

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Programa de Posgrado en Ciencias
en Ciencias de la Computación**

**Sistema de álgebra computacional en la evaluación formativa
de las matemáticas**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Doctor en Ciencias

Presenta:

Nancy Daniela Pacheco Venegas

Ensenada, Baja California, México
2015

Tesis defendida por

Nancy Daniela Pacheco Venegas

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Pedro Gilberto López Mariscal
Codirector del Comité

Dra. María Andrade Aréchiga
Codirector del Comité

Dr. Jesús Favela Vara

Dr. Gabriel Alejandro López Morteo

Dra. Magally Martínez Reyes



Dra. Ana Isabel Martínez
Coordinador del Posgrado en Ciencias de la Computación

Dra. Rufina Hernández Martínez
Director de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta **Nancy Daniela Pacheco Venegas** como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Ciencias de la Computación.

Sistema de álgebra computacional en la evaluación formativa de las matemáticas

Resumen aprobado por:

Dr. Pedro Gilberto López Mariscal
Codirector de Tesis

Dra. María Andrade Aréchiga
Codirector de Tesis

La evaluación formativa es un proceso importante en cursos de matemáticas. A través de esta el estudiante obtiene información sobre su conocimiento que le ayuda a continuar con su desarrollo académico y enfocarse en fortalecer sus debilidades. Sin embargo, no siempre es posible que el estudiante reciba evaluación y retroalimentación de manera adecuada y oportuna lo cual afecta su proceso de aprendizaje.

En esta tesis se expone una propuesta para incorporar Tecnologías de la Información y la Comunicación como apoyo en la evaluación formativa de las matemáticas. Aquí se presenta la conceptualización, desarrollo, implementación y evaluación de MathDIP, un sistema basado en Web que provee evaluación y retroalimentación automática de cada uno de los pasos necesarios para llegar a la solución de ejercicios matemáticos. Esta plataforma incorpora un Sistema de Álgebra Computacional para realizar la evaluación de la solución ingresada por el estudiante y un editor que permite que el usuario interactúe con el sistema utilizando escritura a mano alzada.

Para medir el impacto que el uso de MathDIP tiene en el aprendizaje se realizó un estudio con un diseño pre examen / post examen con grupos de control y grupos experimentales. Durante 9 semanas estudiantes de Ingeniería en Software e Ingeniería en Telemática utilizaron el sistema en su curso de Matemáticas básicas. En la intervención participaron 120 estudiantes divididos en 7 grupos (3 grupos de control y 4 grupos experimentales). Con los datos recabados se realizó un análisis de la ganancia normalizada de aprendizaje utilizando las calificaciones del pre examen y post examen. Los resultados muestran que el rendimiento académico de los estudiantes que utilizaron el sistema fue mejor que los que no lo utilizaron.

Palabras clave: Educación matemática, Sistemas de álgebra computacional, Evaluación formativa, Evaluación automática

Abstract of the thesis presented by **Nancy Daniela Pacheco Venegas** as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Computer Science with orientation in

Computer algebra system in formative assessment of mathematics

Abstract approved by:

Dr. Pedro Gilberto López Mariscal
Codirector of thesis

Dra. María Andrade Aréchiga
Codirector of thesis

Formative assessment is an important process in Mathematics courses. Through this, the students obtain information about their knowledge that helps them continue their academic development and focus on strengthening their weaknesses. However, it is not always possible for students to receive evaluation and feedback in an appropriate and timely manner which affects their learning process.

This thesis presents a proposal to incorporate Information and Communications Technology to support formative assessment in Mathematics. Here, the conceptualization, development, implementation and evaluation of MathDIP, a Web-based system that provides automatic feedback and evaluation of each of the steps required to solve a mathematical exercise is presented. This platform incorporates a Computer Algebra System for evaluation of the solution entered by the student and an editor that allows the user to interact with the system using handwriting.

To measure the impact that the use of MathDIP has in the learning, a study with pre test / post test with control and experimental groups was performed. During 9 weeks students majoring in Software Engineering and Telematics Engineering used the system in a basic Math course. 120 students participated in the experiment divided into 7 groups (3 control groups and 4 experimental groups). Using the data collected an analysis of the normalized learning gain with the grades of the pre and post test was performed. The results show that the academic performance of students who used the system was better than those who didn't use it.

Keywords: Mathematics education, Computer Algebra System, Formative assessment, automatic evaluation

A mi familia.

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento:

A mi familia por su apoyo incondicional.

A Pablo por su amor, paciencia y apoyo absoluto.

Al Dr. Gilberto López por su paciencia, apoyo y consejos durante todos estos años.

A la Dra. María Andrade Aréchiga por su paciencia, apoyo y consejos.

A mi comité de tesis: Dr. Jesús Favela Vara, Dr. Gabriel López Morteo, Dra. Magally Martínez Reyes.

A la Dra. Ana Isabel Martínez por su apoyo y consejos.

A los miembros del Departamento de Ciencias de la Computación por sus enseñanzas y consejos.

A todos los compañeros con los que me tocó compartir nuestro paso por CICESE.

A la Universidad Autónoma de Baja California por su apoyo durante los diferentes casos de estudio, en especial a la M.C. Adina Jordan Arámbulo y a la M.C. Gloria E. Rubí Vázquez.

A la Universidad Autónoma de Colima por su apoyo en el caso de estudio.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico para la realización de este proyecto.

A todos ustedes gracias!

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resume en inglés	iii
Dedicatorias	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	vi
Lista de tablas	vii
Capítulo 1. Introducción	1
1.1 Planteamiento del problema	1
1.2 Preguntas de investigación científica	3
1.3 Objetivos	3
1.4 Metodología	4
1.5 Contribuciones de la tesis	5
1.6 Organización de la tesis	5
Capítulo 2. Educación de las matemáticas en México	7
2.1 Desempeño de estudiantes mexicanos en matemáticas	7
2.2 Educación matemática apoyada con tecnología	11
Capítulo 3. Evaluación formativa	13
3.1 Evaluación y retroalimentación en cursos de matemáticas	13
3.2 Evaluación asistida por computadora en matemáticas	14
3.3 Sistemas de Álgebra Computacional (CAS)	16
3.4 Sistemas que ofrecen evaluación y retroalimentación automática....	17
3.5 Escritura de expresiones matemáticas en la Web	18
Capítulo 4. Educación matemática: conductas y necesidades	21
4.1 Diseño del estudio	21
4.2 Resultados	22
Capítulo 5. MathDIP	26
5.1 Descripción del sistema	26
5.2 Evaluación y retroalimentación	28
5.3. Arquitectura de MathDIP	32
5.3.1 Repositorio de ejercicios matemáticos	32
5.3.2 Editor de expresiones matemáticas	33
5.3.3 Plug-in	33
5.3.4 Sistema de Álgebra Computacional	33
5.3.5 Transformadores	34
5.4 Pruebas de usabilidad	36
Capítulo 6. Experimentación y Resultados	39
6.1 Diseño experimental	40
6.2 Resultados	44

6.2.1 Hábitos de estudio.....	44
6.2.2 Pre-examen.....	46
6.2.3 Normalidad de los grupos.....	47
6.2.4 Ejercicios matemáticos resueltos	48
6.2.5 Post-examen	49
6.3 Impacto del uso de la plataforma	50
6.4 Análisis de Usabilidad.....	54
Capítulo 7. Discusión y Conclusiones	58
Trabajo futuro.....	60
Lista de referencias bibliográficas	62
Anexos	65

Lista de figuras

Figura	Página
1 Desempeño de estudiantes del nivel medio superior en matemáticas en la prueba ENLACE 2008-2014.	9
2 Editor de expresiones matemáticas Math Input Panel.....	20
3 Ejemplo de una sesión típica en el curso de Introducción a las matemáticas.	22
4 Ejemplo de una sesión del curso de Introducción a las matemáticas en la que se entregan resultados de un examen.....	23
5 Interfaz MathDIP, lista de temas y ejercicios de un tema específico	27
6 Interfaz MathDIP, solución a un ejercicio.....	27
7 Diagrama de flujo de la interacción de un estudiante con MathDIP para resolver un ejercicio.....	28
8 Representación en árbol de la expresión $16x^2-3y$	30
9 Arquitectura de MathDIP. Diagrama de emplazamiento.....	35
10 Arquitectura de MathDIP. Diagrama de secuencia.....	36
11 Calificación obtenida por los estudiantes en pre-examen, las columnas sombreadas representan los grupos de control	47
12 Muestra la calificación obtenida por los estudiantes en el post-examen, la columna sombreada representa los grupos de control	50
13 Ganancia (g), ganancia normalizada (<g>) y puntuaciones de cambio normalizadas (c) en grupos experimentales y grupos de control.....	51
14 Ganancia vs PRE-EXAMEN de todos los estudiantes que participaron en el experimento.	52

Lista de tablas

Tabla	Página
1 Resultados en matemáticas obtenidos por diferentes países en la prueba PISA.	8
2 Ejemplos de editores de expresiones matemáticas a mano alzada.	19
3 Transcripción de un episodio en clase donde estudiantes discuten un ejercicio.	24
4 Pseudo-código para evaluar la equivalencia entre dos expresiones eu_1 y eu_2	29
5 Pseudo-código para evaluar la "igualdad" entre dos expresiones.	30
6 Proceso que se sigue para resolver un ejercicio en MathDIP. E1 significa la evaluación de equivalencia, E2 la evaluación de igualdad y R la retroalimentación que el sistema despliega.	32
7 Descripción de los grupos que participaron en el experimento, información obtenida de encuesta de hábitos de estudio aplicada antes de la intervención.	41
8 Frecuencia y lugares donde los estudiantes tienen acceso a Internet.	44
9 Opinión de los estudiantes sobre la importancia de diferentes actividades en el salón de clases.	45
10 Opinión de los estudiantes sobre la importancia de contar con un sistema que ofrezca retroalimentación y evaluación automática.	46
11 Información sobre calificación obtenida por los estudiantes en pre-examen	47
12 Análisis de normalidad de los 7 grupos participantes.	48
13 Ejercicios resueltos correctamente por los por grupos y promedio de ejercicios resueltos por estudiante (Total ejercicios = 57).	48
14 Ejercicios resueltos correctamente por tema.	49
15 Información sobre calificación obtenida por los estudiantes en el post-examen.	50
16 Promedio de ganancia obtenida por estudiante ($g/10$), ganancia normalizada por grupo ($\langle g \rangle$) y promedio de puntuaciones de cambio normalizada (c).	51

17 Correlación de Pearson entre el total de ejercicios resueltos correctamente y la ganancia de aprendizaje. 53

18 Resultado de prueba de hipótesis. 54

19 Resultados de usabilidad de MathDIP..... 55

Capítulo 1. Introducción

Las Matemáticas son un área importante en la educación de los estudiantes. En particular, son de carácter esencial en carreras técnicas como lo son las ciencias físico-matemáticas, las ingenierías y las asociadas a las ciencias de la información. Sin embargo, su importancia es proporcional a la dificultad de su enseñanza y aprendizaje. Varios estudios se han realizado para identificar los factores que ocasionan este problema. Ortiz (2002) señala que estos problemas están centrados principalmente en: fobia hacia las matemáticas, profesores poco preparados, métodos inapropiados en el proceso de enseñanza y alumnos con bases débiles o nulas para el siguiente nivel educativo.

1.1 Planteamiento del problema

El bajo nivel académico con el que los estudiantes ingresan al nivel superior ocasiona que muchos estudiantes no se encuentren listos para sus primeros cursos de matemáticas (Cálculo, Estadística, Álgebra Lineal, etc.). A fin de mitigar este problema, algunas instituciones del nivel superior han optado por implementar cursos de introducción a las matemáticas. Estos cursos pretenden introducir a los estudiantes en los conceptos fundamentales de Pre-cálculo, es decir, estos cursos ofrecen los antecedentes para los conceptos matemáticos, problemas y técnicas que se presentan en el aprendizaje del Cálculo. Típicamente, en un curso de introducción a las matemáticas se realiza una revisión de álgebra, geometría y geometría analítica, así como de ciertas funciones como las trigonométricas, la exponencial y la logarítmica; así como una breve introducción a números complejos y sus propiedades. En el Anexo II se presentan dos ejemplos de planes de estudio de estos cursos. En general, estos cursos se centran en la solución de ejercicios, por ello se debe poner especial atención a la evaluación y retroalimentación que se ofrece a los estudiantes.

Diferentes estudios expresan la importancia de la evaluación formativa. Su incorporación en cursos formales es un elemento clave para que los estudiantes conozcan y regulen

sus avances académicos. (Black & William, 1998; Madison et al., 2007; Nicol & Macfarlane-Dick, 2006). No obstante, ofrecer una evaluación formativa relevante que guíe el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes no siempre es una tarea factible. El profesor es el encargado de realizar esta actividad dentro del salón de clases. Sin embargo, en la práctica, la pesada carga de trabajo que tienen y el extenso número de estudiantes que atienden, hacen difícil proveer evaluación y retroalimentación apropiada y oportuna.

Para enfrentar esta problemática, en esta tesis se propone una solución que incorpora el uso de tecnología como apoyo en la evaluación formativa de las matemáticas. En particular se plantea el uso de un sistema que ofrezca evaluación y retroalimentación automática no solo de la evaluación final sino de cada paso que el estudiante realizó a fin de llegar a la solución de un ejercicio. El desarrollo de un sistema con estas características involucra muchos retos de diseño e interacción que incluyen la escritura de expresiones matemáticas en la computadora y el proceso de evaluación y retroalimentación.

Actualmente no existe un sistema intuitivo que permita la edición fácil y accesible de expresiones matemáticas en la computadora. Entre los métodos más comunes se encuentran el uso de código y el uso de menús con símbolos matemáticos. Ambos tienen sus ventajas y desventajas. El uso de código es una forma sencilla y rápida de escribir expresiones matemáticas en la computadora. En este sentido, LaTeX es el procesador de texto y lenguaje de marcado más utilizado con este objetivo. Una desventaja es que el usuario debe aprender las reglas y funciones propias del lenguaje antes de poder utilizarlo. Por otro lado, el uso de menús que contienen los símbolos matemáticos más comunes resulta ser un método intuitivo que no requiere que el usuario invierta tiempo aprendiendo un lenguaje específico. No obstante, el uso de este método puede ser tedioso cuando el proceso se repite muchas veces.

A fin de que el sistema realice la evaluación de cada paso, el estudiante debe ingresar un número significativo de expresiones matemáticas, por lo que es necesario contar con un sistema intuitivo, que permita una edición fácil y accesible de expresiones matemáticas en la computadora.

El sistema de evaluación y retroalimentación automática debe ser una herramienta de apoyo tanto para el profesor como para el estudiante. Esto implica que el profesor solo ingrese el ejercicio y la solución esperada del mismo. El estudiante debe ser libre de resolver los ejercicios con los pasos que él necesite. De esta forma, estudiantes avanzados pueden resolver un ejercicio en pocos pasos, mientras que los estudiantes para quienes el tema es poco familiar lo resuelven en más pasos.

1.2 Preguntas de investigación científica

A continuación se presenta una serie de preguntas que son la base de esta investigación.

- ¿Cuáles son los problemas que enfrentan los estudiantes de primer ingreso al nivel superior en cursos de matemáticas?
- ¿Qué características debe tener un sistema que apoye la evaluación formativa en cursos de matemáticas del nivel superior?
- ¿Cuáles son los requerimientos tecnológicos que se deben considerar para desarrollar un sistema que ofrezca evaluación y retroalimentación automática?
- ¿Cuál es el impacto que tiene en los estudiantes el uso de una plataforma que ofrece evaluación y retroalimentación automática de cada uno de los pasos necesarios para resolver un ejercicio matemático?

1.3 Objetivos

Para el desarrollo de la investigación se presentan a continuación los siguientes objetivos:

Objetivo General

Diseñar, implementar y evaluar un sistema que ofrezca evaluación automática de cada uno de los pasos necesario para llegar a la solución de ejercicios matemáticos.

Objetivos Específicos

- Estudiar la interacción entre los principales actores en cursos formales de matemáticas del nivel superior.
- Establecer principios de diseño para un sistema de evaluación automática que apoye el aprendizaje de las matemáticas.

- Definir los requerimientos tecnológicos necesarios para implementar un sistema de evaluación automática.
- Diseñar, desarrollar e implementar un sistema que ofrece evaluación y retroalimentación automática.
- Evaluar el impacto que tiene en el aprovechamiento de los estudiantes un sistema que ofrece evaluación y retroalimentación automática.

1.4 Metodología

Para lograr satisfacer los objetivos planteados se siguió la siguiente metodología dividida en 3 fases:

Fase A: Estudio etnográfico

Esta fase tiene como objetivo identificar y entender las relaciones sustantivas entre profesor-estudiante y estudiante-estudiante y las actividades dentro de un curso formal de Introducción a las Matemáticas. Durante esta fase, se desarrolló un estudio de campo dentro de un curso para estudiantes de primer ingreso en una universidad de México. Durante el estudio se observó la práctica docente, las sesiones de resolución de ejercicios y las relaciones de los principales involucrados en dichas actividades.

Fase B: Diseño y desarrollo de un sistema que ofrezca retroalimentación automática

Esta fase se dividió en dos sub-fases, en la primera se realizó la identificación de componentes tecnológicos que se adapten a las necesidades establecidas en la fase A y en la segunda se realizó el diseño, el desarrollo y la implementación del sistema.

Fase C: Evaluación de MathDIP en cursos formales

Durante esta fase, el sistema se introdujo dentro de un curso de Introducción a las Matemáticas Universitarias a fin de evaluar la percepción de los usuarios sobre el mismo y conocer el impacto de MathDIP en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Con esta finalidad se desarrolló un experimento cuasi-experimental con un diseño pre examen / post examen con grupos de control y grupos experimentales. En esta investigación participaron 7 grupos de nuevo ingreso en la universidad, en total se contó con la participación de 120 estudiantes. Para el análisis de los datos se utilizó las expresiones

propuestas por Hake y Marx and Cummings para calcular la ganancia normalizada por grupo y por estudiante respectivamente.

1.5 Contribuciones de la tesis

Las siguientes son las contribuciones principales de la tesis:

- Se clasificaron las relaciones presentes en un curso formal.
- Se identificó a la evaluación formativa como una parte importante del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
- Se determinaron las oportunidades para el uso de tecnología como apoyo en la evaluación formativa en cursos de matemáticas.
- Se plantearon las bases para el uso de la escritura a mano alzada en plataformas que apoyen el aprendizaje de las matemáticas.
- Se diseñó y desarrolló un sistema que permite la evaluación y retroalimentación automática de cada uno de los pasos necesarios para alcanzar la solución final de un ejercicio de matemáticas básicas.

1.6 Organización de la tesis

El presente manuscrito está organizado en 6 capítulos en los que se abordan los siguientes puntos:

En el **Capítulo 2** (*Educación de las matemáticas en México*) se esquematiza la situación de la educación en matemáticas en México. Para ello se presentan los resultados de evaluaciones tanto nacionales como internacionales enfocadas a medir el nivel académico en los diferentes niveles educativos.

En el **Capítulo 3** (*Evaluación formativa*) se introduce el paradigma de la evaluación y retroalimentación como parte importante del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Se presenta una explicación detallada de todos los conceptos relacionados, así como los retos de su implementación en cursos formales.

En el **Capítulo 4** (*Educación matemática: conductas y necesidades*) se presenta el caso de estudio realizado en un curso de Introducción a las matemáticas con el objetivo de caracterizar la interacción entre estudiante-profesor y estudiante-estudiante.

En el **Capítulo 5** (*MathDIP*) se presenta el diseño e implementación de una plataforma web que ofrece evaluación y retroalimentación automática.

En el **Capítulo 6** (*Experimentación y resultados*) se describe la evaluación de MathDIP en un curso formal y el impacto que esta tuvo en el aprendizaje de los estudiantes que participaron en el estudio.

En el **Capítulo 7** (*Discusión y conclusiones*) se presentan las conclusiones y reflexiones de este trabajo de investigación, así como direcciones para trabajo futuro.

Capítulo 2. Educación de las matemáticas en México

La educación en México atraviesa por una etapa de decadencia y presenta un atraso significativo comparado con países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OECD, por sus siglas en inglés) (OECD, 2014). El análisis de la situación actual puede ser difícil de plantear por su alto grado de complejidad y todos los factores involucrados. En este sentido, aquí se presenta una síntesis y análisis de diferentes factores relacionados con la educación en matemáticas en nuestro país. Además, se presentan los resultados de estudios nacionales e internacionales que proporcionan indicadores importantes de la situación.

2.1 Desempeño de estudiantes mexicanos en matemáticas

El conocimiento y preparación con la que los estudiantes inician un nivel educativo son un factor importante en el rendimiento académico, los altos índices de reprobación y la deserción estudiantil en el nuevo ciclo escolar. Por ello es importante realizar un análisis del nivel académico de los estudiantes en los diferentes niveles educativos.

El sistema educativo mexicano está dividido en tres niveles. Educación básica correspondiente a educación preescolar, primaria y secundaria. Educación media superior otra forma de llamar a la educación preparatoria o bachillerato. Educación superior a cuyo nivel pertenecen estudios de licenciatura, maestría y doctorado. Los dos primeros niveles son obligatorios (SEP, 2011).

El Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA, *Programme for International Student Assessment*), es una prueba estandarizada trianual diseñada y aplicada por la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos (OECD, Organization for Economic Co-operation and Development). El objetivo de esta prueba es medir los sistemas educativos alrededor del mundo. PISA mide las habilidades de estudiantes entre 15 y 16 años en tres áreas: español, matemáticas y ciencias (OECD, 2009). A la fecha, la prueba más reciente fue la aplicada en el 2015, los resultados todavía están en proceso.

En la evaluación PISA realizada en el 2012 destacan una serie de carencias y debilidades del sistema educativo mexicano. De acuerdo con estos resultados el nivel académico de estudiantes mexicanos en matemáticas es lamentable. El 55% de los alumnos mexicanos no alcanzan el nivel de competencias básico en esta área y tan solo un poco menos del 1% logra alcanzar los niveles de competencia más altos. El puntaje promedio de la OCDE fue de 494 puntos, mientras que el alumno promedio en México obtuvo 413 puntos en matemáticas (OECD, 2014). Esto representa un progreso de 28 puntos con respecto a las evaluaciones del 2003 (Tabla 1).

Tabla 1. Resultados en matemáticas obtenidos por diferentes países en la prueba PISA.

País	2003	2006	2009	2012
Australia	524	520	514	504
Austria	506	505	*	506
Belgium	529	520	515	515
Canada	532	527	527	518
Chile	*	411	421	423
Czech Republic	516	510	493	499
Denmark	514	513	503	500
Estonia	*	515	512	521
Finland	544	548	541	519
France	511	496	497	495
Germany	503	504	513	514
Greece	445	459	466	453
Hungary	490	491	490	477
Iceland	515	506	507	493
Ireland	503	501	487	501
Israel	*	442	447	466
Italy	466	462	483	485
Japan	534	523	529	536
Korea	542	547	546	554
Luxembourg	493	490	489	490
Mexico	385	406	419	413
Netherlands	538	531	526	523
New Zealand	523	522	519	500
Norway	495	490	498	489
OECD - Average	500	498	499	494
Poland	490	495	495	518
Portugal	466	466	487	487
Slovak Republic	498	492	497	482
Slovenia	*	504	501	501
Spain	485	480	483	484
Sweden	509	502	494	478

Switzerland	527	530	534	531
Turkey	423	424	445	448
United Kingdom	*	495	492	494
United States	483	474	487	481

Evaluaciones nacionales muestran resultados similares a los de la prueba PISA. La Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) es un instrumento aplicado por la Secretaría de Educación Pública (SEP) cada año desde 2006 en educación básica y desde 2008 en educación media superior. La última prueba ENLACE fue aplicada en el 2013 y 2014 respectivamente. En ellas casi el 52% de estudiantes de primaria obtuvo una evaluación insuficiente y elemental en matemáticas. En secundaria el 78.1% de los estudiantes participantes obtuvieron este resultado. En el nivel superior, el número de estudiantes que obtuvo una evaluación insuficiente disminuyó como se observa en la Figura 1. Sin embargo, los porcentajes en estas categorías aún son altas, tan solo en el 2014 el 60.7% tenía un nivel académico deficiente.

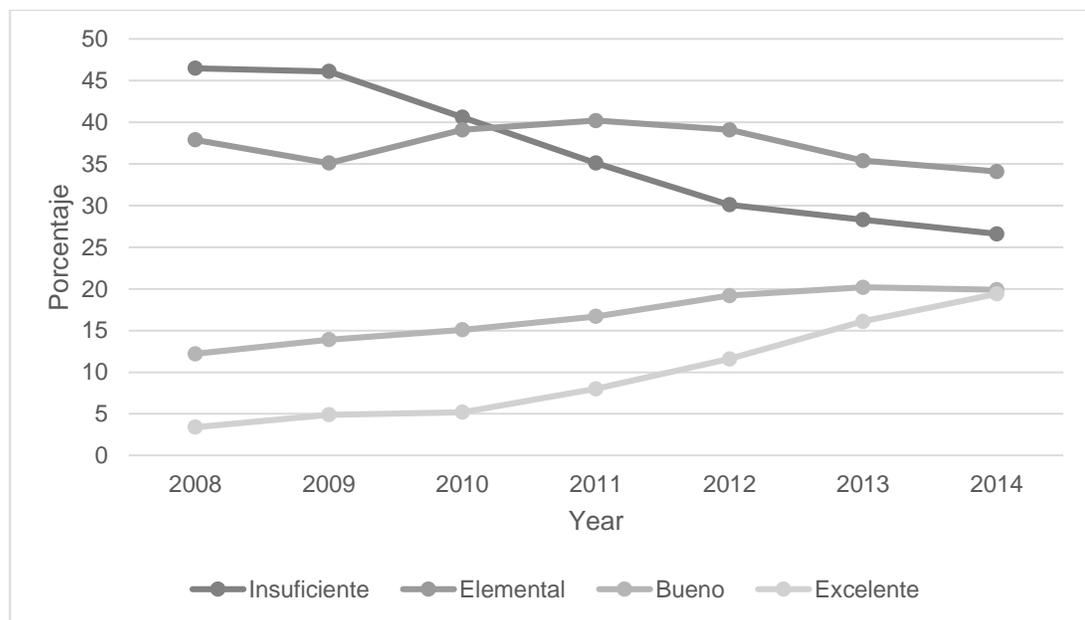


Figura 1. Desempeño de estudiantes del nivel medio superior en matemáticas en la prueba ENLACE 2008-2014.

A partir del año escolar 2014-2015, el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) en México y la Secretaría de Educación Pública (SEP) iniciaron la aplicación de una nueva prueba a nivel nacional llamada PLANEA (Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes). PLANEA tiene como objetivo medir las competencias de lectura y comunicación, matemáticas y habilidades socio-emocionales de los estudiantes del último grado de cada nivel educativo (6 grado de primaria, 3 grado de secundaria y 3 grado de educación media superior).

Los resultados de la prueba PLANEA aplicada en el 2015 en el nivel medio superior muestran el bajo nivel académico de los estudiantes en el área de matemáticas, 51.3% de los estudiantes participantes se encuentran en el nivel más bajo.

En años recientes, se han realizado importantes esfuerzos en México para desarrollar un sistema educativo de calidad. Entre ellas se encuentran las diferentes reformas educativas que se han puesto en marcha. A partir del 2004 los planes de estudio comenzaron a ser modificados con el objetivo de cambiar su enfoque centrado en el aprendizaje a un enfoque basado en competencias. El enfoque centrado en el aprendizaje tiene como finalidad que el estudiante de sentido y significado al contenido de acuerdo con sus propias experiencias. En cambio, el enfoque basado en competencias hace énfasis en lo que el estudiante debe ser capaz de realizar al término de un proceso formativo y las estrategias a seguir para alcanzarlo (SEP, 2012). La reforma más reciente en materia educativa fue la realizada en el 2012. Esta reforma busca mejorar la calidad educativa de las escuelas mexicanas a partir de tres objetivos: mejorar la calidad de la educación básica y media superior, reducir la desigualdad en el acceso a la educación e involucrar la participación de la sociedad en el mejoramiento del sistema educativo (Gobierno de la República, 2012).

Mejorar el nivel académico de los estudiantes no es un desafío sencillo, sobre todo si se considera el rezago académico que ha afectado a los estudiantes mexicanos durante años. Resulta evidente la necesidad de tomar acciones que involucren nuevos métodos de aprendizaje y más investigación en el ámbito educativo, que garanticen una mejora en la calidad de la educación.

2.2 Educación matemática apoyada con tecnología

De acuerdo al reporte Global Information Technology realizado por el Foro Económico Mundial y publicado en el 2015, México avanzó en la adopción y uso de tecnologías de la información (Soumitra, 2015). Sin embargo, en el área educativa su uso y aceptación sigue siendo limitado. Durante los últimos años varios esfuerzos se han realizado por incorporar el uso de TICs en la educación en los diferentes niveles educativos en México.

Enciclomedia fue un programa que buscaba fomentar el uso educativo de las TICs en la educación básica así como impulsar la producción, distribución y fomento eficaz de material educativo congruente con los planes, programas y libros de texto (SEP, 2006). Durante un periodo de siete años (2004-2011) este programa fue implementado en todas las aulas de 5to y 6to grado de primaria del país. Los resultados encontrados en el análisis de este programa no mostraron un impacto significativo en el aprendizaje de los estudiantes.

El desarrollo e implementación de programas y sistemas con objetivos más específicos pueden ser encontrados como parte de diferentes investigaciones. Matemáticas es uno de los temas recurrentes dada su importancia y la dificultad que los estudiantes tienen para entender los temas relacionados con esta área. El Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) ha desarrollado software educativo para apoyar el aprendizaje de la geometría en cursos del nivel superior. El Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV), desarrolla sistemas para apoyar cursos de álgebra y cálculo del nivel superior (Martínez, 2005). La Universidad Pedagógica Nacional (UPN) ha incluido el uso de calculadoras programables en el nivel primaria (Cedillo, 2005). En el Centro de Investigación y Educación Superior de Ensenada (CICESE), se han implementado diferentes investigaciones para apoyar el aprendizaje de las matemáticas, el uso de objetos de aprendizaje en un ambiente electrónico de aprendizaje (López-Mortero & López, 2007), el desarrollo Plataforma Interactiva para el Aprendizaje del Cálculo (PIAC) es un sistema basado en Web y un sistema de gestión de contenidos (Andrade-Aréchiga, López, & López-Mortero, 2012).

La información mostrada en este capítulo deja ver el bajo nivel académico que tienen los estudiantes mexicanos en matemáticas. Es necesario incorporar nuevas estrategias pedagógicas que apoyen en esta área. En general, el uso de herramientas tecnológicas puede ayudar a los estudiantes en su proceso de enseñanza aprendizaje proveyendo un ambiente en el que ellos pueden aprender haciendo, recibir retroalimentación y clarificar y entender nuevo conocimiento. Es imprescindible hacer un análisis para identificar problemas dentro del ambiente escolarizado que pueden ser fortalecidos mediante la incorporación de tecnología. En el siguiente capítulo se presenta el análisis de la evaluación formativa y su importancia en cursos de matemáticas.

Capítulo 3. Evaluación formativa

Diferentes investigaciones se han realizado a fin de entender el impacto de la evaluación en el aprendizaje de los estudiantes. Comprender su alcance y los conceptos relacionados con este término es fundamental en esta investigación. En este capítulo se realiza una introducción al concepto de evaluación y retroalimentación en cursos formales. Además, se presenta una descripción del concepto evaluación asistida por computadora y las herramientas tecnológicas relacionadas con este concepto.

3.1 Evaluación y retroalimentación en cursos de matemáticas

Evaluación en matemáticas es parte fundamental del proceso de aprendizaje. No existe una definición clara sobre este concepto por ello tiende a ser malentendido como el proceso de aplicar exámenes y asignar una calificación. Sin embargo, evaluación es un concepto más complejo. La evaluación es un proceso dinámico, continuo y sistemático que busca verificar los logros que los estudiantes han obtenido en función de los objetivos propuestos. Ésta involucra el uso de información sobre el aprendizaje de los estudiantes para modificar y refinar el método de enseñanza. La evaluación se encuentra presente durante el desarrollo de cada uno de los cursos ya sea como una evaluación de diagnóstico que permita conocer cómo van aprendiendo los estudiantes o para asignar una calificación al final del mismo. De acuerdo al objetivo que se deseen alcanzar, la evaluación suele dividirse en dos tipos: evaluación formativa y evaluación sumativa.

La evaluación sumativa se realiza periódicamente a fin de determinar el progreso educativo de los estudiantes en un lapso determinado de tiempo o sobre un tema en particular. Ejemplos de la evaluación sumativa son los exámenes al final de una unidad o los exámenes al final de un trimestre.

Aunque la evaluación sumativa es la más utilizada en la educación formal, su contribución en el proceso de enseñanza-aprendizaje es insuficiente y con frecuencia ha sido criticada por varias razones: provee información tardía sobre el progreso de los estudiantes, tiende a estar desconectada del contenido visto en el salón de clases, es difícil evaluar todo el

contenido en un examen y en ocasiones el resultado de la evaluación es utilizado de forma equivocada.

Algunos investigadores creen que la evaluación formativa es más efectiva que otras evaluaciones porque los profesores pueden incorporar esta como parte de sus clases. El Colleges Board Mathematical Sciences Academic Advisor Committee en los Estados Unidos (Briggs, 2007), manifiesta el valor de incorporar la evaluación formativa en cursos universitarios al expresar la importancia de la comunicación en el salón de clases para comprender el conocimiento de los estudiantes, el uso de retroalimentación para informar a los estudiantes los progresos alcanzados y la necesidad de desarrollar programas que implementen la evaluación formativa dentro de su plan curricular.

Uno de los procedimientos más comunes de evaluación formativa es la retroalimentación. Típicamente, en cursos formales, los profesores son los encargados de proveer evaluación y retroalimentación escrita y oral sobre el trabajo de los estudiantes. Sin embargo, en muchas ocasiones esta información tarda mucho en entregarse y tiene un formato general que dificulta que el estudiante identifique sus debilidades. La retroalimentación tiene que ser personal y rápida. Es importante prestar más atención en ofrecer retroalimentación relevante durante clase y sobre cada tema particular y no solo enfocarse en evaluación sumativa.

3.2 Evaluación asistida por computadora en matemáticas

La tecnología es una herramienta que apoya el proceso de enseñanza aprendizaje en diferentes sentidos. Su incorporación al salón de clases brinda a los profesores una forma diferente de presentar el contenido de sus cursos. El uso de videos, animaciones y juegos ofrecen a los estudiantes un estilo diferente, dinámico y divertido de aprender nuevos temas. En particular en matemáticas un área que destaca por su dificultad y complejidad, el uso de herramientas tecnológicas se presenta como una opción para enseñar a los estudiantes contenidos complejos, ofrecer animaciones de funciones o expresiones complicadas o un camino para practicar los temas vistos en clase. En este sentido destaca el uso de sistemas que ofrecen evaluación y retroalimentación automática en ejercicios matemáticos. Conocer las formas en la que estos sistemas se han utilizado en cursos formales ayuda a tener una visión general de sus ventajas y desventajas.

Ejemplos primitivos de sistemas que ofrecen evaluación y retroalimentación, son los ejercicios de opción múltiple. Estos sistemas han sido útiles en diferentes aspectos de la evaluación de matemáticas (C. Sangwin, 2013). La interacción con este tipo de sistemas es sencilla. Típicamente en este tipo de sistemas se presentan los ejercicios y una serie de soluciones. De tal manera que el estudiante, debe elegir la respuesta o respuestas que representan la solución correcta. Sin embargo, el diseño de ejercicios de opción múltiple es una tarea compleja. Los ejercicios deben contar con una buena estructura en la que las respuestas incluyan una lista plausible de distractores que reten y pongan a prueba el conocimiento de los estudiantes.

En los últimos tiempos se han implementado otros enfoques viables y adecuados para la evaluación del conocimiento de los estudiantes usando tecnología. Los resultados reportados sobre el uso de Sistemas de Álgebra Computacional en School-Curriculum, Assessment and Teaching (proyecto CAS-CAT) en Alberta, Australia (Evans, Norton, & Leigh-Lacancaster, 2005; Flynn, 2007) son una muestra de cómo la tecnología (en dispositivos “handheld”) puede contribuir en el proceso de evaluación. Estos representan un buen ejemplo del uso de Sistemas de Álgebra Computacional (CAS, por sus siglas en inglés) para la evaluación del entendimiento de los estudiantes. La idea básica del proyecto es el diseño y desarrollo de material que sirva para evaluar conocimiento. Algunas de las preguntas pueden ser respuestas sin el uso de CAS, otras requieren el uso de técnicas numéricas/gráficas para llegar a la solución; un tercer grupo consiste de problemas que pueden ser resueltos con CAS, pero también se puede llegar a su solución sin el uso de este sistema.; finalmente, un grupo de preguntas requieren el uso de razonamiento algebraico para llegar a la solución.

A mayor escala, se pueden mencionar los módulos de evaluación implementados en Sistemas de Gestión del Aprendizaje (LMS) como el proyecto WebAssign (<http://www.webassign.net>) de la Universidad de Georgia (Townesley, 2009). En este proyecto, las tareas, exámenes y problemas prácticos son realizados a través del sitio Web.

3.3 Sistemas de Álgebra Computacional (CAS)

Sistemas de Álgebra Computacional (CAS, *Computer Algebra System*) son paquetes de software que proveen rutinas para manipular expresiones numéricas y simbólicas. Estos sistemas permiten el desarrollo de operaciones aritméticas de alta precisión, el cálculo de operaciones algebraicas, resolver sistema de ecuaciones, realizar análisis estadísticos y resolver problemas de cálculo diferencial e integral. Además, es posible graficar en dos o tres dimensiones y contienen una extensa biblioteca de funciones matemáticas predeterminadas.

El desarrollo de CAS inició en la década de los 1970s y fue introducido dentro del salón de clases a principios de 1980s. CAS comerciales como Maple (<http://www.maplesoft.com/>) y Mathematica (<http://www.wolfram.com/>) contienen una amplia gama de herramientas para interactuar, explorar y hacer simulaciones que apoyen el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Aunque sistemas comerciales integran varios elementos interesantes, en muchas ocasiones no es posible solventar el costo que implica tener estas herramientas en los laboratorios escolares. En este sentido, el uso de software *open source* es una posible solución. Wick (2009) señala los beneficios de utilizar software bajo licencia *open source* para propósitos educacionales. La disponibilidad del código fuente y los permisos para modificarlo es un elemento importante de estos sistemas. Esto permite ajustar y adaptar el software, especialmente cuando se busca adaptabilidad e interoperabilidad con otros sistemas. Además, existe una gran comunidad de desarrolladores y usuarios que revisan y actualizan el código constantemente.

Existe un gran número de CAS *open source* completamente desarrollados que pueden ser una excelente opción. Wick (2009) identifica y analiza dos CAS que pueden ser utilizados en clases de matemáticas, Maxima y Sage.

Maxima es un sistema descendiente del CAS Macsyma, desarrollado a finales de 1960 por el Instituto Tecnológico de Massachusetts. Maxima es un CAS que se especializa en operaciones simbólicas pero que también puede ser utilizado para cálculos numéricos.

Sage (<http://www.sagemath.org/>) es un robusto y flexible software matemático publicado por primera vez en el 2005. Este es el resultado de un proyecto cuyo objetivo era

desarrollar una alternativa *open source* a los CAS comerciales existentes como *Mathematica* y *Maple*. La funcionalidad de Sage incluye: álgebra discreta y teoría de números, álgebra lineal, álgebra numérica y simbólica entre otros.

Un CAS relativamente nuevo y con una rápida aceptación es SymPy (<http://www.sympy.org>). Este sistema inició en 2005 y está en continuo desarrollo. Uno de sus principales características es que está escrito en el cada vez más popular lenguaje de programación Python. A diferencia de otros CAS, SymPy es fácil de utilizar e instalar y además puede ser usado interactivamente o puede ser utilizado incorporado como una biblioteca en otros sistemas basados en Python.

3.4 Sistemas que ofrecen evaluación y retroalimentación automática

Una implementación directa de los CAS en la evaluación asistida por computadoras es mostrada por Blyth and Labovic (2009). En este proyecto, cuadernos de trabajo de Maple que contienen ejercicios son descargados de Internet. Los archivos son equipados con una función que evalúa las respuestas finales. Una característica importante de su implementación es que los ejercicios Maple son diseñados para fomentar el trabajo independiente de los estudiantes, no necesariamente siguiendo el curso.

El sistema Maxima ha sido implementado satisfactoriamente para apoyar la enseñanza y evaluación de competencias matemáticas en cursos específicos de matemáticas universitarias (García, García, del Rey, Rodríguez, & de la Villa, 2014). Un ejemplo donde la capacidad gráfica de los CAS es explorada es el curso de Cálculo de varias variables de la Slovak University of Technology (Velichova, 2008).

Un sistema comercial basado en Web corriendo Maple para la creación de exámenes y tareas es MapleTA (<http://www.maplesoft.com/products/mapleta/>). Estos tienen acceso directo a Maple y proveen una calificación automática, análisis de resultados y proveen retroalimentación de pasos intermedios. Una implementación de este sistema en una preparatoria es reportada por Jones (2008). Aunque el contenido incluyendo expresiones matemáticas y algorítmicas es relativamente fácil, su sintaxis ha sido reportada como una desventaja.

Otro sistemas que utiliza las propiedades de los CAS para ofrecer evaluación es el sistema STACK un módulo implementado para correr dentro del LMS Moodle capaz de proveer evaluación a problemas algebraicos utilizando *Maxima* para validar la respuesta final de los estudiantes y compararla con la que el profesor capturó. El ingreso de expresiones matemáticas se realiza utilizando sintaxis *LaTeX* (C. Sangwin, 2013; C. J. Sangwin, 2007). El desarrollo de STACK representa una importante contribución a CAA, en particular la idea de proveer retroalimentación automática de pasos específicos y no solo de la solución final. Sin embargo, una de las desventajas es que los estudiantes tienen que aprender código *Maxima* para interactuar con el sistema.

Un sistema que aprovecha todas las características de los CAS para la evaluación es *Digital Mathematics Environment* (DME). Este sistema es un conjunto de ejercicios en forma de *applets* Java, en donde el usuario puede ingresar pasos intermedios y recibir evaluación y retroalimentación automática de cada uno de ellos. Este sistema utiliza *Mathematica* para hacer la evaluación de los ejercicios (Heck, Boon, & van Velthove, 2008).

Con lo anterior se expone un camino en el cual las computadoras pueden apoyar la evaluación formativa, en particular ofreciendo retroalimentación utilizando las características de los CAS. Un problema con el uso de tecnología en cursos de matemáticas es la forma como el estudiante ingresa expresiones matemáticas, ya que las características específicas del lenguaje dificultan este proceso.

3.5 Escritura de expresiones matemáticas en la Web

Ingresar expresiones algebraicas en la computadora todavía es uno de los problemas que dificultan el uso de tecnología en la educación de las matemáticas (Anthony, Yang, & Koedinger, 2007). Esto es en parte debido a que existen dificultades técnicas relacionadas con la forma en la que el estudiante ingresa expresiones matemáticas en la computadora (Awal, Mouchère, & Viard-Gaudin, 2014).

En la mayoría de los sistemas utilizados para apoyar en la enseñanza de las matemáticas, la interacción con la computadora se realiza vía el teclado y en algunos casos apoyados por el uso del mouse utilizando *Windows-Icons-Menus-Pointing* (WIMP).

Un medio menos común es el uso de lenguajes de marcado como *LaTeX* o el lenguaje de programación de algunos de los CAS más populares como *Mathematica* o *Maple*.

Otros medios menos utilizados incluyen el uso de escritura a mano alzada. Diferentes técnicas y algoritmos han sido utilizados a fin de entender y reconocer lo que los usuarios escriben en un sistema particular (Chan & Yeung, 2000). Muchos factores hacen este un problema difícil: la notación matemática contiene símbolos que pueden ser difíciles de distinguir de ruido, la relación espacial es difícil de identificar (por ejemplo, $3x$ vs 3^x) y algunos de los símbolos matemáticos tienen roles ambiguos (por ejemplo, multiplicación vs punto decimal) (Awal et al., 2014; Zanibbi & Blostein, 2012).

En años recientes, se ha incrementado el desarrollo de sistemas que reconocen símbolos matemáticos escritos a mano alzada. Sin embargo, estos sistemas tienen varias limitaciones. Algunos son comerciales por lo que su uso en sistemas educativos no siempre es viable, por ejemplo MyScript (<http://myscript.com/>). Otros como JMathNotes (http://userpage.fu-berlin.de/~tapia/?page_id=269) son el resultado de proyectos de investigación y su desarrollo ha sido detenido una vez que este terminó. (Tapia & Rojas, 2004). Finalmente, se encuentran aquellos sistemas que se enfocan en reconocer símbolos matemáticos individuales y no expresiones matemáticas, Dentexify (<http://detexify.kirelabs.org/classify.html>) es un ejemplo.

Tabla 2. Ejemplos de editores de expresiones matemáticas a mano alzada.

Editor matemático	Costo	Notas	Lenguaje de salida
MyScript	Comercial	--	<i>LaTeX</i> , MathML
JMathNotes	<i>Open source</i>	Tesis de doctorado	<i>LaTeX</i>
Dentexify	<i>Open source</i>	Reconoce símbolos individuales	<i>LaTeX</i>
Math Input Panel	Aplicación Windows	--	MathML

Uno de los sistemas que resaltan es Math Input Panel (<http://windows.microsoft.com/en-us/windows7/use-math-input-panel-to-write-and-correct-math-equations>). Esta es una aplicación integrada en sistemas operativos Windows 7 en adelante que realiza el reconocimiento de expresiones matemáticas escritas a mano alzada. Una característica que diferencia a este editor es el reconocimiento automático que realiza mientras el usuario va escribiendo. De esta forma el usuario sabe en todo momento lo que el sistema

está reconociendo y puede utilizar las herramientas del editor para realizar las correcciones que sean necesarias.

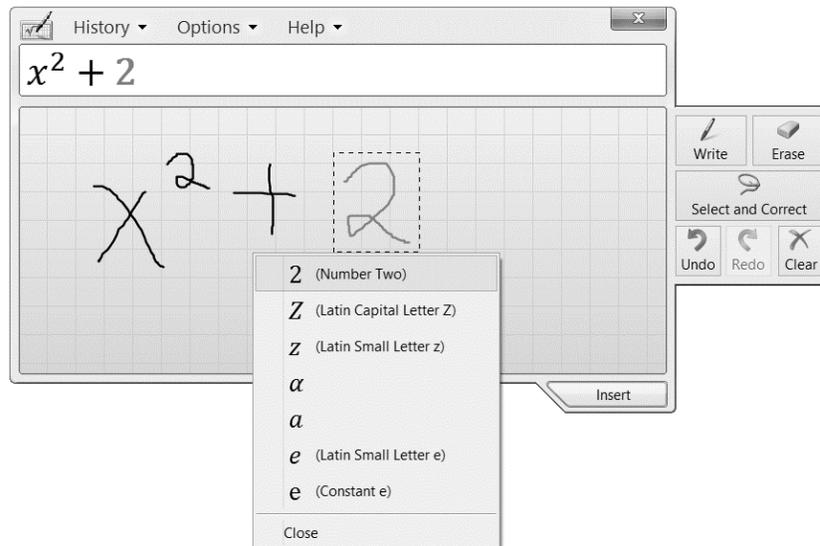


Figura 2. Editor de expresiones matemáticas Math Input Panel.

En este capítulo se definió el concepto de evaluación formativa y su importancia en cursos de matemáticas. Además, se presentaron diferentes sistemas que han sido utilizados para apoyar el proceso de evaluación y retroalimentación. Igualmente, se describieron herramientas tecnológicas relacionadas con este concepto como son sistemas de álgebra computacional y editores de expresiones matemáticas a mano alzada. En los siguientes capítulos se presenta la plataforma propuesta en esta tesis como una propuesta innovadora que fortalece la evaluación formativa de las matemáticas.

Capítulo 4. Educación matemática: conductas y necesidades

En este capítulo se discute un caso de estudio dentro de un salón de clases del nivel superior a fin tener un mejor entendimiento de las conductas y necesidades de los estudiantes dentro del salón de clases. Primero se presenta el diseño del estudio. Posteriormente, se presentan las actividades se realizan dentro del salón de clases. Finalmente, se analiza las oportunidades de incorporar un sistema que apoye la evaluación formativa de las matemáticas.

4.1 Diseño del estudio

El caso de estudio se realizó en el curso de Introducción a las matemáticas que se ofrece en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de Baja California. Este curso es de carácter obligatorio para los estudiantes de nuevo ingreso a cualquiera de las cuatro licenciaturas que ofrece esta facultad: biología, ciencias computacionales, físicas y matemáticas.

Introducción a las matemáticas es un curso cuyo objetivo es introducir a los estudiantes los conceptos fundamentales de Pre-Cálculo. En general, este curso se centra en la solución de ejercicios por lo que existe más interacción profesor-alumno, alumno-alumno que en otros cursos y se puede encontrar un mayor número de situaciones en donde se da evaluación formativa.

El curso de Introducción a las matemáticas tiene la siguiente metodología: cada nuevo tema inicia con una breve explicación y la solución de algunos ejercicios por parte del profesor y finaliza con sesiones prácticas en las que los estudiantes resuelven ejercicios. Además, semanalmente se aplica un examen para evaluar los temas vistos en la semana.

El experimento consistió en la observación no participativa de 2 grupos que estaban tomando este curso. Se contó con la participación de 36 estudiantes (15 mujeres y 21 hombres) y dos profesores. En total se observaron 19 sesiones de 2 horas cada una, durante las cuales se tomaron notas de campo y se realizaron grabaciones de video. En la fase de observación se identificaron situaciones de interacción social vinculadas con la evaluación formativa. Las grabaciones de video fueron transcritas y analizadas

utilizando la metodología propuesta por Planas (2006) que se basa en analizar cada sesión de clase mediante seis fases: estudio y descripción del video general, identificación de episodios de revisión de significado matemáticos, búsqueda de procesos de reelaboración de estos significados, caracterización de interacciones sociales, elaboración de historias explicativas, comparación de los episodios de revisión.

4.2 Resultados

En general, la actividad principal que se realizó en cada una de las sesiones del curso fue la de resolver ejercicios. Otras actividades incluyen, el saludo al iniciar la clase, instrucciones a seguir para resolver los ejercicios, dudas y comentarios relacionados con la clase y la carrera e indicaciones a seguir para la siguiente sesión. En la Figura 3, se muestra la distribución de tiempo de las diferentes actividades que se realizaron durante una sesión típica del curso. Como se puede ver, casi el 80% del tiempo se dedica a que los estudiantes resuelvan ejercicios, mientras que el profesor resuelve dudas de forma individual.

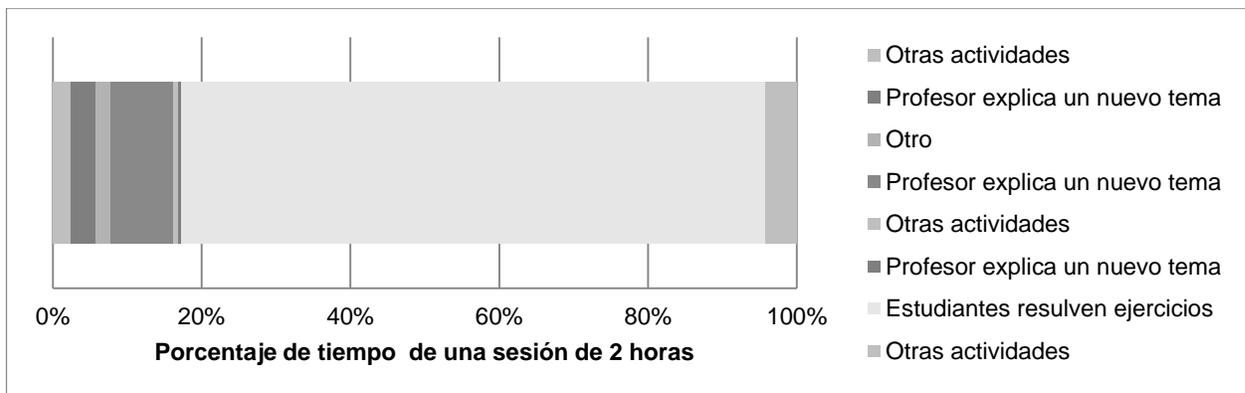


Figura 3. Ejemplo de una sesión típica en el curso de Introducción a las matemáticas.

En otras sesiones el profesor entrega resultados de exámenes y se realiza una revisión del mismo. La principal actividad es realizada por el profesor quien resuelve el examen en el pizarrón y responde las dudas de los estudiantes (en la Figura 4 se muestra la distribución del tipo de sesiones). Es claro que en estas sesiones, el grupo se involucra en actividades propias de evaluación formativa dentro del salón de clases.

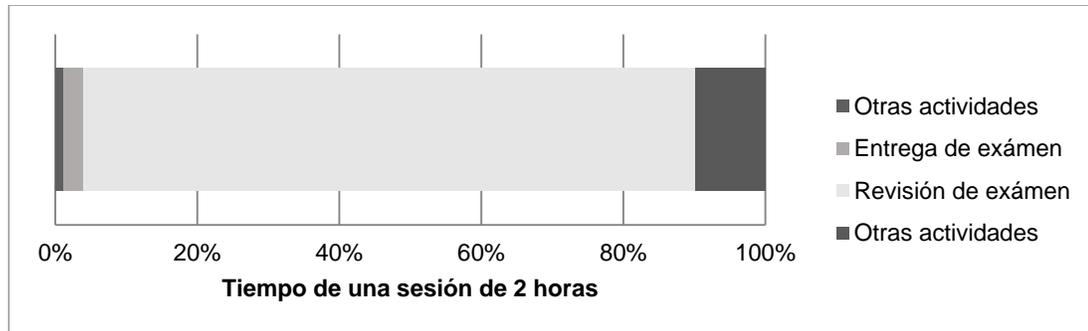


Figura 4. Ejemplo de una sesión del curso de Introducción a las matemáticas en la que se entregan resultados de un examen.

El análisis de las interacciones sociales se enfocó en buscar episodios en los que la interacción estudiante-profesor y estudiante-estudiante involucraron eventos relacionados con evaluación formativa. En ellas el profesor o estudiante han ayudado a un estudiante a resolver una duda, corregir un error o superar un obstáculo de aprendizaje para continuar con la solución del ejercicio.

En la Tabla 3, se observa un ejemplo de un diálogo entre estudiantes en el que aparecen contenidos de duda, error y superación de obstáculo de aprendizaje. El episodio inicia cuando María quiere saber si el resultado al que llegó es correcto, entonces pide a otro compañero comparar sus respuestas. Destaca aquí el hecho de que el estudiante requiere la evaluación de este ejercicio antes de continuar con su trabajo. Al comparar sus soluciones, los estudiantes encuentran que no han obtenido la misma respuesta. Entonces comienzan a comparar los diferentes pasos que siguieron hasta que encuentran la expresión en la que difieren. En este momento Pedro descubre que María ha cometido un error y le trata de explicar dónde está el problema. Después de un tiempo discutiendo al respecto, sin llegar a un acuerdo, María decide ir a preguntarle al profesor y resolver su duda. Cuando ella regresa y explica a Pedro que ella tenía un error, todos quedan conformes y continúan con su trabajo. En este episodio se observa la importancia que tiene una evaluación oportuna para que los estudiantes continúen con su aprendizaje.

Tabla 3. Transcripción de un episodio en clase donde estudiantes discuten un ejercicio.

Orden	Descripción del episodio
	Después de un tiempo realizando ejercicios de forma individual. María pregunta, a otro de sus compañeros, si la respuesta que obtuvo de un problema es la correcta. El episodio dura hasta que María decide ir a preguntarle a la profesora.
1	María: ¿Qué te queda en el 67?
2	Juan: ¿En el 67?
3	María: Sí
4	Juan: Tengo raíz de..
5	María: ¿Qué?
6	Juan: Raíz de 4088
7	María: ¿Cuánto te queda a ti?
8	Pedro: Estas preguntando por el 67...todavía no termino... ¿qué te quedó a ti?
9	María: Es que a la hora de ...de quitarle lo de abajo...no estoy segura...pero según yo...me quedó menos doce y obviamente $-12+4i$
10	Pedro: ¿Porque le quitaste los denominadores?
11	María: Mande
12	Pedro: ¿Cómo te deshiciste de los denominadores?
13	María: ¿Cómo dijo ella?
14	Pedro: ¿Cómo dijo?
15	María: Pues le haces...por ejemplo en esta de la de arriba me queda -12 y 12 queda 1 ...entonces...no sé ahorita le voy a preguntar de hecho nomás lo escribí para poner
16	Pedro: Entonces, ¿si te quedaba 36 arriba y 12 abajo?
17	María: No, a mí me quedó 12 y 12 ... no si, pero estoy...
18	Pedro: ahhh, ok...si, es lo que no sé...me queda 4 y 12 ...no sé qué es lo que pongo...pongo 4 o pongo no sé...pongo 12 ...pero arriba por denominador me quedó $-12+4i$ sobre 12 y en la otra y en la otra $-12+4i$ sobre 12 ...no -4 escribí mal esto
19	Pedro: Ok, el 4 ...tengo casi lo mismo excepto la raíz... ¿de dónde sacaste la...o sea porque no la...?
20	María: Porque no la raíz de 24 ...de -24
21	Pedro: La raíz cuadrada de 24 no es 4
22	María: Por eso... $4 - 4i$...si la raíz cuadrada de -24 es $4i$ ¿qué?... ¿no?... ¿porque?
23	Pedro: $4*4$ son 16
24	María: ¿Sí?...y 24 ¿cuál es su raíz cuadrada?...no tiene
25	Pedro: Pues no tiene raíz cuadrada exacta...
26	María: ¿No?...ahhh, entonces se queda...
	Entonces, María decide ir a preguntarle al profesor. Cuando regresa esto es lo que sucede.
27	María: Oye Pedro, si estaba bien yo, si es así la de...
28	Pedro: ¿Si estabas bien con que la raíz de 24 era 4 ?
29	María: ¿Mande?
30	Pedro: ¿Si estabas bien con la raíz de 24 era 4 ?
31	María: No, porque... aquí tienes que ponerle...
32	Pedro: Raíz cuadrada de 24
33	María: Te queda 2 por raíz cuadrada de $3i$... pero por ahí andaba

En general, las observaciones relacionadas con el proceso de resolver problemas mostraron un patrón de Inicio-Respuesta-Retroalimentación en diferentes etapas de la solución de un ejercicio. En el proceso de resolver un ejercicio particular, se ha observado que los estudiantes constantemente buscan información del profesor que confirme y valide su trabajo en diferentes etapas del mismo. Sin embargo, en ocasiones el profesor no tiene la posibilidad de atender todas las solicitudes de los estudiantes y ellos recurren

al apoyo de alguno de sus compañeros. En algunos casos, el proceso es detenido cuando el estudiante llega a una solución incorrecta. Proveer con una simple retroalimentación en alguna etapa de trabajo para encontrar la solución a unos ejercicios es suficiente para mantener activo al estudiante y que el proceso finalice exitosamente.

Capítulo 5. MathDIP

Los resultados y consideraciones expuestas en los capítulos anteriores, bosquejan los problemas que presenta la educación en México, en particular en áreas fundamentales como las matemáticas. Ante la situación de que los estudiantes llegan con un bajo nivel, algunas instituciones de nivel superior de nuestro país se han visto en la necesidad de incorporar un curso de introducción a las matemáticas en el cual los estudiantes deben aprender o recordar los conocimientos básicos para iniciar su educación superior. En su mayoría, estos cursos se enfocan en la solución de ejercicios. En estos casos, la evaluación y retroalimentación de los mismos es de suma importancia para cumplir los objetivos del curso. Sin embargo, este proceso no siempre puede ser llevado a cabo por diferentes factores. La tecnología se presenta como una opción que puede apoyar en el proceso de enseñanza aprendizaje ofreciendo evaluación y retroalimentación automática. En este capítulo se presenta el diseño, desarrollo y evaluación de MathDIP, un sistema web que ofrece evaluación y retroalimentación inmediata en la resolución de ejercicios matemáticos.

5.1 Descripción del sistema

MathDIP es una plataforma basada en web (<http://www.mathdip.org>) diseñada para ayudar a los estudiantes con ejercicios matemáticos que requieren de habilidades matemáticas específicas y demandan el seguimiento de cierto procedimiento para llegar a la solución. Estos ejercicios se caracterizan porque se pueden resolver siguiendo una serie de pasos hasta que se llega a la solución. El número de pasos necesarios puede variar dependiendo del nivel de conocimientos de los estudiantes. El sistema apoya en este proceso ofreciendo una evaluación y retroalimentación automática de cada uno de los pasos seguidos hasta que se llega a la solución.

La plataforma trata de emular el ambiente de trabajo del estudiante en el que se da un ejercicio y él debe resolverlo siguiendo una serie de pasos hasta llegar a la solución final. Con el sistema el estudiante obtiene una evaluación inmediata de cada paso que ingresó hasta que se llega a la solución.

El sistema requiere una plataforma Windows (Windows 7 en adelante), un browser y un “*plug-in*”. Aunque no es necesario registrarse para utilizar la plataforma, los usuarios registrados tienen acceso a una serie de funciones que mejoran su experiencia incluyendo una gráfica con el registro de su trabajo.

The screenshot shows the MathDIP website interface. At the top, there is a navigation bar with 'Bienvenido' and links for 'Inicio', 'Contacto', 'Ayuda', and 'Salir'. Below this is a menu with categories: 'Números reales', 'Fracciones', 'Operaciones con polinomios', 'Descomposición en factores', and 'Exponentes y radicales'. The main content area is titled 'Repasar el tema' and contains a table of exercises.

Número	Enunciado	Resuelto
1	Elimina los paréntesis y simplifica los términos semejantes $(x + 3y - z) - (2y - x + 3z) + (4x - 3x + 2y)$	✓
2	Elimina los paréntesis y simplifica los términos semejantes $3x + 4y + 3 x - 2(y - z) - y $	✓
3	Elimina los paréntesis y simplifica los términos semejantes $3(x^2 - 2xy + y^2) - 4(x^2 - y^2 - 3yz) + x^2 + y^2$	☹
4	Elimina los paréntesis y simplifica los términos semejantes $3 - (2x - (1 - (x + y))) + x - 2y $	✓
5	Simplifica la siguiente expresión algebraica $2x^2 + y^3 - x + y + 3y^2 + x - x^2 + x - 2y + x^2 - 4y$	☹
6	Simplifica la siguiente expresión algebraica $a^2 - ab + 2bc + 3c^2 + 2ab + b^2 - 3bc - 4c^2$	✓
7	Simplifica la siguiente expresión algebraica $3xy - 2yz + 4xz - (3xz + yz - 2xy)$	☹
8	Simplifica la siguiente expresión algebraica $4x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 2 - (2x - y^2 + 3x^2 - 4y + 3)$	☹
9	Realiza el producto de las siguientes expresiones algebraicas $(3ab^2)(-2a^2b^3c^4)(6a^2b^2)$	☹
10	Realiza el producto de las siguientes expresiones algebraicas $(-4x^2y)(3xy^2 - 4xy)$	☹

Figura 5. Interfaz MathDIP, lista de temas y ejercicios de un tema específico.

The screenshot shows the MathDIP interface with a specific exercise selected. The exercise is: 'Ejercicio 2.- Elimina los paréntesis y simplifica los términos semejantes'. The solution is shown as follows:

$$3x + 4y + 3|x - 2(y - z) - y|$$

$$3x + 4y + 3|x - 2y + 2z - y|$$

$$3x + 4y + 3|x - 3y + 2z|$$

$$12x - 9y$$

The interface also shows a 'Grande' button and a message: 'Felicitaciones has terminado este ejercicio!'. On the right, there is a 'Editor de matemáticas' window showing the expression $12x - 5y$ on a grid background.

Figura 6. Interfaz MathDIP, solución a un ejercicio.

Una vez que los estudiantes seleccionan un tema específico en el que desean trabajar, una lista de ejercicios correspondientes al tema elegido aparecen (Figura 5). A la izquierda de cada ejercicio aparece una señal que indica si el ejercicio ya ha sido resuelto o no. Cuando el usuario selecciona un ejercicio para resolver, la interfaz cambia y muestra

el área de trabajo del usuario (Figura 6). Esta área es dividida en dos partes. La parte izquierda muestra cada uno de los pasos previos que el estudiante ha ingresado y su respectiva evaluación. A la derecha el usuario observará el editor que le permite ingresar a mano alzada expresiones matemáticas.

El sistema también provee de apoyo al profesor mediante la interfaz diseñada con esta finalidad. Aquí el profesor puede observar el trabajo individual de cada estudiante así como su progreso. Esta información ayuda al profesor a dirigir el contenido de su clase, poniendo especial atención en los errores más comunes presentados por los estudiantes y enfocándose en temas específicos que son especialmente difíciles de entender.

5.2 Evaluación y retroalimentación

El proceso a través del cual MathDIP ofrece evaluación y retroalimentación comienza después que el estudiante ingresa la primera expresión matemática. El sistema realiza una serie de etapas a fin de generar y desplegar una retroalimentación para cada etapa, esto se puede observar en la Figura 7.

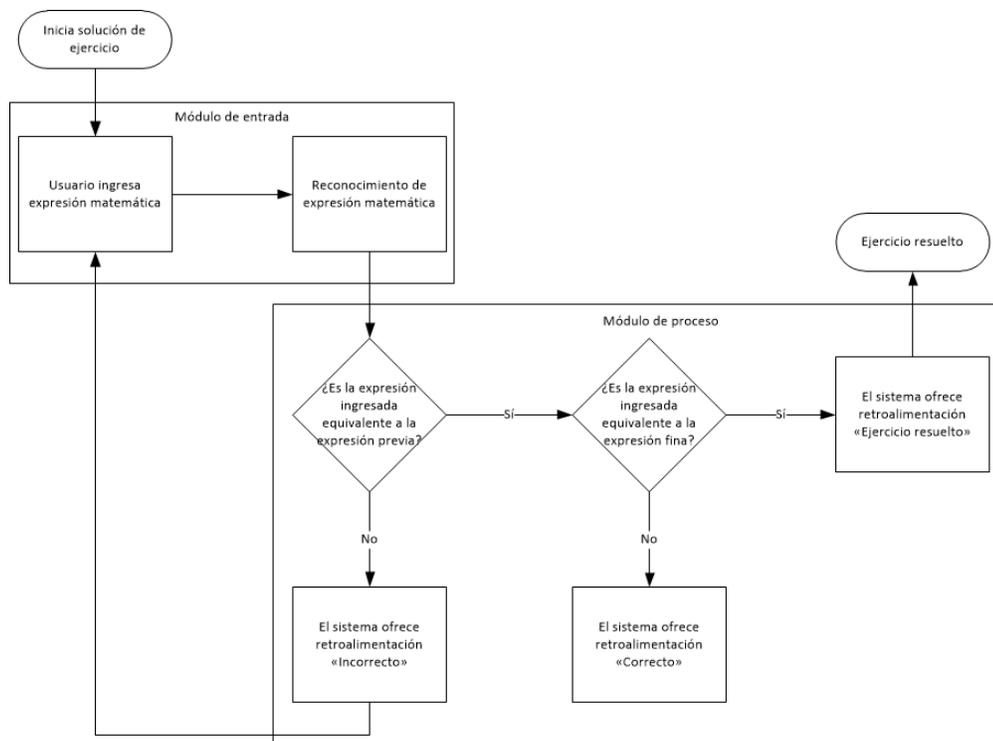


Figura 7. Diagrama de flujo de la interacción de un estudiante con MathDIP para resolver un ejercicio.

Este proceso consiste de los siguientes pasos:

- **Reconocimiento de expresiones matemáticas.** El sistema reconoce los símbolos escritos por el usuario y los convierte a un formato entendible por la computadora.
- **Evaluación de expresiones matemáticas.** En este paso el sistema evalúa las expresiones que el usuario ingresa en uno o dos pasos:
 1. En la primera evaluación, el sistema analiza la equivalencia entre las expresión matemática escrita por el usuario y el paso previo (para el primer paso es la expresión del ejercicio). Dos expresiones son equivalentes si son equivalentes en el sentido algebraico. La equivalencia entre dos expresiones $eu1$ y $eu2$ es determinada por el proceso que se muestra como pseudo-código en la Tabla 4. En este contexto, las siguientes expresiones son equivalentes, $x - 2y - 2x - y \equiv -x - 3y$. Si y solo si el resultado de este proceso es verdadero (*True*), un segundo análisis es realizado.

Tabla 4. Pseudo-código para evaluar la equivalencia entre dos expresiones $eu1$ y $eu2$.

```

if  $eu1 - eu2 = 0$  then
    True
else if  $\frac{eu1}{eu2} = 1$  then
    True
Else
    False

```

2. En el caso de que las expresiones sean algebraicamente equivalentes, el sistema entonces compara la expresión escrita por el usuario ($eu2$) con la solución esperada (sf) que se encuentra en el sistema. En este momento el sistema busca una "igualdad" en el sentido en que ambas expresiones tienen la misma sintaxis considerando conmutatividad. En este sentido, $y^2 + 3xy$ es algebraicamente equivalente a $y(3x + y)$ pero no cumplen con

los requisitos de igualdad. En cambio, $y(y + 3x)$ es “igual” a $y(3x + y)$. Una amplia discusión sobre “igualdad” y “equivalencia” entre expresiones matemáticas puede ser encontrada en el trabajo realizado por Sangwin (2013). Para evaluar “igualdad” las expresiones matemáticas se representan en forma de un árbol, es decir una estructura que contiene un conjunto de nodos y las conexiones entre ellos. La representación se da al distribuir entre los nodos los diferentes elementos de la expresión matemática mientras queda la jerarquización de las mismas queda estipulada por sus conexiones. Para ejemplificar, la representación en árbol de la expresión $16x^2 - 3y$ se muestra en la Figura 8. Después de obtener la representación en árbol de ambas expresiones matemáticas, se procede a hacer la evaluación utilizando el proceso que se muestra en forma de pseudo-código en la Tabla 5.

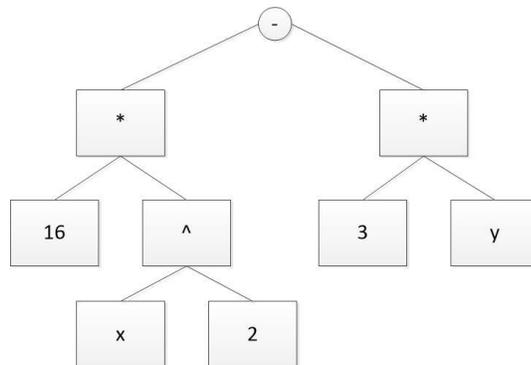


Figura 8. Representación en árbol de la expresión $16x^2 - 3y$.

Tabla 5. Pseudo-código para evaluar la "igualdad" entre dos expresiones.

```

resultado = true

sub-expresión_en_sf_and_eu2 = []

for x sub-expresión_de_sf:

    if resultado = false then

        stop

for y sub-expresión_de_eu2:

    if sub-expresión_en_sf_y_eu2[y] = true then
  
```

```

    continue with next y

else

    if x=y entonces (aquí, igualdad es la aplicación recursiva de este algoritmo)

        resultado = true

        sub-expresión_en_sf_y_eu2[y] = true

        stop

else

    resultado = false

```

- **Despliegue de retroalimentación (incorrecto / correcto / resuelto).** La retroalimentación dada por el sistema depende del resultado de la evaluación realizada en 2. Si el resultado en 2a es falso, el sistema produce un mensaje “incorrecto”. Si el resultado es verdadero, el paso 2b es realizado y el sistema produce un mensaje “correcto” cuando no se ha llegado a la solución final y todos los pasos previos son verdaderos. En todos los casos el proceso comienza de nuevo y el usuario tiene que ingresar una nueva respuesta; el ciclo termina cuando se llega a la solución final y un mensaje de “resuelto” es desplegado.

A fin de ilustrar el proceso completo, en la Tabla 6 se muestra un ejemplo de la solución a un ejercicio realizada por un estudiante en una de las pruebas realizadas con el sistema. El enunciado del ejercicio es: “Elimina los paréntesis y simplifica a su mínima expresión en $3x + 4y + 3[x - 2(y - x) - y]$ ”. Inmediatamente después de que el estudiante ingresa el primer paso para resolver el ejercicio, el sistema reconoce la expresión ingresada y realiza la primera evaluación reconociendo que las expresiones no son equivalentes (el usuario aplicó incorrectamente la regla de los signos cuando la distribución fue realizada). Después de recibir un mensaje indicando que la respuesta es incorrecta, el usuario reflexiona, elimina la expresión e ingresa una nueva respuesta. Esta nueva expresión es reconocida como una respuesta correcta aunque no como la respuesta final del ejercicio. Después de dos interacciones similares, el usuario llega a la solución final.

Tabla 6. Proceso que se sigue para resolver un ejercicio en MathDIP. E1 significa la evaluación de equivalencia, E2 la evaluación de igualdad y R la retroalimentación que el sistema despliega.

Expresión ingresada	Símbolos reconocidos	Expresión previa	E1	E2	R
$3x + 4y + 3(x - 2y - 2x - y)$	$3x + 4y + 3[x - 2y - 2x - y]$	$3x + 4y + 3[x - 2(y - x) - y]$	No	-	Incorrecto
Después de la retroalimentación, la última expresión es eliminada y el usuario ingresa una nueva expresión.					
$3x + 4y + 3(x - 2y + 2x - y)$	$3x + 4y + 3[x - 2y + 2x - y]$	$3x + 4y + 3[x - 2(y - x) - y]$	Si	No	Correcto
$3x + 4y + 3x - 6y + 6x - 3y$	$3x + 4y + 3x - 6y + 6x - 3y$	$3x + 4y + 3[x - 2y + 2x - y]$	Si	No	Correcto
$12x - 5y$	$12x + 5y$	$3x + 4y + 3x - 6y + 6x - 3y$	Si	Si	Resuelto

5.3 Arquitectura de MathDIP

La arquitectura de MathDIP se basa en un modelo cliente-servidor. El modelo cliente-servidor es un modelo de cómputo distribuido en el que el cliente solicita un servicio y el servidor provee la respuesta. Como ventajas de este tipo de arquitectura resalta la centralización de la información, la escalabilidad y el fácil mantenimiento. A pesar de que estas son características deseables en sistemas que están en continua actualización, el uso de este modelo puede tener problemas para contestar muchas peticiones al mismo tiempo. En el sistema MathDIP el servidor es un servidor Web y el cliente es un navegador Web corriendo en una computadora con un sistema operativo Windows.

MathDIP fue desarrollado siguiendo un diseño modular a fin de garantizar su robustez y escalabilidad. De esta manera es fácil cambiar o actualizar el contenido de la plataforma así como sus diferentes componentes. Los principales componentes del sistema MathDIP son: un repositorio de ejercicios matemáticos, un editor de expresiones matemáticas, un *plug-in*, un sistema de álgebra computacional y algunos transformadores.

5.3.1 Repositorio de ejercicios matemáticos

MathDIP requiere de un conjunto de ejercicios matemáticos y su solución final. No son necesarios los pasos intermedios que se pueden seguir para resolver el ejercicio. El sistema es capaz de evaluar todas las posibles expresiones ingresadas por los usuarios para resolver un ejercicio dado. Los ejercicios son almacenados en una base de datos

en formato LaTeX. El diseño del sistema considera el hecho de que los ejercicios sean diseñados por el profesor para que estos se adecuen a los objetivos del curso en los cuales se utilizará el sistema.

Cómo parte de la evaluación del sistema, para la cual se realizó un caso de estudio, y que se presenta en el capítulo 5, una serie de 57 ejercicios aritméticos/algebraicos fueron capturados en el sistema. Los ejercicios se muestran en el Anexo I.

5.3.2 Editor de expresiones matemáticas

El usuario ingresa expresiones matemáticas en el sistema utilizando Math Input Panel, incorporado en sistemas operativos Windows 7 en adelante, un editor capaz de reconocer la escritura de relaciones matemáticas a mano alzada. Esta aplicación reconoce las expresiones ingresadas mediante el uso de un mouse o un lápiz electrónico y la convierte a un formato MathML de forma automática mientras el usuario va escribiendo. Además, el usuario puede modificar la interpretación que realiza el editor de la expresión ingresada si esta no es la correcta utilizando un menú de opciones integrado en el sistema. Aunque este editor solo trabaja con sistemas operativos Windows, su habilidad para reconocer expresiones matemáticas es la mejor en el tiempo que se desarrolló el sistema. En ese tiempo, otros editores, no eran capaces de identificar expresiones completas solo letras, número o símbolos independientes.

5.3.3 Plug-in

Un *plug-in* es un paquete de software que permite agregar nuevas características a una aplicación; este es comúnmente utilizado en browsers. Los *plug-ins* más comúnmente instalados son Flash y Java. A fin de conectar el editor (Math Input Panel) con MathDIP, se desarrolló un “*plug-in*” el cual permite que el editor se abra desde una página Web.

5.3.4 Sistema de Álgebra Computacional

Una aplicación indirecta de los CAS es su uso en sistemas que proveen evaluación asistida por computadora. En estos sistemas los CAS proveen apoyo para evaluar expresiones algebraicas que representan la respuesta del usuario a un ejercicio dado. MathDIP utiliza SymPy para hacer la evaluación de cada uno de los pasos ingresados por el usuario en el editor. A diferencia de otros CAS de software libre, SymPy solo

implementa algunos módulos matemáticos lo que lo hace ligero. Además, siendo una librería desarrollada en Python, no se requiere software adicional para asegurar su compatibilidad con todo el sistema.

En MathDIP, el CAS es un componente utilizado en el *back-end* del sistema para responder las peticiones hechas por el *front-end*. Los usuarios nunca interactúan directamente con SymPy.

5.3.5 Transformadores

Un transformador es un programa que cambia el código escrito en un lenguaje a otro lenguaje. En la presente versión del sistema, tres diferentes transformadores son necesarios:

- **MathML-LaTeX.** MathML es un lenguaje utilizado para la inclusión de expresiones matemáticas en páginas Web. MathML no es un lenguaje diseñado para escribir objetos matemáticos manualmente, ya que este es un lenguaje muy detallado y requiere muchas líneas de código para escribir una expresión matemática. Otro problema con MathML es que ya no es soportado por varios de los browsers más populares como Internet Explorer o Chrome¹. LaTeX es un lenguaje de marcado diseñado para la producción de documentos técnicos y científicos. Este es utilizado para escribir documentos que contienen expresiones matemáticas complejas. En años recientes su uso como herramienta para la escritura de expresiones matemáticas en la Web se ha incrementado. Dada las características de estos lenguajes y debido a que MathDIP requiere mostrar una serie de expresiones matemáticas en la Web, fue necesario incluir un transformador entre estos lenguajes.
- **LaTeX-Python.** LaTeX es utilizado como paso intermedio para transformar la expresión ingresada por el usuario al lenguaje particular del CAS en el que las expresiones serán analizadas. Dado que SymPy está desarrollado en Python, fue necesario desarrollar un transformador de LaTeX a Python.
- **LaTeX – AST.** Como se explicó antes, cada paso que el usuario ingresa al sistema es enviado al CAS para su análisis. El CAS automáticamente simplifica la

¹ http://googlechromereleases.blogspot.ca/2013/02/stable-channel-update_21.html

expresión algebraica a su forma canónica lo cual impide que se realice la evaluación de “igualdad” entre dos expresiones ingresadas por el usuario. Una solución a este problema es obtener la representación en árbol de las dos expresiones a evaluar. La representación en árbol es obtenida utilizando un transformador que toma la expresión en LaTeX y regresa un Árbol de Sintaxis Abstracta (AST).

La arquitectura del sistema se muestra utilizando un diagrama de emplazamiento (Figura 9) y un diagrama de secuencia (Figura 10). El primero representa la relación física entre los componentes de software y hardware. El segundo muestra la interacción de los componentes del sistema cuando el usuario resuelve un ejercicio.

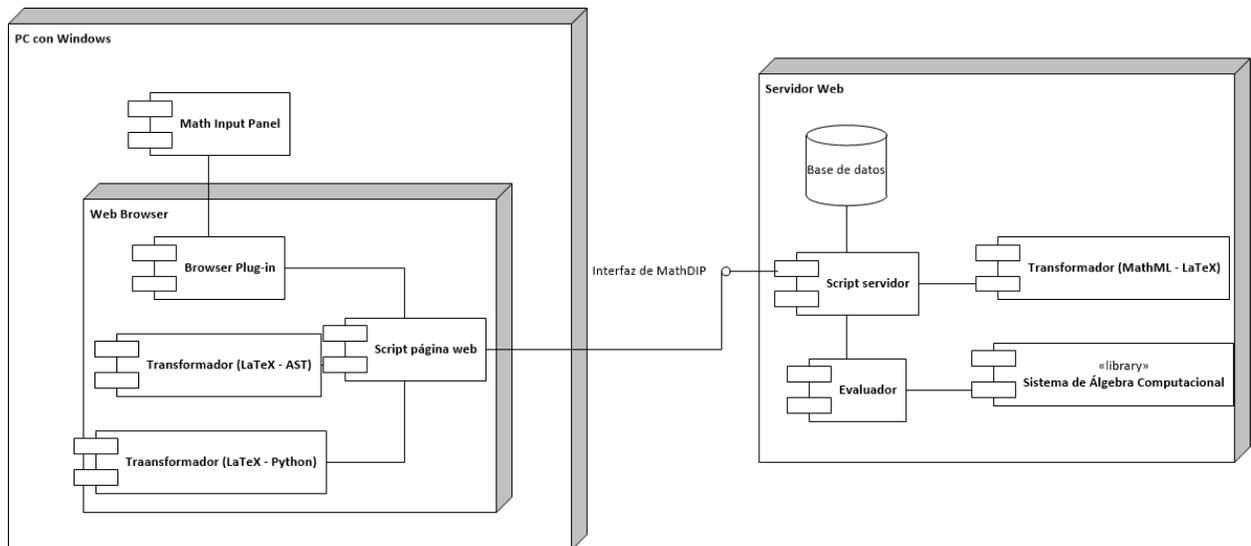


Figura 9. Arquitectura de MathDIP. Diagrama de emplazamiento.

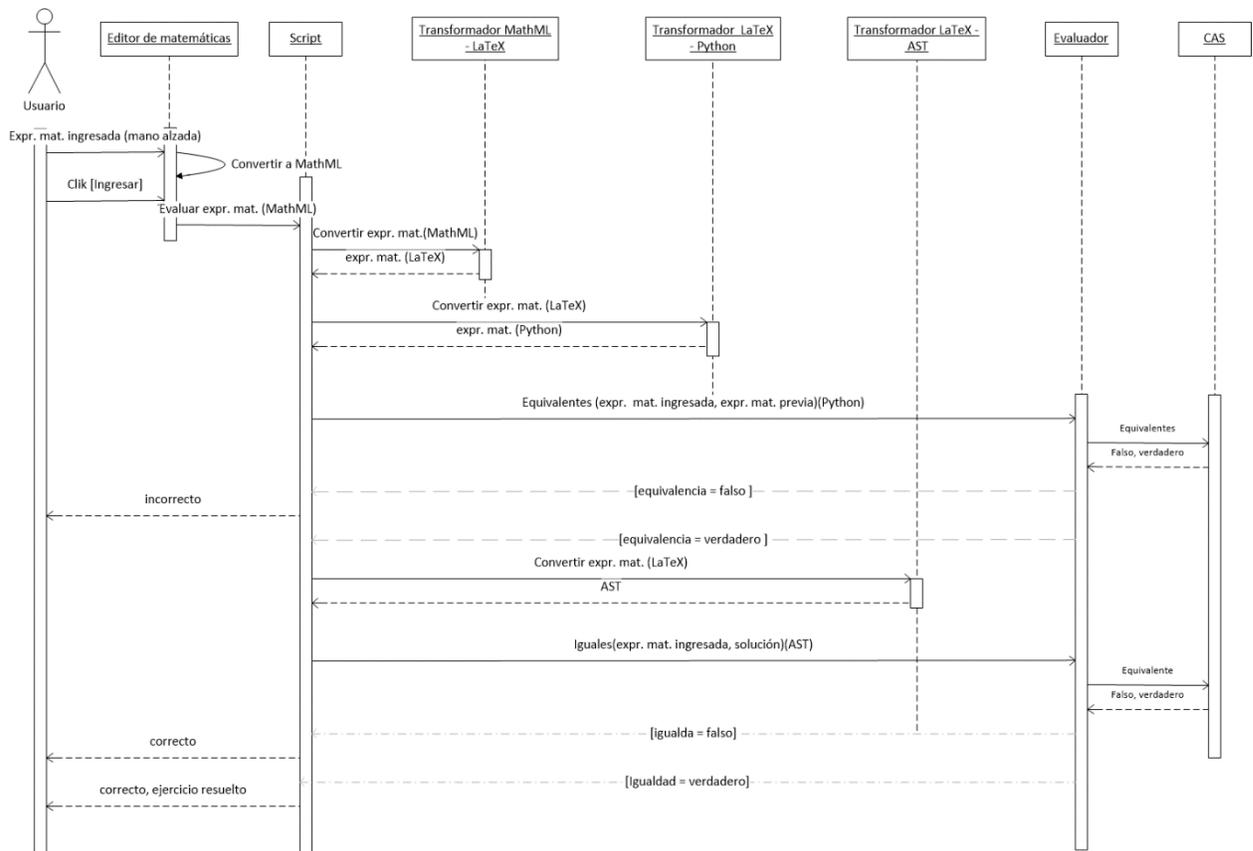


Figura 10. Arquitectura de MathDIP. Diagrama de secuencia.

5.4 Pruebas de usabilidad

A pesar de los grandes esfuerzos por desarrollar sistemas educativos que apoyen la enseñanza de las matemáticas en cursos formales, la evaluación de usabilidad de estas herramientas es escasa. La evaluación de usabilidad en aplicaciones de software es una fase importante en el desarrollo de aplicaciones ya que estas aseguran que las aplicaciones sean fáciles de utilizar, eficientes, eficaces y satisfactorios para los usuarios. La usabilidad es particularmente significativa en software educativo ya que una serie de discrepancias puede ocurrir entre los objetivos educativos y el diseño de la plataforma (Andrade-Aréchiga et al., 2012; Finstad, 2010; Hadjerrouit, 2011; Kay, 2009). Sistemas con pobres diseños pueden hacer que los estudiantes enfoquen su atención en entender el sistema en lugar de aprender el contenido.

El desarrollo de MathDIP involucró un continuo proceso de evaluación de la funcionalidad del software a fin de mejorar sus componentes y conocer la forma como el usuario final interactúa con el sistema.

Evaluación técnica

La evaluación técnica es el proceso en donde se valida que las páginas de un sitio Web cumplan con las reglas o estándares establecidos por organizaciones específicas. Esta evaluación es importante porque esta da un grado de confianza sobre la funcionalidad del sistema y da la certeza de que el sitio se muestra y funciona correctamente en diferentes dispositivos y browsers.

Una forma tradicional de garantizar que el sitio es entendible universalmente es asegurando que su código sigue un estilo conforme a los estándares de la *World Wide Web Consortium* (W3C, <http://www.w3.org/>) (Koivunen & May, 2002). En este sentido, MathDIP fue sometido a las pruebas establecidas por W3C utilizando la herramienta online diseñada por esta organización, *Markup Validation Service* (<http://validator.w3.org/>). Al aplicar esta prueba a MathDIP esta cubrió satisfactoriamente con todos los requerimientos comúnmente asociados con aplicaciones web en concordancia con los estándares propuestos por esta organización.

Además, es necesario garantizar el funcionamiento del sitio. Esto se realizó analizando el tiempo de respuesta del sitio, la estructura del código HTML y la forma en que son utilizados los componentes externos como imágenes, archivos JavaScript y CSS. Diferentes recursos existen con este propósito, en particular se utilizó la herramienta desarrollada por Google, *Page Speed Insights* (<http://developers.google.com/pagespeed>). MathDIP obtuvo una calificación de 88/100 en esta prueba. Esto indica que el sitio tiene un buen funcionamiento.

Los resultados obtenidos después de realizar la evaluación técnica muestran que MathDIP cumple satisfactoriamente con los requerimientos y estándares definidos por organizaciones internacionales.

Evaluación heurística

La evaluación heurística es el análisis realizado por expertos en la cual el sitio es sometido a una inspección que determina si este cumple con los objetivos de usabilidad y diseño del proyecto. MathDIP fue sujeto a la evaluación heurística de 5 expertos: dos en interacción humano computadora, uno en diseño de recursos de aprendizaje y dos profesores de matemáticas. Estos expertos navegaron libremente por la plataforma y

completaron diferentes tareas. Al finalizar, cada uno de ellos expresaron su opinión sobre diferentes aspectos de usabilidad, funcionalidad y diseño pedagógico y técnico. Problemas menores fueron reportados por los evaluadores lo cuales fueron corregidos en su momento. En general los comentarios se centraron en hacer sugerencias sobre cómo mejorar diferentes aspectos del sistema. Todos los puntos mencionados fueron analizados y mejorados antes de hacer la evaluación con usuarios.

Capítulo 6. Experimentación y Resultados

En este capítulo se describen el diseño de la evaluación de MathDIP y los resultados obtenidos.

La validez y confiabilidad de un trabajo científico recae directamente en la correcta selección del método de investigación, el diseño del experimento, la recolección y el análisis de los datos. La elección de cada uno de ellos depende del área en la que se esté realizando la investigación y el objetivo de la misma.

En investigaciones educativas destaca el uso de estudios cuasi-experimentales. Estos son diseños que hacen referencia a estudios de campo fuera del laboratorio en los que no es posible tener completo control de los grupos participantes. La solución es tomar grupos que se asume tienen características similares, por ejemplo grupos o escuelas que son comparables. Sin embargo, se debe considerar que es posible que los grupos tengan diferentes experiencias durante el estudio (Heiman, 1999).

Uno de los diseños cuasi-experimentales clásicos y probablemente el más utilizado en educación es el diseño pre examen / post examen con grupos de control (Cohen, Manion, & Morrison, 2013). Una característica de este diseño es que divide los participantes en estudio en dos grupos: uno de control y uno experimental. El grupo de control es el grupo que no cambia sus hábitos y que realiza sus actividades de forma tradicional. Por el contrario, el grupo experimental es el grupo en el que sus hábitos o costumbres fueron alterados con la finalidad de probar un nuevo producto o técnica. Ambos son sometidos a un pre examen y post examen. Esto permite que los investigadores conozcan mejor a sus grupos de estudio e identifiquen y consideren diferencias entre ellas que pueden afectar el estudio.

El diseño pre examen / post examen con grupos de control es representado como sigue:

Grupo experimental	O_1	X	O_2
Grupo de control	O_1		O_2

En el diseño O_1 representa el pre examen, X representa el tratamiento/tecnología que fue probado y O_2 el post examen.

En esta investigación se utilizó el método cuasi-experimental. Los participantes fueron integrados por las autoridades administrativas de la escuela participante. A fin de tener un mayor control y conocimiento de los grupos, se optó por un diseño pre examen / post examen.

6.1 Diseño experimental

Para medir el impacto de MathDIP en el aprendizaje de las matemáticas, la plataforma se introdujo en un ambiente escolarizado formal durante nueve semanas. El experimento se realizó en el curso obligatorio de “Matemáticas básicas” en la unidad correspondiente a álgebra del plan de estudios que se muestra en el Anexo II.

En este estudio participaron 120 estudiantes de primer año del nivel superior de las carreras de Ingeniería en Telemática (T) e Ingeniería en Software (S) en una Universidad de Colima. El total de estudiantes inscritos formalmente en los cursos fue de 131. Sin embargo, ya que la participación en el experimento era voluntaria, solo 120 (99 hombres y 21 mujeres) estudiantes aceptaron participar. Los 11 estudiantes que decidieron no participar estaban inscritos en el grupo BT-E, por ello este grupo tiene un número menor de participantes. La Tabla 7 muestra la distribución de los estudiantes, las carreras, el número de participantes en cada clase y el promedio de edad por grupo. La columna “Clave” es la forma como se citará en este documento a cada uno de los grupos; la primera letra corresponde al profesor que impartió la clase, la segunda a la carrera y la tercera indica si el grupo es de control (C) o experimental (E). La formación y asignación de los grupos fue la que los directivos de la facultad realizaron al inicio del ciclo escolar.

La metodología que se siguió para realizar el experimento consistió de 4 fases, los instrumentos utilizados se muestran en el Anexo III:

- Caracterización de los estudiantes. En esta primera etapa, los estudiantes que participaron en el experimento respondieron una encuesta sobre sus hábitos de estudio y un examen (pre-examen). El instrumento contenía 22 preguntas divididas en tres tópicos: datos personales, opinión sobre clases de matemáticas y hábitos de estudios. Algunos de los enunciados fueron formulados con respuesta en tipo Likert y algunas eran preguntas abiertas. El pre-examen es un instrumento con 10 ejercicios sobre aritmética y álgebra

básica. Los reactivos de este examen fueron tomados de los exámenes de prueba de ACT, SAT online y SAT 2011.

Tabla 7. Descripción de los grupos que participaron en el experimento, información obtenida de encuesta de hábitos de estudio aplicada antes de la intervención.

Clave	Grupo	Carrera	Profesor	Número de estudiantes	Promedio de edad (en años)
AT-E	Experimental	Ing. Telemática	A	17 3 mujeres 14 hombres	18.3
AS-E	Experimental	Ing. Software	A	20 3 mujeres 17 hombres	17.6
AS-C	Control	Ing. Software	A	19 3 mujeres 16 hombres	18.1
BT-E	Experimental	Ing. Telemática	B	9 5 mujeres 4 hombres	18.2
BT-C	Control	Ing. Telemática	B	20 2 mujeres 18 hombres	17.9
CS-E	Experimental	Ing. Software	C	16 3 mujeres 13 hombres	18.25
CS-C	Control	Ing. Software	C	19 2 mujeres 17 hombres	18.3

- Inducción al sistema. En el transcurso de una semana, cada grupo tuvo una sesión de dos horas en las que se les explicó el funcionamiento de la plataforma y su contenido. Además, en esta sesión los estudiantes se registraron en el sistema.
- Intervención. Durante las siguientes 8 semanas, los grupos resolvieron ejercicios matemáticos fuera de su horario de clases.
- Evaluación final. Para finalizar la intervención, los estudiantes resolvieron un examen (post-examen) que consistió de 10 y 15 ejercicios aritméticos y algebraicos, respectivamente. Además, los grupos experimentales contestaron una encuesta de 34 preguntas donde los estudiantes expresaron su opinión sobre la plataforma.

Después de la intervención se realizó el análisis de los datos recabados. Primero se realizó un análisis de normalidad. Dado que varias de estas pruebas incluyendo correlación, regresión, prueba t y análisis de varianza, conocidos como pruebas paramétricas, se basan en la suposición de que los datos provienen de una distribución normal o Gaussiana, una prueba de normalidad es requerida. Aunque graficar los datos es una forma de identificar si éstos provienen de una distribución normal, la importancia de esta prueba ha llevado al desarrollo de diferentes pruebas de normalidad (Yazici & Yolacan, 2007).

Para evaluar el impacto en el aprendizaje del uso de nuevas herramientas o sistemas en investigaciones educativas, es común comparar la ganancia en el aprendizaje entre grupos de control y grupos experimentales. La ganancia en el aprendizaje (g), se define como la diferencia entre el post-examen y el pre-examen (Ec.1). Esta es la forma simple de medir el impacto de intervenciones educativas utilizando pre examen y post examen. Sin embargo, los resultados obtenidos de este análisis no son totalmente confiables puesto que no consideran el hecho de que estudiantes con baja calificación en el pre-examen tienen a obtener una mayor ganancia con más facilidad que los estudiantes con calificaciones altas.

$$g = \text{calificación post_examen} - \text{calificación pre_examen} \quad (1)$$

Diferentes estudios se han realizado sobre la validez y fiabilidad del uso de la ganancia (Ec. 1) para medir el impacto de técnicas/herramientas en el aprendizaje. Los resultados muestran que una mejor evaluación se obtiene cuando se estandariza o normaliza la ganancia.

Hake (1998) comparó la ganancia en el aprendizaje de estudiantes en 62 cursos diferentes de física. En 48 de estos grupos, los profesores utilizaron medios interactivos para enseñar a sus estudiantes; mientras que en los restantes 14 la clase se condujo de la forma tradicional. Para realizar esta comparación, entre grupos, Hake introdujo el concepto de ganancia normalizada, representada por $\langle g \rangle$ y definida como el cociente de la ganancia y la diferencia entre la calificación máxima que los estudiantes pueden obtener y la calificación del pre-examen (Ec. 2).

$$\langle g \rangle = \frac{\text{calificación post_examen} - \text{calificación pre_examen}}{100 - \text{calificación pre_examen}} \quad (2)$$

La fórmula propuesta por Hake es una de las más utilizadas en investigaciones educativas por varias razones. Primero, la normalización por la máxima ganancia que cada grupo puede obtener permite minimizar el hecho de que algunos grupos pueden conseguir mayor ganancia que otros. Por ejemplo, un grupo con 80/100 promedio en el pre examen y 90/100 en el post examen tiene una ganancia normalizada de 0.5. Esto es equivalente a lo que un grupo con 60/100 promedio en el pre examen y 80/100 en el post examen. Segundo, $\langle g \rangle$ puede ser utilizada para comparar la ganancia en el aprendizaje entre dos o un número reducido de grupos y llegar a una conclusión utilizando los valores publicados en la investigación de Hake.

La fórmula propuesta por Hake permite medir la ganancia en el aprendizaje por grupo y no por estudiante.

Marx and Cummings (2007) diseñaron una alternativa en la que el estudiante de la expresión propuesta por Hake (Ec. 2) para calcular la ganancia normalizada, esta es conocida como puntuaciones de cambio normalizada y es representada por c . En su propuesta Marx and Cummings analizan los posibles casos que pueden ocurrir cuando se mide la ganancia en el aprendizaje. Ellos concluyen con 4 casos basados en la comparación de la calificación que los estudiantes obtienen en el pre examen y el post examen. Para estudiantes en los que la calificación del post-examen es mayor a la calificación del pre-examen, c se calcula utilizando la fórmula de Hake. Las siguientes tres posibilidades hacen referencia a circunstancias inusuales: estudiantes que obtuvieron 0 o 100 en ambos exámenes son eliminados, estudiantes que obtuvieron la misma calificación en ambos exámenes obtienen una ganancia de 0 y finalmente estudiantes que obtuvieron menor calificación en el post-examen que en el pre-examen y que da como resultado una ganancia negativa. Considerando lo anterior, el cálculo de c se realiza mediante la siguiente expresión matemática, x representa el pre-examen y y el post-examen,

$$c = \begin{cases} \frac{y-x}{100-x} > 0 \text{ si } y > x \\ \text{eliminar si } y = x = 100 \text{ o } 0 \\ 0 \text{ si } 0 < y = x < 100 \\ \frac{y-x}{x} < 0 \text{ si } y < x \end{cases} \quad (3)$$

Además, se realizó una prueba de hipótesis utilizando el estadístico t-Student para medir la diferencia con respecto de la media de las ganancias de los diferentes grupos.

Finalmente, se obtuvo la correlación entre variables cuantitativas. El coeficiente de correlación de Pearson es una prueba estadística que mide la relación estadística, o asociación, entre dos variables. Además, esta expresa información de la magnitud de la asociación y de la dirección de la misma. El resultado de calcular este coeficiente es un valor entre -1 y 1. Un valor de .5 a 1 indica una alta correlación.

5.2 Resultados

A continuación se muestran los resultados obtenidos del análisis de los datos.

5.2.1 Hábitos de estudio

Antes de iniciar la intervención los estudiantes respondieron una encuesta sobre sus hábitos de estudio. El análisis de los datos recabados muestra que más del 80% de los estudiantes acceden a Internet durante todos los días de la semana desde su casa o la escuela (Tabla 8). Los principales sitios visitados por los estudiantes para realizar su tarea son Youtube, Wikipedia y el buscador Google.

Tabla 8. Frecuencia y lugares donde los estudiantes tienen acceso a Internet.

Lugares donde los estudiantes tienen acceso a Internet	
En la escuela	7.32%
En la casa	11.38%
En el cibercafé	2.44%
No tengo acceso	0.81%
En la escuela y en la casa	60.98%
En la escuela, en la casa y en el cibercafé	10.57%
En la escuela y en el cibercafé	6.50%

¿Con qué frecuencia utilizan Internet?	
1 día a la semana	0%
2-3 días a la semana	4.88%
4-5 días a la semana	13.82%
Todos los días de la semana	80.49%
Nunca	0%

A fin de conocer la importancia que tienen para los estudiantes las diferentes actividades que ellos o sus profesores realizan en el salón de clases, se formularon 4 preguntas (Tabla 9). Las respuestas de los estudiantes enfatizan la importancia de realizar ejercicios matemáticos como parte de su proceso de enseñanza-aprendizaje. Todos los estudiantes reconocen la importancia de que el profesor resuelva ejercicios en el pizarrón y las dos terceras partes lo consideran muy importante. Además, en opinión de los estudiantes, la solución de ejercicios matemáticos relacionados con los temas vistos en clase es una actividad importante.

Tabla 9. Opinión de los estudiantes sobre la importancia de diferentes actividades en el salón de clases.

	Muy importante	Importante	Moderadamente importante	De poca importancia	Sin importancia
Explicación teórica del profesor	34.96%	38.21%	23.58%	3.25%	0%
Que el profesor resuelva ejercicios en el pizarrón	66.67%	25.20%	8.13%	0.00%	0%
Trabajar con uno o más compañeros en la resolución de problemas	25.20%	47.97%	19.51%	5.69%	1.63%
Realizar ejercicios matemáticos de los temas vistos en clase	74.80%	20.33%	3.25%	0.81%	0.81%

De suma importancia para esta investigación es conocer si los estudiantes tienen experiencia utilizando editores que les permitan ingresar expresiones matemáticas en la computadora. La respuesta obtenida por los 120 estudiantes participantes indica que el 70% de los estudiantes no tienen conocimiento en este aspecto.

Los estudiantes expresaron su opinión sobre contar con un sistema web que ofrezca evaluación y retroalimentación automática. El interés de los estudiantes en utilizar una plataforma con estas características se observa en las tres preguntas que ellos respondieron (Tabla 10). La mayoría de los estudiantes (62.30%) consideran como buena idea la integración de un sistema que apoye sus cursos de matemáticas.

Tabla 10. Opinión de los estudiantes sobre la importancia de contar con un sistema que ofrezca retroalimentación y evaluación automática.

	Totalmente de acuerdo	De acuerdo	Neutral	En desacuerdo	Totalmente en desacuerdo
Contar con un sitio Web para practicar ejercicios de los temas vistos en clase te motivaría a estudiar más matemáticas	31.15%	42.62%	23.77%	1.64%	0.82%
Supongamos que existe un sitio Web que evalúa cada uno de los pasos que realizas para resolver un ejercicio matemático y que te puede dar sugerencias en el paso que cometiste un error:					
Creo que sería una buena idea utilizar este sitio Web para apoyar los cursos de matemáticas	62.30%	31.15%	4.10%	2.46%	0.00%
Tendría interés en utilizar este sitio Web.	54.10%	33.61%	11.48%	0.82%	0.00%

Las respuestas de los estudiantes a la última pregunta de la encuesta “¿Qué se podría hacer para mejorar la forma en la que aprendes matemáticas?”, se centraron en lo que les gustaría que se mejorara en el salón de clases. Los comentarios más comunes fueron: clases más prácticas y dinámicas, en las que el objetivo principal sea la solución de ejercicios. Algunos de los comentarios de los estudiantes fueron:

*“Realizar más **práctica** para poder reafirmar lo aprendido.”*

*“Despertar el interés del alumno a través de formas de trabajo más **dinámicas**.”*

*“**Practicar** más fuera de las horas de clase en los temas vistos”*

6.2.2 Pre-examen

El análisis de las calificaciones del pre-examen muestra los problemas que tienen los estudiantes en matemáticas básicas. El 89% de ellos obtuvo una calificación menor a 6 de un máximo de 10. Un resumen de las calificaciones obtenidas por los estudiantes en el pre-examen se muestra en la Figura 11. Este diagrama de caja permite visualizar la distribución de los datos basados en 5 características importantes: mínimo, primer cuartil, mediana, tercer cuartil y máximo.

En todos los grupos, el promedio de calificación del pre-examen es menor a 4; lo cual deja ver carencias o falta de conocimiento que tienen los estudiantes en los temas que explora el instrumento. En la Tabla 11 se muestra el mínimo, máximo, mediana, promedio y desviación estándar organizada por grupo.

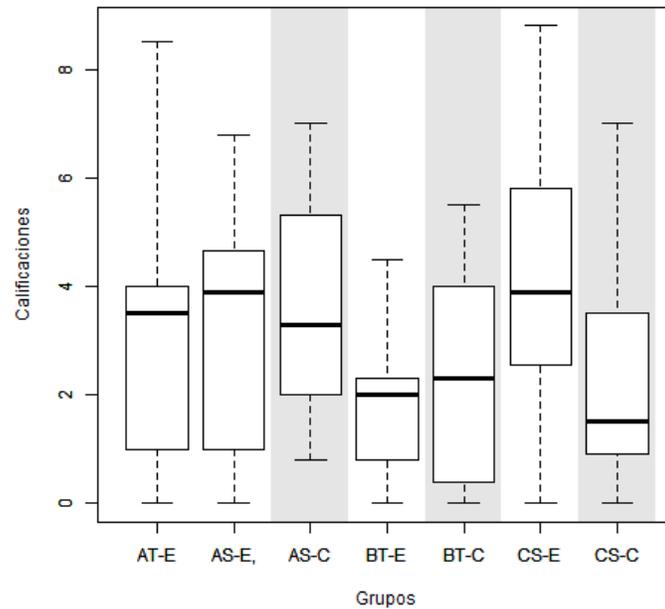


Figura 11. Calificación obtenida por los estudiantes en pre-examen, las columnas sombreadas representan los grupos de control

Tabla 11. Información sobre calificación obtenida por los estudiantes en pre-examen.

Grupo	Min.	Mediana	Máx.	Promedio	Desviación estándar
AT-E	0	3.5	8.5	3.38	2.26
AS-E	0	3.9	6.8	3.09	2.1
AS-C	3.3	3.59	7	3.59	1.87
BT-E	0	2	4.5	1.82	1.53
BT-C	0	2.3	5.5	2.34	1.94
CS-E	0	3.9	8.8	4.06	2.36
CS-C	0	1.5	7	2.45	2.29

6.2.3 Normalidad de los grupos

Los resultados del pre-examen se utilizaron para comprobar si los grupos provenían de una distribución normal con respecto a sus conocimientos básicos en matemáticas. El análisis de distribución se realizó aplicando la prueba de normalidad Anderson-Darling. El resultado de esta prueba indica que todos los grupos provienen de una distribución normal, dado que el valor del estadístico “p” para todos los grupos fue mayor a 0.05, como se observa en la Tabla 12.

Tabla 12. Análisis de normalidad de los 7 grupos participantes.

Grupo	Promedio pre-examen	Desviación estándar	Valor de p
AT-E	3.03	2.47	0.27
AS-E	2.77	2.56	0.06
AS-C	3.37	1.58	0.16
BT-E	1.82	1.53	0.62
BT-C	2.52	1.99	0.12
CS-E	3.38	2.7	0.86
CS-C	3.02	2.47	0.058

6.2.4 Ejercicios matemáticos resueltos

Los estudiantes que participaron en el estudio tuvieron como tarea resolver 57 ejercicios relacionados con los temas vistos en clase. Los grupos de control resolvieron los ejercicios de la forma tradicional (papel y lápiz) mientras los grupos experimentales utilizaron la plataforma MathDIP. Los estudiantes de los grupos experimentales resolvieron en promedio más ejercicios que los estudiantes de los grupos de control (Tabla 13). Además, el máximo número de ejercicios que resolvió un estudiante de los grupos de control fue 47, mientras que en los grupos experimentales el 30% de los estudiantes resolvieron los 57 ejercicios correctamente.

En general, todos los grupos resolvieron más ejercicios de los primeros tres temas, aritmética y suma y resta de polinomios.

Tabla 13. Ejercicios resueltos correctamente por los por grupos y promedio de ejercicios resueltos por estudiante (Total ejercicios = 57).

Clave	Total de ejercicios resueltos correctamente	Promedio de ejercicios resueltos por estudiante
AT-E	767	45.11
AS-E	705	35.25
AS-C	631	33.21
BT-E	390	43.33
BT-C	516	25.8
CS-E	502	31.37
CS-C	396	20.84

Tabla 14. Ejercicios resueltos correctamente por tema.

	Número de ejercicios resueltos correctamente		Promedio de ejercicios resueltos por estudiantes	
	Experimental	Control	Experimental	Control
Números reales	561	359	9.05	6.19
Fracciones	511	300	8.24	5.17
Suma y resta de polinomios	602	543	9.71	9.36
Multiplicación y división de polinomios	292	220	4.71	3.79
Exponentes y radicales	398	121	6.42	2.09
Total	2364	1543		

6.2.5 Post-examen

Después de las 9 semanas que duró el experimento, todos los estudiantes respondieron un examen con preguntas similares a las del pre-examen. En el diagrama de caja que se muestra en la Figura 12, se observan los resultados del post-examen resultando cuatro características del conjunto de datos obtenido: mínimo, primer cuartil, mediana, tercer cuartil y máximo.

En los resultados obtenidos el 45% de los estudiantes obtuvo una calificación menor a 6 de un valor máximo de 10, la mayoría (62.96%) de ellos son estudiantes de los grupos de control.

En todos los grupos excepto en el CS-C, el promedio de la calificación obtenida en el post-examen fue mayor al promedio obtenido en el pre-examen. El promedio general de todos los grupos pasó de 2.97 (promedio grupo control = 2.80 y promedio grupos experimentales = 3.09) a 5.79 (promedio grupos control = 4.50, promedio grupos experimentales = 6.63). En la Tabla 15, se muestra el mínimo, mediana, máximo, promedio y desviación estándar del post-examen presentados por grupo.

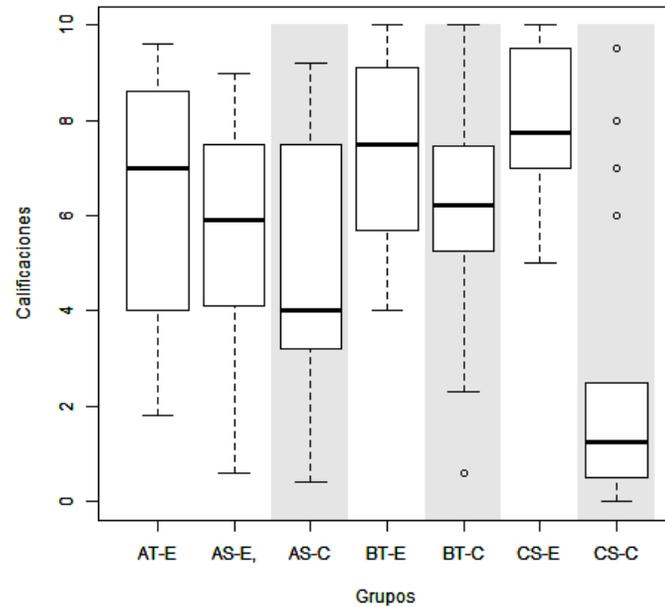


Figura 12. Muestra la calificación obtenida por los estudiantes en el post-examen, la columna sombreada representa los grupos de control

Tabla 15. Información sobre calificación obtenida por los estudiantes en el post-examen.

Clave	Min.	Mediana	Máx.	Promedio	Desviación estándar
AT-E	1.8	7	9.6	6.43	2.79
AS-E	0.6	5.9	9	5.67	2.28
AS-C	0.4	4	9.2	4.74	2.81
BT-E	4	7.5	10	7.24	2.03
BT-C	0.6	6.21	10	6.11	2.3
CS-E	5	7.75	10	7.85	1.59
CS-C	0	1.25	9.5	2.44	3.02

6.3 Impacto del uso de la plataforma

Para medir el impacto que tuvo el uso de la plataforma se obtuvo la ganancia (g), ganancia normalizada ($\langle g \rangle$) y puntuaciones de cambio normalizada (c). En la Tabla 16 se muestran los resultados obtenidos clasificados por grupo. En ella se observa: promedio de las calificaciones del pre-examen y post-examen, promedio de la ganancia obtenida por cada estudiante, la ganancia normalizada calculada utilizando la fórmula de Hake (Ec.2) y el promedio de las puntuaciones de cambio normalizadas obtenidas al utilizar la ecuación de Marx and Cummings (Ec. 3). Un análisis entre grupos con

características similares (mismo profesor y misma carrera) muestra que los grupos que utilizaron MathDIP obtuvieron una ganancia mayor que los grupos que utilizaron el método tradicional.

Tabla 16. Promedio de ganancia obtenida por estudiante (g/10), ganancia normalizada por grupo (<g>) y promedio de puntuaciones de cambio normalizada (c).

Clave	Pre examen	Post examen	g/10	<g>	c
AT.E	3.38	6.44	0.31	0.46	0.49
AS.E	3.10	5.67	0.26	0.37	0.35
AS.C	3.59	4.75	0.12	0.18	0.12
BT.E	1.82	7.24	0.54	0.66	0.69
BT.C	2.34	6.12	0.38	0.49	0.48
CS.E	4.07	7.86	0.32	0.54	0.54
CS.C	2.45	2.44	-0.01	-0.02	-0.21

Un resultado similar se observa cuando se divide a los participantes del estudio en dos grupos: los que utilizaron el sistema (62 estudiantes) y los que no lo utilizaron (58 estudiantes). En este caso, el grupo experimental obtuvo una ganancia de 0.36 y el grupo de control 0.16 y una ganancia normalizada por grupo de 0.51 y 0.22 respectivamente. En la Figura 13 se observa esta información.

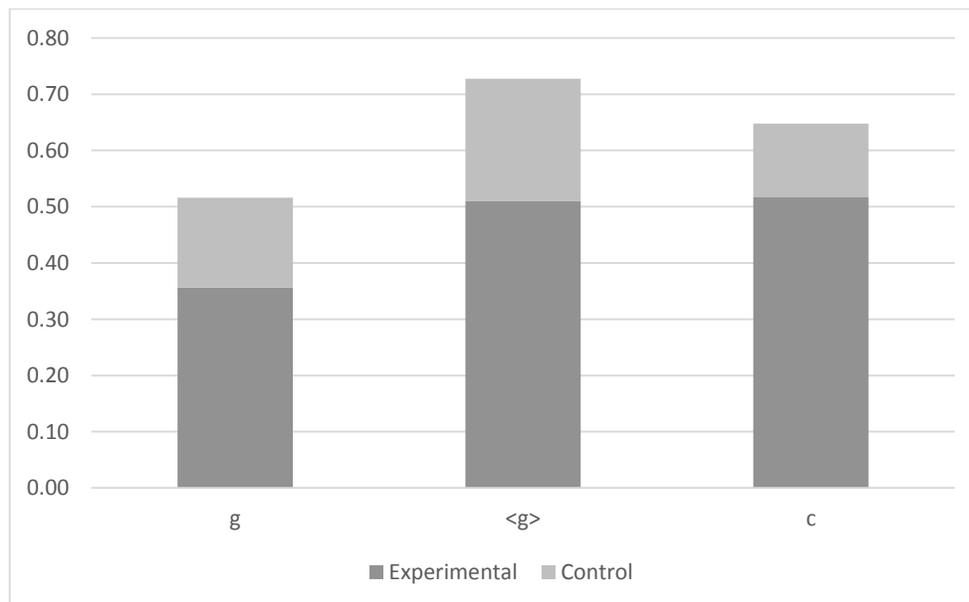


Figura 13. Ganancia (g), ganancia normalizada (<g>) y puntuaciones de cambio normalizadas (c) en grupos experimentales y grupos de control.

Una diferencia marcada se observa en los grupos del profesor C. En promedio el grupo experimental obtuvo una ganancia positiva de 3.4 mientras que el correspondiente grupo de control obtuvo una ganancia negativa de 0.1. Lo anterior significa que la mitad de este grupo (CS-C) obtuvo una ganancia negativa, es decir que la mitad de los estudiantes del grupo de Ingeniería de Software que tomaron el curso con el profesor C no mejoraron su aprendizaje después de la intervención. Este mismo grupo fue el que obtuvo el menor promedio en el post-examen (2.44) y el que resolvió menos ejercicios por estudiante (en promedio 20.84 de 57). Por otra parte, tan solo uno de los estudiantes del grupo experimental del profesor C que utilizaron la plataforma tuvo una ganancia negativa.

En la Figura 14 se muestra la gráfica de la ganancia contra el puntaje en el pre-examen de todos los estudiantes que participaron en el estudio, el color azul representa estudiantes de los grupos experimentales y el verde los estudiantes de los grupos de control. Para su análisis la gráfica se muestra dividida en cuatro cuadrantes. En el primer cuadrante, se observan los estudiantes que obtuvieron una calificación menor a 6 en el pre-examen y que tuvieron una ganancia positiva. Este es el cuadrante donde se ubican la mayoría de los estudiantes. En el segundo cuadrante se observa los estudiantes que obtuvieron calificación mayor a 6 y ganancia positiva. El tercer y cuarto cuadrante muestra estudiantes con ganancias negativas, en su mayoría estudiantes de los grupos de control.

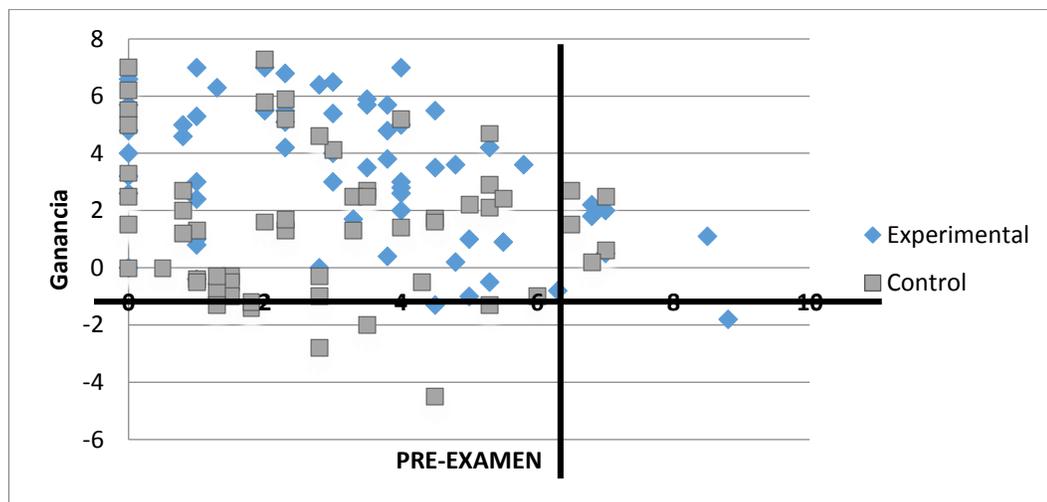


Figura 14. Ganancia vs PRE-EXAMEN de todos los estudiantes que participaron en el experimento.

La plataforma ofrece a los estudiantes la posibilidad de realizar ejercicios matemáticos y obtener evaluación y retroalimentación automática. Para esto, se busca una relación

entre el número de ejercicios que resolvieron los estudiantes y su desempeño en el examen después de la intervención. Con esta finalidad, se calculó el coeficiente de correlación de Pearson entre estas variables. Un coeficiente de correlación cercano a 1 indica una alta correlación lineal, es decir, un mayor número de ejercicios resueltos correctamente se puede asociar a una mayor ganancia. Se obtuvo una alta correlación en los grupos experimentales, no así en los grupos de control (Tabla 17).

Tabla 17. Correlación de Pearson entre el total de ejercicios resueltos correctamente y la ganancia de aprendizaje.

Clave	Coeficiente de correlación total de ejercicios y ganancia
AT-E	0.54
AS-E	0.46
AS-C	0.39
BT-E	0.47
BT-C	0.14
CS-E	0.5
CS-C	0.29

Después de la intervención, se espera que el impacto de MathDIP en el aprendizaje de los estudiantes sea positivo. Para comprobar esto, se realizó una prueba de hipótesis. Las respectivas hipótesis son:

Hipótesis nula: no hay diferencia estadísticamente significativa entre grupos.

$$H_0 = \mu_1 - \mu_2 = 0$$

Donde

μ_1 = promedio de la diferencia de calificación del post-examen y el pre-examen del grupo experimental

μ_2 = promedio de la diferencia de calificación del post-examen y el pre-examen del grupo control

Hipótesis alternativa: hay evidencia estadística de que un grupo presenta mejor promedio que el otro.

$$H_1 = \mu_1 - \mu_2 > 0$$

Tabla 18. Resultado de prueba de hipótesis.

Clave	Grupo	p-value	La hipótesis nula es:
AT-E	Experimental	0.012	Rechazada
AS-C	Control		
AS-E	Experimental	0.04	Rechazada
AS-C	Control		
BT-E	Experimental	0.0048	Rechazada
BT-C	Control		
CS-E	Experimental	0.0008886	Rechazada
CS-C	Control		

En todos los casos, la hipótesis nula es rechazada y la hipótesis alternativa es aceptada. Esto indica que el promedio de la ganancia en los grupos experimentales es mayor que en los grupos de control.

6.4 Análisis de Usabilidad

Al término de la experimentación, se aplicó el instrumento de opinión respecto al uso de la plataforma a los estudiantes de los grupos experimentales, para detectar niveles de percepción hacia el diseño de la plataforma, complejidad del uso del ambiente de aprendizaje, percepción del efecto del aprendizaje y motivación. Los resultados de las respuestas dadas por los estudiantes a los enunciados propuestos se muestran en la Tabla 19.

Considerando las 7 preguntas relacionadas con aspectos de funcionalidad (preguntas: 1, 2, 4, 7, 15, 17 y 18), se obtuvo un promedio de 83.3/100. De los 6 reactivos relacionados con diseño de usabilidad (preguntas: 3, 5, 8, 9, 13 y 16) la calificación fue 84.3/100. El valor total para la usabilidad de MathDIP fue de 84.1/100, lo cual representa un alto grado de usabilidad. Los resultados muestran, que en general, los usuarios perciben una buena usabilidad tanto en funcionalidad como en diseño.

Se diseñaron preguntas específicas para recabar información sobre la percepción de los estudiantes y los efectos motivacionales del uso del sistema (preguntas: 10, 11, 12 y 14). Las respuestas a estas preguntas indican que la mayoría de los estudiantes (promedio de 81.6/100) consideran que la plataforma los motiva a aprender temas de matemáticas y a explorar nuevos temas.

Tabla 19. Resultados de usabilidad de MathDIP.

Pregunta	Completamente de acuerdo	De acuerdo	Neutral	En desacuerdo	Completamente en desacuerdo
1. Puedo encontrar rápidamente lo que estoy buscando en este sitio.	29	21	8	0	0
2. Considero que este sitio presenta una estructura adecuada.	27	27	4	0	0
3. Las páginas de este sitio son agradables.	23	28	7	0	0
4. Consigo lo que quiero cuando hago clic en las ligas.	21	26	9	2	0
5. Considero adecuados los tamaños de letra, imágenes y gráficas.	25	25	6	2	0
6. Considero difícil de usar el sitio.	10	13	13	11	11
7. Es posible realizar una actividad con éxito en este sitio.	28	25	3	2	0
8. Las actividades del sitio son fáciles de realizar.	21	27	8	1	1
9. Este sitio es interesante para mí.	21	25	11	1	0
10. Es difícil decir si este sitio Web tiene lo que deseo.	14	15	18	9	2
11. El uso del ambiente me motivó a aprender temas de matemáticas.	17	31	8	2	0
12. El empleo de la plataforma me generó la inquietud de explorar otros temas.	24	16	16	2	0
13. Considero interesantes las actividades de la plataforma.	25	23	7	3	0
14. Me gustaría utilizar con mayor frecuencia esta herramienta.	20	24	11	2	1
15. Las instrucciones y advertencias son de ayuda.	26	25	4	3	0
16. El modo en el que se presenta la información del sistema es clara y comprensible.	23	30	4	1	0
17. El sitio responde con lentitud a las peticiones que se le hacen.	15	18	17	4	4
18. Considero fácil resolver ejercicios usando la plataforma.	20	31	5	2	0

Cuando se les preguntó a los participantes la dificultad de utilizar el sistema (pregunta 6), no hubo una clara tendencia en su respuesta. Una justificación para este resultado es la calidad del hardware utilizado durante el experimento, en particular el tipo de mouse que ellos utilizaron para escribir las expresiones matemáticas. Una opción es utilizar lápiz digitales que permitan que ellos tengan una interacción más fluida y confortable.

La serie de preguntas abiertas nos permitieron conocer la percepción de los estudiantes sobre el impacto que el sistema tuvo en su aprendizaje. La percepción general indica que la plataforma fortaleció su aprendizaje a través de la solución de ejercicios sobre temas que se estaban viendo en su curso formal; además, varios de los comentarios se enfocan

aplauden el que el sistema ofrezca retroalimentación automática. En particular, los estudiantes resaltaron la importancia de la evaluación paso a paso de cada ejercicio. En esta pregunta, los estudiantes expresaron sus sentimientos sobre esto. Las respuestas más comunes fueron:

- *“[Me gusta que la plataforma] corrige mis errores y me indica paso a paso donde estás los errores”.*
- *“[La plataforma] me ayudó a reforzar lo que ya sabía y a aprender nuevos temas”.*
- *“[Me gusta] practicar y recordar temas que no entendía realmente”.*

La evaluación de herramientas tecnológicas que apoyen el proceso de enseñanza-aprendizaje en cursos formales es una fase importante del desarrollo de sistemas educativos. En este capítulo se presentó el análisis de los datos obtenidos al implementar MathDIP en cursos escolarizados del nivel superior.

Para la medición del rendimiento académico se diseñaron dos exámenes (pre-examen y post-examen). El análisis de los resultados de estos instrumentos muestra que los grupos que utilizaron la plataforma como herramienta para resolver sus ejercicios tuvieron mejor promedio que los grupos de control. En promedio, los grupos experimentales obtuvieron una ganancia de 3.6/10 mientras que los grupos de control tuvieron una ganancia de 1.61/10. Un resultado similar se presenta al considerar la ganancia normalizada por grupo (Ec. 2) en donde los grupos que utilizaron MathDIP tuvieron en promedio una ganancia normalizada de 0.53/1 que es mayor al 0.22/1 obtenido por los grupos que utilizaron la forma tradicional.

El número de ejercicios resueltos correctamente fue una variable a considerar en el análisis de los datos. En total se resolvieron 3907 ejercicios, el 60% de ellos fueron resueltos por estudiantes de los grupos experimentales. El impacto que esto tuvo en el rendimiento académico de los estudiantes se observa en las calificaciones del post-examen. En los grupos experimentales, el 82% de los 34 estudiantes que resolvieron más de 40 ejercicios obtuvieron una calificación mayor a 6. En los grupos de control solo 6 estudiantes resolvieron más de 40 ejercicios correctamente, de ellos 83% obtuvieron calificaciones mayores a 6. En este mismo sentido, el análisis de correlación entre la ganancia de aprendizaje y la cantidad de ejercicios resueltos correctamente, dio como resultado una correlación más alta en grupos experimentales.

El resultado general del análisis de la intervención indica que el uso de la plataforma MathDIP ayuda a mejorar el rendimiento académico de los estudiantes. La plataforma provee evaluación y retroalimentación automática e instantánea a más de un estudiante a la vez, esto supone una ventaja comparada con la capacidad de atención que un profesor tiene en un momento dado. La característica particular de la plataforma de ofrecer evaluación y retroalimentación cuando el estudiante lo requiere y el posible efecto motivacional que el uso de la misma causa en los estudiantes, pudo ser la razón por lo que el número de ejercicios resueltos por grupos experimentales es mayor que la de los grupos de control. Siendo esto un factor que influye en el aprovechamiento académico de los estudiantes.

Capítulo 7. Discusión y Conclusiones

Las matemáticas son una de las áreas básicas para el desarrollo intelectual del ser humano ya que proporciona conocimientos y habilidades necesarias para su proceso de aprendizaje. Sin embargo, un gran número de estudiantes de los diferentes niveles educativos tienen problemas para aprender y comprender conceptos matemáticos. En los resultados publicados en el 2012 por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), los estudiantes mexicanos alrededor de 15 años obtuvieron una puntuación de 413 puntos, 81 puntos por debajo del promedio de la OCDE; esto es equivalente a 2 años de retraso escolar. Además, menos del 1% de los estudiantes mexicanos que participaron en este estudio entran en el rango de alto conocimiento en matemáticas. Encontrar los factores que afectan el desempeño académico de los estudiantes es primordial a fin de proponer estrategias innovadoras que apoyen el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En años recientes, la educación ha pasado de ser caracterizada como la transmisión de conocimiento del profesor al estudiante, a ser considerada como un proceso en el que el estudiante crea su propio saber. En este sentido, es importante que el estudiante aprenda a reconocer sus fortalezas y debilidades y que el profesor transmita una adecuada y oportuna evaluación formativa.

Como parte de esta investigación, se realizó un estudio en cursos formales de matemáticas del nivel superior, a través del cual se establecieron oportunidades en las que el uso de la tecnología puede enriquecer la evaluación formativa. Se observó que los estudiantes requieren una instrucción constante durante sus sesiones de solución de ejercicios matemáticos. Si una duda o dificultad aparece, una evaluación y retroalimentación oportuna ayuda al estudiante a reflexionar y le permite resolver el ejercicio. Llevar a cabo esto requiere una atención casi personalizada del profesor al estudiante. Sin embargo, en la mayoría de los casos los grupos son numerosos dificultando este proceso. En este sentido, una práctica común en cursos formales es que los estudiantes entreguen la hoja de ejercicios con sus respuestas y el profesor realiza

una evaluación y retroalimentación fuera de las horas de clase. Cuando esto sucede, el proceso de aprendizaje del estudiante se detiene y este debe esperar los resultados para aclarar sus dudas. Hay una oportunidad, entonces, de mejorar este proceso mediante el uso de tecnología como apoyo.

Se han realizado diferentes investigaciones sobre el desarrollo e implementación de herramientas tecnológicas que apoyen el proceso de evaluación formativa. Dichos estudios se han enfocado en el uso de sistemas que apoyen a los estudiantes en el proceso de solución de ejercicios. En su mayoría estos sistemas se enfocan en dar evaluación y retroalimentación sólo del resultado final de los ejercicios, por lo que el apoyo que proporciona es limitado e insuficiente.

La aportación de este trabajo se centra en la conceptualización y desarrollo de MathDIP, un sistema basado en Web diseñado para apoyar a los estudiantes con ejercicios matemáticos ofreciendo evaluación y retroalimentación automática de cada uno de los pasos necesarios para llegar a la solución. Además, MathDIP integra herramientas tecnológicas innovadoras tales como un Sistema de Álgebra Computacional (CAS) para la evaluación de cada una de las expresiones matemáticas y una aplicación que facilita la interacción con la computadora permitiendo el reconocimiento a mano alzada.

La respuesta inmediata dada por el sistema en diferentes etapas del progreso del estudiante en la solución de ejercicios matemáticos, representa una forma de dar evaluación formativa puesto que esta información guía al estudiante para llegar a la solución correcta del ejercicio. Otro elemento importante del sistema que representa una buena práctica de retroalimentación es la interfaz del profesor. Esta provee información al profesor sobre el trabajo individual de los estudiantes y el progreso del grupo en temas específicos la cual es utilizada para dirigir los procesos de enseñanza.

Como parte del diseño y desarrollo de MathDIP, este fue sometido a una evaluación que incluyó aspectos de usabilidad, percepción de los usuarios y el impacto en el aprendizaje de los estudiantes cuando este es integrado en un curso formal. Los datos recabados del pre examen y post examen fueron utilizados para calcular la ganancia en el

aprendizaje de los estudiantes, para lo cual se utilizaron las expresiones propuestas por Hake (Ec. 2) y Marx and Cummings (Ec. 3). Los resultados de la experimentación y la comparación realizada entre los grupos de control y los grupos experimentales indicaron que el uso del sistema desarrollado motivó y fortaleció el aprendizaje de los estudiantes.

Durante la intervención, el sistema fue visitado 657 veces. En total se resolvieron correctamente 2364 ejercicios para lo cual el sistema realizó la evaluación de cerca de 7000 expresiones matemáticas. La retroalimentación que se mostró a los estudiantes es una aproximación a lo que el profesor podría haber indicado. En cursos formales, difícilmente el profesor puede realizar esta cantidad de evaluaciones y retroalimentaciones.

MathDIP permitió estudiar y analizar nuevas estrategias tecnológicas para apoyar el proceso de evaluación formativa en cursos formales de matemáticas. A través de este estudio nuevas líneas de investigación pueden ser pensadas tomando como base las necesidades planteadas y los resultados obtenidos.

Trabajo futuro

Algunos de los aspectos que se identificaron durante la implementación de MathDIP en cursos formales plantearon interrogantes que se pueden abordar en investigaciones similares o relacionadas con este trabajo.

Extender a otros escenarios educativos

Para el caso del estudio presentado en esta investigación (Capítulo 6), MathDIP utilizó un repositorio de ejercicios algebraicos, ya que los cursos en los que el sistema se implementó fueron cursos de matemáticas básicas y se cubrieron los temas vistos durante el primer mes de los mismos. Los resultados obtenidos después de la intervención indican que el impacto de MathDIP en cursos de matemáticas básicas en primer año del nivel superior es positivo. Sin embargo, los problemas que los estudiantes tienen en cursos de matemáticas no se limitan a temas básicos como aritmética y álgebra ni a un nivel en particular. Por lo que sería interesante saber si el sistema tiene el mismo impacto en otros niveles y con otros temas.

Se puede extender el uso de MathDIP a otros escenarios educativos realizando algunas modificaciones. Primero, se puede hacer que el sistema realice la evaluación de ejercicios más complejos si se modifica uno de los componentes. Segundo, se deben diseñar y capturar ejercicios relacionados con otros temas. Finalmente, una vez implementados estos cambios, sería oportuno realizar un caso de estudio para investigar el impacto de un sistema con las características de MathDIP en otras áreas matemáticas.

Extender a otras tecnologías

El editor matemático utilizado en esta investigación fue la herramienta con mejor desempeño en el momento en el que el sistema se desarrolló. Además, dado que es una aplicación incorporada en sistemas Windows, esta aplicación tenía un mayor alcance en el sentido de que la mayoría de las escuelas utilizan este sistema operativo. Sin embargo, en la actualidad las investigaciones relacionadas con la identificación de expresiones matemáticas a mano alzada han avanzado y se pueden encontrar mejores herramientas. Sin embargo, muchos sistemas aún están en desarrollo por lo cual es necesario realizar un estudio que busque sistemas estables y con buena usabilidad para que sean utilizados como herramientas educativas.

Implementar MathDIP para que funcione en dispositivos móviles podría facilitar la interacción de los estudiantes con el sistema. En particular, resulta interesante investigar si la escritura de expresiones matemáticas se puede hacer de forma más sencilla.

Lista de referencias bibliográficas

- Andrade-Aréchiga, M., López, G., & López-Morteo, G. (2012). Assessing effectiveness of learning units under the teaching unit model in an undergraduate mathematics course. *Computers & Education*, 59(2), 594–606.
- Anthony, L., Yang, J., & Koedinger, K. R. (2007). Benefits of Handwritten Input for Students Learning Algebra Equation Solving. In *International Conference On Artificial Intelligence In Education* (pp. 521–523).
- Awal, A.-M., Mouchère, H., & Viard-Gaudin, C. (2014). A global learning approach for an online handwritten mathematical expression recognition system. *Pattern Recognition Letters*, 35, 68–77.
- Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and Classroom Learning. *Assessment in Education*, 5(1), 7–74.
- Blyth, B., & Labovic, A. (2009). Using Maple to implement eLearning integrated with computer aided assessment. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(7), 975–988.
- Cedillo, T. (2005). *Introducing Algebra with programmable calculators*. Instituto Politécnico Nacional.
- Chan, K.-F., & Yeung, D.-Y. (2000). Mathematical expression recognition: a survey. *International Journal on Document Analysis and Recognition*, 3(1), 3–15.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2013). *Research methods in education*. (Sixth edition). New York.: Routledge.
- Evans, M., Norton, P., & Leigh-Lacancaster, D. (2005). Mathematical Methods Computer Algebra System (CAS) 2004 pilot examinations and links to a broader research agenda (pp. 329–336). Presented at the Building Connections: Research, Theory and Practice.
- Finstad, K. (2010). The Usability Metric for User Experience. *Interactive with Computer*, 22(5), 323–327.
- Flynn, P. (2007). CAS in Australia: A brief Perspective. In *The Fifth CAME Symposium*. Pécs, Hungary.
- García, A., García, F., del Rey, Á. M., Rodríguez, G., & de la Villa, A. (2014). Changing assessment methods: New rules, new roles. *Journal of Symbolic Computation*, 61–62, 70–84.
- Gobierno de la República. (2012). Reforma educativa. Recuperado de <http://www.presidencia.gob.mx/reformaeducativa/>

- Hadjerrouit, S. (2011). Web-Based Learning Objects in School Education. Pedagogical usability issues. In D. Ifenthaler, J. M. Spector, P. Isaias, & D. Sampson (Eds.), *Multiple Perspectives on Problem Solving and Learning in the Digital Age* (pp. 37–48). Springer New York.
- Hake, R. (1998). Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses. *American Journal of Physics*, 66.
- Heck, A., Boon, P., & van Velthove, W. (2008). Mathematica empowered applets for learning school algebra and calculus. In *Proceedings of the 9th International Mathematica Symposium*.
- Jones, I. S. (2008). Computer-Aided Assessment Questions in Engineering Mathematics Using “MapleTA”[R]. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(3), 341–356.
- Kay, J. (2009). A Test-first View of Usability. *Interactive with Computers*, 21(5-6), 347–349.
- Koivunen, M. R., & May, M. (2002). Exploring Usability Enhancements in W3C Process. In *W3C Usability workshop*. Washington DC.
- López-Mortero, G., & López, G. (2007). Computer Support for Learning Mathematics: A Learning Environment Based on Recreational Learning Objects. *Computers & Education*, 48(1), 618–641.
- Madison, B., Briggs, A. J., Choike, J. R., Taylor-Halvorsen, K., Kennedy, D., Romagnano, L. Walters, T. (2007). *The college board mathematical sciences framework*.
- Martínez, M. (2005). *Diseño de un prototipo de entorno computacional para el aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas para un curso de cálculo diferencial a nivel superior*.
- Nicol, D. J., & Macfarlane-Dick, D. (2006). Formative assessment and self-regulated learning: a model and seven principles of good feedback practice. *Studies in Higher Education*, 31(2), 199–218.
- OECD. (2009). Programme for International Student Assessment (PISA). Recuperado de <http://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/>
- OECD. (2014). *PISA 2012 Results in Focus*. OECD.
- Planas, N. (2006). Modelo de análisis de videos para el estudio de procesos de construcción de conocimiento matemático. *Educación Matemática*, 18, 37–72.
- Sangwin, C. (2013). *Computer Aided Assessment of Mathematics*. Oxford University Press.

- Sangwin, C. J. (2007). Assessing Elementary Algebra with STACK. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(8), 987–1002.
- SEP. (2006). *Progama Enciclomedia documento base: Subsecretaría de Educación y Normal. Reporte 2006.*
- SEP. (2011). Educación por niveles. Recuperado de https://www.sep.gob.mx/es/sep1/educacion_por_niveles
- SEP. (2012). Enfoque centrado en competencias. Recuperado de http://www.dgespe.sep.gob.mx/reforma_curricular/planes/lepri/plan_de_estudios/enfoque_centrado_competencias
- Soumitra, D. (2015). *Global Information Technology Report 2015.*
- Tapia, E., & Rojas, R. (2004). Recognition of On-line Handwritten Mathematical Expressions Using a Minimum Spanning Tree Construction and Symbol Dominance. In *Graphics Recognition. Recent Advances and Perspectives* (pp. 329–340).
- Townsley, L. (2009). Testing Across Precalculus Sections using WebAssign. In *Electronic Proceedings of the Twenty-first Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics.*
- Velichova, D. (2008). Multivariable Calculus with Understanding and How to Assess It. In *14th Conference of European Society for Engineering Education (SEFI)*. Loughborough, England.
- Wick, D. (2009). Free and open-source software applications for mathematics and education. In *Electronic Proceedings of the Twenty-first Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics* (pp. 300–304). Louisiana, New Orleans.
- Yazici, B., & Yolacan, S. (2007). A comparison of various tests of normality. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 77(2), 175–183.
- Zanibbi, R., & Blostein, D. (2012). Recognition and retrieval of mathematical expressions. *International Journal on Document Analysis and Recognition*, 15(4), 331–357.

ANEXOS

Anexo I. Ejercicios en MathDIP

Números reales

En los siguientes ejercicios, realiza la operación indicada.

1. $(-3) \times (2) \times (-5)$
2. $-4 - (-14)$
3. $(3) \times (4^2) + 6 - 2$
4. $\frac{(35-23) \times 28 + 17}{43-25}$
5. $\frac{10}{5} - \frac{4}{2} + \frac{15}{3} + 2 \times 5$
6. $\frac{15+3 \times 2}{9-\frac{4}{2}}$
7. $4 \times (-1) \times (5) + (-3) \times 2 \times (-4)$
8. $(-8) + (-4) + (-3) \times 2$
9. $\frac{(-4) \times (6)}{-3} + \frac{(-16) \times (-9)}{12}$
10. $\frac{(-3) \times (8) \times (-2)}{(-4) \times (-6) - 2 \times (-12)}$

Fracciones

1. Reduce a su mínima expresión la fracción $\frac{57}{95}$
2. En los ejercicios 2a -2i, realiza la operación indicada y reduce a su mínima expresión.
 - a. $\frac{5}{9} + \frac{7}{12}$
 - b. $\frac{3}{8} + \frac{6}{7}$
 - c. $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$
 - d. $\frac{14}{15} - \frac{3}{20}$
 - e. $\frac{9}{10} \times \frac{5}{9}$
 - f. $\frac{3}{4} \div \frac{7}{8}$
 - g. $3 \times \left(2\frac{1}{4}\right) + 5$
 - h. $-\frac{4}{6} \times \frac{6}{4} + \frac{3}{9}$
 - i. $\left(-\frac{5}{8}\right) \times \left(-\frac{6}{7}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) \div \left(\frac{6}{7}\right)$

Operaciones con polinomios

1. En los ejercicios 1a - 1d, elimina los signos de agrupación y simplifica los términos semejantes.

a. $(x + 3y - z) - (2y - x + 3z) + (4z - 3x + 2y)$

b. $3x + 4y + 3[x - 2(y - x) - y]$

c. $3(x^2 - 2xy + y^2) - 4(x^2 - y^2 - 3yz) + x^2 + y^2$

d. $3 - \{2x - [1 - (x + y)] + [x - 2y]\}$

2. En los ejercicios 2^a - 2d, simplifica la expresión algebraica

a. $2x^2 + y^2 - x + y + 3y^2 + x - x^2 + x - 2y + x^2 - 4y$

b. $a^2 - ab + 2bc + 3c^2 + 2ab + b^2 - 3bc - 4c^2$

c. $3xy + 2zy + 4zx - (3xz + yz - 2xy)$

d. $4x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 2 - (2x - y^2 + 3x^2 - 4y + 3)$

3. En los ejercicios 3a - 3g, realiza el producto de cada una de las expresiones algebraicas.

a. $(3abc^2)(-2a^2b^2c^4)(6a^2b^2)$

b. $(-4x^2y)(3xy^2 - 4xy)$

c. $(r^2s + 3rs^3 - 4rs + s^2)(2r^2s^4)$

d. $(y - 4)(y + 3)$

e. $(y^2 - 4y + 16)(y + 4)$

f. $(x^2 + x^2y + xy^2 + y^3)(x - y)$

g. $(x^2 + 4x + 8)(x^2 - 4x + 8)$

4. En los ejercicios 4^a-4b, realiza la división de las expresiones algebraica.

a. $\frac{-12x^4yz^3}{3x^2y^4z}$

b. $\frac{-18r^3s^2t}{-4r^5st^2}$

Descomposición en factores

1. En los ejercicios 1a - 1h, factoriza la expresión algebraica.

a. $3x^2y^4 + 6x^3y^3$

b. $y^2 - 4y - 5$

c. $x^2 - 8xy + 15y^2$

d. $x^2 + 4x + 4$

- e. $2z^3 + 10z^2 - 28z$
- f. $15 + 2x - x^2$
- g. $64x - x^3$
- h. $4(x + 3y)^2 - 9(2x - y)^2$

Exponentes y racionales

1. En los siguientes ejercicios 1a - 1e, desarrolla la expresión algebraica.
 - a. $(-4x)^2$
 - b. $(\frac{3y}{4})^3$
 - c. $(-a^3b^3)^{-2/3}$
 - d. $(x - y)^0[(x - y)]^{-1/2}$
 - e. $3y^{3/2}y^{4/3}$
2. En los ejercicios 2a y 2b, reduce la expresión a una forma simple:
 - a. $\sqrt[3]{80}$
 - b. $a\sqrt{9b^4c^3}$
3. En los ejercicios 3a - 3c, realiza la operación indicada y reduce la expresión a una forma simple:
 - a. $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{72}$
 - b. $(2\sqrt{7})(3\sqrt{5})$
 - c. $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$
 - d. $\frac{a}{b}(\sqrt{75a^3b^2})$
 - e. $(x + \sqrt{y})(x + \sqrt{y})$

Anexo II. Contenido de cursos de introducción a las matemáticas

Facultad de Ingeniería
Universidad Autónoma de Colima
Matemáticas básicas para ingeniería

Competencia: Resolver problemas de aritmética, álgebra, teoría de conjuntos y lógica.

Contenido

1. Operaciones aritméticas
 - a. Clasificación de los números
 - b. Operaciones aritméticas
 - c. Prioridad de operaciones
2. Álgebra
 - a. Expresiones y operaciones algebraicas
 - b. Productos notables
 - c. Factorización, común divisor y simplificación de expresiones algebraicas
 - d. Planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita
 - e. Inecuaciones
3. Álgebra lineal
 - a. Matrices
 - b. Operaciones elementales, rango de una matriz, determinante, Inversa
 - c. Sistemas de ecuaciones lineales
 - d. Espacio vectorial, subespacios, combinaciones lineales, dependencia e independencia lineal, valores y vectores propios
4. Conjuntos
 - a. Conceptos básicos, definición de conjuntos, denominación de conjuntos, tipos de conjuntos, formas de definir los conjuntos, conjunto universo y conjunto vacío
 - b. Diagramas de Venn, conceptos, representación de diagramas
 - c. Operaciones con conjuntos, subconjuntos, igualdad de conjuntos, cardinalidad en conjuntos, complementos de conjuntos, unión de conjuntos, intersección de conjuntos, diferencia de conjuntos, problemas de aplicaciones
5. Lógica
 - a. Proposiciones
 - b. Simbolización, términos de enlace, agrupamiento y paréntesis
 - c. Tablas de verdad
 - d. Inferencia lógica
 - e. Reglas de inferencia y deducción proposicional

Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Baja California
Introducción a las matemáticas

Competencias: Manejar el álgebra y la trigonometría básica con la suficiente madurez en el pensamiento abstracto como para poder problematizar y distinguir aquellas áreas donde se aplique, desarrolle la intuición geométrica y la rigurosidad algebraica mediante el reforzamiento del análisis y crítica con actitud de respeto y responsabilidad.

Contenido

1. Álgebra
 - a. El sistema numérico de los reales
 - b. Factorización y productos notables
 - c. Expresiones racionales y exponentes racionales
 - d. Propiedades de los radicales
 - e. Números complejos
2. Ecuaciones y desigualdades lineales y cuadráticas con sus gráficas
 - a. Ecuaciones y aplicaciones de las ecuaciones lineales
 - b. Ecuaciones cuadráticas de una variable
 - c. Desigualdades
 - d. Desigualdades polinomiales y racionales
 - e. Sistemas de coordenadas cartesianas
 - f. Gráficas de ecuaciones lineales y cuadráticas
3. Secciones cónicas
 - a. La parábola
 - b. La elipse y el círculo
 - c. La hipérbola
 - d. Traslaciones, homotecias, reflexiones
4. Funciones y sus gráficas
 - a. Concepto de función
 - b. Notación de función, operaciones y tipos de funciones
 - c. Funciones periódicas
 - d. Funciones inversas
 - e. Funciones como modelos matemáticos
 - f. Gráficas de funciones y operaciones gráficas
5. Propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas
 - a. Exponentes y el número e
 - b. Funciones exponenciales
 - c. Funciones logarítmicas
 - d. Propiedades de las funciones logarítmicas
 - e. Funciones inversas del Logaritmo y la Exponencial
6. Funciones trigonométricas y sus propiedades
 - a. Ángulos y sus mediciones
 - b. Funciones trigonométricas de ángulos

- c. Valores de funciones trigonométricas
 - d. Gráficas de Seno, Coseno, Tangente, Cotangente, Secante y Cosecante
 - e. Trigonometría de triángulos rectángulos y solución de problemas
 - f. Funciones trigonométricas inversas
 - g. Rotaciones
7. Trigonometría analítica
- a. Las ocho identidades elementales
 - b. Identidades de sumas y diferencias
 - c. Identidades de argumentos dobles y mitad
 - d. Funciones trigonométricas inversas
 - e. Ecuaciones trigonométricas
 - f. Identidad del producto, suma y diferencias de funciones seno y coseno
 - g. Ley de los Senos y Ley de los Cosenos
 - h. Sistema de coordenadas polares
 - i. Gráficas de ecuaciones en coordenadas polares
8. Tópicos avanzados de álgebra
- a. Sucesiones, series y notación matemática
 - b. Inducción matemática
 - c. Series aritméticas y geométricas
 - d. Ecuaciones recursivas o en diferencias
 - e. Sucesiones y su interpretación en modelos discretos
 - f. Una aproximación al concepto de límite por el uso de sucesiones
9. Operaciones con funciones racionales
- a. Algoritmo de la división
 - b. Raíces racionales de funciones polinomiales
 - c. Raíces reales y complejas de ecuaciones polinomiales
 - d. Fracciones parciales
10. Sistemas de ecuaciones y desigualdades
- a. Sistemas de ecuaciones lineales de dos o tres variables
 - b. Sistemas de desigualdades lineales
 - c. Resolución de ecuaciones lineales por matrices
 - d. Operaciones básicas con matrices
 - e. Inversas de matrices

Anexo III. Instrumentos utilizados durante la intervención

Cuestionario de hábitos de estudio

Hola. Estamos realizando una investigación sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. El objetivo de este cuestionario es conocer tu experiencia en la clase de matemáticas y tus hábitos de estudio. Los datos proporcionados son confidenciales y serán usados para fines estrictamente académicos. El tiempo aproximado para contestar este cuestionario es de 15 min. Se te agradece de antemano tu participación en este estudio.

Datos personales

- 1.1 Edad _____ 1.2 Género M F 1.3 Semestre _____
- 1.4 ¿Cuál fue tu promedio final en la preparatoria? _____
- 1.5 ¿Qué carrera estudias? _____
- 1.6 ¿Dónde accedes a Internet? (Marca todas las opciones que apliquen)
- En la escuela En la casa En un cibercafé No tengo acceso a Internet
- 1.7 ¿Con qué frecuencia utilizas Internet?
- 1 día a la semana 2-3 días a la semana 4-5 días a la semana Toda la semana Nunca
- 1.8 ¿Con cuál de los siguientes dispositivos cuentas? (Marca todas las opciones que apliquen)
- Computadora de escritorio Laptop Mouse para laptop Ninguna de las anteriores

2. Aprendizaje de las matemáticas

2.1 En tu opinión, qué tan importante son las siguientes actividades para aprender matemáticas:

- a) Explicación teórica del profesor.
- Muy importante Importante Importante moderadamente De poca importancia Sin importancia
- b) Que el profesor resuelva ejercicios en el pizarrón.
- Muy importante Importante Importante moderadamente De poca importancia Sin importancia
- c) Trabajar con uno o más compañeros en la resolución de problemas.
- Muy importante Importante Importante moderadamente De poca importancia Sin importancia
- d) Realizar ejercicios matemáticos de los temas vistos en clase
- Muy importante Importante Importante moderadamente De poca importancia Sin importancia

3. Hábitos de estudio para aprender matemáticas

3.1 ¿Qué haces para aprender matemáticas fuera del salón de clase? (Marca las opciones que apliquen)

- Leo libros de matemáticas Realizo ejercicios matemáticos Realizo las tareas Nada

3.2 En promedio, ¿cuántas horas a la semana dedicas a hacer ejercicios de matemáticas fuera de clase?

Ninguna Menos de una hora 1-2 hrs. 3-4 hrs. Más de 4 hrs.

3.3 ¿Con qué frecuencia utilizas páginas de Internet para realizar tus tareas de matemáticas?

1 día a la semana 2-3 días a la semana 4-5 días a la semana Toda la semana Nunca

Si consultas páginas en Internet

3.3.1 ¿Para qué utilizas páginas de Internet cuando realizas tus tareas de matemáticas?

Buscar información teórica Hacer ejercicios matemáticos Buscar ejercicios resueltos Otro, especifica: _____

3.3.2 Menciona alguna(s) de las páginas de Internet que más utilizas

3.4 ¿Cuál editor de ecuaciones utilizas para realizar tus tareas de matemáticas?

MathType Editor de Word LaTeX No uso editores Otro, especifica: _____

3.5 En tu opinión, contar con un sitio Web para practicar ejercicios de los temas vistos en clase te motivaría a estudiar más matemáticas.

Totalmente de acuerdo **De acuerdo** **Neutral** **En desacuerdo** **Totalmente en desacuerdo**

3.6 Supongamos que existe un sitio Web que te evalúa cada uno de los pasos que realizas para resolver un ejercicio matemático y que te puede dar sugerencias en el paso que cometiste un error

a) Creo que sería una buena idea utilizar este sitio Web para apoyar los cursos de matemáticas.

Totalmente de acuerdo **De acuerdo** **Neutral** **En desacuerdo** **Totalmente en desacuerdo**

b) Tendría interés en utilizar este sitio Web.

Totalmente de acuerdo **De acuerdo** **Neutral** **En desacuerdo** **Totalmente en desacuerdo**

3.7 En tu opinión, ¿qué se podría hacer para mejorar la forma en la que aprendes matemáticas?

Gracias por tu apoyo

Cuestionario sobre opinión de MathDIP

Hola. Estamos realizando una investigación sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. El objetivo de este cuestionario es conocer tu experiencia con el uso de MathDIP. Los datos proporcionados son confidenciales y serán usados para fines estrictamente académicos. El tiempo aproximado para contestar este cuestionario es de 15 min. Se te agradece de antemano tu participación en este estudio.

1. Datos personales

1.1 Edad _____ 1.2 Género _____ 1.3 Semestre _____ 1.4 Grupo _____

1.5 ¿Qué carrera estudias? _____

1.6 ¿Dónde accedes a Internet? (Marca todas las opciones que apliquen)

En la escuela
 En la casa
 En un cibercafé
 No tengo acceso a Internet

1.7 ¿Con qué frecuencia utilizas Internet?

1 día a la semana
 2-3 días a la semana
 4-5 días a la semana
 Toda la semana
 Nunca

1.8 Selecciona con cuál de los siguientes dispositivos cuentas (elige las opciones que apliquen)

a) Computadora de escritorio b) Laptop c) Mouse para laptop d) Ninguna de las anteriores

2.- MathDIP

2.1 ¿Cuántos ejercicios resolviste en MathDIP? _____

2.2 Considero que con el apoyo de la plataforma, mi aprendizaje fue:

Fortalecido	Debilitado	Igual
-------------	------------	-------

2.3 Lo que más me agradó de la plataforma es:

2.4 Lo más útil de la plataforma es:

2.5 Lo que más me desagradó de la plataforma es:

2.6 ¿Qué opinas del editor de ecuaciones?

Para responder las siguientes preguntas considera:

1	2	3	4	5
Totalmente de acuerdo	De acuerdo	Neutral	En desacuerdo	Completamente en desacuerdo

Enunciado	1	2	3	4	5
1. Puedo encontrar rápidamente lo que estoy buscando en este sitio.					
2. Considero que este sitio presenta una estructura adecuada.					
3. Las páginas de este sitio son agradables.					
4. Consigo lo que quiero cuando hago clic en las ligas.					
5. Considero adecuados los tamaños de letra, imágenes y gráficas.					
6. Considero difícil de usar el sitio.					
7. Es posible realizar una actividad con éxito en este sitio.					
8. Las actividades del sitio son fáciles de realizar.					
9. Este sitio es interesante para mí.					
10. Es difícil decir si este sitio Web tiene lo que deseo.					
11. El uso del ambiente me motivó a aprender temas de matemáticas.					
12. El empleo de la plataforma me generó la inquietud de explorar otros temas.					
13. Considero interesantes las actividades de la plataforma.					
14. Necesito aprender muchas cosas antes de utilizar la plataforma.					
15. Me gustaría utilizar con mayor frecuencia esta herramienta.					
16. Las instrucciones y advertencias son de ayuda.					
17. El modo en el que se presenta la información del sistema es clara y comprensible.					
18. El sitio responde con lentitud a las peticiones que se le hacen.					
19. Considero fácil resolver ejercicios usando la plataforma.					

Comentarios u observaciones:

Gracias por tu apoyo

Pre examen

Instrucciones: resuelve los ejercicios de manera clara escribiendo todos los pasos necesarios para llegar al resultado, evita usar calculadora.

1. Resuelve las siguientes operaciones

$$\text{a. } \frac{-2(6^2)-6(9-5)}{-6(2-7)+(-5)}$$

$$\text{b. } \left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{c. } \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{4}{5} \times \frac{5}{6}\right)$$

2. Resuelve las siguientes operaciones con expresiones algebraicas

$$\text{a. } (6x^3y^3 + 4x^2y^2 - x^2y + xy^2 + 2x + 3) + (x^3y^3 - x^2y + 2x - 6)$$

$$\text{b. } 4(3x^2 - 4x + 5) - (2x^2 + 3x)^2 - (5x - 2)(3x^2 + 4x + 14)$$

$$\text{c. } \frac{x^2-25}{(x-5)^2}$$

$$\text{d. } (4x + 3)(16x^2 - 12x + 9)$$

$$\text{e. } (3m^6n^4)(3m^5n^4)^4$$

$$\text{f. } \frac{-12-2x}{x^2+x-30} - \frac{6}{2x-10}$$

3. Factoriza la siguiente expresión

$$\text{a. } a^2x - bx + a^2y - by$$

Post examen

Instrucciones: Contestar lo que se te pide con procedimiento.

1. Resuelve las siguientes operaciones.
 - a. $2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + \sqrt{27}$
 - b. $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250}$
 - c. $\sqrt{12}\sqrt[3]{36}$
 - d. $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$

2. Resuelve las siguientes operaciones con expresiones algebraicas.
 - a. $(3x^2 - 5x)(2x^3 + 4x^2 - x + 2)$
 - b. $\frac{24x^5y^4 + 18x^4y^5 - 48x^{10}y^3}{6x^2y^3}$
 - c. $\frac{x^3 + 2x + 70}{x + 4}$

3. Resuelve los siguientes productos notables.
 - a. $(4b^2c^2 + 7)^2(4b^4c^2)^2 + 2(4b^4c^2)(7) + 7^2$
 - b. $(6x + 3a)(6x - 3a)$
 - c. $(y - 2)(y - 4)$
 - d. $(2x^4 - 3)^3$

4. Factoriza las siguientes expresiones algebraicas.
 - a. $3x^2 + 12x - 24$
 - b. $3(x + 5) - y(x + 5)$
 - c. $x^2 + 3x + 2$
 - d. $9x^2 + 24x + 16$
 - e. $a^2 - 11a + 24$
 - f. $3x^2 - 14x + 8$