

# Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California



## Maestría en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control

---

### Modelado y propiedades de una clase de robots manipuladores hiperredundantes

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

**Diana Victoria Cajero Zepeda**

Ensenada, Baja California, México

2022

Tesis defendida por

**Diana Victoria Cajero Zepeda**

y aprobada por el siguiente Comité

---

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Director de tesis

Dr. César Cruz Hernández

Dr. Javier Pliego Jiménez

Dr. Daniel Saucedo Carvajal

Dr. Gustavo Olague Caballero



---

Dra. María del Carmen Maya Sánchez

Coordinadora del Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

---

Dr. Pedro Negrete Regagnon

Director de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Diana Victoria Cajero Zepeda como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

### **Modelado y propiedades de una clase de robots manipuladores hiperredundantes**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Director de tesis

El presente trabajo de tesis se enfoca en el modelado dinámico de robots manipuladores con geometría plana (cuya estructura mecánica y su movimiento yacen en un plano) y arreglo secuencial de eslabones que se interconectan mediante articulaciones rotacionales que, en esta investigación, se han denominado como robots *PBD* de  $N$  grados de libertad; para el modelado, se consideran las ecuaciones de movimiento de Lagrange. Se proponen expresiones generales inéditas para obtener cada uno de los elementos de la matriz de inercia  $M$ , la matriz centrífuga y de Coriolis  $C$  y el vector de pares gravitacionales  $g$ , además de fórmulas para calcular la función de energía cinética y energía potencial. Como fruto de esta investigación, se reporta el modelo dinámico y resultados de simulaciones numéricas con robots *PBD* de 2 y 3 grados de libertad. Finalmente, se determinan las propiedades de acotamiento de los componentes de  $M$ ,  $C$  y  $g$ , así como las cotas explícitas de la función de energía potencial y de la matriz de inercia, las cuales pueden ofrecer ventajas en el diseño y sintonización de sistemas de control.

**Palabras clave:** robots hiperredundantes, robots planares, robots PBD, articulaciones rotacionales, modelado de robots, modelo dinámico, acotamiento

Abstract of the thesis presented by Diana Victoria Cajero Zepeda as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Electronics and Telecommunications with orientation in Instrumentation and Control.

### **Modeling and properties of a class of hyper-redundant robot manipulators**

Abstract approved by:

---

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez  
Thesis Director

This thesis focuses on the dynamic modeling of robot manipulators with plane geometry (whose mechanical structure and its movement lie in a plane) and sequential arrangement of links that are interconnected by means of revolute joints that, in this research, have been called *PBD* robots with  $N$  degrees of freedom; for modeling, the Lagrange equations of motion are considered. Unpublished general expressions are proposed to obtain each of the elements of the inertia matrix  $M$ , the centrifugal and Coriolis forces matrix  $C$  and the vector of gravitational torques  $\mathbf{g}$ , as well as formulas to calculate the kinetic and potential energy functions. As a result of this research, the dynamic model and results of numerical simulations with *PBD* robots of 2 and 3 degrees of freedom are reported. Finally, the bounding properties of the  $M$ ,  $C$  and  $\mathbf{g}$  components are determined, as well as the explicit bounds of the potential energy function and inertia matrix, which can offer advantages in control systems design and tuning.

**Keywords:** hyper-redundant robots, planar robots, PBD robots, revolute joints, robot modeling, dynamic model, bounding

## **Dedicatoria**

**A mis padres, Diana y Carlos, que me dieron la vida.**

**A mis hermanos, Carlos, Hirám y Dante, que han estado ahí para mí siempre.**

**A mi familia, de Zacatecas y Aguascalientes, y amigos, que creyeron en mí y me brindaron su apoyo.**

## Agradecimientos

Al Dr. Rafael Kelly, por aceptarme para realizar esta tesis de maestría bajo su dirección. Gracias por tomarse el tiempo de compartir parte de sus conocimientos y experiencia, que sin duda figuró un aporte invaluable para mi formación personal y profesional.

A los miembros de mi comité de tesis, el Dr. César Cruz, el Dr. Javier Pliego, el Dr. Daniel Saucedo y el Dr. Gustavo Olague, por su participación al brindar cuestionamientos, comentarios y sugerencias que enriquecieron este trabajo de tesis.

A mis padres por su valioso apoyo, amor incondicional, y enseñanzas a lo largo de estos años.

A mis amigos, tanto dentro como fuera del ámbito académico, por su tiempo, sus consejos, las palabras de aliento y sus buenos deseos; un agradecimiento especial a Iliana Lugo y Ángel Arteaga, amigos incondicionales.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California (CICESE) y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por hacer posible mis estudios de maestría.

A Dios por permitir el inicio y la culminación del presente trabajo de tesis.

# Tabla de contenido

	Página
Resumen en español .....	ii
Resumen en inglés .....	iii
Dedicatoria .....	iv
Agradecimientos .....	v
Lista de figuras .....	viii
Lista de tablas .....	x
<b>Capítulo 1. Introducción</b>	
1.1. Definiciones y notaciones .....	1
1.2. Robots manipuladores .....	3
1.3. Robots hiperredundantes .....	5
1.4. Robots $\mathcal{PBD}$ .....	6
<b>Capítulo 2. Modelo geométrico de robots hiperredundantes <math>\mathcal{PBD}</math></b>	
2.1. Sistema de referencia DH de robots $\mathcal{PBD}$ .....	9
<b>Capítulo 3. Función de energía cinética de robots <math>\mathcal{PBD}</math></b>	
3.1. Ejemplos .....	15
3.1.1. Ejemplo 1: Robot $\mathcal{PBD}$ de $N = 2$ grados de libertad .....	15
3.1.2. Ejemplo 2: Robot $\mathcal{PBD}$ de $N = 3$ grados de libertad .....	17
<b>Capítulo 4. Función de energía potencial de robots <math>\mathcal{PBD}</math></b>	
4.1. Ejemplos .....	22
4.1.1. Ejemplo 1: Robot $\mathcal{PBD}$ de $N = 2$ grados de libertad .....	22
4.1.2. Ejemplo 2: Robot $\mathcal{PBD}$ de $N = 3$ grados de libertad .....	23
<b>Capítulo 5. Matriz de inercia <math>M(q)</math> de robots de <math>\mathcal{PBD}</math></b>	
5.1. Ejemplos .....	30
<b>Capítulo 6. Matriz centrífuga y de Coriolis <math>C(q, \dot{q})</math> de robots <math>\mathcal{PBD}</math></b>	
6.1. Ejemplos .....	35
<b>Capítulo 7. Vector de pares gravitacionales <math>g(q)</math> de robots <math>\mathcal{PBD}</math></b>	
7.1. Ejemplos .....	46
<b>Capítulo 8. Propiedades de acotamiento</b>	
8.1. Función de energía potencial .....	49

8.2.	Matriz de inercia . . . . .	50
8.3.	Matriz centrífuga y de Coriolis . . . . .	51
8.4.	Vector de pares gravitacionales . . . . .	51
8.5.	Ejemplos . . . . .	52

## Capítulo 9. Conclusiones

<b>Literatura citada</b> . . . . .	56
<b>Anexo A. Robot <math>\mathcal{PBD}</math> de <math>N = 2</math> Grados de Libertad</b> . . . . .	57
<b>Anexo B. Robot <math>\mathcal{PBD}</math> de <math>N = 3</math> Grados de Libertad</b> . . . . .	62

## Lista de figuras

Figura	Página
1. Tipos de articulaciones simples en robots manipuladores. . . . .	4
2. Silueta de un robot manipulador hiperredundante de $n = 18$ grados de libertad (sus articulaciones son compuestas —con más de 1 grado de libertad— en este caso de 2 grados de libertad). . . . .	5
3. Bosquejo de un robot manipulador hiperredundante plano de $n$ grados de libertad (robot <i>PBD</i> ). . . . .	7
4. Diagrama CAD de robot <i>PBD</i> hiperredundante de $N$ grados de libertad. . . . .	8
5. Asignación de marcos de referencia para el $i$ -ésimo eslabón de un robot <i>PBD</i> de $N$ grados de libertad, según la convención de DH. . . . .	9
6. Una asignación de marcos de referencia para robot <i>PBD</i> de $N$ grados de libertad, según la convención de DH. . . . .	10
7. Diagrama CAD de robot planar de $N$ grados de libertad (Versión de (Morozov et al., 2010)). . . . .	12
8. Diagrama CAD de robot <i>PBD</i> hiperredundante de $N$ grados de libertad con huecos y protuberancias en el $N$ -ésimo eslabón. . . . .	14
9. Cota máxima $k_{\mathcal{U}_1}$ para $ \mathcal{U}_1(\mathbf{q}) $ del robot <i>Pelican</i> . . . . .	52
10. Cota máxima $k_{\mathcal{U}_2}$ para $ \mathcal{U}_2(\mathbf{q}) $ del robot <i>Pelican</i> . . . . .	53
11. Diagrama CAD de robot planar de $N = 2$ grados de libertad. . . . .	57
12. Una asignación de marcos de referencia para robot <i>PBD</i> de $N = 2$ grados de libertad, según la convención de DH. . . . .	58
13. Resultados de <i>Robotica de función de energía cinética para robot PBD de <math>N = 2</math> grados de libertad</i> . . . . .	59
14. Resultados de <i>Robotica del modelo dinámico para robot PBD de <math>N = 2</math> grados de libertad</i> . . . . .	59
15. Condiciones iniciales de la simulación del modelo dinámico para robot <i>PBD</i> de $N = 2$ grados de libertad. . . . .	60
16. Resultados de la simulación del modelo dinámico para robot <i>PBD</i> de $N = 2$ grados de libertad. . . . .	60
17. Diagrama CAD de robot planar de $N = 3$ grados de libertad. . . . .	62
18. Una asignación de marcos de referencia para robot <i>PBD</i> de $N = 3$ grados de libertad, según la convención de DH. . . . .	63
19. Resultados de <i>Robotica de función de energía cinética para robot PBD de <math>N = 3</math> grados de libertad</i> . . . . .	65
20. Resultados de <i>Robotica del modelo dinámico para robot PBD de <math>N = 3</math> grados de libertad</i> . . . . .	65
21. Condiciones iniciales de la simulación del modelo dinámico para robot <i>PBD</i> de $N = 3$ grados de libertad. . . . .	66

Figura	Página
22. Resultados de la simulación del modelo dinámico para robot $\mathcal{PBD}$ de $N = 3$ grados de libertad. . . . .	66
23. Resultados de la simulación del modelo dinámico para robot $\mathcal{PBD}$ de $N = 3$ grados de libertad con fricción viscosa en la tercera articulación. . . . .	67

# Lista de tablas

Tabla	Página
1. Parámetros de DH para robot $\mathcal{PBD}$ de $N$ grados de libertad. . . . .	10
2. Relación de notación entre $\theta_i$ y $q_i$ . . . . .	13
3. Parámetros de DH para robot $\mathcal{PBD}$ de $N = 2$ grados de libertad. . . . .	57
4. Parámetros de DH para robot $\mathcal{PBD}$ de $N = 3$ grados de libertad. . . . .	63

## Capítulo 1. Introducción

---

El contenido de este capítulo se enfoca, tanto en mencionar notaciones y conceptos básicos para la comprensión de este trabajo de tesis como en la descripción del tipo de robot que se trabajará en esta investigación.

### 1.1. Definiciones y notaciones

Primeramente, se mencionará la notación utilizada en este documento, así como algunas definiciones sobre vectores y matrices empleadas:

- A lo largo de este trabajo, se utilizarán los siguientes símbolos matemáticos:

$\forall$	“para todo”
$\in$	“pertenece a”
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^n$	espacio vectorial real de dimensión $n$
$\triangleq$	“igual por definición”

- También se emplea la siguiente notación de *sumatoria restringida* (para cualquier número entero positivo  $i, j, k, c$  y  $N$ ):

$$\sum_{\substack{i=k; j=c \\ i \neq j}}^N a_{i,j} \triangleq \sum_{i=k}^N \left( \sum_{j=c}^{i-1} a_{i,j} + \sum_{j=i+1}^N a_{i,j} \right). \quad (1)$$

El lado izquierdo de (1) significa que se van a sumar los términos  $a_{i,j}$  donde  $i$  sea diferente de  $j$ , iniciando  $i$  desde  $k$  y  $j$  desde  $c$ , con incrementos de 1, hasta  $N$  inclusive. En caso de  $i, j \geq N$ , la sumatoria es nula.

Por ejemplo, para  $k = c = 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i=1; j=1 \\ i \neq j}}^N a_{i,j} &= \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} + \sum_{j=i+1}^N a_{i,j} \right), \\ &= a_{1,2} + a_{1,3} + a_{1,4} + \cdots + a_{1,(N-1)} + a_{1,N} + \\ &+ a_{2,1} + a_{2,3} + a_{2,4} + \cdots + a_{2,(N-1)} + a_{2,N} + \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$+ a_{N,1} + a_{N,2} + a_{N,3} + \cdots + a_{N,(N-1)}.$$

## Vectores

- Los vectores son arreglos de números reales en forma de columna y se indicarán con letras minúsculas negrillas, ya sean itálicas o griegas, por ejemplo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T,$$

donde  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  son las componentes del vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y el superíndice  $T$  denota transpuesto.

- La *norma euclidiana*  $\|\mathbf{x}\|$  de un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  se define como:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

## Matrices

- Las matrices se indicarán con letras mayúsculas itálicas o griegas (no negrillas), por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix},$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y está formada por un arreglo bidimensional de números reales  $A_{i,j} = a_{i,j} \in \mathbb{R}$  ordenados en  $n$  renglones y  $m$  columnas. Una excepción a esta regla de notación de matrices es el uso esporádico de la letra mayúscula  $N$  para indicar el número de grados de libertad de robots hiperredundantes.

- La matriz *transpuesta*  $A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$  se obtiene intercambiando los renglones y las columnas.
- Una matriz es *cuadrada* si  $n = m$ , es decir si tiene tantos renglones o filas como columnas:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

- Una matriz cuadrada es *simétrica* si es igual a su transpuesta:  $A = A^T$ .
- Una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , no necesariamente simétrica, es *definida positiva* si:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \text{ con } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n,$$

donde  $A > 0$  indica que  $A$  es definida positiva. Cualquier matriz simétrica y definida positiva  $A = A^T > 0$  es no singular.

Enseguida se enuncia la definición de matriz acotada, brindada por (Ghorbel et al., 1998), la cual será de gran utilidad para el Capítulo 8.

**Definición 1.** Se dice que una función matricial  $A(\mathbf{x}): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz acotada si todos y cada uno de sus componentes  $A_{i,j}(\mathbf{x})$  son acotados para  $i, j = 1, \dots, n$  y todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  en el sentido que existen constantes finitas  $k_{i,j}$  tales que:

$$|A_{i,j}(\mathbf{x})| \leq k_{i,j} < \infty \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m,$$

donde  $i, j = 1, \dots, n$ .

## 1.2. Robots manipuladores

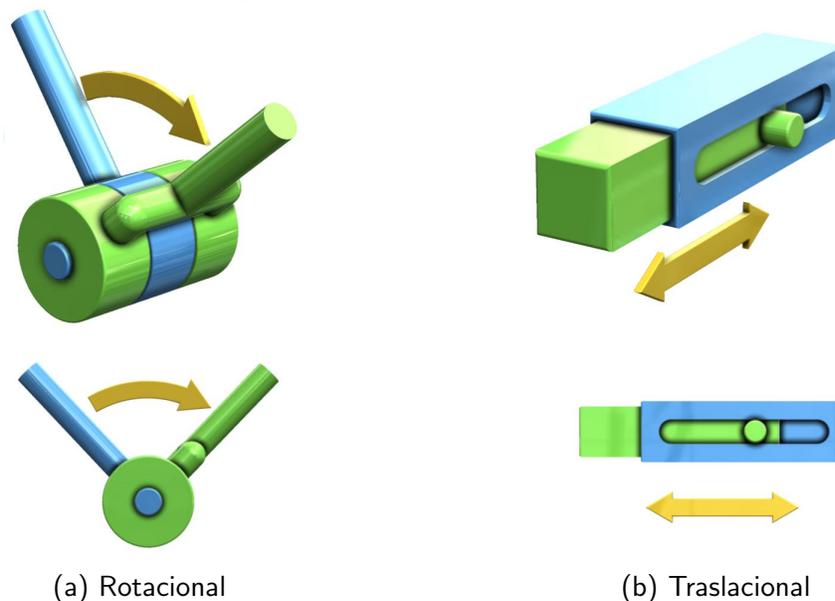
Los robots manipuladores son un tipo muy particular de robots. La Organización Internacional de Normalización proporciona, mediante la norma ISO 8373:2021, la siguiente definición de *robot*: “mecanismo accionado reprogramable con un grado de autonomía para realizar locomoción, manipulación o posicionamiento”.

Los robots manipuladores son utilizados especialmente en la industria, por lo cual se les conoce también como robots industriales. Asimismo, en (ISO 8373:2021, 2021) se incluye la definición de *robot industrial*: “manipulador controlado automáticamente, reprogramable y multifuncional, que es programable en tres o más ejes, que puede estar en un lugar fijo o en una plataforma móvil, para su uso en aplicaciones de automatización en un entorno industrial”.

El elemento clave en esta definición es la reprogramabilidad que poseen los robots. Esta característica permite utilizar el mismo manipulador para distintas tareas cambiando simplemente la herramienta de su órgano final o terminal y el código del programa de control. Se espera y es necesaria una gran precisión

y repetibilidad para realizar los trabajos deseados, y esto depende de una combinación de características físico-mecánicas, así como del diseño de esquemas de control apropiados (Arteaga et al., 2022).

La estructura mecánica de un robot manipulador consiste en una secuencia de eslabones interconectados por medio de articulaciones (Siciliano et al., 2009). El movimiento de cada articulación puede ser traslacional, rotacional o una combinación de ambos (Kelly et al., 2005); una articulación rotacional se asemeja a una bisagra y permite la rotación relativa entre dos eslabones mientras que la articulación traslacional permite un movimiento relativo lineal entre esos dos eslabones (Spong et al., 2005). En la Figura 1 se ilustran estos dos tipos de articulaciones básicas, cuya representación está inspirada de (Arteaga et al., 2022).



**Figura 1.** Tipos de articulaciones simples en robots manipuladores.

Bajo consideraciones razonables, el número de articulaciones de un manipulador con geometría serie determina también su número de grados de libertad (g.d.l.) (Kelly et al., 2005).

En un contexto de control automático (Johansson, 1993) y para fines del diseño ortodoxo de sistemas de control, la primera fase consiste en el modelado de la planta a controlar; esta fase produce un modelo matemático consistente de una estructura —típicamente ecuaciones algebraicas y/o diferenciales— y de parámetros asociadas a ellas. Aunque la filosofía de control llamada de “*malla cerrada*” pretende hacer frente a diversas incertidumbres sobre la planta a controlar, incluyendo incertidumbres paramétricas —desconocimiento total, parcial o impreciso de los parámetros de la planta—, tradicionalmente se procede a una segunda fase de identificación a partir de ensayos experimentales (midiendo las entradas y salidas de la planta y procesándolas adecuadamente) de la cual se desprenden valores numéricos para los parámetros

de la planta (Söderström y Ljung, 1983; Goodwin y Sin, 1984).

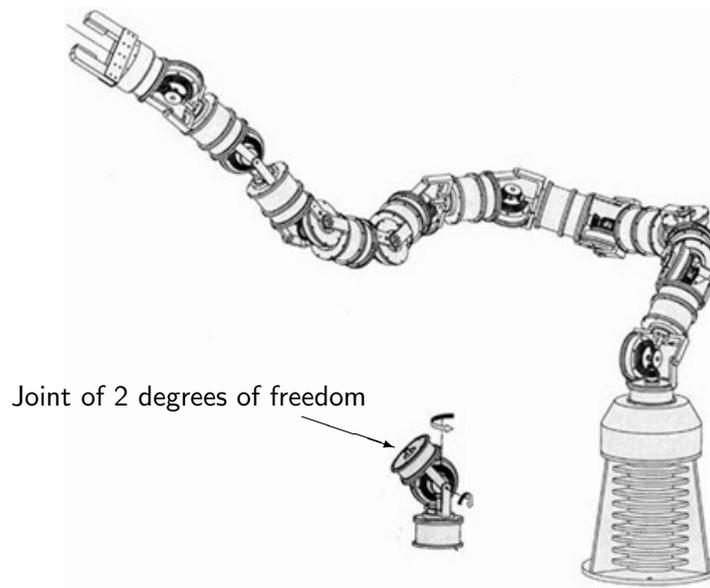
El modelo dinámico ortodoxo de robots manipuladores de  $n$  grados de libertad con accionamientos de pares/fuerzas, consiste de un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales escalares no lineales de segundo orden que pueden expresarse de manera compacta mediante la estructura vectorial (Kelly et al., 2005):

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}, \quad (2)$$

siendo  $\mathbf{q} \triangleq [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^n$  el vector de posiciones articulares pudiendo ser considerado como la “salida” del robot (variable de la planta a ser controlada o gobernada) y  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  la ‘entrada’ del robot correspondiendo físicamente a pares y/o fuerzas en las articulaciones ejercidas mediante accionamientos adecuados (supuestamente fuentes ideales de pares y/o fuerzas). El resto de los componentes del modelo dinámico (2) son:

- $M(\mathbf{q})$  es una matriz cuadrada, simétrica y definida positiva de dimensión  $n$  ( $M(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) conocida como “matriz de inercia”.
- $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es una matriz cuadrada de dimensión  $n$  llamada “matriz centrífuga y de Coriolis”.
- $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  es un vector de dimensión  $n$  llamado “vector de pares gravitacionales”.

### 1.3. Robots hiperredundantes



**Figura 2.** Silueta de un robot manipulador hiperredundante de  $n = 18$  grados de libertad (sus articulaciones son compuestas —con más de 1 grado de libertad— en este caso de 2 grados de libertad).

Un robot manipulador con más de  $n = 6$  articulaciones o eslabones es llamado *robot cinemáticamente redundante* (Spong et al., 2005).

Los robots manipuladores hiperredundantes son aquellos que poseen muchos más grados de libertad (por ejemplo con  $n$  articulaciones simples actuadas) que la dimensión  $m (\ll n)$  de su espacio de trabajo (ver (Chirikjian y Burdick, 1991) y (Chirikjian, 1992)).

El robot hiperredundante mostrado en la Figura 2 cuenta con  $n = 18$  grados de libertad mientras que su espacio de trabajo es de dimensión  $m = 6$ . La característica de redundancia de un robot manipulador tiene tanto ventajas como desventajas. Entre las primeras se encuentran:

- Posibilidad de evasión de obstáculos (tanto estáticos como móviles) y realización de tareas en espacios reducidos o restringidos, por ejemplo:
  - al interior de vehículos en la industria automotriz.
  - al interior de tuberías o ductos con múltiples recodos.

Mientras que entre las desventajas se listan:

- Modelos dinámicos más elaborados (Li y Chen, 2015).
- Múltiples soluciones del modelo cinemático (geométrico) inverso.
- Sistemas de control más demandantes en su diseño e implantación.

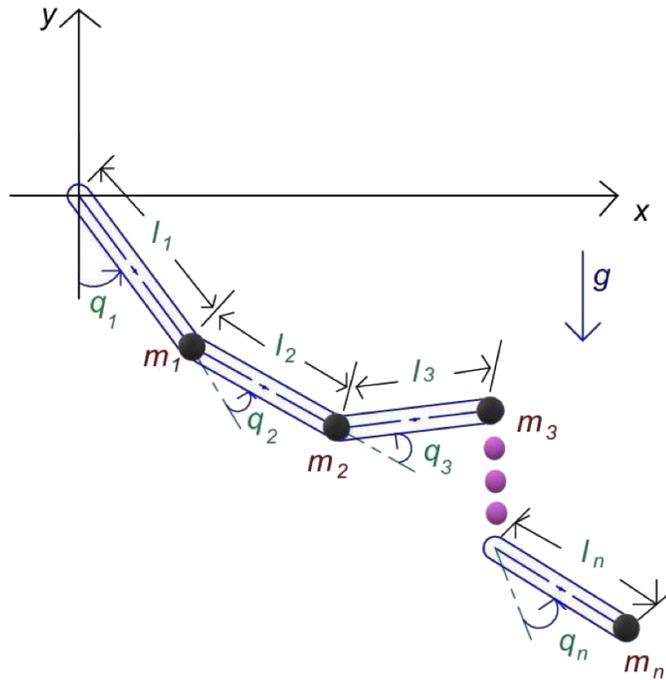
A los robots hiperredundantes también se les conocen con los siguientes nombres: “robots trompa de elefante”, “robots tipo tentáculos o serpientes”. Los “robots continuos” (‘continuum robots’) también pertenecen a los robots hiperredundantes.

Aunque en general un robot hiperredundante es capaz de desplazarse en el espacio cartesiano de 3D (Li y Chen, 2015), el interés por la investigación en esta tesis se confina a la subclase de robots hiperredundantes planos que a continuación se define.

#### 1.4. Robots *PBD*

Los robots *PBD* son robots hiperredundantes confinados a yacer en un plano (2D) y equipados con articulaciones simples del tipo rotacional donde los ejes de rotación de **todas** las articulaciones son paralelos y perpendiculares al plano donde yace el robot.

Un ejemplo de robot  $\mathcal{PBD}$  se muestra en la Figura 3 que yace en el plano  $x - y$ . Este robot cuenta con  $n \gg 3$  grados de libertad y su espacio de trabajo es de dimensión  $m = 3$ ; dos para posicionar el extremo terminal en el plano  $x - y$  y otro más para orientarlo.



**Figura 3.** Bosquejo de un robot manipulador hiperredundante plano de  $n$  grados de libertad (robot  $\mathcal{PBD}$ ).

El acrónimo  $\mathcal{PBD}$  en la definición anterior es por *Planar Bounded Inertia* donde los robots clase  $\mathcal{BD}$  ya fue acuñado por (Ghorbel et al., 1998) para robots con matriz de inercia acotada. Los robots  $\mathcal{PBD}$  son un subconjunto de los robots  $\mathcal{BD}$ . La característica de articulaciones rotacionales permite clasificar al robot hiperredundante de interés en la categoría denominada "robot  $\mathcal{BD}$ " definida por (Ghorbel et al., 1998). Con ello se pretende que el modelo dinámico posea propiedades que faciliten el diseño de sistemas de control.

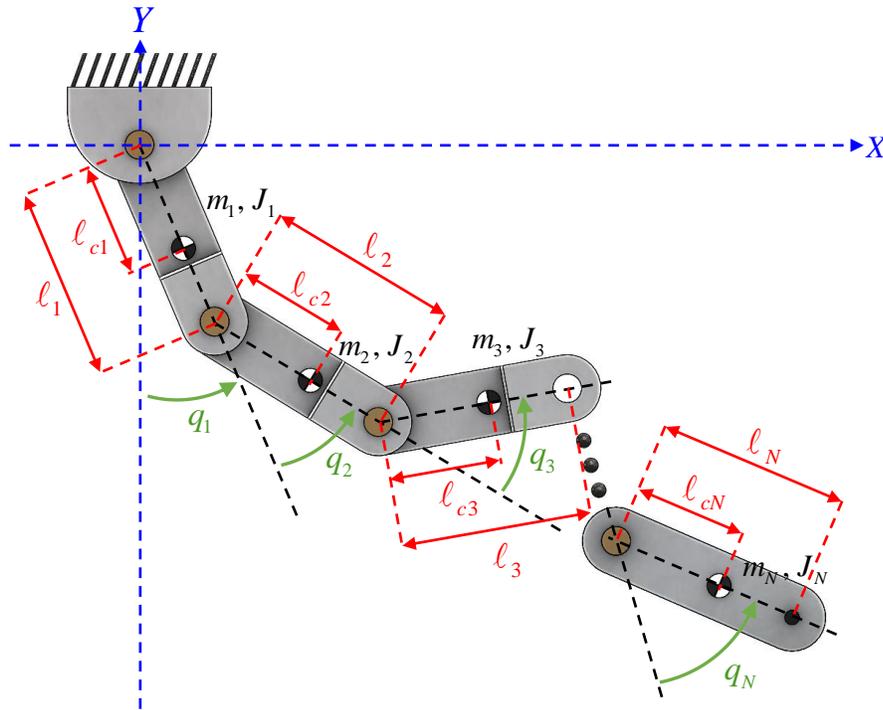
En cuanto al modelado de robots hiperredundantes, las investigaciones reportadas en la literatura se han centrado en el modelo cinemático, pero investigaciones sobre los modelos dinámicos son prácticamente inexistentes. En este último aspecto se enfoca este proyecto de tesis.

A continuación se presenta una breve descripción del robot de interés para este trabajo de investigación, el cual se ilustra en la Figura 4.

Es un robot hiperredundante de  $N$  grados de libertad, compuesto por  $N$  articulaciones del tipo rotacional cuyo movimiento se limita al plano vertical  $X - Y$  (robot  $\mathcal{PBD}$ ) y consta de eslabones rígidos. La longitud y la masa del  $i$ -ésimo eslabón se representa por  $l_i$  y  $m_i$ , respectivamente. La

distancia desde el eje de rotación al centro de masa del  $i$ -ésimo eslabón se denota por  $l_{ci}$  y  $J_i > 0$  denota el momento de inercia del  $i$ -ésimo eslabón con respecto al eje que pasa por su centro de masa y que es perpendicular al plano  $X - Y$ , todos estos parámetros con  $i = 1, 2, \dots, N$ . La primer posición articular, asociada al ángulo  $q_1$ , se mide en sentido antihorario con respecto a la vertical y las posiciones articulares consecutivas  $q_n$  para  $n = 2, \dots, N$  se miden con respecto al eslabón anterior, también en sentido antihorario. El vector de posiciones articulares  $\mathbf{q}$  se define como

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_N]^T \in \mathbb{R}^N.$$



**Figura 4.** Diagrama CAD de robot  $PBD$  hiperredundante de  $N$  grados de libertad.

## Capítulo 2. Modelo geométrico de robots hiperredundantes $\mathcal{PBD}$

El *modelo geométrico* de un robot, llamado de forma ortodoxa modelo cinemático directo o cinemática directa, describe la relación entre la posición articular  $\mathbf{q}$  y la postura  $\mathbf{x}$  (posición y orientación) del extremo final del robot (Kelly et al., 2005).

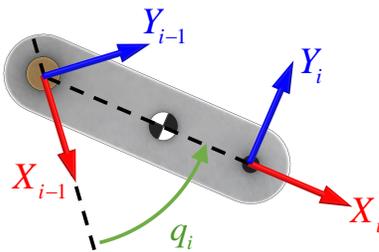
$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{q}). \quad (3)$$

donde  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^6$ .

Una forma de obtener este modelo es por geometría aplicada, considerando que el número de grados de libertad sea pequeño, ya que de lo contrario este método puede resultar tedioso; una alternativa para dicho caso es la convención de Denavit-Hartenberg (Denavit y Hartenberg, 1955), la cual asigna marcos de referencia en cada eslabón con el objetivo de expresar la posición y orientación de un marco de referencia fijado al final del último eslabón del robot, con respecto al marco de referencia base, en términos de las coordenadas articulares  $\mathbf{q}$  del robot.

### 2.1. Sistema de referencia DH de robots $\mathcal{PBD}$

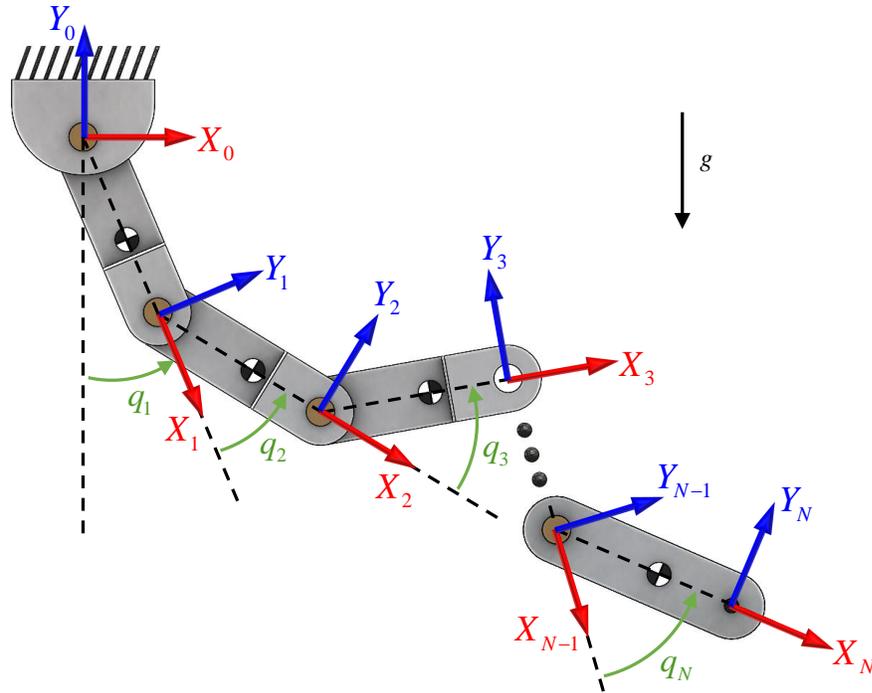
Considerando la convención de Denavit-Hartenberg (DH), que coincide con la presentada en los libros de Spong (Spong et al., 2005) y el de Siciliano (Siciliano et al., 2009), los marcos de referencia del eslabón  $i$ -ésimo, para el caso de robots planos, se muestran en la Figura 5.



**Figura 5.** Asignación de marcos de referencia para el  $i$ -ésimo eslabón de un robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad, según la convención de DH.

Desde el punto de vista geométrico o cinemático, los robots  $\mathcal{PBD}$  con sus respectivos marcos de referencia de acuerdo con la convención de DH se ilustran en la Figura 6.

Cabe mencionar que el marco de referencia  $X_0 - Y_0$  se puede orientar de forma arbitraria, siendo así, se ha colocado de manera que asegure compatibilidad con el paquete computacional *Robotica* (Nethery



**Figura 6.** Una asignación de marcos de referencia para robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad, según la convención de DH.

y Spong, 1994). *Robotica* es un paquete de diseño asistido por computadora para robots manipuladores, desarrollado en el Laboratorio de Ciencias Coordinadas de la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign. Encapsula más de 30 funciones en un paquete de *Mathematica* (Wolfram, 1992) que permite un cálculo simbólico y numérico eficiente de ecuaciones cinemáticas y dinámicas para manipuladores de múltiples grados de libertad (Nethery y Spong, 1994). El cálculo de la cinemática del robot se basa en la convención de DH (Denavit y Hartenberg, 1955) para la asignación de marcos de referencia, mientras que la dinámica se calcula utilizando la formulación de Euler-Lagrange.

Para robots  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad como el de la Figura 6, los parámetros DH se listan en la Tabla 1.

Tabla 1. Parámetros de DH para robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad.

$i$	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1 - \frac{\pi}{2}$	0	$\ell_1$	$0^\circ$
2	$q_2$	0	$\ell_2$	$0^\circ$
3	$q_3$	0	$\ell_3$	$0^\circ$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N$	$q_N$	0	$\ell_N$	$0^\circ$

A pesar de que la convención de DH tiene el potencial suficiente para resolver este problema (obtener el modelo geométrico), es posible determinar el modelo geométrico del robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de

libertad con una sencilla aplicación de geometría y trigonometría.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 \sin(q_1) + \ell_2 \sin(q_1 + q_2) + \cdots + \ell_N \sin(q_1 + q_2 + \cdots + q_N) \\ -\ell_1 \cos(q_1) - \ell_2 \cos(q_1 + q_2) - \cdots - \ell_N \cos(q_1 + q_2 + \cdots + q_N) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

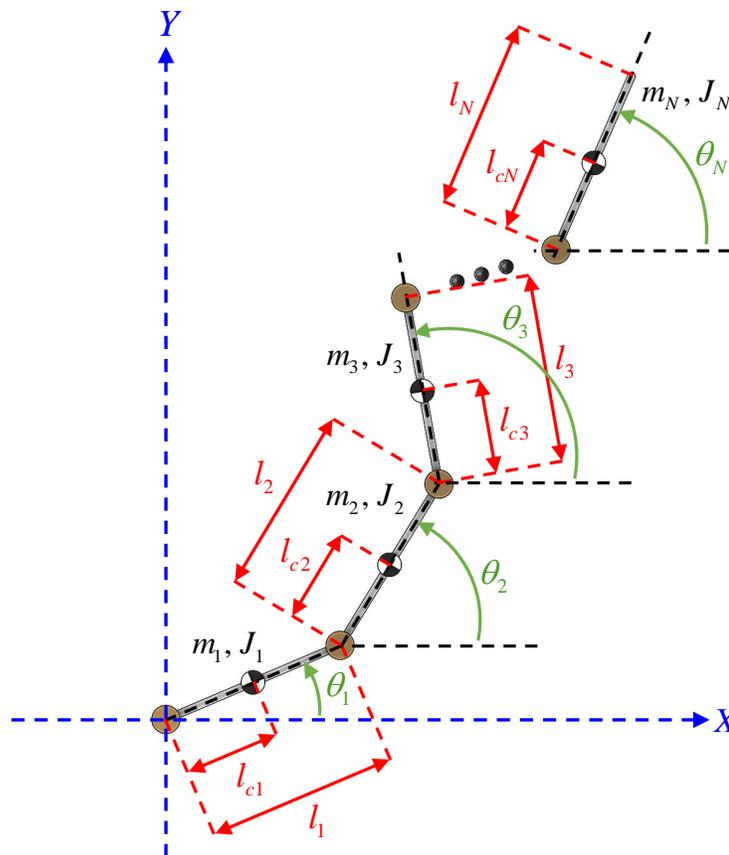
Las coordenadas cartesianas  $X$  y  $Y$  determinan la posición del extremo final con respecto al marco de referencia base  $X_0 - Y_0$ . Es posible determinar, a partir de la Figura 4, que la orientación del órgano terminal se obtiene como la suma de todas y cada una de las posiciones articulares del robot, o sea  $q_1 + \cdots + q_N$ .

### Capítulo 3. Función de energía cinética de robots $\mathcal{PBD}$

En el presente capítulo se propone una expresión general para obtener la función de energía cinética de un robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad, mostrado en la Figura 4.

Esta investigación se apoya en resultados previos reportados por Morozov, Hoagg, y Bernstein en su artículo (Morozov et al., 2010) para un robot particular con una estructura del tipo  $\mathcal{PBD}$  (Figura 7).

En la Tabla 2 se indica la relación de notación entre coordenadas articulares  $\theta_i$  de (Morozov et al., 2010) señaladas en la Figura 7 (que aquí se llamarán también: “ángulos de Bernstein”) pero no deben confundirse con el mismo símbolo  $\theta_i$  de la convención de DH y las posiciones articulares  $q_i$  de Kelly, Cajero indicadas en la Figura 4 y que son las adoptadas en esta investigación por consistencia con las consideradas en el libro de (Kelly et al., 2005) y ser más naturales e inmediatas (sin offsets) compatibles con los parámetros DH.



**Figura 7.** Diagrama CAD de robot planar de  $N$  grados de libertad (Versión de (Morozov et al., 2010)).

En (Morozov et al., 2010), se reporta la expresión para obtener la energía cinética asociada al  $n$ -ésimo eslabón de un robot de  $N$  grados de libertad (la cual ha sido ajustada para dejar en forma

Tabla 2. Relación de notación entre  $\theta_i$  y  $q_i$ .

Ángulos Bernstein (2010)	Ángulos Kelly, Cajero
$\theta_1$	$q_1 - \frac{\pi}{2}$
$\theta_2$	$q_1 + q_2 - \frac{\pi}{2}$
$\theta_3$	$q_1 + q_2 + q_3 - \frac{\pi}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$\theta_N$	$q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_{N-1} + q_N - \frac{\pi}{2}$

explícita el momento de inercia  $J_n$ ) que en el artículo de Morozov et al. (2010) se denota por  $T_n$ :

$$T_n = \frac{m_n}{2} \left[ l_{cn}^2 \dot{\theta}_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left( l_i^2 \dot{\theta}_i^2 + 2l_{cn} l_i \dot{\theta}_n \dot{\theta}_i \cos(\theta_i - \theta_n) \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n-1} l_i l_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos(\theta_i - \theta_j) \right] + \frac{J_n}{2} \dot{\theta}_n^2, \quad (5)$$

donde

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1; j=1 \\ i \neq j}}^N a_{i,j} &= \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} + \sum_{j=i+1}^N a_{i,j} \right), \\ &= a_{1,2} + a_{1,3} + a_{1,4} + \cdots + a_{1,(N-1)} + a_{1,N} + \\ &+ a_{2,1} + a_{2,3} + a_{2,4} + \cdots + a_{2,(N-1)} + a_{2,N} + \\ &\vdots \\ &+ a_{N,1} + a_{N,2} + a_{N,3} + \cdots + a_{N,(N-1)}. \end{aligned}$$

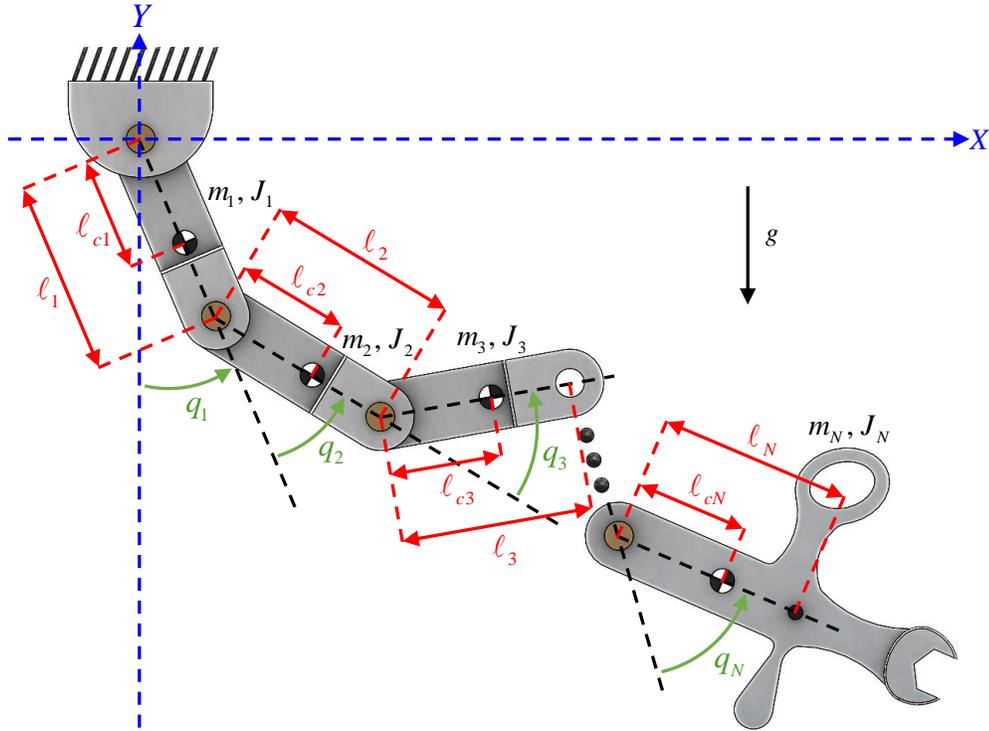
La ecuación (5) aplica para  $n = 1, \dots, N$ . En el caso de  $n = 1$ , se obtiene de (5) la siguiente expresión para la energía cinética  $T_1$  aportada por el primer eslabón:

$$T_1 = \frac{1}{2} (m_1 l_{c1}^2 + J_1) \dot{\theta}_1^2. \quad (6)$$

Es importante decir que en (Morozov et al., 2010) los eslabones se han restringido a ser varillas infinitesimalmente delgadas con momento de inercia  $J_i = \frac{1}{12} m_i l_i^2$  y distancia al centro de masa  $l_{ci} = \frac{1}{2} l_i$ . En la presente investigación se generalizará para cualquier forma de los eslabones pudiendo ser no homogéneos y contener huecos o protuberancias con momento de inercia arbitrarios  $J_i > 0$ , tal y como se ilustra en la Figura 8 para  $i = N$ .

Con base en la Tabla 2, se observa que:

$$\theta_n = \sum_{k=1}^n q_k - \frac{\pi}{2}. \quad (7)$$



**Figura 8.** Diagrama CAD de robot  $PBD$  hiperredundante de  $N$  grados de libertad con huecos y protuberancias en el  $N$ -ésimo eslabón.

Obteniendo su derivada, resulta en:

$$\dot{\theta}_n = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k. \quad (8)$$

Sustituyendo las expresiones (7) y (8) en (5) y redefiniendo la notación para la energía cinética aportada por el  $n$ -ésimo eslabón a  $\mathcal{K}_n$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{m_n}{2} \left[ \ell_{cn}^2 \left( \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \ell_i^2 \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right)^2 + 2\ell_{cn}\ell_i \left( \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \right) \right. \\ &\quad \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^n q_k + \frac{\pi}{2} \right) \left. + \sum_{\substack{i=1; j=1 \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^j \dot{q}_k \right) \right. \\ &\quad \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^j q_k + \frac{\pi}{2} \right) \left. + \frac{J_n}{2} \left( \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \right)^2 \right], \\ \mathcal{K}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{m_n}{2} \left[ \ell_{cn}^2 \left( \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \ell_i^2 \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right)^2 + 2\ell_{cn}\ell_i \left( \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \right) \right. \\ &\quad \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \left. + \sum_{\substack{i=1; j=1 \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^j \dot{q}_k \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \Big] + \frac{J_n}{2} \left( \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \right)^2. \quad (9)$$

Cabe mencionar que se ha usado la notación de la Figura 4 de las longitudes y distancias  $\ell$  para reemplazar el símbolo  $l$ , así como el símbolo  $\mathcal{K}$  para designar la energía cinética en lugar de la  $T$  empleada por Morozov, Hoagg, y Bernstein.

De acuerdo con (9), para  $n = 1$ , la ecuación (6) se modifica de la siguiente manera

$$\mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}(m_1 \ell_{c1}^2 + J_1) \dot{q}_1^2.$$

La expresión (9) es uno de los resultados teóricos principales de esta tesis. Ésta permite obtener la energía cinética asociada al  $n$ -ésimo ( $N \geq n \geq 1$ ) eslabón de cualquier robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad, como el que se muestra en la Figura 4.

La función de energía cinética completa con todos los  $N$  eslabones correspondiente al robot hiper-redundante  $\mathcal{PBD}$  de  $N \geq 2$  grados de libertad resulta en:

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^N \mathcal{K}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (10)$$

### 3.1. Ejemplos

#### 3.1.1. Ejemplo 1: Robot $\mathcal{PBD}$ de $N = 2$ grados de libertad

Con referencia al robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  grados de libertad de la Figura 11 (ver Anexo A), se determina la función de energía cinética asociada a cada uno de sus eslabones, empleando la expresión general propuesta (9):

- Para  $n = 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = & \frac{m_1}{2} \left[ \ell_{c1}^2 \left( \sum_{k=1}^1 \dot{q}_k \right)^2 + \sum_{i=1}^0 \left( \ell_i^2 \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right)^2 + 2\ell_{c1} \ell_i \left( \sum_{k=1}^1 \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \right. \right. \\ & \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^1 q_k \right) \Big] + \sum_{\substack{i=1; j=1 \\ i \neq j}}^0 \ell_i \ell_j \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^j \dot{q}_k \right) \\ & \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \Big] + \frac{J_1}{2} \left( \sum_{k=1}^1 \dot{q}_k \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m_1}{2} \left[ \ell_{c1}^2 \left( \sum_{k=1}^1 \dot{q}_k \right)^2 + \sum_{i=1}^0 \left( \ell_i^2 \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right)^2 + 2\ell_{c1}\ell_i \left( \sum_{k=1}^1 \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \right) \right. \\
&\quad \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^1 q_k \right) \left. + \sum_{\substack{i=1; j=1 \\ i \neq j}}^0 \ell_i \ell_j \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^j \dot{q}_k \right) \right. \\
&\quad \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \left. \right] + \frac{J_1}{2} \left( \sum_{k=1}^1 \dot{q}_k \right)^2, \\
&= \frac{m_1}{2} \left[ \ell_{c1}^2 (\dot{q}_1)^2 \right] + \frac{J_1}{2} (\dot{q}_1)^2, \\
&= \frac{m_1}{2} \left[ \ell_{c1}^2 \dot{q}_1^2 \right] + \frac{J_1}{2} \dot{q}_1^2, \\
&= \frac{1}{2} (m_1 \ell_{c1}^2 + J_1) \dot{q}_1^2. \tag{11}
\end{aligned}$$

• Para  $n = 2$ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{m_2}{2} \left[ \ell_{c2}^2 \left( \sum_{k=1}^2 \dot{q}_k \right)^2 + \sum_{i=1}^1 \left( \ell_i^2 \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right)^2 + 2\ell_{c2}\ell_i \left( \sum_{k=1}^2 \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \right) \right. \\
&\quad \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) \left. + \sum_{\substack{i=1; j=1 \\ i \neq j}}^1 \ell_i \ell_j \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^j \dot{q}_k \right) \right. \\
&\quad \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \left. \right] + \frac{J_2}{2} \left( \sum_{k=1}^2 \dot{q}_k \right)^2, \\
&= \frac{m_2}{2} \left[ \ell_{c2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \sum_{i=1}^1 \left( \ell_i^2 \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right)^2 + 2\ell_{c2}\ell_i (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \right) \right. \\
&\quad \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - (q_1 + q_2) \right) \left. + \sum_{\substack{i=1; j=1 \\ i \neq j}}^1 \ell_i \ell_j \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^j \dot{q}_k \right) \right. \\
&\quad \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \left. \right] + \frac{J_2}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2, \\
&= \frac{m_2}{2} \left[ \ell_{c2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \left( \ell_1^2 (\dot{q}_1)^2 + 2\ell_{c2}\ell_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1) \cos(q_1 - (q_1 + q_2)) \right) \right] + \\
&\quad + \frac{J_2}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2, \\
&= \frac{m_2}{2} \left[ \ell_{c2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \ell_1^2 \dot{q}_1^2 + 2\ell_{c2}\ell_1 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(-q_2) \right] + \frac{J_2}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2, \\
&= \frac{m_2}{2} \left[ \ell_1^2 \dot{q}_1^2 + \ell_{c2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2\ell_1 \ell_{c2} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) \right] + \frac{J_2}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2. \tag{12}
\end{aligned}$$

Sumando las expresiones (11) y (12) se obtiene la expresión (13), que corresponde a la función de energía cinética total del robot:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \\
&= \frac{1}{2} m_1 \ell_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[ \ell_1^2 \dot{q}_1^2 + \ell_{c2}^2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2) + \right. \\
&\quad \left. + 2\ell_1 \ell_{c2} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) \right] + \frac{1}{2} J_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2). \tag{13}
\end{aligned}$$

De forma complementaria y con el propósito de comparación, la energía cinética total de un robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  grados de libertad también se ha obtenido con el paquete computacional *Robotica* (Nethery y Spong, 1994), cuyo resultado se expone en la Figura 13 de la Sección A.1 del Anexo A del presente trabajo. Comparándose la ecuación (13) con el resultado en la Figura 13 generado por *Robotica*, después de desarrollar y reorganizar algunos términos, puede concluirse que son idénticas.

### 3.1.2. Ejemplo 2: Robot $\mathcal{PBD}$ de $N = 3$ grados de libertad

Con base en el robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 3$  grados de libertad de la Figura 17 (ver Anexo B) y empleando la expresión (9), se procede a obtener la función de energía cinética asociada a los 3 eslabones del robot:

- Para  $n = 1$ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{m_1}{2} \left[ \ell_{c1}^2 \left( \sum_{k=1}^1 \dot{q}_k \right)^2 + \sum_{i=1}^0 \left( \ell_i^2 \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right)^2 + 2\ell_{c1} \ell_i \left( \sum_{k=1}^1 \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \cdot \right. \right. \\
&\quad \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^1 q_k \right) \left. \left. + \sum_{\substack{i=1; j=1 \\ i \neq j}}^0 \ell_i \ell_j \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^j \dot{q}_k \right) \cdot \right. \right. \\
&\quad \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \left. \left. + \frac{J_1}{2} \left( \sum_{k=1}^1 \dot{q}_k \right)^2 \right], \\
&= \frac{m_1}{2} \left[ \ell_{c1}^2 \left( \sum_{k=1}^1 \dot{q}_k \right)^2 + \sum_{i=1}^0 \left( \ell_i^2 \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right)^2 + 2\ell_{c1} \ell_i \left( \sum_{k=1}^1 \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \cdot \right. \right. \\
&\quad \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^1 q_k \right) \left. \left. + \sum_{\substack{i=1; j=1 \\ i \neq j}}^0 \ell_i \ell_j \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^j \dot{q}_k \right) \cdot \right. \right. \\
&\quad \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \left. \left. + \frac{J_1}{2} \left( \sum_{k=1}^1 \dot{q}_k \right)^2 \right], \\
&= \frac{m_1}{2} \left[ \ell_{c1}^2 (\dot{q}_1)^2 \right] + \frac{J_1}{2} (\dot{q}_1)^2, \\
&= \frac{m_1}{2} \left[ \ell_{c1}^2 \dot{q}_1^2 \right] + \frac{J_1}{2} \dot{q}_1^2, \\
&= \frac{1}{2} (m_1 \ell_{c1}^2 + J_1) \dot{q}_1^2. \tag{14}
\end{aligned}$$

- Para  $n = 2$ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{m_2}{2} \left[ \ell_{c2}^2 \left( \sum_{k=1}^2 \dot{q}_k \right)^2 + \sum_{i=1}^1 \left( \ell_i^2 \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right)^2 + 2\ell_{c2}\ell_i \left( \sum_{k=1}^2 \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \right. \right. \\
&\quad \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) \left. \left. + \sum_{\substack{\lambda=1; j=1 \\ i \neq j}}^1 \ell_i \ell_j \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^j \dot{q}_k \right) \right. \right. \\
&\quad \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \left. \left. + \frac{J_2}{2} \left( \sum_{k=1}^2 \dot{q}_k \right)^2 \right], \\
&= \frac{m_2}{2} \left[ \ell_{c2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \sum_{i=1}^1 \left( \ell_i^2 \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right)^2 + 2\ell_{c2}\ell_i (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \right. \right. \\
&\quad \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - (q_1 + q_2) \right) \left. \left. + \sum_{\substack{i=1; j=1 \\ i \neq j}}^1 \ell_i \ell_j \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^j \dot{q}_k \right) \right. \right. \\
&\quad \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \left. \left. + \frac{J_2}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \right], \\
&= \frac{m_2}{2} \left[ \ell_{c2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \left( \ell_1^2 (\dot{q}_1)^2 + 2\ell_{c2}\ell_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1) \cos(q_1 - (q_1 + q_2)) \right) \right] + \\
&\quad + \frac{J_2}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2, \\
&= \frac{m_2}{2} \left[ \ell_{c2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \ell_1^2 \dot{q}_1^2 + 2\ell_{c2}\ell_1 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(-q_2) \right] + \frac{J_2}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2, \\
&= \frac{m_2}{2} \left[ \ell_1^2 \dot{q}_1^2 + \ell_{c2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2\ell_1 \ell_{c2} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) \right] + \frac{J_2}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2. \tag{15}
\end{aligned}$$

Como observación sobresaliente, (15) coincide con (12), que corresponde a la energía cinética aportada por el segundo eslabón del robot de  $N = 2$  grados de libertad. Esto permite confirmar que el aporte de la energía cinética para el eslabón  $n$  no es afectada por la de los siguientes eslabones consecutivos  $n + k$  para cualquier número  $k = 1, 2, \dots, (N - n)$ .

- Para  $n = 3$ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_3(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{m_3}{2} \left[ \ell_{c3}^2 \left( \sum_{k=1}^3 \dot{q}_k \right)^2 + \sum_{i=1}^2 \left( \ell_i^2 \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right)^2 + 2\ell_{c3}\ell_i \left( \sum_{k=1}^3 \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \right. \right. \\
&\quad \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \left. \left. + \sum_{\substack{\lambda=1; j=1 \\ i \neq j}}^2 \ell_i \ell_j \left( \sum_{k=1}^i \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^j \dot{q}_k \right) \right. \right. \\
&\quad \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \left. \left. + \frac{J_3}{2} \left( \sum_{k=1}^3 \dot{q}_k \right)^2 \right], \\
&= \frac{m_3}{2} \left[ \ell_{c3}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + \left( \left( \ell_1^2 (\dot{q}_1)^2 + 2\ell_{c3}\ell_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) (\dot{q}_1) \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \cos(q_1 - (q_1 + q_2 + q_3)) \Big) + \left( \ell_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2\ell_{c3}\ell_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cdot \right. \\
& \cdot \cos((q_1 + q_2) - (q_1 + q_2 + q_3)) \Big) + \left( \left( \ell_1\ell_2 \left( \sum_{k=1}^1 \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^2 \dot{q}_k \right) \cdot \right. \right. \\
& \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) \Big) + \left( \ell_2\ell_1 \left( \sum_{k=1}^2 \dot{q}_k \right) \left( \sum_{k=1}^1 \dot{q}_k \right) \cdot \right. \\
& \cdot \cos \left( \sum_{k=1}^2 q_k - \sum_{k=1}^1 q_k \right) \Big) \Big) + \frac{J_3}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2, \\
= & \frac{m_3}{2} \left[ \ell_{c3}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + \left( \left( \ell_1^2 (\dot{q}_1)^2 + 2\ell_{c3}\ell_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) (\dot{q}_1) \cdot \right. \right. \right. \\
& \cdot \cos(q_1 - (q_1 + q_2 + q_3)) \Big) + \left( \ell_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2\ell_{c3}\ell_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cdot \right. \\
& \cdot \cos((q_1 + q_2) - (q_1 + q_2 + q_3)) \Big) + \left( \left( \ell_1\ell_2 (\dot{q}_1) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cdot \right. \right. \\
& \cdot \cos(q_1 - (q_1 + q_2)) \Big) + \left( \ell_2\ell_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1) \cos((q_1 + q_2) - q_1) \Big) \Big) \Big] + \\
& + \frac{J_3}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2, \\
= & \frac{m_3}{2} \left[ \ell_{c3}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + \left( \left( \ell_1^2 \dot{q}_1^2 + 2\ell_{c3}\ell_1 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(-q_2 - q_3) \right) + \right. \right. \\
& + \left( \ell_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2\ell_{c3}\ell_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(-q_3) \right) \Big) + \\
& + \left( \left( \ell_1\ell_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(-q_2) \right) + \left( \ell_2\ell_1 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) \right) \right) \Big] + \\
& + \frac{J_3}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2, \\
= & \frac{m_3}{2} \left[ \ell_1^2 \dot{q}_1^2 + \ell_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \ell_{c3}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + \ell_1\ell_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) + \right. \\
& + \ell_1\ell_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) + 2\ell_1\ell_{c3} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(q_2 + q_3) + \\
& + 2\ell_2\ell_{c3} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(q_3) \Big] + \frac{J_3}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2, \\
= & \frac{m_3}{2} \left[ \ell_1^2 \dot{q}_1^2 + \ell_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \ell_{c3}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + 2\ell_1\ell_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) + \right. \\
& + 2\ell_1\ell_{c3} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(q_2 + q_3) + 2\ell_2\ell_{c3} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cdot \\
& \cdot \cos(q_3) \Big] + \frac{J_3}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2. \tag{16}
\end{aligned}$$

Ahora, sumando las expresiones (14), (15) y (16) se determina la función de energía cinética total del robot, que resulta en la expresión (17) a continuación:

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{K}_3(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}m_1\ell_{c1}^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left[\ell_1^2\dot{q}_1^2 + \ell_{c2}^2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2) + 2\ell_1\ell_{c2}\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\cos(q_2)\right] + \\
&\quad + \frac{1}{2}J_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2) + \frac{1}{2}m_3\left[\ell_1^2\dot{q}_1^2 + \ell_2^2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2) + \right. \\
&\quad + \ell_{c3}^2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_3 + 2\dot{q}_2\dot{q}_3) + 2\ell_1\ell_2\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\cos(q_2) + \\
&\quad + 2\ell_1\ell_{c3}\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)\cos(q_2 + q_3) + 2\ell_2\ell_{c3}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)\cos(q_3)\left. \right] + \\
&\quad + \frac{1}{2}J_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_3 + 2\dot{q}_2\dot{q}_3). \tag{17}
\end{aligned}$$

También se ha determinado, con el paquete computacional *Robotica* (Nethery y Spong, 1994), la energía cinética total para el robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 3$  grados de libertad; el resultado se localiza en la Sección B.1 del Anexo B de este documento. Comparando la ecuación (17) con el resultado brindado por *Robotica*, después de desarrollar y reorganizar algunos términos, puede concluirse que son iguales.

## Capítulo 4. Función de energía potencial de robots $\mathcal{PBD}$

---

En este capítulo se propone una expresión general para la función de energía potencial de robots  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad (veáse Figura 4).

La energía potencial  $\mathcal{U}_i(\mathbf{q})$  del  $i$ -ésimo eslabón debido a la gravedad, se describe por la siguiente expresión:

$$\mathcal{U}_i(\mathbf{q}) = m_i g h_i,$$

donde  $m_i$  es la masa del  $i$ -ésimo eslabón,  $g$  es la aceleración de la gravedad en el sitio donde opera el robot y  $h_i$  es la altura (distancia vertical) del  $i$ -ésimo centro de masa con respecto al nivel donde se ha asignado arbitrariamente la energía potencial como nula. Para el caso del mecanismo de la Figura 4, se considera que la energía potencial es nula en  $y = 0$ . La "altura" por encima de  $y = 0$  es positiva mientras que por debajo es negativa. Para el primer eslabón, la altura  $h_1$  es

$$h_1 = -\ell_{c1} \cos(q_1).$$

La energía potencial es en consecuencia:

$$\mathcal{U}_1(\mathbf{q}) = -m_1 g \ell_{c1} \cos(q_1).$$

Para el eslabón  $n = 2$ ,

$$h_2 = -\ell_1 \cos(q_1) - \ell_{c2} \cos(q_1 + q_2),$$

con ello, la energía potencial para el segundo eslabón es:

$$\mathcal{U}_2(\mathbf{q}) = -m_2 g \left[ \ell_1 \cos(q_1) + \ell_{c2} \cos(q_1 + q_2) \right].$$

En el caso del  $n$ -ésimo eslabón,

$$\begin{aligned} h_n &= -\ell_1 \cos(q_1) - \ell_2 \cos(q_1 + q_2) - \cdots - \ell_{cn} \cos(q_1 + q_2 + \cdots + q_n), \\ &= -\ell_{cn} \cos\left(\sum_{j=1}^n q_j\right) - \sum_{i=1}^{n-1} \ell_i \cos\left(\sum_{j=1}^i q_j\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para el eslabón  $n$ , la función de energía potencial es:

$$\mathcal{U}_n(\mathbf{q}) = -m_n g \left[ \ell_1 \cos(q_1) + \ell_2 \cos(q_1 + q_2) + \cdots + \ell_{cn} \cos(q_1 + q_2 + \cdots + q_n) \right],$$

$$= -m_n g \left[ \ell_{cn} \cos \left( \sum_{j=1}^n q_j \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \ell_i \cos \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right]. \quad (18)$$

A manera de ejemplo, en el caso de  $n = 1$ , se obtiene de (18) la siguiente expresión para la energía potencial  $\mathcal{U}_1(\mathbf{q})$  aportada por el primer eslabón:

$$\mathcal{U}_1(\mathbf{q}) = -m_1 g \ell_{c1} \cos(q_1). \quad (19)$$

A partir de (18) puede notarse que  $\mathcal{U}_n(\mathbf{q})$  depende de  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , pero no de  $q_{n+1}, \dots, q_N$ . Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \mathcal{U}_i(\mathbf{q})}{\partial q_n} = 0. \quad (20)$$

La expresión (18) es uno de los resultados teóricos principales de esta tesis. Ésta permite obtener la función de energía potencial asociada al  $n$ -ésimo ( $N \geq n \geq 1$ ) eslabón de cualquier robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad, como el que se muestra en la Figura 4.

La función de energía potencial completa con todos los  $N$  eslabones correspondiente al robot hiper-redundante  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad resulta en:

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^N \mathcal{U}_i(\mathbf{q}). \quad (21)$$

## 4.1. Ejemplos

### 4.1.1. Ejemplo 1: Robot $\mathcal{PBD}$ de $N = 2$ grados de libertad

Considerando nuevamente el robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  grados de libertad de la Figura 11 (ver Anexo A), se obtiene la función de energía potencial asociada a sus dos eslabones, utilizando la expresión general propuesta (18):

- Para  $n = 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1(\mathbf{q}) &= -m_1 g \left[ \ell_{c1} \cos \left( \sum_{j=1}^1 q_j \right) + \sum_{i=1}^0 \ell_i \cos \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right], \\ &= -m_1 g \left[ \ell_{c1} \cos(q_1) + \sum_{i=1}^0 \ell_i \cos \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right], \end{aligned}$$

$$= -m_1 g l_{c1} \cos(q_1). \quad (22)$$

- Para  $n = 2$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2(\mathbf{q}) &= -m_2 g \left[ l_{c2} \cos \left( \sum_{j=1}^2 q_j \right) + \sum_{i=1}^1 l_i \cos \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right], \\ &= -m_2 g \left[ l_{c2} \cos(q_1 + q_2) + l_1 \cos(q_1) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

La función de energía potencial total del robot, que se obtiene a partir de sumar las expresiones (22) y (23), se indica con la siguiente expresión (24):

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathcal{U}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{U}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \\ &= -m_1 g l_{c1} \cos(q_1) - m_2 g \left[ l_{c2} \cos(q_1 + q_2) + l_1 \cos(q_1) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

#### 4.1.2. Ejemplo 2: Robot $\mathcal{PBD}$ de $N = 3$ grados de libertad

De nuevo, con referencia al robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 3$  grados de libertad de la Figura 17 (ver Anexo B) y empleando la expresión general propuesta (18), se determina la función de energía potencial asociada a cada uno de los eslabones del robot:

- Para  $n = 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1(\mathbf{q}) &= -m_1 g \left[ l_{c1} \cos \left( \sum_{j=1}^1 q_j \right) + \sum_{i=1}^0 l_i \cos \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right], \\ &= -m_1 g \left[ l_{c1} \cos(q_1) + \sum_{i=1}^0 l_i \cos \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right], \\ &= -m_1 g l_{c1} \cos(q_1). \end{aligned} \quad (25)$$

- Para  $n = 2$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2(\mathbf{q}) &= -m_2 g \left[ l_{c2} \cos \left( \sum_{j=1}^2 q_j \right) + \sum_{i=1}^1 l_i \cos \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right], \\ &= -m_2 g \left[ l_{c2} \cos(q_1 + q_2) + l_1 \cos(q_1) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Cabe destacar que la expresión (26) coincide con (23), que es la energía potencial asociada al segundo eslabón para el robot de  $N = 2$  grados de libertad. Esto indica que el aporte de la energía potencial para el eslabón  $n$  no es afectada por la de los siguientes eslabones consecutivos  $n + k$ , para cualquier número  $k = 1, 2, \dots, (N - n)$ .

- Para  $n = 3$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_3(\mathbf{q}) &= -m_3g \left[ \ell_{c3} \cos \left( \sum_{j=1}^3 q_j \right) + \sum_{i=1}^2 \ell_i \cos \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right], \\
 &= -m_3g \left[ \ell_{c3} \cos (q_1 + q_2 + q_3) + \ell_1 \cos \left( \sum_{j=1}^1 q_j \right) + \ell_2 \cos \left( \sum_{j=1}^2 q_j \right) \right], \\
 &= -m_3g \left[ \ell_{c3} \cos (q_1 + q_2 + q_3) + \ell_1 \cos (q_1) + \ell_2 \cos (q_1 + q_2) \right]. \tag{27}
 \end{aligned}$$

Sumando las expresiones (25), (26) y (27) se obtiene la función de energía potencial total del robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 3$  grados de libertad, que resulta en la expresión (28):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathcal{U}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{U}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{U}_3(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \\
 &= -m_1g\ell_{c1} \cos (q_1) - m_2g \left[ \ell_{c2} \cos (q_1 + q_2) + \ell_1 \cos (q_1) \right] - \\
 &\quad - m_3g \left[ \ell_{c3} \cos (q_1 + q_2 + q_3) + \ell_1 \cos (q_1) + \ell_2 \cos (q_1 + q_2) \right]. \tag{28}
 \end{aligned}$$

## Capítulo 5. Matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ de robots de $\mathcal{PBD}$

---

En este capítulo se presentan expresiones generales inéditas para obtener la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  de un robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad, como el que se muestra en la Figura 4.

Para cualquier robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad, como el que se muestra en la Figura 4, su función de energía cinética  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  se descompone en la suma de las energías cinéticas asociadas a las masas  $m_i > 0$  de los eslabones que conforman el robot, es decir,

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \cdots + \mathcal{K}_N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{n=1}^N \mathcal{K}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

donde cada  $\mathcal{K}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  se describe por los movimientos traslacionales y rotacionales del eslabón  $n$ :

$$\mathcal{K}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} m_n \|\mathbf{v}_n\|^2 + \frac{1}{2} J_n \|\boldsymbol{\omega}_n\|^2, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

donde  $\mathbf{v}_n, \boldsymbol{\omega}_n \in \mathbb{R}^3$  son respectivamente la velocidad traslacional y la velocidad angular del eslabón  $n$ -ésimo. La función de energía cinética  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y la matriz de inercia  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  distintiva para cada robot se relacionan mediante la siguiente expresión (Kelly et al., 2005):

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}.$$

Por otro lado, para robots  $\mathcal{PBD}$ , la función de energía cinética del  $n$ -ésimo eslabón, se describe por la expresión

$$\mathcal{K}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T {}^n M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (29)$$

donde  ${}^n M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  denota la matriz de inercia aportada por el eslabón  $n$ . Los elementos de la matriz  ${}^n M(\mathbf{q}) = \{{}^n M_{i,j}(\mathbf{q})\}$  con  $i, j > n$  son iguales a 0.

La energía cinética total del robot manipulador  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad posee la siguiente característica inédita:

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \underbrace{\left( \sum_{n=1}^N {}^n M(\mathbf{q}) \right)}_{M(\mathbf{q})} \dot{\mathbf{q}}, \quad (30)$$

en otras palabras la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  de los robots  $\mathcal{PBD}$  se forma como la suma de todas las matrices de inercia  ${}^n M(\mathbf{q})$  aportada por todos y cada uno de los  $N$  eslabones del robot  $\mathcal{PBD}$ , donde  ${}^n M(\mathbf{q})$  para el  $n$ -ésimo eslabón se obtiene de la energía cinética  $\mathcal{K}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  en (29).

Considerando, como caso de estudio, un robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 3$  grados de libertad como el que se muestra en la Figura 17. Con base en las ecuaciones (14), (15) y (16), la **energía cinética aportada por cada eslabón**,  $\mathcal{K}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , es:

- Para  $n = 1$ ,

$$\mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}(m_1 \ell_{c1}^2 + J_1) \dot{q}_1^2. \quad (31)$$

- Para  $n = 2$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{m_2}{2} \left[ \ell_1^2 \dot{q}_1^2 + \ell_{c2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2\ell_1 \ell_{c2} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) \right] + \frac{J_2}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2, \\ &= \frac{1}{2} \left[ (m_2 \ell_1^2 + m_2 \ell_{c2}^2 + 2m_2 \ell_1 \ell_{c2} \cos(q_2) + J_2) \dot{q}_1^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2(m_2 \ell_{c2}^2 + m_2 \ell_1 \ell_{c2} \cos(q_2) + J_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \right. \\ &\quad \left. + (m_2 \ell_{c2}^2 + J_2) \dot{q}_2^2 \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

- Para  $n = N = 3$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_3(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{m_3}{2} \left[ \ell_1^2 \dot{q}_1^2 + \ell_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \ell_{c3}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + 2\ell_1 \ell_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) + \right. \\ &\quad \left. + 2\ell_1 \ell_{c3} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(q_2 + q_3) + 2\ell_2 \ell_{c3} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(q_3) \right] + \\ &\quad + \frac{J_3}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2, \\ &= \frac{1}{2} \left[ (m_3 \ell_1^2 + m_3 \ell_2^2 + m_3 \ell_{c3}^2 + 2m_3 \ell_1 \ell_2 \cos(q_2) + 2m_3 \ell_1 \ell_{c3} \cos(q_2 + q_3) + \right. \\ &\quad \left. + 2m_3 \ell_2 \ell_{c3} \cos(q_3) + J_3) \dot{q}_1^2 + \right. \\ &\quad \left. + (m_3 \ell_2^2 + m_3 \ell_{c3}^2 + 2m_3 \ell_2 \ell_{c3} \cos(q_3) + J_3) \dot{q}_2^2 + \right. \\ &\quad \left. + (m_3 \ell_{c3}^2 + J_3) \dot{q}_3^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2(m_3 \ell_2^2 + m_3 \ell_{c3}^2 + m_3 \ell_1 \ell_2 \cos(q_2) + m_3 \ell_1 \ell_{c3} \cos(q_2 + q_3) + \right. \\ &\quad \left. + 2m_3 \ell_2 \ell_{c3} \cos(q_3) + J_3) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \right. \\ &\quad \left. + 2(m_3 \ell_{c3}^2 + m_3 \ell_1 \ell_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 \ell_2 \ell_{c3} \cos(q_3) + J_3) \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \right. \\ &\quad \left. + 2(m_3 \ell_{c3}^2 + m_3 \ell_2 \ell_{c3} \cos(q_3) + J_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Al ser un robot de  $N = 3$  g.d.l.,

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}.$$

Es decir,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ . Entonces, partiendo de la expresión (29),

$$\mathcal{K}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^n M_{1,1}(\mathbf{q}) & {}^n M_{1,2}(\mathbf{q}) & {}^n M_{1,3}(\mathbf{q}) \\ {}^n M_{2,1}(\mathbf{q}) & {}^n M_{2,2}(\mathbf{q}) & {}^n M_{2,3}(\mathbf{q}) \\ {}^n M_{3,1}(\mathbf{q}) & {}^n M_{3,2}(\mathbf{q}) & {}^n M_{3,3}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}}_{{}^n M(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}.$$

Se obtendrá a continuación la aportación  ${}^n M(\mathbf{q})$  a la **matriz de inercia**  $M(\mathbf{q})$  **de un robot PBD con**  $N \geq 3$  **por parte de cada uno de los 3 primeros eslabones que lo conforman** ( $n = 1, 2, 3$ ).

- Empleando (31) para  $n = 1$ :

$${}^1 M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^1 M_{1,1}(\mathbf{q}) & {}^1 M_{1,2}(\mathbf{q}) & {}^1 M_{1,3}(\mathbf{q}) \\ {}^1 M_{2,1}(\mathbf{q}) & {}^1 M_{2,2}(\mathbf{q}) & {}^1 M_{2,3}(\mathbf{q}) \\ {}^1 M_{3,1}(\mathbf{q}) & {}^1 M_{3,2}(\mathbf{q}) & {}^1 M_{3,3}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad (34)$$

donde

$${}^1 M_{1,1}(\mathbf{q}) = m_1 \ell_{c1}^2 + J_1$$

$${}^1 M_{1,2}(\mathbf{q}) = 0$$

$${}^1 M_{1,3}(\mathbf{q}) = 0$$

$${}^1 M_{2,1}(\mathbf{q}) = 0$$

$${}^1 M_{2,2}(\mathbf{q}) = 0$$

$${}^1 M_{2,3}(\mathbf{q}) = 0$$

$${}^1 M_{3,1}(\mathbf{q}) = 0$$

$${}^1 M_{3,2}(\mathbf{q}) = 0$$

$${}^1 M_{3,3}(\mathbf{q}) = 0$$

- Empleando (32) para  $n = 2$ :

$${}^2 M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^2 M_{1,1}(\mathbf{q}) & {}^2 M_{1,2}(\mathbf{q}) & {}^2 M_{1,3}(\mathbf{q}) \\ {}^2 M_{2,1}(\mathbf{q}) & {}^2 M_{2,2}(\mathbf{q}) & {}^2 M_{2,3}(\mathbf{q}) \\ {}^2 M_{3,1}(\mathbf{q}) & {}^2 M_{3,2}(\mathbf{q}) & {}^2 M_{3,3}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad (35)$$

donde

$${}^2M_{1,1}(\mathbf{q}) = m_2\ell_1^2 + m_2\ell_{c2}^2 + 2m_2\ell_1\ell_{c2} \cos(q_2) + J_2$$

$${}^2M_{1,2}(\mathbf{q}) = m_2\ell_{c2}^2 + m_2\ell_1\ell_{c2} \cos(q_2) + J_2$$

$${}^2M_{1,3}(\mathbf{q}) = 0$$

$${}^2M_{2,1}(\mathbf{q}) = m_2\ell_{c2}^2 + m_2\ell_1\ell_{c2} \cos(q_2) + J_2$$

$${}^2M_{2,2}(\mathbf{q}) = m_2\ell_{c2}^2 + J_2$$

$${}^2M_{2,3}(\mathbf{q}) = 0$$

$${}^2M_{3,1}(\mathbf{q}) = 0$$

$${}^2M_{3,2}(\mathbf{q}) = 0$$

$${}^2M_{3,3}(\mathbf{q}) = 0$$

- Empleando (33) para  $n = N = 3$ :

$${}^3M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^3M_{1,1}(\mathbf{q}) & {}^3M_{1,2}(\mathbf{q}) & {}^3M_{1,3}(\mathbf{q}) \\ {}^3M_{2,1}(\mathbf{q}) & {}^3M_{2,2}(\mathbf{q}) & {}^3M_{2,3}(\mathbf{q}) \\ {}^3M_{3,1}(\mathbf{q}) & {}^3M_{3,2}(\mathbf{q}) & {}^3M_{3,3}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad (36)$$

donde

$${}^3M_{1,1}(\mathbf{q}) = m_3\ell_1^2 + m_3\ell_2^2 + m_3\ell_{c3}^2 + 2m_3\ell_1\ell_2 \cos(q_2) + 2m_3\ell_1\ell_{c3} \cos(q_2 + q_3) + 2m_3\ell_2\ell_{c3} \cos(q_3) + J_3$$

$${}^3M_{1,2}(\mathbf{q}) = m_3\ell_2^2 + m_3\ell_{c3}^2 + m_3\ell_1\ell_2 \cos(q_2) + m_3\ell_1\ell_{c3} \cos(q_2 + q_3) + 2m_3\ell_2\ell_{c3} \cos(q_3) + J_3$$

$${}^3M_{1,3}(\mathbf{q}) = m_3\ell_{c3}^2 + m_3\ell_1\ell_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_3\ell_2\ell_{c3} \cos(q_3) + J_3$$

$${}^3M_{2,1}(\mathbf{q}) = m_3\ell_2^2 + m_3\ell_{c3}^2 + m_3\ell_1\ell_2 \cos(q_2) + m_3\ell_1\ell_{c3} \cos(q_2 + q_3) + 2m_3\ell_2\ell_{c3} \cos(q_3) + J_3$$

$${}^3M_{2,2}(\mathbf{q}) = m_3\ell_2^2 + m_3\ell_{c3}^2 + 2m_3\ell_2\ell_{c3} \cos(q_3) + J_3$$

$${}^3M_{2,3}(\mathbf{q}) = m_3\ell_{c3}^2 + m_3\ell_2\ell_{c3} \cos(q_3) + J_3$$

$${}^3M_{3,1}(\mathbf{q}) = m_3\ell_{c3}^2 + m_3\ell_1\ell_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_3\ell_2\ell_{c3} \cos(q_3) + J_3$$

$${}^3M_{3,2}(\mathbf{q}) = m_3\ell_{c3}^2 + m_3\ell_2\ell_{c3} \cos(q_3) + J_3$$

$${}^3M_{3,3}(\mathbf{q}) = m_3\ell_{c3}^2 + J_3$$

A continuación se suman (34), (35) y (36) para obtener la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  de un robot  $\mathcal{PBD}$

de  $N = 3$  grados de libertad.

$$M(\mathbf{q}) = \sum_{n=1}^3 {}^n M(\mathbf{q}) = {}^1 M(\mathbf{q}) + {}^2 M(\mathbf{q}) + {}^3 M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_{1,1}(\mathbf{q}) & M_{1,2}(\mathbf{q}) & M_{1,3}(\mathbf{q}) \\ M_{2,1}(\mathbf{q}) & M_{2,2}(\mathbf{q}) & M_{2,3}(\mathbf{q}) \\ M_{3,1}(\mathbf{q}) & M_{3,2}(\mathbf{q}) & M_{3,3}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad (37)$$

donde

$$M_{1,1}(\mathbf{q}) = m_1 \ell_{c1}^2 + m_2 \ell_1^2 + m_2 \ell_{c2}^2 + m_3 \ell_1^2 + m_3 \ell_2^2 + m_3 \ell_{c3}^2 + 2m_2 \ell_1 \ell_{c2} \cos(q_2) + 2m_3 \ell_1 \ell_2 \cos(q_2)$$

$$+ 2m_3 \ell_2 \ell_{c3} \cos(q_3) + 2m_3 \ell_1 \ell_{c3} \cos(q_2 + q_3) + J_1 + J_2 + J_3$$

$$M_{1,2}(\mathbf{q}) = m_2 \ell_{c2}^2 + m_3 \ell_2^2 + m_3 \ell_{c3}^2 + m_2 \ell_1 \ell_{c2} \cos(q_2) + m_3 \ell_1 \ell_2 \cos(q_2) + m_3 \ell_1 \ell_{c3} \cos(q_2 + q_3)$$

$$+ 2m_3 \ell_2 \ell_{c3} \cos(q_3) + J_2 + J_3$$

$$M_{1,3}(\mathbf{q}) = m_3 \ell_{c3}^2 + m_3 \ell_1 \ell_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 \ell_2 \ell_{c3} \cos(q_3) + J_3$$

$$M_{2,1}(\mathbf{q}) = m_2 \ell_{c2}^2 + m_3 \ell_2^2 + m_3 \ell_{c3}^2 + m_2 \ell_1 \ell_{c2} \cos(q_2) + m_3 \ell_1 \ell_2 \cos(q_2) + m_3 \ell_1 \ell_{c3} \cos(q_2 + q_3)$$

$$+ 2m_3 \ell_2 \ell_{c3} \cos(q_3) + J_2 + J_3$$

$$M_{2,2}(\mathbf{q}) = m_2 \ell_{c2}^2 + m_3 \ell_2^2 + m_3 \ell_{c3}^2 + 2m_3 \ell_2 \ell_{c3} \cos(q_3) + J_2 + J_3$$

$$M_{2,3}(\mathbf{q}) = m_3 \ell_{c3}^2 + m_3 \ell_2 \ell_{c3} \cos(q_3) + J_3$$

$$M_{3,1}(\mathbf{q}) = m_3 \ell_{c3}^2 + m_3 \ell_1 \ell_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 \ell_2 \ell_{c3} \cos(q_3) + J_3$$

$$M_{3,2}(\mathbf{q}) = m_3 \ell_{c3}^2 + m_3 \ell_2 \ell_{c3} \cos(q_3) + J_3$$

$$M_{3,3}(\mathbf{q}) = m_3 \ell_{c3}^2 + J_3$$

Finalmente, extendiendo este procedimiento para robots  $PBD$  de  $N$  grados de libertad y después de directas pero tediosas manipulaciones, se llega a:

- Para  $g = 1, 2, \dots, N$ :

$$M_{g,g}(\mathbf{q}) = m_g \ell_{cg}^2 + \sum_{n=g+1}^N m_n \left[ \ell_{cn}^2 + \sum_{i=g}^{n-1} \left( \ell_i^2 + 2\ell_{cn} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \right) + \sum_{\substack{i=g; j=g \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right] + \sum_{n=g}^N J_n. \quad (38)$$

- Para  $g = 1, 2, \dots, N-1$  y  $h = g+1, \dots, N$ :

$$M_{g,h}(\mathbf{q}) = m_h \left[ \ell_{ch}^2 + \sum_{i=g}^{h-1} \ell_{ch} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^h q_k \right) \right] + \sum_{n=h+1}^N m_n \left[ \ell_{cn}^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=h}^{n-1} \left( \ell_i^2 + \ell_{cn} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \right) + \sum_{i=g}^{n-1} \ell_{cn} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \\
& + \sum_{\substack{i=g; j=h \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \Big] + \sum_{n=h}^N J_n.
\end{aligned} \tag{39}$$

donde  $M_{g,h} = M_{h,g}$ . Ambas emplean la notación (1).

Las dos fórmulas anteriores (38) y (39) permiten obtener explícitamente los  $N^2$  componentes de la matriz de inercia  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  para robots  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad.

### 5.1. Ejemplos

A manera de ejemplo, se presenta en esta sección la obtención de los componentes  $M_{2,2}$  y  $M_{1,2}$  para un robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  y  $N = 3$  grados de libertad, empleando las fórmulas propuestas (38) y (39):

- Robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  grados de libertad:

$$\begin{aligned}
M_{2,2}(\mathbf{q}) & = m_2 \ell_{c2}^2 + \sum_{n=3}^2 m_n \left[ \ell_{cn}^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \left( \ell_i^2 + 2\ell_{cn} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\substack{i=2; j=2 \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right] + \sum_{n=2}^2 J_n, \\
& = m_2 \ell_{c2}^2 + J_2.
\end{aligned} \tag{40}$$

El resultado en (40) coincide con el componente  $M_{2,2}(\mathbf{q})$  generado por *Robotica*, que se indica en la Sección A.2 del Anexo A.

$$\begin{aligned}
M_{1,2}(\mathbf{q}) & = m_2 \left[ \ell_{c2}^2 + \sum_{i=1}^1 \ell_{c2} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) \right] + \sum_{n=3}^2 m_n \left[ \ell_{cn}^2 + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=2}^{n-1} \left( \ell_i^2 + \ell_{cn} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \ell_{cn} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\substack{i=1; j=2 \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right] + \sum_{n=2}^2 J_n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m_2 \left[ \ell_{c2}^2 + \ell_{c2} \ell_1 \cos(q_1 - (q_1 + q_2)) \right] + J_2, \\
&= m_2 \left[ \ell_{c2}^2 + \ell_{c2} \ell_1 \cos(-q_2) \right] + J_2, \\
&= m_2 \left[ \ell_{c2}^2 + \ell_{c2} \ell_1 \cos(q_2) \right] + J_2.
\end{aligned} \tag{41}$$

El componente  $M_{1,2}(\mathbf{q})$  resultante en (41), obtenido con la formula propuesta (39), coincide con el generado por *Robotica* (ver Sección A.2 del Anexo A).

- Robot *PBD* de  $N = 3$  grados de libertad:

$$\begin{aligned}
M_{2,2}(\mathbf{q}) &= m_2 \ell_{c2}^2 + \sum_{n=3}^3 m_n \left[ \ell_{cn}^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \left( \ell_i^2 + 2\ell_{cn} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{i=2; j=2 \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right] + \sum_{n=2}^3 J_n, \\
&= m_2 \ell_{c2}^2 + m_3 \left[ \ell_{c3}^2 + \sum_{i=2}^2 \left( \ell_i^2 + 2\ell_{c3} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{i=2; j=2 \\ i \neq j}}^2 \ell_i \ell_j \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right] + J_2 + J_3, \\
&= m_2 \ell_{c2}^2 + m_3 \left[ \ell_{c3}^2 + \ell_2^2 + 2\ell_{c3} \ell_2 \cos \left( \sum_{k=1}^2 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \right] + J_2 + J_3, \\
&= m_2 \ell_{c2}^2 + m_3 \left[ \ell_{c3}^2 + \ell_2^2 + 2\ell_{c3} \ell_2 \cos(q_1 + q_2 - (q_1 + q_2 + q_3)) \right] + J_2 + J_3, \\
&= m_2 \ell_{c2}^2 + m_3 \left[ \ell_{c3}^2 + \ell_2^2 + 2\ell_{c3} \ell_2 \cos(-q_3) \right] + J_2 + J_3, \\
&= m_2 \ell_{c2}^2 + m_3 \left[ \ell_{c3}^2 + \ell_2^2 + 2\ell_{c3} \ell_2 \cos(q_3) \right] + J_2 + J_3.
\end{aligned} \tag{42}$$

El componente  $M_{2,2}(\mathbf{q})$  resultante, indicado en (42) y obtenido con (38), coincide con el componente  $M_{2,2}(\mathbf{q})$  calculado por *Robotica* (Sección B.2 del Anexo B).

$$\begin{aligned}
M_{1,2}(\mathbf{q}) &= m_2 \left[ \ell_{c2}^2 + \sum_{i=1}^1 \ell_{c2} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) \right] + \sum_{n=3}^3 m_n \left[ \ell_{cn}^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \left( \ell_i^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \ell_{cn} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \ell_{cn} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{i=1; j=2 \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right] + \sum_{n=2}^3 J_n, \\
&= m_2 \left[ \ell_{c2}^2 + \ell_{c2} \ell_1 \cos \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) \right] + m_3 \left[ \ell_{c3}^2 + \sum_{i=2}^2 \left( \ell_i^2 + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \ell_{c3} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) + \sum_{i=1}^2 \ell_{c3} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) + \\
& + \sum_{\substack{i=1; j=2 \\ i \neq j}}^2 \ell_i \ell_j \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \Big] + J_2 + J_3, \\
= & m_2 \left[ \ell_{c2}^2 + \ell_{c2} \ell_1 \cos (q_1 - (q_1 + q_2)) \right] + m_3 \left[ \ell_{c3}^2 + \ell_2^2 + \right. \\
& + \ell_{c3} \ell_2 \cos \left( \sum_{k=1}^2 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) + \left( \ell_{c3} \ell_1 \cos \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \right) + \\
& + \left( \ell_{c3} \ell_2 \cos \left( \sum_{k=1}^2 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \right) + \left. \ell_1 \ell_2 \cos \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) \right] + \\
& + J_2 + J_3, \\
= & m_2 \left[ \ell_{c2}^2 + \ell_{c2} \ell_1 \cos (q_1 - (q_1 + q_2)) \right] + m_3 \left[ \ell_{c3}^2 + \ell_2^2 + \ell_{c3} \ell_2 \cdot \right. \\
& \cdot \cos (q_1 + q_2 - (q_1 + q_2 + q_3)) + \ell_{c3} \ell_1 \cos (q_1 - (q_1 + q_2 + q_3)) + \\
& + \left. \ell_{c3} \ell_2 \cos (q_1 + q_2 - (q_1 + q_2 + q_3)) + \ell_1 \ell_2 \cos (q_1 - (q_1 + q_2)) \right] + \\
& + J_2 + J_3, \\
= & m_2 \left[ \ell_{c2}^2 + \ell_{c2} \ell_1 \cos (-q_2) \right] + m_3 \left[ \ell_{c3}^2 + \ell_2^2 + \ell_{c3} \ell_2 \cos (-q_3) + \right. \\
& + \left. \ell_{c3} \ell_1 \cos (-q_2 - q_3) + \ell_{c3} \ell_2 \cos (-q_3) + \ell_1 \ell_2 \cos (-q_2) \right] + J_2 + J_3, \\
= & m_2 \left[ \ell_{c2}^2 + \ell_{c2} \ell_1 \cos (q_2) \right] + m_3 \left[ \ell_{c3}^2 + \ell_2^2 + 2 \ell_{c3} \ell_2 \cos (q_3) + \right. \\
& + \left. \ell_{c3} \ell_1 \cos (q_2 + q_3) + \ell_1 \ell_2 \cos (q_2) \right] + J_2 + J_3, \tag{43}
\end{aligned}$$

El resultado en (43) coincide efectivamente con el calculado por *Robotica* (Sección B.2 del Anexo B).

## Capítulo 6. Matriz centrífuga y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de robots $\mathcal{PBD}$

En el presente capítulo se exponen las fórmulas propuestas para determinar los coeficientes o símbolos de Christoffel y, por consiguiente, obtener la matriz centrífuga y de Coriolis  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  de un robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad, que se muestra en la Figura 4.

Para robots de  $N$  grados de libertad, en el modelo dinámico ortodoxo de robots con accionamientos de par (2), aparece la matriz centrífuga y de Coriolis  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , una matriz cuadrada de dimensión  $N$  ( $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ) que, una vez conocida la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$ , puede obtenerse a través de los coeficientes o símbolos de Christoffel definidos como (Kelly et al., 2005):

$$c_{ijk}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{k,j}(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{k,i}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{i,j}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right], \quad (44)$$

para  $i, j, k = 1, \dots, N$ , donde  $M_{i,j}(\mathbf{q})$  denota el  $ij$ -ésimo elemento de la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$ . Tenga en cuenta que, para una  $k$  fija, se tiene  $c_{ijk} = c_{jik}$ , lo que reduce el esfuerzo involucrado en el cálculo de estos símbolos por un factor de aproximadamente la mitad (Spong y Vidyasagar, 1989).

En efecto, el  $kj$ -ésimo elemento  $C_{k,j}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  de la matriz  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  puede obtenerse de la siguiente forma:

$$C_{k,j}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} c_{1jk}(\mathbf{q}) \\ c_{2jk}(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ c_{Njk}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}^T \dot{\mathbf{q}}, \quad (45)$$

o equivalentemente el  $kj$ -ésimo componente de la matriz  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ :

$$C_{k,j}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^N \left[ \underbrace{\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial M_{k,j}(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{k,i}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{i,j}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right\}}_{c_{ijk}(\mathbf{q})} \right] \dot{q}_i, \quad \forall k, j \in 1, 2, \dots, N. \quad (46)$$

Para determinar los coeficientes o símbolos de Christoffel, se parte de las ecs. (38) y (39) presentadas en el Capítulo 5, las cuales permiten obtener explícitamente los  $N^2$  componentes de la matriz de inercia  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  para robots  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad. Se calculan sus derivadas parciales con respecto a una  $q_a$ , donde  $a = i, j, k$  correspondientes a  $c_{ijk}(\mathbf{q})$  de (44):

$$\frac{\partial M_{g,g}(\mathbf{q})}{\partial q_a} = \frac{\partial}{\partial q_a} \left( m_g \ell_{cg}^2 + \sum_{n=g+1}^N m_n \left[ \ell_{cn}^2 + \sum_{i=g}^{n-1} \left( \ell_i^2 + 2\ell_{cn}\ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \right) \right] \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{i=g; j=g \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \Big] + \sum_{n=g}^N J_n \Big), \\
& = \frac{\partial}{\partial q_a} \left( \sum_{n=g+1}^N m_n \left[ \sum_{i=g}^{n-1} 2\ell_{cn} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \sum_{\substack{i=g; j=g \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right] \right), \\
& = \sum_{n=g+1}^N m_n \left[ \sum_{i=g}^{n-1} -2\ell_{cn} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_a} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\substack{i=g; j=g \\ i \neq j}}^{n-1} -\ell_i \ell_j \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_a} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right], \\
& = - \sum_{n=g+1}^N m_n \left[ \sum_{i=g}^{n-1} 2\ell_{cn} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_a} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\substack{i=g; j=g \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_a} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right], \tag{47}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{g,h}(\mathbf{q})}{\partial q_a} & = \frac{\partial}{\partial q_a} \left( m_h \left[ \ell_{ch}^2 + \sum_{i=g}^{h-1} \ell_{ch} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^h q_k \right) \right] + \sum_{n=h+1}^N m_n \left[ \ell_{cn}^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{i=h}^{n-1} \left( \ell_i^2 + \ell_{cn} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \right) + \sum_{i=g}^{n-1} \ell_{cn} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{\substack{i=g; j=h \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right] + \sum_{n=h}^N J_n \right), \\
& = \frac{\partial}{\partial q_a} \left( m_h \sum_{i=g}^{h-1} \ell_{ch} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^h q_k \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=h+1}^N m_n \left[ \sum_{i=h}^{n-1} \ell_{cn} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \sum_{i=g}^{n-1} \ell_{cn} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{\substack{i=g; j=h \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right] \right), \\
& = m_h \sum_{i=g}^{h-1} -\ell_{ch} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^h q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_a} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^h q_k \right) + \\
& \quad + \sum_{n=h+1}^N m_n \left[ \sum_{i=h}^{n-1} -\ell_{cn} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_a} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=g}^{n-1} -\ell_{cn}\ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_a} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \\
& + \sum_{\substack{i=g; j=h \\ i \neq j}}^{n-1} -\ell_i\ell_j \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_a} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \Big], \\
& = -m_h \sum_{i=g}^{h-1} \ell_{ch}\ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^h q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_a} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^h q_k \right) - \\
& - \sum_{n=h+1}^N m_n \left[ \sum_{i=h}^{n-1} \ell_{cn}\ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_a} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \right. \\
& + \sum_{i=g}^{n-1} \ell_{cn}\ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_a} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \\
& \left. + \sum_{\substack{i=g; j=h \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i\ell_j \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_a} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right]. \tag{48}
\end{aligned}$$

### 6.1. Ejemplos

Empleando las fórmulas propuestas (47) y (48), se calcularán los símbolos de Christoffel para obtener el componente  $C_{1,2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  del robot  $PBD$  de  $N = 2$  grados de libertad, mostrado en la Figura 11 del Anexo A:

$$C_{1,2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} c_{121}(\mathbf{q}) & c_{221}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}},$$

donde

$$\begin{aligned}
c_{121}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{1,2}(\mathbf{q})}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{1,1}(\mathbf{q})}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{1,2}(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right], \\
c_{221}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{1,2}(\mathbf{q})}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{1,2}(\mathbf{q})}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{2,2}(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right].
\end{aligned}$$

Para el símbolo de Christoffel  $c_{121}(\mathbf{q})$ :

$$\begin{aligned}
c_{121}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \left[ \cancel{\frac{\partial M_{1,2}(\mathbf{q})}{\partial q_1}} + \frac{\partial M_{1,1}(\mathbf{q})}{\partial q_2} - \cancel{\frac{\partial M_{1,2}(\mathbf{q})}{\partial q_1}} \right], \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{1,1}(\mathbf{q})}{\partial q_2} \right],
\end{aligned}$$

utilizando (47) con  $N = 2$ ,  $g = 1$  y  $a = 2$ ,

$$\begin{aligned}
c_{121}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \left[ - \sum_{n=2}^2 m_n \left[ \sum_{i=1}^{n-1} 2\ell_{cn} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{\substack{i=1; j=1 \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right] \right], \\
&= \frac{1}{2} \left[ - m_2 \left[ \sum_{i=1}^1 2\ell_{c2} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{\substack{i=1; j=1 \\ i \neq j}}^1 \ell_i \ell_j \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right] \right], \\
&= -\frac{1}{2} m_2 \left[ \sum_{i=1}^1 2\ell_{c2} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) \right], \\
&= -\frac{1}{2} m_2 \left[ 2\ell_{c2} \ell_1 \sin (q_1 - (q_1 + q_2)) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} (q_1 - (q_1 + q_2)) \right], \\
&= -\frac{1}{2} m_2 \left[ 2\ell_{c2} \ell_1 \sin (-q_2) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} (-q_2) \right], \\
&= -\frac{1}{2} m_2 \left[ -2\ell_{c2} \ell_1 \sin (q_2) \cdot (-1) \right], \\
&= -m_2 \ell_{c2} \ell_1 \sin (q_2). \tag{49}
\end{aligned}$$

Para el símbolo de Christoffel  $c_{221}(\mathbf{q})$ :

$$\begin{aligned}
c_{221}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{1,2}(\mathbf{q})}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{1,2}(\mathbf{q})}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{2,2}(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right], \\
&= \frac{1}{2} \left[ 2 \frac{\partial M_{1,2}(\mathbf{q})}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{2,2}(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right], \tag{50}
\end{aligned}$$

utilizando (47) con  $N = 2$ ,  $g = 2$  y  $a = 1$  para  $\frac{\partial M_{2,2}(\mathbf{q})}{\partial q_1}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{2,2}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= - \sum_{n=3}^2 m_n \left[ \sum_{i=1}^{n-1} 2\ell_{cn} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{i=2; j=2 \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right], \\
&= 0, \tag{51}
\end{aligned}$$

y empleando (48) con  $N = 2$ ,  $g = 1$ ,  $h = 2$  y  $a = 2$  para  $\frac{\partial M_{1,2}(\mathbf{q})}{\partial q_2}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{1,2}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= -m_2 \sum_{i=1}^1 \ell_{c2} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) - \\
&\quad - \sum_{n=3}^2 m_n \left[ \sum_{i=2}^{n-1} \ell_{cn} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \right. \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \ell_{cn} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{i=1; j=2 \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right], \\
&= -m_2 \ell_{c2} \ell_1 \sin \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right), \\
&= -m_2 \ell_{c2} \ell_1 \sin (q_1 - (q_1 + q_2)) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} (q_1 - (q_1 + q_2)), \\
&= -m_2 \ell_{c2} \ell_1 \sin (-q_2) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} (-q_2), \\
&= m_2 \ell_{c2} \ell_1 \sin (q_2) \cdot (-1), \\
&= -m_2 \ell_{c2} \ell_1 \sin (q_2). \tag{52}
\end{aligned}$$

Sustituyendo (51) y (52) en (50):

$$\begin{aligned}
c_{221}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \left[ 2 (-m_2 \ell_{c2} \ell_1 \sin (q_2)) - (0) \right], \\
&= -m_2 \ell_{c2} \ell_1 \sin (q_2). \tag{53}
\end{aligned}$$

El componente  $C_{1,2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  resulta en:

$$\begin{aligned}
C_{1,2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} c_{121}(\mathbf{q}) & c_{221}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}, \\
&= \begin{bmatrix} -m_2 \ell_{c2} \ell_1 \sin (q_2) & -m_2 \ell_{c2} \ell_1 \sin (q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \\
&= -m_2 \ell_{c2} \ell_1 \sin (q_2) \dot{q}_1 - m_2 \ell_{c2} \ell_1 \sin (q_2) \dot{q}_2, \\
&= -m_2 \ell_{c2} \ell_1 \sin (q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]. \tag{54}
\end{aligned}$$

Comparando el componente  $C_{1,2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  generado por *Robotica* (en Sección A.2 del Anexo A) con la expresión (54), que a su vez proviene de las fórmulas (46), (47) y (48), puede observarse que son

iguales.

Ahora, se obtendrá el elemento  $C_{1,3}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  del robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 3$  grados de libertad (mostrado en la Figura 17), a partir del cálculo de los símbolos de Christoffel con las fórmulas (47) y (48):

$$C_{1,3}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} c_{131}(\mathbf{q}) & c_{231}(\mathbf{q}) & c_{331}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}},$$

donde

$$\begin{aligned} c_{131}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{1,3}(\mathbf{q})}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{1,1}(\mathbf{q})}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{1,3}(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right], \\ c_{231}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{1,3}(\mathbf{q})}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{1,2}(\mathbf{q})}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{2,3}(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right], \\ c_{331}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{1,3}(\mathbf{q})}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{1,3}(\mathbf{q})}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{3,3}(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right]. \end{aligned}$$

Para el símbolo de Christoffel  $c_{131}(\mathbf{q})$ :

$$\begin{aligned} c_{131}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{1,3}(\mathbf{q})}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{1,1}(\mathbf{q})}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{1,3}(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right], \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{1,1}(\mathbf{q})}{\partial q_3} \right], \end{aligned}$$

utilizando (47) con  $N = 3$ ,  $g = 1$  y  $a = 3$ ,

$$\begin{aligned} c_{131}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \left[ - \sum_{n=2}^3 m_n \left[ \sum_{i=1}^{n-1} 2\ell_{cn} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\substack{i=1; j=1 \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right] \right], \\ &= \frac{1}{2} \left[ - m_2 \left[ \sum_{i=1}^1 2\ell_{c2} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\substack{i=1; j=1 \\ i \neq j}}^1 \ell_i \ell_j \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - m_3 \left[ \sum_{i=1}^2 2\ell_{c3} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\substack{i=1; j=1 \\ i \neq j}}^2 \ell_i \ell_j \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right] \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[ -m_2 \left[ 2\ell_{c_2}\ell_1 \sin \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) \right] - \right. \\
&\quad - m_3 \left[ 2\ell_{c_3}\ell_1 \sin \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) + \right. \\
&\quad + 2\ell_{c_3}\ell_2 \sin \left( \sum_{k=1}^2 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^2 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) + \\
&\quad + \ell_1\ell_2 \sin \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) + \\
&\quad \left. \left. + \ell_2\ell_1 \sin \left( \sum_{k=1}^2 q_k - \sum_{k=1}^1 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^2 q_k - \sum_{k=1}^1 q_k \right) \right] \right], \\
&= \frac{1}{2} \left[ -m_2 \left[ 2\ell_{c_2}\ell_1 \sin (q_1 - (q_1 + q_2)) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (q_1 - (q_1 + q_2)) \right] - \right. \\
&\quad - m_3 \left[ 2\ell_{c_3}\ell_1 \sin (q_1 - (q_1 + q_2 + q_3)) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (q_1 - (q_1 + q_2 + q_3)) + \right. \\
&\quad + 2\ell_{c_3}\ell_2 \sin (q_1 + q_2 - (q_1 + q_2 + q_3)) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (q_1 + q_2 - (q_1 + q_2 + q_3)) + \\
&\quad + \ell_1\ell_2 \sin (q_1 - (q_1 + q_2)) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (q_1 - (q_1 + q_2)) + \\
&\quad \left. \left. + \ell_2\ell_1 \sin (q_1 + q_2 - (q_1)) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (q_1 + q_2 - (q_1)) \right] \right], \\
&= \frac{1}{2} \left[ -m_2 \left[ 2\ell_{c_2}\ell_1 \sin (-q_2) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (-q_2) \right] - m_3 \left[ 2\ell_{c_3}\ell_1 \sin (-q_2 - q_3) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (-q_2 - q_3) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\ell_{c_3}\ell_2 \sin (-q_3) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (-q_3) + \ell_1\ell_2 \sin (-q_2) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (-q_2) + \ell_2\ell_1 \sin (q_2) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (q_2) \right] \right], \\
&= \frac{1}{2} \left[ -m_2 \left[ \cancel{-2\ell_{c_2}\ell_1 \sin (q_2) \cdot (0)} \right] - m_3 \left[ -2\ell_{c_3}\ell_1 \sin (q_2 + q_3) \cdot (-1) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cancel{-2\ell_{c_3}\ell_2 \sin (q_3) \cdot (-1) - \ell_1\ell_2 \sin (q_2) \cdot (0) + \ell_2\ell_1 \sin (q_2) \cdot (0)} \right] \right], \\
&= -\frac{1}{2} m_3 \left[ 2\ell_{c_3}\ell_1 \sin (q_2 + q_3) + 2\ell_{c_3}\ell_2 \sin (q_3) \right], \\
&= -m_3\ell_{c_3}\ell_1 \sin (q_2 + q_3) - m_3\ell_{c_3}\ell_2 \sin (q_3). \tag{55}
\end{aligned}$$

Para el símbolo de Christoffel  $c_{231}(\mathbf{q})$ :

utilizando (48) con  $N = 3$ ,  $g = 1$ ,  $h = 3$  y  $a = 2$  para  $\frac{\partial M_{1,3}(\mathbf{q})}{\partial q_2}$ ,

$$\frac{\partial M_{1,3}(\mathbf{q})}{\partial q_2} = -m_3 \sum_{i=1}^2 \ell_{c_3}\ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=4}^3 m_n \left[ \sum_{i=3}^{n-1} \ell_{cn} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \right. \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} \ell_{cn} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \\
& \left. + \sum_{\substack{i=1; j=3 \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right], \\
& = -m_3 \left[ \ell_{c3} \ell_1 \sin \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) + \right. \\
& \quad \left. + \ell_{c3} \ell_2 \sin \left( \sum_{k=1}^2 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \sum_{k=1}^2 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \right], \\
& = -m_3 \left[ \ell_{c3} \ell_1 \sin (q_1 - (q_1 + q_2 + q_3)) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} (q_1 - (q_1 + q_2 + q_3)) + \right. \\
& \quad \left. + \ell_{c3} \ell_2 \sin (q_1 + q_2 - (q_1 + q_2 + q_3)) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} (q_1 + q_2 - (q_1 + q_2 + q_3)) \right], \\
& = -m_3 \left[ \ell_{c3} \ell_1 \sin (-q_2 - q_3) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} (-q_2 - q_3) + \ell_{c3} \ell_2 \sin (-q_3) \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} (-q_3) \right], \\
& = -m_3 \left[ -\ell_{c3} \ell_1 \sin (q_2 + q_3) \cdot (-1) - \ell_{c3} \ell_2 \sin (q_3) \cdot (0) \right], \\
& = -m_3 \ell_{c3} \ell_1 \sin (q_2 + q_3), \tag{56}
\end{aligned}$$

ahora con  $N = 3$ ,  $g = 1$ ,  $h = 2$  y  $a = 3$  para  $\frac{\partial M_{1,2}(\mathbf{q})}{\partial q_3}$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{1,2}(\mathbf{q})}{\partial q_3} & = -m_2 \sum_{i=1}^1 \ell_{c2} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) - \\
& - \sum_{n=3}^3 m_n \left[ \sum_{i=2}^{n-1} \ell_{cn} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \right. \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} \ell_{cn} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \\
& \left. + \sum_{\substack{i=1; j=2 \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right], \\
& = -m_2 \ell_{c2} \ell_1 \sin \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) - \\
& - m_3 \left[ \sum_{i=2}^2 \ell_{c3} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^2 \ell_{c3} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) + \\
& + \sum_{\substack{i=1; j=2 \\ i \neq j}}^2 \ell_i \ell_j \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \Big], \\
& = -m_2 \ell_{c2} \ell_1 \sin(q_1 - (q_1 + q_2)) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (q_1 - (q_1 + q_2)) - \\
& - m_3 \left[ \ell_{c3} \ell_2 \sin \left( \sum_{k=1}^2 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^2 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) + \right. \\
& + \ell_{c3} \ell_1 \sin \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) + \\
& + \ell_{c3} \ell_2 \sin \left( \sum_{k=1}^2 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^2 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) + \\
& \left. + \ell_1 \ell_2 \sin \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^2 q_k \right) \right], \\
& = -m_2 \ell_{c2} \ell_1 \sin(-q_2) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (-q_2) - \\
& - m_3 \left[ \ell_{c3} \ell_2 \sin(q_1 + q_2 - (q_1 + q_2 + q_3)) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (q_1 + q_2 - (q_1 + q_2 + q_3)) + \right. \\
& + \ell_{c3} \ell_1 \sin(q_1 - (q_1 + q_2 + q_3)) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (q_1 - (q_1 + q_2 + q_3)) + \\
& + \ell_{c3} \ell_2 \sin(q_1 + q_2 - (q_1 + q_2 + q_3)) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (q_1 + q_2 - (q_1 + q_2 + q_3)) + \\
& \left. + \ell_1 \ell_2 \sin(q_1 - (q_1 + q_2)) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (q_1 - (q_1 + q_2)) \right], \\
& = \cancel{m_2 \ell_{c2} \ell_1 \sin(q_2) \cdot (0)} - m_3 \left[ \ell_{c3} \ell_2 \sin(-q_3) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (-q_3) + \right. \\
& + \ell_{c3} \ell_1 \sin(-q_2 - q_3) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (-q_2 - q_3) + \ell_{c3} \ell_2 \sin(-q_3) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (-q_3) + \\
& \left. + \ell_1 \ell_2 \sin(-q_2) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (-q_2) \right], \\
& = -m_3 \left[ -\ell_{c3} \ell_2 \sin(q_3) \cdot (-1) - \ell_{c3} \ell_1 \sin(q_2 + q_3) \cdot (-1) - \ell_{c3} \ell_2 \sin(q_3) \cdot (-1) + \right. \\
& \left. - \ell_1 \ell_2 \sin(q_2) \cdot (0) \right], \\
& = -m_3 \left[ \ell_{c3} \ell_2 \sin(q_3) + \ell_{c3} \ell_1 \sin(q_2 + q_3) + \ell_{c3} \ell_2 \sin(q_3) \right], \\
& = -2m_3 \ell_{c3} \ell_2 \sin(q_3) - m_3 \ell_{c3} \ell_1 \sin(q_2 + q_3), \tag{57}
\end{aligned}$$

y con  $N = 3$ ,  $g = 2$ ,  $h = 3$  y  $a = 1$  para  $\frac{\partial M_{2,3}(\mathbf{q})}{\partial q_1}$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{2,3}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= -m_3 \sum_{i=2}^2 \ell_{c3} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) - \\
&\quad - \sum_{n=4}^3 m_n \left[ \sum_{i=3}^{n-1} \ell_{cn} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \right. \\
&\quad + \sum_{i=2}^{n-1} \ell_{cn} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{i=2; j=3 \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right], \\
&= -m_3 \ell_{c3} \ell_2 \sin \left( \sum_{k=1}^2 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \sum_{k=1}^2 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right), \\
&= -m_3 \ell_{c3} \ell_2 \sin (q_1 + q_2 - (q_1 + q_2 + q_3)) \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} (q_1 + q_2 - (q_1 + q_2 + q_3)), \\
&= -m_3 \ell_{c3} \ell_2 \sin (-q_3) \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} (-q_3), \\
&= \cancel{m_3 \ell_{c3} \ell_2 \sin (q_3) \cdot (0)}, \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{58}$$

Sustituyendo (56), (57) y (58) en (55):

$$\begin{aligned}
c_{231}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \left[ (-m_3 \ell_{c3} \ell_1 \sin (q_2 + q_3)) + (-2m_3 \ell_{c3} \ell_2 \sin (q_3) - m_3 \ell_{c3} \ell_1 \sin (q_2 + q_3)) - (0) \right], \\
&= -m_3 \ell_{c3} \ell_1 \sin (q_2 + q_3) - m_3 \ell_{c3} \ell_2 \sin (q_3).
\end{aligned} \tag{59}$$

Para el símbolo de Christoffel  $c_{331}(\mathbf{q})$ :

$$\begin{aligned}
c_{331}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{1,3}(\mathbf{q})}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{1,3}(\mathbf{q})}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{3,3}(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right], \\
&= \frac{1}{2} \left[ 2 \frac{\partial M_{1,3}(\mathbf{q})}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{3,3}(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right],
\end{aligned} \tag{60}$$

utilizando (47) con  $N = 3$ ,  $g = 3$  y  $a = 1$  para  $\frac{\partial M_{3,3}(\mathbf{q})}{\partial q_1}$ :

$$\frac{\partial M_{3,3}(\mathbf{q})}{\partial q_1} = - \sum_{n=4}^3 m_n \left[ \sum_{i=3}^{n-1} 2 \ell_{cn} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{i=3; j=3 \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \Bigg], \\
& = 0,
\end{aligned} \tag{61}$$

y empleando (48) con  $N = 3$ ,  $g = 1$ ,  $h = 3$  y  $a = 3$  para  $\frac{\partial M_{1,3}(\mathbf{q})}{\partial q_3}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{1,3}(\mathbf{q})}{\partial q_3} &= -m_3 \sum_{i=1}^2 \ell_{c3} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) - \\
& \quad - \sum_{n=4}^3 m_n \left[ \sum_{i=3}^{n-1} \ell_{cn} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \right. \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n-1} \ell_{cn} \ell_i \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \\
& \quad \left. + \sum_{\substack{i=1; j=3 \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \sin \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right], \\
&= -m_3 \left[ \ell_{c3} \ell_1 \sin \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^1 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) + \right. \\
& \quad \left. + \ell_{c3} \ell_2 \sin \left( \sum_{k=1}^2 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \sum_{k=1}^2 q_k - \sum_{k=1}^3 q_k \right) \right], \\
&= -m_3 \left[ \ell_{c3} \ell_1 \sin(-q_2 - q_3) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (-q_2 - q_3) + \ell_{c3} \ell_2 \sin(-q_3) \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (-q_3) \right], \\
&= -m_3 \left[ -\ell_{c3} \ell_1 \sin(q_2 + q_3) \cdot (-1) - \ell_{c3} \ell_2 \sin(q_3) \cdot (-1) \right], \\
&= -m_3 \left[ \ell_{c3} \ell_1 \sin(q_2 + q_3) + \ell_{c3} \ell_2 \sin(q_3) \right], \\
&= -m_3 \ell_{c3} \ell_1 \sin(q_2 + q_3) - m_3 \ell_{c3} \ell_2 \sin(q_3).
\end{aligned} \tag{62}$$

Sustituyendo (61) y (62) en (60):

$$\begin{aligned}
c_{331}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \left[ 2 \left( -m_3 \ell_{c3} \ell_1 \sin(q_2 + q_3) - m_3 \ell_{c3} \ell_2 \sin(q_3) \right) - (0) \right], \\
&= -m_3 \ell_{c3} \ell_1 \sin(q_2 + q_3) - m_3 \ell_{c3} \ell_2 \sin(q_3).
\end{aligned} \tag{63}$$

El componente  $C_{13}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  resulta en:

$$\begin{aligned}
C_{1,3}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} c_{131}(\mathbf{q}) & c_{231}(\mathbf{q}) & c_{331}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}, \\
&= \begin{bmatrix} c_{131}(\mathbf{q}) & c_{231}(\mathbf{q}) & c_{331}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}, \\
&= \left[ -m_3 \ell_1 \ell_{c3} \sin(q_2 + q_3) - m_3 \ell_2 \ell_{c3} \sin(q_3) \right] \dot{q}_1 + \\
&\quad + \left[ -m_3 \ell_1 \ell_{c3} \sin(q_2 + q_3) - m_3 \ell_2 \ell_{c3} \sin(q_3) \right] \dot{q}_2 + \\
&\quad + \left[ -m_3 \ell_1 \ell_{c3} \sin(q_2 + q_3) - m_3 \ell_2 \ell_{c3} \sin(q_3) \right] \dot{q}_3, \\
&= \left[ -m_3 \ell_1 \ell_{c3} \sin(q_2 + q_3) - m_3 \ell_2 \ell_{c3} \sin(q_3) \right] [\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3]. \tag{64}
\end{aligned}$$

Comparando el componente  $C_{1,3}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  de *Robotica* (Sección B.2 del Anexo B) con la expresión (64), que a su vez proviene de las fórmulas (46), (47) y (48), puede observarse que son iguales.

Otra manera de obtener los  $N^2$  componentes  $C_{i,j}$  de la matriz centrífuga y de Coriolis es a través de las siguientes fórmulas reportadas por Nof (1999):

$$C_{i,j}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^n h_{ijk} \dot{q}_k \quad i, j = 1, 2, \dots, n \tag{65}$$

donde

$$h_{ijk}(\mathbf{q}) = \frac{\partial M_{i,j}(\mathbf{q})}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{j,k}(\mathbf{q})}{\partial q_i}, \tag{66}$$

A manera de ejemplo, los 4 componentes de la matriz centrífuga y de Coriolis, para un robot *PBD* de  $N = 2$  grados de libertad, obtenidos mediante (65) y (66) son:

$$C_{1,1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^2 h_{11k} \dot{q}_k = h_{111} \dot{q}_1 + h_{112} \dot{q}_2,$$

donde

$$\begin{aligned}
h_{111}(\mathbf{q}) &= \frac{\partial M_{1,1}(\mathbf{q})}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{1,1}(\mathbf{q})}{\partial q_1} = 0, \\
h_{112}(\mathbf{q}) &= \frac{\partial M_{1,1}(\mathbf{q})}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{1,2}(\mathbf{q})}{\partial q_1} = -2m_2 \ell_1 \ell_{c2} \sin(q_2).
\end{aligned}$$

$$C_{1,2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^2 h_{12k} \dot{q}_k = h_{121} \dot{q}_1 + h_{122} \dot{q}_2,$$

donde

$$h_{121}(\mathbf{q}) = \frac{\partial M_{1,2}(\mathbf{q})}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{2,1}(\mathbf{q})}{\partial q_1} = 0.$$

$$h_{122}(\mathbf{q}) = \frac{\partial M_{1,2}(\mathbf{q})}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{2,2}(\mathbf{q})}{\partial q_1} = -m_2 \ell_1 \ell_{c2} \sin(q_2).$$

$$C_{2,1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^2 h_{21k} \dot{q}_k = h_{211} \dot{q}_1 + h_{212} \dot{q}_2,$$

donde

$$h_{211}(\mathbf{q}) = \frac{\partial M_{2,1}(\mathbf{q})}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{1,1}(\mathbf{q})}{\partial q_2} = m_2 \ell_1 \ell_{c2} \sin(q_2).$$

$$h_{212}(\mathbf{q}) = \frac{\partial M_{2,1}(\mathbf{q})}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{1,2}(\mathbf{q})}{\partial q_2} = -\frac{1}{2} m_2 \ell_1 \ell_{c2} \sin(q_2).$$

$$C_{2,2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^2 h_{22k} \dot{q}_k = h_{221} \dot{q}_1 + h_{222} \dot{q}_2,$$

donde

$$h_{221}(\mathbf{q}) = \frac{\partial M_{2,2}(\mathbf{q})}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{2,1}(\mathbf{q})}{\partial q_2} = \frac{1}{2} m_2 \ell_1 \ell_{c2} \sin(q_2).$$

$$h_{222}(\mathbf{q}) = \frac{\partial M_{2,2}(\mathbf{q})}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{2,2}(\mathbf{q})}{\partial q_2} = 0.$$

Por lo tanto, en resumen los 4 componentes de la matriz  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  son:

$$\begin{aligned} C_{1,1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -2m_2 \ell_1 \ell_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ C_{1,2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2 \ell_1 \ell_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ C_{2,1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= m_2 \ell_1 \ell_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 - \frac{1}{2} m_2 \ell_1 \ell_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ C_{2,2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} m_2 \ell_1 \ell_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \end{aligned} \tag{67}$$

Los 4 componentes de esta matriz centrífuga y de Coriolis (67), obtenida mediante (65), difiere de la obtenida mediante (46) que se muestran en las ecuaciones (89) del Anexo A, pero ambas matrices ¡son igualmente válidas!, sin embargo en esta investigación se privilegia la obtenida con (46). Cabe mencionar que la obtenida mediante (65) y (66) ¡no cumple con la propiedad de antisimetría!

## Capítulo 7. Vector de pares gravitacionales $g(\mathbf{q})$ de robots $\mathcal{PBD}$

En este capítulo se presenta una fórmula inédita para obtener el vector de pares gravitacionales  $g(\mathbf{q})$  de un robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad, como el que se muestra en la Figura 4.

En el modelo dinámico ortodoxo de robots con accionamientos de par, también aparece el vector de pares gravitacionales  $g(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^N$  que se obtiene como el gradiente de la energía potencial (Kelly et al., 2005):

$$g(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \quad (68)$$

De este modo se tiene el  $n$ -ésimo componente del vector  $g(\mathbf{q})$  como:

$$g_n(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial q_n}, \quad (69)$$

y gracias a (18) junto con (21) se puede explicitar mediante:

$$\begin{aligned} g_n(\mathbf{q}) &= \frac{\partial}{\partial q_n} \left( \sum_{k=1}^N -m_k g \left[ \ell_{ck} \cos \left( \sum_{j=1}^k q_j \right) + \sum_{i=1}^{k-1} \ell_i \cos \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right] \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial q_n} \left( \sum_{k=1}^{n-1} -m_k g \left[ \ell_{ck} \cos \left( \sum_{j=1}^k q_j \right) + \sum_{i=1}^{k-1} \ell_i \cos \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right] \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial q_n} \left( \sum_{k=n}^N -m_k g \left[ \ell_{ck} \cos \left( \sum_{j=1}^k q_j \right) + \sum_{i=n}^{k-1} \ell_i \cos \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right] \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial q_n} \left( \sum_{k=n}^N -m_k g \left[ \ell_{ck} \cos \left( \sum_{j=1}^k q_j \right) + \sum_{i=n}^{k-1} \ell_i \cos \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right] \right), \\ g_n(\mathbf{q}) &= \sum_{k=n}^N m_k g \left[ \ell_{ck} \sin \left( \sum_{j=1}^k q_j \right) + \sum_{i=n}^{k-1} \ell_i \sin \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right], \end{aligned} \quad (70)$$

siendo válido para  $n = 1, 2, \dots, N$ .

### 7.1. Ejemplos

Ahora aplicando la fórmula (70) se obtienen los siguientes 2 componentes del vector de pares gravitacionales  $g(\mathbf{q})$  de un robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  grados de libertad:

$$g_1(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^2 m_k g \left[ \ell_{ck} \sin \left( \sum_{j=1}^k q_j \right) + \sum_{i=1}^{k-1} \ell_i \sin \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
&= m_1 g \left[ \ell_{c1} \sin \left( \sum_{j=1}^1 q_j \right) + \sum_{i=1}^0 \ell_i \sin \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right] + \\
&\quad + m_2 g \left[ \ell_{c2} \sin \left( \sum_{j=1}^2 q_j \right) + \sum_{i=1}^1 \ell_i \sin \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right], \\
&= m_1 g \left[ \ell_{c1} \sin (q_1) \right] + m_2 g \left[ \ell_{c2} \sin (q_1 + q_2) + \ell_1 \sin (q_1) \right], \\
&= \left[ m_1 \ell_{c1} + m_2 \ell_1 \right] g \sin (q_1) + m_2 \ell_{c2} g \sin (q_1 + q_2), \tag{71}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
g_2(\mathbf{q}) &= \sum_{k=2}^2 m_k g \left[ \ell_{ck} \sin \left( \sum_{j=1}^k q_j \right) + \sum_{i=2}^{k-1} \ell_i \sin \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right], \\
&= m_2 g \left[ \ell_{c2} \sin \left( \sum_{j=1}^2 q_j \right) + \sum_{i=2}^1 \ell_i \sin \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right], \\
&= m_2 g \left[ \ell_{c2} \sin (q_1 + q_2) \right], \\
&= m_2 \ell_{c2} g \sin (q_1 + q_2). \tag{72}
\end{aligned}$$

Ambos coinciden con los generados por el paquete computacional *Robotica* (Sección A.2 del Anexo A).

Como aplicación de la formula (70), se obtienen los componentes del vector de pares gravitacionales  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ , ahora de un robot *PBD* de  $N = 3$  grados de libertad:

$$\begin{aligned}
\bullet \quad g_1(\mathbf{q}) &= \sum_{k=1}^3 m_k g \left[ \ell_{ck} \sin \left( \sum_{j=1}^k q_j \right) + \sum_{i=1}^{k-1} \ell_i \sin \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right], \\
&= m_1 g \left[ \ell_{c1} \sin \left( \sum_{j=1}^1 q_j \right) + \sum_{i=1}^0 \ell_i \sin \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right] + \\
&\quad + m_2 g \left[ \ell_{c2} \sin \left( \sum_{j=1}^2 q_j \right) + \sum_{i=1}^1 \ell_i \sin \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right] + \\
&\quad + m_3 g \left[ \ell_{c3} \sin \left( \sum_{j=1}^3 q_j \right) + \sum_{i=1}^2 \ell_i \sin \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right], \\
&= m_1 g \left[ \ell_{c1} \sin (q_1) \right] + m_2 g \left[ \ell_{c2} \sin (q_1 + q_2) + \ell_1 \sin (q_1) \right] + m_3 g \left[ \ell_{c3} \sin (q_1 + q_2 + q_3) + \right. \\
&\quad \left. + \ell_1 \sin (q_1) + \ell_2 \sin (q_1 + q_2) \right], \\
&= \left[ m_1 \ell_{c1} + m_2 \ell_1 + m_3 \ell_1 \right] g \sin (q_1) + \left[ m_2 \ell_{c2} + m_3 \ell_2 \right] g \sin (q_1 + q_2) + \\
&\quad + m_3 \ell_{c3} g \sin (q_1 + q_2 + q_3). \tag{73}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet g_2(\mathbf{q}) &= \sum_{k=2}^3 m_k g \left[ \ell_{ck} \sin \left( \sum_{j=1}^k q_j \right) + \sum_{i=2}^{k-1} \ell_i \sin \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right], \\
&= m_2 g \left[ \ell_{c2} \sin \left( \sum_{j=1}^2 q_j \right) + \sum_{i=2}^1 \ell_i \sin \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right] + \\
&\quad + m_3 g \left[ \ell_{c3} \sin \left( \sum_{j=1}^3 q_j \right) + \sum_{i=2}^2 \ell_i \sin \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right], \\
&= m_2 g \left[ \ell_{c2} \sin (q_1 + q_2) \right] + m_3 g \left[ \ell_{c3} \sin (q_1 + q_2 + q_3) + \ell_2 \sin (q_1 + q_2) \right], \\
&= \left[ m_2 \ell_{c2} + m_3 \ell_2 \right] g \sin (q_1 + q_2) + m_3 \ell_{c3} g \sin (q_1 + q_2 + q_3), \tag{74}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\bullet g_3(\mathbf{q}) &= \sum_{k=3}^3 m_k g \left[ \ell_{ck} \sin \left( \sum_{j=1}^k q_j \right) + \sum_{i=3}^{k-1} \ell_i \sin \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right], \\
&= m_3 g \left[ \ell_{c3} \sin \left( \sum_{j=1}^3 q_j \right) + \sum_{i=3}^2 \ell_i \sin \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right], \\
&= m_3 g \left[ \ell_{c3} \sin (q_1 + q_2 + q_3) \right], \\
&= m_3 \ell_{c3} g \sin (q_1 + q_2 + q_3). \tag{75}
\end{aligned}$$

Se ha de decir que las tres expresiones (73), (74) y (75) obtenidas con la fórmula propuesta (70) coinciden también con las calculadas mediante el paquete computacional *Robotica* (ver Figura 20 en la página 65 de la Sección B.2 del Anexo B).

Debido a que el vector de pares gravitacionales obtenido con la expresión propuesta es igual al vector de pares gravitacionales entregado por *Robotica*, también se concluye que las funciones de energía potencial total calculadas para los robots  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  y  $N = 3$  grados de libertad en el Capítulo 4 (ecs. (24) y (28)), obtenidas mediante la ec. (18), son correctas.

## Capítulo 8. Propiedades de acotamiento

---

El presente capítulo comprende un análisis para determinar las propiedades de acotamiento de los componentes  $M$ ,  $C$  y  $g$  del modelo dinámico de robots  $PBD$  de  $N$  grados de libertad.

### 8.1. Función de energía potencial

La ecuación (18) asociada a la contribución del  $n$ -ésimo eslabón a la energía potencial puede ser acotada por arriba mediante:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_n(\mathbf{q}) &\leq |\mathcal{U}_n(\mathbf{q})|, \\
 &= \left| -m_n g \left[ \ell_{cn} \cos \left( \sum_{j=1}^n q_j \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \ell_i \cos \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right] \right|, \\
 &\leq m_n g \left[ \left| \ell_{cn} \cos \left( \sum_{j=1}^n q_j \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \ell_i \cos \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right| \right], \\
 &\leq m_n g \left[ \left| \ell_{cn} \cos \left( \sum_{j=1}^n q_j \right) \right| + \left| \sum_{i=1}^{n-1} \ell_i \cos \left( \sum_{j=1}^i q_j \right) \right| \right], \\
 &\leq k_{\mathcal{U}_n},
 \end{aligned}$$

donde  $k_{\mathcal{U}_n}$  se define como:

$$k_{\mathcal{U}_n} \triangleq m_n g \left[ \ell_{cn} + \sum_{i=1}^{n-1} \ell_i \right]. \quad (76)$$

La función de energía potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$  en (21), de robots  $PBD$  resulta ser una función acotada ya que existe una constante finita  $k_{\mathcal{U}}$  tal que:

$$|\mathcal{U}(\mathbf{q})| \leq k_{\mathcal{U}} < \infty \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^N, \quad (77)$$

donde la cota máxima se calcula mediante:

$$k_{\mathcal{U}} \triangleq \sum_{i=1}^N k_{\mathcal{U}_i}. \quad (78)$$

## 8.2. Matriz de inercia

Las fórmulas (38) y (39) correspondientes a los componentes de la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  están formadas mediante la suma de constantes y funciones tipo coseno de posiciones articulares, las cuales son acotadas. Por ese motivo, una propiedad notable que puede obtenerse de dichas fórmulas, sobre los  $N^2$  componentes  $M_{i,j}$  (con  $i, j = 1, \dots, N$ ) de la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  de robots  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad, es que todos los componentes de  $M(\mathbf{q})$  son acotados en el sentido de que existen constantes finitas  $k_{i,j}$  tales que cumple con la siguiente propiedad:

### Propiedad 1.

$$|M_{i,j}(\mathbf{q})| \leq k_{i,j} < \infty \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^N. \quad (79)$$

□

Por lo tanto, la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  de robots  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad, obtenida con las expresiones (38) y (39), tiene la valiosa propiedad de ser una matriz acotada.

Las fórmulas (38) y (39) pueden ser acotadas explícitamente por arriba. Para el caso de  $M_{g,g}(\mathbf{q})$ :

$$\begin{aligned} M_{g,g}(\mathbf{q}) &\leq \left| M_{g,g}(\mathbf{q}) \right|, \\ &= \left| m_g \ell_{cg}^2 + \sum_{n=g+1}^N m_n \left[ \ell_{cn}^2 + \sum_{i=g}^{n-1} \left( \ell_i^2 + 2\ell_{cn}\ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\substack{i=g; j=g \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \right] + \sum_{n=g}^N J_n \right|, \\ &\leq m_g \ell_{cg}^2 + \sum_{n=g+1}^N m_n \left[ \ell_{cn}^2 + \sum_{i=g}^{n-1} (\ell_i^2 + 2\ell_{cn}\ell_i) + \sum_{\substack{i=g; j=g \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \right] + \sum_{n=g}^N J_n, \end{aligned} \quad (80)$$

y para  $M_{g,h}(\mathbf{q})$ :

$$\begin{aligned} M_{g,h}(\mathbf{q}) &\leq \left| M_{g,h}(\mathbf{q}) \right|, \\ &= \left| m_h \left[ \ell_{ch}^2 + \sum_{i=g}^{h-1} \ell_{ch}\ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^h q_k \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=h+1}^N m_n \left[ \ell_{cn}^2 + \sum_{i=h}^{n-1} \left( \ell_i^2 + \ell_{cn}\ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) \right) \right] \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=g}^{n-1} \ell_{cn} \ell_i \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) + \sum_{\substack{i=g; j=h \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \cos \left( \sum_{k=1}^i q_k - \sum_{k=1}^j q_k \right) \Big] + \sum_{n=h}^N J_n \Big|, \\
& \leq m_h \left[ \ell_{ch}^2 + \sum_{i=g}^{h-1} \ell_{ch} \ell_i \right] + \sum_{n=h+1}^N m_n \left[ \ell_{cn}^2 + \sum_{i=h}^{n-1} (\ell_i^2 + \ell_{cn} \ell_i) + \sum_{i=g}^{n-1} \ell_{cn} \ell_i + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\substack{i=g; j=h \\ i \neq j}}^{n-1} \ell_i \ell_j \right] + \sum_{n=h}^N J_n. \tag{81}
\end{aligned}$$

### 8.3. Matriz centrífuga y de Coriolis

De las derivadas parciales en (47) y (48) se tiene que ellas son acotadas por lo que se puede concluir que también lo son todos los símbolos de Christoffel (44) para cualquier robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad. Además si en (46),  $|\dot{q}_i|$  son acotados para  $i = 1, \dots, N$ , entonces: se concluye que los  $N^2$  componentes de su matriz centrífuga y de Coriolis  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  son acotados, siempre que el vector  $\dot{\mathbf{q}}$  sea acotado, llegándose a la importante propiedad de que, en esa condición, ésta es una matriz acotada. En resumen, se ha demostrado que para  $i, j, k = 1, \dots, N$  se cumple la siguiente propiedad:

#### Propiedad 2.

$$|\dot{q}_k| < \infty \quad \forall k \in [1, \dots, N] \quad \Rightarrow \quad |C_{i,j}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})| < \infty, \tag{82}$$

para todo  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$ .

Esta propiedad 2 implica que si el vector de velocidades articulares  $\dot{\mathbf{q}}$  es acotado entonces la matriz centrífuga y de Coriolis  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  será una matriz acotada independientemente de que lo sean las posiciones articulares  $\mathbf{q}$ .

□

### 8.4. Vector de pares gravitacionales

En razón de que (70) se compone de la suma de funciones senoidales (que son acotadas), entonces se tiene que existe una constante finita  $k_{g_n}$  tal que:

$$|g_n(\mathbf{q})| \leq k_{g_n} < \infty \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^N. \tag{83}$$

Por lo tanto, para robots  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad, se tiene la importante propiedad de que el vector de pares gravitacionales  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  es acotado. Esta es una propiedad ya establecida de los robots con articulaciones rotacionales que por esta razón también satisfacen los robots  $\mathcal{PBD}$  estudiados en esta investigación.

## 8.5. Ejemplos

Considerando el robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  grados de libertad, como el que se muestra en la Figura 11.

La función de energía potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$  de un robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$ , en (24), obtenida con la fórmula propuesta (18), es una función acotada ya que existe una constante finita  $k_{\mathcal{U}}$  tal que cumple con la desigualdad (77). Para visualizar la cota máxima  $k_{\mathcal{U}_n}$  (76) del robot, se tomará como caso de estudio el robot *Pelican* con los parámetros numéricos reportados en (Kelly et al., 2005). Para el primer eslabón  $n = 1$ ,

$$|\mathcal{U}_1(\mathbf{q})| \leq k_{\mathcal{U}_1}, \quad (84)$$

donde, de acuerdo con (76), se tiene:

$$k_{\mathcal{U}_1} = m_1 g l_{c1} = 6.289.$$

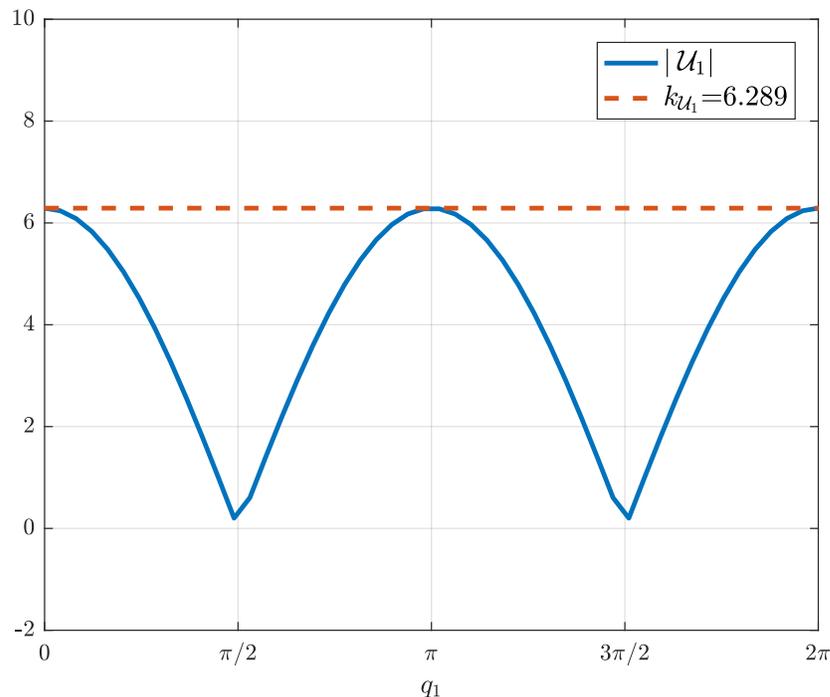
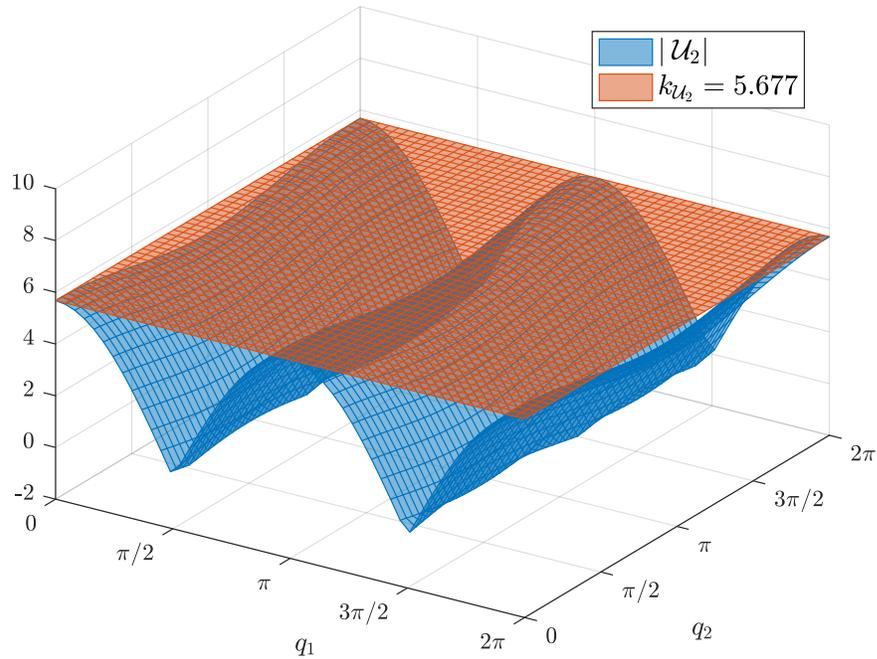


Figura 9. Cota máxima  $k_{\mathcal{U}_1}$  para  $|\mathcal{U}_1(\mathbf{q})|$  del robot *Pelican*.



**Figura 10.** Cota máxima  $k_{u_2}$  para  $|u_2(\mathbf{q})|$  del robot *Pelican*.

Para el segundo eslabón  $n = 2$ ,

$$|u_2(\mathbf{q})| \leq k_{u_2}, \quad (85)$$

donde, de acuerdo con (76), se tiene:

$$k_{u_2} = m_2 g [\ell_{c2} + \ell_1] = 5.677.$$

En las Figuras 9 y 10 se muestra la comparación entre  $|u_n(\mathbf{q})|$  y  $k_{u_n}$  para  $n = 1, 2$ . La matriz de inercia para un robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  grados de libertad se presenta en la Sección A.2 del Anexo A. Puesto que los 4 componentes  $M_{i,j}$  (con  $i, j = 1, 2$ ) de esta matriz se forman mediante la suma de **constantes y funciones acotadas tipo coseno de posiciones articulares**, éstos son acotados en el sentido de que existen constantes finitas  $k_{i,j}$  tales que:

$$|M_{i,j}(\mathbf{q})| \leq k_{i,j} < \infty \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2. \quad (86)$$

La matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  del robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  grados de libertad, mostrado en la Figura 11, es una **matriz acotada**.

De igual manera, la matriz centrífuga y de Coriolis para un robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  grados de libertad

se expone en la Sección A.2 del Anexo A. Si el vector  $\dot{\mathbf{q}}$  es acotado, entonces puede concluirse que los 4 componentes  $C_{i,j}$  (con  $i, j = 1, 2$ ) de la matriz  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  son acotados y a su vez, la matriz centrífuga y de Coriolis del robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  grados de libertad es una **matriz acotada**. Es decir,

$$|\dot{q}_k| < \infty \quad \forall k \in [1, \dots, N] \quad \Rightarrow \quad |C_{i,j}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})| < \infty, \quad (87)$$

con  $i, j, k = 1, 2$  y para todo  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$ .

Finalmente, en razón de que el vector de pares gravitacionales del robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  grados de libertad (ver Sección A.2 del Anexo A) se compone de la suma de funciones senoidales (que son acotadas), entonces se tiene que existe una constante finita  $k_{g_n}$  tal que:

$$|g_n(\mathbf{q})| \leq k_{g_n} < \infty \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^N. \quad (88)$$

Por lo tanto, para el robot  $\mathcal{PBD}$  de 2 grados de libertad, se tiene la importante propiedad de que el vector de pares gravitacionales  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  es acotado.

## Capítulo 9. Conclusiones

---

Recapitulando, en este trabajo de tesis se abordó el tema del modelo dinámico para robots planares de  $N$  grados de libertad hiperredundantes compuestos por articulaciones simples del tipo rotacional, abreviado como robot  $\mathcal{PBD}$ . Posteriormente, se determinaron las propiedades de acotamiento de los componentes  $M$ ,  $C$  y  $\mathbf{g}$  que conforman el modelo dinámico. Las principales contribuciones de esta tesis se mencionan a continuación:

Para robots  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad

- Propuesta de una expresión general para obtener la función de energía cinética asociada al  $n$ -ésimo eslabón  $\mathcal{K}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , así como la función de energía cinética total  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ .
- Propuesta de una expresión general para obtener la función de energía potencial asociada al  $n$ -ésimo eslabón  $\mathcal{U}_n(\mathbf{q})$ , así como la función de energía potencial total  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ .
- Propuesta de dos fórmulas generales inéditas que permiten obtener los elementos dentro y fuera de la diagonal de la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$ .
- Propuesta de dos fórmulas generales inéditas que permiten obtener las derivadas parciales de los elementos dentro y fuera de la diagonal de la matriz de inercia para así, calcular los símbolos de Christoffel y, a su vez, la matriz centrífuga y de Coriolis  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ .
- Propuesta de una fórmula general inédita para obtener el  $n$ -ésimo elemento del vector de pares gravitacionales  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ .
- Propiedades de acotamiento de la función de energía potencial, la matriz de inercia, la matriz centrífuga y de Coriolis (bajo ciertas condiciones) y el vector de pares gravitacionales.
- Cotas explícitas para la función de energía potencial y la matriz de inercia.

Finalmente, con apoyo del paquete computacional *Robotica* de (Nethery y Spong, 1994) fue posible corroborar que las fórmulas propuestas en este trabajo son válidas, ya que éstas se programaron en el software Mathematica, se generó el modelo dinámico de robots  $\mathcal{PBD}$  de 2 hasta 8 grados de libertad (de los cuales sólo se reportaron, por razones de limitación de espacio, en este trabajo el modelo de 2 y 3 grados de libertad) y se compararon los resultados con los entregados por *Robotica*; ambos modelos coincidieron. Del mismo modo, con la etapa de simulación, se reforzó la validez de las expresiones propuestas.

## Literatura citada

- Arteaga, M., Gutiérrez-Giles, A., y Pliego-Jiménez, J.. 2022. Local Stability and Ultimate Boundedness in the Control of Robot Manipulators, Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer International Publishing.
- Chirikjian, G. S.. 1992. Theory and Applications of Hyper-Redundant Robotic Manipulators. Tesis de doctorado, California Institute of Technology.
- Chirikjian, G. S. y Burdick, J. W.. 1991. Hyper-redundant robot mechanisms and their applications. En: Proceedings IROS '91:IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems '91..Vol. 1, pp. 185–190.
- Craig, J.. 2005. Introduction to Robotics: Mechanics and Control. 3a ed., Pearson Education, Inc.
- Denavit, J. y Hartenberg, R.. 1955. A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices. Journal of Applied Mechanics, 22(2), pp. 215–221.
- Ghorbel, F., Srinivasan, B., y Spong, M. W.. 1998. On the uniform boundedness of the inertia matrix of serial robot manipulators. Journal of Robotic Systems, 15(1), pp. 17–28.
- Goodwin, G. C. y Sin, K. S.. 1984. Adaptive Filtering, Prediction and Control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- ISO 8373:2021. 2021. Robotics – Vocabulary. : ed-3:v1:en. International Organization for Standardization. Recuperado el 16-Mayo-2022. <https://www.iso.org/obp/ui/#iso:std:iso:8373>.
- Johansson, R.. 1993. System Modeling and Identification, Prentice Hall Information and System Sciences Series. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- Kelly, R., Santibáñez, V., y Loría, A.. 2005. Control of Robot Manipulators in Joint Space, Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer London.
- Li, Y. y Chen, Y.. 2015. The ultimate hyper redundant robotic arm based on omnidirectional joints. En: 2015 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA)..pp. 1840–1845.
- Morozov, A. V., Hoagg, J. B., y Bernstein, D. S.. 2010. Retrospective cost adaptive control of a planar multilink arm with nonminimum-phase zeros. En: 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Atlanta, GA, USA, December 15-17, 2010..pp. 3706–3711.
- Nethery, J. F. y Spong, M. W.. 1994. Robotica: a Mathematica package for robot analysis. IEEE Robotics Automation Magazine, 1(1), pp. 13–20.
- Nof, S. Y.. 1999. Handbook of Industrial Robotics, p. 94. John Wiley & Sons, Inc., USA, 2a ed.
- Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., y Oriolo, G.. 2009. Robotics. Modelling, Planning and Control, Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer-Verlag London.
- Söderström, T. y Ljung, L.. 1983. Theory and Practice of Recursive Identification, MIT Press Signal Processing Optimization and Control Series. MIT Press.
- Spong, M. W. y Vidyasagar, M.. 1989. Robot Dynamics and Control. New York: John Wiley & Sons.
- Spong, M. W., Hutchinson, S., y Vidyasagar, M.. 2005. Robot Modeling and Control. Wiley.
- Wolfram, S.. 1992. Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer. Addison-Wesley Pub. Co.

## Anexo A. Robot $\mathcal{PBD}$ de $N = 2$ Grados de Libertad

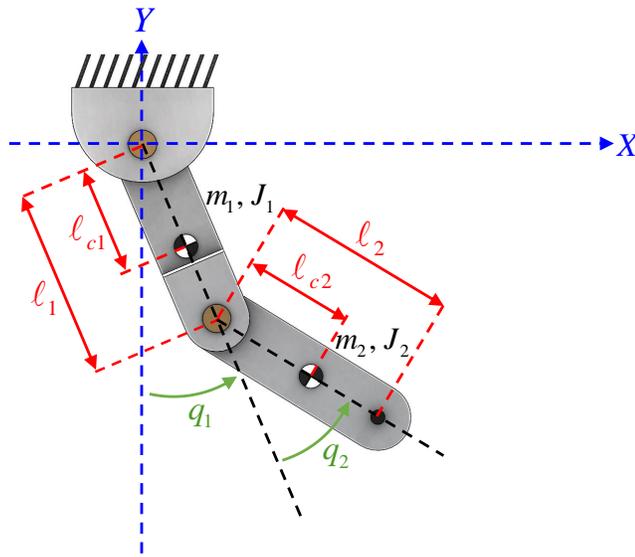


Figura 11. Diagrama CAD de robot planar de  $N = 2$  grados de libertad.

En la Figura 11 se expone un robot  $\mathcal{PBD}$  de 2 grados de libertad, el cual consta de dos eslabones rígidos donde  $\ell_1$  es la longitud del primer eslabón y  $\ell_2$  la del segundo. Las masas de los eslabones se denotan por  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente. La distancia del eje de rotación al centro de masa del primer eslabón se denota por  $\ell_{c1}$ , mientras que para el segundo eslabón se denota por  $\ell_{c2}$ . Finalmente,  $J_1$  y  $J_2$  representan los momentos de inercia de los eslabones con respecto al eje que pasa por sus respectivos centros de masa y que son perpendiculares al plano donde yace el robot.

La primer posición articular, asociada al ángulo  $q_1$ , se mide en sentido antihorario con respecto a la vertical y la segunda posición articular  $q_2$  se mide, también en sentido antihorario, con respecto al primer eslabón. El vector de posiciones articulares  $\mathbf{q}$  se define como

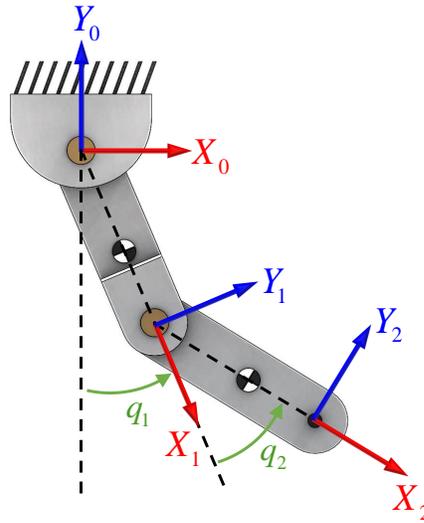
$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2.$$

De acuerdo con la convención de DH, una posible asignación de los marcos de referencia para el robot  $\mathcal{PBD}$  de 2 grados de libertad se ilustra en la Figura 12. El marco de referencia  $X_0 - Y_0$  ha sido colocado de manera que asegure compatibilidad con el paquete computacional *Robotica* (Nethery y Spong, 1994); en este caso con la misma posición y orientación que el marco  $X - Y$  de la Figura 11.

Tabla 3. Parámetros de DH para robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  grados de libertad.

$i$	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1 - \frac{\pi}{2}$	0	$\ell_1$	$0^\circ$
2	$q_2$	0	$\ell_2$	$0^\circ$

En cuanto a los parámetros de DH, éstos se listan en la Tabla 3.



**Figura 12.** Una asignación de marcos de referencia para robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  grados de libertad, según la convención de DH.

El modelo dinámico para un robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  grados de libertad, obtenido con las expresiones (38), (39), (46), (47), (48) y (70) propuestas en este trabajo de investigación, se expone a continuación:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{1,1}(\mathbf{q}) & M_{1,2}(\mathbf{q}) \\ M_{2,1}(\mathbf{q}) & M_{2,2}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}}_{M(\mathbf{q})} \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_{1,1}(\mathbf{q}) & C_{1,2}(\mathbf{q}) \\ C_{2,1}(\mathbf{q}) & C_{2,2}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}}_{C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} g_1(\mathbf{q}) \\ g_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{q})} = \boldsymbol{\tau},$$

donde

$$M_{1,1}(\mathbf{q}) = m_1 \ell_{c1}^2 + m_2 \ell_1^2 + m_2 \ell_{c2}^2 + 2m_2 \ell_1 \ell_{c2} \cos(q_2) + J_1 + J_2$$

$$M_{1,2}(\mathbf{q}) = m_2 \ell_{c2}^2 + m_2 \ell_1 \ell_{c2} \cos(q_2) + J_2$$

$$M_{2,1}(\mathbf{q}) = m_2 \ell_{c2}^2 + m_2 \ell_1 \ell_{c2} \cos(q_2) + J_2$$

$$M_{2,2}(\mathbf{q}) = m_2 \ell_{c2}^2 + J_2$$

$$C_{1,1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -m_2 \ell_1 \ell_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2$$

$$C_{1,2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -m_2 \ell_1 \ell_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \quad (89)$$

$$C_{2,1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = m_2 \ell_1 \ell_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1$$

$$C_{2,2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$$

$$g_1(\mathbf{q}) = [m_1 \ell_{c1} + m_2 \ell_1] g \sin(q_1) + m_2 \ell_{c2} g \sin(q_1 + q_2)$$

$$g_2(\mathbf{q}) = m_2 \ell_{c2} g \sin(q_1 + q_2)$$

Tal como se observará más adelante, los componentes  $M(\mathbf{q})$ ,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  coinciden con los generados por el paquete computacional *Robotica* (Nethery y Spong, 1994).

### A.1. Función de energía cinética según el paquete computacional *Robotica*

```
qp = {q1', q2'};
K = 1/2 * qp.M.qp;
Simplify[K]
|simplifica
0.5 ((J1 + J2 + 1c1^2 m1 + 1l1^2 m2 + 1c2^2 m2 + 2 l1 1c2 m2 Cos[q2]) (q1')^2 + 2 (J2 + 1c2^2 m2 + 1l1 1c2 m2 Cos[q2]) q1' q2' + (J2 + 1c2^2 m2) (q2')^2)
```

Figura 13. Resultados de *Robotica* de función de energía cinética para robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  grados de libertad.

### A.2. Componentes del modelo dinámico según el paquete computacional *Robotica*

```
EPrint[M, "M"]
M[1,1] = J1 + J2 + 1c1^2 m1 + 1l1^2 m2 + 1c2^2 m2 + 2 l1 1c2 m2 Cos[q2]
M[2,1] = J2 + 1c2^2 m2 + 1l1 1c2 m2 Cos[q2]
M[1,2] = J2 + 1c2^2 m2 + 1l1 1c2 m2 Cos[q2]
M[2,2] = J2 + 1c2^2 m2

EPrint[CM, "C"]
C[1,1] = -1l1 1c2 m2 Sin[q2] q2'[t]
C[2,1] = 1l1 1c2 m2 Sin[q2] q1'[t]
C[1,2] = -1l1 1c2 m2 Sin[q2] (q1'[t] + q2'[t])
C[2,2] = 0

EPrint[G, "g"]
g[1] = g ((1c1 m1 + 1l1 m2) Sin[q1] + 1c2 m2 Sin[q1 + q2])
g[2] = g 1c2 m2 Sin[q1 + q2]
```

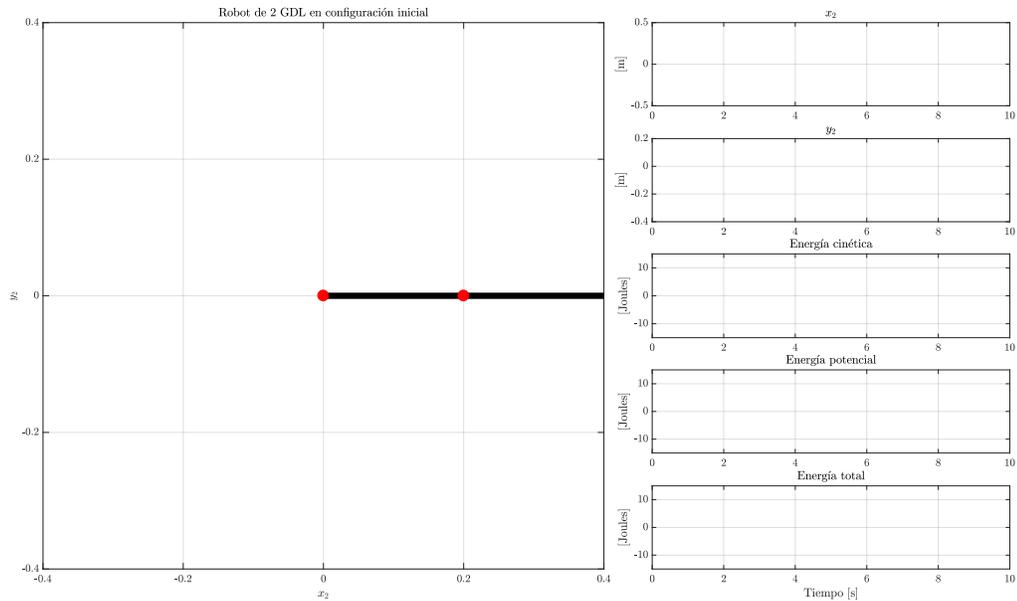
Figura 14. Resultados de *Robotica* del modelo dinámico para robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  grados de libertad.

### A.3. Simulación numérica de robot $\mathcal{PBD}$ de $N = 2$ grados de libertad

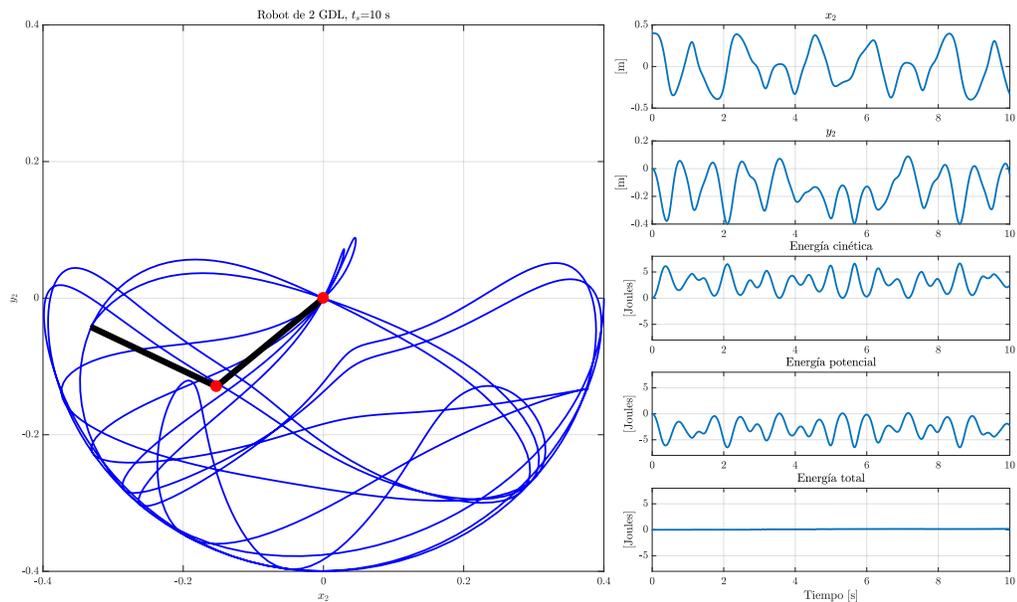
Como resultado de las investigaciones de esta tesis, se han propuesto fórmulas inéditas para obtener la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$ , la matriz centrífuga y de Coriolis  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y el vector de pares gravitacionales  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  para robots  $\mathcal{PBD}$  de  $N$  grados de libertad. Se realizó una simulación numérica del modelo dinámico para el caso de  $N = 2$ .

La simulación consiste de 6 gráficas; en el lado izquierdo, se tiene el movimiento del robot en el plano  $x - y$ , donde la trayectoria del extremo final se trazará con una línea en color azul. Las barras en color

negro representan los eslabones y los círculos en color rojo representan las articulaciones. En paralelo se graficará la posición en  $x$  del extremo final, la posición en  $y$ , la energía cinética, la energía potencial y la suma de estas energías, conocida como la energía total.



**Figura 15.** Condiciones iniciales de la simulación del modelo dinámico para robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  grados de libertad.



**Figura 16.** Resultados de la simulación del modelo dinámico para robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  grados de libertad.

Respecto a la configuración inicial del robot, no se aplicaron pares en las articulaciones, no hay

fricción, las velocidades articulares iniciales son nulas, y la posición inicial del robot es la que se muestra en la Figura 15, con  $\mathbf{q} = \left[ \frac{\pi}{2} \quad 0 \right]^T$ . Como la velocidad inicial de todas las articulaciones es cero, la energía cinética en el instante inicial es 0. La energía potencial también inicia en cero cuando el robot se encuentra acostado sobre el eje horizontal. Y por lo tanto, la energía total, inicia en cero.

En el tiempo de simulación, que fue de 0 a 10 segundos, no aparece ninguna característica en el comportamiento dinámico que sugiera una tendencia a atenuarse o detenerse el movimiento ni se aprecian rasgos de periodicidad. Cabe destacar que la energía total es constante, por lo que puede decirse que el sistema es conservativo.

## Anexo B. Robot $\mathcal{PBD}$ de $N = 3$ Grados de Libertad

Un robot  $\mathcal{PBD}$  de 3 grados de libertad se presenta en la Figura 17. El brazo manipulador consta de tres eslabones rígidos de longitudes  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$ , con masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  respectivamente. Las distancias desde los ejes de rotación hasta los centros de masa se denotan por  $l_{c1}$ ,  $l_{c2}$  y  $l_{c3}$  para los eslabones 1, 2 y 3, respectivamente. Finalmente,  $J_1$ ,  $J_2$  y  $J_3$  denotan los momentos de inercia de los eslabones con respecto a los ejes que pasan por los respectivos centros de masa y son perpendiculares al plano donde yace el robot.

Los grados de libertad están asociados con el ángulo  $q_1$ , que se mide desde la posición vertical,  $q_2$ , que se mide en relación con la extensión del primer eslabón hacia el segundo eslabón, y  $q_3$  que se mide desde el segundo eslabón hacia el tercero, siendo los tres positivos en sentido antihorario. El vector de posiciones articulares  $\mathbf{q}$  se define como

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \in \mathbb{R}^3.$$

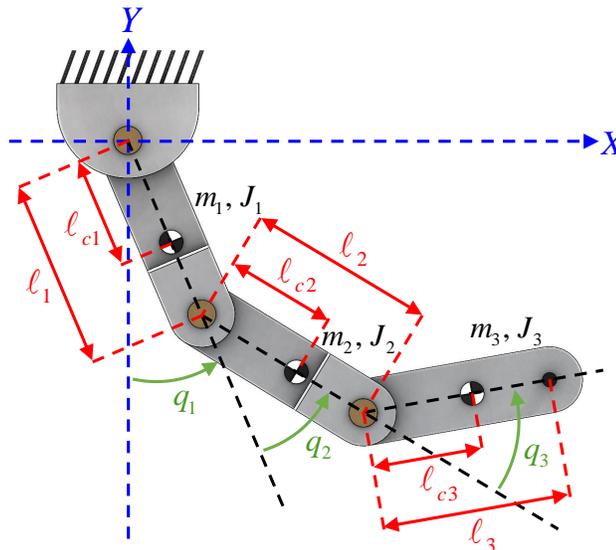
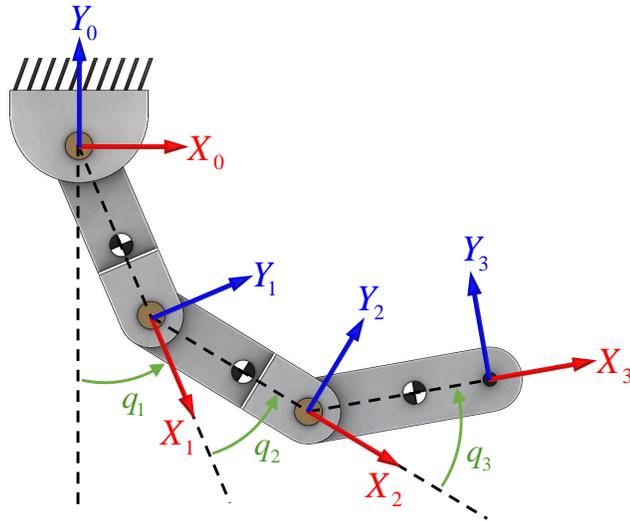


Figura 17. Diagrama CAD de robot planar de  $N = 3$  grados de libertad.

Según la convención de DH, los marcos de referencia para el caso de un robot  $\mathcal{PBD}$  de 3 grados de libertad, pueden asignarse tal como se ilustra en la Figura 18, mientras que los parámetros DH se listan en la Tabla 4. El marco de referencia  $X_0 - Y_0$  ha sido colocado de manera que asegure compatibilidad con el paquete computacional *Robotica* (Nethery y Spong, 1994).



**Figura 18.** Una asignación de marcos de referencia para robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 3$  grados de libertad, según la convención de DH.

Tabla 4. Parámetros de DH para robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 3$  grados de libertad.

$i$	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1 - \frac{\pi}{2}$	0	$\ell_1$	$0^\circ$
2	$q_2$	0	$\ell_2$	$0^\circ$
3	$q_3$	0	$\ell_3$	$0^\circ$

El modelo dinámico de un robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 3$  grados de libertad, obtenido con las fórmulas (38), (39), (46), (47), (48) y (70) propuestas en este trabajo de investigación, se expone a continuación:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{1,1}(\mathbf{q}) & M_{1,2}(\mathbf{q}) & M_{1,3}(\mathbf{q}) \\ M_{2,1}(\mathbf{q}) & M_{2,2}(\mathbf{q}) & M_{2,3}(\mathbf{q}) \\ M_{3,1}(\mathbf{q}) & M_{3,2}(\mathbf{q}) & M_{3,3}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}}_{M(\mathbf{q})} \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_{1,1}(\mathbf{q}) & C_{1,2}(\mathbf{q}) & C_{1,3}(\mathbf{q}) \\ C_{2,1}(\mathbf{q}) & C_{2,2}(\mathbf{q}) & C_{2,3}(\mathbf{q}) \\ C_{3,1}(\mathbf{q}) & C_{3,2}(\mathbf{q}) & C_{3,3}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}}_{C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} g_1(\mathbf{q}) \\ g_2(\mathbf{q}) \\ g_3(\mathbf{q}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{q})} = \boldsymbol{\tau},$$

donde

$$M_{1,1}(\mathbf{q}) = m_1 \ell_{c1}^2 + m_2 \ell_1^2 + m_2 \ell_{c2}^2 + m_3 \ell_1^2 + m_3 \ell_2^2 + m_3 \ell_{c3}^2 + 2m_2 \ell_1 \ell_{c2} \cos(q_2) + 2m_3 \ell_1 \ell_2 \cos(q_2) \\ + 2m_3 \ell_2 \ell_{c3} \cos(q_3) + 2m_3 \ell_1 \ell_{c3} \cos(q_2 + q_3) + J_1 + J_2 + J_3$$

$$M_{1,2}(\mathbf{q}) = m_2 \ell_{c2}^2 + m_3 \ell_2^2 + m_3 \ell_{c3}^2 + m_2 \ell_1 \ell_{c2} \cos(q_2) + m_3 \ell_1 \ell_2 \cos(q_2) + m_3 \ell_1 \ell_{c3} \cos(q_2 + q_3) \\ + 2m_3 \ell_2 \ell_{c3} \cos(q_3) + J_2 + J_3$$

$$M_{1,3}(\mathbf{q}) = m_3 \ell_{c3}^2 + m_3 \ell_1 \ell_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 \ell_2 \ell_{c3} \cos(q_3) + J_3$$

$$M_{2,1}(\mathbf{q}) = m_2 \ell_{c2}^2 + m_3 \ell_2^2 + m_3 \ell_{c3}^2 + m_2 \ell_1 \ell_{c2} \cos(q_2) + m_3 \ell_1 \ell_2 \cos(q_2) + m_3 \ell_1 \ell_{c3} \cos(q_2 + q_3)$$

$$+ 2m_3\ell_2\ell_{c3} \cos(q_3) + J_2 + J_3$$

$$M_{2,2}(\mathbf{q}) = m_2\ell_{c2}^2 + m_3\ell_2^2 + m_3\ell_{c3}^2 + 2m_3\ell_2\ell_{c3} \cos(q_3) + J_2 + J_3$$

$$M_{2,3}(\mathbf{q}) = m_3\ell_{c3}^2 + m_3\ell_2\ell_{c3} \cos(q_3) + J_3$$

$$M_{3,1}(\mathbf{q}) = m_3\ell_{c3}^2 + m_3\ell_1\ell_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_3\ell_2\ell_{c3} \cos(q_3) + J_3$$

$$M_{3,2}(\mathbf{q}) = m_3\ell_{c3}^2 + m_3\ell_2\ell_{c3} \cos(q_3) + J_3$$

$$M_{3,3}(\mathbf{q}) = m_3\ell_{c3}^2 + J_3$$

$$C_{1,1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = [-m_2\ell_1\ell_{c2} \sin(q_2) - m_3\ell_1\ell_2 \sin(q_2) - m_3\ell_1\ell_{c3} \sin(q_2 + q_3)] \dot{q}_2 \\ + [-m_3\ell_1\ell_{c3} \sin(q_2 + q_3) - m_3\ell_2\ell_{c3} \sin(q_3)] \dot{q}_3$$

$$C_{1,2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = [-m_2\ell_1\ell_{c2} \sin(q_2) - m_3\ell_1\ell_2 \sin(q_2)] [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] - m_3\ell_1\ell_{c3} \sin(q_2 + q_3) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3] \\ - m_3\ell_2\ell_{c3} \sin(q_3) \dot{q}_3$$

$$C_{1,3}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = [-m_3\ell_1\ell_{c3} \sin(q_2 + q_3) - m_3\ell_2\ell_{c3} \sin(q_3)] [\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3]$$

$$C_{2,1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = [m_2\ell_1\ell_{c2} \sin(q_2) + m_3\ell_1\ell_2 \sin(q_2) + m_3\ell_1\ell_{c3} \sin(q_2 + q_3)] \dot{q}_1 - m_3\ell_2\ell_{c3} \sin(q_3) \dot{q}_3$$

$$C_{2,2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -m_3\ell_2\ell_{c3} \sin(q_3) \dot{q}_3$$

$$C_{2,3}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = [-m_3\ell_2\ell_{c3} \sin(q_3) \dot{q}_3] [\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3]$$

$$C_{3,1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = [-m_3\ell_1\ell_{c3} \sin(q_2 + q_3) - m_3\ell_2\ell_{c3} \sin(q_3)] \dot{q}_1 + m_3\ell_2\ell_{c3} \sin(q_3) \dot{q}_2$$

$$C_{3,2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = m_3\ell_2\ell_{c3} \sin(q_3) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]$$

$$C_{3,3}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$$

$$g_1(\mathbf{q}) = [m_1\ell_{c1} + m_2\ell_1 + m_3\ell_1] g \sin(q_1) + [m_2\ell_{c2} + m_3\ell_2] g \sin(q_1 + q_2) \\ + m_3\ell_{c3} g \sin(q_1 + q_2 + q_3)$$

$$g_2(\mathbf{q}) = [m_2\ell_{c2} + m_3\ell_2] g \sin(q_1 + q_2) + m_3\ell_{c3} g \sin(q_1 + q_2 + q_3)$$

$$g_3(\mathbf{q}) = m_3\ell_{c3} g \sin(q_1 + q_2 + q_3)$$

De igual manera, más adelante se presentan los resultados obtenidos con *Robotica* y será posible notar que coinciden con los componentes de  $M(\mathbf{q})$ ,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ , calculados con las fórmulas (38), (39), (46), (47), (48) y (70) propuestas en esta investigación.

## B.1. Función de energía cinética según el paquete computacional Robotica

```

qp = {q1', q2', q3'};
K = 1/2 . qp.M.qp;
Simplify[K]
|simplifica
0.5
((J1 + J2 + J3 + 1c1^2 m1 + 11^2 m2 + 1c2^2 m2 + 11^2 m3 + 12^2 m3 + 1c3^2 m3 + 2 11 (1c2 m2 + 12 m3) Cos[q2] + 2 12 1c3 m3 Cos[q3] + 2 11 1c3 m3 Cos[q2 + q3])
(q1')^2 + (J2 + J3 + 1c2^2 m2 + 12^2 m3 + 1c3^2 m3 + 2 12 1c3 m3 Cos[q3]) (q2')^2 + 2 (J3 + 1c3^2 m3 + 12 1c3 m3 Cos[q3]) q2' q3' + (J3 + 1c3^2 m3) (q3')^2 +
2 q1' ((J2 + J3 + 1c2^2 m2 + 12^2 m3 + 1c3^2 m3 + 11 (1c2 m2 + 12 m3) Cos[q2] + 2 12 1c3 m3 Cos[q3] + 11 1c3 m3 Cos[q2 + q3]) q2' +
(J3 + 1c3^2 m3 + 12 1c3 m3 Cos[q3] + 11 1c3 m3 Cos[q2 + q3]) q3'))

```

Figura 19. Resultados de *Robotica* de función de energía cinética para robot *PBD* de  $N = 3$  grados de libertad.

## B.2. Componentes del modelo dinámico según el paquete computacional Robotica

```

EPrint[M, "M"]
M[1,1] = J1 + J2 + J3 + 1c1^2 m1 + 11^2 m2 + 1c2^2 m2 + 11^2 m3 + 12^2 m3 + 1c3^2 m3 + 2 11 (1c2 m2 + 12 m3) Cos[q2] + 2 12 1c3 m3 Cos[q3] + 2 11 1c3 m3 Cos[q2 + q3]
M[2,1] = J2 + J3 + 1c2^2 m2 + 12^2 m3 + 1c3^2 m3 + 11 (1c2 m2 + 12 m3) Cos[q2] + 2 12 1c3 m3 Cos[q3] + 11 1c3 m3 Cos[q2 + q3]
M[3,1] = J3 + 1c3^2 m3 + 12 1c3 m3 Cos[q3] + 11 1c3 m3 Cos[q2 + q3]
M[1,2] = J2 + J3 + 1c2^2 m2 + 12^2 m3 + 1c3^2 m3 + 11 (1c2 m2 + 12 m3) Cos[q2] + 2 12 1c3 m3 Cos[q3] + 11 1c3 m3 Cos[q2 + q3]
M[2,2] = J2 + J3 + 1c2^2 m2 + 12^2 m3 + 1c3^2 m3 + 2 12 1c3 m3 Cos[q3]
M[3,2] = J3 + 1c3^2 m3 + 12 1c3 m3 Cos[q3]
M[1,3] = J3 + 1c3^2 m3 + 12 1c3 m3 Cos[q3] + 11 1c3 m3 Cos[q2 + q3]
M[2,3] = J3 + 1c3^2 m3 + 12 1c3 m3 Cos[q3]
M[3,3] = J3 + 1c3^2 m3

EPrint[CM, "C"]
C[1,1] = -11 ((1c2 m2 + 12 m3) Sin[q2] + 1c3 m3 Sin[q2 + q3]) q2'[t] - 1c3 m3 (12 Sin[q3] + 11 Sin[q2 + q3]) q3'[t]
C[2,1] = 11 ((1c2 m2 + 12 m3) Sin[q2] + 1c3 m3 Sin[q2 + q3]) q1'[t] - 12 1c3 m3 Sin[q3] q3'[t]
C[3,1] = 1c3 m3 ((12 Sin[q3] + 11 Sin[q2 + q3]) q1'[t] + 12 Sin[q3] q2'[t])
C[1,2] = -11 (1c2 m2 + 12 m3) Sin[q2] (q1'[t] + q2'[t]) - 12 1c3 m3 Sin[q3] q3'[t] - 11 1c3 m3 Sin[q2 + q3] (q1'[t] + q2'[t] + q3'[t])
C[2,2] = -12 1c3 m3 Sin[q3] q3'[t]
C[3,2] = 12 1c3 m3 Sin[q3] (q1'[t] + q2'[t])
C[1,3] = -1c3 m3 (12 Sin[q3] + 11 Sin[q2 + q3]) (q1'[t] + q2'[t] + q3'[t])
C[2,3] = -12 1c3 m3 Sin[q3] (q1'[t] + q2'[t] + q3'[t])
C[3,3] = 0

EPrint[G, "g"]
g[1] = g ((1c1 m1 + 11 (m2 + m3)) Sin[q1] + (1c2 m2 + 12 m3) Sin[q1 + q2] + 1c3 m3 Sin[q1 + q2 + q3])
g[2] = g ((1c2 m2 + 12 m3) Sin[q1 + q2] + 1c3 m3 Sin[q1 + q2 + q3])
g[3] = g 1c3 m3 Sin[q1 + q2 + q3]

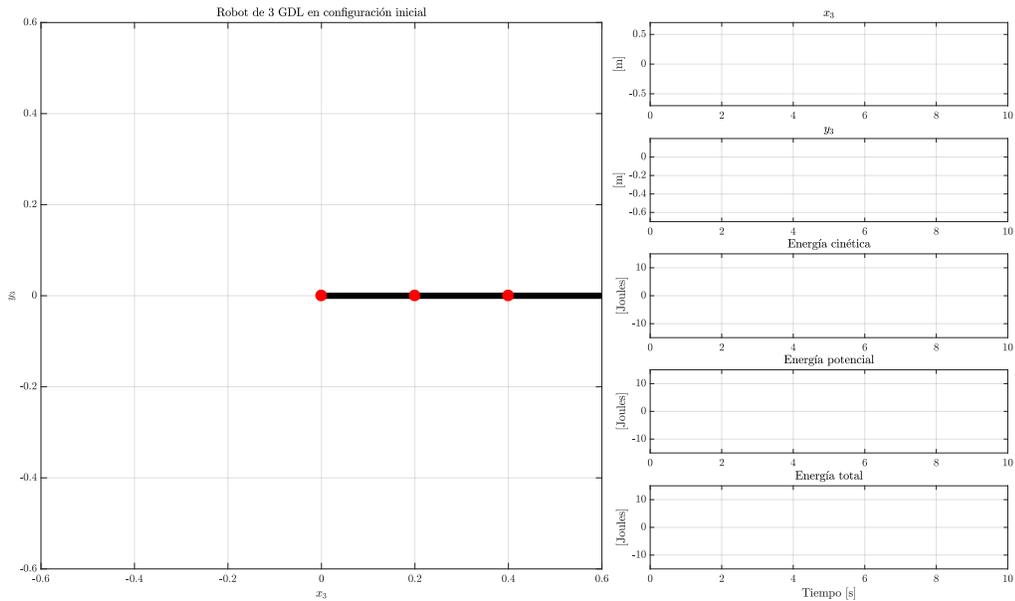
```

Figura 20. Resultados de *Robotica* del modelo dinámico para robot *PBD* de  $N = 3$  grados de libertad.

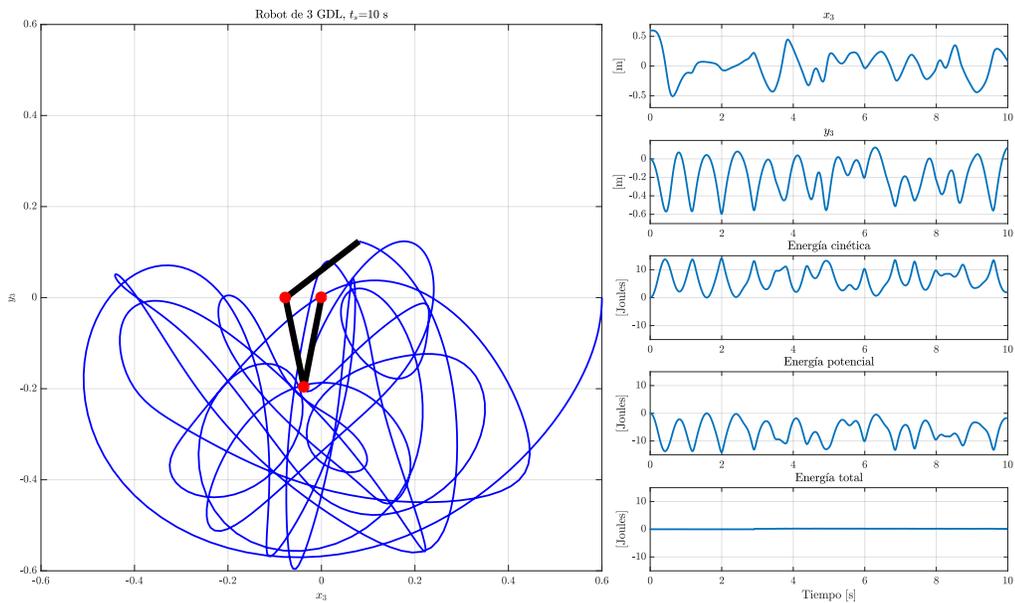
## B.3. Simulación numérica de robot *PBD* de $N = 3$ grados de libertad

También se trabajó en una simulación numérica del modelo dinámico para el caso de  $N = 3$ . La simulación comprende las mismas 6 gráficas: el movimiento del robot en el plano  $x - y$ , las coordenadas cartesianas  $x$  y  $y$  del extremo final (en gráficas separadas), la energía cinética, la energía potencial y la energía total. De igual manera, la configuración inicial del robot posee las mismas condiciones que en el

caso de  $N = 2$ : sin pares en las articulaciones, sin fricción, las velocidades articulares iniciales nulas, y la posición inicial del robot es la que se muestra en la Figura 21, con la primera posición articular con  $90^\circ$  y  $0^\circ$  en las demás articulaciones. La energía cinética, la energía potencial y la energía total inician en cero, por las mismas razones mencionadas para el robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 2$  grados de libertad en la Sección A.3 del Anexo A.



**Figura 21.** Condiciones iniciales de la simulación del modelo dinámico para robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 3$  grados de libertad.

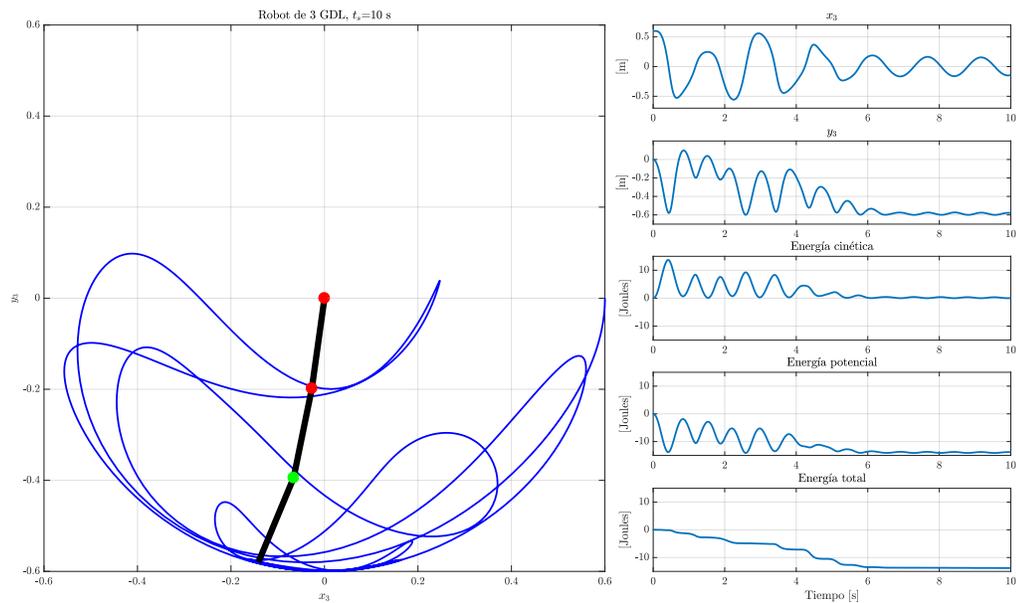


**Figura 22.** Resultados de la simulación del modelo dinámico para robot  $\mathcal{PBD}$  de  $N = 3$  grados de libertad.

La energía total nuevamente es constante, indicando así que el sistema, en las condiciones de simulación, es conservativo. Del mismo modo, a lo largo de los 10 segundos que duró la simulación, no se percibe una posible atenuación o suspensión del movimiento ni aparecen características de periodicidad.

#### B.4. Simulación numérica de robot $PBD$ de $N = 3$ grados de libertad con fricción viscosa en la tercera articulación

Asimismo se realizó una simulación del modelo dinámico para el robot de  $N = 3$  grados de libertad, con la condición adicional de fricción añadida en la tercera articulación del mecanismo. La simulación nuevamente se conforma de 6 gráficas y posee las mismas condiciones iniciales (ver Figura 21); nótese que se ha indicado con un círculo verde la tercera articulación, a la cual se le ha agregado fricción viscosa la cual produce un par  $\tau_3$  negativo proporcional a  $\dot{q}_3$ . Los resultados se muestran en la Figura 23.



**Figura 23.** Resultados de la simulación del modelo dinámico para robot  $PBD$  de  $N = 3$  grados de libertad con fricción viscosa en la tercera articulación.

El comportamiento errático de la traza del extremo final del robot en el plano  $X - Y$  y también su proyección en dichos ejes han disminuido y, según la gráfica inferior del lado derecho de la Figura 23, la energía total no permanece constante sino que aparentemente decrece, esto permite conjeturar: ¡la desaparición del aparente movimiento caótico gracias a la presencia de fricción viscosa en alguna de las articulaciones!