

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias
en Óptica**

Interacción de luz con metamateriales hiperbólicos

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Ramsés Eduardo Bautista González

Ensenada, Baja California, México

2022

Tesis defendida por

Ramsés Eduardo Bautista González

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Ricardo Téllez Limón

Codirector de tesis

Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez

Codirector de tesis

Dra. Karina Garay Palmett

Dr. Víctor Manuel Coello Cárdenas

Dr. Enrique Gómez Treviño



Dra. Karina Garay Palmett

Coordinadora del Posgrado en Óptica

Dr. Pedro Negrete Regagnon

Director de Estudios de Posgrado

Ramsés Eduardo Bautista González © 2022

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis

Resumen de la tesis que presenta Ramsés Eduardo Bautista González como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Óptica.

Interacción de luz con metamateriales hiperbólicos

Resumen aprobado por:

Dr. Ricardo Téllez Limón

Codirector de tesis

Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez

Codirector de tesis

Los avances recientes en las técnicas de fabricación a escalas nanométricas han motivado y posibilitado el desarrollo del campo de los metamateriales ópticos. Los metamateriales son materiales artificiales que tienen propiedades que pueden ser inusuales y difíciles de encontrar en la naturaleza. Un ejemplo de esto son los llamados materiales ópticos hiperbólicos, que reciben este nombre porque, a frecuencias fijas, en el espacio de las componentes del vector de onda \vec{k} , las posibles soluciones a la ecuación de Helmholtz están representadas por superficies hiperbólicas. Se trata de materiales anisótropos uniaxiales en los que los signos de la permitividad eléctrica a lo largo del eje óptico y en direcciones perpendiculares a ésta son opuestos. En este trabajo se discuten las propiedades ópticas básicas de estos materiales y se presenta un estudio de la respuesta óptica de metamateriales hiperbólicos constituidos por capas delgadas alternadas de materiales con comportamiento dieléctrico y metálico. Para modelar las propiedades ópticas de estos materiales se emplea una teoría de medio efectivo que nos permite diseñar metamateriales con diferentes propiedades ópticas y se contrastan estos resultados aproximados con los de un método riguroso conocido como el método de la matriz de transferencia. De esta manera, es posible establecer la región de validez de la aproximación del medio efectivo. Utilizando el método de la matriz de transferencia estudiamos también los modos soportados por sistemas multicapas, incluso para números de onda que van más allá del límite de validez de la aproximación del medio efectivo. Dado que el método de la matriz de transferencia supone que las capas son planas y paralelas, y que la iluminación consiste de ondas planas, fue necesario utilizar un método numérico alternativo para extender el estudio a otras situaciones. Se utilizó un paquete de cómputo comercial para estudiar la interacción de campo cercano entre una fuente dipolar y metamateriales con diferentes propiedades ópticas efectivas. De acuerdo a lo esperado con base en sus propiedades ópticas efectivas, se encontró que en los metamateriales hiperbólicos la luz se propaga en ciertas direcciones preferenciales. Por otro lado, como ya ha sido discutido en la literatura, nuestros resultados muestran que estos metamateriales son capaces de transmitir información correspondiente a frecuencias espaciales altas. No es entonces sorprendente que resulten atractivos en la búsqueda de esquemas para mejorar la resolución de sistemas ópticos.

Palabras clave: interacción luz-materia, metamaterial, multicapas

Abstract of the thesis presented by Ramsés Eduardo Bautista González as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Optics.

Interaction of light with hyperbolic metamaterials

Abstract approved by:

Dr. Ricardo Téllez Limón

Thesis Co-Director

Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez

Thesis Co-Director

Recent advances in the fabrication techniques at nanometric scales have motivated and allowed the development of the field of optical metamaterials. Metamaterials are artificial materials that have properties that can be unusual and difficult to find in nature. An example of this are the so-called hyperbolic optical materials, which receive this name because, at fixed frequencies, in the space of the components of the wave vector \vec{k} , the possible solutions to the Helmholtz equation are represented by hyperbolic surfaces. They are uniaxial anisotropic materials in which the signs of electrical permittivity along the optical axis and in directions perpendicular to it are opposite. In this thesis, we discuss the basic optical properties of these materials and present a study of the optical response of hyperbolic metamaterials made up of alternating dielectric and metallic thin layers. To model the optical properties of these materials, we use an effective medium theory that allows us to design metamaterials with different optical properties, and contrast these approximate results with those obtained with a rigorous method known as the transfer matrix method. In this way, it is possible to establish the region of validity of the effective medium approach. Based on the transfer matrix method, we also study the modes supported by multilayer systems, even for wavenumbers that go beyond the validity of the effective medium approximation. Since the transfer matrix method assumes that the layers are plane and parallel, and that the illumination consists of plane waves, it was necessary to use an alternative numerical method to extend the study to other situations. We used a commercial computational software package to study the near-field interaction between a dipole source and metamaterials with different effective optical properties. As expected on the basis of their effective optical properties, we found that, in the hyperbolic metamaterials, light propagates in certain preferential directions. On the other hand, as has already been discussed in the literature, our results show that these metamaterials are capable of transmitting information corresponding to high spatial frequencies. Not surprisingly, this has made them attractive in the search for schemes to improve the resolution of optical systems.

Keywords: light-matter interaction, metamaterial, multilayer

Dedicatoria

A mi familia por apoyarme incondicionalmente en todo momento y no dejarme caer. A mis amigos por darme ánimos y risas en los momentos adecuados. A Nymeria por levantarme del escritorio para pasear cuando más lo necesitaba.

Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por abrirme las puertas y ser mi segundo hogar, realmente me sentí en casa.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría. No. de becario: 988692.

Este trabajo ha sido parcialmente financiado mediante el proyecto del fondo sectorial de investigación para la educación Ciencia Básica SEP-CONACYT (A1-S-21527).

A mis amigos, los que están lejos y los que están cerca, por apoyarme continuamente y hacer ameno este periodo de mi vida.

A mis asesores, el Dr. Ricardo y el Dr. Eugenio, por siempre resolver mis dudas y estar pendientes de mis avances.

A los miembros de mi comité de tesis, Dra. Karina Garay Palmett, Dr. Víctor Manuel Coello Cárdenas y Dr. Enrique Gómez Treviño por su accesibilidad y sus oportunos consejos.

A mis padres y hermanos por el apoyo de toda la vida, sin ellos esto no sería posible.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	vii
Capítulo 1. Introducción	
1.1. Objetivos	3
Capítulo 2. Propiedades ópticas de materiales	
2.1. Ondas electromagnéticas en materiales	5
2.2. Modelo de Lorentz	7
2.3. Modelo de Drude	9
2.4. Modelo Drude-Lorentz	9
2.5. Medios anisótropos	11
Capítulo 3. Metamateriales Ópticos Hiperbólicos	
3.1. Teoría del medio efectivo	17
3.1.1. Campo eléctrico en la dirección \mathbf{z}	18
3.1.2. Campo eléctrico perpendicular al eje \mathbf{z}	21
3.1.3. Diseño de metamateriales hiperbólicos	21
3.2. Método de la matriz de transferencia	26
3.3. Evaluación de la validez de la Teoría del Medio Efectivo	29
3.4. Relación de dispersión de los sistemas estudiados	33
Capítulo 4. Cálculos numéricos sobre la propagación de altas frecuencias espaciales en metamateriales hiperbólicos	
4.1. Iluminación con una fuente dipolar	39
4.2. Iluminación con dos fuentes dipolares	42
Capítulo 5. Resumen y conclusiones	
Literatura citada	48
Anexo A: Teoría del medio efectivo	50

Lista de figuras

Figura	Página
1. El mapa $\mu - \epsilon$. Clasificación de materiales con base en los signos de las partes reales de su permitividad eléctrica y su permeabilidad magnética.	7
2. Permitividad de la plata en función de la longitud de onda en el vacío (λ_0), calculada con dos modelos de tipo Drude-Lorentz. La línea intermitente son resultados experimentales obtenidos por Palik (1998), en azul encontramos el ajuste propuesto por Barchiesi y Grosgees (2014) y en rojo el ajuste propuesto por Rakić <i>et al.</i> (1998). A. Parte real de la permitividad. B.	10
3. Solución de isofrecuencias en el espacio k. A. La solución para ondas con polarización transversal eléctrica (parte izquierda de la Ec. (31)) es una esfera. Para ondas con polarización transversal magnética y un medio con anisotropía extrema tenemos dos soluciones de la parte derecha de la Ec. (31). B. Si $\epsilon_x = \epsilon_y > 0$ y $\epsilon_z < 0$ tenemos un hiperboloide que representa a los materiales hiperbólicos del tipo I o dieléctricos. C. Si $\epsilon_x = \epsilon_y < 0$ y $\epsilon_z > 0$ tenemos también un hiperboloide no segmentado, que representa a los materiales hiperbólicos del tipo II o metálicos.	13
4. Relación entre k_x y k_z con $k_0 = cte$ para un medio hiperbólico tipo I (línea continua verde) y para un medio hierbólico tipo II (línea segmentada azul). Las velocidades de grupo son perpendiculares a las curvas.	14
5. Esquema de un sistema multicapas en el que se alternan periódicamente películas delgadas dieléctricas y metálicas.	17
6. Diagrama esquemático de un capacitor de placas paralelas de superficie A que delimitan a un medio de espesor d y constante dieléctrica ϵ . Al aplicarse un voltaje V se produce un campo eléctrico \vec{E} en el material.	18
7. Diagrama esquemático de un arreglo de capacitores en serie con el campo eléctrico \vec{E} en la dirección z . A es el área de los capacitores perpendicular al campo eléctrico, d_1 y d_2 es el ancho de cada uno de los capacitores y d es la suma de ambos.	19
8. Diagrama esquemático de un arreglo de capacitores en paralelo con el campo eléctrico \vec{E} en la dirección x . L es el largo de los capacitores paralelo al campo eléctrico, d_1 y d_2 es el ancho de cada uno de los capacitores y d es la suma de ambos. A_1 y A_2 son las áreas perpendiculares al campo eléctrico de los capacitores y ϵ_1 , ϵ_2 sus permitividades eléctricas respectivas.	20
9. Mapa que muestra el comportamiento de un metamaterial basado en un sistema multicapas de Ag/SiO2 en función de la fracción de llenado del metal y la longitud de onda.	23
10. A. Permitividad efectiva. B. Índice efectivo para un sistema multicapas de Ag/SiO2 con $p = 0.1$	25
11. A. Permitividad efectiva. B. Índice efectivo para un sistema multicapas de Ag/SiO2 con $p = 0.5$	26

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
12. A. Permitividad efectiva B. Índice efectivo para un sistema multicapas de Ag/SiO ₂ con $p = 0.9$	27
13. Diagrama que ilustra un sistema de N medios con invariancia en y. Los medios de los extremos se consideran semi infinitos. El campo eléctrico en el j -ésimo medio es Ψ_j , mientras que A_j y B_j son las amplitudes de las ondas que viajan hacia arriba y hacia abajo respectivamente, con permitividad eléctrica ϵ_j	27
14. Comparación de los parámetros elipsométricos obtenidos con la Teoría del Medio Efectivo y el método de la matriz de transferencia para un sistema multicapas con un periodo espacial de 10 nm y 24 capas. En A tenemos un MMH tipo II, en B tenemos un metal efectivo, en C tenemos un ENZ, en D tenemos un MMH tipo I y en E un dieléctrico efectivo.	32
15. Mapa de clasificación del metamaterial efectivo para un sistema multicapas de Ag/SiO ₂ en función de la fracción de llenado del metal y la longitud de onda. A. MMH tipo II. B. Metal efectivo. C. ENZ en el eje óptico. D. MMH tipo I. E. Dieléctrico efectivo.	33
16. Mapa de $-\ln t_{11} $ para una película de Ag de un espesor de 25 nm. Se observa la presencia de dos modos que, están asociados a los modos simétrico y antisimétrico de los plasmones polaritones de superficie. La línea blanca punteada representa la línea de luz del aire.	34
17. Relación de dispersión para un sistema multicapas de 2 periodos (4 capas), con periodos espaciales de 10 nm, 50 nm y 100 nm, y fracciones de llenado $p=0.3, 0.5$ y 0.7	35
18. Relación de dispersión para un sistema multicapas de 6, 12 y 24 capas, con periodo espacial de 50 nm y $p=0.5$	36
19. Mapa de reflectancias en función de la longitud de onda y del ángulo de incidencia para un sistema de multicapas de 4 capas alternando Ag con SiO ₂ , con fracción de llenado $p = 0.3$ y un periodo espacial de 10 nm en A, 50 nm en B y 100 nm en C. Se consideró iluminación desde un vidrio con índice de refracción de $n = 1.5$	37
20. Relación de dispersión para un sistema multicapa de Ag/SiO ₂ con 12 periodos, periodo espacial de 10 nm y fracción de llenado de 0.5. En blanco se encuentra la línea de luz para el aire.	40

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
21. Propagación de la luz emitida por una fuente dipolar monocromática ($\lambda = 633$ nm) a través de una película de metamaterial de 120 nm de espesor para diferentes fracciones de llenado. Del lado izquierdo se muestran los mapas de intensidad del campo cercano en el plano xz y del derecho las distribuciones de intensidad a la salida de la película, 4 nm por debajo de la película. A corresponde a una película de 120 nm de SiO_2 , B a un Medio ENZ, C a un MMH tipo II, y D a una película delgada de 120 nm de Ag.	41
22. Propagación de la luz emitida por dos fuente dipolares monocromáticas ($\lambda = 633$ nm) separadas 100 nm entre sí a través de una película de metamaterial de 120 nm de espesor para diferentes fracciones de llenado. Del lado izquierdo se muestran los mapas de intensidad del campo cercano en el plano xz y del derecho las distribuciones de intensidad a la salida de la película, 4 nm por debajo de la película. A corresponde a una película de 120 nm de SiO_2 , B a un Medio ENZ, C a un MMH tipo II, y D a una película delgada de 120 nm de Ag.	44
23. Intensidad en el campo lejano de las situaciones consideradas en las Figuras (22)B y C.	45

Capítulo 1. Introducción

La interacción luz-materia ha sido el objeto de diversos estudios científicos a lo largo de la historia de la humanidad. Por ejemplo, desde la antigüedad se han buscado materiales que permitan manipular la luz, como los vidrios. Este conocimiento fue evolucionando hasta que se diseñaron las primeros lentes para concentrar la luz. También se desarrollaron técnicas para dar color a los vidrios con base en lo que ahora sabemos son efectos plasmónicos, con los que se fabricaron vitrales para las catedrales medievales. Con el paso del tiempo este conocimiento fue evolucionando con la elaboración de lentes cada vez más complejas que dieron pie a los telescopios y microscopios compuestos, con los que se ha logrado tener un mayor entendimiento del micro y macro universo. En los últimos años a través la combinación de diversas disciplinas de las ciencias físicas e ingenierías se han desarrollado materiales que permiten manipular la luz de maneras novedosas, incluso a escalas más pequeñas que la longitud de onda, lo que ofrece oportunidades en la manipulación de luz a esas escalas, y abre la posibilidad de buscar aplicaciones interesantes en la formación de imágenes y nanolitografía, entre otras (Drachev *et al.* (2013)).

Dentro del universo de los materiales que han sido estudiados por la comunidad científica, están los denominados metamateriales ópticos. La historia de los metamateriales está motivada por el trabajo de V. G. Veselago (Veselago (1967)), quien notó que si la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética de un material son negativos, a frecuencias ópticas, su respuesta óptica está caracterizada por un índice de refracción negativo. Este trabajo teórico dio pie a las denominadas lentes perfectas. A partir de esta idea y considerando los avances tecnológicos de la época, en 1999 J. Pendry propuso una manera de fabricar medios que no cumplieran la regla de la mano derecha del electromagnetismo, es decir, medios con refracción negativa (Pendry *et al.* (1999)). Un año después, David Smith empleó por primera vez el término metamaterial para referirse a un medio compuesto con permitividad eléctrica y permeabilidad magnética negativas, el cual estaba constituido por un arreglo periódico de anillos con resonancias de tipo dipolar magnética (Smith *et al.* (2000)). La relevancia del tema y el amplio rango de respuesta electromagnética que se puede alcanzar usando medios micro y nanoestructurados pronto sobrepasó el concepto de un índice negativo, hasta que el término metamaterial fue atribuido, de manera general, a un medio artificial

con propiedades prediseñadas, que por lo general no pueden obtenerse de forma natural. De manera particular, se denomina metamateriales ópticos a aquellos que están diseñados para interactuar con campos electromagnéticos en el rango de las frecuencias ópticas, pero suele referirse también a ondas que van desde el ultravioleta hasta el infrarrojo, e incluso los THz (Singh y Marwaha (2015)).

Un tipo interesante de metamateriales ópticos, los cuales son el objeto de estudio de esta tesis, son los denominados metamateriales hiperbólicos (MMHs). Estos metamateriales reciben su nombre debido a la forma de la superficie de isofrecuencias de su relación de dispersión, lo cual es una consecuencia de que las componentes principales del tensor de permitividad tienen signos contrarios, es decir, una anisotropía extrema. Por tal motivo estos metamateriales tienen la peculiaridad de exhibir una respuesta conductora (metálica) o dieléctrica, dependiendo de la orientación del campo eléctrico de la luz incidente. Así, estos materiales permiten la propagación de ondas con números de onda mayores que los de la luz en el vacío. Debido a su capacidad de combinar las propiedades transparentes de los dieléctricos y reflectivas de los metales, estos metamateriales han sido empleados como una plataforma multifuncional para comunicaciones ópticas (Shambat *et al.* (2011)), imagenología (Jacob *et al.* (2006)), computación cuántica (Eisaman *et al.* (2011)) y emisores térmicos (Biehs *et al.* (2012)), entre otras.

La anisotropía extrema requerida para este tipo de materiales se puede lograr con sistemas multicapa que alternan materiales dieléctricos y metálicos (Ferrari *et al.* (2015)). Si el espesor de las capas es mucho menor que la longitud de onda, la estructura multicapa se puede modelar como un medio homogéneo con una permitividad dieléctrica efectiva. La teoría del medio efectivo puede entonces ser usada para el diseño de los metamateriales hiperbólicos.

A pesar de la gran cantidad de estudios que es posible encontrar en la literatura, hay poco estudios sistemáticos sobre la validez de la teoría del medio efectivo para este tipo de sistemas y tampoco hay mucha información sobre las consecuencias de la relación de dispersión hiperbólica que obedece la luz en estos materiales en situaciones prácticas. En esta tesis se abordan estos dos aspectos de la interacción de luz con sistemas multicapa metal-dieléctrico en el límite en el que las capas son mucho más delgadas que la longitud de onda.

De manera rigurosa, para el caso de iluminación con ondas planas, la interacción de luz con medios estratificados se puede tratar con el método de la matriz de transferencia. Este método permite calcular la respuesta óptica del medio y los modos del sistema (Téllez-Limón y Salas-Montiel (2021)). Con este método es posible determinar la validez de la teoría del medio efectivo para sistemas multicapa.

1.1. Objetivos

Motivados por la relevancia y potencial de impacto de estos materiales en el diseño de dispositivos ópticos, el objetivo de este trabajo de tesis es:

Estudiar numéricamente las propiedades ópticas de metamateriales hiperbólicos conformados por sistemas multicapas sub-longitud de onda en los que se alternan películas conductoras y no conductoras, y demostrar que la frecuencia espacial de las ondas electromagnéticas que se propagan en estos metamateriales es mayor que en un medio isótropo.

Los objetivos específicos son:

- Estudiar diferentes modelos dispersivos para la permitividad de materiales conductores (modelos de Drude y Drude-Lorentz).
- Desarrollar un modelo numérico para calcular la relación de dispersión de sistemas multicapas y determinar los modos soportados por ellos.
- Estudiar las propiedades y características ópticas de los metamateriales hiperbólicos considerando su relación de dispersión.
- Comparar los resultados del modelo numérico para sistemas multicapas con la teoría del medio efectivo.
- Diseñar metamateriales hiperbólicos con propiedades ópticas sintonizables en la región visible del espectro electromagnético.
- Estudiar la interacción de luz radiada por fuentes dipolares cercanas a la superficie de un metamaterial hiperbólico multicapa, así como las propiedades del material para transmitir información correspondiente a las altas frecuencias espaciales.

En la tesis se describe el trabajo realizado para alcanzar los objetivos planteados y está organizada de la siguiente manera.

En el Capítulo (2) se presenta una revisión de algunos modelos sencillos para describir la respuesta óptica de medios isótropos, considerando por separado los casos ideales de medios dieléctricos y conductores. Los dieléctricos se tratan con el modelo de Lorentz, en términos de electrones ligados a un núcleo, mientras que para los metales se utiliza el modelo de Drude, basado en los electrones libres. Estos modelos se pueden combinar para modelar de forma más realista la respuesta óptica de un metal. Finalmente, se discute la respuesta óptica de medios anisótropos, para después considerar una anisotropía extrema como la de los metamateriales hiperbólicos.

En el Capítulo (3) se aborda el problema del diseño de los metamateriales con base en la noción de que, cuando las estructuras son mucho menores que la longitud de onda, el sistema responde como un medio homogéneo; es decir, como un medio efectivo. El desarrollo formal de la teoría del medio efectivo se puede encontrar en el Anexo A, ubicado al final de la tesis. En el Capítulo (3), también se discuten distintos tratamientos teóricos para describir la interacción con ondas electromagnéticas con estos metamateriales. Se muestran algunos resultados para un sistema multicapas de Ag/SiO_2 , producto de estos distintos tratamientos y se evalúan sus ventajas y desventajas.

Para complementar el estudio, en el Capítulo (4) se presentan simulaciones electromagnéticas rigurosas de la interacción de una fuente puntual con un metamaterial hiperbólico constituido por un sistema multicapas de Ag/SiO_2 . Se observa la propagación del campo electromagnético en forma de cono para las fracciones de llenado que corresponden a MMHs y la transmisión de información correspondiente a altas frecuencias espaciales al propagarse la luz a través del metamaterial.

Finalmente en el Capítulo (5), se resumen los puntos sobresalientes de la tesis y se presentan las principales conclusiones del trabajo.

Capítulo 2. Propiedades ópticas de materiales

En este capítulo se presenta una revisión de algunos modelos para describir la respuesta óptica de materiales. Comenzaremos con la respuesta óptica de medios isotrópicos y su clasificación con base en los valores de su permitividad eléctrica y permeabilidad magnética. Continuaremos con el estudio de la respuesta óptica de los medios anisótropos y veremos que, al imponer una anisotropía extrema, obtendremos la relación de dispersión que caracteriza y le da nombre a los medios hiperbólicos. Posteriormente se señalarán algunas de las consecuencias que tiene este tipo de relación de dispersión en la propagación de ondas electromagnéticas.

2.1. Ondas electromagnéticas en materiales

Las ecuaciones de Maxwell en medios materiales constituyen el punto de partida para estudiar la respuesta óptica de los materiales. En forma diferencial, se pueden escribir de la forma:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{ext}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{ext} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (4)$$

Estas ecuaciones ligan las variaciones espacio-temporales de cuatro campos macroscópicos \vec{D} , \vec{B} , \vec{E} y \vec{H} , que son el vector de desplazamiento dieléctrico, la inducción magnética, el campo eléctrico y el campo magnético, respectivamente. Las fuentes están determinadas por la densidad de carga externa ρ_{ext} y la densidad de corriente externa \vec{J}_{ext} . Estos cuatro campos satisfacen, además, las relaciones constitutivas

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (5)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}, \quad (6)$$

dónde ϵ_0 y μ_0 son la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del vacío. \vec{P} es la polarización del material que representa el momento dipolar dieléctrico por unidad de volumen y \vec{M} es la magnetización. La densidad de corriente, \vec{J} , se relaciona con el campo eléctrico, \vec{E} , a través de $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, donde σ es la conductividad del medio.

En el marco de la óptica lineal, la polarización y la magnetización del medio son directamente proporcionales a los campos eléctrico y magnético, respectivamente. Para medios isótropos podemos escribir las relaciones constitutivas de la forma

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad (7)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (8)$$

dónde $\epsilon = 1 + \chi$ y $\mu = 1 + \chi_M$ representan la permitividad y la permeabilidad relativa del medio y χ y χ_M sus susceptibilidades eléctrica y magnética, respectivamente. Debido a la isotropía del material, la respuesta es independiente de la dirección, por lo que la permitividad y la permeabilidad son cantidades escalares que representan la respuesta del medio ante estímulos eléctricos y magnéticos.

En general, $\epsilon(\vec{k}, \omega)$ y $\mu(\vec{k}, \omega)$ son funciones complejas que dependen de la frecuencia angular ω y del vector de onda \vec{k} , pero son independientes de este último cuando la respuesta es local. Según el signo de la parte real de $\epsilon(\omega)$ y $\mu(\omega)$, podemos clasificar los materiales como se muestra en la Figura (1). Cuando ambas partes reales son positivas tenemos un dieléctrico. Cuando la parte real de la permitividad es negativa y la parte real de la permeabilidad es positiva tenemos un plasma o un metal. Los casos de permeabilidad negativa no habían sido considerados hasta hace poco, porque no hay materiales naturales con este tipo de propiedades. Sin embargo, con el desarrollo de los metamateriales, el estudio de estos casos ha cobrado fuerza. En el caso de permitividad positiva y permeabilidad negativa tenemos un plasma magnético. Y cuando ambas cantidades son negativas tenemos un material con índice de refracción negativo. Esto se determina a partir de la ecuación $n = \sqrt{\epsilon\mu}$, donde n representa el índice de refracción complejo. Si consideramos materiales no magnéticos a frecuencias ópticas, como es el caso de esta tesis, $\mu = 1$ y la respuesta estará determinada exclusivamente por $\epsilon(\omega)$.

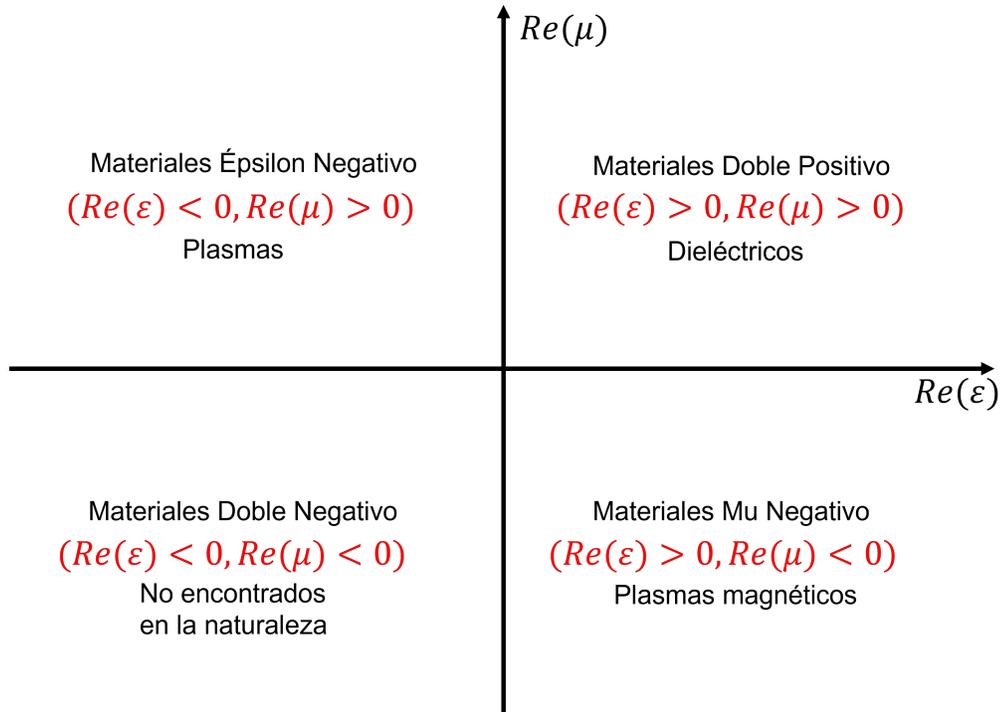


Figura 1. El mapa $\mu - \epsilon$. Clasificación de materiales con base en los signos de las partes reales de su permitividad eléctrica y su permeabilidad magnética.

2.2. Modelo de Lorentz

La respuesta óptica de los dieléctricos puede estimarse a partir del modelo de Lorentz, el cual considera que los electrones están ligados al núcleo por una fuerza restitativa. Si consideramos un electrón oscilando bajo la influencia de un campo eléctrico externo, su ecuación de movimiento está dada por

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_r(\vec{r}) + \vec{F}_\gamma(\dot{\vec{r}}) + \vec{F}_E(\vec{E}) = -K\vec{r} - m\gamma \frac{d\vec{r}}{dt} - e\vec{E}, \quad (9)$$

donde \vec{r} , m y e representan la posición, la masa y la carga eléctrica del electrón, respectivamente, y γ es una constante de amortiguamiento. $\vec{F}_r(\vec{r})$ corresponde la fuerza debida a la ligadura del electrón con el núcleo, $\vec{F}_\gamma(\dot{\vec{r}})$ es la fuerza del amortiguamiento y $\vec{F}_E(\vec{E})$ es la fuerza ejercida por el campo eléctrico sobre el electrón. Si consideramos un campo eléctrico armónico de la forma $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ y definimos el momento dipolar dieléctrico como $\vec{p} = -e\vec{r}$, la Ec. (9) anterior se puede escribir como

$$m \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\vec{p}}{dt} + K\vec{p} = e^2 \vec{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (10)$$

Suponiendo una solución para esta ecuación diferencial de la forma $\vec{p} = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$, al sustituir en ella y dividir entre m obtenemos

$$-\omega^2 \vec{p}_0 - i\gamma\omega \vec{p}_0 + \frac{K}{m} \vec{p}_0 = \frac{e^2}{m} \vec{E}_0, \quad (11)$$

donde $\frac{K}{m} = \omega_0^2$ es la frecuencia de resonancia del oscilador. Así la amplitud del momento dipolar está dada por

$$\vec{p}_0 = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \vec{E}_0. \quad (12)$$

El momento dipolar por unidad de volumen se puede escribir de la forma

$$\vec{P} = N\vec{p}, \quad (13)$$

donde N es la densidad de osciladores y hemos supuesto que la polarizabilidad es la misma para todos los electrones. Tenemos entonces que

$$\vec{P} = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \vec{E}. \quad (14)$$

Recordando que $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ y definiendo una constante ω_L (con unidades de frecuencia), a través de la expresión $\omega_L^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}$, podemos escribir la susceptibilidad como

$$\chi(\omega) = \frac{\omega_L^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \quad (15)$$

Utilizando la Ec. (7) y recordando que $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$, encontramos que

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_L^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \quad (16)$$

La Ec. (16) representa el resultado del modelo de Lorentz para la permitividad eléctrica de un material.

2.3. Modelo de Drude

El modelo de Drude describe a los metales como medios en los que los electrones se pueden mover libremente. También es conocido como el modelo del gas de electrones libres con dispersión. El modelo es parecido al modelo de Lorentz pero sin la fuerza de restauración. Con esta consideración la ecuación de movimiento del electrón es

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m\gamma \frac{d\vec{r}}{dt} - e\vec{E}. \quad (17)$$

Siguiendo los mismo pasos de la sección anterior encontramos que

$$\vec{P} = \frac{N_e e^2}{m} \frac{1}{-\omega^2 - i\gamma\omega} \vec{E}, \quad (18)$$

donde N_e es la densidad de electrones libres.

Recordando que $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ y definiendo $\omega_p^2 = \frac{N_e e^2}{\epsilon_0 m}$, donde ω_p es la frecuencia de plasma, obtenemos

$$\chi(\omega) = \frac{\omega_p^2}{-\omega^2 - i\gamma\omega}, \quad (19)$$

de donde finalmente se encuentra que

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (20)$$

La Ec. (20) representa la permitividad eléctrica para un metal en el modelo de Drude.

2.4. Modelo Drude-Lorentz

El modelo de Drude es adecuado para modelar algunos metales nobles, como el oro y la plata, en el infrarrojo. Sin embargo, en el visible la respuesta se ve modificada por las llamadas transiciones interbanda. Se pueden construir modelos más realistas combinando el modelo de Drude con el modelo de Lorentz. El primero describe la transiciones electrónicas intrabanda y el segundo las transiciones electrónicas interbanda (véase Rakić (1995)). En general, el modelo Drude-Lorentz es válido para algunos me-

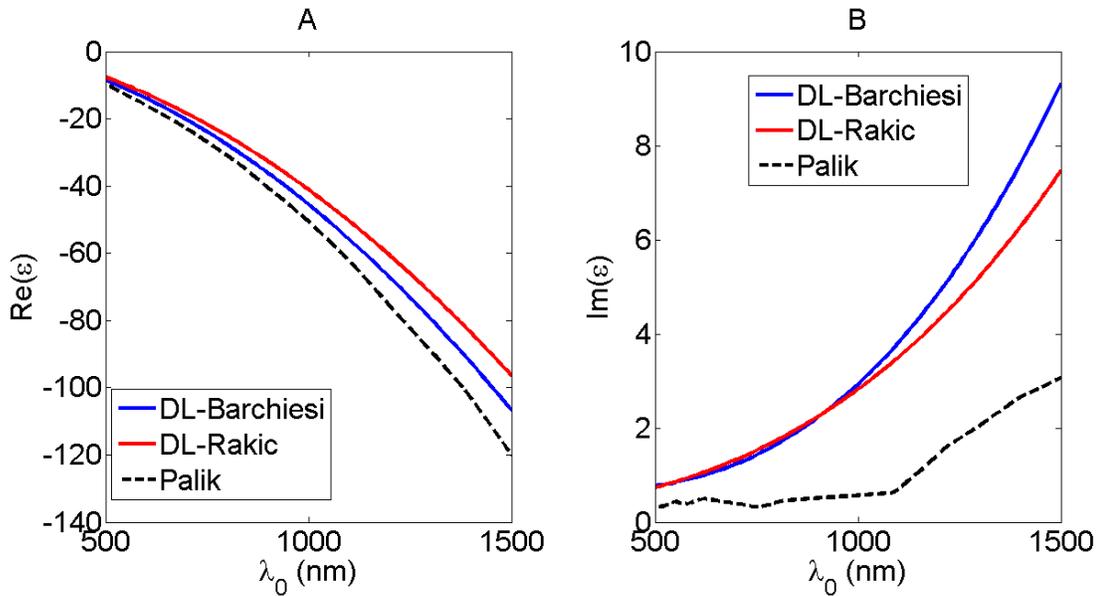


Figura 2. Permitividad de la plata en función de la longitud de onda en el vacío (λ_0), calculada con dos modelos de tipo Drude-Lorentz. La línea intermitente son resultados experimentales obtenidos por Palik (1998), en azul encontramos el ajuste propuesto por Barchiesi y Grosge (2014) y en rojo el ajuste propuesto por Rakić *et al.* (1998). A. Parte real de la permitividad. B.

tales nobles, como la plata, a longitudes de onda mayores de su frecuencia de plasma y región interbanda.. Es de esperarse que, en general, sea posible encontrar un mejor ajuste para la permitividad combinando los modelos de Drude y Lorentz con varios osciladores. Es decir, usando expresiones del tipo

$$\varepsilon_{DL}(\omega) = \varepsilon_{\infty} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma_D)} - \sum_j \frac{\Delta\varepsilon_j \omega_{L,j}^2}{\omega^2 - \omega_{L,j}^2 + i\gamma_{L,j}\omega}. \quad (21)$$

Siguiendo a Barchiesi y Grosge (2014), el coeficiente ω_p es llamado frecuencia angular de plasma y la frecuencia $\omega_{L,j}$ está asociada con las transiciones intrabanda, $\Delta\varepsilon_j$ está relacionado con la fuerza del oscilador y ε_{∞} es la permitividad relativa para frecuencias altas. Además, se introducen fuerzas de fricción con coeficientes de amortiguamiento γ_D y $\gamma_{L,j}$, asociados a los modelos de Drude y Lorentz, respectivamente. En la Figura (2) se presentan datos experimentales de Palik (1998) para las parte real e imaginaria de la permitividad de la plata en función de la longitud de onda y se compara con los que se obtienen con dos modelos de Drude-Lorentz; el de Barchiesi y Grosge (2014), que tiene un oscilador, y el de Rakić *et al.* (1998), que tiene cinco. Para los resultados que se presentan en esta tesis, se tomaron los valores del ajuste de Barchiesi y Grosge (2015) para la plata.

2.5. Medios anisótropos

Para determinar la relación de dispersión en un medio anisótropo partimos nuevamente de las ecuaciones de Maxwell. En ausencia de fuentes externas se tiene que

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (22)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (23)$$

junto con las relaciones constitutivas

$$\vec{D} = \epsilon_0 \bar{\bar{\epsilon}} \vec{E}, \quad (24)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \bar{\bar{\mu}} \vec{H}. \quad (25)$$

La permitividad $\bar{\bar{\epsilon}}$ y la permeabilidad $\bar{\bar{\mu}}$ son ahora tensores, pues al tratarse de medios anisótropos la respuesta del medio depende de la dirección de oscilación de los campos eléctricos y magnéticos. Puesto que en esta tesis no se considerarán materiales magnéticos, el tensor de permeabilidad magnética $\bar{\bar{\mu}}$ se reduce al tensor unitario. Por otro lado, escogiendo un marco de referencia orientado a lo largo de los ejes principales del medio, podemos escribir el tensor de permitividad de la forma

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Considerando ondas electromagnéticas planas, es decir, campos de la forma $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ y $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$, donde \vec{k} es el vector de onda, y sustituyendo estas expresiones en las Ecs. (22) y (23) obtenemos que

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu_0 \vec{H}, \quad (27)$$

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \epsilon_0 \bar{\bar{\epsilon}} \vec{E}. \quad (28)$$

Sustituyendo ahora la Ec. (27) en la Ec. (28) obtenemos que

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} = 0, \quad (29)$$

la cual se puede escribir matricialmente como

$$\begin{bmatrix} k_0^2 \epsilon_{xx} - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & k_0^2 \epsilon_{yy} - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & k_0^2 \epsilon_{zz} - k_x^2 - k_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0, \quad (30)$$

donde $k_0 = \frac{\omega}{c}$ es la magnitud del vector de onda en el vacío y $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ es la velocidad de la luz en el vacío. Si pensamos en un medio uniaxial, con su eje óptico orientado en la dirección \vec{z} , tenemos que $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} \equiv \epsilon_{\perp}$ y $k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. La solución no trivial de la Ec. (30) nos lleva a la relación de dispersión

$$(k_{\perp}^2 + k_z^2 - \epsilon_{\perp} k_0^2) \left(\frac{k_{\perp}^2}{\epsilon_{zz}} + \frac{k_z^2}{\epsilon_{\perp}} - k_0^2 \right) = 0, \quad (31)$$

donde $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Hay dos posibles soluciones para esta relación de dispersión. Para ondas polarizadas en el plano xy , se tiene que $k_{\perp}^2 + k_z^2 - \epsilon_{\perp} k_0^2 = 0$. La superficie que describe esta ecuación en el dominio de las frecuencias espaciales (k -espacio) corresponde a una esfera (Figura (3)a)). En el otro caso, para ondas polarizadas a lo largo del eje óptico (eje z), se tiene que $\frac{k_{\perp}^2}{\epsilon_{zz}} + \frac{k_z^2}{\epsilon_{\perp}} = k_0^2$, que corresponde normalmente a un elipsoide. Sin embargo, para este segundo caso, si el material presenta una anisotropía extrema, es decir, si las partes reales de ϵ_{\perp} y ϵ_{zz} tienen signos opuestos, las superficies que obtenemos en el k -espacio son hiperboloides. Esto es lo que da origen al nombre de materiales o medios hiperbólicos.

Cuando $\epsilon_{\perp} > 0$ y $\epsilon_{zz} < 0$ se obtiene un hiperboloide segmentado y al medio hiperbólico se le denomina dieléctrico o tipo I (Figura (3)B). Por otro, lado si $\epsilon_{\perp} < 0$ y $\epsilon_{zz} > 0$ se obtiene un hiperboloide de un solo segmento y el medio es denominado metálico o tipo II (Figura (3)C). Esta denominación se debe al comportamiento predominante del material (signo de la parte real de la permitividad positiva o negativa) en la dirección perpendicular al eje óptico. Los medios hiperbólicos metálicos tienen la propiedad de ser altamente reflejantes para las ondas con un número de onda por debajo de un

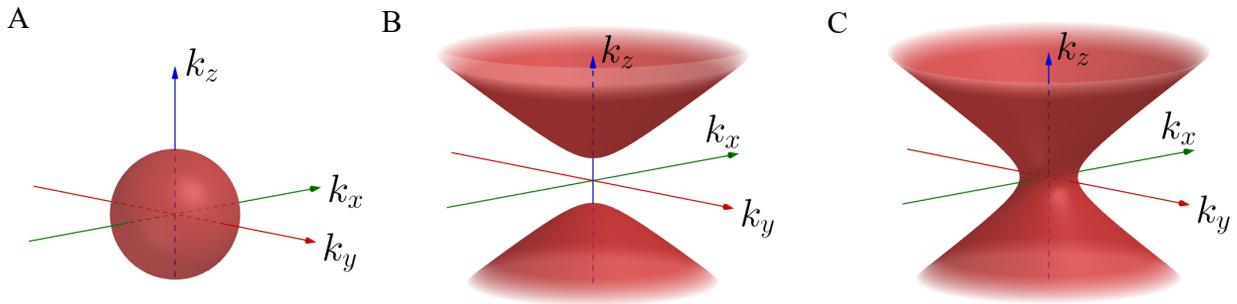


Figura 3. Solución de isofrecuencias en el espacio k . A. La solución para ondas con polarización transversal eléctrica (parte izquierda de la Ec. (31)) es una esfera. Para ondas con polarización transversal magnética y un medio con anisotropía extrema tenemos dos soluciones de la parte derecha de la Ec. (31). B. Si $\epsilon_x = \epsilon_y > 0$ y $\epsilon_z < 0$ tenemos un hiperboloide que representa a los materiales hiperbólicos del tipo I o dieléctricos. C. Si $\epsilon_x = \epsilon_y < 0$ y $\epsilon_z > 0$ tenemos también un hiperboloide no segmentado, que representa a los materiales hiperbólicos del tipo II o metálicos.

mínimo k_{min} . El número de onda k_{min} está determinado por la intersección del hiperboloide con el plano $k_z = 0$. Las ondas con números de onda que están por arriba de esta k_{min} no sufren de esta alta reflectividad (Ferrari *et al.* (2015)).

Las curvas definidas por la ecuación $\frac{k_x^2}{\epsilon_{zz}} + \frac{k_z^2}{\epsilon_{\perp}} = k_0^2$, representan cortes en el plano $k_y = 0$ de las superficies de isofrecuencias mostradas en la Figura Fig. (3). Dependiendo de cuál entre ϵ_{zz} y ϵ_{xx} sea positivo o negativo, podemos identificar dos hipérbolas, como se muestra en la Fig. (4). La forma hiperbólica de esta curva implica que para valores grandes de $|k_x|$, la curva tiende a una línea recta definida por

$$k_z = \pm \sqrt{\left| \frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{zz}} \right|} k_x. \quad (32)$$

La velocidad de grupo $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ es perpendicular a estos contornos. Esto muestra que para k 's grandes hay una dirección preferente de propagación (Wood *et al.* (2006)). Recordando que las direcciones x e y son equivalentes, en estos medios la radiación electromagnética y la energía se propagan preferentemente en un cono que forma un ángulo respecto del eje óptico que está dado por

$$\theta = \arctan \left(\sqrt{\left| \frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{zz}} \right|} \right). \quad (33)$$

Otra de las consecuencias interesantes de la anisotropía extrema, es que los vectores de onda grandes (longitudes de onda cortas) mantienen su carácter propagativo;

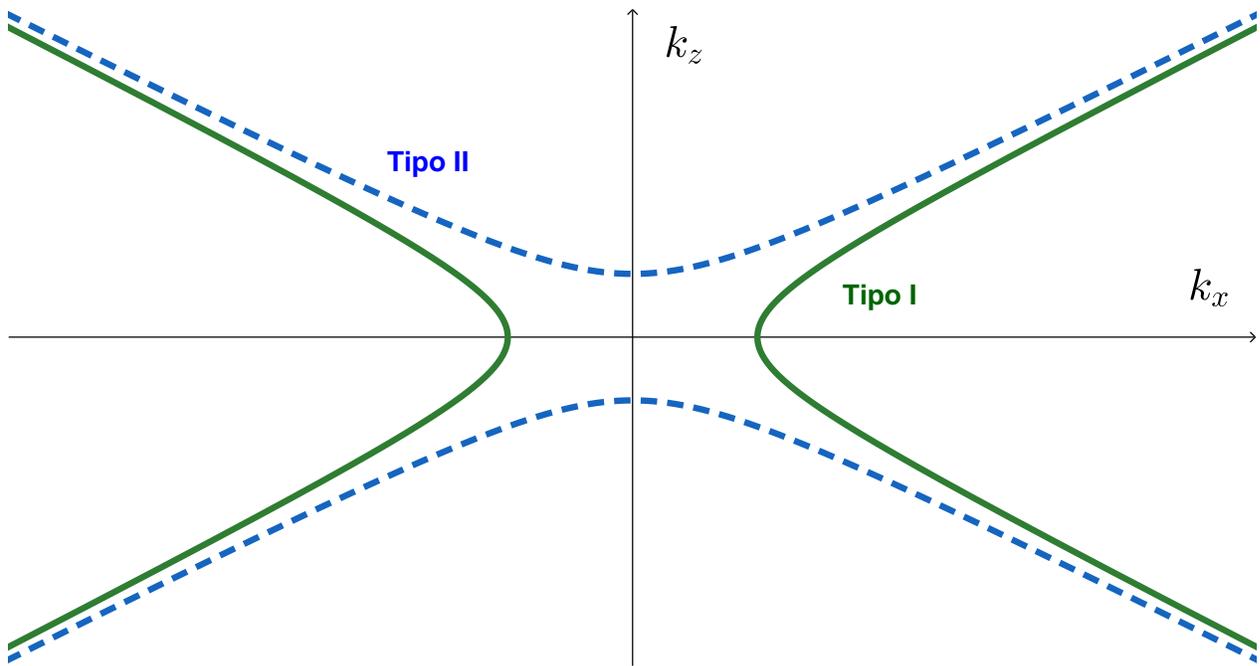


Figura 4. Relación entre k_x y k_z con $k_0 = cte$ para un medio hiperbólico tipo I (línea continua verde) y para un medio hiperbólico tipo II (línea segmentada azul). Las velocidades de grupo son perpendiculares a las curvas.

es decir, que no son evanescentes como sucede en medios isótropos. Es interesante comparar el comportamiento de la luz en metamateriales hiperbólicos con medios anisótropos convencionales, en los que ϵ_{xx} y ϵ_{zz} tienen el mismo signo. En este último caso, para que la onda asociada a los vectores de onda k_x y k_z sea propagativa, el vector de onda debe encontrarse sobre la superficie de un elipsoide en el espacio k . Si una de los componentes del vector de onda es mayor que el semieje correspondiente del elipsoide, para que se cumpla la relación de dispersión, el otro debe ser imaginario, por lo que la onda asociada a ellos sería evanescente o no propagante. Por otro lado, cuando ϵ_{xx} y ϵ_{zz} tienen signos opuestos los componentes del vector de onda k_x y k_z pueden ser muy grandes y, aún así, tener soluciones reales sobre la superficie del hiperboloide, como puede verse en la Figura (3). Es decir que es posible tener propagación de ondas con números de onda que pueden ser muy grandes.

Otra característica peculiar de los medios hiperbólicos es que es posible lograr una refracción negativa en la interface con un medio dieléctrico como se explica a continuación. Consideremos un onda electromagnética con polarización transversal magnética incidiendo de un material isótropo a un material hiperbólico del tipo I. En la interface hay dos soluciones que satisfacen la continuidad de la componente tangencial de \vec{k} , que es k_x . Además, de acuerdo al principio de causalidad, la energía debe

fluir hacia afuera de la interface, por lo que que $S_z = \hat{e}_z \cdot \vec{S} > 0$, siendo \vec{S} el vector de Poynting. Para medios hiperbólicos el vector de Poynting promediado en el tiempo es (Liu *et al.* (2008))

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{\vec{\bar{\epsilon}} \cdot \vec{k}}{2\omega\epsilon_0\epsilon_{xx}\epsilon_{zz}} H_0^2. \quad (34)$$

Entonces, para $\epsilon_{xx} > 0$ se satisface que

$$S_z = \frac{k_z}{\epsilon_{xx}} \frac{H_0^2}{2\omega\epsilon_0} > 0, \quad (35)$$

mientras que para la componente tangencial tenemos

$$S_x = \frac{k_x}{\epsilon_{zz}} \frac{H_0^2}{2\omega\epsilon_0}. \quad (36)$$

Como $\epsilon_{zz} < 0$ y k_x es continuo, el signo de S_x cambia en la interface, lo que muestra que en este caso se puede tener refracción negativa (Liu *et al.* (2008)).

Capítulo 3. Metamateriales Ópticos Hiperbólicos

Los metamateriales ópticos son materiales artificiales con propiedades ópticas distintas a las de los materiales encontrados en la naturaleza. Estas propiedades inusuales tienen su origen en la estructura del material a escalas menores que la longitud de onda. En tal situación, se puede esperar que el material responda ópticamente como un medio homogéneo efectivo.

Los medios hiperbólicos encontrados en la naturaleza son escasos y solamente mantienen este comportamiento en una banda estrecha de frecuencias que no siempre cae en el rango de las frecuencias ópticas (Alekseyev *et al.* (2012)). Por ello, recientemente, la comunidad científica ha explorado diferentes maneras de generar artificialmente la anisotropía extrema que presentan los medios hiperbólicos.

Una forma de obtener las propiedades deseadas (permitividad positiva y negativa en diferentes direcciones) es combinando materiales dieléctricos y metálicos. En la literatura se han explorado principalmente dos tipos de diseños: aquellos basados en sistemas multicapas de películas sub-longitud de onda alternando entre metal y dieléctrico y aquellos basados en arreglos de nanoalambres metálicos incrustados en una matriz dieléctrica. En esta tesis nos concentraremos en los primeros por la facilidad en su fabricación. El esquema general que consideraremos se muestra en la Figura (5), que consiste en un sistema multicapas, que se puede considerar como un cristal fotónico unidimensional.

En este capítulo, se aborda primero la teoría del medio efectivo para sistemas multicapa. Esto nos permitirá diseñar metamateriales hiperbólicos cuyas propiedades ópticas dependen de los materiales constituyentes y las fracciones de llenado. Los modelos de la constante dieléctrica del metal presentados en el Capítulo 2 serán útiles para estos propósitos.

Posteriormente, describiremos un método electromagnético riguroso para tratar la interacción de ondas planas con estructuras multicapa como la mostrada en la Figura (5). Se trata del método conocido como el método de la matriz de transferencia. Con base en este método exploraremos las condiciones bajo las cuales la teoría del medio efectivo es adecuada para describir la respuesta óptica del sistema a estudiar.

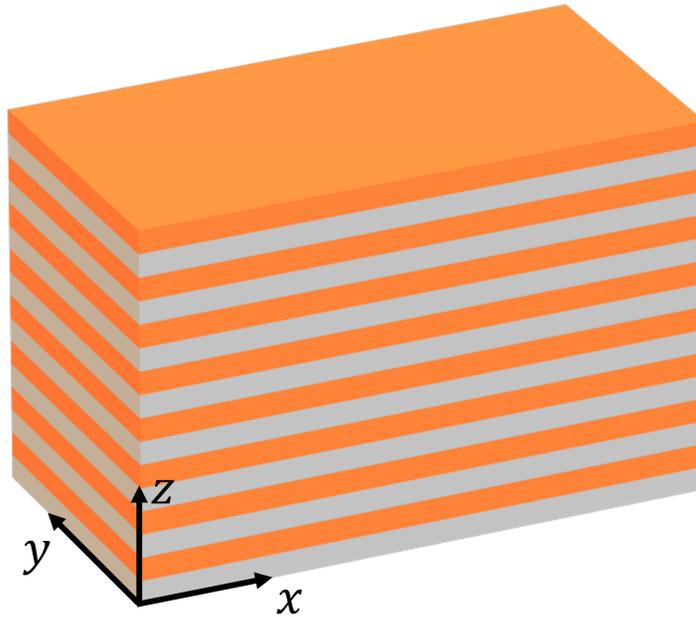


Figura 5. Esquema de un sistema multicapas en el que se alternan periódicamente películas delgadas dieléctricas y metálicas.

Además, el método de la matriz de transferencia nos permitirá obtener otras propiedades del medio que no están al alcance de la teoría del medio efectivo. En particular, podremos predecir los modos soportados por estos sistemas.

3.1. Teoría del medio efectivo

Cuando las estructuras que componen el metamaterial son mucho más pequeñas que la longitud de onda, se puede considerar que a un tiempo fijo toda la estructura se encuentra bajo la influencia de un campo eléctrico que es espacialmente constante. El problema de calcular la polarización del material y su respuesta dieléctrica es, entonces, un problema de electrostática.

Para el caso mostrado en la Figura (5), la respuesta efectiva fue calculada por Rytov (1956) y posteriormente por Wood *et al.* (2006), quienes presentaron un formalismo más moderno basado en la matriz de transferencia. En esta sección, se presenta una derivación, que si bien no es formal, tiene la ventaja de ser sencilla y reproduce los resultados que se obtienen con el método formal, el cual se describe detalladamente en el Apéndice A.

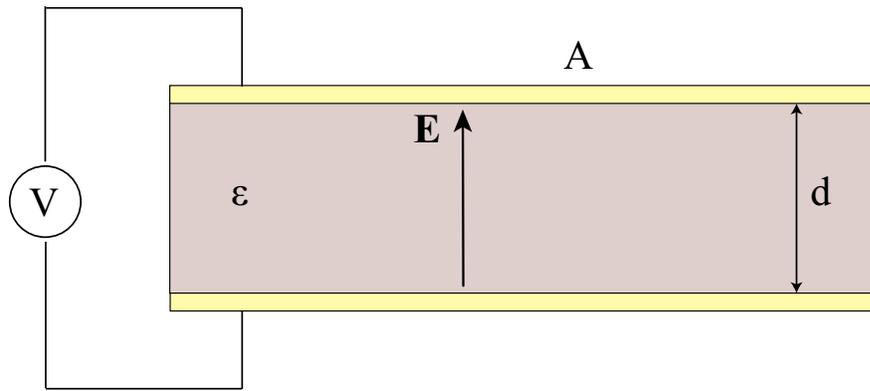


Figura 6. Diagrama esquemático de un capacitor de placas paralelas de superficie A que delimitan a un medio de espesor d y constante dieléctrica ϵ . Al aplicarse un voltaje V se produce un campo eléctrico \vec{E} en el material.

Iniciamos considerando un capacitor con placas paralelas de área A y un material con constante dieléctrica ϵ , de espesor d , como se muestra en la Figura (6). Al aplicarse un voltaje se produce una acumulación de cargas en las placas y un campo eléctrico que polariza al material. La capacitancia C está dada por la expresión

$$C = \epsilon \frac{A}{d}. \quad (37)$$

Es bien conocido que si tenemos n capacitores en serie, la capacitancia resultante está dada por la expresión

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}, \quad (38)$$

mientras que, si los capacitores están en paralelo, la capacitancia resultante está dada por

$$C_t = C_1 + C_2 + \dots + C_n. \quad (39)$$

Con base en estos resultados regresamos al sistema multicapas de la Figura (5), considerando por separado los casos en los que el campo eléctrico está en la dirección z y en una dirección perpendicular a este eje.

3.1.1. Campo eléctrico en la dirección z

Como se ilustra en la Figura (7), este problema es análogo a un sistema de capacitores en serie en el que se alternan las capacitancias $C_1 = \epsilon_1 \frac{A}{d_1}$ y $C_2 = \epsilon_2 \frac{A}{d_2}$. De la figura vemos que $d = d_1 + d_2$ y definimos el factor de llenado como $p = \frac{d_1}{d}$. Si tenemos

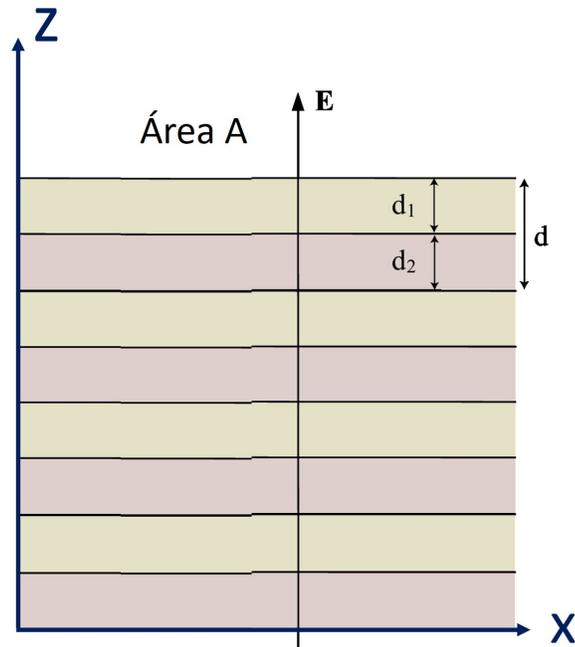


Figura 7. Diagrama esquemático de un arreglo de capacitores en serie con el campo eléctrico \vec{E} en la dirección z . A es el área de los capacitores perpendicular al campo eléctrico, d_1 y d_2 es el ancho de cada uno de los capacitores y d es la suma de ambos.

N pares de placas, el espesor total será $D = Nd$ y para la capacitancia total del sistema podemos escribir

$$\frac{1}{C_T} = N \left(\frac{d_1}{\epsilon_1 A} + \frac{d_2}{\epsilon_2 A} \right) = \left(\frac{d_1}{\epsilon_1 A} + \frac{d_2}{\epsilon_2 A} \right) \frac{D}{d} = \left(\frac{\rho}{\epsilon_1} + \frac{1-\rho}{\epsilon_2} \right) \frac{D}{A}. \quad (40)$$

Reescribiendo la ecuación anterior, tenemos que

$$C_T = \left(\frac{\rho}{\epsilon_1} + \frac{1-\rho}{\epsilon_2} \right)^{-1} \frac{A}{D} = \epsilon_{eff} \frac{A}{D}. \quad (41)$$

Así la constante dieléctrica efectiva de todo el sistema está dada por la expresión

$$\epsilon_{eff} = \left(\frac{\rho}{\epsilon_1} + \frac{1-\rho}{\epsilon_2} \right)^{-1} \frac{A}{D}. \quad (42)$$

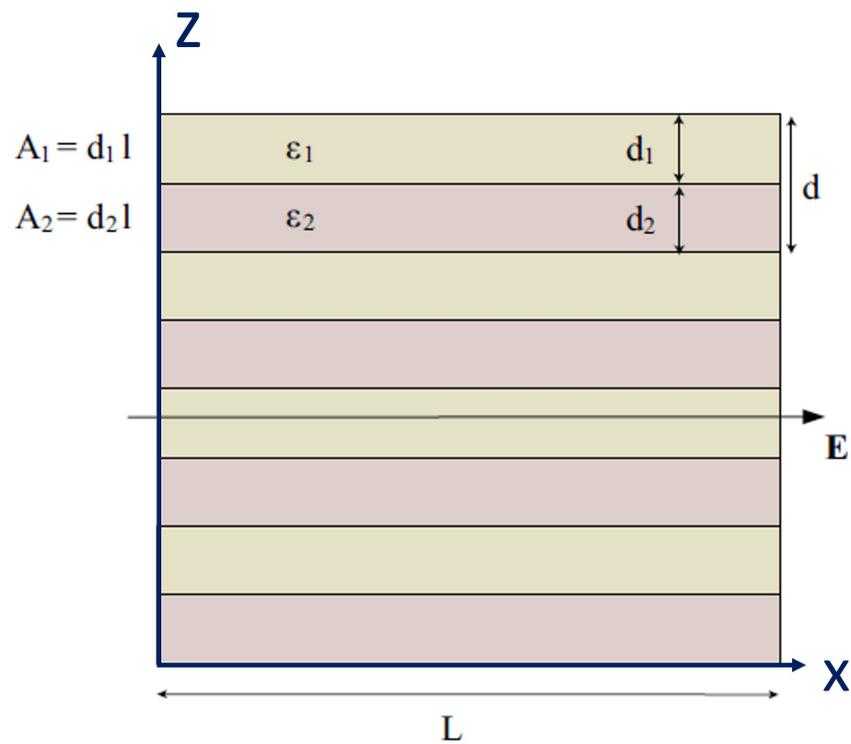


Figura 8. Diagrama esquemático de un arreglo de capacitores en paralelo con el campo eléctrico \vec{E} en la dirección x . L es el largo de los capacitores paralelo al campo eléctrico, d_1 y d_2 es el ancho de cada uno de los capacitores y d es la suma de ambos. A_1 y A_2 son las áreas perpendiculares al campo eléctrico de los capacitores y ϵ_1 , ϵ_2 sus permitividades eléctricas respectivas.

3.1.2. Campo eléctrico perpendicular al eje z

Consideramos ahora la situación mostrada en la Figura (8), en la que el campo se aplica a lo largo de las placas. En este caso escribimos las capacitancias como $C_1 = \epsilon_1 \frac{A_1}{L}$ y $C_2 = \epsilon_2 \frac{A_2}{L}$, donde $A_1 = d_1 l$ y $A_2 = d_2 l$, siendo l una longitud en la dirección perpendicular a la Figura (8) (dirección fuera del plano). Para la capacitancia total del sistema tenemos que

$$C_T = N \left(\epsilon_1 \frac{d_1 l}{L} + \epsilon_2 \frac{d_2 l}{L} \right) = (\epsilon_1 \rho + \epsilon_2 (1 - \rho)) \frac{Ndl}{L}. \quad (43)$$

Denotando por $A_T = Ndl$ el área que presenta todo el sistema al campo eléctrico (es decir, perpendicular a éste), podemos escribir que

$$C_T = (\epsilon_1 \rho + \epsilon_2 (1 - \rho)) \frac{A_T}{L} = \epsilon_{eff} \frac{A_T}{L}, \quad (44)$$

con lo que concluimos que la constante dieléctrica efectiva de todo este sistema está dada por

$$\epsilon_{eff} = \epsilon_1 \rho + \epsilon_2 (1 - \rho). \quad (45)$$

3.1.3. Diseño de metamateriales hiperbólicos

A partir de los resultados de las subsecciones anteriores y del Apéndice A, tenemos entonces que para el sistema de interés, que consiste de un sistema multicapas alternando películas metálicas y dieléctricas de sublongitud de onda (véase la Figura (5)), la función dieléctrica efectiva está dada por

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \rho \epsilon_m + (1 - \rho) \epsilon_d, \quad (46)$$

$$\epsilon_{zz} = \left(\frac{\rho}{\epsilon_m} + \frac{1 - \rho}{\epsilon_d} \right)^{-1}, \quad (47)$$

donde ρ es la fracción de llenado de la componente metálica. Es decir, es la fracción volumétrica del metal en un periodo de la estructura. En estas expresiones ϵ_m es la permitividad del metal y ϵ_d es la permitividad del dieléctrico, ambas son cantidades complejas que dependen de la frecuencia angular ω .

La fracción de llenado determinará qué tipo de comportamiento dominante presenta el metamaterial hiperbólico. Intuitivamente, uno podría suponer que, cuando p es pequeño dominará el comportamiento dieléctrico, o el metálico cuando sea grande. Sin embargo, como se demostrará a continuación, esto no siempre es así. Aunque no aparece de manera explícita en las ecuaciones anteriores, el periodo espacial del sistema multicapas debe ser menor que la longitud de onda para que sea válida la teoría del medio efectivo. Con estas consideraciones podemos entonces sintonizar la respuesta del metamaterial al variar la frecuencia (vale la pena recordar que la permittividad del material es función de la frecuencia) o la fracción de llenado.

Dependiendo de los signos de las partes reales de ϵ_{xx} y ϵ_{zz} , podemos tener 4 casos que nos ayudarán a clasificar el medio efectivo del que se trate. Estos casos son: i) si $\epsilon_{xx} < 0$ y $\epsilon_{zz} > 0$ tenemos un metamaterial hiperbólico (MMH) Tipo II o metálico, ii) si $\epsilon_{xx} > 0$ y $\epsilon_{zz} < 0$ tenemos un MMH Tipo I o dieléctrico, iii) si $\epsilon_{xx} < 0$ y $\epsilon_{zz} < 0$ tenemos un metal efectivo y iv) si $\epsilon_{xx} > 0$ y $\epsilon_{zz} > 0$ tenemos un dieléctrico efectivo. En la Figura (9), se presenta un mapa que muestra el tipo de metamaterial efectivo que se obtiene con un sistema multicapas de plata (Ag) con dióxido de silicio (SiO_2) en función de la fracción de llenado del metal y la longitud de onda. Para realizar este mapa se utilizaron las expresiones del medio efectivo para calcular los valores de la parte real de ϵ_{xx} y ϵ_{zz} , variando la fracción de llenado de la plata entre 0.1 y 1 y la longitud de onda entre 300 nm y 1500 nm. Dependiendo de los signos de ϵ_{xx} y ϵ_{zz} (positivo o negativo) se asignaron los colores a cada región. Para calcular la respuesta óptica de la plata, usamos el modelo de Drude-Lorentz con los parámetros propuestos por Barchiesi y Grosjes (2014).

Los metamateriales hiperbólicos Tipo II son aquellos que se comportan como metales en la dirección de su eje principal (dirección z) y como dieléctrico en los otros ejes principales (plano xy). Como podemos ver en la Figura (9), este comportamiento es el que predomina en la región del espectro considerada y con los materiales utilizados. Por otro lado, los metamateriales hiperbólicos Tipo I se comportan como dieléctricos en la dirección de su eje principal (dirección z) y como metal en los otros ejes principales (plano xy). En el mapa de la Figura (9), observamos que este comportamiento sólo ocurre a longitudes de onda cortas. También podemos encontrar regiones del mapa que corresponden a metales y dieléctricos efectivos, lo cual ocurre cuando se tienen

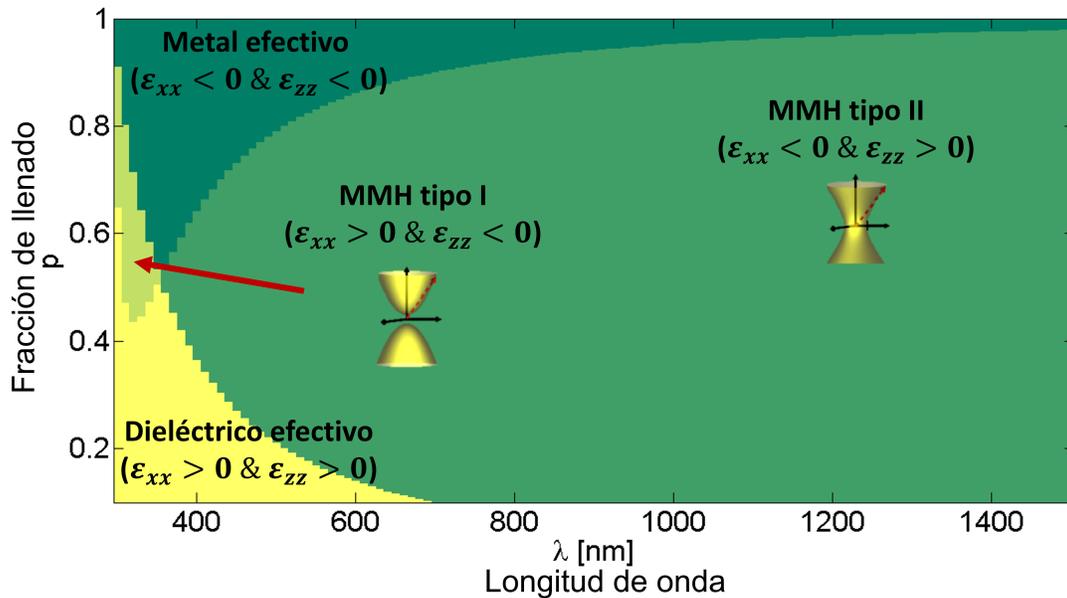


Figura 9. Mapa que muestra el comportamiento de un metamaterial basado en un sistema multicapas de Ag/SiO₂ en función de la fracción de llenado del metal y la longitud de onda.

altas y bajas fracciones de llenado, respectivamente, y principalmente para longitudes de onda corta (menores a los 600 nm). Considerando nuevamente el mapa de la Figura (9), vemos que las fronteras representadas por los cambios de color son fronteras en los que se dan cambios de signo en alguna de las permitividades efectivas en las direcciones principales del sistema multicapas. Estos resultados muestran que con este diseño sencillo, es posible obtener un metamaterial con respuesta óptica sintonizable con la fracción de llenado y la longitud de onda, con lo que es posible obtener los dos tipos de metamateriales hiperbólicos, además de comportamientos puramente metálicos o dieléctricos.

Como complemento de la información presentada por la Figura (9), en las Figuras (10)-(12) se presentan las permitividades efectivas para las direcciones principales para tres diferentes fracciones de llenado: 0.1, 0.5 y 0.9. La Figura (10)A corresponde a una fracción de llenado de 0.1 en el rango de 450 nm a 1500 nm, mientras que en B se grafican los índices efectivos para las direcciones principales. En rojo se denota la parte real y en azul la parte imaginaria, mientras que las líneas continuas son para la dirección x y las líneas punteadas para la dirección z. La convención anterior se mantiene en las Figuras (11) y (12).

En la Figura (10)a) vemos que la parte real de ϵ_{xx} es descendente y que presen-

ta un cambio de signo alrededor de los 700 nm. Vemos que a esta longitud de onda $\epsilon_{xx} = 0$, por lo se tendría un material con épsilon cercano a cero (Epsilon near zero, ENZ, en inglés) en la dirección x . Esto ocurre en la frontera entre el comportamiento de dieléctrico efectivo a MMH Tipo II, que en general depende de la longitud de onda y de la fracción de llenado. Por otro lado, la parte imaginaria de ϵ_{xx} comienza con un valor cercano a cero e incrementa con la longitud de onda de manera continua. También se observa que las partes real e imaginaria de ϵ_{zz} permanecen prácticamente constantes, y que la parte real es positiva y la parte imaginaria es muy pequeña. En lo que respecta al índice de refracción, en la Figura (10)B vemos que la parte real de n_x empieza por arriba de uno y decae a un valor cercano a 0 alrededor de los 700 nm para después mantenerse casi constante, mientras que su parte imaginaria tiene un comportamiento opuesto, pues comienza con un valor cercano a cero y después se vuelve ascendente. Vemos que las partes real e imaginarias de n_x se intersectan alrededor de la longitud de onda a la que el material se comporta como ENZ. Esta situación es interesante porque en la dirección x , la velocidad de fase es mayor que la de la luz en el vacío y la absorción es menor que en longitudes de onda más largas. En la dirección z las partes real e imaginaria de n_z son casi constantes, con un comportamiento típico de dieléctrico con baja absorción. Es decir, para $p = 0.1$, tenemos que en la dirección x el material se comporta como un dieléctrico para longitudes de onda cortas y como un metal para longitudes de onda larga, mientras que en la dirección z siempre se comporta como dieléctrico.

En la Figura (11)A vemos que para la fracción de llenado $p = 0.5$ la parte real de ϵ_{xx} es negativa y descendente siempre, mientras que la parte imaginaria comienza cerca del cero y aumenta con la longitud de onda. Por otro lado, la parte imaginaria de ϵ_{zz} es cercana a cero en todo el intervalo, mientras que su parte real decrece lentamente, siendo siempre positiva. En la Figura (11)B vemos que la parte real de n_x es siempre menor que 1, lo cual indica que la velocidad de fase de las ondas electromagnéticas es mayor que en el vacío, pero contrarrestada por una alta absorción debido a una parte imaginaria de n_x grande, que crece aún más con la longitud de onda. En la dirección z se observa que a longitudes de onda corta la parte imaginaria de n_z es grande pero decae a longitudes de onda largas a un valor cercano a 0, mientras que la parte real de n_z siempre es mayor que 2 y constante para longitudes de onda largas. En general tenemos un dieléctrico en la dirección x y un metal en la dirección z para todas las

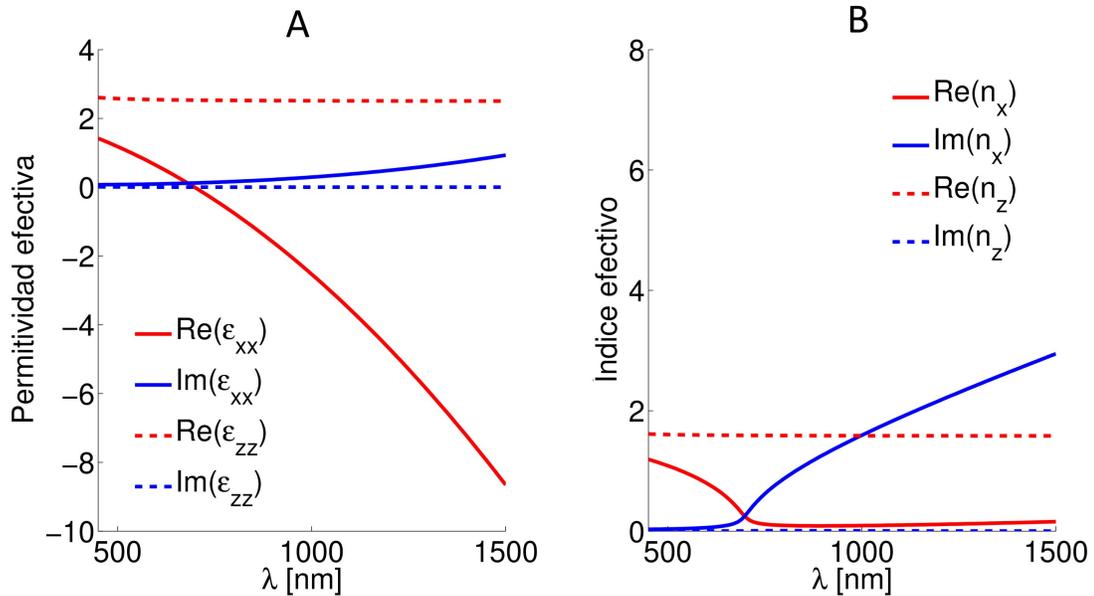


Figura 10. A. Permittividad efectiva. B. Índice efectivo para un sistema multicapas de Ag/SiO₂ con $p = 0.1$.

longitudes de onda.

En la Figura (12)A vemos que para la fracción de llenado $p = 0.9$ tenemos un comportamiento interesante para ϵ_{zz} . La parte real de ϵ_{zz} es negativa para longitudes de onda corta y se vuelve positiva para longitudes de onda largas. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre con la fracción de llenado de 0.1 donde se tiene una variación continua, en este caso tenemos una indeterminación cuando se da el cambio de signo y que la parte imaginaria también se indetermina en el mismo punto, alrededor de los 700 nm en longitud de onda. Es importante notar que la longitud de onda a la que ocurre este fenómeno, coincide con el cambio de comportamiento de metal efectivo a MMH Tipo II, por lo que de acuerdo con el mapa de la Figura (9); la longitud de onda a la que se presenta este fenómeno disminuirá con la fracción de llenado.

La parte real de ϵ_{xx} es negativa y decrece con la longitud de onda mientras que su parte imaginaria se mantiene constante y cercana a cero. En la Figura (12)B podemos ver que, como consecuencia de esta indeterminación, la parte real del índice efectivo n_x se vuelve muy grande, mientras que la parte imaginaria de n_x es muy grande y de hecho se indetermina. Por otro lado, la parte real de n_z es menor a 1 para todas las longitudes de onda consideradas, pero la parte imaginaria de n_z es grande. En resumen, para esta fracción de llenado y longitudes de onda cortas en la dirección

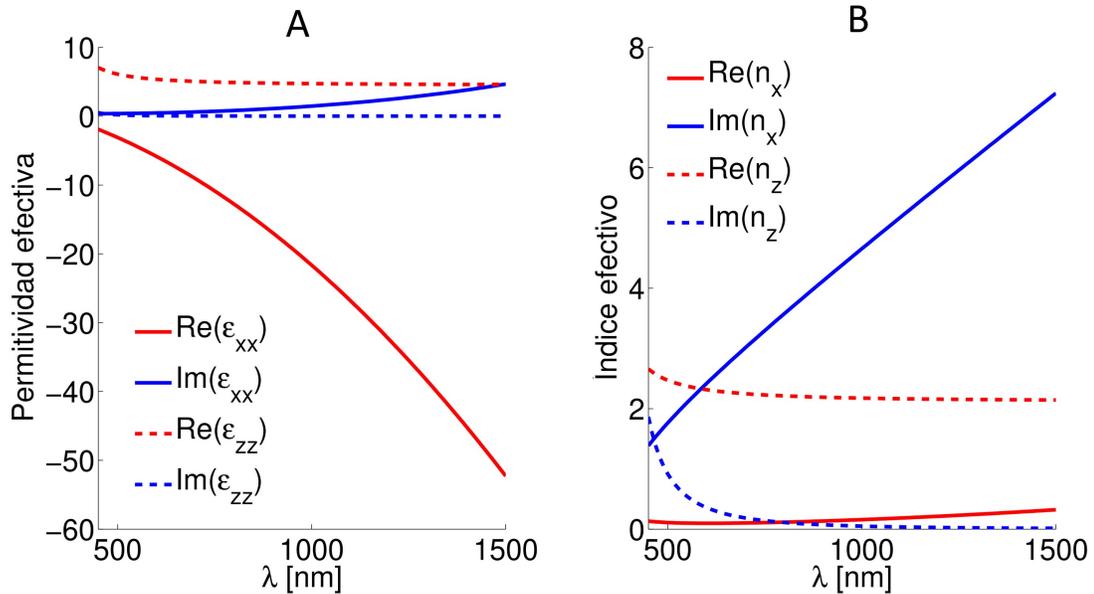


Figura 11. A. Permittividad efectiva. B. Índice efectivo para un sistema multicapas de Ag/SiO₂ con $p = 0.5$.

z , el material se comporta como metal y para longitudes de onda largas como un dieléctrico, mientras que en la dirección x siempre se comportará como metal. En ambos casos, debido a que la parte imaginaria del índice es muy grande, las pérdidas por absorción son grandes.

3.2. Método de la matriz de transferencia

El método de la matriz de transferencia es una herramienta que nos permite estudiar la interacción de ondas electromagnéticas planas con medios multicapa. Al resolver este sistema de ecuaciones, se puede obtener la relación de dispersión de los modos soportados por el sistema, así como sus coeficientes de reflexión y transmisión. Con esta herramienta, podremos también verificar la validez de la teoría del medio efectivo.

Empecemos considerando la propagación de ondas electromagnéticas armónicas en un sistema que consiste de $N-2$ películas planas paralelas, delimitadas por dos medios semi-infinitos. Es decir, un sistema multicapa formado por N medios, como se ilustra en la Figura (13).

Suponiendo iluminación con ondas planas, el campo electromagnético total en cada

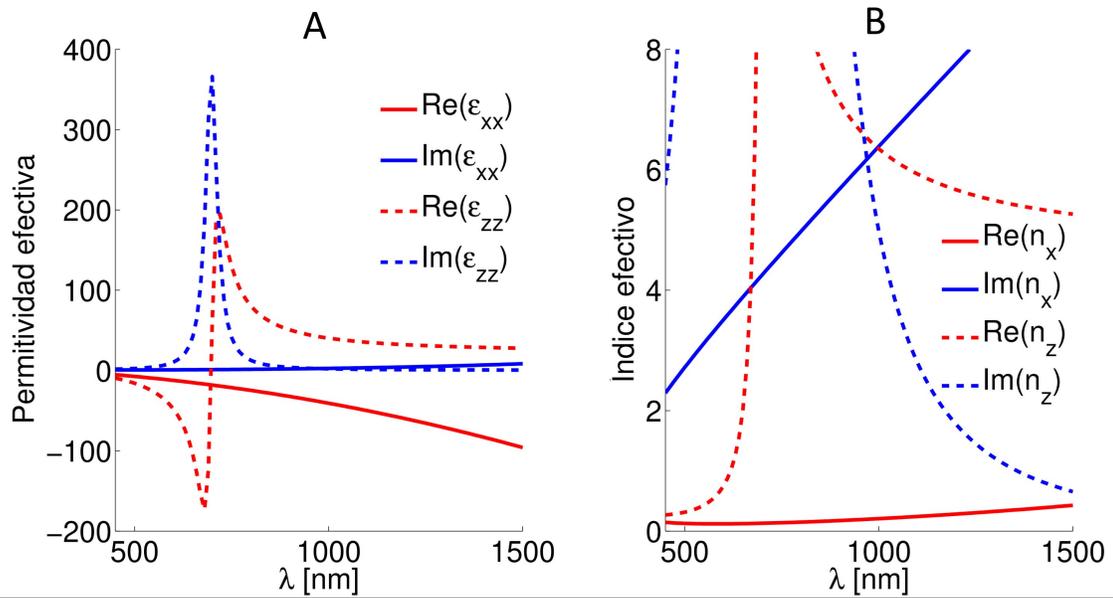


Figura 12. A. Permittividad efectiva B. Índice efectivo para un sistema multicapas de Ag/SiO₂ con $p = 0.9$.

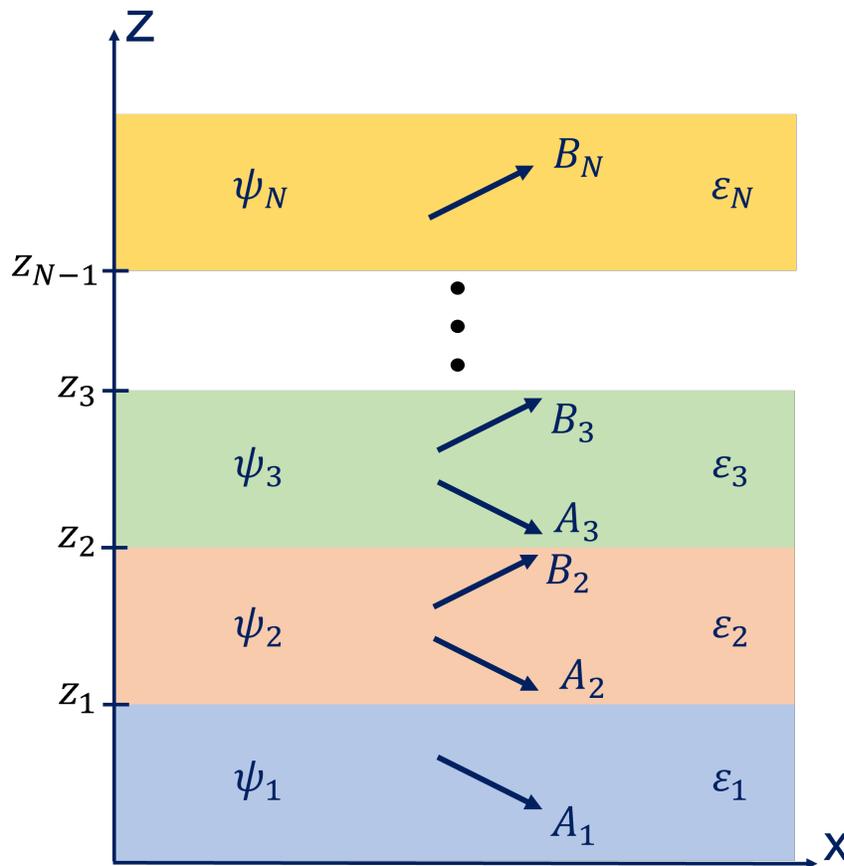


Figura 13. Diagrama que ilustra un sistema de N medios con invariancia en y . Los medios de los extremos se consideran semi infinitos. El campo eléctrico en el j -ésimo medio es ψ_j , mientras que A_j y B_j son las amplitudes de las ondas que viajan hacia arriba y hacia abajo respectivamente, con permitividad eléctrica ϵ_j .

capa se puede representar como una superposición de ondas planas que viajan hacia arriba y hacia abajo, como se ilustra en la Figura (13). En el j -ésimo medio podemos escribir el campo electromagnético como

$$\Psi_j = A_j e^{-i\alpha_j z} e^{i\beta_j x} e^{-i\omega t} + B_j e^{i\alpha_j z} e^{i\beta_j x} e^{-i\omega t}, \quad (48)$$

donde A_j y B_j son las amplitudes de las ondas que viajan hacia abajo y hacia arriba en el medio j , respectivamente, mientras que α_j y β_j son las componentes del vector de onda, en las direcciones z y x , respectivamente, que satisfacen la relación de dispersión

$$\alpha_j = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_j(\omega) - \beta_j^2}, \quad (49)$$

en el medio j , con $\text{Re}(\alpha_j) \geq 0$ e $\text{Im}(\alpha_j) \geq 0$.

Considerando la continuidad de las componentes tangenciales de los campos a través de las fronteras se tiene que

$$\Psi_j |_{z_j} = \Psi_{j+1} |_{z_j}, \quad (50)$$

$$\frac{1}{\nu_j} \frac{\partial \Psi_j}{\partial z} |_{z_j} = \frac{1}{\nu_{j+1}} \frac{\partial \Psi_{j+1}}{\partial z} |_{z_j}, \quad (51)$$

donde $\nu_j = 1$ para polarización transversal eléctrica (s) y $\nu_j = \varepsilon_j$ para polarización transversal magnética (p).

Empleando la forma del campo dada por la Ec. (48) en las Ecs. (50) y (51) encontramos un sistema de dos ecuaciones que relacionan las amplitudes de las ondas en los medios j y $j + 1$. En forma matricial, podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{bmatrix} = [T_j] \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix}, \quad (52)$$

donde

$$[T_j] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1 + \gamma_j) e^{-i(k_j - k_{j+1})} & (1 - \gamma_j) e^{i(k_j + k_{j+1})} \\ (1 - \gamma_j) e^{-i(k_j + k_{j+1})} & (1 + \gamma_j) e^{i(k_j - k_{j+1})} \end{bmatrix}, \quad (53)$$

con $k_j = \alpha_j z_j$, $k_{j+1} = \alpha_{j+1} z_j$ y $\gamma_j = \frac{\alpha_j \nu_{j+1}}{\alpha_{j+1} \nu_j}$.

Podemos extender el resultado al sistema multicapas de N interfaces, simplemente multiplicando recurrentemente por la matriz $[T_j]$ de cada capa, dando como resultado una expresión que relaciona las amplitudes en los medios 1 y N

$$\begin{bmatrix} A_N \\ B_N \end{bmatrix} = \prod_{j=1}^{N-1} [T_j] \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Para encontrar la relación de dispersión de los modos soportados por el sistema, buscamos una solución finita para una situación en la que no se ilumina el sistema. Es decir, ponemos $B_1 = A_N = 0$ y buscamos una solución considerando que A_1 y B_N son distintos de cero. Esto nos lleva a que la condición $t_{11} = 0$ (Téllez-Limón y Salas-Montiel (2021)), representa la condición para los modos.

Por otro lado, si en la ecuación matricial (54) imponemos $B_1 = 1$ y $A_N = 0$, podemos identificar a los coeficientes de reflexión y transmisión como $r = A_1$ y $t = B_N$, respectivamente. Tenemos entonces:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (55)$$

de donde encontramos que

$$r = -\frac{t_{12}}{t_{11}}, \quad (56)$$

$$t = \frac{t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}}{t_{11}}. \quad (57)$$

Cabe destacar que los coeficientes de reflexión y transmisión dependen de la polarización, información que está contenida en los elementos de la matriz de transferencia.

3.3. Evaluación de la validez de la Teoría del Medio Efectivo

Como ya se ha mencionado, la Teoría del Medio Efectivo es una aproximación válida cuando la longitud de onda es suficientemente larga respecto al periodo del sistema multicapa. Por otro lado, el método de la matriz de transferencia es un método rigu-

roso para tratar el problema de la interacción de luz con un sistema multicapas y nos permite evaluar la validez de la Teoría del Medio Efectivo. Para esto, estudiaremos las propiedades de reflexión de sistemas con un número grande de capas, de manera que pueda considerarse semi-infinito.

Una técnica utilizada para medir las propiedades ópticas de materiales es la elipso-metría, que analiza los cambios de polarización de la luz reflejada por el material. Los parámetros elipsométricos Ψ y Δ están definidos a través de la expresión

$$r_p/r_s = (\tan \Psi)e^{i\Delta}, \quad (58)$$

dónde r_p y r_s son los coeficientes de reflexión para polarización transversal magnética (polarización p) y transversal eléctrica (polarización s), respectivamente. La idea, entonces, es comparar los parámetros elipsométricos obtenidos con el método de la matriz de transferencia y con la teoría del medio efectivo.

De acuerdo a la Teoría del Medio Efectivo las componentes del tensor de permitividad del material se pueden calcular con las ecuaciones (46) y (47). Los índices de refracción están entonces dados por las expresiones $n_x = \sqrt{\epsilon_{xx}}$ y $n_z = \sqrt{\epsilon_{zz}}$. Para calcular los coeficientes de reflexión es necesario usar las ecuaciones de Fresnel para medios anisótropos (Lekner (1991) y Saarinen y Sipe (2008)).

Consideramos entonces la reflexión de un medio uniaxial semi-infinito caracterizado por los índices $n_x = n_y$ y n_z , iluminado desde un medio isótropo con índice de refracción n_0 . Para un ángulo de incidencia θ_0 , se tiene que (Lekner (1991))

$$r_s = \frac{n_0 \cos \theta_0 - n_x \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_x} \sin \theta_0\right)^2}}{n_0 \cos \theta_0 + n_x \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_x} \sin \theta_0\right)^2}}, \quad (59)$$

y

$$r_p = \frac{n_x \cos \theta_0 - n_0 \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_z} \sin \theta_0\right)^2}}{n_x \cos \theta_0 + n_0 \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_z} \sin \theta_0\right)^2}}. \quad (60)$$

Con base en estas expresiones, podemos calcular los parámetros elipsométricos obtenidos con la teoría del medio efectivo y compararlos con lo que se obtienen con

el método de la matriz de transferencia. Se analizaron distintas situaciones en las que el sistema se comportaba como MMH tipo I, MMH tipo II, dieléctrico efectivo, metal efectivo y ENZ.

En la Figura (14) se presentan resultados de esta comparación para un sistema multicapas con periodo espacial de 10 nm. En líneas continuas tenemos el parámetro Ψ y en líneas punteadas tenemos el parámetro Δ , azul para la teoría del medio efectivo y rojo para el método de la matriz de transferencia. Con referencia a la Fig. (15), en A tenemos un MMH tipo II ($\lambda = 633$ nm, $p = 0.5$), en B tenemos un metal efectivo ($\lambda = 633$ nm, $p = 0.9$), en C tenemos un medio ENZ en el eje óptico ($\lambda = 633$ nm, $p = 0.1$), en D tenemos un MMH tipo I ($\lambda = 350$ nm, $p = 0.5$) y en E tenemos un dieléctrico efectivo ($\lambda = 370$ nm, $p = 0.3$). Vemos que en todas estas situaciones la aproximación del medio efectivo funciona bien. Como en los cálculos con las expresiones para el medio efectivo se supone que el medio es semi-infinito, fue necesario constatar que al usar un medio multicapas finito no se transmite la luz al otro lado. Para A, B y D se usaron 24 capas, mientras que para C y E fue necesario emplear 48 capas, además de que se agregó una parte imaginaria al índice de refracción del SiO₂ con valor de $0.2i$. El medio ENZ (punto C) se denominó así porque, aunque no está ubicado sobre el contorno que indica el cambio de signo, está en la vecindad de éste y la parte real de su permitividad es cercana a cero, como puede confirmarse en la Figura (10). Podría decirse algo similar sobre el caso considerado como metal efectivo del inciso B, pero ahí el cambio de signo es muy abrupto y no se tiene una situación en la que podamos considerar que ϵ_{zz} es cercano a cero (véase (12)), por lo que se optó por referirse a este medio simplemente como metal efectivo.

En conclusión, los resultados muestran que la teoría del medio efectivo para un arreglo multicapas es válida para periodos espaciales mucho más pequeños que λ , por lo que nos permitirá predecir el comportamiento del metamaterial hiperbólico según los materiales que lo conforman, la fracción de llenado y la longitud de onda de la luz incidente. Sin embargo, es importante no perder de vista el hecho de que es una aproximación y por lo tanto su validez depende de diversos factores como el periodo espacial y longitud de onda con la que se ilumina. La precisión de la aproximación aumenta conforme el periodo espacial disminuye. En el intervalo espacial explorado y con los materiales utilizados, se observan buenos resultados para periodos espaciales

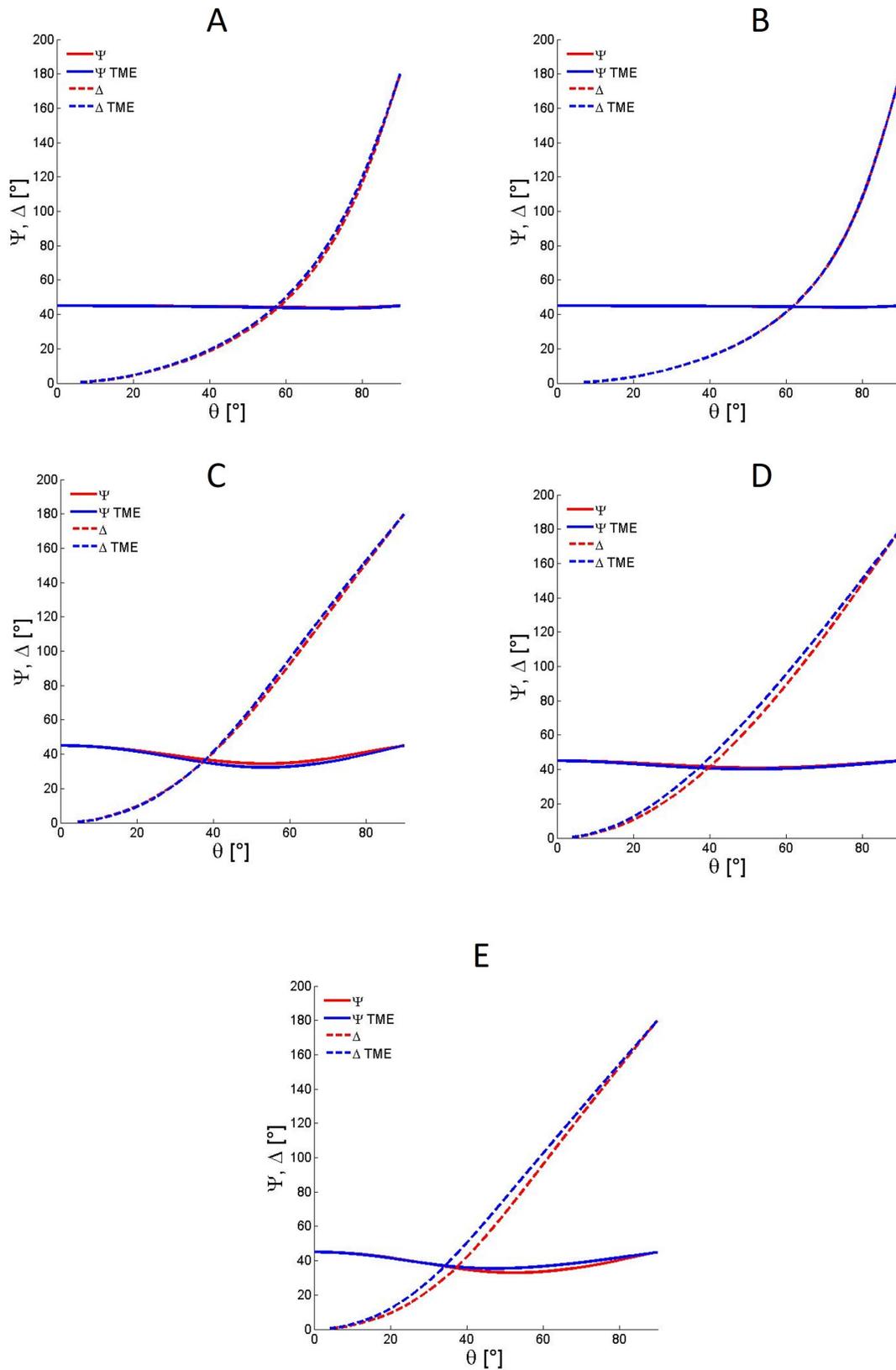


Figura 14. Comparación de los parámetros elipsométricos obtenidos con la Teoría del Medio Efectivo y el método de la matriz de transferencia para un sistema multicapas con un periodo espacial de 10 nm y 24 capas. En A tenemos un MMH tipo II, en B tenemos un metal efectivo, en C tenemos un ENZ, en D tenemos un MMH tipo I y en E un dieléctrico efectivo.

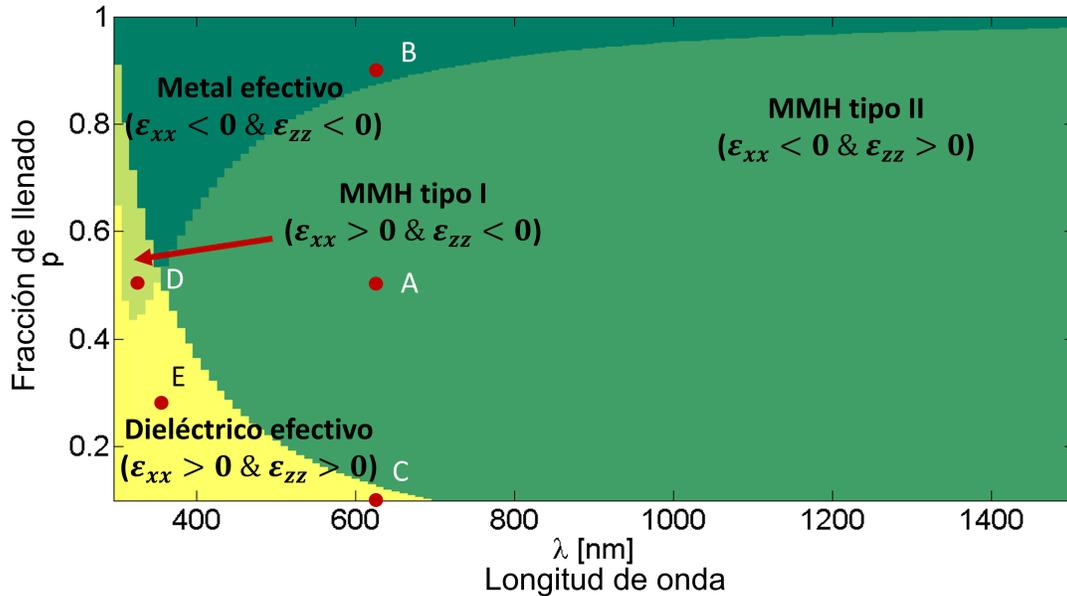


Figura 15. Mapa de clasificación del metamaterial efectivo para un sistema multicapas de Ag/SiO₂ en función de la fracción de llenado del metal y la longitud de onda. A. MMH tipo II. B. Metal efectivo. C. ENZ en el eje óptico. D. MMH tipo I. E. Dieléctrico efectivo.

menores a 100 nm para un número de periodos espaciales mayores a 6, es decir, 12 películas delgadas.

3.4. Relación de dispersión de los sistemas estudiados

En esta sección se profundizará en el entendimiento de los sistemas multicapas a través de la relación de dispersión, la cual relaciona la constante de propagación con la frecuencia para los modos del sistema. Cabe recordar que un modo se considera como una distribución del campo electromagnético soportado por el sistema que no cambia al propagarse.

Para iniciar la discusión, en la Figura (16) se muestra un mapa de color de $-\ln|t_{11}|$ en función de la constante de propagación y la longitud de onda, para una película de Ag de 25 nm de espesor rodeada por aire. La línea blanca punteada representa la línea de luz del aire. Los cálculos se realizaron con el método de la matriz de transferencia en el rango frecuencias de [200-600] THz, que corresponden aproximadamente al rango de longitudes de onda [500-1500] nm. Nótese que ω_0 es una frecuencia arbitraria, pero en este caso y en los siguientes tomará el valor de la frecuencia de plasma de la plata. Las regiones en color verde (valores máximos) representan valores de t_{11} cercanos

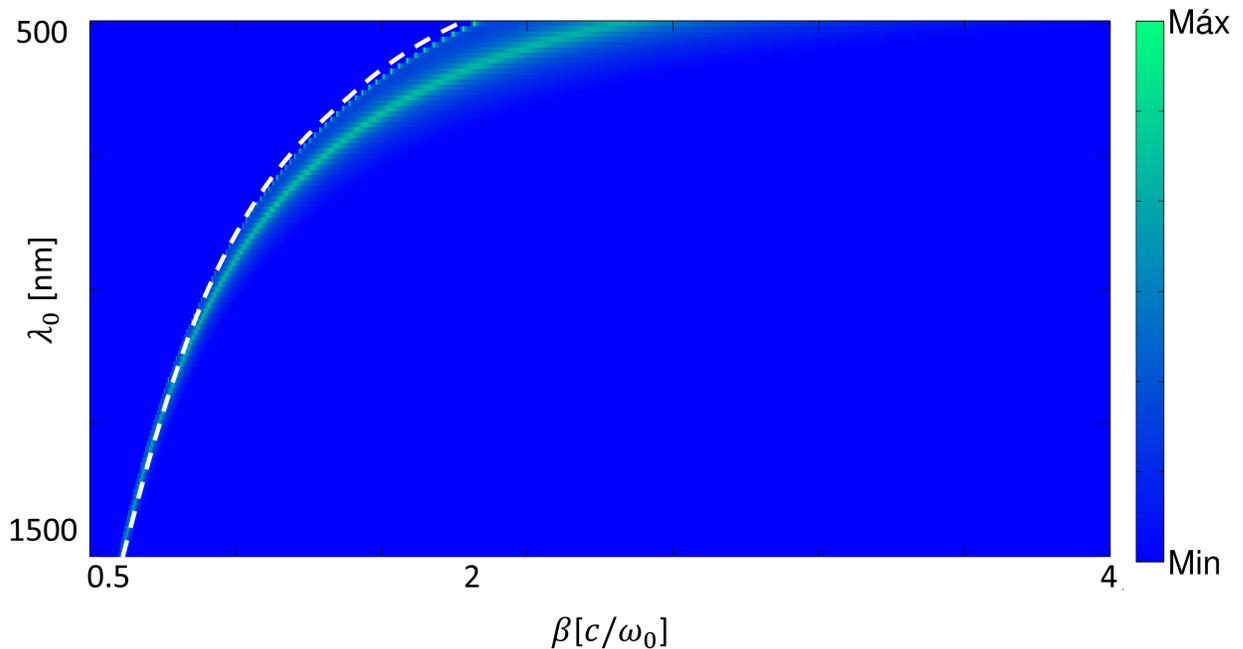


Figura 16. Mapa de $-\ln|t_{11}|$ para una película de Ag de un espesor de 25 nm. Se observa la presencia de dos modos que, están asociados a los modos simétrico y antisimétrico de los plasmones polaritones de superficie. La línea blanca punteada representa la línea de luz del aire.

a cero y permiten visualizar las curvas de la relación de dispersión. Los mapas están graficados en escala logarítmica para facilitar la visualización de los resultados. En este caso, observamos la presencia de dos modos plasmónicos. Uno de ellos muy cercano a la curva de los PPS del medio semi-infinito (curva con línea discontinua) y el otro que se observa a frecuencias más bajas. El primero corresponde a un modo simétrico y el otro a un antisimétrico Téllez-Limón y Salas-Montiel (2021). La separación de estos modos depende del espesor de la película; entre más delgada es la película mayor es la separación de los modos (Maier *et al.* (2007)).

En la Figura (17) se presentan resultados para un sistema de cuatro capas (dos periodos) variando el periodo espacial (renglones) y la fracción de llenado (columnas). La curva blanca punteada en cada gráfica representa la línea de la luz para el aire. Tomando como referencia la figura del centro, es decir, de un periodo espacial de 50 nm y $p = 0.5$, podemos observar que la separación entre modos es inversamente proporcional tanto a la fracción de llenado como al periodo espacial. Es decir, que el ancho de la película de metal, controlado a través de la fracción de llenado y el periodo, determina la separación entre los modos del sistema. Por otro lado, al disminuir las dimensiones del periodo espacial se ensancha el modo, estos modos tienden a las

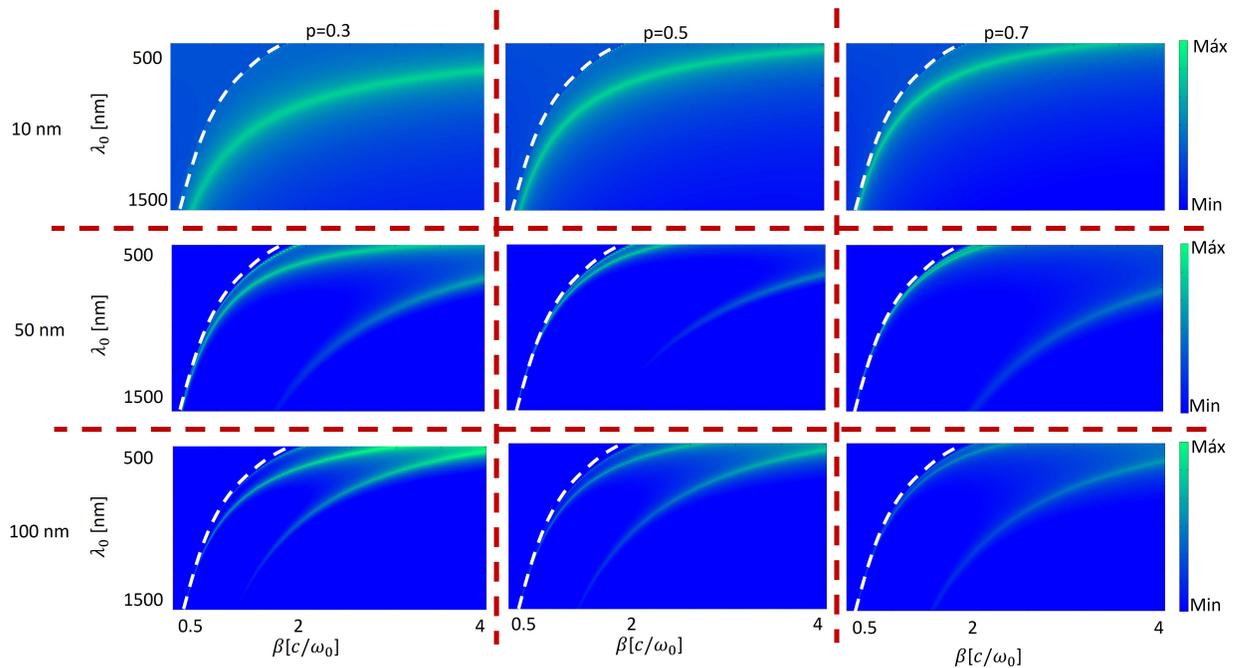


Figura 17. Relación de dispersión para un sistema multicapas de 2 periodos (4 capas), con periodos espaciales de 10 nm, 50 nm y 100 nm, y fracciones de llenado $p=0.3$, 0.5 y 0.7.

líneas de luz para el aire conforme aumenta la fracción de llenado. Por otro lado, al aumentar la fracción de llenado se observa que las curvas de la relación de dispersión se acercan también a la línea de luz para el aire. Para excitar los modos se puede emplear la configuración de Kretschmann, la cual consiste en colocar un prisma con un índice de refracción alto en contacto con la película delgada (Maier *et al.* (2007)).

En la Figura (18) se muestran resultados para un sistema multicapas con un periodo espacial de 50 nm y una fracción de llenado de $p = 0.5$, pero variando el número de capas que lo conforman. Vemos que al aumentar el número de capas aumenta el número de modos. Para el caso de 24 capas (12 periodos) se obtiene un cuasi-continuo de estados en un ancho de banda finito.

En la Figura (19) se muestran mapas de reflectancia considerando sistemas multicapas con un sustrato, en función de la longitud de onda y el ángulo de incidencia, similares a los que veríamos en un experimento de reflexión total atenuada (ATR por sus siglas en inglés). La luz incide desde el vidrio con un índice de refracción $n = 1.5$, y se consideró un sistema de multicapas de 4 capas alternando Ag con SiO_2 , con fracción de llenado $p = 0.3$ y un periodo espacial de 10 nm en A, 50 nm en B y 100 nm en C. En A se observa que para ángulos menores al ángulo crítico del sistema vidrio-

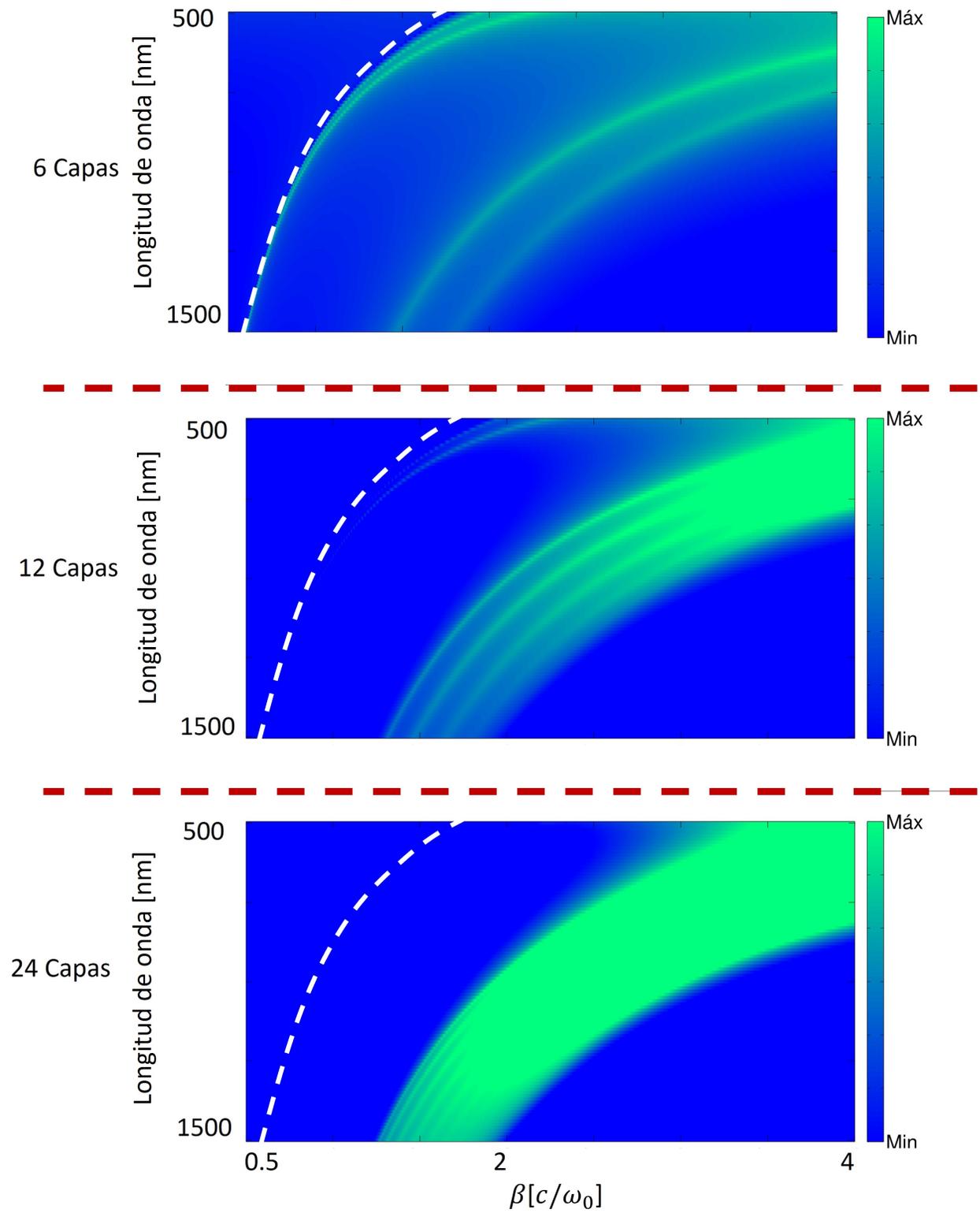


Figura 18. Relación de dispersión para un sistema multicapas de 6, 12 y 24 capas, con periodo espacial de 50 nm y $p=0.5$.

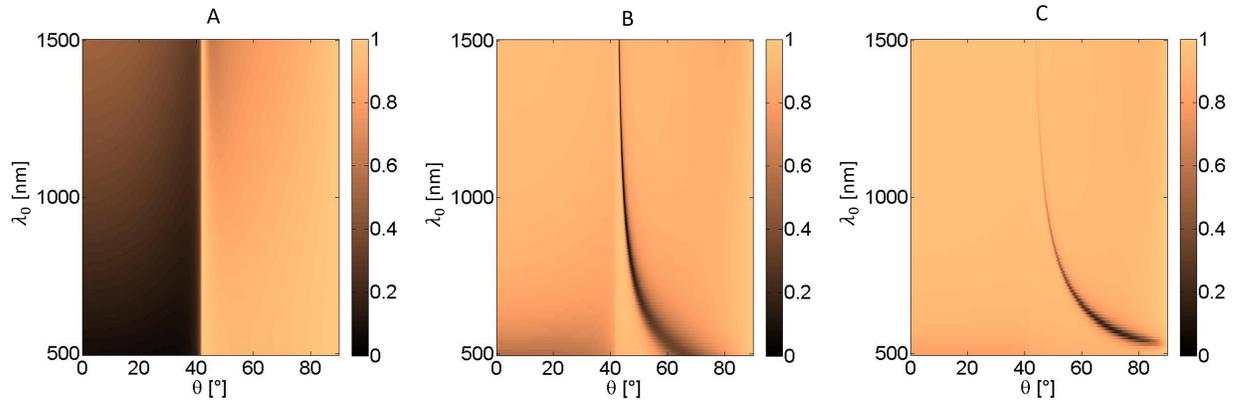


Figura 19. Mapa de reflectancias en función de la longitud de onda y del ángulo de incidencia para un sistema de multicapas de 4 capas alternando Ag con SiO₂, con fracción de llenado $p = 0.3$ y un periodo espacial de 10 nm en A, 50 nm en B y 100 nm en C. Se consideró iluminación desde un vidrio con índice de refracción de $n = 1.5$.

aire, (41.2°) el sistema puede ser poco reflectivo, pero a partir del ángulo crítico la reflectividad es mayor. Se puede ver que poco después del ángulo crítico hay una zona difuminada a longitudes de onda largas. La disminución de la reflectividad en esta zona puede asociarse a la excitación de un modo. En B vemos una curva que, de igual forma, puede asociarse con un modo. Esta curva, para longitudes de onda largas, se acerca al ángulo crítico, mientras que para longitudes de onda cortas se aleja de este ángulo, se ensancha y se atenúa. De igual forma, alrededor del ángulo crítico hay un pico de reflectancia. Para C se encontró una curva parecida a la anterior, pero más estrecha. En este caso no se alcanza a visualizar el pico de reflectancia en el ángulo crítico, posiblemente debido al grosor total del sistema multicapas que es mayor que el de los casos A y B. Nótese que estos resultados se pueden visualizar como lo que veríamos en un experimento de ATR para una película delgada metálica sobre un sustrato semi-infinito de vidrio.

Si la relación de dispersión del modo está sobre la línea de luz del aire, entonces son modos no accesibles, ya que carecen de significado físico. Si la relación de dispersión del modo está por debajo de la línea de luz del aire, es un modo propagándose por el metamaterial. Una vez que se conocen los coeficientes A_j y B_j la distribución espacial de los modos se puede calcular a partir de la expresión $|\Psi_j(x, z)|^2 = |A_j|^2 + |B_j|^2 + 2\text{Re}[A_j B_j^* e^{-2i\alpha_j(z-z_j)}]$. La pendiente de la curva de la relación de dispersión $\frac{d\omega}{dk}$ está relacionada con la velocidad de propagación en el modo. Sin embargo, es necesario mencionar que en este caso, las curvas de dispersión que estamos presentando están en función de la longitud de onda, no de la frecuencia.

Capítulo 4. Cálculos numéricos sobre la propagación de altas frecuencias espaciales en metamateriales hiperbólicos

El método de la matriz de transferencia es adecuado para abordar problemas en los que el sistema se ilumina con ondas planas y puede extenderse a haces direccionales representados como una superposición de ondas planas. Sin embargo, conlleva ciertas complicaciones al lidiar con campos más complejos que tienen componentes evanescentes. Para esto es más conveniente recurrir a otros métodos de cálculo electromagnético. En nuestro caso, se decidió continuar con el estudio de la interacción de la luz con metamateriales hiperbólicos usando el software comercial CST Suite Studio [®].

CST Suite Studio [®], es un software de análisis electromagnético en 3D basado en el método de integración finita. Este software permite resolver numéricamente problemas de interacción de ondas electromagnéticas con medios materiales, discretizando las ecuaciones de Maxwell en su forma integral y aplicándolas recursivamente sobre un conjunto de celdas unitarias que definen el volumen del medio (Weiland (1977)). La técnica de integración finita puede ser vista como una variación del método de diferencias finitas en el dominio temporal (FDTD por sus siglas en inglés) y permite resolver problemas electromagnéticos en medios dispersivos, anisótropos e incluso no-lineales (Clemens y Weiland (2001)).

En este capítulo se presentan resultados obtenidos al colocar fuentes dipolares cerca a la superficie de un metamaterial hiperbólico. Una fuente dipolar es lo más cercano que podemos tener a la idealización de una fuente puntual. El cálculo está motivado por la propiedad que tienen los materiales hiperbólicos para propagar luz con números de onda grandes, que en medios como el aire estarían asociados con ondas evanescentes o no propagantes. Esto implica que con estos materiales es posible obtener resolución más allá del límite de Rayleigh de los sistemas ópticos convencionales. Se decidió trabajar con fuentes puntuales por la diversidad de números de onda k que se tienen en su descomposición en ondas planas. De esta manera es posible excitar todos los modos soportados por el sistema multicapas, además de que se asegura la presencia de componentes que en el vacío serían evanescentes. En CST se pueden

simular las fuentes dipolares mediante una antena lineal muy pequeña, formada por un alambre en cuyos extremos se colocan dos terminales de conductor perfecto. Al circular una corriente por el alambre se emiten ondas en todas direcciones, excepto en la dirección de la corriente en el dipolo. Los experimentos numéricos de este capítulo fueron diseñados para determinar si se transmite la información de las altas frecuencias al propagarse la luz por el metamaterial hiperbólico.

4.1. Iluminación con una fuente dipolar

Consideramos un metamaterial hiperbólico rodeado de aire, que consiste de un sistema de 24 películas delgadas alternando entre Ag y SiO₂. La suma del espesor de una película de Ag con una película de SiO₂ es de 10 nm, dando como resultado un metamaterial con un espesor total de 120 nm. Cada par de capas de elementos distintos constituye un periodo espacial del sistema. Para los cálculos se consideró un sistema infinito invariante en el plano xy . Numéricamente, esto se logró considerando una ventana de cómputo de $1.5\mu\text{m} \times 1.5\mu\text{m}$, limitada por películas absorbentes perfectamente empatadas (PML, por sus siglas en inglés) en el dominio temporal. El dipolo empleado como fuente puntual se orientó a lo largo del eje y y se colocó a una distancia de 10 nm por encima de la superficie del metamaterial hiperbólico, siguiendo la geometría de la Figura (5). La distancia entre el metamaterial y la fuente puntual actúa como una especie de filtro que limita el intervalo de ondas evanescentes que se pueden acoplar al material. Por otro lado, aunque hay una distancia óptima donde habría un reforzamiento de la interacción, en esta simulación se busca acoplar el mayor número de vectores de onda al metamaterial para acceder a un mayor número de modos, más que explorar efectos de la interacción. Nótese que la mínima distancia a la que se puede colocar la fuente puntual está determinada por el tamaño de la antena dipolar.

En la Figura (20) se muestra la relación de dispersión para el sistema multicapa antes descrito, con una fracción de llenado de 0.5. Como en casos anteriores, la región verde representa la relación de dispersión del sistema, mientras que la línea punteada blanca es la línea de luz para el aire.

En la Figura (21), a la izquierda, se presentan mapas de intensidad resultantes de

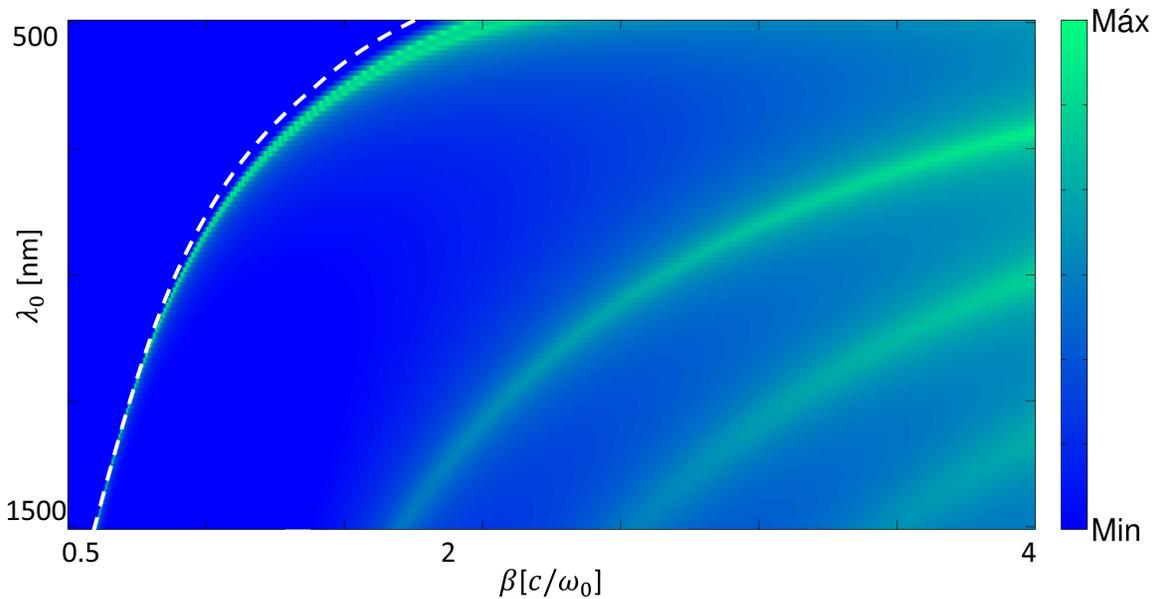


Figura 20. Relación de dispersión para un sistema multicapa de Ag/SiO₂ con 12 periodos, periodo espacial de 10 nm y fracción de llenado de 0.5. En blanco se encuentra la línea de luz para el aire.

la interacción de la radiación emitida por el dipolo con el metamaterial hiperbólico, considerando diferentes fracciones de llenado. Para facilitar la visualización, la región ocupada por el metamaterial se denota por las dos líneas negras horizontales y paralelas. El sistema se iluminó con una fuente dipolar con longitud de onda de 633 nm. A la derecha se muestran los perfiles de intensidad de la luz transmitida por el metamaterial, medidos a lo largo del eje x , 4 nm por abajo de la última interfaz ($z = -4$ nm). Con base en la Figura (9), podemos determinar el tipo de metamaterial que se tiene para cada fracción de llenado. En A tenemos una fracción de llenado $p = 0$, es decir que el sistema consta de una película de 120 nm de SiO₂ en aire. La radiación se propaga a través de la película y a la salida, su distribución espacial de intensidad tiene un ancho de 230 nm, medido a la mitad del ancho del valor máximo (FWHM, por sus siglas en inglés). En B tenemos un sistema multicapas con una fracción de llenado de $p = 0.1$, o sea con un 10% de metal. De la Figura (10)A, vemos que a la longitud de onda considerada el medio efectivo se comporta como un material ENZ con baja absorción. Vemos que, en comparación con el dieléctrico, la divergencia de la luz que pasa a través de la película de este metamaterial es menor. El FWHM del perfil de intensidad a la salida es de 30 nm y notamos que los efectos de absorción no son apreciables. Estas cualidades pueden ser explotadas para el diseño de sistemas novedosos de formación de imágenes, como se demuestra en la referencia Jacob *et al.* (2006). En C tenemos un

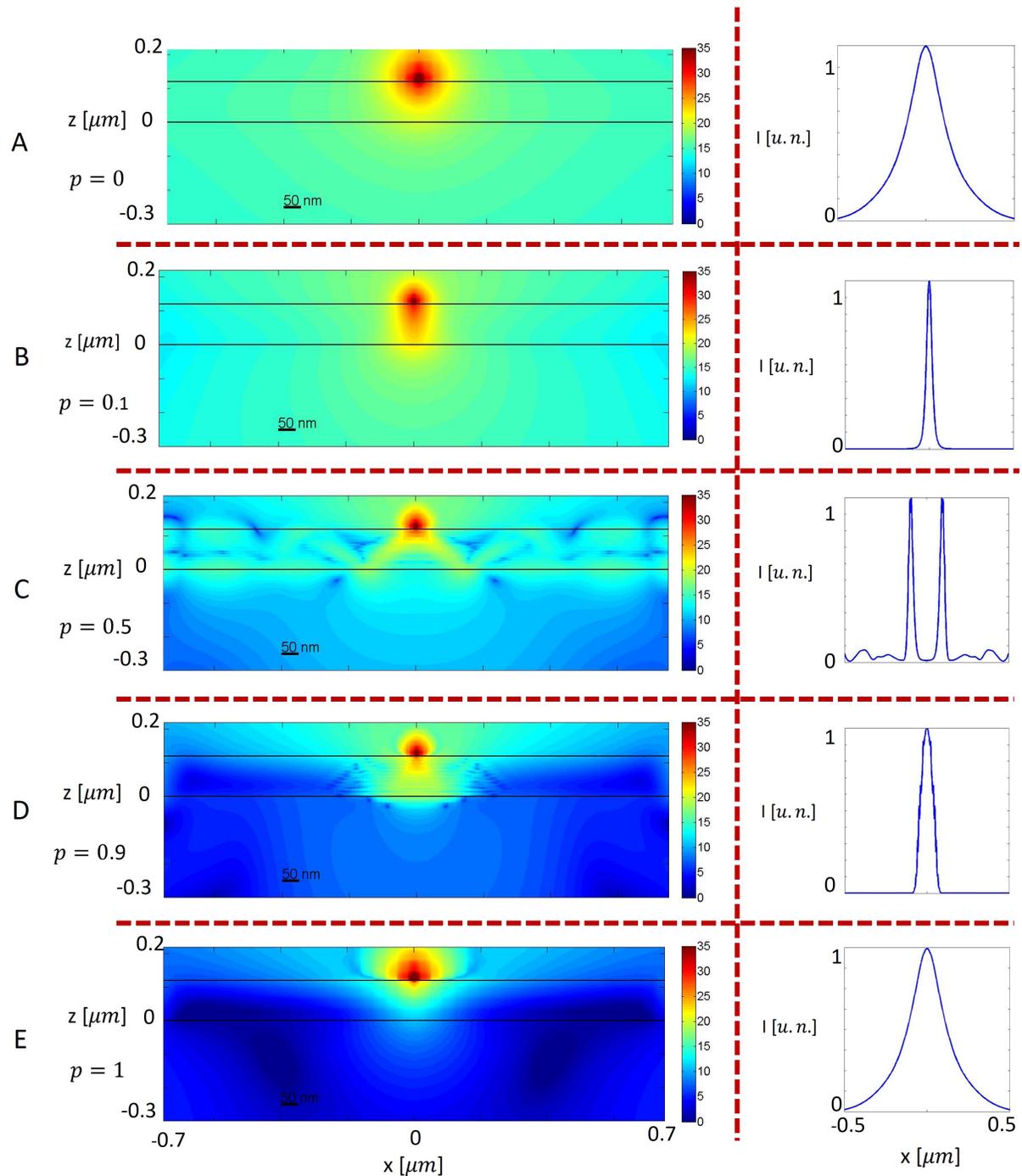


Figura 21. Propagación de la luz emitida por una fuente dipolar monocromática ($\lambda = 633 \text{ nm}$) a través de una película de metamaterial de 120 nm de espesor para diferentes fracciones de llenado. Del lado izquierdo se muestran los mapas de intensidad del campo cercano en el plano xz y del derecho las distribuciones de intensidad a la salida de la película, 4 nm por debajo de la película. A corresponde a una película de 120 nm de SiO_2 , B a un Medio ENZ, C a un MMH tipo II, y D a una película delgada de 120 nm de Ag .

sistema multicapas con fracción de llenado $p = 0.5$ que se comporta como metamaterial hiperbólico tipo II. En este caso se observa la propagación preferente en forma de cono del campo electromagnético; recordemos, del Capítulo (2), que el medio ángulo que forma el cono está descrito por la ecuación $\theta = \arctan\left(\sqrt{-\frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{zz}}}\right)$. Otro punto interesante es que los brazos que forman este cono tienen un FWHM de 30 nm. Un perfil tan estrecho es una indicación de que se está propagando información con una frecuencia espacial alta, lo cual es consecuencia de la propagación de ondas con número de onda grandes en el material. Asimismo, se observa cierta estructura del campo dentro del metamaterial, que es resultado de reflexiones múltiples y del acoplamiento a modos internos del sistema multicapa (ver Figura (20)). En D tenemos un sistema multicapa con fracción de llenado $p = 0.9$ que se comporta como un metal efectivo. Para esta fracción de llenado, la luz ya no se propaga como en el MMH tipo II, aunque el ancho de la curva de intensidad que se obtiene a la salida del metamaterial es menor que en el caso del dieléctrico. Por otro lado, se observa que la intensidad disminuye debido a las pérdidas en el material. Finalmente en E tenemos una fracción de llenado de $p = 1.0$, es decir, es una película metálica de 120 nm de Ag. El FWHM para este caso es parecido al del inciso A, siendo de 260 nm. Nuevamente se observa una reducción en la intensidad de la luz a la salida de la película, debido a la alta reflectividad y las pérdidas en el material.

4.2. Iluminación con dos fuentes dipolares

En las Figuras (21)B y C se puede notar la alta direccionalidad del campo electromagnético dentro de los metamateriales ENZ e hiperbólico. Es entonces interesante explorar su capacidad para transmitir información que permita discernir entre dos fuentes puntuales muy cercanas; es decir, fuentes separadas por una distancia inferior a media longitud de onda. Por tal motivo se decidió realizar simulaciones utilizando un par de fuentes. Consideramos entonces dos fuentes dipolares emitiendo luz con una longitud de onda de 633 nm separadas entre sí por una distancia de 100 nm y colocadas en un plano que está 10 nm por arriba de la superficie del metamaterial. Los resultados se muestran en la Figura (22). Del lado izquierdo se muestran los mapas de intensidad en el plano xz y al lado derecho se muestran los perfiles de intensidad normalizados del campo electromagnético transmitido por el metamaterial, en el plano que está 4 nm por debajo de la última interfaz (en $z = -4$ nm). Como en el

caso de iluminación con una fuente, en A tenemos una película delgada de 120 nm de SiO₂. Podemos ver que la propagación de la luz a través de la película dieléctrica ha eliminado la posibilidad de distinguir la presencia de las dos fuentes. En B tenemos un material tipo ENZ, y vemos que la información necesaria para distinguir las fuentes se ha propagado al otro lado de la película. Es decir, con base en las mediciones de campo cercano del otro lado del material, sería posible distinguir entre las dos fuentes puntuales. En C tenemos un MMH tipo II que, como ya vimos, producía una alta direccionalidad en la propagación. Vemos que, en este caso, también es posible distinguir ambas fuentes; los conos producidos por cada fuente dipolar, aunque se cruzan, no perjudican su propagación ni el ancho lateral de los perfiles de intensidad. Nuevamente se observan reflexiones dentro del MMH y parece haber más detalles en el acoplamiento a modos internos y la interferencia entre ellos. Sin embargo, esto no parece perjudicar la capacidad de transmisión de la información de alta frecuencia a través de la película. Finalmente, en D tenemos una película de 120 nm de Ag. Vemos que en este caso no es posible tener información sobre las fuentes a la salida de la película.

También es ilustrativo mostrar el comportamiento que se obtiene en el campo lejano de la película, por lo que se calcularon los perfiles de intensidad del campo electromagnético una distancia de 1900 nm (aproximadamente tres longitudes de onda) de la última superficie del MMH. Los resultados se muestran en la Figura (23). En A tenemos un material tipo ENZ, mientras que en B tenemos el MMH tipo II. Se observa que en el campo lejano no se puede decir que tenemos dos fuentes por una medición directa. A la salida del metamaterial, en el campo cercano, se tienen dos proyecciones de las fuentes originales, pero al radiar en un medio homogéneo seguirán estando a una distancia menor que el límite de difracción y no se podrán resolver ambas fuentes. Es claro que debe ser posible utilizar estas propiedades de los MMH's para aumentar la resolución de sistemas ópticos. Un esquema práctico para lograr esto se describe en Liu *et al.* (2008), mediante el uso de hiperlentes cilíndricas.

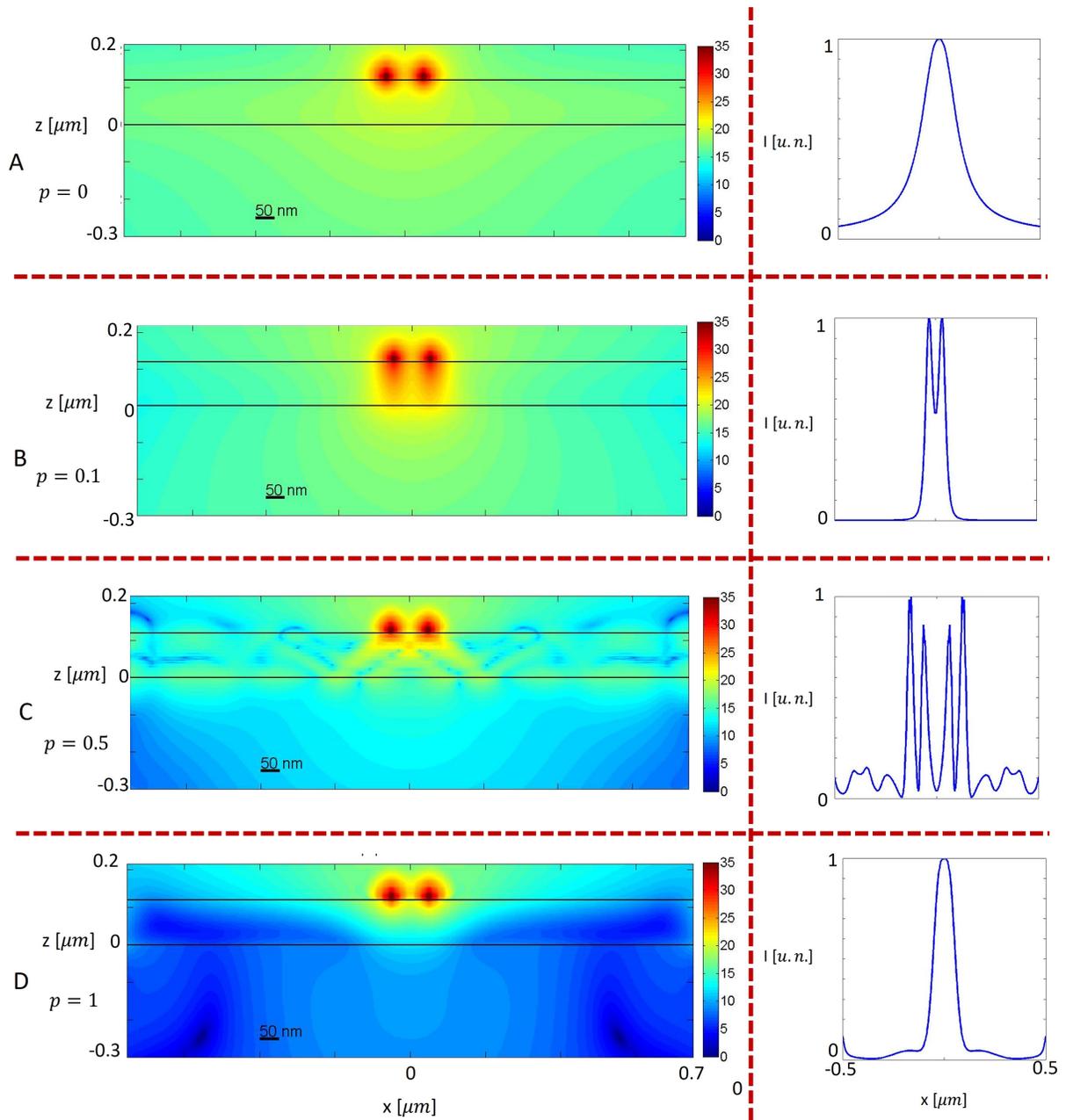


Figura 22. Propagación de la luz emitida por dos fuente dipolares monocromáticas ($\lambda = 633$ nm) separadas 100 nm entre sí a través de una película de metamaterial de 120 nm de espesor para diferentes fracciones de llenado. Del lado izquierdo se muestran los mapas de intensidad del campo cercano en el plano xz y del derecho las distribuciones de intensidad a la salida de la película, 4 nm por debajo de la película. A corresponde a una película de 120 nm de SiO_2 , B a un Medio ENZ, C a un MMH tipo II, y D a una película delgada de 120 nm de Ag.

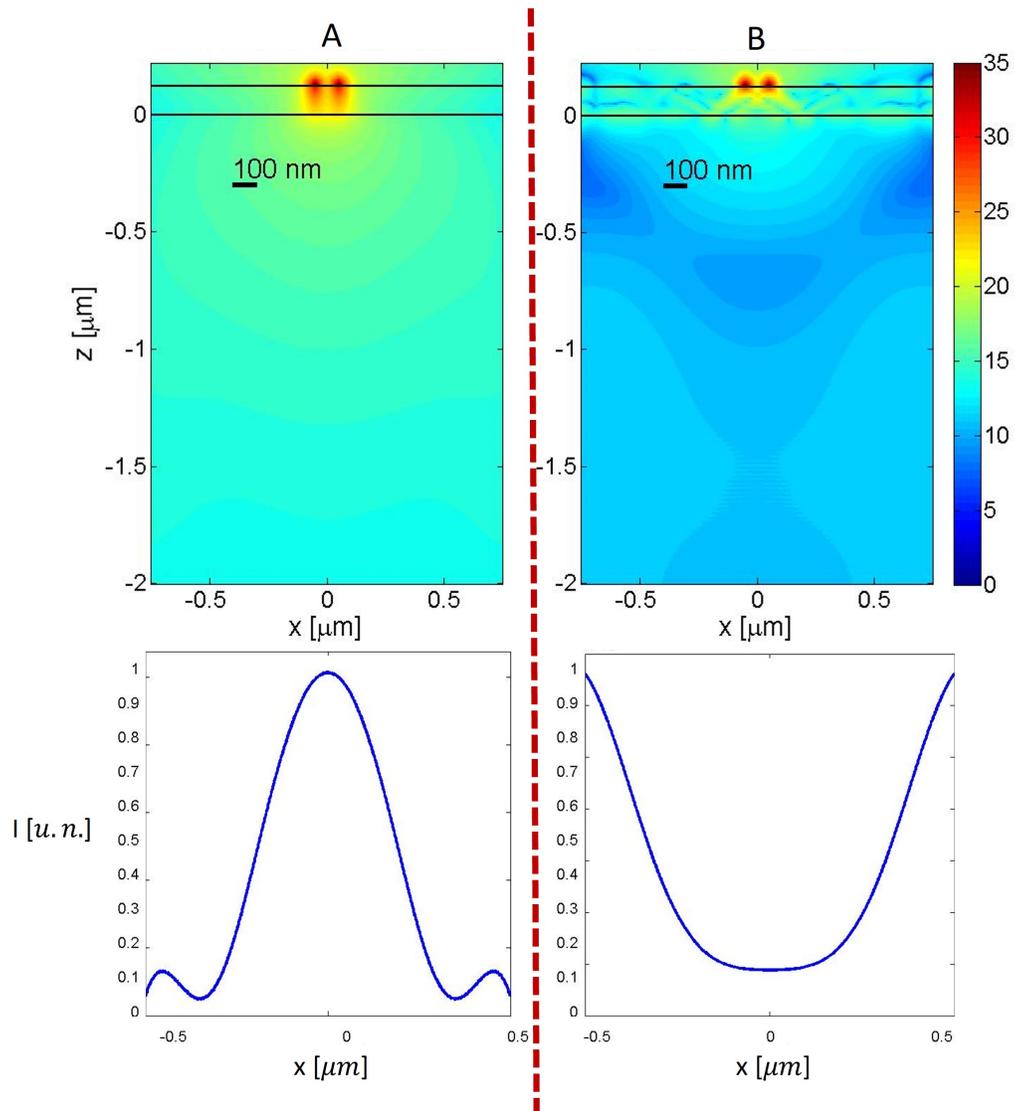


Figura 23. Intensidad en el campo lejano de las situaciones consideradas en las Figuras (22)B y C.

Capítulo 5. Resumen y conclusiones

Los metamateriales hiperbólicos reciben este nombre debido a la ecuación que define su relación de dispersión. Esta forma de la relación de dispersión es consecuencia de la diferencia de signos de las componentes que definen al tensor de permitividad eléctrica del material. Los metamateriales hiperbólicos pueden dividirse en dos categorías; tipo I o dieléctrico y tipo II o metálico, dependiendo de cual sea el signo de la componente dominante del tensor de permitividad. La principal diferencia entre ambos tipos de MMH's es que la propagación del campo electromagnético, en la dirección de su eje principal, es la de un medio efectivo dieléctrico y un medio efectivo metálico, respectivamente. El MMH tipo II es reflectivo para longitudes de onda largas y presenta mayor absorción que el MMH tipo I.

Una forma sencilla de generar artificialmente un metamaterial hiperbólico es mediante un sistema multicapas que alterne películas delgadas metálicas y dieléctricas. Para estudiar las propiedades de estos metamateriales hiperbólicos y su interacción con ondas electromagnéticas de diferentes frecuencias, se requiere tener un buen modelo de la permitividad de los metales a emplear, para lo cual se puede emplear el modelo de Drude-Lorentz.

A través de la teoría del medio efectivo y del método de la matriz de transferencia, es posible estudiar las propiedades ópticas de los metamateriales hiperbólicos formados por sistemas multicapa. La teoría del medio efectivo permite homogeneizar la respuesta del sistema multicapas en función de la constante dieléctrica de los medios que lo conforman y la fracción de llenado. De esta manera, hemos calculado las permitividades efectivas en las direcciones de los ejes principales para diferentes longitudes de onda y fracciones de llenado. Como cualquier aproximación, la teoría del medio efectivo tiene una región de validez que en este caso depende principalmente de la relación entre las dimensiones de las estructuras que componen el material con la longitud de onda, así como de los números de onda empleados para explorar el sistema. Por ello, es necesario complementar el estudio de estos metamateriales mediante el método de la matriz de transferencia, pues este método permite hallar soluciones rigurosas para la relación de dispersión y la respuesta óptica de los sistemas multicapas. Con este método es posible encontrar los modos soportados por el sistema, incluyendo las resonancias plasmónicas. Se observó que la relación de dispersión y los modos del sis-

tema dependen del factor de llenado, el periodo espacial y el número de periodos que conforman al metamaterial hiperbólico. Los principales resultados encontrados a este respecto son los siguientes. El periodo espacial determina la separación entre modos; entre más grande sea el periodo espacial, más juntos estarán los modos. La fracción de llenado determina la pendiente de los modos en el espacio $k - \omega$ y, por lo tanto, la velocidad de propagación del modo. El número de periodos determina el número de modos que soporta el sistema; a mayor número de capas hay un mayor número de modos y estos modos tienden a agruparse hasta formar un continuo, como en la Fig. (18)(c).

Al comparar los resultados obtenidos con el método riguroso y la teoría del medio efectivo para los parámetros elipsométricos, pudimos constatar que para que la teoría del medio efectivo funcione es necesario que el periodo sea pequeño comparado con la longitud de onda y que el número de periodos debe ser suficientemente grande para que el metamaterial pueda ser considerado un medio semi-infinito. Hemos visto que un periodo de 10 nm es adecuado para todo el intervalo espectral explorado, pero se obtienen buenos resultados para periodos de hasta 100 nm. Se observó que la TME funcionan bien para modelar MMH tipo I y II y medios ENZ.

Al iluminar el metamaterial hiperbólico tipo II con una fuente puntual cercana a su superficie pudimos verificar que la luz se propaga en el material en direcciones preferentes que forman un cono. Como era de esperarse, el ángulo de apertura del cono depende de la longitud de onda incidente y de la fracción de llenado. Los resultados también muestran que las ondas con números de onda grandes se pueden propagar en el material, por lo que es posible obtener información de las altas frecuencias en el campo cercano.

Los metamateriales hiperbólicos tienen un amplio espectro de aplicaciones potenciales por explorar. El presente trabajo de tesis sirve como una introducción al estudio y diseño de metamateriales hiperbólicos, al presentar un análisis accesible y amplio sobre las propiedades de estos metamateriales. Aunque los resultados se centraron en un sistema multicapa que combina plata con dióxido de silicio, representa un caso típico que puede generalizarse fácilmente a otros sistemas multicapas con películas de metal y dieléctrico intercaladas.

Literatura citada

- Alekseyev, L. V., Podolskiy, V. A., y Narimanov, E. E. (2012). Homogeneous hyperbolic systems for terahertz and far-infrared frequencies. *Hindawi Publishing Corporation Advances in OptoElectronics*, **2012**: 267564.
- Barchiesi, D. y Grosjes, T. (2014). Fitting the optical constants of gold, silver, chromium, titanium, and aluminum in the visible bandwidth. *Journal of Nanophotonics*, **8**(1): 083097.
- Barchiesi, D. y Grosjes, T. (2015). Errata: Fitting the optical constants of gold, silver, chromium, titanium and aluminum in the visible bandwidth. *Journal of Nanophotonics*, **8**(1): 089996.
- Biehs, S.-A., Tschikin, M., y Ben-Abdallah, P. (2012). Hyperbolic metamaterials as an analog of a blackbody in the near field. *Physical review letters*, **109**(10): 104301.
- Budden, K. y Chang, H. (1962). Radio waves in the ionosphere. *Physics Today*, **15**(2): 44.
- Clemens, M. y Weiland, T. (2001). Discrete electromagnetism with the finite integration technique. *Progress In Electromagnetics Research*, **32**: 65–87.
- Drachev, V. P., Podolskiy, V. A., y Kildishev, A. V. (2013). Hyperbolic metamaterials: new physics behind a classical problem. *Optics express*, **21**(12): 15048–15064.
- Eisaman, M. D., Fan, J., Migdall, A., y Polyakov, S. V. (2011). Invited review article: Single-photon sources and detectors. *Review of scientific instruments*, **82**(7): 071101.
- Ferrari, L., Wu, C., Lepage, D., Zhang, X., y Liu, Z. (2015). Hyperbolic metamaterials and their applications. *Progress in Quantum Electronics*, **40**: 1–40.
- Jacob, Z., Alekseyev, L. V., y Narimanov, E. (2006). Optical hyperlens: far-field imaging beyond the diffraction limit. *Optics express*, **14**(18): 8247–8256.
- Ji, D., Song, H., Zeng, X., Hu, H., Liu, K., Zhang, N., y Gan, Q. (2014). Broadband absorption engineering of hyperbolic metafilm patterns. *Scientific reports*, **4**(1): 1–7.
- Johnson, P. B. y Christy, R.-W. (1972). Optical constants of the noble metals. *Physical review B*, **6**(12): 4370.
- Lekner, J. (1991). Reflection and refraction by uniaxial crystals. *Journal of Physics: Condensed Matter*, **3**(32): 6121.
- Liu, Y., Bartal, G., y Zhang, X. (2008). All-angle negative refraction and imaging in a bulk medium made of metallic nanowires in the visible region. *Optics Express*, **16**(20): 15439–15448.
- Maier, S. A. et al. (2007). *Plasmonics: fundamentals and applications*, Vol. 1. Springer.
- Noginov, M., Lapine, M., Podolskiy, V., y Kivshar, Y. (2013). Focus issue: hyperbolic metamaterials. *Optics express*, **21**(12): 14895–14897.
- Palik, E. D. (1998). *Handbook of optical constants of solids*, Vol. 3. Academic press.

- Pendry, J. B., Holden, A. J., Robbins, D. J., y Stewart, W. (1999). Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, **47**(11): 2075–2084.
- Poddubny, A., Iorsh, I., Belov, P., y Kivshar, Y. (2013). Hyperbolic metamaterials. *Nature photonics*, **7**(12): 948–957.
- Rakić, A. D. (1995). Algorithm for the determination of intrinsic optical constants of metal films: application to aluminum. *Applied optics*, **34**(22): 4755–4767.
- Rakić, A. D., Djurišić, A. B., Elazar, J. M., y Majewski, M. L. (1998). Optical properties of metallic films for vertical-cavity optoelectronic devices. *Applied optics*, **37**(22): 5271–5283.
- Rytov, S. (1956). Electromagnetic properties of a finely stratified medium. *Soviet Physics JEPT*, **2**: 466–475.
- Saarinen, J. J. y Sipe, J. (2008). A green function approach to surface optics in anisotropic media. *Journal of Modern Optics*, **55**(1): 13–32.
- Shambat, G., Ellis, B., Majumdar, A., Petykiewicz, J., Mayer, M. A., Sarmiento, T., Harris, J., Haller, E. E., y Vučković, J. (2011). Ultrafast direct modulation of a single-mode photonic crystal nanocavity light-emitting diode. *Nature communications*, **2**(1): 1–6.
- Singh, G. y Marwaha, A. (2015). A review of metamaterials and its applications.
- Smith, D. R., Padilla, W. J., Vier, D., Nemat-Nasser, S. C., y Schultz, S. (2000). Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Physical review letters*, **84**(18): 4184.
- Sreekanth, K. V., Alapan, Y., ElKabbash, M., Ilker, E., Hinczewski, M., Gurkan, U. A., De Luca, A., y Strangi, G. (2016). Extreme sensitivity biosensing platform based on hyperbolic metamaterials. *Nature materials*, **15**(6): 621–627.
- Téllez-Limón, R. y Salas-Montiel, R. (2021). Nanowires integrated to optical waveguides. En: X. Peng (ed.), *Nanowires*. IntechOpen, Rijeka, capítulo 8.
- Veselago, V. G. (1967). Electrodynamics of substances with simultaneously negative and. *Usp. fiz. nauk*, **92**: 517.
- Vial, A., Grimault, A.-S., Macías, D., Barchiesi, D., y De La Chapelle, M. L. (2005). Improved analytical fit of gold dispersion: Application to the modeling of extinction spectra with a finite-difference time-domain method. *Physical Review B*, **71**(8): 085416.
- Wakamatsu, T. y Saito, K. (2007). Interpretation of attenuated-total-reflection dips observed in surface plasmon resonance. *JOSA B*, **24**(9): 2307–2313.
- Weiland, T. (1977). A discretization model for the solution of maxwell's equations for six-component fields. *Archiv Elektronik und Uebertragungstechnik*, **31**: 116–120.
- Wood, B., Pendry, J., y Tsai, D. (2006). Directed subwavelength imaging using a layered metal-dielectric system. *Physical Review B*, **74**(11): 115116.
- Zhang, X. y Liu, Z. (2008). Superlenses to overcome the diffraction limit. *Nature materials*, **7**(6): 435–441.

Anexo A: Teoría del medio efectivo

Estamos interesados en encontrar las propiedades macroscópicas de un medio que consiste en capas alternantes de materiales homogéneos. Suponemos que son capas planas alternantes de dos sustancias con permitividades y permeabilidades complejas ϵ_1, μ_1 (grosor de la capa a) y ϵ_2, μ_2 (grosor de la capa b). Queremos hallar el campo promedio de sobre el periodo $d = a + b$. Este campo promedio sólo tiene sentido bajo la condición de que para cualquier dirección arbitraria de propagación, su cambio en una distancia de orden d es suficientemente pequeño. Esto se puede escribir como

$$kd|n| \ll 1, \quad (61)$$

dónde $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ y n es el índice de refracción efectivo del medio, diferente para diferentes diecciones de propagación y para diferentes polarizaciones.

De la simetría del problema es claro que es suficiente considerar 3 casos de propagación de ondas: propagación en la dirección paralela a las capas para ambas polarizaciones y la propagación en la dirección perpendicular a estas.

Consideraremos el eje z de un sistema de coordenadas rectangular perpendicular a las capas. Las intensidades de los campos serán representadas con E y H , mientras que el promedio sobre una distancia d por una línea sobre ellos.

Propagación a lo largo del eje x con polarización transversal eléctrica

En este caso tenemos las siguientes ecuaciones para los componentes $E_y = E$, H_x y H_z :

$$\frac{\partial E}{\partial z} = ik\mu H_x, \quad (62)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -ik\mu H_z, \quad (63)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{H_z}{\partial x} = ik\epsilon E, \quad (64)$$

donde ϵ y μ son funciones periódicas de z , tomando alternativamente valores de ϵ_1, μ_1 y ϵ_2, μ_2 . Como se busca una solución periódica en z con periodo d , de la forma:

$$E = U(z)e^{-iknx}, \quad (65)$$

$$H_x = V(z)e^{-iknx}, \quad (66)$$

$$H_z = W(z)e^{-iknx}. \quad (67)$$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores tenemos

$$\frac{dU}{dz} = ik\mu W, \quad (68)$$

$$nU = \mu W, \quad (69)$$

$$\frac{dV}{dz} + iknW = ik\epsilon U. \quad (70)$$

Las soluciones exactas para z en el primer medio, con $\alpha_1 = k\sqrt{n_1^2 - n^2}$ y $n_1^2 = \epsilon_1\mu_1$ son

$$U = A \cos(\alpha_1 z) + B \sin(\alpha_1 z), \quad (71)$$

$$V = -\frac{\alpha_1}{ik\mu_1} (A \sin(\alpha_1 z) - B \cos(\alpha_1 z)), \quad (72)$$

$$W = \frac{n}{\mu_1} (A \cos(\alpha_1 z) + B \sin(\alpha_1 z)). \quad (73)$$

Por otro lado, las soluciones exactas para z en el segundo medio, con $\alpha_2 = k\sqrt{n_2^2 - n^2}$ y $n_2^2 = \epsilon_2\mu_2$ son

$$U = C \cos(\alpha_2 z) + D \sin(\alpha_2 z), \quad (74)$$

$$V = -\frac{\alpha_2}{ik\mu_2} (C \sin(\alpha_2 z) - D \cos(\alpha_2 z)), \quad (75)$$

$$W = \frac{n}{\mu_2} (C \cos(\alpha_2 z) + D \sin(\alpha_2 z)). \quad (76)$$

Para estas soluciones se deben de imponer 4 condiciones de continuidad y periodi-

cidad de E y H_x , es decir, U y V con respecto a z :

$$U(+0) = U(-0), U(a-0) = U(-b+0), V(+0) = V(-0), V(a-0) = (-b+0). \quad (77)$$

Por una simple sustitución podemos hallar para A , B , C y D las siguientes cuatro ecuaciones homogéneas.

$$C = A, \quad (78)$$

$$C \cos(\alpha_2 b) - D \sin(\alpha_2 b) = A \cos(\alpha_1 a) + B \sin(\alpha_1 a), \quad (79)$$

$$D = xB, \quad (80)$$

$$C \sin(\alpha_2 b) + D \cos(\alpha_2 b) = -x(A \sin(\alpha_1 a) - B \cos(\alpha_1 a)), \quad (81)$$

donde,

$$x = \frac{\mu_2 \alpha_1}{\mu_1 \alpha_2}. \quad (82)$$

Igualando a cero el sistema de ecuaciones anterior obtenemos la siguiente relación de dispersión, determinando n en función de k :

$$(1 + x^2) \sin(\alpha_1 a) \sin(\alpha_2 b) + 2x(1 - \cos(\alpha_1 a) \cos(\alpha_2 b)) = 0. \quad (83)$$

Es posible reducir esta ecuación a la siguiente combinación de ecuaciones (véase Rytov (1956))

$$\frac{\tan(\frac{\alpha_2 b}{2})}{\tan(\frac{\alpha_1 a}{2})} = \begin{cases} -x \\ -\frac{1}{x} \end{cases}. \quad (84)$$

Podemos calcular los valores promedios sobre un periodo d de U , V y W . Si en

adición usamos los valores de las razones $A : B : C : D$ obtenemos las siguientes expresiones para las razones de \bar{U} y \bar{V} respecto a \bar{W}

$$\frac{\bar{U}}{\bar{W}} = \frac{\bar{E}}{\bar{H}_z} = \frac{\mu_1 \alpha_2^2 - \mu_2 \alpha_1^2}{n(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)}, \quad (85)$$

$$\frac{\bar{V}}{\bar{W}} = \frac{\bar{H}_x}{\bar{H}_z} = \frac{\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}}{k^2 \left[\frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\alpha_2^2} \right]} P, \quad (86)$$

donde,

$$P = \frac{U(a-0) - U(+0)}{V(a-0) - V(+0)} = -\frac{ik\mu_1}{\alpha_1} \frac{1}{\tan(\alpha_2 b/2)} \frac{x \tan(\alpha_1 a/2) + \tan(\alpha_2 b/2)}{x \tan(\alpha_2 b/2) + \tan(\alpha_1 a/2)}. \quad (87)$$

De acuerdo a la Ec. (84), P es cero o infinito. En el primer caso la estructura del campo es que E y H_z están distribuidos en cada capa simétricamente sobre su centro, es decir, que son funciones pares. Sin embargo, su componente longitudinal H_x es impar, de tal forma que su campo promedio es una onda transversal ($\bar{H}_x = 0$) con intensidades \bar{E} y \bar{H}_z .

Para el segundo caso la solución es completamente lo contrario, H_x es par mientras que E y H_z son impares con respecto al centro de las capas. Por lo tanto, el campo promedio sólo tiene la componente \bar{H}_x . Es fácil ver que ese caso no es compatible con la condición de cambio lentamente variable sobre una distancia d ya que ondas con $\lambda > d/2$ se extinguirán en la dirección x en una distancia de orden $d/2\pi$.

Regresando al primer caso, para que las intensidades promedios de los campos $E_y = \bar{U}e^{iknx}$ y $H_z = \bar{W}e^{-iknx}$ pueden satisfacer las ecuaciones de Maxwell

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -ik\mu^e H_z, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -ik\varepsilon^e E_y, \quad (88)$$

es necesario definir la permitividad y permeabilidad efectiva ε^e y μ^e a través de las ecuaciones

$$n = \sqrt{\varepsilon^e \mu^e}, \quad \frac{E_y}{H_z} = \sqrt{\frac{\mu^e}{\varepsilon^e}} = \frac{\bar{U}}{\bar{W}}. \quad (89)$$

Usando las razones promedio obtenidas con anterioridad podemos llegar a

$$\varepsilon^e = n^2 \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\mu_1 \alpha_2^2 - \mu_2 \alpha_1^2}, \quad (90)$$

$$\mu^e = \frac{\mu_1 \alpha_2^2 - \mu_2 \alpha_1^2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}, \quad (91)$$

donde n es la raíz de la ecuación

$$\frac{\alpha_2}{\mu_2} \tan\left(\frac{\alpha_2 b}{2}\right) = -\frac{\alpha_1}{\mu_1} \tan\left(\frac{\alpha_1 a}{2}\right). \quad (92)$$

Propagación a lo largo del eje x con polarización transversal magnética

El campo en esta situación tiene las componentes E_x , E_z y $H_y = H$, con ecuaciones:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = -ik\varepsilon E_x, \quad (93)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -ik\varepsilon E_z, \quad (94)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -ik\mu H, \quad (95)$$

y las condiciones de continuidad y periodicidad en las fronteras están impuestas sobre H y E_x . Evidentemente podemos obtener las soluciones intercambiando los campos con el caso estudiado anteriormente. Aquí tenemos también dos posibles comportamientos de los campos. Una de ellas no satisface la Ec. (61). La otra nos lleva a un campo promedio que forma una onda transversal con intensidades $E_z = \bar{E}_z$ y $H_y = \bar{H}$.

Este campo promedio satisface las ecuaciones de Maxwell

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = ik\varepsilon^e E_z, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = ik\mu^e H_y, \quad (96)$$

donde ε^e y μ^e están dados por las fórmulas

$$\varepsilon^e = \frac{\varepsilon_1 \alpha_2^2 - \varepsilon_2 \alpha_1^2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}, \quad (97)$$

$$\mu^e = n^2 \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\varepsilon_1 \alpha_2^2 - \varepsilon_2 \alpha_1^2}. \quad (98)$$

Los valores que puede tomar n están determinados por:

$$\frac{\alpha_2}{\varepsilon_2} \tan\left(\frac{\alpha_2 b}{2}\right) = -\frac{\alpha_1}{\varepsilon_1} \tan\left(\frac{\alpha_1 a}{2}\right). \quad (99)$$

Ambas ecuaciones trascendentales en el caso general no permiten expresar n de una forma más explícita. Por lo tanto, la condición de la Ec. (61) tampoco se puede expresar de una forma más explícita. Es importante enfatizar que esta condición no implica que los cambios en los campos a través de las capas son pequeños.

Podemos derivar fórmulas para situaciones con ondas suficientemente largas, para las cuales $|\alpha_1 a|$ y $|\alpha_2 b| \ll 1$. Si reemplazamos las tangentes por sus argumentos tenemos

$$n = \sqrt{\varepsilon^e \mu^e}, \quad \varepsilon^e = \bar{\varepsilon}, \quad \mu^e = \bar{\mu}, \quad (100)$$

donde

$$\bar{\varepsilon} = \frac{a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2}{a + b}, \quad (101)$$

$$\frac{1}{\bar{\mu}} = \frac{\bar{1}}{\mu} = \frac{\frac{a}{\mu_1} + \frac{b}{\mu_2}}{a + b}. \quad (102)$$

Para una evaluación más precisa tomamos en cuenta los términos cúbicos en la expansión de las tangentes y se encuentra que los términos correctores son del orden de $k^2 d^2$. Por ejemplo, las expresiones para ε^e y μ^e en el caso de la polarización transversal eléctrica con las correcciones mencionadas quedan como

$$\varepsilon^e = \bar{\varepsilon} \left[1 + \frac{k^2 a^2 b^2}{12 d^2} \frac{\bar{\mu} \bar{\mu}}{\mu_1 \mu_2} (n_1^2 - n_2^2) \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\bar{\varepsilon}} \right], \quad (103)$$

$$\mu^e = \bar{\mu} \left[1 + \frac{k^2 a^2 b^2}{12 d^2} \frac{\bar{\mu} \bar{\mu}^2}{\mu_1^2 \mu_2^2} (n_1^2 - n_2^2) (\mu_1 - \mu_2) \right]. \quad (104)$$

Podemos obtener la expresión para la polarización transversal magnética intercam-

biando ε y μ .

Propagación a través del eje z

En esta situación los campos $E_x = E$ y $H_y = H$ satisfacen las ecuaciones

$$\frac{dE}{dz} = -ik\mu H, \quad (105)$$

$$\frac{dH}{dz} = -ik\varepsilon E. \quad (106)$$

Cuyas soluciones tienen la forma de

$$E = U(z)e^{-iknz}, \quad (107)$$

$$H = V(z)e^{-iknz}, \quad (108)$$

donde U y V son funciones periódicas de z con periodo d . Si integráramos el sistema de ecuaciones y comparamos con las soluciones mencionadas obtendríamos para el primer medio

$$U = e^{iknz} (Ae^{i\alpha_1 z} + Be^{-i\alpha_1 z}), \quad (109)$$

$$V = -\frac{\alpha_1}{k\mu_1} e^{iknz} (Ae^{i\alpha_1 z} - Be^{-i\alpha_1 z}), \quad (110)$$

$$U = e^{iknz} (Ce^{i\alpha_2 z} + De^{-i\alpha_2 z}), \quad (111)$$

$$V = -\frac{\alpha_2}{k\mu_2} e^{iknz} (Ce^{i\alpha_2 z} - De^{-i\alpha_2 z}), \quad (112)$$

donde $\alpha_1 = kn_1 = k\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ y $\alpha_2 = kn_2 = k\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$.

Imponiendo en U y V las condiciones de continuidad y periodicidad, que tienen la misma forma que en los casos anteriores, obtenemos cuatro ecuaciones homogéneas para las constantes de integración.

$$C + D = A + D, \quad (113)$$

$$e^{-iknb} (Ce^{-i\alpha_2 b} + De^{i\alpha_2 b}) = e^{ikna} (Ae^{i\alpha_1 a} + Be^{-i\alpha_1 a}), \quad (114)$$

$$C - D = x(A - B), \quad (115)$$

$$e^{-iknb} (Ce^{-i\alpha_2 b} - De^{i\alpha_2 b}) = xe^{ikna} (Ae^{i\alpha_1 a} - Be^{-i\alpha_1 a}), \quad (116)$$

donde

$$x = \frac{\alpha_1 \mu_2}{\alpha_2 \mu_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_1}}. \quad (117)$$

Igualando a cero el determinante del sistema anterior obtenemos la relación de dispersión

$$\cos(knd) = \cos(\alpha_1 a) \cos(\alpha_2 b) - \frac{1+x^2}{2x} \sin(\alpha_1 a) \sin(\alpha_2 b). \quad (118)$$

En contraste a los casos considerados anteriormente, cuando la propagación ocurre en la dirección perpendicular a las capas la condición de la Ec. (61) se cumple sólo cuando las ondas son tan grandes que $|\alpha_1 a|$ y $|\alpha_2 b| \ll 1$. Si mantenemos los términos de orden no mayor que el primer orden de k al calcular los valores promedios sobre un periodo, obtenemos la razón \bar{U} respecto a \bar{V}

$$\frac{\bar{U}}{\bar{V}} = \frac{\bar{E}}{\bar{H}} = \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{\bar{\varepsilon}}} \left[1 + \frac{ikab}{4d} \frac{\mu_1 \varepsilon_2 - \mu_2 \varepsilon_1}{\sqrt{\bar{\varepsilon} \bar{\mu}}} \right]. \quad (119)$$

Si queremos que las ecuaciones de Maxwell

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -ik\mu^e H_y, \quad (120)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -ik\varepsilon^e E_x, \quad (121)$$

se cumplan para los campos promedios $E_x = \bar{E}$ y $H_y = \bar{H}$ debemos determinar ε^e y μ^e de las condiciones

$$n = \sqrt{\varepsilon^e \mu^e}, \quad (122)$$

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu^e}{\varepsilon^e}} = \frac{\bar{U}}{\bar{V}}, \quad (123)$$

De donde

$$\varepsilon^e = n \frac{\bar{V}}{\bar{U}}, \quad (124)$$

$$\mu^e = n \frac{\bar{U}}{\bar{V}}. \quad (125)$$

Sustituyendo podemos obtener

$$\varepsilon^e = \bar{\varepsilon} \left[1 - \frac{ikab}{4d} \frac{\mu_1 \varepsilon_2 - \mu_2 \varepsilon_1}{\sqrt{\bar{\varepsilon} \bar{\mu}}} \right], \quad (126)$$

$$\mu^e = \bar{\mu} \left[1 + \frac{ikab}{4d} \frac{\mu_1 \varepsilon_2 - \mu_2 \varepsilon_1}{\sqrt{\bar{\varepsilon} \bar{\mu}}} \right]. \quad (127)$$

Longitudes de onda largas

Sea kd tan pequeño que los términos de corrección puedan ser despreciados de las Ecs. (103), (104), (126), (127), las condiciones correspondientes toman la forma de

$$\frac{\bar{\varepsilon} \bar{\varepsilon}}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \frac{a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1} = P, \quad (128)$$

$$\frac{\bar{\mu} \bar{\mu}}{\mu_1 \mu_2} = \frac{a\mu_1 + b\mu_2}{a\mu_2 + b\mu_1} = Q, \quad (129)$$

$$\frac{kab}{d} = R. \quad (130)$$

Para ondas propagándose paralelamente a las capas con polarización transversal eléctrica tenemos

$$\frac{R^2}{12} \left| Q(n_1^2 - n_2^2) \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\bar{\varepsilon}} \right| \ll 1, \quad (131)$$

$$\frac{R^2}{12} \left| Q(n_1^2 - n_2^2) \frac{\mu_1 - \mu_2}{\bar{\mu}} \right| \ll 1. \quad (132)$$

Para ondas propagándose paralelamente a las capas con polarización transversal magnética tenemos

$$\frac{R^2}{12} \left| P(n_1^2 - n_2^2) \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\bar{\varepsilon}} \right| \ll 1, \quad (133)$$

$$\frac{R^2}{12} \left| P(n_1^2 - n_2^2) \frac{\mu_1 - \mu_2}{\bar{\mu}} \right| \ll 1. \quad (134)$$

Mientras que para propagación perpendicular a las capas tenemos

$$\frac{R}{4} \left| \frac{\mu_1 \varepsilon_2 - \mu_2 \varepsilon_1}{\sqrt{\tilde{\varepsilon} \tilde{\mu}}} \right| \ll 1. \quad (135)$$

Considerando estas condiciones podemos obtener

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -ik\tilde{\mu}H_z, \quad (136)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -ik\tilde{\varepsilon}E_y, \quad (137)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = ik\tilde{\varepsilon}E_z, \quad (138)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = ik\tilde{\mu}H_y, \quad (139)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -ik\tilde{\mu}H_y, \quad (140)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -ik\tilde{\varepsilon}E_x. \quad (141)$$

Estas ecuaciones pertenecen a un sistema de ecuaciones de Maxwell para un medio cuyas permitividades y permeabilidades están descritas por un único tensor degenerado con ejes principales coincidentes y con valores principales

$$\varepsilon_1^e = \varepsilon_2^e = \frac{a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2}{a + b}, \quad (142)$$

$$\varepsilon_3^e = \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (a + b)}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1}, \quad (143)$$

$$\mu_1^e = \mu_2^e = \frac{a\mu_1 + b\mu_2}{a + b}, \quad (144)$$

$$\mu_3^e = \tilde{\mu} = \frac{\mu_1 \mu_2 (a + b)}{a\mu_2 + b\mu_1}. \quad (145)$$

Por lo tanto, en el rango óptico, el medio a consideración tiene las propiedades de un cristal uniaxial con ejes ópticos perpendiculares a las capas.