

La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, B.C.).

La investigación fue financiada por el CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología).

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo o titular de los Derechos Autor.

CICESE © 2023, Todos los Derechos Reservados, CICESE

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California



Doctorado en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control

Modelado y control de mecanismos y robots con servo accionamientos

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Doctor en Ciencias

Presenta:

Ivonne Gabriela Zepeda Valencia

Ensenada, Baja California, México

2023

Tesis defendida por

Ivonne Gabriela Zepeda Valencia

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez
Director de tesis

Dr. César Cruz Hernández

Dr. Javier Pliego Jiménez

Dr. Javier Moreno Valenzuela

Dra. María del Carmen Monroy Lara



Dra. María del Carmen Maya Sánchez
Coordinadora del Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dra. Ana Denise Re Araujo
Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Ivonne Gabriela Zepeda Valencia como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

Modelado y control de mecanismos y robots con servo accionamientos

Resumen aprobado por:

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Director de tesis

En esta tesis se presenta el modelado y control de robots manipuladores con servo accionamientos de posición. Para esto se consideran los ampliamente utilizados servo actuadores de posición compuestos de un motor con escobillas de corriente directa con imán permanente, embebido con un control proporcional analógico interno dominante. Se demuestra que el modelo de robots manipuladores provistos con servo actuadores de posición preservan la misma estructura matemática que el modelo dinámico tradicional de robots manipuladores equipados con actuadores de par ideales sin memoria (sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de segundo orden), así como también algunas propiedades importantes para el diseño y análisis de sistemas de control como lo son la definición positiva de la matriz de inercia resultante y la propiedad de antisimetría. Se formulan problemas de control para mecanismos y robots con servo accionamientos, de manera específica, se aborda la regulación realimentada en coordenadas articulares y campo de velocidad, considerando como caso de estudio el modelo de un robot manipulador de dos grados de libertad con servo accionamientos de posición. Se presenta además, el planteamiento de un método de conversión para cualquier sistema de control de par diseñado para robots con accionamientos de par, para ser directamente implementados y probados experimentalmente en robots con servo accionamientos de posición, con el propósito de generar mayor rentabilidad del uso de robots con servo actuadores de posición de bajo costo. Los resultados obtenidos en este trabajo de investigación tiene como finalidad realizar aportes en un campo, hasta el día de hoy, escasamente explorado como lo es el modelado y control de mecanismos y robots equipados con servo accionamientos de posición.

Palabras clave: Accionamiento, servo, motor, robótica, mecatrónica, control, posición, corriente continua, campo de velocidad, modelo, modelado.

Abstract of the thesis presented by Ivonne Gabriela Zepeda Valencia as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Electronics and Telecommunications with orientation in Instrumentation and Control.

Modeling and control of mechanisms and robots with servo actuators

Abstract approved by:

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez
Thesis Director

This thesis presents the modeling and control of position servo actuated robot manipulators. To this end, a standard popular position servo actuators built around permanent magnet direct current brushed motors, embedded with inner analog proportional dominant feedback control is considered. It is shown that the model of robot manipulators provided of position servo actuators preserves the same mathematical structure than the traditional dynamic model of robot manipulators, equipped with ideal memoryless torque actuators (system of n second order nonlinear ordinary differential equations, it also preserves important properties useful for control design like positive definiteness of the resulting inertia matrix as well as the so-called 'skew-symmetric property'. Control problems are formulated for mechanisms and robots with position servo actuators, specifically regulation in joint space and velocity field are addressed considering as a case of study, the model of a 2 degrees of freedom robot manipulator with position servo actuators. It also presents the proposal of a conversion method of any torque requesting control system designed for torque-driven robots to be directly applied and experimental tested in position servo actuated robots, this method has the purpose of making more profitable the use of robots with low cost position servo actuators. The results obtained from this research work intent to contribute in a sparsely explored field, to the present day, which is the modeling and control of mechanisms and robots with position servo actuators.

Keywords: Actuators, servo, motor, robotics, mechatronics, control, position, direct current, velocity field, model, modeling.

Dedicatoria

A mis padres, quienes me han inspirado y a los que debo todos mis éxitos.

Agradecimientos

A Dios, por haberme acompañado y guiado a lo largo de mis estudios, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.

A mis padres: Edgar Zepeda e Ivonne Valencia y a mi familia, por su apoyo y confianza inquebrantable ante el reto y por inspirarme a superarme en el ámbito académico y personal, por sus consejos y su aliento en todo momento.

A mi director de tesis, el Dr. Rafael Kelly, por guiarme a lo largo de estos años de trabajo, por su ayuda desinteresada y paciencia. De igual manera agradezco a todos los miembros de mi comité de tesis, por sus valiosos comentarios, interrogantes y sugerencias hacia el trabajo realizado, en especial a la Dra. Carmen Monroy.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California por brindar los medios y el espacio para el desarrollo de este trabajo, y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de doctorado.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	viii
Lista de tablas	x
Capítulo 1. Introducción	
1.1. Antecedentes	1
1.1.1. Vocablo servo	1
1.1.2. Tipos de servo actuadores	3
1.2. Definiciones	4
1.3. Estado del arte	5
1.4. Objetivos	6
1.4.1. Objetivo general	6
1.4.2. Objetivos específicos	7
1.5. Motivación	8
1.6. Notaciones	10
Capítulo 2. Modelado de motores de corriente continua con imán permanente	
2.1. Un modelo simplificado de un motor PMDC	12
2.2. Regulación de posición	14
2.2.1. Control PID	14
2.2.2. Control con parte proporcional dominante	17
Capítulo 3. Modelado de servo accionamientos de posición	
3.1. Componentes físicos internos de servo accionamientos de posición	20
3.2. Modelado dinámico de servo accionamientos de posición	21
3.2.1. Un modelo estático ideal de un servo de posición	22
3.2.2. Un modelo dinámico realista simplificado de un servo de posición	23
3.2.3. Comportamiento cualitativo asintótico de los servos de posición	24
3.3. Modelado de un conjunto de n servo actuadores de posición	25
Capítulo 4. Modelado dinámico ortodoxo de robots con accionamientos de par	
Capítulo 5. Modelado dinámico de robots con servos de posición	
Capítulo 6. Control en lazo abierto	
6.1. Objetivo de control de regulación	31

6.2.	Simulación del control en lazo abierto	32
Capítulo 7. Control en coordenadas articulares		
7.1.	Objetivo de control de regulación	35
7.2.	Simulación del control en lazo cerrado	36
Capítulo 8. Campo de velocidad en coordenadas articulares		
8.1.	Campo de velocidad	39
8.2.	Propuesta de controlador de campo de velocidad	41
8.2.1.	Sistema en malla cerrada	42
8.2.2.	Análisis	42
8.3.	Simulaciones numéricas	43
8.3.1.	Campo de velocidad deseado	44
8.3.2.	Resultados gráficos	45
Capítulo 9. Conversión para control de robots con servo accionamientos de posición		
9.1.	Controlador de conversión propuesto	48
9.1.1.	Sistema en lazo cerrado	49
9.2.	Simulaciones numéricas	50
9.2.1.	Modelo del servo robot de 2GDL	50
9.2.2.	Controlador	50
9.2.2.1.	Controlador de par	51
9.2.2.2.	Controlador de conversión	52
9.3.	Resultados en simulación	52
9.3.1.	Parámetros numéricos	53
9.3.2.	Resultados gráficos	54
Capítulo 10. Conclusiones		
Literatura citada		57
Anexos		59

Lista de figuras

Figura	Página
1. Servo actuadores comerciales (Imagen tomada de la Web).	1
2. Diagrama de entrada–salida de un servo actuador de posición	4
3. Diagrama de entrada–salida de un servo actuador de velocidad	4
4. Configuración académica/teórica irrealista de robots con actuadores ideales de tipo par.	4
5. Configuración experimental realista de robots con servo actuadores de posición.	5
6. Diagrama de la estructura interna de mecanismos y robots servo actuados.	7
7. Diagrama entrada–salida de mecanismo con servo accionamientos de posición.	8
8. Hardware de robots manipuladores con servo actuadores de posición.	9
9. Bosquejo entrada–salida de un motor PMDC tipo armadura controlada.	11
10. Componentes de un motor PMDC.	11
11. Humanoide robótico Tonatiuh [®] con servo actuadores de posición marca Dynamixel, (foto cortesía de la Dra. Karla Camarillo, ITCelaya).	19
12. Robot comercial Robix [®] con servo actuadores de posición Robotbooks (2020).	19
13. Bosquejo de un servo actuador de posición como unidad compacta funcional.	20
14. Componentes principales de un servo actuador de posición.	21
15. Diagrama de bloques de la estructura interna del servo de posición: Control P dominante de un motor PMDC.	22
16. Brazo robótico de 2 GDL con servo actuadores de posición: «servo brazo».	30
17. Norma del error de posición articular $\ \tilde{\mathbf{q}}\ $: Control en lazo abierto $\mathbf{u} = \mathbf{q}_d$	33
18. Brazo robótico de 2 GDL con servo actuadores de posición: «servo brazo».	34
19. Norma del error de posición $\ \tilde{\mathbf{q}}\ $: Control en lazo cerrado $\mathbf{u} = \mathbf{q}_d + K_{PS}^{-1} [-K_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})]$	37
20. Señal de control $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T$: bajo control realimentado $\mathbf{u} = \mathbf{q}_d + K_{PS}^{-1} [-K_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})]$	37
21. Un campo de velocidad deseado.	39
22. Brazo robótico de 2GDL con servo accionamientos de posición: «servo robot».	43
23. Campo de velocidad deseado $\mathbf{v}(\mathbf{q})$ definido en (51).	45
24. Seguimiento del robot al contorno circular $\mathbf{v}(\mathbf{q})$	46
25. Norma del error de campo de velocidad $\ e_v(t)\ $	46
26. Diagrama de bloques del enfoque de control ortodoxo Σ_{TC} de robots con actuadores de par Σ_{T-dR}	47
27. Diagrama de bloques del control realimentado Σ_{SRC} de robots con servo actuadores de posición Σ_{SR}	48
28. Imagen esquemática de la geometría de un brazo robótico de 2 GDL.	51

Figura	Página
29. Trayectorias de la posición articular $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2]^T$	54
30. Norma del error de posición articular $\ \tilde{\mathbf{q}}\ $	55
31. Señales de control u_1 y u_2	55
32. Mecanismo con servo actuador de posición: «servo disco».	59
33. Péndulo con servo actuador de posición: «servo péndulo».	61
34. Configuración experimental de un péndulo con servo actuador de posición (Laboratorio de robótica., CICESE).	66
35. Diagrama esquemático del péndulo con servo accionamientos de posición.	68
36. Pendubot con servo actuadores de posición: «servo pendubot».	71
37. Imagen esquemática de la geometría del pendubot y un brazo robótico de 2 GDL.	72
38. Brazo robótico de 2 GDL con servo actuadores de posición: «servo brazo».	79

Lista de tablas

Tabla		Página
1.	Parámetros del sistema	31
2.	Parámetros del sistema	35
3.	Parámetros del sistema	44
4.	Parámetros del sistema	53
5.	Parámetros y variables de los mecanismo en las Figuras 36, 37 y 38.	72

Capítulo 1. Introducción

Aparatos educativos en laboratorios de diversas ingenierías (e.g., mecánica, computación, control y eléctrica) son equipados normalmente con actuadores de posición —servos de posición— de bajo costo y fácil de controlar. Estos aparatos son útiles para aprender conceptos clave sobre sensores, procesamiento de señales, cinemática, programación, planeación, decisión y control (ver Figura 1).

Actuadores del tipo de servos de posición son por si mismos sistemas realimentados en torno a un motor eléctrico, y dotados de un sensor de posición angular, y un controlador tipo PID (con la parte Proporcional dominante). Tienen el objetivo de ser dispositivos de posicionamiento angular perfecto en robots de laboratorios y educativos de bajo costo como los humanoides (juguetes) a escala reducida (utilizados en competencias de soccer robótico), brazos robóticos y juguetes de control remoto (e.g., carritos, avioncitos, helicópteros y drones) y otros dispositivos mecatrónicos.



(a) Futaba S3050



(b) Maxon MCD EPOS



(c) Robotix RX-10

Figura 1. Servo actuadores comerciales (Imagen tomada de la Web).

1.1. Antecedentes

En este manuscrito de tesis se utilizarán como sinónimos, con abuso de lenguaje, las palabras: “accionamiento” y “actuador”.

1.1.1. Vocablo servo

En Control Automático, el vocablo “**servo**” tiene la connotación de un sistema realimentado. Tradicionalmente se emplea como sinónimo de “servomecanismo” o “servomotor”. En la literatura de ingeniería

pueden encontrarse un sinnúmero de definiciones. A continuación se presenta una lista no exhaustiva pero representativa de algunas de ellas:

- DRAE: Del lat. *servus* 'siervo'.
 - Elemento prefijal de origen latino que entra en la formación de nombres con el significado de sistema o mecanismo auxiliar.
 - Dispositivo de mando y regulación que corrige automáticamente el valor de una variable para que se mantenga el valor deseado.
- Los ingenieros con frecuencia usan el término *servo loop* para describir cualquier tipo de sistema de control en lazo cerrado, ya sea un motor de corriente continua (CC), un encoder o un actuador piezoeléctrico tipo pila y un sensor capacitivo. En este caso, la palabra es normalmente utilizada como un sustantivo. Por ejemplo puede decirse: "el servo es estable y llevó a cabo el movimiento dentro de su requisito de tiempo asignado". La palabra servo es comúnmente destinada para representar el sistema en lazo cerrado completo, lo cual significa el dispositivo de accionamiento, el dispositivo de sensado, la electrónica de manejo y control, y el algoritmo de control.
- Rozum Robotics (Rozum, 2020): Un servo es un hardware integrado de un motor con un sensor de error para asegurar que el movimiento de salida (e.g., velocidad, posición) coincida con valores deseados. Conocidos por su precisión y rendimiento eficiente, este tipo de actuadores se han extendido ampliamente en las industrias, así como en dispositivos pequeños didácticos y de pasatiempo (tipo de 'control remoto').
- Servomotor Estándar S3003 (ePro Labs, 2020): Un servo es un tipo de motor frecuentemente utilizado en robótica. La posición del robot puede controlarse de manera muy precisa lo cual lo hace ideal para dirigir vehículos y robots a control remoto. A diferencia de un motor estándar un servo requiere una señal para comunicarle al motor que tan rápido girar. La mayoría de los servomotores tiene una interfaz de 3 cables. Uno para la entrada de voltaje, uno para la tierra y uno para la señal de control. La señal que controla el servo es una serie de pulsos, la longitud del pulso determina el ángulo al cual el servo se moverá. Si la señal es interrumpida el servo perderá su posición. A esto se le llama modulación de ancho de pulso, en ocasiones abreviado como PWM por sus siglas en inglés.
- Oxford Dictionaries (Oxford, 2020): servo es una parte de una máquina que controla una máquina más grande.

- Collins English Dictionary (Collins, 2020): Un servomotor es un motor, a menudo vendido como un módulo completo — incluyendo un manejador electrónico—, el cual es usado dentro del control de posición o control de velocidad de un sistema de control realimentado. Un servomotor es un dispositivo electromecánico en el cual una entrada eléctrica determina la posición del eje del motor.

Esta tesis adopta la siguiente definición de servomotor inspirada a partir de la definición de Collins English Dictionary (Collins, 2020):

- Un **servomotor** es un motor, a menudo vendido como un módulo completo —incluyendo un manejador electrónico—, el cual es usado para manejar la posición o la velocidad dentro de un sistema mecatrónico. Un servomotor es un dispositivo electromecánico realimentado en el cual una entrada eléctrica determina la posición o la velocidad del eje del motor.

En esta tesis los vocablos 'servo' y 'servoaccionamiento' serán utilizados como sinónimos indistintamente.

1.1.2. Tipos de servo actuadores

Los dos tipos básicos de servo actuadores son:

- **Servos de posición:** usados ampliamente en aparatos a pequeña escala y robots (e.g., brazos robóticos de escritorio y robots bípedos a pequeña escala) donde se requieren movimientos precisos. La posición angular θ del eje de los servo actuadores de posición puede rotar dentro de un rango limitado (ver Figura 2). Tienen topes físicos en el mecanismo de engranaje para prevenir giros más allá de los límites para proteger los servo sensores de rotación internos. Estos no proveen de control de velocidad ni de rotación continua.
- **Servos de velocidad (servos de rotación continua):** a diferencia de los servos de posición, el eje de los servos de velocidad puede rotar continuamente a una velocidad variable ω dependiendo de la señal de entrada de control u del servo (ver Figura 3).

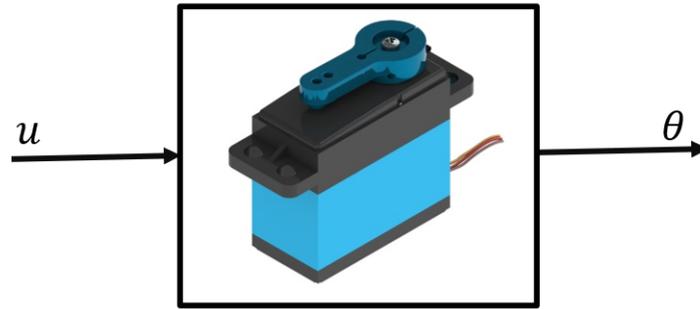


Figura 2. Diagrama de entrada-salida de un servo actuator de **posición**.



Figura 3. Diagrama de entrada-salida de un servo actuator de **velocidad**.

1.2. Definiciones

Definición 1. Robots con accionamientos de par.

Un robot con accionamientos de par es un robot cuyos actuadores son de tipo par. En los que respecta a la Figura 4, se supone que el vector de entradas u a los robots con actuadores de tipo par son las señales de referencia deseadas de par/fuerza, las cuales a través de los actuadores aplican un par τ en cada una de las articulaciones del robot (normalmente se supone de manera tácita que $\tau = u$).

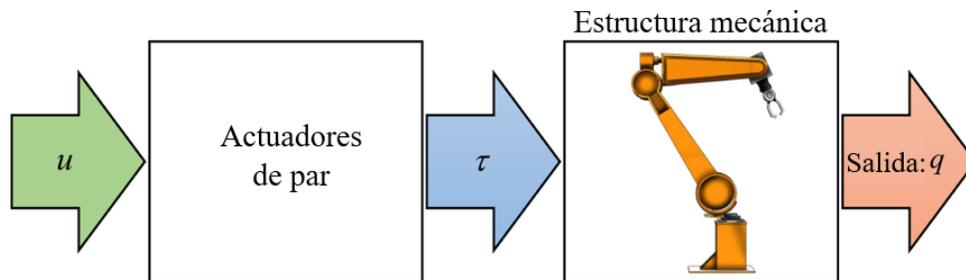


Figura 4. Configuración académica/teórica irrealista de robots con actuadores ideales de tipo par.

Definición 2. Robots con servo accionamientos de posición.

Un servo robot de posición o robot PSR (por sus siglas en inglés), es un robot cuyos actuadores o accionamientos son del tipo servo de posición (ver Figura 5). Se supone que el vector de entradas u a los servo robots de posición son las señales de referencia de posición de los actuadores del servo robot ubicados en cada una de sus articulaciones.

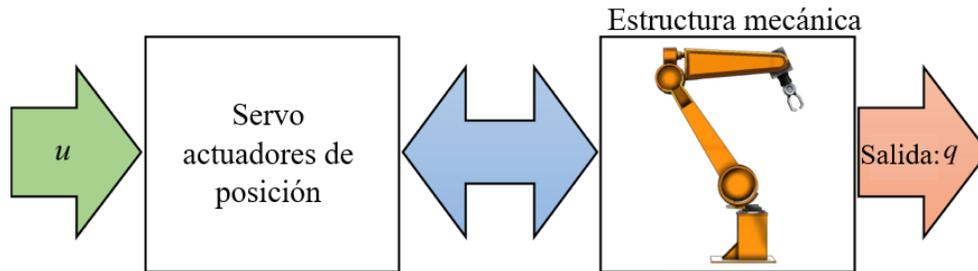


Figura 5. Configuración experimental realista de robots con servo actuadores de posición.

Observación 1. Sinónimos típicos de robots con servo accionamientos de posición son:

- robots servo actuados,
- robots servo accionados,
- robots comandados por posición.

1.3. Estado del arte

A pesar de la abundancia de robots industriales con accionamientos de posición en la vida real, así como también de pequeños robots didácticos gobernados por posición, muy pocos trabajos se han reportado sobre modelado y sistemas de control sobre este tipo de aparatos y mecanismos. A continuación se mencionan algunas investigaciones previas que abordan el control de robots comandados por posición, para esto los estudios se clasifican en objetivos de control (1) y estructura de los controladores (2).

1. Los siguientes son resultados en cuanto a objetivos de control de robots controlados por posición que se encuentran en la literatura:

- Control de fuerza: en la referencia Suh et al. (1994) un algoritmo de control de fuerza se sugiere para robots industriales comerciales equipados con servos de posición.
 - Control de impedancia: en Pelletier y Doyon (1994) se propuso un controlador de impedancia con el cual se quiere lograr una relación dinámica deseada entre la posición deseada y la fuerza medioambiental. Desafortunadamente este enfoque fue formulado para robots simples de un Grado De Libertad (GDL) modelados por sistemas lineales de segundo orden inocuos.
2. En lo que respecta a las estructuras de los controladores, se han reportado lo siguientes estudios:
- Controlador adaptable: en Suh et al. (1995) se sugiere un control de fuerza adaptable difuso para robots industriales comerciales equipados con servo accionamientos de posición. La adaptabilidad depende de las reglas de control las cuales cambian de acuerdo a la magnitud de la rigidez ambiental de tal manera que se mantiene buena fuerza de respuesta a pesar de los cambios en la rigidez ambiental.
 - En Urrea y Kern (2016) se reportan pruebas experimentales de la implementación de un controlador adaptable en un robot tipo SCARA de 5 GDL con servo accionamientos de posición.
 - Controlador difuso: la referencia Suh et al. (1995) sugiere un algoritmo de control basado en la lógica difusa para robots industriales comerciales con servo accionamientos de posición. También se reportan pruebas experimentales.
 - En Adhikary y Mahanta (2017) se propone un control basado en el modelo de la dinámica inversa usando el enfoque del backstepping con modos deslizantes.

En todas las investigaciones listadas previamente, se ha pasado por alto el modelo dinámico ortodoxo multivariable no lineal de robots. Además, excluyendo las investigaciones Suh et al. (1995), Urrea y Kern (2016) y Adhikary y Mahanta (2017), se desarrollaron solo para 1 GDL o para modelos de robots lineales simples de una entrada una salida (SISO, Single Input - Single Output).

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

El objetivo principal de esta tesis doctoral es realizar aportes para cubrir la brecha existente tanto en el modelado como en el control de mecanismos y robots equipados con servo accionamientos, principal-

mente en los del tipo de posición y eventualmente los de velocidad.

Con referencia a la Figura 6, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ son las posiciones generalizadas o articulares y $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ sus derivadas temporales (velocidades generalizadas o articulares), $\mathbf{z} = \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ son las variables o funcional a controlar, $\boldsymbol{\tau}_d$ son perturbaciones de par debido a contacto o iteracción entre el mecanismo/robot con su medio ambiente, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es la entrada a los servoaccionamientos (e.g posiciones deseadas \mathbf{q}_d o velocidades deseadas $\dot{\mathbf{q}}_d$ según se trate respectivamente de servoaccionamientos de posición o de velocidad).

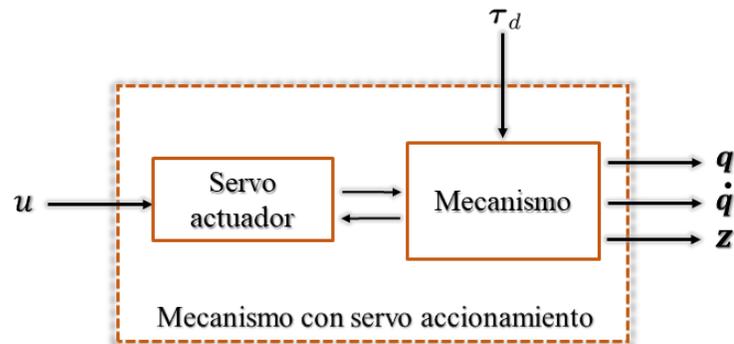


Figura 6. Diagrama de la estructura interna de mecanismos y robots servo actuados.

1.4.2. Objetivos específicos

Específicamente en esta investigación se persiguen las siguientes metas particulares:

- **Meta 1.** Modelado de servo accionamientos de posición:
 - servos ideales,
 - servos reales.
- **Meta 2.** Modelado de mecanismos y robots con servo accionamientos (Figura 7).

En general la estructura matemática de estos mecanismos tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}_d) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}), \quad (2)$$

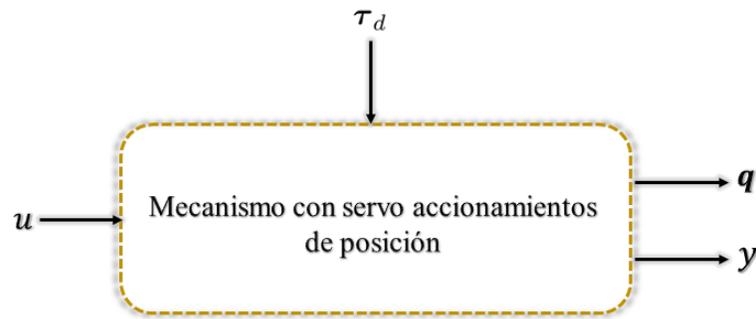


Figura 7. Diagrama entrada-salida de mecanismo con servo accionamientos de posición.

- **Meta 3.** Formulación de problemas de control para mecanismos y robots con servo accionamientos:
 - regulación realimentada en coordenadas articulares,
 - regulación en coordenadas cartesianas,
 - campo de velocidad,
 - TEFDA.
- **Meta 4.** Explorar modelos de servos de velocidad.

1.5. Motivación

De manera constante tanto en prácticas de laboratorio de universidades así como en centros de investigación se considera o asevera que el modelo dinámico ortodoxo de robots manipuladores de n grados de libertad supone que los actuadores localizados en cada una de las articulaciones de los robots son del tipo par ideales, lo que significa que la entrada de par que se le solicita a los accionamientos del sistema es instantáneamente igual al par que proporcionan, sin embargo no hay evidencia experimental de que esto sea así.

Lo mencionado en el párrafo anterior sobre que: “ la entrada de par que se le solicita a los accionamientos del sistema es instantáneamente igual al par que proporcionan”, es una aseveración ampliamente aceptada en el ámbito académico y de investigación de control y robótica, por lo cual se usa el modelo dinámico ortodoxo de robots manipuladores para la enseñanza de control, dinámica de sistemas y robótica. Sin embargo, en realidad en muchos casos prácticos los actuadores o accionamientos con los cuales están

equipados los robots manipuladores de n grados de libertad no son de tipo par si no que son del tipo servo de posición con entrada \mathbf{u} que es la señal de las posiciones solicitadas a los actuadores y con salida \mathbf{q} que son las posiciones articulares del robot como se muestra en la Figura 8.

Una gran cantidad de mecanismos y robots de bajo costo y accesibles para el entorno académico están provistos con servo accionamientos de posición, como lo son los robots humanoides de dos patas y los brazos robóticos de escritorio, en contraste con los robots con accionamientos de par (aquellos robots que cuentan con actuadores de tipo par) requeridos para estudios teóricos de control en investigación, pero desafortunadamente los cuales normalmente no están disponibles para experimentación debido a que prácticamente no existen a la venta de manera comercial o son difíciles (por la inexistencia de accionamientos de par ideales —sin limitaciones físicas ni dinámicas—) o costosos de construir.

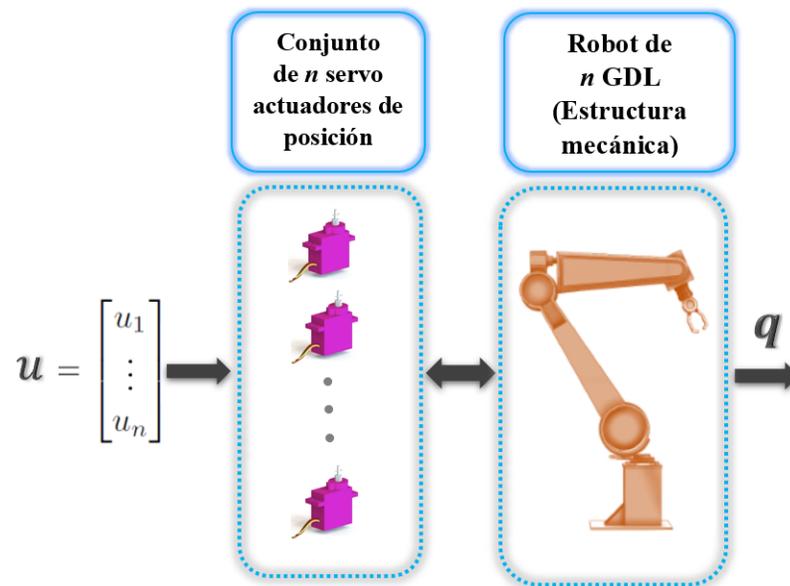


Figura 8. Hardware de robots manipuladores con servo actuadores de posición.

Hasta la fecha el modelado de robots manipuladores con accionamientos del tipo servo de posición, que pueda ser utilizado para el diseño y análisis de sistemas de control para este tipo de robots, es prácticamente inexistente ya que nada al respecto ha sido reportado en la literatura (ya sea en libros o en artículos de revistas de investigación); esto representa una oportunidad para cubrir una brecha importante en el modelado y control de mecanismos y robots con servo accionamientos de posición (ver Figura 8) motivado por una realidad práctica.

1.6. Notaciones

La notación de las principales variables y símbolos utilizados en esta tesis se indican a continuación:

- La variable escalar $t \geq 0$ representa la variable independiente (tiempo).
- \mathbb{R} denota el conjunto de números reales los cuales se expresan en letra cursiva y ocasionalmente, por letras griegas en minúscula.
- El valor absoluto de un número real se denota por $|\cdot|$.
- $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ denota el conjunto de números reales no negativos.
- Los vectores se denotan por letras minúsculas en **negrita** ya sea en latinas o en griegas.
- El espacio vectorial real n -dimensional se denota por \mathbb{R}^n y cuyos elementos son arreglos de $n \times 1$ en formato de vectores columna: $\mathbf{x} = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
- Para una matriz $n \times m$ -dimensional $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, su elemento ij -ésimo se denota por A_{ij} .
- Super-índice T : $(\cdot)^T$ representa el vector traspuesto y la matriz traspuesta, por lo tanto $\mathbf{x}^T \in \mathbb{R}^n$ es un vector renglón de $1 \times n$.
- La norma euclidiana del vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se denota por $\|\mathbf{x}\| \triangleq \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$.
- Para una función tres veces diferenciable $\mathbf{f}(t)$, se utiliza la notación de Newton, también llamada notación de puntos, para la derivada en el tiempo:

- $\dot{\mathbf{f}} \triangleq \frac{d}{dt} \mathbf{f}$,
- $\ddot{\mathbf{f}} \triangleq \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{f}$,
- $\overset{\cdot\cdot\cdot}{\mathbf{f}} \triangleq \frac{d^3}{dt^3} \mathbf{f}$.

Capítulo 2. Modelado de motores de corriente continua con imán permanente

Los motores de corriente directa de imán permanente, o motores PMDC por sus siglas en inglés, consisten principalmente de dos partes: un estator y una armadura. Aquí el estator es una carcasa de lámina de hierro tipo cilindro. Los imanes están montados en la periferia interna de esta carcasa. Como enunciado por Ogata (2002) “Los motores PMDC tipo armadura controlada” son controlados —entrada de control del motor— por el voltaje en la armadura, dígase $v \in \mathbb{R}$ 9).



Figura 9. Bosquejo entrada-salida de un motor PMDC tipo armadura controlada.

La parte giratoria es la armadura —bobinas del rotor— y la parte estacionaria es el estator (ver Figura 10). La bobina de la armadura está conectada al suministro de voltaje vía segmentos del conmutador y escobillas (Golnaraghi y Kuo, 2010).

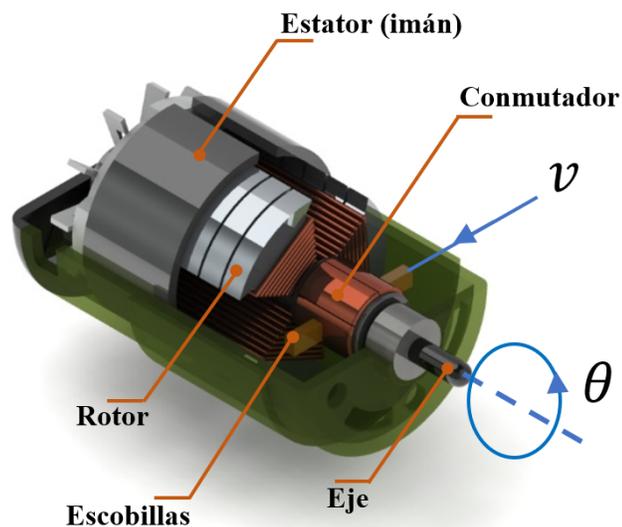


Figura 10. Componentes de un motor PMDC.

Cuando los embobinados de la armadura están conectados al suministro de voltaje, una corriente eléctrica los atraviesa. Los imanes permanentes proveen el campo magnético. En esta situación la corriente que se transporta en los conductores de la armadura experimentan una fuerza debida al campo magnético de acuerdo con la regla de Fleming. El conmutador está fabricado por segmentos para lograr un par unidireccional.

Los motores de PMDC son extensamente usados donde se requieren motores de CD (corriente directa) pequeños, tales como juguetes, aires acondicionados, lavadoras, limpiaparabrisas, y muchas más. Pequeños motores PMDC son el núcleo de actuadores tipo servos de posición popularmente utilizados en robótica de bajo costo y aparatos de radio control a escala reducida.

2.1. Un modelo simplificado de un motor PMDC

Para un modelo simplificado de un motor PMDC, esta tesis adapta información de los siguientes libros de texto: Golnaraghi y Kuo (2010), Ogata (2002), Khalil (2002). Un motor PMDC de tipo armadura controlada puede modelarse por el sistema de tercer orden:

$$J \frac{d^2}{dt^2} \theta + b_0 \dot{\theta} + \tau_d = k \cdot i, \quad (3)$$

$$L \frac{d}{dt} i + Ri + k_b \dot{\theta} = v, \quad (4)$$

donde la entrada de control del sistema es el voltaje en la armadura v aplicada en las terminales de la armadura y se considera la salida del motor como el desplazamiento del rotor (posición del eje) θ (ver Figura 9). La variable interna i es la corriente en la armadura. La variable exógena τ_d denota la entrada de perturbaciones de par por carga mecánica. Los parámetros (constantes mayores a cero) restantes del motor son:

- R resistencia en la armadura.
- J inercia del rotor.
- L inductancia en la armadura.
- k constante de torque.

- k_b constante de fuerza electromotriz de retorno (fem).
- b_0 coeficiente de fricción viscosa.

Generalmente, la inductancia en la armadura L tiene un valor ‘pequeño’, por lo tanto, despreciando L en (4), se resuelve:

$$0 = v - k_b \dot{\theta} - Ri,$$

para obtener la corriente en la armadura:

$$i = \frac{v - k_b \dot{\theta}}{R},$$

la cual a su vez se sustituye en (3), dando como resultado la estructura de un modelo lineal de segundo orden (Kelly y Moreno, 2001):

$$JR\ddot{\theta} = k \cdot v - (kk_b + Rb_0)\dot{\theta} - R\tau_d. \quad (5)$$

En el caso de que no hubiera perturbaciones ($\tau_d = 0$), esta es la estructura del modelo lineal de segundo orden de motores de CD simplificado usado más comúnmente (Kelly y Moreno, 2001), el cual es usualmente reescrito en función de la velocidad del rotor $\omega \triangleq \dot{\theta}$ como un sistema lineal de primer orden (Khalil, 2002):

$$JR\dot{\omega} = k \cdot v - (kk_b + Rb_0)\omega - R\tau_d. \quad (6)$$

La función de transferencia asociada (incluidas las perturbaciones) del sistema (5) es:

$$\theta(s) = G_1(s)\mathcal{V}(s) - G_2(s)\mathcal{T}_d(s), \quad (7)$$

donde s es la variable compleja de Laplace y

$$G_1(s) \triangleq \frac{k}{s[JRs + (kk_b + Rb_0)]}, \quad (8)$$

y

$$G_2(s) \triangleq \frac{R}{k}G_1(s). \quad (9)$$

El polo en el origen de (8) indica, en la función de transferencia del motor (7) una salida infinitamente creciente de la posición angular θ para cualquier entrada constante diferente de cero de voltaje en la armadura v .

2.2. Regulación de posición

El objetivo de control de regulación de posición tiene la finalidad de asegurar que el desplazamiento —posición— angular del eje del rotor θ tienda asintóticamente a una posición deseada constante θ_d . De manera más formal, lograr:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta_d. \quad (10)$$

A pesar de que este objetivo de control puede ser alcanzado por diversos controladores, dos enfoques se analizan a detalle a continuación:

- control PID,
- control con parte proporcional dominante (control Proporcional).

2.2.1. Control PID

El control Proporcional–Integral–Derivativo (PID) es el control más comúnmente usado en servo sistemas debido a la simplicidad en su diseño (Adhikary y Mahanta, 2017). La estructura básica de la ley de control

PID accionado por el error de posición del eje, definido por $\tilde{\theta} \triangleq \theta_d - \theta$ (la diferencia entre la posición deseada y la actual), está dado por (Kelly y Moreno, 2001):

$$v = k_P \tilde{\theta} + k_I \xi \underbrace{-k_D \dot{\theta}}_{+k_D \dot{\tilde{\theta}}}, \quad (11)$$

$$\dot{\xi} = \tilde{\theta}, \quad (12)$$

donde las constantes positivas: k_P, k_I, k_D son respectivamente las ganancias proporcional, integral y derivativa del control PID.

El sistema en lazo cerrado se obtiene sustituyendo la acción de control v del controlador PID —voltaje de entrada en la armadura— v (11) en el modelo del motor (5):

$$JR\ddot{\theta} + (kk_b + Rb_0)\dot{\theta} = k \underbrace{[k_P \tilde{\theta} + k_I \xi - k_D \dot{\theta}]}_v - R\tau_d,$$

la cual puede reescribirse como:

$$JR\ddot{\theta} + [(kk_b + Rb_0) + kk_D]\dot{\theta} = k [k_P \tilde{\theta} + k_I \xi] - R\tau_d, \quad (13)$$

o de manera equivalente como un sistema lineal de tercer orden en términos de ξ definida en (12), y usando sus derivadas respecto al tiempo:

- $\dot{\xi} = \tilde{\theta}$,
- $\ddot{\xi} = \dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\theta}$,
- $\ddot{\xi} = \ddot{\tilde{\theta}} = -\ddot{\theta}$.

como:

$$-JR \ddot{\xi} - [(kk_b + Rb_0) + kk_D] \ddot{\xi} = k [kk_P \dot{\xi} + kk_I \xi] - R\tau_d, \quad (14)$$

o

$$-JR \ddot{\xi} - [(kk_b + Rb_0) + kk_D] \ddot{\xi} - k \cdot kk_P \cdot \dot{\xi} - k \cdot kk_I \xi = -R\tau_d, \quad (15)$$

multiplicando ambos lados de la ecuación por -1 se obtiene:

$$\underbrace{JR}_{a_0} \ddot{\xi} + \underbrace{[(kk_b + Rb_0) + kk_D]}_{a_1} \ddot{\xi} + \underbrace{kk_P}_{a_2} \dot{\xi} + \underbrace{kk_I}_{a_3} \xi = R\tau_d. \quad (16)$$

Dado que $a_0 > 0$, de acuerdo con Coppel (1965) los tres ceros de su polinomio característico tienen parte real negativa sí y sólo sí:

$$a_3 > 0, a_2 > 0, a_1 a_2 > a_0 a_3,$$

lo cual siempre puede satisfacerse para valores adecuados de los parámetros del control PID. Cuando se tiene $kk_I = kk_D = 0$ y una ganancia proporcional estrictamente positiva $kk_P > 0$, este es el llamado "control con parte proporcional dominante".

En otras palabras, para un control Proporcional con $kk_I = kk_D = 0$ el sistema en lazo cerrado (16) produce:

$$JR \ddot{\xi} + [(kk_b + Rb_0)] \ddot{\xi} + kk_P \dot{\xi} = R\tau_d, \quad (17)$$

o de manera equivalente en términos del error de posición $\tilde{\theta}$:

$$JR \ddot{\tilde{\theta}} + [(kk_b + Rb_0)] \ddot{\tilde{\theta}} + kk_P \dot{\tilde{\theta}} = R\tau_d, \quad (18)$$

el cual es estable para cualquier valor de la ganancia proporcional $kk_P > 0$. Por lo tanto, en este caso (estabilidad), para asegurar que $\tilde{\theta}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, es suficiente (aunque no necesario) con no

tener perturbación ($\tau_d \equiv 0$).

2.2.2. Control con parte proporcional dominante

En algunas aplicaciones como en actuadores tipo servos de posición el control proporcional del control PID representa la parte dominante. De este modo, el control con parte proporcional dominante se refiere a un control PID bajo ganancias k_I y k_D insignificantes. Por consiguiente, la ley de control PID (11) se convierte en el control proporcional:

$$v = k_P \tilde{\theta}, \quad (19)$$

donde $k_P > 0$ es la ganancia proporcional.

Bajo esta situación (control Proporcional), el sistema en lazo cerrado (13) se reduce a:

$$\begin{aligned} JR\ddot{\theta} + [(kk_b + Rb_0)]\dot{\theta} &= k [k_P \tilde{\theta}] - R\tau_d, \\ &= k [k_P \cdot (\theta_d - \theta)] - R\tau_d, \end{aligned} \quad (20)$$

el cual puede reorganizarse como un sistema lineal de segundo orden en términos de θ :

$$JR\ddot{\theta} + [(kk_b + Rb_0)]\dot{\theta} + kk_P\theta = k \cdot k_P\theta_d - R\tau_d. \quad (21)$$

Esto puede verse como un sistema de dos entradas (θ_d, τ_d) y una salida (θ) cuya función de transferencia es:

$$\theta(s) = G_P(s)\theta_d(s) - G_D(s)\mathcal{T}_d(s), \quad (22)$$

donde

$$G_P(s) \triangleq \frac{k \cdot k_P}{[JRs^2 + (kk_b + Rb_0)s + k \cdot k_P]}, \quad (23)$$

y

$$G_D(s) \triangleq \frac{R}{k \cdot k_P} G_P(s). \quad (24)$$

Los antes definidos $G_P(s)$ y $G_D(s)$ son funciones de transferencia estables. Bajo situaciones libres de perturbación $\tau_d = 0$, y por que θ_d se supuso constante, entonces de (21) y a partir del teorema del valor final se obtiene:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = G_P(0)\theta_d = \theta_d,$$

como se deseaba en el objetivo de control de regulación de posición (10).

En resumen, suponiendo situaciones libres de perturbación ($\tau_d \equiv 0$) bajo el control con parte proporcional dominante (19) del modelo simplificado de un motor de PMDC (5), se llega a la conclusión de posicionamiento asintótico para ajuste trivial $k_P > 0$. Esta es la principal razón para adoptar tal sistema de control realimentado — Control P de motores PMDC— como la idea clave detrás de los actuadores tipo servo de posición (se desempeñan como buenos dispositivos de posicionamiento $\theta \rightarrow \theta_d$ cuando no se le conecta ninguna carga mecánica a su eje).

Capítulo 3. Modelado de servo accionamientos de posición

Los actuadores tipo servo de posición son dispositivos estándar para aplicaciones con alta demanda de exactitud de posición. Debido a su asequibilidad, confiabilidad, y simplicidad de control en lazo abierto, son a menudo utilizados en aplicaciones de robótica a pequeña escala. Los servo actuadores de posición son los elementos de accionamiento principales en robótica de bajo costo como los humanoides a escala reducida (ver Figura 11), y brazos robóticos con servo actuadores comerciales como: el robot Rascal de Robix[®] mostrado en la Figura 12 tomado de Robotbooks (2020).

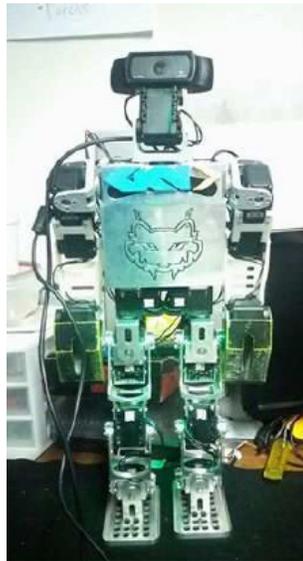


Figura 11. Humanoide robótico Tonatiuh[®] con servo actuadores de posición marca Dynamixel, (foto cortesía de la Dra. Karla Camarillo, ITCelaya).



Figura 12. Robot comercial Robix[®] con servo actuadores de posición Robotbooks (2020).

Muchos manipuladores robóticos de bajo costo destinado para entretenimiento y educación son normalmente equipados con servo actuadores de posición. Esto hace que los robots sean controlados por

posición —también llamados: robots con actuadores de posición—, lo que significa que sólo la posición articular ‘deseada’ θ_d puede ser enviada como la entrada u del robot o mecanismo servo actuado (Adhikary y Mahanta, 2017).

3.1. Componentes físicos internos de servo accionamientos de posición

Citando a Wojtusich (2011): “ Los servo actuadores son dispositivos mecatrónicos integrados con una entrada de energía eléctrica u y una salida θ de energía mecánica. El dispositivo combina un motor eléctrico, energía eléctrica y controles electrónicos así como también sensores para volverse una unidad funcional” (ver Figura 13).

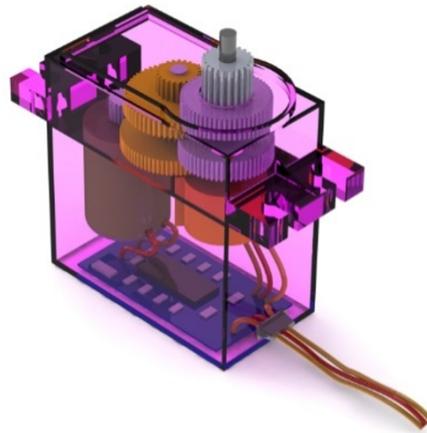


Figura 13. Bosquejo de un servo actuador de posición como unidad compacta funcional.

En resumen, un servo de posición de baja potencia está formado por los siguientes componentes (Ver Figura 14):

1. Un motor, el cual normalmente es de corriente continua con imán permanente (motor PMDC) de dimensiones y potencias pequeñas y de alta velocidad.
2. Una caja reductora por engranes que disminuye las RPM (revoluciones por minuto) del motor, mientras el par se incrementa.
3. Un sensor de posición para medir el desplazamiento angular θ del eje del servo.

4. Una tarjeta electrónica de control digital o analógico embebida (normalmente un control PID con parte Proporcional dominante).

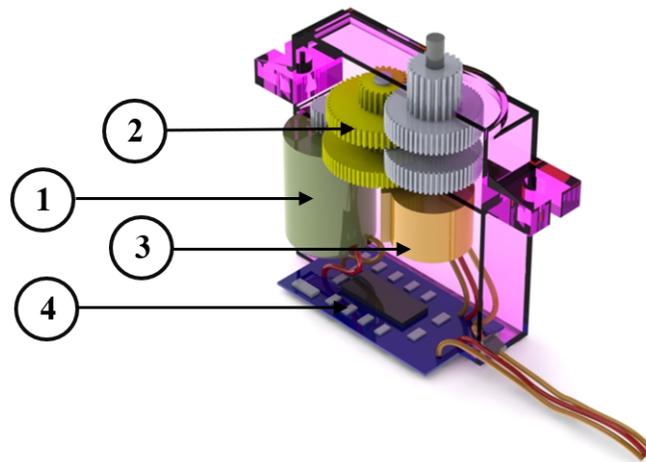


Figura 14. Componentes principales de un servo actuator de posición.

3.2. Modelado dinámico de servo accionamientos de posición

Desde un punto de vista de control automático, el diagrama de bloques de la estructura interna del servo actuator de posición se presenta en la Figura 15. Su entradas se denotan por u la cual tradicionalmente se escoge como la posición deseada θ_d para la posición del eje θ y sus salidas con ya sea θ o $\dot{\theta}$, siendo τ_d una eventual perturbación no medible de par por carga mecánica debida a la estructura mecánica (e.g., barra, disco o sistema articulado multicuerpo) que pudiese estar acoplada al eje del servo.

El voltaje en la armadura v generado por el controlador Proporcional dominante es:

$$v = k_p[u - \theta] \quad (25)$$

donde $k_p > 0$ es la ganancia proporcional (que no pueden ser modificada por el usuario).

De acuerdo con suposiciones acerca de cómo operan los servos de posición y cómo están fabricados, se pueden proponer algunos modelos matemáticos útiles para el control tales como:

- servo de posición estático ideal,

- servo de posición realista dinámico.

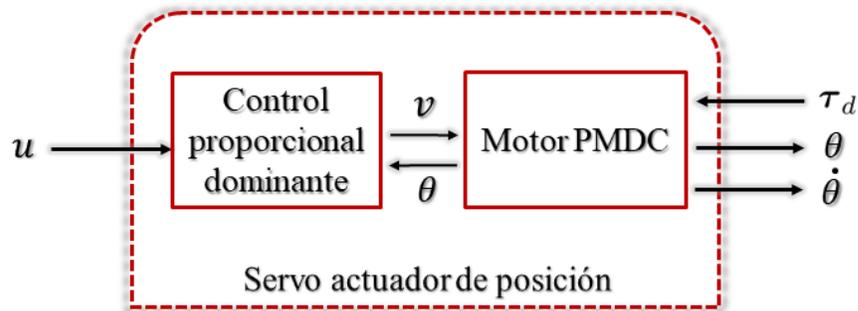


Figura 15. Diagrama de bloques de la estructura interna del servo de posición: Control P dominante de un motor PMDC.

3.2.1. Un modelo estático ideal de un servo de posición

Por modelo estático ideal de un servo de posición, en esta tesis se entiende: un servo de posición el cual es un dispositivo de posicionamiento perfecto y que tiene las siguientes características clave:

- sistema lineal identidad sin memoria,
- insensibilidad a las perturbaciones.

El modelo matemático propuesto para «*servo de posición estático ideal*» es:

$$\theta = u, \quad (26)$$

donde $u \in \mathbb{R}$ es la entrada del servo de posición —posición deseada del eje— y la salida $\theta \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ es la posición angular del eje del servo. En el anexo A se reporta el modelo y control cartesiano de un mecanismo pendular con servoaccionamiento estático ideal de posición que ha sido publicado en Zepeda et al. (2022).

3.2.2. Un modelo dinámico realista simplificado de un servo de posición

Basados en el diagrama de bloques del servo actuador de posición de la Figura 15 esta tesis considera el siguiente modelo dinámico del servo de posición (Kelly et al., 2021):

$$J R \ddot{\theta} + [(k k_b + R b_0)] \dot{\theta} + k k_P \theta = k \cdot k_P \cdot u - R \tau_d. \quad (27)$$

o de manera equivalente (multiplicando ambos lados por $1/R$), el modelo del servo de posición puede reescribirse como:

$$J \ddot{\theta} + \frac{(k k_b + R b_0)}{R} \dot{\theta} + \frac{k k_P}{R} \theta = \frac{k \cdot k_P}{R} \cdot u - \tau_d. \quad (28)$$

Los parámetros internos del motor y controlador (positivos y constantes) tienen el siguiente significado:

- R resistencia en la armadura.
- J inercia del rotor.
- L inductancia en la armadura.
- k constante de torque.
- k_b constante de fuerza electromotriz de retorno (fem).
- b_0 coeficiente de fricción viscosa.

Este modelo (28) es válido siempre y cuando las siguientes suposiciones se cumplan:

- A1. La inductancia en la armadura de la parte interna del motor de CD es despreciable.
- A2. Control interno PID con parte proporcional dominante (las partes integral y derivativa tienen valores despreciables).
- A3. No hay reducción por caja de engranajes.

3.2.3. Comportamiento cualitativo asintótico de los servos de posición

A continuación, se analiza el comportamiento del sistema servo de posición (27) vía su función de transferencia:

$$\Theta(s) = G_P(s)U(s) - G_D(s)\mathcal{T}_d(s), \quad (29)$$

donde

$$G_P(s) \triangleq \frac{k \cdot k_P}{[J R s^2 + (k k_b + R b_0)s + k \cdot k_P]},$$

y

$$G_D(s) \triangleq \frac{R}{k \cdot k_P} G_P(s).$$

Las definiciones de arriba $G_P(s)$ y $G_D(s)$ son funciones de transferencia estables (sus polos yacen en el semiplano complejo izquierdo). Bajo:

- situaciones libres de perturbación $\tau_d \equiv 0$ (sin carga aplicada al eje del servo ni interacción ni contacto con el eje mecánico),
- y con control en malla abierta $u = \theta_d$ se supone constante,

entonces de (29) y el teorema del valor final, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = G_P(0)\theta_d = \theta_d.$$

Principalmente debido a tal notable característica de los servos de posición (buena efectividad en regulación de posición: $\theta \rightarrow \theta_d$ en ausencia de perturbaciones de par), el uso de actuadores tipo servo de posición es ingenuamente extendido en un gran número de laboratorios y aplicaciones tipo hobby. Se dice 'ingenuamente' por que en muchas aplicaciones de la vida real la suposición: "libre de perturbaciones" es violada.

3.3. Modelado de un conjunto de n servo actuadores de posición

Considere un conjunto de n servo actuadores de posición modelados por (28), de modo que el i -ésimo actuador se modela de la siguiente forma:

$$J_i \ddot{\theta}_i + \frac{(k_i k_{bi} + R_i b_{0i})}{R_i} \dot{\theta}_i + \frac{k_i k_{Pi}}{R_i} \theta_i = \frac{k_i k_{Pi}}{R_i} \cdot u_i - \tau_{di}, \quad (30)$$

para $i = 1, \dots, n$.

El conjunto de n actuadores tipo servo de posición se puede reorganizar de manera equivalente en forma vectorial:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & J_n \end{bmatrix}}_{M_{PS}} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_n \end{bmatrix}}_{B_{PS}} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} + \\ & \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}}_{K_{PS}} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tau_{d1} \\ \tau_{d2} \\ \vdots \\ \tau_{dn} \end{bmatrix}, \quad (31) \end{aligned}$$

donde las constantes positivas γ_i y σ_i se definen por:

$$\gamma_i \triangleq \frac{(k_i k_{b_i} + R_i b_{0_i})}{R_i} > 0,$$

y

$$\sigma_i \triangleq \frac{k_i k_{P_i}}{R_i} > 0,$$

y las variables τ_{d_i} son perturbaciones de par por carga mecánica ¹ respecto al eje del i -ésimo servo con configuración y movimiento de una estructura mecánica acoplada a ellos, e.g., los ejes de los servos acoplados a las articulaciones de un robot manipulador o a las articulaciones de un robot humanoide. En el modelo de servo actuadores de posición (31) el subíndice PS en las matrices es un acrónimo *Position-Servo*. De manera conveniente, el modelo de servo actuadores de posición puede reescribirse como:

$$M_{PS}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + B_{PS}\dot{\boldsymbol{\theta}} + K_{PS}\boldsymbol{\theta} = K_{PS} \cdot \mathbf{u} - \boldsymbol{\tau}_d. \quad (32)$$

¹Con abuso de lenguaje, en esta tesis, la palabra par significa cualquier par o fuerza.

Capítulo 4. Modelado dinámico ortodoxo de robots con accionamientos de par

Usando la notación de robótica $\langle M, C, g \rangle$ de Kelly et al. (2005) en forma compacta, un modelo dinámico ortodoxo de robots manipuladores seriales de n GDL con actuadores de par ¹ resulta en un sistema ODE (Ordinary Differential Equations) en forma vectorial:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{d} = \boldsymbol{\tau}, \quad (33)$$

donde $\mathbf{q} = \text{col}(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de posiciones articulares, la variable $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es la función vectorial de pares inducidos o aplicados en las articulaciones del robot.

El modelo dinámico (33) relaciona el movimiento del robot $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \ddot{\mathbf{q}}(t))$ con pares aplicados o inducidos en las articulaciones $\boldsymbol{\tau}(t)$. Los significados de los componentes en el modelo (33) son:

- $M(\mathbf{q})$ es una matriz cuadrada simétrica definida positiva de dimensión $n \times n$ conocida como matriz de inercia.
- $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es una matriz cuadrada de dimensión $n \times n$ llamada matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis. Se supone que dicha matriz se obtiene a través de los símbolos de Christoffel de primera clase (Kelly et al., 2005, p. 73).
- $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares/fuerzas debidos a la aceleración gravitacional g .
- $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$ es un vector de pares con fricción en los cojinetes de las articulaciones. Sin pérdida de generalidad de aquí en adelante se supone que no hay fricción en las articulaciones del robot, i.e. $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ es un vector de par exógeno sobre la estructura mecánica del robot debido al contacto físico o a la interacción con el medio ambiente o los humanos. De aquí en adelante, se supone que $\mathbf{d} \equiv \mathbf{0}$.

Propiedades bien conocidas de la dinámica del robot (33) se enlistan en (Kelly et al., 2005, Ch. 4).

¹Actuadores de par' significa cualquier actuador de par o actuador de fuerza.

Capítulo 5. Modelado dinámico de robots con servos de posición

Considere la estructura serial de un robot manipulador de n GDL compuesto por articulaciones rígidas cuya dinámica ortodoxa es descrita por (33). En lo que respecta a los actuadores del robot, se supone:

- A1. Los n actuadores del robot en sus articulaciones son servos de posición modelados por (32).
- A2. Los ejes de los servos están rígidamente acoplados sin reducciones a las articulaciones correspondientes. Lo cual significa que:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{q}. \quad (34)$$

El modelo completo (estructura mecánica más actuadores) del servo–robot en el espacio articular está dado por:

$$\underbrace{[M(\mathbf{q}) + M_{PS}] \ddot{\mathbf{q}}}_{M_{SR}(\mathbf{q})} + \underbrace{\left[C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + B_{PS} \right]}_{C_{SR}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + K_{PS} \mathbf{q} = K_{PS} \mathbf{u}. \quad (35)$$

cuya entrada $\mathbf{u} \triangleq \text{col}(u_1 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^n$ es la señal de entrada al servo actuador de posición asociado que opera a cada articulación del robot.

Observación 2. Las matrices involucradas en el modelo del servo–robot (35) se definen a continuación:

$$\begin{aligned} M_{SR}(\boldsymbol{\theta}) &\triangleq M(\boldsymbol{\theta}) + M_{PS}, \\ C_{SR}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &\triangleq C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}), \end{aligned}$$

donde el subíndice SR se refiere a *Servo Robot*. Como era de esperarse, estas matrices dependen de los parámetros de los ‘servos de posición’ (e.g. resistencia en la armadura, ganancia de control proporcional interno, y constante de par, de cada servo actuador) así como también de los ‘parámetros dinámicos’ de la estructura mecánica del robot (e.g. masas, inercia, y longitud de los eslabones).

Observación 2. Algunas propiedades excepcionales del modelo del servo–robot (35) son:

P1. M_{SR} es una matriz simétrica definida positiva.

P2. $\dot{M}_{SR} - 2C_{SR}$ es una matriz anti-simétrica.

Similar a las propiedades de la dinámica ortodoxa estándar del robot con actuadores de par (33), las propiedades anteriores son útiles para propósitos del diseño de control.

De acuerdo con Spong (2015) en un robot con eslabones rígidos, la propiedad de antisimetría implica pasividad. El modelo del robot con servos de posición (35) es pasivo ya que la matriz:

$$\frac{1}{2}\dot{M}_{SR}(\mathbf{q}) - C_{SR}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (36)$$

es antisimétrica (cuando C se obtiene mediante los símbolos de Christoffel).

Capítulo 6. Control en lazo abierto

Considerando el mecanismo de la Figura 16, que consiste en un brazo robótico de 2GDL con servo accionamientos de posición, se realizaron simulaciones numéricas para analizar el rendimiento del modelo cuando trabaja con un control en lazo abierto. El desarrollo del modelo completo del mecanismo (estructura mecánica del brazo más los servos de posición) (35), así como los parámetros que forman parte del modelo, se explican a detalle en los Anexos D y E.

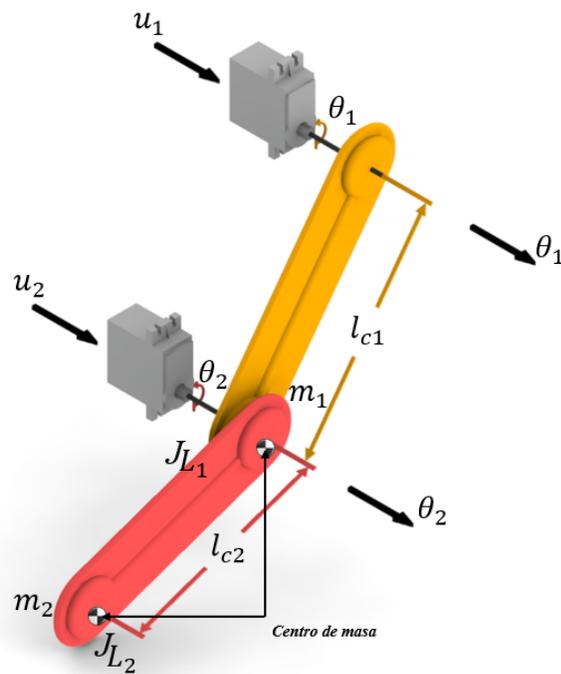


Figura 16. Brazo robótico de 2 GDL con servo actuadores de posición: «servo brazo».

Para simular, se utilizó el software de simulación numérica MATLAB[®] Simulink versión 2020a con la siguiente configuración:

- mecanismo de solución de ecuaciones diferenciales ODE45,
- método Dormand-Prince,
- paso variable,

- tolerancia del error relativo: 1×10^{-3} .

Los valores numéricos de los parámetros involucrados en el modelo del servo robot se indican en la Tabla 1.

Tabla 1. Parámetros del sistema

Brazo mecánico		
Parámetro	Valor	Unidad
β_1	0.3226	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
β_2	0.0127	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
β_3	0.0122	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
β_4	1.1743	$\text{kg} \cdot \text{m}$
β_5	0.0469	$\text{kg} \cdot \text{m}$
g	9.81	m/s^2
Servos de posición (para $i = 1, 2$)		
Parámetro	Valor	Unidad
k_i	0.0107	Nm/A
k_{P_i}	32	Nm/rad
J_i	79.6×10^{-6}	$\text{Nm}\text{s}^2/\text{rad}$
R_i	6.5	Ω
b_{0i}	4.1×10^{-3}	$\text{Nm}\text{s}/\text{rad}$
k_{bi}	0.006705	$\text{V}/(\text{rad}/\text{s})$

6.1. Objetivo de control de regulación

De aquí en adelante, en esta tesis se usa la notación equivalente indicada en la ecuación (34) de la suposición A2: $\mathbf{q} = \boldsymbol{\theta}$. Se define el error de posición articular $\tilde{\mathbf{q}}$ como:

$$\tilde{\mathbf{q}} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{d1} - q_1 \\ q_{d2} - q_2 \end{bmatrix}.$$

La regulación de posición articular se refiere a lograr que el vector de posición articular del robot $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ tienda asintóticamente a cualquier vector arbitrario pero constante de posición articular deseado $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^2$.

De manera más formal, el objetivo de control de regulación es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{q}}(t)\| = 0, \quad (37)$$

donde la norma Euclideana del error de posición articular está dada por:

$$\|\tilde{\mathbf{q}}\| \triangleq \sqrt{|\tilde{q}_1|^2 + |\tilde{q}_2|^2}.$$

El modelo del servo robot (35) se simuló bajo el enfoque de control en *lazo abierto*, control con el cual se supone que se cumpla el objetivo de control (37).

6.2. Simulación del control en lazo abierto

Durante las simulaciones, se utilizaron las condiciones iniciales de posiciones y velocidades articulares siguientes:

$$\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El vector de posiciones articulares deseadas se fijó en:

$$\begin{bmatrix} q_{d1} \\ q_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ \pi/4 \end{bmatrix} [\text{rad}]. \quad (38)$$

El ingenuo enfoque de control simulado, que siguen algunos practicantes entusiastas, es el control en lazo abierto dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{u} = \mathbf{q}_d. \quad (39)$$

Un argumento motivacional para el enfoque de control en lazo abierto (39), es que el servo de posición logra posicionamiento eficaz ($\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}_d$ or $\|\tilde{\mathbf{q}}\| \rightarrow 0$) sin carga mecánica adjunta a su eje. Sin embargo, para cumplir el objetivo de control de regulación de posición articular (37), en el caso de servo robots de n GDL (35) utilizando la ley de control (39), se puede demostrar que se necesita la siguiente condición:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}_d) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n, \quad (40)$$

la cual se satisface trivialmente para el caso en el que el modelo del robot (35) cumpla $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$.

Desafortunadamente, en esta simulación ilustrativa con el modelo de servo brazo robótico (35) se tiene:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}_d) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{q}_d) \\ g_2(\mathbf{q}_d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.8334 \\ 0.0332 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2, \quad (41)$$

donde la formula explícita de los dos componentes del vector de par gravitacional $\mathbf{g}(\cdot)$ se dan en (92).

Por consiguiente, debido a que se viola la condición necesaria (40), se espera que no se pueda cumplir el objetivo de control deseado (83). Esta conclusión se muestra en la gráfica de la Figura 17 donde la norma del error de posición $\|\tilde{\mathbf{q}}\|$ parece tender a un valor constante pero diferente de cero! (para ser exactos $\|\tilde{\mathbf{q}}\| \rightarrow 1.6202$ rad). Este resultado conduce a la sorprendente conclusión de que el ampliamente utilizado y popular control en lazo abierto (39), en general no es efectivo para mecanismos con servo accionamiento de posición tales como robots manipuladores y humanoides, inclusive con el objetivo de control más simple: regulación de posición articular!.

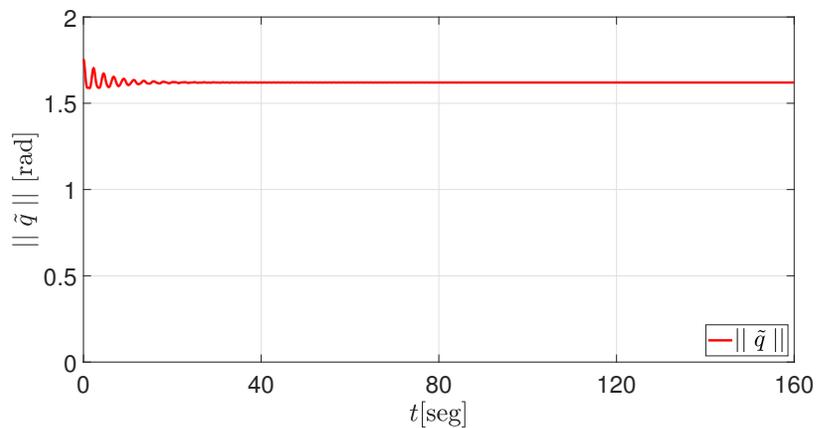


Figura 17. Norma del error de posición articular $\|\tilde{\mathbf{q}}\|$: Control en lazo abierto $\mathbf{u} = \mathbf{q}_d$.

Capítulo 7. Control en coordenadas articulares

A partir de un brazo robótico de 2GDL con servo accionamientos de posición, como el mecanismo que se muestra en la Figura 18, se realizaron simulaciones numéricas para analizar el rendimiento del modelo cuando trabaja con un control en lazo cerrado. El desarrollo del modelo completo del mecanismo (estructura mecánica del brazo más los servos de posición) (35), así como los parámetros que forman parte del modelo, se explican a detalle en los Anexos D y E.

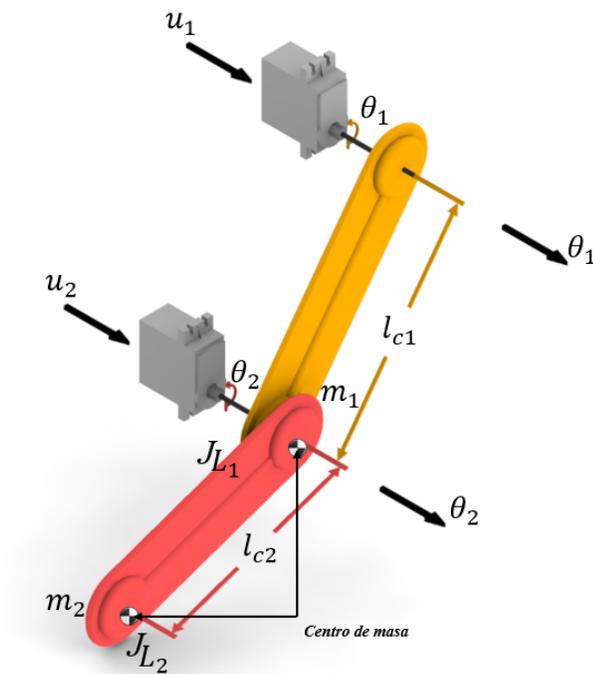


Figura 18. Brazo robótico de 2 GDL con servo actuadores de posición: «servo brazo».

Para simular, se utilizó el software de simulación numérica MATLAB[®] Simulink versión 2020a con la siguiente configuración:

- mecanismo de solución de ecuaciones diferenciales ODE45,
- método Dormand-Prince,
- paso variable,

- tolerancia del error relativo: 1×10^{-3} .

Los valores numéricos de los parámetros involucrados en el modelo del servo robot se indican en la Tabla 2.

Tabla 2. Parámetros del sistema

Brazo mecánico		
Parámetro	Valor	Unidad
β_1	0.3226	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
β_2	0.0127	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
β_3	0.0122	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
β_4	1.1743	$\text{kg} \cdot \text{m}$
β_5	0.0469	$\text{kg} \cdot \text{m}$
g	9.81	m/s^2
Servos de posición (para $i = 1, 2$)		
Parámetro	Valor	Unidad
k_i	0.0107	Nm/A
k_{P_i}	32	Nm/rad
J_i	79.6×10^{-6}	Nms^2/rad
R_i	6.5	Ω
b_{0i}	4.1×10^{-3}	Nms/rad
k_{b_i}	0.006705	$\text{V}/(\text{rad}/\text{s})$

7.1. Objetivo de control de regulación

Se define el error de posición articular $\tilde{\mathbf{q}}$ (por la suposición A2 en $\mathbf{q} = \boldsymbol{\theta}$ (34)) como:

$$\tilde{\mathbf{q}} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{d1} - q_1 \\ q_{d2} - q_2 \end{bmatrix}.$$

La regulación de posición articular se refiere a lograr que el vector de posición articular del robot $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ tienda asintóticamente a cualquier vector arbitrario pero constante de posición articular deseado $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^2$.

De manera más formal, el objetivo de control de regulación es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{q}}(t)\| = 0, \quad (42)$$

donde la norma Euclídeana del error de posición articular está dada por:

$$\|\tilde{\mathbf{q}}\| \triangleq \sqrt{|\tilde{q}_1|^2 + |\tilde{q}_2|^2}.$$

El modelo del servo robot (35) se simuló bajo el enfoque de control en *lazo cerrado*, control con el cual se busca que se cumpla el objetivo de control (42).

7.2. Simulación del control en lazo cerrado

Durante las simulaciones, se utilizaron las condiciones iniciales de posiciones y velocidades articulares siguientes:

$$\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El vector de posiciones articulares deseadas se fijó en:

$$\begin{bmatrix} q_{d1} \\ q_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ \pi/4 \end{bmatrix} [\text{rad}]. \quad (43)$$

Debido a que en general con el popular controlador en lazo abierto (39) no se puede lograr el objetivo de control de regulación (42), en esta tesis se propone el siguiente control en lazo cerrado donde se realimentan la posición articular \mathbf{q} y la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{q}_d + K_{PS}^{-1} [-K_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})], \quad (44)$$

donde $K_v = K_v^T > 0$. La matriz K_{PS} se obtiene de su definición dada en la ecuación (31):

$$K_{PS} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0527 & 0 \\ 0 & 0.0527 \end{bmatrix}.$$

La matriz de ganancia del control K_v se eligió como una matriz identidad. La norma del error de posición $\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\|$ como resultado de las simulaciones numéricas se grafica en la Figura 19, donde se observa una clara convergencia a cero. Por consiguiente, se logra alcanzar el objetivo de control de regulación (42), así como también $\dot{\mathbf{q}} \rightarrow 0$. Esto puede probarse matemáticamente aplicando la teoría de Lyapunov. La evolución en el tiempo de las acciones de control u_1 y u_2 calculadas a partir de la acción de control propuesta se muestra en la Figura 20. La señales de control u_1 y u_2 tienden a los valores en estado estacionario proyectados teóricamente, y calculados a a partir de (44), que se dan a continuación:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{u}(t) = \mathbf{q}_d + K_{PS}^{-1} [\mathbf{g}(\mathbf{q}_d)] = \begin{bmatrix} 226.1135 \\ 1.4154 \end{bmatrix} [\text{rad}].$$

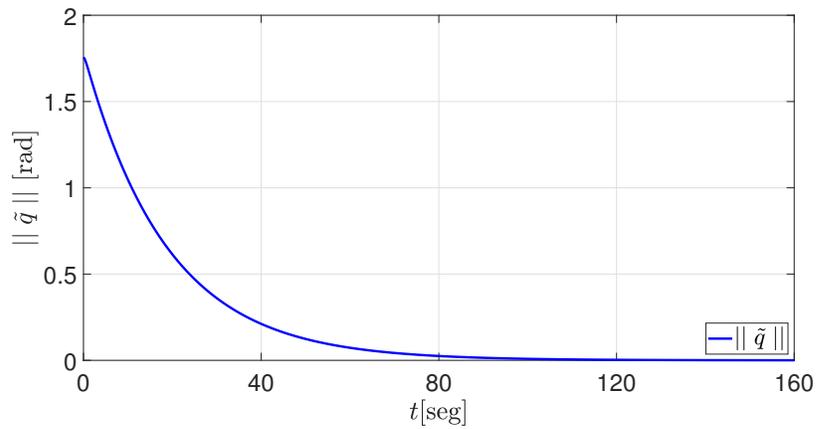


Figura 19. Norma del error de posición $\|\tilde{\mathbf{q}}\|$: Control en lazo cerrado $\mathbf{u} = \mathbf{q}_d + K_{PS}^{-1} [-K_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})]$.

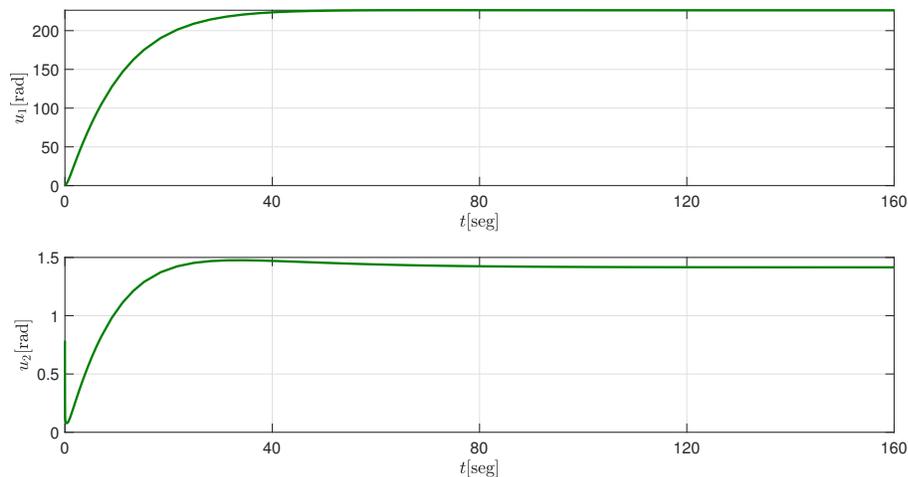


Figura 20. Señal de control $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T$: bajo control realimentado $\mathbf{u} = \mathbf{q}_d + K_{PS}^{-1} [-K_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})]$.

La utilidad de la ley de control en lazo cerrado (44) también surge en el control de robots humanoides de n GDL con actuadores del tipo servo de posición y equipados con sensores de posición articular.

Capítulo 8. Campo de velocidad en coordenadas articulares

El control pasivo de campo de velocidad de robots manipuladores de n Grados De Libertad fue introducido por Li y Horowitz (1999). Esta filosofía de control puede ser una alternativa útil al control de seguimiento. En pocas palabras, en este enfoque de control (basado originalmente en conceptos de pasividad), la tarea del robot es codificada por medio de un campo vectorial de velocidad deseado suave $v(\mathbf{y}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ donde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ es la salida del robot, e.g., posición cartesiana o posición articular \mathbf{q} . En esta tesis se enfoca en la posición articular como salida del robot, i.e., $\mathbf{y} = \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, aunque para el caso general de la salida del robot $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{q})$ los desarrollos presentados aplican *mutatis mutandis*.

Un campo de velocidad define un vector tangente (la velocidad deseada $\dot{\mathbf{y}}$ de la salida del robot \mathbf{y}) en cada punto en la configuración del espacio de tareas. En la Figura 21 se observa un ejemplo para $m = n = 2$ donde el campo de velocidad tiene a “dibujar” un círculo en un plano.

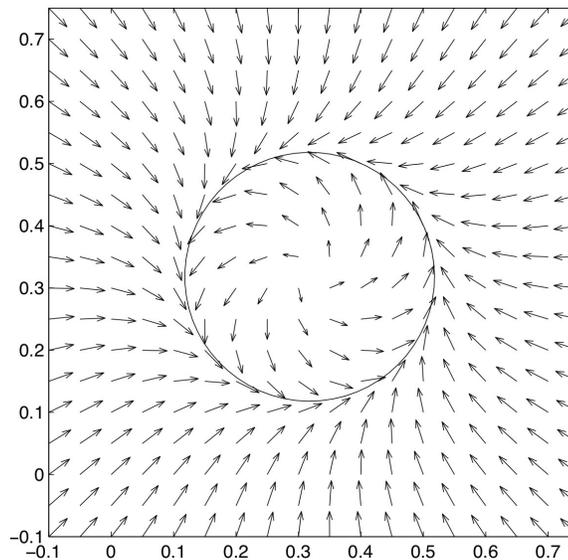


Figura 21. Un campo de velocidad deseado.

8.1. Campo de velocidad

A pesar de que un controlador pasivo original de campo de velocidad fue introducido por primera vez en Li y Horowitz (1999) bajo un enfoque de pasividad, esta tesis toma prestado el objetivo de control de campo de velocidad redefinido después en Moreno y Kelly (2002), pero sin tomar en cuenta ni el

requerimiento pasivo ni la formulación pasiva. De manera más precisa, aplicando conceptos de Moreno y Kelly (2002) al control en el espacio articular, se introduce lo siguiente:

Definición 3. Objetivo de control de campo de velocidad.

Dado un campo vectorial deseado suave definido por el usuario $\mathbf{v}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, el objetivo de control de campo de velocidad en el espacio articular se define por:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{v}(\mathbf{q}(t)) - \dot{\mathbf{q}}(t)] = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n. \quad (45)$$

En términos generales, el objetivo de control de campo de velocidad se refiere a que el comportamiento del sistema en lazo cerrado descrito por la dinámica de la salida del robot $\mathbf{y} = \mathbf{q}$ coincida asintóticamente con las líneas de flujo representadas por flechas en el campo de velocidad; es decir, que tienda a comportarse como $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}(\mathbf{q})$.

Observación 3. La definición anterior (definición 3) puede extenderse directamente *mutatis mutandis* al espacio operacional para la salida del robot $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{q})$ donde $\mathbf{h}(\mathbf{q})$ representa la cinemática directa, pero puede ser cualquier otra función suave de posiciones articulares.

Por otra parte, la teoría de control ortodoxa actual de robots manipuladores se basa principalmente en supuestos tácitos de que los robots están equipados con actuadores de par/fuerza sin memoria ideales capaces de producir los pares o fuerzas solicitados. Esta es la razón por la cual se les llama: robots con accionamientos de par. Por consiguiente, la mayoría de las leyes de control requieren control directo de los pares del motor (actuador) lo cual implica que podría ser complicado aplicar directamente esas leyes de control académicas basadas en pares a los robots industriales comercializados en la vida real, los cuales únicamente están provistos de servos de velocidad o posición convencionales Suh et al. (1995).

No obstante, actualmente diversos laboratorios de robótica y mecatrónica en escuelas y universidades están equipados con dispositivos robóticos rentables (tales como brazos robóticos a escala reducida y humanoides (robots bípedos)) actuados por servo actuadores de posición en vez de los de par/fuerza los cuales se enseñan en los salones de clases.

De este modo, los aparatos de laboratorio antes mencionados no cuentan con entradas de par del tipo académicas si no que en su lugar, tienen señales de entrada de posición articular deseada para sus robots con servo actuadores de posición.

8.2. Propuesta de controlador de campo de velocidad

Considérese la información expuesta anteriormente, de manera más específica el modelo simplificado de servo actuadores de posición (28) descrito en el capítulo 3, el modelo dinámico de robots manipuladores con servo actuadores de par (33) explicado en el capítulo 4, y el modelo dinámico completo del servo robot manipulador (35) propuesto en el capítulo 5.

Inspirados a partir de un controlador de campo de velocidad en el espacio operacional presentando en Moreno y Kelly (2002), esta investigación propone el siguiente controlador basado en el enfoque de dinámica inversa:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{q} + K_{PS}^{-1} [B_{PS}\dot{\mathbf{q}} + M_{SR}(\mathbf{q})\mathbf{u}_o + C_{SR}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})], \\ \mathbf{u}_o &= \left[\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} + K_v [\mathbf{v}(\mathbf{q}) - \dot{\mathbf{q}}] + K_p \boldsymbol{\xi} \right], \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} &= [\mathbf{v}(\mathbf{q}) - \dot{\mathbf{q}}], \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

donde K_p y K_v son matrices simétricas definidas positivas arbitrarias seleccionadas por el usuario. Se define el vector del error del campo de velocidad $\mathbf{e}_v \in \mathbb{R}^n$ como:

$$\mathbf{e}_v \triangleq \mathbf{v}(\mathbf{q}) - \dot{\mathbf{q}}. \quad (47)$$

Por consiguiente el objetivo de control de campo de velocidad (45) puede escribirse de manera equivalente como se muestra a continuación:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_v(t)\| = 0. \quad (48)$$

La derivada respecto al tiempo $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ de (46) resulta en:

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}. \quad (49)$$

8.2.1. Sistema en malla cerrada

El sistema en malla cerrada se obtiene al sustituir la acción de control u del controlador propuesto (46) en el modelo del servo robot (35), lo cual da como resultado:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \left[\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + K_v [\mathbf{v}(\mathbf{q}) - \dot{\mathbf{q}}] + K_p \boldsymbol{\xi} \right],$$

o reorganizando:

$$\mathbf{0} = \left[\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}} + K_v [\mathbf{v}(\mathbf{q}) - \dot{\mathbf{q}}] + K_p \boldsymbol{\xi} \right],$$

lo cual gracias a (49) a su vez se lee:

$$\left[\ddot{\boldsymbol{\xi}} + K_v \dot{\boldsymbol{\xi}} + K_p \boldsymbol{\xi} \right] = \mathbf{0}. \quad (50)$$

8.2.2. Análisis

El sistema en malla cerrada (50) puede reescribirse en forma normal como el siguiente sistema lineal:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -K_p & -K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix},$$

el cual es un sistema globalmente asintóticamente estable, en virtud de que las matrices K_p y K_v de dimensión $n \times n$ son definidas positivas. A su vez, esto implica que $\boldsymbol{\xi}$ y $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ se anulan asintóticamente. Siendo más específicos, de la expresión $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ en la tercera ecuación de (46) se puede concluir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{v}(\mathbf{q}(t)) - \dot{\mathbf{q}}(t)] = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n,$$

o equivalentemente usando la definición del error del campo de velocidad (47):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_v(t)\| = 0,$$

lo que significa que se garantizan los objetivos de control de campo de velocidad (45) y (48).

8.3. Simulaciones numéricas

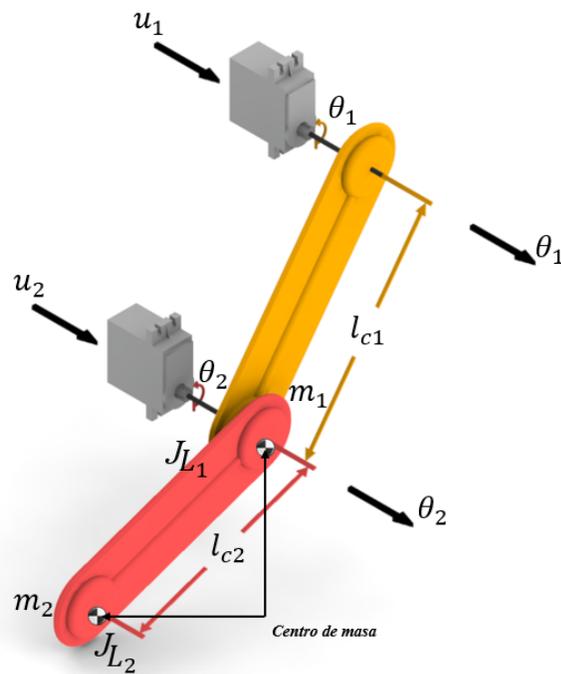


Figura 22. Brazo robótico de 2GDL con servo accionamientos de posición: «servo robot».

Se simuló un robot de 2 GDL con accionamientos tipo servo de posición (ver Figura 22 donde debe considerarse que $q_i = \theta_i$ con $i = 1, 2$) bajo control por campo de velocidad en coordenadas articulares, la estructura del modelo del robot está dado por la ecuación (35).

Las simulaciones se llevaron a cabo en el software de simulación numérica MATLAB[®] Simulink versión 2020a utilizando la función ODE45 (Dormand Price) con paso variable y tolerancia relativa de $1e^{-1}$. Los valores numéricos de los parámetros del sistema (brazo mecánico y servos de posición), involucrados en

el modelo del servo robot (35), se muestran en la Tabla 3 . Las condiciones iniciales para las posiciones y velocidades articulares del robot son respectivamente:

$$\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} [\text{rad}],$$

$$\dot{\mathbf{q}}(0) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\text{rad/s}].$$

Tabla 3. Parámetros del sistema

Brazo mecánico		
Parámetro	Valor	Unidad
β_1	0.3226	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
β_2	0.0127	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
β_3	0.0122	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
β_4	1.1743	$\text{kg} \cdot \text{m}$
β_5	0.0469	$\text{kg} \cdot \text{m}$
g	9.81	m/s^2
Servos de posición (para $i = 1, 2$)		
Parámetro	Valor	Unidad
k_i	0.0107	Nm/A
k_{P_i}	32	Nm/rad
J_i	79.6×10^{-6}	$\text{Nm}\text{s}^2/\text{rad}$
R_i	6.5	Ω
b_{0i}	4.1×10^{-3}	$\text{Nm}\text{s}/\text{rad}$
k_{bi}	0.006705	$\text{V}/(\text{rad}/\text{s})$

8.3.1. Campo de velocidad deseado

Para fines de la simulación se utiliza el control de campo de velocidad propuesto en la ecuación (46), los valores seleccionados para las matrices de ganancia son los siguientes: $K_v = \text{diag}(20, 20)$ y $K_p = \text{diag}(2000, 2000)$; el campo vectorial de velocidad deseado suave $\mathbf{v}(\mathbf{q})$ elegido se expresa a continuación (ver Figura 23 donde el flujo tiende a un círculo deseado):

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{q}) + \frac{c_0}{\sqrt{(q_1 - q_{c1})^2 + (q_2 - q_{c2})^2}} \begin{bmatrix} -(q_2 - q_{c2}) \\ (q_1 - q_{c1}) \end{bmatrix}, \quad (51)$$

donde:

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{q}) = \frac{-k[(q_1 - q_{c1})^2 + (q_2 - q_{c2})^2 - r_0^2]}{\sqrt{(q_1 - q_{c1})^2 + (q_2 - q_{c2})^2}} \begin{bmatrix} (q_1 - q_{c1})^2 \\ (q_2 - q_{c2})^2 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Los valores numéricos de los parámetros del campo de velocidad deseado que se usaron en las simulaciones son: $c_0 = 0.3$, $k = 0.3$, el radio del círculo $r_0 = 1$ y las coordenadas del centro del círculo $q_{1c} = 1.5$ y $q_{2c} = 1.5$, estas coordenadas son seleccionadas por el usuario de acuerdo al campo de velocidad que se requiera. El parámetro c_0 representa la velocidad tangencial respecto al círculo, y el parámetro k gobierna que tan rápido el flujo se aproxima al círculo de forma perpendicular.

En la Figura 23 se puede observar una imagen del campo vectorial de velocidad deseado (51), el cual describe un contorno circular atractivo.

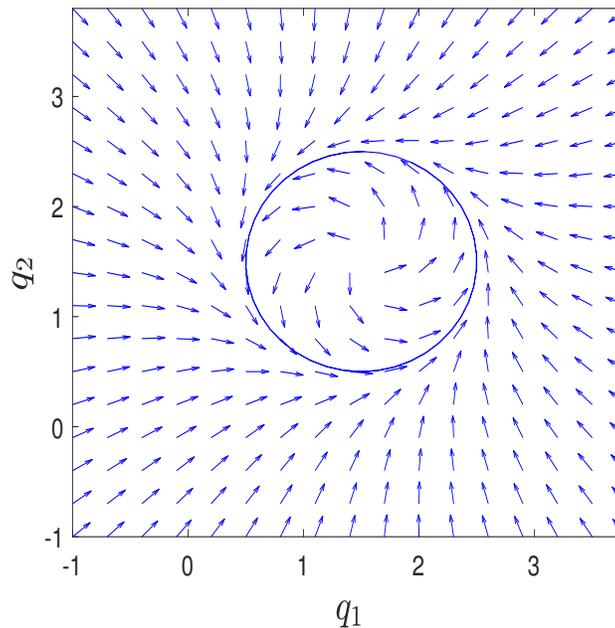


Figura 23. Campo de velocidad deseado $\mathbf{v}(\mathbf{q})$ definido en (51).

8.3.2. Resultados gráficos

En este apartado se presentan los resultados gráficos de las simulaciones numéricas. El objetivo de las simulaciones es visualizar el rendimiento de controlador de campo de velocidad propuesto en la Ecuación

(46) en un robot manipulador con actuadores del tipo servo de posición de 2 GDL modelado por (35).

Por lo tanto, en la Figura 24 se muestra el seguimiento del brazo robótico al contorno circular (campo de velocidad deseado $v(q)$). En consecuencia, la Figura 25 confirma que la norma del error del campo de velocidad $\|e_v(t)\|$ tiende asintóticamente ($t \rightarrow \infty$) a cero, lo anterior significa que se logran los objetivos de control (45) y (48).

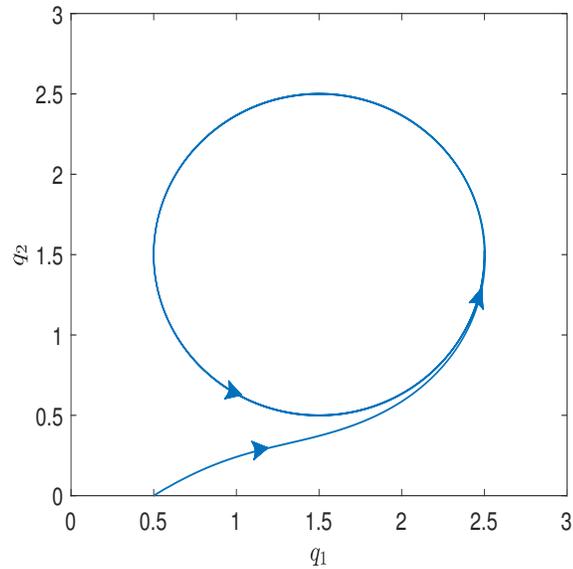


Figura 24. Seguimiento del robot al contorno circular $v(q)$.

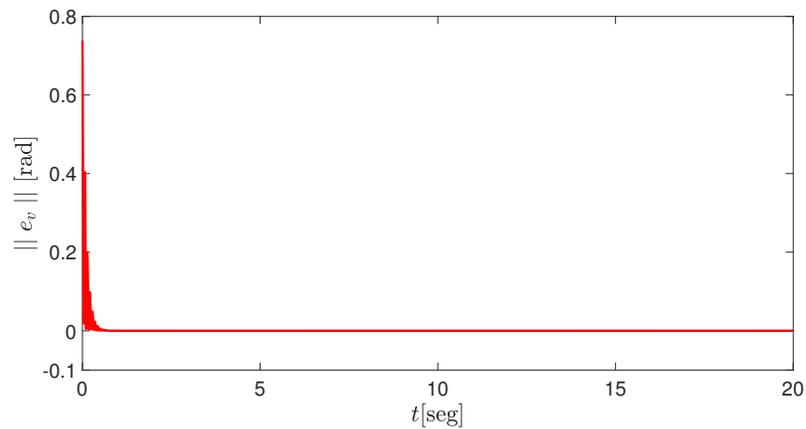


Figura 25. Norma del error de campo de velocidad $\|e_v(t)\|$.

Capítulo 9. Conversión para control de robots con servo accionamientos de posición

Los robots como objetos que se pueden controlar automáticamente incorporan sensores y actuadores. La mayoría de los robots industriales son controlados con comandos de posición articular, algunos de estos robots están equipados con servo actuadores que no aceptan en absoluto señales de entrada de par/fuerza.

Desde un punto de vista académico en el ámbito de control automático, la teoría de control actual tradicional de robots manipuladores se basa a menudo en la suposición implícita pero muy fuerte de que están equipados con actuadores de par/fuerza ideales sin memoria capaces de producir los pares o fuerzas que se les demanda. En la Figura 26 se observa un diagrama de bloques del enfoque de control de robots con accionamientos de par, formado a partir del sistema completo Σ_A donde se requiere el modelo ortodoxo de robots con accionamientos de par Σ_{T-dR} (33) y un controlador de par Σ_{TC} .

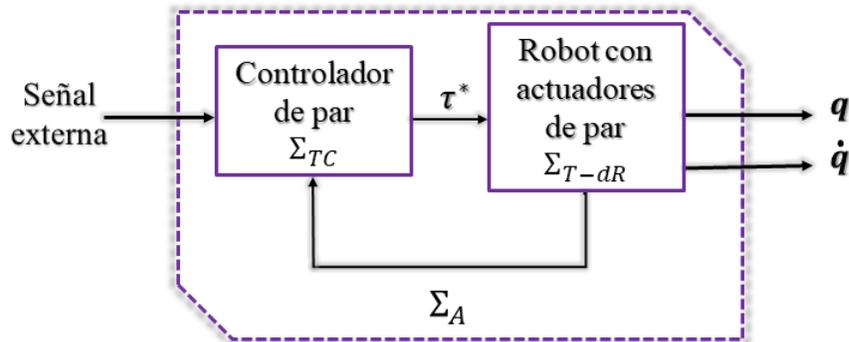


Figura 26. Diagrama de bloques del enfoque de control ortodoxo Σ_{TC} de robots con actuadores de par Σ_{T-dR} .

Muchas leyes de control académicas requieren controlar directamente los actuadores de par, esto implica una complicación al implementarlas en la mayoría de los robots industriales comerciales y robots didácticos, equipados en su mayoría solamente con actuadores convencionales del tipo servo de posición o servo de velocidad (Suh et al., 1995). En la Figura 27 se observa un diagrama de bloques del enfoque de control realimentado de robots con accionamientos de posición, formado a partir del sistema completo Σ_A donde se requiere el modelo de robots con servo accionamientos de tipo posición Σ_{SR} (35) y un controlador que solicita posición articular Σ_{SRC} .

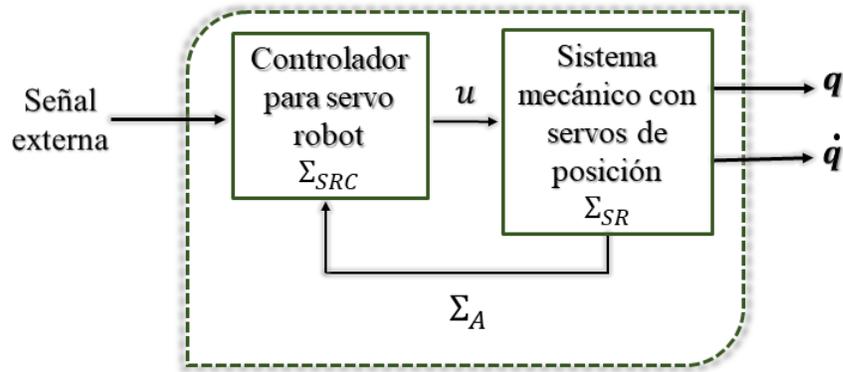


Figura 27. Diagrama de bloques del control realimentado Σ_{SRC} de robots con servo actuadores de posición Σ_{SR} .

A pesar de que los controladores diseñados para robots con actuadores de par no se pueden probar de manera directa en robots con servos de posición, en un contexto académico y teórico de investigación en control, se prefieren los modelos dinámicos de los robots con actuadores de par basados en el Lagrangiano. Motivados a partir de la interrogante ¿Cómo podemos aplicar un controlador de par en un robot que cuenta con accionamientos del tipo servo de posición?, en este capítulo se introduce una manera de convertir controladores diseñados para robots con actuadores de par para implementarlos en robots con servos de posición que tienen la misma estructura mecánica del robot con actuadores de par pero con una clase diferente de actuadores (servo actuadores de posición en lugar de servo actuadores de par).

9.1. Controlador de conversión propuesto

Considerando la ley de control de un controlador de par, denotado por Σ_{TC} , diseñado para el modelo dinámico ortodoxo de robots con actuadores de par (33), en esta sección denotado por Σ_{T-dR} :

$$\Sigma_{TC} : \left\{ \begin{array}{l} \tau^* = \mathcal{T}^*(q, \dot{q}, \dots). \end{array} \right. \quad (53)$$

Esta ley de control (53) depende de la posición articular q y de la velocidad articular \dot{q} , así como de la estructura matemática y parámetros del modelo del robot (33), y también de señales exógenas (referencias o perturbaciones medibles).

El '*comportamiento del sistema de control del robot*' Σ_A (ver Figura 26) está gobernado por el sistema en lazo cerrado dado por:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}^*. \quad (54)$$

El 'comportamiento del control del robot' se refiere a la evolución en el tiempo de las funciones vectoriales del robot: posición $\mathbf{q}(t)$, velocidad $\dot{\mathbf{q}}(t)$, y aceleración $\ddot{\mathbf{q}}(t)$. Para obtener un controlador bien diseñado, tal comportamiento debe satisfacer un objetivo de control especificado por el usuario el cual codifica la tarea deseada del robot.

Esta investigación supone que se dispone de una ley de control de par Σ_{TC} , dígase $\boldsymbol{\tau}^*$ como en (53), diseñada para un robot con actuadores de par Σ_{T-dR} . La cuestión es: ¿Cómo probar tal control (53) sobre la misma estructura matemática la cual está realmente equipada con servo actuadores de posición en lugar de servo actuadores de par?.

Aprovechando la naturaleza completamente actuada del modelo del servo robot (35), en esta tesis se propone el siguiente controlador de conversión Σ_{SRC} de (53) basado en método de diseño de control por dinámica inversa:

$$\Sigma_{SRC} : \begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{q} + K_{PS}^{-1}[B_{PS}\dot{\mathbf{q}} + M_{SR}(\mathbf{q})\mathbf{u}_o + \\ C_{SR}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})], \\ \mathbf{u}_o = M(\mathbf{q})^{-1}[-C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}^*]. \end{cases} \quad (55)$$

Observación 4: Para la implementación del control de conversión (55) se requiere la medición de \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$. El sentido físico de su acción de control \mathbf{u} son los valores de referencia o set point de los servo actuadores de posición en las articulaciones del robot.

9.1.1. Sistema en lazo cerrado

El sistema en lazo cerrado se obtiene al sustituir la acción de control \mathbf{u} del controlador propuesto (55) en el modelo del servo robot (35), por lo tanto se tiene:

$$\ddot{\mathbf{q}} = M(\mathbf{q})^{-1} [-C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}^*],$$

o reordenando:

$$\mathbf{0} = [-M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}^*],$$

esta última expresión coincide exactamente con el comportamiento deseado del sistema del robot dado por el modelo (54) para todo $t \geq 0$. Por consiguiente, los sistemas en las Figuras 26 y 27 se comportan de la misma forma.

9.2. Simulaciones numéricas

Simulaciones numéricas del modelo del robot (35) aplicando el control de conversión (55) se realizaron con la interfaz de diagrama de bloques (Simulink) del software de simulación numérica MATLAB[®]. Para este propósito se utilizó el modelo de un robot de 2GDL y un control Proporcional Derivativo (PD) con compensación de gravedad. Dicho controlador es una propuesta para la ley de control de par ($\boldsymbol{\tau}^*$) a ser convertida, con esto se espera se logre el objetivo de control de regulación de posición articular.

9.2.1. Modelo del servo robot de 2GDL

El modelo del robot con servo accionamientos de posición desarrollado para 2GDL se basa en la ecuación (35). Para un mejor entendimiento del resultado de las simulaciones, los elementos que forman parte del modelo (modelo dinámico ortodoxo más modelo de los servo actuadores) se explican se explica a detalle en los anexos E y D, una imagen esquemática de un servo brazo de 2GDL se observa en la Figura 28.

9.2.2. Controlador

El control de conversión Σ_{SRC} empleado para simular se propuso anteriormente en la ecuación (55). Para simular, el control requiere un controlador de par Σ_{TC} diseñado para el modelo ortodoxo de robots con accionamientos de par (33) Σ_{T-dR} . En este caso en particular, se aplicó un control PD con compensación de gravedad como el control de par Σ_{TC} requerido.

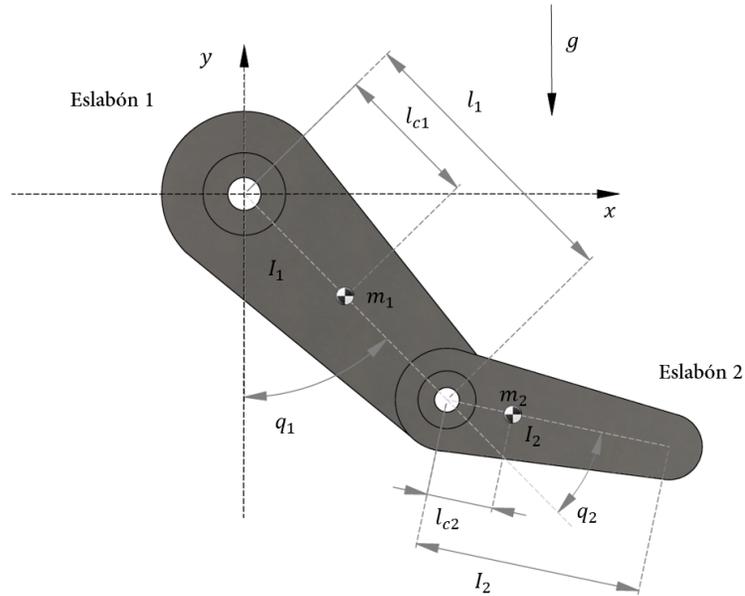


Figura 28. Imagen esquemática de la geometría de un brazo robótico de 2 GDL.

9.2.2.1. Controlador de par

Se define el error de posición $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^2$ como:

$$\tilde{\mathbf{q}} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{d1} - q_1 \\ q_{d2} - q_2 \end{bmatrix},$$

donde q_d es cualquier constante arbitraria que representa la posición articular deseada. El control PD con compensación de gravedad está dado por la siguiente ecuación (Kelly et al., 2005):

$$\boldsymbol{\tau}^* = K_{pt}\tilde{\mathbf{q}} + K_{vt}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}), \quad (56)$$

donde $K_{pt}, K_{vt} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ son las matrices de ganancia del control las cuales son simétricas, definidas positivas, y son seleccionadas por el diseñador.

La ley de control (56) genera que el vector de posición articular $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ del robot tienda asintóticamente a cualquier valor deseado $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^2$ arbitrario pero constante. Formalmente, con la ley de control PD con

compensación de gravedad (56) del modelo dinámico del robot con actuadores de par (33), se espera que se cumpla lo que se enuncia a continuación:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{q}}(t)\| = 0. \quad (57)$$

9.2.2.2. Controlador de conversión

Reemplazando el controlador de par Σ_{TC} (56) en el control de conversión Σ_{SRC} (55), se tiene una nueva expresión para el control de conversión:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{q} + K_{PS}^{-1}[B_{PS}\dot{\mathbf{q}} + M_{SR}(\mathbf{q})\mathbf{u}_o + \\ C_{SR}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})], \\ \mathbf{u}_0 = M(\mathbf{q})^{-1}[-C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + K_{pt}\tilde{\mathbf{q}} + K_{vt}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}. \end{cases} \quad (58)$$

En resumen, el controlador de la ecuación anterior (58) corresponde al control PD con compensación de gravedad (55) convertido (gracias al método propuesto (55)) para funcionar con robot manipuladores con servo accionamientos de posición (33). De este modo, se espera que se logre regulación de posición articular global ($\|\tilde{\mathbf{q}}\| \rightarrow 0$) cuando se utiliza el controlador (58) sobre robots con servo accionamientos de posición. Para demostrar lo declarado anteriormente, se realizaron simulaciones numéricas.

9.3. Resultados en simulación

Se configuró el software de simulación numérica con ODE45 (Dormand-Prince pair) como motor para resolver las ecuaciones diferenciales, con paso variable y tolerancia relativa de $1e10^{-3}$, bajo las condiciones iniciales de posición y velocidad articular del robot siguientes:

$$\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [rad]},$$

$$\dot{\mathbf{q}}(0) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [rad/s]}.$$

El vector de posición articular deseada se fija en los valores constantes indicados a continuación:

$$\begin{bmatrix} q_{d1} \\ q_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/3 \\ \pi/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{rad} \end{bmatrix}. \quad (59)$$

Las matrices de ganancia del control se eligieron de la siguiente manera:

$$K_{pt} = \text{diag}\{K_{pt}\} = \text{diag}\{40\}[\text{rad}],$$

$$K_{vt} = \text{diag}\{K_{vt}\} = \text{diag}\{8, 4\}[\text{Nms/rad}].$$

9.3.1. Parámetros numéricos

Los valores numéricos de los parámetros del brazo mecánico y de los servo de posición que forman parte del modelo del servo robot (35) se enlistan en la Tabla 4.

Tabla 4. Parámetros del sistema

Brazo mecánico		
Parámetro	Valor	Unidad
β_1	0.3226	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
β_2	0.0127	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
β_3	0.0122	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
β_4	1.1743	$\text{kg} \cdot \text{m}$
β_5	0.0469	$\text{kg} \cdot \text{m}$
g	9.81	m/s^2
Servos de posición (para $i = 1, 2$)		
Parámetro	Valor	Unidad
k_i	0.0107	Nm/A
k_{P_i}	32	Nm/rad
J_i	79.6×10^{-6}	Nms^2/rad
R_i	6.5	Ω
b_{0_i}	4.1×10^{-3}	Nms/rad
k_{b_i}	0.006705	$\text{V}/(\text{rad}/\text{s})$
γ_i	0.0041	Nms/rad
σ_i	0.0527	$\text{N}^2\text{m}^2\text{V}/\text{rad}$

9.3.2. Resultados gráficos

Las Figuras 29, 30, 31 muestran los resultados gráficos de las simulaciones. La Figura 29 presenta una comparación entre la posición articular real de robot y la posición articular deseada. La Figura 30 expone la normal del error de posición articular, la cual tiende asintóticamente a cero como se esperaba en la definición del objetivo de control 57. Finalmente, en la Figura 31 se observan las acciones de control u_1 y u_2 que tienden a los siguientes valores:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_1(t) = 198.9780 \text{ [rad]}, \quad (60)$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_2(t) = 1.4216 \text{ [rad]}. \quad (61)$$

A pesar de que se cumple el objetivo de control (57), se observa que los límites anteriores no coinciden con los valores deseados en la ecuación (59). Esto debido al efecto del vector de gravedad (92) en el modelo del servo brazo. De hecho, los límites(60) y (61) pueden calcularse teóricamente por la fórmula:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{u}(t) = \mathbf{q}_d + K_{PS}^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{q}_d). \quad (62)$$

Por tanto, resulta evidente que si $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{q}_d$.

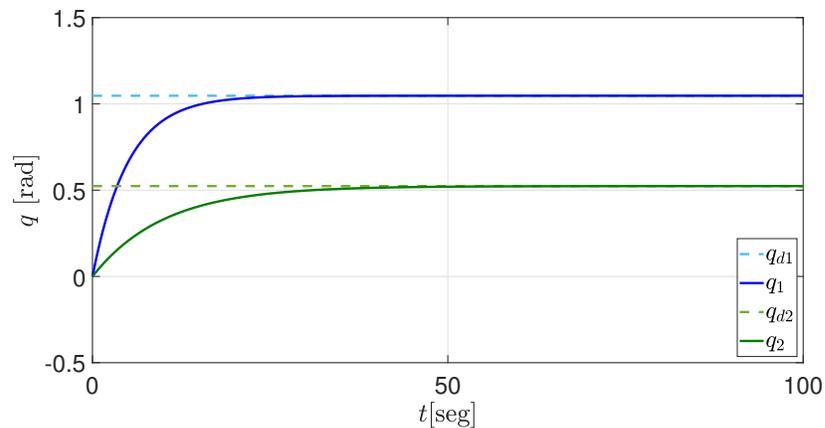


Figura 29. Trayectorias de la posición articular $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2]^T$.

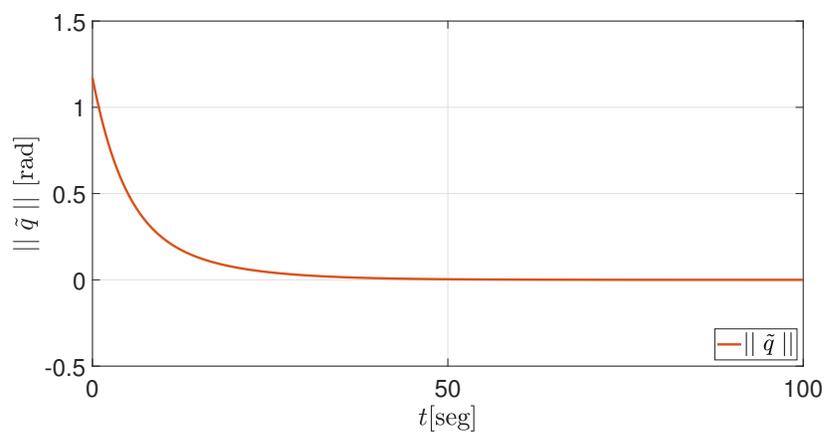


Figura 30. Norma del error de posición articular $\|\tilde{q}\|$.

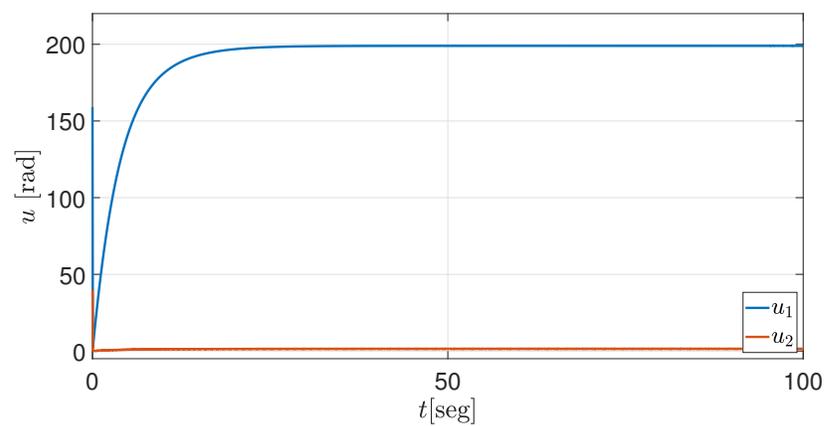


Figura 31. Señales de control u_1 y u_2 .

Capítulo 10. Conclusiones

En esta tesis se presentó el modelo de robots manipuladores articulados de n GDL equipados con servo accionamientos de posición. La utilidad de este modelo radica en robótica para la educación y la investigación de bajo costo, donde es de interés el diseño de sistemas de control a lazo cerrado realimentado.

Con base en un servo actuador de posición modelado por un sistema dinámico de segundo orden, el cual incluye perturbaciones de par debido a carga mecánica adjunta al eje del servo, se introdujo un modelo dinámico general para robots manipuladores de n GDL con actuadores de tipo servo de posición, así como también dos propiedades importantes que aplican de igual manera que en el modelo dinámico ortodoxo de robots manipuladores, la definición positiva de la matriz de inercia equivalente y la llamada propiedad de antisimetría relacionada a la pasividad.

Se analizaron los enfoques de control en lazo abierto y lazo cerrado para el modelo de robots manipuladores de dos grados de libertad, concluyendo que los servo actuadores de posición son efectivos cuando se aplican para operar mecanismos de n GDL, tales como robots manipuladores y robots humanoides bajo carga mecánica insignificante, o en robots simples como lo son los robots cartesianos planares horizontales o robots balanceados mecánicamente donde la gravedad no influye. Sin embargo robots o mecanismos más complejos, dígase humanoides y brazos robóticos accionados con servos de posición, requieren sistemas de control realimentados avanzados.

Utilizando el modelo dinámico completo en el espacio articular de servo robots de n GDL, se propuso un control de campo de velocidad con estructura dinámica no lineal, el cual especifica el movimiento del robot por medio de un campo de velocidad deseado que dibuja la trayectoria del robot. Para demostrar el correcto funcionamiento del control, se simuló un robot de 2GDL con servo actuadores de posición.

Por último, motivados por el hecho de que en control automático el movimiento de la mayoría de los robots didácticos o de investigación se da a través de actuadores del tipo servo de posición, se expuso un método para convertir cualquier sistema de control que solicite pares a un sistema de control que solicite referencias de posición, que logre el mismo objetivo de control. El método de conversión propuesto provoca que sea rentable el uso de robots con servo actuadores de posición de bajo costo, para implementar y probar sistemas de control diseñados en base a los modelos dinámicos Lagrangianos de robots de par, los cuales suponen actuadores de par ideales sin memoria.

Literatura citada

- Adhikary, N. y Mahanta, C. (2017). Inverse dynamics based robust control method for position commanded servo actuators in robot manipulators. *Control Engineering Practice*, 66:146–155. doi: 10.1016/j.conengprac.2017.07.001.
- Collins, D. (2020). Collins english dictionary. <https://www.collinsdictionary.com/dictionary/english/servo>.
- Coppel, W. A. (1965). *Stability and asymptotic behavior of differential equations*. D. C. Heat and company, Boston, USA, 1 edition.
- ePro Labs (2020). Servo motorstandardS3003. <https://wiki.eprolabs.com/index.php?title=ServoMotorStandardS3003>.
- Fantoni, I. y Lozano, R. (2002). *Non-linear Control for underactuated mechanical systems*. Springer-Verlag, London.
- Golnaraghi, F. y Kuo, B. C. (2010). *Automatic Control Systems*. John Wiley & Sons, New Jersey, USA, 4 edition.
- Kelly, R., Santibáñez, V., y Loría, A. (2005). *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Springer-Verlag, London.
- Kelly, R. y Moreno, J. (2001). Learning pid structures in an introductory course of automatic control. *IEEE Transactions en Education*, 44(4):373–376. doi: 10.1109/13.965786.
- Kelly, R., Zepeda, G., y Monroy, C. (2021). On simplified models of position servo actuators for control purposes. In *EEE Xplore, Proceedings of the 2021 International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD'21)*; paperID:16, Grenoble, France.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice -Hall, New Jersey, USA, 3 edition.
- Khalil, W. y Dombre, E. (2004). *Modeling, Identification & Control of Robot*. Kogan Page Science Ltd., London, UK.
- Khatib, O. (1987). A unified approach to motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, RA-3(1):43–53.
- Li, P. y Horowitz, R. (1999). Passive velocity field control of mechanical manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 15:751–763. doi: 10.1016/0957-4158(95)00058-D.
- Moreno, J. y Kelly, R. (2002). On manipulator control via velocity fields. In *Proc. of the 15th IFAC World Congress*, Barcelona, Spain.
- Ogata, K. (2002). *Modern Control Engineering*. Prentice -Hall, Pearson Education International, New Jersey, USA, 4 edition.
- Olver, P. J. y Shakiban, C. (2021). Applied mathematics. <http://docshare01.docshare.tips/files/23153/231530797.pdf>.
- Oxford, D. (2020). Oxford learner's dictionaries. <https://www.oxfordlearnersdictionaries.com/definition/english/servo>.
- Pelletier, M. y Doyon, M. (1994). On implementation and performance of impedance control of position controlled robots. In *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1228–1233, San Diego, CA, USA.

- Robotbooks (2020). Robix robotic arm. <http://www.robotbooks.com/robix-robotics-kits.htm>.
- Rozum, R. (2020). Servos as robots components. <https://rozum.com/servos-as-robot-components/>.
- Sandoval, J., Ortega, R., y Kelly, R. (2008). Interconnection and damping assignment passivity-based control of the pendubot. In *Proceedings of the 17th IFAC World congress*, pages 7700–7704, Seoul, Korea.
- Spong, M. W. y Block, D. J. (1995). The pendubot: A mechatronic system for control research and education. In *Proc.IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 555–557, San Francisco, CA, USA.
- Spong, M. W., Hutchinson, S., y Vidyasagar, M. (2005). *Robot Modeling and Control*. John Wiley and Sons, Hoboken, N.J., USA.
- Suh, I., Eom, K., Yeo, H., Kang, B., Oh, S., y Lee, B. (1994). Explicit fuzzy force control of industrial manipulators with position servo drives. In *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 657–669, Munchen, Germany.
- Suh, I., Eom, K., Yeo, H., y Oh, S. (1995). Fuzzy adaptive force control of industrial robot manipulator with position servos. *Mechatronics*, 5:899–918. doi: 10.1016/0957-4158(95)00058-D.
- Urrea, C. y Kern, J. (2016). Trajectory tracking control of a real redundant manipulator of the scara type. *Journal of Electrical Engineering and Technology*, 11(1):215–226. doi: 10.5370/JEET.2016.11.1.215.
- Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice -Hall, New Jersey, USA.
- Wojtusich, J. (2011). *Development of electronics and control for servo actuators in robotic applications, (Diploma thesis)*. Dept. Comput. Sci., Technische Universitat Darmstadt, Darmstadt, Germany.
- Zepeda, G., Kelly, R., y Monroy, C. (2022). A cartesian regulator for an ideal position-servo actuated didactic mechatronic device: asymptotic stability analysis. *American Journal of Engineering and Applied Sciences*, 15(3):189–196. doi: 10.3844/ajeassp.2022.189.196.

Anexos

Anexo A. Servo disco inercial de 1 Grado de Libertad

El mecanismo inocuo «servo-disco» en la Figura 32 ,consiste en un disco rígido homogéneo cuyo centro de masa es colineal con el eje del servo. La constante $J_L > 0$ es su momento de inercia, y θ denota el desplazamiento angular del disco —o eje del servo, por que ambos están acoplados de manera rígida — el cual es considerado la salida del sistema. La entrada del sistema u representa la posición angular deseada para el disco sujeto al eje del servo, y también u es la señal de entrada al servo de posición.

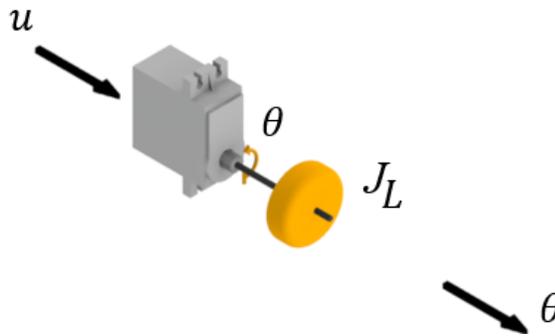


Figura 32. Mecanismo con servo actuador de posición: «servo disco».

Debido a que el disco acoplado al eje del servo induce la perturbación de par:

$$\tau_d = J_L \ddot{\theta} + f_v \dot{\theta}, \quad (63)$$

donde $f_v \geq 0$ es el coeficiente de fricción en caso de posible presencia de fricción viscosa debida al contacto entre el disco y cualquier entorno o cuerpo externo. Por tanto, basados en el modelo del servo de posición (28), el sistema completo (servo de posición más disco), puede modelarse por la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$J \ddot{\theta} + \frac{(k k_b + R b_0)}{R} \dot{\theta} + \frac{k k_P}{R} \theta = \frac{k k_P}{R} u - \tau_d, \quad (64)$$

la cual después de sustituir (63) se convierte en la siguiente expresión:

$$J\ddot{\theta} + \frac{(k k_b + R b_0)}{R} \dot{\theta} + \frac{k k_P}{R} \theta = \frac{k k_P}{R} u - J_L \ddot{\theta} - f_v \dot{\theta}, \quad (65)$$

reorganizando (65) se obtiene el modelo del servo disco inercial de 1GDL:

$$(J + J_L)\ddot{\theta} + \left[\frac{k k_b}{R} + b_0 + f_v \right] \dot{\theta} + \frac{k k_P}{R} \theta = \frac{k k_P}{R} u \quad (66)$$

Observación 5. Independientemente del valor constante de la inercia del disco $J_L > 0$, bajo elecciones de entrada constante al sistema $u = \theta_d \in \mathbb{R}$ (θ_d constante representa la referencia de desplazamiento/posición angular deseada del disco), puede demostrarse que tal sistema (66) bajo control en lazo abierto $u = \theta_d$, tiene la interesante característica de regulación de posición global:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta_d, \quad \forall \theta(0), \dot{\theta}(0) \in \mathbb{R}.$$

Este argumento demuestra que para cuerpos con momento de inercia constante J_L acoplados al eje del servo, se concluye la efectividad práctica de los servos de posición en numerosos aparatos mecatrónicos. Sin embargo, se debe poner atención cuando se presenten objetos con inercias no constantes J_L o estructuras mecánicas articuladas variables tales como objetos multicuerpo acoplados, por ejemplo humanoides o brazos robóticos cuya inercia asociada o par de perturbación dependen de la configuración del cuerpo θ : $J_L(\theta)$ o $\tau_d(\theta)$, respectivamente. En el último caso, la regulación de posición podría fracasar.

Anexo B. Servo péndulo de 1 Grado de Libertad

Considere el sistema pendular accionado con un servo de posición « servo péndulo» ilustrado en la Figura 33. En este mecanismo el elemento de accionamiento es un servo modelado por la ecuación (28) el cual tiene sujeto a su eje una barra rígida de masa m_1 la cual se supone está concentrada en su centro de masa (cm) en su extremo más alejado a una distancia $l_1 = l_{c1}$ desde el eje de rotación del servo (la barra y el eje se suponen perpendiculares). El momento de inercia de la barra respecto a su centroide se denota por $J_{L1} \geq 0$.

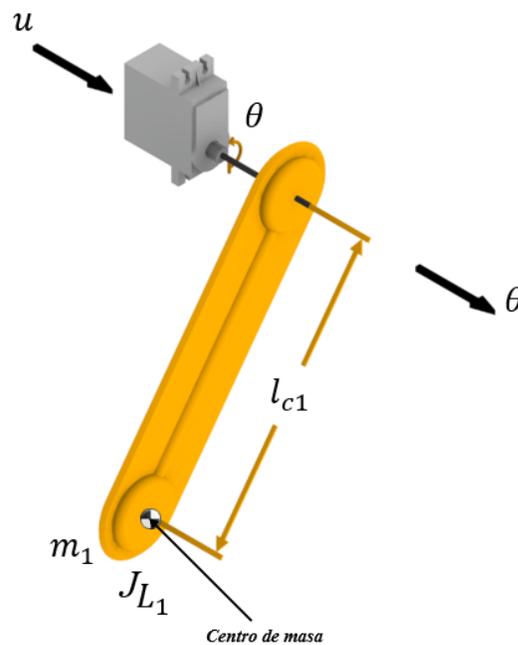


Figura 33. Péndulo con servo actuador de posición: «servo péndulo».

La configuración (desplazamiento angular θ de la barra medido en sentido anti horario con respecto al eje vertical) y movimiento de la barra del péndulo inducen un par sobre el eje del servo el cual puede ser calculado gracias a la segunda ley de Newton. Por lo tanto se tiene:

$$\tau_d = [J_{L1} + m_1 l_{c1}^2] \ddot{\theta} + m_1 g l_{c1} \sin(\theta), \quad (67)$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y τ_d es el par inducido por la posición/movimiento de

barra del péndulo sobre el eje del servo. El par τ_d puede verse como una perturbación sobre el servo debida a la carga mecánica adjunta —barra del péndulo en color amarillo en el mecanismo presentado en la Figura 33—.

Se puede obtener un modelo del sistema completo: servo de posición más péndulo; debido a que el péndulo adjunto induce una perturbación de par (67), por lo tanto basados en el modelo del servo (28), el sistema completo (servo más barra pendular) puede modelarse por la ecuación diferencial de segundo orden:

$$J\ddot{\theta} + \frac{(k k_b + R b_0)}{R} \dot{\theta} + \frac{k k_P}{R} \theta = \frac{k k_P}{R} u - \tau_d, \quad (68)$$

sustituyendo τ_d de la ecuación (67) en la ecuación (68) se tiene:

$$J\ddot{\theta} + \frac{(k k_b + R b_0)}{R} \dot{\theta} + \frac{k k_P}{R} \theta = \frac{k k_P}{R} u - [J_{L_1} + m_1 l_{c1}^2] \ddot{\theta} - m_1 g l_{c1} \sin(\theta), \quad (69)$$

reorganizando (69), el modelo del servo péndulo se lee como sigue:

$$[J + [J_{L_1} + m_1 l_{c1}^2]] \ddot{\theta} + \left[\frac{k k_b}{R} + b_0 \right] \dot{\theta} + \frac{k k_P}{R} \theta + m_1 g l_{c1} \sin(\theta) = \frac{k k_P}{R} u. \quad (70)$$

A. Una observación al control en lazo abierto del servo péndulo

En esta subsección se intenta explicar un comportamiento inesperado y contraintuitivo que surge en el control práctico de algunos mecanismo actuados con servos de posición afectados por la gravedad (como lo es el caso del mecanismo servo pendular modelado por (70)).

Considere el objetivo de control de regulación de posición articular deseada: $\theta \rightarrow \theta_d$ (donde $\theta_d \in \mathbb{R}$ constante representa la referencia o setpoint del desplazamiento/posición angular deseada del péndulo). Dado que se supone que el mecanismo servo péndulo de la Figura 33 está dotado con un actuador de posición eficaz (ver observación 1), por consiguiente para cualquier ingeniero, practicante o aficionado ingenuo puede ser intuitivo el uso de la elección de la entrada constante al sistema de la acción de control $u = \theta_d$ la cual si se reemplaza en el modelo del servo péndulo (70) genera lo siguiente:

$$[J + [J_{L_1} + m_1 l_{c1}^2]] \ddot{\theta} + \left[\frac{k k_b}{R} + b_0 \right] \dot{\theta} + \frac{k k_P}{R} \theta + m_1 g l_{c1} \sin(\theta) = \frac{k k_P}{R} \theta_d. \quad (71)$$

Por otra parte dado que se supuso que la posición angular deseada θ_d del péndulo es constante, entonces de la definición del error de posición $\tilde{\theta} \triangleq \theta_d - \theta$ se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}} &= -\dot{\theta}, \\ \ddot{\tilde{\theta}} &= -\ddot{\theta}, \end{aligned} \quad (72)$$

lo que permite reescribir el sistema del modelo del error (71) como:

$$[J + [J_{L_1} + m_1 l_{c1}^2]] \ddot{\tilde{\theta}} + \left[\frac{k k_b}{R} + b_0 \right] \dot{\tilde{\theta}} + \frac{k k_P}{R} \tilde{\theta} = m_1 g l_{c1} \sin(\theta_d - \tilde{\theta}). \quad (73)$$

Definiendo el vector de estado $\mathbf{x} \triangleq \text{col}(\tilde{\theta}, \dot{\tilde{\theta}}) = [\tilde{\theta} \ \dot{\tilde{\theta}}]^T \in \mathbb{R}^2$, este sistema del modelo del error (73) puede reescribirse en forma normal $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} &= \\ &= \sigma \underbrace{\begin{bmatrix} -(1/\sigma)\dot{\tilde{\theta}} \\ \left[\frac{k k_b}{R} + b_0 \right] \dot{\tilde{\theta}} - \frac{k k_P}{R} \tilde{\theta} + m_1 g l_{c1} \sin(\theta_d - \tilde{\theta}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})}, \end{aligned} \quad (74)$$

donde se ha definido la constante σ como:

$$\sigma \triangleq [J + [J_{L_1} + m_1 l_{c1}^2]]^{-1} > 0.$$

El sistema del modelo del error (74) corresponde a una ecuación diferencial autónoma de segundo orden planar.

Se puede identificar fácilmente las funciones componentes de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= -\dot{\theta}, \\ f_2(\mathbf{x}) &= \sigma \left[\left[\frac{k k_b}{R} + b_0 \right] \dot{\theta} - \frac{k k_P}{R} \tilde{\theta} + m_1 g l_{c1} \sin(\theta_d - \tilde{\theta}) \right]. \end{aligned} \quad (75)$$

Ambas funciones de arriba son continuamente diferenciables y Lipschitz continuas. De esta manera, la existencia y unicidad de la solución $\mathbf{x}(t)$ de (74) está asegurada. (e.g., ver condiciones suficientes en Olver y Shakiban (2021)).

Por otra parte, el equilibrio del modelo del error (74) tiene la estructura:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

donde $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$ es solución de la ecuación algebraica escalar:

$$-\frac{k k_P}{R} \tilde{\theta} + m_1 g l_{c1} \sin(\theta_d - \tilde{\theta}) = 0. \quad (76)$$

Puede demostrarse por sustitución directa que en general para una posición angular deseada arbitraria $\theta_d \neq n\pi$ (n número entero) del péndulo el origen del espacio de estado $[\tilde{\theta} \ \dot{\theta}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ no es un equilibrio, i.e., $\mathbf{f}(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$.

Pero bastante sorprendente y contraintuitivo, puede demostrarse que en este servo mecanismo (carga de barra pendular pegada al eje del servo) tal control en lazo abierto $u = \theta_d \neq n\pi$ del sistema servo péndulo (70) puede fallar en el objetivo de regulación de posición en el sentido de que el desplazamiento del péndulo θ posiblemente nunca permanezca ni alcance la posición angular deseada $\theta_d \neq n\pi$!, o de manera formal:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) \neq 0,$$

o de manera equivalente,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) \neq \theta_d,$$

para casi cualquier $\theta_d, \theta(0), \dot{\theta}(0) \in \mathbb{R}$. Esta afirmación puede ser probada gracias al Lema 1 indicado debajo, el cual aprovecha las siguientes características de la ecuación del modelo del error (74): ser un sistema autónomo planar con solución única.

Se hace un paréntesis para enunciar una característica conceptual útil sobre sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ (donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) con unicidad de soluciones asegurada.

El Lema 1 enunciado a continuación puede comprobarse de los resultados y afirmaciones probadas en Olver y Shakiban (2021).

Lema 1. Considere el sistema autónomo de ecuaciones diferenciales escrito de manera compacta en forma de vector:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

donde $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial de n variables definidas en un dominio abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Suponga que $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es continuamente diferenciable tal que existe una y sólo una solución $\mathbf{x}(t)$.

Entonces, conclusiones importantes respecto a los comportamientos a largo plazo son:

- a) Si la solución tiende a un solo punto $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ cuando $t \rightarrow \infty$ ($\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$), entonces ese punto \mathbf{x}^* debe ser un equilibrio, i.e. $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.
- b) Una consecuencia es: si un punto $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ del espacio de estado no es un equilibrio, i.e., $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, entonces, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \neq \bar{\mathbf{x}}$.

▽

Anexo C. Regulación cartesiana de péndulo con servo estático ideal de posición

Este anexo aborda un modelo matemático y una formulación de problema de control representativo de un sistema de control de la vida real: un péndulo con servo actuadores de posición (ver Figura 34) bajo el objetivo de control de regulación cartesiana. La regulación cartesiana es un caso particular de la llamada en robótica regulación en el espacio operacional. Este último es un concepto bastante general acuñado por Khatib (1987). El material de este anexo ha sido reportado en Zepeda et al. (2022).

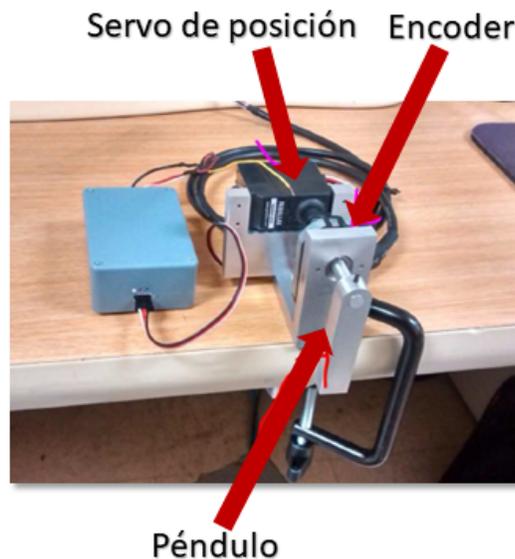


Figura 34. Configuración experimental de un péndulo con servo actuador de posición (Laboratorio de robótica., CICESE).

Se presenta una formulación de regulación cartesiana de posición de un mecanismo servo péndulo (péndulo equipado con un servo actuador de posición realimentado interno), específicamente:

- planta (modelo del servo actuador de posición),
- modelo del servo péndulo,
- objetivo de control de regulación cartesiana.

Modelo simplificado del servo actuador de posición

El modelo dinámico del servo actuador utilizado en este anexo (Kelly et al., 2021) es el mismo modelo descrito por la ecuación 28 que se explica en la Capítulo 3 por lo que se resume a continuación:

$$J\ddot{\theta} + \frac{(k k_b + R b_0)}{R} \dot{\theta} + \frac{k k_P}{R} \theta = \frac{k \cdot k_P}{R} \cdot u - \tau_d. \quad (77)$$

donde las entradas se denotan por u la cual tradicionalmente representa la posición deseada θ_d de la posición del eje θ y sus salidas con ya sea θ o $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$, siendo τ_d una perturbación exógena de par por carga mecánica externa debida a la estructura mecánica adherida al eje del servo. Los parámetros (positivos y constantes) del modelo (77) tienen el siguiente significado:

R	resistencia en la armadura	k	constante de par
J	inercia del rotor	k_b	constante de fem de retorno
k_P	ganancia de control proporcional interna	b_0	coeficiente de fricción viscosa

Componentes de la planta

Además de un servo actuador de posición, la planta está construida en torno a una barra rígida (representación gráfica en Figura 33). Un modelo matemático de n Grados De Libertad (GDL) de un mecanismo con servo actuador de posición —incluidos robots manipuladores— tiene la estructura general:

Ecuación de estado:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}_d) = \mathbf{0}, \quad (78)$$

Ecuación de salida:

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}), \quad (79)$$

donde \mathbf{f} y \mathbf{h} son funciones suave $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ representan las posiciones generalizadas, velocidades y aceleraciones, respectivamente. Las variables $\mathbf{u}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\tau}_d \in \mathbb{R}^n$ son la entrada, la salida y las perturbaciones exógenas del mecanismo, respectivamente.

Para modelar brazos robóticos con servo actuadores de posición, la función \mathbf{f} en (78) se puede obtener del llamado en jerga robótica: *modelo dinámico del robot* del libro (Kelly et al., 2005, Ch. 3), mientras que la función \mathbf{h} en (79) está ligada de manera muy cercana al mapa cinemático del robot del libro (Spong et al., 2005, Ch. 3) también llamado 'el modelo geométrico' en Khatib (1987) y (Khalil y Dombre, 2004, Ch. 3).

Servo péndulo

Considere de nuevo el sistema pendular (presentado en el anexo B) accionado con un servo de posición « servo péndulo» ilustrado en la Figura 33. En este mecanismo el elemento de accionamiento es un servo modelado por la ecuación (28) el cual tiene sujeto a su eje una barra rígida de masa m_1 la cual se supone está concentrada en su centro de masa (cm) en su extremo más alejado a una distancia $l_1 = l_{c1}$ desde el eje de rotación del servo (la barra y el eje se suponen perpendiculares). El momento de inercia de la barra respecto a su centroide se denota por $J_{L1} \geq 0$.

Este anexo se enfoca en el mecanismo representado a manera de diagrama en la Figura 35 donde la proyección y de la punta que oscila en el eje vertical Y es la variable a controlar de la planta:

$$y = -l \cos(\theta), \quad (80)$$

Como salida y de la planta puede ser cualquier función h continuamente diferenciable de θ , o sea $y = h(\theta)$.

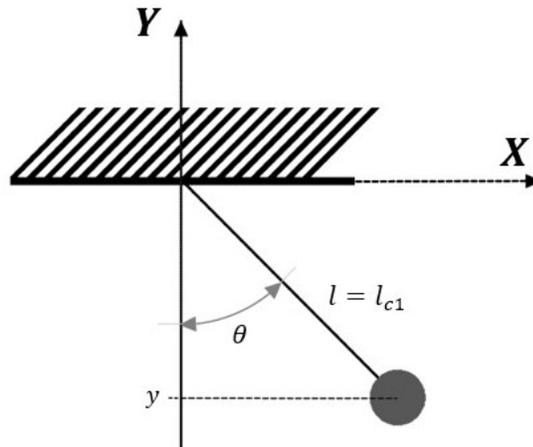


Figura 35. Diagrama esquemático del péndulo con servo accionamientos de posición.

donde $\theta = q$ representa la posición angular de la barra con respecto a el eje vertical hacia abajo, $l > 0$ es la longitud de la barra. En este punto se supone que la masa de la barra se desprecia y el pivote no tiene fricción.

Se asume que las variables $\theta = q$ y y están disponibles para ser medidas. El parámetro l también se supone conocido. De este modo todos ellos pueden utilizarse por cualquier controlador.

El modelo del sistema del servo péndulo se explicará en el Anexo C por lo que se resume a continuación:

Ecuación de estado:

$$[J + [J_{L_1} + m_1 l_{c1}^2]] \ddot{\theta} + \left[\frac{k k_b}{R} + b_0 \right] \dot{\theta} + \frac{k k_P}{R} \theta + m_1 g l_{c1} \sin(\theta) = \frac{k k_P}{R} u,$$

Ecuación de salida:

$$y = -l \cos(\theta).$$

(81)

Aunque este sistema es SISO, informalmente se podría decir que el modelo es doblemente no lineal ya que tanto su ecuación de estado como su ecuación de salida son ambas no lineales.

Objetivo de control: regulación cartesiana

Se define el error de posición cartesiano $\tilde{y} \in \mathbb{R}$ como:

$$\tilde{y} \triangleq y_d - y,$$

(82)

donde la salida deseada seleccionada por el usuario y_d se supone constante y arbitraria limitada a:

$$|y_d| < l.$$

El objetivo de control de regulación de posición cartesiana es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}(t) = 0.$$

(83)

El desafío en el diseño de control consiste en proponer un controlador realimentado sin la necesidad de recurrir ni al método de la cinemática inversa ni al método del Jacobiano inverso para lograr la regulación cartesiana (83). Se permite la realimentación de θ , $\dot{\theta}$ y y ; todos los parámetros en el servo péndulo (81) se suponen constantes y conocidos.

Diseño del regulador

Para el diseño y análisis del regulador se sugiere que se recurra a las herramientas de la estabilidad de Lyapunov. Para el concepto de estabilidad asintótica y el método directo de la estabilidad de Lyapunov, se recomienda al lector uno de los textos estándar en la materia tal como Vidyasagar (1993) o Khalil (2002) para un estudio más a fondo. La cuestión del diseño del controlador se dejará para las actividades a futuro.

Anexo D. Servo pendubot de 2 Grados de Libertad

El pendubot (Spong y Block, 1995) mostrado en la Figura 36, siglas de PÉNDULO roBOT, es un sistema mecatrónico que se compone de dos eslabones rígidos (colores amarillo y rojo en Figura 36) interconectados por articulaciones rotacionales sin fricción. La primera articulación tiene un actuador —servo de posición en Figura 36— pero la segunda articulación no tiene actuador (articulación pasiva) cuyo movimiento se busca controlar a través del actuador en la primera articulación (usualmente el pendubot está montado de manera que los ejes articulares son perpendiculares a la gravedad (Spong y Block, 1995), (Fantoni y Lozano, 2002), por lo tanto el pendubot yace en el plano vertical).

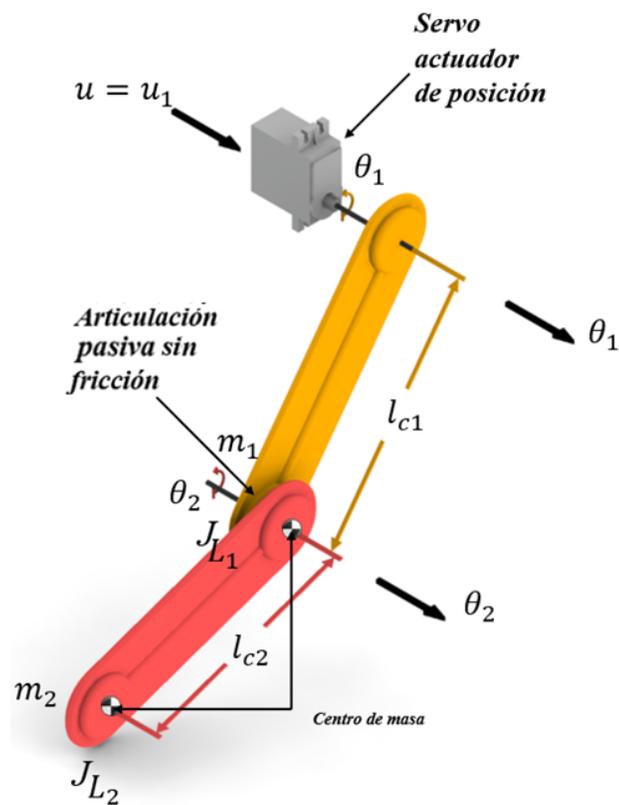


Figura 36. Pendubot con servo actuadores de posición: «servo pendubot».

Por lo tanto este mecanismo puede ser visto como en la Figura 37 como un brazo robótico planar de dos articulaciones con un actuador en el hombro pero sin actuador en el codo. Este aparato —pendubot (pero equipado con un ‘actuador de par’ en vez de un servo de posición)— es utilizado como un vehículo en investigación y materia de enseñanza en control automático y robótica (Spong y Block, 1995).

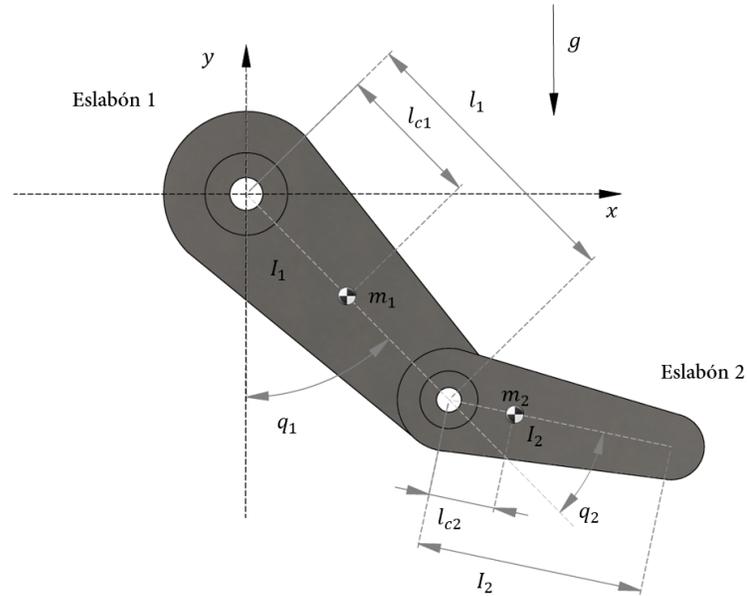


Figura 37. Imagen esquemática de la geometría del pendubot y un brazo robótico de 2 GDL.

En lo que respecta a las Figuras 36 y 37 se identifican las equivalencias en las anotaciones para las articulaciones: $q_1 = \theta_1$ y $q_2 = \theta_2$. Las definiciones de parámetros y variables se enlistan en la Tabla 5.

Tabla 5. Parámetros y variables de los mecanismo en las Figuras 36, 37 y 38.

$m_1 > 0$	masa del eslabón 1
$m_2 > 0$	masa del eslabón 2
$l_1 > 0$	longitud del eslabón 1
$l_2 > 0$	longitud del eslabón 2
$l_{ci} > 0$	distancia al centro de masa del eslabón i
$J_{L1} > 0$	inercia del eslabón 1 respecto a su centroide
$J_{L2} > 0$	inercia del eslabón 2 respecto a su centroide
g	aceleración debida a la gravedad
$q_1 = \theta_1$	ángulo anti horario a las manecillas del reloj que el eslabón 1 genera con la vertical hacia abajo
$q_2 = \theta_2$	ángulo anti horario a las manecillas del reloj que el eslabón 2 genera con el eslabón 1
u	entrada de control del sistema (señal de entrada al actuador tipo servo de posición del hombro(articulación 1))

El pendubot analizado en Sandoval et al. (2008) también tiene los mismos marcos de referencia y notación. Los centros de masa de los eslabones 1 y 2 están en el extremo distal de cada uno, por lo

tanto de acuerdo con la notación, se tiene: $l_i = l_{c_i}$ por $i = 1, 2$.

Utilizando la notación de esta tesis la cual sigue también la notación del robot de 2 GDL Pelicano[®] estudiado en el libro de texto Kelly et al. (2005), el modelo dinámico ortodoxo del pendubot se lee (sistema de dos ODEs):

$$\begin{aligned}
 \tau_1 = & [m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c_2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c_2} \cos(\theta_2) + \\
 & + J_{L_1} + J_{L_2}] \ddot{\theta}_1 + \\
 & + [m_2 l_{c_2}^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(\theta_2) + J_{L_2}] \ddot{\theta}_2 - \\
 & - 2m_2 l_1 l_{c_2} \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_{c_2} \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \\
 & + [m_1 l_{c_1} + m_2 l_1] g \sin(\theta_1) + m_2 g l_{c_2} \sin(\theta_1 + \theta_2),
 \end{aligned} \tag{84}$$

junto con

$$\begin{aligned}
 0 = & [m_2 l_{c_2}^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(\theta_2) + J_{L_2}] \ddot{\theta}_1 + [m_2 l_{c_2}^2 + J_{L_2}] \ddot{\theta}_2 \\
 & + m_2 l_1 l_{c_2} \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 + m_2 g l_{c_2} \sin(\theta_1 + \theta_2).
 \end{aligned} \tag{85}$$

donde $\tau_1 \in \mathbb{R}$ representa el par aplicado en el hombro (articulación 1) gracias al actuador asociado (único actuador en el pendubot), y τ_2 se indica en cero en el lado izquierdo de (85) ya que por construcción no hay actuador en la segunda articulación (codo pasivo, es decir, sin accionamiento alguno) del pendubot.

Por simplicidad en la notación se introducen las siguientes constantes:

$$\left. \begin{aligned}
 \beta_1 & \triangleq m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2 + J_{L_1} \\
 \beta_2 & \triangleq m_2 l_{c_2}^2 + J_{L_2} \\
 \beta_3 & \triangleq m_2 l_1 l_{c_2} \\
 \beta_4 & \triangleq m_1 l_{c_1} + m_2 l_1 \\
 \beta_5 & \triangleq m_2 l_{c_2}
 \end{aligned} \right\} \tag{86}$$

Las ecuaciones previas (84) y (85) se reescriben utilizando las constantes definidas en (86) como:

$$\begin{aligned}
\tau_1 = & [\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 \cos(\theta_2)] \ddot{\theta}_1 + [\beta_2 + \beta_3 \cos(\theta_2)] \ddot{\theta}_2 - \\
& - 2\beta_3 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \\
& - \beta_3 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \beta_4 g \sin(\theta_1) + \beta_5 g \sin(\theta_1 + \theta_2),
\end{aligned} \tag{87}$$

$$\begin{aligned}
0 = & [\beta_2 + \beta_3 \cos(\theta_2)] \ddot{\theta}_1 + \beta_2 \ddot{\theta}_2 + \beta_3 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \\
& + \beta_5 g \sin(\theta_1 + \theta_2).
\end{aligned} \tag{88}$$

o usando la notación de robótica $\langle M, C, g \rangle$ de Kelly et al. (2005) en forma compacta, un modelo dinámico ortodoxo del mecanismo pendubot con actuadores de par en un sistema ODE en forma de vector es:

$$M(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{89}$$

donde $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ representa el vector de posiciones articulares, la variable $\tau_1 \in \mathbb{R}$ ya fue definida como el par aplicado en la articulación 1 generado por su actuador ideal de par asociado (único actuador en el pendubot).

Los componentes de las matrices y el vector en (89) son:

$$\left. \begin{aligned}
M_{11}(\boldsymbol{\theta}) &= [\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 \cos(\theta_2)] \\
M_{12}(\boldsymbol{\theta}) &= [\beta_2 + \beta_3 \cos(\theta_2)] \\
M_{21}(\boldsymbol{\theta}) &= [\beta_2 + \beta_3 \cos(\theta_2)] \\
M_{22}(\boldsymbol{\theta}) &= \beta_2
\end{aligned} \right\} \tag{90}$$

$$\left. \begin{aligned}
C_{11}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= -\beta_3 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 \\
C_{12}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= -\beta_3 \sin(\theta_2) [\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2] \\
C_{21}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= \beta_3 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 \\
C_{22}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= 0
\end{aligned} \right\} \tag{91}$$

$$\left. \begin{aligned} g_1(\boldsymbol{\theta}) &= \beta_4 g \sin(\theta_1) + \beta_5 g \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ g_2(\boldsymbol{\theta}) &= \beta_5 g \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Es importante notar que de (89) se puede despejar:

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \left[M(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) \right]. \quad (93)$$

Por otra parte, el modelo del servo de posición (28) está dado por:

$$J\ddot{\theta} + \frac{(k k_b + R b_0)}{R} \dot{\theta} + \frac{k k_P}{R} \theta = \frac{k k_P}{R} u - \tau_d. \quad (94)$$

Ya que el pendubot tiene un único servo actuador ubicado en la primer articulación —hombro—, en lo sucesivo se utilizará el subíndice 1 (uno) para indicar toda la información o datos como parámetros y variables relativas al actuador 1 y articulación 1 ¹. Esto permite reescribir la ecuación (94) de manera equivalente como:

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + \underbrace{\frac{(k_1 k_{b1} + R_1 b_{01})}{R_1}}_{\gamma_1} \dot{\theta}_1 + \frac{k_1 k_{P1}}{R_1} \theta_1 = \frac{k_1 k_{P1}}{R_1} u_1 - \tau_{d1}. \quad (95)$$

A. Modelo completo del servo pendubot

Dado que se puede pensar en τ_1 en (87) como una perturbación de par τ_{d1} producida respecto al eje del servo (en la articulación número 1 hombro) debida a ambas configuración y movimiento de la estructura mecánica del hardware del pendubot, por tanto estableciendo $\tau_{d1} = \tau_1$, se obtiene el modelo del servo pendubot compuesto por las siguientes ecuaciones:

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + \underbrace{\frac{(k_1 k_{b1} + R_1 b_{01})}{R_1}}_{\gamma_1} \dot{\theta}_1 + \frac{k_1 k_{P1}}{R_1} \theta_1 = \frac{k_1 k_{P1}}{R_1} u_1 - \tau_{d1}. \quad (96)$$

¹Esta convención de notación también aplica para el i -ésimo servo actuador y su i -ésima articulación correspondiente.

$$\begin{aligned}
\tau_{d1} = \tau_1 = & [\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 \cos(\theta_2)] \ddot{\theta}_1 \\
& + [\beta_2 + \beta_3 \cos(\theta_2)] \ddot{\theta}_2 \\
& - 2\beta_3 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
& - \beta_3 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \beta_4 g \sin(\theta_1) + \beta_5 g \sin(\theta_1 + \theta_2),
\end{aligned} \tag{97}$$

$$\begin{aligned}
0 = & [\beta_2 + \beta_3 \cos(\theta_2)] \ddot{\theta}_1 + \beta_2 \ddot{\theta}_2 + \beta_3 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 \\
& + \beta_5 g \sin(\theta_1 + \theta_2).
\end{aligned} \tag{98}$$

En este sentido, sustituyendo (97) en (96), el mecanismo servo pendubot completo se modela por el sistema de dos ODEs:

$$\begin{aligned}
& [J_1 + [\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 \cos(\theta_2)]] \ddot{\theta}_1 + [\beta_2 + \beta_3 \cos(\theta_2)] \ddot{\theta}_2 \\
& + \underbrace{\frac{(k_1 k_{b1} + R_1 b_{01})}{R_1}}_{\gamma_1} \dot{\theta}_1 + \frac{k_1 k_{P1}}{R_1} \theta_1 - 2\beta_3 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
& - \beta_3 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \beta_4 g \sin(\theta_1) + \beta_5 g \sin(\theta_1 + \theta_2) \\
& = \frac{k_1 k_{P1}}{R_1} u_1,
\end{aligned} \tag{99}$$

y

$$\begin{aligned}
& [\beta_2 + \beta_3 \cos(\theta_2)] \ddot{\theta}_1 + \beta_2 \ddot{\theta}_2 + \beta_3 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 \\
& + \beta_5 g \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0.
\end{aligned}$$

donde $u_1 \in \mathbb{R}$ es la entrada de control del servo pendubot — señal de entrada al actuador tipo servo de posición en la articulación del hombro (ver Figura 36)—.

El modelo (99) puede reescribirse de manera compacta usando la notación usual en robótica $\langle M, C, \mathbf{g} \rangle$ de Kelly et al. (2005). Por consiguiente, un modelo dinámico del mecanismo servo pendubot (Figura 36) resulta en el sistema ODE con estructura vectorial:

$$M_{S\mathcal{P}ebot}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + C_{S\mathcal{P}ebot}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + K_{S\mathcal{P}ebot}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{g}_{S\mathcal{P}ebot}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (100)$$

donde $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ representa el vector de posiciones articulares. El subíndice $S\mathcal{P}ebot$ es para *Servo Pendubot*.

Los elementos de las matrices y el vector en el modelo del servo pendubot (100) son:

$$M_{S\mathcal{P}ebot11}(\boldsymbol{\theta}) = [J_1 + \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 \cos(\theta_2)]$$

$$M_{S\mathcal{P}ebot12}(\boldsymbol{\theta}) = [\beta_2 + \beta_3 \cos(\theta_2)]$$

$$M_{S\mathcal{P}ebot21}(\boldsymbol{\theta}) = [\beta_2 + \beta_3 \cos(\theta_2)]$$

$$M_{S\mathcal{P}ebot22}(\boldsymbol{\theta}) = \beta_2$$

$$C_{S\mathcal{P}ebot11}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = -\beta_3 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_2$$

$$C_{S\mathcal{P}ebot12}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = -\beta_3 \sin(\theta_2) [\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2]$$

$$C_{S\mathcal{P}ebot21}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \beta_3 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_1$$

$$C_{S\mathcal{P}ebot22}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = 0$$

$$K_{S\mathcal{P}ebot11} = \frac{k_1 k_{P1}}{R_1}$$

$$K_{S\mathcal{P}ebot12} = 0$$

$$K_{S\mathcal{P}ebot21} = 0$$

$$K_{S\mathcal{P}ebot22} = 0$$

$$g_{SPebot_1}(\boldsymbol{\theta}) = \beta_4 g \sin(\theta_1) + \beta_5 g \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$g_{SPebot_2}(\boldsymbol{\theta}) = \beta_5 g \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Observación 6. El modelo del pendubot con actuadores de posición (100) mantiene una relación notable con el modelo del pendubot con actuadores de par (89). De manera más precisa, gracias a las ecuaciones (90) a (92), se obtiene:

$$M_{SPebot}(\boldsymbol{\theta}) = M(\boldsymbol{\theta}) + \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{SPebot}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}),$$

$$\mathbf{g}_{SPebot}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}).$$

Por lo tanto, se preservan propiedades básicas importantes del sistema servo pendubot (100) útiles en el diseño del control, entre las cuales se enlistan:

- la definición positiva de la matriz simétrica M_{SPebot} ,
- la naturaleza antisimétrica de la matriz:

$$\dot{M}_{SPebot} - 2C_{SPebot},$$

- linealidad del modelo en términos de los parámetros dinámicos.

Anexo E. Servo brazo robótico de 2 Grados de Libertad

Considere el servo brazo ilustrado en la Figura 38 cuya estructura mecánica abstracta también se muestra en el diagrama CAD de la Figura 37 la cual a su vez coincide (marcos de referencia y parámetros) con el brazo robótico de 2GDL Pelicano[®] descrito en el libro de texto Kelly et al. (2005).

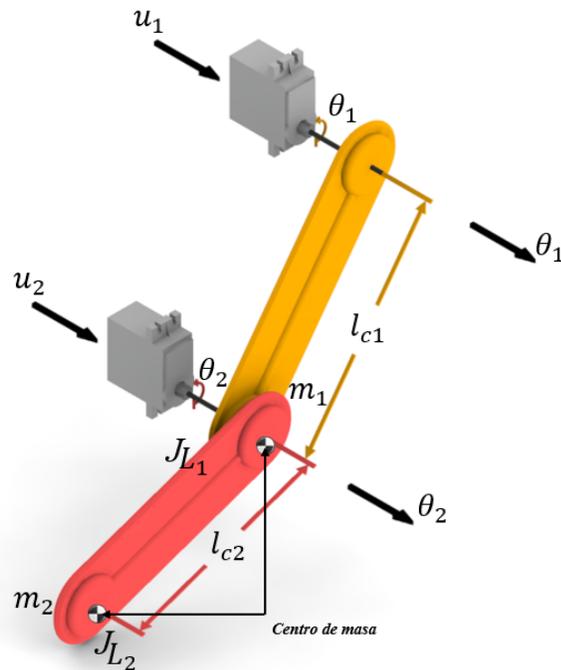


Figura 38. Brazo robótico de 2 GDL con servo actuadores de posición: «servo brazo».

Con respecto a un brazo robótico de 2GDL con actuadores de par como el mostrado en la Figura 37, de acuerdo a la notación de los parámetros en las Figuras 37 y 38, la Tabla 5, y considerando el arreglo en la notación: $l_i = l_{ci}$ para $i = 1, 2$ (por que los centros de masa de los eslabones se supusieron ubicados en sus extremos distales), entonces el modelo dinámico del brazo robótico Pelicano[®] de 2GDL con actuadores de par es el siguiente:

$$\begin{aligned}\tau_1 = & [\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 \cos(\theta_2)] \ddot{\theta}_1 + [\beta_2 + \beta_3 \cos(\theta_2)] \ddot{\theta}_2 - \\ & - 2\beta_3 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \beta_3 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 \\ & + \beta_4 g \sin(\theta_1) + \beta_5 g \sin(\theta_1 + \theta_2),\end{aligned}\quad (101)$$

$$\begin{aligned}\tau_2 = & [\beta_2 + \beta_3 \cos(\theta_2)] \ddot{\theta}_1 + \beta_2 \ddot{\theta}_2 + \beta_3 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \\ & + \beta_5 g \sin(\theta_1 + \theta_2).\end{aligned}\quad (102)$$

donde se han utilizado las constantes β_i definidas en (86).

Utilizando las matrices M en (90), C en (91) y el vector \mathbf{g} en (92), el modelo con actuadores de par indicado arriba (101) y (102) se puede reescribir en notación compacta utilizada en robótica $\langle M, C, \mathbf{g} \rangle$ Kelly et al. (2005) como:

$$M(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (103)$$

donde el vector de 'entradas' de par se define por $\boldsymbol{\tau} \triangleq \text{col}(\tau_1, \tau_2) = [\tau_1 \ \tau_2]^T \in \mathbb{R}^2$.

A. Modelo compacto de un banco de actuadores tipo servo de posición

Los dos elementos de actuación del «servo brazo» de la Figura 38 son actuadores tipo servo de posición. Los modelos de estos actuadores (servos de posición) ubicados en las articulaciones 1 y 2 (hombro y codo respectivamente) tienen cada uno la estructura matemática de (28). Estos pueden reescribirse para unificarse matemáticamente en la forma vectorial equivalente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}}_{M_{PS}} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}}_{B_{PS}} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_1 k_{P1}}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{k_2 k_{P2}}{R_2} \end{bmatrix}}_{K_{SPS}} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_1 k_{P1}}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{k_2 k_{P2}}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tau_{d1} \\ \tau_{d2} \end{bmatrix}, \quad (104)$$

donde τ_{d1} y τ_{d2} son las perturbaciones de par respecto al eje del servo 1 en el hombro y el eje del servo

2 en el codo respectivamente del brazo robótico (Figura 38) debidas a la configuración y movimiento del mecanismo completo. El subíndice PS en las matrices de arriba es un acrónimo de *Servo-Posición*. De forma conveniente (fácil de manejar) los servo actuadores de posición (104) se pueden reescribir como:

$$M_{PS}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + B_{PS}\dot{\boldsymbol{\theta}} + K_{PS}\boldsymbol{\theta} = K_{PS} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\tau}_d \quad (105)$$

donde se han definido $\boldsymbol{\tau}_d \triangleq \text{col}(\tau_{d1}, \tau_{d2}) = [\tau_{d1} \ \tau_{d2}]^T \in \mathbb{R}^2$, y el vector de posiciones articulares: $\boldsymbol{\theta} \triangleq \text{col}(\theta_1, \theta_2) = [\theta_1 \ \theta_2]^T = [q_1 \ q_2]^T \in \mathbb{R}^2$.

B. Modelo completo del servo brazo

Se establece la perturbación de par respecto al eje de los actuadores $\boldsymbol{\tau}_d = \boldsymbol{\tau}$ tal que de (103) se tiene:

$$\boldsymbol{\tau}_d = M(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}),$$

lo cual después de reemplazarse en el modelo de los servo actuadores (105) da lugar al modelo completo del servo brazo en el espacio articular:

$$\underbrace{[M(\boldsymbol{\theta}) + M_{PS}]}_{M_{SR}} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \left[\underbrace{C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})}_{C_{SR}} + B_{PS} \right] \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) + K_{PS}\boldsymbol{\theta} = K_{PS} \mathbf{u}. \quad (106)$$

cuya entrada $\mathbf{u} \triangleq [u_1 \ u_2]^T \in \mathbb{R}^2$ son las señales de entrada de los servo actuadores de posición asociados a cada articulación operativa del brazo.

Observación 7. El enfoque anterior puede aplicarse *mutatis mutandis* al modelo de robots manipuladores con servo actuadores de posición de n GDL.