

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Doctorado en Ciencias
en Oceanografía Física**

**Topología del flujo debido a vórtices helicoidales
coaxiales no simétricos y del flujo detrás de una
turbina giratoria**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Doctor en Ciencias

Presenta:

Alejandro Camilo Espinosa Ramírez

Ensenada, Baja California, México

2022

Tesis defendida por

Alejandro Camilo Espinosa Ramírez

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes
Director de tesis

Dr. Alejandro Francisco Parés Sierra

Dr. Miguel José Costa de Almeida Tenreiro

Dr. Sergio Cuevas García



Dra. María Tereza Cavazos Pérez
Coordinadora del Posgrado en Oceanografía Física

Dr. Pedro Negrete Regagnon
Director de Estudios de Posgrado

Copyright © 2022, Todos los Derechos Reservados, CICESE

Prohibida su reproducción parcial o total sin la autorización por escrito del CICESE

Resumen de la tesis que presenta Alejandro Camilo Espinosa Ramírez como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Oceanografía Física.

Topología del flujo debido a vórtices helicoidales coaxiales no simétricos y del flujo detrás de una turbina giratoria

Resumen aprobado por:

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes
Director de tesis

Los vórtices helicoidales son uno de los fenómenos fundamentales en la estela de turbinas eólicas. Su interacción, inestabilidad y efecto sobre la energía cinética en la estela aún están bajo investigación activa. Esta tesis trata de los vórtices helicoidales en tres casos de realismo creciente: vórtices paralelos, hélices infinitas y hélices formadas y desintegradas en la estela de la turbina. En el primer tema, estudiamos la topología de flujo inducida por tres y cuatro vórtices puntuales. Estos vórtices generan un flujo estacionario cuando se localizan en los vértices de un polígono regular; de lo contrario, generan un flujo periódico con regiones caóticas. Cuantificamos el mar caótico y el intercambio de masa para tres y cuatro vórtices puntuales y encontramos que el mar caótico crece linealmente a medida que los polígonos del vórtice son perturbados y se alejan de su configuración estacionaria. También estudiamos la evolución de tres y cuatro vórtices de Rankine localizados inicialmente en los vértices de un polígono regular y encontramos que se fusionan o interactúan elásticamente (a diferencia de dos vórtices, que también pueden intercambiar masa sin fusionarse). La topología de flujo de los vórtices que interactúan elásticamente es similar a la de los vórtices puntuales con la misma configuración geométrica; sin embargo, los vórtices de Rankine generan un flujo no estacionario debido a que su interacción los deforma con el tiempo. En el segundo tema, estudiamos el movimiento y el flujo inducido por dos vórtices helicoidales coaxiales e iguales. Determinamos la estabilidad de vórtices simétricos, que se mueven de manera estacionaria, en función de su grosor y paso. Los vórtices asimétricos muestran cuatro tipos de movimiento periódico que, a su vez, determinan la topología del flujo que inducen. En el tercer y último tema, estudiamos la estela detrás de una turbina eólica de dos aspas, caracterizada por vórtices helicoidales. Hay fenómenos en la estela, actualmente no comprendidos del todo, que afectan al rendimiento de los parques eólicos. Uno de ellos es la inestabilidad de los vórtices que desprenden las aspas. Encontramos que el inicio de la inestabilidad depende de la intensidad de la turbulencia corriente arriba. Además, la eficiencia de una segunda turbina en la estela depende de su distancia al punto donde los vórtices se vuelven inestables.

Palabras clave: Vórtice helicoidal, advección caótica, turbina eólica, estabilidad.

Abstract of the thesis presented by Alejandro Camilo Espinosa Ramírez as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Physical Oceanography .

Flow topology in asymmetric coaxial helical vortices and in the wake of wind turbines

Abstract approved by:

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes
Thesis Director

Helical vortices are one of the fundamental phenomena in the wake of wind turbines. Their interaction, instability, and effect on the kinetic energy in the wake are still under active research. This thesis deals with helical vortices in three cases of increasing realism: parallel vortices, infinite helices, and helices formed and disintegrated in the wake of the turbine. In the first topic, we studied the flow topology induced by three and four point vortices. These vortices generate a steady flow when they are located on the vertices of a regular polygon; otherwise, they generate a periodic flow with chaotic regions. We quantified the chaotic sea and the mass exchange for three and four point vortices and found that the chaotic sea grows linearly as the vortex polygons are perturbed away from their steady configuration. We also studied the evolution of three and four Rankine vortices initially located on the vertices of a regular polygon and found that they either merge or interact elastically (unlike two vortices, which also can exchange mass without merging). The flow topology of elastically-interacting vortices is similar to that of point vortices with the same geometric configuration; however, Rankine vortices generate unsteady flow because their interaction deforms them over time. In the second topic, we studied the motion and flow induced by two equal coaxial helical vortices. We determined the stability of symmetric, steadily-moving vortices as a function of their thickness and pitch. Asymmetric vortices display four types of periodic motion which in turn determine the flow topology they induce. In the third and final topic, we studied the wake behind a two-bladed wind turbine, characterized by helical vortices. There are wake phenomena that affect wind farms' performance that are not currently fully understood. One of them is the instability of the vortices shed by the blades. We found that the instability onset depends on the upstream turbulence intensity. Furthermore, the efficiency of a second turbine in the wake depends on its distance to the point where the vortices become unstable.

Keywords: Helical vortex, chaotic advection, wind turbine, stability.

Dedicatoria

A mi madre Sara

Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California por brindar el espacio y las condiciones idóneas para realizar esta investigación.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de doctorado. No. de becario: 298220. No. de CVU: 544051.

A mi asesor Oscar Velasco por los conocimientos que me ha transmitido, la paciencia que me ha tenido y su comprensión en situaciones ajenas a la academia.

A los miembros de mi comité de tesis Dr. Alejandro Parés, Dr. Miguel Tenreiro y Dr. Sergio Cuevas, pues este trabajo creció y mejoró gracias a sus preguntas y sugerencias.

Al personal académico de Oceanografía Física. Los profesores siempre lo dieron todo por dejarme un poco de su conocimiento en clases, conferencias y hasta en una plática en el pasillo.

Al Dr. José Ochoa por haber estado siempre al pendiente de este trabajo y siempre dispuesto a ayudarme a entender algún concepto o idea compleja.

A mi madre y hermanos por su apoyo, ya que aún a la distancia siempre estuvieron al pendiente de que todo fuera bien y listos por si necesitábamos platicar.

A mis compañeros del posgrado, generaciones 2017 y 2018. Siempre es difícil llegar, o regresar, a una ciudad pero mis compañeros hicieron que me readaptara rápidamente.

A mi esposa Azucena porque no importa lo fácil o difícil que sea el día a día, siempre está y estará allí para no perder los estribos.

A mi hija Minerva. Porque aunque aún ella no lo sabe, me ayuda mucho a levantarme cada día con ganas de aprender y transmitir lo que hago.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	ix
Lista de tablas	xi

Capítulo 1. Introducción general

Capítulo 2. Vortex polygons: dynamics and associated particle advection

2.1. Abstract	5
2.2. Introduction	5
2.3. Point-vortex polygons	7
2.4. Rankine-vortex polygons	14
2.4.1. Dynamics	14
2.4.2. Advection in the elastic-interaction regime	16
2.4.3. Advection in the merger regime	17
2.5. Conclusions	21

Capítulo 3. Helical vortex pairs: Motion and associated particle advection

3.1. Abstract	23
3.2. Introduction	23
3.3. Methodology	26
3.4. Results	30
3.4.1. Motion of the vortices	30
3.4.2. Flow topology	38
3.5. Conclusions	44

Capítulo 4. Topología del flujo detrás de una turbina eólica

4.1. Resumen	46
4.2. Introducción	46
4.3. Metodología	50
4.4. Resultados	56
4.4.1. Topología del flujo en la estela	56
4.4.2. Movimiento de leapfrogging en la estela	62
4.4.3. Eficiencia energética de los diferentes arreglos de turbinas	63
4.5. Conclusiones	66

Tabla de contenido (continuación)

Capítulo 5. Discusiones generales

Literatura citada	73
--------------------------------	-----------

Lista de figuras

Figura	Página
1. Trombas marinas observadas en el Golfo de México.	1
2. Parametros geométricos de un vórtice helicoidal	2
3. Flow topology of point-vortex polygons.	8
4. Point vortices located at the vertices of polygons of radius R	9
5. Lobes produced by a point-vortex trigon with a perturbation of $\epsilon = 0.07$. .	10
6. Lobe areas for point-vortex trigons and tetragons as a function of the perturbation ϵ	11
7. Poincaré sections of particle trajectories and manifolds for a point-vortex tetragon with perturbation $\epsilon = 0.28$	11
8. Measuring the area of the chaotic sea produced by perturbed point-vortex trigons.	13
9. Area of the chaotic sea for point-vortex trigons and tetragons as a function of the perturbation ϵ	13
10. Chaotic tangles for Rankine-vortex polygons computed at $t = 0$	16
11. Unstable manifolds for Rankine-vortex trigons in the elastic interaction regime.	18
12. A Rankine-vortex trigon of relative size $\alpha = 2.57$ after merger.	19
13. Area of filaments expelled by Rankine-vortex polygons as a function of relative size α	19
14. FTLE field in the initial condition for a Rankine-vortex trigon of relative size $\alpha = 2.5$	21
15. Parameters that define a helical vortex.	24
16. Helical vortices displayed during one period of their motion.	29
17. Vortices motion in the phase space (ψ, ρ)	32
18. Stability of two steady helical vortex pair.	32
19. Vortices motion in the helical plane.	33
20. Vortices motion in the three-dimensional space for regimes 1 and 2.	35
21. Vortices motion in the three-dimensional space for regimes 3 and 4.	36
22. Properties of the vortex motion.	37
23. Flow topologies induced by two symmetric helical vortex pair.	38
24. Phase portraits and Poincaré maps for experiments 1 to 3.	39
25. Same as figure 24, but for experiments 4a (a-d) and 4b (e-h).	40
26. Manifolds in the helical plane of (a) a stable case, and (b) an unstable case. .	41

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
27. Poincaré maps in three-dimensional space.	43
28. Unstable manifold in the three-dimensional space for two vortices with pitch $\tau = 0.4$, radius $\alpha = 0.1$, and asymmetry $\epsilon = 0.15$	44
29. Esquemas de la velocidad inducida por un remolino y vórtices desprendidos en la estela.	52
30. Aspa NREL 5MW dividida en secciones.	52
31. Esquemas de vista superior de arreglos de turbinas.	53
32. Distribución del viento turbulento antes de interactuar con la turbina. . . .	54
33. Isocontornos de vorticidad en la estela.	57
34. FTLE en la estela de una turbina eólica para los arreglos principales. . . .	58
35. Velocidad axial de las partículas pasivas.	58
36. Topología del flujo debido a dos vórtices helicoidales.	59
37. FTLE para diferentes arreglos de turbinas con $\lambda = 8.25$	60
38. Rapidez de viento en la dirección axial detrás de turbinas con $\lambda = 8.25$. . .	61
39. Cortes meridionales de magnitud de la vorticidad en la estela de una turbina sometida a un viento con 10% de turbulencia.	63
40. Vorticidad en la estela: Promedio de 272 fotogramas equivalentes a 33.2 segundos.	63
41. Potencia extraída por una turbina en la estela de una primera.	65
42. Tres diferentes tipos de perturbación a los vórtices puntuales en un triángulo equilátero.	68
43. Diagrama de fase para tres vórtices puntuales de misma circulación. . . .	69
44. Tres diferentes tipos de perturbación a los vórtices puntuales en un cuadrado.	70
45. Diagrama de fase para cuatro vórtices puntuales de misma circulación. . .	70
46. Evolución de tres vórtices circulares de vorticidad no uniforme	71
47. Topología del flujo en la estela de una turbina eólica de tres aspas.	72

Lista de tablas

Tabla	Página
1. Parameters used to study the flow topology.	39
2. Valores constantes independientemente de la simulación realizada.	53
3. Potencia de una turbina eólica de velocidad adimensional $\lambda = 8.25$ bajo diferentes arreglos o flujos de viento.	64

Capítulo 1. Introducción general

Los vórtices helicoidales ocurren en fenómenos naturales como torbellinos o trombas marinas (como las que se muestran en la figura 1), la estela de abejorros (Engels *et al.*, 2018), el flujo en un desagüe y en la estela de turbinas eólicas (ver, por ejemplo, Massouh & Dobrev, 2007; Wood, 2020). En cuanto a la generación de energía eléctrica utilizando turbinas eólicas, en las últimas décadas ha sido evidente la necesidad del estudio de la estela y los vórtices en ella para mantener una eficiencia alta en parques eólicos, ya que la estela de una turbina afecta a las demás (como muestra Hasager *et al.*, 2017).



Figura 1. Trombas marinas observadas en el Golfo de México. Tomada de <https://knue.com/typical-2020-6-waterspouts-seen-swirling-at-once-off-gulf-of-mexico/>

Los parámetros que caracterizan a los vórtices helicoidales son su radio R , su radio de sección transversal α , distribución de vorticidad ω y la longitud L de sus espiras. Cualquier cambio geométrico en un vórtice helicoidal se puede expresar por los números adimensionales $\tau = L/(2\pi R)$ y $\alpha = \alpha/R$. La pendiente τ define la elongación de la línea central del vórtice. Si τ tiende a infinito, los vórtices son tubos cilíndricos rectos. Si τ tiende a cero, las espiras del remolino se ensamblan. El radio adimensional α describe el grosor del remolino, conforme más grande, el área de sección transversal del

remolino es mayor. Las soluciones analíticas para el movimiento de los vórtices y la advección debida a ellos son válidas para remolinos delgados $\alpha \lesssim 0.3$, (por ejemplo las expresiones para el movimiento de vórtices helicoidales y la topología del flujo que generan Velasco Fuentes, 2018a,b). Para vórtices más gruesos se debe recurrir a modelos que permiten la deformación y fusión de los remolinos helicoidales, como se realizó en Espinosa Ramírez (2015) para estudiar el movimiento y fusión de dos vórtices gruesos.

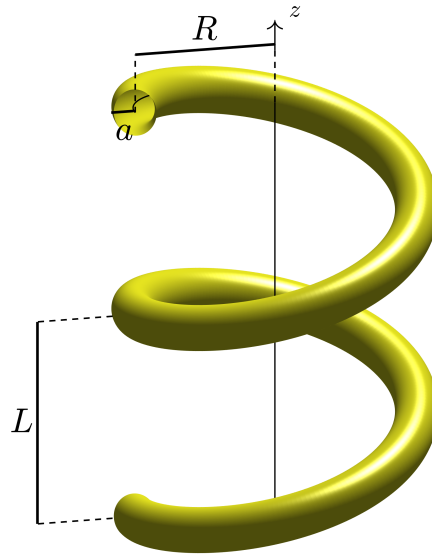


Figura 2. Parámetros geométricos de un vórtice helicoidal.

En el caso del flujo en la estela de una turbina eólica, los parámetros adimensionales dependen de las características de la turbina y del flujo en el que se encuentra inmersa. Si se aumenta la velocidad angular de la turbina, con respecto a la rapidez del viento, τ disminuye. Por otro lado, el radio adimensional α de los vórtices desprendidos depende de las propiedades difusivas del fluido.

En esta tesis se estudia la estela en tres casos de realismo creciente:

1. Hélices de pendiente τ infinita (tubos cilíndricos rectos), capítulo 2.
2. Hélices infinitas, capítulo 3.
3. Hélices desprendidas por una turbina eólica que se desintegran corriente abajo, capítulo 4.

En el artículo científico Espinosa Ramírez & Velasco Fuentes (2021), correspondiente al capítulo 2, estudiamos el movimiento y advección de fluido debido a vórtices cilíndricos de sección nula (vórtices puntuales) y de sección finita y vorticidad uniforme (vórtices de Rankine). La evolución de los N vórtices puntuales y el flujo que generan se obtiene resolviendo numéricamente $2N$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de la teoría potencial de fluidos. Cuantificamos la agitación de fluido debido a tres y cuatro vórtices puntuales al perturbarlos geométricamente. Obtuvimos que el mar caótico crece linealmente conforme se aumenta la perturbación y que el intercambio de masa entre regiones crece cuadráticamente.

En este mismo capítulo estudiamos a tres y cuatro vórtices de Rankine con el método numérico de dinámica de contornos (Zabusky *et al.*, 1979). Con este modelo, los vórtices presentan vorticidad uniforme y un contorno deformable. La topología del flujo de vórtices de Rankine pequeños es similar a la inducida por el mismo número de vórtices puntuales en la misma configuración geométrica. Sin embargo, los vórtices de Rankine generan un flujo con regiones caóticas. Además, el proceso de filamentación sin fusión, no existe para el número de vórtices analizados, a diferencia de dos vórtices de Rankine (Velasco Fuentes, 2001, 2005). Nuestro trabajo continúa el estudio de la interacción y flujo que generan vórtices uniformes y abre la posibilidad de estudiar a los polígonos en condiciones más realistas como son un perfil de vorticidad no uniforme o considerando un fluido viscoso.

En el capítulo 3, estudiamos el movimiento y topología del flujo debido a dos vórtices helicoidales de vorticidad uniforme, iguales y coaxiales que, a diferencia de estudios previos (Velasco Fuentes, 2018b), no son simétricos. Para estudiarlos utilizamos la aproximación de Rosenhead-Moore de la ley de Biot-Savart. La asimetría genera un movimiento periódico previamente estudiado computacionalmente y en el laboratorio (Sarmast *et al.*, 2014; Posa *et al.*, 2021; Quaranta *et al.*, 2019) y que tiene relevancia en la estela de turbinas eólicas. Primero determinamos la estabilidad de los vórtices al variar su grosor y paso: los vórtices de paso grande son estables y los vórtices de paso pequeño son inestables, el grosor de los remolinos afecta poco a su estabilidad. Después, dividimos al movimiento de los vórtices helicoidales en cuatro tipos

de movimiento. El tipo de movimiento depende de la estabilidad de los vórtices y de la intensidad de la asimetría entre ellos. Finalmente, estudiamos la topología del flujo que inducen los remolinos. Encontramos que la topología del flujo es altamente influenciada por la estabilidad de los remolinos. Si son inestables, domina la agitación en la vecindad de los remolinos.

En el capítulo 4, estudiamos a la estela detrás de una turbina eólica de eje horizontal. Utilizamos un modelo numérico basado en la misma aproximación de la ley de Biot-Savart, antes mencionada. El modelo simula a la vorticidad alrededor de aspas de turbinas de dimensiones reales, el desprendimiento de las líneas de vorticidad y su interacción con el viento. Al desprenderse, las líneas de vorticidad forman vórtices helicoidales en la estela de la turbina. Al igual que en trabajos previos (Lignarolo *et al.*, 2015; Quaranta *et al.*, 2019) encontramos una inestabilidad en estos vórtices. Nuestro aporte más importante en esta sección, es haber encontrado que la distancia a la que se presenta esta inestabilidad disminuye con la intensidad de la turbulencia en el viento. Además de que al colocar una segunda turbina, en la estela de la primera, su eficiencia depende de la distancia relativa al lugar donde los vórtices se inestabilizan. La eficiencia es mayor si colocamos a la segunda turbina después de que los vórtices se desestabilizaron. Esta distancia es variable y depende de la intensidad de la perturbación en la estela.

Capítulo 2. Vortex polygons: dynamics and associated particle advection

This chapter has been published in *Physics of Fluids* (Espinosa Ramírez & Velasco Fuentes, 2021).

2.1. Abstract

This paper presents a numerical study of the advection of passive and active particles by three and four equal vortices located on the vertices of a polygon. The vortices, which have either singular or uniform vorticity distribution, are immersed in an incompressible, unbounded, and inviscid fluid. Under these conditions, a regular polygon rotates steadily if it consists of point vortices, and unsteadily if it consists of Rankine vortices. When the point-vortex polygon is perturbed by making it slightly irregular, the flow becomes time periodic. In this case, dynamical-systems methods, such as lobe dynamics and Poincaré maps, serve to compute the fluid exchanged between different regions and the area of the chaotic sea. Both quantities are found to grow with the amplitude of the perturbation: the former does it in a weakly nonlinear way, the latter in a piecewise linear manner. The Rankine-vortex polygons always produce a time-aperiodic flow which depends on their relative size. Small vortices deform slightly and produce particle advection which is analogous to the perturbed point-vortex case; large vortices deform strongly and merge to form a single one. The critical distance for merger is found to be $\delta/a \approx 3.6$ and $\delta/a \approx 3.2$ for three and four vortices, respectively, where a is the vortex radius, and δ is the side length of the polygon. In both cases the vortices expel the largest amount of vortical fluid at their critical distance, thus producing the least efficient merger.

2.2. Introduction

Polygonal arrangements of vortices have been observed in nature and the laboratory at various scales of time and space: in superfluid helium (Yarmchuk *et al.*, 1979), around the center of hurricanes (Kossin & Schubert, 2004), in the atmosphere of Jupiter (Grassi *et al.*, 2018), and in a rotating water tank (Di Labbio *et al.*, 2020).

Long before these observations, the dynamics of vortex polygons had received considerable attention. It is well known that a regular polygon of N point vortices of equal strength Γ rotates uniformly without change of shape and is stable if $N < 7$ (Thomson, 1883; Havelock, 1931). Thus, when considering only the relative positions of the point vortices, the system is steady. Under the same consideration, an irregular polygon of point vortices moves periodically if $N = 3, 4$ (Aref, 1979; Aref & Pomphrey, 1982). There exist also steady polygons of finite-area vortices: they have uniform vorticity within specific contours that have only been computed numerically, and their stability depends on both the number of vortices and their size (Dritschel, 1985; Dhanak, 1992). The nonlinear evolution of large vortices has revealed the merger of three and four vortices (Dritschel, 1986), a phenomenon also observed in polygons of vortices with smooth vorticity distribution (Swaminathan *et al.*, 2016).

The study of the motion of fluid particles in the velocity field of interacting vortices has occupied a prominent place in the literature on *chaotic advection* since the inception of the term (Aref, 2002). The periodicity of perturbed point-vortex trigons and tetragons makes them ideal models for the study of particle advection with the classic tools of dynamical-systems theory: Poincaré maps, invariant manifolds, Melnikov function, etc. (see, e.g. Holmes, 1990). The case of three point vortices has been studied by Kuznetsov & Zaslavsky (1998, 2000), the case of four point vortices by Boatto & Pierrehumbert (1999).

Since a finite-vortex polygon moves steadily only when the vortices have a very specific shape, substituting these with circular vortices (of the same area and circulation) amounts to perturbing the steady state. The behavior of these Rankine-vortex polygons, and the associated particle advection, can be qualitatively deduced from previous studies of pairs of finite-area vortices (Velasco Fuentes, 2001, 2005).

Small vortices rotate with an almost constant angular velocity while undergoing little deformation. Consequently, the velocity field can always be decomposed into a steady mean flow plus a weak, time-aperiodic perturbation. The methods for the study of particle advection in these type of flows are straightforward extensions of those used in the time-periodic case (see Velasco Fuentes, 2001, 2005, for examples, and references therein for the theory). We therefore expect particle trajectories to be regular in most of the flow domain; and to be chaotic in a multiply-connected region,

formed by the thin to moderately thick stripes that replace the separatrices of the unperturbed flow.

In contrast, sufficiently large vortices undergo merger, which is characterized by a phase of large deformation when even the angular velocity of the system is not well defined. Consequently, it is not possible to find a decomposition (steady flow plus time dependent perturbation) that is valid for all time. The methods alluded to in the previous paragraph may still be applied, but they present some practical difficulties. Methods that do not require a dominant mean flow to exist, or to be known, like the finite time Lyapunov exponent (FTLE), may then be applied (see, e.g., Haller, 2001; Shadden *et al.*, 2005).

The purpose of this study is to find the regions of the parameter space where the behaviors described above occur (that is to say, the critical distance for the merger of Rankine-vortex trigons and tetragons) and to quantify the advection of passive and active (vortical) particles in the different regimes.

2.3. Point-vortex polygons

The evolution of M point vortices is governed by $2N$ ordinary differential equations (Kirchhoff, 1883):

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \gamma_j \frac{y_i - y_j}{r_{ij}^2} \quad (1)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \gamma_j \frac{x_i - x_j}{r_{ij}^2} \quad (2)$$

where r_{ij} is the distance between vortices i and j ; and, for the purposes of this study, all point vortices have the same circulation: $\gamma_j = \Gamma$ for all j . We integrated these equations numerically with a fourth-order Runge-Kutta scheme.

A set of N point vortices located on the vertices of a regular polygon rotates with constant angular velocity ($\Omega = \Gamma(N-1)/4\pi R^2$, where R is the radius of the polygon)

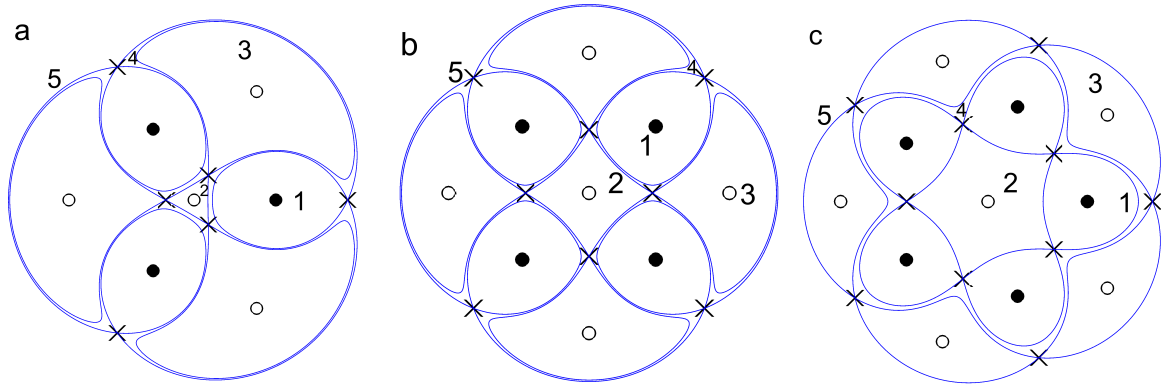


Figura 3. Flow topology of point-vortex polygons: (a) trigon, (b) tetragon, (c) pentagon. Filled black dots represent the point vortices, empty black dots represent elliptic points, and crosses represent hyperbolic points. The numbers identify different flow regions, as explained in the text.

while preserving their relative positions. In a reference system that rotates with the polygon the flow is steady and its topology is characterized by the following elements (see figure 3): an elliptic stagnation point at the center of the polygon; one N -gon of pseudo-elliptic points corresponding to the point-vortices (they are called pseudo-elliptic because the velocity is infinite at the location of the vortices but these singularities are surrounded by closed streamlines); one N -gon of elliptic stagnation points, sometimes called ghost vortices, corresponding to recirculation zones; and two N -gons of hyperbolic points with their corresponding separatrices. These curves are streamlines that start at one hyperbolic point and end at the same or a different hyperbolic point; in the language of dynamical systems, they are the superposition of a stable and an unstable manifold (see, e.g., Rom-Kedar *et al.*, 1990). The separatrices divide the flow domain into $2N + 3$ zones: N regions associated to the point vortices, all labeled 1 in Fig. 3; region 2 surrounds the center of the polygon; N regions corresponding to the ghost vortices, all labeled 3; region 4 separates type-1 regions from type-2 and type-3 regions; and region 5 is the exterior flow, extending from the vicinity of the polygon to infinity.

Important differences in the flow geometry arise as the number of vortices changes. For $N = 3, 4$ the boundaries of all type-1 and type-3 regions are *homoclinic* separatrices: each one ends at the hyperbolic stagnation point where it starts. For $N > 4$ all separatrices are *heteroclinic*: they start and end at different points. As a consequence, when $N = 3, 4$ the type-1 regions form a disjoint set, whereas for $N > 4$ each region 1 touches two regions of the same type at one point. We will later invoke this topological

difference to explain the behavior of finite area vortices.

We perturb the point-vortex system by distorting the polygon. So, in the initial condition, the trigon becomes an isosceles triangle instead of an equilateral one, and the tetragon becomes a rectangle instead of a square, as illustrated in Fig. 4. In both cases the ensuing motion of the point vortices is time-periodic (Aref, 1979; Aref & Pomphrey, 1982), with a period that grows with the perturbation $\epsilon = d/R$, where d measures the displacement of the vortices from their equilibrium positions.

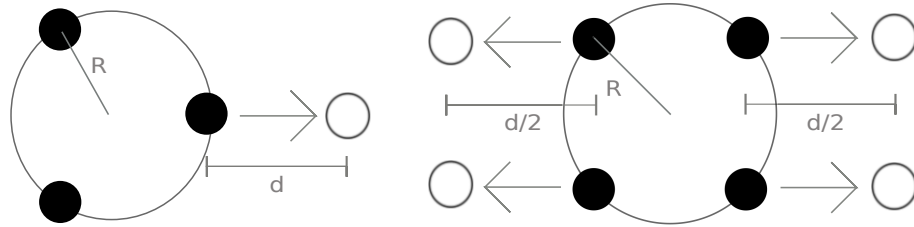


Figure 4. Point vortices located at the vertices of polygons of radius R . Filled dots represent the steady configuration (regular polygons), empty dots represent the perturbed configuration (irregular polygons), the distance d measures the deformation of the polygon.

The periodicity of the vortex motion enables us to use a Poincaré map—the map of the particle position $[x(t_0), y(t_0)]$ to its position one period later $[x(t_0 + T), y(t_0 + T)]$, where t_0 is an arbitrary time and T is the period—for the study of particle motion in the velocity field of perturbed point-vortex trigons and tetragons. We constructed the map by sampling the position of a particle (relative to the polygon) every time the point vortices return to their initial configuration (in general, the vortices do not return to their initial positions but this is of no consequence: only relative positions play a role in the dynamics).

If the perturbation is small, the hyperbolic stagnation points of the steady case *survive* in the form of hyperbolic fixed points of the Poincaré map; similarly, the elliptic and pseudo-elliptic points survive as elliptic fixed points of the Poincaré map. The separatrices, on the other hand, break-up: the stable and unstable manifolds no longer coincide with each other but they transversally intersect at an infinite number of points. We determined this entangled curves as follows. To obtain the unstable manifold, we placed a short line crossing the stagnation point of the instantaneous flow along the stretching direction and numerically computed its evolution until time nT ,

where n is a small integer and T is the period of the vortex motion. Since the flow is time periodic, this curve represents the manifold at any time $t = mT$, where m is an integer. The stable manifold can be obtained in a similar way, but the initial line must be placed along the squeezing direction and the integration must be done backwards in time until time $-nT$. We, however, did not compute the stable manifold directly: because of space and time symmetries of the flow the stable manifold is a mirror image of the unstable manifold.

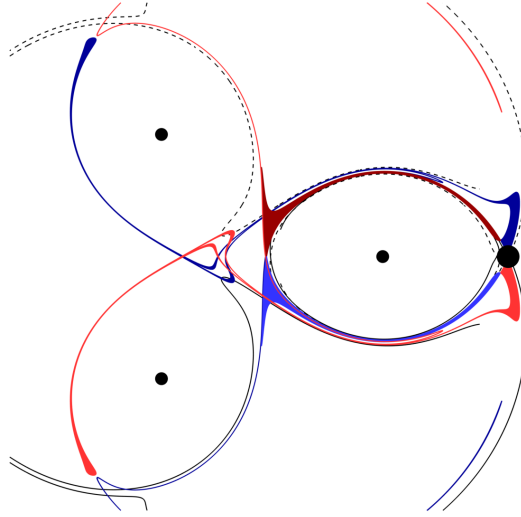


Figure 5. Lobes produced by a point-vortex trigon with a perturbation of $\epsilon = 0.07$. Fluid in the dark red lobe moves out (to the light red lobe), fluid in the dark blue lobe moves in (to the light blue lobe),

These intersecting manifolds constitute a (numerical) demonstration that particle trajectories are chaotic in some regions of the plane, and can be used to study mass transport between different regions through lobe dynamics (Rom-Kedar *et al.*, 1990). A lobe is the area bounded by segments of the stable and unstable manifolds which are in turn limited by two successive primary intersections of those curves (see Samelson & Wiggins, 2006, for a complete description of the method). Once a lobe is identified, we compute its area by numerically evaluating the integrals $A = \int x dy = - \int y dx$, where (x, y) are the coordinates of particles located along the lobe's boundary. We applied lobe dynamics to quantify the exchange of mass between a vortex (type-1 region) and its surroundings (region 4) as a function of the perturbation $\epsilon = d/R$. Figure 5 shows the lobes for a point-vortex trigon with perturbation $\epsilon = 0.07$. These represent

the fluid exchanged between the vortex and its surroundings in one iteration of the Poincaré map, as follows: the fluid located in the dark red region moves to the light red region, thus escaping the vortex; the fluid located in the dark blue region moves to the light blue region, thus entering the vortex.

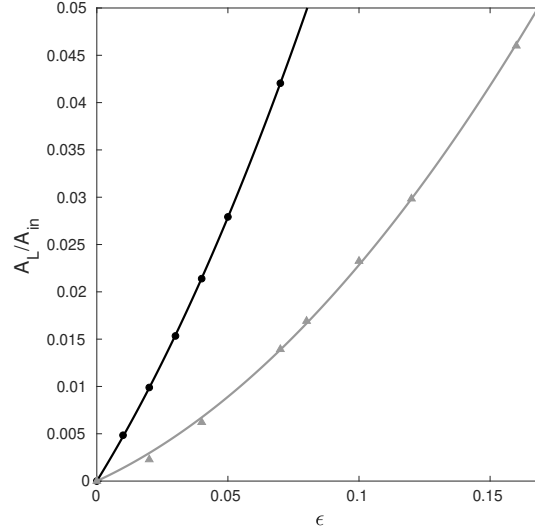


Figura 6. Lobe areas for point-vortex trigons and tetragons as a function of the perturbation ϵ . A_L is the area of the lobe, and A_{in} is the area of the unperturbed region associated with a point vortex (the type-1 regions of Fig. 3). The markers show direct calculations using the chaotic tangle (black circles for trigons; gray triangles for tetragons); the lines represent quadratic regressions obtained with the condition that they must pass through the origin.

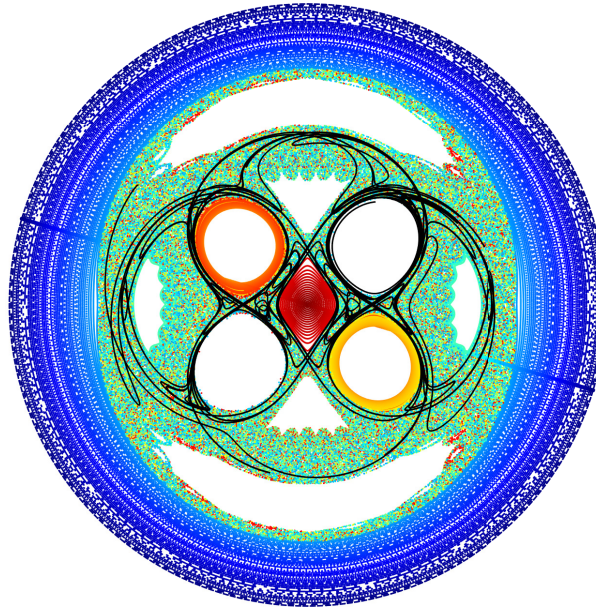


Figura 7. Poincaré sections of particle trajectories and manifolds for a point-vortex tetragon with perturbation $\epsilon = 0.28$. The chaotic tangle is formed by one stable and one unstable manifolds (each represented by a black line) and is contained in the chaotic sea (represented mostly by green dots).

Figure 6 shows the lobe area as a function of the perturbation for both trigons and tetragons. The dimensionless lobe area is well approximated by second order polynomials: $A = 2.15\epsilon^2 + 0.45\epsilon$ and $A = \epsilon^2 + 0.13\epsilon$, for trigons and tetragons, respectively, where $A = A_L/A_{in}$ with A_L the lobe area and A_{in} the area of region 1 in the unperturbed case (see Fig. 3). Note, however, that for the range of values of ϵ used here, the dominant term is the linear one. We did not compute lobe areas for larger perturbations because the manifolds soon become very complex, making it challenging to select the correct curves that define one lobe. For example, figure 7 shows, with a black line, the manifolds of a perturbed point-vortex tetragon for $\epsilon = 0.28$.

In order to determine the area occupied by the chaotic sea we constructed Poincaré sections by computing long orbits ($\sim 1000T$) of a small number of particles (~ 100). Figure 8a shows an example of such a section, where the color of every orbit depends on its position along the line of initial conditions visible on the upper left quadrant. It is easy to identify particles with different qualitative behaviors: blue particles are in the exterior flow, red particles are trapped by one of the vortices, green particles belong to a chain of stability islands not present in the steady flow, and the yellow particles occupy the chaotic sea. Note that the green particles, which were initially located inside the elongated island on the top, appear to jump to the island on the bottom, where no particles were initially located; the red particles, on the other hand, are confined to the region surrounding one of the vortices. The reason is that the former rotate around a periodic orbit of the Poincaré map, whereas the latter rotate around a fixed point of the map. Each of the five white areas in figure 8a surrounds a fixed point of the map; like the red area, they are separated from the chaotic sea by a permanent, impenetrable boundary (a KAM curve, see, e.g., Rom-Kedar *et al.*, 1990). Taking into account the ergodic property of chaotic orbits, the fact that we are only interested in the largest chaotic sea, and the flow geometry of vortex polygons, we identify a chaotic orbit by the distribution of its radial coordinate r . Indeed, figure 8a shows that r is distributed within narrow ranges for blue, green and red particles, while it is in the range $0-2R$ for yellow particles. Once we identified these chaotic orbits, we plotted them in order to generate a two-color image, like the white-gray figure 8b, and computed the area of the chaotic sea as the fraction of colored pixels in the flow region represented in the image.

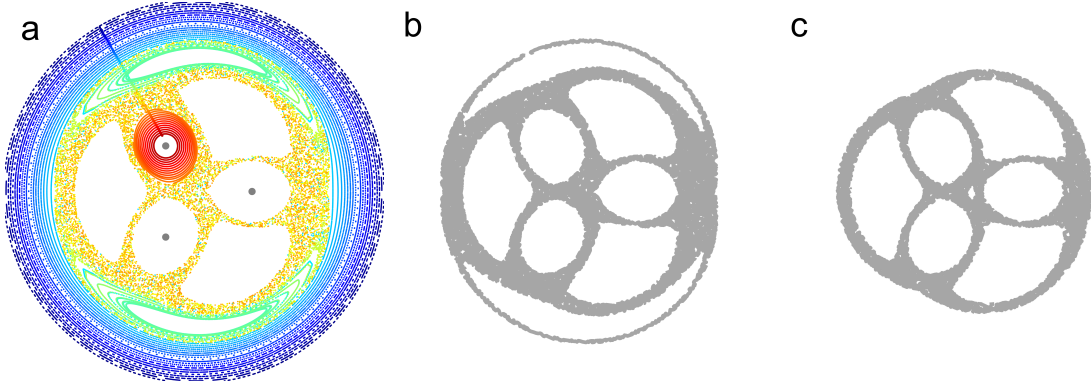


Figure 8. Measuring the area of the chaotic sea produced by perturbed point-vortex trigons. (a) Positions of 60 passive particles at each of 1000 iterations of the Poincaré map for $\epsilon = 0.14$; the color of the dots indicates the particle's initial position along the line on the top left quadrant; the gray dots represent the point vortices, (b) particles in the chaotic sea for $\epsilon = 0.14$, (c) particles in the chaotic sea for $\epsilon = 0.1$.

Figure 9 shows the area of the chaotic sea as a function of the perturbation of point-vortex trigons and tetragons. We found that it grows linearly with the perturbation until a jump occurs, when the largest sea merges with a smaller sea associated with the outer stability islands (compare frames b and c in figure 8); after the jump the linear growth continues at a different rate. This behavior will occur wherever the boundaries of two different chaotic seas meet, for example in point-vortex pentagons and hexagons. We do not expect to see a similar phenomenon for larger N because of the instability of the vortex motion.

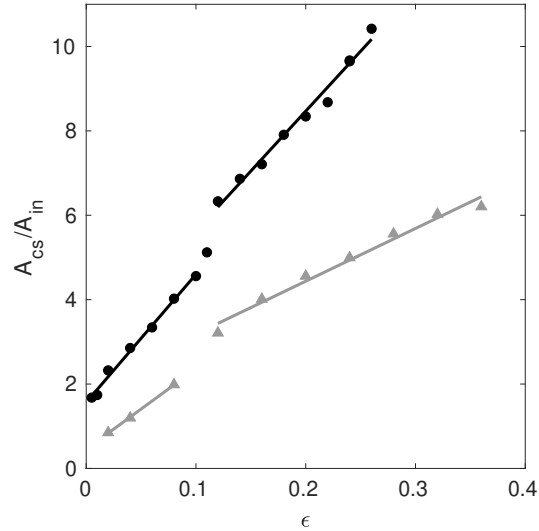


Figure 9. Area of the chaotic sea for point-vortex trigons and tetragons as a function of the perturbation ϵ . A_{cs} is the area of the chaotic sea, and A_{in} is the area of the unperturbed region associated with a point vortex (the type-1 regions of Fig. 3). The markers show direct calculations using the Poincaré map (black circles for trigons; gray triangles for tetragons); the lines represent linear regressions.

2.4. Rankine-vortex polygons

2.4.1. Dynamics

The equation of motion for the two-dimensional, unforced flow of an incompressible, inviscid fluid can be written in the following form:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \omega = 0, \quad (3)$$

where $\vec{u} = (u, v)$ is the velocity on the (x, y) plane and $\omega = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$ is the component of the vorticity in the direction perpendicular to this plane. In the problems we study here the vorticity is zero everywhere, except for a finite number of patches of uniform vorticity; therefore, the contour dynamics method is ideally suited to compute the flow evolution. The equation of motion then becomes (Zabusky *et al.*, 1979):

$$\frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_j \Delta\omega_j \oint \log |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j| \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial s_j} ds_j, \quad (4)$$

where $\mathbf{x}_j$ and $\mathbf{x}_k$ are the vector positions along the j -th and k -th contours, respectively; $\Delta\omega_j$ is the vorticity jump across the j -th contour; and s_j is the arc length along the j -th contour.

To evaluate the integral in equation (4), we represented the contours with a finite number of nodes; to solve the differential equation we used a fourth-order Runge-Kutta scheme with fixed time step: $dt = T_e/1000$, where T_e is the eddy turnover time (in what follows times will be given in units of T_e). The vortex contours were initially represented with 100 – 120 nodes, but this number increased with the length of the contour as the flow evolved. Since the fluid is inviscid and incompressible, the vorticity and area inside a contour are constant even though some initial conditions lead to strong deformation of the vortex patch; so we used the area to monitor the quality of the integration.

Rankine-vortex polygons are not a steady solution of the Euler equations: they continuously change their shape as they rotate, with a slightly varying angular velocity, around their common center. Furthermore, the vortices never recover their original circular shape, so the flow is not periodic either. Hence, a Rankine-vortex polygon may be

viewed as an aperiodic perturbation of a point-vortex polygon —the perturbation parameter being a/R , where a is the radius of the vortices and R is the radius of the polygon. We, however, found it more convenient to report our results as a function of the size of the polygon relative to the size of the vortices: $\alpha = \delta/a$, where $\delta = 2R \sin(\pi/N)$ is the length of the polygon side. Note that δ is also the distance between the centers of two adjacent vortices; thus α is directly comparable to the intercentroid distance used in the well-known case of two vortices (Velasco Fuentes, 2005).

Our analysis centers on the evolution of regular Rankine-vortex trigons and tetragons as a function of α . To validate and compare the new results, we also analyzed the case of two vortices (*digon*) and, in order to verify one hypothesis, we did some computations for pentagons.

It is well known that two Rankine vortices display three types of interaction: merger, exchange and elastic (see, e.g., Velasco Fuentes, 2005). We found that Rankine-vortex trigons and tetragons either merge or interact elastically, but no initial condition leads to a mere exchange of mass. The critical distance that separates the merger and elastic interaction regimes is $\alpha \approx 3.6$ for trigons and $\alpha \approx 3.2$ for tetragons.

We claim that there is no exchange regime for vortex N -gons with $N = 3, 4$ because the flow topology of these is qualitatively different from all other cases ($N = 2, 5, 6, \dots$). Figure 3, which shows the steady flow geometry of point-vortex polygons, also represents the initial flow geometry of Rankine vortices of small and intermediate sizes. When $N = 3, 4$ (Fig. 3a,b) there are no contact points between adjacent type-1 regions, there is thus no mechanism for the exchange of mass between these regions. When N has any other value (Fig. 3c shows the case $N = 5$) adjacent type-1 regions touch each other at a hyperbolic stagnation point; thus, as the flow evolves, these regions can exchange fluid.

In order to test this hypothesis, we computed the evolution of Rankine-vortex pentagons: we found that for $\alpha > 2.8$ the vortices interact elastically, for $\alpha < 2.5$ they merge into a single vortex, and between these two values each vortex retains its identity while exchanging some mass with its neighbors.

2.4.2. Advection in the elastic-interaction regime

The results obtained with point-vortex polygons suggest that passive particles in the velocity field of Rankine-vortex polygons are subject to chaotic advection too.

In the elastic-interaction regime (large α , relatively small vortices) the Eulerian velocity field varies moderately around its initial condition, evolving smoothly and slowly; therefore its character must manifest in the Lagrangian dynamics (see, e.g., Velasco Fuentes, 2005, and references therein). This means that each of the $2N$ stagnation points of hyperbolic type survives in the form of a hyperbolic trajectory. This is simply the path of a fluid particle that *attracts* one set of particles: the stable manifold; and *repels* another set of particles: the unstable manifold (where attraction and repulsion merely describe the motion, without implying causation).

We numerically computed the manifolds at time t as follows (see Velasco Fuentes, 2001, for a detailed description of the method). To obtain the unstable one, we placed a short line crossing the stagnation point of the instantaneous flow, observed at $t - \delta t$, along the repelling direction and computed its evolution until time t . To obtain the stable one, we placed a short line crossing the stagnation point of the instantaneous flow, observed at $t + \delta t$, along the attracting direction and computed its evolution, backward in time, until time t .

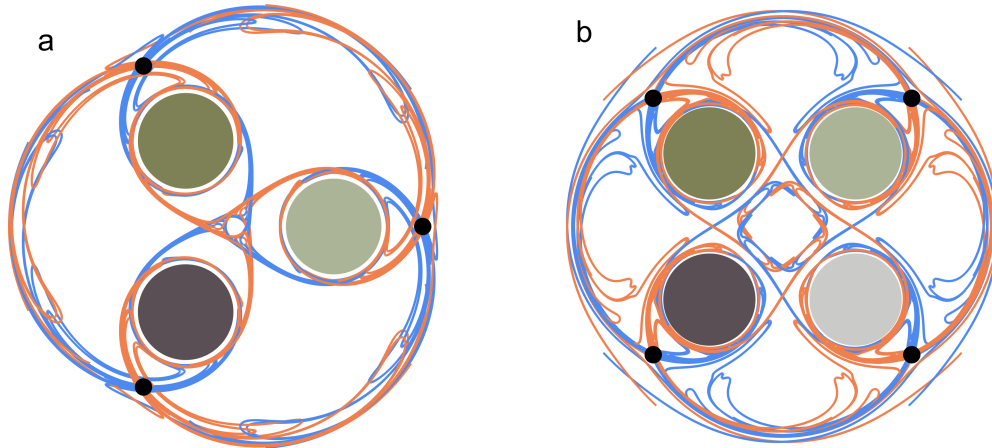


Figure 10. Chaotic tangles for Rankine-vortex polygons computed at $t = 0$. (a) Trigon of relative size $\alpha = 3.6$; (b) tetragon of relative size $\alpha = 3.2$. The shaded areas represent the vortices; the blue and orange lines represent the unstable and stable manifolds, respectively.

Figure 10 shows the chaotic tangle for Rankine-vortex polygons just above the cri-

tical distance for merger. Note the qualitative similarity of frame b with Fig. 7, which shows a point-vortex tetragon. The most important feature is the presence of multiple intersections of the manifolds, which implies the existence of chaotic particle trajectories in the velocity field of Rankine-vortex trigons and tetragons. The area of the chaotic sea grows with the radius of the vortices (i.e. with decreasing α), although we did not measure it, as we did for point-vortices, because the aperiodic nature of the Rankine-vortex evolution makes it necessary to use long time integrations of large number of particles.

In the mass-exchange regime (observed for vortices of intermediate size when $N = 2, 5, 6 \dots$) the geometry of the chaotic tangle is similar to the elastic regime described above, with one important difference: some active fluid particles (the vortex filaments) enter the chaotic sea.

2.4.3. Advection in the merger regime

The cause of vortex merger has been the subject of intense investigation, several physical mechanisms have been proposed: the filaments, the skew-symmetric part of the vorticity field, the strain field, etc. (see, e.g. Melander *et al.*, 1988; Meunier *et al.*, 2005; Brandt & Nomura, 2006). They all illuminate some aspects of the phenomenon but they all know exceptions: vortices with particular vorticity distributions which do not merge even when they satisfy the required conditions, or the other way around (Velasco Fuentes, 2005). Therefore, here we characterize and quantify the phenomenon, and leave its cause for a future study.

In the merger regime (large vortices, i.e. α below the critical value) the condition of slowly evolving velocity field is not satisfied. Consequently, most hyperbolic stagnation points observed in the initial velocity field (figure 3) fail to appear in the Lagrangian dynamics. Generally, the inner N -gon of hyperbolic stagnation points (see Fig. 3) is the first to disappear, in what could be considered the merger event proper. The outer N -gon of hyperbolic stagnation points disappears at a later stage, as these points gradually lose hyperbolicity while the system acquires circular symmetry, see Haller (2001) for the theory and Velasco Fuentes (2001) for an application to the merger of two vortices.

Figure 11 shows the unstable manifolds for vortex trigons in their two regimes. Frame (a) shows an elastic interaction ($\alpha = 3.6$) at time $t = 4.6$: the vortices are clearly oval but they show no filamentation and the manifolds are well separated from the boundaries of the vortices (note that Fig. 10a shows this case too, but at time $t = 0$). Frame (b) shows larger vortices ($\alpha = 3.2$) at time $t = 2.5$, after the merger has taken place but before the axisymmetrization has been completed. A triad of particle trajectories still show hyperbolic behavior at this stage.

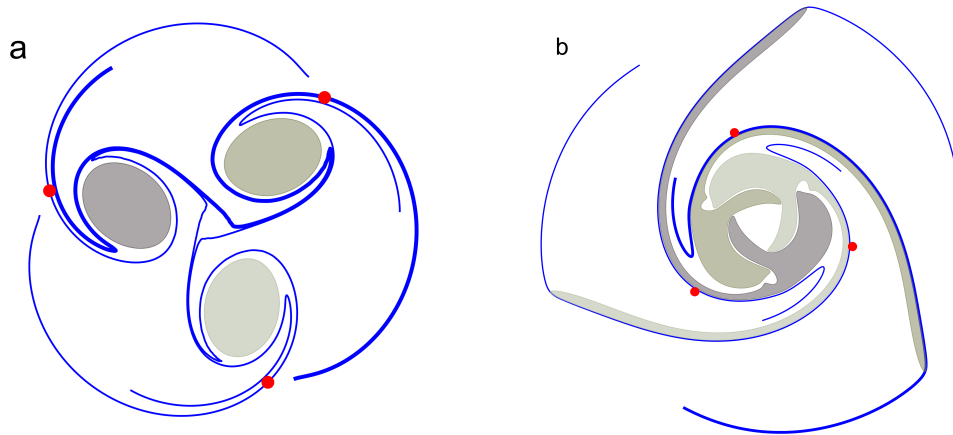


Figure 11. Unstable manifolds for Rankine-vortex trigons in the elastic interaction regime, (a) $\alpha = 3.6$, $t = 4.6$; and the merger regime, (b) $\alpha = 3.2$, $t = 2.5$. Shaded areas represent the vortices, red dots mark approximate intersections of hyperbolic trajectories with the time-slice, and blue lines represent the unstable manifolds (in each frame one manifold is drawn with a thicker line).

Thus, the merger process leads to strong stirring for a short time only, a phenomenon usually referred to as transient chaos (Tél, 2015). This contrasts with the intense, continuous stirring produced by polygons of point vortices or relatively small Rankine vortices.

The outcome of a merger event depends critically on the number of vortices (N). When two vortices merge the result is a more or less elongated vortex which can be considered as a single patch (in the inviscid case, a filament of irrotational fluid always survives between the merged vortices, but it is so thin that it may be safely neglected). The merger of more than two vortices results in a ring of vortical fluid surrounding a core of irrotational fluid. The core and the annulus are triangular if they are the result of the merger of a vortex trigon (Fig. 12), square if their origin is a tetragon, and so on. The irrotational core is what survives of the region 2 of the initial condition (see figure 3); its area increases with N : in trigons it is about 25 % of the area of one of

the initially circular vortices, in tetragons it is about 80%. The vortical annular region also captures irrotational fluid from the vicinity of the vortices (region 4 in the initial condition); this appears to occur always in small amounts, equivalent to about 1.5% of the area of one of the vortices.

The efficiency of the merger process is defined as the fraction of the vortices masses (i.e., areas, in a divergenceless, two-dimensional flow) that ends up in the final vortex. To determine it, we manually identified the expelled filaments, as illustrated in Fig. 12, and calculated their area at different stages in the flow evolution. Figure 13 shows averages of these calculations.

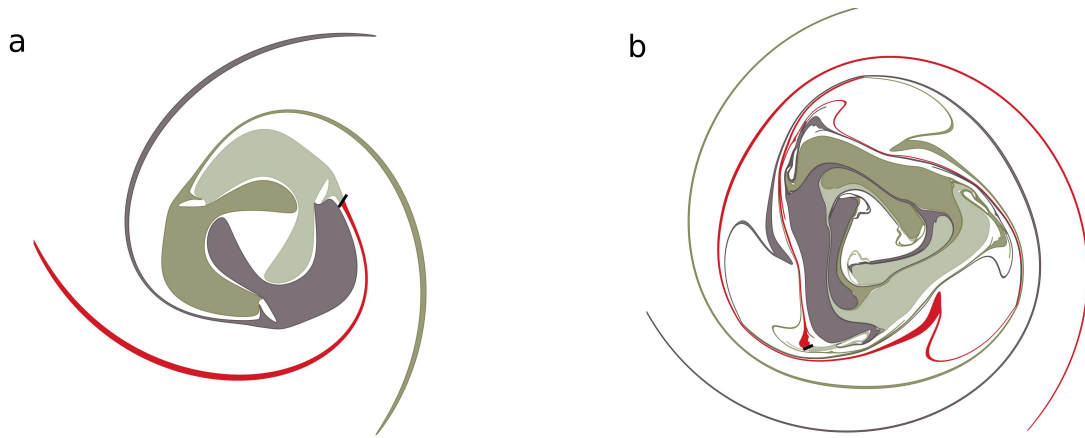


Figura 12. A Rankine-vortex trigon of relative size $\alpha = 2.57$ after merger. (a) One of the expelled filaments is represented in red at time $t=1.43$; the start of the filament, denoted by the black line, was manually chosen. (b) At time $t=3.06$ the filaments are significantly longer, but their area is the same.

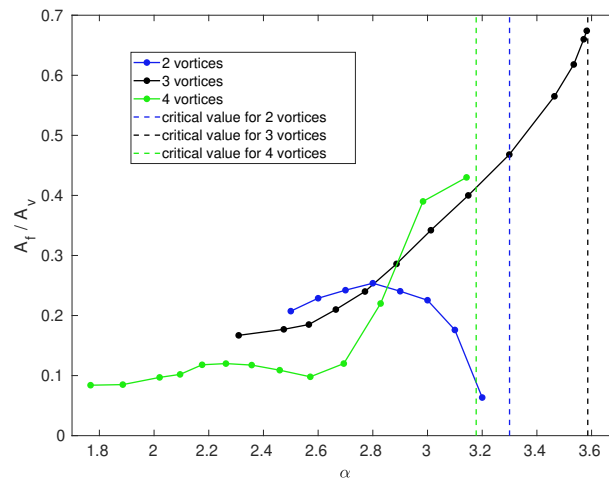


Figura 13. Area of filaments expelled by Rankine-vortex polygons as a function of relative size α . A_f is the area of a filament, A_v is the area of a Rankine vortex. The vertical, dashed lines indicate the corresponding critical distance for merger.

Rankine-vortex trigons and tetragons eject the largest amount of fluid, as measured by the area of the filaments, just below the critical distance for merger. This means that the efficiency of the merger process is lowest at the critical distance and increases as α decreases. Merger efficiency goes from $\approx 30\%$ to $\approx 80\%$ for $N = 3$, and from $\approx 60\%$ to $\approx 90\%$ for $N = 4$. This is in contrast with the case of two vortices, where efficiency is almost 100% at the critical distance and has a minimum, $\approx 75\%$, at some smaller α (Velasco Fuentes, 2005).

Several methods have been developed to study Lagrangian transport by arbitrary unsteady velocity fields: see Hadjighasem *et al.* (2017) for a critical comparison of a dozen of them, and Xu (2019) for a recent application to the study of transport by a dipolar vortex. The weakly unsteady flows induced by vortex polygons of point vortices and small Rankine vortices are best studied with the robust methods of classical dynamical systems (see, e.g. Holmes, 1990); the merger of vortex polygons, being strongly unsteady at some stages, is a better candidate for the application of the newer methods.

The *finite-time* Lyapunov exponent (FTLE) measures the rate at which particle trajectories separate over a finite time interval. Thus, an FTLE field reveals the Lagrangian dynamics of the flow for a given time interval: the maxima (ridges) approximate the stable manifolds when the exponents are computed forward in time and the unstable manifolds when the exponents are computed backward in time (see, e.g., Shadden *et al.*, 2005). Figure 14 shows the FTLE field, computed as described in Haller (2001), for a trigon of relative size $\alpha = 2.5$. A regular mesh of 500×500 particles were advected from $t = 0$ to $t = 2.1$; consequently, the ridges of the FTLE field (dark streaks) expose the stable manifolds: note the lobes pointing in the trigon's anticlockwise rotation and compare them to the stable manifolds of the trigon in the elastic interaction regime (the orange curves in Fig 10). There is, however, a fundamental difference: the presence of stable manifolds inside the vortices (indicated by the ridges). This is a necessary condition for the occurrence of filamentation and, for Rankine-vortex trigons and tetragons, of merger.



Figura 14. FTLE field in the initial condition (integration time: $t = 0-2.1$) for a Rankine-vortex trigon of relative size $\alpha = 2.5$. Darker colors denote higher values of FTLE, the white circle indicates the boundary of one of the vortices.

2.5. Conclusions

Irregular point-vortex polygons and regular Rankine-vortex polygons exhibit unsteady motion that leads to chaotic advection in the vicinity of the vortices.

In point-vortex trigons and tetragons the exchange of fluid between the cores and their surroundings grows weakly nonlinearly with the perturbation. The chaotic sea, i.e. the region of the flow domain that is subjected to intense stirring, grows piecewise linearly. These two metrics also show that, under a comparable perturbation, the trigons stir the fluid more efficiently than the tetragons.

Regular polygons of three, four and five Rankine vortices merge when the initial dimensionless distance between adjacent vortices (i.e., the polygon side length divided by the vortex radius) is smaller than $\alpha \approx 3.6, 3.2, 2.5$, respectively. Hence, the critical distance for merger decreases with N in this range of values. Preliminary results indicate that the critical distance increases for $N > 5$, seemingly approaching a maximum value ($\alpha > 3$). At this point, it might be of interest to mention that for large N the polygon is analogous to an infinite row of equally spaced Rankine vortices, whose critical distance for merger is $\alpha \approx 3.8$.

During merger the vortices always expel some filaments so that only a fraction of their mass ends up in the final vortex. In Rankine-vortex trigons and tetragons this fraction is smallest just below the critical distance for merger: about 30 % for trigons and 60 % for tetragons. This is in sharp contrast with pairs of Rankine vortices which, at the critical distance, merge with an almost 100 % efficacy.

Natural extensions of the present work (to better approximate the atmospheric flows mentioned in the introduction) would use vortices with a smooth vorticity distribution and include the effects of the rotation and curvature of the planet.

Capítulo 3. Helical vortex pairs: Motion and associated particle advection

3.1. Abstract

Two equal coaxial helical vortices move with constant linear and angular velocities and induce a steady flow if they are symmetric, i.e. if they occupy diametrically opposed positions. This motion can be either stable or unstable depending on the vortices' radius and pitch. We determined the stability boundary using a dynamical systems approach. We reduced the vortices motion to a bidimensional problem using helical coordinates, the conservation of impulse and the motion' invariance to a coordinates rotation. In this bidimensional space, stable vortices are associated with an elliptic fixed point and unstable vortices with an hyperbolic point. The vortices can be angularly or radially perturbed, resulting in two types of asymmetry. Whatever the asymmetry, the vortices move periodically. We found four different regimes depending on the pitch, radius, and type of asymmetry. The main differences between regimes are the type of fixed point associated with the vortex pair, and the radial and axial displacement. Besides the vortices motion, we studied the flow topology that they induce. Two symmetric helical vortices induce a steady flow. If the vortices are asymmetric, the vortices induce an unsteady flow. We showed the flow topology for stable and unstable asymmetric vortices. We found that fluid stirring is spatially dominant in unstable vortex pairs, whereas, for stable pairs, the topology shows similarities with the flow due to symmetric vortex pairs that generate a steady flow.

3.2. Introduction

The knowledge of the physical processes in the wake of wind turbines is one of the topics currently being addressed due to its impact on the efficiency in the extraction of energy (e.g., Medici & Alfredsson, 2006; Barthelmie & Jensen, 2010; Wu *et al.*, 2020). Coaxial helical vortices are a phenomenon present in the wake of these engines. Downstream, near the turbine, these vortices are shed and remain without significant changes in their shape. In an intermediate region, the vortices interact with each other and acquire an additional motion (Lignarolo *et al.*, 2015; Quaranta *et al.*, 2019). In a last stage, the vortices vanish due to turbulent and diffusive effects (see, for example,

Ivanell *et al.*, 2010; Felli *et al.*, 2011).

In the intermediate stage of the wake, the vortices are unstabilized by a perturbation in the wind or in the turbine's blades. This behavior has been observed both in laboratory experiments (Quaranta *et al.*, 2019) and in numerical simulations (for example, Sarmast *et al.*, 2014; Posa *et al.*, 2021). The dynamics of the vortices at this stage contributes to the development of turbulence in the far wake (Lignarolo *et al.*, 2015).

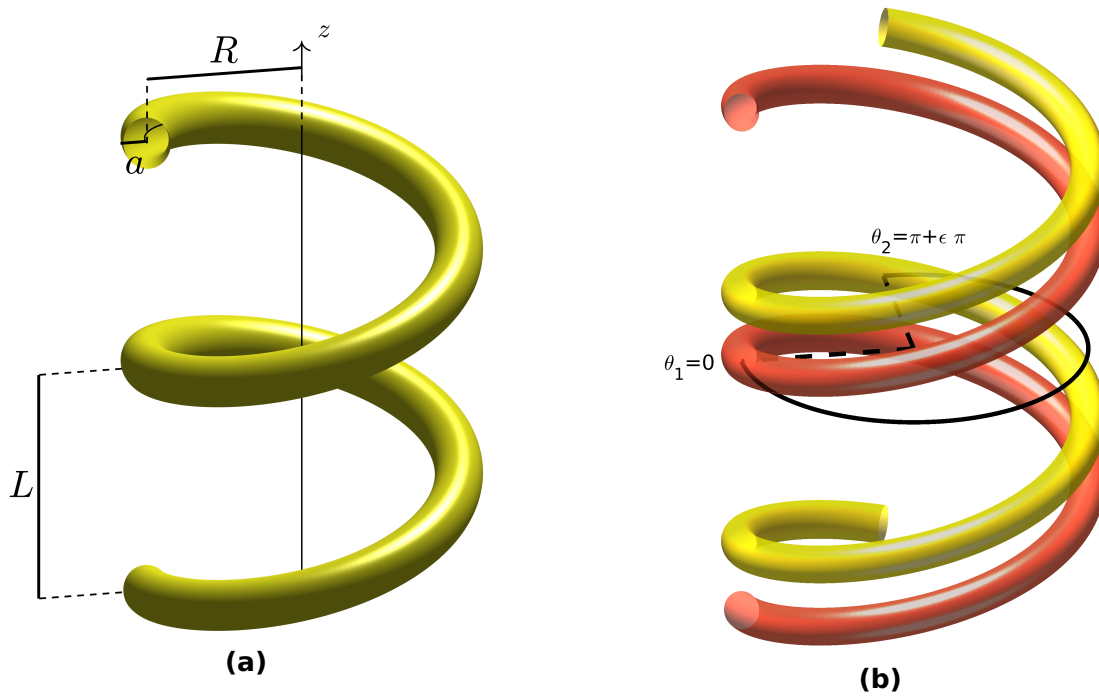


Figure 15. Parameters that define a helical vortex. (a) Geometric parameters of a vortex. (b) Angular position of the vortices in the initial condition.

Two cases have been mainly analyzed when isolating vortices from other phenomena and considering them to be immersed in an inviscid, incompressible, and unbounded fluid: 1. When the two coaxial vortices are separated by an angular distance $\theta = \pi$, forming a symmetric steady vortex pair (Joukowski, 1912). 2. When in the initial condition, the vortices are in an asymmetric configuration that generates an additional periodic motion (Hietala *et al.*, 2016; Delbende *et al.*, 2021). In both cases, coaxial helical vortices with pitch L , radius R , and cross-sectional radius a are used, as shown in figure 15a. With these three parameters, two dimensionless numbers $\tau = L/2\pi R$

and $\alpha = a/R$ are constructed. All phenomena can be expressed in terms of these two dimensionless numbers and a perturbation ϵ that breaks the symmetry. In the present work, we determined the stability of the symmetric steady vortices for a large range of τ and α .

In the symmetric case, vortices rotate and travel with constant angular and axial velocities, respectively, without change of shape (Velasco Fuentes, 2018a). The symmetric vortex pair can be stable or unstable depending on the dimensionless numbers τ and α . Delbende *et al.* (2021) analyzed the vortex pair stability using three approaches: point vortices, ring vortices, and helical vortices. They found that the helical vortex pair is unstable for small pitches τ and is stable for large pitches. They demonstrated this stability division for few examples. In this work, we find the curve in the diagram (τ, α) that separates stable from unstable vortex pairs for a wide range of parameters: $0.1 < \tau < \infty$ and $10^{-6} < \alpha < 0.4$. The vortices' motion is explained in this same range of the dimensionless numbers. We then use the type of stability to explain the topology of the vortex-induced flow, which is known for a symmetric vortex pair (Velasco Fuentes, 2018b). Symmetric vortex pairs induce a steady flow that presents four different topologies, depending on τ and α . These topologies of the symmetric pair serve as starting point to evaluate the flow of an asymmetric case.

In the asymmetric case, the vortices are separated by an angular distance $\theta = \pi + \epsilon\pi$, with $0 < \epsilon < 1$, in the initial condition, figure 15b. This asymmetry generates a periodic motion of the vortices that is preserved even when noise is added to the vorticity lines (Hietala *et al.*, 2016). We found four different motions. Two for the stable vortices and two more for the unstable pair.

For different values of ϵ , we find the topology of the flow with the help of Poincaré maps. If the vortex pair is stable, the flow topology bears great similarities to the steady case and vortices generate little stirring. If the vortex pair is unstable, stirring dominates due to a chaotic sea that encompasses much of the physical space; in addition, the flow topology differs from that of a symmetric pair of vortices with the same dimensionless parameters.

3.3. Methodology

We model infinite helical vortices immersed in an inviscid, incompressible, and unbounded fluid. The vortices are coaxial and have equal dimensionless pitch τ , and radius α in the initial condition. Their centerline is defined in Cartesian coordinates as follows:

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad z = \frac{L\theta}{2\pi}. \quad (5)$$

As the vortices evolve in time, their radius R may vary but their cross-sectional radius α remains constant due to the formulation of the mathematical model. Vortices keep their helical shape without deformation due to their helical geometry, i.e. vortices are coaxial and have same L .

To obtain the vortices' evolution, we calculate their velocity with the Rosenhead-Moore approximation to the Biot-Savart law (e.g. Saffman, 1995):

$$\mathbf{u}_{RM} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{x} - \boldsymbol{\rho}(s)] \times d\boldsymbol{\rho}}{(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\rho}(s)|^2 + \mu^2 \alpha^2)^{3/2}}, \quad (6)$$

where Γ is the circulation, $\mathbf{x}$ is the position where the vortex-induced velocity is calculated, the vortex core is positioned in $\boldsymbol{\rho}(s)$, and $\mu = e^{-3/4}$.

The numerical integration of equation 6 divides the helical vortex into segments, where each segment contributes to the velocity at any point in three-dimensional space. The problem arises when it is necessary to simulate thin vortices, i.e., small radius α . In these cases, a large number of segments is required to integrate equation 6 and keep the net energy constant (see, for example, Velasco Fuentes, 2010), which makes it computationally impractical to use this approximation for thin vortices. So, equation 6 is combined with an analytical solution, as described below: The velocity $\mathbf{u}$ of a vortex is divided into the part induced by the rest of vortices and the self-induced velocity.

The induced velocity is calculated using the Rosenhead-Moore numerical integration of the equation 6. The self-induced velocity contribution is calculated with the analytical solution given by Velasco Fuentes (2018a). This last contribution is divided into the translation velocity in the axial direction U_z and the rotation Ω around the axis:

$$U_z = \frac{1}{\sigma^3} \left(\log\left(\frac{2}{\delta}\right) - \log(\sigma) + \sigma^3 W \right), \quad (7)$$

$$\Omega = \frac{\tau}{\sigma^3} \left(\frac{\log\left(\frac{2}{\delta}\right) - \log(\sigma) + \sigma^3 \left(W - \frac{2}{\tau}\right) + 2\sigma^2}{\delta^2 \sigma^4 - 1} \right), \quad (8)$$

where $\delta = a/(r(t)(1 + \tau^2))$, $\sigma = \sqrt{1 + \tau^2}$, $r(t)$ is the evolution of the vortex radius, and W is expressed in the following equation:

$$W(\tau) = \int_0^\infty \left[\frac{\sin^2 t}{(\tau^2 t^2 + \sin^2 t)^{3/2}} - \frac{1}{(1 + \tau^2)^{3/2}} \frac{H(1/2 - t)}{t} \right] dt \quad (9)$$

where H is the unit step function. We use an approximate solution of W in terms of modified Bessel functions (see Velasco Fuentes, 2018b). In this way, we obtain the velocities of vortices and passive particles. Then, we move them using a fourth-order Runge-Kutta scheme.

With an asymmetry, given by ϵ , the vortices acquire an unsteady motion presented as an example in figure 16. In order to determine if the motion is periodic, we define a Poincaré section

$$S = r_1(t) - r_2(t) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = 0, \quad (10)$$

where the subscripts refer to each vortex. When the asymmetry is angular, the vortices' initial radius is the same ($R = R_1 = R_2$). We include another type of perturbation: the vortices are separated by an angle $\theta = \pi$, like in the symmetric case, but have different initial radius ($R_2 \neq R_1$). Once we set the Poincaré section, we evaluate the following relation:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial S}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt}, \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Each time the Poincaré section is crossed, the sign of the expression 11 changes; these crosses coincide with times multiple of $T/2$, so the motion is periodic.

In order to reveal the flow topology induced by perturbed helical vortices, we computed Poincaré maps and manifolds. The particles to build them belong to the three-dimensional space, so it would take a large number of particles and periods to reveal the geometry of the flow vaguely. In the case of manifolds, it would be necessary to plant a particle's sheet near the hyperbolic curve and keep this sheet smooth enough by adding nodes in its two dimensions. This procedure is computationally expensive and does not ensure conclusive information is obtained from the manifolds due to their complex spatial distribution. However, if we take advantage of helical symmetry, we can capture the particles and manifolds in a two-dimensional space without loss of generality; the symmetry is not lost in times after the initial condition. The Cartesian three-dimensional space is transformed into the helical plane with the relations

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \theta - z/l, \quad (12)$$

where $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ and $l = L/2\pi$.

To build the Poincaré maps, we place passive particles in the initial condition and store them every period T . Then, we capture the particles of all the simulated periods in a single figure, resulting in a Poincaré map in the helical plane. The map reveals the main characteristics of the flow topology, such as stability islands and chaotic seas.

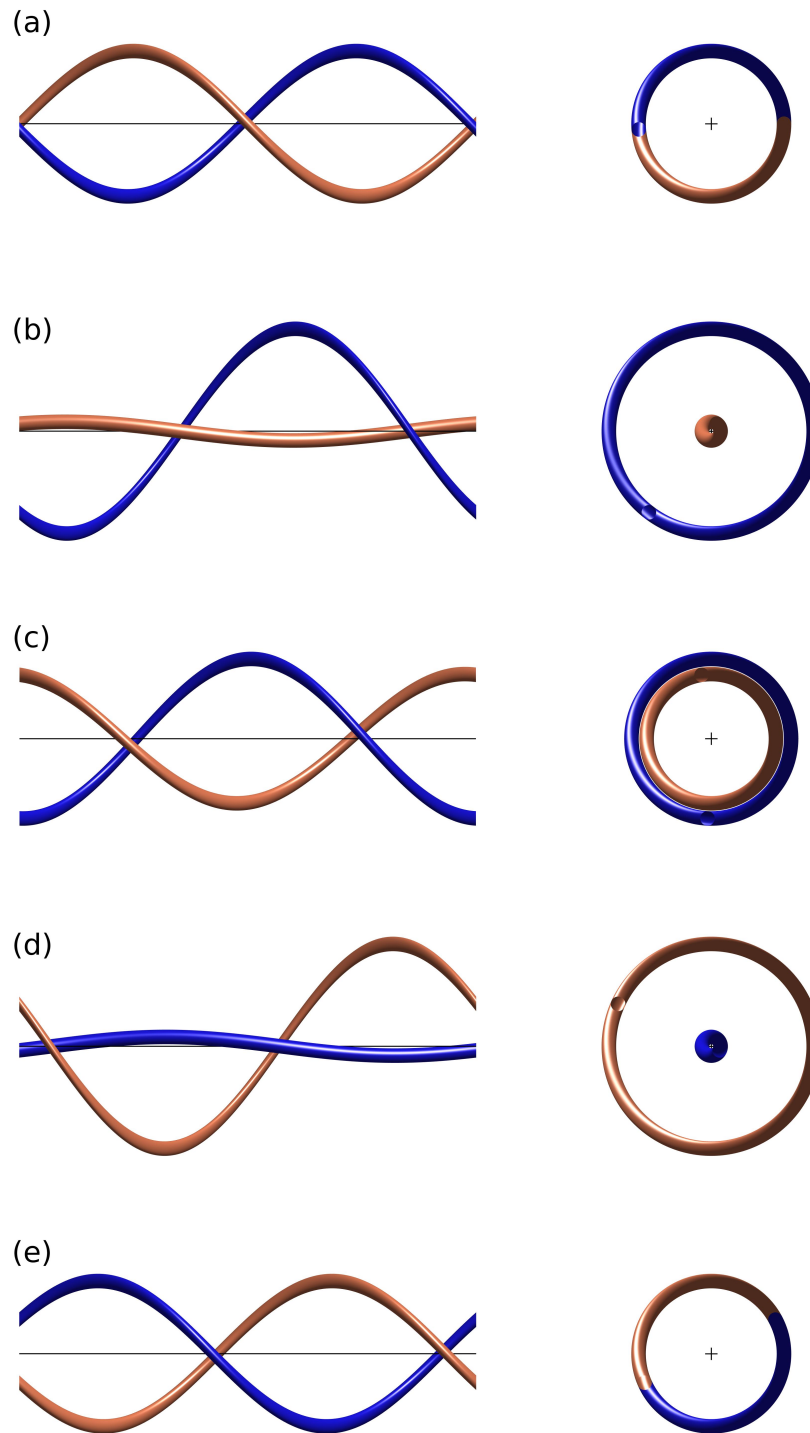


Figura 16. Helical vortices with parameters $\tau = 1$, $\alpha = 0.1$ and $\epsilon = 0.05$ displayed during one period of their motion. Vortices are shown from a lateral view on the left and from a frontal view on the right. (a) Initial condition. (b) $1/4T$. (c) $2/5T$. (d) $3/4T$. (e) T .

We also use stable μ_s and unstable μ_u manifolds to determine how the flow is spatially distributed in the helical plane. The stable manifold μ_s is formed by all fluid

particles that asymptotically tend to a hyperbolic trajectory for $t \rightarrow \infty$. The unstable manifold comprises all the particles that asymptotically tend to the hyperbolic trajectory at a time $t \rightarrow -\infty$. To obtain an unstable manifold μ_u , we first locate the approximate position of a hyperbolic trajectory with the help of the topology revealed with the Poincaré maps. Then, we positioned a line of particles near this location and advected forward in time with equation 6. As this curve is advected, nodes are added to keep it smooth. The procedure to obtain the stable manifold μ_s is the same, but the line is advected backward in time. A detailed description of the manifolds' construction and properties can be found in Wiggins (2013).

The particles to build the Poincaré maps, when positioned in the helical plane, reveal the geometry of the flow in relatively few periods, of the order of 100, and with few particles, around 80 particles. The geometry of the flow in the helical space fully represents the flow in the three-dimensional space for the problem addressed. In fact, the three-dimensional flow can be obtained, from the flow in the helical plane, with the inverse transformation of equation 12, as done at the end of the results section.

3.4. Results

We present the results in two parts. We first address the vortices' motion and stability. We then present the flow topology for different helical vortex pairs by varying the pitch τ , the radius α , and the asymmetry ϵ .

3.4.1. Motion of the vortices

We study infinite vortex filaments with helical symmetry that are immerse in an unbounded, inviscid and incompressible fluid. The problem can be reduced to a two-dimensional one by considering the fluid in cylindrical coordinates (r, θ, z) and using the helical coordinate $\phi = \theta - z/l$ (see, e.g., Hardin, 1982; Lucas & Dritschel, 2009). From a dynamical systems approach each vortex has two degrees of freedom. We are dealing with two equal coaxial helical vortices; so, there are four degrees of freedom. It is possible to reduce an extra dimension due to the invariance of the vortex system to an azimuthal rotation. This invariance has been used to study the motion of different

systems, for example for three point vortices (Aref, 1979; Aref & Stremler, 1996). Furthermore, we reduce the vortices' motion to a bidimensional problem with the impulse conservation: the vortex impulse is equal to the circulation multiplied by the vortex' area projected on a polar plane. The vortex area in this plane is $A = \pi r(t)^2$, therefore

$$r_1^2(t) + r_2^2(t) = R_1^2 + R_2^2, \text{ for vortices of equal circulation } \Gamma, \quad (13)$$

is conserved. This result is a case of the Thomson (1878) theorem for endless vortices (see Velasco Fuentes, 2014, as an example and for a detailed review of the integrals conservation for curvilinear vortices). The impulse conservation imply that the vortices' radii are not independent and only one of them is necessary as a variable of state, for convenience we chose $\rho = r_2 - r_1 = r_2 - (R_1^2 + R_2^2 - r_2^2)^{1/2}$.

We reduce the vortices' motion to a bidimensional problem with variables $(\psi = \phi_2 - \phi_1, \rho = r_2 - r_1)$, where the subscripts refer to each vortex. We use the variables $(\psi(t), \rho(t))$ to create a phase space of the vortices' motion. In this space, the evolution of symmetric vortices is represented by a single fixed point at $(\psi = \pi, \rho = 0)$ which can be elliptic or hyperbolic, figure 17. If the fixed point is elliptic, figure 17a, the symmetric vortex pair is stable. If the fixed point is hyperbolic, figure 17b, the symmetric vortex pair is unstable. We determined the critical values of the dimensionless parameters τ and α that separate stable from unstable vortex pairs. We performed simulations with asymmetry $\epsilon = 0.025$ constant in the range of pitches $0.1 \leq \tau \leq 10$ and radius $10^{-6} \leq \alpha \leq 0.4$ with a resolution of $200 \tau \times 200 \alpha$ simulations and a logarithmic spacing between two adjoining dimensionless parameters. In order to determine the type of fixed point for each pair of τ and α , we found the eigenvalues of the vortices' velocity gradient in the coordinates $(\psi(t), \rho(t))$ around $(\psi = \pi, \rho = 0)$. If the eigenvalues are real of same value but different sign, the point is hyperbolic and the vortices are unstable. On the contrary, if the eigenvalues are imaginary of same value but different sign, the point is elliptic and the vortices are stable. In this way, we found the curve that separates stable from unstable vortex pairs, black curve of figure 23. Stable vortices lie to the right of the black curve, i.e., for large pitches. Unstable vortex pairs lie to the left of the black curve, i.e., for small pitches.

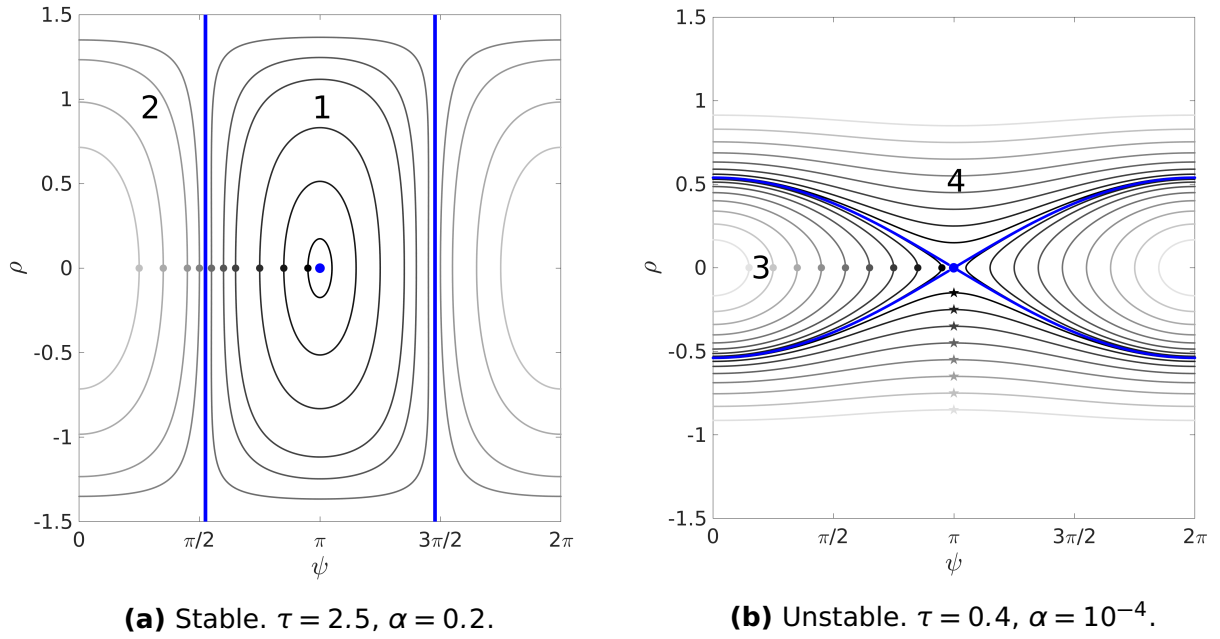


Figure 17. Vortices motion in the phase space (ψ, ρ) . Blue dots correspond to symmetric vortex pairs moving steadily. Gray dots correspond to the initial condition of vortices with angular asymmetry given by the value of ϵ . Stars represent the initial condition of vortices with radial asymmetry. Blue curves represent separatrices. Lighter gray indicate larger asymmetry.

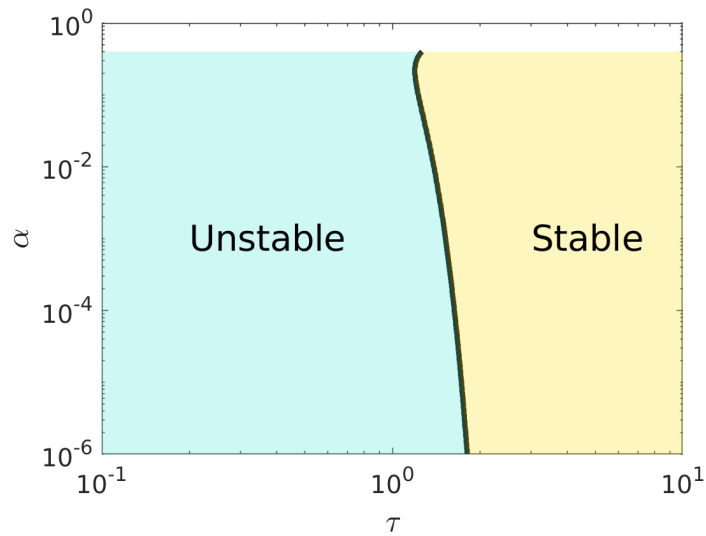
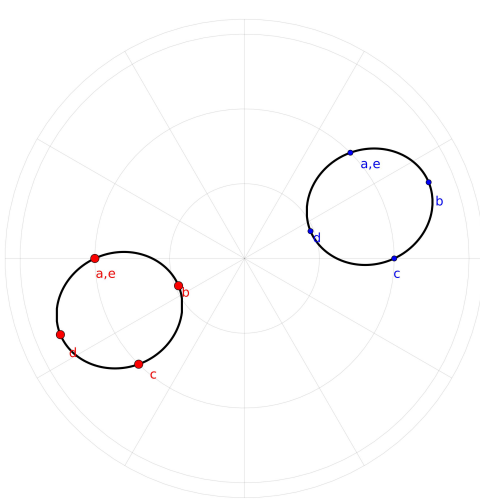
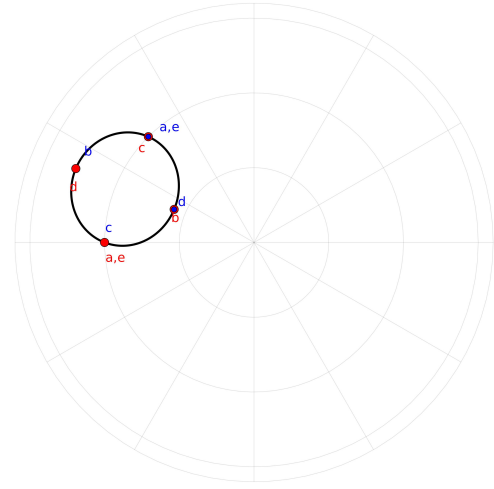


Figure 18. Stability of two steady helical vortex pair. Vortices with large pitch are stable; vortices with small pitch are unstable.

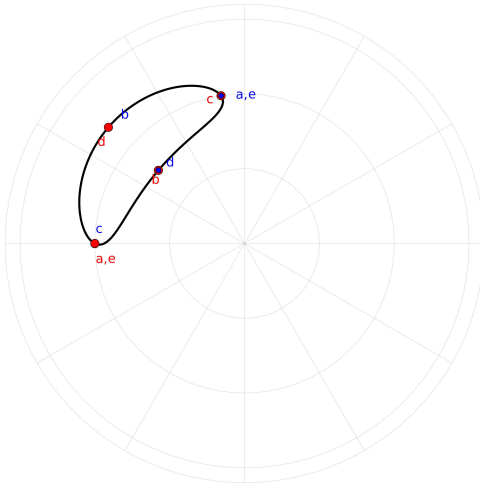
Each numbered region of figure 17 corresponds to a different type of motion:



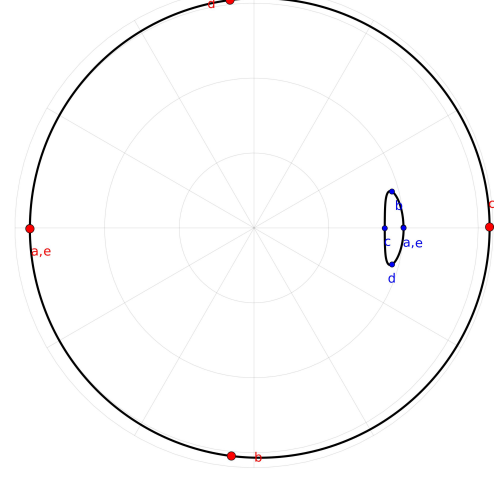
(a) $\tau = 2.5$, $\alpha = 0.2$, and $\epsilon = 0.25$



(b) $\tau = 2.5$, $\alpha = 0.2$, and $\epsilon = 0.75$



(c) $\tau = 0.4$, $\alpha = 0.1$, and $\epsilon = 0.55$



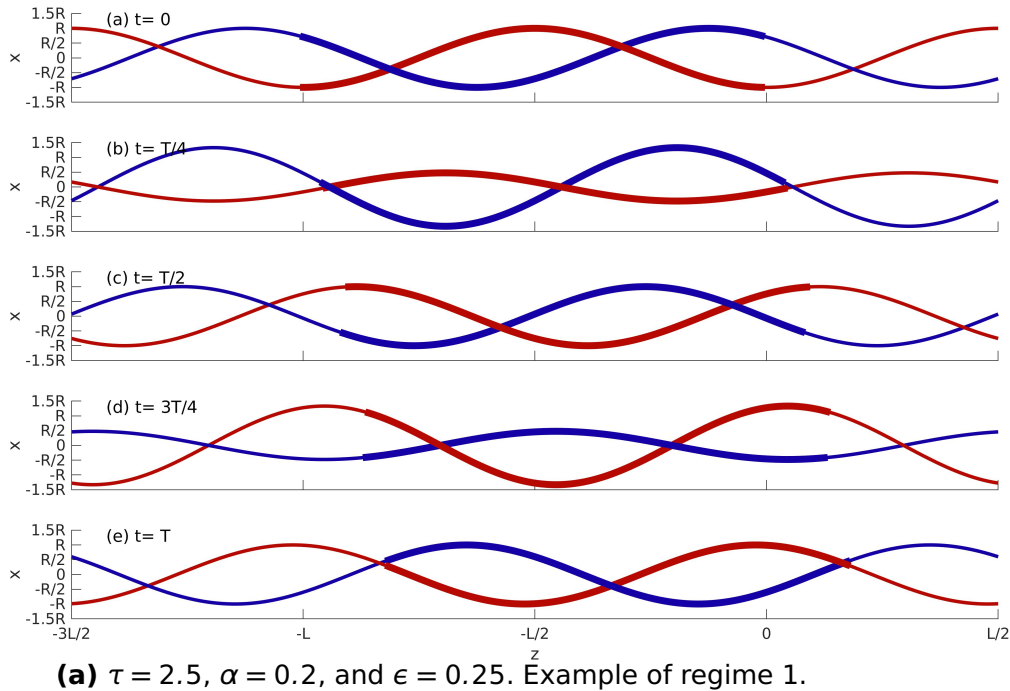
(d) $\tau = 0.4$, $\alpha = 0.0001$, $\epsilon = 0$, and $|R_2 - R_1| = 0.5$

Figure 19. Vortices motion in the helical plane. (a) Example of the vortices trajectory in regime 1. (b) Regime 2. (c) Regime 3. (d) Regime 4. Red and blue dots, with their corresponding letter a-e, are associated with the vortices' position of the frames a-e of figures 20 and 21.

1. Vortices with large τ and $\epsilon \lesssim 0.5$ trace equal separated convex curves in the helical plane, figure 19a. The vortices have same radius R in the initial condition; then, one vortex increases its radius until $t = T/4$ while the second one reduces it. This process is inverted until $t = T/2$ when the vortices has the same radius again. The process is repeated but with a mirrored motion of the vortices, figure 20a. During a period T , they experiment a small axial offset, i.e. one of the vortices overtakes the other and is then reached every period T . After a period, both vortices have traveled the same axial distance.

2. Vortices with large τ and $0.5 \lesssim \epsilon < 1$ trace a unique convex curve, figure 19b. The axial offset is again small, figure 20b. After a period, vortices have traveled the same distance in the axial direction and have a similar radial trajectory described for vortices in regime 1.
3. Vortices with small τ and $0 < \epsilon < 1$ trace a unique nonconvex curve, figure 19c. Radially, vortices move similarly to vortices in regime 1 or 2, figure 21a. The axial offset is considerably more significant than in former regimes. The vortices are in phase after a period, as in regimes 1 and 2. This periodic motion has been previously named as leapfrogging of helical vortices.
4. Vortices with small τ , $\epsilon = 0$, and a radial difference in the initial condition trace different curves, one of them inside of the other, in the helical plane, figure 19d. In the three-dimensional space, this means that a vortex is always wrapping around the other, figure 21b. The internal vortex travels faster in the axial direction, so they never return to be in phase.

After we determined where the stability boundary lies, we analyzed the vortices period and amplitude in the region of the parameter space mentioned before. The period is nondimensionalized with the rotation period $P = 8\pi^2 R^2 / \Gamma$ of two rectilinear vortices separated by a distance $2R$ and with the same circulation Γ as the helical vortices, in



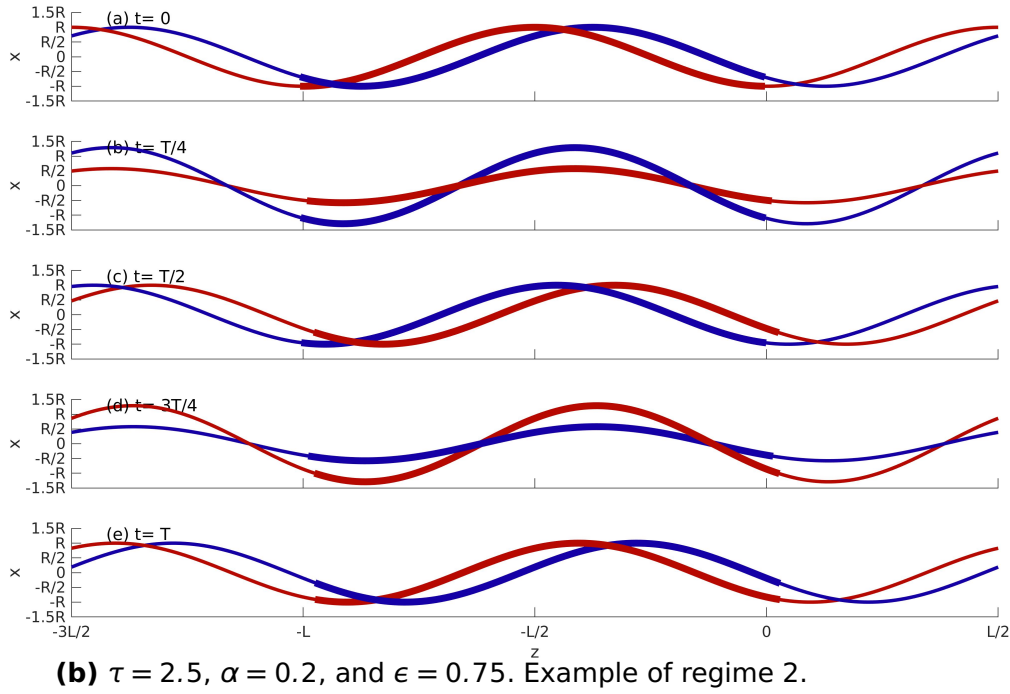
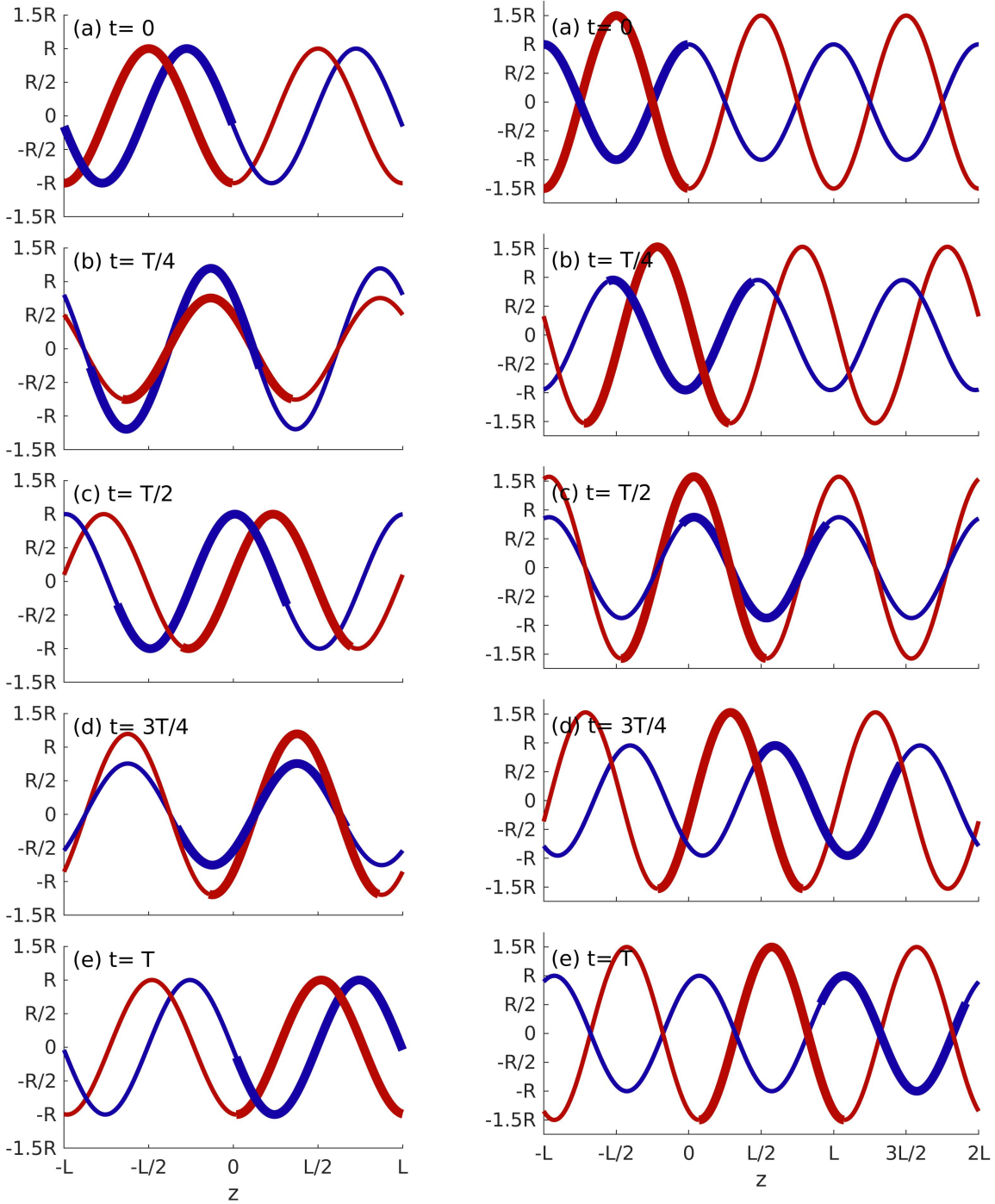


Figure 20. Vortices motion in the three-dimensional space for regimes 1 and 2. Each color corresponds with a centerline's vortex. The thick line represents one loop of the helix. Thin lines correspond with two turns adjacent to the thick one.

such a way that the period is presented as $T^* = T/P$. Figures 22a and 22b show the period and the maximum radius reached by the vortices during each oscillation for a constant perturbation of $\epsilon = 0.025$. The sum of the squares of the maximum and minimum radii $R_{max}^2 + R_{min}^2 = 2$ is constant due to the conservation of linear impulse, equation 13; so, when R_{max} grows, R_{min} decreases. This implies that when R_{max} is near 1.5, the minimum radius R_{min} is about zero. The results of this analysis are as follows:

1. Vortices with small pitch, of the order of 0.1, have a short period of order $T^* = 0.03$, a maximum and minimum radius only slightly different from the radius of the initial condition.
2. As the vortices' pitch approaches from the left to the boundary between stable and unstable behavior, the dimensionless period increases by two orders of magnitude, the maximum radius increases to about 1.4, and the minimum radius decreases to about zero.
3. Vortices with the largest period (i.e., the vortices that take longer to return to their original radius), largest maximum radius, and minimum radius of zero are found around the stability boundary.
4. For large pitches, $\tau > 2$, the period of oscillation converges to $T^* = 1$ and the maximum and minimum vortices radius depart slightly from their initial value. That is to say, the vortices' motion converges to that of two rectilinear vortices of the same circulation. This convergence occurs even

though there is a small asymmetry $\epsilon = 0.025$.



(a) $\tau = 0.4$, $\alpha = 0.1$, and $\epsilon = 0.55$. Example of regime 3.

(b) $\tau = 0.4$, $\alpha = 0.0001$, $\epsilon = 0$, and $|R_2 - R_1| = 0.5$. Example of regime 4.

Figure 21. Vortices motion in the three-dimensional space for regimes 3 and 4. Each color corresponds with a centerline's vortex. The thick line represents one loop of the helix. Thin lines correspond with two turns adjacent to the thick one.

While the change in the pitch in the range of two orders of magnitude has significant effects on the vortices' behavior, the dimensionless radius α has little influence on the vortices' period and amplitude in a range of 6 orders of magnitude. This can be appreciated in figures 22a and 22b. Therefore, we explore the period and amplitude by keeping the radius $\alpha = 0.001$ constant and varying τ and ϵ , figures 22c and 22d. The results of this analysis are the following: 1. Vortices with large asymmetry (ϵ around 0.9), and small pitch (on the order of 0.1), have the lowest periods, on the order of $T^* = 0.001$ and the maximum and minimum radii near their initial value. 2. The period increases with decreasing asymmetry ϵ and increasing the pitch τ . 3. The highest maximum is in the deepest red region in figure 22d with borders around $\tau = 1$, $\epsilon = 0.025$ and $\tau = 10$, $\epsilon = 0.5$. 4. For pitches greater than 1.5 and small ϵ the period approaches the rotation period of two rectilinear vortices separated by a distance $2R$.

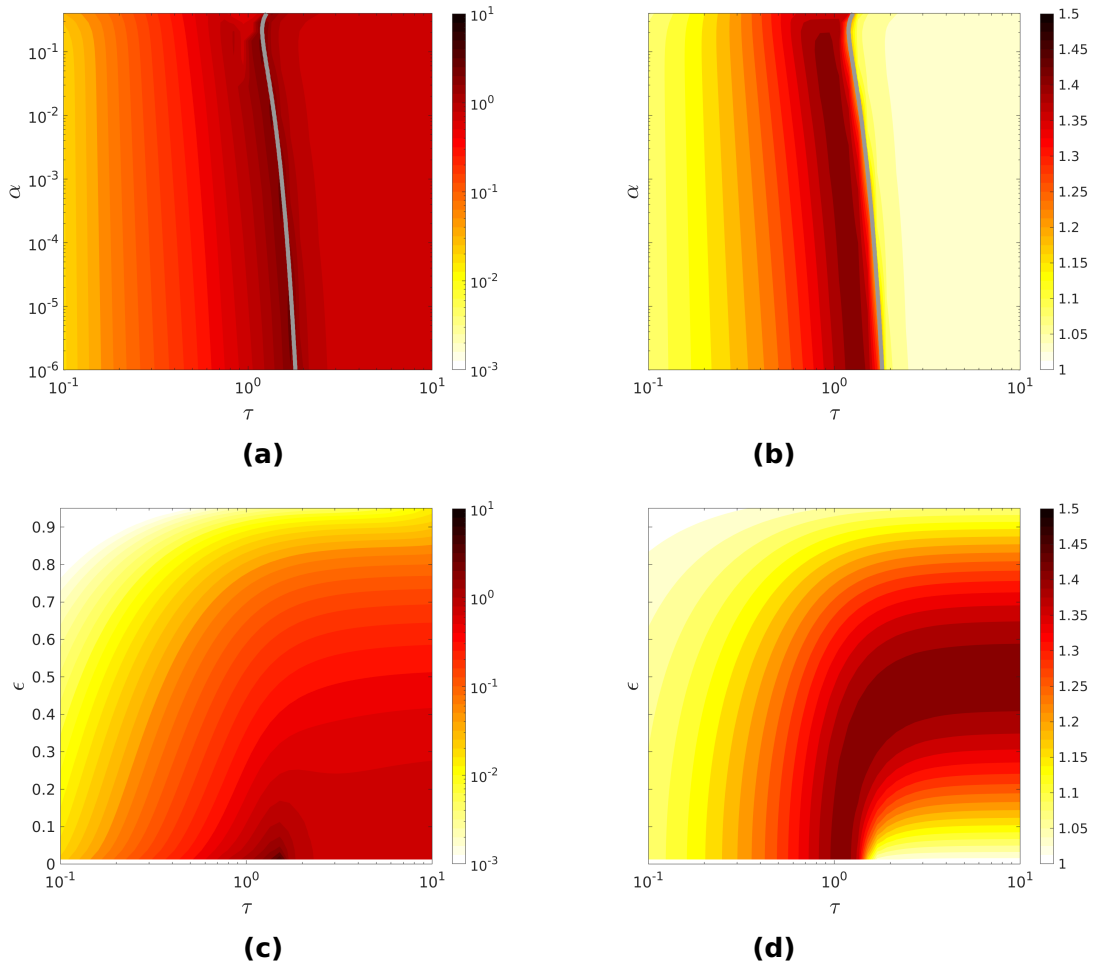


Figure 22. Properties of the vortex motion. (a) Adimensional period and (b) maximum radius R_{max} , under a constant perturbation $\epsilon = 0.025$. The boundary between stable and unstable vortices is denoted with a gray curve. (c) and (d): Same variables for a constant radius $\alpha = 0.001$ and variable ϵ .

3.4.2. Flow topology

In this section we present the flow topology induced by helical vortices with different asymmetries ϵ . For symmetric helical vortices, there are four different topologies (Velasco Fuentes, 2018b), figure 23: Stable vortex pairs with large pitch generate topology I. Unstable vortex pairs of intermediate pitch and small radius induce topology II. Small-pitch unstable vortices generate topology III. Vortices of intermediate pitch (and a wider range of α than for topology II) belong to topology IV, which can be associated with stable or unstable behavior.

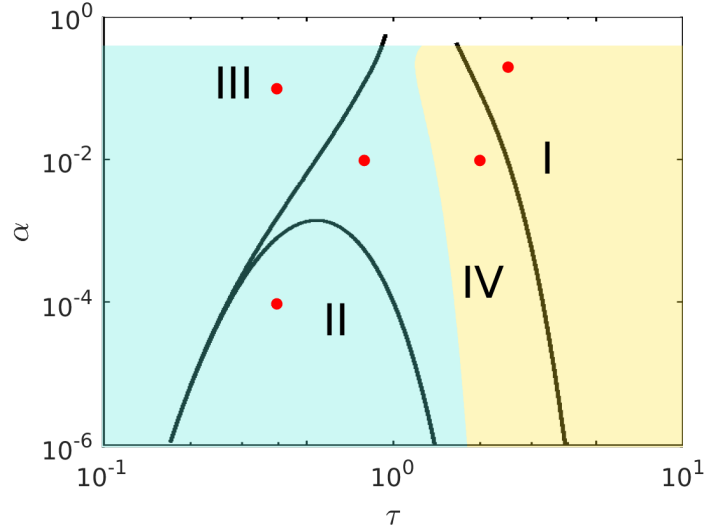


Figura 23. Flow topologies induced by two symmetric helical vortex pair. Roman numerals represent each of the topologies found by Velasco Fuentes (2018b), separated by black curves. The red dots represent the τ and α parameters used to study the flow topology of asymmetric vortices. Vortices with parameters τ and α in the light blue region are unstable. Vortices in the yellow region are stable.

We performed simulations using asymmetric helical vortices with dimensionless parameters τ and α within the region of each topology of the steady case (red dots in figure 23). For each simulation, we found the flow topology of an asymmetric vortex pair. Four of the experiments coincide with the dimensionless parameters used by Velasco Fuentes (2018b) to exemplify each topology due to two symmetric helical vortices. We added one experiment because the parameters τ and α used for the topology IV are on the unstable side; the new initial condition corresponds to a stable vortex pair. Table 1 shows the parameters for each experiment.

Table 1. Parameters used to study the flow topology.

Exp.	τ	α	Topology	Stability
1	2.5	0.2	I	Stable
2	0.4	0.0001	II	Unstable
3	0.4	0.1	III	Unstable
4a	0.8	0.01	IV	Unstable
4b	2	0.01	IV	Stable

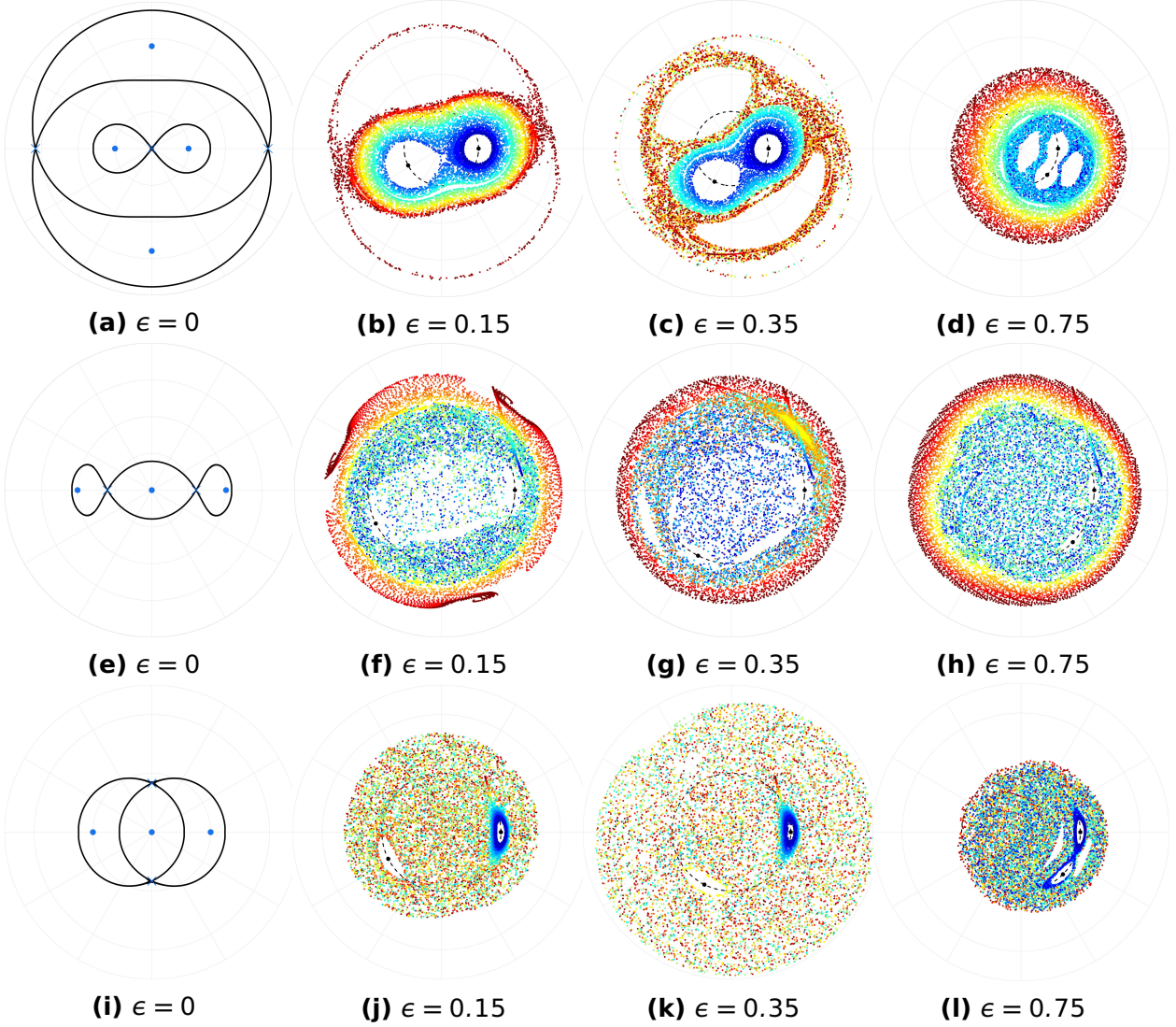


Figure 24. Phase portraits and Poincaré maps for experiments 1 to 3. (a-d) Vortices with pitch $\tau = 2.5$ and radius $\alpha = 0.2$, experiment 1. (e-h) Vortices with pitch $\tau = 0.4$ and radius $\alpha = 0.0001$, experiment 2. (i-l) Vortices with pitch $\tau = 0.4$ and radius $\alpha = 0.1$, experiment 3. Frames (a), (e), and (i) are the phase portrait of the steady flow where blue dots represent elliptic points and crosses the hyperbolic points. In the rest of frames, black dots denote the vortices positions, and dots of same color represent the same particle in different periods. Each map shows 160 particles in 81 periods.

We show the phase portraits, in the helical plane, of the flow associated with the

symmetric vortices in the graphs of the first column of figures 24 and 25. The symmetric vortices generate a steady flow, so in these portraits, the particles trace curves that coincide with the flow streamlines. In the subsequent columns, we present a Poincaré map, by experiment, for different asymmetries ϵ .

When ϵ is small, and the vortices are stable (experiments 1 and 4b corresponding to figures 24b and 25f, respectively), the flow topology is similar to the symmetric vortices' topology, only slightly rotated and with less area of the stability islands. In these cases, there is a small chaotic sea surrounding the regions associated with the helical vortices. When the vortex pair is unstable (experiments 2, 3 and 4a corresponding to figures 24f, 24j and 25b, respectively), with a small perturbation ϵ the topology differs from that in the symmetric vortices. In these cases, chaotic sea covers a large region of the phase space. Experiments 2 and 3 are also characterized by having fewer stability zones than the steady case. Even if we decrease the perturbation, e.g. $\epsilon = 0.025$, this feature is maintained because the vortex pair for these values of τ and α is associated with a hyperbolic point.

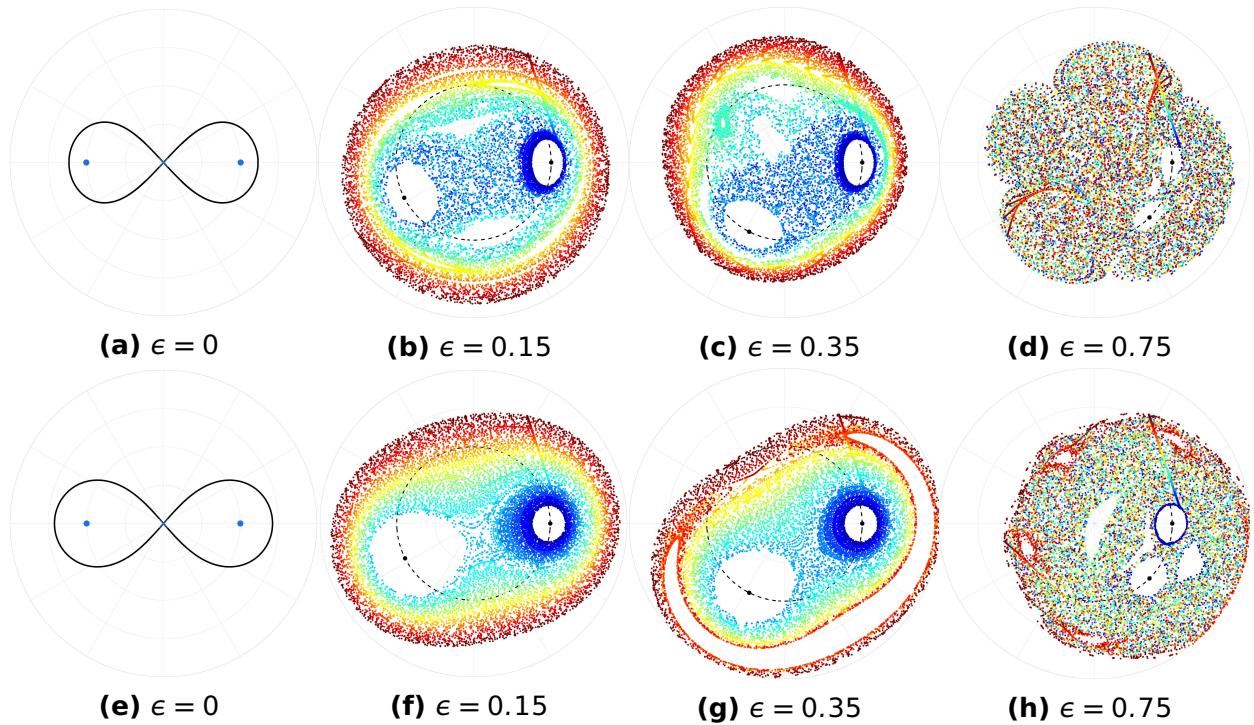


Figura 25. Same as figure 24, but for experiments 4a (a-d) and 4b (e-h).

For stable vortex pairs, the chaotic sea area increases gradually as ϵ grows, as seen for $\epsilon = 0.35$ in experiments 1 and 4b corresponding to figures 24c and 25g, respectively. So, the vortex pairs become better stirrers as they move away from the steady case. For unstable vortex pairs, the chaotic sea keeps dominating the helical plane as ϵ grows, experiments 2, 3 and 4a corresponding to the figures 24g, 24k and 25c, respectively. In experiments 2 and 4a there are more stability islands; on the contrary, in experiment 3 the chaotic sea is larger without appreciable islands.

As ϵ approaches 1, the vortices rapidly rotate around each other; in the limit $\epsilon = 1$ the two vortices coincide, constituting a single steady solution, figure 19b. In the unstable case, the vortices rotate around each other for any perturbation ϵ , figure 19c. The Poincaré maps for $\epsilon = 0.75$ (fourth column of figures 24 and 25) show that the area of action of the helical vortices is reduced as ϵ is closer to 1, the vortices orbit is shorter, and the volume of action of the vortices is reduced.

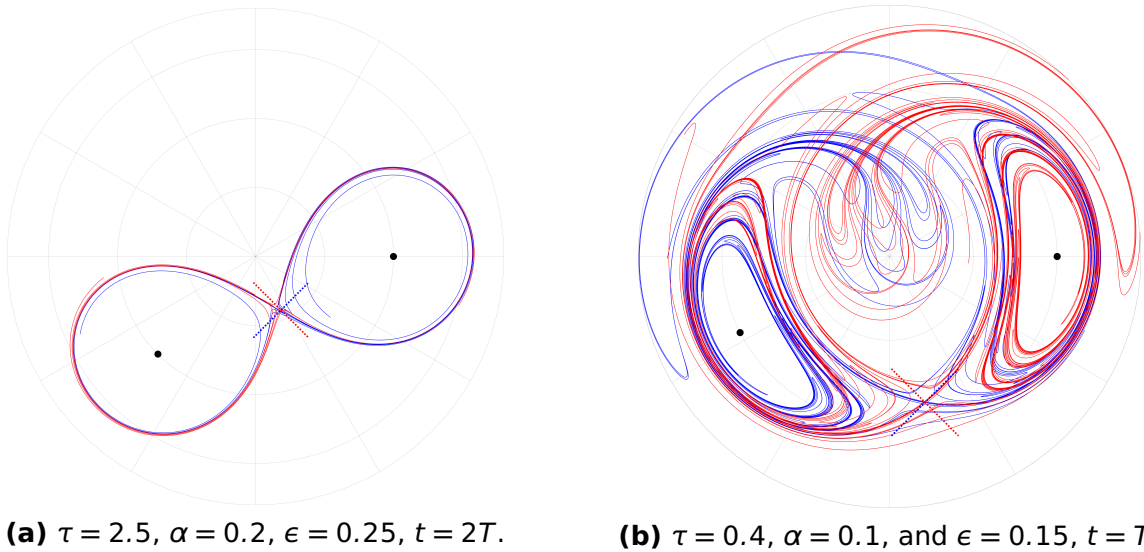


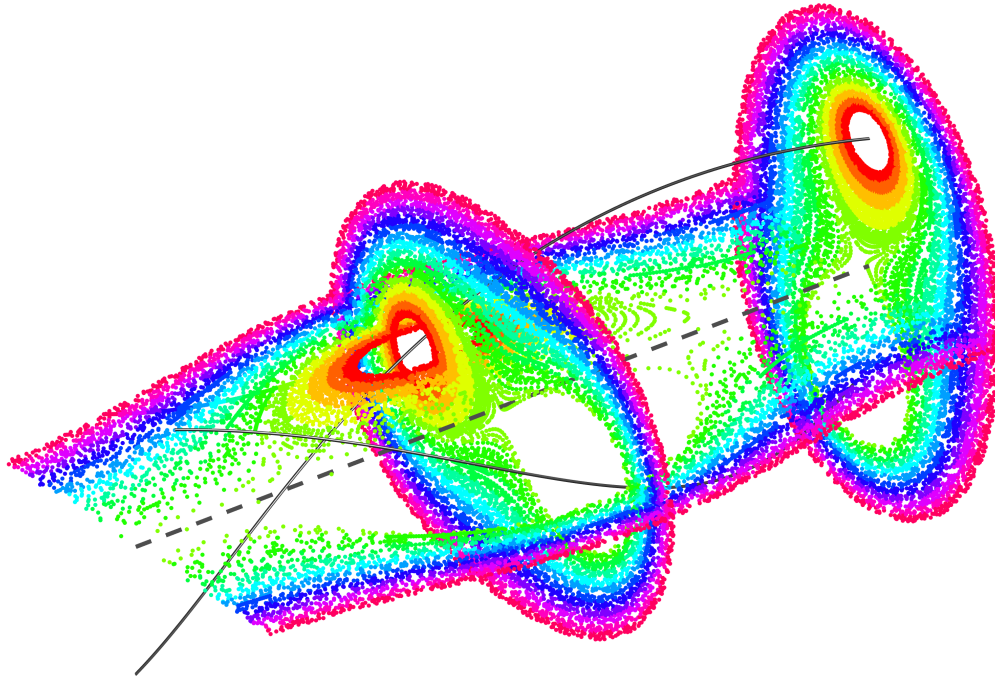
Figura 26. Manifolds in the helical plane of (a) a stable case, and (b) an unstable case. The solid blue curve corresponds to the unstable manifold μ_u and the solid red curve to the stable one μ_s . The dotted lines correspond to the initial condition of the tracers and the black dots to the helical vortices.

We continue the advection study using manifolds in the helical plane for stable and unstable vortex pairs, figure 26. In a stable vortex pair with small ϵ (figure 26a), the stable μ_s and unstable μ_u manifolds intersect within a thin band around the regions associated with the helical vortices. Those intersections indicate that there is a confined

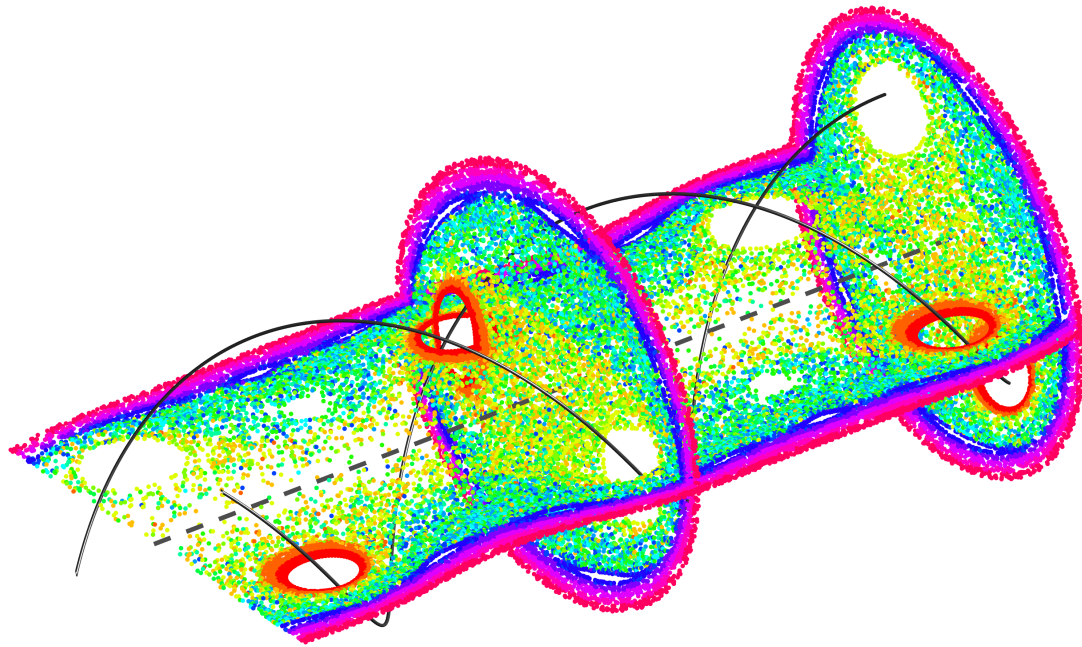
chaotic sea within this band. In an unstable case, with a small asymmetry (figure 26b), the manifolds μ_s and μ_u intersect in a larger region of the phase space, which indicates that the chaotic sea dominates spatially. This behavior confirms that vortices' stability highly influences the flow topology; instability intensifies fluid stirring.

Although the Poincaré maps and manifolds are shown in the helical plane, they represent the flow in the three-dimensional space around the tubular helical vortices. A stability island is a helical tube from which fluid cannot leave and new fluid from outside cannot enter. The chaotic sea is fluid confined in a three-dimensional region where fluid is stretched and folded. In figure 27, we present a Poincaré map in the three-dimensional space. This map shows how the different regions are distributed in the three-dimensional space. We show the particles in polar and meridional planes obtained from the inverse transformation of equation 12 in order to schematize their distribution. Even though they are shown in planes, the particles travel in the three-dimensional space outside these planes. In figure 27a, we show the flow associated with a stable vortex pair, where it is appreciated how the fluid follows well-defined curves either around both vortices or around one of them. On the other hand, in figure 27b we show the flow associated with an unstable vortex pair. The stability islands associated with vortices are smaller than for stable vortices, and the chaotic sea surrounds these two stability tubes. The chaotic sea is distinguishable as different colored particles mix with each other within it.

Finally, the manifolds are surfaces surrounding the vortices with helical symmetry, as shown in figure 28 for an unstable manifold. Vortices and manifolds are infinite in the axial direction; however, we present a $0.36L$ depth section in this direction. The color indicates the manifold's depth in the axial direction to be able to distinguish the folds. The fluid released near a hyperbolic curve in the initial condition is stretched as it flows and folds back on itself, forming increasingly fine folds that mix the fluid on smaller and smaller scales.



(a) $\tau = 2, \alpha = 0.01$ y $\epsilon = 0.05$.



(b) $\tau = 0.8, \alpha = 0.01$ y $\epsilon = 0.05$.

Figura 27. Poincaré maps in three-dimensional space. We present two polar and one meridional plane per figure. Dots of same color represent the same particle in each period multiple of T seen in different planes. Thin black tubes represent the helical vortices with their actual radius α . Dotted gray line represents the axis of symmetry. (a) Stable vortex pair, experiment 4b. (b) Unstable vortex pair, experiment 4a.

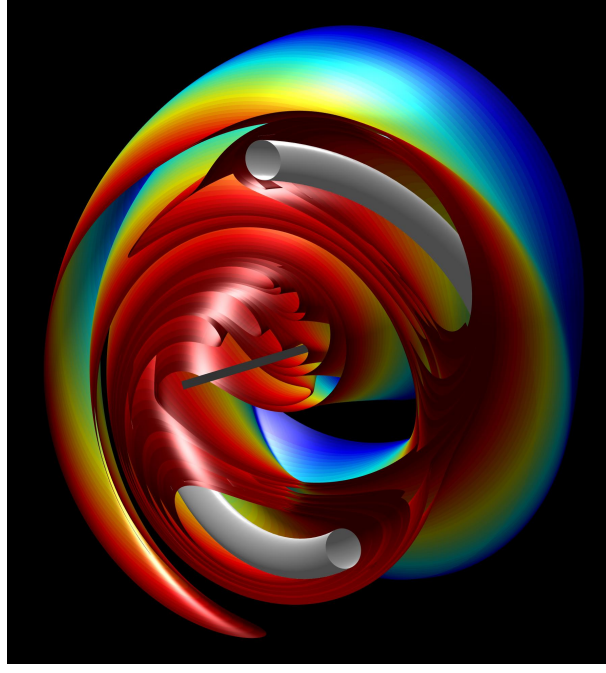


Figura 28. Unstable manifold in the three-dimensional space for two vortices with pitch $\tau = 0.4$, radius $\alpha = 0.1$, and asymmetry $\epsilon = 0.15$. The manifold is a surface with helical geometry that surrounds the vortices. The color indicates the manifold's depth in the axial direction. The dark red color indicates that the manifold is closer to the viewer, and the dark blue indicates that the manifold is further away. The white tubes represent the vortices with their real α scale and the gray line represents the axis.

3.5. Conclusions

Depending on their dimensionless parameters τ and α , two symmetric helical vortices can be stable or unstable. This was previously established for some limit cases (Delbende *et al.*, 2021). In this work, we found the boundary between stable and unstable vortex pairs in the complete range of τ and for $10^{-6} < \alpha \lesssim 0.25$. All perturbed vortex pairs develop a periodic motion. We identified four types of vortices' motion. One of them was previously identified as leapfrogging. We found that vortices with longer periods and greater amplitude around their initial radius are in the vicinity of the stability boundary. We deduced that the vortices' period and amplitude depend strongly on the pitch τ and to a lesser extent on the radius α .

Regarding the advection, stirring (associated with a large chaotic sea created by stretched and folded fluid) dominates spatially for unstable vortex pairs; so, there is only a small similarity with the topology of the symmetric case. On the other hand, the flow topology of stable vortex pairs, with a small ϵ , has significant similarities with the

topology of symmetric vortices of the same dimensionless parameters.

The flow topology has helical geometry, which means that what is observed in the helical plane extends to the three spatial dimensions while preserving this symmetry. A manifold is a sheet that stretches and folds by finely mixing the fluid around the vortex tubes. The stability islands shown in the 2D Poincaré sections are helical tubes from which fluid cannot leave and new fluid from outside cannot enter.

The periodic motion of the vortices has been previously observed in laboratory experiments and numerical simulations. Our results indicate that depending on the geometrical properties of the vortices, the fluid around them can be highly stirred.

Capítulo 4. Topología del flujo detrás de una turbina eólica

4.1. Resumen

La estela detrás de una turbina eólica afecta directamente a la eficiencia energética de una segunda turbina que se encuentra detrás. En los parques eólicos los arreglos con turbinas en hilera son comunes por lo que las diferentes estelas disminuyen considerablemente la energía que se puede extraer. Una estela se extiende, en la dirección axial, varias veces el radio de la turbina, se ensancha radialmente, disminuye la velocidad del viento y genera turbulencia. Estos fenómenos se han estado considerando recientemente en el planeamiento de parques eólicos. Por otro lado, se ha encontrado que el flujo detrás de la turbina, antes de ser turbulento, presenta vórtices helicoidales que interactúan entre ellos con un movimiento identificado como leapfrogging de vórtices helicoidales. En este trabajo, estudiamos la topología del flujo detrás de una turbina de dos aspas. La topología se obtiene para diferentes condiciones: 1. Al variar la velocidad de rotación de la turbina. 2. El ángulo de incidencia del viento. 3. Bajo un flujo entrante con un porcentaje pequeño de turbulencia, con respecto al flujo medio. 4. Al considerar que el flujo de entrada viene de la estela de otra turbina. Encontramos dos topologías diferentes al variar la velocidad de rotación de la turbina. Las diferencias entre ellas son fácilmente reconocibles en la estela con ayuda del cálculo del exponente de Lyapunov de tiempo finito y la advección de partículas. Después evaluamos el efecto del movimiento de leapfrogging en la potencia generada por una turbina en la estela de otra. Si la turbina es posicionada antes del rompimiento de los remolinos, debido al movimiento de leapfrogging, la potencia generada es poca. Por el contrario, si la segunda turbina se posiciona después del rompimiento, la potencia extraída es considerablemente mayor. En cualquier caso la potencia generada por la turbina en la estela es siempre menor a la turbina sin ningún obstáculo.

4.2. Introducción

La conversión de energía eólica en energía eléctrica ha aumentado en las últimas décadas. Globalmente en 2020 se generaron 93 GW adicionales a la potencia extraída en años anteriores. En específico, en 2020 hubo un aumento en la potencia extraída

a partir del viento del 53 % con respecto a 2019 (Global Wind Energy, 2021). Este aumento es debido principalmente a dos factores: el interés en disminuir la emisión de gases de efecto invernadero de otras fuentes de energía y al decremento en el precio de la instalación de las turbinas (Lantz *et al.*, 2012). A pesar del importante rol que tiene el uso del viento como generador de energía eléctrica, existe una gran cantidad de fenómenos físicos que afectan a la eficiencia óptima de un parque eólico y que siguen abiertos para su investigación. En esta tesis exploramos algunos de esos fenómenos que están directamente relacionados con el flujo en la estela de turbinas eólicas de eje horizontal.

Las turbinas eólicas se diseñan para obtener una potencia P_T a partir de la potencia del viento P_V :

$$P_T = C_p P_V, \quad (14)$$

donde $P_V = \frac{1}{2} \rho v_1^3 A$, C_p es el coeficiente de potencia, que oscila en el rango de 0 a 1, dado por la ecuación

$$C_p = \frac{\frac{1}{4} \rho A (v_1^2 - v_2^2) (v_1 + v_2)}{P_V}, \quad (15)$$

donde ρ es la densidad del aire, A es el área abarcada por el obstáculo, v_1 y v_2 son la rapidez del viento antes de llegar a la turbina y una vez que pasó por la turbina, respectivamente (Alaskari *et al.*, 2019). Las ecuaciones 14 y 15 indican que la potencia P_T está en función de la rapidez del viento que impacta en la turbina y su cambio debido al efecto de la misma. El coeficiente C_p máximo alcanzado por una turbina eólica es siempre menor a uno. El resultado analítico de Betz y Lanchester muestra que no puede ser mayor a 0.59 (ver, por ejemplo, Gasch & Tvele, 2011) al asumir que $v_2 = v_1/3$; por lo que, el máximo de energía aprovechable no supera el 59%. El principal problema para una turbina en funcionamiento es que el viento atmosférico está lejos de ser uniforme e ir en dirección paralela al eje de la turbina todo el tiempo. Si a esto le sumamos el hecho de que en un parque eólico la estela de una turbina se extiende hasta alcanzar a otras turbinas, la eficiencia disminuye considerablemente del 59 % disponible.

Como se comprueba con imágenes aéreas presentadas por Hasager *et al.* (2017), la estela de una turbina se extiende cientos de metros, cambiando considerablemente las condiciones atmosféricas para el resto de las turbinas en un parque eólico. Esta interacción del flujo entre turbinas disminuye la eficiencia neta del parque. Se han propuesto algunas soluciones para contrarrestar esta disminución de la eficiencia. Por ejemplo, al desactivar estratégicamente ciertas turbinas, la potencia total del parque aumenta en decenas o cientos de kilo Watts ya que la estela de estas turbinas deja de afectar a varias que están detrás (Haces-Fernandez *et al.*, 2019).

Si de construir un nuevo parque eólico se trata, hay estudios que consideran la distribución geométrica de las turbinas. Se ha propuesto que en vez de tener una distribución irregular de las turbinas, se podría haber planeado una distribución circular o hexagonal manteniendo el mismo número de turbinas (Patel *et al.*, 2019), lo que aumenta la eficiencia total del parque en alrededor del 4 %. Sin embargo, la elección de la configuración geométrica óptima es compleja ya que depende de la dirección del viento a lo largo del año, de la interacción de las estelas con las turbinas y el ángulo independiente de cada turbina (Ghaisas & Archer, 2016).

Otras investigaciones consideran el ángulo de inclinación de una o un grupo de turbinas, con respecto al ángulo predominante del viento. Numéricamente se ha estudiado la variación de la potencia de una turbina eólica al variar su ángulo de inclinación (Husaru *et al.*, 2019), la cual disminuye paulatinamente conforme se aumenta la inclinación de la turbina. En el trabajo previamente citado se utiliza una turbina de tres aspas NACA 4415 con máximos de potencia en 0.22kW. Mencionamos esta investigación en específico ya que los autores utilizan el mismo modelo numérico que empleamos en este trabajo. A pesar de que al considerar una sola turbina la potencia disminuya considerablemente con el ángulo de incidencia del viento, no pasa lo mismo si se consideran dos turbinas una detrás de la otra. Al suponer un viento uniforme que sopla paralelamente a dos turbinas en hilera, donde ambas tienen la misma orientación, la estela de la primera turbina viajará en la misma dirección del viento hacia la segunda turbina, lo cual disminuye la potencia neta, con respecto a la potencia óptima. Si se

cambia el ángulo de ataque de una o ambas turbinas, la estela también cambia su inclinación con respecto a la dirección del viento. Al considerar turbinas de tres aspas tipo NREL S826, la suma de la potencia de ambas turbinas aumenta si está a -30 ó 30 grados de inclinación, con respecto al arreglo sin inclinación (Bartl *et al.*, 2018). También se ha considerado el cambio en el ángulo de inclinación de turbinas en un parque eólico. Al realizar el ajuste del ángulo individual de cada turbina, dependiendo de la dirección predominante del viento, la eficiencia del parque Horns Rev offshore podría aumentar hasta en 7% (Dou *et al.*, 2020). En esta tesis realizamos experimentos numéricos con dos turbinas en hilera donde la primera tiene un ángulo de inclinación para mostrar que efectivamente la potencia disminuye con el ángulo de incidencia del viento.

Si nos concentramos más en la dinámica de la estela, es bien sabido que se desprenden remolinos helicoidales de los bordes de las aspas de la turbina (ver, por ejemplo, Massouh & Dobrev, 2007; Wood, 2020). Estos remolinos, a su vez, interactúan entre ellos adquiriendo un movimiento conocido como leapfrogging de vórtices helicoidales. Este movimiento ha sido identificado en experimentos de laboratorio con turbinas de viento y agua (Nemes *et al.*, 2015; Quaranta *et al.*, 2016). Justo detrás de la turbina, los vórtices son desprendidos y mantienen su forma durante un periodo de tiempo, ésta es la zona estacionaria. En una región intermedia, zona de inestabilidad, los vórtices adquieren un movimiento que se conoce como inestabilidad o movimiento de leapfrogging. En una tercera región, zona turbulenta, la inestabilidad crece lo que deforma a los remolinos hasta que se puede considerar que contribuye a la turbulencia del entorno (Lignarolo *et al.*, 2014, 2015). La distancia, desde la turbina, en donde se presenta el movimiento de leapfrogging depende del tamaño de la perturbación inducida en la turbina o el flujo y el parámetro $\lambda = 2\pi fR/U_\infty$, donde f es la frecuencia de oscilación de la turbina, R es su radio y U_∞ es la rapidez del viento que llega a la turbina. La perturbación puede ser una diferencia en el radio de las aspas (como realizaron Quaranta *et al.*, 2019), turbulencia en el viento (Lignarolo *et al.*, 2015) u otras perturbaciones que rompen la simetría de los vórtices. En nuestro trabajo la perturbación está presente en el viento que viene hacia la turbina. El campo de velocidades es descompuesto en el espacio de las frecuencias (Veers, 1988) desde el cual se puede predefinir la cantidad máxima de valores aleatorios de la rapidez del viento alrededor

de un valor medio (ver, por ejemplo, Sanderse *et al.*, 2011, para una breve explicación de cómo se utilizan estos modelos de viento perturbado).

El movimiento, o inestabilidad, de leapfrogging ha sido estudiado al aislar a los remolinos de cualquier fuerza externa, incluidas fronteras sólidas. Al aislarlos y considerarlos en un fluido incompresible e inviscido, los remolinos realizan este movimiento de manera periódica sin perder su geometría helicoidal, incluso con ruido añadido al centro de los remolinos (Hietala *et al.*, 2016). Como ya se concluyó en la segunda parte de esta tesis, los vórtices aislados pueden formar un arreglo estable o inestable dependiendo de sus propiedades geométricas. A su vez, la estabilidad juega un papel importante en el agitación del fluido alrededor de los remolinos. En este trabajo comparamos la topología del flujo, antes de que se presente el movimiento de leapfrogging, con el trabajo de Velasco Fuentes (2018b) para dos vórtices helicoidales. Cabe mencionar que para esta investigación utilizamos una turbina de dos aspas ya que los estudios donde se ha encontrado su impacto en la estela utilizan este mismo número de aspas (Lignarolo *et al.*, 2015; Quaranta *et al.*, 2019, y el tercer capítulo de esta tesis).

Los resultados de esta tesis indican que la distancia, desde la turbina, donde se da el movimiento de leapfrogging, disminuye conforme aumenta la turbulencia en el viento. Además, si una segunda turbina se posiciona en la zona estacionaria o en la zona de inestabilidad, la potencia generada es menor a si se posiciona en la zona turbulenta. En otras palabras, la distancia óptima entre dos turbinas alineadas depende de la intensidad de la perturbación en el viento.

4.3. Metodología

Utilizamos el modelo numérico Qblade (Marten *et al.*, 2013, 2016) para simular a una turbina de viento de dos aspas NREL 5MW (Jonkman *et al.*, 2009). La velocidad alrededor de la turbina y en la estela se calcula a partir de la contribución del viento u_∞ y la velocidad inducida por los remolinos u_ω , ecuación 16. La velocidad del viento es una variable definida por nosotros. La velocidad u_ω se calcula a partir de la aproxi-

mación de Rosenhead-Moore de la ley de Biot-Savart, ecuación 17.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty + \mathbf{u}_\omega, \quad (16)$$

$$\mathbf{u}_\omega = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{x} - \mathbf{r}(s) \times d\mathbf{r}]}{[|\mathbf{x} - \mathbf{r}(s)|^2 + \delta^2 l_0^2]^{3/2}}, \quad (17)$$

donde Γ es la circulación, $\mathbf{x}$ es la posición en donde se calcula la velocidad inducida por el vórtice, $\mathbf{r}$ representa a su posición, l_0 es la longitud del remolino en la dirección $\mathbf{r}$ y δ es un factor, menor a 1, de esta longitud. Es decir que el núcleo del modelo numérico Qblade es el mismo que el utilizado en el capítulo 3 de esta tesis. El término $\delta^2 l_0^2$ permite calcular la velocidad autoinducida de un remolino en el núcleo de él mismo. El método para calcular la velocidad se denomina Velocidad Inducida por Vórtices Rectilíneos (Vortex-Line Induced Velocity). El método adquiere su nombre ya que la velocidad es inducida por vórtices rectilíneos para los cuales la ecuación 17 se reduce a la siguiente:

$$\mathbf{u}_\omega(\mathbf{x}_p) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{(r_1 + r_2)(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)}{r_1 r_2 (r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) + (\delta l_0)^2}, \quad (18)$$

donde $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son los vectores que apuntan desde el principio y fin del vórtice rectilíneo, posicionados en $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$, respectivamente, hacia la posición $\mathbf{x}_p$ donde se calcula la velocidad inducida (figura 29a).

Con los vórtices rectilíneos se forman vórtices anulares unidos por nodos como se muestra en la figura 29b. El viento advecta a los remolinos anulares a la estela de la turbina con velocidad $\mathbf{u}_\infty$. Conforme avanza la simulación se forma una malla de vorticidad que une a los diferentes vórtices anulares. Esta malla representa a los vórtices en la estela. La integración temporal se realiza con una discretización de Euler de primer orden $\vec{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} = \vec{\mathbf{x}}_t + (\vec{\mathbf{u}}_\infty + \vec{\mathbf{u}}_\omega)\Delta t$, donde Δt es el paso de tiempo. Más detalles del modelo numérico se encuentran en Van Garrel (2003).

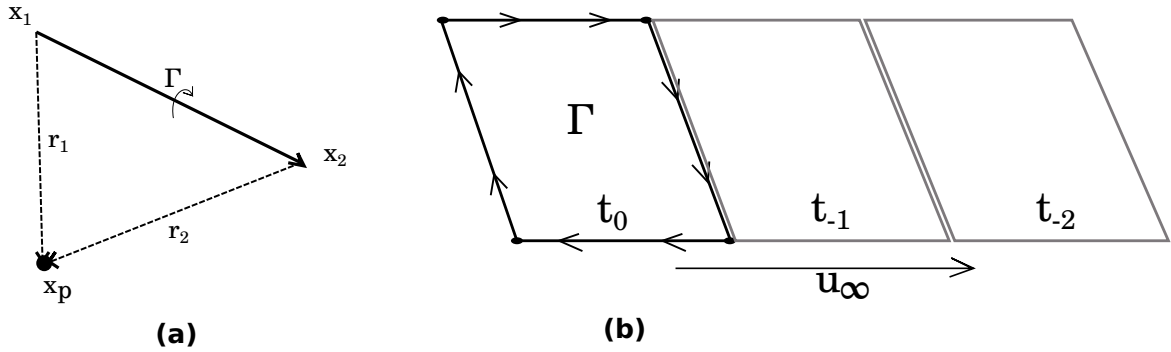


Figura 29. Esquemas de la velocidad inducida por un remolino y vórtices desprendidos en la estela. (a) Velocidad inducida por un vórtice rectilíneo. (b) Vórtice anular formado por vórtices rectilíneos unidos por nodos. El viento advecta a los remolinos conforme avanza la simulación, t_0 corresponde al tiempo presente, t_{-1} al tiempo previo y t_{-2} a dos pasos de tiempo previos.

El modelo utilizado estrictamente no simula a una turbina giratoria, sino que modela a la vorticidad asociada a una turbina real. La circulación Γ de cada vórtice anular en el tiempo t_0 es obtenida de datos medidos de turbinas reales. Además, las aspas son divididas en secciones, como se muestra en la figura 30. El valor de la circulación de cada sección depende de su geometría y ángulo de ataque. De esta manera, en cada tiempo se genera una cadena de vórtices anulares para cada sección de la turbina. La turbina que utilizamos consta de dos aspas simétricas NREL 5MW (Jonkman *et al.*, 2009) de 63 metros en la dirección radial, una de ellas se puede apreciar en la figura 30.

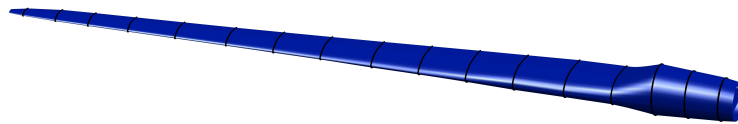


Figura 30. Aspa NREL 5MW dividida en secciones con límites en las curvas negras.

Utilizamos tres tipos de simulaciones principales que se diferencian en la velocidad angular de la turbina: $\Omega = 2.5, 5$ y 15 rpm , respectivamente. Algunos parámetros importantes que no varían, independientemente de la simulación, se encuentran en la tabla 2. Dada la velocidad angular, el radio de la turbina y la rapidez del viento, las tres simulaciones antes mencionadas están asociadas a tres tipos de rapidez adimensional λ igual a 1.37, 2.75 y 8.25, respectivamente.

Tabla 2. Valores constantes independientemente de la simulación realizada.

Parámetro	Valor
Altura del eje de la turbina	200 m
Radio de la turbina (R)	63 m
Velocidad media del flujo ($ u_\infty $)	43.2 km/h
Viscosidad cinemática (ν)	$1.646 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
Densidad del aire (ρ)	1.225 kg/m^3

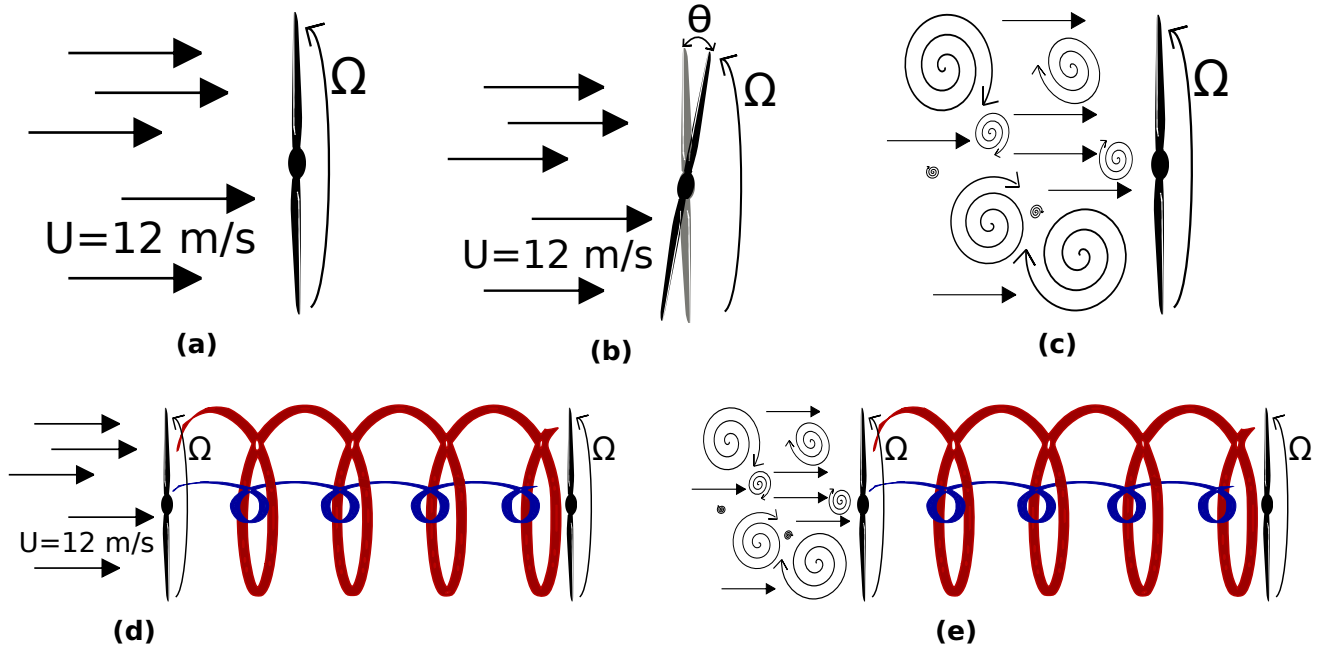


Figura 31. Esquemas de vista superior de arreglos de turbinas. (a) Viento con rapidez constante que sopla hacia una turbina sin inclinación. (b) La turbina tiene una inclinación horizontal con respecto al viento. (c) El viento es turbulento con oscilaciones alrededor de 12 m/s. (d) Igual que el caso (a) pero se considera una segunda turbina a 6 diámetros de la primera. (e) Igual que el caso (c) pero se considera una turbina, sin inclinación, a diferentes distancias de la primera.

A lo largo de este trabajo mostraremos diferentes arreglos de turbinas y vientos. Por ello, a continuación los definimos: El arreglo principal es donde un viento uniforme sopla paralelamente al eje de una única turbina, figure 31a. Para el segundo caso tenemos el mismo viento uniforme pero ahora sopla hacia una turbina con una inclinación horizontal dada por θ , figura 31b. En el tercer caso, el viento presenta diferentes intensidades de turbulencia y sopla paralelamente al eje de la turbina, figura 31c. El cuarto caso es igual al primero pero ahora consideramos el efecto de la estela en una segunda turbina a una distancia de 6 diámetros, figura 31d. Para el último caso estudiamos a un par de turbinas, una detrás de la otra a diferentes distancias, bajo un

viento con diferentes intensidades de turbulencia, figura 31e.

La consideración de que la velocidad angular de las turbinas varía sin que la rapidez del viento lo haga, es irreal; sin embargo, lo importante es el valor de la velocidad adimensional λ , en este trabajo se consideran 3 diferentes valores. Cuando estudiamos a dos turbinas, una detrás de otra, consideramos que la de atrás gira a la misma velocidad que la primera, esto lo realizamos para comparar la reducción en la potencia obtenida por la turbina en la estela sin modificar la velocidad angular.

Para la turbulencia en el viento, utilizamos un método construido específicamente para turbinas eólicas (Veers, 1988). Este método simula a la turbulencia en un corte polar del viento corriente arriba. La componente axial del viento oscila aleatoriamente alrededor del valor medio, como se muestra en la figura 32a. El viento turbulento viaja hacia la turbina, interactúa con ella y con la estela. La energía de las componentes del viento turbulento está distribuida en diferentes números de onda para una correcta representación de la turbulencia, tal como se presenta en la figura 32b para el viento corriente arriba con 5 % de turbulencia. Otra ventaja del método utilizado es que se puede elegir la intensidad de turbulencia en el viento. El método de (Veers, 1988) ha sido utilizado ampliamente para simular vientos turbulentos, dando resultados realistas, (ver, por ejemplo, Sutherland, 1999; Sørensen *et al.*, 2001)

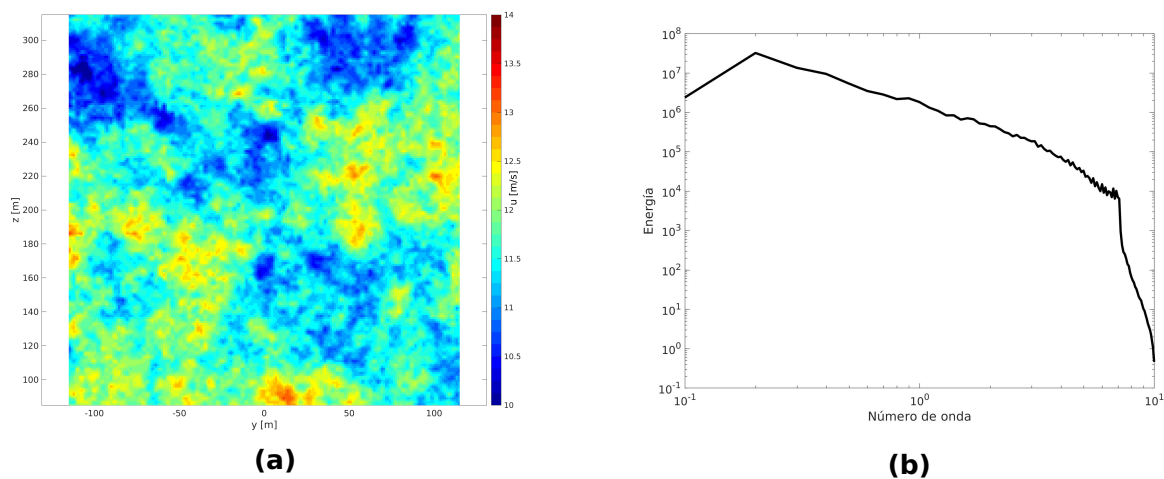


Figura 32. Distribución del viento turbulento antes de interactuar con la turbina. (a) Distribución espacial del viento. (b) Distribución de la energía del viento en función del número de onda.

El modelo numérico Qblade permite calcular variables asociadas a la turbina como la potencia y el torque. En esta tesis utilizamos a la potencia, ecuación 14, como principal indicador de la eficiencia de las turbinas. El modelo también permite simular y obtener el campo de velocidades de la estela en una malla tridimensional de espaciamiento uniforme. Con estos datos realizamos advección de partículas pasivas en la estela, integrándolas temporalmente con un esquema Runge-Kutta de cuarto orden. Para los casos donde evaluamos el impacto de una turbina en otra detrás de ella, el modelo no permite realizar la simulación de ambas turbinas en paralelo. Por lo que se genera la estela de la primera, se extrae el campo de velocidades a una cierta distancia de ella y lo ingresamos como condición de frontera de una segunda simulación.

Para estudiar la topología del flujo, calculamos el exponente de Lyapunov de tiempo finito (FTLE) en tres dimensiones (Haller, 2001) con las partículas advectadas desde su condición inicial detrás de la turbina en la zona estacionaria. El cálculo de los FTLE hacia el tiempo positivo nos permite identificar en qué regiones se está estirando el fluido. Después comparamos los máximos del FTLE con las separatrices del flujo inducido por dos vórtices helicoidales simétricos (Velasco Fuentes, 2018b). Para realizar el cálculo de FTLE, primero se necesita advectar una malla de partículas pasivas, inicialmente equidistantes en $\mathbf{x}(\mathbf{t} = \mathbf{0})$, dada la ecuación

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u} \quad (19)$$

donde $\mathbf{u}$ es la velocidad en la estela dada por la ecuación 16. Después, se calcula el gradiente de deformación en tres dimensiones:

$$\nabla \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}(t + \tau)}{\partial \mathbf{x}(t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(t + \tau)}{\partial x(t)} & \frac{\partial x(t + \tau)}{\partial y(t)} & \frac{\partial x(t + \tau)}{\partial z(t)} \\ \frac{\partial y(t + \tau)}{\partial x(t)} & \frac{\partial y(t + \tau)}{\partial y(t)} & \frac{\partial y(t + \tau)}{\partial z(t)} \\ \frac{\partial z(t + \tau)}{\partial x(t)} & \frac{\partial z(t + \tau)}{\partial y(t)} & \frac{\partial z(t + \tau)}{\partial z(t)} \end{bmatrix} \quad (20)$$

El siguiente paso es descomponer a la matriz $\nabla \mathbf{F}$ en sus valores singulares (SVD):

$$\mathbf{USV} = \nabla \mathbf{F}. \quad (21)$$

El exponente de Lyapunov de tiempo finito se obtiene de los valores singulares del gradiente de deformación, correspondientes a la diagonal de $\mathbf{S}$ de la forma

$$L = \log(| \max(S_{diag}) |). \quad (22)$$

Para cada nodo de la malla de partículas se obtiene un valor del FTLE.

Para este trabajo no consideramos los efectos del suelo y su impacto en el perfil vertical de velocidad. También consideramos que el mástil de la turbina no tiene efectos en la estela. Estos efectos se pueden agregar en el modelo que utilizamos; sin embargo, nos interesa cuantificar únicamente la interacción del viento, la turbina y la estela.

4.4. Resultados

Dividimos los resultados en tres partes. La sección 4.4.1 muestra la topología del flujo en diferentes arreglos de turbinas. La sección 4.4.2 muestra el fenómeno de leap-frogging en la estela y su variación dependiendo de la cantidad de turbulencia en el viento incidente. Finalmente, la sección 4.4.3 presenta el cambio en la eficiencia dependiendo del arreglo de turbinas seleccionado.

4.4.1. Topología del flujo en la estela

La turbina de dos aspas modelada con Qblade desprende un total de cuatro vórtices helicoidales en total, dos externos y dos internos como se muestra en la figura 33. Por lo que la topología del flujo en la estela estará determinada por el flujo medio y el inducido por los vórtices.

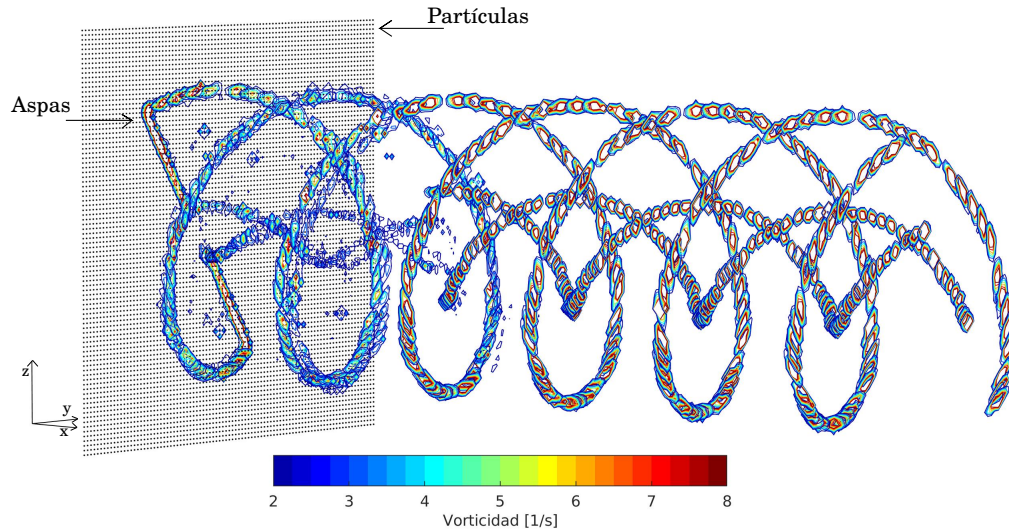


Figura 33. Isocontornos de vorticidad en la estela.

Para estudiar la topología del flujo en la estela de una turbina posicionamos un plano de 211×191 partículas a una distancia corta de la turbina en la zona estacionaria, como se muestra en la figura 33. En esta zona las partículas no son afectadas inicialmente por la inestabilidad de los remolinos. Después advectionamos las partículas un tiempo τ para calcular el campo del FTLE como describimos en la metodología. En la figura 34 se presenta este campo para las tres diferentes velocidades adimensionales λ utilizadas. Para el caso con λ más baja, figura 34a, se observan 5 regiones diferentes aisladas por valores altos del FTLE: Cuatro de ellas están asociadas a los cuatro remolinos helicoidales desprendidos (regiones I y II, respectivamente), la quinta región es el resto de espacio que rodea a los remolinos, región III. Para λ intermedia, figura 34b, se observan 7 regiones aisladas por valores altos del FTLE: Las cuatro asociadas a los remolinos, dos regiones que separan a los vórtices internos de los externos (regiones IV) y la región externa que se extiende hasta infinito, región V. Para λ alta, figura 34c, también se aprecian 7 regiones: Las asociadas a los vórtices, una región central (región VI), una banda que separa a los vórtices internos de los externos (región VII) y la región externa.

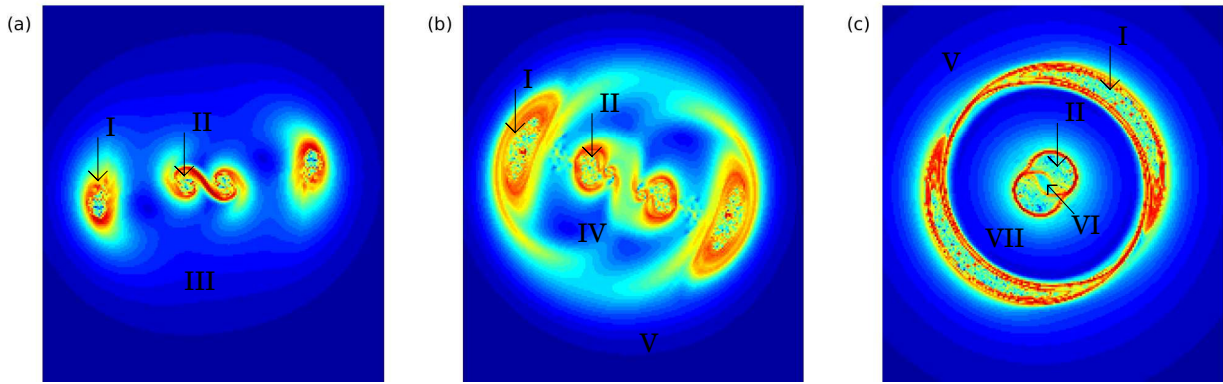


Figura 34. FTLE en la estela de una turbina eólica para los arreglos principales. (a) $\lambda = 1.37$, (b) $\lambda = 2.75$ y (c) $\lambda = 8.25$. Los tonos rojos representan a los valores altos del FTLE.

Calculamos la velocidad axial, que es paralela al eje de la turbina, con las partículas pasivas. Esto nos provee información de en qué regiones el fluido se está frenando ya que presenta valores menores a la rapidez media $u_\infty = 12 \text{ m/s}$. Para λ pequeña, figura 35a, la velocidad axial en la estela se reduce poco, con los valores más bajos cerca de 11.5 m/s . Para λ intermedia, figura 35b, los valores más bajos de la rapidez axial son cerca de 11 m/s . Para λ grande, figura 35c, se observa una distribución de la velocidad axial más marcada que es similar a la topología revelada por el FTLE de la figura 34c. En este caso los valores más bajos de la rapidez se encuentran en la región VII donde alcanzan valores de 8 m/s . La velocidad axial asociada a la región de los vórtices (I y II) se reduce a cerca de 10.5 m/s . La región externa (V) y la central (VI) no sufren gran reducción en la rapidez axial.

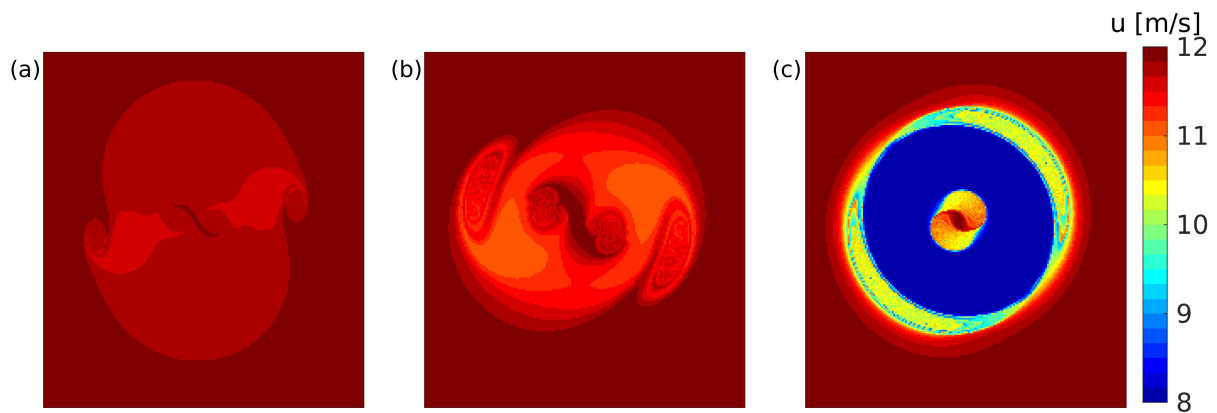


Figura 35. Velocidad axial de las partículas pasivas. (a) $\lambda = 1.37$, (b) $\lambda = 2.75$ y (c) $\lambda = 8.25$.

La topología del flujo alrededor de los vórtices centrales para λ pequeña presenta grandes similitudes con la topología del flujo para vórtices de paso grande (topología 4 de Velasco Fuentes, 2018b): esta topología está caracterizada por un punto hiperbólico en el centro y dos puntos elípticos asociados a los remolinos (figura 36a); además, existen tres regiones: dos asociadas a los remolinos y una a la región externa. Las mismas regiones se observan en el flujo interior de la estela, figura 36b. Por otro lado, la topología de la estela central para λ grande, figura 36d, es similar a la geometría del flujo debido a dos vórtices helicoidales de paso intermedio, figura 36c, (topología 3 de Velasco Fuentes, 2018b). Ambos flujos presentan 4 regiones diferentes: dos asociadas a los vórtices helicoidales, una región central y la región externa. En el caso del flujo en la estela, la región externa es en realidad la banda que separa a los vórtices internos de los externos, región VII. Para ambas λ , los valores altos del FTLE están asociados a la posición aproximada de la variedad inestable (Shadden *et al.*, 2005) que para un flujo estacionario coincide con las separatrices. La distribución de los valores altos del FTLE del flujo interior de la estela coincide con las separatrices del flujo estacionario debido a dos vórtices helicoidales.

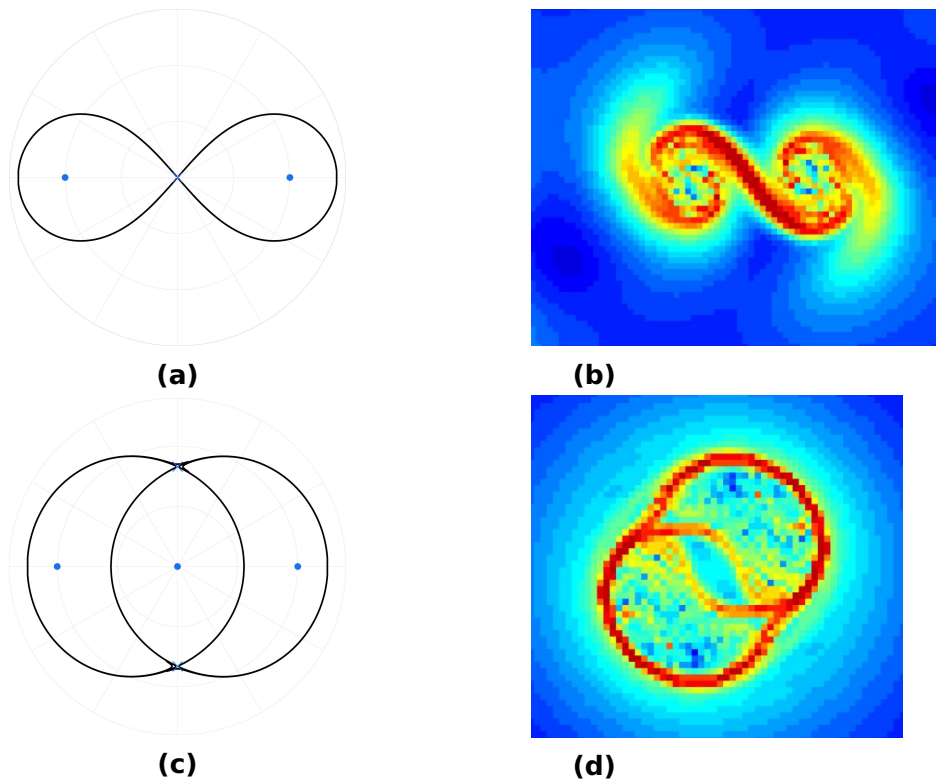


Figura 36. Topología del flujo debido a dos vórtices helicoidales. (a) y (c) corresponden a las separatrices del flujo debido a dos vórtices helicoidales simétricos (Velasco Fuentes, 2018b), donde los puntos representan a puntos elípticos y las cruces a puntos hiperbólicos. (b) y (d) son un acercamiento de las figuras 34a y 34c para observar el FTLE al interior de la estela.

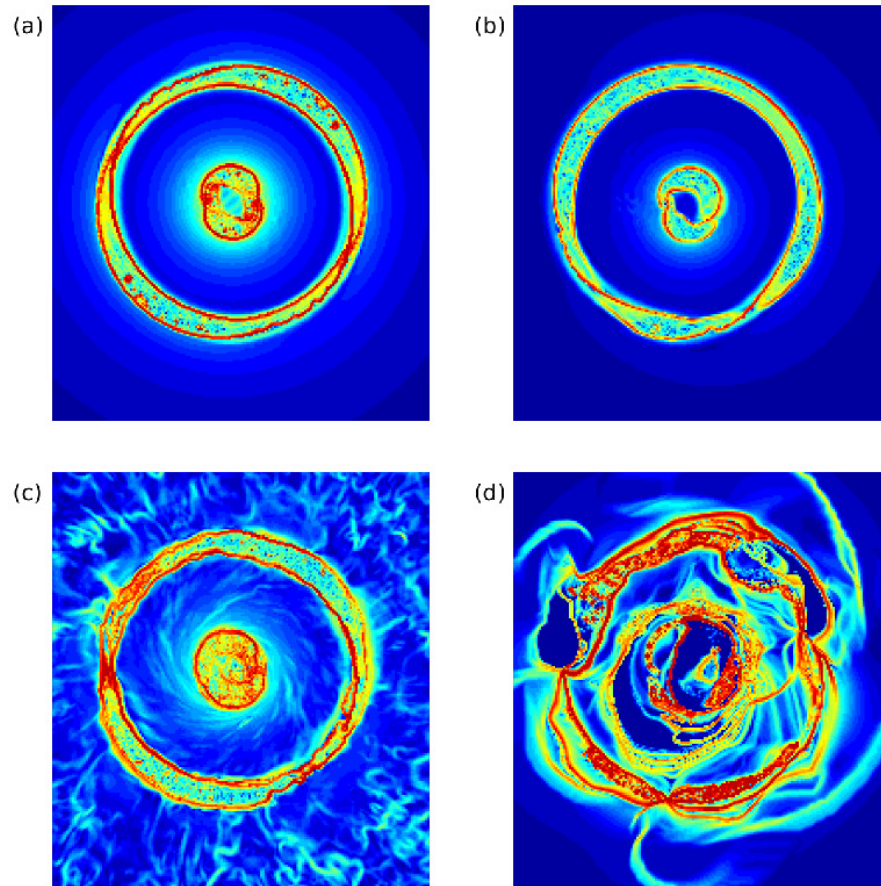


Figura 37. FTLE para diferentes arreglos de turbinas con $\lambda = 8.25$. (a) Turbina sin inclinación en un flujo uniforme correspondiente a la figura 31a. (b) Turbina con una inclinación de 10° en un flujo uniforme correspondiente a la figura 31b. (c) Turbina sin inclinación en un flujo con 10% de turbulencia correspondiente a la figura 31c. (d) Turbina distanciada 6 diámetros de una primera turbina, sin inclinación ni turbulencia en el viento correspondiente a la figura 31d, en este último caso el campo de FTLE representa al flujo de la segunda estela.

La topología del flujo para λ pequeña e intermedia cambia poco al variar el ángulo de incidencia del viento o agregar un porcentaje pequeño de turbulencia al flujo medio, por lo que no mostramos las figuras correspondientes. Por tal motivo, concentramos el estudio del cambio en la topología del flujo de la estela para $\lambda = 8.25$. Calculamos el exponente de Lyapunov de tiempo finito en la estela de una turbina con 10° de inclinación con respecto al viento uniforme. En este caso se observa una asimetría en la topología, figura 37b: el área asociada a uno de los remolinos internos crece y la otra disminuye. Para los vórtices externos, los contornos de valores altos del FTLE se entrelazan en el espacio. También calculamos el campo de FTLE para la estela detrás de una turbina, sin inclinación, bajo un viento con 10% de turbulencia, figura 37c: los valores más altos del FTLE son perturbados espacialmente pero se mantiene la es-

estructura de los remolinos; además, se observan valores intermedios del FTLE en todo el espacio debido a las estructuras lagrangianas asociadas a la turbulencia del viento incidente. Finalmente, mostramos el FTLE asociado a la estela de una turbina que ya se encuentra en la estela de una primera, figura 37d: en este caso es difícil diferenciar al área asociada a cada uno de los cuatro remolinos. Esto se debe a que los remolinos de la primera turbina llegan a la segunda turbina e interactúan con los vórtices que desprende.

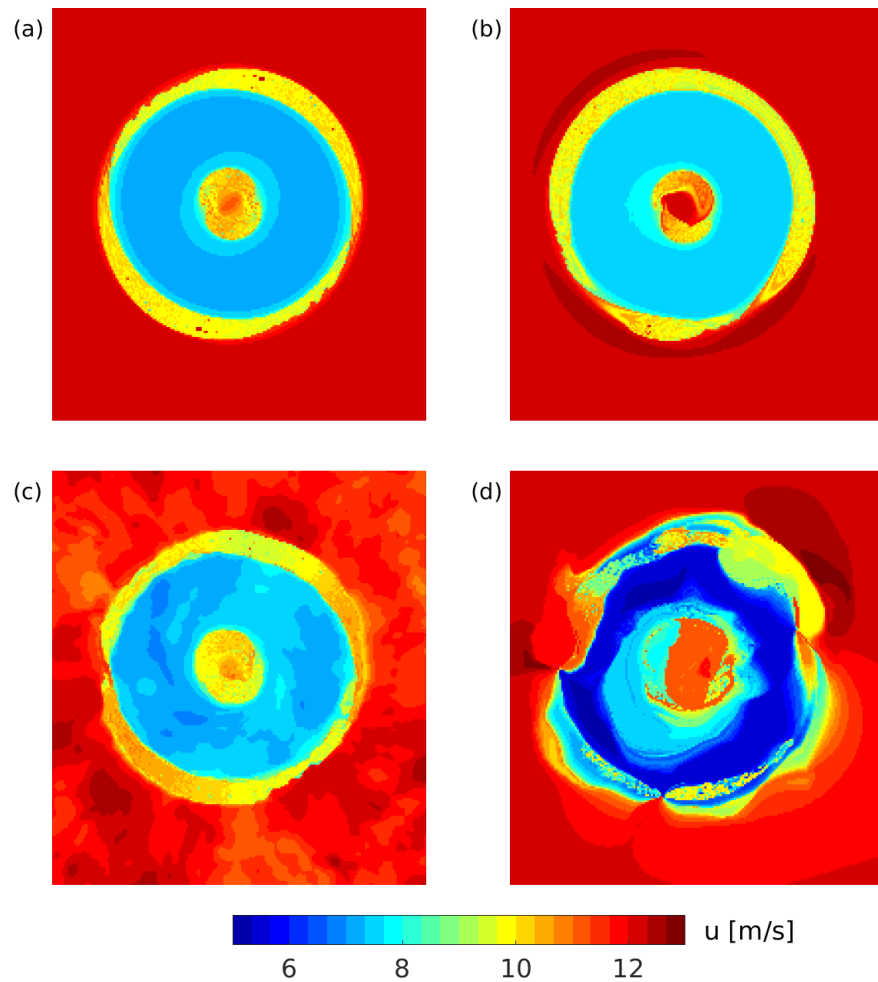


Figura 38. Rapidez de viento en la dirección axial detrás de turbinas con $\lambda = 8.25$. (a) Turbina sin inclinación en un flujo uniforme correspondiente a la figura 31a. (b) Turbina con una inclinación de 10° en un flujo uniforme correspondiente a la figura 31b. (c) Turbina sin inclinación en un flujo con 10% de turbulencia correspondiente a la figura 31c. (d) Turbina distanciada 6 diámetros de una primera turbina, sin inclinación ni turbulencia en el viento correspondiente a la figura 31d, en este último caso el campo de la rapidez de viento representa al flujo en la segunda estela.

Con las partículas también calculamos la distribución espacial de la rapidez axial en la estela para los mismos arreglos de los que ya mostramos el campo de FTLE en

la figura 37, es decir para $\lambda = 8.25$. Para la estela detrás de una turbina sin inclinación ni turbulencia los valores más bajos de la rapidez axial, a la que viajan las partículas, están cerca de 8 m/s, figura 38a, como ya se había mencionado. Con una inclinación de 10° , estos mínimos no cambian pero la región donde se encuentran se deforma un poco, figura 38b. Con 10% de turbulencia en el viento, la estela muestra la misma distribución en la velocidad axial aunque hay regiones donde la rapidez mínima alcanza 7 m/s, figura 38c. Finalmente, la velocidad axial en la estela de la segunda turbina presenta valores mínimos cercanos a 5 m/s; además de mayor deformación en las regiones donde se dan estos valores, figura 38d.

4.4.2. Movimiento de leapfrogging en la estela

Al existir una perturbación en el flujo, la estela se desestabiliza. En el caso de Quaranta *et al.* (2019) la perturbación es una diferencia en el radio de las aspas de la turbina. En nuestro caso (y en el trabajo experimental de Lignarolo *et al.*, 2015) la perturbación es un porcentaje de turbulencia en el viento que llega a la turbina, como se muestra en la figura 31c. Los experimentos numéricos de esta sección se realizaron a una velocidad adimensional $\lambda = 8.25$ constante. En la figura 39 se presenta la evolución temporal de la estela donde se aprecia el movimiento radial de los vórtices helicoidales. Conforme transcurre el tiempo, los remolinos alcanzan la región de inestabilidad donde uno de ellos aumenta su radio localmente mientras que el segundo lo disminuye. Los vórtices internos también realizan este movimiento.

La distancia a la que los vórtices se desestabilizan y adquieren el movimiento de leapfrogging depende de la intensidad de la perturbación. En nuestro trabajo, esta distancia depende de la turbulencia en el viento de entrada. Para mostrar esto, promediamos la vorticidad en el plano meridional usando 33.2 segundos una vez que la estela está completamente desarrollada, figura 40. Con una turbulencia en el viento de 2% los vórtices externos adquieren el movimiento de leapfrogging cerca de $x/D = 2.5$ y los vórtices internos cerca de $x/D = 2.25$. Con 5% de turbulencia estos valores se recorren a $x/D = 1.9$ y 1.6, respectivamente. Con 10% de turbulencia nuevamente se recorren a $x/D = 1.4$ y 0.75, respectivamente. Finalmente, con 15% de turbulencia los movimientos de leapfrogging no se desarrollan significativamente más cerca de la

turbina, con respecto al experimento con 10% de turbulencia.

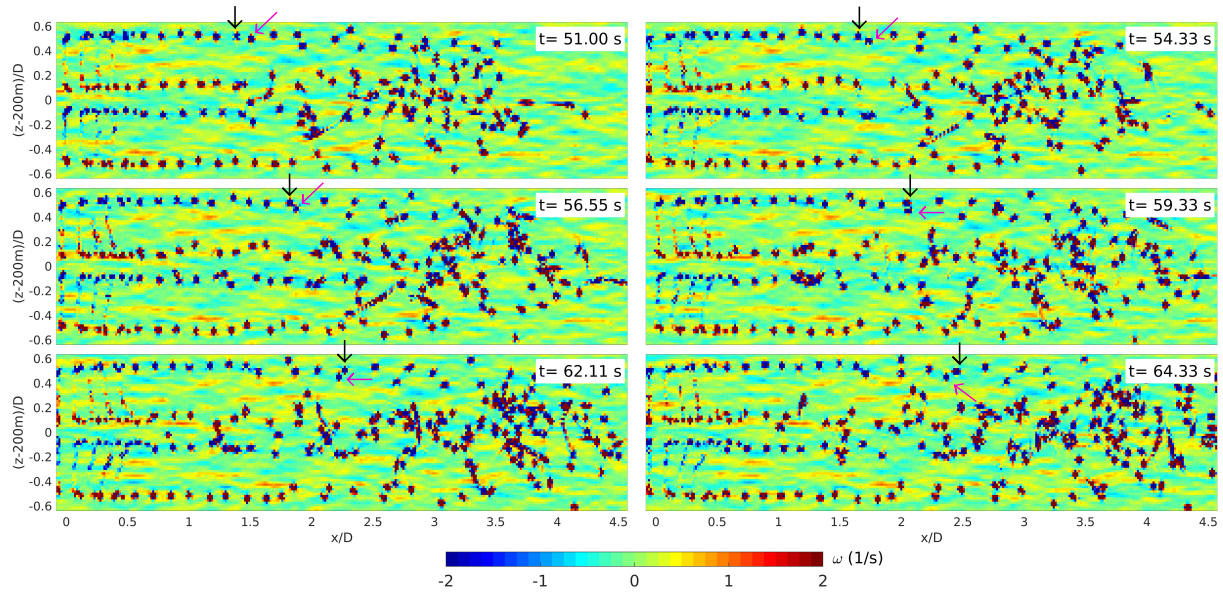


Figura 39. Cortes meridionales de magnitud de la vorticidad en la estela de una turbina sometida a un viento con 10% de turbulencia. Las flechas indican la posición del núcleo de dos vórtices en diferentes tiempos, cada color es para un remolino.

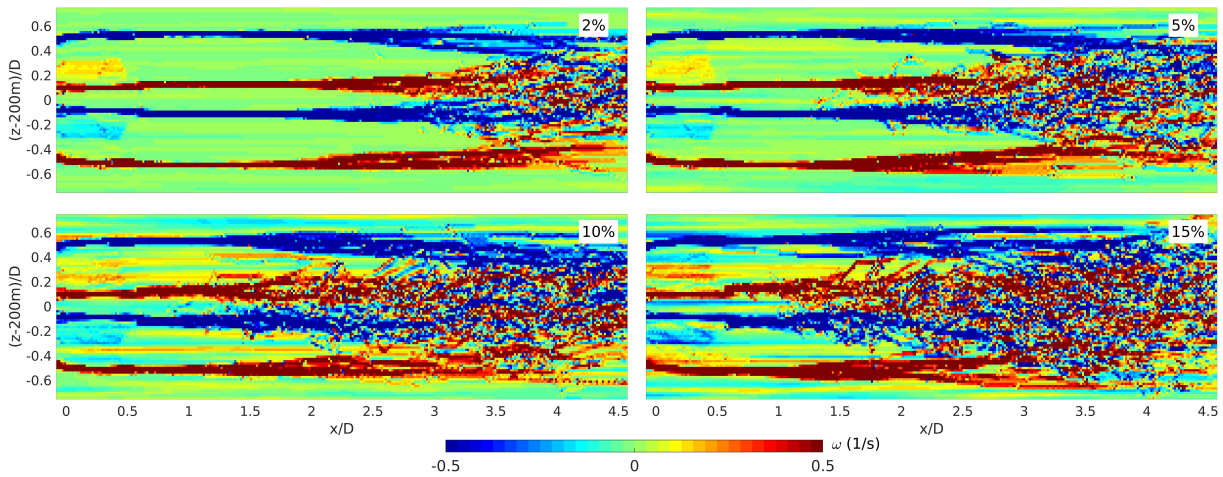


Figura 40. Vorticidad en la estela: Promedio de 272 fotogramas equivalentes a 33.2 segundos. Cada panel presenta a la vorticidad promedio para una magnitud diferente de turbulencia dada en la esquina superior derecha.

4.4.3. Eficiencia energética de los diferentes arreglos de turbinas

En esta sección presentamos los resultados de la eficiencia energética de cada arreglo de turbina con $\lambda = 8.25$. Primero mostramos la potencia generada por los arreglos (a) a (d) de la figura 31. La tabla 3 presenta 8 experimentos numéricos donde las

columnas 2 a 5 muestran las características que los diferencian. La potencia bajo un viento uniforme sobre una turbina sin inclinación es cercana a los 6MW. Este valor disminuye si existe una inclinación de la turbina y es cada vez menor conforme el ángulo aumenta, experimentos 2 a 4. Si la turbulencia en el viento es pequeña, la potencia no sufre grandes cambios, experimentos 5 y 6. Si la turbulencia es mayor, la potencia promedio disminuye un poco y su desviación estándar aumenta considerablemente, experimento 7. Finalmente, si la turbina se encuentra en la estela de una primera, sin inclinación ni turbulencia y a 6 diámetros de distancia, la potencia disminuye cerca de 35 % de la potencia generada por la turbina sin obstáculos.

Tabla 3. Potencia de una turbina eólica de velocidad adimensional $\lambda = 8.25$ bajo diferentes arreglos o flujos de viento. La primera columna presenta el número del experimento numérico. La segunda columna el ángulo de inclinación horizontal de la turbina, con respecto al viento. La tercera columna muestra el porcentaje de turbulencia en el viento de entrada. La cuarta columna muestra si la turbina evaluada está en la estela de una primera, de ser así, la quinta columna presenta a que distancia adimensional está. La sexta columna presenta el valor promedio de la potencia y la séptima columna su desviación estándar.

Exp.	Ángulo [°]	% Turb.	En estela	Distancia x/D	Potencia [MW]	std [MW]
1	0	0	No	–	6.02	0.26
2	10	0	No	–	5.85	0.24
3	15	0	No	–	5.63	0.23
4	30	0	No	–	4.54	0.17
5	0	2	No	–	5.89	0.24
6	0	5	No	–	6.13	0.24
7	0	10	No	–	5.96	0.52
8	0	0	Sí	6	3.87	0.21

En la sección 4.4.2 se presentó cómo la zona de inestabilidad en la estela se recorre hacia la turbina que los genera conforme la turbulencia del viento aumenta. Además, a mayor turbulencia en el viento, la zona de inestabilidad se recorre cada vez menos. En esta sección mostramos que la potencia de una turbina en la estela de una primera depende de su posición respecto a la zona de inestabilidad. Mostramos a la potencia P adimensionalizada $P_{ad} = P/P_0$ por la potencia generada por una turbina bajo un viento uniforme sin inclinación P_0 , experimento 1 de la tabla 3. En la figura 41a presentamos la potencia promedio extraída por una turbina en la estela de una primera, donde la primera turbina interactúa con un viento paralelo a su eje con un porcentaje de turbulencia de 2 % ó 5 %. Si posicionamos a la turbina cerca de la primera, la potencia es baja y se mantiene así mientras se encuentre en la zona estacionaria o en la zo-

na de inestabilidad. Bajo un viento con 2 % de turbulencia la potencia se mantiene cerca del $P_{ad} = 0.61$ de la potencia generada por una turbina en un viento uniforme. Se mantiene con pocos cambios hasta $x/D = 3.5$ aproximadamente, después la potencia aumenta linealmente hasta $P_{ad} = 0.70$ a 6 diámetros de distancia. Con 5 % de turbulencia, este valor crítico se recorre a cerca de 2.5 diámetros. La distancia crítica en donde la potencia extraída aumenta es representada por la intersección de los ajustes lineales en la figura 41a. Estas intersecciones coinciden con el rompimiento de los vórtices helicoidales debido a la inestabilidad de leapfrogging (inicio de la zona de inestabilidad). Al aumentar más la turbulencia en el viento de entrada, a 10 % y 15 %, la potencia extraída por la turbina en la estela sigue aumentando con la distancia; sin embargo, ya no existe una distancia crítica clara a la que la turbina extraiga más energía de la estela. Con 10 % y 15 % de turbulencia, la distancia a la que la potencia deja de mantenerse constante para crecer linealmente sucede cerca de $x/D = 2.25$, figura 41b, con estos porcentajes de turbulencia el crecimiento de la potencia ya no obedece un comportamiento lineal.

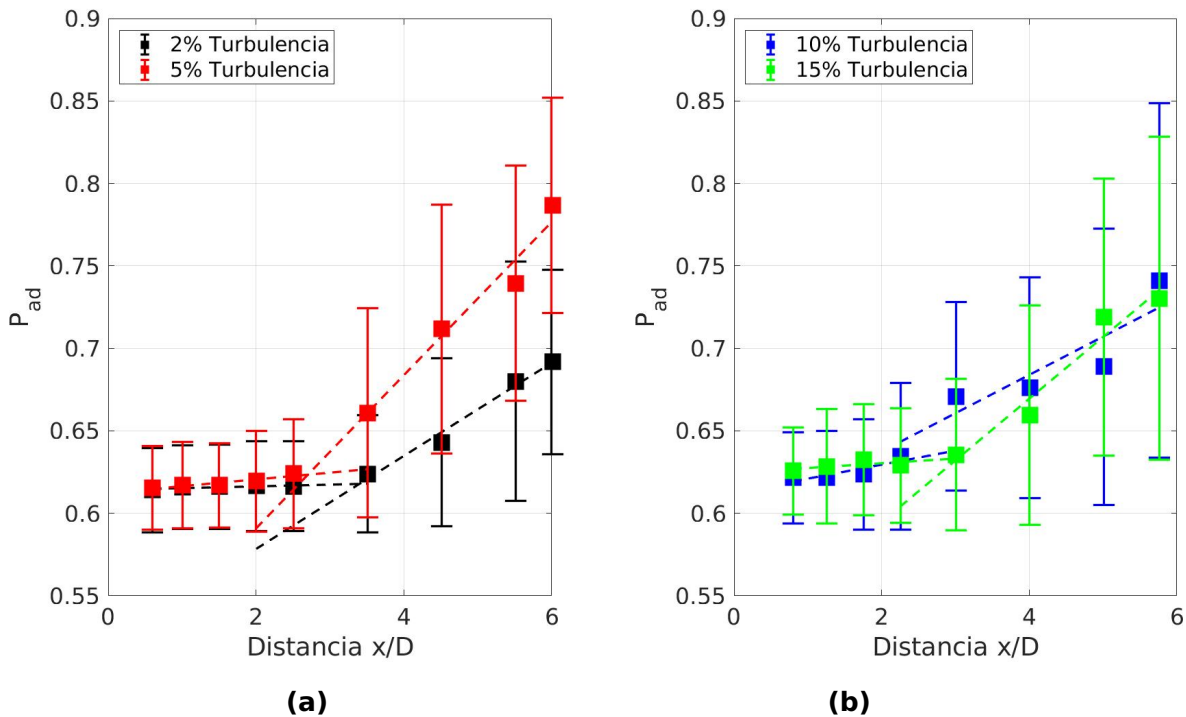


Figura 41. Potencia extraída por una turbina en la estela de una primera. El eje horizontal muestra la distancia adimensional a la que se encuentra la turbina. Los marcadores y barras negras corresponden a la potencia de las turbinas detrás de una primera turbina bajo un viento con diferentes grados de turbulencia. Los marcadores indican la potencia promedio de 60 segundos de simulación. Las barras indican la desviación estándar de la potencia extraída. Las líneas discontinuas representan ajustes lineales.

Por otro lado, la variabilidad en la potencia extraída por la turbina en la estela es baja antes de que se presente la inestabilidad de los vórtices. Si la turbina es posicionada después de la zona de inestabilidad, la variabilidad aumenta conforme está más lejos de la primera turbina. Los resultados indican que con un porcentaje intermedio de turbulencia (5 %) la potencia extraída a 6 diámetros de distancia de la primera, es mayor que si el flujo de viento presenta mayor o menor turbulencia.

4.5. Conclusiones

La topología del flujo en la estela de una turbina de dos aspas cambia dependiendo de la velocidad adimensional λ (que es un cociente entre la velocidad de rotación de la turbina y la rapidez del viento incidente). La topología del flujo en la vecindad de los vórtices internos tiene grandes similitudes con el flujo inducido por dos vórtices helicoidales infinitos y simétricos (Velasco Fuentes, 2018b). Si λ es pequeña, la topología se mantiene sin grandes cambios al añadir turbulencia al viento o inclinar la turbina. Por otro lado, si λ es grande, la topología sufre cambios, sobre todo si es el flujo de la estela de una turbina que ya es afectada por una primera. Para una velocidad adimensional alta, $\lambda = 8.25$, la banda que divide a los vórtices externos de los internos es la que presenta valores más bajos de la rapidez axial U , es decir que es de donde se puede extraer menos energía cinética del viento.

Cuando al viento se le agrega un porcentaje pequeño de turbulencia, los vórtices helicoidales en la estela se desestabilizan. Su movimiento ha sido reconocido previamente como leapfrogging de vórtices helicoidales. La distancia, desde la turbina, a la que inicia esta zona de inestabilidad disminuye conforme aumenta la turbulencia. Quaranta *et al.* (2019) observaron que esta inestabilidad se recorre hacia la turbina al aumentar λ y su existencia se debe a una asimetría en la longitud de las aspas que funciona como perturbación a los vórtices.

Si se coloca una segunda turbina en la estela de otra donde incide un viento turbulento, la potencia depende de la distancia entre ellas. Encontramos que el rompimiento de los vórtices helicoidales debido al movimiento de leapfrogging determina la canti-

dad de potencia extraída por la turbina en la estela. Si la turbina se coloca antes de que se dé el rompimiento, en las zonas estacionaria o de inestabilidad, la potencia extraída es baja. Si se coloca después, en la zona inestable, la potencia es más alta y sigue aumentando con la distancia. Tal como Abraham & Hong (2022) mencionan, los remolinos presentes en el viento (que en este caso son los vórtices helicoidales asociados a la primera turbina) provocan que la potencia sea menor a la esperada con un viento uniforme.

Capítulo 5. Discusiones generales

En esta tesis estudiamos a vórtices helicoidales desde tres casos de realismo creciente. En el capítulo 2 obtuvimos la topología del flujo debido a vórtices helicoidales de paso infinito. En el capítulo 3 obtuvimos el movimiento y flujo asociado a dos vórtices helicoidales infinitos y asimétricos. Finalmente, en el capítulo 4 estudiamos al flujo en la estela de una turbina eólica y los vórtices helicoidales que desprende. A continuación mencionamos algunas consideraciones que permiten extender los resultados de cada capítulo.

En la primera parte del capítulo 2, estudiamos al flujo inducido por vórtices puntuales colocados en los vértices de un triángulo. Al desplazar a uno de los vórtices, pasan de formar un triángulo equilátero a formar un triángulo isósceles en la condición inicial, como se muestra en la figura 42a. Aunque puede parecer que la perturbación está restringida a esta condición inicial, en realidad los vórtices pueden ser desplazados en cualquier dirección y no solo uno de ellos. Para demostrar esto, reproducimos el diagrama de fase de Aref (1979) para 3 vórtices puntuales de igual circulación, figura 43. Tres vórtices en los vértices de un triángulo equilátero son representados por un punto fijo elíptico en el centro del triángulo. Las curvas alrededor de este punto representan el movimiento de los vórtices bajo diferentes perturbaciones geométricas. Las curvas azules corresponden a la perturbación (a) de la figura 42, utilizada en este trabajo. Las curvas grises a la perturbación (b) y las curvas rojas a la perturbación (c). Las condiciones iniciales se muestran con puntos. Este diagrama implica que la perturbación usada en esta tesis es representativa de otras posiciones de los vórtices en la condición inicial. Los resultados de advección son también representativos de otros polígonos de 3 vórtices puntuales.

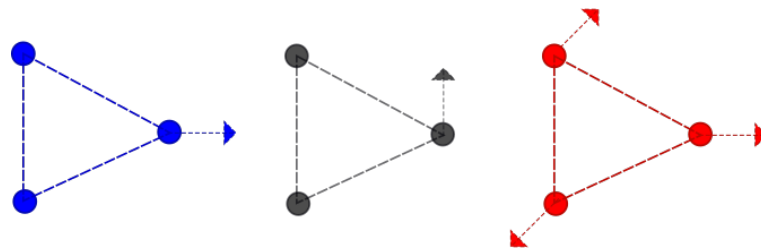


Figura 42. Tres diferentes tipos de perturbación a los vórtices puntuales en un triángulo equilátero. Para el capítulo 2 se utilizó la perturbación (a).

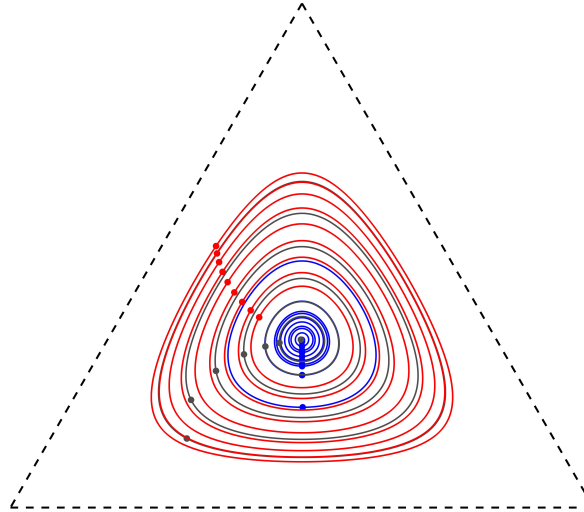


Figura 43. Diagrama de fase para tres vórtices puntuales de misma circulación.

En el caso de cuatro vórtices puntuales, desplazamos a dos de ellos, pasando de un cuadrado a un rectángulo como se muestra en la figura 44a. Nuevamente, esta perturbación aparentemente muy particular no implica una pérdida de generalidad. En la figura 45 presentamos la trayectoria de cuatro vórtices puntuales en el diagrama bidimensional $(\tilde{R}_1, \tilde{P}_1)$, que es resultado de reducir las ocho dimensiones del espacio de fase a dos dimensiones (Aref & Pomphrey, 1982). En este espacio, la evolución de los vórtices que forman un cuadrado es representado por un punto elíptico en el centro. Alrededor de ese punto, se encuentran contornos cerrados correspondientes a la trayectoria de los remolinos bajo diferentes perturbaciones. Las curvas azules de la figura 45 corresponden a la perturbación de la figura 44a, que es la perturbación que utilizamos en el capítulo 2. Las curvas negras corresponden a una perturbación donde se mueven dos vórtices formando un rombo, figura 44b. Las curvas rojas corresponden al movimiento de los remolinos cuando se mueven los cuatro vórtices en distintas direcciones, como se muestra en la figura 44c. Los puntos corresponden a la condición inicial de los remolinos. Cuando los remolinos son perturbados de tal forma que están en los vértices de un rectángulo en la condición inicial, existe un valor máximo de separación a la que se comportan como vimos en esta tesis. Si lo superan, los remolinos se mueven como dos pares de vórtices alejados entre ellos. Cuando los remolinos forman rombos en la condición inicial, si se alejan demasiado se comportan como un par de vórtices y otros dos remolinos alejados entre ellos. Siempre interactúan todos

entre sí pero ya no domina la interacción entre los cuatro. Es decir que mientras no se superen estos límites, la perturbación impuesta a los vórtices en el capítulo 2 representa a una familia infinita de polígonos de cuatro vórtices y a la topología del flujo que generan.

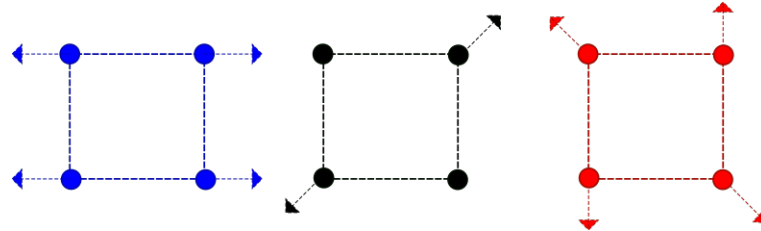


Figura 44. Tres diferentes tipos de perturbación a los vórtices puntuales en un cuadrado. Para el capítulo 2 se utilizó la perturbación (a).

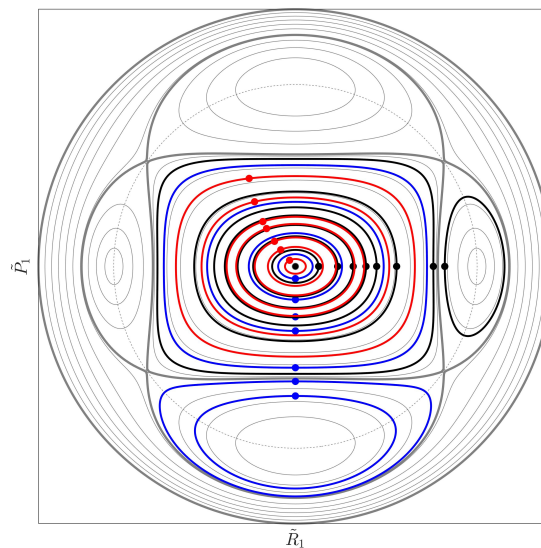


Figura 45. Diagrama de fase para cuatro vórtices puntuales de misma circulación.

En la segunda parte del capítulo 2 estudiamos la interacción y fusión de tres y cuatro vórtices de Rankine, correspondiente a vórtices helicoidales de paso infinito y vorticidad uniforme. Actualmente, nos encontramos trabajando en un problema más general donde el perfil de vorticidad no es uniforme. Proponemos estudiar la fusión y advección de fluido alrededor de tres y cuatro remolinos con diferentes perfiles de

vorticidad dados por la siguiente ecuación:

$$\omega = \begin{cases} \omega_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^n\right], & \text{para } r < a \\ 0, & \text{para } r > a, \end{cases} \quad (23)$$

donde ω_0 es la vorticidad máxima del remolino, a es el radio del remolino, r es la coordenada radial y n es una constante que mientras más cercana a uno, por la derecha, el perfil de vorticidad es más suave. En la figura 46 se presenta la fusión de tres remolinos con un perfil de vorticidad con $n = 2$. La finalidad de continuar esta investigación es determinar si el valor crítico de la fusión de los remolinos cambia con n , si existe intercambio de masa sin fusión entre ellos y cómo se comporta la expulsión de los filamentos de vorticidad. Al ser un modelo más realista, permite acercarnos al entendimiento del agitación de fluido cuando dos o más vórtices interactúan en sistemas más complejos como el océano o la atmósfera.

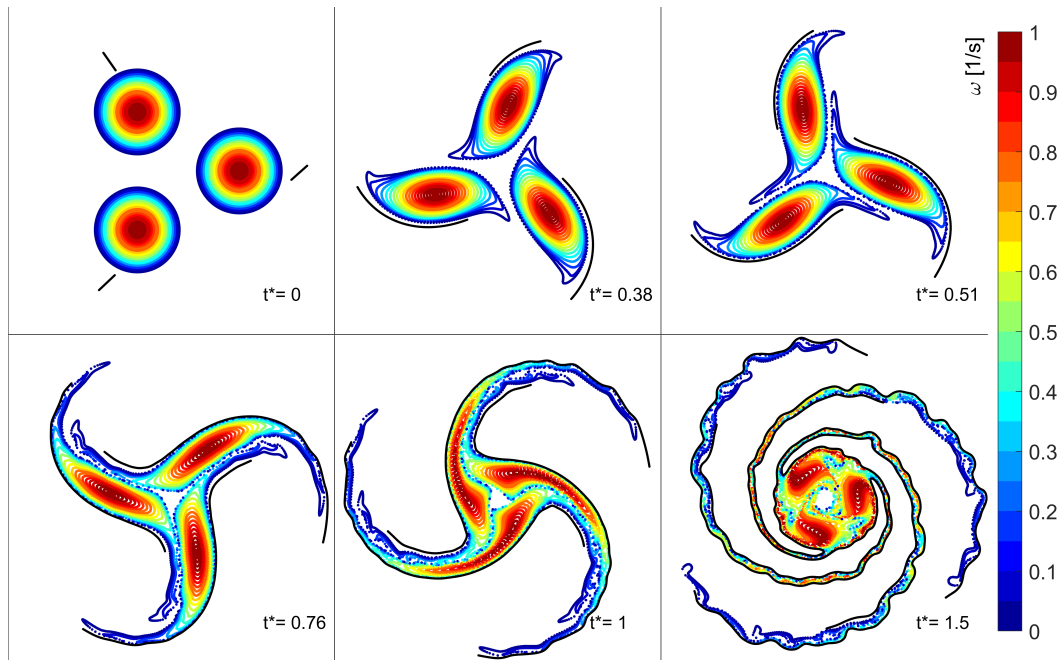


Figura 46. Evolución de tres vórtices circulares de vorticidad no uniforme dado por la barra de colores. El tiempo se encuentra adimensionalizado con el periodo de rotación de tres vórtices puntuales de circulación unitaria y misma distancia entre ellos que los vórtices mostrados. También presentamos la evolución de tres variedades con curvas negras.

Como se mencionó en la sección 3.4.1, para estudiar el movimiento y el flujo debido a dos vórtices helicoidales, se redujo un sistema de seis dimensiones a uno de dos

dimensiones. Si queremos estudiar a tres vórtices helicoidales infinitos con una perturbación, el problema original es de nueve dimensiones. Al reducirlos al plano helicoidal, el sistema de tres partículas se reduce a seis dimensiones. Utilizando la conservación de momento y la independencia de los ejes coordenados a rotación, el problema se reduce a cuatro dimensiones. Por lo que el movimiento de los tres vórtices helicoidales es caótico. Aún así, es un tema interesante de abordar ya que la mayoría de las turbinas eólicas son de tres aspas y como vimos en el capítulo 4, los remolinos helicoidales son perturbados en la estela. Esta investigación propuesta permitiría entender más a fondo el proceso de inestabilidad de los vórtices en turbinas de tres aspas.

En el capítulo 4 estudiamos a la estela de una turbina de dos aspas, su evolución e impacto en la eficiencia de una segunda turbina colocada detrás. Un siguiente paso es ampliar el estudio a turbinas de tres aspas. En este nuevo trabajo buscaríamos la topología del flujo bajo diferentes condiciones del viento y la turbina, cómo la inestabilidad de los vórtices helicoidales cambia de posición con la turbulencia en el viento y su impacto en una segunda turbina de mismo número de aspas. También estudiaríamos el impacto en la estela al agregar el efecto del suelo. A continuación presentamos un avance del trabajo propuesto: En la figura 47a mostramos el exponente de Lyapunov de tiempo finito en un corte polar para una turbina de tres aspas de velocidad adimensional $\lambda = 6.6$. Se observan las mismas regiones que están presentes en el FTLE de una turbina de dos aspas para λ grande. Nuevamente, en la banda que separa a los vórtices internos de los externos es donde se reduce más la velocidad axial, figura 47b.

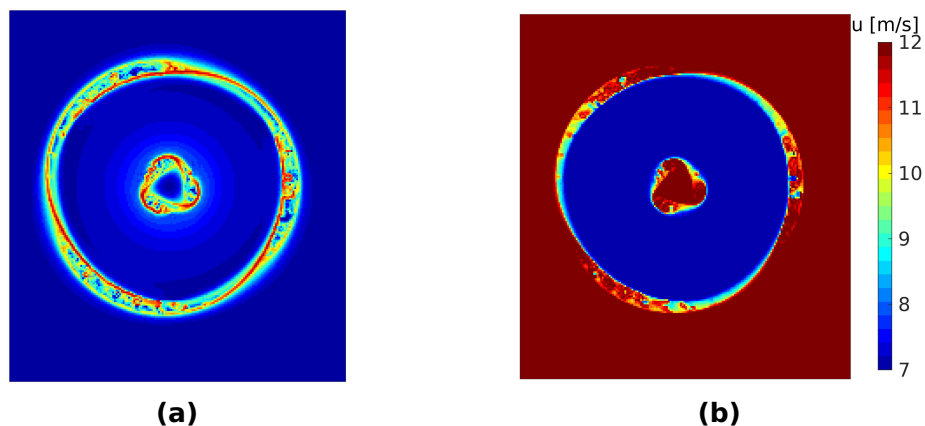


Figura 47. Topología del flujo en la estela de una turbina eólica de tres aspas de velocidad adimensional $\lambda = 6.6$. (a) FTLE, donde los tonos rojos representan valores altos (b) Velocidad axial en la estela.

Literatura citada

- Abraham, A. & Hong, J. 2022. Characterization of atmospheric coherent structures and their impact on a utility-scale wind turbine. *Flow*, **2**: E5.
- Alaskari, M., Abdullah, O., & Majeed, M. H. 2019. Analysis of wind turbine using QBlade software. **518**(3): 032020.
- Aref, H. 1979. Motion of three vortices. *The Physics of Fluids*, **22**(3): 393–400.
- Aref, H. 2002. The development of chaotic advection. *Physics of Fluids*, **14**(4): 1315–1325.
- Aref, H. & Pomphrey, N. 1982. Integrable and chaotic motions of four vortices. I. the case of identical vortices. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, **380**(1779): 359–387.
- Aref, H. & Stremler, M. A. 1996. On the motion of three point vortices in a periodic strip. *Journal of Fluid Mechanics*, **314**: 1–25.
- Barthelmie, R. J. & Jensen, L. 2010. Evaluation of wind farm efficiency and wind turbine wakes at the nysted offshore wind farm. *Wind Energy*, **13**(6): 573–586.
- Bartl, J., Mühle, F., & Sætran, L. 2018. Wind tunnel study on power output and yaw moments for two yaw-controlled model wind turbines. *Wind Energy Science*, **3**(2): 489–502.
- Boatto, S. & Pierrehumbert, R. T. 1999. Dynamics of a passive tracer in a velocity field of four identical point vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, **394**: 137–174.
- Brandt, L. K. & Nomura, K. K. 2006. The physics of vortex merger: Further insight. *Physics of Fluids*, **18**(5): 051701.
- Delbende, I., Selçuk, C., & Rossi, M. 2021. Nonlinear dynamics of two helical vortices: A dynamical system approach. *Physical Review Fluids*, **6**: 084701.
- Dhanak, M. R. 1992. Stability of a regular polygon of finite vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, **234**: 297–316.
- Di Labbio, G., Ait Abderrahmane, H., Fayed, M., & Ng, H. D. 2020. Transitions between systems of satellite vortices in a rotating fluid. *Physics of Fluids*, **32**(10): 101701.
- Dou, B., Qu, T., Lei, L., & Zeng, P. 2020. Optimization of wind turbine yaw angles in a wind farm using a three-dimensional yawed wake model. *Energy*, **209**: 118415.
- Dritschel, D. G. 1985. The stability and energetics of corotating uniform vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, **157**: 95–134.
- Dritschel, D. G. 1986. The nonlinear evolution of rotating configurations of uniform vorticity. *Journal of Fluid Mechanics*, **172**: 157–182.
- Engels, T., Kolomenskiy, D., Schneider, K., Farge, M., Lehmann, F.-O., & Sesterhenn, J. 2018. Helical vortices generated by flapping wings of bumblebees. *Fluid Dynamics Research*, **50**(1): 011419.
- Espinosa Ramírez, A. C. 2015. *Interacción de dos vórtices helicoidales axialmente simétricos*. Tesis de maestría, CICESE, Ensenada, Baja California, México.

- Espinosa Ramírez, A. C. & Velasco Fuentes, O. 2021. Vortex polygons: Dynamics and associated particle advection. *Physics of Fluids*, **33**(5): 057114.
- Felli, M., Camussi, R., & Di Felice, F. 2011. Mechanisms of evolution of the propeller wake in the transition and far fields. *Journal of Fluid Mechanics*, **682**: 5–53.
- Gasch, R. & Twele, J. 2011. *Wind power plants: Fundamentals, design, construction and operation*. Springer.
- Ghaisas, N. S. & Archer, C. L. 2016. Geometry-based models for studying the effects of wind farm layout. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, **33**(3): 481–501.
- Global Wind Energy, C. 2021. GWEC, Global wind report.
- Grassi, D., Adriani, A., Moriconi, M., Mura, A., Tabataba-Vakili, F., Ingersoll, A., Orton, G., Hansen, C., Altieri, F., Filacchione, G., et al. 2018. First estimate of wind fields in the Jupiter polar regions from JIRAM-Juno images. *Journal of Geophysical Research: Planets*.
- Haces-Fernandez, F., Li, H., & Ramirez, D. 2019. Improving wind farm power output through deactivating selected wind turbines. *Energy Conversion and Management*, **187**: 407–422.
- Hadjighasem, A., Farazmand, M., Blazeovski, D., Froyland, G., & Haller, G. 2017. A critical comparison of lagrangian methods for coherent structure detection. *Chaos*, **27**: 053104.
- Haller, G. 2001. Distinguished material surfaces and coherent structures in three-dimensional fluid flows. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **149**(4): 248–277.
- Hardin, J. C. 1982. The velocity field induced by a helical vortex filament. *The Physics of Fluids*, **25**(11): 1949–1952.
- Hasager, C. B., Nygaard, N. G., Volker, P. J. H., Karagali, I., Andersen, S. J., & Badger, J. 2017. Wind farm wake: The 2016 Horns Rev Photo Case. *Energies*, **10**(3): 317.
- Havelock, T. 1931. The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation. *Philosophical Magazine*, **11**(70): 617–633.
- Hietala, N., Hänninen, R., Salman, H., & Barenghi, C. F. 2016. Leapfrogging Kelvin waves. *Physical Review Fluids*, **1**(8): 084501.
- Holmes, P. 1990. Poincaré, celestial mechanics, dynamical-systems theory and “chaos”. *Physics Reports*, **193**(3): 137–163.
- Husaru, D., Bârsănescu, P., & Zahariea, D. 2019. Effect of yaw angle on the global performances of horizontal axis wind turbine-qblade simulation. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, **595**(1): 012047.
- Ivanell, S., Mikkelsen, R., Sørensen, J. N., & Henningson, D. 2010. Stability analysis of the tip vortices of a wind turbine. *Wind Energy*, **13**(8): 705–715.
- Jonkman, J., Butterfield, S., Musial, W., & Scott, G. 2009. Definition of a 5-MW reference wind turbine for offshore system development. Reporte técnico, National Renewable Energy Lab.(NREL), Golden, CO (United States).

- Joukowski, N. 1912. Vihrevaja teorija grebnogo vinta. *Trudy Otdeleniya Fizicheskikh Nauk Obshchestva Lubitelei Estestvoznaniya*, **16**: 1–31. French translation in *Théorie tourbillonnaire de l'hélice propulsive* (Gauthier-Villars, Paris, 1929) 1–47.
- Kirchhoff, G. 1883. *Vorlesungen über Mechanik*. Tauber, Leipzig.
- Kossin, J. P. & Schubert, W. H. 2004. Mesovortices in hurricane Isabel. *Bulletin of the American Meteorological Society*, **85**(2): 151–153.
- Kuznetsov, L. & Zaslavsky, G. M. 1998. Regular and chaotic advection in the flow field of a three-vortex system. *Physical Review E*, **58**(6): 7330–7349.
- Kuznetsov, L. & Zaslavsky, G. M. 2000. Passive particle transport in three-vortex flow. *Physical Review E*, **61**(4): 3777–3792.
- Lantz, E., Hand, M. M., & Wiser, R. 2012. Past and future cost of wind energy. Reporte técnico, National Renewable Energy Lab.(NREL), Golden, CO (United States).
- Lignarolo, L., Ragni, D., Krishnaswami, C., Chen, Q., Ferreira, C. S., & Van Bussel, G. 2014. Experimental analysis of the wake of a horizontal-axis wind-turbine model. *Renewable Energy*, **70**: 31–46.
- Lignarolo, L., Ragni, D., Scarano, F., Ferreira, C. S., & Van Bussel, G. 2015. Tip-vortex instability and turbulent mixing in wind-turbine wakes. *Journal of Fluid Mechanics*, **781**: 467–493.
- Lucas, D. & Dritschel, D. G. 2009. A family of helically symmetric vortex equilibria. *Journal of Fluid Mechanics*, **634**: 245–268.
- Marten, D., Wendler, J., Pechlivanoglou, G., Nayeri, C. N., & Paschereit, C. O. 2013. Qblade: an open source tool for design and simulation of horizontal and vertical axis wind turbines. *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*, **3**(3): 264–269.
- Marten, D., Lennie, M., Pechlivanoglou, G., Nayeri, C. N., & Paschereit, C. O. 2016. Implementation, optimization, and validation of a nonlinear lifting line-free vortex wake module within the wind turbine simulation code qblade. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **138**(7).
- Massouh, F. & Dobrev, I. 2007. Exploration of the vortex wake behind of wind turbine rotor. *Journal of Physics: Conference Series*, **75**(1): 012036.
- Medici, D. & Alfredsson, P. 2006. Measurements on a wind turbine wake: 3d effects and bluff body vortex shedding. *Wind Energy: An International Journal for Progress and Applications in Wind Power Conversion Technology*, **9**(3): 219–236.
- Melander, M. V., Zabusky, N. J., & McWilliams, J. C. 1988. Symmetric vortex merger in two dimensions: causes and conditions. *Journal of Fluid Mechanics*, **195**: 303–340.
- Meunier, P., Le Dizès, S., & Leweke, T. 2005. Physics of vortex merging. *Comptes Rendus Physique*, **6**(4): 431–450.
- Nemes, A., Jacono, D. L., Blackburn, H. M., & Sheridan, J. 2015. Mutual inductance of two helical vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, **774**: 298–310.

- Patel, J., Savsani, V., Patel, V., & Patel, R. 2019. Layout optimization of a wind farm using geometric pattern-based approach. *Energy Procedia*, **158**: 940–946.
- Posa, A., Broglia, R., & Balaras, E. 2021. Instability of the tip vortices shed by an axial-flow turbine in uniform flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **920**.
- Quaranta, H. U., Brynjell-Rahkola, M., Leweke, T., & Henningson, D. S. 2016. Long-wave instabilities of two interlaced helical vortices. *Journal of Physics: Conference Series*, **753**(3): 032022.
- Quaranta, H. U., Brynjell-Rahkola, M., Leweke, T., & Henningson, D. S. 2019. Local and global pairing instabilities of two interlaced helical vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, **863**: 927–955.
- Rom-Kedar, V., Leonard, A., & Wiggins, S. 1990. An analytical study of transport, mixing and chaos in an unsteady vortical flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **214**: 347–394.
- Saffman, P. G. 1995. *Vortex dynamics*. Cambridge University Press.
- Samelson, R. M. & Wiggins, S. 2006. *Lagrangian transport in geophysical jets and waves: The dynamical systems approach*. Springer.
- Sanderse, B., Van der Pijl, S., & Koren, B. 2011. Review of computational fluid dynamics for wind turbine wake aerodynamics. *Wind Energy*, **14**(7): 799–819.
- Sarmast, S., Dadfar, R., Mikkelsen, R. F., Schlatter, P., Ivanell, S., Sørensen, J. N., & Henningson, D. S. 2014. Mutual inductance instability of the tip vortices behind a wind turbine. *Journal of Fluid Mechanics*, **755**: 705–731.
- Shadden, S. C., Lekien, F., & Marsden, J. E. 2005. Definition and properties of lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **212**(3-4): 271–304.
- Sørensen, P., Hansen, A., Janosi, L., Bech, J., & Bak-Jensen, B. 2001. Simulation of interaction between wind farm and power system. *Risø Report R-1281 (EN)*, *Risø National Laboratory, Roskilde, Denmark*.
- Sutherland, H. J. 1999. On the fatigue analysis of wind turbines. *Sandia National Lab. (SNL-NM), Albuquerque, NM (United States); Sandia National Lab. (SNL-CA), Livermore, CA (United States)*.
- Swaminathan, R. V., Ravichandran, S., Perlekar, P., & Govindarajan, R. 2016. Dynamics of circular arrangements of vorticity in two dimensions. *Physical Review E*, **94**(1): 013105.
- Tél, T. 2015. The joy of transient chaos. *Chaos*, **25**(9): 097619.
- Thomson, J. J. 1883. *A Treatise on the Motion of Vortex Rings*. Macmillan.
- Thomson, W. 1878. 1. Vortex Statics. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **9**: 59–73.
- Van Garrel, A. 2003. Development of a wind turbine aerodynamics simulation module.
- Veers, P. S. 1988. Three-dimensional wind simulation. Reporte técnico, Sandia National Labs., Albuquerque, NM (USA).

- Velasco Fuentes, O. 2010. Chaotic streamlines in the flow of knotted and unknotted vortices. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, **24**(1-4): 189–193.
- Velasco Fuentes, O. 2014. Quasi-steady endless vortices with chaotic streamlines. *Experimental and Computational Fluid Mechanics*, pp. 111–128.
- Velasco Fuentes, O. 2018a. Motion of a helical vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, **836**(R1): 1.
- Velasco Fuentes, O. 2018b. Flow topology of helical vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, **842**(R2): 1.
- Velasco Fuentes, O. U. 2001. Chaotic advection by two interacting finite-area vortices. *Physics of Fluids*, **13**(4): 901–912.
- Velasco Fuentes, O. U. 2005. Vortex filamentation: its onset and its role on axisymmetrization and merger. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, **40**(1-2): 23–42.
- Wiggins, S. 2013. *Chaotic Transport in Dynamical Systems*. Springer.
- Wood, D. H. 2020. Helical vortices and wind turbine aerodynamics. *International Journal of Mathematics for Industry*, **12**(01): 2050002.
- Wu, Y.-T., Lin, C.-Y., & Hsu, C.-M. 2020. An experimental investigation of wake characteristics and power generation efficiency of a small wind turbine under different tip speed ratios. *Energies*, **13**(8): 2113.
- Xu, L. 2019. Numerical study of the material transport in the viscous vortex dipole flow. *Physics of Fluids*, **31**(5): 053602.
- Yarmchuk, E. J., Gordon, M. J. V., & Packard, R. E. 1979. Observation of Stationary Vortex Arrays in Rotating Superfluid Helium. *Physical Review Letters*, **43**(3): 214–217.
- Zabusky, N. J., Hughes, M., & Roberts, K. 1979. Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions. *Journal of Computational Physics*, **30**(1): 96–106.