Sin embargo, en este trabajo no se consideraron tales materiales, por lo cual $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = 0$. Lo anterior es debido a que la guía de onda que se propone está compuesta de nitruro de silicio amorfo. No obstante, se continuará en esta sección con la descripción del caso general.

Cabe mencionar que la ecuación (175) se trata de un problema de eigenvalores, el cual más adelante tomará la forma más tradicional. Con la finalidad de escribir la ecuación (175) de una forma más sencilla, primero debemos expandirla de acuerdo con las componentes transversales del campo, asumiendo que la guía de onda es simétrica a lo largo del eje z de propagación. Después se escribe la ecuación de onda en términos de las componentes x y y, se aplica la relación de divergencia del campo magnético ($\nabla \cdot \vec{H} = 0$), obteniendo:

$$H_z = \frac{1}{ik_z} \left(\frac{dH_x}{dx} + \frac{dH_y}{dy} \right).$$
(177)

Reemplazando este resultado para H_z en la ecuación (175) obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}} \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\epsilon_{yx}}{\epsilon_{zz}} \frac{\partial^2 H_x}{\partial y \partial x} + \left(1 - \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}}\right) \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y} - \frac{\epsilon_{yx}}{\epsilon_{zz}} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + k^2 (\epsilon_{yy} H_z - \epsilon_{yx} H_y) = \beta^2 H_x,$$
(178)

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{zz}} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y} + \left(1 - \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}}\right) \frac{\partial^2 H_x}{\partial y \partial x} - \frac{\epsilon_{yx}}{\epsilon_{zz}} \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + k^2 (\epsilon_{xx} H_y - \epsilon_{xy} H_x) = \beta^2 H_y.$$
(179)

Se tiene entonces una expresión completamente en términos de las dos componentes transversales del campo magnético. Ahora, agrupando los términos que sólo interactúan con la componente H_x del campo magnético se define el operador diferencial A_{xx} :

$$A_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\epsilon_{yx}}{\epsilon_{zz}} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + k^2 \epsilon_{yy}.$$
 (180)

De la misma forma, es posible encontrar operadores similares para aquellos términos que solo interactúan con la otra componente (A_{yy}) o de forma cruzada (A_{xy} y A_{yx}). Estos operadores diferenciales son presentados de manera más explícita en el artículo de Fallahkhair *et al.* (2008). Con los cuatro operadores calculados el problema toma la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \beta^2 \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix},$$
 (181)

Esta expresión tiene la clásica forma de un problema de eigenvalores, el cual puede resolverse por medio de propiedades de matrices y de álgebra lineal, utilizando además un algoritmo de diferencias finitas para calcular los operadores diferenciales.

En el algoritmo de diferencias finitas se representa a las funciones $H_x(x, y)$ por valores discretos en el contexto de una malla de evaluación, en donde en cada punto (n,m) se tiene que $H_x(x, y) \approx H_x(n\Delta x, m\Delta y)$. Δx y Δy son las distancias entre puntos en las coordenadas x y y. Las derivadas se representan por diferencias en la malla de la siguiente manera:

$$\frac{dH_x}{dx} = \frac{(H_{x_{n+1,m}} - H_{x_{n-1,m}})}{2\Delta x}.$$
(182)

La paquetería Wgmodes contiene diversas subrutinas que controlan diferentes aspectos en la simulación, siendo las principales:

 Waveguidemesh: esta subrutina contiene el algoritmo con el cual se crea la malla de simulación utilizada para el algoritmo de diferencias finitas. Para ello se deben tomar en cuenta las dimensiones de la guía de onda y la resolución de la malla (ver figura 33).



Figura 33. Ejemplo de una malla homogénea que consiste de un arreglo cuadriculado de 4 x 2. Recuperada de Fallahkhair *et al.* (2008)

Stretchmesh: Ésta tiene como objetivo implementar condiciones de frontera a la malla producida por la subrutina anterior. Para el caso de este trabajo, las condiciones de frontera se aplican mediante una expansión parabólica en malla. Esta expansión se realiza para emular las condiciones de frontera conocida como perfectly matched layers o (PML), siendo esta la condición de frontera la que mejor describe a la guía de onda. La definición de las capas PML evitan reflexiones no deseadas del campo eléctrico en el borde de la ventana de simulación. Para el funcionamiento de esta subrutina solo es necesario tener definida la malla de simulación y especificar el número de capas de PML que se requieran, lo cual dependerá del tamaño de la guía de onda.



Figura 34. En esta imagen se observa como en los alrededores de la zona de exploración se genera una región donde se cumplen las nuevas condiciones de frontera. La definición de las capas PML evitan reflexiones no deseadas del campo eléctrico en el borde de la ventana de simulación. Recuperado de Berenger (1994).

Wgmodes: esta es la subrutina principal de la paquetería, recibe los datos de la malla ya modificados y es en la que finalmente se realiza el cálculo de las distribuciones del campo electromagnético soportadas por la guía de onda y su índice de refracción efectivo, solucionando las ecuaciones de Maxwell por medio de un esquema de discretización de diferencias finitas.

Para una geometría definida y una longitud de onda partícular, Wgmodes encuentra los modos sortados por la estructura y sus respectivos índices de refracción efectivo. Para cada modo, la paquetería arroja la distribución transversal de las seis componentes del campo electromagnético, tal y como se observa en la figura 35 para el modo fundamental TM soportado por una guía de onda caracterizada por un ancho de 1 μ m y una altura de 0.52 μ m, el cual tiene un índice de refracción efectivo de 2.05 a una longitud de onda de $\lambda = 400 \ nm$. Note que Wgmodes toma ventaja de la simetría de las guías de onda para minimizar el tiempo de cálculo, al considerar la mitad de la estructura. Por otro lado, en la figura 36 se muestran los perfiles de intensidad completos de dos modos TE, el fundamental (panel (a)) y el primer modo de orden superior (panel (b)), los cuales fueron encontrados para una guía de onda con $W = 1 \ \mu m \ y \ h = 0.52 \ \mu m$ y para una longitud de onda de $\lambda = 400 \ nm$.

Dependiendo de su geometría, una guía de onda para una misma longitud de onda



Figura 35. Componentes del modo fundamental TM de una guía de onda con $W = 1 \ \mu m$ y $h = 0.52 \ \mu m$.

puede soportar varios modos de propagación. No obstante, en este trabajo estamos interesados en el modo fundamental, el cual exhibe una estructura espacial como la de la figura 36(a). En el contexto de guías de onda con geometría rectangular, el modo fundamental, es decir el de mayor índice de refracción efectivo es el modo TE con una distribución espacial lo más parecida a una función gaussiana. Dos alternativas son consideradas para la operación monomodal del dispositivo propuesto: i) la guía de onda solo soporta el modo fundamental TE en el rango espectral de interés, ii) aunque la guía soporte pocos modos de propagación, se restringe su diseño para que el empatamiento de fases requerido para el proceso no lineal bajo estudio se satisfa-



Figura 36. Perfil transversal de modos TE de una guía de onda con $W = 1\mu m$ y $h = 0.52\mu m$ y para una longitud de onda de 400 nm. (a) Modo fundamental. (b) Primer modo de orden superior.

ga solo para el modo fundamental. Aún si existieran procesos en competencia de la misma naturaleza, por condiciones de conservación de momento, las señales estarían centradas en longitudes de onda diferentes, pudiendo ser filtradas espectralmente. Es preciso mencionar, que en la resolución numérica de los modos en una guía de onda, puede suceder que la rutina no siga siempre el modo de interés al general la curva de dispersión (el índice de refracción efectivo en función de la frecuencia). Por tal razón, en nuestro código se adicionó una etapa que permite comparar el modo encontrado por la paquetería con un modo gaussiano con dimensiones similares a las dimensiones de la guía de onda. El modo encontrado se rechaza si el traslape espacial que se encuentra no es óptimo y se acepta cuando el traslape es próximo a la unidad.

Para la búsqueda de una geometría de guía de onda con características de dispersión apropiadas para la demostración del proceso de traslación espectral de una señal, por medio del proceso de DFG, se generó una matriz de datos que comprende guías de onda con altura del núcleo variando entre 0.4μ m y 1.0μ m y anchos entre 1.0μ m y 2.5μ m. El conjunto de datos comprende la distribución espacial de los modos y el índice efectivo en función de la longitud de onda, definida en el rango de 0.5μ m a 1.6μ m. Las dimensiones geométricas se restringieron a fin de evitar un contenido modal alto. Conocido el índice de refracción efectivo en función de la longitud de onda se está en condiciones de evaluar la constante de propagación ($k(\omega) = n_{eff}(\omega)\omega/c$) y propiedades dispersivas tales como la velocidad de grupo y la dispersión de la velocidad de grupo.



Figura 37. (a) Variación del índice de refracción efectivo de los modos fundamentales TM y TE soportados en guías de onda tipo cresta, considerando diferentes valores de ancho del núcleo y una altura fija. (b) Variación del índice de refracción efectivo de los modos fundamentales TM y TE soportados en guías de onda tipo cresta, considerando diferentes valores de altura del núcleo y un ancho fijo. Como referencia, se incluyeron las curvas de los índices de refracción de los materiales del núcleo y el sustrato.

En la figura 37 se presentan resultados del índice de refracción efectivo para guías de onda tipo cresta de nitruro de silicio, para una altura fija y diferentes valores del ancho del núcleo (panel (a)) y para un ancho fijo y diferentes valores de la altura del núcleo (panel (b)). Se muestran resultados para el modo fundalmental TE, círculos abiertos, y para el modo fundamental TM, líneas solidas. En todas las simulaciones se consideró que el espesor de la película de SiO_2 es de 1.0μ m. Note que como referencia se incluyeron las curvas del índice de refracción del Si_3N_4 y del SiO_2 . Puede observarse, que entre mayores son las dimensiones del núcleo, los modos fundamentata TE y TM se confinan más a la estructura, manifestado en un índice de refracción del núcleo.

Al estudiar la generación de efectos no lineales en guías de onda es necesario tener en cuenta el efecto de la dispersión. Por un lado, debido a la dispersión cada componente espectral de un haz de luz pulsado viajará a una velocidad de grupo diferente al interior de la guía de onda, lo cual producirá un ensanchamiento de éste en el dominio del tiempo (Agrawal, 2000). Por otro lado, la dependencia del índice de refracción efectivo con respecto a la longitud de onda también afecta las relaciones entre las velocidades de grupo de los campos involucrados en efectos no lineales, tales como el DFG. Es importante recordar que, en el contexto de este trabajo, es necesario controlar esas relaciones para garantizar la separabilidad de la función de mapeo, como se mencionó en la sección 3.5.

5.3 Propiedades de empatamiento de fases y desempatamiento de velocidades de grupo.

Para los propósitos de este trabajo de investigación, el proceso no lineal de DFG se restringe a una configuración co-propagante y monomodal espacialmente. No obstante, dado que las estructuras pueden soportar los modos fundamentales TE y TM, se exploraron condiciones de empatamiento de fases con todos los cuatro campos en una misma polarización, o bien con polarizaciones cruzadas, teniendo en cuenta que en una interacción de cuatro campos en un medio isotrópico, las polarizaciones deben presentarse en pares (Agrawal, 2000). Considerando que la propagación se da en una sola dirección, es suficiente hacer un análisis escalar para estudiar las propiedades de empatamiento de fases de las guías de onda exploradas.

Empatamiento de fases perfecto se da cuando se satisface la ecuación $\Delta k = 0$ (ver ecuación (70)). Dada una geometría, las soluciones a esta ecuación pueden representarse mediante contornos en el espacio { λ_{p1} , λ_{s1} }, para un valor fijo de λ_{p2} , tal y como se muestra en la figura 38, para el cual se consideró una configuración copolarizada, todos los campos viajando en el modo fundamental TE.



Figura 38. Contornos de empatamiento de fases ($\Delta k = 0$) para el proceso DFG para una guía de onda con una altura de 0.55 μm y ancho de 1.34 μm . Se consideraron campos viajando en el modo fundamental TE y dos valores fijos para la longitud de onda del bombeo 2 (a) $\lambda_{P2} = 1.40 \ \mu m$ (b) $\lambda_{P2} = 1.55 \ \mu m$, respectivamente. Como referencia, se incluyó una línea vertical señalando una longitud de onda del bombeo 1 centrada en 0.80 μm .

Puede observarse en la figura 38 que el contorno $\Delta k = 0$ exhibe soluciones no triviales representadas por la línea curva, y soluciones triviales que corresponden a las líneas rectas horizontal y vertical que se destacan en la figura en color azul. Se puede observar además, que al aumentar la longitud de onda del bombeo 2, la solución no trivial se desplaza ligeramente a menores longitudes de onda. Si, por otro lado, se consideran campos viajando en el modo fundamental TM y en configuración copolarizada, se observa un comportamiento similar, con la diferencia de que en este caso las soluciones no triviales forman curvas cerradas. Esto se muestra en la figura 39.



Figura 39. Contornos de empatamiento de fases ($\Delta k = 0$) para el proceso DFG para una guía de onda con una altura de 0.55 μm y ancho de 1.34 μm . Se consideraron campos viajando en el modo fundamental TM y dos valores fijos para la longitud de onda del bombeo 2 (a) $\lambda_{P2} = 1.40 \ \mu m$ (b) $\lambda_{P2} = 1.55 \ \mu m$, respectivamente. Como referencia, se incluyó una línea vertical señalando una longitud de onda del bombeo 1 centrada en 0.80 μm .

Por otro lado, en el capítulo 3 se discutió que una alternativa para factorizar la función de mapeo, es hacer uso de la técnica de empatamiento de velocidades de grupo, la cual está asociada al control de las propiedades de dispersión de las guías de onda (Garay-Palmett *et al.*, 2007). En particular, se describieron tres relaciones específicas que pueden conducir a la factorabilidad deseada, las cuales podemos denominar aquí de la siguiente manera:

$$GVM_1 = k^{(1)}(\omega_{\rho_1}) - k^{(1)}(\omega_{s_1}) = 0,$$
(183)

$$GVM_2 = k^{(1)}(\omega_{p_1}) - k^{(1)}(\omega_{s_2}) = 0,$$
(184)

$$GVM_3 = 2k^{(1)}(\omega_{p_1}) - k^{(1)}(\omega_{s_1}) - k^{(1)}(\omega_{s_2}) = 0,$$
(185)

donde $k^{(1)}(\omega_i)$ es el inverso de la velocidad de grupo del campo a frecuencia ω_i . Al igual que la condición de empatamiento de fases se puede representar por medio de contornos en el espacio { λ_{p1} , λ_{s1} }, las condiciones de GVM se pueden definir en el mismo espacio, tal y como se ilustra en la figura 40 para el caso de campos copolarizados (modo TM).



Figura 40. Contornos de empatamiento de velocidades de grupo (a) GVM_1 , (b) GVM_2 y (c) GVM_3 para el proceso DFG para una guía de onda con una altura de 0.55 μm y ancho de 1.34 μm . Se consideraron campos viajando en el modo fundamental TM y un bombeo 2 con longitud de onda $\lambda_{P2} = 1.55 \ \mu m$.

Cuando alguna de las anteriores condiciones se cumple en conjunción con $\Delta k = 0$, y además se satisface la relación adecuada entre la longitud de la guía de onda y el ancho de banda de los bombeos (Garay-Palmett *et al.*, 2007), la función de mapeo adoptará una característica espectral que evidencia la ausencia de correlación entre las frecuencias a trasladar y las trasladadas, de manera análoga al caso de la función de intensidad espectral conjunta en SFWM, tal y como se muestra en la figura 41.



Figura 41. Función de intensidad espectral conjunta para SFWM cuando se cumple la condición GVM_3 (a), la condición GVM_1 (b) y la condición GVM_2 (c). Imagen recuperada de Garay-Palmett (2009).

Para una fuente de DFG arbitraria, sin control en las propiedades de empatamiento de velocidades de grupo entre los campos que interactúan, en general la función de mapeo exhibe correlación espectral, tal y como se ilustra en la figura 42.



Figura 42. Función de mapeo no factorizable para una guía de onda con ancho de 3.04 μ m y una altura de 0.74 μ m, un láser de bombeo de pulsado centrado en 741 nm, un bombeo de onda continua en 1550nm y una señal a trasladar centrada en 1220 nm. La función está normalizada al máximo.

En el caso de la condición GVM_3 , si el ancho de banda del bombeo a ω_{p1} y la longitud de la guía de onda L son tales que el ancho de las funciones de envolvente espectral del bombeo (ecuación 144) y de empatamiento de fases (ecuación 146) sean iguales, la estructura de la función de mapeo es simétrica, tal y como se muestra en el ejemplo de la figura 43. En esta situación, el ancho de banda de los modos s_1 y s_2 es el mismo.

Una discusión más amplia sobre el control de las propiedades espectrales de procesos no lineales paramétricos de tercer orden puede ser consultada en las referencias Garay-Palmett *et al.* (2007) y Garay-Palmett (2009).



Figura 43. Ejemplo de una función de mapeo factorizable y simétrica. Componentes: (a) Envolvente espectral del bombeo. (b) Función de empatamiento de fases. (c) Función de mapeo.

5.4 Estrategia para el diseño de una guía de onda para la traslación espectral de un estado de fotón individual

Con el propósito de definir una geometría de guía de onda ad hoc a las condiciones experimentales del grupo de trabajo, en la cual se pueda implementar el proceso de DFG para la traslación espectral de un estado de fotón individual, se plantéo la siguiente metodología de diseño:

- Se define el tipo de guías de onda a explorar, en nuestro caso guías de onda tipo cresta.
- 2. Se seleccionan los materiales con los cuales se fabricarían las guías. En este caso, el núcleo de las guías a explorar es de nitruro de silicio, el cual está sobre un substrato de dióxido de silicio sobre silicio. Las propiedades ópticas de estos materiales ya fueron discutidos en el capítulo 4.
- 3. Con la información del índice de refracción de los materiales se calcula el índice efectivo en función de la longitud de onda para una matriz de geometrías, de dimensiones que se ajustan a las restricciones de fabricación que se tienen en el grupo de trabajo. La técnica de fotolitografía tiene un límite de resolución del orden de 300 nm (escritora láser), así como de la fotoresina utilizada para el proceso de grabado, la cual limita el tamaño mínimo a 800 nm. El cálculo del índice de refracción efectivo se realiza por medio de la paquetería Wgmodes (ver sección 5.2.1).

- Se limita la exploración a configuraciones de DFG copropagante y monomodal espacialmente, permitiendo hacer exploraciones con combinaciones de las polarizaciones de los campos.
- 5. Se fijan las longitudes de onda de operación, las cuales quedan determinadas por la disponibilidad de láseres y detectores. Se consideró como haz de bombeo un láser ultra rápido de modos amarrados de titanio zafiro (Ti:Sa Mode-locked MIRA 900 P-Coherent) que emite trenes de pulsos menores a 3 ps con una tasa de repetición de 76MHz. La longitud de onda de este láser es sintonizable entre 700 nm y 980 nm, y su ancho espectral a la mitad del máximo (FWHM) es aproximadamente 0.4 nm. En el caso del campo de bombeo 2, se asume un láser infrarrojo de onda continua centrado en 1550 nm. Con el objetivo de detectar la señal trasladada se considera que existen dos detectores: una cámara CCD intensificada (iStar DH334T), la cual tiene un rango de detección de 470 nm a 930 nm, y un detector de fotones individuales en el infrarrojo de InGaAs (ID230, ID Quantique).
- 6. Se define una función a minimizar, denominada en adelante como función objetivo, la cual depende de la geometría de la guía de onda y las longitudes de onda de operación en el proceso de DFG. Minimizar la función objetivo implica encontrar una geometría que satisfaga simultáneamente, a las longitudes de onda deseadas, la condición de empatamiento de fases (ver ecuación (70)) y una de las condiciones de GVM definidas previamente (ver ecuaciones (183) a (185)), esto es

$$F_{Obj}(h, W, \lambda_{p1}, \lambda_{p2}, \lambda_{s1}) = |\Delta k| + |GVM_{\mu}|,$$
(186)

con $\mu = 1, 2, 3$. Idealmente se espera encontrar una geometría para la cual $F_{Obj} = 0$ a las longitudes de onda deseadas. Esto conduciría al proceso de conversión de frecuencias y a la ausencia de correlación entre las frecuencias de la señal a trasladar y la trasladada, es decir a una función de mapeo separable.

5.5 Resultados

Como una primera exploración, se consideró determinar una geometría que conlleve a una función de mapeo separable, asumiendo que todos los campos viajan en
el modo fundamental TE. Para esto se fijaron las longitudes de onda $\lambda_{p1} = 741$ nm, $\lambda_{p2} = 1550$ nm y $\lambda_{s1} = 1220$ nm, lo cual por conservación de energía conllevaría a una señal trasladada en $\lambda_{s2} = 656$ nm. Se varió entonces el espacio de parámetros {*h*, *W*} y se calculó la función objetivo, asumiendo la condición *GVM*₁. Los resultados se muestran en la figura 44.



Figura 44. Función objetivo en términos de la altura del núcleo h y el semiancho de núcleo W/2, considerando la condición GVM_1 y que todos los campos se propagan en el modo fundamental TE.

En este mapa de colores se puede observar como varía el valor de la función objetivo con respecto a la altura y el ancho. Note que existen combinaciones de alturas y anchos que cuentan con un valor de la función objetivo muy similar. Los tonos azules más obscuros corresponden a los pares de *h* y *W* en los cuales la función objetivo alcanza sus valores más bajos, encontrándose el mínimo para $h = 0.85 \ \mu m$ y $W = 2.75 \ \mu m$. Encontradas las dimensiones de la guía de onda, solo queda escoger el ancho de banda del bombeo 1 y la longitud de la guía apropiados para que la función de mapeo sea factorizable. Para el caso particular de *L* = 2.5 *cm* y σ = 3.2 *THz*, la función resultante se muestra en la figura 45.

Para cuantificar la separabilidad de la función de mapeo resultante se utiliza un parámetro denominado como *el parámetro de cooperatividad*, el cual tiene origen en la descomposición de Schmidt (U'Ren *et al.*, 2005; Law *et al.*, 2000). Por ejemplo, para un estado de dos fotones la descomposición de Schmidt implica expresar el estado en



Figura 45. Componentes de la función de mapeo resultante considerando la geometría de la guía de onda cuya función objetivo es mínima (ver figura 44), para $\sigma = 3.2$ THz y L = 2.5 cm. (a) Envolvente espectral del bombeo. (b) Función de empatamiento de fases. (c) Función de mapeo evaluada numéricamente.

(b)

términos de una base completa de estados ortonormales de tal forma que:

 $\lambda_{S2}(\mu m)$

(a)

$$|\Psi\rangle = \sum_{n} \sqrt{\lambda_n} \hat{A}_n^{\dagger} \hat{B}_n^{\dagger} |0\rangle, \qquad (187)$$

(c)

$$\hat{A}_{n}^{\dagger} = \int d\omega_{s} \Psi_{n}(\omega_{s}) \hat{a}_{s}^{\dagger}(\omega_{s}), \qquad (188)$$

$$\hat{B}_{n}^{\dagger} = \int d\omega_{i} \phi_{n}(\omega_{i}) \hat{a}_{i}^{\dagger}(\omega_{i}), \qquad (189)$$

donde $\Psi_n(\omega_s)$ y $\phi_n(\omega_i)$ corresponden a los modos de Schmidt y los valores λ_n se conocen como los coeficientes de Schmidt. \hat{A}_n^{\dagger} y \hat{B}_n^{\dagger} representan modos efectivos de creación de fotones y $\sum_n \lambda_n = 1$ (Mosley *et al.*, 2008). El problema de separabilidad se reduce entonces a encontrar las condiciones para las cuales exista un solo elemento en la descomposición, es decir que el estado quede descrito por el producto de un par de funciones $\Psi_n(\omega_s)$ y $\phi_n(\omega_i)$. A partir de esto, el parámetro de cooperatividad está definido como:

$$P = \frac{1}{\sum_{n} \lambda_{n}^{2}},$$
(190)

donde P = 1 representa un estado en el cual no existen correlaciones espectrales en el estado de dos fotones (Mosley *et al.*, 2008). La descomposición de Schmidt puede aplicarse de manera análoga al proceso de DFG y por lo tanto resulta en una herramienta útil para determinar el nivel de separabilidad de la función de mapeo; una característica deseada en este trabajo porque esto favorecería mediar la translación espectral de un estado de fotón individual en un solo modo temporal.

Para el caso presentado en la figura 45 se obtiene que P = 1.18. En la figura 46(a) se presentan los coeficientes de la descomposición de Schmidt correspondiente. Por otro lado, si la función de mapeo exhibe una mayor correlación espectral se necesitan varios elementos en la descomposición de Schmidt para poder describir al estado, tal es el caso del ejemplo presentado en la figura 42, para el cual los coeficientes de Schmidt se muestran en la figura 46(b).



Figura 46. Coeficientes de Schmidt para (a) el caso presentado en la figura 45 y (b) el ejemplo de la función de mapeo de la figura 42.

5.5.1 Diseño experimental propuesto y su caracterización.

Para la definición de la propuesta de diseño final de la guía de onda que permitiría la demostración del proceso de traslación espectral de una señal por DFG, se asumieron las siguientes longitudes de onda: $\lambda_{p1} = 800$ nm, $\lambda_{p2} = 1550$ nm y $\lambda_{s1} = 1278$ nm, lo cual por conservación de energía conllevaría a una señal trasladada en $\lambda_{s2} = 721$ nm. En esta exploración se sigue asumiendo que la configuración es copropagante y monomodal espacialmente. Por generalidad y en busca de un diseño óptimo, se exploraron las seis diferentes combinaciones para las polarizaciones de los cuatro campos que interactúan, es decir: XXXX, YYYY, XXYY, YYXX, XYXY, XYYX, X correspondiendo a la polarización TE y Y a la polarización TM. Asimismo, para cada uno de los 6 casos se definieron tres funciones objetivos, una para condición de GVM.

Mediante la implementación de un código automatizado que favorece el barrido de

todos los parámetros, fue posible identificar para cada una de las seis configuraciones mezcla de polarización, la existencia o no de una geometría para la cual se minimizan las diferentes funciones objetivo, logrando de esta manera determinar la mejor configuración para nuestra propuesta de diseño. En la figura 47 se muestran los diagramas de empatamiento de fases y de GVM para las seis combinaciones de polarizaciones de los cuatro campos involucrados. Los diagramas corresponden a las geometrías para las cuales se encontró el menor valor de la función objetivo entre las tres definidas para cada condición de GVM.

De la anterior exploración, se identificó que el caso más cercano a las condiciones deseadas para este trabajo corresponde a la configuración YYYY, es decir cuando los cuatro campos involucrados en el proceso de DFG se propagan en el modo TM. En este caso, la función objetivo con menor valor alcanzado fue la relacionada con la condición de GVM_2 , es decir aquella en que el bombeo y la señal trasladada viajan a la misma





Figura 47. Diagramas de empatamiento de fases y de GVM para todas las combinaciones de polarización de los cuatro campos que participan en el proceso de DFG. (a) Corresponde al proceso XXXX, en donde la geometría que proporciona el menor valor de la función objetivo es aquella con h=0.502 μ m y w=1.228 μ m, y se satisface para la condición GVM_1 . (b) Corresponde al proceso YYYY y la geometría que proporciona el menor valor de la función objetivo es aquella con h=0.52 μ m y w=1 μ m, y se satisface para la condición GVM_2 . (c) Proceso XXYY y la geometría es h=0.58 μ m y w=1 μ m, para la condición GVM_2 . (d) Proceso YYXX y la geometría es h=0.58 μ m y w=1 μ m, para la condición GVM_3 . (e) Proceso XYYY y la geometría es h=0.58 μ m y w=3.4 μ m, para la condición GVM_3 . (f) Proceso YXYX y la geometría es h=0.57 μ m y w=1 μ m para la condición GVM_3

velocidad de grupo. La geometría resultante se ilustra en la figura 48.



Figura 48. Propuesta de diseño de una guía de onda para la implementación de DFG sin correlación espectral entre la señal a trasladar y la trasladada. Los parámetros de la fuente se ajustan a las condiciones experimentales del grupo de trabajo.

La figura 49 ilustra el contorno de empatamiento de fases (curva negra) para la geometría identificada, junto con el correspondiente contorno de GVM_2 (curva verde). Como se puede observar en esta figura, ambos contornos se interceptan para $\lambda_{p1} =$ 800 nm y $\lambda_{s1} =$ 1278 nm. Los diagramas fueron calculados para $\lambda_{p2} =$ 1550 nm.



Figura 49. Contorno de empatamiento de fases (curva negra) y contorno de GVM_2 (curva verde). La intersección sería la configuración de longitudes de onda que podría llevar a la factorización de la función de mapeo.

La función de mapeo resultante se presenta en la figura 50, para la cual se asumió que el ancho de banda del bombeo 1 es de $\sigma = 20$ THz y una longitud de la guía de onda de L = 2 cm. El panel (a) de la figura corresponde a la función de envolvente espectral del bombeo, mientras que el panel (b) la función de desempatamiento de fases. La función de mapeo, resultante de las funciones en (a) y (b) se presenta en el panel (c), donde es posible aprecia el carácter factorizable de la función, es decir la ausencia de correlación. Esta afirmación se ve sustentanda en los valores de los coeficientes de Schmidt correspondientes, mostrados en la figura 51. Puede observarse



Figura 50. Componentes de la función de mapeo resultante para el diseño propuesto e identificado en la figura 49, para σ = 20 THz y L = 2 cm. (a) Envolvente espectral del bombeo. (b) Función de empatamiento de fases. (c) Función de mapeo evaluada numéricamente. Recordar que el análisis fue restringido al caso en el que el bombeo 2 es un haz de onda continua.

que el término dominante corresponde al primer elemento en la descomposición de Schmidt (ver ecuación 187), lo cual indica que la función está muy cerca a cumplir con el criterio de factorabilidad. El parámetro de cooperatividad obtenido es P = 1.04.



Figura 51. Coeficientes de Schmidt correspondientes a la función de mapeo de la figura 50.

El espectro individual normalizado de la señal trasladada se muestra en la figura 52(b), para el cual se estimó un ancho de banda de emisión de 6.11 nm, en contraste con el ancho de banda de la señal a trasladar que exhibe un ancho de banda de 2.7 nm. Es importante resaltar que la geometría de guía de onda seleccionda proporciona un coeficiente no lineal efectivo $\gamma = 2415 \,(\text{WKm})^{-1}$, para las longitudes de onda que interactuan en el proceso de DFG. Este valor de la no linealidad es significativamente alto en comparación con los valores que son posibles de obtener en fibras altamente no lineales (Agrawal, 2000).



Figura 52. Espectro de (a) la señal a trasladarse y (b) la señal trasladada para el diseño de la figura 50.

Asumiendo posibles errores en las dimensiones del núcleo de la guía de onda propuesta durante el proceso de fabricación, se hizo una exploración del valor de la función objetivo en términos de *h* y *W*, alrededor de la solución que conllevó al diseño propuesto. El resultado se muestra en la figura 53, de donde puede observarse que para el conjunto de parámetros explorados el valor de la función objetivo no se incrementa significativamente, permitiendo predecir que soluciones cercanas a la ideal pueden ser obtenidas aún si el ancho y el altura se desvían ligeramente del diseño original. De hecho en la figura 54 se muestran los valores del parámetro de cooperatividad que se obtienen para el ancho del núcleo correspondiente al diseño, mientras la altura se varía en el rango de 0.48 μ m a 0.56 μ m.



Figura 53. Función objetivo con respecto al ancho y altura del guía de onda, alrededor del diseño propuesto, ver figura 48.



Figura 54. Parámetro de cooperatividad para un diseño de guía de onda con ancho de 1 μm y a diferentes valores de altura en un rango de 0.48 μm a 0.56 μm . La barra resaltada de color verde corresponde con la altura elegida para el diseño final de la guía de onda.

Finalmente, resta identificar las condiciones para las cuales se puede tener una traslación completa de la señal de entrada (ω_{s1}). Como se mencionó en el capítulo 3, ver ecuaciones 116 y 117, la conversión de ω_{s1} a ω_{s2} está determinada por el valor del parámetro θ (ecuación 117). Una vez determinada la geometría y fijos los valores del ancho de banda del bombeo y la longitud de la guía de onda, el valor de θ puede ser controlado por medio de las potencias de los campos de bombeo. En la figura 55, para una potencia del bombeo 2 de 160 mW, se muestra el porcentaje de traslación (gobernado por la componente senoidal en la ecuación 116) en función de la potencia del bombeo 1 (curva azul). Puede observarse que el menor valor de potencia promedio del bombeo 1, para el cual se da una conversión del 100 % es 40 mW. Por comparación se muestra la componente cosenoidal de la ecuación 116, desde la cual se pueden identificar los valores de potencia para los cuales la señal de entrada pasa por el medio sin trasladarse.



Figura 55. Porcentaje de traslación o no traslación de la señal de entrada con respecto a la potencia de bombeo 1 y para una potencia del bombeo 2 de 160 mW.

Capítulo 6. Conclusiones

En este trabajo de tesis se llevó a cabo un estudio teórico de la interacción no lineal conocida como generación de diferencia de frecuencias, con la finalidad de proponer un diseño de una guía de onda que cumpla con el objetivo de realizar la traslación espectral de estados cuánticos de luz. En el estudio se impusieron condiciones realistas, de tal manera que conlleven a la futura implementación y caracterización del dispositivo, considerando en todo momento la infraestructura disponible en los dos grupos de trabajo involucrados en el proyecto.

Se realizó un estudio teórico del proceso de DFG y se derivó una condición que garantiza que la función de mapeo para este proceso sea factorizable, la cual depende principalmente de las propiedades de dispersión de la guía de onda, el ancho de banda de los bombeos y la longitud de la guía de onda. Nos concentramos en un caso en el cual se tiene un bombeo con ancho de banda idealmente infinito y un segundo bombeo con ancho de banda igual a cero. Se encontró que al utilizar bombeos con tales características, se anulan las correlaciones espectrales entre la señal a trasladar y la trasladada, favoreciendo la interacción con un solo modo temporal del campo electromagnético pulsado. Es decir, en el diseño propuesto se asume que el estado de fotón individual incidente está en un solo modo temporal y que el medio no lineal para DFG está igualmente acondicionado para que la función de mapeo esté descrita por un solo par de funciones de Schmidt, permitiendo que la salida sea también un estado de fotón individual en un modo temporal. Lo anterior es posible si se cumplen ciertas relaciones entre las velocidades de grupo de los campos interactuantes. En particular, el diseño propuesto se basa en igualar la velocidad de grupo del bombeo 1 y la señal trasladada.

Se resaltan los siguientes aspectos:

- El operador de evolución temporal del proceso de generación de diferencia de frecuencias es análogo al operador de divisor de haz, cuando la interacción se da entre un solo par de modos temporales.
- Realmente no existen láseres con las características ideales arriba mencionadas, sin embargo experimentalmente se pueden encontrar aproximaciones. Por ejemplo, para el primer bombeo se podría utilizar un láser de pulsos ultra-cortos y para

el segundo bombeo se podría utilizar un láser de onda continua. Como referencia, un láser con pulsos con duración de picosegundos tiene un ancho de banda del orden de THz ($\approx 10^{12}$ Hz).

Es posible controlar hasta cierto punto las condiciones para las cuales se podría asegurar que se cumpla con la condición de empatamiento de velocidades de grupo. Esto se logra variando las longitudes de onda de los campos utilizados y la dispersión de la guía de onda. A su vez la dispersión de la guía se puede adaptar mediante la elección del material y de su geometría.

Teniendo en cuenta lo anterior, con miras a la futura implementación experimental del proceso de DFG, se propone una guía de onda tipo cresta con un núcleo de nitruro de silicio, sobre un substrato de dióxido de silicio sobre silicio. Es fundamental la precisión en los parámetros de diseño y la acertada estimación de las longitudes de onda involucradas, para lo cual el punto de partida lo constituye la determinación de las características de dispersión que tienen este tipo de guías de onda. Para hallar el diseño adecuado, en primer lugar, se hizo un proceso de familiarización con los procesos de síntesis y caracterización óptica de los materiales así como de la técnica de fabricación de guías de onda por fotolitografía. De manera resumida, el nitruro de silicio es fabricado por Sputtering RF y el sustrato de dióxido de silicio es fabricado mediante oxidación térmica en obleas de silicio. Las muestras de los materiales son analizadas mediante elipsometría en un rango de 400 a 1700nm con el objetivo de conocer sus propiedades ópticas. Para propósitos de diseño de una guía de onda, el dato más importante es el del índice de refracción del material. En este ejercicio de caracterización se encontró que el modelo de índice de refracción de Tauc Lorentz es el que mejor describe en promedio a las muestras de nitruro de silicio fabricadas en la Unidad de Nanofabricación (UNaFAB) del Centro de Nanociencias y Nanotecnología de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Determinado el índice de refracción de los materiales, el siguiente paso en la búsqueda de un diseño realista para la implementación del proceso de DFG consistió en realizar una exploración sistemática de los parámetros geométricos de la guía de onda, es decir, determinar los valores óptimos de su ancho y altura. Para esto, utilizando como base la paquetería Wgmodes, mediante la cual se puede calcular el índice de refracción efectivo de los modos soportados en una guía de onda por medio del método de diferencias finitas, se implementó una rutina numérica en la que se define una función objetivo, la cual debe ser minimizada. Esta función objetivo consiste de la condición de empatamiento de fases y la condición de empatamiento de velocidades de grupo.

La búsqueda del diseño se hizo explorando un conjunto de geometrías con anchos del núcleo variando entre 1 y 2.5 miras y alturas en el rango de 0.4 a 1 micra. El diseño final de guía de onda propuesta para la demostración de DFG se describe a continuación: un substrato de silicio con un grosor de 2 μ m, la película delgada de dióxido de silicio debe contar con un grosor de 1 micrómetro y el núcleo de nitruro de silicio debe tener dimensiones de ancho y altura de 1 micrómetro y 0.52 micrómetros, respectivamente. Las longitudes de onda para las cuales el dispositivo es funcional son: Un bombeo pulsado en 0.800 μ m, un bombeo de onda continua de 1.550 μ m y una señal a trasladar sintonizada en 1.278 μ m, resultando en una señal trasladada en 0.729 μ m. Para cumplir la condición de factorabilidad, son necesarias las siguientes características: un ancho de banda del láser pulsado de 20 THz y una longitud de la guía de 2 centímetros. Este diseño resultó del proceso de optimización, en base a la función objetivo definida y explicada en la sección 5.4.

En el estudio numérico se consideraron escenarios lo más realistas posibles. Sin embargo, si bien las predicciones con respecto a la operación de las guías de onda son favorables, será necesario realizar una implementación experimental, con la cual será posible realizar una caracterización más fiable.

Conviene destacar que una de las mayores aportaciones de este trabajo consistió en demostrar que es posible lograr interacciones no lineales, del tipo DFG, con campos electromagnéticos en un solo modo espacial y temporal, lo cual es deseable para generar la traslación espectral de estados de fotón puros. Para garantizar la pureza, en este caso, es fundamental que no haya correlaciones espectrales entre la señal a trasladar y la señal trasladada, lo cual se logra con las condiciones presentadas. Se deja, además, una metodología general que sirve para diseñar las guías de onda en rangos espectrales específicos. Es por esto que este trabajo es preámbulo para la preparación de qubits de color y compuertas cuánticas basadas en DFG, con el ánimo de colaborar con el esfuerzo global de contar con una computadora cuántica basada en fotónica. Finalmente, se espera que la metodología y los resultados presentados en esta tesis conlleven a la fabricación, caracterización y evaluación de un dispositivo capaz de realizar la traslación espectral de estados cuánticos de luz, y que posteriormente pueda ser incorporado en la implementación de compuertas cuánticas de un qubit en circuitos fotónicos integrados.

Literatura citada

- Abramowitz, M. y Stegun, I. (1972). *Error Function and Fresnel Integrals.*, Vol. 55, p. 297–309. Dover Books on Mathematics, 9mo edición.
- Agha, I., Davanço, M., Thurston, B., y Srinivasan, K. (2012). Low-noise chip-based frequency conversion by four-wave-mixing Bragg scattering in SiN_x waveguides. *Optics Letters*, **37**(14): 2997.
- Agrawal, G. P. (2000). Nonlinear fiber optics. En: *Nonlinear Science at the Dawn of the 21st Century*. Springer, pp. 195–211.
- Aguayo Alvarado, A. L. (2021). *Generación y manipulación de estados de fotón individual por medio de procesos no-lineales en dispositivos fotónicos integrados*. Tesis de doctorado, Centro de investigación científica y de educación superior de Ensenada, Ensenada, Baja California, México. Tesis no publicada.
- Andrews, D. L. (1999). Electromagnetic radiation. En: J. C. Lindon (ed.), *Encyclopedia* of Spectroscopy and Spectrometry. Elsevier, Oxford, pp. 397–401.
- Babinec, T. M., Hausmann, B. J., Khan, M., Zhang, Y., Maze, J. R., Hemmer, P. R., y Lončar, M. (2010). A diamond nanowire single-photon source. *Nature nanotechnology*, 5(3): 195–199.
- Basché, T., Moerner, W., Orrit, M., y Talon, H. (1992). Photon antibunching in the fluorescence of a single dye molecule trapped in a solid. *Physical review letters*, **69**(10): 1516.
- Berenger, J.-P. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of computational physics*, **114**(2): 185–200.
- Bernstein, J. (2021). Erwin schrödinger. Encyclopædia Britannica, Inc. Online. Consultado en: https://www.britannica.com/biography/Erwin-Schrodinger# ref1229301.
- Blumenthal, D. J., Heideman, R., Geuzebroek, D., Leinse, A., y Roeloffzen, C. (2018). Silicon nitride in silicon photonics. *Proceedings of the IEEE*, **106**(12): 2209–2231.
- Born, M. y Wolf, E. (2013). *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Elsevier.
- Boyd, R. W. (2020). Nonlinear optics. Academic press.
- Braunstein, S. L. y Loock, P. V. (2005). Quantum information with continuous variables. REVIEWS OF MODERN PHYSICS, **77**.
- Brecht, B., Eckstein, A., Christ, A., Suche, H., y Silberhorn, C. (2011). From quantum pulse gate to quantum pulse shaper—engineered frequency conversion in nonlinear optical waveguides. *New Journal of Physics*, **13**(6): 065029.
- Briglauer, W., Cambini, C., y Grajek, M. (2018). Speeding up the internet: Regulation and investment in the european fiber optic infrastructure. *International Journal of Industrial Organization*, **61**: 613–652.
- Chen, H. y Shen, W. (2005). Perspectives in the characteristics and applications of tauc-lorentz dielectric function model. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, **43**(4): 503–507.

- Cohen, O., Lundeen, J. S., Smith, B. J., Puentes, G., Mosley, P. J., y Walmsley, I. A. (2009). Tailored photon-pair generation in optical fibers. *Physical Review Letters*, **102**(12): 1–4.
- Corona, M., Garay-Palmett, K., y U'Ren, A. B. (2011). Third-order spontaneous parametric down-conversion in thin optical fibers as a photon-triplet source. *Physical Review A*, **84**(3): 033823.
- Couteau, C. (2018). Spontaneous parametric down-conversion. *Contemporary Physics*, **59**(3): 291–304.
- Deal, B. E. y Grove, A. (1965). General relationship for the thermal oxidation of silicon. *Journal of applied physics*, **36**(12): 3770–3778.
- Domínguez-Serna, F. A. y Garay-Palmett, K. (2021). Quantum state preparation and one qubit logic from third-order nonlinear interactions. *arXiv preprint arXiv:2103.04022*.
- Dong, P., Chen, Y.-K., Duan, G.-H., y Neilson, D. T. (2014). Silicon photonic devices and integrated circuits. *Nanophotonics*, **3**(4-5): 215–228.
- Fallahkhair, A. B., Li, K. S., y Murphy, T. E. (2008). Vector finite difference modesolver for anisotropic dielectric waveguides. *Journal of Lightwave Technology*, 26(11): 1423–1431.
- Ferretti, S. y Gerace, D. (2012). Single-photon nonlinear optics with kerr-type nanostructured materials. *Physical Review B*, **85**(3): 033303.
- Ficek, Z. y Wahiddin, M. R. (2014). *Quantum optics for beginners*. CRC Press.
- Gao, L., Lemarchand, F., y Lequime, M. (2012). Exploitation of multiple incidences spectrometric measurements for thin film reverse engineering. *Optics express*, **20**(14): 15734–15751.
- Garay-Palmett, K. (2009). Propiedades de enlazamiento espectral de parejas de fotones generadas por mezclado de cuatro ondas espontáneo en fibra óptica. Tesis de doctorado, Centro de investigación científica y de educación superior de Ensenada, Ensenada, Baja California, México.
- Garay-Palmett, K., McGuinness, H., Cohen, O., Lundeen, J., Rangel-Rojo, R., U'ren, A., Raymer, M., McKinstrie, C., Radic, S., y Walmsley, I. (2007). Photon pair-state preparation with tailored spectral properties by spontaneous four-wave mixing in photoniccrystal fiber. *Optics express*, **15**(22): 14870–14886.
- Garay-Palmett, K., Corona, M., y U'Ren, A. (2013). Spontaneous parametric processes in optical fibers: a comparison. *arXiv preprint arXiv:1307.3266*.
- Gerry, C., Knight, P., y Knight, P. L. (2005). *Introductory quantum optics*. Cambridge university press.
- Goldstein, H., Poole, C., y Safko, J. (2002). *Classical mechanics*. American Association of Physics Teachers.
- Green, M. A. (2008). Self-consistent optical parameters of intrinsic silicon at 300 k including temperature coefficients. *Solar Energy Materials and Solar Cells*, **92**(11): 1305–1310.

- Grice, W. P. y Walmsley, I. A. (1997). Spectral information and distinguishability in type-ii down-conversion with a broadband pump. *Physical Review A*, **56**(2): 1627.
- Grice, W. P., U'Ren, A. B., y Walmsley, I. A. (2001). Eliminating frequency and spacetime correlations in multiphoton states. *Physical Review A*, **64**(6): 063815.
- Gubler, U. y Bosshard, C. (2000). Optical third-harmonic generation of fused silica in gas atmosphere: Absolute value of the third-order nonlinear optical susceptibility χ (3). *Physical Review B*, **61**(16): 10702.
- Halbleiter (2021). Semiconductor technology from a to z. Halbleiter. Online. Consultado en: https://www.halbleiter.org/en/oxidation/oxidation/.
- Hecht, E. (2017). Optics 5th ed. Pearson.
- Henkel, C. (2013). Quantum optics of the beamsplitter. http://www.quantum.physik. uni-potsdam.de/teaching/ss2013/qo2/script_bsplit.pdf. En línea. Notas de la clase de Introducción a la óptica cuántica.
- Herzinger, C., Johs, B., McGahan, W., Woollam, J. A., y Paulson, W. (1998). Ellipsometric determination of optical constants for silicon and thermally grown silicon dioxide via a multi-sample, multi-wavelength, multi-angle investigation. *Journal of Applied Physics*, 83(6): 3323–3336.
- Hilfiker, J. N., Singh, N., Tiwald, T., Convey, D., Smith, S. M., Baker, J. H., y Tompkins, H. G. (2008). Survey of methods to characterize thin absorbing films with spectros-copic ellipsometry. *Thin Solid Films*, **516**(22): 7979–7989.

Hooge, C. (2016). 5.3 elasticity: Stress and strain. BCIT Physics 0312 Textbook.

- HORIBA (2021). Tauc-Lorentz Dispersion Formula. HORIBA. En linea. Recuperado:https://www.horiba.com/fileadmin/uploads/Scientific/Downloads/ OpticalSchool_CN/TN/ellipsometer/Tauc-Lorentz_Dispersion_Formula.pdf.
- Horwitz, C. M. (1983). Radio frequency sputtering—the significance of power input. Journal of Vacuum Science & Technology A: Vacuum, Surfaces, and Films, 1(4): 1795– 1800.
- J.A Woollam Co., I. (2011). CompleteEASE Data Analysis Manual. J.A Woollam Co., Inc.
- Jellison, G. y Modine, F. (1996). Parameterization of the optical functions of amorphous materials in the interband region. *Applied Physics Letters*, **69**(3): 371–373.
- Jordan, S. (2019). The promise of silicon photonics. *Physics World Focus on Optics & Photonics*.
- Kastenmeier, B., Matsuo, P., Beulens, J., y Oehrlein, G. (1996). Chemical dry etching of silicon nitride and silicon dioxide using cf4/o2/n2 gas mixtures. *Journal of Vacuum Science & Technology A: Vacuum, Surfaces, and Films*, **14**(5): 2802–2813.
- Kasture, S. (2017). Coherent state amplification using frequency conversion and a single photon source. *Optics Communications*, **402**: 193–198.
- Keller, T. E. y Rubin, M. H. (1997). Theory of two-photon entanglement for spontaneous parametric down-conversion driven by a narrow pump pulse. *Phys. Rev. A*, **56**: 1534– 1541.

- Khardani, M., Bouaïcha, M., y Bessaïs, B. (2007). Bruggeman effective medium approach for modelling optical properties of porous silicon: comparison with experiment. *physica status solidi c*, **4**(6): 1986–1990.
- Kim, M., Son, W., Bužek, V., y Knight, P. (2002). Entanglement by a beam splitter: Nonclassicality as a prerequisite for entanglement. *Physical Review A*, **65**(3): 032323.
- Kimble, H. J., Dagenais, M., y Mandel, L. (1977). Photon antibunching in resonance fluorescence. *Physical Review Letters*, **39**(11): 691.
- Kleinman, D. (1962). Theory of second harmonic generation of light. *Physical Review*, **128**(4): 1761.
- Knill, E., Laflamme, R., y Milburn, G. J. (2001). A scheme for efficient quantum computation with linear optics. *Nature*, **409**(6816): 46–52.
- Kok, P., Munro, W. J., Nemoto, K., Ralph, T. C., Dowling, J. P., y Milburn, G. J. (2007). Linear optical quantum computing with photonic qubits. *Reviews of Modern Physics*, **79**(1): 135–174.
- Koshino, K. (2009). Down-conversion of a single photon with unit efficiency. *Physical Review A*, **79**(1): 013804.
- Larouche, S. y Martinu, L. (2008). Openfilters: open-source software for the design, optimization, and synthesis of optical filters. *Applied optics*, **47**(13): C219–C230.
- Law, C., Walmsley, I. A., y Eberly, J. (2000). Continuous frequency entanglement: effective finite hilbert space and entropy control. *Physical Review Letters*, **84**(23): 5304.
- Lax, M. y Nelson, D. (1976). Maxwell equations in material form. *Physical Review B*, **13**(4): 1777.
- Leonhardt, U. (2010). *Essential quantum optics: from quantum measurements to black holes*. Cambridge University Press.
- Light, J. S. (1999). When computers were women. *Technology and culture*, **40**(3): 455–483.
- Loudon, R. (2000). The quantum theory of light. OUP Oxford.
- Luke, K., Okawachi, Y., Lamont, M. R., Gaeta, A. L., y Lipson, M. (2015). Broadband mid-infrared frequency comb generation in a si 3 n 4 microresonator. *Optics letters*, **40**(21): 4823–4826.
- Lukens, J. M. y Lougovski, P. (2017). Frequency-encoded photonic qubits for scalable quantum information processing. *Optica*, **4**(1): 8–16.
- Maiman, T. H. (1960). Stimulated optical radiation in ruby. Phys. Rev. Letters, 4(564).
- McGuinness, H. J., Raymer, M. G., McKinstrie, C. J., y Radic, S. (2010). Quantum frequency translation of single-photon states in a photonic crystal fiber. *Physical Review Letters*, **105**(9): 1–4.
- McKinstrie, C. J., Harvey, J. D., Radic, S., y Raymer, M. G. (2005). Translation of quantum states by four-wave mixing in fibers. *Optics Express*, **13**(22): 9131.

- McMillan, A., Huang, Y.-P., Bell, B., Clark, A., Kumar, P., y Rarity, J. (2013). Four-wave mixing in single-mode optical fibers. En: *Experimental Methods in the Physical Sciences*, Vol. 45. Elsevier, pp. 411–465.
- Micra (2021). Elipsómetro M-2000 [Fotografía]. Micra-Nanotecnologia. Online. Recuperado de: http://www.micra.com.mx/index.php?id_product=38&controller= product.
- Migdall, A., Polyakov, S. V., Fan, J., y Bienfang, J. C. (2013). *Single-photon generation and detection: physics and applications*, Vol. 45. Academic Press.
- Moore, G. E. (1965). Cramming more components onto integrated circuits. *Electronics*, **38**(8).
- Moore, G. E. (1995). Lithography and the future of moore's law. En: *Integrated Circuit Metrology, Inspection, and Process Control IX*. International Society for Optics and Photonics, Vol. 2439, pp. 2–17.
- Moore, G. E. (2003). No exponential is forever: but"foreverçan be delayed![semiconductor industry]. En: 2003 IEEE International Solid-State Circuits Conference, 2003. Digest of Technical Papers. ISSCC.. IEEE, pp. 20–23.
- Morse, S. P. (2017). The intel 8086 chip and the future of microprocessor design. *Computer*, **50**(4): 8–9.
- Mosley, P. J., Lundeen, J. S., Smith, B. J., Wasylczyk, P., U'Ren, A. B., Silberhorn, C., y Walmsley, I. A. (2008). Heralded generation of ultrafast single photons in pure quantum states. *Physical Review Letters*, **100**(13): 133601.
- Nielsen, M. A. y Chuang, I. L. (2019). *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press.
- O'Brien, J. L. (2007). Optical quantum computing. Science, **318**(5856): 1567–1570.
- Palik, E. D. (1998a). *Handbook of optical constants of solids*, Vol. 1. Academic press. pp. 577–580.
- Palik, E. D. (1998b). *Handbook of optical constants of solids*, Vol. 1. Academic press. p. 774.
- Peters, N. A., Barreiro, J. T., Goggin, M. E., Wei, T. C., y Kwiat, P. G. (2005). Remote state preparation: Arbitrary remote control of photon polarization. *Physical Review Letters*, **94**(15): 2–5.
- Pla, J. J., Tan, K. Y., Dehollain, J. P., Lim, W. H., Morton, J. J., Jamieson, D. N., Dzurak, A. S., y Morello, A. (2012). A single-atom electron spin qubit in silicon. *Nature*, **489**(7417): 541–545.
- Politi, A., Matthews, J. C. F., Thompson, M. G., y Brien, J. L. O. (2009). Integrated Quantum Photonics. *IEEE Journal of selected topics in quantum electronics*, **1077**(260): 1–12.
- Rahim, A., Ryckeboer, E., Subramanian, A. Z., Clemmen, S., Kuyken, B., Dhakal, A., Raza, A., Hermans, A., Muneeb, M., Dhoore, S., *et al.* (2017). Expanding the silicon photonics portfolio with silicon nitride photonic integrated circuits. *Journal of lightwave technology*, **35**(4): 639–649.

- Reynaud, S., Lambrecht, A., Genet, C., y Jaekel, M.-T. (2001). Quantum vacuum fluctuations. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IV-Physics*, 2(9): 1287– 1298.
- Rodríguez-de Marcos, L. V., Larruquert, J. I., Méndez, J. A., y Aznárez, J. A. (2016). Selfconsistent optical constants of sio 2 and ta 2 o 5 films. *Optical Materials Express*, 6(11): 3622–3637.

Saleh, B. E. y Teich, M. C. (2019). Fundamentals of photonics. john Wiley & sons.

Sanders, B. C. (1992). Entangled coherent states. *Physical Review A*, **45**(9): 6811.

- Schinke, C., Christian Peest, P., Schmidt, J., Brendel, R., Bothe, K., Vogt, M. R., Kröger, I., Winter, S., Schirmacher, A., Lim, S., *et al.* (2015). Uncertainty analysis for the coefficient of band-to-band absorption of crystalline silicon. *AIP Advances*, 5(6): 067168.
- Selvaraja, S. K. y Sethi, P. (2018). Review on optical waveguides. *Emerging Waveguide Technology*, **95**.
- Senellart, P., Solomon, G., y White, A. (2017). High-performance semiconductor quantum-dot single-photon sources. *Nature nanotechnology*, **12**(11): 1026–1039.
- Serway, R. A., Vuille, C., y Faughn, J. S. (2013). *Fundamentos de física*. Cengage Learning.
- Sigmund, P. (1969). Theory of sputtering. i. sputtering yield of amorphous and polycrystalline targets. *Physical review*, **184**(2): 383.

Sliney, D. (2016). What is light? the visible spectrum and beyond. *Eye*, **30**(2): 222–229.

Stutius, W. y Streifer, W. (1977). Silicon nitride films on silicon for optical waveguides. *Applied Optics*, **16**(12): 3218–3222.

Sutherland, R. L. (2003). Handbook of nonlinear optics. CRC press.

- Thompson, C. (2019). The gendered history of human computers. Smithsonian Institution. Online. Consultado en: https://www.smithsonianmag.com/science-nature/ history-human-computers-180972202/.
- Tipler, P. A. y Mosca, G. (2021). *Física para la ciencia y la tecnología. Volumen 1A: Mecánica*, Vol. 1. Reverte.
- Truax, D. R. (1985). Baker-campbell-hausdorff relations and unitarity of su (2) and su (1, 1) squeeze operators. *Physical Review D*, **31**(8): 1988.
- U'Ren, A. B., Silberhorn, C., Erdmann, R., Banaszek, K., Grice, W. P., Walmsley, I. A., y Raymer, M. G. (2005). Generation of pure-state single-photon wavepackets by conditional preparation based on spontaneous parametric downconversion. *Laser physics*, **15**(1): 146–161.
- Walborn, S. P., Monken, C., Pádua, S., y Ribeiro, P. S. (2010). Spatial correlations in parametric down-conversion. *Physics Reports*, **495**(4-5): 87–139.
- Wang, Y., Ghotbi, M., Das, S., Dai, Y., Li, S., Hu, X., Gan, X., Zhao, J., y Sun, Z. (2020). Difference frequency generation in monolayer mos 2. *Nanoscale*, **12**(38): 19638– 19643.

- Yoran, N. y Reznik, B. (2003). Deterministic linear optics quantum computation with single photon qubits. *Physical review letters*, **91**(3): 037903.
- Yuan, Z., Kardynal, B. E., Stevenson, R. M., Shields, A. J., Lobo, C. J., Cooper, K., Beattie, N. S., Ritchie, D. A., y Pepper, M. (2002). Electrically driven single-photon source. *science*, **295**(5552): 102–105.

Anexo A

Desarrollo a partir de la ecuación (137)

$$I = e^{\frac{-(\nu_{S_1}^2 - \nu_{S_2}^2)^2}{\sigma_{P_2}^2}} \int d\nu_{P_1} e^{i\frac{1}{2}(\tau_{P_1}\nu_{P_1})(\zeta+1)} e^{\frac{-2\nu_{P_1}(\nu_{S_1} - \nu_{S_2})}{\sigma_{P_2}^2}} e^{\frac{-\nu_{P_1}^2(\sigma_{P_2}^2 + \sigma_{P_1}^2)}{\sigma_{P_1}^2\sigma_{P_2}^2}}.$$
 (191)

Se definen las variables B_0 y A para simplificar la integral anterior:

$$B_0^2 = \frac{\sigma_{P_1}^2 + \sigma_{P_2}^2}{\sigma_{P_1}^2 \sigma_{P_2}^2},$$
(192)

$$2A = \frac{1}{B_0^2} \left[-\frac{i}{2} \tau_{P_1}(\zeta + 1) + \frac{2(\nu_{S_1} - \nu_{S_2})}{\sigma_{P_2}^2} \right].$$
(193)

Se encuentra que:

$$I = e^{\frac{-\left(\nu_{S_1}^2 - \nu_{S_2}^2\right)^2}{\sigma_{P_2}^2}} \int d\nu_{P_1} e^{-B_0^2 \left[\nu_{P_1}^2 + 2A\nu_{P_1}\right]}.$$
 (194)

Completando el trinomio cuadrado perfecto en el argumento de la exponencial en la integral se obtiene:

$$I = e^{\frac{-\left(\nu_{S_1}^2 - \nu_{S_2}^2\right)^2}{\sigma_{P_2}^2}} e^{B_0^2 A^2} \int d\nu_{P_1} e^{-B_0^2 \left(\nu_{P_1} + A\right)^2}.$$
 (195)

Para simplificar esta integral, se realizó el siguiente cambio de variable:

$$z = v_{P_1} + A,$$
 (196) $dz = dv_{P_1},$ (197)

con lo cual se llega a la siguiente expresión:

$$I = e^{\frac{-\left(v_{S_1}^2 - v_{S_2}^2\right)^2}{\sigma_{P_2}^2}} e^{B_0^2 A^2} \int dz \ e^{-B_0^2 \ z^2}.$$
 (198)

Esta integral se resolvió utilizando la función gamma ($\Gamma(z)$), realizando el siguiente cambio de variable:

$$t = B_0^2 z^2 \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{1}{B_0} t^{1/2}, \tag{199}$$

$$dt = 2B_0^2 z \, dz \qquad \Rightarrow \qquad dz = \frac{1}{2B_0} t^{-1/2} dt. \tag{200}$$

Reemplazando las ecuaciones (199) y (200) en la ecuación (198) se obtiene:

$$I = e^{\frac{-(v_{S_1}^2 - v_{S_2}^2)^2}{\sigma_{P_2}^2}} e^{B_0^2 A^2} \frac{1}{2B_0} \int dt \ e^{-t} \ t^{-\frac{1}{2}}.$$
 (201)

En la ecuación anterior se reconoce la integral con respecto a la variable *t*, la cual define la función $\Gamma(1/2) = \int dt \, e^{-t} \, t^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$, con lo cual se obtiene:

$$I = e^{\frac{-(v_{S_1}^2 - v_{S_2}^2)^2}{\sigma_{P_2}^2}} e^{B_0^2 A^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2B_0}.$$
 (202)

La ecuación (202) contiene el resultado final de la integral *I*. Volviendo a la ecuación (137) que define la función de mapeo $F(\nu_{S_1}, \nu_{S_2})$ se tiene:

$$F(\nu_{S_1},\nu_{S_2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{4B_0} e^{\frac{-(\nu_{S_1}^2 - \nu_{S_2}^2)^2}{\sigma_{P_2}^2}} \int_{-1}^{1} d\zeta e^{i\frac{1}{2}(L\Delta k^0 - \tau_{S_1}\nu_{S_1} + \tau_{S_2}\nu_{S_2})(\zeta+1)} e^{B_0^2 A^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4B_0} e^{\frac{-(\nu_{S_1}^2 - \nu_{S_2}^2)^2}{\sigma_{P_2}^2}} I_2.$$
(203)

Resolviendo ahora la integral sobre ζ , se sustituye en la integral el valor de A definido en la ecuación (193) y se simplifica:

$$I_{2} = \int_{-1}^{1} d\zeta e^{i\frac{1}{2} \left(L\Delta k^{0} - \tau_{s_{1}} \nu_{s_{1}} + \tau_{s_{2}} \nu_{s_{2}} \right) (\zeta + 1)} e^{B_{0}^{2} A^{2}}, \qquad (204)$$

$$I_{2} = e^{\frac{\left(\nu_{S_{1}}^{2} - \nu_{S_{2}}^{2}\right)^{2}}{\sigma_{\rho_{2}}^{2}B_{0}^{2}}} \int_{-1}^{1} d\zeta e^{i\frac{1}{2}\left[L\Delta k^{0} - \left(\tau_{S_{1}} + \frac{\tau_{\rho_{1}}}{\sigma_{\rho_{2}}^{2}B_{0}^{2}}\right)\nu_{S_{1}} + \left(\tau_{S_{2}} + \frac{\tau_{\rho_{1}}}{\sigma_{\rho_{2}}^{2}B_{0}^{2}}\right)\nu_{S_{2}}\right](\zeta+1)} e^{-\left(\frac{\zeta+1}{4B}\right)^{2}}, \quad (205)$$

donde:

$$B = \frac{B_0}{\tau_{P_1}}.$$
(206)

Se define:

$$T_{\mu} = \tau_{\mu} + \frac{\tau_{P_1}}{\sigma_{P_2}^2 B_0^2} = \tau_{\mu} + \frac{\tau_{P_1} \sigma_{P_1}^2}{\sigma_{P_1}^2 + \sigma_{P_2}^2}, \qquad \mu = s_1 \text{ ó } s_2, \qquad (207)$$

y:

$$L\Delta k_{lin} = -(L\Delta k^0 - T_{S_1}\nu_{S_1} + T_{S_2}\nu_{S_2}).$$
(208)

Reemplazando las ecuaciones (142) y (141) en la ecuación (205) se obtiene:

$$I_{2} = e^{\frac{\left(\nu_{S_{1}}^{2} - \nu_{S_{2}}^{2}\right)^{2}}{\sigma_{P_{2}}^{4}B_{0}^{2}}} \int_{-1}^{1} d\zeta e^{-i\frac{1}{2}L\Delta k_{lin}(\zeta+1)} e^{-\left(\frac{\zeta+1}{4B}\right)^{2}}.$$
 (209)

Para resolver esta integral, es necesario completar el trinomio cuadrado perfecto en los argumentos de las exponenciales, con lo cual se llega la siguiente expresión:

$$I_{2} = e^{\frac{\left(\nu_{S_{1}}^{2} - \nu_{S_{2}}^{2}\right)^{2}}{\sigma_{P_{2}}^{4}B_{0}^{2}}} e^{-B^{2}L^{2}\Delta k_{lin}^{2}} \int_{-1}^{1} d\zeta e^{-\left(\frac{\zeta+1}{4B} + iBL\Delta k_{lin}\right)^{2}},$$
(210)

y realizar un cambio de variable:

$$t = \frac{\zeta + 1}{4B} + iBL\Delta k_{lin} \tag{211}$$

$$d\zeta = 4Bdt \tag{212}$$

Al reemplazar las ecuaciones (211) y (212) en la ecuación (210) se obtiene:

$$I_{2} = \frac{4B\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{\left(\nu_{S_{1}}^{2}-\nu_{S_{2}}^{2}\right)^{2}}{\sigma_{P_{2}}^{4}B_{0}^{2}}}e^{-B^{2}L^{2}\Delta k_{lin}^{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{1}{2B}+iBL\Delta k_{lin}}dte^{-t^{2}}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{iBL\Delta k_{lin}}dte^{-t^{2}}\right)$$
(213)

Las integrales en la ecuación anterior tienen la forma de la función conocida como la función de error de Gauss (Abramowitz y Stegun, 1972), la cual se define como:

$$erf(z) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$
(214)

Entonces se puede reescribir la ecuación (213) de la siguiente manera:

$$I_{2} = 2\sqrt{\pi}Be^{\frac{\left(v_{5_{1}}^{2} - v_{5_{2}}^{2}\right)^{2}}{\sigma_{\rho_{2}}^{4}B_{0}^{2}}}e^{-B^{2}L^{2}\Delta k_{lin}^{2}}\left(erf\left(\frac{1}{2B} + iBL\Delta k_{lin}\right) - erf(iBL\Delta k_{lin})\right)$$
(215)

Con el resultado de la integral I_2 se puede reescribir de manera explícita la función $F(\nu_{S_1}, \nu_{S_2})$ al sustituir la ecuación (215) en la ecuación (203), obteniendo:

$$F(\nu_{S_1}, \nu_{S_2}) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\tau_{P_1}} e^{\frac{-(\nu_{S_1} - \nu_{S_2})^2}{\sigma_{P_2}^2 + \sigma_{P_1}^2}} e^{-B^2 L^2 \Delta k_{lin}^2} \left(erf\left(\frac{1}{2B} + iBL\Delta k_{lin}\right) - erf(iBL\Delta k_{lin}) \right)$$
(216)