

La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, B.C.).

La investigación fue financiada por el CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología).

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo o titular de los Derechos Autor.

CICESE © 2023, Todos los Derechos Reservados, CICESE

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California



Doctorado en Ciencias en Oceanografía Física

Atrapamiento y estabilidad de vórtices en montañas y valles submarinos

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Doctor en Ciencias

Presenta:

Jeasson Fabian Gonzalez Sierra

Ensenada, Baja California, México

2023

Tesis defendida por

Jeasson Fabian Gonzalez Sierra

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Luis Zavala Sansón
Director de tesis

Dr. Federico Graef Ziehl

Dr. Álvaro Viúdez Lomba

Dr. Juan Manuel López Mariscal



Dra. María Tereza Cavazos Pérez
Coordinadora del Posgrado en Oceanografía Física

Dra. Ana Denise Re Araujo
Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Jeasson Fabian Gonzalez Sierra como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Oceanografía Física.

Atrapamiento y estabilidad de vórtices en montañas y valles submarinos

Resumen aprobado por:

Dr. Luis Zavala Sansón
Director de tesis

Se presentan soluciones analíticas de vórtices barotrópicos en un modelo cuasi-geostrófico sobre una topografía axisimétrica en el plano f . Las soluciones están basadas en modos azimutales independientes y son determinadas por la forma de la topografía. Los modos 0 (monopolos circulares) y 1 (dipolos asimétricos) son analizados para diferentes perfiles de montañas y valles submarinos. Estos modos constituyen flujos interiores que se conectan con un flujo exterior cuyas líneas de corriente encierran al vórtice, de forma que las estructuras permanecen atrapadas sobre la topografía. Los monopolos son estacionarios en general, mientras que las soluciones dipolares rotan con rapidez angular constante. Para ser solución, el tamaño horizontal de los dipolos no debe ser menor que el de la topografía y además deben cumplir con una condición de atrapamiento que depende de los parámetros topográficos y las características del flujo. El atrapamiento de los vórtices es estudiado mediante simulaciones numéricas inicializadas con el campo de vorticidad teórico. El modelo reproduce razonablemente bien las soluciones analíticas cuando los efectos topográficos son lo suficientemente fuertes para evitar la auto-propagación del dipolo. En contraste, los modos dipolares intensos pueden escapar de la influencia de la topografía. Por otra parte, se examina la inestabilidad lineal de flujos circulares en la dinámica de aguas someras. El problema de eigenvalores generalizado asociado con perturbaciones azimutales es derivado para topografías axisimétricas arbitrarias, tanto para montañas como valles submarinos. Se modificaron los teoremas de Rayleigh y Fjørtoft para incluir los efectos del fondo variable, obteniendo criterios necesarios para la inestabilidad barotrópica cuando el gradiente de vorticidad potencial es cero en alguna parte del dominio. La inestabilidad centrífuga también es discutida derivando el teorema de circulación de Rayleigh con topografía. Posteriormente, se analizó la estabilidad lineal de los monopolos circulares en las soluciones cuasi-geostróficas. La inestabilidad de los monopolos depende tanto de la configuración vórtice/topografía, como del tamaño del vórtice relativo al ancho de la topografía. Se encontró que las configuraciones anticiclón/montaña y ciclón/valle son inestables. En contraste, las configuraciones ciclón/montaña y anticiclón/valle son estables. Estos resultados fueron validados con dos métodos numéricos. Primero, el problema de eigenvalores generalizado es solucionado para obtener el número de onda de las perturbaciones con mayor razón de crecimiento. Segundo, la evolución de los vórtices es simulada numéricamente para detectar el desarrollo de las perturbaciones. Los resultados numéricos muestran que para vórtices inestables sobre topografías estrechas la mayor razón de crecimiento corresponde al modo 1, formando en el largo plazo estructuras dipolares asimétricas. Sobre topografías amplias, las perturbaciones que crecen más rápido son principalmente las de los modos 1 y 2, dependiendo de las características de la topografía.

Palabras clave: Cuasi-geostrófico, topografía, vórtices, estabilidad

Abstract of the thesis presented by Jeasson Fabian Gonzalez Sierra as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Physical Oceanography.

Entrapment and stability of vortices over submarine mountains and valleys

Abstract approved by:

Dr. Luis Zavala Sansón
Thesis Director

Analytical solutions of barotropic, quasi-geostrophic vortices over an axisymmetric bottom topography on the f -plane are presented. The solutions are based on independent azimuthal modes adapted to the shape of the topography. Modes 0 (circular monopoles) and 1 (asymmetric dipoles) are evaluated for different topographic profiles that represent either submarine mountains or valleys. These modes correspond to interior fields which are matched with an exterior flow with streamlines enclosing the vortices, so the structures remain trapped over the topographic feature. In general, the monopoles are steady, whereas the dipolar structures rotate with constant angular velocity. The dipolar solution exists when its horizontal size is less than that of the topography and when it satisfies an entrapment condition depending on the topographic parameters and the flow features. The main features of trapped vortices are discussed through numerical simulations initialised with theoretical vorticity fields. The model results reproduce reasonably well the analytical solutions when the topographic effects are strong enough to inhibit the dipole self-propagation. In contrast, very intense dipolar modes may escape from the influence of the topography. On the other hand, the linear instability of circular flows is examined for the shallow water model. The generalised eigenvalue problem associated with azimuthal disturbances is derived for arbitrary axisymmetric topographies, either submarine mountains or valleys. Amended Rayleigh and Fjørtoft theorems by topography effects are given for barotropic instability, obtaining the necessary criteria for instability when the potential vorticity gradient is zero somewhere in the domain. The onset of centrifugal instability is also discussed by deriving the Rayleigh circulation theorem with topography. Then, the linear instability is analysed for circular monopoles in the quasi-geostrophic dynamics. The flow instability mainly depends on the vortex/topography configuration, as well as on the vortex size in comparison with the width of the topography. It is found that anticyclones/mountains and cyclones/valleys may be unstable. In contrast, the cyclone/mountain and anticyclone/valley configurations are stable. These statements are validated with two numerical methods. First, the generalised eigenvalue problem is solved to obtain the wave number of the fastest-growing perturbations. Second, the evolution of the vortices is numerically simulated to detect the development of perturbations. The numerical results show that for unstable vortices over narrow topographies the fastest growth rate corresponds to mode 1, thus forming asymmetric dipolar structures in the long term. Over wide topographies, the fastest-growing perturbations are mainly modes 1 and 2, depending on the topographic features.

Keywords: Quasi-geostrophic, topography, vortices, stability

Dedicatoria

**A Dios por darnos a la naturaleza
para aventurar en su pensamiento.**

A Renata, Lorenzo & Valentino.

Agradecimientos

A mi esposa e hijos por apoyarme y motivarme permanentemente a cumplir mis sueños y alcanzar los logros propuestos. A ellos por regalarme tantas horas diarias dedicadas al trabajo y darme siempre la certeza de contar con su amor. A ti princesa por entender lo importante que ha sido en mi vida cultivar el conocimiento, dejar una huella del pensamiento y permitir que mi mente se ausentara en tantas ocasiones. A mis hijos por ser mi reposo en aquellos días donde la luz se ocultaba tras tinieblas y no parecía haber cerca una respuesta o una idea. A ustedes, porque su amor llena de motivos todos mis esfuerzos.

A mis padres por estar conmigo a pesar de los momentos adversos. En especial a ti madre, por enseñarme en la vida la más divertida de las tareas, aprender. A mi familia por su apoyo y en especial a mi tía Alba por su confianza en que mi trabajo siempre rendiría buenos frutos. A mi abue porque nunca olvidaré las tardes que dedicaste a enseñarme las matemáticas más básicas.

A la vida por darme la oportunidad de encontrarme con gente enamorada del conocimiento que inspiraron el camino que me ha traído hasta este punto. A Miguel L., quien fue mi maestro de matemáticas en la preparatoria, por introducirme en la ciencia, a Yecid C. por darme en la primera etapa de la licenciatura el reto, aún pendiente, de buscar integralmente el conocimiento. Al profe Jácome por acompañarme con tantas enseñanzas a lo largo de toda mi formación dentro y fuera del aula, y a quien le debo introducirme en el maravilloso mundo de la mecánica de fluidos.

A mi asesor, el profe Luis Zavala, por el sin número de horas que me dedicó para discutir las ideas y dudas que surgieron en el camino. Por su constante y fuerte crítica, empujando hasta el límite, para obtener la mejor versión de una idea, de un escrito o de un argumento. Por ayudarme a enfocar un objetivo a la vez. Por su infinita paciencia al enseñarme a escribir correctamente y por su humanidad al entender las situaciones personales por las que pasé durante esta etapa.

A mi equipo de sinodales, Dr. Federico Graef, Dr. Manuel López y Dr. Álvaro Viúdez, por su tiempo e innumerables aportes, que ayudaron a un trabajo más robusto y consistente. A ustedes, porque de muchas de las reuniones que sostuvimos surgieron ideas para trabajo futuro. Sin duda, sus aportes y comentarios mejoraron sustancialmente la versión final de este documento.

A mis amigos de Ensenada; Mauro, Camilo, Susy, Ana Lau que me brindaron su mano, su casa y su confianza en los momentos que más lo necesite. Gracias

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California por brindarme las mejores condiciones para llevar a cabo mi investigación. En especial por permitirme encontrar investigadores como el Dr. Enric Pallàs y el Dr. Julio Sheinbaum que siempre estuvieron dispuestos a escuchar y aportar positivamente a mi investigación.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de doctorado.

A la Secretaría de Educación de Bogotá por brindarme su respaldo para la realización de mis estudios de doctorado.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	ix
Lista de tablas	xi
Capítulo 1 Introducción	
1.1 Antecedentes	2
1.2 Hipótesis	4
1.3 Objetivos	5
1.3.1 Objetivo general	5
1.3.2 Objetivos específicos	5
1.4 Resumen general de la tesis	5
Capítulo 2 Preliminares teóricos y numéricos	
2.1 Preliminares teóricos	7
2.1.1 Modelo cuasi-geostrófico	7
2.1.2 Estabilidad hidrodinámica	11
2.2 Preliminares numéricos	14
2.2.1 Modelo numérico	14
2.2.2 Métodos espectrales	15
Capítulo 3 Solución de vórtices cuasi-geostróficos sobre una topografía aislada	
3.1 Soluciones QG con topografía axisimétrica	22
3.1.1 Modos azimutales sobre la topografía	23
3.1.2 Flujo interior	25
3.1.3 Solución completa para el modo $m = 0$	26
3.1.4 Solución completa para el modo $m = 1$	27
3.1.5 Rapidez angular de modos dipolares	29
3.1.6 Atrapamiento de dipolos	30
3.2 Vórtices atrapados sobre montañas y valles	31
3.2.1 Modo monopolar $m = 0$	31
3.2.2 Modo dipolar $m = 1$	33
3.2.3 Simulaciones numéricas	36
3.2.3.1 Código numérico y parámetros del flujo	36
3.2.3.2 Atrapamiento de vórtices	37
3.2.3.3 Escape del vórtice	39
3.3 Conclusiones	39

Capítulo 4 Estabilidad lineal de vórtices monopolares sobre una topografía aislada

4.1	Estabilidad de vórtices monopolares sobre una topografía axisimétrica	45
4.1.1	Análisis lineal para flujos SW y QG	45
4.1.2	Inestabilidad barotrópica	48
4.1.2.1	Teorema del punto de inflexión de Rayleigh con topografía	48
4.1.2.2	Teorema de Fjørtoft con topografía	49
4.1.3	Inestabilidad centrífuga	50
4.2	Análisis de estabilidad de vórtices QG sobre topografía	53
4.2.1	Vórtices sobre una topografía aislada: El flujo básico	54
4.2.2	Condiciones para la inestabilidad barotrópica: Teorema de Rayleigh	57
4.2.3	Condiciones para la inestabilidad barotrópica: Teorema de Fjørtoft	58
4.2.4	Condiciones para la inestabilidad centrífuga	60
4.2.5	Solución numérica al problema de eigenvalores generalizado	61
4.2.6	Simulaciones numéricas de vórtices sobre una topografía	62
4.3	Discusiones y conclusiones	67

Capítulo 5 Conclusiones

Literatura citada	72
Anexos	76

Lista de figuras

Figura	Página
1 Vista lateral de una capa de fluido homogénea sobre una topografía arbitraria en un sistema en rotación.	8
2 Vista lateral de una capa de fluido homogénea sobre una montaña o valle submarino axialmente simétrico $b(r)$, en un plano- f con la profundidad promedio H_0	23
3 Perfiles de vorticidad para el modo $m = 0$ sobre montañas Gaussianas ($b_0 > 0$), usando amplitudes positivas (azul) y negativas (rojo) $\widehat{\psi}_0 = \pm 0.3$. También se muestra el caso de fondo plano, $b_0 = 0$. (a) $C_0 = 0$ y $b_0/H_0 = 0, 0.07, 0.2$ y 0.3 . (b) $C_0 = \pm 2$ y $b_0/H_0 = 0.2$. La línea vertical punteada indica el radio del contorno interior-exterior s_t	32
4 Diagramas de dispersión $q-\psi$ para los casos del modo $m = 0$ mostrados en la Figura 3. En el panel (a), los valores en la región interior son indistinguibles para cada valor de b_0 . En el panel (b), todas las regiones interiores se superponen.	33
5 Distribuciones de vorticidad relativa de modos dipolares sobre diferentes topografías. (a, b) Montañas con altura $b_0 = 0.2$. (c, d) Valles con profundidad $b_0 = -0.2$. Para topografías abruptas (estrechas): $s_t = 0.8s_l$, $\alpha = 12$, $C_1 = -1.59$ ($s_t = 0.4s_l$, $\alpha = 2$, $C_1 = 0.63$). En todos los casos la intensidad del vórtice es $ \widehat{\psi}_1 = 0.3$. La circunferencia en negro corresponde al contorno interior-exterior del vórtice en s_t . El radio del círculo en magenta es la escala de longitud de la topografía s_t	34
6 Diagramas de dispersión $q-\psi$ para modos $m = 1$ correspondientes a los ejemplos mostrados en la Figura 5. (a) Montañas. (b) Valles. Los puntos negros (magenta) corresponden a topografías abruptas (estrechas).	34
7 Distribución de la función corriente y el campo de velocidad de los modos dipolares mostrados en la Figura 5. Los círculos en negro y magenta se interpretan igual que en la Figura 5. Las líneas delgadas en negro indican contornos de ψ con valores $[0.9, 1, 1.1]\psi_{E1}(s_t)$	35
8 Secuencia de la distribución de vorticidad en el plano f calculada numéricamente para el dipolo asimétrico mostrado en la Figura 5a. La topografía es una montaña abrupta ($b_0 = 0.2$, $s_t = 0.8s_l$, $\alpha = 12$). La rotación del dipolo es horaria. La rapidez angular predicha es $-\Omega = -0.0934$ con un periodo de 5.4 días.	37
9 Secuencia de la distribución de vorticidad como en la Figura 8 pero ahora para el modo dipolar mostrado en la Figura 5c. La topografía es un valle abrupto ($b_0 = -0.2$, $s_t = 0.8s_l$, $\alpha = 12$). La rotación del dipolo es antihoraria.	38
10 Secuencia de la distribución de vorticidad para un modo dipolar con $ \widehat{\psi}_1 = 0.1$. La topografía es una montaña Gaussiana estrecha ($b_0 = 0.2$, $s_t = 0.4s_l$, $\alpha = 2$, $C_1 = 0.63$). La rotación del dipolo es en sentido horario. La rapidez angular predicha teóricamente es $-\Omega = -0.0381$ con un periodo de 13.1 días.	38
11 Secuencia de la distribución de vorticidad calculada numéricamente para un dipolo asimétrico ($ \widehat{\psi}_1 = 0.6$) sobre una montaña de poca altura y estrecha ($b_0 = 0.1$, $s_t = 0.4s_l$, $\alpha = 2$). La condición de atrapamiento (83) no es satisfecha: $\gamma = 0.127$	40
12 Vista de lado de una capa de fluido con profundidad media H_0 sobre una topografía de fondo $b(r)$ definida como una montaña o valle submarino de amplitud b_0 y ancho r_t sobre un plano- f	46

Figura	Página	
13	Perfiles de (a) velocidad azimutal y (b) vorticidad relativa para diferentes configuraciones anticiclón/montaña (A/M) sobre una topografía estrecha, $s_t = 2$. Los paneles (c) y (d) muestran los correspondientes perfiles para una topografía amplia, $s_t = 5$. Las curvas en azul indican los casos con fondo plano, $\xi_t = 0$	56
14	Igual que en la Figura 13 pero ahora para los casos ciclón/montaña (C/M).	57
15	Perfiles de la función radial v_I usada para evaluar el Teorema de punto de inflexión de Rayleigh para topografías estrechas $s_t = 2$: (a) $\xi_t > 0$ y (b) $\xi_t < 0$. Los paneles (c) y (d) muestran los correspondientes perfiles para una topografía amplia $s_t = 5$	59
16	Espacio de parámetros adimensional $Ro = c_0^2 \widehat{\psi} / f_0$ vs. $\Delta = b_0 / H_0$ para diferentes anchos de la topografía s_t . El color rojo (azul) indica la configuración vórtice/topografía que satisface (no satisface) el criterio de circulación de Rayleigh (132) para la inestabilidad centrífuga.	60
17	Perfiles de inestabilidad σ_{ai} (parte imaginaria de σ_a) vs. k para los casos con $\xi_t > 0$ (configuraciones A/M y C/V) para topografías estrechas (panel a) y amplias (panel b).	62
18	Distribución de vorticidad calculada numéricamente para un anticiclón sobre una montaña estrecha $(\xi_t, s_t) = (1, 2)$ en (a) $t = 0$ días, y (b) $t = 160$ días. Los límites de las barras de colores son establecidos por los picos de vorticidad $\omega_{min} = \min\{\omega_a\}$. (c) Evolución temporal de la amplitud A_k para cinco modos azimutales (ver texto). El crecimiento de mayor rapidez es el de $k = 1$	64
19	Distribuciones de vorticidad calculadas numéricamente para un anticiclón sobre una montaña amplia $(\xi_t, s_t) = (1, 5)$ en (a) $t = 0$ días, y (b) $t = 143$ días. (c) Evolución en el tiempo de la amplitud A_k para 5 modos azimutales. El crecimiento más rápido se obtiene para $k = 1$	65
20	Distribución de vorticidad calculada numéricamente para un anticiclón sobre una montaña amplia $(\xi_t, s_t) = (3, 5)$ en (a) $t = 0$ días, y (b) $t = 500$ días. (c) Evolución temporal de la amplitud A_k para cinco modos azimutales. El crecimiento más rápido se obtiene para $k = 2$	66

Lista de tablas

Tabla		Página
1	Resumen de las configuraciones flujo/topografía en las soluciones analíticas de vórtices circulares (con amplitud ciclónica ó anticiclónica $\hat{\psi}$) sobre una topografía (con altura ó profundidad b_0).	56
2	Comparación del número de onda característico k_c predicho por la solución espectral del problema de eigenvalores generalizado (subsección 3.5) y el encontrado en las simulaciones numéricas para diferentes configuraciones vórtice/topografía (ξ_t, s_t).	66

Capítulo 1. Introducción

El estudio físico de los movimientos en los océanos y la atmósfera de un planeta constituye la dinámica de flujos geofísicos. La rotación del planeta y el tamaño relativo de dichos flujos, son características determinantes en la evolución de estos sistemas físicos. Tanto la rotación como la pequeña razón de aspecto entre las escalas verticales y horizontales permiten en una descripción local, para un océano homogéneo (i.e. densidad constante), considerar a estos flujos como bidimensionales, ya que el balance geostrófico (entendido como el equilibrio entre los efectos de la rotación y el gradiente de presión) hace al campo de velocidad independiente de la coordenada paralela al eje vertical. Por lo tanto, a primer orden los flujos geofísicos pueden modelarse como si evolucionaran en forma de columnas (Vallis, 2017). Por otro lado, el tamaño del flujo indica el grado de influencia que la curvatura del planeta puede tener sobre su dinámica. Los flujos geofísicos de extensión reducida (decenas a cientos de kilómetros) pueden modelarse sobre el llamado plano f , donde se desprecian los efectos dinámicos asociados a los cambios de latitud. Los flujos cuya extensión es lo suficientemente grande como para verse afectada por los cambios de latitud son descritos en un sistema conocido como plano β (Vallis, 2017). Otras características que tienen un rol importante en la dinámica de los flujos geofísicos son la estratificación -en parte originada por el calentamiento solar-, los forzamientos externos -que en el caso del océano se originan principalmente por el efecto del viento- y la topografía -dada la diversa batimetría de la superficie terrestre y del fondo marino-.

Encontrar soluciones analíticas de las ecuaciones de gobierno que incluyan el conjunto completo de características dinámicas es difícil de lograr dada su alta complejidad. Por esta razón, los modelos teóricos seleccionan únicamente los efectos que son de interés, perdiendo de vista la influencia de aquellas propiedades que fueron despreciadas. En el caso de los modelos clásicos de la circulación general del océano, por ejemplo, el fondo marino se supone plano (Pedlosky, 1986; Rhines, 1986). No obstante, los efectos topográficos son, con frecuencia, bastante relevantes (Roden, 1987). Estudios independientes a escalas sinópticas o de mesoescala han resaltado el rol fundamental que tiene la topografía en la capacidad de alterar la trayectoria de las corrientes, generar remolinos, desviar campos de flujo, crear regiones de atrapamiento y afectar, en general, la circulación oceánica. Adicionalmente, la topografía da paso a la rectificación de mareas, generación de trenes de onda, aumento de la capa de mezcla y generación de ondas topográficas, (Roden, 1987).

Establecida la importancia de la topografía en los flujos geofísicos, en lo que sigue ahondaremos en los detalles de algunos estudios observacionales, experimentales y numéricos que motivaron esta tesis.

1.1 Antecedentes

En el Atlántico Sur, parte de las fuentes de calor, sal y energía en la termoclina surgen del transporte de agua generado por remolinos de mesoescala desprendidos en la retroflexión de la corriente de Agulhas desde el Océano Índico (Olson and Evans, 1986; Olson, 1991). Los análisis de observaciones satelitales han permitido registrar trayectorias al Oeste de algunos remolinos con longitudes de hasta 5000 km y tiempos de vida entre 3 y 4 años. Este registro ha mostrado algunos efectos sobre los remolinos durante su paso por la Cordillera Walvis en el este, la Cordillera del Atlántico Medio o la Elevación Rio Grande en el oeste. Los resultados indican desviaciones en las trayectorias y desaceleraciones de los remolinos después de la interacción con estos rasgos topográficos (Byrne et al., 1995).

En el caso de los remolinos de mesoescala, como los de la corriente de Agulhas, su coherencia y capacidad para viajar libremente resalta tanto la no linealidad (que implica débil dispersión en su trayectoria) como la estabilidad de estas estructuras vorticales. Como ya se ha mencionado, durante sus largas trayectorias estos remolinos suelen pasar por diversos obstáculos topográficos (cordilleras, valles y montes submarinos). Las observaciones concluyen que en el caso de topografías con escalas horizontales amplias y amplitudes pequeñas los efectos topográficos desvían las trayectorias de propagación pero conservan la coherencia de las estructuras. Por otra parte, las topografías estrechas y altas causan desde el atrapamiento o destrucción del remolino hasta la reflexión de su trayectoria de propagación (Kamenkovich et al., 1996).

Otros remolinos que tienen un rol importante en la distribución de propiedades físicas y biológicas en el océano y que son influenciados por efectos topográficos, son aquellos que surgen desde el Mediterráneo con una estructura coherente. Estos remolinos, también llamados “meddies”, entran a la Cuenca Ibérica, donde alrededor del 70% de ellos interactúan con las montañas submarinas de la Herradura (Horseshoe) y el restante entra a la Cuenca de las Canarias (Richardson et al., 2000). Al ser afectados por la corriente de Azores, parte de estos vórtices interactúan con la cadena de montañas del Gran Meteoro (Great Meteor). Las observaciones de estos remolinos en el Atlántico Norte sugieren que la interacción con las cordilleras submarinas puede ser perturbativa (desviando o atrapando la trayectoria de los “meddies”) e incluso fatales (destruyendo su coherencia) (Dewar, 2002).

El atrapamiento de remolinos también ha sido observado en el Pacífico Norte mediante trayectorias de boyas de deriva superficiales, las cuales han registrado el comportamiento de ciclones desprendidos de la corriente de Kuroshio en su interacción con la cadena de montañas submarinas Emperador (Emperor) (Cheney et al., 1980).

Los remolinos en la atmósfera, que transportan calor y humedad durante su movimiento, también se ven afectados por la topografía continental, la cual es representada por montañas, cordilleras o los obstáculos que representan las grandes ciudades. Una situación de atrapamiento comparable a las mencionadas para el océano es la de los ciclones tropicales que se forman en la costa Oeste de México y sobre el Golfo de México. En algunos casos en el Océano Pacífico, las observaciones han sugerido que la deriva al noroeste de estos ciclones es afectada por la Sierra Madre Occidental (cadena montañosa en México orientada en dirección noroeste-sureste), induciendo un movimiento hacia el interior del continente (Zavala Sansón, 2004).

Además de la evidencia observacional, se han realizado experimentos de laboratorio en condiciones controladas con el propósito de entender los procesos involucrados en la evolución de los flujos geofísicos. Para fluidos homogéneos en sistemas en rotación, por ejemplo, Taylor (1917) realizó experimentos que permitieron descubrir que en estas circunstancias los flujos resultaban independientes de la coordenada paralela al eje de rotación. En experimentos similares Taylor (1923) mostró que en presencia de obstáculos un flujo uniforme prefiere rodearlos que pasar por encima de ellos, dejando sobre el obstáculo una columna de fluido atrapada (ahora conocida como columna de Taylor). En sistemas estratificados las columnas de Taylor aún permanecen sobre los obstáculos, intensificadas en el fondo y con una estructura dependiente de la vertical que disminuye hacia la superficie (Hogg, 1973; Johnson, 1977). Así, los efectos topográficos sobre un fluido homogéneo resultan amplificados respecto al caso estratificado.

Experimentos con topografías aisladas, es decir, con variaciones localizadas en el fondo y decayendo a cero en el infinito, se han realizado para entender los efectos de una única característica topográfica. Carnevale et al. (1991) llevaron a cabo experimentos sobre el movimiento de vórtices ciclónicos en presencia de valles y montañas relativamente amplios respecto al tamaño del remolino. Sus resultados indicaron que los vórtices siguen trayectorias espirales, cerrándose hacia el centro para el caso de montañas y abriéndose hacia los bordes en el caso de los valles. Por otra parte, Zavala Sansón et al. (2012) mostraron que un vórtice ciclónico que es generado en la vecindad de una montaña aislada, es capturado y forzado a girar alrededor de ésta hasta llegar a un estado final correspondiente a un par de vórtices de signo opuesto rotando sobre la cima de la topografía.

Experimentos numéricos en un fluido homogéneo fueron realizados por Verron and Provost (1985) para resaltar las diferencias entre el plano f y el plano β presentes en la interacción de un flujo uniforme con una topografía aislada. Las simulaciones mostraron que durante la interacción con una montaña submarina el fluido que se desplaza hacia la cima pierde profundidad, y por conservación de vorticidad potencial, pierde vorticidad absoluta, mientras que el desplazado hacia la falda la incrementa. Así, la evolución

dependerá de cómo interactúan las zonas de vorticidad opuesta con el flujo uniforme. Después de que los flujos transitorios han desaparecido, el estado final en el plano f es independiente de la dirección del flujo medio y se caracteriza por la intensidad del efecto topográfico. El estado final corresponde a un anticiclón atrapado sobre la montaña cuando la topografía es débil, y a un anticiclón sobre la montaña con un ciclón en su falda, rotando anticiclónicamente, cuando el efecto topográfico es fuerte. En el plano β , el estado final depende de la dirección del flujo uniforme. Un flujo hacia el Este genera un estado final con un anticiclón sobre la montaña y ondas de Rossby extendiéndose corriente abajo de la topografía, mientras que un flujo base al Oeste genera únicamente un anticiclón atrapado sobre la montaña (Roden, 1987).

Finalmente, Solodoch et al. (2020) identificaron numéricamente la formación de estructuras vorticales anticiclónicas atrapadas sobre valles aislados. Este es un resultado coherente con la presencia de remolinos anticiclónicos en cuencas oceánicas, como el remolino en la cuenca de Lofoten en la parte Norte del Mar de Noruega (Ivanov and Korablev, 1995), el remolino Mann en medio del Atlántico Norte (Mann, 1967) ó el anticiclón Rockall al Noroeste de Escocia e Irlanda (Corre et al., 2019).

Otros estudios relevantes, pero más específicos, serán presentados a lo largo de este documento para contextualizar más profundamente los propósitos de investigación expuestos en cada capítulo.

El rol significativo de la topografía en la dinámica de remolinos ha sido observado de diversas maneras, tal como se apuntó en la sección anterior. El atrapamiento y la posible coherencia de una estructura vortical por la presencia de una montaña o valle submarino son fenómenos latentes en las observaciones y modelos numéricos de la naturaleza. Sin embargo, soluciones exactas de las ecuaciones de gobierno que describan dichas características son en general escasas. En este estudio se ha propuesto avanzar en el conocimiento de dichas soluciones analíticas en el marco del modelo cuasi-geostrófico, y a partir de éstas establecer propiedades asociadas al sistema vórtice-topografía.

1.2 Hipótesis

- **H1.** Existen flujos estacionarios sobre una topografía aislada. El frecuente efecto de atrapamiento que montañas o valles submarinos puede tener sobre remolinos en un sistema en rotación, como ha sido encontrado en estudios observacionales, de laboratorio y numéricos, sugiere la posibilidad de encontrar analíticamente dichas estructuras.
- **H2.** La estabilidad de remolinos circulares sobre una topografía aislada depende del tipo de cambio

batimétrico, protuberancias (montañas) o depresiones (valles), y del tipo de vorticidad dominante en el vórtice, ciclónico o anticiclónico.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Estudiar el efecto de una topografía aislada (en forma de montaña o valle submarino) sobre estructuras vorticales en un sistema en rotación.

1.3.2 Objetivos específicos

- Encontrar soluciones analíticas de remolinos cuasi-geostróficos sobre topografías aisladas.
- Definir condiciones de atrapamiento de ciclones y anticiclones sobre montañas y valles.
- Establecer analíticamente criterios de estabilidad para las soluciones obtenidas.
- Resolver numéricamente el problema de estabilidad lineal de los remolinos atrapados por la topografía.

1.4 Resumen general de la tesis

El documento de tesis está organizado de la siguiente manera. El capítulo 2 presenta algunos aspectos teóricos y numéricos fundamentales para el entendimiento de este estudio. Se empieza presentando el modelo cuasi-geostrófico y sus principales restricciones físicas. Luego, se describe un método para trabajar el problema de la inestabilidad barotrópica. Finalmente, se introducen las bases de los modelos numéricos con el que se simulan las ecuaciones cuasi-geostróficas y se resuelve el problema generalizado de eigenvalores para el estudio de estabilidad.

En el capítulo 3 se deducen soluciones analíticas de las ecuaciones cuasi-geostróficas, las cuales son una familia de vórtices monopulares y dipolares sobre valles y montañas con simetría axial. Un criterio de atrapamiento es establecido para dichos flujos vorticales y es contrastado con los resultados obtenidos por simulaciones numéricas.

En el capítulo 4 se realiza un estudio analítico y numérico de estabilidad lineal para los vórtices monopoles obtenidos en el capítulo 3. Primero se derivan criterios de inestabilidad barotrópica y centrífuga para la dinámica de aguas someras, equivalentes a los teoremas de punto de inflexión y circulación de Rayleigh, respectivamente. Después, dichos criterios teóricos son aplicados a los remolinos cuasi-geostróficos, y contrastados con los resultados obtenidos mediante la solución numérica del problema de eigenvalores generalizado asociado.

Finalmente, las principales conclusiones son resumidas en el capítulo 5.

Capítulo 2. Preliminares teóricos y numéricos

En este capítulo se introducen los modelos analíticos y numéricos utilizados a lo largo de esta tesis, con el propósito de hacer el documento comprensible para el lector.

2.1 Preliminares teóricos

2.1.1 Modelo cuasi-geostrófico

El estudio de los flujos geofísicos atmosféricos y oceánicos se basa principalmente en su descripción dinámica sobre la superficie de un planeta aproximadamente esférico de radio R_p , y en rotación uniforme con rapidez angular Ω . La dinámica de estos flujos se puede representar mediante las ecuaciones de Newton para una descripción Euleriana, usando un sistema coordenado esférico en el que la superficie libre en reposo es geopotencial. Sobre dicha superficie la gravedad efectiva (gravedad planetaria más aceleración centrífuga) es puramente perpendicular, es decir, anti-paralela a la coordenada vertical definida como $z = r - R_p$, con r la coordenada radial. Bajo la consideración de que el fluido se mueve en escalas de tiempo “lentas” respecto al periodo de rotación del planeta (en términos adimensionales, el número de Rossby -definido más adelante- es muy pequeño), y de que la razón de aspecto del fluido (entendida como el cociente de la escala vertical entre la escala horizontal) también es pequeña, se puede suponer que el balance hidrostático en la vertical se mantiene, y que los términos asociados con la velocidad vertical son despreciables. Como consecuencia, el flujo horizontal tiende a ser independiente de z .

Los efectos de la esfericidad del planeta sobre los flujos geofísicos dependen fuertemente de sus escalas espaciales sobre la superficie. Aparte de los términos geométricos, el efecto más relevante es el asociado con los cambios de latitud que conllevan un cambio en la aceleración de Coriolis. Dicha aceleración depende del parámetro de Coriolis $f = 2\Omega \sin \theta$, con θ la latitud. Cuando las escalas no son globales sino restringidas a una superficie aproximadamente plana, los flujos se pueden describir en un sistema coordenado local (x, y, z) que representan las direcciones este, norte y vertical, respectivamente, con origen en un punto de interés sobre la superficie esférica a una latitud de referencia θ_0 . Los planos cartesianos x - y (tangentes al planeta) en la descripción local reciben el nombre de plano f cuando las escalas del flujo son moderadas (del orden de decenas o algunos pocos cientos de kilómetros) lo cual permite aproximar al parámetro de Coriolis como constante, tal que $f \equiv f_0 = 2\Omega \sin \theta_0$. Para latitudes medias y movimientos con escalas algo mayores (del orden de varios cientos de kilómetros) se denominan

plano β , en el cual se consideran las variaciones espaciales a segundo orden tal que $f = f_0 + \beta y$ donde $\beta = 2\Omega \cos \theta_0 / R_p$.

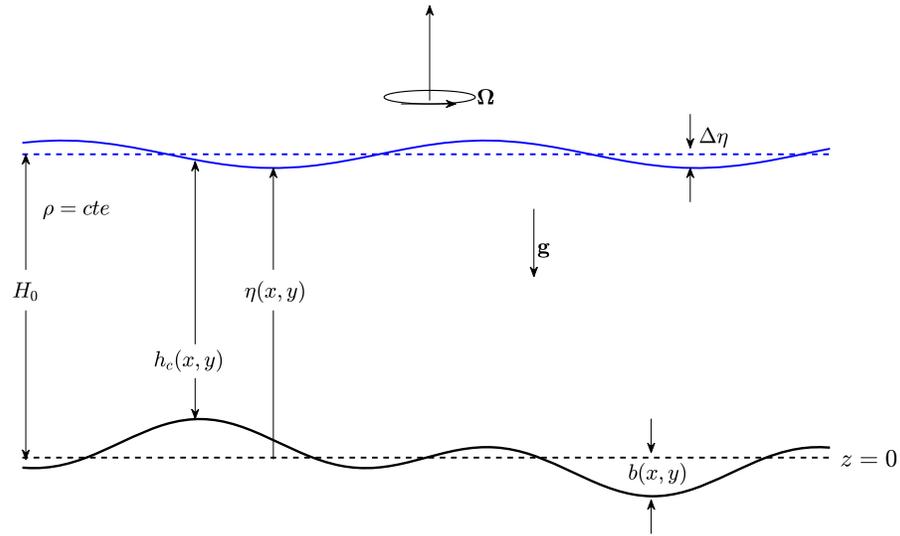


Figure 1. Vista lateral de una capa de fluido homogénea sobre una topografía arbitraria en un sistema en rotación.

Las ecuaciones de momentum para flujos geofísicos en un fluido homogéneo, invíscido y sin forzamientos son dadas como sigue:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \mathbf{f} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g\mathbf{k}, \quad (1)$$

donde $\mathbf{u}(x, y, t) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ representa el campo de velocidad horizontal, $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ es la derivada material, $\mathbf{f} = (f_0 + \beta y)\mathbf{k}$ el vector del parámetro de Coriolis, g es la gravedad, ρ la densidad del fluido y $\nabla = \mathbf{i}\partial/\partial x + \mathbf{j}\partial/\partial y + \mathbf{k}\partial/\partial z$ con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ los vectores unitarios. Del balance hidrostático la presión se puede expresar como $p(x, y, z, t) = \rho g(\eta(x, y, t) - z)$, siendo η la altura de la superficie libre medida desde el fondo en un nivel de referencia $z = 0$, ver Figura 1. Las ecuaciones de momento horizontales se pueden representar como

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \mathbf{f} \times \mathbf{u} = -g\nabla\eta, \quad (2)$$

(la ecuación en la vertical es idénticamente nula). La altura η se puede escribir como $\eta = H_0 + \Delta\eta$ con H_0 la profundidad promedio de la capa de fluido y $\Delta\eta$ las variaciones asociadas a la superficie libre. En términos de la altura de la columna, h_c , y el perfil de la topografía, b , se obtiene para η la expresión alternativa $\eta = h_c + b$.

Además de las leyes de Newton, el flujo debe satisfacer la conservación de masa en tres dimensiones $\nabla \cdot (u, v, w) = 0$, con $w \ll u, v$ la velocidad vertical, la cual establece que cualquier flujo neto no nulo a través de una parcela de fluido implica un cambio en el volumen de ésta si el fluido en cuestión es

incompresible. Utilizando la independencia en la vertical de las componentes horizontales de la velocidad, la ecuación de continuidad se puede integrar en z y evaluar w en el fondo y en la superficie libre usando condiciones cinemáticas (Vallis, 2017). Como resultado, dicho principio de conservación queda expresado como

$$\frac{Dh_c}{Dt} + h_c \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3)$$

El siguiente escalamiento a las ecuaciones de momentum (2) y al principio de conservación de masa (3) permitirá derivar el modelo teórico utilizado en esta tesis, conocido como modelo cuasi-geostrófico (QG), e identificar las restricciones que implica su uso:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= U \mathbf{u}_a \quad ; \quad (x, y) = L(x_a, y_a) \quad ; \quad t = L/U t_a, \\ \mathbf{f} &= f_0(1 + Ro\hat{\beta}y_a)\mathbf{k} = f_0\mathbf{f}_a \quad ; \quad \Delta\eta = \frac{f_0UL}{g}\hat{\eta}_a = Ro\frac{L^2}{L_D^2}H_0\hat{\eta}_a \quad ; \quad \eta = H_0(1 + Ro\frac{L^2}{L_D^2}\hat{\eta}_a) \end{aligned} \quad (4)$$

donde $Ro = U/f_0L$ es el número de Rossby, $\hat{\beta} = \beta L^2/U$ es el parámetro beta y $L_D = \sqrt{gH_0}/f$ es el radio de deformación, y con el subíndice a denotando las cantidades adimensionales. Usando (4) en (2) y (3) se obtiene

$$Ro\frac{D_a\mathbf{u}_a}{Dt_a} + \mathbf{f}_a \times \mathbf{u}_a = -\frac{gH_0}{f_0LU}\nabla_a \left(1 + Ro\frac{L^2}{L_D^2}\hat{\eta}_a\right) \equiv -\nabla_a\hat{\eta}_a, \quad (5)$$

$$\nabla_a \cdot \mathbf{u}_a = -\frac{1}{1 + Ro\frac{L^2}{L_D^2}\hat{\eta}_a - \frac{b_0}{H_0}b_a}\frac{D_a}{Dt_a} \left(Ro\frac{L^2}{L_D^2}\hat{\eta}_a - \frac{b_0}{H_0}b_a\right), \quad (6)$$

con b_0 la amplitud máxima de $b(x, y)$. Al tomar el rotacional sobre las ecuaciones de momentum (5) se obtiene la ecuación para el vector vorticidad $\boldsymbol{\omega}_a = \nabla \times \mathbf{u}_a \equiv (0, 0, \omega_a)$, con cuya componente vertical se deriva la conservación material de vorticidad potencial. En efecto, tomando en cuenta que el vector velocidad es bidimensional, la derivada material de ω_a se obtiene con las derivadas cruzadas de las ecuaciones de momentum horizontales, de donde resulta:

$$\frac{D_a}{Dt} (Ro\omega_a + f_a) + (Ro\omega_a + f_a)\nabla_a \cdot \mathbf{u}_a = 0. \quad (7)$$

Si se reemplaza (6) en (7), se encuentra que

$$\frac{D_a}{Dt_a} \left(\frac{Ro\omega_a + f_a}{1 + Ro\frac{L^2}{L_D^2}\hat{\eta}_a - \frac{b_0}{H_0}b_a} \right) = 0. \quad (8)$$

La cantidad conservada corresponde a la forma adimensional de la vorticidad potencial en el modelo de aguas someras (Vallis, 2017; Pedlosky, 1986).

Una forma simplificada de (8) es posible considerando $Ro \frac{L^2}{L_D^2} \hat{\eta}_a - \frac{b_0}{H_0} b_a \ll 1$, es decir, $Ro \frac{L^2}{L_D^2} \ll 1$ y $\frac{b_0}{H_0} \ll 1$. Entonces, una expansión en series de Taylor permite reescribir la conservación de vorticidad potencial como

$$\frac{D_a}{Dt} \left[(Ro\omega_a + f_a) \left(1 - Ro \frac{L^2}{L_D^2} \hat{\eta}_a + \frac{b_0}{H_0} b_a + \mathcal{O} \left(Ro \frac{L^2}{L_D^2} \hat{\eta}_a - \frac{b_0}{H_0} b_a \right)^2 \right) \right] = 0, \quad (9)$$

Desarrollando el producto dentro del corchete cuadrado en (9), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{D_a}{Dt_a} \left[Ro\omega_a + f_a - Ro \frac{L^2}{L_D^2} (1 + Ro\hat{\beta}y_a) \hat{\eta}_a + \frac{b_0}{H_0} (1 + Ro\hat{\beta}y_a) b_a \right. \\ \left. - Ro^2 \frac{L^2}{L_D^2} \omega_a \hat{\eta}_a + \frac{b_0}{H_0} Ro\omega_a b_a \right] = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Omitiendo los términos de orden $(Ro^2, Rob_0/H_0)$, se tiene que

$$\frac{D_a}{Dt_a} \left[Ro\omega_a + 1 + Ro\hat{\beta}y_a - Ro \frac{L^2}{L_D^2} \hat{\eta}_a + \frac{b_0}{H_0} b_a \right] = 0. \quad (11)$$

La nueva cantidad materialmente conservada es la vorticidad potencial correspondiente al modelo cuasi-geostrófico. Dividiendo entre Ro , la expresión para este principio es

$$\frac{D_a}{Dt_a} \left[\omega_a + \hat{\beta}y_a - \frac{L^2}{L_D^2} \hat{\eta}_a + \frac{1}{Ro} \frac{b_0}{H_0} b_a \right] = 0. \quad (12)$$

La derivación de 12 permite resumir las principales características y restricciones del modelo cuasi-geostrófico, como se lista a continuación:

- El número de Rossby se considera pequeño, es decir, las escalas temporales del flujo se consideran grandes respecto a las escalas de tiempo asociadas a la rotación planetaria.
- Las variaciones en el fondo debido a la topografía son pequeñas en comparación con la profundidad media del fluido.
- El cuadrado de la razón de aspecto entre la escala de longitud del flujo y el radio de deformación es como máximo de $\mathcal{O}(1)$.
- La forma explícita de la ecuación (20) en términos de la función corriente implica el uso del balance geostrófico.

En esta tesis las variaciones asociadas a la superficie libre no son consideradas, lo cual equivale a un

radio de deformación L_D infinito. Además, los flujos en cuestión se suponen con escalas horizontales moderadas en el plano f , es decir, lo suficientemente pequeñas para no ser afectados dinámicamente por los cambios de latitud, $\hat{\beta} \rightarrow 0$. Por tal motivo el desarrollo de los subsecuentes capítulos se basará en el siguiente principio de conservación

$$\frac{D_a}{Dt_a} \left[\omega_a + \frac{1}{Ro} \frac{b_0}{H_0} h_a \right] = 0, \quad (13)$$

el cual puede expresarse explícitamente, en términos de la función corriente ψ_a , de la forma

$$\frac{\partial}{\partial t_a} \left(\nabla_a^2 \psi_a + \frac{1}{Ro} \frac{b_0}{H_0} h_a \right) + J \left(\psi_a, \nabla_a^2 \psi_a + \frac{1}{Ro} \frac{b_0}{H_0} h_a \right) = 0, \quad (14)$$

donde $u_a = -\partial_y \psi_a$ y $v_a = \partial_x \psi_a$, tal que $\omega_a = \nabla \times \mathbf{u}_a \equiv \nabla_a^2 \psi_a$ y $J(,)$ es el operador Jacobiano. Note de (14) que los flujos estacionarios satisfacen que

$$\boxed{J \left(\psi_a, \nabla_a^2 \psi_a + \frac{1}{Ro} \frac{b_0}{H_0} h_a \right) = 0.} \quad (15)$$

2.1.2 Estabilidad hidrodinámica

La capacidad de un flujo para mantenerse aún en presencia de perturbaciones externas depende de la estabilidad del sistema físico. El problema de la estabilidad hidrodinámica, en general, consiste en determinar si la perturbación a la que es sometido el flujo decae en el tiempo o crece al punto de eliminar la estructura original (flujo base), alimentándose de su energía. Si la perturbación se atenúa (intensifica), se dice que el flujo base es estable (inestable) ante dicha perturbación (Drazin and Reid, 2004; Kundu et al., 2014). Es importante notar que la perturbación es clasificada según su estructura espacial o la dirección en la que se presenta. Por ejemplo, un flujo base circular puede ser sujeto de inestabilidades azimutales o radiales, de modo tal que puede ser inestable para una clase pero estable para otra. Cuando el problema considera perturbaciones de amplitud infinitesimal, el análisis se denomina lineal, mientras que si ésta es finita, el problema se denomina no lineal. En general, los flujos que se consideran admisibles para un análisis de estabilidad, los flujos base, son aquellos que corresponden a estados estacionarios de una cierta dinámica.

Esta tesis presenta un análisis de estabilidad lineal para flujos base correspondientes a algunos estados estacionarios de la dinámica del modelo cuasi-geostrófico. Dos tipos de inestabilidad son consideradas:

aquellas de tipo barotrópico, que corresponden a perturbaciones de naturaleza bidimensional e independientes de efectos baroclínicos; y las de tipo centrífugo, que son de naturaleza tridimensional y asociadas con la conservación de momentum angular.

Los ejemplos clásicos de inestabilidad barotrópica investigan la estabilidad de flujos base, paralelos y circulares, en situaciones sin topografía (fondo plano). El estudio de flujos paralelos revela que las características del perfil de velocidad determinan la estabilidad del sistema. El caso de una contracorriente, en el que la velocidad es discontinua donde el flujo cambia de signo, desarrolla su inestabilidad (denominada de tipo Kelvin-Helmholtz) a lo largo de la línea de discontinuidad. En contraste, el caso del flujo paralelo asociado a un jet puntual (correspondiente a un campo de velocidad con un máximo donde se define el jet y decreciendo linealmente a cero alrededor de éste) al no desarrollar la perturbación se considera estable (Vallis, 2017).

En forma analítica la perturbación se introduce como un término aditivo al flujo base, siguiendo el método de modos normales. El método expresa la perturbación como una función exponencial compleja, cuyo argumento depende linealmente del tiempo y de al menos alguna de las variables espaciales de las que no depende el flujo base, y con una amplitud que depende espacialmente de las coordenadas del flujo estacionario. Así, por ejemplo, para un sistema descrito en coordenadas cartesianas en el que el flujo base es descrito por la función corriente $\Psi = \Psi(y)$, el método de modos normales expresa la perturbación como

$$\psi'(x, y, t) = \tilde{\psi}(y)e^{i(kx - \sigma t)}, \quad (16)$$

con k el número de onda en la dirección x y $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ la frecuencia compleja. La amplitud de la perturbación es infinitesimal, $\tilde{\psi} \ll \Psi$. Note que si σ es puramente real ($\sigma_i = 0$) la perturbación evoluciona como una onda, estado que se conoce como estabilidad marginal (Kundu et al., 2014). Sin embargo, cuando la parte imaginaria σ_i es positiva la perturbación crece con el tiempo, mientras que si es negativa decae. En este sentido σ_i es la razón de crecimiento (o decrecimiento) de la perturbación. En el primer caso, el flujo se considera inestable, mientras que en el segundo, estable.

Del estudio de inestabilidades barotrópicas dos importantes resultados surgen, el Teorema de Rayleigh y el Teorema de Fjørtoft. Dichos teoremas establecen criterios necesarios de inestabilidad, es decir, condiciones para la existencia de una componente imaginaria positiva de la frecuencia σ . Para ilustrar el método de modos normales en el análisis de estabilidad lineal, a continuación se derivarán estos teoremas para el caso de un flujo zonal bajo la acción del efecto β , sobre un fondo plano y despreciando los efectos de la superficie libre (Vallis, 2017). Bajo estas condiciones, la expresión dimensional de (8) toma la

forma

$$\frac{D}{Dt}(\omega + \beta y) = 0. \quad (17)$$

Los flujos zonales con dependencia meridional, $\mathbf{U}_b = U_b(y)\mathbf{i}$, son soluciones estacionarias de (17). La perturbación de la velocidad, considerando el método de modos normales (16) para la función corriente, es dada por $u'(x, y, t) = -\partial_y \tilde{\psi}(y)e^{i(kx - \sigma t)}$. Así, el flujo perturbado queda expresado como

$$u(x, y, t) = U_b(y) - \partial_y \tilde{\psi}(y)e^{i(kx - \sigma t)}. \quad (18)$$

Sustituyendo (18) en (17) y linealizando se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi' + U_b \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi' + (\beta - \partial_{yy} U_b) \frac{\partial}{\partial x} \psi' = 0, \quad (19)$$

que al reescribir, resulta

$$(\partial_{yy} \tilde{\psi} - k^2 \tilde{\psi}) + \frac{\beta - \partial_{yy} U_b}{U_b - \sigma/k} \tilde{\psi} = 0, \quad (20)$$

conocida como la ecuación de Rayleigh (Vallis, 2017).

La condición necesaria de inestabilidad se obtiene multiplicando (20) por el complejo conjugado de $\tilde{\psi}$ e integrando sobre el dominio del flujo, de donde se encuentra

$$\int_{y_1}^{y_2} (|\partial_y \tilde{\psi}|^2 + k^2 |\tilde{\psi}|^2) dy - \int_{y_1}^{y_2} (\beta - \partial_{yy} U_b) \frac{U_b - \sigma_r/k}{|U_b - \sigma/k|^2} |\tilde{\psi}|^2 dy - i\sigma_i/k \int_{y_1}^{y_2} \frac{\beta - \partial_{yy} U_b}{|U_b - \sigma/k|^2} |\tilde{\psi}|^2 dy = 0. \quad (21)$$

La igualdad a cero requiere que la parte real (la suma de las dos primeras integrales) e imaginaria (el tercer término) sean nulas. Por lo tanto, de éste último se tiene que

$$\sigma_i \int_{y_1}^{y_2} \frac{\beta - \partial_{yy} U_b}{|U_b - \sigma/k|^2} |\tilde{\psi}|^2 dy = 0. \quad (22)$$

Para que σ_i sea diferente de cero (y por lo tanto el flujo pueda ser inestable) es necesario que la integral sea cero y por lo tanto que la cantidad $\beta - \partial_{yy} U_b$ cambie de signo en alguna parte del dominio, lo cual establece el *Teorema del punto de inflexión de Rayleigh*.

La parte real de (21) permite concluir que cuando se cumple la condición (22) es necesario que se satisfaga que

$$\int_{y_1}^{y_2} (\beta - \partial_{yy} U_b) \frac{U_b - U_b^*}{|U_b - \sigma/k|^2} |\tilde{\psi}|^2 dy > 0. \quad (23)$$

con U_b^* la velocidad evaluada en el punto del dominio donde $\beta - \partial_{yy} U_b$ satisface el Teorema del punto

de inflexión de Rayleigh. Para satisfacer (23) se requiere que la cantidad $(\beta - \partial_{yy}U_b)(U_b - U_b^*)$ sea positiva en alguna parte del dominio, lo cual constituye el *Teorema de Fjørtoft*.

2.2 Preliminares numéricos

En esta sección se presentan las características de dos modelos numéricos utilizados en esta tesis. El primero de ellos nos permitirá simular la evolución de la nueva familia de vórtices estacionarios que se presenta en el capítulo 3. El segundo, se usará para resolver eficientemente el problema de eigenvalores, introducido en el capítulo 4, asociado al análisis de estabilidad lineal de los vórtices mencionados.

2.2.1 Modelo numérico

La evolución de las diversas estructuras vorticales que serán presentadas en esta tesis serán simuladas numéricamente utilizando un modelo basado en diferencias finitas. El esquema soluciona las ecuaciones de gobierno para un fluido incompresible y bidimensional bajo la aproximación de aguas someras, incluyendo efectos topográficos. El esquema numérico fue inicialmente desarrollado por Orlandi (1990) para flujos puramente bidimensionales, modificado por van Geffen (1998) para sistemas en rotación y extendido por Zavala Sansón and van Heijst (2002) para incluir efectos topográficos [ver también Zavala Sansón (2000)].

Para la aproximación cuasi-geostrófica se tienen variaciones topográficas mucho menores que la profundidad media, $b \ll H_0$ (ver sección 2.1). En términos de la función corriente ψ , la vorticidad relativa y potencial son

$$\omega = \nabla^2\psi \quad ; \quad q = \omega + \frac{f_0 b}{H_0}. \quad (24)$$

El esquema numérico resuelve la ecuación de vorticidad en la formulación ω - ψ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2\psi + J(\psi, q) = 0 \quad (25)$$

donde $u = -\partial_y\psi$ y $v = \partial_x\psi$. La metodología usada por el modelo es la siguiente: Primero, se define la distribución de vorticidad inicial ω y el campo de profundidad h_c en un dominio discretizado con una malla rectangular. Al invertir el Laplaciano en (24) se obtiene el campo de función corriente asociado al campo inicial de vorticidad. Luego, usando (25) se obtiene la nueva ψ y por lo tanto un nuevo campo de vorticidad, con el cual el proceso se reinicia para el siguiente paso de tiempo.

En el esquema numérico los términos no lineales son calculados usando una discretización de Arakawa, mientras que para avanzar en el tiempo se utiliza un esquema de Runge-Kutta de tercer orden. Debido a que en esta tesis los efectos viscosos no son fundamentales, las condiciones de frontera, tanto en las paredes laterales como en el fondo, son de libre deslizamiento.

2.2.2 Métodos espectrales

El análisis de estabilidad lineal está asociado a la solución de un problema de eigenvalores, el cual suele ser difícil de resolver analíticamente en la mayoría de los casos. Es así que los métodos numéricos se convierten en una herramienta de gran utilidad para el estudio de problemas de estabilidad. La convergencia de la solución numérica del problema de eigenvalores resulta ser muy sensible al tamaño de la discretización implementada, implicando un alto costo computacional. Ante dicho comportamiento, los esquemas espectrales resultan más eficientes en comparación con aquellos basados en diferencias finitas. En lo que sigue se presentarán algunas características importantes de los esquemas espectrales de acuerdo a los textos de Trefethen (2000) y Yuhong (1998).

En las últimas décadas las aproximaciones espectrales han probado su eficiencia en la resolución de problemas al poseer una convergencia exponencial, en contraste a la convergencia algebraica que tienen los métodos basados en diferencias finitas. Las aproximaciones espectrales se basan en el hecho que la solución exacta a un problema puede ser aproximada por polinomios ortogonales proyectados en una malla discretizada. Existen tres métodos principales para realizar estas aproximaciones: el método Galerkin, el método Tau y el método de colocación. El último de ellos, basado en polinomios de Chebyshev para la distribución de los puntos de malla, será el utilizado en esta tesis dada su fácil implementación respecto a los otros métodos. Un aspecto que resulta importante es el sistema coordenado en el que la discretización es realizada, cuya elección depende de la simetría que presenta el problema de interés. El presente estudio de estabilidad corresponde a flujos circulares y topografías axisimétricas. Así, el método espectral de colocación se implementará exclusivamente sobre la dirección radial. Nótese que este problema unidimensional simplifica la complejidad del método, que en general usa polinomios de Chebyshev para la variable radial, r , y series de Fourier para la variable angular, θ .

Los métodos espectrales basan su discretización en la interpolación con polinomios ortogonales, los cuales dependen de las características de la función que se discretiza. Si la función, por ejemplo, es periódica, la interpolación con funciones trigonométricas en una malla regular es adecuada. Por el contrario, cuando la función no es periódica la mencionada interpolación ya no es útil, y transformar la función

a su versión periódica resulta en el fenómeno de Gibbs. Esta anomalía surge por las discontinuidades del comportamiento a trozos de la nueva función periódica, contaminando globalmente la descripción espectral. Por lo anterior, el método espectral usa polinomios algebraicos en la discretización de funciones no periódicas. En lo que sigue se mostrará que la convergencia de la interpolación es más eficiente si las raíces del polinomio no están uniformemente distribuidas.

Considere un polinomio de grado N en el intervalo $[-1, 1]$ definido como

$$P(z) = \prod_{k=1}^N (z - x_k) \quad \rightarrow \quad |P(z)| = \prod_{k=1}^N |(z - x_k)| \quad (26)$$

con $\{x_k\}$ las raíces del polinomio dentro del intervalo $[-1, 1]$. Reescribiendo, se obtiene que

$$\ln |P(z)| = \sum_{k=1}^N \ln |z - x_k| \equiv N\phi(z) \quad \text{con} \quad \phi(z) = \int_{-1}^1 \left[\sum_{k=1}^N \frac{\delta(x - x_k)}{N} \right] \ln |z - x| dx. \quad (27)$$

Para un valor de N lo suficientemente grande el término en corchetes cuadrados en la integral puede expresarse como una función suave, $\varrho(x)$, correspondiente a la densidad de raíces del polinomio, tal que

$$\phi(z) = \int_{-1}^1 \varrho(x) \ln |z - x| dx. \quad (28)$$

Note que la división por N en el integrando garantiza que la función densidad se considere normalizada (i.e. $\int_{-1}^1 \varrho(x) dx = 1$). Para el caso de una densidad ϱ constante, por ejemplo $\varrho(x) = 1/2$, se tiene que

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln |z - x| dx = -\frac{1}{2} [(z - x) \ln(z - x) - (z - x)]_{-1}^1, \\ &= -1 + \frac{z+1}{2} \ln(z+1) - \frac{z-1}{2} \ln(z-1), \end{aligned} \quad (29)$$

donde $\phi(\pm 1) = -1 + \ln 2$ y $\phi(0) = -1$. Por tanto, la convergencia del polinomio en los extremos y el interior del intervalo $[-1, 1]$ es dada por

$$p(z) \sim e^{N\phi(z)} = \begin{cases} 2^N e^{-N} & \text{para } x = \pm 1, \\ e^{-N} & \text{para } x = 0. \end{cases} \quad (30)$$

De aquí se concluye que los valores que toma $p(z)$ en el contorno y el interior del intervalo difieren entre sí por un factor de 2^N . La divergencia presente en los extremos, que contamina la interpolación polinomial debido a la uniformidad de las raíces, es un fenómeno conocido como fenómeno de Runge. Con el propósito de confirmar la naturaleza del fenómeno de Runge se analizará la convergencia considerando

una densidad de raíces no uniforme, por ejemplo

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \quad (31)$$

de donde se obtiene a partir de (28) que

$$\phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(z-x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \ln \frac{|z - \sqrt{z^2-1}|}{2}. \quad (32)$$

En el intervalo $[-1, 1]$ la parte real de la función $\phi(z)$ toma el valor constante $-\ln 2$. Luego, la convergencia en este caso es expresada por

$$p(z) = e^{-N \ln 2} = 2^{-N}. \quad (33)$$

Este resultado permite concluir que una interpolación polinomial converge regularmente en todo el intervalo cuando las raíces del polinomio están distribuidas de forma no uniforme. Esta propiedad explica porqué los métodos espectrales de colocación usan mallas no uniformes en el proceso de discretización. Particularmente, la colocación de nodos con una densidad de la forma (31) tienen en medio del intervalo un espaciamiento promedio, $\Delta \equiv 1/\rho(x=0) = \mathcal{O}(N^{-1})$, y en los extremos del intervalo uno dado por $\Delta \equiv 1/\rho(x \pm 1) < \mathcal{O}(N^{-1})$. Las mallas con nodos distribuidos según las raíces del polinomio de Chebyshev, $T_N(x) = \cos(N \cos^{-1} x)$, definidas por

$$x_k = \cos(k\pi/N) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N, \quad (34)$$

satisfacen las características de (31). Note que

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Dada la colocación x_j de los puntos sobre la malla, la interpolación de una función $f(x)$ puede expresarse siguiendo el método de Lagrange como

$$f(x) = \sum_{j=0}^N f_j P_j(x) \quad (35)$$

con $P_j(x)$ el polinomio interpolante dado por

$$P_j(x) = \frac{1}{a_j} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N (x - x_k) \quad \text{con} \quad a_j = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N (x_j - x_k). \quad (36)$$

Luego, se puede verificar que

$$\begin{aligned} \ln P_j(x) &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N \ln(x - x_k) - \ln a_j, \\ \frac{d}{dx} P_j(x) &= P_j(x) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N \frac{1}{x - x_k} = \frac{1}{a_j} \sum_{l=0}^N \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j, l}}^N (x - x_k), \\ \frac{d}{dx} P_j(x_i) &= \frac{1}{a_j} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j, i}}^N (x_i - x_k) = \frac{1}{a_j} \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j, i}}^N (x_i - x_k), \\ \frac{d}{dx} P_j(x_i) &= \frac{a_i}{a_j} \frac{1}{x_i - x_j}. \end{aligned} \quad (37)$$

Usando (35) la derivada de $f(x)$ viene dada por

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{j=0}^N \frac{d}{dx} P_j(x) f_j, \quad (38)$$

de donde se puede concluir que $\frac{d}{dx} P_j(x_i)$ corresponde al operador derivada, D , de primer orden y de $N + 1 \times N + 1$ filas y columnas:

$$D_{ij} = \frac{a_i}{a_j} \frac{1}{x_i - x_j} \quad \text{para} \quad i \neq j \quad ; \quad D_{jj} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N \frac{1}{x_j - x_k}. \quad (39)$$

Para los puntos Chebyshev la forma explícita del operador diferencial D toma la forma

$$\begin{aligned} D_{00} &= \frac{2N^2 + 1}{6} \quad ; \quad D_{NN} = -\frac{2N^2 + 1}{6} \\ D_{jj} &= \frac{-x_j}{2(1 - x_j^2)} \quad \text{para} \quad j = 1, \dots, N - 1 \\ D_{ij} &= \frac{c_i (-1)^{i+j}}{c_j x_i - x_j} \quad \text{para} \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (40)$$

donde

$$c_i = \begin{cases} 2 & i = 0 \text{ ó } N \\ 1 & i \text{ de lo contrario.} \end{cases} \quad (41)$$

El operador diferencial D se conoce como de primer tipo debido a que se obtiene de puntos de Chebyshev de primer tipo o de tipo Gauss-Lobatto, que es como se conoce a la colocación de nodos de la forma $x_j = \cos(j\pi/N)$. La principal característica de esta colocación es que $x_j \in [-1, 1]$. Alternativamente, se pueden definir puntos Chebyshev y_j de segundo tipo sobre el intervalo semi abierto $(-1, 1]$, donde

$$y_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N+1}\right) \text{ para } j = 0, 1, \dots, N. \quad (42)$$

La diferencia entre los dominios de x_j y y_j resulta fundamental, ya que para un problema descrito en coordenadas polares los puntos de Chebyshev de segundo tipo permiten evitar la condición de polo en $r = 0$. Usualmente, dicha propiedad se requiere para evitar la singularidad de la coordenada, la cual disminuye la precisión y eficiencia computacional del método numérico. La condición de polo suele determinarse por aproximaciones asintóticas, pero en ocasiones puede traer errores y nuevas dificultades. Entonces, la ventaja de la colocación Chebyshev de segundo tipo es que permite ignorar la condición de polo.

La interpolación para una colocación de segundo tipo introduce el nuevo polinomio interpolante, $\tilde{P}_j(x)$, el cual se relaciona con $P_j(x)$, mediante

$$\tilde{P}_j(x) = \frac{1+y_j}{1+x} P_j(x). \quad (43)$$

La relación entre las derivadas espectrales de ambos tipos de colocación es dada por

$$\tilde{D}_{ij} \equiv \frac{d}{dx} \tilde{P}_j(y_i) = \frac{1+y_j}{1+y_i} D_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{1+y_j} \quad (44)$$

donde $P_j(y_i) = \delta_{ij}$. Nótese desde (34) y (42) que esta comparación es posible si al usar N puntos para la colocación de segundo tipo, se asignan $N+1$ puntos en la de primer tipo. Definidas las derivadas espectrales de primer orden, las derivadas de orden superior pueden obtenerse mediante el producto matricial de las mismas.

Como se indicó anteriormente, la discretización en nuestro caso de interés se aplicará en el eje radial, dada la simetría que presentan los flujos de interés en el problema de estabilidad. Los resultados de la teoría espectral, para una malla cartesiana sobre el intervalo $(-1, 1]$ se usan equivalentemente para el

caso radial en el intervalo $(0, 1]$, una vez que se aplica la siguiente transformación

$$\tilde{R}_j = \frac{r_{max}y_j + r_{max}}{2}, \quad (45)$$

la cual mapea el dominio espectral cartesiano $y_j \in (-1, 1]$ a uno radial $\tilde{R}_j \in (0, 1]$, donde r_{max} representa el valor máximo en r .

En el capítulo 4 las derivadas espectrales hasta de segundo orden, presentadas en esta sección, serán utilizadas para resolver a lo largo del eje radial el problema de eigenvalores asociado al análisis de estabilidad lineal.

Capítulo 3. Solución de vórtices cuasi-geostróficos sobre una topografía aislada

El movimiento de flujos a gran escala en planetas en rotación está principalmente confinado a una superficie bidimensional (2D) perpendicular a la gravedad. Por ejemplo, los océanos son frecuentemente modelados como un flujo 2D sobre un plano tangente a la superficie de la Tierra y las atmósferas planetarias son consideradas como flujos sobre una superficie esférica (Vallis, 2017, p 66). Aunque muchos flujos geofísicos son altamente turbulentos y muestran patrones complicados, frecuentemente presentan estructuras coherentes que pueden ser representadas mediante soluciones analíticas de modelos dinámicos 2D. Ejemplos clásicos son las soluciones no lineales de las ecuaciones de Euler 2D para vórtices monopoles (Rankine, Kirchoff), dipolares (Lamb, Chaplygin) y elípticos (Kida). Una revisión completa de algunas de estas estructuras fue reportada por Meleshko and van Heijst (1994). En el contexto cuasi-geostrófico (QG), Stern (1975) [ver también Flierl et al. (1983)] derivó los llamados ‘modones’, los cuales resultan ser una clase particular de los dipolos de Chaplygin (Meleshko and van Heijst, 1994). Recientemente, Viúdez (2019a,b) proporcionó soluciones en modos azimutales para vórtices multipolares en las ecuaciones de Euler 2D y QG baroclínicos.

En este capítulo se discute una nueva familia de soluciones analíticas no lineales de vórtices atrapados sobre una topografía variable. En un marco de referencia en rotación los efectos invíscidos de la topografía promueven la formación de vórtices debido a la conservación de vorticidad potencial (Huppert and Bryan, 1976). Sobre una montaña submarina, por ejemplo, se genera vorticidad anticiclónica sobre la cima debido a efectos de compresión, mientras que las columnas de fluido al moverse cuesta abajo son estiradas, generando vorticidad ciclónica (Verron and Le Provost, 1985). La dinámica de estos flujos suele ser incorporada en modelos de aguas someras (Grimshaw et al., 1994). Cuando las variaciones topográficas son pequeñas con respecto a la profundidad media del fluido, el modelo se reduce a las ecuaciones QG (Carnevale et al., 1995). Una revisión sobre la dinámica 2D con topografía se puede consultar en Zavala Sansón and van Heijst (2014).

El movimiento de un fluido en el sistema en rotación puede permanecer atrapado durante largos periodos, manteniendo estructuras bien definidas. Este llamativo fenómeno permitió a Hide (1961) sugerir que la Gran Mancha Roja de Júpiter podría ser la manifestación de un vórtice columnar sobre un “rasgo topográfico” de la superficie subyacente a la atmósfera (una hipótesis que prontamente fue descartada). Más recientemente, Zavala Sansón et al. (2012) realizaron experimentos de laboratorio en un tanque en rotación, en el cual generaron vórtices ciclónicos cerca de una montaña sumergida. Los resultados más

relevantes fueron la formación de un par ciclón-anticiclón rotando alrededor de la montaña. Los autores notaron que tal estructura era similar a las ondas topográficas de modo-1 alrededor de una topografía axisimétrica reportada en un estudio analítico previo (Zavala Sansón, 2010).

Las soluciones más relevantes en este estudio corresponden a vórtices dipolares sobre una topografía aislada en un flujo QG. Las estructuras son similares al vórtice de Chaplygin, el cual puede ser simétrico y moviéndose a lo largo de una línea recta, o asimétrico y derivando sobre una trayectoria circular (Meleshko and van Heijst, 1994). Los dipolos pueden ser asimétricos debido a efectos de fricción en el fondo, como muestran recientes estudios experimentales, numéricos y teóricos (Zavala Sansón et al., 2001; Makarov, 2012). En contraste, la asimetría en el caso que estudiamos aquí es debida a la forma del fondo variable, y los dipolos permanecen atrapados a la topografía mientras rotan lentamente alrededor de ésta. Para obtener las soluciones se sigue una aproximación similar a la de Viúdez (2019a): usando coordenadas polares, la función corriente es separable y la dependencia azimutal se expresa como un conjunto infinito de modos independientes. La diferencia crucial en nuestra aproximación es la consideración de un término adicional asociado con la presencia de una montaña o un valle axisimétrico en el fondo. Los dipolos encontrados son soluciones estacionarias y no lineales de la dinámica QG en un marco de referencia que rota con el vórtice. Los movimientos rotatorios del dipolo dependen enteramente de las características de la topografía.

El capítulo está organizado como sigue: En la sección 3.1, se presentan las soluciones interiores para vórtices multipolares; luego, se introduce el flujo exterior para los modos $m = 0$ y 1 . Se derivan fórmulas explícitas para la rapidez angular de modos dipolares y para la condición de atrapamiento sobre la topografía. La sección 3.2 evalúa la estructura de soluciones monopolares y dipolares para un conjunto específico de topografías. Adicionalmente, se llevan a cabo simulaciones numéricas para evaluar los resultados analíticos. En la sección 3.3 los resultados son resumidos y discutidos.

3.1 Soluciones QG con topografía axisimétrica

Considere un fluido invíscido, incompresible y barotrópico en un régimen QG en el plano f , sobre una montaña o un valle axisimétrico (ver Figura 2). Usando un sistema coordenado polar (r, θ) , la ecuación de vorticidad potencial es [ver (Vallis, 2017, pp. 207-211)]

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J[\psi, \nabla^2 \psi + h(r)] = 0, \quad (46)$$

donde $\omega = \nabla^2\psi$ es la vorticidad relativa con ψ una función corriente, $h(r) = f_0 b(r)/H_0$ es la vorticidad ambiente con $b(r)$ la topografía centrada en $r = 0$, f_0 el parámetro de Coriolis y H_0 la profundidad promedio de la capa de fluido. El operador Jacobiano es $J(a, b) \equiv (\partial_r a \partial_\theta b - \partial_\theta a \partial_r b)/r$ y el Laplaciano $\nabla^2 a = \partial_{rr} a + \partial_r a/r + (1/r^2)\partial_{\theta\theta} a$, donde $\partial_r, \partial_\theta$ indican derivadas parciales. Las componentes radial y azimutal de la velocidad son definidas como $u = -\partial_\theta \psi/r$ and $v = \partial_r \psi$, respectivamente. La vorticidad potencial se define como

$$q = \nabla^2\psi + h = \omega + h. \quad (47)$$

De acuerdo a (46), q se conserva materialmente.

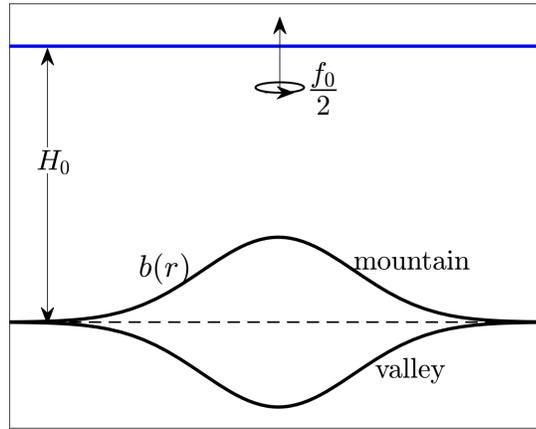


Figure 2. Vista lateral de una capa de fluido homogénea sobre una montaña o valle submarino axialmente simétrico $b(r)$, en un plano- f con la profundidad promedio H_0 .

3.1.1 Modos azimutales sobre la topografía

Se buscan soluciones a la ecuación de vorticidad (46) basadas en la descomposición en modos azimutales usada por Viúdez (2019a) (de aquí en adelante referido como V19), quien estudió el caso puramente 2D, con $h(r) = 0$. En la presencia de topografía, $h(r) \neq 0$, se propone una función corriente con dos términos

$$\psi_m(r, \theta) = \psi_{Vm}(r, \theta) + \phi(r), \quad (48)$$

donde

$$\psi_{Vm}(r, \theta) = \text{Re} \left[\hat{\psi}_m J_m(c_0 r) e^{im\theta} \right] \quad (49)$$

son las soluciones estacionarias de V19 para los modos azimutales $m (= 0, 1, \dots)$ en ausencia de topografía, tal que $J(\psi_{Vm}, \nabla^2 \psi_{Vm}) = 0$. Las amplitudes complejas $\hat{\psi}_m$ definen la intensidad y orientación del vórtice, J_m es la función de Bessel de primer tipo de orden m y c_0 es un factor de escalamiento para

la coordenada radial con unidades de 1/longitud. Los efectos de la topografía están incluidos en $\phi(r)$, el cual se considera puramente radial debido a la simetría de la montaña o valle submarino. Para obtener una expresión explícita de $\phi(r)$, se reemplaza (48) en la ecuación de vorticidad (46), lo cual produce

$$-\frac{\partial \psi_{Vm}}{\partial \theta} \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} + c_0^2 \phi + h \right) = 0, \quad (50)$$

donde se ha usado que $\nabla^2 \psi_{Vm} = -c_0^2 \psi_{Vm}$. Por lo tanto, para satisfacer esta expresión para cualquier modo m es suficiente que la función $\phi(r)$ obedezca la ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} + c_0^2 \phi + h = h_0, \quad (51)$$

donde h_0 es una constante. En términos de la coordenada adimensional $s = c_0 r$, (51) se transforma en:

$$\frac{d^2 \phi}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{d\phi}{ds} + \phi = \frac{h_0 - h(s)}{c_0^2} \equiv H(s). \quad (52)$$

La función $H(s)$ contiene la información sobre la topografía, y su magnitud es de orden h_0/c_0^2 (con las mismas unidades que la función corriente). Es conveniente escoger $h_0 = h(0)$ tal que H sea cero en el origen. También, note que $H = 0$ en la ausencia de topografía.

La solución general de (52) es la suma de la solución homogénea y la solución particular. La forma homogénea de (52) es una ecuación de Bessel, cuya solución general es una combinación lineal de la función de orden cero de primer y segundo tipo, $J_0(s)$ y $Y_0(s)$, respectivamente. Se requiere que las soluciones sean finitas en $s = 0$, tal que la solución homogénea únicamente involucra a $J_0(s)$. Además, una solución particular de (52) puede ser obtenida vía el método de variación de parámetros. Así, la solución general es

$$\phi(s) = \frac{h_0}{c_0^2} C J_0(s) + Y_0(s) \int_0^s \frac{H(s') J_0(s')}{W[J_0(s'), Y_0(s')]} ds' - J_0(s) \int_0^s \frac{H(s') Y_0(s')}{W[J_0(s'), Y_0(s')]} ds', \quad (53)$$

donde $W = J_0 Y_0' - Y_0 J_0'$ es el Wronskiano. El primer término representa la solución homogénea, la cual tiene una estructura axisimétrica de amplitud h_0/c_0^2 modulada por la constante C , adimensional y arbitraria. Por conveniencia, se considera que esta constante es diferente para cada modo m y se denotará como C_m . Los últimos dos términos son una solución particular, los cuales pueden ser reescritos aplicando la identidad Wronskiana para las funciones de Bessel, $W[J_0(s), Y_0(s)] = 2/\pi s$ (Watson, 1986, p. 76).

Así,

$$\phi(s) = \frac{h_0}{c_0^2} C_m J_0(s) + \frac{\pi}{2} Y_0(s) \int_0^s H(s') J_0(s') s' ds' - \frac{\pi}{2} J_0(s) \int_0^s H(s') Y_0(s') s' ds'. \quad (54)$$

Usando (54) en (48), se obtienen soluciones estacionarias al modelo QG con una topografía axisimétrica sobre el plano completo. Sin embargo, para conseguir una estructura vortical físicamente significativa con vorticidad acotada, se requiere restringir las soluciones dentro de la región interior que contiene a la topografía y determinar un flujo potencial adecuado en el dominio exterior. Lo anterior debido a que la naturaleza armónica de las funciones de Bessel no permiten garantizar que en el infinito el fluido se encuentre en reposo.

3.1.2 Flujo interior

Las soluciones interiores (denotadas con subíndice I) dentro de una región circular con radio s_l (definido abajo) son:

$$\begin{aligned} \psi_{Im}(s, \theta) = \operatorname{Re} \left[\widehat{\psi}_m J_m(s) e^{im\theta} \right] + \frac{h_0}{c_0^2} C_m J_0(s) + \frac{\pi}{2} Y_0(s) \int_0^s H(s') J_0(s') s' ds' \\ - \frac{\pi}{2} J_0(s) \int_0^s H(s') Y_0(s') s' ds', \quad s \leq s_l. \end{aligned} \quad (55)$$

El campo de velocidad (expresado en términos de los vectores unitarios $\widehat{\mathbf{e}}_r$ y $\widehat{\mathbf{e}}_\theta$) y la vorticidad relativa son calculados directamente:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}_{Im}(s, \theta)}{c_0} = -\frac{m}{s} \operatorname{Re} \left[i \widehat{\psi}_m J_m(s) e^{im\theta} \right] \widehat{\mathbf{e}}_r + \left[\operatorname{Re} \left[\widehat{\psi}_m J'_m(s) e^{im\theta} \right] - \frac{h_0}{c_0^2} C_m J_1(s) - \right. \\ \left. \frac{\pi Y_1(s)}{2} \int_0^s H(s') J_0(s') s' ds' + \frac{\pi J_1(s)}{2} \int_0^s H(s') Y_0(s') s' ds' \right] \widehat{\mathbf{e}}_\theta, \quad s \leq s_l, \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{Im}(s, \theta)}{c_0^2} = -\operatorname{Re} \left[\widehat{\psi}_m J_m(s) e^{im\theta} \right] - \frac{h_0}{c_0^2} C_m J_0(s) - \frac{\pi}{2} Y_0(s) \int_0^s H(s') J_0(s') s' ds' \\ + \frac{\pi}{2} J_0(s) \int_0^s H(s') Y_0(s') s' ds' + H(s), \quad s \leq s_l. \end{aligned} \quad (57)$$

Note de (55) y (57) que la vorticidad es

$$\omega_m(s, \theta) = c_0^2 [-\psi_m(s, \theta) + H(s)]. \quad (58)$$

Sustituyendo $H(s)$ de (52) se encuentra que la vorticidad potencial es proporcional a la función corriente:

$$q(s, \theta) \equiv \omega_m(s, \theta) + h(s) = -c_0^2 \psi_m(s, \theta) + h_0. \quad (59)$$

Más tarde se graficarán los diagramas de dispersión q vs. ψ para verificar que las soluciones analíticas obedecen una relación lineal. Se considera que dicha relación se sostiene como consecuencia de haber propuesto como aditiva la influencia no lineal de los efectos topográficos, ver ecuación (48).

Siguiendo a V19, la distancia radial s_l que confina al vórtice puede ser escogida como una de los n (≥ 1) ceros de la función m -Bessel, $j_{m,n}$. Una elección adecuada es $s_l = j_{1,1} = 3.8317$ (el primer cero de J_1), ya que allí la componente radial de la velocidad se vuelve cero [véase (56)].

Los modos $m = 0$ y $m = 1$ representan vórtices monopoles y dipolares, respectivamente, modificados por la topografía, los cuales corresponden a los casos relevantes a estudiar de aquí en adelante. En el caso 2D, los monopolos pueden ser ciclónicos ($\widehat{\psi}_0 < 0$) ó anticiclónicos ($\widehat{\psi}_0 > 0$), con $\widehat{\psi}_0$ real. Para los dipolos, las partes real e imaginaria de $\widehat{\psi}_1$ indican la amplitud y orientación del vórtice.

3.1.3 Solución completa para el modo $m = 0$

Para completar las soluciones, es necesario agregar un flujo exterior tal que la distribución de vorticidad interior permanezca confinada sobre la topografía. Para el modo monopolar $m = 0$, se establece la función corriente exterior como la suma de un perfil irrotacional (logarítmico) y una vorticidad constante, es decir, un término cuadrático. La solución exterior axisimétrica (denotada con subíndice E) es

$$\psi_{E0}(s) = a_0 + a_1 \ln s + a_2 s^2 \quad s \geq s_l, \quad (60)$$

donde los coeficientes son escogidos para satisfacer la continuidad de la función corriente, la velocidad azimutal y la vorticidad. Las condiciones de acoplamiento en el contorno s_l son:

$$\begin{aligned} \psi_{I0}|_{s_l} &= \psi_{E0}|_{s_l} \\ \psi'_{I0}|_{s_l} &= \psi'_{E0}|_{s_l} \\ \left[\psi''_{I0} + \frac{1}{s} \psi'_{I0} \right]_{s_l} &= \left[\psi''_{E0} + \frac{1}{s} \psi'_{E0} \right]_{s_l}. \end{aligned} \quad (61)$$

(donde las primas indican derivadas en s). Usando (55) y (60) en (61), se obtienen los coeficientes a_0 , a_1 y a_2 en términos de las constantes f_{00} y f_{01} definidas en el Anexo A. Por tanto, los campos exteriores

para el modo 0 son

$$\psi_{E0}(s) = f_{00} + \left[-f_{01}s_l + \frac{1}{2}(f_{00} - H(s_l))s_l^2 \right] \ln \left(\frac{s}{s_l} \right) - \frac{f_{00} - H(s_l)}{4} (s^2 - s_l^2) \quad (62)$$

$$\frac{1}{c_0} \mathbf{u}_{E0}(r) = \mathbf{u}_{E0}(s) = \left[-f_{01} \frac{s_l}{s} + \frac{1}{2}(f_{00} - H(s_l)) \frac{s_l^2 - s^2}{s} \right] \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad (63)$$

$$\frac{1}{c_0^2} \omega_{E0}(r) = \omega_{E0}(s) = -[f_{00} - H(s_l)]. \quad (64)$$

Para verificar la consistencia dimensional, note que las unidades de f_{00} , f_{01} y $H(s_l)$ son las de la función corriente (longitud²/tiempo). La vorticidad exterior ω_{E0} igual a $4a_2$ es constante, de acuerdo con la rotación añadida. La solución completa para el modo $m = 0$ es

$$\psi_0(s) = \begin{cases} \psi_{I0}(s) & s \leq s_l \\ \psi_{E0}(s) & s \geq s_l, \end{cases} \quad (65)$$

la cual es estacionaria en un sistema coordenado que rota con rapidez angular $2a_2$, relativa al plano f -esta rotación secundaria es interpretada por la vorticidad constante en la región exterior-.

De hecho, (65) es una familia de vórtices circulares expresada en diferentes sistemas coordenados rotando de acuerdo al valor de a_2 [el cual depende de las constantes $H(s_l)$ y f_{00} , véase (64)]. En particular, la solución exacta no estacionaria en el plano f es

$$\psi_0(s) = \begin{cases} \psi_{I0}(s) - a_0 - a_2 s^2 & s \leq s_l \\ a_1 \ln s & s \geq s_l, \end{cases} \quad (66)$$

en donde la vorticidad exterior es cero.

3.1.4 Solución completa para el modo $m = 1$

Por conveniencia, de aquí en adelante se definirá la amplitud del dipolo como $\hat{\psi}_1 = -|\hat{\psi}_1|i$, tal que el modo V19 es $|\hat{\psi}_1|J_1(s) \sin(\theta)$. Este caso corresponde a un dipolo inicialmente orientado en la dirección horizontal y con el campo de velocidad sobre el eje de simetría apuntando a la izquierda en el plano del movimiento.

Antes de discutir la solución exterior, primero se considera que el modo dipolar completo rota esta-

cionariamente sobre la topografía. Por consiguiente, se buscan soluciones en un marco de referencia en rotación, tal que $\psi = \psi(s, \theta + \Omega t)$, donde la rotación es en sentido horario (anti-horario) para $\Omega > 0$ ($\Omega < 0$). Por el momento, Ω es desconocido. La ecuación de vorticidad se transforma como (Flierl et al., 1983)

$$J \left[\psi(s, \theta) + \frac{\Omega}{2c_0^2} s^2, \nabla^2 \psi(s, \theta) + h(s) \right] = 0, \quad (67)$$

manteniendo en mente que ahora θ corresponde a la coordenada azimutal rotada. Así, las soluciones para el modo 1 son de la forma

$$\psi_1(s, \theta) = \begin{cases} \psi_{I1}(s, \theta) - \frac{\Omega}{2c_0^2} s^2 & s \leq s_l \\ \psi_{E1}(s, \theta) & s \geq s_l, \end{cases} \quad (68)$$

donde $\psi_{E1}(s, \theta)$ es el campo exterior. Luego, la vorticidad es expresada como

$$\omega_1(s, \theta) = \begin{cases} \omega_{I1}(s, \theta) - 2\Omega & s \leq s_l \\ -2\Omega & s \geq s_l. \end{cases} \quad (69)$$

Ahora, se puede construir la solución exterior con las propiedades deseadas. El campo exterior es propuesto como la suma de una componente potencial no-axisimétrica y un flujo simétrico similar a (60):

$$\psi_{E1}(s, \theta) = \frac{U_0}{c_0} \left(s - \frac{s_l^2}{s} \right) \sin \theta + d_0 + d_1 \ln s + d_2 s^2 \quad s \geq s_l, \quad (70)$$

donde U_0 es una constante adicional por determinar, y los coeficientes d_0 , d_1 y d_2 son escogidos para asegurar que las variables del flujo sean continuas en s_l . Un procedimiento equivalente fue propuesto primero por Chaplygin (1903) para derivar soluciones estacionarias de dipolos 2D asimétricos viajando a lo largo de trayectorias circulares con rapidez U_0 (Meleshko and van Heijst, 1994). En el presente caso, el modo dipolar completo puede rotar, pero no puede trasladarse ya que permanece atrapado a la topografía. Desde (68), las condiciones de acoplamiento son

$$\begin{aligned} \psi_{I1}|_{s_l} - \frac{\Omega}{2c_0^2} s_l^2 &= \psi_{E1}|_{s_l}, \\ \partial_s \psi_{I1}|_{s_l} - \frac{\Omega}{c_0^2} s_l &= \partial_s \psi_{E1}|_{s_l}, \\ \left[\partial_{ss} \psi_{I1} + \frac{1}{s} \partial_s \psi_{I1} + \partial_{\theta\theta} \psi_{I1} \right]_{s_l} - \frac{2\Omega}{c_0^2} &= \left[\partial_{ss} \psi_{E1} + \frac{1}{s} \partial_s \psi_{E1} + \frac{1}{s^2} \partial_{\theta\theta} \psi_{E1} \right]_{s_l}. \end{aligned} \quad (71)$$

La forma del flujo exterior (70) asegura que la condición para la derivada en θ de la función corriente

se satisface idénticamente. El sistema de ecuaciones (71) es solucionado para obtener los coeficientes del campo exterior, como se muestra en el Anexo B. En particular, se encuentra que el coeficiente d_2 es predeterminado por la rotación Ω , tal que $d_2 = -\Omega/(2c_0^2)$, lo cual se puede probar inmediatamente de (69) y (70). Una consecuencia adicional es que la constante C_1 encontrada en la solución interior debe tener un valor específico dado por (147) (en el Anexo B) para satisfacer la continuidad de la vorticidad. Los otros coeficientes, d_0 y d_1 , dependen de las constantes f_{10} y f_{11} , las cuales contienen integrales de $H(s)$ y por consiguiente son de orden h_0/c_0^2 . Además, U_0 es proporcional a la amplitud $|\widehat{\psi}_1|$, como indica (145). Los campos exteriores son

$$\psi_{E1}(s, \theta) = \frac{1}{2}|\widehat{\psi}_1|J_1'(s_l) \left(s - \frac{s_l^2}{s} \right) \sin \theta + f_{10} - f_{11}s_l \ln \left(\frac{s}{s_l} \right) - \frac{\Omega}{2c_0^2}s^2 \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0}\mathbf{u}_{E1}(r, \theta) = \mathbf{u}_{E1}(s, \theta) &= \left[-\frac{1}{2}|\widehat{\psi}_1|J_1'(s_l) \left(1 - \frac{s_l^2}{s^2} \right) \cos \theta \right] \widehat{\mathbf{e}}_r + \\ &\left[\frac{1}{2}|\widehat{\psi}_1|J_1'(s_l) \left(1 + \frac{s_l^2}{s^2} \right) \sin \theta - f_{11}\frac{s_l}{s} - \frac{\Omega}{c_0^2}s \right] \widehat{\mathbf{e}}_\theta, \end{aligned} \quad (73)$$

$$\frac{1}{c_0^2}\omega_{E1}(r, \theta) = \omega_{E1}(s, \theta) = -\frac{2\Omega}{c_0^2}. \quad (74)$$

Las soluciones dipolares implican una restricción especial para la topografía, ya que el campo exterior evaluado en la ecuación de vorticidad (67) produce:

$$J \left[\frac{U_0}{c_0} \left(s - \frac{s_l^2}{s} \right) \sin \theta, h(s) \right] = 0 \quad s > s_l. \quad (75)$$

Por lo tanto, las soluciones dipolares exteriores son válidas para topografías aisladas que se aplanan en la región exterior:

$$\frac{dh(s)}{ds} = 0 \quad s > s_l. \quad (76)$$

En otras palabras, la topografía debe decaer rápidamente dentro del interior del vórtice. Note que esta restricción no aplica para el modo axisimétrico $m = 0$.

3.1.5 Rapidez angular de modos dipolares

La rapidez angular del dipolo sobre el plano f es $-\Omega$. Para obtener Ω , se parte de que la circulación total de la región interior (69) debe ser cero. La circulación es calculada como la integral de área de la

vorticidad potencial interior:

$$\Gamma_I = \int_0^{2\pi} \int_0^{s_l} [\omega_{I1}(s, \theta) - 2\Omega + h(s)] c_0^{-2} s ds d\theta. \quad (77)$$

La primera integral es calculada como la integral de línea de la velocidad tangencial:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{s_l} \omega_{I1}(s, \theta) c_0^{-2} s ds d\theta = \oint_s \partial_s \psi_{I1}(s_l, \theta) s_l d\theta = -2\pi s_l f_{11}. \quad (78)$$

donde la constante f_{11} es definida por (144). Solucionando las otras integrales, la circulación es

$$\Gamma_I = -2\pi s_l f_{11} - \pi s_l^2 c_0^{-2} 2\Omega + 2\pi c_0^{-2} \int_0^{s_l} h(s) s ds. \quad (79)$$

Ajustando $\Gamma_I = 0$ y después de algunos cálculos directos, se encuentra que

$$\Omega = \left[-\frac{f_{11} c_0^2}{s_l} + \frac{1}{s_l^2} \int_0^{s_l} h(s) s ds \right] \quad (80)$$

Se debe subrayar que Ω depende de la forma y propiedades de la topografía.

3.1.6 Atrapamiento de dipolos

Ahora se examinarán las condiciones que determinan el atrapamiento del modo dipolar a la topografía. Este atrapamiento es equivalente al problema de un cilindro de radio r_l , rotando con una circulación Γ en un flujo potencial exterior con campo de velocidad lejano U_0 (Batchelor, 1967). La velocidad azimutal en el cilindro es $v(r_l, \theta) = 2U_0 \sin \theta - \Gamma/(2\pi r_l)$, de modo que los puntos de estancamiento sobre el cilindro pueden existir cuando $\sin \theta = \Gamma/(4\pi U_0 r_l)$. La ausencia de puntos de estancamiento requiere que $|\Gamma/(4\pi U_0 r_l)| > 1$ para cualquier θ , es decir, la velocidad de rotación del cilindro es siempre mayor que $2U_0$ (Spurk and Aksel, 2008).

Para el presente caso, en el cual se ha introducido una rotación adicional al sistema de referencia, la velocidad tangencial en el contorno del remolino dada por el campo exterior es

$$v(s_l, \theta) = \frac{\partial}{\partial s} \psi_{E1}(s_l, \theta) = \frac{2U_0}{c_0} \sin \theta + \frac{d_1}{s_l} - \frac{\Omega s_l}{c_0^2}. \quad (81)$$

La ausencia de puntos de estancamiento implica que

$$\left| \frac{-d_1/s_l + \Omega s_l/c_0^2}{2U_0/c_0} \right| > 1. \quad (82)$$

Sustituyendo $d_1 = -f_{11}s_l$ [véase (146)] y usando (80), esta condición puede ser reescrita como

$$\gamma \equiv \left| \frac{c_0^{-1}}{2U_0 s_l} \int_0^{s_l} h(s) s ds \right| > 1. \quad (83)$$

Los parámetros físicos del modo dipolar deben de satisfacer (83) para garantizar la captura del vórtice sobre la topografía. La restricción depende de la razón entre la integral del término topográfico y la intensidad del vórtice (proporcional a U_0). Así, el dipolo permanece atrapado mientras el efecto topográfico sea lo suficientemente fuerte (dentro de las restricciones propias del modelo cuasi-geostrófico) para impedir su propagación.

3.2 Vórtices atrapados sobre montañas y valles

Para analizar la estructura de las soluciones se escoge la profundidad media, $H_0 = 1$ y el parámetro de Coriolis $f_0 = 1$ con unidades arbitrarias. La escala de longitud radial es ajustada a $c_0 = 1$. Las soluciones son válidas para cualquier topografía arbitraria $b(r)$ siempre y cuando sea axisimétrica y aislada (es decir que tiende a cero para radios grandes, como se muestra en la Figura 2). De aquí en adelante se consideran topografías de la forma

$$b(s) = \pm b_0 e^{-(s/s_t)^\alpha}, \quad (84)$$

donde $+b_0$ ($-b_0$) es la altura (profundidad) de la montaña (valle), s_t es su ancho adimensional, y α es un número real positivo que define la forma de la topografía. Para $\alpha = 2$ la topografía es Gaussiana; para $\alpha \gg 2$ la topografía es plana cerca del origen y cae abruptamente a cero para $s > s_t$. La amplitud topográfica b_0/H_0 varía en el rango de ± 0.3 (lo mismo que $h_0 = f_0 b_0/H_0$).

3.2.1 Modo monopolar $m = 0$

Las soluciones para $m = 0$ son estructuras monopolares circulares centradas sobre una montaña o valle submarino. El sentido de rotación depende del signo de la amplitud real de $\widehat{\psi}_0$ del modo V19 y de los términos topográficos proporcionales a h_0/c_0^2 , incluyendo la constante adimensional C_0 . Para facilitar el análisis, las soluciones son evaluadas para topografías Gaussianas ($\alpha = 2$) con el mismo tamaño

horizontal que los vórtices, tal que $s_t = s_l \equiv 3.8317$.

La Figura 3 presenta los perfiles de vorticidad en la dirección radial de vórtices con $\pm\widehat{\psi}_0$ sobre montañas con (a) amplitudes diferentes $\pm b_0$ y un valor fijo de $C_0 = 0$, y (b) diferentes valores de la constante $\pm C_0$ y un valor fijo de $b_0 = 0.2$. Los perfiles de ciclones y anticiclones para un b_0 dado se intersectan en el primer cero de J_0 , $s = 2.4048$, localizado en la región interior. La Figura 3a muestra que los perfiles tienen el mismo valor en $s = 0$, pero se desfasan hacia arriba para $s > 0$. Así, la vorticidad no es simétrica con respecto al signo de $\widehat{\psi}_0$ (compare las curvas en azul y rojo), excepto para el caso con fondo plano $b_0 = 0$. Los radios por donde las curvas cruzan el cero son más pequeños para anticiclones que para ciclones. Más allá de esa distancia, los valores de vorticidad son más altos cuando $\widehat{\psi}_0 > 0$ en comparación con el caso con $\widehat{\psi}_0 < 0$ correspondiente. En la región exterior, $s > s_l$, la vorticidad alcanza un valor constante que corresponde al negativo de dos veces la rapidez de rotación del sistema de referencia en el cual los modos son estacionarios.

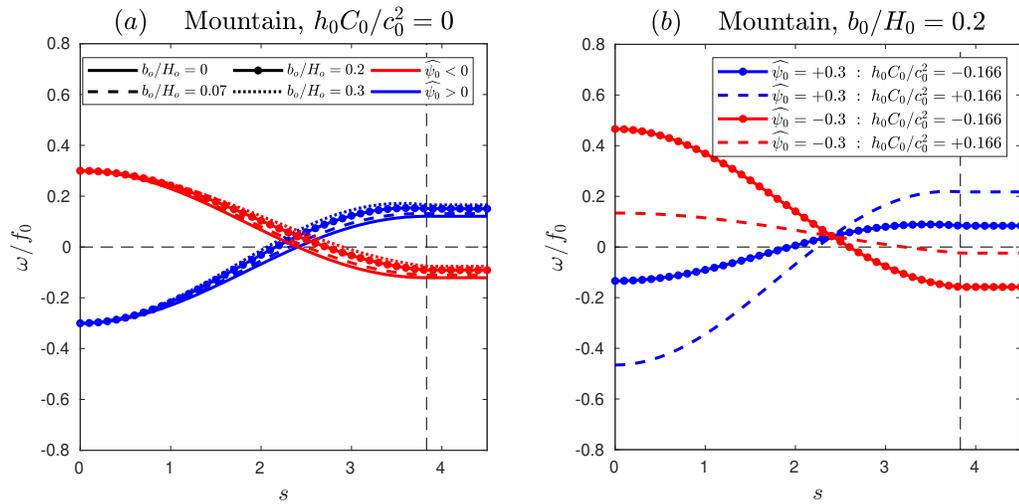


Figure 3. Perfiles de vorticidad para el modo $m = 0$ sobre montañas Gaussianas ($b_0 > 0$), usando amplitudes positivas (azul) y negativas (rojo) $\widehat{\psi}_0 = \pm 0.3$. También se muestra el caso de fondo plano, $b_0 = 0$. (a) $C_0 = 0$ y $b_0/H_0 = 0, 0.07, 0.2$ y 0.3 . (b) $C_0 = \pm 2$ y $b_0/H_0 = 0.2$. La línea vertical punteada indica el radio del contorno interior-exterior s_l .

La Figura 3b presenta el efecto de $C_0 \neq 0$ para $\pm\widehat{\psi}_0$. Para $C_0 > 0$, el perfil de vorticidad del anticiclón es amplificado tanto en el núcleo como en el exterior (relativo al caso $C_0 = 0$ en el panel a), mientras que el ciclón es debilitado (líneas punteadas). Lo opuesto ocurre para $C_0 < 0$ (curvas continuas): el anticiclón (ciclón) es debilitado (amplificado). Sobre un valle ($b_0 < 0$), los perfiles de vorticidad son equivalentes a los de la Figura 3 cuando se usa $-\widehat{\psi}_0$ y el mismo C_0 . Así, ciclones son intensificados sobre los valles.

Para reforzar la solidez de las soluciones propuestas, se grafican los diagramas de dispersión (q vs ψ) para

verificar la relación funcional entre la vorticidad potencial y la función corriente. La Figura 4 muestra las curvas $q-\psi$ bien definidas para todas las soluciones presentadas en la Figura 3: en cada caso, la relación lineal corresponde a la región interior ($s < s_l$) como lo predice la expresión (59), mientras que la sección horizontal representa a la región exterior ($s > s_l$).

3.2.2 Modo dipolar $m = 1$

Ahora se examinará la estructura de vórtices dipolares estacionarios sobre una topografía. La Figura 5 muestra las distribuciones de vorticidad representativa sobre una montaña (paneles a, b) y un valle (c, d), usando la misma amplitud topográfica y la misma intensidad del vórtice. Las soluciones difieren según la forma y el ancho de la topografía: en los paneles (a, c) la topografía decae abruptamente antes de s_l , mientras que en los paneles (b, d) la topografía es Gaussiana y estrecha. En todos los casos, los vórtices son dipolos asimétricos con diferentes características. Sobre la montaña, la parte dominante del dipolo en el origen puede ser ciclónica cuando la topografía es abrupta (panel a) o anticiclónica para las montañas estrechas (panel b). En ambos casos, la vorticidad exterior -2Ω es negativa, lo cual indica que el sistema ha sido rotado en el sentido de las manecillas del reloj ($\Omega > 0$) para obtener soluciones estacionarias. Sobre el valle, los dipolos tienen propiedades opuestas (paneles c, d) tal que las estructuras rotan en contra de las manecillas del reloj. La Figura 6 presenta los diagramas de dispersión de ejemplos mencionados, en los cuales se verifica la relación lineal $q - \psi$ en la región interior.

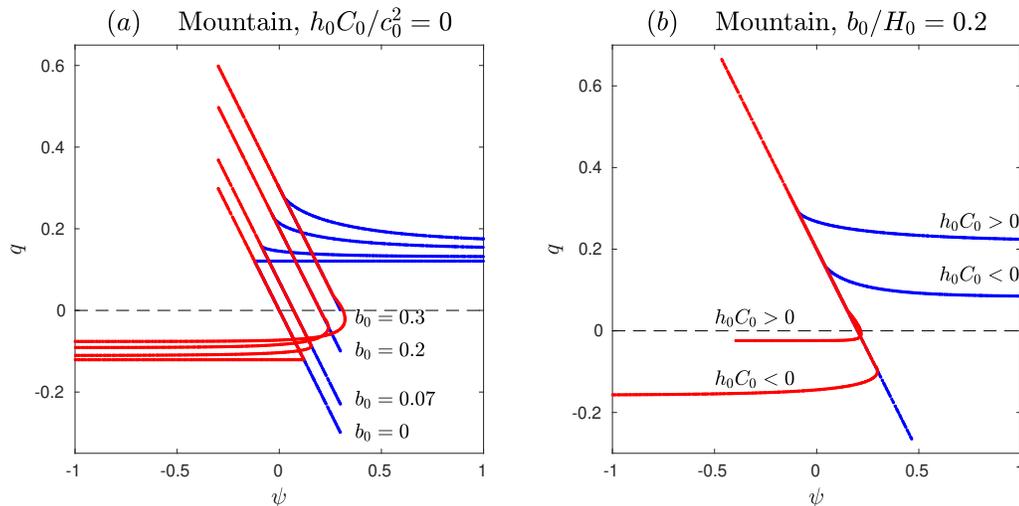


Figure 4. Diagramas de dispersión $q-\psi$ para los casos del modo $m = 0$ mostrados en la Figura 3. En el panel (a), los valores en la región interior son indistinguibles para cada valor de b_0 . En el panel (b), todas las regiones interiores se superponen.

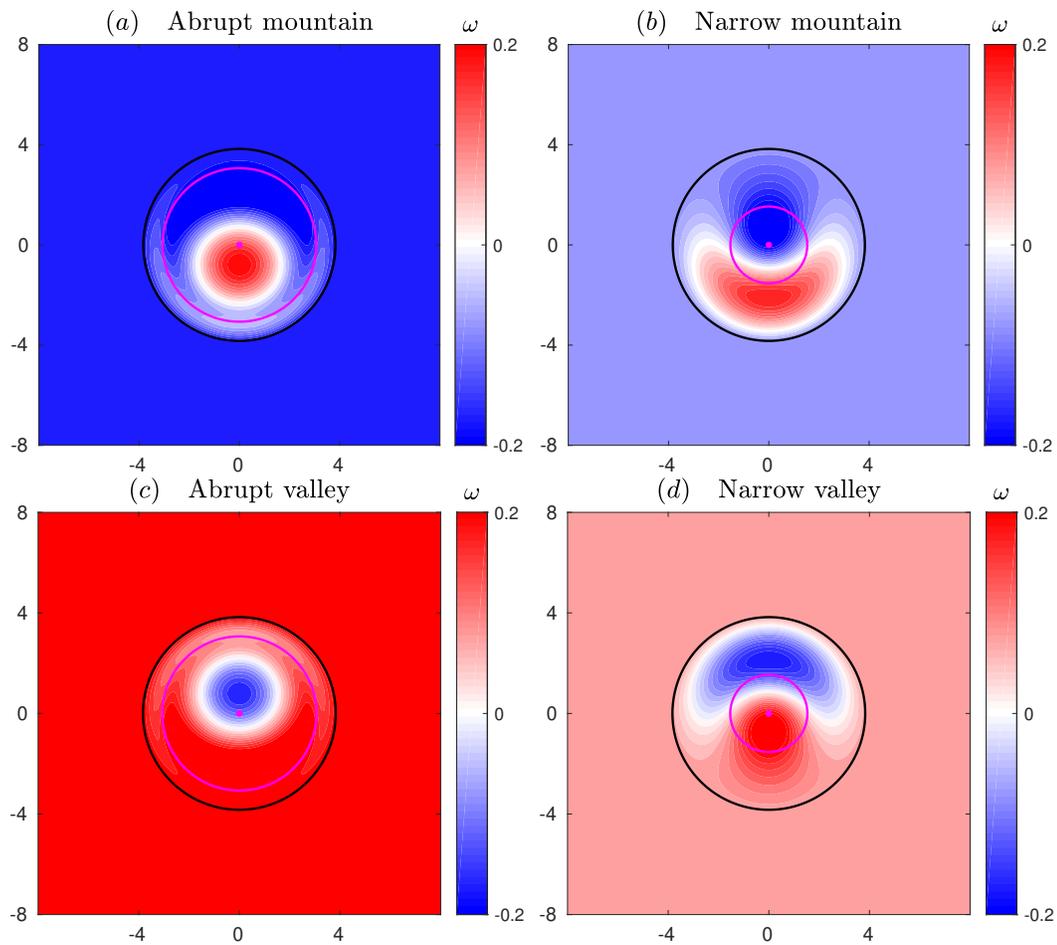


Figure 5. Distribuciones de vorticidad relativa de modos dipolares sobre diferentes topografías. (a, b) Montañas con altura $b_0 = 0.2$. (c, d) Valles con profundidad $b_0 = -0.2$. Para topografías abruptas (estrechas): $s_t = 0.8s_l$, $\alpha = 12$, $C_1 = -1.59$ ($s_t = 0.4s_l$, $\alpha = 2$, $C_1 = 0.63$). En todos los casos la intensidad del vórtice es $|\hat{\psi}_1| = 0.3$. La circunferencia en negro corresponde al contorno interior-externo del vórtice en s_t . El radio del círculo en magenta es la escala de longitud de la topografía s_t .

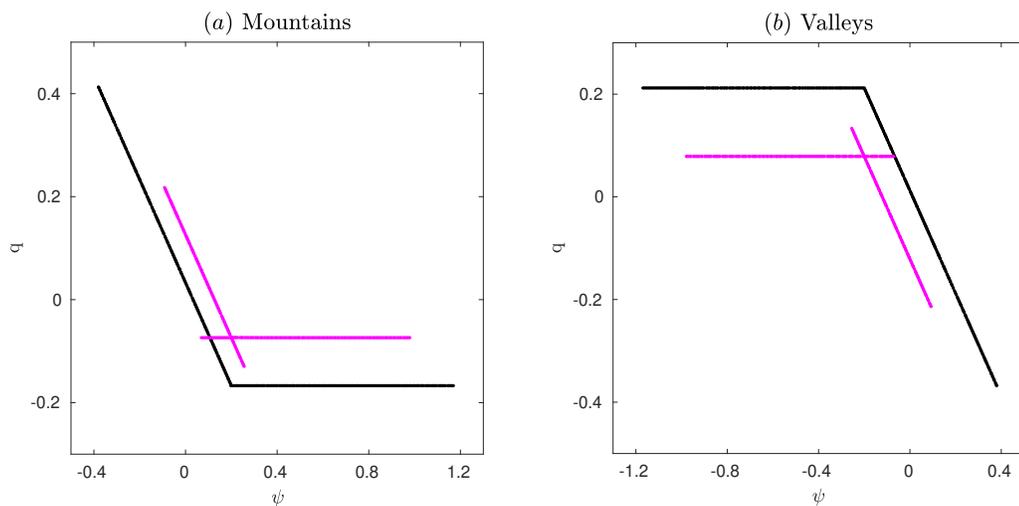


Figure 6. Diagramas de dispersión q - ψ para modos $m = 1$ correspondientes a los ejemplos mostrados en la Figura 5. (a) Montañas. (b) Valles. Los puntos negro (magenta) corresponden a topografías abruptas (estrechas).

Para apreciar mejor la estructura de las soluciones, la Figura 7 presenta la función corriente y el campo de velocidad correspondiente a los dipolos mostrados en la Figura 5. El campo vectorial exterior indica la rotación vista desde el marco de referencia fijo con el dipolo. Se agregan tres contornos de ψ con los valores $[0.9, 1, 1.1]\psi_{E1}(s_l)$, lo cual es útil para verificar si las líneas de corriente encierran el interior del vórtice o si intersectan el contorno circular en s_l (círculo magenta). En el primer caso, los vórtices satisfacen la condición (83), por lo que se espera que permanezcan atrapados a la topografía. Por el contrario, cuando los parámetros del flujo no cumplen la condición (83), entonces los vórtices pueden escapar y las soluciones ya no son válidas. En los ejemplos con topografías abruptas, paneles (a, c), las líneas de corriente que encierran el vórtice son semicirculares, siendo ligeramente elongadas en la dirección vertical. En contraste, las líneas de corriente en los ejemplos sobre topografías estrechas mostradas en los paneles (b, d) intersectan el contorno del vórtice por lo que estas estructuras pueden escapar. La condición de atrapamiento se analizará mediante simulaciones numéricas.

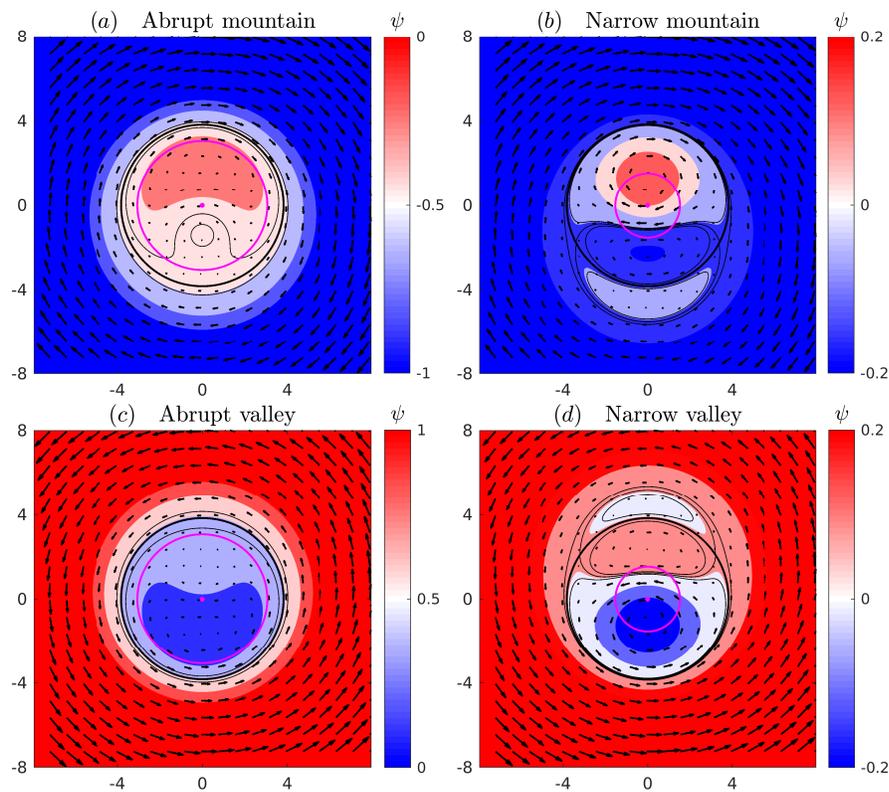


Figure 7. Distribución de la función corriente y el campo de velocidad de los modos dipolares mostrados en la Figura 5. Los círculos en negro y magenta se interpretan igual que en la Figura 5. Las líneas delgadas en negro indican contornos de ψ con valores $[0.9, 1, 1.1]\psi_{E1}(s_l)$.

3.2.3 Simulaciones numéricas

En esta subsección se presentan experimentos numéricos inicializados con los campos de vorticidad teóricos. El análisis se enfoca principalmente en los modos dipolares $m = 1$ sobre el plano f . El objetivo es demostrar que los dipolos rotan sobre la topografía, en sentido horario sobre montañas y anti-horario sobre valles. Además, se evalúa la rapidez angular y se explora el comportamiento de las soluciones para diferentes parámetros del vórtice y de la topografía.

3.2.3.1 Código numérico y parámetros del flujo

La ecuación de vorticidad quasi-geostrófica (46) es solucionada con un código en diferencias finitas análogo a los usados en varios trabajos previos que estudian flujos sobre topografías de fondo variable (Zavala Sansón and van Heijst, 2014).

Inicialmente, la distribución de vorticidad teórica es prescrita sobre una malla cuadrada de longitud L , con coordenadas cartesianas $\{x, y | -L \leq x \leq L, -L \leq y \leq L\}$ y resolución espacial de 257×257 puntos. La función corriente inicial es obtenida invirtiendo el operador Laplaciano. Luego, la evolución de la vorticidad en el tiempo se soluciona con un esquema de Runge-Kutta de tercer orden. Dado el periodo de rotación en el plano f , $T = 4\pi/f_0$, el paso de tiempo es escogido como $dt = T/100$ para conseguir una resolución temporal lo suficientemente buena durante cada "día" T . La duración típica de las simulaciones es de $20T$. Una vez que la nueva vorticidad relativa ha sido obtenida, el proceso se repite para los tiempos subsecuentes.

En todos los ejemplos que se mostrarán se han ajustado los parámetros básicos como en la sección previa: $f_0 = 1$, $H_0 = 1$, y el radio del vórtice $s_l = 3.8317$. La escala de longitud es $L = 16$, tal que las paredes se encuentren lo suficientemente lejos (alrededor de $\approx 4.2s_l$) para minimizar el efecto imagen debido a la condición de libre deslizamiento en las fronteras. La condición inicial es el campo de vorticidad sobre el plano f , el cual es obtenido restando la vorticidad exterior -2Ω a las soluciones estacionarias (69):

$$\omega_1(s, \theta, t = 0) = \begin{cases} \omega_{I1}(s, \theta) & s \leq s_l \\ 0 & s \geq s_l. \end{cases} \quad (85)$$

3.2.3.2 Atrapamiento de vórtices

Los casos mostrados en esta subsección satisfacen la condición (83), de modo que los vórtices permanecen atrapados sobre la topografía. El vórtice sobre la montaña abrupta mostrado en la Figura 5a (ver también las Figuras 6a y 7a) es un ejemplo representativo de un dipolo estacionario rotando sobre la topografía en el plano f . La condición de atrapamiento es $\gamma = 1.88 > 1$. La Figura 8 presenta la distribución de vorticidad calculada cada dos días, ilustrando la rotación horaria de la estructura completa. El periodo esperado de rotación es $5.4T$. Dado que la configuración inicial se recupera alrededor del día 6, la secuencia muestra que el dipolo rota con una rapidez ligeramente más lenta que la predicha teóricamente.

Los experimentos se repitieron para un dipolo sobre un valle (es decir, usando $b_0 = -0.2$, como se muestra en la Figura 5c). La evolución de la distribución de vorticidad en el plano f es mostrada en la Figura 9. Debido a que el resto de parámetros son los mismos (incluyendo la condición de atrapamiento $\gamma = 1.88$), la rapidez angular del vórtice también es la misma, pero ahora la rotación sobre la topografía es antihoraria.

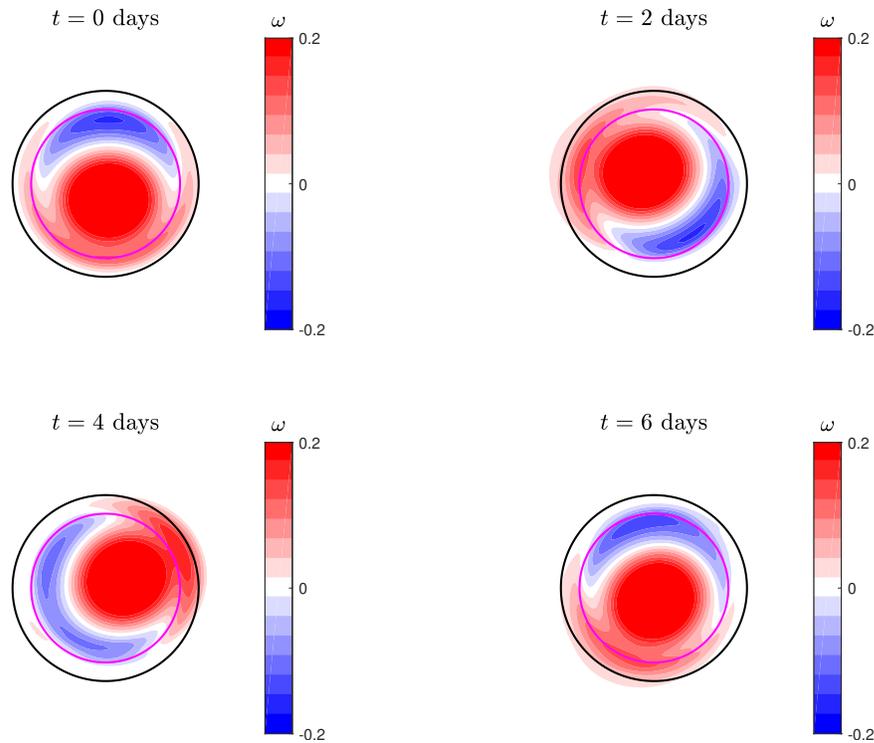


Figure 8. Secuencia de la distribución de vorticidad en el plano f calculada numéricamente para el dipolo asimétrico mostrado en la Figura 5a. La topografía es una montaña abrupta ($b_0 = 0.2$, $s_t = 0.8s_l$, $\alpha = 12$). La rotación del dipolo es horaria. La rapidez angular predicha es $-\Omega = -0.0934$ con un periodo de 5.4 días.

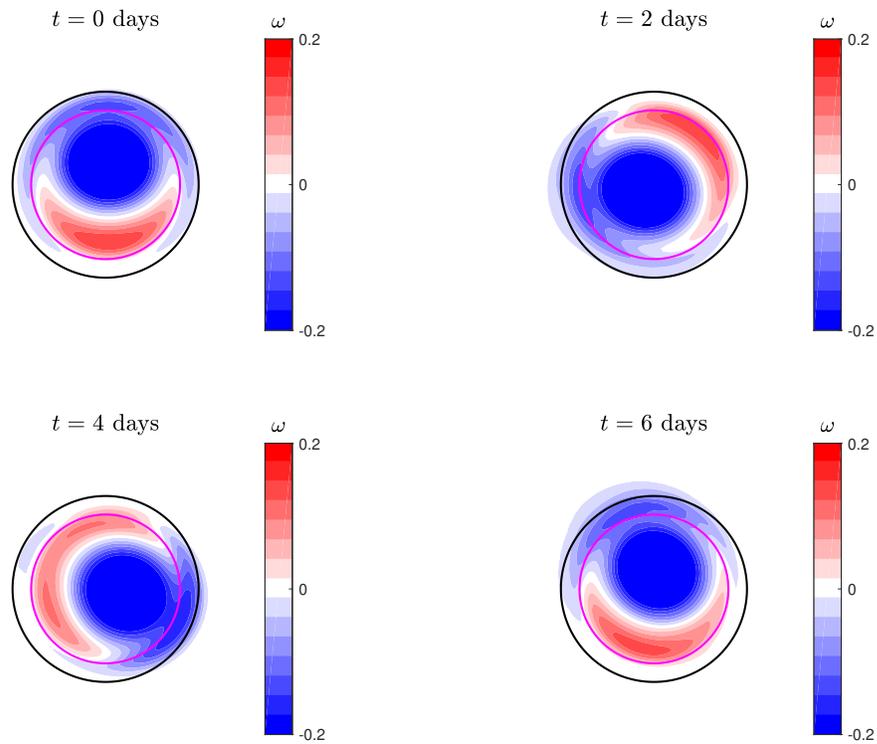


Figure 9. Secuencia de la distribución de vorticidad como en la Figura 8 pero ahora para el modo dipolar mostrado en la Figura 5c. La topografía es un valle abrupto ($b_0 = -0.2$, $s_t = 0.8s_l$, $\alpha = 12$). La rotación del dipolo es antihoraria.

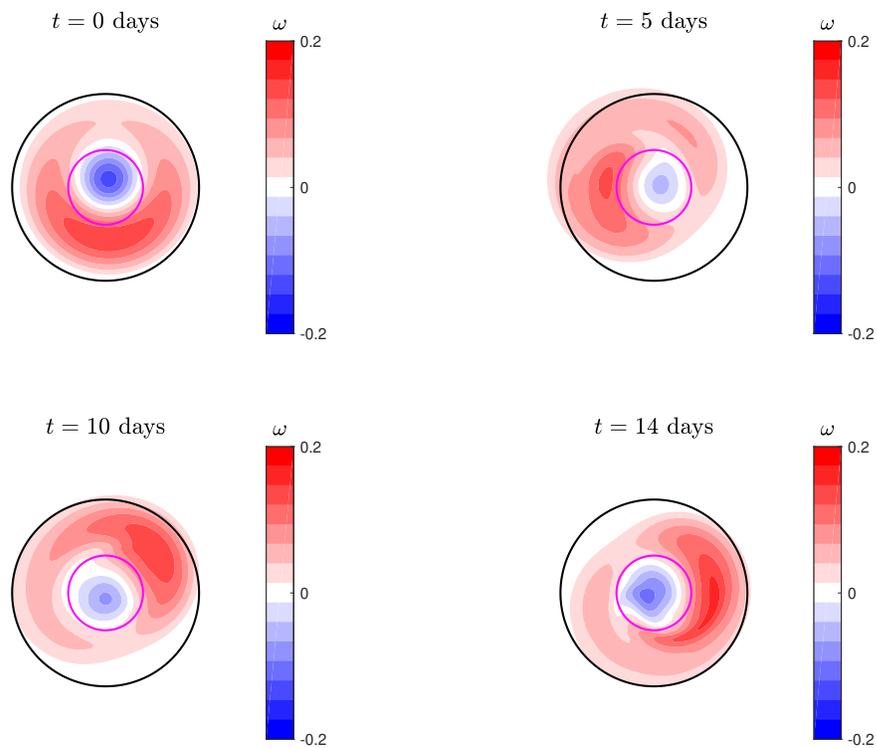


Figure 10. Secuencia de la distribución de vorticidad para un modo dipolar con $|\hat{\psi}_1| = 0.1$. La topografía es una montaña Gaussiana estrecha ($b_0 = 0.2$, $s_t = 0.4s_l$, $\alpha = 2$, $C_1 = 0.63$). La rotación del dipolo es en sentido horario. La rapidez angular predicha teóricamente es $-\Omega = -0.0381$ con un periodo de 13.1 días.

Un tercer ejemplo es presentado en la Figura 10, el cual muestra una secuencia similar de campos de vorticidad pero ahora para un dipolo de menor intensidad sobre una montaña Gaussiana estrecha (círculo interior). La condición de atrapamiento es $\gamma = 1.52$. El vórtice rota estacionariamente en sentido horario y, como se esperaba, la rapidez angular es más lenta que en los casos previos. Aunque el vórtice permanece atrapado, es evidente que la estructura se distorsiona ligeramente. Después de varios días, la configuración principal permanece aunque la estructura continúa erosionándose. Aparentemente, la pendiente de la montaña afecta la estructura de la solución analítica, probablemente debido a la generación de ondas topográficas (en contraste con la montaña de la Figura 8 que es casi plana en la cima). Este punto se discutirá con más detalle en la sección de discusiones.

3.2.3.3 Escape del vórtice

Cuando las soluciones analíticas no satisfacen la condición de atrapamiento (83), los vórtices pueden escapar de la topografía. Este comportamiento se muestra en la secuencia de la Figura 11 para un vórtice intenso sobre una montaña con una altura pequeña ($b_0 = 0.1$). La intensidad del remolino es lo suficientemente amplia para superar los efectos de la topografía, de modo tal que el dipolo deriva hacia afuera de la región interior en los primeros instantes. El dipolo que surge es asimétrico y la trayectoria es desviada hacia el lado ciclónico. Evidentemente, la solución analítica no se sostiene en el tiempo.

3.3 Conclusiones

En este capítulo se mostró el cálculo de nuevas soluciones analíticas y estacionarias para el problema no lineal e invíscido de un flujo quasi-geostrófico en el plano f sobre una topografía aislada con simetría axial. Las soluciones consisten de una parte interior, sobre la topografía, acoplada con una solución apropiada en la región exterior, donde la topografía se vuelve plana. La función corriente interior es la suma de modos azimutales, recientemente derivados por Viúdez (2019a) para un flujo 2D, y una función axisimétrica $\phi(s)$ representando los efectos de la topografía. Las estructuras vorticales son modos monopoles circulares ($m = 0$) y dipolares ($m = 1$). Las correspondientes soluciones V19 son recuperadas cuando el fondo es plano, $\phi(s) \rightarrow 0$. La familia de soluciones se caracteriza por la competencia entre la intensidad del vórtice y la influencia de los parámetros topográficos contenidos en $\phi(s)$. El número de posibles soluciones para $m = 0$ aumenta sensiblemente porque $\phi(s)$ está compuesta por una estructura circular con amplitud arbitraria $(h_0/c_0^2)C_0$ más términos adicionales que involucran la forma de la topografía.

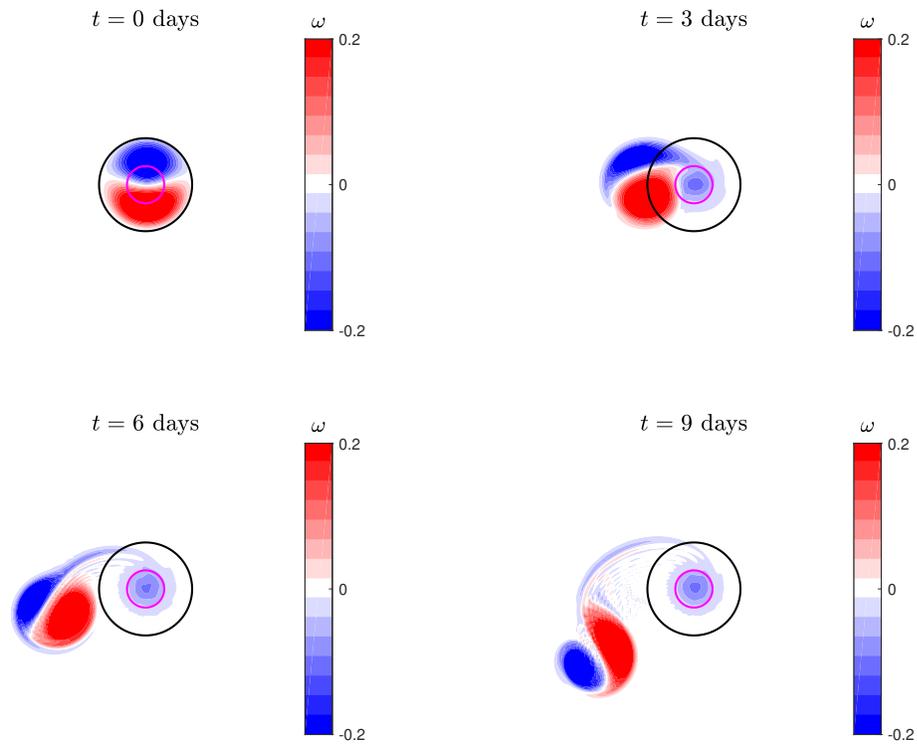


Figure 11. Secuencia de la distribución de vorticidad calculada numéricamente para un dipolo asimétrico ($|\widehat{\psi}_1| = 0.6$) sobre una montaña de poca altura y estrecha ($b_0 = 0.1$, $s_t = 0.4s_l$, $\alpha = 2$). La condición de atrapamiento (83) no es satisfecha: $\gamma = 0.127$.

Para ilustrar las soluciones, se usó una montaña o valle submarino con perfil radial proporcional a $\exp(-s^\alpha)$, donde α es un número real arbitrario mayor que 1. Las topografías pueden ser Gaussianas ($\alpha = 2$) o decaer abruptamente ($\alpha \gg 2$). Las soluciones también dependen de la altura b_0 y el ancho s_t de la montaña o valle. Para soluciones dipolares, la topografía debe decaer rápidamente en el interior del vórtice.

Las soluciones son estacionarias en un marco de referencia que rota con rapidez angular constante que depende de la topografía. Los modos monopulares son un caso especial ya que la suma de flujos circulares y cualquier otra función axisimétrica es también solución. Como consecuencia, la función corriente puede ser expresada en cualquier sistema cuya rotación sea determinada por un término cuadrático impuesto en el campo exterior [dígase de la forma a_2s^2 , ver (60)].

Las soluciones para el modo 1, por otro lado, consisten de vórtices dipolares asimétricos cuya estructura puede ser ajustada variando los parámetros del flujo. El método para encontrar el campo exterior (lejos de la topografía) se basa en el procedimiento usado originalmente por Chaplygin (1903), quien derivó soluciones estacionarias de dipolos asimétricos viajando a lo largo de trayectorias circulares. Meleshko and van Heijst (1994) mostraron la equivalencia de este problema con el de un cilindro en rotación

inmerso en un flujo potencial. Una diferencia esencial con los resultados presentados en este capítulo es que los dipolos permanecen atrapados sobre la topografía mientras rotan como un todo alrededor del origen. La condición apropiada para que existan líneas de corriente cerradas que atrapen al remolino (es decir, que no haya puntos de estancamiento) es la expresión (83). La topografía predetermina la rotación de los vórtices. En general, los dipolos rotan en sentido horario sobre montañas y en sentido anti-horario sobre valles. El sentido de la rotación está relacionado con la dirección “oeste” local impuesta por la topografía: es decir a lo largo de contornos de profundidad con aguas poco profundas a la derecha (para un parámetro de Coriolis $f_0 > 0$). La rapidez angular $-\Omega$ depende de los parámetros topográficos, como se muestra en (80).

Las soluciones analíticas fueron probadas de dos maneras. Primero, verificando en los diagramas de dispersión la relación lineal entre la vorticidad potencial y la función corriente predicha por (59). Segundo, a través de simulaciones numéricas, que solucionan el modelo cuasi-geostrófico en el plano- f , inicializadas con campos de vorticidad analíticos. Se presentaron ejemplos de dipolos que permanecen atrapados, como es predicho, mientras rotan estacionariamente sobre montañas o valles (ver Figuras 8, 9, y también un caso en el cual un dipolo escapa de la influencia de la topografía (Figura 11). En el último ejemplo, los parámetros del flujo no satisfacen el criterio (83), ya que el mecanismo de autopropagación del dipolo resulta ser lo bastante fuerte como para superar los efectos topográficos.

Una inspección de los campos de vorticidad calculados numéricamente revela que los vórtices atrapados se deforman ligeramente. Como consecuencia, se presenta un pequeño retraso en la rotación esperada teóricamente. Tales efectos fueron casi despreciables sobre topografías abruptas y se hacen más evidentes para pendientes de poca inclinación (ver Figura 10). Las simulaciones indican que los flujos en el último caso son susceptibles a perturbaciones que pueden generar ondas de Rossby topográficas, las cuales son oscilaciones naturales en la dinámica QG con topografía (Rhines, 1969; Zavala Sansón et al., 2010). Las ondas topográficas son altamente dispersivas y, como resultado, la erosión de dipolos sobre pendientes suaves se puede producir en la medida que los vórtices radían este tipo de oscilaciones. Un proceso equivalente es la bien conocida desintegración de vórtices monopolares trasladándose sobre el plano β debido a la radiación de ondas de Rossby planetarias [Carnevale et al. (1991)]. El origen de perturbaciones débiles en nuestras simulaciones pueden estar asociadas con errores numéricos inevitables o con el campo exterior resultante, el cual es ligeramente modificado por las fronteras del dominio cuadrado. Se requieren investigaciones adicionales, numéricas y analíticas para elucidar las condiciones que dan paso a la erosión de vórtices, ya sea debido a la radiación de ondas o a la inestabilidad inherente de las soluciones analíticas.

Finalmente, se resalta el hecho de que la generación de vórtices atrapados sobre topografías aisladas es un fenómeno observado en experimentos de laboratorio. La formación de vórtices dipolares asimétricos sobre un obstáculo submarino fue descrito cualitativamente en los experimentos en un tanque en rotación realizados por Carnevale et al. (1991). La estructura dipolar es formada por un vórtice ciclónico que deriva sobre un fondo cónico a lo largo de una trayectoria casi circular y un parche anticiclónico generado topográficamente sobre el pico. Mediante experimentos similares, pero usando un tanque mucho más grande y medidas de velocimetría, Zavala Sansón et al. (2012) reportaron la formación de dipolos asimétricos no lineales atrapados sobre una montaña Gaussiana que rotan en sentido horario. La asimetría del dipolo y la rapidez angular subinercial encontrada en las soluciones presentadas en este trabajo se asemejan a los casos experimentales. Por ejemplo, los periodos de rotación de estructuras dipolares sobre la montaña en dos experimentos de Zavala Sansón et al. (2012) fueron ≈ 10.6 y 4 "días", donde un día en la plataforma en rotación era de 30 s. La rapidez angular fue $\approx -0.05f_0$ y $-0.125f_0$, respectivamente [con $f_0 = 0.42 \text{ s}^{-1}$; ver sus Figuras 6b y 8]. La rapidez angular de nuestras soluciones analíticas es del mismo orden: en valor absoluto, se obtuvo Ω entre $\sim 10^{-2}f_0$ y $10^{-1}f_0$. Sin embargo, algunas discrepancias son esperadas porque los dipolos experimentales tienen una forma más irregular debido a que surgen de la compleja interacción vórtice-topografía. Así, los vórtices observados en experimentos o en la naturaleza no reúnen las mismas características de las soluciones teóricas, tales como la perfecta forma circular de los dipolos o la circulación neta cero sobre la montaña.

Considerando la naturaleza no lineal de los flujos experimentales y de las soluciones teóricas, una hipótesis plausible es que fuertes perturbaciones en el flujo sobre una montaña pueden generar estructuras dipolares sobre la cima rotando en sentido horario. Análogamente, la rotación de dipolos generados sobre valles podría ser anti-horaria. A partir de estas consideraciones se puede suponer que los nuevos vórtices formados sobre la topografía aislada tendrán una estructura que es capturada por las presentes soluciones. Esta línea de investigación ha sido abordada por Zavala Sansón and Gonzalez (2021).

Capítulo 4. Estabilidad lineal de vórtices monopolares sobre una topografía aislada

El océano es un sistema físico complejo debido a la interacción de movimientos de diferentes escalas de longitud y tiempo. No obstante, estructuras coherentes de larga vida en el océano son distinguibles en datos observacionales. En particular, vórtices de meso-escala con escalas horizontales típicas del orden de 100 km pueden persistir durante muchas semanas o incluso meses. El tiempo de vida de tales estructuras es afectado por mecanismos externos de forzamiento, interacciones con otras características oceánicas, y sus propiedades de estabilidad intrínsecas. Un ejemplo es reportado por Dewar (2002), quien discutió la evolución de meddies (i.e. vórtices subsuperficiales con origen en el Mediterráneo) los cuales son afectados por la forma del suelo marino. Algunos trabajos observacionales sobre meddies sugieren que las interacciones con la topografía del fondo pueden ser destructivas y dar paso a la desintegración del vórtice (Richardson and Tychensky, 1998; Shapiro et al., 1995). La obstrucción y eventual destrucción de remolinos en presencia de obstáculos topográficos en un sistema en rotación ha sido estudiado en experimentos de laboratorio (Zavala Sansón, 2002; Zavala Sansón et al., 2012) y simulaciones numéricas (van Geffen and Davies, 2000; Zavala Sansón and Gonzalez, 2021).

Los modelos analíticos de vórtices coherentes son útiles para entender sus propiedades de estabilidad y su dinámica general, las cuales pueden ser comparadas posteriormente con remolinos en condiciones realistas. En este trabajo estamos interesados en soluciones vorticales no lineales en un sistema en rotación, los cuales son frecuentemente usados para modelar estructuras persistentes en los océanos y la atmósfera (van Heijst and Clercx, 2009). La no linealidad es un ingrediente clave que evita la erosión del vórtice en forma de ondas de Rossby planetarias o topográficas, las cuales son generadas en la presencia de variaciones espaciales de la vorticidad planetaria (efecto β) y de la topografía de fondo, respectivamente.

Existen varios ejemplos de soluciones analíticas de remolinos con aplicaciones oceánicas. En el contexto cuasi-geostrófico (QG), un tipo de estructuras dipolares es el llamado “modon” (Stern, 1975). Soluciones de remolinos frontales oceánicos en un modelo de gravedad reducida, conocidas como “rodones”, fueron derivadas por Cushman-Roisin et al. (1985). Soluciones en modos azimutales de vórtices multipolares QG barotrópicos y baroclínicos fueron obtenidos por Viúdez (2019a,b). En el capítulo anterior se obtuvieron soluciones no lineales de monopolos y dipolos sobre una topografía aislada (ver también Gonzalez and Zavala Sansón (2021)). En este capítulo se considerará dicha familia de soluciones para estudiar la estabilidad de vórtices monopolares atrapados sobre montañas y valles.

La estabilidad de vórtices monopulares en un sistema en rotación sin topografía ha sido estudiado desde diferentes puntos de vista. Gent and McWilliams (1986) investigaron la inestabilidad lineal de vórtices circulares con circulación neta cero en el plano f ante perturbaciones en modos normales azimutales. Los autores encontraron que las perturbaciones de mayor razón de crecimiento pueden ser internas (con estructura vertical) o externa (barotrópica) dependiendo de la inclinación de los perfiles radiales de la función corriente. Un modelo linealizado de dinámica de contornos, usado por Flierl (1988), extendió el análisis para vórtices circulares baroclínicos. Experimentos en tanques en rotación y simulaciones numéricas en 3D han mostrado que vórtices ciclónicos y anticiclónicos pueden estar sujetos a inestabilidades barotrópicas (2D) y centrífugas (3D) (Kloosterziel and van Heijst, 1991; Orlandi and Carnevale, 1999). Un criterio necesario para la inestabilidad lineal barotrópica es obtenido del Teorema de punto de inflexión de Rayleigh adaptado a flujos con rotación (Gent and McWilliams, 1986). Los autores encontraron que vórtices aislados (flujos circulares con circulación neta nula) pueden ser barotrópicamente inestables y, para perfiles de vorticidad lo suficientemente abruptos o inclinados, desarrollan perturbaciones con número de onda azimutal dos, produciendo estructuras tripolares. En experimentos con tanques en rotación, los vórtices ciclónicos inestables tienden a formar ese tipo de tripolos (van Heijst and Kloosterziel, 1989). También es posible que se desarrollen vórtices multipolares para números de onda mayores (Carnevale and Kloosterziel, 1994; Trieling et al., 2010; Cruz Gómez et al., 2013). Los anticiclones, en contraste, son sensibles a inestabilidades centrífugas y usualmente se rompen en un par de dipolos (Kloosterziel and van Heijst, 1991). Los efectos combinados de inestabilidades barotrópicas y baroclínicas fueron discutidos por Orlandi and Carnevale (1999). Por otro lado, vórtices no aislados (con perfil de vorticidad monótono) son barotrópicamente estables (Kloosterziel and van Heijst, 1992).

Las variaciones de la topografía en el fondo pueden afectar de diversas maneras a los vórtices con profundidad finita. Estudios numéricos y experimentales han revelado diferentes procesos físicos involucrados en la interacción vórtice-topografía. Éstos incluyen la radiación de ondas topográficas y las trayectorias que vórtices monopulares y dipolares siguen alrededor de topografías locales, tales como montañas y valles submarinos (Carnevale et al., 1991; Zavala Sansón, 2002). Eventos como la erosión y división de vórtices debido a la presencia de montañas o cordilleras muy abruptas suelen ser frecuentes (Herbette et al., 2002, 2005; Sutyrin et al., 2011). En algunos casos, las estructuras vorticales pueden ser atrapadas sobre la topografía (Zavala Sansón et al., 2012; Zavala Sansón and Gonzalez, 2021), y una cuestión que surge de manera natural concierne a la estabilidad de tales configuraciones. Carton and Legras (1994) estudiaron la estabilidad de vórtices circulares aislados sobre un fondo parabólico axisimétrico y encontraron que si el núcleo del remolino es ciclónico, se generan tripolos compactos y estables. En contraste,

los tripolos obtenidos a partir de vórtices con núcleos anticiclónicos son inestables y producen dos dipolos moviéndose en dirección opuesta. Nycander and Lacasce (2004) usaron principios variacionales para encontrar regímenes estables para vórtices monopoles barotrópicos sobre topografías aisladas cuando los perfiles de vorticidad potencial son monótonos. En ese caso, los autores encontraron un gran conjunto de vórtices ciclónicos y anticiclónicos estables sobre una montaña circularmente simétrica. Zhao et al. (2019) estudiaron la estabilidad de un vórtice de Rankine barotrópico sobre una topografía cilíndrica y encontraron que los anticiclones son desestabilizados por montañas y estabilizados por depresiones. Dichos resultados se basaron en la consideración de que la vorticidad potencial es una función constante a trozos. Los saltos en la vorticidad potencial surgen tanto por la topografía cilíndrica como por el perfil a trozos de la vorticidad relativa.

Este trabajo estudia la estabilidad lineal de vórtices monopoles sobre una topografía aislada. En la primera parte (subsección 4.1), se plantea el problema de un flujo circular perturbado por modos normales azimutales y se deriva un problema de eigenvalores generalizado para la correspondiente razón de crecimiento. El análisis es llevado a cabo para flujos bajo la aproximación del modelo de aguas someras (SW) y extendido a la dinámica QG. Luego, se derivan algunos teoremas clásicos para inestabilidades barotrópicas y centrífugas tomando en cuenta efectos topográficos en la dinámica SW. En la segunda parte (subsección 4.2), se estudia numéricamente la estabilidad de vórtices circulares sobre una topografía axisimétrica en el límite QG. El flujo base se obtiene de las soluciones QG obtenidas en el capítulo anterior, correspondientes a ciclones y anticiclones sobre montañas y valles cuya vorticidad potencial es no uniforme. Una característica relevante de las soluciones es que la topografía del fondo es arbitraria, sujeta únicamente a la restricción de que sea axisimétrica y aislada (la topografía de fondo se vuelve plana a grandes distancias). Los resultados teóricos son contrastados con la solución espectral del problema de eigenvalores generalizado correspondiente al caso QG. Adicionalmente, se realiza para la dinámica QG simulaciones numéricas inicializadas con diferentes configuraciones vórtice-topografía. Finalmente, las conclusiones son discutidas en 4.3.

4.1 Estabilidad de vórtices monopoles sobre una topografía axisimétrica

4.1.1 Análisis lineal para flujos SW y QG

Esta sección examina el problema de estabilidad lineal asociado con el modelo SW sobre el plano f incluyendo efectos topográficos. Usando coordenadas polares (r, θ) y considerando la topografía ax-

isimétrica, una capa de fluido bajo la aproximación de tapa rígida satisface la ecuación de vorticidad

$$h_s \frac{\partial q_s}{\partial t} + J(\psi_s, q_s) = 0, \quad (86)$$

donde ψ_s representa la función de transporte, $q_s = h_s^{-1}(\omega_s + f_0)$ es la vorticidad potencial (PV) con $\omega_s = \nabla \cdot (h_s^{-1} \nabla \psi_s)$ la vorticidad relativa y f_0 el parámetro de Coriolis, $J(a, b) = (\partial_r a \partial_\theta b - \partial_\theta a \partial_r b)/r$ es el operador Jacobiano, y $h_s(r) = H_0 - b(r)$ es el espesor de la capa de fluido, donde $b(r)$ es el perfil topográfico axisimétrico con amplitud b_0 y escala horizontal r_t , y H_0 es la profundidad constante de la capa de fluido lejos de la topografía (Figure 12). Se consideran topografías aisladas, $db/dr \rightarrow 0$ para $r \gg r_t$, las cuales pueden ser montañas ($b_0 > 0$) o valles ($b_0 < 0$). Las componentes radial y azimutal de la velocidad son definidas como $u_s = -h_s^{-1} \partial_\theta \psi_s / r$ y $v_s = h_s^{-1} \partial_r \psi_s$.

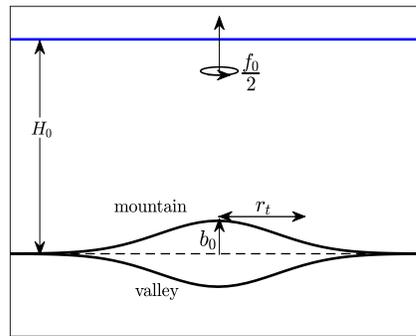


Figure 12. Vista de lado de una capa de fluido con profundidad media H_0 sobre una topografía de fondo $b(r)$ definida como una montaña o valle submarino de amplitud b_0 y ancho r_t sobre un plano- f .

En el análisis de estabilidad lineal se introducen pequeñas perturbaciones bidimensionales $\psi'_s(r, \theta, t)$ sobre un flujo base $\Psi_s(r)$, el cual representa una solución estacionaria axisimétrica de (86):

$$\psi_s(r, \theta, t) = \Psi_s(r) + \psi'_s(r, \theta, t). \quad (87)$$

El flujo base puede ser un vórtice ciclónico o anticiclónico girando sobre la topografía, la cual puede ser una montaña o un valle. Note que la vorticidad potencial puede ser escrita como

$$q_s(r, \theta, t) = Q_s(r) + q'_s(r, \theta, t), \quad (88)$$

donde $Q_s = h_s^{-1}[\nabla \cdot (h_s^{-1} \nabla \Psi_s) + f_0]$ es la PV base y $q'_s = h_s^{-1} \nabla \cdot (h_s^{-1} \nabla \psi'_s)$ su perturbación. Insertando

(87)-(88) en la ecuación de vorticidad (86) y linealizando:

$$h_s \frac{\partial q'_s}{\partial t} + J(\Psi_s, q'_s) + J(\psi'_s, Q_s) = 0 \quad (89)$$

La perturbación es de la forma

$$\begin{aligned} \psi'_s(r, \theta, t) &= \phi(r) e^{i(k\theta - \sigma t)}, \\ q'_s(r, \theta, t) &= \frac{1}{h_s} \mathcal{L}_s[\phi(r)] e^{i(k\theta - \sigma t)}, \end{aligned} \quad (90)$$

donde $\mathcal{L}_s[]$ es un operador diferencial definido por $\mathcal{L}_s = r^{-1} \partial_r (r h_s^{-1} \partial_r) - r^{-2} h_s^{-1} k^2$, k es el número de onda azimutal, $\phi(r)$ es una amplitud compleja, y $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ es un número complejo cuya parte real es la frecuencia de la perturbación, y la parte imaginaria representa su razón de crecimiento. La condición de inestabilidad es que la razón de crecimiento σ_i sea positiva.

Aplicando (90) a (89) se obtiene el siguiente problema de eigenvalores generalizado

$$\sigma \mathcal{L}_s \phi(r) = \frac{k}{r} \left[\frac{\partial_r \Psi_s}{h_s} \mathcal{L}_s - \partial_r Q_s \right] \phi(r), \quad (91)$$

La representación matricial de esta ecuación es dada por

$$\sigma A_{ij} \phi(r) = B_{ij} \phi(r), \quad (92)$$

donde A_{ij} y B_{ij} son matrices reales no hermíticas, σ es el eigenvalor, y ϕ la eigenfunción. Las soluciones de (91) para diferentes números de onda k proporcionan eigenvalores y, consecuentemente, la razón de crecimiento de la perturbación. Sin embargo, en general es difícil obtener soluciones analíticas, de suerte que el problema se debe resolver numéricamente, como se hará en la subsección 4.2.

Ahora considérese la dinámica QG obtenida cuando el grosor medio de la capa de fluido es mucho más grande que la amplitud de la topografía, $H_0 \gg b_0$ (Vallis, 2017). En este caso, la ecuación de vorticidad es

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, q) = 0, \quad (93)$$

donde ahora $\psi = \psi_s / H_0$ es la función corriente y $q = \omega + h(r)$ es la PV cuasi-geostrófica, con $\omega = \nabla^2 \psi$ la vorticidad relativa y $h(r) = f_0 H_0^{-1} b(r)$ la vorticidad ambiente (Zavala Sansón and van Heijst, 2014). Las componentes radial y azimutal de la velocidad son ahora definidas como $u = -r^{-1} \partial_\theta \psi$ y $v = \partial_r \psi$, respectivamente.

El flujo perturbado es de la forma

$$\psi(r, \theta, t) = \Psi(r) + \psi'(r, \theta, t), \quad (94)$$

donde $\Psi (= \Psi_s/H_0)$ es el flujo básico y ψ' una pequeña perturbación. Aplicando el mismo análisis lineal usado para las ecuaciones SW, se obtiene el siguiente problema de eigenvalores generalizado

$$\sigma \mathcal{L}\phi = \frac{k}{r} [\partial_r \Psi \mathcal{L} - \partial_r (\nabla^2 \Psi + h)] \phi, \quad (95)$$

donde el operador lineal es $\mathcal{L} = \partial_{rr} + r^{-1}\partial_r - r^{-2}k^2$. Nótese la comparación entre esta expresión para la dinámica QG con la versión para SW (91).

4.1.2 Inestabilidad barotrópica

La inestabilidad barotrópica se refiere a perturbaciones crecientes que surgen de flujos con corte. Un criterio necesario para esta inestabilidad es proporcionado por el Teorema del punto de inflexión de Rayleigh para flujos circulares 2D o paralelos (Gent and McWilliams, 1986). Un criterio más restrictivo (todavía necesario) es dado por el Teorema de Fjørtoft. Esta subsección presenta una nueva versión de estos teoremas para vórtices circulares sobre topografía en la dinámica SW.

4.1.2.1 Teorema del punto de inflexión de Rayleigh con topografía

El problema de eigenvalores generalizado (91) en el modelo SW proporciona una versión equivalente al teorema del punto de inflexión de Rayleigh involucrando efectos topográficos. Primero, (91) es reescrita como

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r}{h_s} \frac{d\phi}{dr} \right) - \frac{k^2}{rh_s} \phi - \frac{d_r Q_s}{r^{-1}h_s^{-1}d_r \Psi_s - \sigma/k} \phi = 0, \quad (96)$$

donde $d_r \equiv \frac{d}{dr}$. Note que (96) supone que $r^{-1}h_s^{-1}d_r \Psi_s - \sigma/k \neq 0$ para evitar soluciones triviales de ϕ (porque $d_r Q_s \neq 0$ en general). Multiplicando esta ecuación por el complejo conjugado ϕ^* , integrando cada término, y aplicando las condiciones de contorno nulas en $r = 0$ y $r = r_m \rightarrow \infty$ (el valor máximo en la dirección radial) obtenidas del análisis asintótico para r pequeños y grandes (Gent and McWilliams, 1986), se produce

$$\int_0^{r_m} \frac{r}{h_s} |d_r \phi|^2 dr + \int_0^{r_m} \frac{k^2}{rh_s} |\phi|^2 dr + \int_0^{r_m} \frac{(r^{-1}h_s^{-1}d_r \Psi_s - \sigma^*/k)d_r Q_s}{|r^{-1}h_s^{-1}d_r \Psi_s - \sigma/k|^2} |\phi|^2 dr = 0. \quad (97)$$

La parte imaginaria de (97) es

$$\frac{\sigma_i}{k} \int_0^{r_m} \frac{d_r Q_s}{|r^{-1} h_s^{-1} d_r \Psi_s - \sigma/k|^2} |\phi|^2 dr = 0. \quad (98)$$

Si $\sigma_i \neq 0$, entonces el flujo básico podría ser inestable. En este caso, para satisfacer (98) el gradiente de vorticidad potencial del flujo base debe ser cero en algún $r = r_z$,

$$\left. \frac{d}{dr} \left[\frac{\nabla \cdot (h_s^{-1} \nabla \Psi_s) + f_0}{h_s} \right] \right|_{r=r_z} = 0, \quad (99)$$

el cual es un criterio necesario de inestabilidad para el modelo de aguas someras. En el límite QG, el resultado es equivalente pero ahora usando la vorticidad potencial cuasi-geostrófica:

$$\left. \frac{d}{dr} [\nabla^2 \Psi + h(r)] \right|_{r=r_z} = 0. \quad (100)$$

Note que para el caso de fondo plano, $h(r) = 0$, la condición (100) demanda que el gradiente de vorticidad relativa del flujo base $\Psi(r)$ sea nulo en alguna distancia radial, como fue reportado por Gent and McWilliams (1986).

4.1.2.2 Teorema de Fjørtoft con topografía

Ahora se va a discutir un criterio equivalente al Teorema de Fjørtoft con topografía en el modelo SW. Primero, note que la parte real de (97) nos permite encontrar

$$\int_0^{r_m} \frac{d_r Q_s (r^{-1} h_s^{-1} d_r \Psi_s - \sigma_r/k)}{|r^{-1} h_s^{-1} d_r \Psi_s - \sigma/k|^2} |\phi|^2 dr < 0. \quad (101)$$

Segundo, si $\sigma_i \neq 0$ y la condición (98) es satisfecha, entonces

$$(r^{-1} h_s^{-1} d_r \Psi_s |_{r=r_z} - \sigma_r/k) \int_0^{r_m} \frac{d_r Q_s}{|r^{-1} h_s^{-1} d_r \Psi_s - \sigma/k|^2} |\phi|^2 dr = 0. \quad (102)$$

Restando la ecuación (102) de (101) se obtiene

$$\int_0^{r_m} \frac{d_r Q_s (r^{-1} h_s^{-1} d_r \Psi_s - r^{-1} h_s^{-1} d_r \Psi_s |_{r=r_z})}{|r^{-1} h_s^{-1} d_r \Psi_s - \sigma/k|^2} |\phi|^2 dr < 0, \quad (103)$$

la cual, para ser satisfecha, requiere que el numerador del integrando sea negativo para algún r :

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{\nabla \cdot (h_s^{-1} \nabla \Psi_s) + f_0}{h_s} \right] \left(\frac{1}{rh_s} \frac{d\Psi_s}{dr} - \frac{1}{r_z h_s(r_z)} \frac{d\Psi_s}{dr} \Big|_{r=r_z} \right) < 0. \quad (104)$$

Esta expresión indica que flujos circulares sobre una topografía pueden ser inestables si el signo de la velocidad relativa al punto de inflexión es opuesta al signo de la derivada de la vorticidad potencial en alguna parte.

En la aproximación QG, el criterio de inestabilidad (104) es reescrito como

$$\frac{d}{dr} [\nabla^2 \Psi + h(r)] \left(\frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} - \frac{1}{r_z} \frac{d\Psi}{dr} \Big|_{r=r_z} \right) < 0. \quad (105)$$

Cuando no hay topografía, $h(r) = 0$, la condición (105) es reducida al teorema reportado por Gent and McWilliams (1986) para flujos circulares. Note que el Teorema de Fjørtoft (105) requiere que el punto $r = r_z$, donde el Teorema de Rayleigh se satisface, exista.

4.1.3 Inestabilidad centrífuga

Los movimientos verticales en remolinos 3D son capaces de desencadenar inestabilidades centrífugas (Orlandi and Carnevale, 1999). El Teorema de Circulación de Rayleigh proporciona un criterio para identificar este tipo de inestabilidad (Kloosterziel and van Heijst, 1991). El criterio se basa en consideraciones energéticas para un flujo axisimétrico con una velocidad azimutal arbitraria $v(r)$ en ausencia de viscosidad, estratificación, rotación, y sobre un fondo plano. Una extensión del teorema incluyendo el efecto de la rotación fue presentado en Kloosterziel (1990) y Kloosterziel and van Heijst (1991), basados en la conservación de momentum angular de elementos de fluido sujetos a desplazamientos infinitesimales. Siguiendo un procedimiento similar, en esta sección se presenta una extensión del Teorema de Circulación incluyendo efectos topográficos. Note que la inestabilidad centrífuga es inherentemente tridimensional, en contraste con la inestabilidad barotrópica que es puramente bidimensional, tal como se examinó anteriormente.

Considere las ecuaciones de momentum de un flujo circularmente simétrico en coordenadas cilíndricas

(r, θ, z) en el plano f :

$$\frac{Du}{Dt} - f_0 v - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (106)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + f_0 u + \frac{uv}{r} = 0, \quad (107)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g, \quad (108)$$

donde (u, v) son las componentes radial y azimutal de la velocidad, $P(r, z)$ es la presión, g es la gravedad y $D/Dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial r + w\partial/\partial z$ es la derivada material, con w la velocidad vertical. La presión es independiente de θ ya que el flujo mantiene su forma circular. Se considera que el flujo se mantiene en balance hidrostático en la dirección vertical.

Ahora considere la presencia de la topografía axisimétrica $b(r)$ mostrada en la Figura 12. Integrando (108) desde un nivel arbitrario z , la presión es

$$P = \rho g [h_s(r) + b(r)] - \rho g z. \quad (109)$$

El primer término $p(r) = \rho g h_s(r)$ es la presión asociada con la elevación de la superficie (la cual es despreciada únicamente en la ecuación de continuidad bajo la aproximación de tapa rígida). Las ecuaciones de momentum horizontal son reescritas como:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{v^2}{r} + f_0 v - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} - g \frac{db}{dr}, \quad (110)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(vr + \frac{1}{2} f_0 r^2 \right) = 0, \quad (111)$$

donde (111) representa la conservación de momentum angular absoluto.

Como flujo básico se tiene a un vórtice circular monopolar con velocidad azimutal $v(r)$. Siguiendo a Kloosterziel and van Heijst (1991), se considera un elemento de fluido que es desplazado desde $r = r_0$ a $r' = r_0 + \delta r$ sin cambiar el campo de presión $p(r)$ (en este sentido el desplazamiento es considerado como virtual). La nueva velocidad azimutal es $v'(r')$. Usando la ley conservación (111) se encuentra

$$v'(r')r' + \frac{1}{2} f_0 r'^2 = v(r_0)r_0 + \frac{1}{2} f_0 r_0^2. \quad (112)$$

La aceleración radial debida al desplazamiento virtual es obtenida desde (110) como la variación de la

aceleración entre ambos estados (perturbado y básico) evaluada en r' :

$$\frac{D^2\delta r}{Dt^2} = \left(\frac{Du'}{Dt} - \frac{Du}{Dt} \right) \Big|_{r=r'}. \quad (113)$$

Usando (110) y después de algunas manipulaciones:

$$\begin{aligned} \frac{D^2\delta r}{Dt^2} &= \left[\frac{v'(r')^2}{r'} + f_0 v'(r') - \frac{v(r')^2}{r'} - f_0 v(r') \right] - g\delta \frac{db}{dr} \\ &= \frac{1}{r'^3} \left[\left(v'(r')r' + \frac{1}{2}f_0 r'^2 \right)^2 - \left(v(r')r' + \frac{1}{2}f_0 r'^2 \right)^2 \right] - g\delta \frac{db}{dr}. \end{aligned} \quad (114)$$

Aquí, $\delta db/dr = db/dr|_{r'} - db/dr|_{r_0}$ es la variación del gradiente de la topografía conforme la partícula es desplazada. Sustituyendo el primer término con (112):

$$\frac{D^2\delta r}{Dt^2} = \frac{1}{r'^3} \left[\left(v(r_0)r_0 + \frac{1}{2}f_0 r_0^2 \right)^2 - \left(v(r')r' + \frac{1}{2}f_0 r'^2 \right)^2 \right] - g\delta \frac{db}{dr}. \quad (115)$$

Una expansión en Taylor alrededor de r_0 simplifica esta expresión a orden δr :

$$\frac{D^2\delta r}{Dt^2} \sim -\delta r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r_0^3} \left(v(r)r + \frac{1}{2}f_0 r^2 \right)^2 + g \frac{d}{dr} b(r) \right]_{r=r_0}. \quad (116)$$

Si el elemento de fluido es desplazado hacia afuera ($\delta r > 0$), entonces la aceleración (116) en esa dirección es positiva cuando

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r_0^3} \left(v(r)r + \frac{1}{2}f_0 r^2 \right)^2 + g \frac{d}{dr} b(r) \right]_{r=r_0} < 0. \quad (117)$$

O, tomando la derivada,

$$\frac{2}{r_0} \left(v(r_0) + \frac{1}{2}f_0 r_0 \right) (\omega(r_0) + f_0) + g \frac{d^2}{dr^2} b(r_0) < 0. \quad (118)$$

con la vorticidad $\omega(r) = d_r[rv(r)]/r$. La misma condición aplica para un desplazamiento hacia el interior $\delta r < 0$ y una aceleración negativa. Así, (118) es un criterio suficiente para la inestabilidad centrífuga.

Escalando (118), se obtiene el siguiente criterio adimensional:

$$\frac{1}{r_a} (\epsilon v_a + r_a) (\epsilon \omega_a + 2) + 2\Delta \left(\frac{L_D}{L} \right)^2 \frac{d^2 b_a}{dr_a^2} < 0, \quad (119)$$

donde $()_a$ representa variables adimensionales, $\epsilon = 2U/Lf_0$ es el número de Rossby basado en la longitud horizontal L , la escala de la velocidad U , y la rapidez angular del sistema $f_0/2$, $L_D = \sqrt{gH_0}/f_0$ es el radio de deformación basado en la escala de la profundidad media y $\Delta = b_0/H_0$ es la amplitud topográfica normalizada. Note que el primer término en (119) corresponde al teorema de circulación reportado por Kloosterziel and van Heijst (1991) para un fondo plano, $b_0 = 0$. La nueva condición extiende el Teorema de Circulación de Rayleigh involucrando efectos topográficos. El criterio aplica para flujos SW y también en el límite QG, en el cual b_0 es restringido a ser mucho más pequeño que la profundidad promedio H_0 .

El criterio de estabilidad (119) indica que la forma de la topografía y el tamaño del vórtice son esenciales. La forma establece el signo de d^2b/dr^2 ; por ejemplo, una topografía sin punto de inflexión en su falda, como es el caso de una topografía semiesférica, tiene una segunda derivada con únicamente un signo, negativo para una montaña ó positivo para un valle. Por lo tanto, la montaña (valle) semiesférica tiende a desestabilizar (estabilizar) el vórtice estable (inestable) sobre un fondo plano. Una forma topográfica más realista tiene al menos un punto de inflexión, como en un perfil Gaussiano, de modo que las inestabilidades pueden desarrollarse dependiendo de la distancia radial en la cual el flujo es perturbado. Por otro lado, para un vórtice “pequeño” en la dinámica SW ($\Delta \sim O(1)$ y $L < L_D$ pero aún dentro de la mesoescala), la contribución topográfica es más relevante en la inestabilidad centrífuga que para “grandes” vórtices $L > L_D$. En la dinámica QG, $L \sim L_D$ y $\Delta \ll 1$, de manera que los términos topográficos son menos importantes.

4.2 Análisis de estabilidad de vórtices QG sobre topografía

En esta sección se discute el criterio de estabilidad para una clase especial de vórtices monopoles QG sobre una topografía axisimétrica derivada por Gonzalez and Zavala Sansón (2021). Estas soluciones no lineales de (93) representan vórtices ciclónicos y anticiclónicos sobre montañas y valles en el plano f . La existencia de dichas soluciones apoya la hipótesis de que movimientos vorticales intensos pueden existir sobre la topografía durante tiempos muy largos, como frecuentemente ocurre en los océanos (ver la primera parte de este capítulo y las referencias allí). A pesar de las fuertes simplificaciones (flujos

circulares sobre una topografía axisimétrica), la relevancia de las soluciones analíticas es que ellas le permiten a uno probar los teoremas de inestabilidad barotrópica previamente discutidos. Además, las soluciones exactas son condiciones iniciales adecuadas para ser simuladas numéricamente, como se hará mas adelante.

4.2.1 Vórtices sobre una topografía aislada: El flujo básico

Las soluciones analíticas reportadas por Gonzalez and Zavala Sansón (2021) son estructuras estacionarias basadas en modos azimutales adaptadas a la forma de montañas o valles. Los flujos discutidos aquí corresponden a vórtices monopoles con modo azimutal $m = 0$, y amplitud de la función corriente $\widehat{\psi}$, cuyo signo corresponde a anticiclones ($\widehat{\psi} > 0$) y a ciclones ($\widehat{\psi} < 0$). El perfil topográfico se considera Gaussiano, $b(r) = b_0 e^{-r^2/r_t^2}$, donde b_0 es la altura de la montaña o la profundidad del valle y r_t es el ancho de la topografía (ver Figura 12).

Las soluciones son una familia de funciones a trozos dependientes de los parámetros topográficos. Al escalar la coordenada radial como $s = c_0 r$, con c_0 un factor con unidades de 1/longitud, se obtiene la siguiente forma adimensional de la función corriente $\Psi_a(s)$, la velocidad azimutal $v_a(s) = d_s \Psi_a$, y la vorticidad relativa $\omega_a(s) = s^{-1} d_s (s v_a)$ (donde d_s es la derivada radial adimensional)

$$\Psi_a(s) = \frac{\Psi}{\widehat{\psi}} = \begin{cases} \Psi_I(s; \xi_t, s_t) - a_0(\xi_t, s_t) - a_2(\xi_t, s_t) s^2 & s \leq s_l \\ a_1(\xi_t, s_t) \ln s & s \geq s_l \end{cases} \quad (120)$$

$$v_a(s) = \frac{v}{c_0 \widehat{\psi}} = \begin{cases} d_s \Psi_I(s; \xi_t, s_t) - 2a_2(\xi_t, s_t) s & s \leq s_l \\ a_1(\xi_t, s_t) / s & s \geq s_l \end{cases} \quad (121)$$

$$\omega_a(s) = \frac{\omega}{c_0^2 \widehat{\psi}} = \begin{cases} -\Psi_I(s; \xi_t, s_t) + \xi_t H(s; s_t) - 4a_2(\xi_t, s_t) & s \leq s_l \\ 0 & s \geq s_l \end{cases} \quad (122)$$

El núcleo del vórtice está centrado en la topografía en una región interior circular de radio s_l , escogido como el primer cero de la función de Bessel de orden 1 ($s_l = 3.8317$). La región exterior $s \geq s_l$ consiste de un flujo potencial. Los coeficientes a_0 , a_1 y a_2 son usados para garantizar la continuidad de las variables del flujo (ver Anexo C). Las funciones axisimétricas $\Psi_I(s; \xi_t, s_t)$ y $H(s; s_t)$ (definidas abajo),

así como las constantes $a_{0,1,2}$, dependen de los siguientes parámetros adimensionales

$$\xi_t = \frac{h_0}{c_0^2 \widehat{\psi}} \equiv \frac{\Delta}{Ro}, \quad s_t = c_0 r_t. \quad (123)$$

El primero es la razón entre la vorticidad ambiente en el origen, $h_0 \equiv h(0) = f_0 b_0 / H_0$, y la escala de vorticidad, $c_0^2 \widehat{\psi}$. Note que ξ_t es equivalente a la razón entre la amplitud topográfica relativa $\Delta = b_0 / H_0$ y el número de Rossby basado en el parámetro de Coriolis, $Ro = c_0^2 \widehat{\psi} / f_0$ [y por tanto $\epsilon = 2Ro$ en el Teorema de Circulación (119)]. El segundo parámetro, s_t , es la escala horizontal adimensional de la topografía. De aquí en adelante nos referiremos a topografías estrechas cuando $s_t < s_l$, es decir, la escala horizontal de la montaña o valle es más “pequeña” que la escala del vórtice. Similarmente, una topografía “amplia” significa $s_t > s_l$.

La expresión explícita para la función topográfica H es

$$H(s; s_t) = 1 - e^{-(s^2/s_t^2)}, \quad (124)$$

mientras que la función corriente Ψ_I , y $d_s \Psi_I$ en la región interior son

$$\Psi_I(s; \xi_t, s_t) = J_0(s) + \xi_t \left(\frac{\pi}{2} Y_0(s) \int_0^s H(s'; s_t) J_0(s') s' ds' - \frac{\pi}{2} J_0(s) \int_0^s H(s'; s_t) Y_0(s') s' ds' \right), \quad (125)$$

$$d_s \Psi_I(s; \xi_t, s_t) \equiv v_I(s; \xi_t, s_t) = -J_1(s) + \xi_t \left(-\frac{\pi}{2} Y_1(s) \int_0^s H(s'; s_t) J_0(s') s' ds' + \frac{\pi}{2} J_1(s) \int_0^s H(s'; s_t) Y_0(s') s' ds' \right), \quad (126)$$

donde J_m y Y_m son las funciones de Bessel a orden m de primer y segundo tipo, respectivamente. Note que la divergencia de Y_m en el origen es evitada ya que $H(s) \rightarrow 0$ en $s \rightarrow 0$. La función $v_I(s)$ definida en (126) será usada más adelante. Después de algunos cálculos se verifica que la vorticidad potencial es proporcional a Ψ_I , tal que $q_a \equiv \omega_a + \xi_t e^{-(s^2/s_t^2)} = -\Psi_I + \xi_t - 4a_2$.

Una característica especial de las soluciones QG (120) es la simetría entre los signos del vórtice y la amplitud de la topografía, contenida en el parámetro ξ_t . Específicamente, un anticiclón ($\widehat{\psi} > 0$) sobre una montaña ($b_0 > 0$) es equivalente a un ciclón ($\widehat{\psi} < 0$) sobre un valle ($b_0 < 0$). Análogamente, el caso de un ciclón sobre una montaña es equivalente al de un anticiclón sobre un valle. Para una referencia rápida, las configuraciones flujo/topografía son resumidas en la tabla 1.

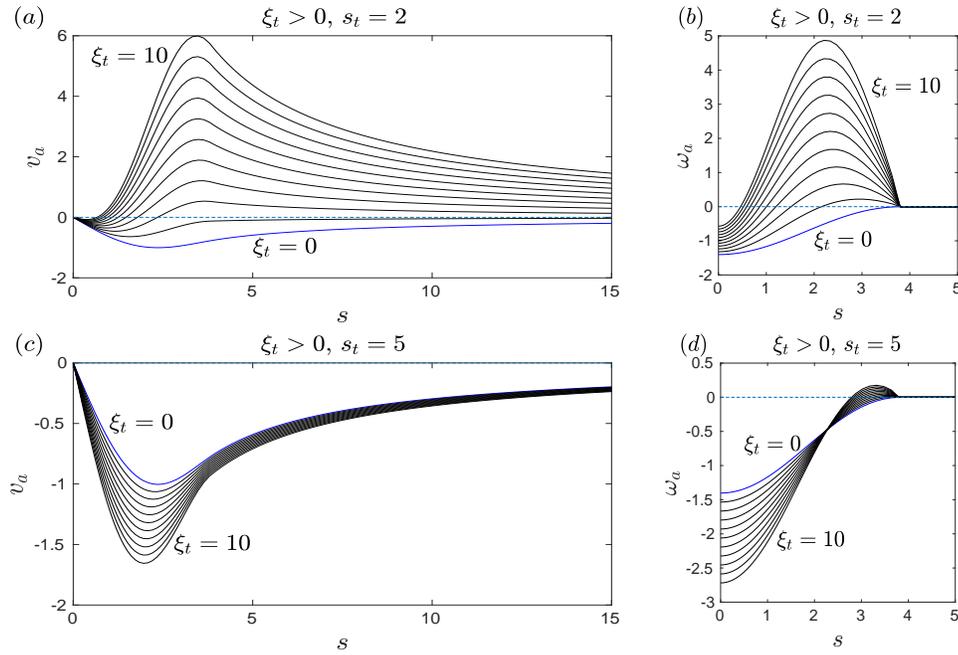


Figure 13. Perfiles de (a) velocidad azimutal y (b) vorticidad relativa para diferentes configuraciones anticiclón/montaña (A/M) sobre una topografía estrecha, $s_t = 2$. Los paneles (c) y (d) muestran los correspondientes perfiles para una topografía amplia, $s_t = 5$. Las curvas en azul indican los casos con fondo plano, $\xi_t = 0$.

Table 1. Resumen de las configuraciones flujo/topografía en las soluciones analíticas de vórtices circulares (con amplitud ciclónica ó anticiclónica $\hat{\psi}$) sobre una topografía (con altura ó profundidad b_0).

Configuración	Identificador	Vórtice	Topografía	$\xi_t = \Delta/Ro$
Anticiclón/montaña	A/M	$\hat{\psi} > 0$	$b_0 > 0$	$\xi_t > 0$
Ciclón/valle	C/V	$\hat{\psi} < 0$	$b_0 < 0$	
Anticiclón/valle	A/V	$\hat{\psi} > 0$	$b_0 < 0$	$\xi_t < 0$
Ciclón/montaña	C/M	$\hat{\psi} < 0$	$b_0 > 0$	

La Figura 13 presenta varios perfiles de velocidad y vorticidad radial para el caso anticiclón/montaña, $\xi_t > 0$. Cuando la topografía es estrecha (paneles *a, b*), ambos perfiles cambian de signo a una cierta distancia radial (excepto para la topografía plana $\xi_t = 0$). Los perfiles de vorticidad indican que el núcleo negativo del vórtice es blindado por un anillo de vorticidad opuesta que tiende a cero en s_t . En general, los vórtices no son aislados debido a que la circulación total (la integral de área de la vorticidad) es evidentemente diferente de cero. Para una topografía amplia (paneles *c, d*), la velocidad azimutal alcanza un máximo en un cierto radio y luego decae lentamente, como en modelos típicos de vórtices (van Heijst and Clercx, 2009). Adicionalmente, existen vórtices con un núcleo rodeado por un anillo muy débil de vorticidad de signo opuesto (Figure 13d).

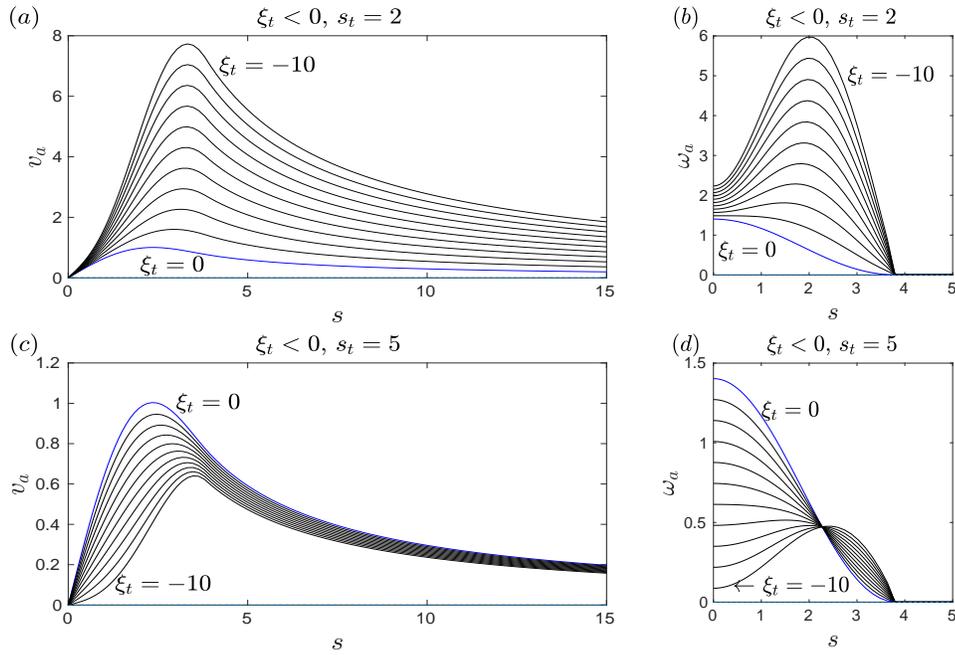


Figure 14. Igual que en la Figura 13 pero ahora para los casos ciclón/montaña (C/M).

La Figura 14 muestra los perfiles de velocidad y vorticidad obtenidos para el caso ciclón/montaña $\xi_t < 0$ (equivalente a la configuración anticiclón/valle). Los paneles (a) y (c) no indican cambios en el signo de la velocidad azimutal para topografías estrechas y amplias. Los signos de los perfiles de vorticidad tampoco cambian (paneles b, d). Sin embargo, con el incremento de $|\xi_t|$, la vorticidad en la periferia es más intensa que en el origen.

Ahora evaluaremos los teoremas obtenidos en las subsecciones 4.1.2 y 4.1.3 para el flujo básico que hemos presentado.

4.2.2 Condiciones para la inestabilidad barotrópica: Teorema de Rayleigh

Apartir de las soluciones (120)-(122), la forma adimensional del Teorema de Rayleigh (100) puede ser reescrita como

$$d_s [\omega_a(s; \xi_t, s_t) + \xi_t(1 - H(s; s_t))] \equiv \begin{cases} -v_I(s; \xi_t, s_t) = 0 & s \leq s_l \\ -\xi_t d_s H(s, s_t) = 0 & s \geq s_l \end{cases} \quad (127)$$

donde $v_I = d_s \Psi_I$ fue definido en (126). Considere los siguientes casos para topografías estrechas y amplias. Si la topografía se vuelve plana en la región exterior, $d_s H(s; s_t) \equiv 0$ (topografía estrecha)

entonces el teorema requiere que

$$v_I|_{s_{in}} = 0 \quad (128)$$

en algún $s_{in} < s_l$ en la región interior. La Figura 15 (a-b) presenta los perfiles radiales de $v_I(s)$ para valores positivos y negativos de ξ_t con $s_t = 2$. Los vórtices con $\xi_t > 0$ (panel a) satisfacen (128) ya que el signo de $v_I(s)$ cambia en algún lugar de la región interior. Por tanto, las configuraciones A/M y C/V pueden ser barotrópicamente inestables. Por el contrario, los campos de velocidad, correspondientes a los casos donde $\xi_t < 0$ (panel b), no satisfacen (128) ya que $v_I(s) > 0$ en toda parte. Así, los casos C/M y A/V son neutralmente estables.

Cuando $d_s H(s; s_t) \neq 0$ en la región exterior (topografía amplia), el vórtice para la siguiente situación puede ser inestable. Si $d_s H(s; s_t)$ es de signo definido, (127) se satisface si $v_I(s; \xi_t, s_t)$ es de signo opuesto a $\xi_t d_s H(s; s_t)$ en alguna parte de la región interior, es decir:

$$v_I|_{s_{in}} \begin{cases} > 0 & \text{si } \xi_t d_s H(s; s_t) < 0 \\ < 0 & \text{si } \xi_t d_s H(s; s_t) > 0 \end{cases} \quad (129)$$

donde $s_{in} < s_l$. En el caso particular de una topografía Gaussiana, estas relaciones aplican debido a que $d_s H(s; s_t) > 0$ (< 0) para una montaña (valle). La Figura 15 (c-d) presenta el perfil radial de $v_I(s)$ para valores positivos y negativos de ξ_t con $s_t = 5$. Las configuraciones A/M y C/V en el panel (c) pueden ser inestables porque ellas satisfacen la segunda desigualdad en (129). En contraste, los casos C/M y A/V mostrados en el panel (d) no satisfacen la primera desigualdad en (129), y por tanto son estables.

En resumen, las configuraciones con $\xi_t > 0$ pueden ser inestables, y aquellas con $\xi_t < 0$ son estables para cualquier topografía.

4.2.3 Condiciones para la inestabilidad barotrópica: Teorema de Fjørtoft

Ahora se evaluará el criterio (105) para el flujo básico propuesto. Se consideran únicamente las configuraciones con $\xi_t > 0$ para topografías estrechas donde el criterio de Rayleigh (128) se satisface, es decir, $d_s H(s; s_t) = 0$ en la región exterior (ver Figura 15a). En estos casos, el Teorema de Fjørtoft adimensional (105) establece que la siguiente desigualdad podría ser satisfecha simultáneamente con el

Teorema de Rayleigh para algún s

$$\gamma_F \equiv v_I(s; \xi_t, s_t) \left(\frac{1}{s} v_I(s; \xi_t, s_t) - \frac{1}{s_{in}} v_I(s_{in}; \xi_t, s_t) \right) > 0 \quad \text{for } s < s_t, \quad (130)$$

donde se ha usado el hecho que $d_s q_a = -d_s \psi_I = -v_I$. A partir de (128) se conoce que $v_I(s_{in}; \xi_t, s_t) = 0$, con lo que se puede concluir que γ_F satisface el Teorema de Fjørtoft ya que

$$\gamma_F = v_I^2(s; \xi_t, s_t)/s, \quad (131)$$

es siempre definida positiva.

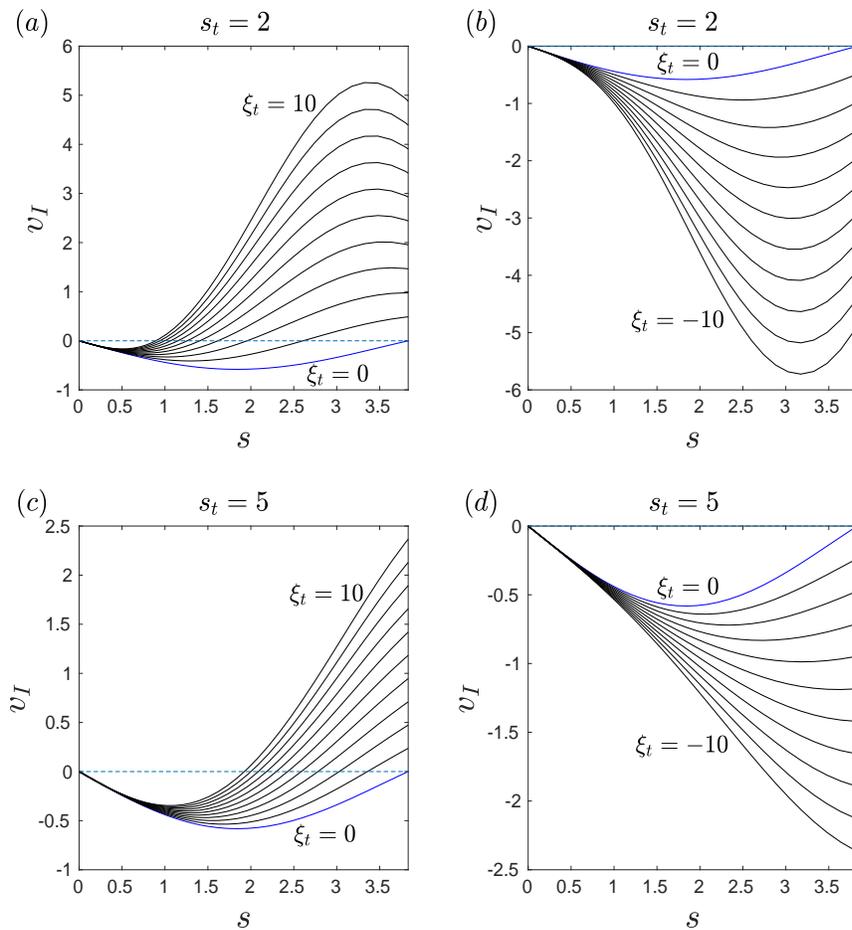


Figure 15. Perfiles de la función radial v_I usada para evaluar el Teorema de punto de inflexión de Rayleigh para topografías estrechas $s_t = 2$: (a) $\xi_t > 0$ y (b) $\xi_t < 0$. Los paneles (c) y (d) muestran los correspondientes perfiles para una topografía amplia $s_t = 5$.

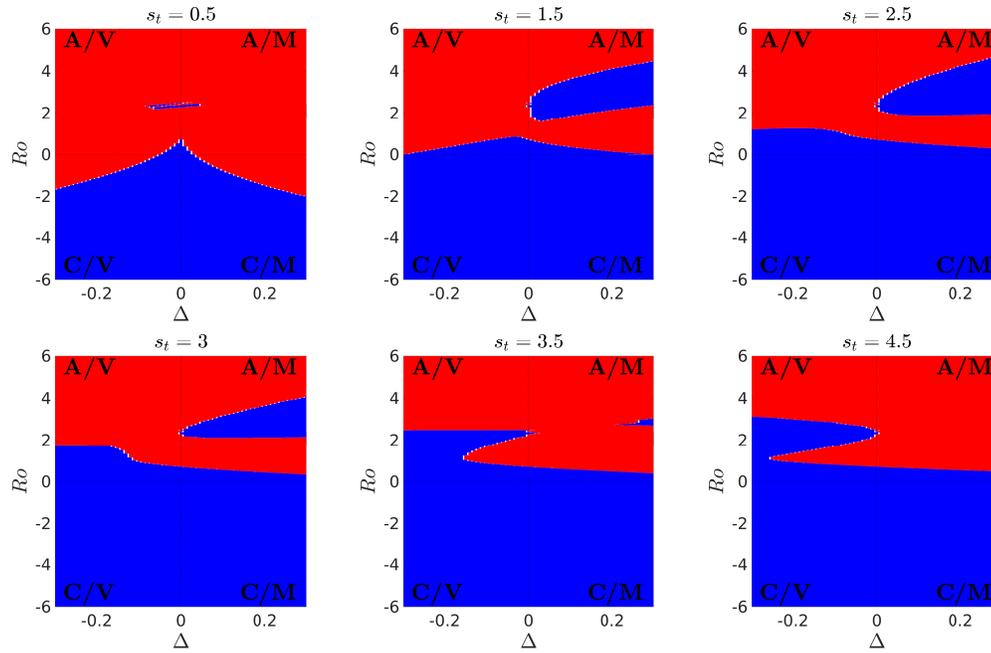


Figure 16. Espacio de parámetros adimensional $Ro = c_0^2 \widehat{\psi} / f_0$ vs. $\Delta = b_0 / H_0$ para diferentes anchos de la topografía s_t . El color rojo (azul) indica la configuración vórtice/topografía que satisface (no satisface) el criterio de circulación de Rayleigh (132) para la inestabilidad centrífuga.

4.2.4 Condiciones para la inestabilidad centrífuga

Finalmente, el Teorema de Circulación (119) es evaluado para los vórtices circulares sobre topografía que estamos utilizando. Renombrando $\epsilon = 2Ro = 2\Delta/\xi_t$ se obtiene el criterio necesario de inestabilidad si, para algún s ,

$$\frac{2}{s} \left(\frac{\Delta}{\xi_t} v_a(s; \xi_t, s_t) + \frac{s}{2} \right) \left(\frac{\Delta}{\xi_t} \omega_a(s; \xi_t, s_t) + 1 \right) + \Delta \left(\frac{L_D}{L} \right)^2 \frac{d^2}{ds^2} b_a(s; s_t) < 0. \quad (132)$$

La Figura 16 muestra un conjunto de mapas en el espacio de parámetros Ro vs. Δ para diferentes topografías Gaussianas con escala horizontal s_t . Los colores representan valores lógicos para la condición (132), donde el azul indica falso (las configuraciones no satisfacen el Teorema de Circulación de Rayleigh) y el rojo verdadero (las configuraciones satisfacen el teorema, y por tanto el flujo es inestable). En general, las configuraciones con anticiclones, mostrados en los cuadrantes superiores, tienden a ser centrífugamente inestables (áreas rojas).

4.2.5 Solución numérica al problema de eigenvalores generalizado

El análisis de estabilidad lineal para vórtices monopoles sobre topografías aisladas, presentado en la subsección 4.1, permite obtener el problema de eigenvalores generalizado [ver (92) y (95)] involucrando las matrices reales A_{ij} (sin dependencia de los parámetros físicos) y B_{ij} (dependiente de todos los parámetros topográficos y de las propiedades del flujo base). La forma adimensional del problema de eigenvalores para los vórtices circulares introducidos en 4.2.1 es

$$\frac{\sigma_a}{k} \nabla_{ka}^2 \zeta_a = \left[\frac{1}{s} v_a \nabla_{ka}^2 + \mathcal{H}_1 \frac{1}{s} d_s \Psi_I - \mathcal{H}_2 \frac{\xi_t}{s} d_s (e^{-s^2/s_t^2}) \right] \zeta_a, \quad (133)$$

con $\sigma_a = \sigma/c_0^2 \hat{\psi}$, $\nabla_{ka}^2 = d_{ss} + s^{-1} d_s - s^{-2} k^2$, y en donde la función a trozos se representa con las funciones

$$\mathcal{H}_1 = \begin{cases} 1 & s < s_l \\ 0 & s > s_l \end{cases}; \quad \mathcal{H}_2 = \begin{cases} 0 & s < s_l \\ 1 & s > s_l. \end{cases}$$

La solución numérica al problema de eigenvalores se basa en un método espectral, el cual resulta ser de gran precisión y computacionalmente económico debido a su convergencia exponencial (Orszag, 1971; Yuhong, 1998). Se utiliza un método de colocación espectral, ya que es mucho más fácil de implementar que los esquemas de Galerkin y Tau (Yuhong, 1998; Trefethen, 2000). La dirección radial es discretizada de forma no uniforme desde 0 a 32 unidades adimensionales con suficiente resolución para obtener convergencia. La eigenfunción es ajustada a cero en el contorno exterior. Algunos resultados fueron confirmados solucionando el problema de eigenvalores con un método de diferencias finitas. Una prueba más importante aún, fue la de reproducir las curvas de estabilidad obtenidas en el estudio de Gent and McWilliams (1986) (Figura 2 y 5) para cinco diferentes perfiles de vórtices circulares bidimensionales (sobre un fondo plano).

Las soluciones obtenidas son para anticiclones sobre montañas (A/M equivalente a C/V) y ciclones sobre montañas (C/M equivalente a A/V), tanto para $s_t = 2$ (topografía estrecha) como para $s_t = 5$ (topografía amplia). Las configuraciones A/M son escogidas con valores enteros del parámetro ξ_t , $\{\xi_t \in \mathcal{Z} | 1 \leq \xi_t \leq 10\}$, y las C/M por $\{\xi_t \in \mathcal{Z} | -10 \leq \xi_t \leq -1\}$. Las soluciones identifican la razón de crecimiento σ_i de las perturbaciones (90) con número de onda k . Estos números de onda tienen significado únicamente cuando son enteros, lo cual garantiza que la perturbación sea azimutalmente periódica. El objetivo es encontrar el número de onda k_c con la razón de crecimiento más rápida, de aquí en adelante llamado el número de onda característico.

La Figura 17 presenta los perfiles de estabilidad para las configuraciones A/M ($\xi_t > 0$). Las soluciones C/M ($\xi_t < 0$) no son presentadas porque tienen una razón de crecimiento nula (configuraciones neutralmente estables). En el caso de topografías estrechas (panel *a*), la razón de crecimiento más rápida tiene $k_c = 1$ y corresponde a $\xi_t = 1$ y 2, es decir, vórtices intensos o topografías débiles. La inestabilidad con $k_c = 1$ puede estar asociada con un ligero desplazamiento del vórtice fuera del centro de la topografía. Las perturbaciones dominantes en remolinos con $\xi_t > 2$ pueden tener un número de onda $k_c = 2$, pero la razón de crecimiento es demasiado pequeña. Estos perfiles de inestabilidad son obtenidos con 1200 puntos de Chebyshev. En el caso de topografías amplias (panel *b*), los números de onda característicos son $k_c = 1$ para $\xi_t = \{1, 2, 8 - 10\}$ y $k_c = 2$ para $\xi_t = \{3 - 7\}$, usando 2500 puntos de Chebyshev. Nuevamente, la razón de crecimiento más rápida corresponde a $k_c = 1$ para $\xi_t = 1$, aunque otros vórtices muestran valores altos para $k_c = 2$.

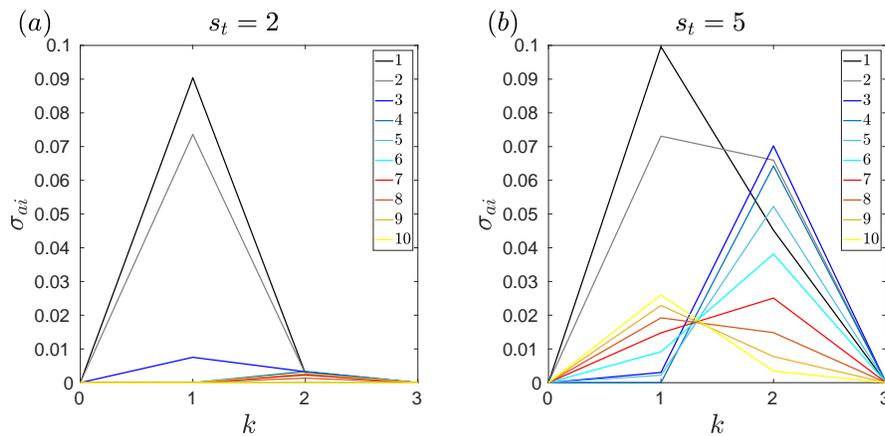


Figure 17. Perfiles de inestabilidad σ_{ai} (parte imaginaria de σ_a) vs. k para los casos con $\xi_t > 0$ (configuraciones A/M y C/V) para topografías estrechas (panel *a*) y amplias (panel *b*).

En general, los resultados obtenidos de la solución al problema de eigenvalores generalizado indican que los casos con $\xi_t > 0$ son inestables, mientras que los casos con $\xi_t < 0$ son estables, lo cual está de acuerdo con los teoremas dados en las subsecciones 4.2.2 y 4.2.3 desde el análisis lineal.

4.2.6 Simulaciones numéricas de vórtices sobre una topografía

La evolución de vórtices circulares sobre topografía se simula numéricamente solucionando el modelo cuasi-geostrófico (93). Los experimentos numéricos son inicializados con los vórtices circulares sobre topografías aisladas, introducidos en la sección 4.2.1. Se examina la inestabilidad de las configuraciones A/M y C/M, equivalentes a los casos C/V y A/V, respectivamente. Los vórtices son sujetos a las perturbaciones debidas a los errores numéricos. La meta es identificar si los vórtices son estables o inestables

en simulaciones a largo plazo y, en el último caso, identificar el número de onda de la perturbación creciente.

El método numérico se basa en un esquema de diferencias finitas sobre una malla cuadrada con 513×513 puntos. Para discretizar los términos no lineales se usa un esquema de Arakawa y para avanzar en el tiempo uno de Runge-Kutta de tercer orden. La longitud adimensional de cada lado del dominio cuadrado es $L = 64$, alrededor de 16 veces el tamaño del vórtice (~ 3.86), tal que las paredes laterales estén lo suficientemente lejos del vórtice. Las condiciones de contorno son de libre deslizamiento. La topografía es Gaussiana. El paso de tiempo es del 1% del periodo de rotación del sistema, de suerte que 100 pasos de tiempo son un “día”. El esquema ha sido usado en numerosos estudios previos de vórtices, tanto sobre un fondo plano como sobre topografía variable (Zavala Sansón and van Heijst, 2014).

La Figura 18 muestra las distribuciones de vorticidad en $t = 0$ y varios días después (paneles a,b) para un anticiclón (acotado por la circunferencia en negro) sobre una montaña Gaussiana (circunferencia magenta). El perfil de vorticidad es mostrado en la Figura 13b. Los resultados indican que la perturbación crece y desalinea del origen al núcleo del vórtice. Por lo anterior, el número de onda característico es $k_c = 1$, lo cual está de acuerdo con lo predicho por el método espectral (curva negra en la Figura 17a). La nueva estructura puede ser caracterizada como un vórtice dipolar asimétrico atrapado sobre una montaña, como se discutió en Gonzalez and Zavala Sansón (2021). Para verificar que el modo de crecimiento más rápido tiene $k_c = 1$, se calcula la evolución en el tiempo de la amplitud siguiendo el procedimiento realizado por Carton and Legras (1994). Primero, la perturbación de la vorticidad es definida como

$$\omega'(r, \theta, t) = \omega(r, \theta, t) - \nabla^2 \Psi(r). \quad (134)$$

Segundo, este campo es descompuesto en modos angulares

$$\{C_k(r, t), S_k(r, t)\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \omega'(r, \theta, t) \{\cos(k\theta), \sin(k\theta)\} d\theta, \quad (135)$$

cuyas amplitudes son expresadas como

$$A_k(t) = \frac{1}{r_{max}} \int_0^{r_{max}} [C_k^2(r, t) + S_k^2(r, t)] dr, \quad (136)$$

con $r_{max} \sim 4s_l$. La Figura 18c presenta la evolución temporal de las amplitudes para los modos $k = 1$ a $k = 5$. Después de un breve periodo de ajuste inicial, las amplitudes permanecen pequeñas y constantes durante 120 días, aproximadamente. Luego, la amplitud A_1 crece más rápido que las otras, en acuerdo con la predicción del análisis de estabilidad.

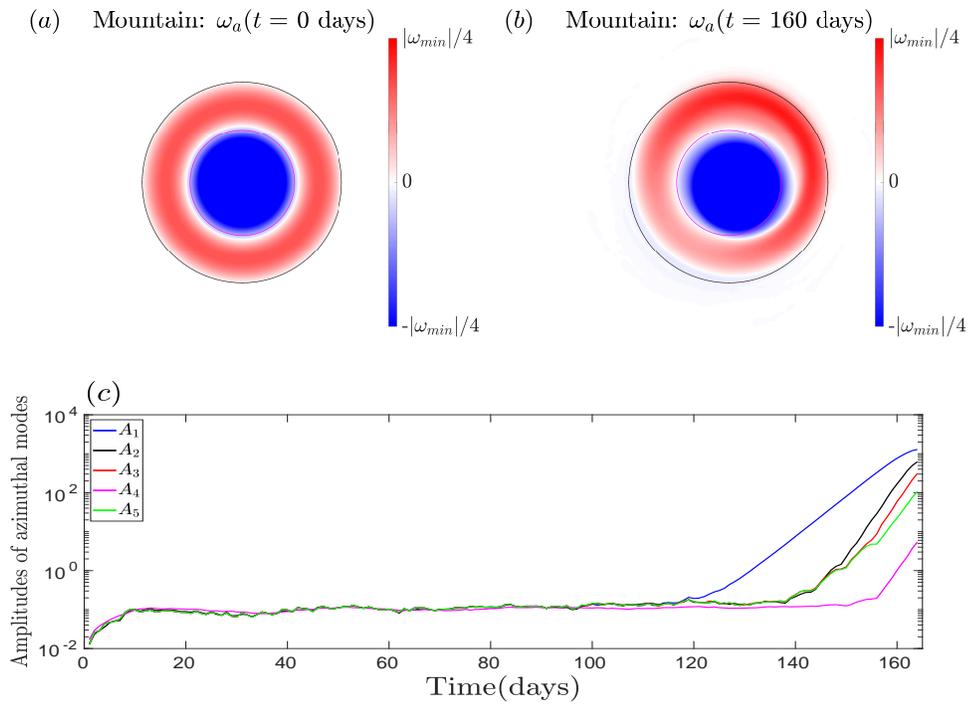


Figure 18. Distribución de vorticidad calculada numéricamente para un anticiclón sobre una montaña estrecha $(\xi_t, s_t) = (1, 2)$ en (a) $t = 0$ días, y (b) $t = 160$ días. Los límites de las barras de colores son establecidos por los picos de vorticidad $\omega_{min} = \min\{\omega_a\}$. (c) Evolución temporal de la amplitud A_k para cinco modos azimutales (ver texto). El crecimiento de mayor rapidez es el de $k = 1$.

La Figura 19 (paneles a, b) presenta la distribución de vorticidad para un anticiclón sobre una montaña Gaussiana amplia (el perfil de vorticidad es mostrado en la Figura 13d). Note que el anillo externo de vorticidad positiva es muy débil en comparación a su núcleo anticiclónico. La simulación indica que el remolino es desplazado del origen, produciendo una débil estructura dipolar sobre la topografía. Este resultado es congruente con el correspondiente perfil de inestabilidad en la Figura 17b (curva negra), el cual predice que el modo que crece más rápido tiene número de onda característico $k_c = 1$ para esta configuración. Los vórtices dipolares que surgen de esta simulación y la previa tienen una estructura muy diferente debido a las diferencias radicales en sus perfiles de vorticidad inicial. El panel c presenta la evolución de las amplitudes de la perturbación, donde se verifica que el modo más inestable es $k_c = 1$.

En la Figura 20 se presenta un caso similar al mostrado en la Figura 19, pero ahora con $\xi_t = 3$ (una montaña alta ó un vórtice débil). En este caso, el modo dominante tiene número de onda 2, produciendo un núcleo con dos satélites de vorticidad positiva. La solución espectral también apunta a que el número de onda característico es $k_c = 2$ (véase la curva azul en la Figura 17b). La estructura rota como un todo en dirección horaria alrededor de la montaña. El nuevo vórtice se asemeja al bien conocido vórtice tripolar observado en experimentos de laboratorio, el cual tiene un núcleo ciclónico, dos satélites negativos y su núcleo rota en sentido anti-horario (Kloosterziel and van Heijst, 1991). Sin embargo, la

distribución de vorticidad es notoriamente diferente a los tripolos típicos ya que en este caso el núcleo es anticiclónico y los satélites ciclónicos son muy débiles. Además, el movimiento del vórtice es afectado por la topografía. Las amplitudes mostradas en el panel c verifican que el modo más inestable es $k_c = 2$.

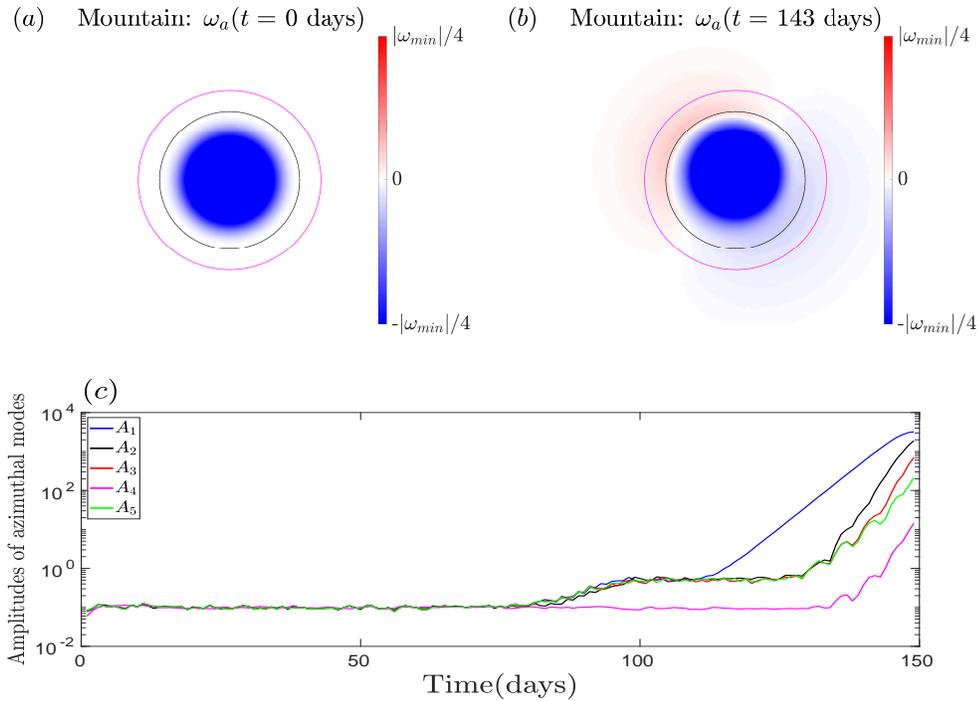


Figure 19. Distribuciones de vorticidad calculadas numéricamente para un anticiclón sobre una montaña amplia $(\xi_t, s_t) = (1, 5)$ en (a) $t = 0$ días, y (b) $t = 143$ días. (c) Evolución en el tiempo de la amplitud A_k para 5 modos azimutales. El crecimiento más rápido se obtiene para $k = 1$.

En general, los experimentos numéricos indican que la mayor parte de las configuraciones A/M ó C/V son inestables. Se realizaron simulaciones adicionales para los casos de C/M y A/V, las cuales mostraron que las distribuciones de vorticidad inicial permanecen estables durante tiempos muy largos de integración en todos los casos. Estos resultados son acordes con el análisis de estabilidad, el cual produce una razón de crecimiento nula para estas configuraciones, y con los teoremas de inestabilidad barotrópica encontrados en las subsecciones 4.2.2 y 4.2.3, ya que los criterios necesarios de inestabilidad no son satisfechos.

La tabla 2 compara el número de onda de los modos más inestables obtenidos del problema de eigenvalores y los observados en las simulaciones numéricas. Se consideran topografías amplias y estrechas con $1 \leq \xi_t \leq 4$ (A/M ó C/V) y $-4 \leq \xi_t \leq -1$ (C/M ó A/V). En casi todas las configuraciones, el número de onda obtenido con ambos métodos es el mismo, lo cual sugiere que el análisis lineal proporciona resultados confiables. Sin embargo, hay unas pocas discrepancias, como sucede para las configuraciones con $\xi_t = 3, 4$ y $s_t = 2$ (A/M ó C/V sobre una topografía estrecha). El análisis de inestabilidad predice que $k_c = 1$ y 2 , respectivamente, pero los vórtices calculados numéricamente permanecen estables durante

alrededor de 600 días de simulación. La razón puede ser debida a la pequeña razón de crecimiento de la perturbación, como se observa en la Figura 17a. Probablemente, sería necesario tener más días de simulación para apreciar la inestabilidad esperada. Otra discrepancia se observa para la configuración con $\xi_t = 2$ y $s_t = 5$ (A/M ó C/V sobre una topografía amplia), para la cual el número de onda predicho es $k_c = 1$ pero el vórtice simulado indica $k_c = 2$. En este caso, la diferencia puede ser debida a que los valores de la razón de crecimiento son casi iguales para ambos números de onda, como se muestra en la Figura 17b (curva gris clara).

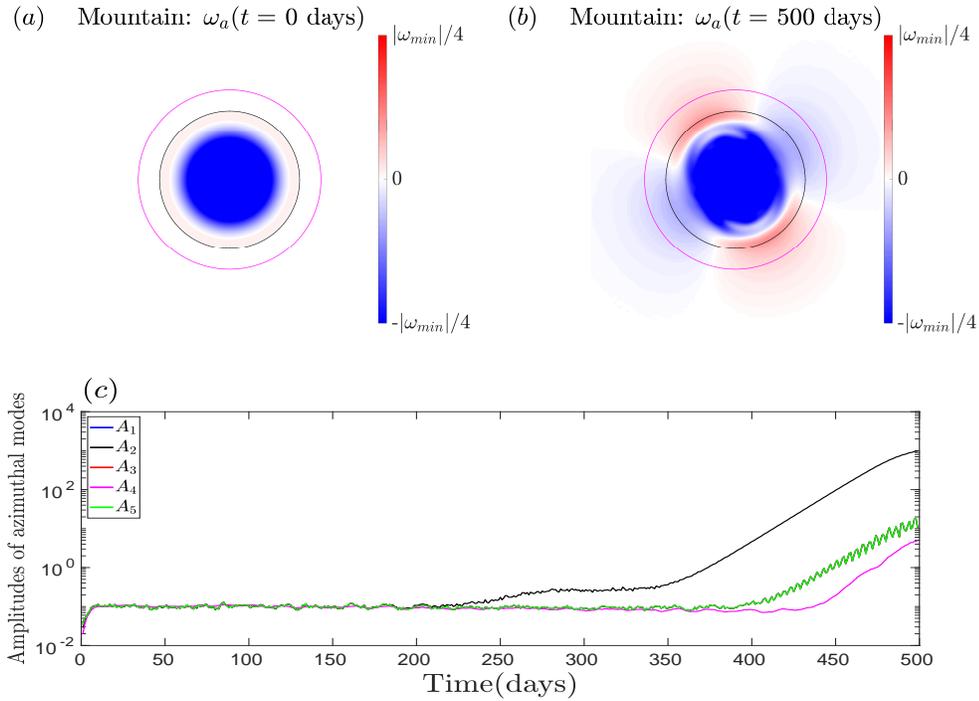


Figure 20. Distribución de vorticidad calculada numéricamente para un anticiclón sobre una montaña amplia $(\xi_t, s_t) = (3, 5)$ en (a) $t = 0$ días, y (b) $t = 500$ días. (c) Evolución temporal de la amplitud A_k para cinco modos azimutales. El crecimiento más rápido se obtiene para $k = 2$.

Table 2. Comparación del número de onda característico k_c predicho por la solución espectral del problema de eigenvalores generalizado (subsección 3.5) y el encontrado en las simulaciones numéricas para diferentes configuraciones vórtice/topografía (ξ_t, s_t) .

		Configuración vórtice/topografía															
		Topografía estrecha								Topografía amplia							
s_t		2								5							
ξ_t		-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
k_c obtenido del problema de eigenvalores																	
k_c		0	0	0	0	1	1	1	2	0	0	0	0	1	1	2	2
k_c observado en simulaciones numéricas																	
k_c		0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	2	2	2

4.3 Discusiones y conclusiones

En este capítulo se ha investigado la estabilidad de vórtices circulares ciclónicos y anticiclónicos sobre topografías aisladas, las cuales pueden ser montañas ó valles. Los resultados incluyen: (i) un análisis de estabilidad lineal que lleva al problema de eigenvalores generalizado y a la incorporación de los efectos de una topografía finita en los teoremas clásicos de inestabilidad para la dinámica de aguas someras (capítulo 2), y (ii) la aplicación de estos resultados a vórtices analíticos cuasi-geostróficos sobre topografías de amplitud baja (capítulo 3). En este segundo análisis se incluye la solución espectral al problema de eigenvalores y simulaciones numéricas basadas en la dinámica cuasi-geostrófica, con las cuales se muestra la evolución a largo plazo de los vórtices.

Como flujo básico se consideran las soluciones analíticas de vórtices estacionarios y no lineales sobre topografías Gaussianas obtenidos por Gonzalez and Zavala Sansón (2021). Las configuraciones flujo/topografía se caracterizan por el número adimensional ξ_t , el cual es la razón entre la altura relativa de la topografía (cuyo signo indica si ésta es una montaña o un valle) y el número de Rossby (el signo permite distinguir ciclones de anticiclones). Por lo tanto, dos configuraciones dinámicas son incluidas en los casos con $\xi_t > 0$ (A/M y C/V), e igualmente en los casos con $\xi_t < 0$ (A/V y C/M). El caso de fondo plano corresponde a $\xi_t = 0$. Un segundo parámetro adimensional es la escala horizontal de la topografía s_t .

De acuerdo a la solución espectral del problema generalizado de eigenvalores, las configuraciones A/M y C/V son inestables. Los números de onda característicos de los modos con mayor razón de crecimiento son $k_c = 1$ y 2 en el rango $1 \leq \xi_t \leq 10$. Las razones de crecimiento más grandes fueron encontradas para los valores más pequeños de ξ_t (Figura 17), lo cual indica que los vórtices intensos son más inestables. En contraste, la razón de crecimiento es muy pequeña tanto para $\xi_t \geq 3$ con la topografía estrecha, como para $\xi_t \geq 7$ con la topografía amplia. Esto es un indicativo de que la altura de la topografía puede ser un factor estabilizador para estos rangos de ξ_t . Por otro lado, las configuraciones A/V y C/M ($\xi_t < 0$) son linealmente estables en todos los casos. Estos resultados concuerdan con el estudio analítico y numérico de Zhao et al. (2019) para el caso de un vórtice de Rankine sobre una montaña cilíndrica, el cual concluye que los anticiclones son desestabilizados por montañas mientras que son estabilizados por depresiones. Recientemente, simulaciones numéricas llevadas a cabo por Solodoch et al. (2021) muestran la formación y persistencia de remolinos anticiclónicos sobre depresiones topográficas bajo un amplio rango de parámetros, lo cual está de acuerdo con los presentes resultados sobre la estabilidad de la configuración A/V.

Las simulaciones numéricas de remolinos sobre topografías aisladas para tiempos muy largos son congruentes con las conclusiones obtenidas del problema de eigenvalores. Un aspecto que resalta es que las nuevas estructuras vorticales que surgen en los casos inestables permanecen atrapadas y rotando alrededor de la topografía. Este comportamiento se asemeja a las soluciones dipolares asimétricas obtenidas en Gonzalez and Zavala Sansón (2021), las cuales rotan estacionariamente alrededor de una montaña o valle. En Zavala Sansón and Gonzalez (2021) se reportó que el flujo residual sobre una montaña submarina después del paso de un vórtice viajero es una estructura dipolar que permanece atrapada en la cima. Estructuras similares fueron encontradas en experimentos de laboratorio realizados en un tanque en rotación (Zavala Sansón et al., 2012).

A continuación se discuten las propiedades de estabilidad en términos de los perfiles de vorticidad usados en este capítulo. En general, los vórtices tienen circulación no nula, $\Gamma \neq 0$. Para casos con $\xi_t > 0$ (A/M y C/V) los perfiles de vorticidad tienen un núcleo blindado por un anillo con vorticidad opuesta (Figura 13). Se encontró que el gradiente de vorticidad potencial es cero en alguna parte (Figura 15), de modo tal que los vórtices satisfacen los criterios de inestabilidad modificados de Rayleigh y Fjørtoft (100) y (105), respectivamente. Los vórtices blindados con $\Gamma = 0$ sobre un fondo plano son también barotrópicamente inestables (Carton and McWilliams, 1989; Kloosterziel and van Heijst, 1991). Sin embargo, en los casos presentados con topografía y $\Gamma \neq 0$ el anillo externo puede tener mucha más o menos vorticidad que el núcleo del vórtice. Como resultado, el vórtice “tripolar” que emerge puede tener un aspecto muy diferente al del conocido tripolo en el fondo plano. Un ejemplo con un anillo externo muy débil fue presentado en la Figura 20.

Para casos con $\xi_t < 0$ (C/M y A/V) los perfiles de vorticidad tienen signo definido, como se muestra en la Figura 14. El máximo de vorticidad puede estar ya sea en el centro (monopolo no blindado) o a un cierto radio fuera del origen (una clase de vórtice que ha sido raramente estudiado). Para todos los casos se encontró que los perfiles de vorticidad no satisfacen los criterios de inestabilidad, por lo que estos vórtices son suficientemente estables. Este resultado concuerda con el bien conocido comportamiento estable de vórtices circulares no blindados que se encuentran en experimentos de laboratorio (Kloosterziel and van Heijst, 1992). Sin embargo, la evolución estable sobre topografía contrasta con la observada para un fondo plano por Carton and McWilliams (1989), quienes encontraron que los remolinos no blindados con circulación no nula son inestables y tienden a dividirse.

Finalmente, se discutió la inestabilidad centrífuga en presencia de una topografía, la cual puede ser contrastada con la obtenida por Kloosterziel and van Heijst (1991) para flujos en rotación sobre un fondo plano. El nuevo criterio depende de la segunda derivada radial del perfil topográfico y es pesada

por el factor $\Delta(L_D/L)^2$, como indica la expresión (119). En términos generales, se encontró que los ciclones tienden a ser centrífugamente estables y los anticiclones inestables cuando están sobre montañas ó valles (Figura 16). Experimentos de laboratorio o simulaciones 3D podrían ser requeridas para probar estas predicciones.

Capítulo 5. Conclusiones

La investigación plasmada en esta tesis se enfocó en encontrar flujos que pueden existir en forma estacionaria en un sistema en rotación con topografía variable en el fondo. Se consideró un fluido homogéneo, invíscido, incompresible y en condiciones cuasi-geostróficas. En el capítulo 3 se derivó analíticamente una nueva familia de soluciones estacionarias bajo efectos de topografías aisladas y axisimétricas. El estudio de estabilidad lineal para una clase de flujos en esta familia de soluciones fue desarrollado en el capítulo 4.

Las soluciones se presentan en modos azimutales. El modo cero corresponde a flujos circulares con diversas características en su distribución de vorticidad. Por ejemplo, sobre topografías estrechas las estructuras vorticales presentan anillos más intensos que su núcleo, anillos de signo contrario para las configuraciones anticiclón/montaña y ciclón/valle o del mismo signo para ciclón/montaña o anticiclón/valle. Para todos los casos, este modo cuenta con líneas de corriente exteriores encerrando la estructura vortical, es decir, son flujos estacionarios y atrapados sobre la topografía aislada. La solución numérica de la estabilidad lineal de estos vórtices circulares mostró que anticiclones/montañas y ciclones/valles resultan ser configuraciones inestables, en contraste con ciclones/montañas y anticiclones/valles que resultaron ser configuraciones estables. Además, el tamaño relativo entre el vórtice y la topografía, para los casos inestables, es determinante en la rapidez máxima con la que la perturbación puede crecer.

Se realizaron simulaciones numéricas de la evolución de varias configuraciones vórtice circular/topografía (tabla 1). Los resultados coincidieron con el pronóstico dado por nuevos criterios necesarios de inestabilidad que se presentaron como una extensión de los Teoremas de Rayleigh y Fjørtoft en presencia de topografía. Dichos teoremas indican que un flujo podría ser inestable si el gradiente de vorticidad potencial pasa por cero en alguna parte del dominio.

Por otro lado, el modo 1 en la familia de soluciones representa estructuras dipolares asimétricas que rotan uniformemente y están atrapadas sobre la topografía, siempre y cuando las líneas de corriente exterior sean cerradas. La rapidez angular de dicha rotación depende de los parámetros del sistema. La existencia de estas estructuras está condicionada a que la topografía decaiga radialmente lo suficientemente rápido como para desaparecer más allá de la región ocupada por el vórtice. La condición de atrapamiento indica que los vórtices débiles son más fácilmente atrapados por la topografía que los intensos. Además, las topografías amplias y altas, en relación al tamaño de los dipolos, suelen tener mayor efecto de atrapamiento que aquellas estrechas y bajas.

Finalmente, este trabajo deja el camino abierto tanto hacia la estabilidad lineal de las estructuras dipolares, como al análisis no lineal de estabilidad para la familia de soluciones completa. Además, surge la cuestión sobre si es posible construir una familia de soluciones estacionaria para el caso que incluya, además de la influencia de la topografía, el efecto beta planetario.

Literatura citada

- Batchelor, G. K. (1967). *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
- Byrne, D. A., Gordon, A. L., and Haxby, W. F. (1995). Agulhas eddies: A synoptic view using Geosat ERM data. *J. Phys. Oceanogr.*, 25(5):902–917.
- Carnevale, G. F. and Kloosterziel, R. C. (1994). Emergence and evolution of triangular vortices. *J. Fluid Mech.*, 259:305–331.
- Carnevale, G. F., Kloosterziel, R. C., and van Heijst, G. J. F. (1991). Propagation of barotropic vortices over topography in a rotating tank. *J. Fluid Mech.*, 233:119–139.
- Carnevale, G. F., Purini, R., Orlandi, P., and Cavazza, P. (1995). Barotropic quasi-geostrophic f-plane flow over anisotropic topography. *J. Fluid Mech.*, 285:329–347.
- Carton, X. J. and Legras, B. (1994). The life-cycle of tripoles in two-dimensional incompressible flows. *J. Fluid. Mech.*, 267:53–82.
- Carton, X. J. and McWilliams, J. C. (1989). Barotropic and baroclinic instabilities of axisymmetric vortices in a quasigeostrophic model. In Nihoul, J.C.J., J. B., editor, *Mesoscale/Synoptic Coherent Structures in Geophysical Turbulence, Liège 1988 International Colloquium on Ocean Hydrodynamics*, pages 225–244. Elsevier Oceanographic Series, Amsterdam.
- Chaplygin, S. A. (1903). One case of vortex motion in fluid. *Trans. Phys. Sect. Imperial Moscow Soc. R. Soc. Lond. A*, 175:363–410.
- Cheney, R. E., Richardson, P. L., and Nagasaka, K. (1980). Tracking a Kuroshio cold ring with a free-drifting surface buoy. *Deep-Sea Research*, 27A:641–654.
- Corre, M. L., Gula, J., Smilenova, A., and Houpert, L. (2019). On the dynamics of a deep quasi-permanent anticyclonic eddy in the Rockall Trough. In *24 Congrès Français de Mécanique*, page 12pp. Association Française de Mécanique.
- Cruz Gómez, R. C., Zavala Sansón, L., and Pinilla, M. A. (2013). Generation of isolated vortices in a rotating fluid by means of an electromagnetic method. *Exp. Fluids*, 54:1582–1–1582–12.
- Cushman-Roisin, B., Heil, W. H., and Nof, D. (1985). Oscillations and rotations of elliptical warm-core rings. *J. Geophys. Res. Oceans*, 90(C6):11756–11764.
- Dewar, W. K. (2002). Baroclinic eddy interaction with isolated topography. *J. Phys. Oceanogr.*, 32(10):2789–2805.
- Drazin, P. G. and Reid, W. H. (2004). In *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press.
- Flierl, G. R. (1988). On the instability of geostrophic vortices. *J. Fluid Mech.*, 197:349–388.
- Flierl, G. R., Stern, M. . E., and Whitehead, J. A. (1983). The physical significance of modons: Laboratory experiments and general integral constraints. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 7(4):233–263.
- Gent, P. R. and McWilliams, J. C. (1986). The instability of barotropic circular vortices. *Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn.*, 35:209–233.
- Gonzalez, J. F. and Zavala Sansón, L. (2021). Quasi-geostrophic vortex solutions over isolated topography. *J. Fluid Mech.*, 915:A64.

- Grimshaw, R., Broutman, D., and Xinyu He (1994). Analytical and numerical study of a barotropic eddy on a topographic slope. *J. Phys. Oceanography*, 24(7):1587–1607.
- Herbette, S., Morel, Y., and Arhan, M. (2002). Erosion of a surface vortex by a seamount. *J. Phys. Oceanogr.*, 33:1664–1679.
- Herbette, S., Morel, Y., and Arhan, M. (2005). Erosion of a surface vortex by a seamount on the β plane. *J. Phys. Oceanogr.*, 35:2012–2030.
- Hide, R. (1961). Origin of Jupiter's great red spot. *Nature*, 190:895–896.
- Hogg, N. G. (1973). On the stratified Taylor column. *J. Fluid Mech.*, 58:517–537.
- Huppert, H. E. and Bryan, K. (1976). Topographically generated eddies. *Deep-Sea Res.*, 23:655–679.
- Ivanov, Y. and Korabev, A. (1995). Formation and regeneration of the pycnocline lens in the Norwegian sea. *Russ. Meteor. Hydrol.*, 9:62–69.
- Johnson, E. R. (1977). Stratified Taylor columns on a beta plane. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 9:159–177.
- Kamenkovich, V. M., Leonov, Y. P., Nechaev, D. A., Byrne, D. A., and Gordon, A. L. (1996). On the influence of bottom topography on the Agulhas eddy. *J. Phys. Oceanogr.*, 26:892–912.
- Kloosterziel, R. C. (1990). *Barotropic vortices in a rotating fluid*. PhD thesis, University of Utrecht, The Netherlands.
- Kloosterziel, R. C. and van Heijst, G. J. F. (1991). An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, 223:1–24.
- Kloosterziel, R. C. and van Heijst, G. J. F. (1992). The evolution of stable barotropic vortices in a rotating free-surface fluid. *J. Fluid Mech.*, 239:607–629.
- Kundu, P. K., Cohen, I. M., and Dowling, D. R. (2014). In *Fluid mechanics*. Academic Press.
- Makarov, V. (2012). Dipole evolution in rotating two-dimensional flow with bottom friction. *Physics of Fluids*, 24(2):026602.
- Mann, C. (1967). The termination of the Gulf Stream and the beginning of the North Atlantic Current. *Deep-Sea Res. Oceanogr. Abstr.*, 14:337–359.
- Meleshko, V. V. and van Heijst, G. J. F. (1994). On Chaplygin's investigations of two-dimensional vortex structures in an inviscid fluid. *J. Fluid Mech.*, 272:157–182.
- Nycander, J. and Lacasce, J. (2004). Stable and unstable vortices attached to seamounts. *J. Fluid Mech.*, 507:71–94.
- Olson, D. B. (1991). Rings in the ocean. *Annu. Rev. Earth. Planet. Sci.*, 19:283–311.
- Olson, D. B. and Evans, R. H. (1986). Rings of the Agulhas Current. *Deep Sea Res.*, 33:27–42.
- Orlandi, P. (1990). Vortex dipole rebound from wall. *Phys. Fluids*, A2:1429–1436.
- Orlandi, P. and Carnevale, G. F. (1999). Evolution of isolated vortices in a rotating fluid of finite depth. *J. Fluid Mech.*, 381:239–269.
- Orszag, S. A. (1971). Accurate solution of the Orr–Sommerfeld stability equation. *J. Fluid Mech.*, 50(4):689–703.

- Pedlosky, J. (1986). In *Geophysical fluid dynamics*. Springer.
- Rhines, P. B. (1969). Slow oscillations in an ocean of varying depth Part 2. Islands and seamounts. *J. Fluid Mech.*, 37(1):191–205.
- Rhines, P. B. (1986). Vorticity dynamics of the oceanic general circulation. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 18:433–497.
- Richardson, P., Bower, A., and Zenk, W. (2000). A census of meddies tracked by floats. *Progress in Oceanography*, 45:209–250.
- Richardson, P. and Tychensky, A. (1998). Meddy trajectories in the canary basin measured during the SEMAPHORE experiment, 1993–1995. *J. Geophys. Res.*, 103C:25029–25045.
- Roden, G. I. (1987). Effect of seamounts and seamount chains on ocean circulation and termohaline structure. In Keating, B., Fryaer, P., Batiza, R., and Boehlert, G., editors, *Seamounts, Islands and Atolls*, volume 43 of *Geophysical Monograph*, pages 335–354, Washington D. C. American Geophysical Union.
- Shapiro, G., Meschanov, S., and Emelianov, M. (1995). Mediterranean lens “Irving” after its collision with seamounts. 18:309–318.
- Solodoch, A., Stewart, A. L., and McWilliams, J. C. (2020). Formation of anticyclones above topographic depressions. *J. Phys. Oceanogr.*, 51:207–228.
- Solodoch, A., Stewart, A. L., and McWilliams, J. C. (2021). Formation of anticyclones above topographic depressions. *J. Phys. Oceanogr.*, 51:207–228.
- Spurk, H. J. and Aksel, N. (2008). *Fluid Mechanics*. Springer, 2 edition.
- Stern, M. E. (1975). Minimal properties of planetary eddies. *J. Mar. Res.*
- Sutyryn, G., Herbet, S., and Carton, X. (2011). Deformation and splitting of baroclinic eddies encountering a tall seamount. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 105:478–505.
- Taylor, G. I. (1917). Motion of solids in fluids when the flow is not irrotational. *Proc. Roy. Soc. A*, 93:99–113.
- Taylor, G. I. (1923). Experiments on the motion of solid bodies in rotating fluids. *Proc. Roy. Soc. A*, 104:213–218.
- Trefethen, L. N. (2000). In *Spectral methods in Matlab*. Siam.
- Trieling, R. R., van Heijst, G. J. F., and Kizner, Z. (2010). Laboratory experiments on multipolar vortices in a rotating fluid. *Phys. Fluids*, 22:094104–1–094104–12.
- Vallis, G. K. (2017). In *Atmospheric and oceanic fluid dynamics*. Cambridge University Press.
- van Geffen, J. (1998). Ns-evol. Internal report R-1466-D. Technical report, Faculty of Technical Physics, Fluid Dynamics Laboratory, Eindhoven University of Technology, The Netherlands.
- van Geffen, J. and Davies, P. (2000). A monopolar vortex encounters a north–south ridge or trough. *Fluid Dyn. Res.*, 26:157–179.
- van Heijst, G. J. F. and Clercx, H. J. H. (2009). Laboratory modeling of geophysical vortices. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 41:143–164.

- van Heijst, G. J. F. and Kloosterziel, R. C. (1989). Tripolar vortices in a rotating fluid. *Nature*, 338(6216):569–571.
- Verron, J. and Le Provost, C. (1985). A numerical study of quasi-geostrophic flow over isolated topography. *J. Fluid Mech.*, 154:231–252.
- Verron, J. and Provost, C. L. (1985). A numerical study of quasi-geostrophic flow over isolated topography. *J. Fluid Mech.*, 154:231–252.
- Viúdez, A. (2019a). Azimutal mode solutions of two-dimensional Euler flows and the Chaplygin- Lamb dipole. *J. Fluid Mech.*, 859:1–12.
- Viúdez, A. (2019b). Exact solutions of asymmetric baroclinic quasi-geostrophic dipoles with distributed potential vorticity. *J. Fluid Mech.*, 868:1–13.
- Watson, G. N. (1986). In *A treatise on the theory of bessel functions*, page 76. Cambridge University Press.
- Yuhong, S. (1998). *Collocation spectral methods in the solution of Poisson equation*. PhD thesis, The University of British Columbia.
- Zavala Sansón, L. (2000). The effects of topography on rotating barotropic flows. Tesis de Doctorado, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven.
- Zavala Sansón, L. (2002). Vortex–ridge interaction in a rotating fluid. *Dyn. Atmos. Oceans*, 35:299–325.
- Zavala Sansón, L. (2004). The mechanical influence of continental topography on the trajectories of tropical cyclones near the west coast of México. *Atmósfera*, 17:151–170.
- Zavala Sansón, L. (2010). Solutions of barotropic waves around seamounts. *J. Fluid Mech.*, 661:32–44.
- Zavala Sansón, L., Aguilar, A. B., and van Heijst, G. J. F. (2012). Horizontal and vertical motions of barotropic vortices over a submarine mountain. *J. Fluid Mech.*, 695:173–198.
- Zavala Sansón, L. and Gonzalez, J. F. (2021). Travelling vortices over mountains and the long-term structure of the residual flow. *J. Fluid Mech.*, 922:A33–1–25.
- Zavala Sansón, L. and Gonzalez, J. F. (2021). Travelling vortices over mountains and the long-term structure of the residual flow. *J. Fluid Mech.*, 922:A33.
- Zavala Sansón, L., González-Villanueva, A., and Flores, L. M. (2010). Evolution and decay of a rotating flow over random topography. *J. Fluid Mech.*, 642:159–180.
- Zavala Sansón, L. and van Heijst, G. J. F. (2002). Ekman effects in a rotating flow over bottom topography. *J. Fluid Mech.*, 471:239–256.
- Zavala Sansón, L. and van Heijst, G. J. F. (2014). *Modelling atmospheric and oceanic flows: insights from laboratory experiments and numerical simulations*. Wiley.
- Zavala Sansón, L., van Heijst, G. J. F., and Backx, N. A. (2001). Ekman decay of a dipolar vortex in a rotating fluid. *Physics of Fluids*, 13(2):440–451.
- Zhao, B., Chieusse-Gérard, E., and Flierl, G. (2019). Influence of bottom topography on vortex stability. *J. Phys. Oceanogr.*, 49(12):3199–3219.

Anexos

A. Coeficientes del modo monopolar

Las condiciones de acoplamiento (61) son escritas como

$$\begin{aligned} f_{00} &= a_0 + a_1 \ln s_l + a_2 s_l^2 \\ -f_{01} &= \frac{a_1}{s_l} + 2a_2 s_l \\ -f_{00} + H(s_l) &= 4a_2, \end{aligned} \quad (137)$$

donde los coeficientes f_{00} y f_{01} son

$$f_{00} = \widehat{\psi}_0 J_0(s_l) + \left[\frac{h_0}{c_0^2} C_0 - \frac{\pi}{2} I_2(s_l) \right] J_0(s_l) + \frac{\pi}{2} Y_0(s_l) I_1(s_l) \quad (138)$$

$$f_{01} = \frac{\pi}{2} Y_1(s_l) I_1(s_l), \quad (139)$$

con $I_1(s_l)$ y $I_2(s_l)$ las integrales que involucran la topografía:

$$I_1(s_l) = \int_0^{s_l} H(s') J_0(s') s' ds', \quad I_2(s_l) = \int_0^{s_l} H(s') Y_0(s') s' ds'. \quad (140)$$

Las soluciones del sistema (137) generan los siguientes coeficientes

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4} \{ f_{00}(4 + s_l^2) + [4s_l f_{01} + 2s_l^2(H(s_l) - f_{00})] \ln s_l - H(s_l) s_l^2 \} \\ a_1 &= \frac{1}{2} s_l [s_l(f_{00} - H(s_l)) - 2f_{01}] \\ a_2 &= \frac{1}{4}(H(s_l) - f_{00}). \end{aligned} \quad (141)$$

B. Coeficientes del modo dipolar

Las condiciones de contorno (71) para el modo $m = 1$ son

$$\begin{aligned} f_{10} - \frac{\Omega}{2c_0^2} s_l^2 &= d_0 + d_1 \ln s_l + d_2 s_l^2, \\ -f_{11} + |\widehat{\psi}_1| J_1'(s_l) \sin \theta - \frac{\Omega}{c_0^2} s_l &= 2 \frac{U_0}{c_0} \sin \theta + \frac{d_1}{s_l} + 2d_2 s_l, \\ -f_{10} + H(s_l) - \frac{2\Omega}{c_0^2} &= 4d_2, \end{aligned} \quad (142)$$

donde f_{10} y f_{11} son

$$f_{10} = \left[\frac{h_0}{c_0^2} C_1 - \frac{\pi}{2} I_2(s_l) \right] J_0(s_l) + \frac{\pi}{2} Y_0(s_l) I_1(s_l) \quad (143)$$

$$f_{11} = f_{01} = \frac{\pi}{2} Y_1(s_l) I_1(s_l). \quad (144)$$

La velocidad U_0 es obtenida desde los términos θ -dependientes de la segunda ecuación en (142):

$$U_0 = \frac{c_0}{2} |\widehat{\psi}_1| J_1'(s_l) \equiv -\frac{c_0}{2} |\widehat{\psi}_1| J_2(s_l). \quad (145)$$

Note que $U_0 < 0$ debido a la orientación del dipolo (subsección 3.1.4).

Acorde a la solución en el sistema de referencia en rotación (69), la vorticidad exterior calculada con (70) implica que $\nabla^2 \psi_{E1} = 4d_2 c_0^2 = -2\Omega$. Como resultado, los términos conteniendo Ω en (142) se cancelan. Por lo tanto, los coeficientes son

$$\begin{aligned} d_0 &= f_{10} + f_{11} s_l \ln s_l \\ d_1 &= -f_{11} s_l \\ d_2 &= -\frac{\Omega}{2c_0^2}. \end{aligned} \quad (146)$$

La tercera ecuación en (142) implica que $f_{10} = H(s_l)$. Esta condición se satisface escogiendo la siguiente constante C_1 contenida en f_{10} [definida por (143)]:

$$\frac{h_0}{c_0^2} C_1 = \frac{1}{J_0(s_l)} \left[H(s_l) + \frac{\pi}{2} I_2(s_l) J_0(s_l) - \frac{\pi}{2} Y_0(s_l) I_1(s_l) \right]. \quad (147)$$

C. Coeficientes adimensionales para el campo exterior

Los coeficientes adimensionales de la solución (120) son dados por

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{4} \{ f_{00}(4 + s_l^2) + [4s_l f_{01} + 2s_l^2 (\xi_t H(s_l) - f_{00})] \ln s_l - \xi_t H(s_l) s_l^2 \} \\
 a_1 &= \frac{1}{2} s_l [s_l (f_{00} - \xi_t H(s_l)) - 2f_{01}] \\
 a_2 &= \frac{1}{4} (\xi_t H(s_l) - f_{00}),
 \end{aligned} \tag{148}$$

donde f_{00} y f_{01} son

$$\begin{aligned}
 f_{00} &= J_0(s_l) - \xi_t \left(\frac{\pi}{2} I_2(s_l) J_0(s_l) - \frac{\pi}{2} Y_0(s_l) I_1(s_l) \right), \\
 f_{01} &= \xi_t \frac{\pi}{2} Y_1(s_l) I_1(s_l),
 \end{aligned}$$

con $I_1(s_l)$ y $I_2(s_l)$ las integrales que involucran la topografía:

$$I_1(s_l) = \int_0^{s_l} H(s') J_0(s') s' ds', \quad I_2(s_l) = \int_0^{s_l} H(s') Y_0(s') s' ds'.$$

Detalles adicionales sobre estos coeficientes y otras propiedades del flujo base pueden ser consultadas en Gonzalez and Zavala Sansón (2021).