

La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, B.C.).

La investigación fue financiada por el CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología).

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo o titular de los Derechos Autor.

CICESE © 2023, Todos los Derechos Reservados, CICESE

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California



Doctorado en Ciencias en Oceanografía Física

Dispersión lagrangiana en turbulencia zonostrófica

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Doctor en Ciencias

Presenta:

Azucena Hermelinda Durán Colmenares

Ensenada, Baja California, México

2023

Tesis defendida por

Azucena Hermelinda Durán Colmenares

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Luis Zavala Sansón
Director de tesis

Dr. Federico Graef Ziehl

Dra. María Josefina Olascoaga Amuchastegui

Dr. Edgar Gerardo Pavía López



Dra. María Tereza Cavazos Pérez
Coordinadora del Posgrado en Oceanografía Física

Dra. Ana Denise Re Araujo
Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Azucena Hermelinda Durán Colmenares como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Oceanografía Física.

Dispersión lagrangiana en turbulencia zonostrófica

Resumen aprobado por:

Dr. Luis Zavala Sansón
Director de tesis

En esta tesis se estudia la dispersión anisotrópica de partículas en un flujo turbulento bidimensional forzado continuamente en un plano β . El flujo está inmerso en una cuenca cerrada a gran escala con fronteras libres de esfuerzos. La anisotropía se analiza mediante experimentos numéricos caracterizados por la magnitud del forzamiento impuesto. Los experimentos muestran características típicas de la turbulencia zonostrófica: movimientos vorticales que, en promedio, forman bandas de circulación alternas este-oeste debido al efecto β . La anisotropía de la dispersión se investiga mediante tres medidas estadísticas Lagrangianas calculadas por componentes zonales y meridionales: la dispersión relativa entre pares de partículas; elipses de dispersión; y los Exponentes de Lyapunov de Escala Finita (FSLE), medidos también con pares de partículas. La dispersión relativa y las elipses de dispersión muestran anisotropía con una preferencia zonal hacia el oeste cuando las partículas están lejos de las fronteras. Los FSLE muestran anisotropía zonal para una amplia gama de separaciones de partículas solo cuando empleamos un forzamiento fuerte. A medida que las partículas alcanzan la pared oeste y se redistribuyen para llenar el dominio, la anisotropía cesa. Los resultados se examinan más a fondo utilizando condiciones de contorno sin deslizamiento y una geometría de dominio rectangular. Por otra parte, el estudio de la dispersión se profundiza mediante nuevos experimentos en los que la cuenca tiene un fondo variable que asemeja pendientes continentales en el océano. El efecto β y el de la topografía de fondo se combinan dinámicamente, y como resultado emerge un giro ciclónico al borde del dominio e intensificado a lo largo de la frontera sur. El flujo sigue contornos geostróficos de f/h , donde f es el parámetro de Coriolis y h la profundidad del fluido. El análisis de la dispersión de partículas se realiza empleando la dispersión absoluta y las elipses de dispersión. Los resultados muestran que la asimetría del giro tiene consecuencias en la dispersión. En el centro del dominio el flujo es anisotrópico con una preferencia zonal, como en los experimentos con fondo plano. Sin embargo, esta anisotropía es menor a la observada cuando únicamente el efecto β está presente, debido a que el giro ciclónico funciona como una barrera que limita la propagación de partículas hacia el oeste. Por otro lado, cerca de las fronteras (donde los gradientes de profundidad son abruptos), la intensidad del giro ciclónico domina sobre el efecto β y fuerza a que las partículas se dispersen rápidamente a lo largo de las paredes. No obstante, la asimetría del flujo generado topográficamente provoca que la dispersión difiera en cada frontera. Los resultados de esta tesis muestran que la anisotropía lagrangiana se puede cuantificar estadísticamente en medios marginalmente zonostróficos, como en el interior de los océanos, y sugiere el empleo de las mismas herramientas para el caso de atmósferas planetarias que exhiben chorros zonales. Además, en el océano, los análisis realizados pueden ser útiles en la búsqueda de soluciones a problemas relacionados con el transporte de material biológico o contaminantes en grandes cuerpos de agua, especialmente en presencia de fronteras o topografías abruptas.

Palabras clave: anisotropía, dispersión lagrangiana, turbulencia 2D, efecto β , turbulencia zonostrófica

Abstract of the thesis presented by Azucena Hermelinda Durán Colmenares as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Physical Oceanography.

Lagrangian dispersion in zonostrophic turbulence

Abstract approved by:

Dr. Luis Zavala Sansón
Thesis Director

In this thesis we study the anisotropic dispersion of particles in a two-dimensional turbulent flow continuously forced in a β -plane. The flow is immersed in a large-scale closed basin with stress-free boundaries. The anisotropy is analyzed by numerical experiments characterized by the magnitude of the imposed forcing. The experiments show typical features of zonostrophic turbulence: vortical motions that, on average, form alternating east-west circulation bands due to the β -effect. The anisotropy of the dispersion is investigated by means of three statistical Lagrangian measures calculated by zonal and meridional components: the relative dispersion between pairs of particles; dispersion ellipses; and Finite Scale Lyapunov Exponents (FSLE), also measured with pairs of particles. The relative dispersion and the dispersion ellipses show anisotropy with a zonal preference towards the west when the particles are far from the boundaries. The FSLEs show zonal anisotropy for a wide range of separations of particles only when we employ a strong forcing. As the particles reach the west wall and redistribute to fill the domain, the anisotropy ceases. The results are further examined using no-slip boundary conditions and a rectangular domain geometry. On the other hand, the dispersion study is further extended by new experiments in which the basin has a variable bottom that resembles continental slopes in the ocean. The β -effect and that of the bottom topography are dynamically combined, leading to the formation of a cyclonic gyre at the edge of the domain and intensified along the southern boundary. The flow follows geostrophic contours of f/h , where f is the Coriolis parameter and h the fluid depth. The dispersion analysis is performed using the absolute dispersion and dispersion ellipses. The results show that the gyre asymmetry has consequences on the dispersion. At the center of the domain the flow is anisotropic with a zonal preference, as in the experiments with flat topography. However, this anisotropy is lower than that observed when only the β -effect is present, because the cyclonic gyre acts as a barrier limiting the westward propagation of particles. On the other hand, near the boundaries (where the bottom slopes are steep), the intensity of the cyclonic gyre dominates over the β -effect, forcing the particles to disperse rapidly along the walls. However, the asymmetry of the topographically generated flow causes the dispersion to differ at each boundary. The results of this thesis show that the Lagrangian anisotropy can be statistically quantified in marginally zonostrophic fluid systems, such as in the ocean interior, and suggest the employment of the same tools for the case of planetary atmospheres exhibiting zonal jets. Furthermore, in the ocean, the present analyses may be useful in the search for solutions to problems related to the transport of biological material or pollutants, especially in the presence of boundaries or abrupt topographies.

Keywords: anisotropy, lagrangian dispersion, 2D turbulence, β -effect, zonostrophic turbulence

Dedicatoria

A Minerva,

porque fuiste, eres y serás mi mayor inspiración;

A Camilo,

porque siempre encuentro en tí mi lugar favorito.

Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California por brindar el espacio y las condiciones idóneas para realizar esta investigación.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de doctorado.

A mi asesor Luis Zavala Sansón por la gran paciencia que me ha tenido y su comprensión en situaciones ajenas a la academia.

A los miembros de mi comité de tesis Dra. María Josefina Olascoaga Amuchastegui, Dr. Edgar Gerardo Pavía López y Dr. Federico Graef Ziehl pues este trabajo creció y mejoró gracias a sus preguntas y sugerencias.

Al Dr. Julio Candela Pérez por todos sus consejos, comentarios y sugerencias en favor de esta investigación, será recordado con mucho cariño y respeto dentro de la comunidad de Oceanografía en México.

A mis compañeros, profesores y personal administrativo del posgrado en Oceanografía Física.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	viii
Lista de tablas	xi
Capítulo 1. Introducción	
1.1. Turbulencia	1
1.1.1. Turbulencia planetaria	2
1.2. Justificación	5
1.3. Hipótesis	6
1.4. Objetivo general	7
1.4.1. Objetivos específicos	7
Capítulo 2. Teoría y métodos	
2.1. Ecuaciones de movimiento	8
2.1.1. Forzamiento aleatorio	12
2.1.2. Cantidades conservadas	12
2.2. Modelo numérico	13
2.3. Métricas lagrangianas	13
2.3.1. Dispersión absoluta	13
2.3.2. Dispersión relativa	15
2.3.3. Elipses de dispersión	16
2.3.4. Exponentes de Lyapunov de escala finita (FSLE)	17
Capítulo 3. Dispersión Lagrangiana en turbulencia zonostrófica en una cuenca cerrada con fondo plano	
3.1. Experimentos canónicos	19
3.2. Experimentos con partículas lagrangianas	21
3.3. Características de la turbulencia	22
3.4. Resultados	25
3.4.1. Dispersión relativa	25
3.4.2. Elipses de dispersión	27
3.4.3. FSLE	30
3.5. Efectos de las condiciones de frontera y de la geometría del dominio	32
3.5.1. Condiciones de frontera de no deslizamiento	33
3.5.2. Dominio rectangular	34
3.6. Conclusiones	35

Capítulo 4. Dispersión Lagrangiana en turbulencia zonostrófica en una cuenca cerrada con topografía idealizada

4.1.	Topografía idealizada	40
4.2.	Experimentos canónicos	41
4.2.1.	Espectros de energía	42
4.2.2.	Experimentos con partículas	43
4.3.	Turbulencia con efecto β y topografía idealizada	44
4.3.1.	Campos instantáneos	44
4.3.2.	Campos promedio	45
4.4.	Métricas lagrangianas en experimentos con topografía	46
4.4.1.	Elipses de dispersión	46
4.4.2.	Dispersión absoluta	51
4.5.	Discusiones	54

Capítulo 5. Discusiones y conclusión general

5.1.	Dispersión de partículas en un flujo puramente 2D	56
5.2.	Dispersión de partículas con topografía de fondo	58
5.3.	Trabajo futuro	59

Literatura citada	60
------------------------------------	----

Lista de figuras

Figura	Página
1. Anomalías de la vorticidad potencial $q - \beta y$ en simulaciones numéricas de flujos turbulentos continuamente forzados para (a) $Z = 3.0$, (b) 4.0, (c) 6.5, (d) 10.8. Tomada y modificada de Scott & Dritschel (2012).	4
2. Esquema de la capa de fluido de espesor $h(x, y, t)$ sobre un fondo idealizado en un sistema en rotación. Basado en Zavala Sansón & van Heijst (2000b).	9
3. Evolución temporal de (a) la energía y (b) enstrofia globales para los experimentos canónicos F_I (líneas negras) y F_{II} (líneas azules). La energía (enstrofia) se normaliza con el valor medio \bar{E} (\bar{Z}) del experimento F_I que se muestra en la Tabla 1. Las marcas rojas representan los tiempos en que se inicializan los experimentos con partículas.	21
4. Posiciones iniciales de las partículas. En negro se muestran 250 partículas en una mancha circular de radio $r_1 = 120$ km, y en gris 750 partículas en una mancha circular de radio $r_2 = 1200$ km.	22
5. Campos instantáneos de la función de corriente $\psi/(U_{rms}L)$ calculados en las simulaciones del plano β con el forzamiento débil F_I (paneles superiores) y el forzamiento fuerte F_{II} (paneles inferiores), en los tiempos (a,d) $t = 10$ días, (b,e) $t = 20$ días y (c,f) $t = 30$ días. Los puntos negros representan la posición de 250 partículas contenidas inicialmente en un círculo de 120 km de radio centrado en el origen (véase la Figura 4).	23
6. Espectro de energía promedio calculado a partir de las 20 realizaciones independientes de los experimentos en el plano β (líneas continuas) y f (líneas discontinuas): (a) F_I (forzamiento débil), y (b) F_{II} (forzamiento fuerte). Las líneas negras corresponden a los espectros de energía totales, mientras que las azules (rojas) corresponden a las componentes zonales (meridionales). Las líneas verticales indican el número de onda de la escala de inyección de energía. Las líneas rectas muestran las leyes de potencia que siguen los rangos inerciales.	24
7. Promedio de los campos de la función de corriente $\langle \psi \rangle / (U_{rms}L)$ en las simulaciones del plano β (paneles superiores) y f (paneles inferiores): (a,c) F_I (forzamiento débil), y (b,d) F_{II} (forzamiento fuerte). Los promedios se calcularon con 1,800 campos diarios durante el periodo estadísticamente estacionario $200 \leq t \leq 2000$ días.	25
8. Dispersión relativa en función del tiempo calculada en el plano β (líneas continuas) y f (líneas discontinuas): (a) F_I (forzamiento débil), y (b) F_{II} (forzamiento fuerte). Las curvas representan la dispersión relativa total (negro), zonal (azul) y meridional (rojo). El valor de saturación (semisaturación) $4L^2/3$ ($2L^2/3$) se muestra en líneas horizontales de color gris oscuro (claro). (c) Razón de las componentes de la dispersión relativa zonal y meridional $\langle D_x^2 \rangle / \langle D_y^2 \rangle$ en función del tiempo para el plano β (línea continua) y f (línea discontinua) en los experimentos F_I . (d) Igual que en (c) pero para F_{II}	26
9. Elipses de dispersión en el plano β para el experimento F_I en tres tiempos diferentes: (a) $t = 45$ días; (b) $t = 180$ días; (c) $t = 360$ días. El contorno azul representa la elipse de dispersión y las líneas grises los semiejes. Los puntos negros representan las partículas que parten de la mancha circular de radio r_1 en el origen (véase la Figura 4). (d) Elipse de dispersión calculada en el plano f a $t = 360$ días. Evolución temporal de: (e) la razón de semiejes a/b , y (f) la orientación de la elipse θ , para las simulaciones de forzamiento débil F_I . Las líneas azules (rojas) corresponden a los experimentos en el plano β (f).	28

Figura	Página
10. Elipses de dispersión en el plano β para el experimento F_{II} en tres tiempos diferentes: (a) $t = 3$ días; (b) $t = 10$ días; (c) $t = 30$ días. (d) Elipse de dispersión calculada en el plano f en $t = 30$ días. Evolución temporal de: (e) la razón de semiejes a/b , y (f) la orientación de la elipse θ , para las simulaciones de forzamiento fuerte F_{II} . Las líneas azules (rojas) corresponden a los experimentos en el plano β (f).	30
11. FSLE por componentes zonal (azul) y meridional (rojo) en las simulaciones (a) F_I (forzamiento débil), y (b) F_{II} (forzamiento fuerte). Los valores están normalizados con el FSLE máximo. Los valores de λ_L son 0.0348 y 0.1405 días ⁻¹ para F_I y F_{II} , respectivamente. Las líneas grises rectas indican las leyes de potencia en diferentes rangos (véase el texto). La escala de forzamiento $\ell_f = 106$ km se indica con flechas pequeñas.	32
12. Índice anisotrópico lagrangiano \mathcal{A} en función de δ para los experimentos F_I (línea sólida) y F_{II} (línea discontinua) en el plano β	32
13. Dispersión relativa en función del tiempo calculada en el plano β con condiciones de frontera libre de esfuerzos (líneas sólidas) y no deslizamiento (líneas discontinuas): (a) F_I (forzamiento débil) y (b) F_{II} (forzamiento fuerte). El valor de saturación (semisaturación) $4L^2/3$ ($2L^2/3$) se muestra en líneas horizontales grises. (c) Razón de las componentes de dispersión relativa zonal y meridional $\langle D_x^2 \rangle / \langle D_y^2 \rangle$ contra el tiempo para las condiciones libre de esfuerzos (línea sólida) y no deslizamiento (línea discontinua) para el experimento F_I . (d) Igual que en (c) pero para F_{II}	33
14. (a) Campo instantáneo de la función de corriente $\psi / (U_{rms} L_r)$ calculado en una simulación en el plano β en un dominio rectangular con razón de aspecto 2 (lado largo $L_r = 2121$ km) con condiciones de frontera libre de esfuerzos en el tiempo $t = 720$ días. El área del dominio, el forzamiento y la U_{rms} son aproximadamente los mismos que en el experimento F_I . Los puntos representan la posición de 250 partículas colocadas inicialmente en una pequeña mancha central (como en la Figura 4). (b) Dispersión relativa en función del tiempo calculada a partir de las simulaciones en el plano β en el dominio cuadrado (línea sólida) y rectangular (líneas discontinuas). Las curvas representan la dispersión relativa total (negro), zonal (azul) y meridional (rojo). (c) Elipses de dispersión en los experimentos en el plano β en el dominio cuadrado (línea sólida) y rectangular (línea discontinua). Las líneas grises indican los semiejes.	35
15. Topografía de una cuenca cuadrada definida por el campo de profundidad (46) con $L_d = 0.98 L$ ($L = 1500$ km) y $\alpha = 10$. Las pendientes entre cada frontera y una distancia $L/6$ son aproximadamente 5.1×10^{-3} . Basada en la topografía empleada por Zavala Sansón (2022).	40
16. Evolución temporal de la (a) energía y (b) enstrofía globales para los experimentos canónicos $F_{m\beta}$ (negro), F_{mt} (verde) y F_m (azul), respectivamente. Las marcas rojas representan los 10 tiempos en que se inician los experimentos con partículas.	42

Figura	Página
17. Espectro de energía promedio calculado a partir de las 10 realizaciones independientes de los experimentos (a) $F_{m\beta}$ (fondo plano con efecto β), y (b) F_{mt} (plano f con topografía) y (c) F_m (con efecto β y topografía). Las líneas negras, azules y rojas corresponden a los espectros de energía totales, zonales y meridionales, respectivamente. Las líneas en la esquina inferior izquierda muestran las leyes de potencia que siguen los rangos inerciales.	43
18. Distribución inicial de partículas. La mancha central, este, norte, oeste y sur del dominio se representa en negro, azul, rojo, verde y magenta, respectivamente.	44
19. Campos instantáneos de: (a) la función de corriente ψ^*/LU para el experimento $F_{m\beta}$ (fondo plano y efecto β), (b) función transporte ψ/LUH para el experimento F_{mt} (con topografía sin efecto β) y (c) función transporte para el experimento F_m (con topografía y efecto β). Los contornos en negro en los paneles (b) y (c) representan contornos geostroficados f/h	45
20. Campos promedio de: (a) la función de corriente $\langle\psi^*\rangle/LU$ para el experimento $F_{m\beta}$ (fondo plano y efecto β), (b) la función transporte $\langle\psi\rangle/LUH$ para F_{mt} (con topografía y sin efecto β) y (c) función transporte para F_m (con topografía de fondo y efecto β). Los contornos en negro representan contornos geostroficados f/h	46
21. Elipses de dispersión y posición de las partículas de los cinco grupos definidos en la Figura 18 para diferentes tiempos en el experimento $F_{m\beta}$: (a) $t = 30$, (b) $t = 60$, (c) $t = 90$, (d) $t = 120$, (e) $t = 150$ y (f) $t = 180$ d.	47
22. Elipses de dispersión y posiciones de partículas como en la Figura 21 pero ahora para el experimento F_{mt}	48
23. Elipses de dispersión y posiciones de partículas como en la Figura 21 pero ahora para el experimento F_m	49
24. Evolución de la razón de aspecto (a/b) (paneles a,c,e) y área adimensional A_e/A_D (paneles b,d,f) de las elipses de dispersión de cada grupo de partículas en los experimentos: (a)-(b) para $F_{m\beta}$; (c)-(d) para F_{mt} y (e)-(f) para F_m . El código de color es el mismo que en la Figura 18. $A_D = 9 \times 10^6 \text{ km}^2$ es el área del dominio.	51
25. Dispersión absoluta total (líneas continuas gruesas), zonal (líneas continuas) y meridional (líneas discontinuas) calculadas para cada mancha de partículas en el experimento $F_{m\beta}$: (a) Mancha norte, (b) Mancha oeste, (c) Mancha central, (d) Mancha este y (e) Mancha sur. La línea horizontal gris representa el valor de saturación $\langle A_S^2 \rangle$. Para la mancha de partículas que parte del centro (de las fronteras) $\langle A_S^2 \rangle$ es $1.5 \times 10^6 \text{ km}^2$ ($3.46 \times 10^6 \text{ km}^2$).	52
26. Igual que la Figura 25 pero para el experimento F_{mt}	53
27. Igual que la Figura 25 pero para el experimento F_m	54

Lista de tablas

Tabla	Página
1. Valores representativos del flujo turbulento para los experimentos F_I y F_{II} en el plano β . Los promedios de energía (44), enstrofía (45) y U_{rms} se calculan para el periodo $200 \leq t \leq 2000$ días.	21

Capítulo 1. Introducción

La dinámica de la dispersión de trazadores pasivos o activos en fluidos geofísicos (atmósfera y océano) es de gran interés desde el punto de vista científico, pero también desde una óptica social y ambiental. Conocer el cómo se transporta, cómo se mezcla, y cuál es la trayectoria de una determinada sustancia en el océano es de suma importancia para el balance del ambiente marino y de los ecosistemas. Dar respuestas a la dinámica del transporte en este tipo de flujos involucra el análisis desde un contexto lagrangiano. Entre muchos ejemplos se puede mencionar el transporte de organismos en estados larvarios (Siegel et al., 2003), los florecimientos algales nocivos (Heisler et al., 2008) y la dispersión de sustancias contaminantes que involucran operaciones de rescate y limpieza como ocurrió en el desastre de la plataforma Deepwater Horizon en el Golfo de México que fue el mayor derrame industrial accidental de petróleo en aguas marinas en la historia. Crone & Tolstoy (2010) calcularon que la magnitud de la fuga fue de 4.4 millones de barriles. Generalmente, el transporte y la dispersión del petróleo derramado en el mar son gobernados por los procesos físicos, químicos, y biológicos que dependen de las condiciones hidrodinámicas, meteorológicas y ambientales, así como de las características del hidrocarburo (Wang et al., 2005).

Los ejemplos descritos anteriormente están enfocados en el seguimiento de organismos o contaminantes vistos como trazadores que son advectados por las corrientes marinas. A partir de las trayectorias de trazadores es posible realizar estudios físicos que permitan construir y mejorar las teorías ya existentes acerca de dispersión en el océano. La dispersión es un fenómeno que se presenta en todas las escalas espaciales, y por lo tanto, puede ser estudiada desde un contexto turbulento, donde los movimientos de los trazadores en las escalas más pequeñas pueden considerarse como movimientos estocásticos. Cuando existe el interés de realizar estudios de gran escala, como en el presente trabajo, es necesario estudiar a la dispersión desde el contexto de la turbulencia planetaria. Mencionemos primero la fenomenología de la turbulencia en general.

1.1. Turbulencia

La turbulencia se caracteriza por ser de naturaleza fluctuante y aleatoria, la aparición de remolinos en un gran intervalo de escalas espaciales y temporales, la facilidad de mezcla y la disipación de energía. Se dice que la turbulencia es estadísticamente estacionaria cuando se tiene uno o varios mecanismos de inyección de energía, la cual se distribuye en diferentes escalas de movimiento y, generalmente, se disipa

en las escalas más pequeñas. Richardson (1922) fue el primero en identificar que la energía en un flujo tridimensional se transfiere en cascada por medio de interacciones no lineales desde las escalas grandes de movimiento hacia las pequeñas escalas, donde se efectúa la disipación en forma de calor. Años más tarde, Kolmogorov (1941), formalizó la idea de Richardson al proponer la forma del espectro de energía en el rango inercial (ley de los $-5/3$).

Sin embargo, la turbulencia también puede presentarse en el caso bidimensional. La teoría de la turbulencia en dos dimensiones fue introducida por Batchelor en la década de los 50 y formalizada por Kraichnan en los años 60 (Borue, 1994). En este caso tenemos una fenomenología muy diferente, ya que la energía se propaga mayormente de pequeñas escalas a grandes escalas. Esta propiedad implica que las estructuras turbulentas tienden a ser menos disipativas que en el caso tridimensional porque los efectos viscosos son menos efectivos en las escalas mayores (es decir, con mayor número de Reynolds). En fluidos geofísicos es apropiado utilizar a la turbulencia en dos dimensiones, ya que los movimientos dominantes se presentan principalmente en la dirección horizontal, dado que en la vertical la velocidad está restringida por la rotación de la Tierra, la estratificación y su confinamiento geométrico (Tabeling, 2002).

1.1.1. Turbulencia planetaria

La turbulencia geostrófica es el movimiento caótico no lineal de fluidos en un estado muy próximo al balance geostrófico e hidrostático (Rhines, 1979). La turbulencia geostrófica se ha utilizado en la dinámica de fluidos, como un modelo relativamente simple de algunas atmósferas planetarias a gran escala, y en los sistemas atmosféricos y oceánicos terrestres (Pedlosky, 2003). Al considerar la variación meridional del parámetro de Coriolis (efecto β), la simetría del flujo horizontal se rompe dando lugar a la aparición de flujos en chorro en la dirección zonal. En un cierto rango de parámetros, tiene lugar un nuevo régimen de flujo llamado *turbulencia zonostrófica* (Galperin et al., 2008).

La turbulencia zonostrófica caracteriza la circulación de flujos a escalas planetarias cercanas al equilibrio geostrófico y donde la variación meridional del parámetro de Coriolis es significativa (Galperin et al., 2008). Las principales características de la turbulencia zonostrófica son la existencia de una cascada de energía inversa anisótropa que se distingue por la formación de un sistema de bandas alternas en la dirección zonal. Estas bandas zonales se han detectado en la atmósfera de planetas gaseosos gigantes,

como Júpiter y Saturno (Galperin et al., 2004) y, con menor intensidad e indirectamente, en los océanos de la Tierra (Nakano & Hasumi, 2005; Maximenko et al., 2005; Cravatte et al., 2012). El mecanismo básico de formación de las bandas zonales está asociado a la generación y propagación hacia el oeste de ondas de Rossby (u ondas planetarias), cuya interacción con el flujo turbulento produce la transferencia anisotrópica de energía hacia números de onda zonales (Vallis & Maltrud, 1993).

La turbulencia zonostrófica se suele estudiar bajo la aproximación de plano β , la cual consiste en considerar un sistema bidimensional en el que el efecto de las variaciones latitudinales del parámetro de Coriolis se representa mediante un término lineal en la dirección meridional. Algunos de los primeros trabajos que abordaron el problema de la turbulencia continuamente forzada en el plano β y la formación de bandas zonales fueron los de Rhines (1975) y Vallis & Maltrud (1993).

Rhines (1975) propuso una escala de longitud que caracteriza las bandas zonales de turbulencia zonostrófica, que resulta de comparar el periodo de una onda de Rossby con la escala de tiempo advectiva. La escala de Rhines se define como

$$L_R = \sqrt{\frac{U_{rms}}{\beta}}, \quad (1)$$

donde U_{rms} es la raíz cuadrática media de la velocidad y β el gradiente latitudinal del parámetro de Coriolis. Posteriormente, Vallis & Maltrud (1993) definieron una escala de transición de la turbulencia bidimensional a la turbulencia zonostrófica. Esta escala se obtiene comparando el periodo de una onda de Rossby con la escala de tiempo asociada a la transferencia de energía en el subrango inercial y se define como

$$L_\varepsilon = \left(\frac{\varepsilon}{\beta^3}\right)^{\frac{1}{5}}, \quad (2)$$

donde ε es la tasa de transferencia de energía que caracteriza a la turbulencia (equivalente a la razón de disipación de energía (Maltrud & Vallis, 1991)).

Scott & Dritschel (2012) determinaron que la evolución y características estructurales de los chorros zonales depende del índice zonostrófico definido como

$$\mathcal{Z} = \frac{L_R}{L_\varepsilon}, \quad (3)$$

el cual permite estimar si la turbulencia tiende a formar bandas zonales alternas o se mantiene la turbulencia bidimensional isotrópica. La turbulencia 2D a escalas planetarias se caracteriza por un índice $\mathcal{Z} > 1$ (Galperin et al., 2008). Entre mayor sea el índice zonostrófico, las bandas zonales se definen con mayor claridad.

En la Figura 1 se ilustra el comportamiento de un flujo turbulento continuamente forzado para diferentes valores de \mathcal{Z} , de acuerdo a simulaciones numéricas realizadas por Scott & Dritschel (2012). Los chorros zonales aparecen débilmente organizados cuando $\mathcal{Z} = 3.0$ y 4.0 (paneles a y b) y para valores mayores, $\mathcal{Z} = 6.5$ y 10.8 , los chorros están mejor definidos (paneles c y d). Para $\mathcal{Z} \sim 10$, el régimen es completamente zonostrófico, en el que el sistema exhibe una disposición clara de bandas zonales. Las atmósferas de los planetas gaseosos se encuentran presumiblemente en este estado. Por el contrario, para $\mathcal{Z} \sim [2-2.5]$ el flujo está en el umbral de la turbulencia zonostrófica (Galperin et al., 2004, 2008). Por esta razón, los océanos de la Tierra se consideran marginalmente zonostróficos ya que típicamente $\mathcal{Z} \sim 2$ (Sukoriansky et al., 2007). Otros estudios han analizado flujos en turbulencia zonostrófica para bajos valores de \mathcal{Z} a través de experimentos de laboratorio en el plano β polar (Di Nitto et al., 2013; Cabanes et al., 2017). En estos experimentos se simula la variación cuadrática del parámetro de Coriolis (efecto γ) en regiones polares mediante la deformación parabólica de la superficie libre de un fluido en rotación (Doron, 1990; Afanasyev & Wells, 2005).

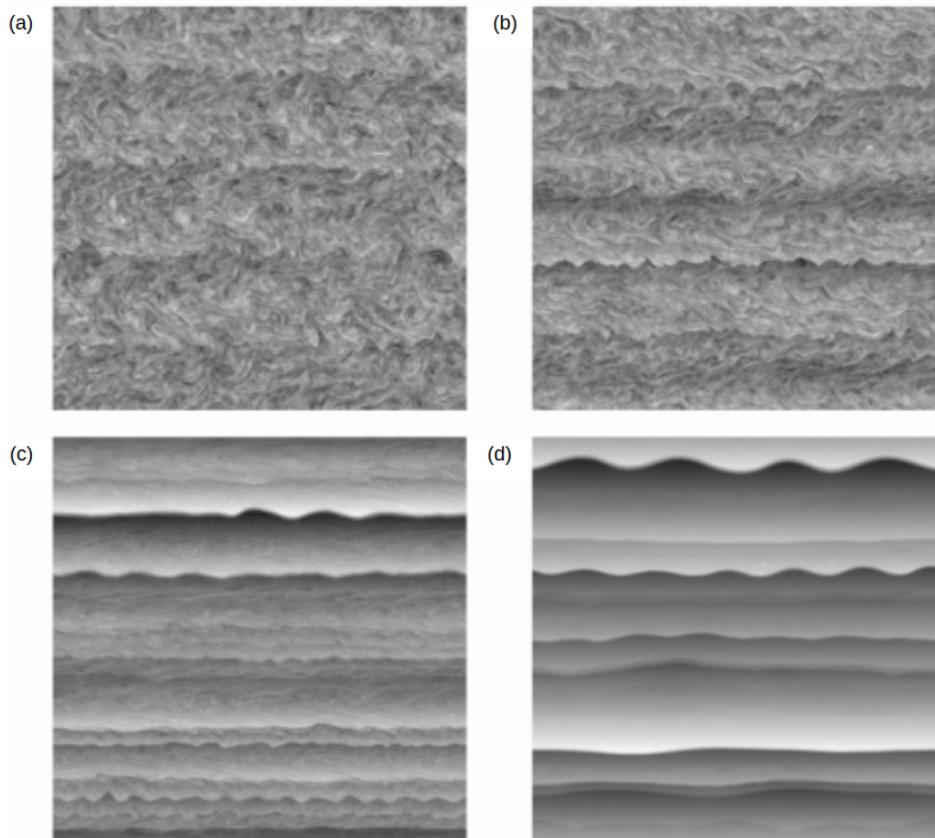


Figura 1. Anomalías de la vorticidad potencial $q - \beta y$ en simulaciones numéricas de flujos turbulentos continuamente forzados para (a) $\mathcal{Z} = 3.0$, (b) 4.0 , (c) 6.5 , (d) 10.8 . Tomada y modificada de Scott & Dritschel (2012).

1.2. Justificación

A nivel oceanográfico, es de interés estudiar el efecto a corto y largo plazo de la anisotropía de un flujo zonostrófico en el comportamiento de una nube trazadora en el plano β . En presencia de bandas de circulación este-oeste, se espera que la dispersión de partículas presente una anisotropía con preferencia zonal. Aunque existen estudios sobre la presencia de chorros zonales en el océano (Maximenko et al., 2005; Berloff, 2005; Nakano & Hasumi, 2005; Richards et al., 2006; Nadiga, 2006; O'Reilly et al., 2012; Cravatte et al., 2012) no se han realizado análisis de dispersión de partículas para cuantificar la anisotropía en el transporte horizontal de trazadores pasivos. La dispersión anisotrópica en la turbulencia zonostrófica solo se ha medido en experimentos de laboratorio bajo la configuración del plano β polar (Lacorata & Espa, 2012; Espa et al., 2014). Se ha simulado una anisotropía similar en plasmas magnetizados utilizando las ecuaciones de Hasegawa-Wakatani, que son homomórficas (es decir, que son de la misma forma) con el modelo geofísico del plano β (Basu et al., 2003). A pesar de varias diferencias dinámicas, ese estudio es un precursor del presente documento.

Otro aspecto importante es el confinamiento del flujo turbulento dentro de límites cerrados. La dispersión de trazadores pasivos contenidos en dominios cerrados ha sido discutida por Artale et al. (1997) a través de los exponentes Lyapunov de escala finita, y por Flores Ramírez & Zavala Sansón (2019) en simulaciones numéricas de turbulencia bidimensional utilizando diferentes tamaños y formas de dominio. Otros estudios numéricos que utilizan la aproximación del plano β han documentado la generación de bandas zonales bajo diferentes condiciones de frontera (LaCasce, 2002; Kramer et al., 2006; Zavala Sansón, 2022), pero no han abordado el problema de la dispersión lagrangiana. En el modelado oceánico, las condiciones de frontera adecuadas en mares cerrados o semicerrados es un tema relevante porque los términos friccionales o viscosos están necesariamente parametrizados debido al carácter altamente turbulento de los flujos cercanos a la costa (Cummins, 1992; van Heijst et al., 2006).

Una segunda parte de esta investigación consiste en estudiar la dispersión de partículas cuando se añade una topografía de fondo idealizada que simule las pendientes continentales cerca de las fronteras. En presencia de dicha topografía costera, la respuesta del flujo es la generación de corrientes intensas al borde del dominio debido al llamado *efecto neptuno* (Zavala Sansón, 2022). El efecto neptuno se debe a la interacción de los movimientos aleatorios generados por la turbulencia con la topografía (Holloway, 1992). En el hemisferio norte las corrientes generadas por este fenómeno tienden a circular en sentido ciclónico en cuencas oceánicas, siguiendo contornos geostróficos de f/h , donde f es el parámetro de Coriolis y h la profundidad del fluido. Aunque la aparición de corrientes debidas a la topografía es un tema

que se estudia desde hace algunas décadas (Holland, 1967), aún no existen estudios de dispersión de partículas bajo ese forzamiento. Por lo tanto, considerando que las condiciones de frontera, la topografía, el tamaño o la forma del dominio de flujo pueden afectar la turbulencia interior, podemos esperar que la dispersión de partículas también se vea afectada.

Para contribuir con mayor detalle al estudio de la dispersión lagrangiana en turbulencia zonostrófica proponemos realizar un estudio numérico en el que los trazadores se dispersan debido a las bandas de circulación zonal bajo la dinámica barotrópica de aguas someras. La meta es analizar la posible anisotropía de la dispersión en cuencas cerradas con topografía en el plano β , considerando índices pequeños ($1 < \mathcal{Z} < 3$) característicos de sistemas oceánicos. La cuantificación de la anisotropía se realizará a partir de cálculos de estadísticas utilizando las posiciones de un gran número de partículas que son advectadas por el flujo.

La anisotropía de la dispersión en turbulencia zonostrófica es un tema que ha sido escasamente estudiado. Uno de los pocos trabajos sobre el tema fue realizado por Espa et al. (2014), quienes cuantificaron propiedades anisotrópicas de dispersión en flujos experimentales. En este trabajo se plantea determinar en primer lugar si dicha anisotropía se puede detectar en flujos marginalmente zonostróficos en una cuenca cerrada con fondo plano. En segundo lugar, nos interesa estudiar cómo se modifica la dispersión cuando la topografía de fondo asemeja las pendientes continentales. El análisis propuesto en las regiones cercanas a las fronteras es una aproximación del problema de la dispersión costera asociada a la turbulencia oceánica. En el plano f , la frontera en la que se liberan los trazadores no es relevante, a diferencia del plano β , en donde se espera que la dispersión dependa de la orientación de la costa.

1.3. Hipótesis

Pretendemos probar dos hipótesis

- (i) La dispersión lagrangiana en turbulencia zonostrófica en una cuenca cerrada con fondo plano es anisotrópica y se puede detectar aunque el índice zonostrófico sea marginal.
- (ii) La dispersión de partículas en flujos forzados topográficamente alrededor de una cuenca cerrada en el plano β depende de la frontera en la que son liberadas.

1.4. Objetivo general

Estudiar la dispersión de trazadores pasivos en turbulencia zonostrófica dentro de una cuenca cerrada en el plano β .

1.4.1. Objetivos específicos

- I. Cuantificar la dispersión lagrangiana en una cuenca cerrada con fondo plano y su posible anisotropía debida a las bandas zonales.
- II. Estudiar los efectos del confinamiento del flujo y de la forma del dominio en la dispersión de trazadores.
- III. Determinar la dispersión de partículas en regiones cercanas a las fronteras debida a la presencia de corrientes inducidas por la topografía del fondo.

Esta investigación está dividida en cinco capítulos. El Capítulo 2 presenta las ecuaciones de aguas someras que gobiernan la dinámica del problema, la descripción general del modelo numérico y métricas lagrangianas definidas por componentes. En el Capítulo 3 se presentan los principales resultados respecto a la formación y mantenimiento de bandas de circulación de la turbulencia zonostrófica obtenidos mediante las simulaciones numéricas en una cuenca cerrada con fondo plano. Bajo estas condiciones se cuantifica la anisotropía de la dispersión presente en el flujo utilizando ensambles de varias simulaciones con partículas. Después, en el Capítulo 4 se analiza la dispersión de partículas cuando las simulaciones numéricas se realizan con una topografía de fondo que asemeja las pendientes continentales. Por último, se discuten los resultados más relevantes en el Capítulo 5.

Capítulo 2. Teoría y métodos

En esta capítulo se describe los principales aspectos teóricos relacionados con la dinámica del flujo turbulento en dos dimensiones (2D) y las herramientas estadísticas para cuantificar la dispersión lagrangiana. Primero, en la sección 2.1 se presenta las ecuaciones de gobierno y las consideraciones dinámicas para representar un flujo horizontal, ya sea con topografía variable o plana. Además incluimos la descripción del forzamiento externo que actúa sobre el fluido y generalidades de la doble cascada de energía. Después, en la sección 2.2 se menciona las características generales del modelo numérico empleado para realizar experimentos con trazadores pasivos advectados por flujos turbulentos. Por último, en la sección 2.3 se describe algunas métricas lagrangianas definidas por componentes, las cuales son útiles para cuantificar anisotropía en la dispersión de partículas.

2.1. Ecuaciones de movimiento

Se considera un fluido homogéneo en un sistema en rotación cuyo movimiento se describe en un plano cartesiano (x, y, z) , bajo la aproximación del plano β , donde x y y son las coordenadas horizontales y la vertical z es paralela a la gravedad. Las componentes de velocidad del flujo son (u, v, w) . Para flujos que se mueven suficientemente lento (es decir, cuyo número de Rossby es muy pequeño), la dinámica es esencialmente bidimensional en el plano horizontal, mientras que en la vertical se mantiene aproximadamente en balance hidrostático. Bajo estas condiciones se puede suponer que las componentes horizontales son independientes de la profundidad, es decir, $u = u(x, y, t)$ y $v = v(x, y, t)$. El fluido está limitado en el fondo por la topografía $z = h_b(x, y)$ y en la superficie libre por $z = H + \eta(x, y, t)$, donde H es la profundidad promedio de la capa de fluido (en ausencia de movimientos relativos) y η es la elevación o hundimiento de la superficie libre con respecto a H . El espesor de la capa de fluido se define como $h(x, y, t) = H + \eta(x, y, t) - h_b(x, y)$. La Figura 2 muestra un esquema del sistema.

El sistema de ecuaciones que gobiernan el fluido son cuatro: tres de movimiento y una de continuidad, representadas respectivamente por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 u + R_1 + F_1, \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \nabla^2 v + R_2 + F_2, \quad (5)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

donde f es el parámetro de Coriolis, ρ la densidad (constante), P es la presión, ν la viscosidad cinemática turbulenta, $\nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ es el operador Laplaciano horizontal y g la gravedad. El vector $\mathbf{R} = (R_1, R_2)$ es fricción del fondo y el vector $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ es un forzamiento externo.

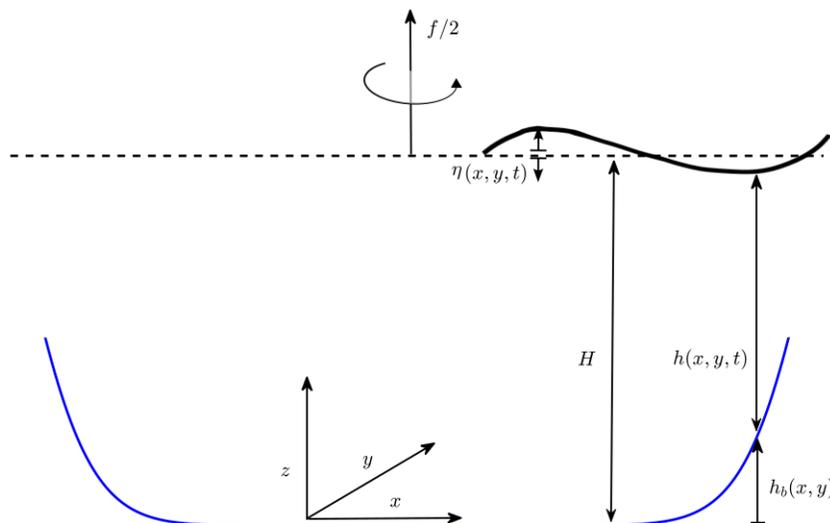


Figura 2. Esquema de la capa de fluido de espesor $h(x, y, t)$ sobre un fondo idealizado en un sistema en rotación. Basado en Zavala Sansón & van Heijst (2002).

En general, el parámetro de Coriolis depende de la latitud ϑ como $f = 2\Omega \sin \vartheta$, con Ω la rapidez angular de la Tierra. Cuando deseamos conservar los efectos dinámicos de la variación latitudinal de f en un plano, se realiza la expansión del parámetro en una serie de Taylor alrededor de una latitud de referencia ϑ_0 y se desprecian los términos no lineales. De esta forma,

$$f = f_0 + \beta y, \quad (8)$$

donde $\beta \equiv (df/d\vartheta)_{\vartheta_0} = 2\Omega \cos \vartheta_0 / R_T$, con R_T el radio de la Tierra. Esta expansión suele llamarse aproximación del plano β para latitudes medias (Holton & Hakim, 2013).

Integrando en z la ecuación (6) y suponiendo que en la superficie $P(x, y, H + \eta) = p_0$, donde p_0 es la presión atmosférica (considerada constante), se tiene

$$P(x, y, t) = \rho g[H + \eta(x, y, t) - z] + p_0. \quad (9)$$

Ahora derivando la presión P con respecto a x y y se obtiene

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (11)$$

Al sustituir (10) y (11) en las ecuaciones de momento horizontales (4) y (5) resulta

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - (f_0 + \beta y)v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \nu \nabla^2 u + R_1 + F_1, \quad (12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + (f_0 + \beta y)u = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \nu \nabla^2 v + R_2 + F_2. \quad (13)$$

Debido a la independencia de u y v respecto a z , la ecuación (7) se puede integrar en la vertical. Al aplicar las condiciones de frontera en la superficie (condición cinemática) y en el fondo (condición de impermeabilidad) para la componente vertical de la velocidad

$$w|_{z=H+\eta} = \frac{D\eta}{Dt}, \quad w|_{z=h_b} = u \frac{\partial h_b}{\partial x} + v \frac{\partial h_b}{\partial y},$$

se obtiene una nueva expresión para la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{h} \frac{Dh}{Dt}, \quad (14)$$

donde $D/Dt = \partial_t + u\partial_x + v\partial_y$ es la derivada material horizontal.

Con las aproximaciones anteriores ahora se tiene un sistema de tres ecuaciones: (12-14) cuyas variables son (u, v, η) . Con la resta de las derivadas cruzadas de las ecuaciones de momento horizontales (12) y (13), se obtiene una ecuación para la componente vertical de la vorticidad relativa ω

$$\frac{D}{Dt} (\omega + f_0 + \beta y) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) (\omega + f_0 + \beta y) = \nu \nabla^2 \omega - r\omega + F, \quad (15)$$

donde

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (16)$$

Para obtener el término de fricción del fondo $-r\omega$ se supone que la disipación es proporcional a la velocidad horizontal $(R_1, R_2) = -r(u, v)$, con r un coeficiente constante. El término F es la componente vertical del rotacional del forzamiento.

Despreciando las variaciones temporales de la profundidad (aproximación de tapa rígida) la ecuación (14) se reduce a

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0. \quad (17)$$

Se puede definir una función transporte ψ tal que

$$hu = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad hv = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (18)$$

Considerando la vorticidad potencial $q = \frac{\omega + f_0 + \beta y}{h}$, la ecuación de vorticidad se puede escribir como

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + J(q, \psi) = \nu\nabla^2\omega - r\omega + F, \quad (19)$$

donde $J(q, \psi) = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y}$ es el operador Jacobiano. La relación entre ω y ψ es

$$\omega = -\frac{1}{h}\nabla^2\psi + \frac{1}{h^2}\nabla h \cdot \nabla\psi. \quad (20)$$

Si se considera un fondo plano, es decir $h = H$, se puede construir una función de corriente $\psi^* = \frac{\psi}{H}$ tal que

$$u = \frac{\partial\psi^*}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi^*}{\partial x}. \quad (21)$$

por lo que la ecuación de vorticidad es

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + J(q, \psi^*) = \nu\nabla^2\omega - r\omega + F, \quad (22)$$

y la relación entre ω y ψ^* es

$$\omega = -\nabla^2\psi^*. \quad (23)$$

2.1.1. Forzamiento aleatorio

El forzamiento F es un proceso de Markov de primer orden basado en el método diseñado por Lilly (1969) para inyectar energía en un rango de escalas bien definido y de lenta evolución en el tiempo. Para lograr este objetivo, F se compone de la suma de n modos

$$F(x, y, t) = \frac{\tau_0}{\rho H} \sum_{i=1}^n (k_i + l_i) \sin [k_i x + \phi_x(t)] \sin [l_i y + \phi_y(t)], \quad (24)$$

donde τ_0 es la magnitud del esfuerzo externo, $\phi_x(t)$ y $\phi_y(t)$ son fases que cambian aleatoriamente en el tiempo ($0 \leq \phi_x(t) \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi_y(t) \leq 2\pi$) y (k_i, l_i) con $i = 1, 2, 3 \dots n$, son las componentes del número de onda en un rango centrado en $\kappa_f = 2\pi/\ell_f$, en donde ℓ_f es la escala de forzamiento (Zavala Sansón, 2022). Para que F cambie lentamente en el tiempo se utiliza la expresión

$$F(x, y, t + dt) = R_n F(x, y, t) + (1 - R_n^2)^{1/2} Q(x, y, t + dt), \quad (25)$$

donde dt es el paso de tiempo, $Q(x, y, t)$ está definido de la misma forma que en (24) y se diferencia de este último en tener diferentes fases; $R_n = (1 - 0.5dt/\tau_n) / (1 + 0.5dt/\tau_n) \leq 1$ es el coeficiente de decorrelación sin dimensiones para un tiempo τ_n . Es decir, este forzamiento no está decorrelacionado de un paso de tiempo a otro sino que conserva su memoria un tiempo τ_n .

2.1.2. Cantidades conservadas

En ausencia de fuerzas no conservativas como la viscosidad y el forzamiento externo algunas cantidades como la energía global y la enstrofía del sistema se conservan. Estas cantidades integrales por unidad de masa y de volumen se definen respectivamente como

$$E(t) = \frac{1}{2V} \iint \frac{1}{h^2} |\nabla\psi|^2 h \, dx dy, \quad (26)$$

$$Z(t) = \frac{1}{2V} \iint \left(\frac{\omega + f_0 + \beta y}{h} \right)^2 h \, dx dy, \quad (27)$$

donde V es el volumen del dominio. Cuando el fluido tiene viscosidad y es forzado continuamente el sistema alcanza el equilibrio estadístico, en el cual ambas funciones escalares adquieren valores constantes en promedio.

2.2. Modelo numérico

El modelo numérico empleado en este trabajo resuelve la ecuación de vorticidad (19) en una cuadrícula rectangular utilizando diferencias finitas. Orlandi y Verzicco desarrollaron originalmente el código para flujos en dos dimensiones (Orlandi & van Heijst, 1992), que luego se amplió para incluir efectos de rotación y topografía del fondo (Zavala Sansón & van Heijst, 2014). Otras modificaciones incluyen un forzamiento constante a escala de cuenca (Zavala Sansón, 2019), y forzamiento dependiente del tiempo como el aquí utilizado (Zavala Sansón, 2022). Los términos no lineales se discretizan espacialmente con un esquema de Arakawa (evitando la generación y pérdida artificial de energía y enstrofía) y el avance en el tiempo se realiza con un esquema de Runge-Kutta de tercer orden, adecuado para flujos geofísicos (Röbber et al., 2018). Los términos viscosos se consideran implícitamente con un esquema centrado de segundo orden.

2.3. Métricas lagrangianas

Las métricas lagrangianas para calcular dispersión presentadas en esta sección están relacionadas con la separación de partículas conforme son dispersadas por la turbulencia. La primer métrica es la dispersión absoluta, que cuantifica la separación cuadrática media de cada partícula respecto a su posición inicial. La segunda es la dispersión relativa, que cuantifica la separación cuadrática media de pares. Una tercer métrica son las elipses de dispersión como una medida estadística empleada para rastrear la trayectoria y la forma de una nube de partículas desde una fuente puntual o casi puntual. Por último, la cuarta métrica son los exponentes de Lyapunov de escala finita (FSLE) utilizados para medir propiedades de la dispersión a diferentes escalas.

2.3.1. Dispersión absoluta

La dispersión anisotrópica de partículas individuales desde una fuente arbitraria se estudia a través de la dispersión absoluta por componente. Dichas componentes se calculan con la separación cuadrática de

cada partícula respecto a su posición en cada dirección a un tiempo de referencia. La dispersión absoluta zonal y meridional se define respectivamente como:

$$\langle A_x^2 \rangle(t) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \left[x^k(t) - x^k(t_0) \right]^2, \quad (28a)$$

$$\langle A_y^2 \rangle(t) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \left[y^k(t) - y^k(t_0) \right]^2, \quad (28b)$$

donde \mathcal{N} es el número total de partículas disponibles, x^k y y^k indican las posiciones de la partícula k y t_0 es el tiempo inicial. La dispersión absoluta total se define como

$$\langle A^2 \rangle(t) = \langle A_x^2 \rangle(t) + \langle A_y^2 \rangle(t). \quad (29)$$

Flores Ramírez & Zavala Sansón (2019) determinaron que existen valores límite o de saturación en la dispersión de partículas individuales en dominios con diferentes geometrías (rectángulos, círculos y triángulos). El valor de saturación de la dispersión absoluta depende de la ubicación inicial de las partículas. Para una fuente de partículas arbitraria ubicada en (x_0, y_0) en un dominio cuadrado de lado $2L$, el valor de saturación por componente es

$$\langle A_{Sx}^2 \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L (x - x_0)^2 dx = \frac{(2L)^2}{12} + x_0^2, \quad (30a)$$

$$\langle A_{Sy}^2 \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L (y - y_0)^2 dy = \frac{(2L)^2}{12} + y_0^2. \quad (30b)$$

La dispersión absoluta saturada total es

$$\langle A_S^2 \rangle = \frac{1}{(2L)^2} \iint_{-L}^L \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right] dx dy = \frac{(2L)^2}{6} + x_0^2 + y_0^2. \quad (31)$$

Nótese que el valor de saturación de dispersión absoluta es para una fuente con posición arbitraria; si la fuente es el origen del plano (x, y) el valor de saturación se reduce a $\frac{(2L)^2}{6}$.

2.3.2. Dispersión relativa

La dispersión relativa por componente se calcula como la separación cuadrática media entre pares de partículas en cada dirección espacial (Flores Ramírez & Zavala Sansón, 2019),

$$\langle D_x^2 \rangle(t, D_0) = \frac{1}{N} \sum_{p < q} [x^p(t) - x^q(t)]^2, \quad (32a)$$

$$\langle D_y^2 \rangle(t, D_0) = \frac{1}{N} \sum_{p < q} [y^p(t) - y^q(t)]^2, \quad (32b)$$

donde N son los pares de partículas inicialmente separadas al menos por una distancia D_0 , $x^{p,q}(t)$ y $y^{p,q}(t)$ son las posiciones de las partículas p y q en las direcciones zonal y meridional en el tiempo t , respectivamente (Babiano et al., 1990; Zavala Sansón et al., 2017b). La desigualdad $p < q$ indica que el par p, q se considera una sola vez. La suma de (32a) y (32b) es la dispersión relativa total,

$$\langle D^2 \rangle(t, D_0) = \langle D_x^2 \rangle(t, D_0) + \langle D_y^2 \rangle(t, D_0). \quad (33)$$

Esta métrica estima la separación promedio de una nube de partículas inmersa en un flujo a medida que avanza el tiempo. La dispersión relativa también tiene un valor máximo para un dominio cerrado. En particular, la dispersión relativa saturada $\langle D_s^2 \rangle$ para una caja cuadrada se obtiene promediando el cuadrado de la separación de las partículas p y q distribuidas uniformemente (Flores Ramírez & Zavala Sansón, 2019),

$$\langle D_s^2 \rangle = \frac{1}{(2L)^4} \iiint \int_{-L}^L [(x^p - x^q)^2 + (y^p - y^q)^2] dx^p dx^q dy^p dy^q = \frac{(2L)^2}{3}. \quad (34)$$

De manera similar, la dispersión relativa saturada para cada dirección espacial se puede definir como

$$\langle D_{s_x}^2 \rangle = \frac{1}{(2L)^4} \iiint \int_{-L}^L (x^p - x^q)^2 dx^p dx^q dy^p dy^q = \frac{(2L)^2}{6}, \quad (35a)$$

$$\langle D_{s_y}^2 \rangle = \frac{1}{(2L)^4} \iiint \int_{-L}^L (y^p - y^q)^2 dx^p dx^q dy^p dy^q = \frac{(2L)^2}{6}. \quad (35b)$$

2.3.3. Elipses de dispersión

Otra forma de observar la anisotropía de una nube de partículas partiendo de un punto en común es a través de elipses de dispersión, las cuales fueron diseñadas para estudiar la dispersión superficial de boyas a la deriva en el Golfo de México (Zavala Sansón et al., 2017a). La definición de las elipses de dispersión es similar a la de las elipses de varianza o elipses de error utilizadas para indicar la varianza de dos conjuntos de datos.

Para construir las elipses de dispersión se define el centro de masa de una nube de partículas que es liberada de una fuente puntual o cuasi-puntual. El centro de la elipse se encuentra en el centro de masa ($\langle M_x \rangle(t)$, $\langle M_y \rangle(t)$) de la nube de partículas en el tiempo t , definido, en general, como

$$\langle M_x \rangle(t) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} [x^k(t) - x^k(0)], \quad (36a)$$

$$\langle M_y \rangle(t) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} [y^k(t) - y^k(0)], \quad (36b)$$

donde nuevamente \mathcal{N} son las partículas disponibles, y x^k y y^k son las posiciones de la partícula k en la dirección x y y , respectivamente. Las elipses de dispersión se construyen a partir de la matriz de covarianza,

$$C_{ij}(t) = \frac{1}{\mathcal{N}-1} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} [x_i^k(t) - x_i^k(0) - \langle M_i \rangle(t)] \times [x_j^k(t) - x_j^k(0) - \langle M_j \rangle(t)], \quad (37)$$

donde los subíndices i, j indican la posición zonal (x^k para $i, j = 1$) y meridional (y^k para $i, j = 2$), respectivamente. Los elementos sobre la diagonal corresponden al segundo momento de los desplazamientos (proporcional a la dispersión relativa), mientras que los elementos fuera de la diagonal describen la correlación entre los dos conjuntos de datos. La longitud de los semiejes mayor y menor es, respectivamente,

$$a(t) = c\Lambda_{max}^{1/2}(t), \quad (38a)$$

$$b(t) = c\Lambda_{min}^{1/2}(t), \quad (38b)$$

donde $\Lambda_{max}(t)$ y $\Lambda_{min}(t)$ son los valores propios mayor y menor de la matriz C_{ij} en el tiempo t . El valor de c es un número real positivo arbitrario que determina el tamaño de los semiejes. Suponiendo que $\mathbf{U}(t) = (U_1, U_2)$ es el vector propio asociado con el valor propio máximo $\Lambda_{max}(t)$, entonces el ángulo

de inclinación entre el semieje mayor y el eje de las abscisas es

$$\theta(t) = \arctan \frac{U_2(t)}{U_1(t)}. \quad (39)$$

Usando el parámetro $0 \leq \phi \leq 2\pi$, los puntos de la elipse son

$$x(\phi, t) = \langle M_x \rangle(t) + a(t) \cos \phi \cos \theta(t) - b(t) \sin \phi \sin \theta(t), \quad (40a)$$

$$y(\phi, t) = \langle M_y \rangle(t) + b(t) \sin \phi \cos \theta(t) + a(t) \cos \phi \sin \theta(t). \quad (40b)$$

2.3.4. Exponentes de Lyapunov de escala finita (FSLE)

La cuarta métrica que se utiliza son los exponentes de Lyapunov de escala finita (FSLE) propuestos por Aurell et al. (1997) y Artale et al. (1997). Los FSLE se han utilizado en estudios oceánicos para caracterizar los procesos de dispersión superficial a partir de datos de boyas a la deriva (Lacorata et al., 2001), identificar la actividad de mezcla (Boffetta et al., 2001; d'Ovidio et al., 2004; Berti & Lapeyre, 2021), localizar estructuras lagrangianas coherentes que dominan el transporte a una escala dada (Karrasch & Haller, 2013), y en métodos de búsqueda y rescate (Corrado et al., 2017). A través de los FSLE, es posible identificar regímenes de turbulencia teóricos. Estos patrones han sido descritos en varios estudios de turbulencia bidimensional y dispersión oceánica (LaCasce, 2008; Zavala Sansón, 2015; Beron-Vera & LaCasce, 2016; Balwada et al., 2021).

Los FSLE indican la tasa de separación promedio de pares de partículas que inicialmente están separadas por una distancia δ , y luego de un tiempo τ , están separadas una distancia $\alpha\delta$, donde $\alpha > 1$ es un factor de amplificación de orden $O(1)$. El valor de α no puede ser arbitrariamente cercano a 1 debido al intervalo de tiempo finito entre las posiciones de las partículas, ni mucho mayor que 1 para poder resolver separaciones de diferentes escalas (Lacorata et al., 2001). En este trabajo se utilizará $\alpha = \sqrt{2}$. Los FSLE se definen como

$$\lambda(\delta) = \frac{1}{\langle \tau(\delta) \rangle} \log \alpha, \quad (41)$$

donde $\langle \tau(\delta) \rangle$ es el tiempo medio de separación de varios pares de partículas. Nótese que los exponentes definidos en (41) tienen unidades de t^{-1} .

En cuanto a la escala de inyección de energía ℓ_f y el tamaño L_I de los remolinos más energéticos, los regímenes turbulentos teóricos se expresan como

$$\lambda(\delta) \approx \lambda_L \text{ para } \delta \ll \ell_f.$$

$$\lambda(\delta) \propto \delta^\gamma \text{ para } \ell_f \leq \delta \leq L_I, \text{ con } -2 < \gamma < 0.$$

$$\lambda(\delta) \propto \delta^{-2} \text{ para } \delta \gg L_I.$$

En el régimen de pequeña escala, λ_L es el máximo exponente de Lyapunov, que mide la tasa exponencial promedio de separación de partículas inicialmente muy cercanas (Aurell et al., 1997). En el rango inercial de energía ($\ell_f < \delta < L_I$), se espera que la turbulencia sea superdifusiva. En particular, $\gamma = -2/3$ corresponde al régimen de Richardson (Artale et al., 1997), y $\gamma = -1$ es un régimen de cizallamiento balístico (LaCasce, 2008; Corrado et al., 2017). Para δ mayores, corresponde a la dispersión estándar (caminata aleatoria), donde las velocidades de las partículas no están correlacionadas. En este régimen de dispersión el cuadrado de las separaciones crece linealmente con el tiempo, i.e. $\delta^2 \sim \tau$ de forma que $\lambda \propto \tau^{-1} \sim \delta^{-2}$.

En este trabajo se define los FSLE por componente zonal y meridional como

$$\lambda_z(\delta) = \frac{1}{\langle \tau(\delta_z) \rangle} \log \alpha, \quad (42a)$$

$$\lambda_m(\delta) = \frac{1}{\langle \tau(\delta_m) \rangle} \log \alpha, \quad (42b)$$

donde δ_z , δ_m son las componentes de la separación total δ , y $\langle \tau(\delta_z) \rangle$, $\langle \tau(\delta_m) \rangle$ son los tiempos medios de separación correspondientes. Una definición similar -aunque no igual- fue utilizada por Espa et al. (2014). Nótese que para cada separación δ se determina las porciones δ_z , δ_m , y con este conjunto de valores se efectúa el cálculo de las componentes de los FSLE. En otras palabras, nuestro objetivo es encontrar la rapidez de separación zonal y meridional (λ_z , λ_m) debida a las estructuras de escala δ .

Además, se puede definir un índice anisotrópico Lagrangiano como (Espa et al., 2014)

$$\mathcal{A}(\delta) = \frac{\lambda_z(\delta) - \lambda_m(\delta)}{\lambda_z(\delta) + \lambda_m(\delta)}. \quad (43)$$

El índice \mathcal{A} varía en el rango $[-1, 1]$. El valor de -1 corresponde a una máxima anisotropía meridional y el valor 1 a una máxima anisotropía zonal. El valor 0 corresponde a una isotropía perfecta.

Capítulo 3. Dispersión Lagrangiana en turbulencia zonostrófica en una cuenca cerrada con fondo plano

En este capítulo se estudia la anisotropía presente en un flujo bidimensional continuamente forzado en rotación con efecto β en una cuenca cerrada con fondo plano. Este estudio se realiza a partir de simulaciones numéricas en el plano β y haciendo uso de métricas lagrangianas. El objetivo es cuantificar la anisotropía en la dispersión de partículas cuando se observan bandas de circulación este-oeste características de la turbulencia zonostrófica.

El capítulo está organizado de la siguiente manera: En la sección 3.1 se describen las características del dominio y parametrizaciones de dos experimentos canónicos y en la sección 3.2 las consideraciones para añadir partículas en cada uno de ellos. La sección 3.3 presenta las características del flujo obtenido en las simulaciones. Después, la sección 3.4 contiene resultados de las métricas empleadas para cuantificar anisotropía en la dispersión de trazadores. En la sección 3.5 se discuten los efectos de las condiciones de frontera y de la geometría del dominio. Por último, la sección 3.6 presenta las conclusiones del capítulo.

3.1. Experimentos canónicos

Las simulaciones numéricas resuelven la ecuación de vorticidad para un fondo plano (22). Por simplicidad la función corriente se representa como ψ (sin asterisco), y la vorticidad es $\omega = -\nabla^2\psi$. El dominio numérico es un cuadrado de longitud $2L = 3000$ km, discretizado por una malla de 257^2 puntos, es decir, con una resolución espacial de $\Delta x = \Delta y = 11.7$ km. Se realizaron corridas adicionales usando 513^2 puntos de malla, las cuales mostraron esencialmente el mismo flujo turbulento mientras que las estadísticas lagrangianas (descritas más adelante) variaron en aproximadamente un 10 %. Las condiciones de frontera son las de libre de esfuerzos, i.e, cuando las paredes no ejercen fricción sobre el fluido (van Heijst et al., 2006). Esta condición de frontera establece que $(\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}})_{\parallel} = 0$, donde $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de esfuerzos viscosos, $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario perpendicular a la pared y las líneas verticales indican la componente paralela de los esfuerzos. En combinación con la condición de impermeabilidad, $\psi = 0$, la condición implica que $\omega = 0$ en un dominio cuadrado. Además, se realizaron algunos casos adicionales para discutir la condición de no deslizamiento ($u = v = 0$). El coeficiente de fricción para la disipación líneal en el fondo es $r = 1 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$, y la viscosidad turbulenta $\nu = 50 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. El gradiente latitudinal del parámetro de Coriolis es $\beta = 2 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$. Para simular el plano f , es suficiente hacer $\beta = 0$ ya que los términos de Coriolis se eliminan al derivar la ecuación de vorticidad.

Se realizan dos tipos de experimentos fundamentales o canónicos, denominados F_I y F_{II} , caracterizados por la magnitud del esfuerzo superficial τ_0 en la definición del forzamiento (24). En los experimentos F_I , se usa $\tau_0 = 0.4 \text{ Nm}^{-2}$ (que se denominará forzamiento débil) y en los casos F_{II} se usa $\tau_0 = 4 \text{ Nm}^{-2}$ (forzamiento fuerte). Aunque ambos tipos de forzamiento generan turbulencia, las escalas dominantes difieren significativamente (como se analiza a continuación). Para evaluar la anisotropía de la dispersión de partículas debida al efecto β , los experimentos se repiten en el plano f . El forzamiento empleado se genera con $n = 9$ modos, con una escala de forzamiento de $\ell_f \sim 106 \text{ km}$ (ver capítulo anterior). El tiempo de decorrelación es $\tau_n = 10$ días. Además, se utiliza $\rho = 1 \times 10^3 \text{ kgm}^{-3}$ y $H = 4000 \text{ m}$. El tiempo total de simulación es de 2000 días en todos los experimentos. El paso de tiempo es $\Delta t = 3.6 \times 10^3 \text{ s}$ para F_I y $1.8 \times 10^3 \text{ s}$ para F_{II} .

En los experimentos canónicos el flujo está inicialmente en reposo. Luego se pone en movimiento por el forzamiento impuesto hasta alcanzar un estado estadísticamente estacionario, es decir, un equilibrio entre la energía inyectada y la energía perdida por los procesos disipativos. El estado de equilibrio se verifica calculando la energía y la enstrofía descritas en (26) y (27) para fondo plano, las cuales se reducen a:

$$E(t) = \frac{1}{2A} \iint |\nabla\psi|^2 dx dy, \quad (44)$$

$$Z(t) = \frac{1}{2A} \iint (\omega + \beta y)^2 dx dy, \quad (45)$$

donde A es el área horizontal del dominio.

La Figura 3 muestra la evolución de la energía y la enstrofía normalizada para los dos experimentos canónicos en el plano β . En la Figura 3a, la energía parte del reposo y en unos 100 días alcanza un estado de equilibrio en torno a un valor medio. Nótese que la energía total en F_{II} es aproximadamente 100 veces la de F_I , porque la magnitud del forzamiento (que es aproximadamente proporcional a la escala de velocidad de la turbulencia) es un orden de magnitud mayor en F_{II} . La Figura 3b muestra el comportamiento análogo para la enstrofía.

La Tabla (1) presenta los valores de la energía y la enstrofía media, representadas respectivamente por \bar{E} y \bar{Z} en cada experimento durante el periodo de equilibrio estadístico, así como la velocidad cuadrática media U_{rms} . Se encontraron valores similares en los experimentos del plano f . La tabla también incluye las escalas turbulentas L_R y L_ε (esta última fue estimada utilizando $\varepsilon \sim 2r\bar{E}$ del equilibrio estadístico), el índice zonostrófico \mathcal{Z} y el número β adimensional $\beta_a = \beta_0 L^2 / U_{rms}$.

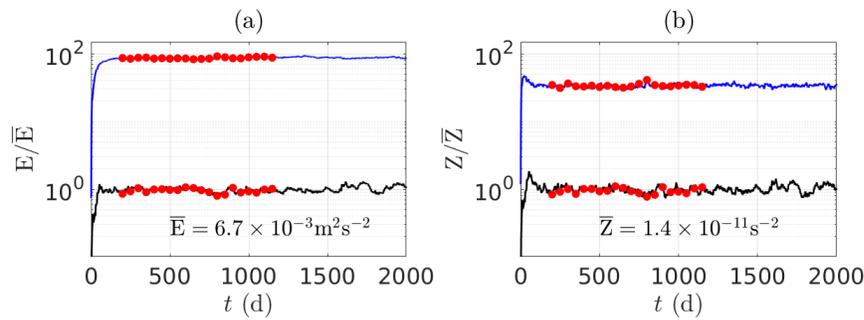


Figura 3. Evolución temporal de (a) la energía y (b) enstrofia globales para los experimentos canónicos F_I (líneas negras) y F_{II} (líneas azules). La energía (enstrofia) se normaliza con el valor medio \bar{E} (\bar{Z}) del experimento F_I que se muestra en la Tabla 1. Las marcas rojas representan los tiempos en que se inician los experimentos con partículas.

Tabla 1. Valores representativos del flujo turbulento para los experimentos F_I y F_{II} en el plano β . Los promedios de energía (44), enstrofia (45) y U_{rms} se calculan para el periodo $200 \leq t \leq 2000$ días.

	\bar{E} (m^2s^{-2})	\bar{Z} (s^{-2})	U_{rms} (ms^{-1})	β_a	L_R (m)	L_ε (m)	\mathcal{Z}
F_I	6.7×10^{-3}	1.4×10^{-11}	0.1	411	7.47×10^4	4.39×10^4	1.7
F_{II}	5.8×10^{-1}	4.8×10^{-10}	1.0	41	2.32×10^5	1.07×10^5	2.1

3.2. Experimentos con partículas lagrangianas

Para analizar la dispersión lagrangiana, se realizaron 20 experimentos con 1000 partículas pasivas cada uno (para un total de 20,000) para F_I y F_{II} . Cada una de estas realizaciones comienza con el campo de vorticidad instantánea de las simulaciones canónicas en los tiempos marcados en rojo en la Figura 3. El lapso de tiempo entre cada condición inicial es de 50 días, suficiente para considerar los campos como realizaciones independientes. Para evaluar la dispersión anisotrópica, se promedian las estadísticas lagrangianas de nubes de partículas de los 20 experimentos. La distribución inicial de partículas en cada realización se dividió en dos grupos (ver Figura 4).

En una primera distribución, se colocaron 250 partículas en una pequeña mancha circular de radio $r_1 = 120$ km alrededor del origen. Usando esta distribución, realizamos dos tipos de cálculos. El primero es la dispersión relativa por componentes, donde es necesario tener pares de partículas separadas una distancia corta en comparación con la escala de forzamiento. El segundo cálculo son las elipses de dispersión, donde estimamos el crecimiento zonal y meridional de la nube de partículas desde una fuente puntual. En una segunda distribución, se colocaron 750 partículas en una mancha circular de radio $r_2 = 1200$ km, cubriendo gran parte del dominio, con separaciones medias de 1075 km. La utilidad

de esta distribución es obtener separaciones de pares comparables al tamaño del dominio para calcular los FSLE. Las trayectorias de las partículas se registran diariamente durante 720 y 360 días en los experimentos F_I y F_{II} , respectivamente.

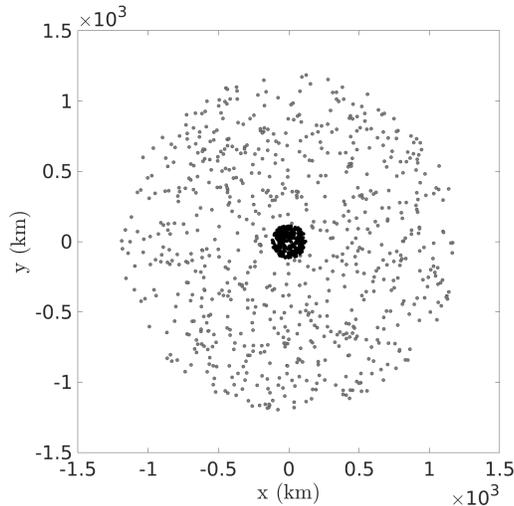


Figura 4. Posiciones iniciales de las partículas. En negro se muestran 250 partículas en una mancha circular de radio $r_1 = 120$ km, y en gris 750 partículas en una mancha circular de radio $r_2 = 1200$ km.

3.3. Características de la turbulencia

En este apartado se analiza las características de la turbulencia generada por los forzamientos débil y fuerte, con el fin de obtener una idea general de la influencia de la intensidad del forzamiento en la dispersión de partículas. La Figura 5 muestra campos instantáneos de la función de corriente normalizada en tres tiempos diferentes en una realización de experimentos F_I [paneles a-c] y F_{II} [paneles d-f]. La figura también muestra la posición de las partículas inicialmente distribuidas en la pequeña mancha central. La primera diferencia notable es que los remolinos generados con el forzamiento débil F_I son de menor tamaño y menos intensos que en F_{II} . Como consecuencia, las partículas en F_{II} (forzamiento fuerte) se dispersan más rápidamente. Este resultado está asociado con una mayor transferencia de energía a escalas mayores cuando la inyección de energía es más significativa.

La formación de estructuras más grandes en el experimento F_{II} respecto a F_I también se observa en el espectro de energía promedio $S(\kappa)$ (con κ el número de onda). El espectro se calculó para cada forzamiento en los planos f y β , como se muestra en la Figura 6 (líneas negras continuas en el plano β y discontinuas en f). Los espectros reproducen la formación de los dos rangos inerciales característicos de la turbulencia 2D separados por el número de onda de la escala de forzamiento κ_f (Kraichnan,

1967). El subrango inercial de números de onda pequeños $\kappa < \kappa_f$ es más ancho en el caso F_{II} que en F_I , indicando la generación de estructuras más grandes. En ambos casos, los espectros presentan con buena aproximación una pendiente de $-5/3$. Por otro lado, el subrango de escalas pequeñas $\kappa > \kappa_f$ en el experimento F_I muestra una pendiente de -5 , que difiere del valor teórico esperado de -3 . Nam et al. (2000) atribuyen un exponente menor a -3 debido a la presencia del término de fricción lineal. Otra posible razón es que, cuando se usa la viscosidad laplaciana, la pendiente -3 solo se puede obtener en simulaciones numéricas de muy alta resolución (Boffetta & Musacchio, 2010). Nótese que para los números de onda más pequeños (escalas grandes) el espectro meridional en plano β disminuye en ambos experimentos.

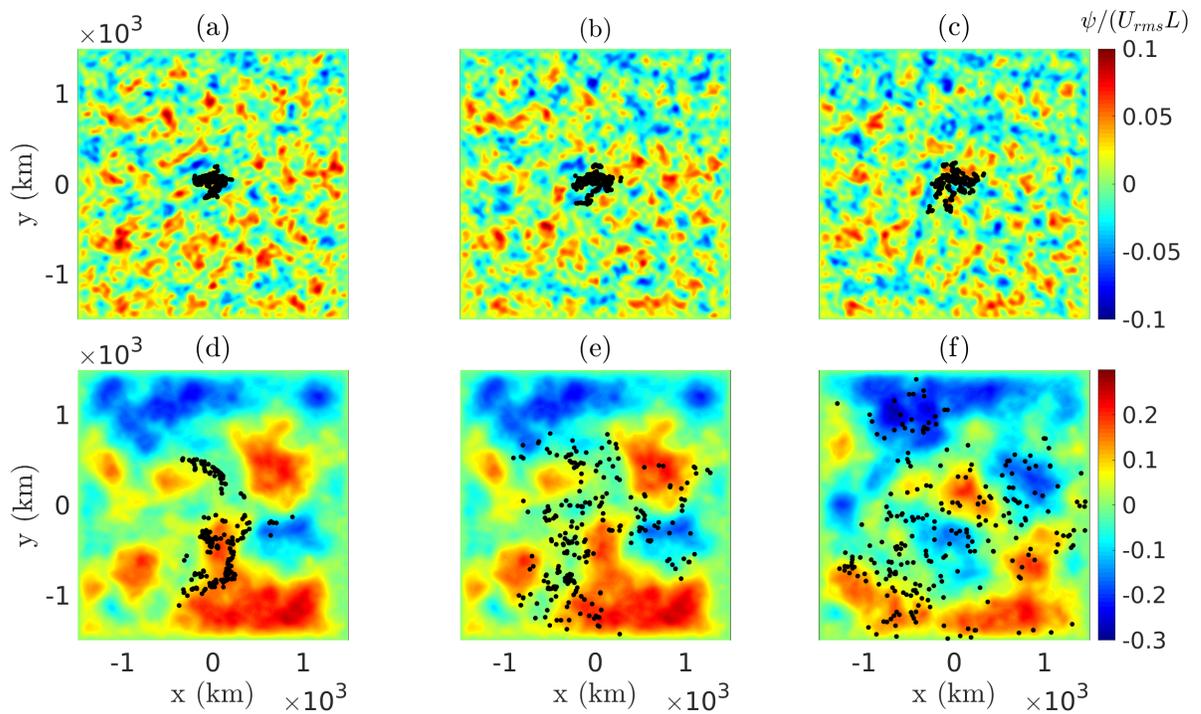


Figura 5. Campos instantáneos de la función de corriente $\psi/(U_{rms}L)$ calculados en las simulaciones del plano β con el forzamiento débil F_I (paneles superiores) y el forzamiento fuerte F_{II} (paneles inferiores), en los tiempos (a,d) $t = 10$ días, (b,e) $t = 20$ días y (c,f) $t = 30$ días. Los puntos negros representan la posición de 250 partículas contenidas inicialmente en un círculo de 120 km de radio centrado en el origen (véase la Figura 4).

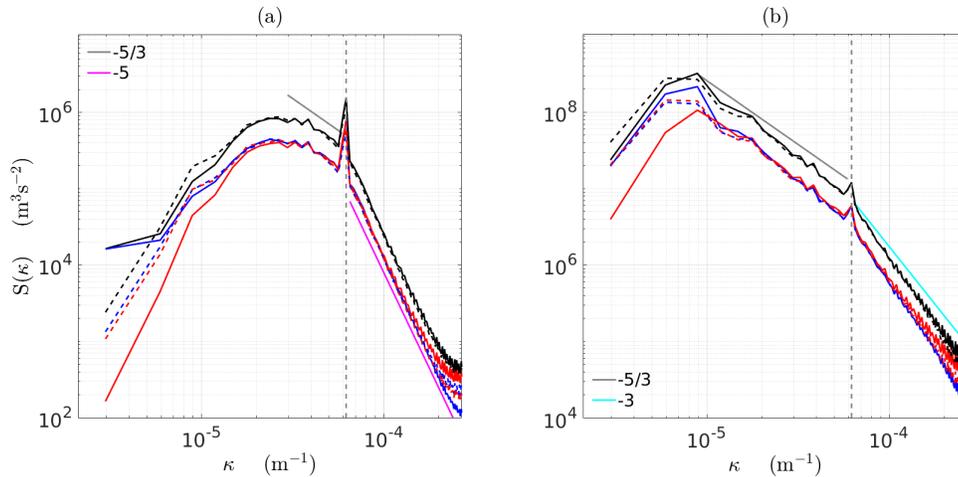


Figura 6. Espectro de energía promedio calculado a partir de las 20 realizaciones independientes de los experimentos en el plano β (líneas continuas) y f (líneas discontinuas): (a) F_I (forzamiento débil), y (b) F_{II} (forzamiento fuerte). Las líneas negras corresponden a los espectros de energía totales, mientras que las azules (rojas) corresponden a las componentes zonales (meridionales). Las líneas verticales indican el número de onda de la escala de inyección de energía. Las líneas rectas muestran las leyes de potencia que siguen los rangos inerciales.

Otro aspecto importante es la formación de estructuras que no son visibles en los campos instantáneos pero que son persistentes a largo plazo. Una característica conocida de estudios previos es que el efecto β inhibe la cascada de energía a gran escala y produce estructuras anisotrópicas en promedios a largo plazo (Vallis & Maltrud, 1993; LaCasce, 2002; Kramer et al., 2006). Para analizar este punto se calcula el flujo medio a partir de 1800 campos diarios del periodo estadísticamente estacionario. La Figura 7a muestra el campo medio para el experimento F_I . Se puede observar que aparecen celdas de circulación alargadas zonalmente a lo largo de cientos de kilómetros, principalmente anticiclónicas al norte y ciclónicas al sur del dominio. Cuando el forzamiento es más intenso (F_{II} en la Figura 7b), la redistribución latitudinal es más evidente: las grandes estructuras zonales son principalmente anticiclónicas en el norte y ciclónicas en el sur. En este caso, la extensión longitudinal de las celdas es casi la de todo el dominio. Nótese que las estructuras zonales medias son similares al flujo inercial de Fofonoff a pesar de la presencia del forzamiento continuo (Cummins, 1992; Zavala Sansón, 2022). Los flujos promedio en el plano f ($\beta = 0$) no exhiben la estructura zonal (ver paneles c y d). En cambio, se caracterizan por la formación de grandes remolinos con signo y posición aleatorios, como se ha demostrado en numerosos estudios de turbulencia 2D (Maassen et al., 2002; van Heijst et al., 2006).

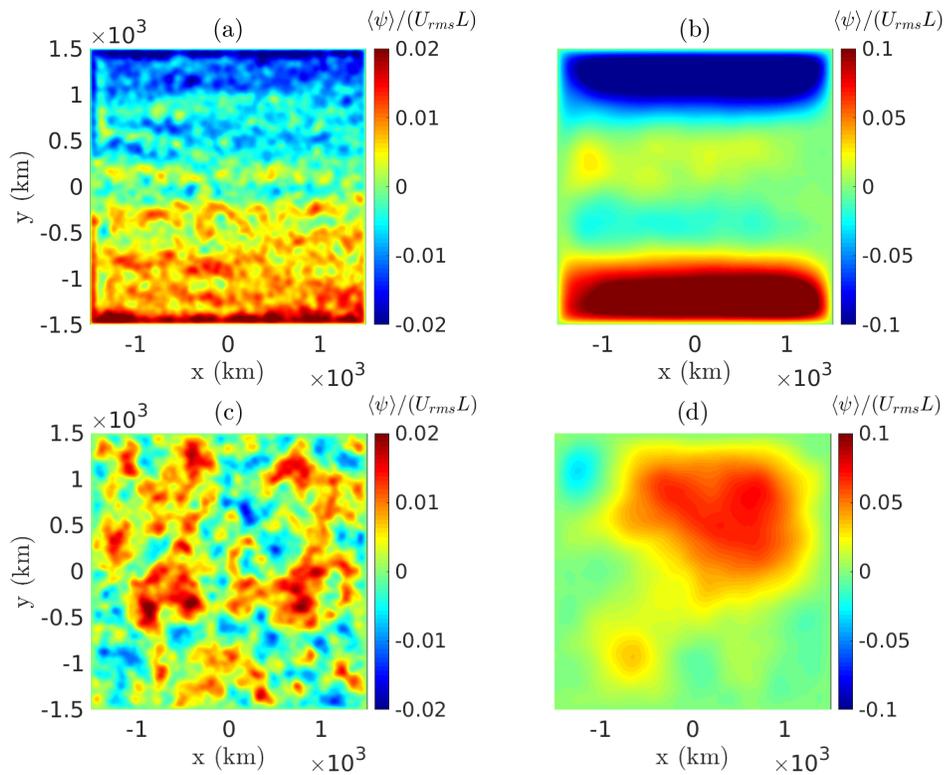


Figura 7. Promedio de los campos de la función de corriente $\langle \psi \rangle / (U_{rms} L)$ en las simulaciones del plano β (paneles superiores) y f (paneles inferiores): (a,c) F_I (forzamiento débil), y (b,d) F_{II} (forzamiento fuerte). Los promedios se calcularon con 1,800 campos diarios durante el periodo estadísticamente estacionario $200 \leq t \leq 2000$ días.

3.4. Resultados

3.4.1. Dispersión relativa

Nuestro primer análisis de la dispersión anisotrópica consiste en el cálculo de la dispersión relativa utilizando las partículas de todas las realizaciones con ambos forzamientos. Las Figuras 8a,b muestran las curvas de dispersión relativa total, zonal y meridional en los experimentos F_I y F_{II} para el plano β (líneas continuas). También se muestran las curvas correspondientes para las simulaciones del plano f (líneas discontinuas). Discutimos primero los casos del plano β .

En el experimento F_I (Figura 8a), la dispersión relativa es anisotrópica: la componente zonal $\langle D_x^2 \rangle$ crece más rápidamente que $\langle D_y^2 \rangle$ durante toda la simulación. En el tiempo final (720 días), la diferencia entre $\sqrt{\langle D_x^2 \rangle}$ y $\sqrt{\langle D_y^2 \rangle}$ indica que las partículas se dispersaron del orden de 430 km más en la dirección zonal que en la dirección meridional. Debido a que el forzamiento es débil en este experimento, el valor de

saturación $4L^2/3$ no fue alcanzado por $\langle D^2 \rangle$, ni tampoco el valor de semisaturación $2L^2/3$ por cualquiera de las componentes de la dispersión relativa. Los resultados del experimento F_{II} (Figura 8b) también muestran que $\langle D_x^2 \rangle$ crece más rápido que $\langle D_y^2 \rangle$ durante el periodo inicial ($t < 160$ días) antes de que las partículas llenen la caja. Sin embargo, existen claras diferencias: el crecimiento de la dispersión total y de las componentes es mucho más rápido que en F_I . Como consecuencia, la caja se llena en menos de seis meses. Aunque la anisotropía es notoria, la diferencia entre $\langle D_x^2 \rangle$ y $\langle D_y^2 \rangle$ es menor que en F_I . Una vez llena la caja, la dispersión relativa total y ambas componentes oscilan alrededor de los valores de saturación (34), (35a) y (35b), respectivamente.

La dispersión anisotrópica también se demuestra al comparar los resultados anteriores con los obtenidos de las simulaciones del plano f (líneas discontinuas en las Figs. 8a,b). Las componentes zonal y meridional en el plano f son prácticamente iguales. Otra característica esencial es que las curvas del plano f crecen más rápido que en las corridas del plano β . Esta diferencia es más evidente en la simulación F_I . A pesar que las estructuras en el plano β deriven zonalmente, la dispersión relativa por componentes disminuye en comparación con el plano f , especialmente la componente meridional. Así, el efecto β genera anisotropía y disminuye la dispersión de partículas en comparación con el plano f . Estos resultados indican que los remolinos isotrópicos del plano f son más eficientes para dispersar partículas que las estructuras zonales del plano β , debido a que la energía asociada al número de onda κ es mayor en el plano f (ver Fig. 6).

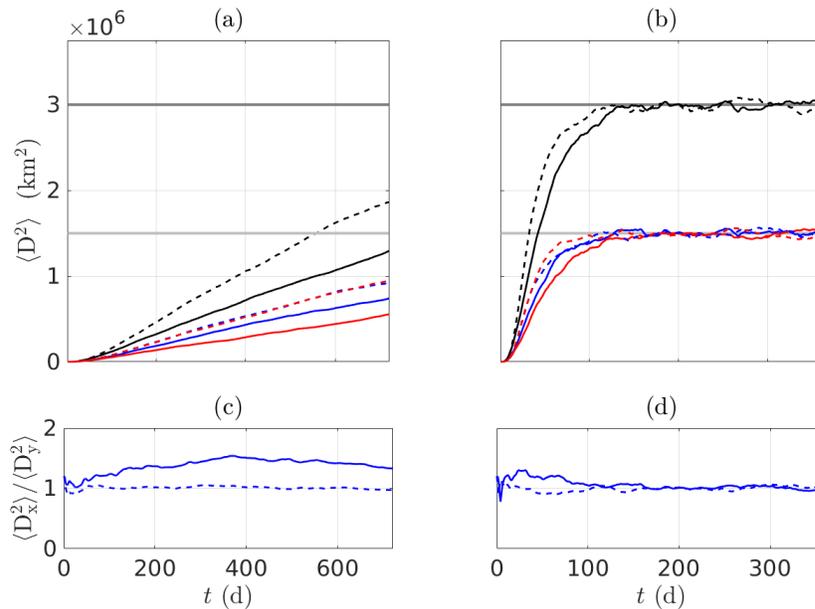


Figura 8. Dispersión relativa en función del tiempo calculada en el plano β (líneas continuas) y f (líneas discontinuas): (a) F_I (forzamiento débil), y (b) F_{II} (forzamiento fuerte). Las curvas representan la dispersión relativa total (negro), zonal (azul) y meridional (rojo). El valor de saturación (semisaturación) $4L^2/3$ ($2L^2/3$) se muestra en líneas horizontales de color gris oscuro (claro). (c) Razón de las componentes de la dispersión relativa zonal y meridional $\langle D_x^2 \rangle / \langle D_y^2 \rangle$ en función del tiempo para el plano β (línea continua) y f (línea discontinua) en los experimentos F_I . (d) Igual que en (c) pero para F_{II} .

Para mostrar más claramente la anisotropía debida al efecto β , las componentes de la dispersión se comparan a través de la razón $\langle D_x^2 \rangle / \langle D_y^2 \rangle$ en función del tiempo en las Figuras 8c,d (líneas sólidas). Los valores superiores a 1 indican anisotropía zonal. Los paneles incluyen los resultados obtenidos para los experimentos del plano f (curvas discontinuas). Para el experimento F_I (Figura 8c), los valores de $\langle D_x^2 \rangle / \langle D_y^2 \rangle$ son mayores que 1, por lo que la dispersión zonal es claramente mayor que la dispersión meridional (hasta 1.5 veces). En el experimento F_{II} (Figura 8d), las curvas son mayores que 1 durante los primeros 150 días de simulación. Posteriormente, la anisotropía disminuye a 1 a medida que las partículas llenan el dominio. En las simulaciones del plano f , los valores de $\langle D_x^2 \rangle / \langle D_y^2 \rangle$ oscilan alrededor de 1, lo que demuestra que la dispersión es principalmente isotrópica.

3.4.2. Elipses de dispersión

Otra forma de observar la anisotropía de una nube de partículas partiendo de un punto en común es a través de elipses de dispersión, las cuales fueron diseñadas para estudiar la dispersión superficial de boyas de deriva en el Golfo de México (Zavala Sansón et al., 2017a). El objetivo de ese estudio fue hacer una descripción estadística de las posibles trayectorias y áreas cubiertas por los derivadores liberados en puntos geográficos específicos. De manera similar, en este estudio se usa las trayectorias de las partículas liberadas en el origen del dominio para mostrar la tendencia preferencial de su dispersión. Además, se analiza la diferencia en la extensión de la nube de partículas en los planos β y f .

La definición de las elipses de dispersión es similar a la de las elipses de varianza o elipses de error utilizadas para indicar la varianza de dos conjuntos de datos. En nuestro caso, tales datos son las posiciones zonales y meridionales de 5000 partículas inicialmente contenidas dentro del círculo de 120 km de radio (ver Figura 4) obtenidas de las 20 realizaciones, es decir, 250 partículas en cada experimento. En este estudio, se usa $c = 1.7$ para calcular los semiejes (38a) y (38b) en ambos experimentos.

Las Figuras 9a-c muestran las elipses de dispersión en el plano β para el experimento F_I en tres tiempos diferentes durante los primeros 360 días. A medida que avanza el tiempo, las partículas se dispersan y el área de la elipse aumenta. Además, la orientación del eje mayor tiende a ser zonal, lo que significa que las partículas se separan preferentemente en esa dirección. Para verificar la anisotropía generada por el efecto β , comparamos la última elipse de dispersión en el panel (c) con la calculada en la simulación del plano f (Figura 9d). En efecto, las formas son diferentes: la elipse en el plano f es prácticamente

circular, lo que implica que no hay una dirección preferencial. Sin embargo, se debe tomar en cuenta que el área de la elipse casi circular en el plano f es aproximadamente 1.5 veces mayor que la de la elipse del plano β . Esta diferencia refleja los resultados mostrados anteriormente en la Figura 8: la dispersión de partículas es más efectiva en el plano f . Otro resultado adicional es un pequeño desplazamiento de la elipse hacia el oeste de aproximadamente -90 km en el plano β después de 720 días (no se muestra). Este desplazamiento es atribuido a que las ondas de Rossby advectan partículas hacia el occidente. Por el contrario, la elipse del plano f permaneció muy cerca del origen durante toda la simulación.

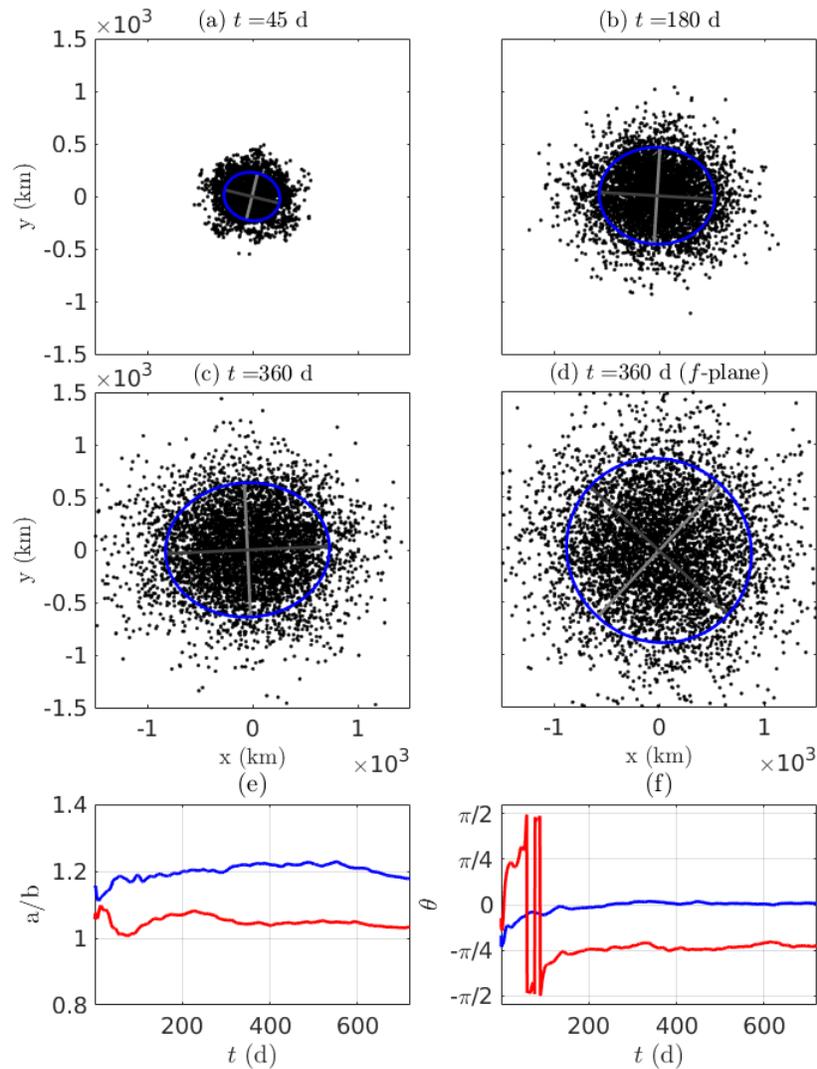


Figura 9. Elipses de dispersión en el plano β para el experimento F_I en tres tiempos diferentes: (a) $t = 45$ días; (b) $t = 180$ días; (c) $t = 360$ días. El contorno azul representa la elipse de dispersión y las líneas grises los semiejes. Los puntos negros representan las partículas que parten de la mancha circular de radio r_1 en el origen (véase la Figura 4). (d) Elipse de dispersión calculada en el plano f a $t = 360$ días. Evolución temporal de: (e) la razón de semiejes a/b , y (f) la orientación de la elipse θ , para las simulaciones de forzamiento débil F_I . Las líneas azules (rojas) corresponden a los experimentos en el plano β (f).

Algunas características de las elipses son útiles para ilustrar la dispersión anisotrópica. La longitud de los semiejes se compara a través de la razón a/b (> 1 por definición) en función del tiempo para ambos planos, como se muestra en la Figura 9. En el plano β , hay un máximo de alrededor de 1.2. En el plano f , se observa que a/b nunca fue superior a 1.1, lo que significa que la elipse tuvo una forma casi circular durante la mayor parte del periodo (las ligeras desviaciones de 1 en los primeros tiempos indican que la dispersión está dominada por pequeños remolinos en los que inicialmente están contenidas las partículas). Con respecto a la orientación de la elipse, la Figura 9f muestra que θ es inicialmente distinto de cero en el plano β y rápidamente tiende a cero (lo que implica dispersión zonal) después de 100 días. Por el contrario, la orientación en el plano f es aleatoria inicialmente y luego alcanza un valor constante de $-\pi/4$. Esta orientación implica dispersión isotrópica debido a la forma cuadrada del dominio, que favorece ligeramente el semieje mayor a lo largo de las direcciones diagonales.

Las elipses de dispersión para el experimento F_{II} en el plano β se presentan en las Figuras 10a-c en tiempos en que las partículas aún no han llenado la caja. Al igual que en el forzamiento débil, se observa que el semieje mayor es principalmente zonal, lo que implica que la dispersión es mayor en esa dirección. Las partículas se acumulan principalmente en el lado occidental de la caja, por lo que la elipse se desplaza en esa dirección. La elipse del plano β en el panel (c) se compara con la elipse correspondiente calculada en el plano f que se muestra en la Figura 10d. De nuevo, la elipse de dispersión en este último caso adopta una forma circular; además, la distribución de las partículas es más homogénea y el área es casi 1.7 veces mayor que en el plano β .

La evolución temporal de a/b y θ se muestra en las Figuras 10e,f. En ambos planos, la dispersión inicial es anisotrópica [$a/b > 1$ en el panel (e)], siendo la elipse del plano β más anisótropa (la curva azul crece más). Para el plano f , esta razón decae a 1 aproximadamente a los 50 días, mientras que la elipse del plano β decae después de más de 100 días. Estas curvas revelan que la anisotropía está presente en el plano β pero desaparece alrededor de los tres meses cuando las partículas han llenado la caja. Este proceso se confirma al observar que la orientación θ oscila aleatoriamente entre $-\pi/4$ y $\pi/4$ en tiempos posteriores, como se muestra en la Figura 10f.

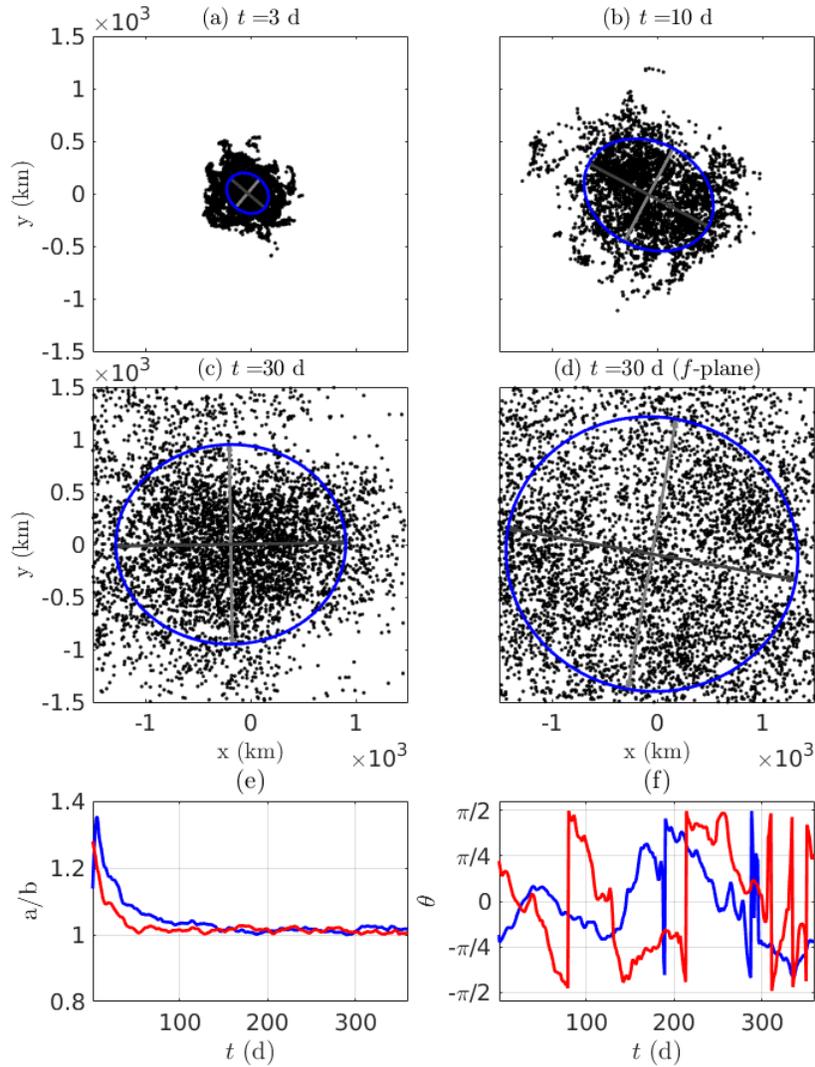


Figura 10. Elipses de dispersión en el plano β para el experimento F_{II} en tres tiempos diferentes: (a) $t = 3$ días; (b) $t = 10$ días; (c) $t = 30$ días. (d) Elipse de dispersión calculada en el plano f en $t = 30$ días. Evolución temporal de: (e) la razón de semiejes a/b , y (f) la orientación de la elipse θ , para las simulaciones de forzamiento fuerte F_{II} . Las líneas azules (rojas) corresponden a los experimentos en el plano β (f).

3.4.3. FSLE

El objetivo de los exponentes de Lyapunov de escala finita es identificar la escala de tiempo de separación τ y asociarla con remolinos dispersores de escala de longitud δ . Para calcular los FSLE $\lambda(\delta)$ con (41) se emplea el factor de amplificación $\alpha = \sqrt{2}$. Este valor es empleado con frecuencia en estudios de dispersión en el océano (ver LaCasce (2008) y sus referencias). Para valores mayores de α se ha encontrado que el régimen exponencial tiende a desaparecer (Haza et al., 2008). Con el fin de calcular λ_z y λ_m , se usa las trayectorias de 1000 partículas en cada realización independiente, las cuales inicialmente se distribuyen en los círculos pequeño y grande que se muestran en la Figura 4. En cada experimento se tiene 499, 500

pares de partículas con separaciones pequeñas y grandes. Definimos 300 rangos de separación igualmente espaciados (bins) cuyo ancho es $\delta_0 = 10$ km. El límite inferior y superior de cada bin está dado por los extremos del intervalo $[(i-1)\delta_0, i\delta_0]$ para $i = 1, \dots, 300$. Cada bin está representado por su valor central $(2i-1)\delta_0/2$. Un procedimiento más tradicional es construir bins que aumentan geoméricamente y que están igualmente espaciados en una escala logarítmica [ver, por ejemplo, Salazar & Collins (2009)], pero los resultados son equivalentes. El cálculo de FSLE se realizó para cada una de las 20 realizaciones independientes y se promediaron los resultados.

Las Figuras 11a,b presentan las componentes de los FSLE normalizadas en los experimentos F_I y F_{II} . Para F_I , el panel (a) muestra el régimen exponencial para escalas pequeñas (hasta 30 km), donde $\lambda_z/\lambda_L \approx \lambda_m/\lambda_L \approx 1$. Para escalas $\ell_f < \delta < 300$ km, λ_z y λ_m decaen a una tasa superdifusiva proporcional a δ^{-1} , aproximadamente. Sin embargo, todavía se registra que λ_z y λ_m son muy similares, por lo que la anisotropía no es visible en este rango. Para separaciones mayores a 300 km no observó el régimen de dispersión estándar. En cambio, las curvas decaen como $\gamma \approx -1/3$ hasta escalas del orden del tamaño del dominio. Hasta donde sabemos, este comportamiento anómalo tardío no está respaldado por argumentos teóricos. Una posible razón se podría relacionar con que el rango de la cascada de energía es demasiado estrecho (Figura 9a), por lo que la pérdida de energía por la fricción del fondo puede afectar la tasa de separación a escalas más grandes (LaCasce & Meunier, 2022).

En el experimento F_{II} mostrado en la Figura 11b, el régimen exponencial isotrópico $\lambda_z \approx \lambda_m$ también se observa para $\delta < 30$ km, y tal vez un régimen tipo Richardson en escalas comparables a ℓ_f . Para escalas $300 < \delta < 1000$ km las curvas decaen como δ^{-1} , aproximadamente. Más importante aún, se muestra que λ_z es claramente mayor que λ_m , lo que indica una anisotropía con preferencia zonal. Para escalas comparables al tamaño del dominio el cálculo pierde sentido.

La Figura 12 muestra el índice \mathcal{A} definido en (43) en función de las escalas de separación para los experimentos en el plano β . Para el experimento F_I , el índice presenta valores superiores a 0 en casi todas las separaciones menores de 2500 km (línea continua), lo que indica anisotropía zonal. Sin embargo, esta asimetría es bastante débil ya que los valores registrados son demasiado pequeños (menos de 0.05). El índice \mathcal{A} disminuye para separaciones del orden de 2500 km, aparentemente debido a que los grandes remolinos son menos anisotrópicos debido a la presencia de las fronteras. El índice anisotrópico en el experimento F_{II} (línea segmentada en la Figura 12) es mayor que cero (anisotropía zonal) para separaciones menores de 1500 km. El valor máximo de 0.11 se observó en $\delta \approx 650$ km. Después, \mathcal{A} disminuye y se vuelve negativa (anisotropía meridional) para separaciones entre 1500 y 2200 km. El cambio de signo indica que las estructuras turbulentas con escalas de hasta 1000 km migran hacia el

límite occidental en promedio ($\mathcal{A} > 0$), mientras que las estructuras de escalas aún mayores se dispersan hacia el norte y el sur debido a la presencia de la frontera oeste ($\mathcal{A} < 0$). Los movimientos a escala de cuenca (~ 2500 km) recuperan la anisotropía zonal, pero estos resultados pueden ser menos confiables ya que se encuentran menos pares con tales separaciones.

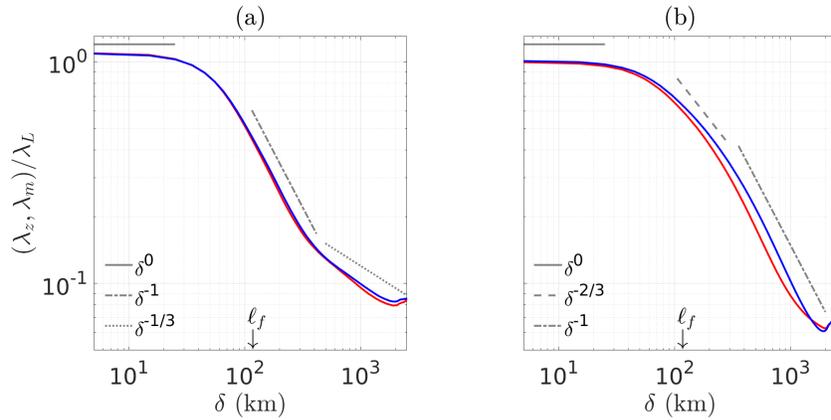


Figura 11. FSLE por componentes zonal (azul) y meridional (rojo) en las simulaciones (a) F_I (forzamiento débil), y (b) F_{II} (forzamiento fuerte). Los valores están normalizados con el FSLE máximo. Los valores de λ_L son 0.0348 y 0.1405 días⁻¹ para F_I y F_{II} , respectivamente. Las líneas grises rectas indican las leyes de potencia en diferentes rangos (véase el texto). La escala de forzamiento $\ell_f = 106$ km se indica con flechas pequeñas.

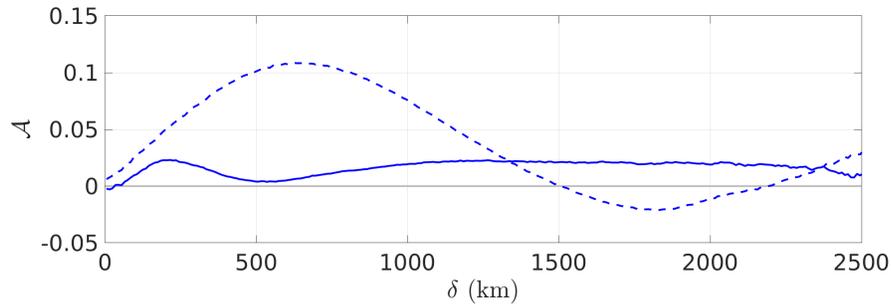


Figura 12. Índice anisotrópico lagrangiano \mathcal{A} en función de δ para los experimentos F_I (línea sólida) y F_{II} (línea discontinua) en el plano β .

3.5. Efectos de las condiciones de frontera y de la geometría del dominio

Algunas preguntas que surgen de los resultados anteriores se refieren a la influencia de las condiciones de contorno y la forma del dominio. En esta sección discutimos estos temas con base en nuevos conjuntos de simulaciones numéricas para las cuales seguimos los mismos procedimientos descritos en las Secciones 3.1 y 3.2.

3.5.1. Condiciones de frontera de no deslizamiento

Para investigar el papel de las condiciones de contorno, realizamos corridas numéricas con paredes antideslizantes ($u = v = 0$) para los forzamientos débil y fuerte. Los campos instantáneos de la función de corriente no difieren mucho de los casos presentados en la Figura 7, en donde se usó la condición de cero esfuerzos en las fronteras. Sin embargo, los campos promediados tienen algunas diferencias cualitativas como lo demuestra Zavala Sansón (2022): con la condición de no deslizamiento, la formación de franjas zonales es más claramente visible para ambos forzamientos que para fronteras libres de esfuerzos [ver Figura 2 en Zavala Sansón (2022)]. El resultado es similar al encontrado en las simulaciones de alta resolución con condiciones de frontera de no deslizamiento reportadas por Kramer et al. (2006).

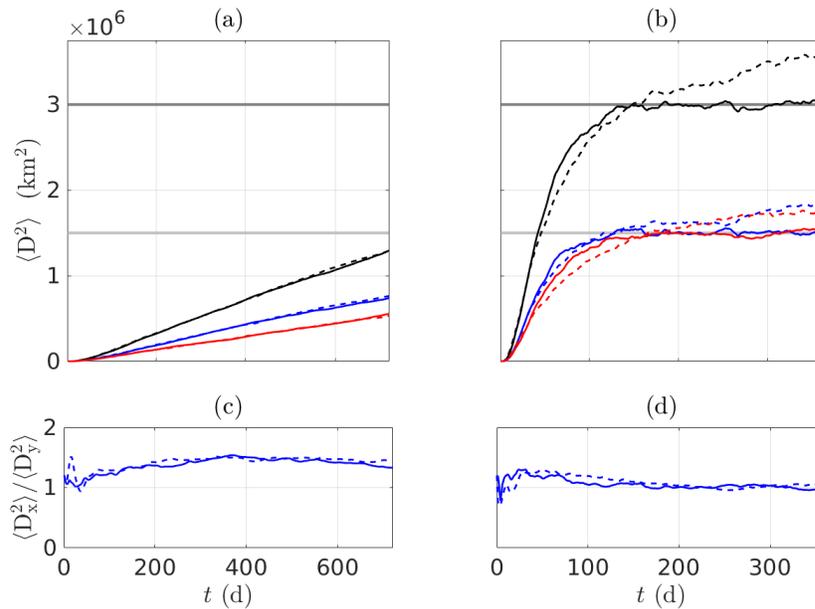


Figura 13. Dispersión relativa en función del tiempo calculada en el plano β con condiciones de frontera libre de esfuerzos (líneas sólidas) y no deslizamiento (líneas discontinuas): (a) F_I (forzamiento débil) y (b) F_{II} (forzamiento fuerte). El valor de saturación (semisaturación) $4L^2/3$ ($2L^2/3$) se muestra en líneas horizontales grises. (c) Razón de las componentes de dispersión relativa zonal y meridional $\langle D_x^2 \rangle / \langle D_y^2 \rangle$ contra el tiempo para las condiciones libre de esfuerzos (línea sólida) y no deslizamiento (línea discontinua) para el experimento F_I . (d) Igual que en (c) pero para F_{II} .

Sin embargo, las curvas de dispersión relativa son muy similares para ambos tipos de condiciones de contorno cuando se utiliza el forzamiento débil, como se muestra en la Figura 13a. La razón es que la mayoría de las partículas no alcanzan las paredes del dominio después de 720 días, por lo que el efecto neto de la condición de frontera es insignificante. En la Figura 13b, se presentan las curvas de dispersión para los experimentos de forzamiento fuerte. En las simulaciones de no deslizamiento (líneas discontinuas), se encuentra que la dispersión total y las componentes superan los valores de saturación.

La razón es que las partículas se acercan a las paredes laterales y su movimiento se ralentiza debido a la velocidad cero en el límite del dominio. En consecuencia, las partículas se acumulan cerca de las paredes, por lo que se supera el valor de saturación (que corresponde a una distribución uniforme sobre el dominio). Las Figuras 13c,d muestran la dispersión anisotrópica a través de la razón $\langle D_x^2 \rangle / \langle D_y^2 \rangle$ cuando se utilizan ambos tipos de condiciones de contorno.

Los resultados indican fuertemente que se debe tener cuidado al usar medidas de dispersión con fronteras de no deslizamiento. Por ejemplo, el significado de las elipses de dispersión y los FSLE se pierde cuando las partículas se acumulan cerca de las paredes. En efecto, la velocidad casi nula cerca de las fronteras implica que las partículas se “atascan” en la capa límite y por lo tanto dejan de dispersarse.

3.5.2. Dominio rectangular

En ausencia del efecto β , los valores de saturación de la dispersión relativa dependen de la geometría del dominio (Flores Ramírez & Zavala Sansón, 2019). Para el plano β la dispersión anisotrópica puede verse afectada por la forma de la cuenca. Por ejemplo, aquí examinamos el caso de una caja rectangular con una relación de aspecto 2 y cuyo lado mayor está orientado en la dirección zonal. El dominio tiene la misma área y forzamiento que en el experimento F_I , y se considera condiciones libres de esfuerzos. El área de dominio se elige igual que el caso cuadrado, por lo que el forzamiento aplicado inyecta la misma energía.

La Figura 14a presenta un campo instantáneo de la función de corriente y las partículas dispersas a los 720 días. En este caso, varias partículas alcanzan las paredes norte y sur, que ahora están más cerca que en la caja cuadrada. En contraste, los límites este y oeste están más alejados. En la Figura 14b, se muestran las curvas de dispersión relativa en comparación con la caja cuadrada. Claramente, la dispersión total aumenta en el dominio rectangular. Tal aumento es a expensas de una dispersión zonal más significativa (curvas azules) a pesar de una ligera disminución en la dispersión meridional (curvas rojas). Por lo tanto, la anisotropía se observa de nuevo pero ahora aumenta un poco debido a las dimensiones de la caja. Este efecto se ilustra aún más con elipses de dispersión, como se muestra en Figura 14c: el semieje mayor es mayor en el dominio rectangular que en el cuadrado.

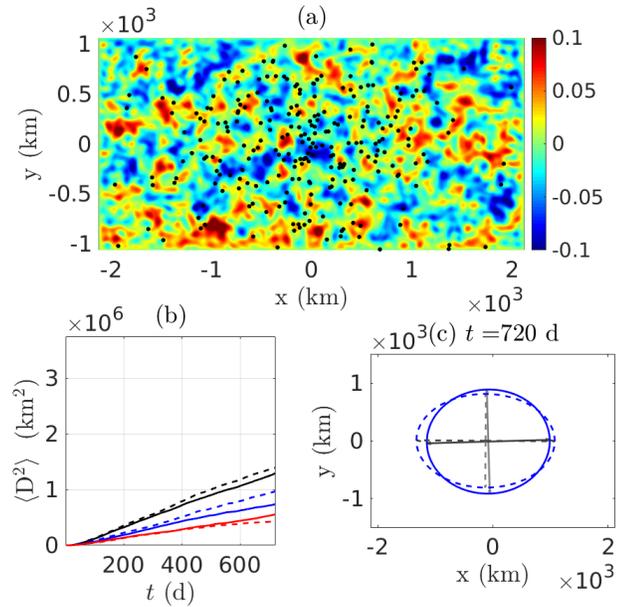


Figura 14. (a) Campo instantáneo de la función de corriente $\psi / (U_{rms} L_r)$ calculado en una simulación en el plano β en un dominio rectangular con razón de aspecto 2 (lado largo $L_r = 2121$ km) con condiciones de frontera libre de esfuerzos en el tiempo $t = 720$ días. El área del dominio, el forzamiento y la U_{rms} son aproximadamente los mismos que en el experimento F_I . Los puntos representan la posición de 250 partículas colocadas inicialmente en una pequeña mancha central (como en la Figura 4). (b) Dispersión relativa en función del tiempo calculada a partir de las simulaciones en el plano β en el dominio cuadrado (línea sólida) y rectangular (líneas discontinuas). Las curvas representan la dispersión relativa total (negro), zonal (azul) y meridional (rojo). (c) Elipses de dispersión en los experimentos en el plano β en el dominio cuadrado (línea sólida) y rectangular (línea discontinua). Las líneas grises indican los semiejes.

3.6. Conclusiones

En este trabajo investigamos la dispersión anisotrópica de partículas en un flujo turbulento bidimensional continuamente forzado en el plano β . El estudio está orientado hacia la turbulencia oceanográfica de mesoescala, donde la aceleración de Coriolis y sus variaciones latitudinales (el efecto β) son importantes. Los flujos simulados numéricamente presentaron la formación de remolinos turbulentos que en promedio mantienen bandas de circulación zonal, propias de la turbulencia marginalmente zonostrófica con índice $\mathcal{Z} \sim 2$. Además, consideramos la presencia de paredes sólidas en una cuenca cerrada usando condiciones libres de esfuerzos y también discutimos los efectos de usar condiciones de no deslizamiento. Se analizaron simulaciones con diferente intensidad del forzamiento externo. Un forzamiento débil (fuerte) condujo a remolinos turbulentos más pequeños (más grandes) y a una dispersión de partículas más lenta (más rápida).

La dispersión anisotrópica se cuantificó a través de diferentes análisis estadísticos basados en las posiciones zonal y meridional de las partículas pasivas sembradas en el flujo. Se construyeron elipses de

dispersión para nubes de partículas, y para estadísticas por pares se calcularon la dispersión relativa y los exponentes de Lyapunov de escala finita. A continuación, se discuten los resultados de los experimentos según la métrica utilizada:

- (i) La dispersión relativa entre pares de partículas fue anisotrópica con una preferencia zonal independientemente del forzamiento externo. Sin embargo, las curvas de dispersión mostraron comportamientos significativamente diferentes. Cuando el forzamiento es débil, la dispersión relativa y sus componentes no alcanzan los valores de saturación zonal y meridional (es decir, las partículas no llenaron la caja). Por el contrario, cuando el forzamiento es más fuerte, las partículas son advectadas hacia el oeste mucho más rápido que con el forzamiento débil. Como consecuencia, las partículas llenan el dominio y, debido a la anisotropía, el valor de semisaturación lo alcanza primero la componente zonal y luego la componente meridional. Independientemente de la intensidad del forzamiento, concluimos que la dispersión relativa en el plano β crece con preferencia zonal hasta alcanzar los valores de saturación y semisaturación. La dispersión anisotrópica puede verse afectada por la forma y el tamaño del dominio, como sugieren las estadísticas lagrangianas calculadas en simulaciones adicionales utilizando un dominio rectangular.

La dispersión relativa no se modifica para forzamientos débiles cuando se utilizan condiciones de contorno de no deslizamiento porque la mayoría de las partículas no han alcanzado las paredes laterales. Por el contrario, las partículas se acercan más rápido a las fronteras para el forzamiento fuerte, pero la anisotropía permanece casi igual. Cerca de las paredes, el movimiento de las partículas se ralentiza notablemente y, en consecuencia, se superan los valores de saturación. En general, el varamiento de partículas debido a las condiciones de no deslizamiento debe tenerse en cuenta al medir la dispersión en un dominio cerrado.

- (ii) Las elipses de dispersión mostraron el crecimiento asimétrico de la mancha trazadora y se encontraron diferencias según el forzamiento impuesto. En el forzamiento débil, el semieje mayor fue un 20 % más grande que el semieje menor y permaneció orientado en la dirección zonal la mayor parte del tiempo, lo que denota la anisotropía de la dispersión. Además, el centro de la elipse (que representa el centro de masa) se desplazó continuamente hacia el oeste: al final de la simulación, la componente zonal del centro de masa estaba ubicada aproximadamente a 90 km al oeste del centro del dominio. Otro resultado importante fue que el área de la elipse del plano β resultó más pequeña que el área casi circular obtenida en el plano f . Esta diferencia refleja que los remolinos turbulentos isotrópicos en el plano f son más eficientes para dispersar partículas que las estructuras zonalmente alargadas en el plano β . Con el forzamiento intenso, la elipse también fue anisótropa

con preferencia zonal en los primeros meses. Posteriormente, esta tendencia disminuyó hasta que el flujo se volvió casi isotrópico después de seis meses de simulación. La componente zonal del centro de masa también se desplaza hacia el oeste en las primeras etapas, pero luego retrocede hacia el centro del dominio a medida que las partículas llenan la cuenca. De hecho, después de la etapa inicial de anisotropía zonal, la dispersión se vuelve isotrópica porque las partículas alcanzan la pared occidental, se mueven hacia el norte y hacia el sur y se redistribuyen hacia el este por todo el dominio.

Las características de las elipses de dispersión (semiejes, orientación y posición) son una herramienta eficaz para seguir la evolución de una nube trazadora desde una fuente puntual. Hemos visto que también cuantifican efectivamente la anisotropía presente en un flujo bidimensional. Cabe recalcar que la construcción de las elipses fue diseñada para tomar en cuenta la información estadística del desplazamiento de derivadores superficiales en el océano que fueron liberados en diferentes tiempos (Zavala Sansón et al., 2017a). Es decir, las elipses consideran la dispersión de trazadores en diferentes realizaciones del flujo, tal como lo hemos hecho en el presente estudio liberando partículas en 20 experimentos para cada forzamiento con diferentes condiciones iniciales.

- (iii) Los FSLE mostraron diferencias en los experimentos de forzamiento débil y fuerte. En el experimento con forzamiento débil, la anisotropía estuvo presente en separaciones comparables a la escala de forzamiento y mayores, pero los valores registrados fueron demasiado pequeños. En el caso de forzamiento intenso, se observó claramente la anisotropía con preferencia zonal. Podemos concluir que la anisotropía zonal se puede detectar con FSLE en el rango inercial de energía si el índice zonostrófico es lo suficientemente alto. De manera equivalente, los FSLE no son una herramienta adecuada para detectar la dispersión anisotrópica en flujos débilmente zonostróficos. Otra consideración es la estrechez del rango inercial de energía, que puede afectar las estadísticas de pares (LaCasce & Meunier, 2022). Nuevas medidas dependientes de la escala, como la propuesta por LaCasce & Meunier (2022), podrían ser más adecuadas para detectar anisotropía en rangos inerciales finitos en un flujo confinado.

La anisotropía zonal basada en FSLE también fue estudiada por Espa et al. (2014) mediante la realización de experimentos en un tanque en rotación. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que dichos experimentos se realizaron en un plano γ , también llamado plano β polar, en el que la variación del parámetro de Coriolis resulta de la deformación parabólica de la superficie del fluido al imponerle una rotación rápida (Afanasyev & Wells, 2005). En esa configuración experimental, la dirección zonal corresponde a la dirección azimutal en un dominio circular, y la dirección meridional corresponde a la dirección radial, con el norte apuntando hacia el centro del tanque. El efecto β

resultante depende cuadráticamente de la latitud, en lugar de linealmente como en el plano β de latitud media simulado aquí. Por estas razones, se puede decir que la evidencia experimental arroja información relevante sobre la anisotropía lagrangiana pero los resultados deben interpretarse con cautela.

Los presentes resultados son una primera estimación de la dispersión anisotrópica debida al efecto β en los océanos terrestres. Sin embargo, varios otros mecanismos que impulsan la anisotropía podrían estar involucrados, especialmente en la superficie: corrientes no homogéneas, efectos del viento y ondas superficiales, entre otros. Por lo tanto, podría ser más probable encontrar anisotropía zonostrófica en las profundidades del océano, donde se han observado estructuras de bandas zonales (Maximenko et al., 2005; Cravatte et al., 2012). Nuestro trabajo posterior estudiará la anisotropía de partículas en una cuenca similar cuando se modifican las condiciones de contorno o cuando la topografía del fondo es variable cerca de las paredes. La presencia de topografía altera las corrientes medias (Zavala Sansón, 2022), lo que eventualmente podría modificar las propiedades de dispersión del flujo turbulento. Otra línea de investigación consiste en cuantificar la dispersión oceánica anisotrópica utilizando trayectorias históricas de boyas de deriva.

Capítulo 4. Dispersión Lagrangiana en turbulencia zonográfica en una cuenca cerrada con topografía idealizada

En este capítulo estudiamos la dispersión lagrangiana de un flujo en una cuenca cuadrada limitada por fronteras laterales y por una topografía idealizada en el fondo. Uno de los primeros trabajos sobre la circulación a gran escala en un dominio con topografía es el de Holland (1967), quien encontró que el flujo tiende a seguir contornos de f/h , donde f es el parámetro de Coriolis y h la profundidad. La topografía del fondo a gran escala tiene una influencia importante en la circulación oceánica media, especialmente ante la presencia de remolinos (Thompson, 1995).

Las interacciones de los remolinos con la topografía tienden a generar una circulación media llamada *efecto Neptuno* (Holloway, 1992). Este efecto ha originado parametrizaciones con este mismo nombre. La parametrización Neptuno promueve la generación de corrientes inducidas topográficamente y ha sido utilizada en modelos globales y estudios regionales (Eby & Holloway, 1994; Alvarez et al., 1994; Marinone, 1998; Golubeva & Platov, 2007; Maltrud & Holloway, 2008).

Recientemente Zavala Sansón (2022) examinó numéricamente la respuesta de un flujo continuamente forzado en una cuenca cuadrada de gran escala, en plano β y en presencia de topografía de fondo bajo diferentes condiciones de frontera: libre de esfuerzos y no deslizamiento. De dicho trabajo sabemos que cuando el flujo es puramente turbulento surge un flujo antihorario a lo largo de las pendientes continentales (es decir, con aguas poco profundas a la derecha en el hemisferio norte). Este flujo ciclónico refleja la alineación del flujo con la topografía de fondo, mas precisamente, con contornos geostróficos de f/h . Además, los flujos resultantes al utilizar diferentes condiciones de contorno no muestran diferencias significativas. Lo anterior significa que la topografía gobierna el flujo promedio, porque los efectos topográficos superan los de las capas límite.

En este trabajo es de interés estudiar la dispersión de trazadores en el flujo y entender la forma en la que el efecto β y el efecto topográfico de fondo se combinan dinámicamente. Comprender la interacción de estos dos efectos nos puede ayudar a entender mejor algunos fenómenos de transporte a gran escala, especialmente cuando existen conexiones entre las corrientes limítrofes con regiones del interior del océano (Dong et al., 2011). La descarga de contaminantes en las costas también es un problema relacionado con la dispersión lagrangiana cerca de una frontera. Por ejemplo, el transporte de basura de las zonas urbanas hacia el interior de los océanos comienza en la zona de plataforma y de ahí es distribuida a buena parte del resto del mundo por el flujo horizontal a gran escala (van Sebille et al., 2020).

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. Primero, describimos los parámetros empleados en los experimentos numéricos, y presentamos la topografía empleada. Se han diseñado tres simulaciones diferentes. En el primer experimento la dinámica del flujo se debe exclusivamente al efecto β . En el segundo, la respuesta del flujo es debida al efecto de la topografía de fondo. En el tercer experimento el efecto β y el de la topografía se conjuntan. Después, analizamos las características de los tres flujos turbulentos y aplicamos algunas de las métricas lagrangianas descritas en el Capítulo 2 para estudiar la dispersión. Por último discutimos los resultados encontrados y se enuncian algunas conclusiones.

4.1. Topografía idealizada

La topografía utilizada es una cuenca cerrada que se caracteriza por tener pendientes pronunciadas cerca de las fronteras (simulando las pendientes del talud continental). La cuenca es casi plana en la parte central del dominio con profundidad máxima $H = 4000$ m y cerca de las fronteras es aproximadamente $\sim 0.30H$. En el plano x, y la profundidad del fluido está dada por

$$h(x, y) = H \exp\left(-\frac{|x|^\alpha + |y|^\alpha}{L_d^\alpha}\right), \quad (46)$$

donde la escala horizontal L_d y el exponente α controlan la inclinación de las pendiente (Zavala Sansón, 2022). En la Figura 15 se muestra el campo de profundidad de la cuenca.

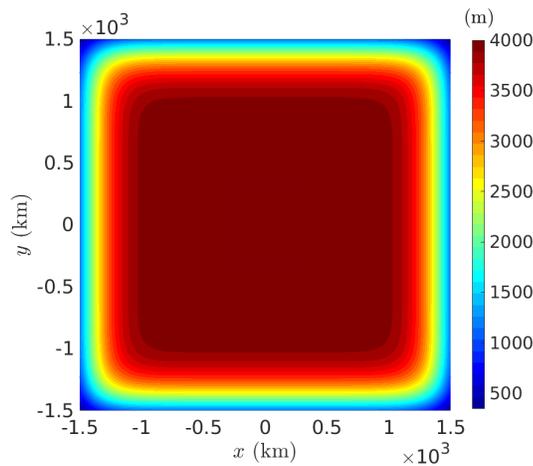


Figura 15. Topografía de una cuenca cuadrada definida por el campo de profundidad (46) con $L_d = 0.98 L$ ($L = 1500$ km) y $\alpha = 10$. Las pendientes entre cada frontera y una distancia $L/6$ son aproximadamente 5.1×10^{-3} . Basada en la topografía empleada por Zavala Sansón (2022).

La variación de la topografía de fondo induce efectos de estiramiento y compresión que no están presentes en los experimentos con fondo plano. El efecto β topográfico es de orden $\beta_t \approx f_0 \delta_b / WH$, donde δ_b es la altura de la topografía sobre una distancia horizontal $W \approx L/6$ (Zavala Sansón & van Heijst, 2000a, 2014). Utilizando valores representativos los parámetros empleados en los experimentos tenemos que $\beta_t \approx 1.2 \times 10^{-10} \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$, que es varias veces mayor a $\beta = 2 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$.

4.2. Experimentos canónicos

Se realiza un experimento canónico en plano β con la topografía idealizada, denominado F_m (forzamiento medio), en el cual se repiten la mayoría de los parámetros utilizados en los experimentos F_I y F_{II} presentados en el Capítulo 3. El experimento F_m tiene dos diferencias respecto a estos dos. La primera es la magnitud del forzamiento aplicado: el valor de τ_0 en F_m es de 0.8 Nm^{-2} , por lo que el forzamiento es más intenso que en F_I (0.4 Nm^{-2}) pero menor que en F_{II} (4 Nm^{-2}). La segunda diferencia es que las condiciones de frontera en el experimento F_m son de no deslizamiento. El objetivo de este experimento es observar la dispersión de partículas bajo la acción del efecto β y la topografía de fondo a la vez. Además, para entender mejor cómo estos dos efectos compiten se hicieron dos experimentos adicionales. El experimento $F_{m\beta}$ es realizado en el plano β con fondo plano, con el objetivo de observar la dispersión de partículas gobernada exclusivamente por el efecto β (como en los casos estudiados en el capítulo anterior). El experimento F_{mt} se realizó en el plano f ; para este caso el objetivo es analizar cómo la topografía afecta la dispersión de partículas pero ahora sin el efecto β .

Los parámetros empleados en estas simulaciones (a excepción de τ_0) pueden ser consultados en la sección 3.1. El tiempo total de simulación en los experimentos es nuevamente de 2000 días, con un paso de tiempo $\Delta t = 3.6 \times 10^3 \text{ s}$ (como en F_I). El índice zonostrófico \mathcal{Z} en los experimentos $F_{m\beta}$ y F_m fueron 1.9 y 2.5, respectivamente.

Los experimentos canónicos se definen como se hizo en el capítulo anterior. El flujo está inicialmente en reposo y luego se pone en movimiento debido al forzamiento impuesto hasta alcanzar el estado de equilibrio estadístico. El estado de equilibrio para el experimento $F_{m\beta}$ se verifica con las definiciones de energía y enstrofía para fondo plano (44) y (45). Para los experimentos que tienen topografía de fondo (F_{mt} y F_m) la energía y la enstrofía global se calculan de la forma (26) y (27). La Figura 16 muestra la evolución de la energía y la enstrofía en los tres casos. La energía global del sistema en los experimentos que tienen topografía (F_{mt} , F_m) es muy similar y, además, es en promedio 20% mayor que

en el experimento $F_{m\beta}$, es decir, los experimentos que tienen topografía de fondo son más energéticos (panel a). La diferencia se debe a que el volumen de fluido en la simulación con fondo plano es mayor al de los casos con topografía. La enstrofia también aumenta, pero en este caso el incremento es del 50 % (panel b).

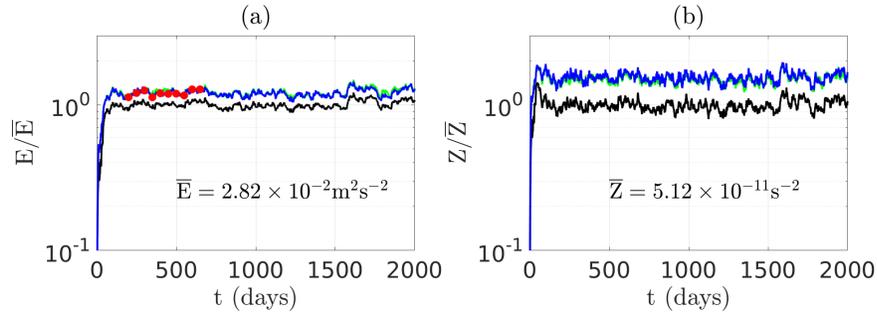


Figura 16. Evolución temporal de la (a) energía y (b) enstrofia globales para los experimentos canónicos $F_{m\beta}$ (negro), F_{mt} (verde) y F_m (azul), respectivamente. Las marcas rojas representan los 10 tiempos en que se inician los experimentos con partículas.

4.2.1. Espectros de energía

Para analizar las características de la turbulencia se calcularon los espectros de energía promedio para cada experimento, los cuales se muestran en la Figura 17. Los espectros reproducen la formación de dos rangos inerciales separados por la escala de inyección de energía. Sin embargo, cuando los experimentos tienen topografía de fondo dichos rangos difieren de los característicos de la turbulencia bidimensional. Primero veamos el espectro de energía promedio del experimento $F_{m\beta}$ (con efecto β sin topografía) en la Figura 17a. Se observa que el subrango inercial de números de onda pequeños $\kappa < \kappa_f$ presenta con buena aproximación una pendiente de $-5/3$ (como en la turbulencia 2D), mientras que para números de onda grande $\kappa > \kappa_f$ el espectro muestra una pendiente de -5 (como en F_I y F_{II}). En cambio, en los experimentos con topografía de fondo F_{mt} y F_m (ver Figuras 17b,c) las pendientes asociadas a los subrangos se modifican. Para el subrango inercial $\kappa < \kappa_f$ presentan una pendiente de -1 y para el subrango de enstrofia $\kappa > \kappa_f$ la pendiente es -3.5 . Estos valores coinciden con los reportados para turbulencia geostrófica sobre topografía aleatoria (Herring, 1977). Además, queremos hacer notar dos observaciones: la primera es que en el experimento F_m (con efecto β y topografía) el efecto topográfico tiende a estrechar el subrango inercial con números de onda pequeños (escalas grandes) (ver Figuras 17b,c), y la segunda es que la anisotropía en ese rango parece disminuir cuando ambos efectos están presentes.

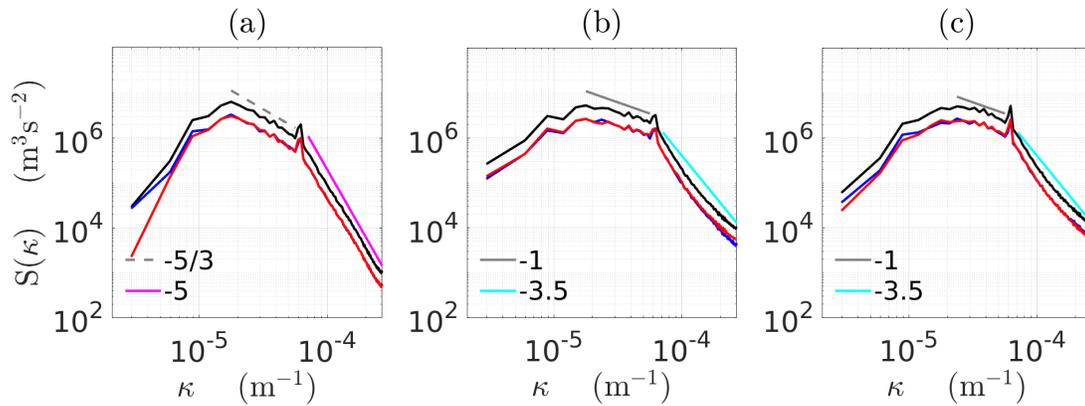


Figura 17. Espectro de energía promedio calculado a partir de las 10 realizaciones independientes de los experimentos (a) $F_{m\beta}$ (fondo plano con efecto β), y (b) F_{mt} (plano f con topografía) y (c) F_m (con efecto β y topografía). Las líneas negras, azules y rojas corresponden a los espectros de energía totales, zonales y meridionales, respectivamente. Las líneas en la esquina inferior izquierda muestran las leyes de potencia que siguen los rangos inerciales.

4.2.2. Experimentos con partículas

Para analizar la dispersión de partículas, se realizaron 10 experimentos con 2,000 partículas pasivas en cada uno (para un total de 20,000). Cada una de estas realizaciones comienza con el campo de vorticidad instantánea de las simulaciones canónicas en los tiempos marcados en rojo en la Figura 16a. El lapso de tiempo entre cada condición inicial es de 50 días, suficiente para considerar los campos como realizaciones independientes. La distribución inicial de partículas en cada realización se dividió en cinco grupos (manchas) diferentes como se muestra en la Figura 18. En cada mancha se liberaron 400 partículas en una matriz cuadrada de 20×20 . La separación promedio entre partículas es de 5 km aproximadamente y el área cubierta es de $10,000 \text{ km}^2$ por grupo. La primera mancha mc se encuentra al centro del dominio. El resto, me , mn , mo , y ms corresponden a manchas ubicadas cerca de la frontera este, norte, oeste y sur del dominio, respectivamente. Para evaluar la dispersión, se promedian las estadísticas lagrangianas de nubes de partículas de los 10 experimentos.

La ubicación de las manchas cerca de las fronteras tiene como objetivo determinar cómo la dispersión de partículas es modificada por la influencia de la topografía en el flujo turbulento. Con estas distribuciones se realizaron dos tipos de cálculos por mancha. El primer cálculo corresponde a las elipses de dispersión. El segundo es la dispersión absoluta por componentes, donde es necesario tener partículas que parten de una fuente puntual o cuasi-puntual. Las trayectorias de las partículas se registran diariamente durante 720 días simulados en los tres experimentos.

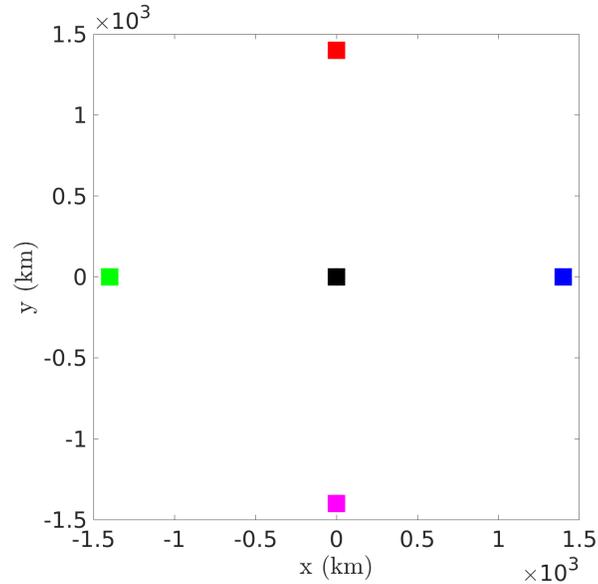


Figura 18. Distribución inicial de partículas. La mancha central, este, norte, oeste y sur del dominio se representa en negro, azul, rojo, verde y magenta, respectivamente.

4.3. Turbulencia con efecto β y topografía idealizada

En esta sección mostramos la respuesta del flujo para cada uno de los experimentos. La idea es ilustrar las características generales del flujo en presencia del efecto β y de la topografía. Para ello utilizamos los campos instantáneos y promediados del flujo en cada uno de los tres experimentos.

4.3.1. Campos instantáneos

La respuesta del flujo en los experimentos realizados se muestra en la Figura 19 por medio de campos instantáneos de la función de corriente para $F_{m\beta}$, y de la función de transporte para F_{mt} y F_m . Nótese que ahora se utiliza ψ^* para la función de corriente en el experimento $F_{m\beta}$ y ψ para la función transporte en F_{mt} y F_m . La Figura 19a muestra que en el experimento $F_{m\beta}$ se forman estructuras ciclónicas y anticiclónicas que llenan el dominio en forma homogénea, las cuales se desplazan al oeste debido al efecto β , como en las simulaciones F_I y F_{II} . La Figura 19b, por otro lado, muestra que en la simulación F_{mt} la topografía induce un flujo ciclónico cerca de las fronteras y sobre las pendientes topográficas (lo cual se refleja en la presencia de estructuras ciclónicas alrededor de la cuenca). Nótese que las

curvas cerradas son contornos geostróficos calculados como f_0/h , es decir, equivalentes a contornos de topografía. Al centro del dominio aparecen estructuras de mayor tamaño y en su mayoría anticiclónicas; la aparición de estos *eddies* persiste conforme avanza el tiempo. En cambio, en la Figura 19c tenemos una combinación de los efectos planetario y topográfico en el experimento F_m . Primero, se observa la generación de un flujo ciclónico cerca de las fronteras (y sobre las pendientes); específicamente, el flujo sigue contornos geostróficos que ahora se calculan como $(f_0 + \beta y)/h$. Segundo, al centro del dominio se tiene la formación de estructuras ciclónicas y anticiclónicas que se desplazan hacia el oeste atravesando la parte central del dominio (donde el fondo es casi plano).

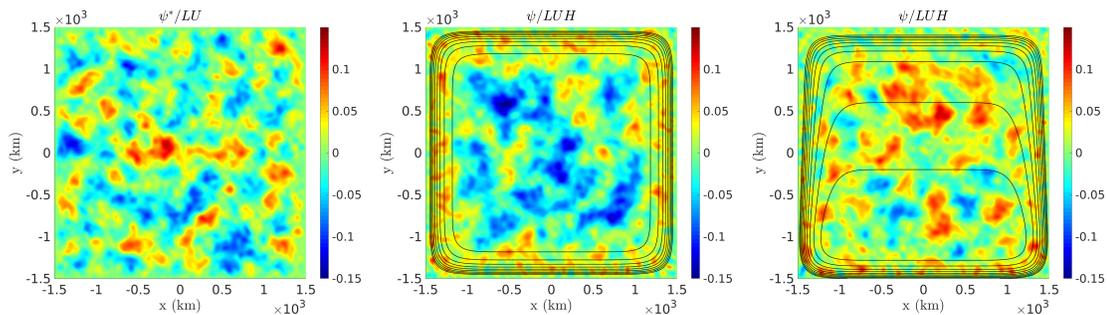


Figura 19. Campos instantáneos de: (a) la función de corriente ψ^*/LU para el experimento $F_{m,\beta}$ (fondo plano y efecto β), (b) función transporte ψ/LUH para el experimento F_{mt} (con topografía sin efecto β) y (c) función transporte para el experimento F_m (con topografía y efecto β). Los contornos en negro en los paneles (b) y (c) representan contornos geostróficos f/h .

4.3.2. Campos promedio

Con el objetivo de investigar la persistencia del flujo a lo largo de las simulaciones, se calculan los promedios de la función de corriente para el experimento $F_{m,\beta}$ y de la función transporte para F_{mt} y F_m . Para el fondo plano se espera encontrar estructuras zonales, como en simulaciones del capítulo anterior. Para los casos con topografía se genera un flujo medio forzado topográficamente con agua somera a la derecha, es decir, en sentido ciclónico alrededor de la cuenca, como los reportados por Zavala Sansón (2022).

El campo promedio de la función de corriente para el experimento con fondo plano se muestra en la Figura 20a. Las estructuras que viajan al oeste forman bandas de circulación zonales de longitud comparables al ancho del dominio, las cuales están intensificadas al oeste. En la Figura 20b se observa en el experimento F_{mt} la formación de un gran giro ciclónico al borde de las fronteras del dominio (siguiendo contornos

de f_0/h), y al centro del dominio en donde el fondo es casi plano se observa un conjunto de estructuras anticiclónicas. En cambio, cuando los dos efectos son considerados en la simulación F_m , se observa que las estructuras forman en promedio un gran giro ciclónico cerca de las fronteras e intensificado en el sur, y además el flujo tiende a seguir los contornos geostroáficos de f/h (ver Figura 19c).

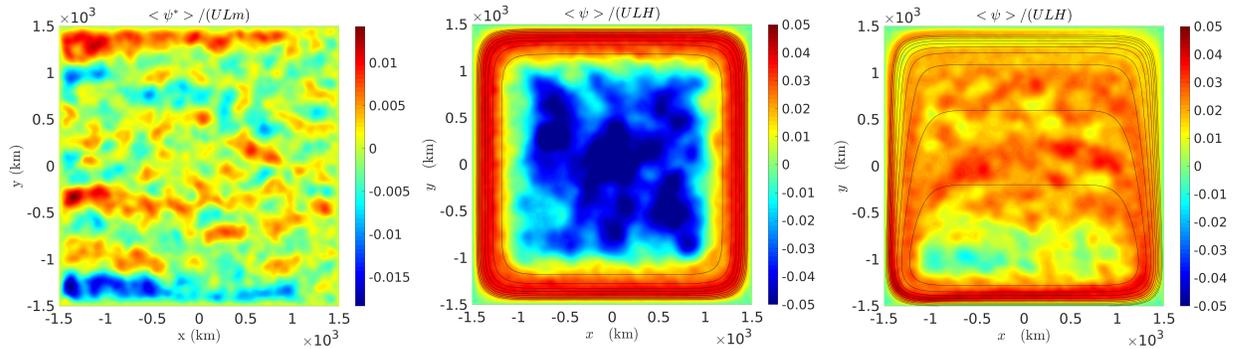


Figura 20. Campos promedio de: (a) la función de corriente $\langle \psi^* \rangle / LU$ para el experimento $F_{m\beta}$ (fondo plano y efecto β), (b) la función transporte $\langle \psi \rangle / LUH$ para F_{mt} (con topografía y sin efecto β) y (c) función transporte para F_m (con topografía de fondo y efecto β). Los contornos en negro representan contornos geostroáficos f/h .

4.4. Métricas lagrangianas en experimentos con topografía

El objetivo de esta sección es estudiar la dispersión de partículas lagrangianas cuando el efecto β y el efecto de la topografía están presentes en la turbulencia. El interés principal es determinar las áreas del dominio en las que estos dos efectos favorecen o contrarrestan la dispersión de partículas.

4.4.1. Elipses de dispersión

Al tiempo inicial de la simulaciones las partículas se disponen en las cinco manchas indicadas en la Figura 18. Conforme avance el tiempo la excentricidad y el área de las elipses crecerán según las partículas sean advectadas por el flujo.

Las Figuras 21a-f muestran la evolución de las elipses de dispersión y las posiciones de las partículas a seis tiempos diferentes para el experimento del fondo plano $F_{m\beta}$. Se observa que a tiempos ≤ 180 días la elipse central (negro) tiene una preferencia zonal dado que la dirección de su semieje mayor tiende a permanecer horizontal. Las elipses que parten cerca de las fronteras tienen un comportamiento diferente. Las elipses al norte y sur del dominio (rojo y magenta, respectivamente) mantienen una preferencia zonal; en cambio, las elipses al este y oeste del dominio (azul y verde, respectivamente) aunque mantienen una preferencia meridional y son más circulares.

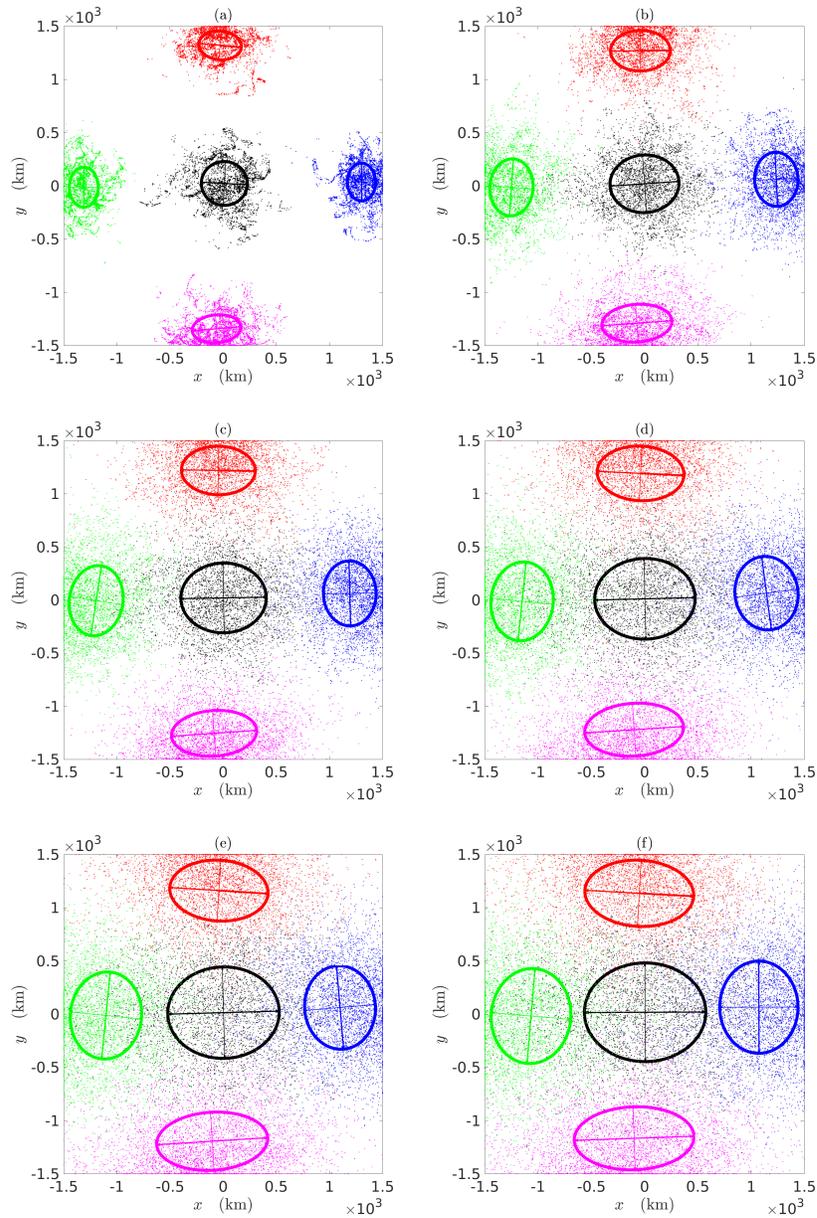


Figura 21. Elipses de dispersión y posición de las partículas de los cinco grupos definidos en la Figura 18 para diferentes tiempos en el experimento $F_{m\beta}$: (a) $t = 30$, (b) $t = 60$, (c) $t = 90$, (d) $t = 120$, (e) $t = 150$ y (f) $t = 180$ d.

Las elipses de dispersión para el experimento en plano f con topografía F_{mt} se muestran en las Figuras 22a-f. En este caso la elipse al centro del dominio (negro) no tiene dirección preferencial, su centro de masa permanece en el centro del dominio y su forma es relativamente circular. En cambio, las elipses cercanas a las fronteras se alargan debido al flujo ciclónico paralelo a las paredes y además se mueven en esa dirección, con aguas someras a la derecha. El área de las cuatro elipses cerca de las fronteras es comparable en todos los tiempos mostrados, y debido al giro ciclónico, las cuatro elipses se desplazan con una rapidez similar hacia la siguiente frontera. Para el último tiempo mostrado (panel f) el área de la elipse al centro del dominio comienza a ser comparable con el resto.

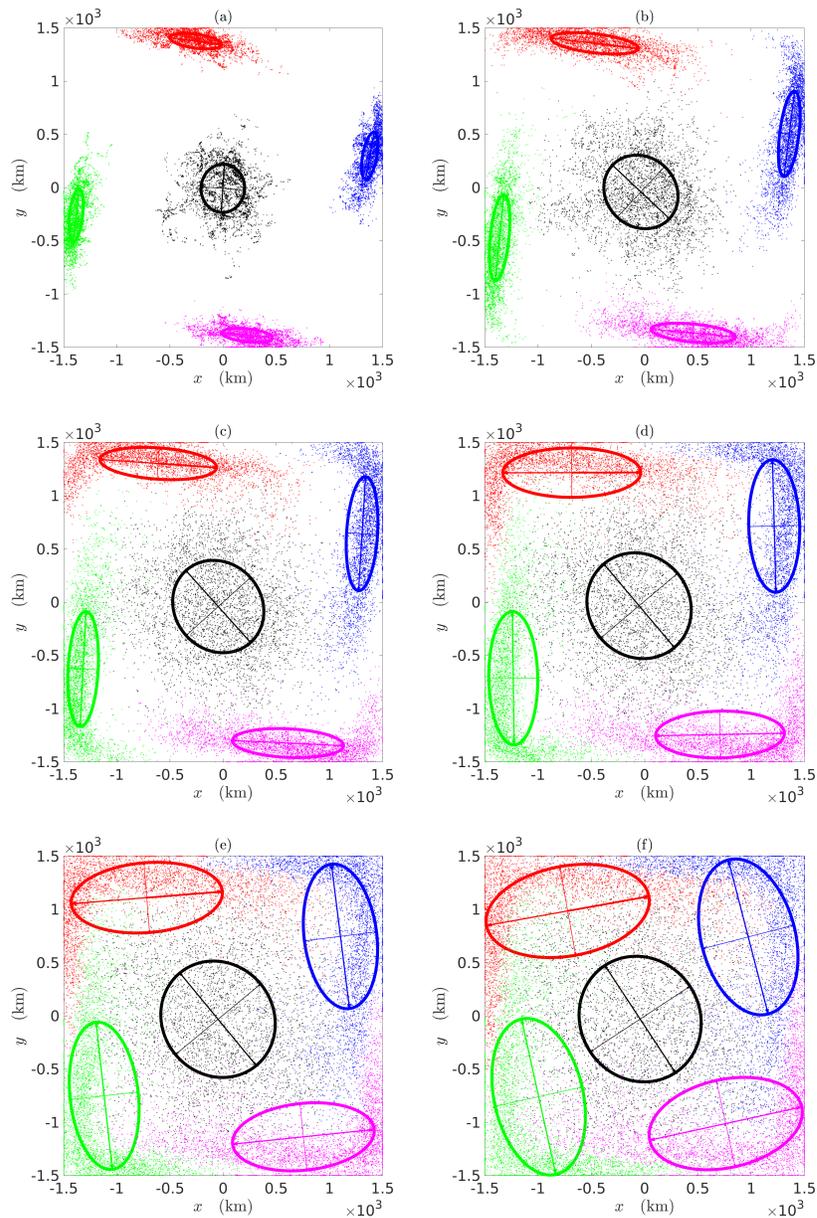


Figura 22. Elipses de dispersión y posiciones de partículas como en la Figura 21 pero ahora para el experimento F_{mt} .

Para la simulación en el plano β con topografía F_m , las Figuras 23a-f muestran la evolución de las elipses de dispersión. Debido al efecto β , la elipse al centro del dominio mantiene nuevamente una preferencia zonal desde tiempos cortos. Por el contrario, las cuatro elipses cerca de las fronteras siguen el flujo con aguas someras a la derecha como en la simulación anterior, pero la velocidad con la que cada una se desplaza es diferente. Por ejemplo, en la Figura 23f las elipses que parten de la frontera este y norte (azul y rojo) aún se encuentran lejos de las fronteras norte y oeste, respectivamente. En cambio, las elipses que parten del oeste y sur (verde y magenta) están cerca de la frontera sur y este, respectivamente.

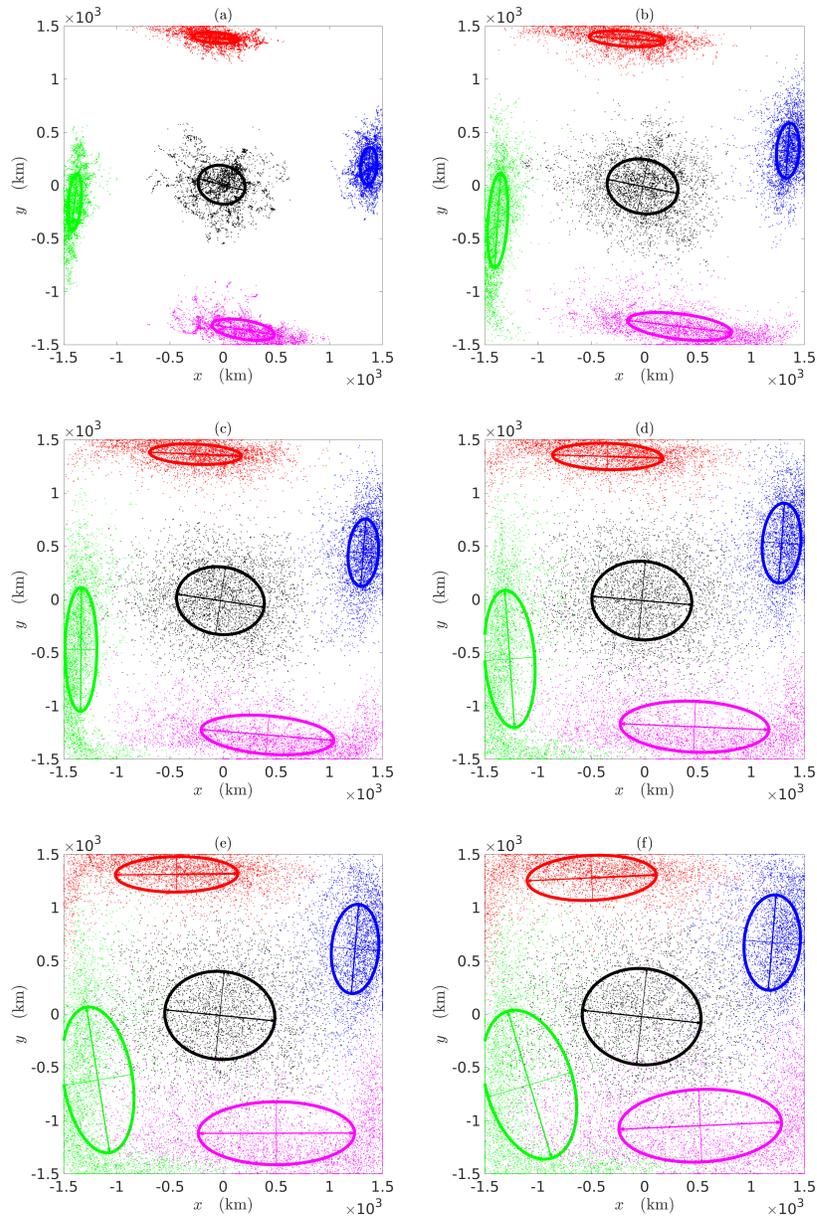


Figura 23. Elipses de dispersión y posiciones de partículas como en la Figura 21 pero ahora para el experimento F_m .

Otra diferencia notable es que las áreas de las elipses que parten del oeste y sur son mayores a las áreas de las elipses que parten del este y norte, a pesar de que estas últimas dos son favorecidas por el efecto β (que desplaza las estructuras y partículas hacia el oeste). En efecto, que el área de las elipses que parten de la frontera oeste y sur sea mayor se asocia con la intensificación del giro ciclónico, sobre todo a lo largo de la frontera sur (ver Figura 20c).

Para observar con mayor detalle el crecimiento de las elipses, en la Figura 24 se muestra la razón de aspecto a/b y el área πab (adimensionalizada con el área del dominio A_D) de las elipses para cada uno de los experimentos. En el caso del fondo plano $F_{m\beta}$ (Figuras 24a,b) las elipses que parten de la frontera sur y norte son más excentricas, con valores de $a/b = 1.9$ y 1.7 , respectivamente para $t = 200$ días. En cambio, las elipses que parten de la frontera este y oeste presentan valores cercanos a 1 desde tiempos cortos. Por otro lado, se observa que la dispersión de partículas en el centro del dominio es mayor que la dispersión cerca de las fronteras pues el área de la elipse central alcanza $0.25A_D$, mientras que el área de las elipses cerca de las fronteras fue menor a $0.20A_D$ al tiempo final de la simulación.

La razón de aspecto y el área de las elipses del experimento F_{mt} se muestran en las Figuras 24c y 24d, respectivamente. Para este caso se observa que la excentricidad de las elipses que parten cerca de las fronteras se comporta prácticamente de la misma forma durante todo el periodo de la simulación. En efecto, se observa un crecimiento abrupto debido a la advección de partículas por la corriente ciclónica paralela a las paredes, hasta alcanzar valores de $a/b = 4.7$ para $t = 75$ días, seguido de un rápido descenso hasta la unidad conforme las partículas se alejan de las fronteras hacia el interior del dominio. En cambio, la elipse que parte del centro del dominio mostró ser isotrópica ($a/b \approx 1$) para casi todo el periodo de simulación. El área final de las elipses que parten cerca de las fronteras fue de $0.30A_D$, aproximadamente; en cambio, la elipse al centro del dominio, que parecía ser más dispersiva que las anteriores alcanzó un área por arriba de $0.20A_D$ al final de la simulación.

Por último, las características de las elipses del experimento F_m se muestran en las Figuras 24e,f. En este caso encontramos una combinación de observaciones anteriores. Primero, la excentricidad de las elipses es diferente para cada grupo. Para las manchas que parten cerca de las fronteras, la razón de aspecto creció abruptamente y alcanzó valores $a/b \approx 5, 5, 4.1$ y 2.5 en el oeste, norte, sur y este, respectivamente, antes de los 70 días de la simulación. Luego estos valores decaen hasta ≈ 1.3 al final de la simulación. En el caso de la elipse que parte del centro del dominio el valor máximo $a/b \approx 1.5$ antes de los 70 días; sin embargo, al final de la simulación a/b apenas rebasa 1. El área de las elipses es diferente en el tiempo, por ejemplo, para tiempos cortos $t < 150$ días las elipses son más dispersivas en el grupo central, la frontera oeste y la sur. Sin embargo, esto no se mantiene conforme avanza el

tiempo, puesto que las curvas se cruzan durante la simulación.

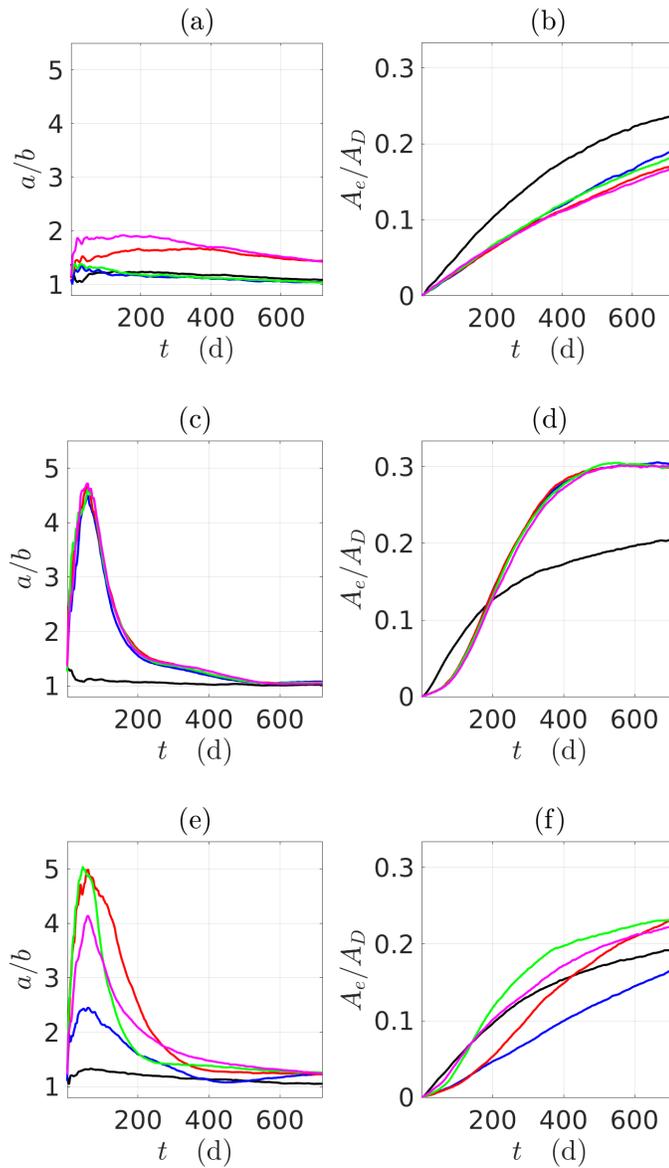


Figura 24. Evolución de la la razón de aspecto (a/b) (paneles a,c,e) y área adimensional A_e/A_D (paneles b,d,f) de las elipses de dispersión de cada grupo de partículas en los experimentos: (a)-(b) para $F_{m\beta}$; (c)-(d) para F_{mt} y (e)-(f) para F_m . El código de color es el mismo que en la Figura 18. $A_D = 9 \times 10^6 \text{ km}^2$ es el área del dominio.

4.4.2. Dispersión absoluta

La dispersión absoluta total y por componentes de cada una de las manchas de partículas para el experimento $F_{m\beta}$ se muestra en la Figura 25. Los valores de saturación se calculan con las fórmulas (30a)-(30b) y (31) introducidas en el Capítulo 2. La dispersión de partículas al centro del dominio se

acerca asintóticamente al valor de saturación. Sin embargo, la dispersión de partículas cerca de las fronteras aún está lejos de alcanzar su respectivo valor de saturación. La razón es que las partículas que parten cerca de las fronteras deben recorrer una distancia mayor para saturar el dominio que las que parten del origen [como se muestra en la fórmula (31)]. Una observación general en este experimento es que la dispersión absoluta zonal es mayor que la meridional en todos los paneles. Además, la diferencia entre las componentes de la dispersión es mayor en la frontera este y oeste, debido a que la presencia de las fronteras norte y sur limitan la dispersión meridional.

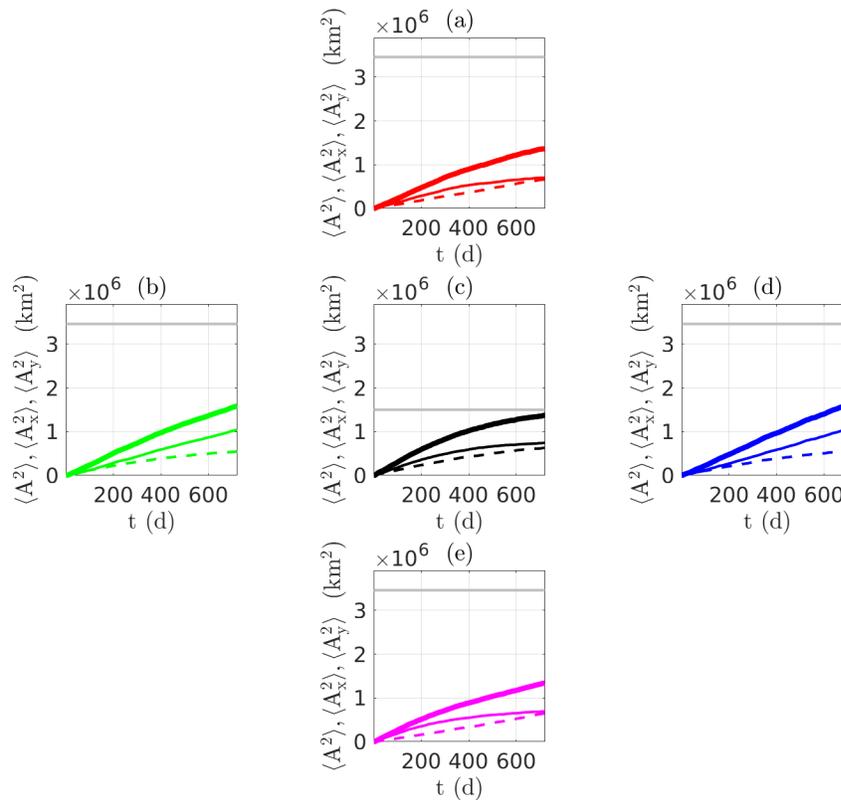


Figura 25. Dispersión absoluta total (líneas continuas gruesas), zonal (líneas continuas) y meridional (líneas discontinuas) calculadas para cada mancha de partículas en el experimento $F_{m,\beta}$: (a) Mancha norte, (b) Mancha oeste, (c) Mancha central, (d) Mancha este y (e) Mancha sur. La línea horizontal gris representa el valor de saturación $\langle A_S^2 \rangle$. Para la mancha de partículas que parte del centro (de las fronteras) $\langle A_S^2 \rangle$ es $1.5 \times 10^6 \text{ km}^2$ ($3.46 \times 10^6 \text{ km}^2$).

En la Figura 26 mostramos la dispersión absoluta para el experimento F_{mt} . Recuérdese que en este caso las partículas cerca de las fronteras son advectadas por el gran giro ciclónico paralelo a los contornos de topografía. La dispersión absoluta al centro del dominio es isotrópica dado que en esta zona la profundidad es casi constante y, al ser plano f , se tiene isotropía. Para $t < 280$ días la dispersión absoluta cerca de las fronteras es mayor para la componente zonal (meridional) en las fronteras norte y sur (este y oeste). Esto se debe a la advección inicial paralela a las paredes. Para tiempos posteriores

las curvas se invierten conforme las partículas alcanzan la frontera perpendicular más cercana y cambian de dirección. El valor de saturación de la dispersión absoluta fue alcanzado por todas las manchas que parten cerca de las fronteras en $t \approx 500$ días. Después de este tiempo el valor de saturación es rebasado debido a que algunas de las partículas se adhieren a las fronteras por las condiciones de contorno de no deslizamiento.

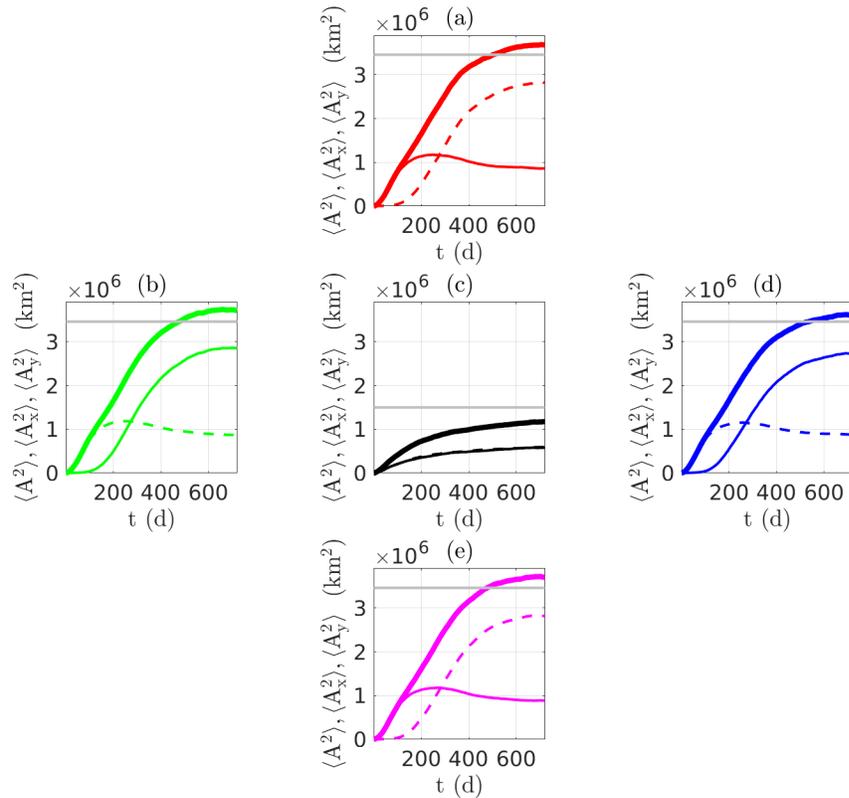


Figura 26. Igual que la Figura 25 pero para el experimento F_{mt} .

La dispersión absoluta para el experimento F_m se presenta en la Figura 27. La dispersión de partículas al centro del dominio es anisotrópica con una preferencia zonal debido al efecto β . Sin embargo, la diferencia entre la componente zonal y meridional es menor que en el experimento $F_{m\beta}$ (ver Figuras 25 y 27), y el valor de saturación no es alcanzado. La dispersión absoluta cerca de las fronteras del dominio se comporta de manera relativamente similar a los casos descritos anteriormente para la simulación de plano f con topografía, Figura 26. En efecto, para tiempos cortos ($t < 300$ días) la dispersión zonal (meridional) es mayor en las fronteras norte y sur (este y oeste), y para tiempos posteriores las curvas se invierten. Una diferencia notoria entre ambos casos es que la dispersión total no alcanza el valor de saturación en el caso del plano β con topografía, Figura 27. Este resultado concuerda con lo encontrado

en el Capítulo 3, en donde se vio que la dispersión en plano f tiende a ser mayor que en el plano β .

Cuando el efecto β y el efecto de la topografía están presentes la dispersión de partículas tiene un comportamiento diferente según el lugar en donde son liberadas. Esto es debido a dos razones. La primera es que el giro ciclónico tiene una intensidad diferente en cada frontera: intensa al oeste y sur, y poco intensa al este y norte del dominio. Por otro lado, el efecto β que tiende a desplazar las partículas hacia el oeste favorece la dispersión zonal en las fronteras norte, sur y este (esta última especialmente); en cambio en el oeste del dominio las partículas tienden a ser atrapadas contra la costa por este efecto.

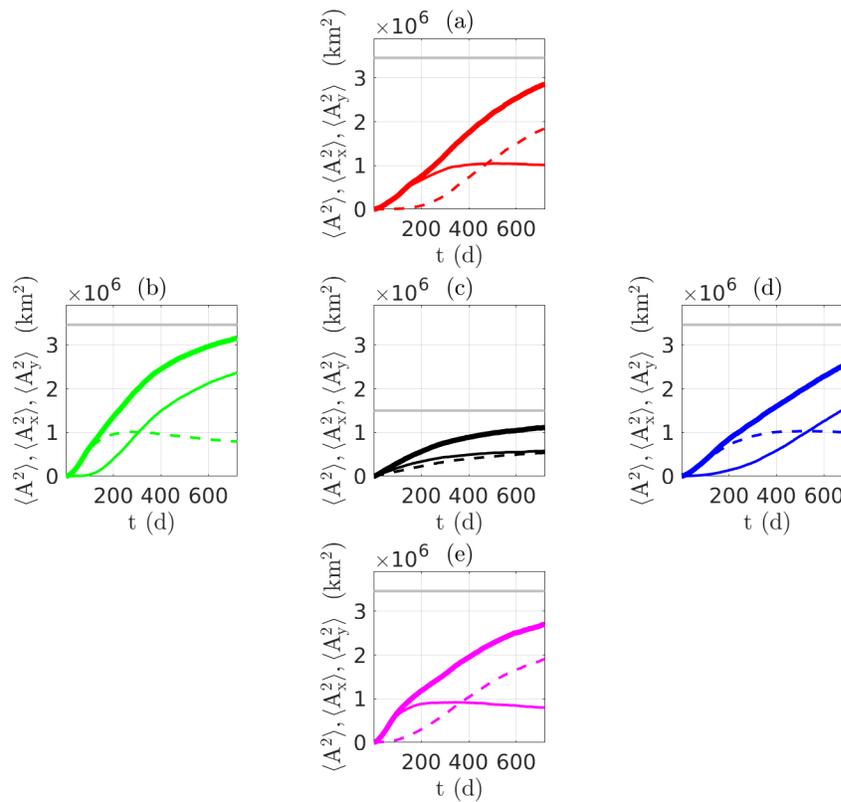


Figura 27. Igual que la Figura 25 pero para el experimento F_m .

4.5. Discusiones

En este capítulo investigamos la dispersión de partículas en un flujo turbulento continuamente forzado en un plano β y con topografía de fondo en una cuenca cerrada. Este estudio busca comprender la dispersión de partículas cuando la variación latitudinal del parámetro de Coriolis es importante (efecto

β) y cuando la topografía del fondo simula las pendientes continentales en una cuenca oceánica. El objetivo fue determinar si estos dos efectos se suman o se contrarrestan en la dispersión de partículas en la cuenca cerrada.

Los resultados muestran que en la simulación numérica que incluye topografía de fondo pero no el efecto β (F_{mt}) se induce un flujo ciclónico de intensidad uniforme al borde de las fronteras, el cual sigue contornos de topografía f_0/h (Holloway, 1996). En consecuencia, la dispersión de partículas liberadas cerca de las paredes es más efectiva en la dirección paralela a las mismas. Este comportamiento se ilustra claramente con las elipses de dispersión que se elongan pronunciadamente a lo largo de las fronteras.

Cuando los dos efectos están presentes, β planetario y topográfico (experimento F_m), nuevamente emerge un giro ciclónico, pero esta vez intensificado a lo largo de la frontera sur y siguiendo contornos geostrofos de f/h (Zavala Sansón, 2022). Esta asimetría tiene consecuencias para la dispersión de partículas, como se mostró con las elipses y las curvas de dispersión. Por un lado, la dispersión de partículas al centro del dominio es anisotrópica con una preferencia zonal (como en el caso de fondo plano). Sin embargo, la anisotropía zonal es menor a la observada cuando únicamente el efecto β está presente, debido a que el giro ciclónico funciona como una barrera que limita la propagación hacia el oeste. Por otro lado, cerca de las fronteras la combinación del efecto β y el efecto de la topografía de fondo generan una dinámica diferente en cada región. Por sí solo, el efecto β genera anisotropía zonal desplazando las partículas hacia el oeste, mientras que el giro ciclónico derivado del efecto de la topografía desplaza a las partículas a lo largo de la pared más próxima. En los experimentos analizados la intensidad del giro (asociada a la magnitud de la pendiente topográfica) domina sobre el efecto β .

Hasta donde sabemos no existen estudios previos de dispersión de partículas para flujos gobernados por la combinación de estos efectos y bajo las condiciones establecidas al inicio de este capítulo. Este trabajo busca dilucidar el por qué la dispersión de partículas en las fronteras es altamente dependiente de la ubicación inicial de los trazadores. Existen cuestionamientos inmediatos después de conocer estos resultados. En primer lugar, sería interesante investigar si los mecanismos en la dispersión de partículas se mantienen cuando se aplica un forzamiento a escala de cuenca, por ejemplo, un forzamiento de Stommel (Zavala Sansón, 2022), y un segundo cuestionamiento es determinar cómo se modifica la dispersión en zonas occidentales y en el interior de los océanos cuando las corrientes se intensifican (como la Corriente de Kuroshio en el Pacífico), o cuando se debilitan (como la Corriente del Golfo en el Atlántico) (Chen et al., 2019).

Capítulo 5. Discusiones y conclusión general

En este trabajo estudiamos numéricamente la dispersión de partículas en un flujo en turbulencia bidimensional, continuamente forzado, en un plano β e inmerso en una cuenca cuadrada de gran escala. El objetivo fue estudiar la dispersión de partículas lagrangianas cuando el flujo está confinado por las paredes sólidas del dominio y la topografía del fondo. Encontramos que las características observadas de la turbulencia difieren significativamente cuando los experimentos tienen un fondo plano o cuando tienen una topografía variable. En un fondo plano el flujo promedio exhibe la formación y mantenimiento de bandas de circulación este-oeste típicas de la turbulencia marginalmente zonostrófica con índice $Z \sim 2$ (definido en el capítulo 1). En cambio, cuando empleamos una topografía de fondo que simula las pendientes continentales de una cuenca oceánica el flujo muestra el surgimiento de un giro ciclónico al borde de las fronteras e intensificado hacia el sur. El análisis de la dispersión de partículas se realizó por medio de métricas lagrangianas definidas por componentes: la dispersión absoluta, la dispersión relativa, las elipses de dispersión y los FSLE. A continuación mencionamos algunas de las observaciones que permiten concentrar y extender los resultados de cada caso.

5.1. Dispersión de partículas en un flujo puramente 2D

En el Capítulo 3 se realizaron dos experimentos numéricos diferenciados por la magnitud del forzamiento impuesto, denominados F_I (forzamiento débil) y F_{II} (forzamiento intenso). Ambos experimentos mostraron la formación de estructuras que se desplazan hacia el oeste que revelan que el flujo es anisotrópico con una preferencia zonal. Para estimar el grado de anisotropía presente en el flujo, ambos forzamientos se emplearon en simulaciones en el plano f . Los espectros de energía mostraron claramente que en el plano f el flujo es isotrópico. En cambio, en el plano β se observó anisotropía zonal al disminuir el espectro meridional respecto al zonal para números de onda pequeños (escalas grandes). En el plano β las estructuras formadas en el experimento F_I fueron de menor tamaño y menos intensos que en el experimento F_{II} , propiciando que las partículas en F_{II} se dispersen más rápido. Este resultado se asocia a que la transferencia de energía hacia escalas mayores es más significativa en el experimento F_{II} . En ambos experimentos se encontró una clara anisotropía zonal cuantificada con la dispersión relativa y las elipses de dispersión. Sin embargo, cuando empleamos los FSLE encontramos anisotropía solo para el experimento F_{II} . Lo anterior sugiere que esta métrica permite detectar anisotropía siempre que el forzamiento sea suficientemente fuerte o presente índices zonostróficos grandes como el de las atmósferas

planetarias de Júpiter y Saturno, para las cuales $\mathcal{Z} \sim 5$ (Lemasquerier et al., 2021).

La anisotropía en flujos simulados como en el presente trabajo es sensible a las condiciones de contorno, la geometría y la resolución espacial. Cuando utilizamos condiciones de frontera de no deslizamiento, la formación de bandas de circulación es más evidente que cuando utilizamos condiciones libre de esfuerzos para ambos protocolos de forzamiento (ver por ejemplo la Figura 20a). La formación de bandas de circulación a partir de simulaciones numéricas concuerdan con estudios previos (Kramer et al., 2006; O'Reilly et al., 2012) en cuencas cerradas. Es importante tener en cuenta que con condiciones de frontera de no deslizamiento, el significado de las elipses de dispersión y los FSLE se pierde cuando las partículas se atorán cerca de los límites del dominio.

Por otro lado, cuando simulamos en un cuenca rectangular cuyo lado mayor está orientado en la dirección zonal, con la misma área, resolución, condiciones de frontera libre de esfuerzos y forzamiento aplicado que en el experimento F_I , encontramos por medio de la dispersión relativa y las elipses de dispersión que el flujo es zonalmente más anisotrópico. Lo anterior es debido a que las partículas (que son liberadas al centro del dominio) están más cerca de las paredes norte y sur en comparación con las paredes este y oeste, y por lo tanto la dispersión meridional es inhibida.

Por último, cuando se emplea mayor resolución espacial en las simulaciones, los campos instantáneos de la función de corriente ψ y promediada $\langle \psi \rangle$ mostraron esencialmente el mismo comportamiento turbulento, mientras que las estadísticas lagrangianas estimaron que la anisotropía zonal incrementa hasta un 10% aproximadamente. El aumento en la resolución nos permite considerar efectos de los remolinos de submesoescala, los cuales también contribuyen en la dispersión de partículas.

Estos resultados son una primera aproximación para cuantificar la anisotropía en flujos gobernados por el efecto β . Sin embargo, en el caso de los océanos terrestres existen otros mecanismos que impulsan o modifican la anisotropía, especialmente en la superficie, como las corrientes no homogéneas, efectos del viento y ondas superficiales, entre otros. Esta es una razón importante por la que aparentemente sería difícil visualizar la anisotropía zonal en la dispersión de trazadores en flujos superficiales. Por el contrario, estudios como los de Maximenko et al. (2005) y Cravatte et al. (2012) encuentran bandas zonales en el interior del océano, por lo que en esos casos podría ser más plausible detectar la dispersión anisotrópica.

5.2. Dispersión de partículas con topografía de fondo

Este trabajo se profundiza en el Capítulo 4, estudiando cómo se modifica la dispersión de partículas en un nuevo experimento, F_m , que emplea un forzamiento más intenso que el de F_I pero menor al de F_{II} , con condiciones de frontera de no deslizamiento y con la topografía de fondo idealizada que simula las pendientes continentales de una cuenca oceánica. El flujo promedio revela el surgimiento de un giro ciclónico al borde de las fronteras e intensificado en la frontera sur que se caracteriza por seguir contornos geostroficados de f/h . La dispersión de partículas se estudia en el interior del dominio y cerca de las fronteras. En el interior del dominio, donde el fondo es casi plano, el efecto β gobierna el flujo. En cambio, al borde de las fronteras, donde los gradientes de profundidad son abruptos, se encuentra la combinación dinámica del efecto β y el efecto de la topografía. Dicha combinación de efectos puede sumar o contrarrestar la dispersión de partículas. Por esta razón, se realizaron dos simulaciones adicionales con el propósito de aislar estos dos efectos. Una de ellas, $F_{m\beta}$, se realizó en el plano β y con fondo plano. La segunda simulación, F_{mf} , fue en el plano f y con la topografía de fondo.

En el experimento del plano f con topografía se observó isotropía al permanecer empalmados los espectros meridional y zonal para todos los números de onda. Sin embargo, el efecto de la topografía estrecha el subrango inercial de energía (el cual mostró una pendiente -1). Cuando los dos efectos están presentes se observa anisotropía para números de onda pequeños -aunque disminuida comparada con el fondo plano-, y el subrango inercial de energía muestra la misma pendiente y estrechez que en el plano f con topografía.

Las métricas lagrangianas para estudiar la dispersión fueron la dispersión absoluta y las elipses de dispersión medidas a partir de fuentes puntuales adyacentes a las fronteras y desde el centro del dominio. La elipses mostraron que la dispersión al centro del dominio se ve disminuida respecto al caso del fondo plano debido a la topografía abrupta cerca de las fronteras, que al parecer inhibe el paso de trazadores. Por otro lado, la dispersión de partículas cerca de las fronteras es claramente anisotrópica a lo largo de las paredes debido a la corriente paralela inducida topográficamente. En efecto, las elipses tienen una gran excentricidad, con el semieje mayor paralelo a las costas, mientras el centro de la elipse se traslada lentamente con agua somera a la derecha. La dispersión de partículas al este del dominio fue notablemente menor que en el centro del dominio y en el resto de las fronteras durante gran parte de periodo de simulación, a pesar de que el efecto β favorece la dispersión hacia el oeste; sin embargo, el giro ciclónico debido a la topografía es menos intenso en esta región.

Por otro lado, la dispersión absoluta mostró ser consistente con las elipses de dispersión al revelar que la intensidad del giro debida al efecto de la topografía domina sobre el efecto β . Por esta razón, la dispersión de partículas está altamente relacionada con la intensidad del giro. Por ejemplo, la dispersión de partículas en el este (oeste) resulta ser menor (mayor) porque el giro ciclónico es débil (intenso) en esta frontera. Además, en el recorrido de las partículas (con agua somera a la derecha) hacia la siguiente frontera, la dispersión se modifica por la intensidad del giro en esta nueva región. Por esta razón no es extraño que la dispersión de partículas que parten de la frontera norte aumente considerablemente a su paso por la frontera oeste. Por último, la dispersión al centro del dominio (donde el efecto β domina y desplaza a las partículas hacia el oeste), también se vio disminuida al compararlo con el caso de fondo plano. Esto es debido a que el giro ciclónico funciona como una barrera que impide que las estructuras viajen hasta el límite oeste de la cuenca.

5.3. Trabajo futuro

Los resultados anteriores reflejan la importancia de considerar la topografía de fondo cuando estudiamos la dispersión en una cuenca oceánica, especialmente cuando los trazadores son liberados en los taludes continentales, ya que tan solo la presencia de gradientes abruptos de la topografía pueden modificar sustancialmente la dispersión. Sin embargo, este trabajo se puede profundizar si empleamos un forzamiento a escala de cuenca similar al modelo de Stommel. Se sabe que la respuesta del flujo bajo este modelo es el surgimiento de un giro anticiclónico intensificado en el margen occidental (Zavala Sansón, 2022). Por lo tanto, sería interesante examinar cómo se modifica la dispersión de partículas cuando están presentes un forzamiento aleatorio más el forzamiento a escala de cuenca. Las bandas de circulación zonal están presentes en los océanos de la Tierra. Por ejemplo, para el Océano Pacífico existen estudios sobre la evidencia de estos chorros (Maximenko et al., 2005; Nakano & Hasumi, 2005; Richards et al., 2006; Cravatte et al., 2012). Por otro lado, también podemos encontrar estudios sobre las características generales de la dispersión en las cuencas oceánicas a partir de datos observacionales de derivadores superficiales (Corrado et al., 2017). Sin embargo, hasta donde conocemos no existen estudios que cuantifiquen la anisotropía en los océanos donde se han observado la presencia de estos chorros zonales. Por esta razón, sería interesante extender esta investigación para cuantificar anisotropía en los océanos a partir de los datos de derivadores superficiales o subsuperficiales aplicando las métricas lagrangianas empleadas en esta tesis para estudiar dispersión. Los resultados derivados serían útiles para resolver problemas relacionados con el transporte de material biológico, la dispersión de sustancias contaminantes, entre otros.

Literatura citada

- Afanasyev, Y. D. & Wells, J. (2005). Quasi-two-dimensional turbulence on the polar beta-plane: laboratory experiments. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 99(1):1–17.
- Alvarez, A., Tintoré, J., Holloway, G., Eby, M., & Beckers, J. M. (1994). Effect of topographic stress on circulation in the western mediterranean. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 99(C8):16053–16064.
- Artale, V., Boffetta, G., Celani, A., Cencini, M., & Vulpiani, A. (1997). Dispersion of passive tracers in closed basins: Beyond the diffusion coefficient. *Physics of Fluids*, 9(11):3162–3171.
- Aurell, E., Boffetta, G., Crisanti, A., Paladin, G., & Vulpiani, A. (1997). Predictability in the large: an extension of the concept of Lyapunov exponent. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 30(1):1–26.
- Babiano, A., Basdevant, C., Le Roy, P., & Sadourny, R. (1990). Relative dispersion in two-dimensional turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 214:535–557.
- Balwada, D., LaCasce, J. H., Speer, K. G., & Ferrari, R. (2021). Relative dispersion in the Antarctic Circumpolar Current. *Journal of Physical Oceanography*, 51(2):553 – 574.
- Basu, R., Naulin, V., & Rasmussen, J. J. (2003). Particle diffusion in anisotropic turbulence. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 8(3):477–492.
- Berloff, P. S. (2005). On rectification of randomly forced flows. *Journal of Marine Research*, 63(3):497–527.
- Beron-Vera, F. J. & LaCasce, J. H. (2016). Statistics of simulated and observed pair separations in the Gulf of Mexico. *Journal of Physical Oceanography*, 46(7):2183 – 2199.
- Berti, S. & Lapeyre, G. (2021). Lagrangian pair dispersion in upper-ocean turbulence in the presence of mixed-layer instabilities. *Physics of Fluids*, 33(3):036603.
- Boffetta, G., Lacorata, G., Redaelli, G., & Vulpiani, A. (2001). Detecting barriers to transport: a review of different techniques. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 159(1):58–70.
- Boffetta, G. & Musacchio, S. (2010). Evidence for the double cascade scenario in two-dimensional turbulence. *Physical Review E*, 82(1):016307.
- Borue, V. (1994). Inverse energy cascade in stationary two-dimensional homogeneous turbulence. *Physical review letters*, 72(10):1475–1478.
- Cabanes, S., Aurnou, J., Favier, B., & Le Bars, M. (2017). A laboratory model for deep-seated jets on the gas giants. *Nature Physics*, 13(4):387–390.
- Chen, C., Wang, G., Xie, S.-P., & Liu, W. (2019). Why does global warming weaken the Gulf Stream but intensify the Kuroshio? *Journal of Climate*, 32(21):7437–7451.
- Corrado, R., Lacorata, G., Palatella, L., Santoleri, R., & Zambianchi, E. (2017). General characteristics of relative dispersion in the ocean. *Scientific Reports*, 7(1):46291.
- Cravatte, S., Kessler, W. S., & Marin, F. (2012). Intermediate zonal jets in the tropical Pacific Ocean observed by Argo floats. *Journal of Physical Oceanography*, 42(9):1475–1485.
- Crone, T. & Tolstoy, M. (2010). Magnitude of the 2010 Gulf of Mexico oil leak. *Science*, 330(6004):634–634.

- Cummins, P. F. (1992). Inertial gyres in decaying and forced geostrophic turbulence. *Journal of marine research*, 50(4):545–566.
- Di Nitto, G., Espa, S., & Cenedese, A. (2013). Zonal jets in rotating shallow water turbulence. *Earth Sciences*, 2:23–30.
- Dong, S., Garzoli, S., & Baringer, M. (2011). The role of interocean exchanges on decadal variations of the meridional heat transport in the South Atlantic. *Journal of Physical Oceanography*, 41(8):1498–1511.
- Doron, N. (1990). Modons and monopoles on a γ -plane. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 52(1-3):71–87.
- d'Ovidio, F., Fernández, V., Hernández-García, E., & López, C. (2004). Mixing structures in the Mediterranean Sea from finite-size Lyapunov exponents. *Geophysical Research Letters*, 31(17).
- Eby, M. & Holloway, G. (1994). Grid transformation for incorporating the Arctic in a global ocean model. *Climate Dynamics*, 10(4):241–247.
- Espa, S., Lacorata, G., & Di Nitto, G. (2014). Anisotropic lagrangian dispersion in rotating flows with a β effect. *Journal of Physical Oceanography*, 44(2):632–643.
- Flores Ramírez, L. & Zavala Sansón, L. (2019). Two-dimensional turbulence dispersion in a closed domain: Influence of confinement and geometry. *AIP Advances*, 9(3):035302.
- Galperin, B., Nakano, H., Huang, H.-P., & Sukoriansky, S. (2004). The ubiquitous zonal jets in the atmospheres of giant planets and Earth's oceans. *Geophysical Research Letters*, 31(13).
- Galperin, B., Sukoriansky, S., & Dikovskaya, N. (2008). Zonostrophic turbulence. *Physica Scripta*, 2008(T132):014034.
- Galperin, B., Young, R. M., Sukoriansky, S., Dikovskaya, N., Read, P. L., Lancaster, A. J., & Armstrong, D. (2014). Cassini observations reveal a regime of zonostrophic macroturbulence on Jupiter. *Icarus*, 229:295–320.
- Golubeva, E. N. & Platov, G. A. (2007). On improving the simulation of atlantic water circulation in the arctic ocean. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 112(C4).
- Haza, A. C., Poje, A. C., Özgökmen, T. M., & Martin, P. (2008). Relative dispersion from a high-resolution coastal model of the Adriatic Sea. *Ocean Modelling*, 22(1):48–65.
- Heisler, J., Glibert, P. M., Burkholder, J. M., Anderson, D. M., Cochlan, W., Dennison, W. C., Dortch, Q., Gobler, C. J., Heil, C. A., Humphries, E., et al. (2008). Eutrophication and harmful algal blooms: a scientific consensus. *Harmful algae*, 8(1):3–13.
- Herring, J. R. (1977). On the statistical theory of two-dimensional topographic turbulence. *Journal of Atmospheric Sciences*, 34(11):1731–1750.
- Holland, W. R. (1967). On the wind-driven circulation in an ocean with bottom topography. *Tellus*, 19(4):582–600.
- Holloway, G. (1992). Representing topographic stress for large-scale ocean models. *Journal of Physical Oceanography*, 22(9):1033–1046.
- Holloway, G. (1996). Neptune effect: Statistical mechanical forcing of ocean circulation. In Adler, R. J., Müller, P., & Rozovskii, B. L., editors, *Stochastic Modelling in Physical Oceanography*, (pp.207–219). Birkhäuser, Boston, Massachusetts.

- Holton, J. R. & Hakim, G. J. (2013). Quasi-geostrophic analysis. In Holton, J. R. & Hakim, G. J., editors, *An Introduction to Dynamic Meteorology*, (pp.171–211). Academic Press, Boston, Massachusetts, fifth edition ed.
- Huntley, H. S., Lipphardt Jr, B., & Kirwan Jr, A. (2019). Anisotropy and inhomogeneity in drifter dispersion. *J. Geophys. Res. Oc.*, 124(12):8667–8682.
- Karrasch, D. & Haller, G. (2013). Do finite-size Lyapunov exponents detect coherent structures? *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 23(4):043126.
- Kolmogorov, A. N. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *USSR Academy of Sciences*, 30:301–305.
- Kontogiannis, G. & Bakas, N. A. (2020). A Geometric Interpretation of Zonostrophic Instability. *Journal of Physical Oceanography*, 50(9):2759 – 2779.
- Kraichnan, R. H. (1967). Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *The Physics of Fluids*, 10(7):1417–1423.
- Kramer, W., van Buren, M., Clercx, H., & van Heijst, G. (2006). β -plane turbulence in a basin with no-slip boundaries. *Physics of Fluids*, 18(2):026603.
- LaCasce, J. (2002). On turbulence and normal modes in a basin. *Journal of marine research*, 60(3):431–460.
- LaCasce, J. (2008). Statistics from Lagrangian observations. *Progress in Oceanography*, 77(1):1–29.
- LaCasce, J. (2010). Relative displacement probability distribution functions from balloons and drifters. *Journal of Marine Research*, 68(3-4):433–457.
- LaCasce, J. & Meunier, T. (2022). Relative dispersion with finite inertial ranges. *J. Fluid Mech.*, 932:A39.
- Lacorata, G., Aurell, E., & Vulpiani, A. (2001). Drifter dispersion in the Adriatic Sea: Lagrangian data and chaotic model. *Annales Geophysicae*, 19(1):121–129.
- Lacorata, G. & Espa, S. (2012). On the influence of a β -effect on Lagrangian diffusion. *Geophysical Research Letters*, 39(11).
- Lemasquerier, D., Favier, B., & Le Bars, M. (2021). Zonal jets at the laboratory scale: hysteresis and Rossby waves resonance. *Journal of Fluid Mechanics*, 910:A18.
- Lilly, D. K. (1969). Numerical simulation of two-dimensional turbulence. *The Physics of Fluids*, 12(12):II–240–II–249.
- Maassen, S. R., Clercx, H. J. H., & van Heijst, G. J. F. (2002). Self-organization of quasi-two-dimensional turbulence in stratified fluids in square and circular containers. *Physics of Fluids*, 14(7):2150–2169.
- Maltrud, M. & Holloway, G. (2008). Implementing biharmonic neptune in a global eddying ocean model. *Ocean Modelling*, 21(1):22–34.
- Maltrud, M. E. & Vallis, G. K. (1991). Energy spectra and coherent structures in forced two-dimensional and beta-plane turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 228:321–342.
- Marinone, S. G. (1998). Effect of the topographic stress on the tide- and wind-induced residual currents in the Gulf of California. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 103(C9):18437–18446.

- Maximenko, N. A., Bang, B., & Sasaki, H. (2005). Observational evidence of alternating zonal jets in the world ocean. *Geophysical Research Letters*, 32(12).
- Meyerjürgens, J., Ricker, M., Schakau, V., Badewien, T. H., & Stanev, E. V. (2020). Relative Dispersion of Surface Drifters in the North Sea: The Effect of Tides on Mesoscale Diffusivity. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 125(8):e2019JC015925.
- Nadiga, B. T. (2006). On zonal jets in oceans. *Geophysical Research Letters*, 33(10).
- Nakano, H. & Hasumi, H. (2005). A series of zonal jets embedded in the broad zonal flows in the Pacific obtained in eddy-permitting ocean general circulation models. *Journal of Physical Oceanography*, 35(4):474–488.
- Nam, K., Ott, E., Antonsen, T. M., & Guzdar, P. N. (2000). Lagrangian chaos and the effect of drag on the enstrophy cascade in two-dimensional turbulence. *Physical Review Letters*, 84:5134–5137.
- Ohlmann, J., Romero, L., Pallàs-Sanz, E., & Perez-Brunius, P. (2019). Anisotropy in coastal ocean relative dispersion observations. *Geophysical Research Letters*, 46(2):879–888.
- O'Reilly, C. H., Czaja, A., & LaCasce, J. H. (2012). The emergence of zonal ocean jets under large-scale stochastic wind forcing. *Geophysical Research Letters*, 39(11).
- Orlandi, P. & van Heijst, G. F. (1992). Numerical simulation of tripolar vortices in 2D flow. *Fluid Dynamics Research*, 9(4):179–206.
- Pedlosky, J. (2003). *Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics*. 260.
- Rhines, P. B. (1975). Waves and turbulence on a beta-plane. *Journal of Fluid Mechanics*, 69(3):417–443.
- Rhines, P. B. (1979). Geostrophic turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 11:401–441.
- Richards, K., Maximenko, N., Bryan, F., & Sasaki, H. (2006). Zonal jets in the Pacific ocean. *Geophysical Research Letters*, 33(3).
- Richardson, L. F. (1922). *Weather prediction by numerical process*. Cambridge university press.
- Rivera, M. K. & Ecke, R. E. (2016). Lagrangian statistics in weakly forced two-dimensional turbulence. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 26(1):013103.
- Röbber, T., Stein, O., Heng, Y., Baumeister, P., & Hoffmann, L. (2018). Trajectory errors of different numerical integration schemes diagnosed with the mptrac advection module driven by ECMWF operational analyses. *Geosci. MOd. Develop.*, 11(2):575–592.
- Salazar, J. P. & Collins, L. R. (2009). Two-particle dispersion in isotropic turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 41(1):405–432.
- Scott, R. K. & Dritschel, D. G. (2012). The structure of zonal jets in geostrophic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 711:576–598.
- Siegel, D., Kinlan, B., Gaylord, B., & Gaines, S. (2003). Lagrangian descriptions of marine larval dispersion. *Marine Ecology Progress Series*, 260:83–96.
- Smith, K. S., Boccaletti, G., Henning, C. C., Marinov, I., Tam, C. Y., Held, I. M., & Vallis, G. K. (2002). Turbulent diffusion in the geostrophic inverse cascade. *Journal of Fluid Mechanics*, 469:13–48.
- Sukoriansky, S., Dikovskaya, N., & Galperin, B. (2007). On the arrest of inverse energy cascade and the Rhines scale. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 64(9):3312–3327.

- Tabeling, P. (2002). Two-dimensional turbulence: a physicist approach. *Physics Reports*, 362(1):1–62.
- Thompson, L. (1995). The effect of continental rises on the wind-driven ocean circulation. *Journal of physical oceanography*, 25(6):1296–1316.
- Vallis, G. K. & Maltrud, M. E. (1993). Generation of mean flows and jets on a beta plane and over topography. *Journal of Physical Oceanography*, 23(7):1346–1362.
- van Heijst, G. J. F., Clercx, H. J., & Molenaar, D. (2006). The effects of solid boundaries on confined two-dimensional turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 554:411–431.
- van Sebille, E., Aliani, S., Law, K. L., Maximenko, N., Alsina, J. M., Bagaev, A., Bergmann, M., Chapron, B., Chubarenko, I., Cózar, A., Delandmeter, P., Egger, M., Fox-Kemper, B., Garaba, S. P., Goddijn-Murphy, L., Hardesty, B. D., Hoffman, M. J., Isobe, A., Jongedijk, C. E., Kaandorp, M. L. A., Khatmullina, L., Koelmans, A. A., Kukulka, T., Laufkötter, C., Lebreton, L., Lobelle, D., Maes, C., Martinez-Vicente, V., Maqueda, M. A. M., Poulain-Zarcos, M., Rodríguez, E., Ryan, P. G., Shanks, A. L., Shim, W. J., Suaria, G., Thiel, M., van den Bremer, T. S., & Wichmann, D. (2020). The physical oceanography of the transport of floating marine debris. *Environmental Research Letters*, 15(2):023003.
- Wang, S., Shen, Y., & Zheng, Y. (2005). Two-dimensional numerical simulation for transport and fate of oil spills in seas. *Ocean Engineering*, 32(13):1556–1571.
- Waterman, S. & Lilly, J. M. (2015). Geometric decomposition of eddy feedbacks in barotropic systems. *Journal of Physical Oceanography*, 45(4):1009 – 1024.
- Zavala Sansón, L. (2015). Surface dispersion in the Gulf of California. *Progress in Oceanography*, 137:24–37.
- Zavala Sansón, L. (2019). Nonlinear and time-dependent equivalent-barotropic flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 871:925–951.
- Zavala Sansón, L. (2022). Effects of mesoscale turbulence on the wind-driven circulation in a closed basin with topography. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 116(3):159–184.
- Zavala Sansón, L., Perez-Brunius, P., & Sheinbaum, J. (2017a). Point source dispersion of surface drifters in the southern Gulf of Mexico. *Environmental Research Letters*, 12(2):024006.
- Zavala Sansón, L., Pérez-Brunius, P., & Sheinbaum, J. (2017b). Surface relative dispersion in the southwestern Gulf of Mexico. *Journal of Physical Oceanography*, 47(2):387–403.
- Zavala Sansón, L. & van Heijst, G. (2000a). Interaction of Barotropic Vortices with Coastal Topography: Laboratory Experiments and Numerical Simulations. *Journal of Physical Oceanography*, 30(9):2141 – 2162.
- Zavala Sansón, L. & van Heijst, G. (2000b). Nonlinear Ekman effects in rotating barotropic flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 412:75–91.
- Zavala Sansón, L. & van Heijst, G. (2002). Ekman effects in a rotating flow over bottom topography. *Journal of Fluid Mechanics*, 471:239–255.
- Zavala Sansón, L. & van Heijst, G. (2014). Laboratory experiments on flows over bottom topography. In Von Larcher, T. G. & Williams, P. D., editors, *Modelling Atmospheric and Oceanic flows: insights from laboratory experiments and numerical simulations*, (pp.139–158). American Geophysical Union, Hoboken, New Jersey.