

La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, B.C.).

La investigación fue financiada por el CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología).

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos Autor.

CICESE © 2022, Todos los Derechos Reservados, CICESE

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California



Maestría en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control

Sincronización de sistemas lineales de fase no mínima vía acoplamientos dinámicos

Tesis
para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:
Antonio Isaac Juárez Durán

Ensenada, Baja California, México

2022

Tesis defendida por

Antonio Isaac Juárez Durán

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Jonatán Peña Ramírez
Director de tesis

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Dr. Jesús Favela Vara

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez



Dra. María del Carmen Maya Sánchez
Coordinadora del Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dr. Pedro Negrete Regagnon
Director de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Antonio Isaac Juárez Durán como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

Sincronización de sistemas lineales de fase no mínima vía acoplamientos dinámicos

Resumen aprobado por:

Dr. Jonatán Peña Ramírez

Director de tesis

Un sistema lineal puede representarse por medio de una función de transferencia, la cual establece la relación entre la salida y la entrada de dicho sistema. La función de transferencia está compuesta por un cociente de polinomios. Cuando el polinomio en el numerador de la función de transferencia contiene raíces con parte real positiva, es decir, raíces localizadas en el lado derecho del plano complejo, se dice que el sistema es de fase no mínima. Este tipo de sistemas se pueden encontrar en diversos sistemas cotidianos y por tanto su estudio es de mucho interés, principalmente en el área de Teoría de Control. Los sistemas lineales de fase no mínima presentan dificultades que sus contrapartes de fase mínima no presentan al controlar, en parte porque existen limitaciones fundamentales en el tipo de respuesta transitoria que se puede obtener. Además, estos sistemas también tienen limitaciones en el ancho de banda alcanzable para el sistema controlado. Por otra parte, la sincronización de este tipo de sistemas también está limitada. En particular, para sistemas lineales de fase no mínima se tienen al menos dos limitaciones detectadas: 1) el intervalo de valores de la fuerza de acoplamiento que se puede utilizar para inducir sincronización es relativamente pequeño y, 2) en el caso de redes, la sincronización se pierde cuando el número de nodos es arbitrariamente grande. En este trabajo se presenta una estrategia de sincronización que resuelve los dos problemas antes mencionados, la cual se basa en el uso de acoplamientos dinámicos lineales de primer y segundo orden. Se realiza un estudio formal con el fin de obtener condiciones analíticas que garanticen la estabilidad global y asintótica de la solución síncrona y dichos resultados analíticos se ilustran con simulaciones numéricas. Los resultados obtenidos demuestran que es posible sincronizar pares de sistemas lineales de fase no mínima en un intervalo arbitrariamente grande de la fuerza de acoplamiento (solución de la limitación 1 antes mencionada) y también, es posible sincronizar redes de sistemas de fase no mínima en diferentes topologías regulares sin importar el número de nodos que contenga la red (solución a la limitación 2 arriba mencionada). En conclusión, los acoplamientos dinámicos aquí propuestos permiten remover las limitaciones observadas cuando se utilizan acoplamientos tradicionales clásicos basados en retroalimentación del estado o de la salida y, por ende, mejoran la 'sincronizabilidad' de los sistemas.

Palabras clave: Sincronización, acoplamiento dinámico, sistemas de fase no mínima, redes

Abstract of the thesis presented by Antonio Isaac Juárez Durán as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Electronics and Telecommunications with orientation in Instrumentation and Control.

Synchronization of linear non-minimum phase systems via dynamic coupling

Abstract approved by:

Dr. Jonatán Peña Ramírez
Thesis Director

A linear system can be represented by a transfer function, which establishes the relationship between the input and output of the system. The transfer function is composed by a ratio of polynomials. When the polynomial located in the numerator of the transfer function has roots with positive real parts, i.e., roots located on the right-hand side of the complex plane, the system is referred to as non minimum phase system. This type of systems can be found in many daily life systems and therefore, its study is of paramount importance, mainly within the context of Control Theory. Non minimum phase linear systems present difficulties that their minimum phase counterparts don't present when controlled, in part because there exist fundamental limitations in the achievable transient response. Furthermore, these systems also exhibit limitations in the achievable bandwidth of the closed-loop system. On the other hand, the synchronization of this type of systems is also limited. In particular, there exist two well-known limitations: 1) the interval of coupling strength values for which synchronization can be achieved is relatively narrow and, 2) for the case of networks, the synchronization in the network is lost when the number of nodes is arbitrarily large. This work presents a synchronization strategy that solves the two problems mentioned above. The strategy is based on the use of first and second order linear dynamical couplings. A formal and rigorous study is conducted in order to obtain analytic conditions that guarantee the global asymptotic stability of the synchronous solution and these results are further illustrated by means of computer simulations. The obtained results show that it is possible to synchronize pairs of linear non minimum phase systems for an arbitrarily large interval of coupling strength values (solution to limitation 1) and also, it is possible to synchronize networks of non minim phase systems in different regular topologies containing an arbitrarily large number of nodes (solution to limitation 2). In conclusion, the dynamic couplings introduced here allow to remove the inherent limitations observed when using the traditional static couplings based on state or output feedback. Therefore, the synchronizability of linear non minimum phase systems has been enhanced.

Keywords: Synchronization, dynamic coupling, non minimum phase systems, networks

Dedicatoria

A mis padres

Antonio y Carmen

A mis hermanas

Berenice, Leticia y Oneida.

A Karelid.

Agradecimientos

A mi familia por todo su amor y apoyo incondicional. En especial a mis padres, que han estado ahí para mí, toda la vida.

A los miembros del comité de tesis: Joaquín Álvarez, Jesús Favela y Gonzalo Barajas, por enseñarme a abrir más la mente y ser más curioso, por enseñarme a cuidar bien mis palabras y tener bien fundamentados mis argumentos, y por todos sus consejos.

Al Doctor Jonatán Peña por enseñarme que el peor intento es aquel que no se hace, por demostrarme que con trabajo duro cualquier meta es posible, y por darme todo su apoyo.

A mis maestros de CICESE: A los Doctores Francisco Carranza, Miguel Arévalo, Jaime Sánchez, Salvador Villarreal, Alejandro Márquez y César Cruz, porque llevo conmigo todas sus enseñanzas. En especial a los Doctores Francisco Carranza y Miguel Arévalo por ofrecerme su amistad y sus consejos.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California por darme la oportunidad de aprender, de disfrutar de sus instalaciones, de superarme académicamente, y de ser parte de la familia CICESE.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	viii
Lista de tablas	x
 Capítulo 1. Introducción	
1.1. Sistema de fase no mínima	2
1.2. Sincronización	2
1.3. Perspectiva histórica de la sincronización	4
1.4. Antecedentes	5
1.5. Panorama general de la tesis	7
1.5.1. Planteamiento del problema	7
1.5.2. Justificación	7
1.5.3. Hipótesis	8
1.5.4. Objetivos	8
1.5.4.1. Objetivo general	8
1.5.4.2. Objetivos específicos	8
1.5.5. Contribuciones de este trabajo	8
1.5.6. Estructura de la tesis	9
 Capítulo 2. Preliminares	
2.1. Sistemas lineales	10
2.2. Descripción del sistema a investigar	11
 Capítulo 3. Sincronización de pares de sistemas de fase no mínima	
3.1. Sincronización líder-seguidor con acoplamientos estáticos clásicos	13
3.1.1. Dinámica del error	14
3.1.2. Análisis de estabilidad	15
3.2. Sincronización líder-seguidor con acoplamiento dinámico de primer orden	16
3.2.1. Dinámica del error	17
3.2.2. Análisis de estabilidad	18
3.3. Sincronización líder-seguidor con acoplamiento dinámico de segundo orden	20
3.3.1. Dinámica del error	21
3.3.1.1. Análisis de estabilidad	22
3.4. Resultados numéricos	26
3.4.1. Acoplamiento estático	26
3.4.2. Acoplamiento dinámico de primer orden	27
3.4.3. Acoplamiento dinámico de segundo orden	29
3.4.4. Discusión de resultados del estudio numérico	31

Capítulo 4. Sincronización en redes de sistemas de fase no mínima

4.1.	Sincronización de redes con acoplamiento estático	32
4.2.	Sincronización de redes con acoplamientos dinámicos	34
4.2.1.	Acoplamiento de primer orden	36
4.2.2.	Acoplamiento de segundo orden	37
4.3.	Resultados numéricos	37
4.3.1.	Conclusiones del análisis numérico	42

Capítulo 5. Inestabilidad por difusión: caso de estudio

5.1.	Acoplamiento líder-seguidor de sistemas particulares	43
5.1.1.	Dinámica del error	43
5.1.2.	Análisis de estabilidad	44
5.2.	Acoplamiento dinámico de 1er orden de sistemas particulares	45
5.2.1.	Dinámica del error	45
5.2.2.	Análisis de condiciones de estabilidad	46
5.3.	Acoplamiento dinámico de 2do orden de sistema particular	48
5.3.1.	Dinámica del error	48
5.3.2.	Análisis de condiciones de estabilidad	49
5.4.	Resultados numéricos	52
5.4.1.	Acoplamiento estático	52
5.4.2.	Acoplamiento dinámico de primer orden	54
5.4.3.	Acoplamiento dinámico de segundo orden	55
5.4.4.	Discusión de resultados del estudio numérico	57

Capítulo 6. Conclusiones

6.1.	Trabajo futuro	59
------	--------------------------	----

Literatura citada	60
------------------------------------	----

Anexo A	63
--------------------------	----

Anexo B	67
--------------------------	----

Lista de figuras

Figura	Página
1. Christiaan Huygens (1629-1695).	5
2. Dibujo original de Christiaan Huygens donde muestra su experimento con dos relojes de péndulo montados sobre una viga, la cual está soportada por dos sillas.	5
3. Esquema de sincronización líder-seguidor.	13
4. Esquema de sincronización líder-seguidor con acoplamiento dinámico.	16
5. Raíz máxima del polinomio característico (22) calculado en función de la fuerza de acoplamiento k	26
6. Resultados numéricos. Errores de sincronización de los sistemas acoplados (18)-(19) para diferentes valores de la fuerza de acoplamiento k	27
7. Región de sincronización en el plano (k, α) . En el área amarilla, k satisface la condición (52), mientras que en el área azul, k no satisface ninguna de las condiciones mencionadas en la Proposición 2.	28
8. Resultados de simulación. Errores de sincronización de los sistemas (33)-(34) con acoplamiento dinámico de primer orden (35) con $\alpha = 43$ y dos valores muy cercanos de k	29
9. Región de estabilidad en función de (k, γ_1, γ_2) . En la región coloreada indica la región donde alguna de las condiciones de la Proposición 3 se cumple. En la región blanca ninguna de las condiciones se cumple. Los colores indican el valor utilizado de γ_1	30
10. Resultados de simulación. Errores de sincronización de los sistemas (59)-(60) con acoplamiento dinámico de primer orden (61) con $\gamma_1 = 1.8$ y $\gamma_2 = 10$, y dos valores muy cercanos de k	31
11. Región de sincronización (área sombreada) proyectada en el plano (k, N) para red con acoplamiento estático.	38
12. Región de sincronización (área sombreada) proyectada en el plano (k, N) para red con acoplamiento dinámico de primer orden.	39
13. Región de sincronización (área sombreada) proyectada en el plano (k, N) para red con acoplamiento dinámico de segundo orden.	40
14. Respuesta del sistema (92), con 100 nodos y condiciones iniciales aleatorias tomadas del intervalo $[0,1]$, con $\gamma_1, \gamma_2 = 1000$, y con valor de fuerza de acoplamiento $k = -5$	41
15. Respuesta transitoria del sistema (92), con 100 nodos y condiciones iniciales aleatorias tomadas del intervalo $[0,1]$, con $\gamma_1, \gamma_2 = 1000$, y con valor de fuerza de acoplamiento $k = -5$	41
16. Respuesta en estado 'estacionario' de la red. Los 3 estados de cada uno de los 100 nodos se sincronizan, es decir, se alcanza sincronización completa.	42
17. Raíz máxima del polinomio característico (116) calculado en función de la fuerza de acoplamiento k	53

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
18. Resultados numéricos. Estados del sistema del error de los sistemas acoplados (112)-(113) para diferentes valores de la fuerza de acoplamiento k	54
19. Región de estabilidad en el plano (k, α) . En el área amarilla, k satisface la condición (138), mientras que en el área azul, k no satisface ninguna de las condiciones mencionadas en la Proposición 5.	54
20. Resultados de simulación. Estados del sistema del error de los sistemas (121)-(122) con acoplamiento dinámico de primer orden (123) con $k = 40$	55
21. Región de estabilidad en función de (k, γ_1, γ_2) . El la región coloreada indica la región donde alguna de las condiciones de la Proposición 6 se cumple. En la región blanca ninguna de las condiciones se cumple. Los colores indican el valor utilizado de γ_1	56
22. Resultados numéricos. Estados del sistema del error para diferentes valores de k	57

Lista de tablas

Tabla	Página
1.	En esta tabla se muestran las características de funciones cuadráticas con $a > 0$. 68
2.	En esta tabla se muestran las características de funciones cuadráticas con $a < 0$. 69
3.	En esta tabla se muestran las características de funciones cúbicas con $a > 0$. . . 70
4.	En esta tabla se muestran las características de funciones cúbicas con $a < 0$. . . 71
5.	En esta tabla se muestran las características de funciones de cuarto orden con $a > 0$ 72

Capítulo 1. Introducción

Existen sistemas cuya respuesta en el tiempo es inicialmente opuesta a su comportamiento final o comportamiento deseado. Por ejemplo, considere el proceso metabólico que tiene lugar en el cuerpo humano para convertir los alimentos en energía. El ciclo digestivo requiere de diversos procesos metabólicos, los cuales requieren de un alto gasto energético. Por tanto, el cuerpo primero gasta energía antes de poder obtenerla. Por esta razón, se debe tener mucho cuidado al alimentar a una persona que sufre de inanición pues, contrario a la lógica, el simple hecho de comer puede terminar con su vida (Maton, 1993).

Algunos medios de transporte también presentan este tipo de respuesta. Por ejemplo, un automóvil. Para realizar una maniobra de estacionamiento en paralelo, tiene que avanzar en reversa hacia el espacio disponible. Para hacer esto, primero tiene que direccionar el vehículo hacia el espacio antes de avanzar, lo que causa que el vehículo se aleje del espacio de estacionamiento antes de acercarse a él. De la misma manera, para ganar altitud estando en vuelo, un avión inicialmente inclina la nariz, lo que causa que pierda altitud antes de ganarla. Otro ejemplo se presenta en un barco. Cuando un barco se mueve a velocidad constante en dirección frontal, existe un flujo de agua que se mueve en dirección opuesta a la dirección del barco. Para que el barco gire se tiene que girar el timón (que se encuentra en la parte trasera del barco), el cual choca con el flujo de agua y hace que las fuerzas que actúan sobre él sean opuestas a las que actúan sobre el frente del barco, causando que, inicialmente, el barco se mueva ligeramente en dirección contraria a la dirección en la que se giró el timón. Por otra parte, la conducción de una bicicleta que se mueve a velocidad constante y en dirección frontal puede ser otro ejemplo. Si el ciclista gira el manubrio hacia un lado, entonces la bicicleta (junto con el ciclista) girará en esa dirección, lo que causará que el momento de inercia del ciclista “tire” de él y lo saque de equilibrio. Entonces, para girar una bicicleta hacia un lado primero se tiene que girar el manubrio brevemente hacia el lado contrario y después girarlo ligeramente hacia el lado al que se desea girar, lo que permitirá al ciclista realizar una ligera inclinación para girar y contrarrestar su inercia. Este proceso hace que el ciclista se mueva inicialmente en dirección opuesta al lado al que desea ir antes de moverse en la dirección deseada (Astrom et al., 2005).

Los ejemplos mencionados tienen algo en común. Todos tienen un comportamiento inicial contrario a su comportamiento final deseado. En el contexto de teoría de control, este tipo de sistemas se denominan sistemas de fase no mínima.

1.1. Sistema de fase no mínima

En teoría de control es común escuchar el término “cero” cuando se habla de las propiedades de un sistema. De hecho, este nombre proviene de un sentido literal, pues para el caso lineal, los ceros de un sistema son aquellos valores de la variable compleja s que hacen que la expresión matemática que representa a la función de transferencia del sistema sea igual a cero. Cuando los ceros o raíces del polinomio en el numerador de la función de transferencia están localizados en el lado derecho del plano complejo, se dice que el sistema es de *fase no mínima*. Los ceros de fase no mínima se pueden encontrar en muchos sistemas cotidianos cuyo estudio es de interés en el área de Teoría del Control (Hoagg y Bernstein, 2007). Aun cuando los sistemas lineales con retardos también son considerados como sistemas de fase no mínima, este trabajo se enfoca solamente en sistemas de fase no mínima con ceros en el lado derecho del plano complejo y que no presentan retardos.

Una limitación importante que presentan los sistemas lineales de fase no mínima es su desempeño en lazo cerrado. Utilizando el lugar geométrico de las raíces se puede observar que a partir de un valor de la ganancia de retroalimentación el control de lazo cerrado se inestabiliza si el sistema es de fase no mínima. Es por eso que, tanto la ganancia como el ancho de banda en un sistema de lazo cerrado, están limitadas para este tipo de sistemas y, además, su desempeño es limitado en problemas de seguimiento de trayectorias (Sidi, 1997). También, una característica de los sistemas lineales de fase no mínima es que su respuesta a una entrada escalón presenta un sobre impulso negativo (Middleton, 1991).

El control y sincronización de sistemas de fase no mínima se ha vuelto un tema recurrente de investigación por los retos que presentan este tipo de sistemas.

Por otra parte, la sincronización de sistemas de fase no mínima es un tema de investigación poco explorado, lo cual se presenta como una oportunidad para el desarrollo y continuidad de este trabajo, en el que una de las metas es desarrollar estrategias de sincronización que permitan sincronizar redes de sistemas de fase no mínima.

A continuación, se da una breve descripción del fenómeno de sincronización, así como una perspectiva histórica del mismo.

1.2. Sincronización

Existe un fenómeno muy interesante que se presenta en la naturaleza en el cual pares y redes de sistemas ajustan sus ritmos individuales a un ritmo común. Es el fenómeno de la sincronización.

Considere por ejemplo los ritmos circadianos, documentados por primera vez en 1729 por el matemático francés Jean-Jacques Dortous de Mairan, quien aisló una planta de frijol en un cuarto oscuro para estudiar el movimiento rítmico que presentaba la planta en las transiciones entre el día y la noche. Observó que el movimiento de la planta persistía al mismo ritmo aún cuando no estaba siendo influenciada por la luz solar. Muchos estudios que preceden a este han determinado que todos los sistemas biológicos tienen un reloj interno que les da conocimiento de las transiciones entre el día y la noche, con el que los sistemas biológicos varían su comportamiento cíclicamente cada 24 horas (Pikovsky et al., 2001).

Es interesante observar que, en un organismo biológico, el ritmo circadiano de éste se encuentra sincronizado con los periodos de luz y oscuridad naturales, por lo que todos los organismos biológicos experimentan el fenómeno de la sincronización todos los días.

Además del ritmo circadiano, existen otras maneras en las que el fenómeno de la sincronización se manifiesta en la Naturaleza. En el sudeste de Asia se puede apreciar un espectáculo en el que miles de luciérnagas reunidas en árboles encienden y apagan sus luces al mismo tiempo. Esto no ocurre de manera inmediata, poco a poco cada una ajusta su ritmo influenciada por las luces de las demás, aumentando o disminuyendo su frecuencia, hasta que sus ritmos se sincronizan. El motivo de que las luciérnagas presenten este comportamiento síncrono es por una adaptación reproductiva, debido a que las hembras sólo se reproducen con machos que se encuentren sincronizados con el resto del grupo (Strogatz, 2014) (Buck y Buck, 1976).

Una razón muy importante por la que algunos sistemas biológicos presentan sincronía es para reducir el gasto energético y mejorar su desempeño locomotor. Tal es el caso del ave ibis (*geronticus eremita*), una especie de ave migratoria que al volar en bandada realiza formaciones en "V" y sincroniza sus aleteos con los elementos de su grupo. Al realizar formaciones en "V" el aleteo de un ibis forma una "almohada" de aire que es aprovechada por los ibis que se encuentran detrás de él en la formación. La serie de almohadas de aire que crea el ibis en la punta de la formación es una señal que funciona como medio con el que interactúan los demás ibis para sincronizar la frecuencia de sus aleteos. La posición vertical del aleteo de un ibis depende de la distancia que tenga con el ibis en la punta de la formación; Si la distancia es un múltiplo de la longitud de onda de la señal entonces la posición vertical de sus aleteos estará sincronizada con la del ave de la punta (Portugal et al., 2014).

Por otra parte, las ventajas que trae consigo la sincronización han sido causa de su implementación en procesos industriales y tecnológicos. Por ejemplo, en la metodología de manufactura "Just-in-time", la cual basa su procedimiento en sincronizar los tiempos de entrada de materia prima con los tiempos de

salida de producto terminado. Un proceso de producción basado en esta metodología no ocupa espacio para almacenar materia prima, no desperdicia tiempo en traslado y almacenamiento, y ahorra en salarios de personal de almacén (Cheng y Podolsky, 1996).

Sin duda, la sincronización es un fenómeno bastante común que se da tanto de manera natural como artificial en muchos tipos diferentes de sistemas, pero una característica que todos éstos tienen en común es que presentan un comportamiento oscilatorio. De manera natural, es difícil encontrar un sistema oscilatorio que se encuentre completamente aislado, ya que normalmente éstos interactúan con el medio en el que se encuentran y, en consecuencia, con otros sistemas oscilatorios en el mismo medio. En algunas ocasiones esta interacción logra que estos sistemas ajusten sus ritmos de oscilación a un ritmo común y, a pesar de que esta interacción puede ser muy débil, debe existir para que se logre la sincronización (Pikovsky et al., 2001). La existencia de un acoplamiento a través del cual los sistemas se puedan “comunicar” y ajustar sus ritmos es la esencia de la sincronización.

1.3. Perspectiva histórica de la sincronización

El registro más antiguo donde se aborda de manera científica el fenómeno de la sincronización data del siglo XVII. El gran científico holandés Christiaan Huygens (1629-1695), véase Figura 1, mientras trabajaba en proponer una solución al reto científico de la época que era proponer un método para que los marineros pudieran calcular la coordenada de longitud en el mar, observó qué dos de sus recién inventados relojes de péndulo mostraban cierta “simpatía” el uno por el otro. En 1673 escribió sus aportaciones teóricas y experimentales en su obra “*Horologium Oscillatorium*”, donde describió de manera breve, pero precisa, sus observaciones de sincronización. En este texto describió que cuando dos relojes de péndulo se encuentran suspendidos de la misma viga de madera, ver Figura 2, entonces los péndulos se mueven a la misma velocidad pero en direcciones contrarias. Además, si el movimiento de alguno de los péndulos es alterado, eventualmente su movimiento volverá a sincronizarse con el otro péndulo. Huygens también encontró que la razón por la que se da este fenómeno es porque los relojes transfieren energía entre sí, en forma de vibraciones mecánicas, a través de la viga sobre la cual están suspendidos (Pikovsky et al., 2001).



Figura 1. Christiaan Huygens (1629-1695).

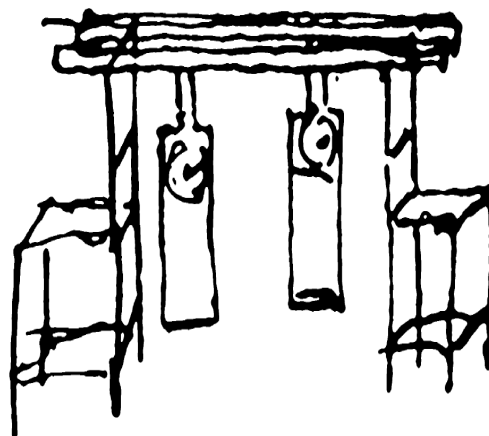


Figura 2. Dibujo original de Christiaan Huygens donde muestra su experimento con dos relojes de péndulo montados sobre una viga, la cual está soportada por dos sillas.

1.4. Antecedentes

Como se mencionó anteriormente, los sistemas de fase no mínima presentan algunas restricciones como por ejemplo, limitado ancho de banda en el sistema de lazo cerrado. Debido a estas y otras limitaciones, el rendimiento de los controladores clásicos basados en retroalimentación del estado y/o de la salida está limitado (Yaniv et al., 1999), (Schrader y Sain, 1989). Sin embargo, se han desarrollado controladores más sofisticados que permiten mejorar el rendimiento de los sistemas de fase no mínima en lazo cerrado, como por ejemplo, controladores basados en modos deslizantes (Patil et al., 2018), control adaptable (Tomei y Verrelli, 2018), control óptimo (Clarke, 1984), por mencionar solo algunos. También, existen trabajos que se centran en resolver el problema de seguimiento de trayectoria (Foghahaayee et al., 2020), aún en los casos en que hay perturbaciones intrínsecas (variación de parámetros) y extrínsecas (señales exógenas) (Santos y Oliveira, 2020). Además, se ha propuesto el uso de redes neuronales multi-capas en combinación con controladores lineales para forzar la salida de un sistema de fase no mínima a seguir una salida de referencia, la cual es generada por un sistema de referencia que sí es de fase mínima (Lee et al., 1999).

Recientemente, se ha investigado el control de redes de sistemas de fase no mínima en el contexto de redes de distribución de energía eléctrica (Bjork et al., 2022).

Por otra parte, en lo que respecta a sincronización, uno de los trabajos clásicos es el presentado en (Pecora y Carroll, 1998), en el que se desarrolla un método de análisis, llamado función maestra de estabilidad, el cual permite determinar la estabilidad de la solución síncrona en redes de sistemas dinámicos interconectados con topologías regulares. Posteriormente, en (Junge y Parlitz, 2001) se introduce un método de sincronización utilizando acoplamientos dinámicos. En este método se remueven las limitaciones que exhiben los acoplamientos estáticos, explotando las propiedades de contracción del flujo y suprimiendo la divergencia solamente en conjunto con aquellas direcciones en el espacio de estados donde el flujo subyacente no se está contrayendo. Este método demuestra ser altamente eficiente debido a que logra sincronizar sistemas utilizando un mínimo de información transmitida entre los nodos.

Uno de los trabajos directamente relacionado con esta tesis se presenta en (Pena Ramirez et al., 2018). En dicho artículo, los autores introducen un acoplamiento dinámico en configuración maestro-esclavo, el cual tiene la particularidad de que puede sincronizar ciertos sistemas caóticos que no pueden ser sincronizados usando acoplamientos estáticos clásicos. Además, este acoplamiento logra sincronizar sistemas para los que la configuración clásica sólo logra inducir sincronía en un intervalo pequeño de valores de fuerza de acoplamiento.

En un trabajo subsecuente (Buscarino et al., 2019), se extiende la técnica desarrollada en (Pena Ramirez et al., 2018), para el caso de sistemas “hiper-caóticos”. En este estudio se analiza la capacidad de lograr la sincronización, así como los rangos de valores de fuerza de acoplamiento, realizando una comparación entre esta técnica y la configuración estándar de acoplamiento estático. En este estudio también se analiza la capacidad de lograr sincronizar redes de sistemas que no pueden sincronizarse usando acoplamientos estáticos. También, existen varios trabajos relacionados con la sincronización de redes de sistemas lineales, véase por ejemplo, (Scardovi y Sepulchre, 2009), (Tuna, 2019), (Dzhunusov y Fradkov, 2011), (Murguia et al., 2014) y las referencias ahí contenidas. Sin embargo, existen pocos trabajos en los que los nodos de la red están descritos por sistemas lineales de fase no mínima. Por ejemplo, en (Stoorvogel et al., 2014) se investiga la aparición de comportamiento síncrono en una red de osciladores de fase no mínima, en donde la única información disponible para cada nodo está relacionada solamente con la salida de sus nodos vecinos. Finalmente, en (Rogov et al., 2018) se ha encontrado que interconectando varios sistemas lineales de fase no mínima usando acoplamientos estáticos clásicos, puede llevar a la aparición de un fenómeno llamado inestabilidad por difusión (Turing, 1952).

1.5. Panorama general de la tesis

1.5.1. Planteamiento del problema

Los acoplamientos difusos basados en retroalimentación estática del estado o de la salida tienen limitaciones bien conocidas cuando se aplican a sistemas de fase no mínima:

1. en pares de sistemas, el comportamiento síncrono puede inducirse solamente en un intervalo muy reducido de la llamada fuerza de acoplamiento.
2. en el caso de redes, el número máximo de sistemas/nodos que pueden conectarse a la red, usando un valor fijo de fuerza de acoplamiento, está limitado, de tal manera que, en estos casos, la sincronización en la red se pierde cuando se agregan más nodos a la red.

En esta tesis se propone una solución a los problemas antes mencionados. En particular, se busca diseñar acoplamientos lineales dinámicos que permiten, por un lado, incrementar el intervalo de valores de la fuerza de acoplamiento para los cuales la solución síncrona es estable en pares de sistemas y, por otro lado, se garantiza la sincronización en redes de sistemas de fase no mínima independientemente del número de nodos que contenga la red.

Se utilizan herramientas de análisis de la Teoría del Control para determinar condiciones analíticas que garantizan que las soluciones síncronas en los sistemas acoplados y en la red son globalmente asintóticamente estables. El diseño de los acoplamientos dinámicos está inspirado en un trabajo reciente reportado en (Pena Ramirez et al., 2018).

1.5.2. Justificación

El estudio de sincronización de sistemas es un campo muy investigado en el área de Teoría del Control y Sistemas Dinámicos debido a la gran cantidad de aplicaciones industriales y tecnológicas, como por ejemplo en líneas de producción y sistemas robóticos. Sin embargo, no siempre es posible lograr sincronizar dos o más sistemas debido a las limitaciones que presentan tanto los mismos sistemas, como el acoplamiento utilizado para sincronizarlos. Para resolver este problema, en trabajos recientes se ha propuesto el uso de acoplamientos dinámicos y se ha demostrado que este tipo de acoplamientos ayudan a suprimir dichas limitaciones en el caso de sistemas con dinámica caótica. Por consiguiente, en esta tesis se desea extender los resultados disponibles en la literatura al caso de sistemas lineales de fase no mínima.

1.5.3. Hipótesis

Para el caso de sistemas lineales de fase no mínima, el uso de acoplamientos dinámicos incrementa el rango de valores de fuerza de acoplamiento para los cuales la solución síncrona es globalmente asintóticamente estable. También, dichos acoplamientos permiten sincronizar redes con un número arbitrariamente grande de nodos en las que la dinámica intrínseca de cada nodo es lineal y de fase no mínima. En resumen, la sincronización en sistemas lineales de fase no mínima se mejora cuando se utilizan acoplamientos dinámicos en lugar de los acoplamientos estáticos clásicos.

1.5.4. Objetivos

1.5.4.1. Objetivo general

El objetivo general de este proyecto es contribuir al estudio y entendimiento de la sincronización de sistemas lineales de fase no mínima por medio de diseñar e implementar acoplamientos dinámicos lineales y comparar su rendimiento con los acoplamientos tradicionales basados en retroalimentación estática.

1.5.4.2. Objetivos específicos

- Investigar las limitaciones que los acoplamientos estáticos clásicos presentan al aplicarse en sistemas de fase no mínima.
- Diseñar acoplamientos dinámicos lineales de primer y segundo orden, que permitan extender el rango de valores de la fuerza de acoplamiento para la cual se observa comportamiento síncrono estable.
- Conducir un estudio formal que permita obtener condiciones analíticas bajo las cuales se garantice la estabilidad global de la solución síncrona en pares y redes de sistemas de fase no mínima.

1.5.5. Contribuciones de este trabajo

En este trabajo de tesis se presenta un estudio analítico riguroso, verificado con ejemplos simulados numéricamente, en el que se demuestra que, para una familia en particular de sistemas lineales de fase no mínima de tercer orden, es posible inducir sincronización aún en los casos en que los acoplamientos estáticos tradicionales fallan. Esto abre la posibilidad de que los resultados aquí presentados sirvan como punto de partida para investigar el fenómeno de sincronización en otros sistemas de fase no mínima,

incluidos aquellos con dinámica no lineal, en los que se han observado las mismas limitaciones que presentan los sistemas considerados en esta tesis y las cuales han sido efectivamente superadas con los acoplamientos aquí propuestos.

1.5.6. Estructura de la tesis

Este documento de tesis está organizado de la siguiente manera.

En el Capítulo 2 se presentan brevemente los preliminares matemáticos usados y se introduce el sistema particular que se considera a lo largo de este trabajo. Posteriormente, en el Capítulo 3 se estudia la sincronización en pares de sistemas lineales de fase no mínima. En particular, se obtienen condiciones analíticas bajo las cuales se garantiza que el comportamiento síncrono en el par de sistemas acoplados es globalmente asintóticamente estable. Además, los resultados analíticos se ilustran por medio de simulaciones numéricas. Después, en el Capítulo 4 se presenta un estudio similar al discutido en el Capítulo 3, pero ahora en el contexto de redes.

En el Capítulo 5 se presenta un caso de estudio en el que se muestra que los sistemas de fase no mínima considerados pueden experimentar un fenómeno llamado inestabilidad por difusión y que dicho fenómeno puede prevenirse con el uso de acoplamientos dinámicos.

Finalmente, en el Capítulo 6 se discuten los resultados obtenidos y se presentan las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2. Preliminares

En este capítulo se presentan algunos conceptos básicos, definiciones y herramientas de análisis que se utilizan a lo largo de esta tesis. En particular, se presenta una breve introducción a los sistemas lineales con particular énfasis en aquellos que son de fase no mínima. También, se da una descripción del tipo de sistemas dinámicos a considerar en este trabajo y se proporciona una definición formal de sincronización. Finalmente, se da una breve introducción al método de Routh-Hurwitz, el cual es utilizado en este trabajo para investigar la estabilidad global asintótica de la solución síncrona.

2.1. Sistemas lineales

Un sistema lineal invariante en el tiempo puede describirse por una ecuación diferencial de la forma

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} \dot{y}(t) + a_n y(t) = b_0 u^{(n)}(t) + b_1 u^{(n-1)}(t) + \cdots + b_{n-1} \dot{u}(t) + b_n u(t), \quad (1)$$

donde $y(t)$ y $u(t)$ son la salida y entrada del sistema, respectivamente, $(a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n) \in R$ son parámetros constantes que definen al sistema, y n es el orden del sistema.

Al aplicar la transformada de Laplace en ambos lados de esta ecuación, y considerando condiciones iniciales iguales a cero, podemos reescribirla como

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}, \quad (2)$$

donde $H(s)$ describe la relación entrada-salida del sistema y es llamada Función de Transferencia (Kailath y Hall, 1980; Zill, 2016). Nótese que si $b_0 \neq 0$, se dice que la función es propia y si $b_0 = 0$, la función es estrictamente propia. (Antsaklis y Michel, 2006).

La representación en el espacio de estados de (1), en su forma canónica controlable, está dada por

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3)$$

$$y = Cx + Du \quad (4)$$

donde $x \in R^n$ es el vector de estados del sistema, $u \in R$ es la entrada, $y \in R$ es la salida, y las matrices

$A \in R^{n \times n}$, $B \in R^n$, $C \in R^n$, y $D \in R$ están dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$C = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & b_{n-1} - a_{n-1} b_0 & \cdots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}, \quad D = b_0. \quad (6)$$

Nótese que, debido a que se considera que todos los coeficientes del sistema son constantes, entonces se dice que el sistema es invariante en el tiempo (Zill, 2016).

Finalmente, como se mencionó anteriormente, se denomina sistema lineal de fase no mínima a aquel sistema representado por (2), tal que el polinomio del numerador contiene ceros (raíces) con parte real positiva o tal que $H(s)$ contiene retardos en el tiempo (Kailath y Hall, 1980).

Los sistemas lineales de fase no mínima son difíciles de controlar, en parte porque existen limitaciones fundamentales en el tipo de respuesta transitoria que se puede obtener (Qiu y Davison, 1993), (Horowitz y Liao, 1984). Además, estos sistemas también tienen limitaciones en el ancho de banda alcanzable para el sistema de lazo cerrado y en la función ponderada de sensibilidad, entre otras (Middleton, 1991).

2.2. Descripción del sistema a investigar

A lo largo de este trabajo, se consideran pares y redes de sistemas de fase no mínima, en los que cada sistema individual es de tercer orden y está descrito por

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s-a)(s-b)}{(s+c)(s+i\sqrt{q})(s-i\sqrt{q})}, \quad (7)$$

donde $a, b, c, q \in R^+$.

La elección de este sistema obedece a que se requiere una respuesta oscilatoria del sistema, lo cual se logra con el par de polos puramente imaginarios que se localizan en $p_{1,2} = \pm i\sqrt{q}$. Además, el polo localizado en $p_3 = -c$ garantiza que $H(s)$ es estrictamente propia. Dado que se requiere una respuesta de fase no mínima, se han agregado dos ceros en el lado derecho del plano complejo, los cuales están localizados en $z_1 = a$ y $z_2 = b$.

Es posible mostrar que la representación en espacio de estados de (7) puede escribirse en la forma (3)-(4) con

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -cq & -q & -c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} ab & -(a+b) & 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Con el fin de simplificar el análisis del sistema, se realiza la siguiente transformación

$$x = T\hat{x}, \quad (9)$$

donde

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -ab & a+b & 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Entonces, el sistema transformado está descrito por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y &= \hat{C}\hat{x}, \end{aligned} \quad (11)$$

donde

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -ab & a+b & 1 \\ ab(a+b+c) - cq & ab - (a+b)(a+b+c) - q & -(a+b+c) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\hat{C} = CT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Capítulo 3. Sincronización de pares de sistemas de fase no mínima

En este capítulo se considera el esquema de sincronización más simple que existe, que es el esquema líder-seguidor. En particular, se consideran osciladores lineales de tercer orden descritos por (11) y se investigan las limitaciones del acoplamiento estático clásico. Posteriormente, se diseñan acoplamientos dinámicos lineales de primer y segundo orden y se demuestra que estos acoplamientos permiten superar las limitaciones observadas con los acoplamientos estáticos.

3.1. Sincronización líder-seguidor con acoplamientos estáticos clásicos

En el esquema de sincronización líder seguidor, véase la Figura 3, se busca forzar a que las soluciones del sistema seguidor converjan a las soluciones del sistema líder. Para el caso de los sistemas aquí considerados, este esquema se describe por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\text{líder : } \begin{cases} \dot{x}_l = Ax_l \\ y_l = Cx_l \end{cases} \quad \text{seguidor : } \begin{cases} \dot{x}_s = Ax_s + kB(y_l - y_s) \\ y_s = Cx_s, \end{cases} \quad (15)$$

donde $x_l, x_s \in \mathbb{R}^n$ son los vectores de estado del líder y seguidor, respectivamente, $y_l, y_s \in \mathbb{R}$ son sus respectivas salidas, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante que describen la dinámica de los sistemas, $B \in \mathbb{R}^n, C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ son los vectores de entrada y salida y, finalmente, $k \in \mathbb{R}$ es la fuerza de acoplamiento.

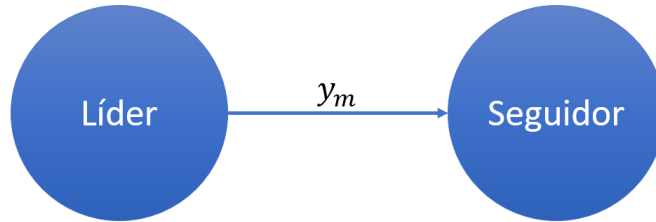


Figura 3. Esquema de sincronización líder-seguidor.

Para analizar el comportamiento síncrono en los sistemas acoplados (15), es conveniente definir el siguiente error de sincronización

$$e = x_l - x_s. \quad (16)$$

Entonces, se considera el siguiente criterio de sincronización.

Definición 1 Diremos que los sistemas acoplados (15) están asintóticamente sincronizados si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0. \quad (17)$$

3.1.1. Dinámica del error

A continuación, se construye la dinámica del error de sincronización para el caso en que $A = \hat{A}, B = \hat{B}, C = \hat{C}$, que están dados por (12)-(14).

Como primer paso (12)-(14) se reemplazan en (15), por lo que las ecuaciones del líder están dadas por

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1l} &= x_{2l}, \\ \dot{x}_{2l} &= -abx_{1l} + (a+b)x_{2l} + x_{3l}, \\ \dot{x}_{3l} &= (ab(a+b+c) - cq)x_{1l} + (ab - (a+b)(a+b+c) - q)x_{2l} - (a+b+c)x_{3l}, \end{aligned} \quad (18)$$

y el sistema seguidor queda definido como

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1s} &= x_{2s}, \\ \dot{x}_{2s} &= -abx_{1s} + (a+b)x_{2s} + x_{3s}, \\ \dot{x}_{3s} &= (ab(a+b+c) - cq)x_{1s} + (ab - (a+b)(a+b+c) - q)x_{2s} - (a+b+c)x_{3s} \\ &\quad + k(x_{3l} - x_{3s}), \end{aligned} \quad (19)$$

El siguiente paso es obtener la dinámica del error, la cual se obtiene derivando (16) y usando (18)-(19), con lo cual se obtiene

$$\dot{e} = \hat{A}e, \quad (20)$$

donde

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -ab & a+b & 1 \\ (ab(a+b+c) - cq) & (ab - (a+b)(a+b+c) - q) & -(a+b+c+k) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

3.1.2. Análisis de estabilidad

El siguiente paso en el análisis es investigar la estabilidad de la solución síncrona (17). Para ello se analiza la estabilidad del sistema (20).

Primero, nótese que el polinomio característico de la matriz (21) es

$$\lambda^3 + \lambda^2(k + c) + \lambda(q - k(a + b)) + (cq + abk). \quad (22)$$

Utilizando el método de Routh-Hurwitz descrito en la Sección , es posible mostrar que (22) tiene raíces negativas sí y solo si las siguientes condiciones se satisfacen

$$k + c > 0, \quad (23)$$

$$cq + abk > 0, \quad (24)$$

$$k(-k(a + b) + (q - ab - ac - bc)) > 0. \quad (25)$$

Entonces, la siguiente proposición es válida.

Proposición 1 *El sistema del error de sincronización (20)-(21) es globalmente asintóticamente estable si el valor de la fuerza de acoplamiento se escoge de acuerdo a lo siguiente*

$$k \in \left(0, \frac{q - ab - ac - bc}{a + b}\right) \quad \text{si} \quad q - ab - ac - bc > 0. \quad (26)$$

$$k \in \left(\max\left(\frac{q - ab - ac - bc}{a + b}, -\frac{cq}{ab}, -c\right), 0\right) \quad \text{si} \quad q - ab - ac - bc < 0. \quad (27)$$

Además, si $q - ab - ac - bc = 0$, entonces no existe valor alguno de k para el cual el sistema (20)-(21) sea estable. Por tanto, el sistema líder (18) y el sistema seguidor (19) se sincronizarán si k se escoge de acuerdo a (26)-(27).

Finalmente, nótese que de las condiciones (26)-(27), se ve que la fuerza de acoplamiento k está limitada a un intervalo, cuyo tamaño está completamente determinado por los parámetros intrínsecos del sistema.

3.2. Sincronización líder-seguidor con acoplamiento dinámico de primer orden

En esta sección se introduce el esquema de sincronización líder-seguidor con acoplamiento dinámico lineal de primer orden. En este esquema, la interacción entre los sistemas es indirecta, véase la Figura 4. Nótese que la dinámica del sistema seguidor es 'extendida' con la dinámica del acoplamiento, de tal manera que el orden del sistema extendido será $n + 1$, donde n es el orden del sistema líder.

Matemáticamente, esta configuración está descrita por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\text{líder} : \begin{cases} \dot{x}_l = Ax_l \\ y_l = Cx_l, \end{cases} \quad (28)$$

$$\text{seguidor} : \begin{cases} \dot{x}_s = Ax_s - By_h \\ y_s = Cx_s, \end{cases} \quad (29)$$

$$\text{acoplamiento} : \begin{cases} \dot{h} = -\alpha h - k(y_l - y_s), \end{cases} \quad (30)$$

donde x_i, y_i , $i = m, s$ es el vector de estado y la salida del sistema líder y seguidor respectivamente, y las matrices A, B y C están definidas en (15) y $\alpha \in \mathbb{R}^+$ es un parámetro de diseño.

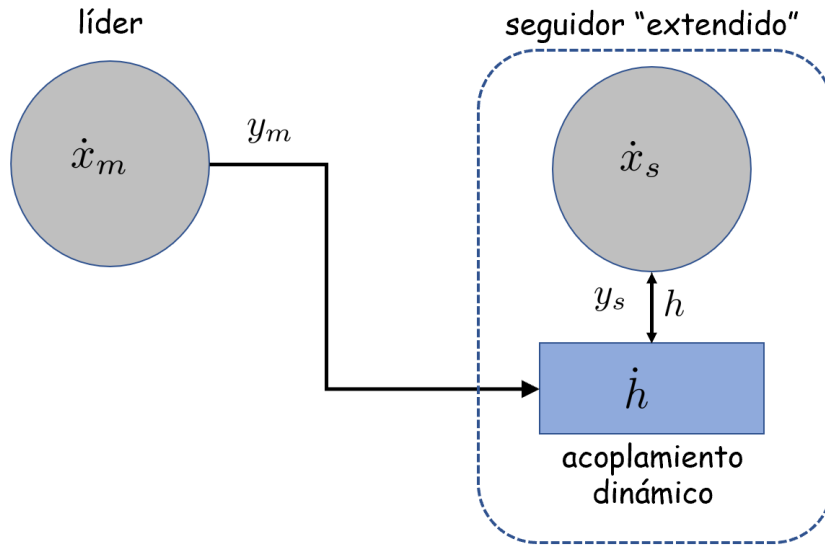


Figura 4. Esquema de sincronización líder-seguidor con acoplamiento dinámico.

Para este esquema, se considera el siguiente criterio de sincronización.

Definición 2 Diremos que los sistemas acoplados (28)-(30) están asintóticamente sincronizados si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h = 0, \quad (31)$$

donde e está definido en (16) y h es la solución del acoplamiento dinámico. Nótese que no solo se requiere que $x_s = x_l$ sino que también, la dinámica del acoplamiento dinámico se debe de desvanecer, lo cual garantiza que la solución síncrona corresponde a una solución de lazo abierto.

3.2.1. Dinámica del error

A continuación se analiza la estabilidad de la solución síncrona (31). Para ello, el primer paso es definir el sistema del error de sincronización extendido dado por $\bar{e}$

$$\bar{e} = \begin{bmatrix} e \\ h \end{bmatrix}, \quad (32)$$

con e definido en (16).

Como caso de estudio se considera el sistema de tercer orden mencionado en la Sección 2.2, por lo que se define $A = \hat{A}$, $B = \hat{B}$, y $C = \hat{c}$, con $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ dados en (12)-(14). En consecuencia, el sistema (28)-(30) toma la siguiente forma

$$l : \begin{cases} \dot{x}_{1l} = x_{2l}, \\ \dot{x}_{2l} = -abx_{1l} + (a+b)x_{2l} + x_{3l}, \\ \dot{x}_{3l} = (ab(a+b+c) - cq)x_{1l} + (ab - (a+b)(a+b+c) - q)x_{2l} - (a+b+c)x_{3l}. \end{cases} \quad (33)$$

$$s : \begin{cases} \dot{x}_{1s} = x_{2s}, \\ \dot{x}_{2s} = -abx_{1s} + (a+b)x_{2s} + x_{3s}, \\ \dot{x}_{3s} = (ab(a+b+c) - cq)x_{1s} + (ab - (a+b)(a+b+c) - q)x_{2s} - (a+b+c)x_{3s} - h. \end{cases} \quad (34)$$

$$a : \begin{cases} \dot{h} = -\alpha h - k(x_{3l} - x_{3s}). \end{cases} \quad (35)$$

Finalmente, el sistema que describe la dinámica del error de sincronización se obtiene derivando (32) y

utilizando (33)-(35), con lo cual se obtiene que

$$\dot{\bar{e}} = \bar{A}\bar{e}, \quad (36)$$

con

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -ab & a+b & 1 & 0 \\ (ab(a+b+c)-cq) & (ab-(a+b)(a+b+c)-q) & -(a+b+c) & 1 \\ 0 & 0 & -k & -\alpha \end{bmatrix}. \quad (37)$$

3.2.2. Análisis de estabilidad

La estabilidad del sistema del error de sincronización (36) está completamente determinada por las raíces del polinomio característico de la matriz $\bar{A}$ dada en (37), el cual está dado por

$$\lambda^4 + \lambda^3(\alpha + c) + \lambda^2(k + q + \alpha c) + \lambda(\alpha q - k(a + b) + cq) + (abk + \alpha cq). \quad (38)$$

A continuación, se utiliza el método de Routh-Hurwitz descrito en la Sección para determinar las condiciones bajo las cuales 38 es un polinomio Hurwitz, es decir, que todas sus raíces tengan parte real negativa. Las condiciones analíticas obtenidas son las siguientes.

$$abk + \alpha cq > 0, \quad (39)$$

$$(a + \alpha + b + c)k + \alpha^2 c + \alpha c^2 > 0, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & -k^2(a + b)(a + b + c + \alpha) + k[\alpha^2(q - ab - ac - bc) + \\ & \alpha(q(a + b + 2c) - c(ac + bc + 2ab)) + (qc(a + b + c) - abc^2)] > 0. \end{aligned} \quad (41)$$

La condición (39) se cumple si

$$k > u, \quad (42)$$

donde

$$u = -\alpha \frac{cq}{ab}. \quad (43)$$

Nótese que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} u = -\infty. \quad (44)$$

La condición (40) se cumple si

$$k > v, \quad (45)$$

donde

$$v = -\frac{\alpha^2 c + \alpha c^2}{(a + \alpha + b + c)}. \quad (46)$$

En este caso también se tiene que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} v = -\infty. \quad (47)$$

Finalmente, la condición (41) se cumple si

$$k \in (0, w) \quad \text{para} \quad w > 0, \quad (48)$$

$$k \in (w, 0) \quad \text{para} \quad w < 0, \quad (49)$$

con

$$w = \frac{\alpha^2(q - ab - ac - bc) + \alpha(q(a + b + 2c) - c(ac + bc + 2ab)) + (qc(a + b + c) - abc^2)}{(a + b)(a + b + c + \alpha)}, \quad (50)$$

por lo que

- $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} w = \infty$ si $(q - ab - ac - bc) > 0$,
- $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} w = -\infty$ si $(q - ab - ac - bc) < 0$.

Si $(q - ab - ac - bc) = 0$, entonces w se desplazará hacia infinito o menos infinito, dependiendo del signo de lo que multiplique a α en el numerador de (50).

El análisis y condiciones arriba mencionadas se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 2 *El sistema del error de sincronización extendido (36)-(37) es globalmente asintóticamente estable si $\alpha > 0$ y el valor de la fuerza de acoplamiento k se escoge de acuerdo a*

$$k \in (0, w) \quad \text{para} \quad w > 0, \quad (51)$$

$$k \in (\max(u, v, w), 0) \quad \text{para} \quad w < 0. \quad (52)$$

En consecuencia, si k se escoge de acuerdo a (51)-(52), el sistema líder (33) y el sistema seguidor (34) se sincronizarán asintóticamente.

Comentario 1 *A diferencia de las condiciones (26)-(27) para el acoplamiento estático clásico, véase la Proposición 1, las cuales dependen exclusivamente de los parámetros intrínsecos del sistema a sincronizar, las condiciones aquí obtenidas dependen de u, v y w , las cuales pueden modificarse con el parámetro de diseño α , véanse (43),(46), (50), por lo que el intervalo de la fuerza de acoplamiento para el cual la solución síncrona es asintóticamente estable puede hacerse arbitrariamente grande.*

3.3. Sincronización líder-seguidor con acoplamiento dinámico de segundo orden

Finalmente, en esta sección se presenta la configuración líder-seguidor con acoplamiento dinámico de segundo orden. Igual que en el esquema presentado en la sección anterior, la interacción entre los sistemas es indirecta tal y como se mostró en la Figura 4. Las ecuaciones que describen esta configuración son

$$\text{líder} : \begin{cases} \dot{x}_l = Ax_l \\ y_l = Cx_l \end{cases} \quad (53)$$

$$\text{seguidor} : \begin{cases} \dot{x}_s = Ax_s - By_h \\ y_s = Cx_s, \end{cases} \quad (54)$$

$$\text{acoplamiento} : \begin{cases} \dot{h} = Gh - kB_h(y_l - y_s) \\ y_h = C_h h, \end{cases}, \quad (55)$$

donde x_i, y_i , $i = m, s$ son el vector de estado y la salida del sistema líder y seguidor, respectivamente, las matrices A, B y C se definieron en (15), $h = [h_1, h_2] \in \mathbb{R}^2$ es el vector de estado del acoplamiento

dinámico con $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ las respectivas variables de estado del acoplamiento y

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (56)$$

donde $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ son parámetros de diseño.

Para el sistema (53)-(55) se considera el siguiente criterio de sincronización.

Definición 3 Diremos que los sistemas acoplados (53)-(55) están asintóticamente sincronizados si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h = 0, \quad (57)$$

donde e está definido en (16) y h es la solución del acoplamiento dinámico. Al igual que en el caso del acoplamiento dinámico de primer orden discutido en la sección anterior, no solo se requiere que $x_s = x_l$ sino que también, la dinámica del acoplamiento dinámico se debe de desvanecer para que la solución síncrona corresponda con una solución de lazo abierto.

3.3.1. Dinámica del error

Para obtener la dinámica del error, nuevamente se considera el caso en el que $A = \hat{A}$, $B = \hat{B}$, y $C = \hat{C}$, con $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ dados en (12)-(14) y se definen los siguientes vectores para el acoplamiento dinámico (55)

$$B_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (58)$$

En consecuencia, el sistema (53)-(55) toma la siguiente forma

$$l : \begin{cases} \dot{x}_{1l} = x_{2l}, \\ \dot{x}_{2l} = -abx_{1l} + (a+b)x_{2l} + x_{3l}, \\ \dot{x}_{3l} = (ab(a+b+c) - cq)x_{1l} + (ab - (a+b)(a+b+c) - q)x_{2l} - (a+b+c)x_{3l}. \end{cases} \quad (59)$$

$$s : \begin{cases} \dot{x}_{1s} = x_{2s}, \\ \dot{x}_{2s} = -abx_{1s} + (a+b)x_{2s} + x_{3s}, \\ \dot{x}_{3s} = (ab(a+b+c) - cq)x_{1s} + (ab - (a+b)(a+b+c) - q)x_{2s} - (a+b+c)x_{3s} - h_2. \end{cases} \quad (60)$$

$$a : \begin{cases} \dot{h}_1 = h_2 \\ \dot{h}_2 = -\gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 - k(x_{3l} - x_{3s}) \end{cases}. \quad (61)$$

La dinámica del error de sincronización $\dot{\tilde{e}} = [e \ h_1 \ h_2]^T$ está dada por

$$\dot{\tilde{e}} = \tilde{A}\tilde{e}, \quad (62)$$

donde

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -ab & a+b & 1 & 0 & 0 \\ (ab(a+b+c) - cq) & (ab - (a+b)(a+b+c) - q) & -(a+b+c+k) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}. \quad (63)$$

3.3.1.1. Análisis de estabilidad

Como se ha visto a lo largo de esta tesis, la estabilidad del sistema (62) está determinada por el polinomio característico de la matriz $\tilde{A}$, el cual está dado por

$$\begin{aligned} & \lambda^5 + \lambda^4(c + \gamma_2) + \lambda^3(k + \gamma_1 + q + c\gamma_2) + \lambda^2(c\gamma_1 - kb - ka + cq + \gamma_2q) + \\ & \lambda(\gamma_1q + kab + c\gamma_2q) + (c\gamma_1q). \end{aligned} \quad (64)$$

Usando el método de Routh-Hurwitz presentado en el Capítulo 2, se obtienen las siguientes condiciones, bajo las cuales el polinomio (64) tiene raíces con parte real negativa:

$$(a + b + c + \gamma_2)k + (c^2\gamma_2 + c\gamma_2^2 + \gamma_1\gamma_2) > 0 \quad (65)$$

$$\begin{aligned} & k^2 \{ -(a+b)(a+b+\gamma_2+c) \} + \\ & k \{ \gamma_2^2[q - ab - ac - bc] + \gamma_2[\gamma_1(c - b - a) + q(a + b + 2c) - c^2(a + b) - 2abc] + \\ & [\gamma_1(ac + bc + c^2) + q(ac + bc + c^2) - abc^2] \} + \{ \gamma_2^2(c^2\gamma_1) + \gamma_2(c^3\gamma_1 + c\gamma_1^2) \} > 0 \quad (66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & k^3 \{ \gamma_2 [-a^2b - ab^2] - ab [(a+b)^2 + c(a+b)] \} + \\ & k^2 \{ \gamma_2^2 [-ab(ab + ac + bc) + q(ab - ac - bc)] + \\ & \gamma_2 [\gamma_1(-ab(a+b-c) - q(a+b+c)) - \\ & abc(2ab + ac + bc) + q(a^2b - a^2c + ab^2 - ac^2 - b^2c - bc^2)] + \\ & [\gamma_1(abc(a+b+c) - q((a+b)^2) + 2c(a+b+c)) - abc(abc - q(a+b+c))] \} + \\ & k \{ \gamma_2^3 [cq(q - ac - bc - ab)] + \\ & \gamma_2^2 [\gamma_1(abc^2 + q(q - c^2 - ab - 2ac - 2bc)) + cq(2cq + aq - ac^2 + bq - bc^2 - 2abc)] + \\ & \gamma_2 [\gamma_1^2(abc - q(a+b+c)) + \gamma_1(q(q(a+b+c) - c(c^2 + ac + bc + ab)) + abc^3) + \\ & cq(c^2q + acq + bcq - abc^2)] \} > 0 \quad (67) \end{aligned}$$

La condición (65) se satisface para

$$k \in (u, \infty), \quad (68)$$

donde

$$u = -\frac{c^2\gamma_2 + c\gamma_2^2 + \gamma_1\gamma_2}{a + b + c + \gamma_2}. \quad (69)$$

La condición (66) se satisface para $\gamma_2 > 0$ y

$$k \in (w_1, w_2), \quad (70)$$

donde $w_1 < w_2$ son las raíces reales del polinomio en k de segundo orden dado en el lado izquierdo de

(66). Debido a que el coeficiente del término cuadrado de este polinomio es menor que cero y el término independiente es positivo, este polinomio tendrá la forma del caso 7 de la Tabla 2, y entonces

$$\begin{aligned}\lim_{\gamma_1, \gamma_2 \rightarrow \infty} w_1 &= -\infty \\ \lim_{\gamma_1, \gamma_2 \rightarrow \infty} w_2 &= \infty\end{aligned}\tag{71}$$

Para determinar los valores de k para los cuales la condición (67) se cumple, se procede de la siguiente manera. Primero, nótese que los coeficientes del polinomio en el lado derecho de (67) son

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \{ \gamma_2 [-a^2b - ab^2] - ab [(a+b)^2 + c(a+b)] \} \\ \hat{b} &= \{ \gamma_2^2 [-ab(ab + ac + bc) + q(ab - ac - bc)] + \\ &\quad \gamma_2 [\gamma_1 (-ab(a+b-c) - q(a+b+c)) - \\ &\quad abc(2ab + ac + bc) + q(a^2b - a^2c + ab^2 - ac^2 - b^2c - bc^2)] + \\ &\quad [\gamma_1(abc(a+b+c) - q((a+b)^2) + 2c(a+b+c)) - abc(abc - q(a+b+c))] \} \\ \hat{c} &= \{ \gamma_2^3 [cq(q - ac - bc - ab)] + \\ &\quad \gamma_2^2 [\gamma_1(abc^2 + q(q - c^2 - ab - 2ac - 2bc)) + cq(2cq + aq - ac^2 + bq - bc^2 - 2abc)] + \\ &\quad \gamma_2 [\gamma_1^2(abc - q(a+b+c)) + \gamma_1(q(q(a+b+c) - c(c^2 + ac + bc + ab)) + abc^3) + \\ &\quad cq(c^2q + acq + bcq - abc^2)] \}.\end{aligned}\tag{72}$$

Por tanto, las raíces de dicho polinomio son

$$\begin{aligned}v_1 &= 0, \\ v_2 &= \frac{-\hat{b} - \sqrt{\hat{b}^2 - 4\hat{a}\hat{c}}}{2\hat{a}}, \\ v_3 &= \frac{-\hat{b} + \sqrt{\hat{b}^2 - 4\hat{a}\hat{c}}}{2\hat{a}}.\end{aligned}\tag{73}$$

A continuación, se define

$$\hat{d} = q - ac - bc - ab.\tag{74}$$

De (72) y (73) se sabe lo siguiente

- Debido a que siempre $\hat{a} < 0$ siempre, el polinomio tendrá la forma de uno de los casos de la Tabla 4 y el rango de fuerza de acoplamiento estará limitado por sus raíces.
- Si $\hat{d} > 0$ entonces $\hat{c} > 0$ cuando $\gamma_2 \rightarrow \infty$, por lo que $v_2, v_3 \in \mathbb{R}; v_2 < 0 < v_3$.
- Si $\hat{d} < 0$ y $4\hat{a}\hat{c} < \hat{b}^2$ entonces $\hat{c}, \hat{b} < 0$ cuando $\gamma_2 \rightarrow \infty$, por lo que $v_2, v_3 \in \mathbb{R}; v_2 < v_3 < 0$.
- Si $4\hat{a}\hat{c} > \hat{b}^2$ entonces $v_2, v_3 \in \mathbb{C}$

Entonces, si $4\hat{a}\hat{c} > \hat{b}^2$ la condición (67) se satisface para

$$k \in (-\infty, 0). \quad (75)$$

Si $\hat{d} > 0$ entonces la condición (67) se satisface para

$$k \in (0, v_3). \quad (76)$$

Por otra parte, si $\hat{d} < 0$ y $4\hat{a}\hat{c} < \hat{b}^2$ entonces la condición (67) se satisface para

$$k \in (v_3, 0). \quad (77)$$

Todo este análisis se resume en la siguiente proposición.

Proposición 3 *El sistema del error de sincronización extendido (62)-(63) es globalmente asintóticamente estable si $\gamma_{1,\gamma_2} > 0$ y el valor de la fuerza de acoplamiento k se escoge de acuerdo a*

$$k \in (\max(u, w_1), 0) \quad \text{si} \quad 4\hat{a}\hat{c} > \hat{b}^2, \quad (78)$$

$$k \in (0, \min(w_2, v_3)) \quad \text{si} \quad \hat{d} > 0, \quad (79)$$

$$k \in (\max(u, w_1, v_3), 0) \quad \text{si} \quad \hat{d} < 0 \text{ y } 4\hat{a}\hat{c} < \hat{b}^2. \quad (80)$$

En consecuencia, si k se escoge de acuerdo a (78)-(80), el sistema líder (59) y el sistema seguidor (60) se sincronizarán asintóticamente.

Comentario 2 Los valores de u, w_1, w_2, v_2 y v_3 pueden modificarse variando γ_1 y γ_2 , por lo que el intervalo de fuerza de acoplamiento para el cual la solución síncrona es asintóticamente estable, véase (78)-(80) puede hacerse arbitrariamente grande.

3.4. Resultados numéricos

En esta sección se verifican de manera numérica los resultados analíticos presentados en la sección anterior. Se considera que los sistemas a sincronizar están descritos por (11)-(14), con $a, b, c, q = 1$.

3.4.1. Acoplamiento estático

Primero, se investiga la región de sincronización para el caso en que se usa el acoplamiento maestro esclavo clásico (18)-(19). De la Proposición 1, se tiene que, para los parámetros antes mencionados, el intervalo de la fuerza de acoplamiento para el cual la solución síncrona es globalmente asintóticamente estable, está dado por

$$-1 < k < 0. \quad (81)$$

Esto se verifica calculando de manera numérica la máxima raíz del polinomio característico (22). El resultado se muestra en la Figura 5, en la cual se puede corroborar que efectivamente la parte real de la raíz más grande del polinomio es negativa solo en el intervalo $-1 < k < 0$.

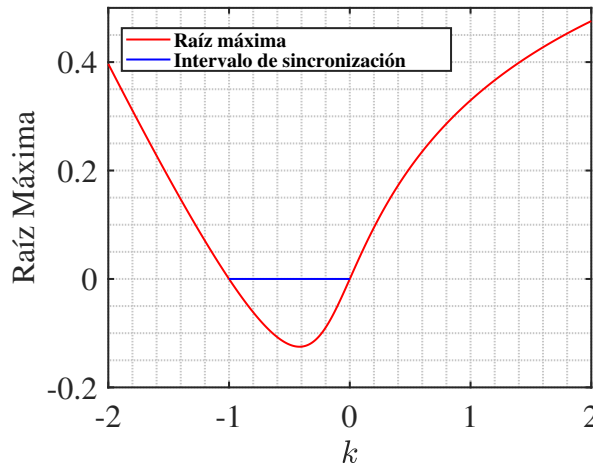


Figura 5. Raíz máxima del polinomio característico (22) calculado en función de la fuerza de acoplamiento k .

Ahora, para verificar estas regiones, el sistema (18)-(19) se integra numéricamente con parámetros $a, b, c, q = 1$, como se mencionó antes, y condiciones iniciales $x_l(0) = [-3, -4, -5]^T$ y $x_s(0) = [2, 3, 4]^T$.

En una primera simulación, se toma un valor de k ligeramente afuera del intervalo (81), es decir, $k = 1.001$. El resultado de esta simulación se muestra en la Figura 6a), en la que se puede apreciar que los errores de sincronización divergen, tal y como se esperaba de los resultados analíticos obtenidos, ya que el valor usado de k se encuentra fuera del intervalo (81).

Ahora, se repite la simulación numérica mencionada anteriormente, con los mismos parámetros y condiciones iniciales, excepto que el valor de k se ajusta a $k = -0.999$, el cual está contenido dentro del intervalo (81). La Figura 6b) muestra los resultados obtenidos. Puede verse claramente que los errores de sincronización convergen asintóticamente a cero, es decir, el sistema líder y el sistema seguidor se sincronizan.

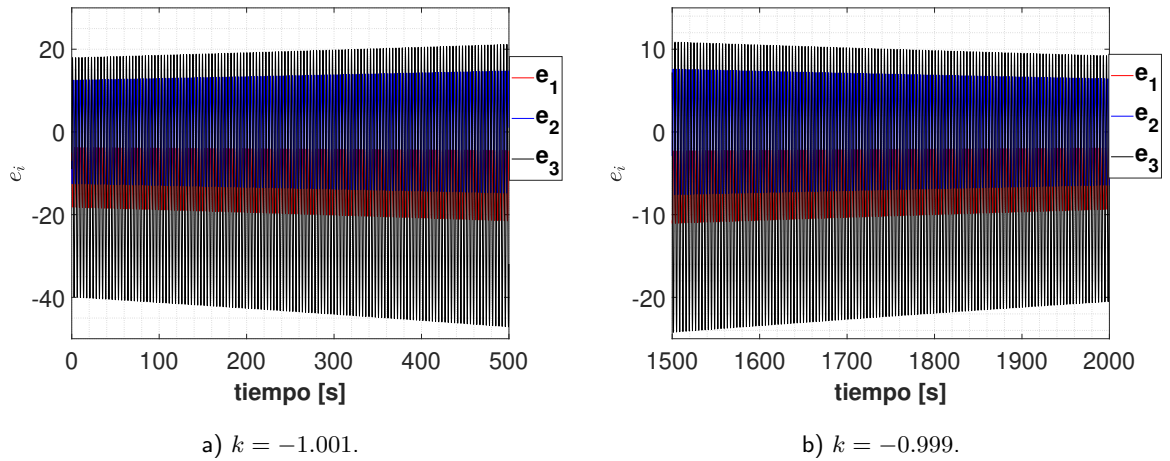


Figura 6. Resultados numéricos. Errores de sincronización de los sistemas acoplados (18)-(19) para diferentes valores de la fuerza de acoplamiento k .

3.4.2. Acoplamiento dinámico de primer orden

Para el caso del acoplamiento de primer orden, se utiliza la Proposición 2 para obtener los valores de k en función del parámetro α , para los cuales se garantiza que el error de sincronización es asintóticamente estable. En el estudio numérico k se varia en el intervalo $k \in (-50, 1)$ y α se varia en el intervalo $\alpha \in (0, 50)$.

Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 7. La región amarilla corresponde a los valores de k y α para los cuales la condición (52) de la Proposición 2 se satisface, mientras que, en la región azul, k no satisface ninguna de las condiciones establecidas en la Proposición 2.

Estos resultados confirman que, el intervalo de valores de k para el cual se espera que los sistemas se sincronicen, depende del parámetro de diseño α y dicho intervalo crece conforme el valor de α se incrementa, tal y como se mencionó en el Comentario 1.

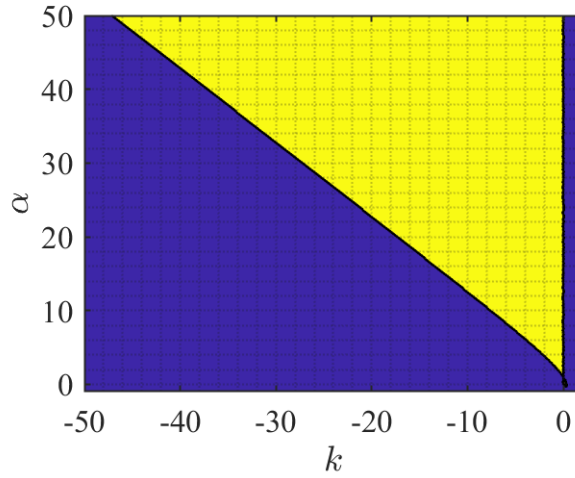


Figura 7. Región de sincronización en el plano (k, α) . En el área amarilla, k satisface la condición (52), mientras que en el área azul, k no satisface ninguna de las condiciones mencionadas en la Proposición 2.

Para verificar este resultado, se realiza una simulación numérica. Específicamente, el sistema (33)- (35) se integra numéricamente con los parámetros usados para el ejemplo del caso estático y con condiciones iniciales $x_l = [-3, -3, -3]^T$, $x_s = [2, 2, 2]^T$ y $h(0) = 0$.

En una primera simulación, los valores de α y k se escogen de la región azul mostrada en la Figura 7, es decir, $\alpha = 43$, $k = -40.2$. El resultado de la simulación se presenta en la Figura 8, la cual muestra las series temporales de los errores de sincronización e_i , $i = 1, 2, 3$. Es claro ver que los errores de sincronización divergen. Este resultado es el esperado, ya que estos valores de k y α seleccionados no cumplen ninguna de las condiciones de la Proposición 2.

Para la segunda simulación numérica, se consideran los mismos parámetros y condiciones iniciales usados en la simulación anterior y el mismo valor de α , pero ahora el valor de k se escoge dentro de la región amarilla mostrada en la Figura 7. En particular se escoge $k = -40.1$. Como resultado, los errores de sincronización convergen a cero de manera asintótica, es decir, los sistemas líder y seguidor (33)-(34) se sincronizan y el estado h del acoplamiento dinámico (35) decae asintóticamente.

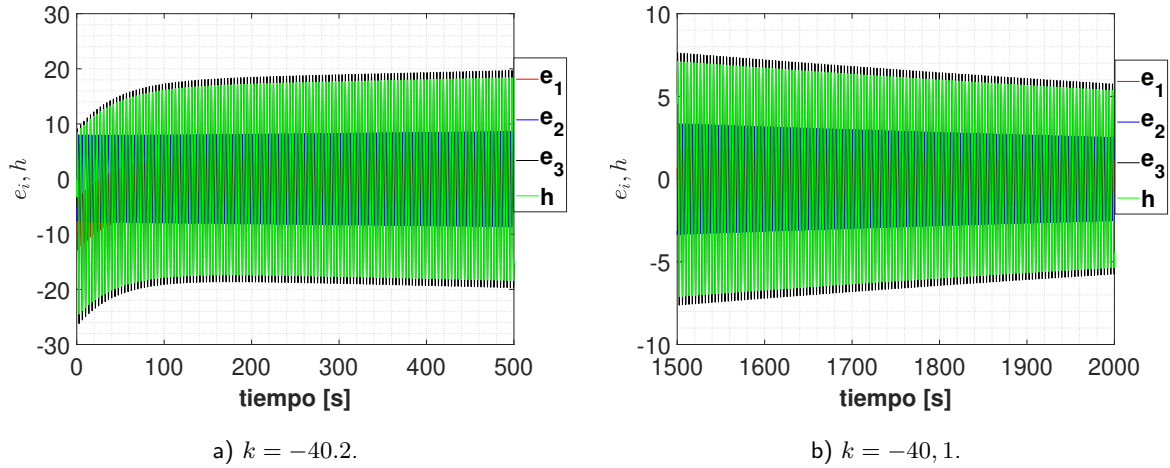


Figura 8. Resultados de simulación. Errores de sincronización de los sistemas (33)-(34) con acoplamiento dinámico de primer orden (35) con $\alpha = 43$ y dos valores muy cercanos de k .

3.4.3. Acoplamiento dinámico de segundo orden

Finalmente, se ilustran los resultados analíticos obtenidos para el esquema de sincronización (59)-(61), el cual está basado en un acoplamiento dinámico de segundo orden.

Igual que en los casos anteriores, en el estudio numérico que se presenta a continuación se consideran los parámetros $a, b, c, q = 1$.

Como primer punto, se investiga si existen valores de k, γ_1 , y γ_2 que cumplan con alguna de las condiciones establecidas en la Proposición 3. Por tanto, se construye una gráfica tridimensional variando k, γ_1 y γ_2 . En particular, los valores de estos parámetros se varían en los siguientes intervalos: $k \in (-10, 0)$, $\gamma_1 \in (0, 10)$ y $\gamma_2 \in (0, 10)$. El resultado obtenido se muestra en la Figura 9, en el cual el área colorida indica la región donde alguna de las condiciones de la Proposición 3 se satisface, mientras que el área blanca corresponde a la región donde ninguna de las condiciones de la Proposición 3 se cumple.

De este diagrama puede verse que el intervalo de valores de la fuerza de acoplamiento k para el cual alguna de las condiciones (78)-(80) se cumple, crece conforme los valores de γ_1 y γ_2 se incrementan, tal y como se mencionó en el Comentario 2.

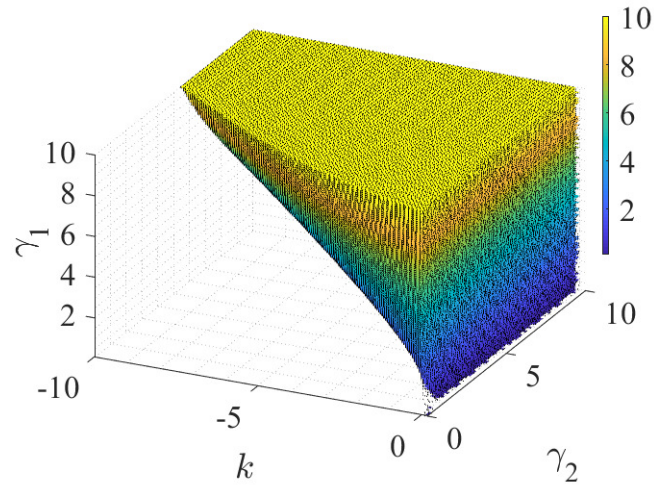


Figura 9. Región de estabilidad en función de (k, γ_1, γ_2) . El la región coloreada indica la región donde alguna de las condiciones de la Proposición 3 se cumple. En la región blanca ninguna de las condiciones se cumple. Los colores indican el valor utilizado de γ_1 .

Por último, se verifican los resultados del diagrama tridimensional de estabilidad. Para ello, se toma un valor de k, γ_1 y γ_2 dentro de la zona blanca mostrada en la Figura 9. En particular, se escoge $k = -9.1$, $\gamma_1 = 1.8$ y $\gamma_2 = 10$ y se integra numéricamente el sistema (59)-(61) con estos valores y con los parámetros y condiciones iniciales para el sistema líder y seguidor usadas en los casos anteriores y con condiciones iniciales para el acoplamiento dadas por $h_1(0) = h_2(0) = 0$. Las series temporales del error de sincronización se muestran en la Figura 10a), en la cual se aprecia que dichos errores crecen de manera desacotada, es decir, que las trayectorias del sistema líder y del sistema maestro no se sincronizan y divergen, tal y como se esperaba, ya que para este valor de k ninguna condición de la proposición 3 se satisface.

En una segunda simulación, el valor de k se ajusta a $k = -8.9$, el cual está contenido dentro de la región coloreada en la Figura 9. Después, se realiza la integración numérica de (59)-(61) con los parámetros y condiciones iniciales discutidas en la simulación anterior. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 10b, en donde se muestra que los errores de sincronización convergen a cero asintóticamente, es decir, el sistema líder (59) y el sistema seguidor (60) se sincronizan y los estados del acoplamiento dinámico (61) se desvanecen.

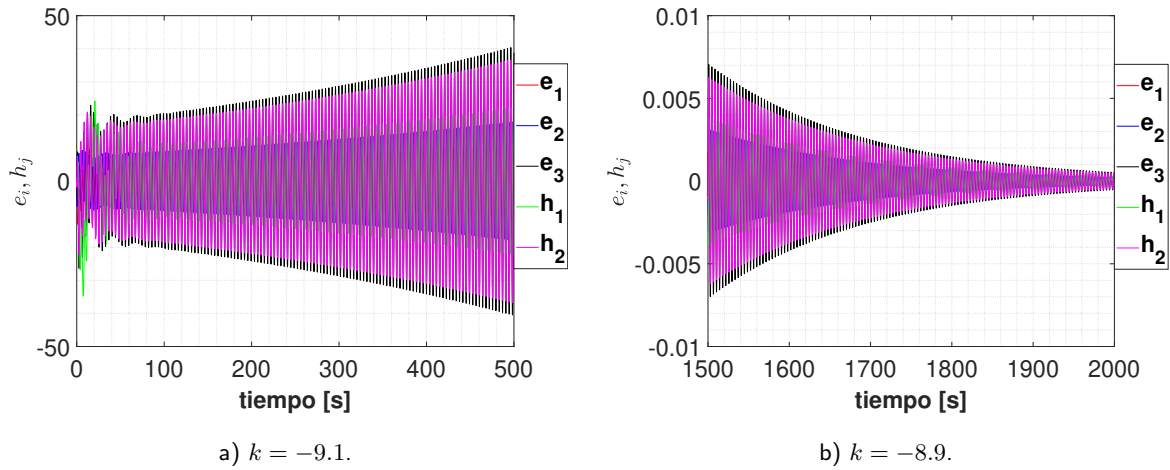


Figura 10. Resultados de simulación. Errores de sincronización de los sistemas (59)-(60) con acoplamiento dinámico de primer orden (61) con $\gamma_1 = 1.8$ y $\gamma_2 = 10$, y dos valores muy cercanos de k .

3.4.4. Discusión de resultados del estudio numérico

Los resultados de simulación presentados aquí coinciden con el estudio analítico desarrollado en las secciones anteriores e ilustran de manera clara las ventajas que los acoplamientos dinámicos considerados aquí, tienen sobre el acoplamiento estático clásico. En particular, para el ejemplo considerado en esta sección, la Figura 5 muestra que el acoplamiento estático puede sincronizar los sistemas solamente en un intervalo relativamente pequeño de valores de fuerza de acoplamiento. Por otra parte, las Figuras 7 y 9 muestran que es posible alargar dicho intervalo por medio de variar los parámetros de diseño α, γ_1 y γ_2 de los acoplamientos.

Capítulo 4. Sincronización en redes de sistemas de fase no mínima

En este capítulo se investiga la sincronización de redes de sistemas, en las que cada nodo de la red está descrito por sistemas lineales de fase no mínima. Primero se considera el caso en que la interacción entre los nodos es a través de acoplamientos estáticos, llamado también acoplamiento difuso, y se muestran las limitaciones que este tipo de acoplamientos presentan con respecto al número de nodos que pueden sincronizarse dentro de la red. Posteriormente, se considera el caso en que los sistemas interactúan a través de enlaces dinámicos de primer y segundo orden y se comparan los resultados con aquéllos obtenidos en el caso de acoplamiento estático.

4.1. Sincronización de redes con acoplamiento estático

Considere una red de sistemas lineales con acoplamiento estático, la cual está descrita por

$$\dot{x}_i = Ax_i - k \sum_{j=1}^N L_{ij} BCx_j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (82)$$

donde $x_i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema i , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ describe la dinámica del sistema aislado, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ son vectores que determinan que variables se usan en el acoplamiento y a que ecuaciones del nodo i se aplica, y L es la matriz Laplaciana cuyos coeficientes están dados por L_{ij} . Además, se considera que L es diagonalizable, lo cual es cierto para todas las redes con topología regular, y que la suma de los elementos de sus filas es cero.

La solución síncrona de la red (82) está dada por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1 = x_2 = \dots = x_N = s, \quad (83)$$

donde s es la solución de un nodo aislado, es decir, s es la solución del sistema

$$\dot{s} = As. \quad (84)$$

De acuerdo a (83), el error de sincronización se define de la siguiente manera

$$e_i = x_i - s, \quad i = 1, \dots, N, \quad (85)$$

cuya derivada está dada por

$$\begin{aligned}\dot{e}_i &= \dot{x}_i - \dot{s}, \quad i = 1, \dots, N, \\ \dot{e}_i &= Ae_i - k \sum_{j=1}^N L_{ij} BCe_j, \quad i = 1, \dots, N,\end{aligned}\tag{86}$$

Utilizando el producto de Kronecker, es posible escribir el sistema (86) en la forma compacta

$$\dot{e} = [I_N \otimes A - k(L \otimes BC)]e,\tag{87}$$

donde $e = [e_1, e_2, \dots, e_N]^T$, $I_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es la matriz identidad.

Con el fin de simplificar el análisis, se define la siguiente transformación lineal

$$e = (V \otimes I_n)\bar{e},\tag{88}$$

donde V es la matriz de vectores propios de la matriz Laplaciana L , la cual es invertible debido a la suposición de que L es diagonalizable, y $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad.

Aplicando esta transformación al sistema (87) se obtiene

$$\dot{\bar{e}} = [I_N \otimes A - k\Gamma \otimes CB]\bar{e},\tag{89}$$

donde $\Gamma := \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ es una matriz diagonal que contiene los valores propios γ_i , $i = 1, 2, \dots, N$, de la matriz Laplaciana L .

Nótese que (89) es una matriz diagonal a bloques, donde cada bloque es de la forma

$$\dot{\bar{e}}_i = [A - k\gamma_i CB]\bar{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.\tag{90}$$

Por tanto, para demostrar la estabilidad asintótica de la solución síncrona, basta con demostrar que cada sistema (90) es asintóticamente estable.

En el caso particular que los nodos de la red están descritos por el sistema (11), las matrices A , B están dadas por $A = \hat{A}$, $B = \hat{B}$, y $C = \hat{C}$ con $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ dadas en (12)-(14), respectivamente. Reemplazando esto en (90) se obtiene

$$\dot{\tilde{e}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -ab & a+b & 1 \\ (ab(a+b+c)-cq) & (ab-(a+b)(a+b+c)-q) & -(a+b+c+\rho_i k) \end{bmatrix} e, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (91)$$

Nótese que este sistema coincide con el sistema (20)-(21) excepto que k debe ser reemplazada por $\rho_i k$.

Por tanto, la estabilidad de los i sistemas (91) puede ser investigada usando la Proposición 1 para cada subsistema $i = 2, 3, \dots, N$ y reemplazando k por $\rho_i k$.

4.2. Sincronización de redes con acoplamientos dinámicos

Considere una red de sistemas lineales con acoplamiento dinámico, la cual está descrita por

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= Ax_i + Bh_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \dot{h}_i &= Gh_i - k \sum_{j=1}^N L_{ij} Hx_j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (92)$$

donde $x_i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema i , $h_i \in \mathbb{R}^m$ es el vector de estados del acoplamiento dinámico del sistema i , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ describe la dinámica del sistema aislado, $G \in \mathbb{R}^{m \times m}$ describe la dinámica del acoplamiento dinámico, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ describe la interacción del acoplamiento dinámico con el sistema aislado, $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz constante, y L es la matriz Laplaciana cuyos coeficientes están dados por L_{ij} . Además, se considera que L es diagonalizable, y que la suma de los elementos de sus filas es cero.

La solución síncrona en la red (92) está dada por

$$x_1 = x_2 = \dots = x_N = s, \quad (93)$$

$$h_1 = h_2 = \dots = h_N = 0. \quad (94)$$

Por lo que el error de sincronización se define como:

$$e_i = x_i - s, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (95)$$

Además, nótese que todos los estados h_i también se consideran 'errores' de sincronización porque cuando todos los nodos en la red se sincronizan, se requiere que la dinámica del acoplamiento se desvanezca de tal manera que la solución síncrona corresponda a una solución de lazo abierto.

Entonces, la dinámica del error se obtiene derivando (98), y usando (92), con lo que se obtiene

$$\dot{e}_i = Ae_i + Bh_i, \quad (96)$$

$$\dot{h}_i = Gh_i - k \sum_{j=1}^N L_{ij} H e_j, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (97)$$

Usando el producto de Kronecker, este sistema se escribe de forma compacta como sigue

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_N \otimes A & I_N \otimes B \\ -kL \otimes H & I_N \otimes G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ h \end{bmatrix} \quad (98)$$

donde $e = [e_1, e_2, \dots, e_N]^T$, $h = [h_1, h_2, \dots, h_N]^T$ y $I_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es una matriz identidad

A continuación, se define la transformación lineal

$$\begin{bmatrix} e \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \otimes I_n & 0 \\ 0 & V \otimes I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e} \\ \bar{h} \end{bmatrix}, \quad (99)$$

donde $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $I_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son matrices identidad y V es la matriz de vectores propios de la matriz Laplaciana L , la cual es invertible debido a la suposición antes mencionada de que L es diagonalizable.

Aplicando esta transformación al sistema (98) se obtiene el sistema transformado

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{e}} \\ \dot{\bar{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_N \otimes A & I_N \otimes B \\ -k\Gamma \otimes H & I_N \otimes G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e} \\ \bar{h} \end{bmatrix}, \quad (100)$$

donde $\Gamma \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es una matriz diagonal que contiene los valores propios ρ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ de la

matriz Laplaciana L .

Nótese que el sistema (100) es un sistema diagonal a bloques compuesto por N bloques de la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{e}}_i \\ \dot{\bar{h}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -k\rho_i H & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_i \\ \bar{h}_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (101)$$

Por tanto, para mostrar que la estabilidad de la solución síncrona (93) es suficiente con mostrar que cada subsistema (101) es estable.

4.2.1. Acoplamiento de primer orden

Considerando una vez más el caso particular en que la dinámica intrínseca de los nodos de la red está definida por el sistema (11). Además, para el acoplamiento de primer orden se tiene que

$$G = -\alpha, \quad (102)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y se consideran los siguientes los vectores de acoplamiento

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (103)$$

Entonces reemplazando $A = \hat{A}$, $B = \hat{B}$ con $\hat{A}$ y $\hat{B}$ dadas en (12),(13) y (103) en (101) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{e}} \\ \dot{\bar{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -ab & a+b & 1 & 0 \\ (ab(a+b+c)-cq) & (ab-(a+b)(a+b+c)-q) & -(a+b+c) & 1 \\ 0 & 0 & -\rho_i k & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e} \\ \bar{h} \end{bmatrix}. \quad (104)$$

Nótese que este sistema coincide con el sistema (36)-(37) excepto que k debe ser reemplazada por $\rho_i k$.

Por tanto, la estabilidad de los i sistemas (104) puede ser investigada usando la Proposición 2 para cada subsistema i y reemplazando k por $\rho_i k$.

4.2.2. Acoplamiento de segundo orden

Para el caso del acoplamiento de segundo orden, la matriz G está dada por

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (105)$$

con $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^+$.

Además, se consideran los siguientes vectores y matrices de acoplamiento

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (106)$$

Entonces reemplazando $A = \hat{A}$, $B = \hat{B}$ con $\hat{A}$ y $\hat{B}$ dadas en (12),(13), y (105)-(106) en (101) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{e}} \\ \dot{\bar{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -ab & a+b & 1 & 0 & 0 \\ (ab(a+b+c)-cq) & (ab-(a+b)(a+b+c)-q) & -(a+b+c) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\rho_i k & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e} \\ \bar{h} \end{bmatrix}. \quad (107)$$

Al igual que en los casos antes discutidos, puede verse que este sistema coincide con el sistema (62)-(63) excepto que k debe ser reemplazada por $\rho_i k$.

Por tanto, la estabilidad de los i sistemas (107) puede ser investigada usando la Proposición 2 para cada subsistema i y reemplazando k por $\rho_i k$.

4.3. Resultados numéricos

En esta sección se presenta un ejemplo con valores de parámetros específicos para ilustrar los resultados obtenidos en la sección anterior. Se consideran dos tipos de topología de red: todos contra todos y

estrella. Además, se considera que todos los nodos de la red son idénticos y que la dinámica intrínseca de cada nodo está dada por (11)-(14) con parámetros $a, b, c, q = 1$.

Para el caso de la topología en estrella se tiene que $\rho_1 = 0, \rho_2 = \rho_3 = \rho_{N-1} = 1$ y $\rho_N = N$, mientras que para la topología todos contra todos, también llamada topología en malla, se tiene que $\rho_1 = 0, \rho_2 = \rho_3 = \rho_N = N$.

Entonces, tanto para la topología de estrella como para la de malla, se ignora el valor propio ρ_1 ya que para este valor corresponde al caso cuando el sistema ya está en la solución síncrona.

Por otra parte, en todos los resultados que se presentan a continuación se hace un barrido de la fuerza de acoplamiento k en el intervalo $k \in (-10, 10)$ y el número de nodos N se varía en el intervalo $N \in (2, 100)$,

Los resultados obtenidos para el caso estático se muestran en la Figura 11, donde la región sombreada corresponde a valores de k para los cuales los $i = 2, 3, \dots, N$ sistemas (91) son asintóticamente estables de acuerdo con la Proposición 1, mientras que en la región blanca los i sistemas son inestables. Estos resultados muestran claramente que, conforme el número de nodos se incrementa, el intervalo de la fuerza de acoplamiento donde la solución síncrona es estable se reduce considerablemente.

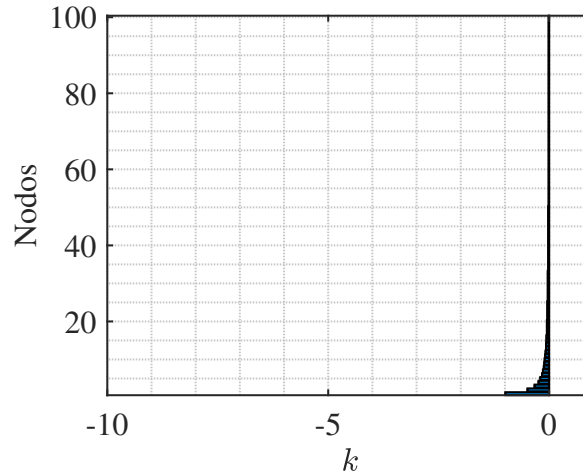


Figura 11. Región de sincronización (área sombreada) proyectada en el plano (k, N) para red con acoplamiento estático.

Por otra parte, para el caso dinámico de primer orden, se obtienen las regiones de sincronización en el plano (k, N) para diferentes valores de α y los resultados obtenidos se muestran en la Figura 12, de la que puede verse que la región de sincronización (área sombreada) se agranda, de manera muy considerable, conforme el valor de α se incrementa.

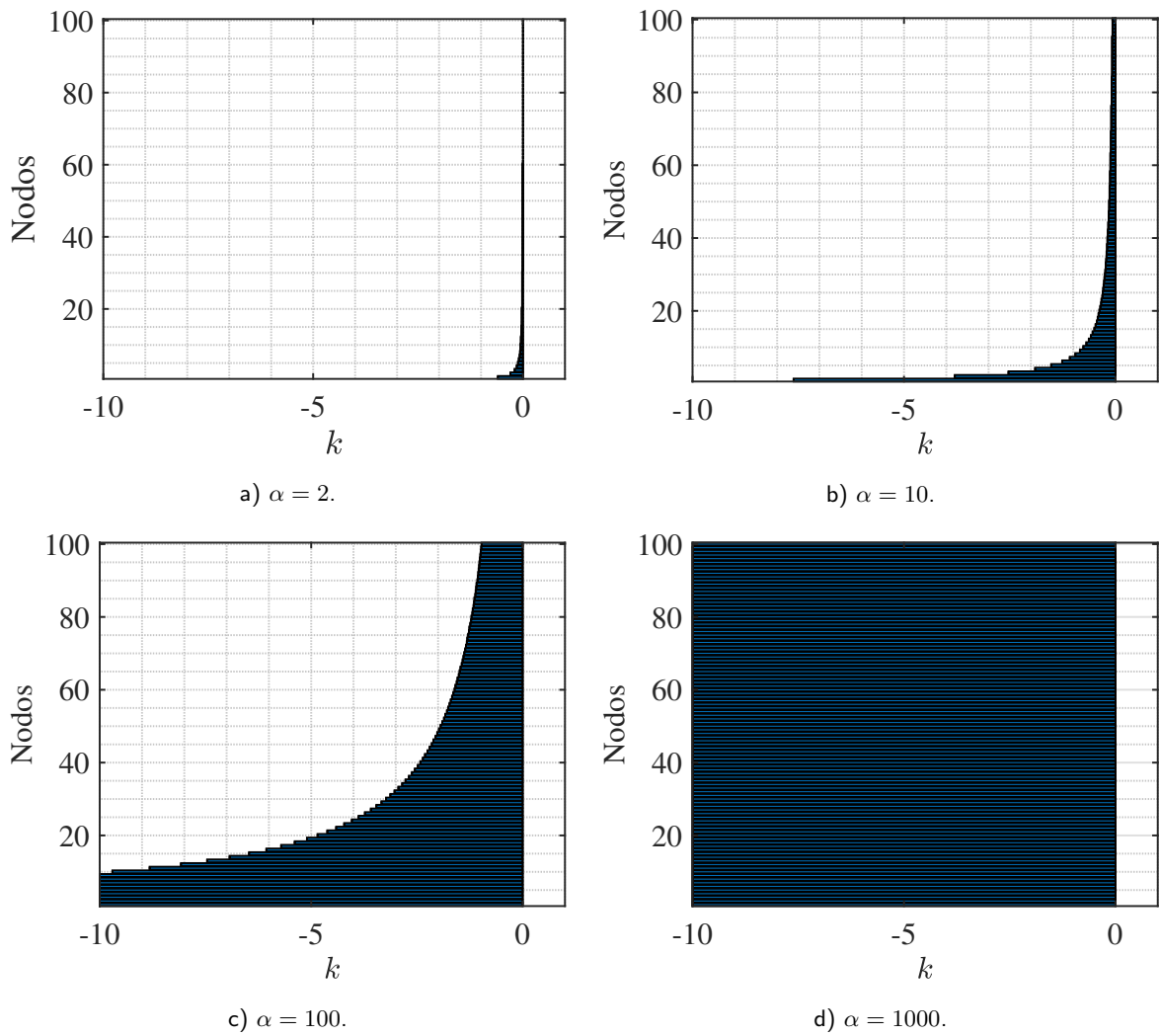


Figura 12. Región de sincronización (área sombreada) proyectada en el plano (k, N) para red con acoplamiento dinámico de primer orden.

En lo que respecta al acoplamiento dinámico de segundo orden, se obtiene la zona de sincronización en el plano (k, N) y para diferentes valores de γ_1 y γ_2 . Los resultados de dicho análisis se muestran en la Figura 13, en donde la región sombreada indica la región de sincronización, donde los $i = 2, 3, \dots, N$ subsistemas 107 son asintóticamente estables.

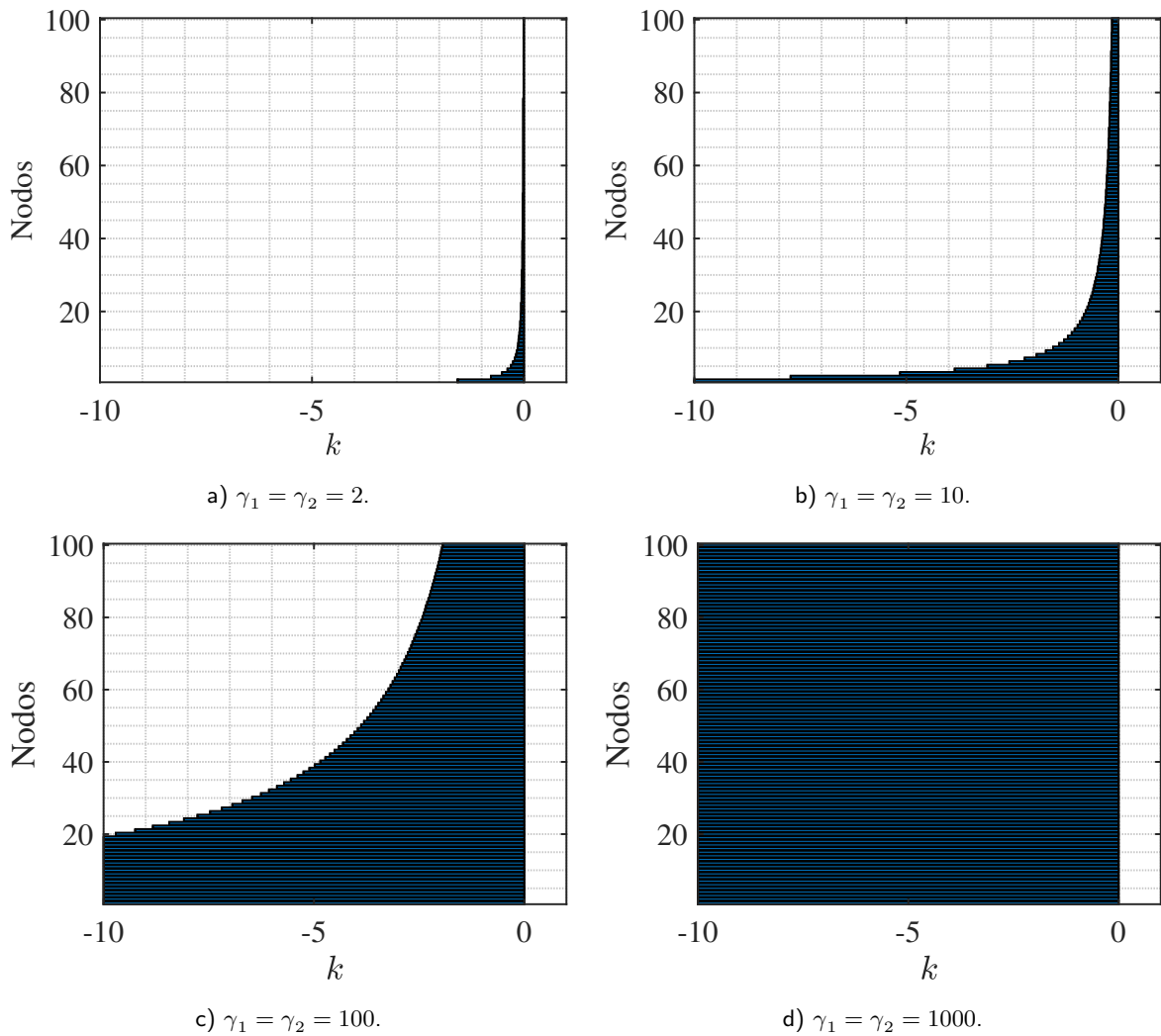


Figura 13. Región de sincronización (área sombreada) proyectada en el plano (k, N) para red con acoplamiento dinámico de segundo orden.

Finalmente, se presenta una simulación numérica usando el acoplamiento dinámico de segundo orden, y considerando una red en malla (todos contra todos) de 100 nodos idénticos y las condiciones iniciales se escogen de manera aleatoria en el intervalo $[0, 1]$. Los valores de γ_1 y γ_2 se fijan en $\gamma_1 = \gamma_2 = 1000$ y la fuerza de acoplamiento se fija en $k = -5$. Para estos valores, de acuerdo a los resultados presentados en la Figura 13d), se espera que todos los nodos en la red se sincronicen.

Los resultados de la simulación se muestran en las Figuras 14, 15 y 16. En particular, la Figura 14 muestra la respuesta de la simulación de los cien nodos en un intervalo de tiempo de dos mil segundos. Para una mejor visualización se muestra en la Figura 15 la respuesta inicial de los nodos, mientras que la Figura 16 muestra la respuesta en 'estado estacionario'. En esta última figura puede apreciarse que los 3 estados de cada nodo están sincronizados, es decir, la red se sincroniza de manera completa.

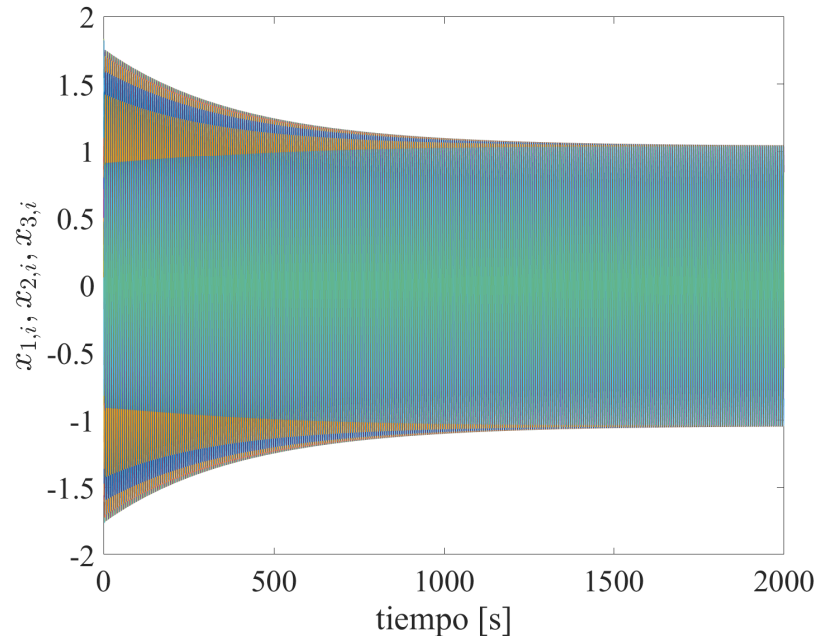


Figura 14. Respuesta del sistema (92), con 100 nodos y condiciones iniciales aleatorias tomadas del intervalo $[0,1]$, con $\gamma_1, \gamma_2 = 1000$, y con valor de fuerza de acoplamiento $k = -5$

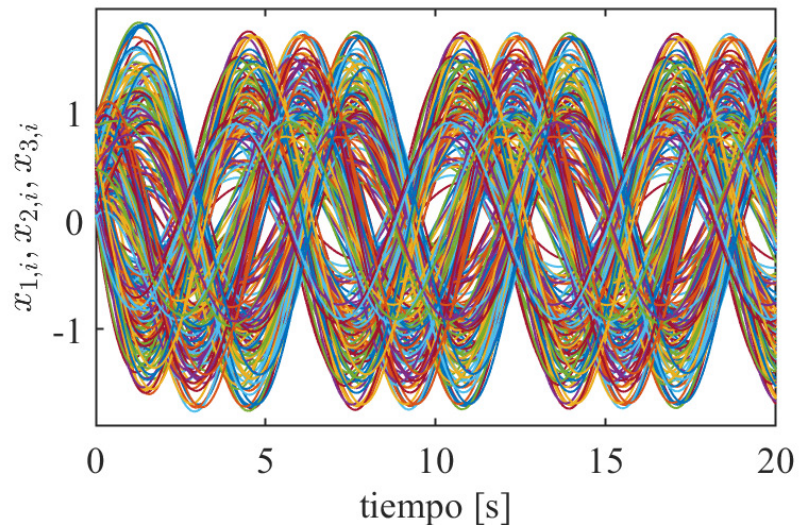


Figura 15. Respuesta transitoria del sistema (92), con 100 nodos y condiciones iniciales aleatorias tomadas del intervalo $[0,1]$, con $\gamma_1, \gamma_2 = 1000$, y con valor de fuerza de acoplamiento $k = -5$

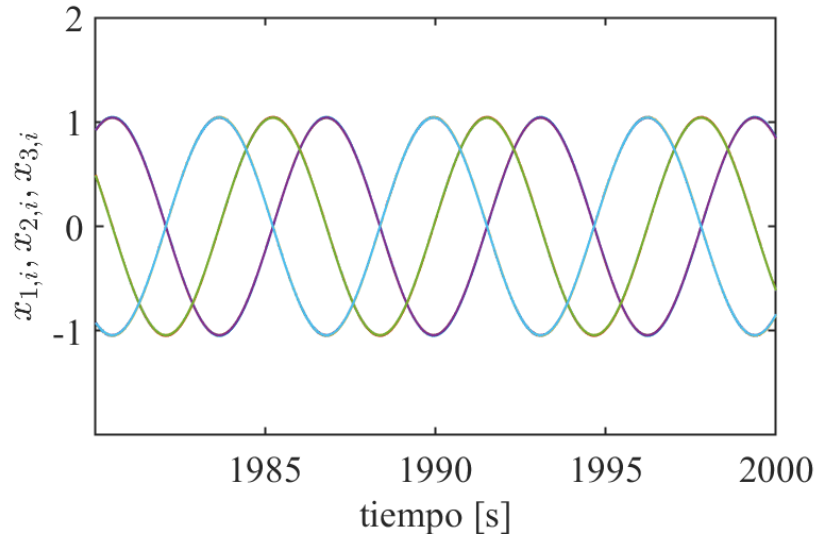


Figura 16. Respuesta en estado 'estacionario' de la red. Los 3 estados de cada uno de los 100 nodos se sincronizan, es decir, se alcanza sincronización completa.

4.3.1. Conclusiones del análisis numérico

Los resultados numéricos presentados en las Figura 11 a 16 muestran que los acoplamientos dinámicos mejoran la 'sincronizabilidad' de la red en el sentido que permiten que el intervalo de valores de fuerza de acoplamiento k sea prácticamente independiente del número de nodos en la red, véanse las Figuras 13 y 12, mientras que para el caso estático el intervalo de valores de k se reduce notablemente conforme el número de nodos en la red aumenta, véase la Figura 11.

Capítulo 5. Inestabilidad por difusión: caso de estudio

En este capítulo se considera un caso de estudio en el que se muestra que los sistemas de fase no mínima aquí considerados pueden experimentar un fenómeno llamado inestabilidad por difusión (Rogov et al., 2018), en el que un par una red de sistemas que desacoplados son globalmente asintóticamente estables, se vuelven inestables cuando se interconectan a través de acoplamientos estáticos también llamados acoplamientos difusos. Además, se muestra que la aparición de dicho fenómeno se puede prevenir utilizando acoplamientos dinámicos.

5.1. Acoplamiento líder-seguidor de sistemas particulares

Considere el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{108}$$

donde $x \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estados del sistema, y es la salida del sistema, y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix}\tag{109}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\tag{110}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\tag{111}$$

son las matrices que describen la dinámica del sistema.

Este es un sistema lineal de fase no mínima (Pogromsky et al., 1999), el cual se denominará como sistema particular a lo largo de esta tesis.

5.1.1. Dinámica del error

A continuación, se construye la dinámica del error del acoplamiento para el caso en que A, B, C están dados por (109)-(111).

Como primer paso (109)-(111) se reemplazan en (15), por lo que las ecuaciones del líder están dadas por

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1l} &= x_{1l} - x_{2l} + x_{3l} \\ \dot{x}_{2l} &= x_{1l} \\ \dot{x}_{3l} &= -4x_{1l} + 2x_{2l} - 3x_{3l}\end{aligned}\tag{112}$$

y el sistema seguidor queda definido como

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1s} &= x_{1s} - x_{2s} + x_{3s} \\ \dot{x}_{2s} &= x_{1s} \\ \dot{x}_{3s} &= -4x_{1s} + 2x_{2s} - 3x_{3s} + k(x_{3l} - x_{3s})\end{aligned}\tag{113}$$

El siguiente paso es obtener la dinámica del error, la cual se obtiene derivando (16) y usando (112)-(113), con lo cual se obtiene

$$\dot{e} = \hat{A}e,\tag{114}$$

donde

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -(3+k) \end{bmatrix}\tag{115}$$

5.1.2. Análisis de estabilidad

El siguiente paso en el análisis la estabilidad del sistema (114).

Primero, nótese que el polinomio característico de la matriz (115) es

$$\lambda^3 + \lambda^2(k+2) + \lambda(2-k) + (k+1)\tag{116}$$

Utilizando el método de Routh-Hurwitz descrito en la Sección , es posible mostrar que (116) tiene raíces

negativas sí y solo si las siguientes condiciones se satisfacen

$$k + 1 > 0, \quad (117)$$

$$-k^2 - k + 3 > 0 \quad (118)$$

Entonces, la siguiente proposición es válida.

Proposición 4 *El sistema del error (114)-(115) es globalmente asintóticamente estable si el valor de la fuerza de acoplamiento se escoge de acuerdo a lo siguiente*

$$k \in (-1, 1.3028) \quad (119)$$

Nótese que en la condición (119) se ve que la fuerza de acoplamiento k está limitada a un intervalo, cuyo tamaño está completamente determinado por los parámetros intrínsecos del sistema.

5.2. Acoplamiento dinámico de 1er orden de sistemas particulares

5.2.1. Dinámica del error

A continuación se analiza la estabilidad de los sistemas al estar acoplados. Para ello, el primer paso es definir el sistema del error del acoplamiento extendido dado por $\bar{e}$

$$\bar{e} = \begin{bmatrix} e \\ h \end{bmatrix}, \quad (120)$$

con e definido en (16) y h definido en (30).

Se considera el sistema particular 108, cuyas matrices A, B, C son dadas en (109)-(111). Al sustituirlas en (28)-(30) el sistema toma la siguiente forma

$$l : \begin{cases} \dot{x}_{1l} = x_{1l} - x_{2l} + x_{3l} \\ \dot{x}_{2l} = x_{1l} \\ \dot{x}_{3l} = -4x_{1l} + 2x_{2l} - 3x_{3l} \end{cases} \quad (121)$$

$$s : \begin{cases} \dot{x}_{1s} = x_{1s} - x_{2s} + x_{3s} \\ \dot{x}_{2s} = x_{1s} \\ \dot{x}_{3s} = -4x_{1s} + 2x_{2s} - 3x_{3s} - h \end{cases} \quad (122)$$

$$a : \begin{cases} \dot{h} = -\alpha h - k(x_{3l} - x_{3s}) \end{cases} \quad (123)$$

Finalmente, el sistema que describe la dinámica del error se obtiene derivando (120) y utilizando (121)-(123), con lo cual se obtiene que

$$\dot{\bar{e}} = \bar{A}\bar{e}, \quad (124)$$

con

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -k & -\alpha \end{bmatrix}. \quad (125)$$

5.2.2. Análisis de condiciones de estabilidad

La estabilidad del sistema del error (124) está completamente determinada por las raíces del polinomio característico de la matriz $\bar{A}$ dada en (125), el cual está dado por

$$\lambda^4 + \lambda^3(\alpha + 2) + \lambda^2(2\alpha + k + 2) + \lambda(2\alpha - k + 1) + (\alpha + k) \quad (126)$$

A continuación, se utiliza el método de Routh-Hurwitz descrito en la Sección para determinar las condiciones bajo las cuales 126 es un polinomio Hurwitz, es decir, que todas sus raíces tengan parte real negativa. Las condiciones analíticas obtenidas son las siguientes.

$$\alpha + 2 > 0. \quad (127)$$

$$\alpha + k > 0, \quad (128)$$

$$2\alpha^2 + \alpha(k + 4) + 3(k + 1) > 0, \quad (129)$$

$$3\alpha^3 + \alpha^2(-k + 6) + \alpha(-k^2 - k + 6) + (-3k^2 - 4k + 3) > 0. \quad (130)$$

La condición (127) se cumple si

$$\alpha > -2, \quad (131)$$

La condición (128) se cumple si

$$\alpha > -k, \quad (132)$$

La condición (129) se cumple si

$$\alpha \in (-\infty, u_1) \cup (u_2, \infty) \quad (133)$$

donde $u_1 < u_2$; $Re(u_1) < Re(u_2)$ son las raíces del polinomio en α de segundo orden dado en el lado izquierdo de (129).

La condición (130) se cumple si

$$\alpha \in (w_1, w_2) \cup (w_3, \infty) \quad \text{si } w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R} \quad (134)$$

$$\alpha \in (w_3, \infty) \quad \text{si } w_1, w_2 \in \mathbb{C}; Im \neq 0 \quad (135)$$

$$\alpha \in (w_1, \infty) \quad \text{si } w_2, w_3 \in \mathbb{C}; Im \neq 0 \quad (136)$$

donde $(w_1, w_2, w_3; Re(w_1) < Re(w_2) < Re(w_3))$ son las raíces del polinomio en α de tercer orden dado en el lado izquierdo de (130).

El análisis y condiciones arriba mencionadas se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 5 *El sistema del error extendido (124)-(125) es globalmente asintóticamente estable si α*

se escoge de acuerdo a

$$\alpha > \max(w_3, u_2, -k, -2) \quad \text{para} \quad u_2, w_3 \in \mathbb{R} \quad (137)$$

$$\alpha > \max(w_1, -k, -2) \quad \text{para} \quad u_2, w_3 \in \mathbb{C} \quad (138)$$

$$\alpha > (w_3, -k, -2) \quad \text{para} \quad w_3 \in \mathbb{R}, u_2 \in \mathbb{C} \quad (139)$$

$$\alpha > \max(w_1, u_2, -k, -2) \quad \text{para} \quad u_2 \in \mathbb{R}, w_3 \in \mathbb{C} \quad (140)$$

En consecuencia, si α se escoge de acuerdo a (137)-(140), el sistema líder (121) y el sistema seguidor (122) no se desestabilizan al estar acoplados.

Comentario 3 A diferencia de la condición (119) para el acoplamiento estático clásico, véase la Proposición 4, la cual depende exclusivamente de los parámetros intrínsecos del sistema acoplado, para este caso el orden la fuerza de acoplamiento k no tiene limitaciones, pues las condiciones aquí obtenidas dependen de α , véanse (131), (132), (133), (134). Por lo que para cualquier valor de fuerza de acoplamiento k existe un α suficientemente grande que cumpla con las condiciones de la Proposición 5.

5.3. Acoplamiento dinámico de 2do orden de sistema particular

5.3.1. Dinámica del error

Para obtener la dinámica del error, se considera el caso en el que A, B, C son dados en (109)-(111) y se definen los siguientes vectores para el acoplamiento dinámico (55)

$$B_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (141)$$

En consecuencia, el sistema (53)-(55) toma la siguiente forma

$$l : \begin{cases} \dot{x}_{1l} &= x_{1l} - x_{2l} + x_{3l} \\ \dot{x}_{2l} &= x_{1l} \\ \dot{x}_{3l} &= -4x_{1l} + 2x_{2l} - 3x_{3l} \end{cases} \quad (142)$$

$$s : \begin{cases} \dot{x}_{1s} &= x_{1s} - x_{2s} + x_{3s} \\ \dot{x}_{2s} &= x_{1s} \\ \dot{x}_{3s} &= -4x_{1s} + 2x_{2s} - 3x_{3s} - h_2 \end{cases} \quad (143)$$

$$a : \begin{cases} \dot{h}_1 &= h_2 \\ \dot{h}_2 &= -\gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 - k(x_{3l} - x_{3s}) \end{cases} . \quad (144)$$

La dinámica del sistema del error $\tilde{e} = [e \ h_1 \ h_2]^T$ está dada por

$$\dot{\tilde{e}} = \tilde{A}\tilde{e}, \quad (145)$$

donde

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix} . \quad (146)$$

5.3.2. Análisis de condiciones de estabilidad

Como se ha visto a lo largo de esta tesis, la estabilidad del sistema (145) está determinada por el polinomio característico de la matriz $\tilde{A}$, el cual está dado por

$$\lambda^5 + \lambda^4(\gamma_2 + 2) + \lambda^3(\gamma_1 + 2\gamma_2 + k + 2) + \lambda^2(2\gamma_1 + 2\gamma_2 - k + 1) + \lambda(2\gamma_1 + \gamma_2 + k) + \gamma_1 \quad (147)$$

Usando el método de Routh-Hurwitz presentado en el Capítulo 2, se obtienen las siguientes condiciones, bajo las cuales el polinomio (147) tiene raíces con parte real negativa:

$$\gamma_2 + 2 > 0 \quad (148)$$

$$\gamma_1 > 0 \quad (149)$$

$$2\gamma_2^2 + \gamma_2(\gamma_1 + k + 4) + (3k + 3) > 0. \quad (150)$$

$$\begin{aligned} 3\gamma_2^3 + \gamma_2^2(4\gamma_1 - k + 6) + \gamma_2(2\gamma_1^2 + \gamma_1k + 2\gamma_1 - k^2 - k + 6) + \\ (6\gamma_1k - 4k - 3k^2 + 3) > 0. \end{aligned} \quad (151)$$

$$\begin{aligned} 3\gamma_2^4 + \gamma_2^3(6\gamma_1 + 2k + 6) + \gamma_2^2(6\gamma_1^2 - \gamma_1k + 3\gamma_1 - 2k^2 + 5k + 6) + \\ \gamma_2(3\gamma_1^3 + 2\gamma_1^2k - 2\gamma_1k^2 - 5\gamma_1k - k^3 - 4k^2 + 2k + 3) + \\ (9\gamma_1^2k - 3\gamma_1k^2 - 15\gamma_1k - 3k^3 - 4k^2 + 3k) > 0. \end{aligned} \quad (152)$$

La condición (148) se satisface para

$$\gamma_2 > -2, \quad (153)$$

La condición (149) se satisface para

$$\gamma_1 > 0, \quad (154)$$

La condición (150) se satisface para

$$\gamma_2 \in (-\infty, u_1) \cup (u_2, \infty) \quad \text{si} \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \quad (155)$$

$$\gamma_2 \in \mathbb{R} \quad \text{si} \quad u_1, u_2 \in \mathbb{C}, \quad (156)$$

donde $U = \{u_1, u_2\}$; $Re(u_1) < Re(u_2)$ son las raíces del polinomio en γ_2 de segundo orden dado en el lado izquierdo de (150).

La condición (151) se satisface para

$$\gamma_2 \in (w_1, w_2) \cup (w_3, \infty) \quad \text{si} \quad w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}, \quad (157)$$

$$\gamma_2 \in (w_3, \infty) \quad \text{si} \quad w_1, w_2 \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} \neq 0, \quad (158)$$

$$\gamma_2 \in (w_1, \infty) \quad \text{si} \quad w_2, w_3 \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} \neq 0, \quad (159)$$

donde $W = \{w_1, w_2, w_3\}$; $\operatorname{Re}(w_1) < \operatorname{Re}(w_2) < \operatorname{Re}(w_3)$ son las raíces del polinomio en γ_2 de segundo orden dado en el lado izquierdo de (151).

La condición (152) se satisface para

$$\gamma_2 \in (-\infty, v_1) \cup (v_2, v_3) \cup (v_4, \infty) \quad \text{si} \quad v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}, \quad (160)$$

$$\gamma_2 \in \mathbb{R} \quad \text{si} \quad v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} \neq 0, \quad (161)$$

$$\gamma_2 \in (-\infty, v_1) \cup (v_4, \infty) \quad \text{si} \quad v_1, v_4 \in \mathbb{R}; v_2, v_3 \in \mathbb{C}, \quad (162)$$

$$\gamma_2 \in (-\infty, v_1) \cup (v_2, \infty) \quad \text{si} \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}; v_3, v_4 \in \mathbb{C}, \quad (163)$$

$$\gamma_2 \in (-\infty, v_3) \cup (v_4, \infty) \quad \text{si} \quad v_3, v_4 \in \mathbb{R}; v_1, v_2 \in \mathbb{C}, \quad (164)$$

donde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$; $\operatorname{Re}(v_1) < \operatorname{Re}(v_2) < \operatorname{Re}(v_3) < \operatorname{Re}(v_4)$ son las raíces del polinomio en γ_2 de segundo orden dado en el lado izquierdo de (151).

A continuación se definen los conjuntos

- $\theta \subset U$ son las raíces reales del conjunto U .
- $\beta \subset W$ son las raíces reales del conjunto W .
- $\eta \subset Z$ son las raíces reales del conjunto Z .

También se definen los valores

- $\rho_1 = \max(\theta_p)$, donde p es el número de elementos en θ .
- $\rho_2 = \max(\beta_j)$, donde j es el número de elementos en β .
- $\rho_3 = \max(\eta_r)$, donde r es el número de elementos en η .

Proposición 6 *El sistema del error extendido (145)-(146) es globalmente asintóticamente estable si $\gamma_1 > 0$ y los valores de γ_2 se escogen de acuerdo a*

$$\gamma_2 > \max(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \quad (165)$$

En consecuencia, si γ_2 se escoge de acuerdo a (165), el sistema líder (142) y el sistema seguidor (143) no presentan el fenómeno de inestabilidad por difusión.

Comentario 4 *Los valores del intervalo de fuerza de acoplamiento k no están restringidos, mas modifican los valores de $u_1, u_2, w_1, w_2, w_3, v_1, v_2, v_3$ y v_4 , véase (150)-(152). γ_2 no cuenta con límites superiores, véase ((155))-((160)). Por lo que para cualquier valor de fuerza de acoplamiento k existe un α suficientemente grande que cumpla con las condiciones de la Proposición 6.*

5.4. Resultados numéricos

En esta sección se verifican de manera numérica los resultados analíticos presentados en la sección anterior. Se considera que los sistemas están descritos por (108)-(111).

5.4.1. Acoplamiento estático

Primero, se investiga la región de estabilidad para el caso en que se usa el acoplamiento maestro esclavo clásico (112)-(113). De la Proposición 4, se tiene que, para los parámetros antes mencionados, el intervalo de la fuerza de acoplamiento para el cual los sistemas acoplados son estables está dado por

$$-1 < k < 0. \quad (166)$$

Esto se verifica calculando de manera numérica la máxima raíz del polinomio característico (116). El resultado se muestra en la Figura 17, en la cual se puede corroborar que efectivamente la parte real de la raíz más grande del polinomio es negativa solo en el intervalo $-1 < k < 0$.

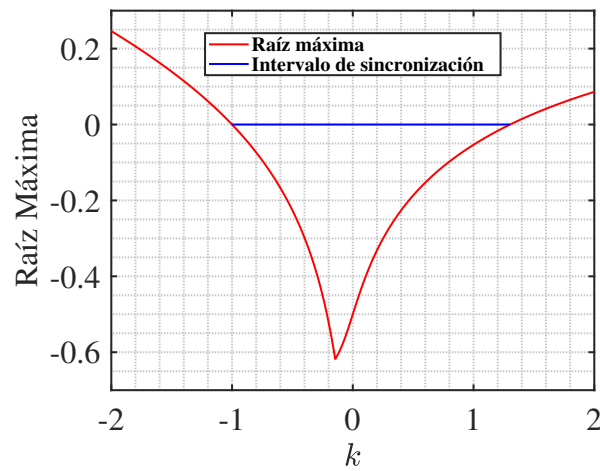


Figura 17. Raíz máxima del polinomio característico (116) calculado en función de la fuerza de acoplamiento k .

Ahora, para verificar estas regiones, el sistema (112)-(113) se integra numéricamente con condiciones iniciales $x_l(0) = [-3, -4, -5]^T$ y $x_s(0) = [2, 3, 4]^T$.

En una primera simulación, se toma un valor de k ligeramente afuera del intervalo (166), es decir, $k = 1.001$. El resultado de esta simulación se muestra en la Figura 18a), en la que se puede apreciar que los estados del sistema del error 114-115 divergen, tal y como se esperaba de los resultados analíticos obtenidos, ya que el valor usado de k se encuentra fuera del intervalo (166).

Ahora, se repite la simulación numérica mencionada anteriormente, con los mismos parámetros y condiciones iniciales, excepto que el valor de k se ajusta a $k = -0.999$, el cual está contenido dentro del intervalo (166). La Figura 18b) muestra los resultados obtenidos. Puede verse claramente que los estados del sistema del error 114-115 convergen asintóticamente a cero, es decir, el sistema líder y el sistema seguidor no se desestabilizan.

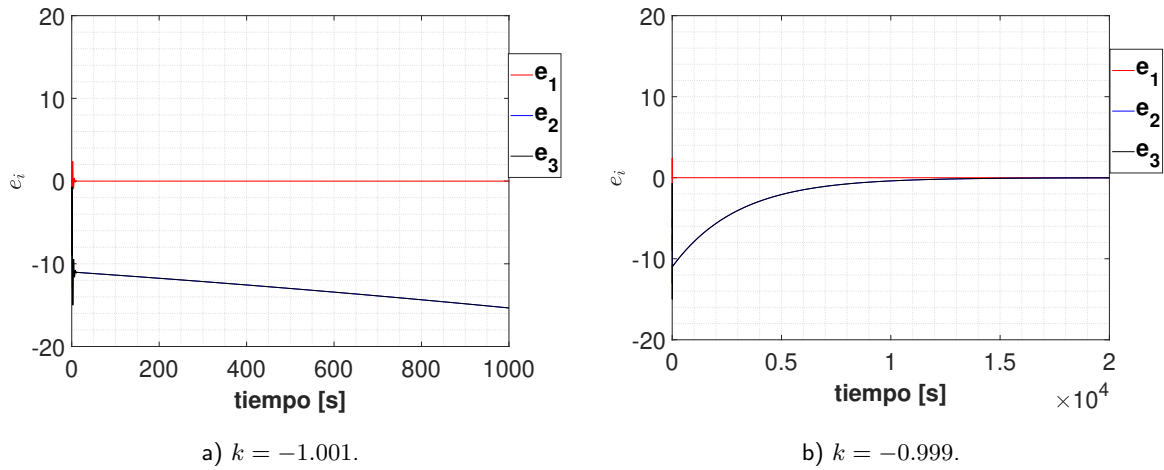


Figura 18. Resultados numéricos. Estados del sistema del error de los sistemas acoplados (112)-(113) para diferentes valores de la fuerza de acoplamiento k .

5.4.2. Acoplamiento dinámico de primer orden

Para el caso del acoplamiento de primer orden, se utiliza la Proposición 5 para obtener los valores de k en función del parámetro α , para los cuales se garantiza que el sistema del error 124 es asintóticamente estable. En el estudio numérico k se varia en el intervalo $k \in (-50, 50)$ y α se varia en el intervalo $\alpha \in (0, 50)$.

Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 19. La región amarilla corresponde a los valores de k y α para los cuales la condición (138) de la Proposición 5 se satisface, mientras que, en la región azul, k no satisface ninguna de las condiciones establecidas en la Proposición 5.

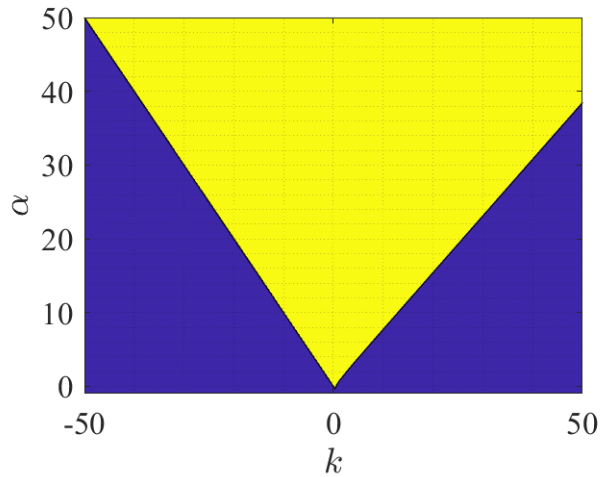


Figura 19. Región de estabilidad en el plano (k, α) . En el área amarilla, k satisface la condición (138), mientras que en el área azul, k no satisface ninguna de las condiciones mencionadas en la Proposición 5.

Estos resultados confirman que, el intervalo de valores de k para el cual se espera que los sistemas no se desestabilicen, depende del parámetro de diseño α y dicho intervalo crece conforme el valor de α se incrementa, tal y como se mencionó en el Comentario 3.

Para verificar este resultado, se realiza una simulación numérica. Específicamente, el sistema (121)-(123) se integra numéricamente con los parámetros usados para el ejemplo del caso estático y con condiciones iniciales $x_l = [-3, -3, -3]^T$, $x_s = [2, 2, 2]^T$ y $h(0) = 0$.

En una primera simulación, los valores de α y k se escogen de la región azul mostrada en la Figura 19, es decir, $\alpha = 39.9$, $k = -40$. El resultado de la simulación se presenta en la Figura 20, la cual muestra las series temporales de los estados del sistema del error e_i , $i = 1, 2, 3$. Es claro ver que los estados divergen. Este resultado es el esperado, ya que estos valores de k y α seleccionados no cumplen ninguna de las condiciones de la Proposición 2.

Para la segunda simulación numérica, se consideran los mismos parámetros y condiciones iniciales usados en la simulación anterior y el mismo valor de k , pero ahora el valor de α se escoge dentro de la región amarilla mostrada en la Figura 19. En particular se escoge $\alpha = 40.1$. Como resultado, los estados del sistema del error convergen a cero de manera asintótica, es decir, los sistemas líder y seguidor (121)-(122) no se desestabilizan y el estado h del acoplamiento dinámico (123) decae asintóticamente.

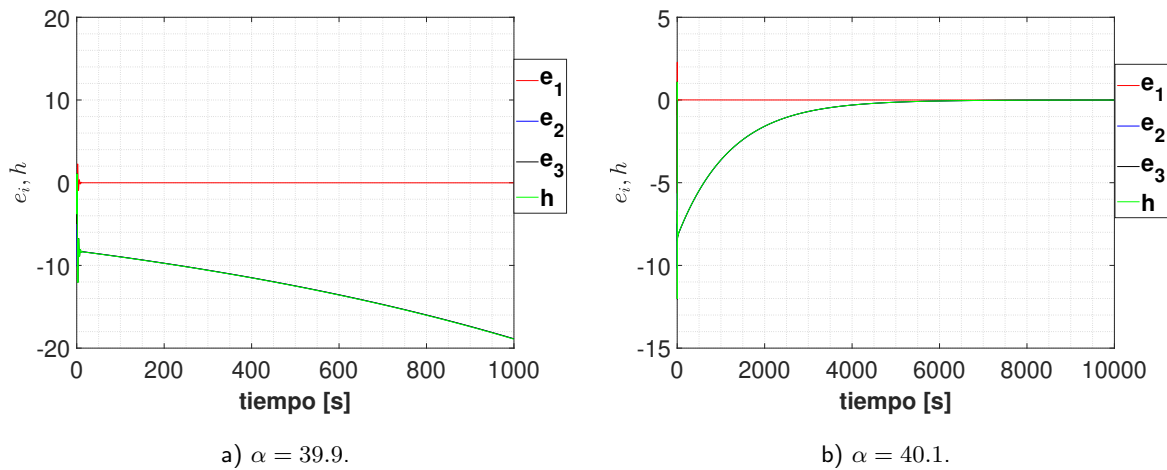


Figura 20. Resultados de simulación. Estados del sistema del error de los sistemas (121)-(122) con acoplamiento dinámico de primer orden (123) con $k = 40$.

5.4.3. Acoplamiento dinámico de segundo orden

Finalmente, se ilustran los resultados analíticos obtenidos para el esquema (142)-(144), el cual está basado en un acoplamiento dinámico de segundo orden.

Como primer punto, se investiga si existen valores de k , γ_1 , y γ_2 que cumplan con alguna de las condiciones establecidas en la Proposición 6. Por tanto, se construye una gráfica tridimensional variando k , γ_1 y γ_2 . En particular, los valores de estos parámetros se varían en los siguientes intervalos: $k \in (-10, 10)$, $\gamma_1 \in (0, 10)$ y $\gamma_2 \in (-2, 10)$. El resultado obtenido se muestra en la Figura 21, en el cual el área colorida indica la región donde alguna de las condiciones de la Proposición 6 se satisface, mientras que el área blanca corresponde a la región donde ninguna de las condiciones de la Proposición 6 se cumple.

De este diagrama puede verse que el intervalo de valores de la fuerza de acoplamiento k para el cual la condición (165) se cumple, crece conforme los valores de γ_1 y γ_2 se incrementan, tal y como se mencionó en el Comentario 4.

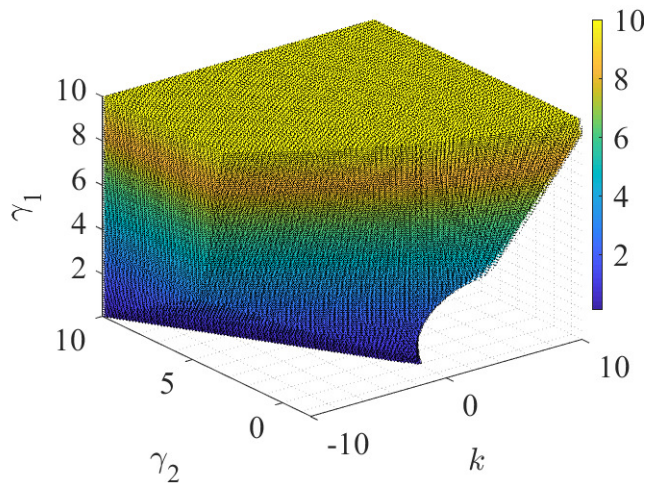


Figura 21. Región de estabilidad en función de (k, γ_1, γ_2) . El la región coloreada indica la región donde alguna de las condiciones de la Proposición 6 se cumple. En la región blanca ninguna de las condiciones se cumple. Los colores indican el valor utilizado de γ_1 .

Por último, se verifican los resultados del diagrama tridimensional de estabilidad. Para ello, se toma un valor de k , γ_1 y γ_2 dentro de la zona blanca mostrada en la Figura 21. En particular, se escoge $k = 7$, $\gamma_1 = 6.9$ y $\gamma_2 = -1.6$ y se integra numéricamente el sistema (142)-(144) con estos valores y con los parámetros y condiciones iniciales para el sistema líder y seguidor usadas en los casos anteriores y con condiciones iniciales para el acoplamiento dadas por $h_1(0) = h_2(0) = 0$. Las series temporales de los estados del sistema del error 145 se muestran en la Figura 22a), en la cual se aprecia que dichos errores crecen de manera desacotada, es decir, que las trayectorias del sistema líder y del sistema maestro divergen, tal y como se esperaba, ya que para este valor de k la condición de la proposición 6 no se satisface.

En una segunda simulación, el valor de k se ajusta a $k = 6.8$, el cual está contenido dentro de la región

coloreada en la Figura 21. Después, se realiza la integración numérica de (142)-(144) con los parámetros y condiciones iniciales discutidas en la simulación anterior. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 22b), en donde se muestra que los estados del sistema del error 145 convergen a cero asintóticamente, es decir, el sistema líder (142) y el sistema seguidor (143) no se desestabilizan y los estados del acoplamiento dinámico (144) se desvanecen.

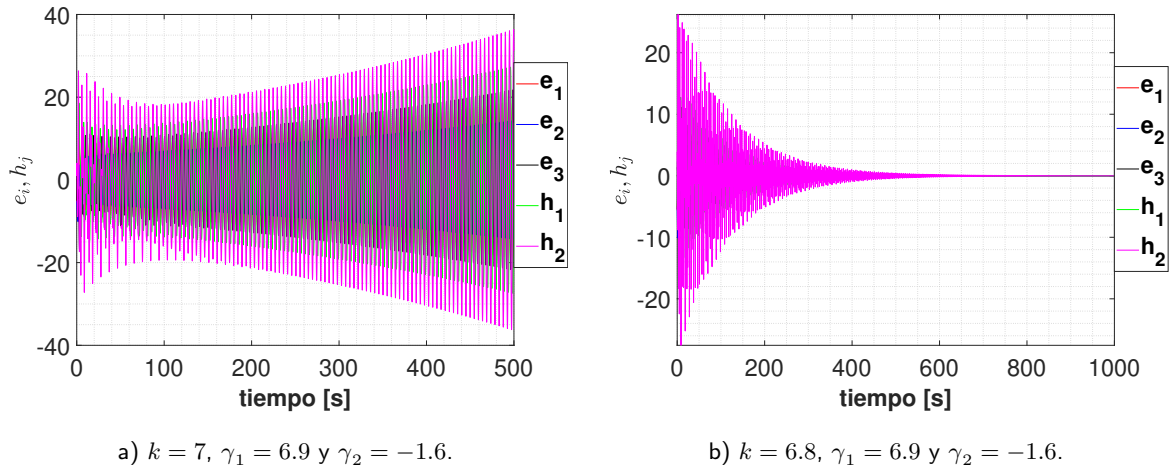


Figura 22. Resultados numéricos. Estados del sistema del error para diferentes valores de k .

5.4.4. Discusión de resultados del estudio numérico

Los resultados numéricos y de simulación de este capítulo congenian con los encontrados en el Capítulo 3. En este capítulo se demuestra nuevamente que el acoplamiento dinámico logra incrementar el rango de fuerza de acoplamiento con la variación de sus parámetros, sea α para el caso del acoplamiento dinámico de primer orden, o γ_1 y γ_2 para el caso del acoplamiento dinámico de segundo orden. En el caso del acoplamiento líder-seguidor, los resultados obtenidos muestran que el rango de fuerza de acoplamiento es una región relativamente pequeña, véase Figura 17, en comparación con las regiones encontradas para el acoplamiento dinámico de primer orden, véase Figura 19, y segundo orden, véase Figura 21, cuyo rango de fuerza de acoplamiento crece con las variables del acoplamiento.

Capítulo 6. Conclusiones

En esta tesis se investigó la aparición de comportamiento síncrono de pares y redes de sistemas lineales de fase no mínima (sin retardos de tiempo) con acoplamientos estáticos y dinámicos. Los sistemas de fase no mínima tienen limitaciones fundamentales que los hacen difíciles de controlar y sincronizar. Las limitaciones de su respuesta transitoria y ancho de banda alcanzable son algunas de ellas. En particular, los resultados aquí presentados muestran que los sistemas lineales de fase no mínima con acoplamientos estáticos experimentan limitaciones en el rango de fuerza de acoplamiento y la cantidad de nodos que se pueden sincronizar y, para contrarrestar estas limitaciones, se propusieron esquemas de sincronización basados en acoplamientos dinámicos.

Se realizó un análisis matemático para encontrar condiciones analíticas que garantizan la sincronización de pares de sistemas de fase no mínima, el cual se respaldó con un análisis numérico. Se encontró que, al sincronizar sistemas lineales de fase no mínima con acoplamiento maestro-esclavo, se tiene un rango de valores de fuerza de acoplamiento limitado que está definido por los elementos del sistema, por lo que no es posible modificarlo. Por otro lado, al utilizar un acoplamiento dinámico, es posible superar esta limitación pues los parámetros del acoplamiento permiten incrementar arbitrariamente el rango de fuerza de acoplamiento.

En el análisis de sincronización de redes se encontró que es posible determinar las condiciones de sincronización utilizando el mismo sistema del error usado en el análisis de pares de sistemas, por lo que no fue necesario realizar nuevamente el análisis. Se encontró que para una red de sistemas de fase no mínima con acoplamiento estático, el rango de fuerza de acoplamiento disminuye dramáticamente conforme se incrementa la cantidad de nodos. En contraste, se demostró que para una red de sistemas de fase no mínima cuyo acoplamiento es dinámico, el rango de fuerza de acoplamiento se puede incrementar arbitrariamente para cualquier cantidad de nodos. En particular, del análisis realizado en los Capítulos 3 y 4 se puede ver que los acoplamientos dinámicos de primer y segundo orden usados en este trabajo son capaces de sincronizar pares y redes arbitrariamente grandes de nodos idénticos, cuya dinámica intrínseca de cada nodo está descrita por el sistema lineal de tercer orden de fase no mínima definido en (7).

En resumen, los resultados de investigación reportados en esta tesis dan evidencia de que los acoplamientos dinámicos considerados aquí tienen un mejor desempeño que el acoplamiento estático clásico y, por tanto, pueden ser considerados como una buena alternativa a considerar al momento de diseñar o implementar esquemas de sincronización.

6.1. Trabajo futuro

Con base en los resultados obtenidos en esta tesis, se plantean las siguientes oportunidades de investigación:

- Los resultados de esta tesis son aplicables a toda una familia de sistemas lineales de tercer orden de fase no mínima. Dado que los resultados muestran el buen rendimiento que tienen los acoplamientos dinámicos sobre estos sistemas, sería interesante extender el análisis a un caso más general, como por ejemplo, sistemas lineales de fase no mínima de orden arbitrario.
- Otra posible dirección tiene que ver con estudiar la efectividad del método de sincronización utilizado en este trabajo en sistemas no lineales de fase no mínima.
- Finalmente, sería interesante implementar de manera física una versión adaptada de los sistemas aquí analizados utilizando circuitería analógica y validar experimentalmente el rendimiento de los esquemas de sincronización aquí presentados.

Literatura citada

- Antsaklis, P. y Michel, A.. 2006. *Linear Systems*. Birkhäuser Boston.
- Astrom, K. J., Klein, R. E., y Lennartsson, A.. 2005. Bicycle dynamics and control: adapted bicycles for education and research. *IEEE Control Systems Magazine*, 25(4), pp. 26–47.
- Bjork, J., Johansson, K. H., y Dorfler, F.. 2022. Dynamic virtual power plant design for fast frequency reserves: Coordinating hydro and wind. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, pp. 1–12. doi: 10.1109/TCNS.2022.3181553.
- Buck, J. y Buck, E.. 1976. Synchronous fireflies. *Scientific American*, 234(5), pp. 74–85.
- Buscarino, A., Fortuna, L., y Patanè, L.. 2019. Master-slave synchronization of hyperchaotic systems through a linear dynamic coupling. *Phys. Rev. E*, 100, pp. 032215. doi: 10.1103/PhysRevE.100.032215.
- Cheng, T. y Podolsky, S.. 1996. *Just-in-Time Manufacturing: An introduction*. Springer Netherlands.
- Clarke, D.. 1984. Self-tuning control of nonminimum-phase systems. *Automatica*, 20(5), pp. 501–517. doi: [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(84\)90003-7](https://doi.org/10.1016/0005-1098(84)90003-7).
- Dzhunusov, I. y Fradkov, A.. 2011. Synchronization in networks of linear agents with output feedbacks. *Autom Remote Control*, 72, pp. 1615. doi: <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2019.104527>.
- Foghahaayee, H. N., Menhaj, M. B., y Talebi, H. A.. 2020. A new synthetic output tracking scheme for non-minimum phase affine nonlinear systems. *Journal of the Franklin Institute*, 357(18), pp. 13326–13361. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2020.09.023>.
- Hoagg, J. B. y Bernstein, D. S.. 2007. Nonminimum-phase zeros-much to do about nothing-classical control-revisited part ii. *IEEE Control Systems Magazine*, 27(3), pp. 45–57.
- Horowitz, I. y Liao, Y.-K.. 1984. Limitations of non-minimum-phase feedback systems†. *International Journal of Control*, 40(5), pp. 1003–1013. doi: 10.1080/00207178408933324.
- Junge, L. y Parlitz, U.. 2001. Synchronization using dynamic coupling. *Phys. Rev. E*, 64, pp. 055204. doi: 10.1103/PhysRevE.64.055204.
- Kailath, T. y Hall, P.. 1980. *Linear Systems, Information and System Sciences Series*. Prentice-Hall.
- Lee, M., Cho, J.-K., y Lee, J.-H.. 1999. Control of nonminimum phase systems using neural networks. En: 1999 European Control Conference (ECC)..pp. 4343–4348. doi: 10.23919/ECC.1999.7100017.
- Maton, A.. 1993. *Human biology and health*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Middleton, R.. 1991. Trade-offs in linear control system design. *Automatica*, 27(2), pp. 281–292. doi: [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(91\)90077-F](https://doi.org/10.1016/0005-1098(91)90077-F).
- Murguia, C., Fey, R. H. B., y Nijmeijer, H.. 2014. Synchronization of identical linear systems and diffusive time-delayed couplings. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 61(6), pp. 1801–1814. doi: 10.1109/TCSI.2013.2295878.
- Patil, M., Bandyopadhyay, B., Chalanga, A., y Arya, H.. 2018. Output tracking of nonminimum-phase systems via reduced-order sliding-mode design. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 23(4), pp. 1981–1992. doi: 10.1109/TMECH.2018.2836320.
- Pecora, L. M. y Carroll, T. L.. 1998. Master stability functions for synchronized coupled systems. *Phys. Rev. Lett.*, 80, pp. 2109–2112. doi: 10.1103/PhysRevLett.80.2109.

- Pena Ramirez, J., Arellano-Delgado, A., y Nijmeijer, H.. 2018. Enhancing master-slave synchronization: The effect of using a dynamic coupling. *Phys. Rev. E*, 98, pp. 012208. doi: 10.1103/PhysRevE.98.012208.
- Pikovsky, A., Kurths, J., Rosenblum, M., Kurths, J., Chirikov, B., Press, C. U., Cvitanovic, P., Moss, F., y Swinney, H.. 2001. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge Nonlinear Science Series. Cambridge University Press.
- Pogromsky, A., Glad, T., y NIJMEIJER, H.. 1999. On diffusion driven oscillations in coupled dynamical systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 09(04), pp. 629–644. doi: 10.1142/s0218127499000444.
- Portugal, S., Hubel, T., Fritz, J., Heese, S., Trobe, D., Voelkl, B., Hailes, S., Wilson, A., y Usherwood, J.. 2014. Upwash exploitation and downwash avoidance by flap phasing in ibis formation flight. *Nature*, 505, pp. 399–402. doi: 10.1038/nature12939.
- Qiu, L. y Davison, E.. 1993. Performance limitations of non-minimum phase systems in the servomechanism problem. *Automatica*, 29(2), pp. 337–349. doi: [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(93\)90127-F](https://doi.org/10.1016/0005-1098(93)90127-F).
- Rogov, K., Pogromsky, A., Steur, E., Michiels, W., y Nijmeijer, H.. 2018. Pattern prediction in networks of diffusively coupled nonlinear systems. *IFAC-PapersOnLine*, 51(33), pp. 62–67. 5th IFAC Conference on Analysis and Control of Chaotic Systems CHAOS 2018. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.12.093>.
- Santos, R. y Oliveira, T. R.. 2020. Trajectory tracking for uncertain (non)minimum phase systems by monitoring function and time-scaling based sliding mode control. *IFAC Journal of Systems and Control*, 12, pp. 100089. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ifacsc.2020.100089>.
- Scardovi, L. y Sepulchre, R.. 2009. Synchronization in networks of identical linear systems. *Automatica*, 45(11), pp. 2557–2562. doi: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2009.07.006>.
- Schrader, C. B. y Sain, M. K.. 1989. Research on system zeros: a survey. *International Journal of Control*, 50(4), pp. 1407–1433. doi: 10.1080/00207178908953438.
- Sidi, M.. 1997. Gain-bandwidth limitations of feedback systems with non-minimum-phase plants. *International Journal of Control*, 67(5), pp. 731–744. doi: 10.1080/002071797223974.
- Stoorvogel, A. A., Zhang, M., Saberi, A., y Grip, H. F.. 2014. Synchronization in networks of weakly-non-minimum-phase, non-introspective agents without exchange of controller states. En: 2014 American Control Conference..pp. 3548–3552. doi: 10.1109/ACC.2014.6859088.
- Strogatz, S.. 2014. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Studies in Nonlinearity. Avalon Publishing.
- Tomei, P. y Verrelli, C. M.. 2018. Advances on adaptive learning control: The case of non-minimum phase linear systems. *Systems & Control Letters*, 115, pp. 55–62. doi: <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2018.03.006>.
- Tuna, S. E.. 2019. Synchronization of linear systems via relative actuation. *Systems & Control Letters*, 134, pp. 104527. doi: <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2019.104527>.
- Turing, A. M.. 1952. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*, 237(641), pp. 37–72. doi: 10.1098/rstb.1952.0012.

- Yaniv, O., Gutman, P.-O., y Chepovetsky, I.. 1999. Sensitivity reduction limitations in mimo non-minimum phase feedback systems. IFAC Proceedings Volumes, 32(2), pp. 1987–1994. 14th IFAC World Congress 1999, Beijing, Chia, 5-9 July. doi: [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)56337-5](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)56337-5).
- Zill, D.. 2016. A First Course in Differential Equations with Modeling Applications. Cengage Learning.

Anexo A

Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz es una herramienta matemática que permite determinar si un sistema lineal invariante en el tiempo es estable o no. En este procedimiento normalmente se analiza el polinomio del denominador de la función de transferencia para determinar si todas las raíces del polinomio están contenidas en el semiplano izquierdo del plano complejo o no. Lo interesante de este procedimiento es que se puede determinar la estabilidad del sistema sin necesidad de obtener expresiones explícitas para las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia correspondiente.

Dado un polinomio, por ejemplo, $(a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n)$, se construye la siguiente tabla

$$\begin{array}{c}
 \hline a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n \\
 \hline
 \begin{array}{ccccc}
 a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\
 a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\
 b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\
 c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\
 d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}
 \end{array} \tag{167}$$

donde

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1} \\
 b_2 &= \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1} \\
 b_3 &= \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \\ c_2 &= \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \\ c_3 &= \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

continuando este proceso hasta completar n filas, donde n es el orden del sistema.

Posteriormente, se analiza la primera columna de la tabla recién construida. Si no hay cambio de signo entonces todas las raíces están contenidas en el lado izquierdo del plano complejo (Kailath y Hall, 1980).

En este trabajo se consideran polinomios de tercero, cuarto y quinto orden, por lo que a continuación se proporcionan las condiciones de estabilidad usando el método de Routh-Hurwitz.

Caso tercer orden

La tabla de Routh Hurwitz para el polinomio de tercer orden

$$a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0, \quad a_0, \dots, a_3 \in \mathbb{R}, \quad (168)$$

está dada por

$$\begin{array}{c|cc} a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 & & \\ \hline a_3 & a_1 & \\ a_2 & a_0 & \\ m_1 & & \\ m_2 & & \end{array}$$

donde,

$$m_1 = \frac{a_2 a_1 - a_3 a_0}{a_2} \quad \text{y} \quad m_2 = a_0. \quad (169)$$

Para que el polinomio (168) tenga raíces reales negativas, se tiene que cumplir que:

$$a_3, a_2, m_1, m_2 > 0$$

Para que m_1 sea positivo, véase (169), se debe de cumplir que

$$a_2 a_1 > a_3 a_0. \quad (170)$$

Por lo tanto, las condiciones para que (168) tenga raíces con parte real negativa son

$$a_3, a_2, a_0 > 0, \quad (171)$$

$$a_2 a_1 > a_3 a_0. \quad (172)$$

Caso cuarto orden

Para el polinomio de cuarto orden

$$a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0, \quad (173)$$

el método de Routh-Hurwitz permite obtener las siguientes condiciones, bajo las cuales se garantiza que todas las raíces del polinomio son negativas

$$\begin{aligned} a_4, a_3, a_0 &> 0, \\ a_3 a_2 &> a_4 a_1, \\ a_1 a_2 a_3 &> a_1^2 a_4 + a_3^2 a_0. \end{aligned} \quad (174)$$

Caso quinto orden

De manera similar, el polinomio de quinto orden

$$a_5 \lambda^5 + a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 \quad (175)$$

tendrá raíces con parte real negativa sí y solo sí

$$\begin{aligned}
 a_5, a_4, a_0 &> 0 \quad , \\
 a_4 a_3 &> a_5 a_2, \\
 a_4(a_3 a_2 - a_4 a_1 + a_5 a_0) &> a_5 a_2^2, \\
 a_1 [a_4(a_3 a_2 - a_4 a_1 + 2a_5 a_0) - a_5 a_2^2] &> a_0 [a_5(a_5 a_0 - a_3 a_2) + a_3^2 a_4] .
 \end{aligned} \tag{176}$$

Anexo B

Funciones polinómicas

En esta sección se describen brevemente tres funciones polinómicas útiles en los desarrollos presentados en este trabajo. Las imágenes mostradas en las tablas de esta sección sirven para representar cruces por cero y zonas por encima del eje “x” de sus respectivos casos.

Función cuadrática

Se le llama función cuadrática a una función con la forma de un polinomio de segundo grado

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (177)$$

cuyas raíces se pueden calcular con la ayuda de la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (178)$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$ son los coeficientes del polinomio, y $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ son las raíces del polinomio.

Las características de comportamiento de la función 177 dependerán del valor de sus coeficientes. En la Tabla 1 se muestran las características de los casos relevantes a este trabajo cuando $a > 0$, y en la Tabla 2 cuando $a < 0$.

Función cúbica

Una función cúbica está descrita por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad (179)$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}; a \neq 0$ son los coeficientes del polinomio, y $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ son las raíces del polinomio.

Las características de comportamiento de la función 179 dependerá del valor de sus raíces. En la Tabla 3 se muestran las características de los casos relevantes a este trabajo cuando $a > 0$, y en la tabla 4 cuando $a < 0$.

Tabla 1. En esta tabla se muestran las características de funciones cuadráticas con $a > 0$

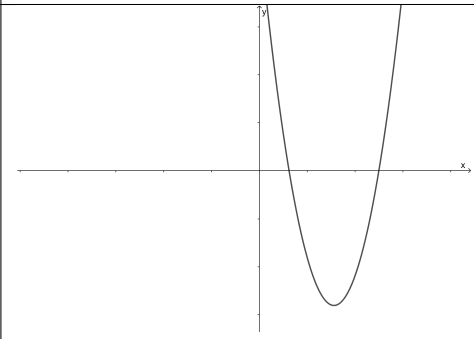
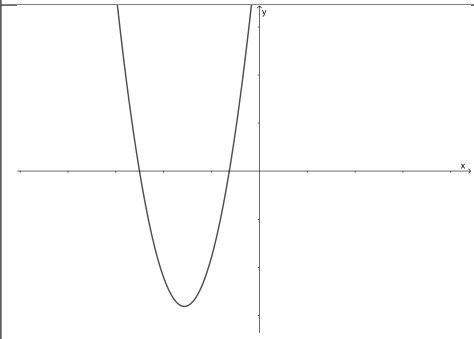
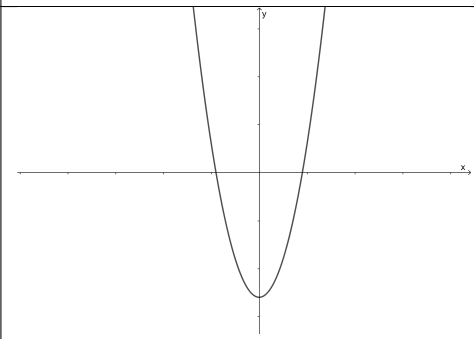
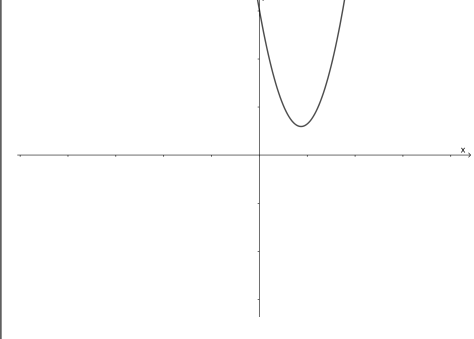
Caso	Gráfica	Condiciones	Raíces
1		$a > 0$ $b < 0$ $b^2 > 4ac > 0$	$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$
2		$a > 0$ $b > 0$ $b^2 > 4ac > 0$	$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^-$
3		$a > 0$ $4ac < 0$	$x_1 \in \mathbb{R}^-, x_2 \in \mathbb{R}^+$
4		$a > 0$ $4ac > b^2 > 0$	$x_1, x_2 \in \mathbb{C}; Im \neq 0$

Tabla 2. En esta tabla se muestran las características de funciones cuadráticas con $a < 0$

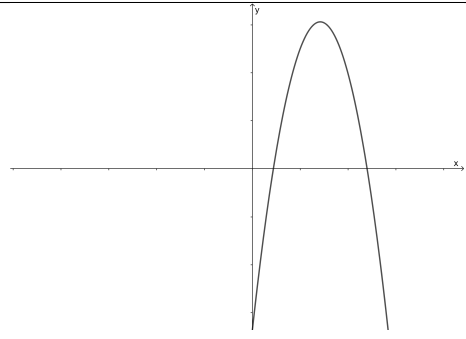
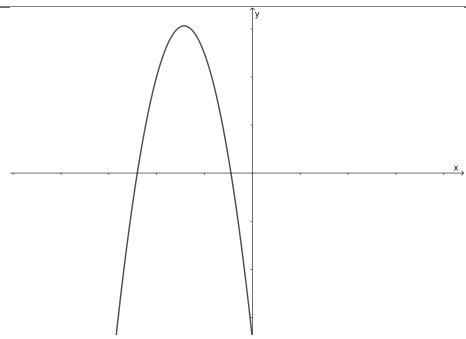
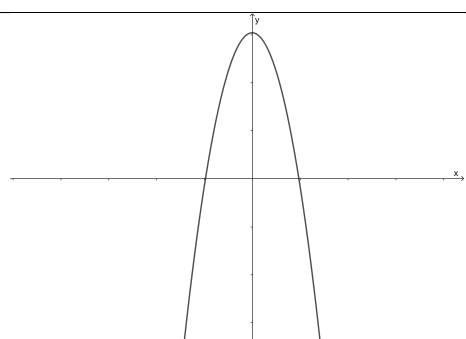
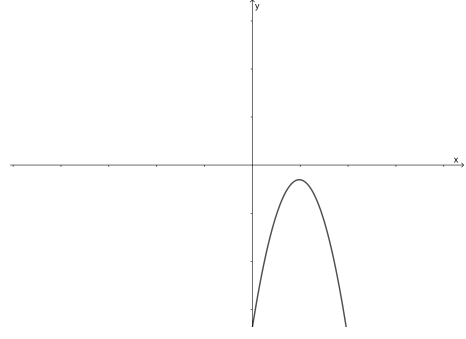
Caso	Gráfica	Condiciones	Raíces
5		$a < 0$ $b > 0$ $b^2 > 4ac > 0$	$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$
6		$a < 0$ $b < 0$ $b^2 > 4ac > 0$	$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^-$
7		$a < 0$ $4ac < 0$	$x_1 \in \mathbb{R}^-, x_2 \in \mathbb{R}^+$
8		$a < 0$ $4ac > b^2 > 0$	$x_1, x_2 \in \mathbb{C}; Im \neq 0$

Tabla 3. En esta tabla se muestran las características de funciones cúbicas con $a > 0$

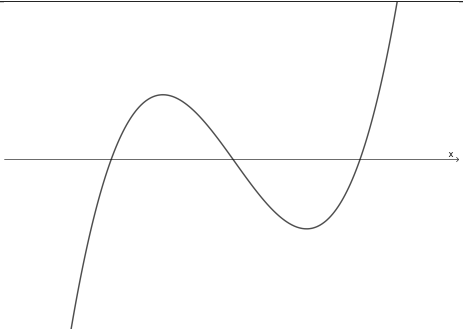
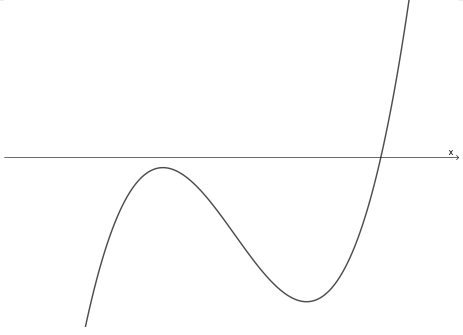
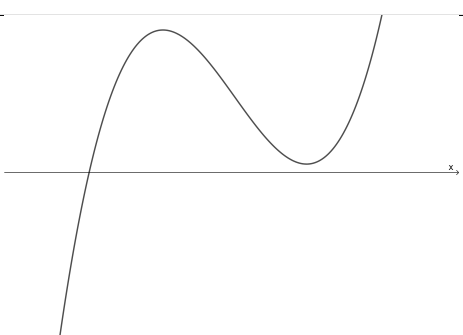
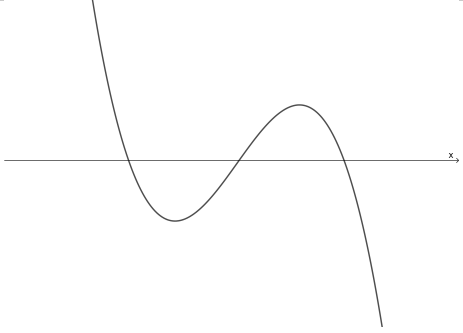
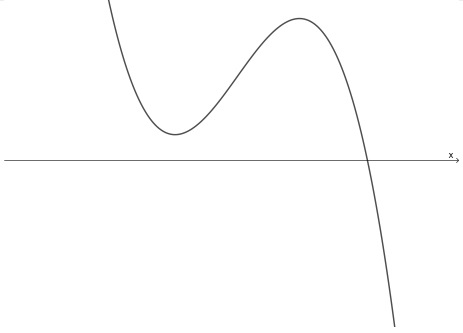
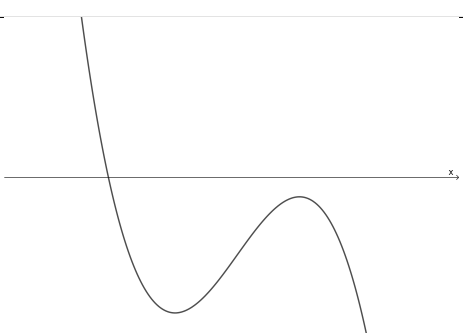
Caso	Gráfica	Raíces
1		$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$
2		$x_1, x_2 \in \mathbb{C}; Im \neq 0$ $x_3 \in \mathbb{R}$
3		$x_1 \in \mathbb{R}$ $x_2, x_3 \in \mathbb{C}; Im \neq 0$

Tabla 4. En esta tabla se muestran las características de funciones cúbicas con $a < 0$

Caso	Gráfica	Raíces
4		$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$
5		$x_1, x_2 \in \mathbb{C}; Im \neq 0$ $x_3 \in \mathbb{R}$
6		$x_1 \in \mathbb{R}$ $x_2, x_3 \in \mathbb{C}; Im \neq 0$

Función de cuarto orden

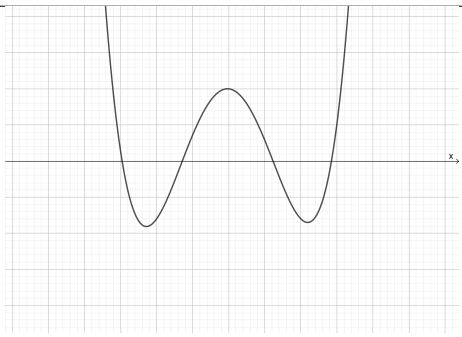
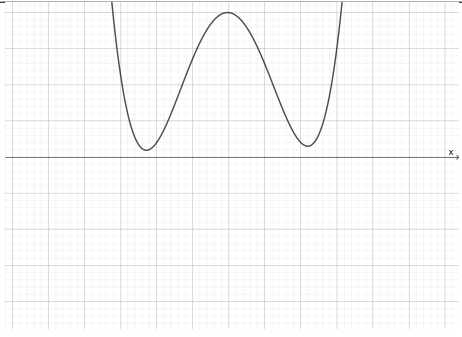
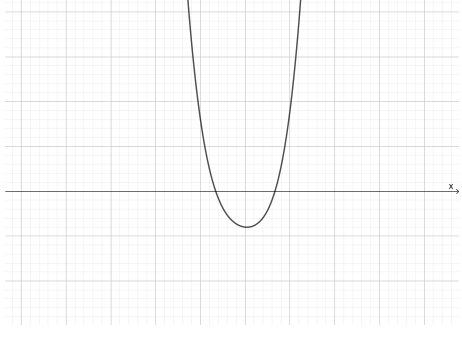
Una función de cuarto orden está dada por

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \tag{180}$$

donde $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}; a \neq 0$ son los coeficientes del polinomio, y $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ son las raíces del polinomio.

En la Tabla 5 se muestran las características de los casos relevantes a este trabajo cuando $a > 0$.

Tabla 5. En esta tabla se muestran las características de funciones de cuarto orden con $a > 0$

Caso	Gráfica	Raíces
1		$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$
2		$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}; Im \neq 0$
3		Aplica para cualquiera de los siguientes casos 1.- $(x_1, x_2 \in \mathbb{R}), (x_3, x_4 \in \mathbb{C}; Im \neq 0)$ 2.- $(x_2, x_3 \in \mathbb{R}), (x_1, x_4 \in \mathbb{C}; Im \neq 0)$ 3.- $(x_3, x_4 \in \mathbb{R}), (x_1, x_2 \in \mathbb{C}; Im \neq 0)$ 4.- $(x_1, x_4 \in \mathbb{R}), (x_2, x_3 \in \mathbb{C}; Im \neq 0)$