

TESIS DEFENDIDA POR

José Luis López Martínez

Y aprobada por el siguiente comité:

Dr. Vitaly Kober

Director del Comité

Dr. Andrey Chernykh

Miembro del Comité

Dr. Hugo Homero Hidalgo Silva

Miembro del Comité

Dr. Arturo Espinosa Romero

Miembro del Comité

Dr. Hugo Homero Hidalgo Silva

*Coordinador del Programa de Posgrado
en Ciencias de la Computación*

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

*Director de Estudios
de Posgrado*

9 de noviembre de 2011

CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA



PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

**Métodos ciegos adaptativos para restauración de
imágenes utilizando microescaneo**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta:

José Luis López Martínez

Ensenada, Baja California, México, noviembre de 2011.

RESUMEN de la tesis que presenta **José Luis López Martínez**, como requisito parcial para obtener el grado de DOCTOR EN CIENCIAS en CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN. Ensenada, Baja California. noviembre de 2011.

Métodos ciegos adaptativos para restauración de imágenes utilizando microescaneo

Resumen aprobado por:

Dr. Vitaly Kober
Director de Tesis

La restauración de imágenes es un tema importante en el procesamiento de imágenes. Sus técnicas recuperan imágenes degradadas debido a imperfecciones en el proceso de captura. Comúnmente los métodos de restauración de imágenes utilizan una sola imagen observada para su procesamiento. En este trabajo, se proponen nuevos métodos para restauración utilizando varias imágenes degradadas obtenidas utilizando un sistema de microescaneo de imágenes y sin conocer la función de interferencia que provoca la degradación. El microescaneo es una técnica para adquirir en tiempo-secuencia imágenes de la misma escena con un ligero desplazamiento entre la escena y la cámara. Estas técnicas pueden ser usadas para restauración de imágenes si la imagen original y la interferencia son espacialmente desplazadas durante el proceso de microescaneo. El microescaneo puede ser implementado con un movimiento controlado de un arreglo de sensores que realiza la captura de imágenes o con un movimiento controlado de una fuente de luz, por ejemplo en el caso de una degradación por iluminación no uniforme. Se asume que las imágenes observadas están formadas por una imagen original degradada por interferencias aditivas o multiplicativas. Además, las imágenes están dañadas con ruido aditivo de sensor. Utilizando el conjunto de las imágenes observadas, la restauración de imágenes se lleva a cabo resolviendo un sistema de ecuaciones que se deriva de la optimización de una función objetivo. Con el fin de lograr restauración en tiempo real, fueron desarrollados algoritmos rápidos.

Los métodos y algoritmos propuestos, son analizados en cuanto a exactitud en la restauración para diferentes tipos de interferencia (aditivo, multiplicativo e impulsivo), tiempo de ejecución, y tolerancia a pequeños errores de posicionamiento en los elementos de un sensor. Simulación por computadora y resultados experimentales son proporcionados y comparados con técnicas de restauración comunes.

Palabras clave: Restauración de imágenes, procesamiento de imágenes, microescaneo.

ABSTRACT of the thesis presented by **José Luis López Martínez**, as a partial requirement to obtain the DOCTOR IN SCIENCES degree in COMPUTER SCIENCE. Ensenada, Baja California. november 2011.

Blind adaptive methods for image restoration using microscanning

Image restoration is an important subject in image processing. Its techniques recover images degraded due to imperfections in capturing process. Commonly image restoration methods use a single observed image for the processing. In this work, new methods for image restoration using several degraded images obtained with a microscanning imaging system and without knowing the interference function are proposed. Microscanning is a technique to acquire time-sequential images of the same scene with a slight shifting between the scene and camera. This technique may be used for image restoration if the original image and interference are spatially displaced during the microscanning process. Microscanning can be implemented either with a controlled movement of a sensor array that captures images or with a controlled motion of a light source, for example, in the case of nonuniform illumination. It is assumed that the observed images contain the original image degraded either by additive or by multiplicative interferences. Additionally, the images are corrupted with additive sensor noise. Using the set of observed images, image restoration is carried out by solving a system of equations that is derived from optimization of an objective function. In order to achieve real-time restoration fast algorithms were developed.

The proposed methods and algorithms are analyzed in terms of restoration accuracy for different kinds of interferences (additive, multiplicative and impulsive), execution time, and tolerance to small position errors of sensor elements. Computer simulation and experimental results are provided and compared with those of common restoration techniques.

Keywords: Image restoration, image processing, microscanning.

Dedicatoria

A mi esposa y a mis dos hijas.

Las quiero mucho.

Agradecimientos

A Dios, por permitirme llegar a este momento en mi vida.

A mi Familia, por su amor y apoyo incondicional.

A mi asesor, Dr. Vitaly Kober, por el apoyo mostrado a lo largo de mi estancia en el CICESE.

A los miembros de mi comité, por sus revisiones, comentarios y ayuda para lograr que el presente trabajo refleje mi mejor esfuerzo.

A la Universidad Autónoma de Yucatán por todo su apoyo.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de la ciudad de Ensenada, Baja California.

Al Programa de Mejoramiento al Profesorado (PROMEP), por el apoyo económico brindado durante dos años.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico brindado durante un año.

Contenido

	Página
Resumen en Español	ii
Resumen en Inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Contenido	vi
Lista de Figuras	viii
Lista de Tablas	xi
I. Introducción	1
I.1. Antecedentes y motivación	1
I.2. Marco teórico	2
I.3. Planteamiento del problema	4
I.4. Objetivo de la tesis	5
I.4.1. Objetivo General	5
I.4.2. Objetivo Específicos	5
I.5. Metodología de la investigación	5
I.6. Organización de la tesis	6
II. Fundamentos matemáticos	8
II.1. Introducción	8
II.2. Imagen digital	8
II.3. Método de mínimos cuadrados	9
II.4. Sistemas lineales e invariantes al desplazamiento	11
II.5. Caracterización estocástica de imágenes	13
II.5.1. Definiciones	14
II.5.2. Distribución normal o Gaussiana	15
II.5.3. Generación sintética de ruido con distribución gaussiana	16
II.6. Método del gradiente conjugado	19
II.7. Resumen	22
III. Modelos de degradación y de restauración de imágenes	23
III.1. Introducción	23
III.2. Modelos de degradación de imágenes	23
III.2.1. Modelo de degradación por emborronamiento	24
III.2.2. Modelos de degradación por ruido	25
III.2.3. Modelo de degradación lineal	32
III.2.4. Modelo de degradación aditiva	34
III.2.5. Modelo de degradación multiplicativa	37

Tabla de Contenido (Continuación)

Capítulo	Página
III.3. Métodos de restauración de imágenes	39
III.3.1. Métodos de restauración para el modelo de degradación lineal . . .	39
III.3.2. Métodos de restauración para el modelo de degradación aditiva . .	46
III.3.3. Métodos de restauración para el modelo de degradación multiplicativa	47
III.4. Métrica de restauración	49
III.5. Resumen	50
IV. Microscaneo	51
IV.1. Introducción	51
IV.2. Microscaneo propuesto	52
IV.3. Dispositivos físicos	53
IV.4. Resumen	55
V. Métodos de restauración utilizando microscaneo	56
V.1. Método de restauración para el modelo de degradación aditiva	56
V.1.1. Método con ruido aditivo	57
V.1.2. Método con ruido impulsivo	67
V.1.3. Método para un conjunto de píxeles dañados	75
V.2. Método de restauración para el modelo de degradación multiplicativa . .	80
V.2.1. Método con ruido aditivo	80
V.3. Algoritmo rápido de restauración utilizando microscaneo	85
V.4. Resumen	89
VI. Resultados experimentales y análisis de resultados	91
VI.1. Interferencia aditiva no uniforme	92
VI.2. Interferencia multiplicativa no uniforme	96
VI.3. Errores al realizar microscaneo	111
VI.4. Interferencia aditiva con ruido impulsivo	112
VI.5. Interferencia multiplicativa con ruido impulsivo	117
VI.6. Experimento real	123
VI.7. Resumen	127
VII. Conclusiones	128
VII.1. Aportaciones	129
VII.2. Trabajo futuro	130
VII.3. Publicaciones derivadas de este trabajo	130
Bibliografía	132

Lista de Figuras

Figura	Página
1. Imagen degradada por ruido aditivo blanco Gaussiano	28
2. Imagen afectada con ruido impulsivo con $p = 0.07$	30
3. Modelo de degradación lineal con un emborronamiento por movimiento . .	32
4. Modelo de degradación lineal con un emborronamiento por desenfoque . .	33
5. Modelo de degradación lineal con un emborronamiento por turbulencia at- mosférica	33
6. El modelo de degradación aditiva con ruido aditivo (eq. (76)) en imágenes .	35
7. Imagen afectada con el modelo de degradación aditiva con ruido aditivo e impulsivo	36
8. El modelo de degradación multiplicativa (eq. (78)) en imágenes	38
9. Imagen afectada con el modelo de degradación multiplicativa con ruido adi- tivo e impulsivo	39
10. Restauración de imágenes utilizando el filtro pseudoinverso	43
11. Restauración de imágenes utilizando el filtro Wiener	45
12. Imagen restaurada por el filtro de Wiener suavizado	47
13. Imagen restaurada por el filtro homomórfico de Wiener suavizado	49
14. Esquema del microescaneo utilizado por Shi <i>et al.</i> (2006)	51
15. Esquema del microescaneo utilizado en este trabajo	52
16. Actuador piezoeléctrico miniatura (OEM P-653)	54
17. Regiones de información de ruido que abarca F^α en la imagen	62
18. Regiones de información de ruido que abarca F^β en la imagen.	66
19. Elementos que contribuyen a la estimación del pixel $\tilde{f}(k_0, l_0)$, utilizando tres imágenes obtenidas por microescaneo.	71
20. Elementos que contribuyen a la estimación del pixel $\tilde{f}(k_0, l_0)$, utilizando cin- co imágenes obtenidas por microescaneo.	75
21. Distribución de los pixeles dañados, formando un conglomerado.	77
22. Elementos que contribuyen a la estimación del pixel $\tilde{f}(k_0, l_0)$, utilizando mi- croescaneo de 3 imágenes.	78
23. Elementos que contribuyen a la estimación del pixel $\tilde{f}(k_0, l_0)$, utilizando mi- croescaneo de 5 imágenes.	80
24. Descomposición de una imagen en cuatro pequeñas imágenes, utilizando el método rápido.	85
25. Descomposición de una señal en cuatro pequeñas señales, utilizando el méto- do basado en distribuciones.	86
26. Diagrama de bloques del algoritmo rápido basado en pirámides.	89
27. El modelo de degradación aditiva con ruido aditivo en imágenes	93
28. Desempeño del método propuesto para degradación aditiva	94
29. Desempeño del método propuesto para degradación aditiva : RMSE vs. des- viación estandar del ruido blanco	95

Lista de Figuras (Continuación)

Figura	Página
30. Desempeño del algoritmo rápido para degradación aditiva : RMSE como una función del nivel piramidal	96
31. Resultados de restauración para el modelo aditivo, utilizando cinco imágenes con diferentes niveles d de la pirámide.	97
32. Geometría del modelo de iluminación	99
33. Imagen original	99
34. Restauración de iluminación no uniforme, con sombreado del 90 % y ruido aditivo Gaussiano con $\sigma = 1$, utilizando los métodos propuestos	101
35. Restauración de iluminación no uniforme, con sombreado del 77 % y ruido aditivo Gaussiano con $\sigma = 1$, utilizando los métodos propuestos	102
36. Restauración de iluminación no uniforme, con sombreado del 65 % y ruido aditivo Gaussiano con $\sigma = 1$, utilizando los métodos propuestos	103
37. Restauración de iluminación no uniforme, con sombreado del 55 % y ruido aditivo Gaussiano con $\sigma = 1$, utilizando los métodos propuestos	104
38. Restauración de iluminación no uniforme, con sombreado del 45 % y ruido aditivo Gaussiano con $\sigma = 1$, utilizando los métodos propuestos	105
39. Desempeño del método propuesto para degradación multiplicativa cuando el sombreado es 90 %: RMSE vs. desviación estandar del ruido blanco	106
40. Desempeño del método propuesto para degradación multiplicativa cuando el sombreado es 77 %: RMSE vs. desviación estandar del ruido blanco	106
41. Desempeño del método propuesto para degradación multiplicativa cuando el sombreado es 65 % : RMSE vs. desviación estandar del ruido blanco	107
42. Desempeño del método propuesto para degradación multiplicativa cuando el sombreado es 55 %: RMSE vs. desviación estandar del ruido blanco	107
43. Desempeño del método propuesto para degradación multiplicativa cuando el sombreado es 45 %: RMSE vs. desviación estandar del ruido blanco	108
44. Desempeño del algoritmo rápido para degradación multiplicativa : RMSE como una función del nivel piramidal	109
45. Resultados de restauración para el modelo multiplicativo, utilizando cinco imágenes con diferentes niveles d de la pirámide.	110
46. Rendimiento del método de restauración para degradaciones aditivas con error de desplazamiento en las localidades de los sensores	111
47. Rendimiento del método de restauración para degradaciones multiplicativas con error de desplazamiento en las localidades de los sensores	112
48. Desempeño del método propuesto para degradación aditiva con ruido aditivo con media cero y desviación estándar de 2, en presencia de errores de posicionamiento en el microescaneo.	113
49. Modelo de degradación aditiva con ruido impulsivo y aditivo en imágenes .	114

Lista de Figuras (Continuación)

Figura	Página
51. Desempeño del método de restauración para degradaciones aditivas: RMSE <i>vs.</i> probabilidad de ruido impulsivo con una desviación estándar de ruido blanco de 5	114
50. Desempeño del método propuesto para degradación aditiva con ruido impulsivo con probabilidad de ocurrencia de 0.07 y ruido aditivo con media cero y desviación estándar de 5.	115
52. Desempeño del método de restauración para degradaciones aditivas: RMSE <i>vs.</i> desviación estándar del ruido blanco con ruido impulsivo con probabilidad de ocurrencia de 0.07	116
53. Desempeño del método propuesto para degradación aditiva con ruido impulsivo con probabilidad de ocurrencia de 0.07, ruido aditivo con media cero y desviación estándar de 5, con un conjunto de 100 píxeles dañados.	118
54. Modelo de degradación multiplicativa con ruido impulsivo y aditivo en imágenes	119
55. Desempeño del método propuesto para degradación aditiva con ruido impulsivo con probabilidad de ocurrencia de 0.05 y ruido aditivo con media cero y desviación estándar de 0.5.	120
56. Desempeño del método de restauración para degradaciones multiplicativas: RMSE <i>vs.</i> probabilidad de ruido impulsivo con una desviación estándar fija de ruido blanco de 0.5	121
57. Desempeño del método de restauración para degradaciones multiplicativas: RMSE <i>vs.</i> desviación estándar del ruido blanco con ruido impulsivo con probabilidad de ocurrencia de 0.01	121
58. Desempeño del método propuesto para degradación multiplicativa con ruido aditivo con media cero y desviación estándar de 0.5, con un conjunto de 100 píxeles dañados, utilizando cinco imágenes observadas	122
59. Elementos que intervienen en el experimento real para degradación multiplicativa	123
60. Experimentos reales con imágenes con degradación multiplicativa	124
61. Experimentos reales con imágenes con degradación multiplicativa	125
62. Experimentos reales con imágenes con degradación multiplicativa	126

Lista de Tablas

Tabla	Página
I. Rendimiento en términos del tiempo de ejecución (en segundos) para el algoritmo rápido para degradación aditiva usando 3 y 5 imágenes	98
II. Valores de la función de iluminación	98
III. Rendimiento en términos del tiempo de ejecución (en segundos) para el algoritmo rápido para degradación multiplicativa usando 3 y 5 imágenes . . .	109

Capítulo I

Introducción

I.1. Antecedentes y motivación

La restauración de imágenes es un importante tema en el área de procesamiento de imágenes, debido a que sus técnicas son útiles para recuperar imágenes que han sido degradadas debido a imperfecciones en el proceso de captura (Bovik, 2005). Existe un amplio rango de degradaciones tales como difuminación (desenfoque de la cámara, movimiento en el proceso de captura), iluminación no uniforme, ambientes nublados (niebla, nubes, humo), ruidos (ruido blanco, ruido impulsivo, etc.), hasta elementos dañados en los sistemas de adquisición de imágenes (Gonzalez y Woods, 2008, Jain, 1989, Narasimhan y Nayar, 2002, Hautiere y Aubert, 2005, Narasimhan y Nayar, 2003). Las técnicas clásicas de restauración se orientan hacia la introducción de modelos de degradación, que luego se aplican en sentido inverso para recuperar la imagen original.

Los métodos de restauración se basan en la mayoría de los casos en algún conocimiento *a priori* del proceso de degradación, utilizando generalmente un modelo de degradación, adicionalmente utilizan una sola escena observada para llevar a cabo la restauración (Uma y Annadurai, 2005). Sin embargo en la actualidad, existen diversas técnicas para aproximar los parámetros del modelo de degradación, inclusive existen algunas para restaurar con un mínimo de conocimiento *a priori* del proceso de degradación (Campisi y Egiazarian, 2007). También existen métodos de restauración que son basados en un desconocimiento de la función de degradación conocidos como métodos ciegos (Jain, 1989) . A pesar de existir un gran número de algoritmos, el proceso de restauración es todavía un problema abierto debido a la variedad de degradaciones que existen en nuestro mundo.

Recientemente, fueron propuestos métodos de restauración ciegos, para diferentes tipos de modelos de degradación usando imágenes capturadas por un sistema de adquisición de imágenes conocida como microescaneo (López-Martínez y Kober, 2008; 2009; 2010, López-Martínez *et al.*, 2010). El microescaneo es una técnica para adquirir imágenes de la misma escena con un ligero desplazamiento entre la escena y el sistema de captura (cámara). En este trabajo de tesis, se presentan métodos ciegos adaptativos para restaurar imágenes utilizando la técnica del microescaneo de cámara, para imágenes con interferencias aditivas no uniformes e interferencias multiplicativas no uniformes con ruido aditivo provocado por el sensor de cámara y ruido impulsivo provocado por algún daño en el dispositivo de captura. La información para la restauración es obtenida a partir del mismo conjunto de imágenes observadas. De igual manera, se proponen algoritmos rápidos cuya calidad de restauración se aproxime a los resultados obtenidos por el algoritmo de restauración global.

I.2. Marco teórico

El tema de investigación a realizar tiene como base de conocimiento la teoría del procesamiento digital de imágenes (PDI) especialmente en el área de restauración de imágenes, análisis de matrices, aplicaciones de álgebra lineal y técnicas de optimización matemática. Es necesario tener conocimiento de cómo se conforman los modelos de degradación de imágenes, sin olvidar la teoría que existe detrás de las diversas técnicas de restauración. Asimismo, se necesita conocer la teoría del microescaneo para poder realizar la implementación de los nuevos métodos. Sin olvidar que los métodos adaptativos para el proceso de restauración de una imagen, se refieren a que dichos métodos utilizan información disponible de los datos observados. A continuación se realiza una breve descripción de la teoría más relevante en el área del trabajo de investigación.

La restauración de imágenes es uno de los temas más apasionante dentro del área del *PDI*, debido a que posee una serie de características que lo hacen muy interesante, tales

como la cantidad de degradaciones que existen en la naturaleza, sus aplicaciones en la vida real, es matemáticamente estimulante dado que es considerado un problema inverso y mal planteado (en inglés, ill-posed problem) contrario a un problema bien planteado (en inglés, well-posed problem) que cumple con la unicidad, existencia y continuidad en los datos, todo lo anterior en el sentido mencionado por Jacques Hadamard (Bertero y Boccacci, 2002). Así, que un problema mal planteado es aquel cuya solución no es única o no existe para datos arbitrarios o no depende de manera continua de los datos. El problema de restauración no es posible de resolver de manera exacta, pero podemos aproximarnos a la solución a partir de alguna información adicional (información *a priori*). Debido a lo anterior, es necesario realizar *métodos de regularización* desarrollados para aproximarnos a la solución. De forma general, estas métodos se pueden clasificar en (Bertero y Boccacci, 2002):

1. **Métodos de regularización** Estos métodos consisten en considerar una familia de soluciones aproximadas que dependen de un parámetro positivo llamado *parámetro de regularización*. Su principal propiedad es que la familia de funciones converge a la solución exacta en los casos en que el ruido es nulo y el parámetro de regularización tiende a cero. En el caso de datos ruidosos se puede obtener una aproximación optimal de la solución exacta para un parámetro de regularización diferente de cero. En esta categoría se encuentran algunos métodos tales como: mínimos cuadrados acotados con un nivel de energía, soluciones aproximadas con energía mínima, algoritmos en el sentido de Tikhonov.
2. **Métodos iterativos de regularización** Estos métodos se caracterizan, porque el parámetro de regularización es el número de iteraciones debido a que la semi-convergencia sigue siendo valida para imágenes con ruido. En esta categoría se encuentran algunos métodos tales como: Van Citter y Landweber, Landweber proyectado, método del gradiente conjugado.

3. **Métodos estadísticos** La característica básica de estos métodos es que toman en cuenta la naturaleza aleatoria del ruido, lo que conlleva que la imagen capturada es la realización de un proceso aleatorio. En este método es posible diferenciar dos enfoques, el primero consiste en asumir que el objeto es determinístico, es decir, representa un conjunto de parámetros que caracterizan la distribución de probabilidad de la imagen. Por lo que los métodos de estimación de parámetros, tales como el método de máxima verosimilitud puede ser usado para deconvolución de imágenes. El segundo enfoque, el objeto es asumido como una realización de un proceso aleatorio con una distribución de probabilidad dada, lo cual asume, como una forma de información *a priori*. En esta categoría se encuentran algunos métodos tales como: métodos Bayesianos, filtro Wiener, métodos de máxima verosimilitud.

En el presente trabajo de investigación, se proponen métodos de restauración basados en un conjunto de imágenes degradadas obtenidas mediante microescaneo de cámara. Utilizando esas imágenes y un modelo matemático de degradación, un sistema de ecuaciones lineales son obtenidas; resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con la ayuda de un algoritmo iterativo y de cierta información estadística *a priori* de la imagen a restaurar, se obtiene la imagen restaurada. Por lo cual se puede clasificar como un método de regularización iterativo-estadístico.

I.3. Planteamiento del problema

El proceso de restauración de una imagen digital degradada por interferencias aditiva o multiplicativa con ruido impulsivo y aditivo consiste en estimar una función que se aproxime a la imagen real (sin degradación) a partir de la imagen observada. La mayoría de los trabajos de restauración de imágenes se limitan a utilizar una sola imagen observada para realizar el proceso mencionado, orientándose en la mayoría de los casos a modelar la función de degradación, haciendo que esos métodos dependan de dicha información.

En este trabajo, se abordará el modelo de degradación aditiva con ruido (aditivo e impulsivo) y el modelo de degradación multiplicativa con ruido (aditivo e impulsivo). Debido a que estos modelos se encuentran de manera física en la realidad, como se menciona con anterioridad. Se pretende desarrollar nuevos métodos de restauración ciegos adaptativos (en el sentido, de que no es necesario conocer las funciones de las interferencias aditivas o multiplicativas para realizar la restauración) utilizando la técnica del microescaneo.

I.4. Objetivo de la tesis

I.4.1. Objetivo General

Desarrollar nuevos métodos ciegos adaptativos, para restaurar imágenes degradadas por los modelos aditivo y multiplicativo con ruido impulsivo, utilizando la metodología de microescaneo.

I.4.2. Objetivo Específicos

1. Estudiar los fundamentos teórico-matemáticos de técnicas de restauración para modelos de degradación.
2. Implementar métodos clásicos de restauración.
3. Estudiar la metodología del microescaneo.
4. Desarrollar nuevos métodos ciegos adaptativos e iterativos para la restauración de imágenes degradadas por los modelos aditivo y multiplicativo con ruido impulsivo, basados en la metodología del microescaneo.
5. Desarrollar algoritmos rápidos de restauración, cuyos resultados se aproximan a los métodos iterativos.
6. Realizar la simulación por computadora de los nuevos métodos.

7. Realizar experimentos utilizando imágenes reales con el modelo de degradación multiplicativo.

I.5. Metodología de la investigación

Para cumplir con los objetivos planteados se ha definido una metodología que consta de las siguientes etapas:

1. Revisión bibliográfica.
2. Estudio de técnicas clásicas de restauración.
3. Implementación de técnicas de restauración.
4. Revisión de la metodología del microescaneo.
5. Diseño de nuevos métodos ciegos adaptativos, iterativos para restaurar imágenes degradadas por los modelos de degradación aditivo, multiplicativo con ruido impulsivo utilizando la metodología del microescaneo.
6. Realización de algoritmos rápidos de restauración, cuyos resultados se aproximen a los obtenidos por los algoritmos iterativos.
7. Simulación por computadora de los nuevos métodos de restauración desarrollados.
8. Análisis de resultados. Los métodos propuestos serán sometidos a imágenes degradadas para medir la capacidad de aproximación a la imagen original.
9. Experimentación utilizando imágenes reales con el modelo de degradación multiplicativo.
10. Comparación de los métodos propuestos, con los métodos ya existentes para analizar sus ventajas y desventajas.

I.6. Organización de la tesis

La tesis se divide en siete capítulos organizados de la siguiente manera: En el capítulo II se presenta una breve introducción a los conceptos matemáticos que se utilizan en este trabajo. En el capítulo III, se exponen diversos modelos matemáticos de degradación que afectan una imagen, se revisan técnicas de restauración para los modelos de degradación presentados que nos interesan, así como también se mencionan métricas de restauración que se utilizarán para medir el desempeño de los algoritmos propuestos. El capítulo IV detalla la técnica del microescaneo de manera general, así como la descripción del microescaneo que se utilizó en el presente trabajo. Los métodos de restauración que se proponen para las degradaciones aditivas ó multiplicativas con ruido aditivo e impulsivo, son descritos en el V. Además, en el capítulo V, se presenta y analiza un algoritmo rápido de restauración. Los resultados experimentales y el análisis de resultados se encuentran en el VI. Finalmente, en el VII, se resumen las conclusiones del trabajo realizado.

Capítulo II

Fundamentos matemáticos

II.1. Introducción

En este capítulo se presenta una breve revisión de algunos conceptos matemáticos y fundamentos teóricos del procesamiento digital de imágenes utilizados en el transcurso de este trabajo.

II.2. Imagen digital

Una imagen se puede definir como una función bidimensional, $f(k, l)$, donde k y l son coordenadas espaciales, y la amplitud de f en cualquier par de coordenadas (k, l) es llamada la *intensidad* o *nivel de gris de la imagen*. Cuando k, l y la intensidad de los valores de f , son todos finitos y cantidades discretas, se le llama *imagen digital* (Gonzalez y Woods, 2008). Sin embargo, las señales e imágenes que son disponibles en el ambiente que nos rodea son de naturaleza *analoga*. Que la señal o imagen sea *analógica* significa dos cosas: de que la señal existe en un dominio continuo (espacio/tiempo) y que los valores que toman son continuos. Así, que es necesario un proceso de conversión analógica-digital (A/D). Una conversión A/D consiste de dos subprocesos distintos: el *muestreo* y la *cuantización* (Bovik, 2009). El muestreo es un proceso para digitalizar los valores de las coordenadas y la cuantización digitaliza los valores de la amplitud.

La representación de la función $f(k, l)$ es dada de la siguiente manera:

$$f(k, l) = \begin{bmatrix} f(1, 1) & f(1, 2) & \cdots & f(1, N) \\ f(2, 1) & f(2, 2) & \cdots & f(2, N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(M, 1) & f(M, 2) & \cdots & f(M, N) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

donde $M \times N$ es el tamaño en pixeles de la imagen. Cada elemento de esta matrix, es llamado un *elemento de la imagen, pixel, o pel*.

II.3. Método de mínimos cuadrados

En el método de mínimos cuadrados, se desea minimizar la discrepancia entre los datos estimados (observados) y los datos originales de la señal original. Sea $x[n]$ los datos observados con ruido provocado por daños en sensores y $s[n]$ la señal original determinada, la cual es generada por algún modelo. El modelo de la señal observada es de la siguiente manera:

$$x[n] = s[n] + e[n], n = 0, \dots, N - 1, \quad (2)$$

donde $e[n]$ representa el ruido y N es el número de observaciones realizadas. La señal $s[n]$ se genera por algún modelo el cual a su vez depende de un parámetro desconocido θ . El estimador de mínimos cuadrados (LSE¹) del parámetro θ , escoge los valores que mejor aproximen la señal $s[n]$ a los datos observados $x[n]$. El criterio de proximidad es medido por la función de discrepancia $J(\theta)$, definida como sigue

$$J(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - s[n])^2, \quad (3)$$

donde la dependencia de J en θ es vía $s[n]$. Así, que el valor del vector θ que minimiza la

¹LSE.-Least Squares Estimator

función $J(\theta)$ es el LSE. El rendimiento del LSE depende indudablemente de las propiedades del ruido que corrompe la señal. Por ejemplo, si el ruido es modelado como un ruido gaussiano blanco con media cero, entonces el LSE también será un estimador insesgado de mínima varianza (MVU²), es decir que la aproximación de LS encuentra el estimador óptimo (Kay, 1993).

Realicemos un cambio de notación para poder ejemplificar de manera más práctica y sencilla los conceptos que a continuación se mencionarán. Sea Θ un vector de parámetros con dimensión $p \times 1$ donde p es el número de parámetros de interés, entonces $\Theta = [\theta_1, \dots, \theta_p]$. Sea $s[n]$ equivalente en notación matricial a $\mathbf{s}(\Theta) = [s[0], \dots, s[N-1]]^T$, $e[n]$ a $\mathbf{e}(\Theta) = [e[0], \dots, e[N-1]]^T$ y $x[n]$ equivalente a $\mathbf{x} = [x[0], \dots, x[N-1]]^T$. La ecuación (3) queda de la siguiente manera:

$$J(\Theta) = \|\mathbf{x} - \mathbf{s}(\Theta)\|^2 = \|\mathbf{e}(\Theta)\|^2, \quad (4)$$

supongamos la existencia de una dependencia lineal de la señal con los parámetros que estimamos, es decir,

$$\mathbf{s}(\Theta) = \mathbf{H}\Theta, \quad (5)$$

donde \mathbf{H} es una matriz conocida de $N \times p$ con $N > p$ cuyo rango de la matrix \mathbf{H} denotado por $\rho(\mathbf{H})$ es p . Es decir, que los renglones de la matrix \mathbf{H} son linealmente independientes (Grossman, 1996). La matriz \mathbf{H} es referenciada como *la matriz de observación*. El LSE es encontrado minimizando

$$\begin{aligned} J(\Theta) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{s}(\Theta)\|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{H}\Theta)^T (\mathbf{x} - \mathbf{H}\Theta) \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{H}\Theta - \Theta^T \mathbf{H}^T \mathbf{x} + \Theta^T \mathbf{H}^T \mathbf{H}\Theta \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{H}\Theta + \Theta^T \mathbf{H}^T \mathbf{H}\Theta \end{aligned} \quad (6)$$

²MVU.-Minimum variance unbiased

realizando la derivada de la ecuación (6), (note que $\mathbf{x}^T \mathbf{H} \Theta$ es un escalar),

$$\frac{\partial J(\Theta)}{\partial \Theta} = -2\mathbf{H}^T \mathbf{x} + 2\mathbf{H}^T \mathbf{H} \Theta. \quad (7)$$

Asignando el gradiente igual a cero, obtenemos el LSE (mínimo global)

$$\hat{\Theta} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{x}. \quad (8)$$

La invertibilidad de $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ es garantizada por $\rho(\mathbf{H}) = p$. La matriz Hessiana definida como

$$\frac{\partial}{\partial \Theta^T} \left(\frac{\partial J(\Theta)}{\partial \Theta^T} \right)^T = 2\mathbf{H}^T \mathbf{H}, \quad (9)$$

es siempre definida positiva, lo cual, garantiza que la función de costo $J(\Theta)$ es estrictamente convexa y, por lo tanto, existe un único mínimo (Golub y Van Loan, 1996). Por lo que la señal estimada \hat{s} se obtiene de sustituir la ecuación (8) en la ecuación (5)

$$\hat{s} = \mathbf{H} \hat{\Theta} = \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{x}. \quad (10)$$

II.4. Sistemas lineales e invariantes al desplazamiento

Un gran número de sistemas para el procesamiento de imágenes puede ser modelado como sistemas lineales e invariantes espacialmente. Sea $x(m, n)$ y $y(m, n)$ una secuencia de entrada y salida respectivamente, de un sistema de dos dimensiones, la relación entre ambas, está dado por la siguiente ecuación

$$y(m, n) = \mathcal{H}[x(m, n)]. \quad (11)$$

Se dice que el sistema es lineal si y solo si para cualquier combinación de dos entradas $x_1(m, n)$ y $x_2(m, n)$ produce la misma combinación de sus respectivas salidas $y_1(m, n)$ y

$y_2(m, n)$, es decir que para cualquier par de constantes arbitrarias a_1 y a_2 se cumple

$$\mathcal{H}[a_1x_1(m, n) + a_2x_2(m, n)] = a_1y_1(m, n) + a_2y_2(m, n), \quad (12)$$

lo cual es llamado *propiedad de superposición* de los sistemas lineales. Se dice que un sistema \mathcal{H} es *invariante al desplazamiento* o *invariante espacialmente* si un desplazamiento de la entrada causa un desplazamiento en la salida, es decir que satisface la siguiente propiedad

$$y(m - m', n - n') = \mathcal{H}[x(m - m', n - n')], \quad (13)$$

lo que significa que la respuesta de un sistema \mathcal{H} en un punto cualquiera depende solamente del valor de entrada y no de su posición.

Cuando la entrada a un sistema \mathcal{H} , es la función delta de Kronecker bidimensional en la posición (m', n') , la salida en la posición (m, n) se define de la siguiente manera:

$$h(m, n; m', n') \triangleq \mathcal{H}[\delta(m - m', n - n')], \quad (14)$$

y es llamada *la respuesta al impulso del sistema \mathcal{H}* . En sistema ópticos, la respuesta al impulso es llamada la función de dispersión puntual (PSF³) ya que las entradas y salidas representan cantidades positivas (i.e. la intensidad de la luz).

La salida de cualquier sistema lineal puede ser obtenida de su respuesta al impulso como

$$y(m, n) = \sum_{m'} \sum_{n'} x(m', n')h(m, n, m', n'), \quad (15)$$

si la PSF $h(m, n; m', n') = h(m - m', n - n')$, es decir, invariante al desplazamiento, la salida de un sistema lineal e invariante al desplazamiento viene dado por

$$y(m, n) = \sum_{m'} \sum_{n'} x(m', n')h(m - m', n - n') = x(m, n) \bullet h(m, n), \quad (16)$$

donde la salida de un sistema lineal e invariante espacialmente se calcula a partir de la

³PSF-Point spread function

operación convolución (\bullet) de la entrada con la PSF. Una discreta PSF satisface la siguiente propiedad

$$\sum_m \sum_n h(m, n) = 1. \quad (17)$$

Existen diversos tipos de degradaciones que afectan a las imágenes, como pueden ser emborronamiento (*blur*), ruido, imperfecciones en la iluminación, etc. La función de degradación provocado por emborronamiento (desenfoque, movimiento, turbulencia atmosférica, etc) se puede modelar como la PSF del sistema de la ecuación (16).

II.5. Caracterización estocástica de imágenes

A menudo las imágenes están degradadas por interferencias impredecibles tales como ruido, iluminación no uniforme, etc. Debido a esta aleatoriedad, las imágenes discretas y sus interferencias, se pueden caracterizar por modelos estadísticos. En representaciones estocásticas, una imagen discreta es un campo aleatorio discreto y cada pixel de la imagen representa una variable aleatoria. Desde este punto de vista, un imagen dada es una muestra de una función de un conjunto de ensamble de imágenes. Dicho ensamble podría ser adecuadamente definido por una función de densidad de probabilidad conjunta formada por el arreglo de variables aleatorias (Jain, 1989). Para casos prácticos, la cantidad de variables aleatorias puede ser muy grande (i.e. 262,144 variables aleatorias para una imagen de 512×512), por lo que es seria muy difícil de especificar de manera real una función de densidad conjunta. Una opción viable es especificar el ensamble de imágenes a través de su primer y segundo momento (media y covarianza).

Un proceso estacionario se dice que es ergódico si el promedio espacial es igual al promedio del ensamble. Este concepto es importante por que en la vida real no es posible contar con la colección completa de todos los resultados posibles del proceso. Debido a lo anterior, si el proceso es ergódico, es posible calcular la media y la covarianza del proceso estacionario a partir de una sola muestra (Pratt, 2007). En esta sección se consideran

algunos conceptos que servirán para modelar las imágenes estadísticamente.

II.5.1. Definiciones

Sea $u(m, n)$ una imagen aleatoria discreta, es decir, un campo aleatorio que representa un ensamble de imágenes. Se definen los siguientes conceptos

$$\text{Media} \triangleq \mu(m, n) = E\{u(m, n)\}, \quad (18)$$

$$\text{Varianza} \triangleq \sigma^2(m, n) = E\{|u(m, n) - \mu(m, n)|^2\}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{Covarianza} &\triangleq r(m, n; m', n') \\ &= E\{(u(m, n) - \mu(m, n))(u^*(m', n') - \mu^*(m', n'))\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{Autocorrelación} &= E\{(u(m, n)u^*(m', n'))\} \\ &= r(m, n; m', n') + \mu(n, m)\mu^*(n', m'). \end{aligned} \quad (21)$$

El símbolo $E\{\cdot\}$ denota el operador matemático de valor esperado y $u^*(m, n)$ representa el complejo conjugado de $u(m, n)$. En el caso de imágenes aleatorias discretas de tamaño $M \times M$, la media y varianza son matrices de $M \times M$, mientras que la covarianza y autocorrelación son matrices de $M^2 \times M^2$.

Un proceso imagen es llamado *estacionario en el sentido estricto* si sus momentos no se afectan por desplazamientos de los orígenes espaciales. Por otra parte, el proceso imagen es llamado *estacionario en el sentido amplio* si su media es constante y su autocorrelación depende de las diferencias en las coordenadas de la imagen y no de sus valores originales, es decir,

$$E\{u(m, n)\} = \mu(m, n) = \mu = \text{constante} \quad (22)$$

y

$$E\{(u(m, n)u^*(m', n'))\} = r(m - m', n - n'). \quad (23)$$

Esto implica que $r(m, n; m', n') = r(m - m', n - n')$ (Jain, 1989). Durante este trabajo, a

menos que se indique lo contrario, cada vez que se haga referencia a un proceso estacionario (campo aleatorio), estaremos haciendo referencia al caso *estacionario en el sentido amplio*. La función de covarianza de un proceso estacionario $u(m, n)$ esta dada por $r(m, n)$ de la siguiente forma

$$r(m, n) = r(m, n; 0, 0) = r(m + m', n + n'; m', n'). \quad (24)$$

Un modelo de covarianza utilizado de manera frecuente para procesar imágenes estacionarias (Jain, 1989) es

$$r(m, n) = \sigma^2 \rho_1^{|m|} \rho_2^{|n|}, \quad |\rho_1| < 1, |\rho_2| < 1, \quad (25)$$

donde $\rho_1 = \frac{r(1,0)}{\sigma^2}$ y $\rho_2 = \frac{r(0,1)}{\sigma^2}$ denotan los coeficientes de correlación entre elementos adyacentes en la direcciones m y n respectivamente y σ^2 representa la varianza del campo aleatorio.

II.5.2. Distribución normal o Gaussiana

La función de densidad de probabilidades de una variable aleatoria ζ es denotada como $p_\zeta(\gamma)$. Para una variable aleatoria Gaussiana tenemos que

$$p_\zeta(\gamma) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\gamma - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (26)$$

donde μ y σ^2 representan la media y la varianza y γ representa el valor que toma la variable aleatoria ζ . Para $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, esta es llamada la *distribución normal estándar*. Los parámetros de una distribución normal en la ecuación anterior, satisfacen las siguientes

propiedades:

$$E[1] = \int_{-\infty}^{\infty} p(\gamma) d\gamma = 1, \quad (27)$$

$$E[\gamma] = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma p(\gamma) d\gamma = \mu, \quad (28)$$

$$E[(\gamma - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma - \mu)^2 p(\gamma) d\gamma = \sigma^2. \quad (29)$$

II.5.3. Generación sintética de ruido con distribución gaussiana

Para generar un campo aleatorio, cuyos valores correspondientes a las variables aleatorias tengan una función de densidad de probabilidad gaussiana se recurre al *teorema del límite central*. Este teorema establece que bajo ciertas condiciones generales, dado n independientes variables aleatorias x_i , con media μ_i , y varianza σ_i^2 , la suma que forman

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad (30)$$

es también una variable aleatoria con media $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$ y varianza $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2$, con una distribución $F(x)$ de x la cual se aproxima a una distribución Gaussiana a medida que n se incrementa (Papoulis, 1991).

Lo anterior significa sin pérdida de generalidad, si se suman $n = 12$ números cuyos valores se encuentren entre $[0, 1]$ y que hayan sido generados por alguna distribución de probabilidad uniforme. Donde una variable aleatoria x_1 con distribución de probabilidad uniforme con límites entre 0 y 1 tiene como media $\mu_1 = \frac{1}{2}$ y varianza $\sigma_1^2 = \frac{1}{12}$. Y donde sea $\bar{x} = x_1 + \cdots + x_{12}$, la suma de los $n = 12$ números, con media $\mu_{\bar{x}} = 6$ y varianza $\sigma_{\bar{x}}^2 = 1$, se obtiene una variable aleatoria \bar{x} cuya distribución es aproximadamente gaussiana. Si se desea obtener una distribución Gaussiana con media μ_s y varianza σ_s^2 dados, bastará con realizar la siguiente operación:

$$\bar{x}_s = \left(\frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} \right) \sigma_s + \mu_s. \quad (31)$$

Para afectar la imagen original con ruido, primero se genera una imagen de solo ruido

del tamaño de la imagen original y ambas son sumadas pixel a pixel.

En general, puede existir correlación entre píxeles que conforman la matriz de ruido aditivo. Supongamos que se desea generar una imagen en forma matricial $\mathbf{X} = \{x(m, n), 1 \leq m, n \leq N\}$, con un ρ_H , ρ_V y σ_X^2 específica. Donde ρ_H y ρ_V indican los coeficientes de correlación entre píxeles adyacentes en la dirección horizontal y vertical respectivamente. Utilizando el modelo de covarianza mostrado en la ecuación (25), con $\sigma_X^2 = 1$ y considerando las siguientes correlaciones entre píxeles vecinos de $\mathbf{X}(i, j)$ con respecto a su posición (i, j) se tiene las siguientes relaciones:

$$E[\mathbf{X}(i, j)\mathbf{X}(i, j)] = 1, \quad (32)$$

$$E[\mathbf{X}(i, j)\mathbf{X}(i - 1, j)] = \rho_V, \quad (33)$$

$$E[\mathbf{X}(i, j)\mathbf{X}(i, j - 1)] = \rho_H, \quad (34)$$

$$E[\mathbf{X}(i, j)\mathbf{X}(i - 1, j - 1)] = \rho_H\rho_V, \quad (35)$$

$$E[\mathbf{X}(i - 1, j)\xi] = 0, \quad (36)$$

$$E[\mathbf{X}(i, j - 1)\xi] = 0, \quad (37)$$

$$E[\mathbf{X}(i - 1, j - 1)\xi] = 0, \quad (38)$$

$$E[\xi\xi] = 1, \quad (39)$$

donde ξ es una variable aleatoria con densidad de probabilidad Gaussiana con $\mu_\xi = 0$ y varianza $\sigma_\xi^2 = 1$ y no correlacionada con sus vecinos. Donde la dependencia de $\mathbf{X}(i, j)$ con sus tres vecinos y con ξ queda como una combinación lineal de la forma:

$$\mathbf{X}(i, j) = C_1\mathbf{X}(i - 1, j) + C_2\mathbf{X}(i, j - 1) + C_3\mathbf{X}(i - 1, j - 1) + C_4\xi. \quad (40)$$

Multiplicando la ecuación (40) por cada uno de sus tres vecinos y aplicando el valor

esperado $E\{\cdot\}$, nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$E[\mathbf{X}(i, j)\mathbf{X}(i, j)] = C_1\rho_V + C_2\rho_H + C_3\rho_V\rho_H + C_4^2 = 1, \quad (41)$$

$$E[\mathbf{X}(i, j)\mathbf{X}(i-1, j)] = C_1 + C_2\rho_V\rho_H + C_3\rho_H = \rho_V, \quad (42)$$

$$E[\mathbf{X}(i, j)\mathbf{X}(i, j-1)] = C_1\rho_V\rho_H + C_2 + C_3\rho_V = \rho_H, \quad (43)$$

$$E[\mathbf{X}(i, j)\mathbf{X}(i-1, j-1)] = C_1\rho_H + C_2\rho_V + C_3 = \rho_V\rho_H, \quad (44)$$

resolviendo el sistema se obtiene los siguientes valores

$$C_1 = \rho_V, \quad (45)$$

$$C_2 = \rho_H, \quad (46)$$

$$C_3 = -\rho_V\rho_H, \quad (47)$$

$$C_4 = \sqrt{(1 - \rho_V^2)(1 - \rho_H^2)}, \quad (48)$$

reemplazando estos coeficientes en la ecuación (40), se obtiene

$$\mathbf{X}(i, j) = \rho_V\mathbf{X}(i-1, j) + \rho_H\mathbf{X}(i, j-1) - \rho_V\rho_H\mathbf{X}(i-1, j-1) + \sqrt{(1 - \rho_V^2)(1 - \rho_H^2)}\xi. \quad (49)$$

En la práctica, es posible generar la matriz ξ de $N \times N$ variables aleatorias con densidad de probabilidad gaussiana, con $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ y no correlacionadas utilizando la función de Matlab $\text{randn}(N, N)$. La imagen que se obtiene a partir de la ecuación (49) tiene los coeficientes de correlación deseados, pero con varianza $\sigma^2 = 1$, por lo tanto, para obtener la imagen con los parámetros deseados, es necesario multiplicar la imagen obtenida por la varianza deseadas σ_X^2 .

Para finalizar, un campo aleatorio $x(m, n)$ es llamado *ruido blanco*, cuando dos elementos diferentes cualquiera $x(m, n)$ y $x(m', n')$ son mutuamente incorrelacionados y su

función de covarianza es de la forma

$$r(m, n; m', n') = r(m, n) = \sigma^2 \delta(m, n). \quad (50)$$

En este trabajo utilizaremos las características del ruido blanco con distribución Gaussiana con media cero.

II.6. Método del gradiente conjugado

El método del gradiente conjugado (CGM⁴), fue desarrollado a principio de los años cincuenta por Hestenes and Stiefel. Debido a que en aritmética exacta el método convergía en a lo más N pasos, este fue considerado en primera instancia como un método directo para resolver sistemas lineales. Sin embargo, debido a errores de redondeo no se llegaba a una solución finita, y el método fue ampliamente usado a mediados de los años setenta, cuando se dieron cuenta de que debía ser considerado como un método iterativo (Bjorck, 1996).

Un método iterativo toma una estimación inicial como una solución al sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y entonces trata repetidamente (iterativamente) de mejorar esa estimación. Así, el CGM es uno de los mejores métodos iterativos conocidos para resolver sistemas lineales dispersos, simétricos y definidos positivos (Saad, 2003). Una matriz es definida positiva, cuando para cualquier vector $\mathbf{u}_i \neq 0$, el escalar

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{Au} > 0, \quad (51)$$

donde \mathbf{A} es una matriz de $N \times N$, el vector \mathbf{u} es de $N \times 1$, y el \cdot denota el producto punto entre los dos vectores columnas \mathbf{u} y \mathbf{Au} .

El CGM es basado en buscar direcciones conjugadas, que son vectores $\mathbf{d}_i \neq 0$, tal que

$$\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{Ad}_j \neq 0, \quad i \neq j, 1 \leq i, j \leq N, \quad (52)$$

⁴Conjugate Gradient Method

donde \mathbf{A} es una matriz definida positiva, tal que existe un conjunto de vectores $\mathbf{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_N\}$ y forma una base vectorial en el espacio N -dimensional. En termino de esas bases, la solución del sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, puede escribirse como

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{d}_i. \quad (53)$$

Los valores escalares α_i y el vector \mathbf{D} , se calculan utilizando iteraciones (Jain, 1989). Para tener una mejor idea de lo que el CGM realiza, a continuación se muestra la siguiente función

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{Ax} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{b}, \quad (54)$$

donde \mathbf{A} es una matriz simétrica y positiva definida de tamaño $N \times N$, los vectores de \mathbf{x} y \mathbf{b} son de tamaño $N \times 1$ y el \cdot denota el producto punto entre vectores columnas (Golub y Van Loan, 1996). Para encontrar el mínimo valor de q , calculamos la derivada, por lo que la ecuación anterior se transforma en

$$\nabla q(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}, \quad (55)$$

y se puede observar que la solución $\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = 0$ es el único mínimo de q . Así que minimizar q y solucionar el sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ son problemas equivalentes.

Después de realizar una estimación inicial de la solución al sistema lineal (o a la minimización de q), el CGM procede a escoger una *dirección de búsqueda* $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots$. Una vez que la dirección es seleccionada, una nueva estimación de la solución es obtenida por la minimización de q a lo largo de la nueva dirección. Esto es, si \mathbf{d}_k es la nueva dirección de búsqueda y \mathbf{x}_{k-1} es la solución estimada previamente, entonces la nueva estimación \mathbf{x}_k se seleccionará escogiendo un escalar α que minimice

$$\min_{\alpha} q(\mathbf{x}_{k-1} + \alpha \mathbf{d}_k). \quad (56)$$

Por lo que es importante la manera de seleccionar la dirección de búsqueda. Una pieza clave en el proceso de selección es el *residual* y puede ser vista como una medida de que tan cerca esta \mathbf{x}_k de la solución original del sistema lineal. El *residual* se define de la siguiente manera

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k. \quad (57)$$

Así que la selección de la nueva *dirección de búsqueda*, \mathbf{d}_k se escoge del complemento ortogonal de

$$\text{Span}\{\mathbf{A}\mathbf{d}_1, \mathbf{A}\mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{A}\mathbf{d}_{k-1}\}, \quad (58)$$

esto es, del conjunto de todas las combinaciones lineales que son ortogonales a \mathbf{d}_k . Mas explícitamente, \mathbf{d}_k es elegido de ese subespacio de tal forma que minimiza la distancia en la norma euclidiana

$$\|\mathbf{d}_k - \mathbf{r}_{k-1}\|. \quad (59)$$

De esta forma, ya se han calculado las *direcciones de búsqueda* $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_k$, las estimaciones de la solución del sistema lineal $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ y los residuales $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k$. Por lo que el CGM puede ser escrito como:

```

k ← 0; x0 ← 0; r0 ← b;
while (||rk||2 > tolerance) and (k < maxiter) do
  k ← k + 1;
  if k = 1 then
    d1 ← r0;
  else
    βk ←  $\frac{\mathbf{r}_{k-1} \cdot \mathbf{r}_{k-1}}{\mathbf{r}_{k-2} \cdot \mathbf{r}_{k-2}}$ ;
    dk ← rk-1 + βkdk-1;
  end if
  sk ← A dk;
  αk ←  $\frac{\mathbf{r}_{k-1} \cdot \mathbf{r}_{k-1}}{\mathbf{d}_k \cdot \mathbf{s}_k}$ ;
  xk ← xk-1 + αkdk;

```

$\mathbf{r}_k \leftarrow \mathbf{r}_{k-1} - \alpha_k \mathbf{S}_k;$

end while

$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}_k;$

donde el calculo de β_k se utiliza para minimizar a $\|\mathbf{d}_k - \mathbf{r}_{k-1}\|$, y el calculo de α_k se utiliza para minimizar $q(\mathbf{x}_{k-1} + \alpha \mathbf{d}_k)$. El calculo de \mathbf{r}_k es solo un atajo para evitar una multiplicación de vector con matriz, como se muestra a continuación

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k = \mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_{k-1} - \alpha_k \mathbf{d}_k) = \mathbf{r}_{k-1} - \alpha_k \mathbf{S}_k. \quad (60)$$

El CGM termina cuando el cuadrado de la norma del *residual* es menos que una tolerancia especificada o si el numero de iteraciones excede un limite establecido por el usuario. El *residual* se puede ver como una medida de que tan cerca la iteración k esta de la solución.

II.7. Resumen

En este capítulo se presentan los conceptos matemáticos que tienen que ver básicamente con teoría de procesos estocásticos, métodos de minimización de errores, teoría de sistemas lineales y algoritmos para la solución de ecuaciones lineales, que se requieren para desarrollar métodos de restauración de imágenes digitales degradadas.

Capítulo III

Modelos de degradación y de restauración de imágenes

III.1. Introducción

En este capítulo se presenta una breve revisión de algunos modelos matemáticos de degradación que puede presentar una imagen y se analizan los métodos generales para la restauración de imágenes. Primero, en la sección III.2 se mencionan los modelos de degradación, dentro de los cuales se incluyen, degradación por emborronamiento, degradación por ruido, degradación lineal, degradación aditiva y degradación multiplicativa. Posteriormente, en la sección III.3 se presentan los métodos de restauración para los modelos de degradación presentados previamente. Por último, en la sección III.4 se muestra la métrica de restauración que se utilizará para medir la efectividad de los métodos propuestos de restauración

III.2. Modelos de degradación de imágenes

Una imagen es una señal que contiene información acerca de un escena física la cual no es directamente observable. En general la información contenida en una imagen, consiste de una representación degradada de la original. A *grosso modo* se pueden distinguir dos fuentes de degradación: la degradación que ocurre en la formación de la imagen (i.e. emborronamiento, imperfecciones en la iluminación) y la degradación que ocurre en el proceso de grabación de las imágenes (i.e. ruido provocado por defectos en los sensores) (Bertero y Boccacci, 2002).

A continuación se describen algunos de los modelos de degradación más usuales.

III.2.1. Modelo de degradación por emborronamiento

El emborronamiento es un proceso determinístico y en la mayoría de los casos se tiene un modelo matemático lo suficientemente adecuado para su descripción. La función de degradación por emborronamiento se puede modelar como la función respuesta al impulso h , también llamada PSF del sistema que genera el emborronamiento, como se menciona en la sección II.4.

A continuación se muestran los modelos matemáticos de las PSF más utilizadas.

Emborronamiento por movimiento

Esta degradación ocurre cuando existe un movimiento relativo entre la escena y la cámara al momento de obtener la imagen. Este movimiento relativo puede ser en la forma de una translación, rotación, un cambio de escala repentino o alguna combinación de las anteriores. Si se considera solo el caso de translación, cuando el objeto tiene una velocidad constante V , con un ángulo de θ radianes con respecto al eje horizontal durante un tiempo de exposición T . La *longitud de movimiento* viene dado por $L = VT$, y la PSF se define como (Lagendijk y Biemond, 1991)

$$h(k, l; L, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{L} & \text{si } \sqrt{k^2 + l^2} \leq \frac{L}{2}, \text{ y } \frac{k}{l} = -\tan \theta, \\ 0 & \text{en otra parte.} \end{cases} \quad (61)$$

El PSF en este caso es invariante al desplazamiento (estacionario), pero si solo una parte de la imagen esta sujeta a el movimiento de translación, la distorsión total es variante al desplazamiento.

Emborronamiento por desenfoque uniforme

Cuando una escena real tridimensional es captada por una cámara en un plano bidimensional, algunas partes de la escena quedan fuera de foco mientras que otras no. Si la

apertura de la cámara es circular, la imagen en cualquier punto fuente es un pequeño disco conocido como *circulo de confusión* (COC¹). El grado de desenfoque (diámetro de COC) depende de la longitud focal, el número de apertura del lente y la distancia entre la cámara y el objeto. Para obtener un modelo completo de desenfoque se necesita saber la intensidad de distribución dentro del COC. Por lo que se sigue una aproximación geométrica, resultando en una distribución de intensidad uniforme. El PSF de esta degradación por desenfoque uniforme con un radio R de COC esta dado por:

$$h(k, l; R) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} & \text{si } \sqrt{k^2 + l^2} \leq R, \\ 0 & \text{en otra parte.} \end{cases} \quad (62)$$

Emborronamiento por turbulencia atmosferica

Este emborronamiento causa severas interferencias en imágenes aéreas que son utilizadas en predicciones del clima. Así, que el emborronamiento introducido por la turbulencia atmosférica, puede deberse a varias factores, tales como temperatura, velocidad del viento, tiempo de exposición. Para tiempos de exposición largos, el PSF puede ser descrito como una función Gaussiana, tal que

$$h(k, l, \sigma_G) = C \exp\left(-\frac{k^2 + l^2}{2\sigma_G^2}\right), \quad (63)$$

donde σ_G determina la severidad del emborronamiento. Y la constante C se escoge de tal forma que la ecuación (17) es satisfecha.

III.2.2. Modelos de degradación por ruido

El ruido se puede definir como un componente no deseado en la imagen (Bovik, 2009); puede ser correlacionado o no correlacionado, así como independiente o dependiente de la señal de entrada (Acharya y Ray, 2005). Asimismo, puede ocurrir en el proceso de adquisición de una imagen o durante su transmisión y puede deberse a variadas razones;

¹COC.-Circle of confusion

por ejemplo, los sensores que capturan la imagen pueden tener defectos intrínsecos de fabricación o pueden ser afectados por las condiciones ambientales durante el proceso de captura de la imagen. De forma similar, las imágenes se pueden degradar cuando existe interferencia en el canal usado para la transmisión de imágenes (Gonzalez y Woods, 2008).

Bertero y Boccacci (2002) definen por su parte, el ruido como una realización de un proceso aleatorio (proceso estadístico), así que esta realización no es conocida en la práctica. Uno sabe, a lo mas, propiedades del proceso aleatorio, tal como media, varianza, etc. También, si es aditivo ó multiplicativo, ó si tiene una distribución Gaussiana o de Poisson. Debido a lo anterior, en este trabajo se considera el ruido como un campo aleatorio, formado por variables aleatorias caracterizadas por una función de densidad de probabilidad (PDF²).

El ruido constituye una importante limitación en la restauración de imágenes. La cantidad de ruido presente en una imagen observada es dada por la relación (-emborronamiento) señal-ruido SNR por sus siglas en ingles (*Signal to Noise Ratio*) la cual es definida por:

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\text{varianza de la imagen con emborronamiento}}{\text{varianza del ruido}} \right) \quad (dB) \quad (64)$$

Cuando el SNR esta en el orden de los 40 a 50 dB, el ruido es no visible en la imagen y el efecto de la degradación es dominante (Bertero y Boccacci, 2002). Por otra parte, para valores bajos de SNR el efecto de degradación del ruido es más dominante que la degradación por emborronamiento. Para imágenes que tienen un SNR de menos de 10 a 20 dB, los métodos clásicos de restauración no son muy útiles, porque en esos niveles de SNR, su efecto es principalmente para suavizar el ruido y no realizar ninguna restauración en absoluto. Enfoques más adecuados para la restauración de imágenes ruidosas son proporcionados por métodos de mejoramiento de imágenes (Lagendijk y Biemond, 1991).

En esta sección nos enfocamos a describir los modelos de ruido que utilizaremos en este trabajo, sin embargo es importante señalar que existen otros modelos de ruido con sus propias características y condiciones, pero debido a que sus alcances quedan fuera

²PDE- Probability Density Function

de los objetivos de esta tesis no se mencionarán. Para conocer otros modelos de ruido, se puede consultar Bovik (2009), Gonzalez y Woods (2008), Acharya y Ray (2005), entre otros.

Ruido Aditivo Gaussiano

Algunas veces los ruidos generados por los sensores son del tipo térmico Gaussiano blanco, el cual es esencialmente aditivo e independiente de la imagen original (Acharya y Ray, 2005). El modelo de ruido aditivo Gaussiano es dado por:

$$s(k, l) = f(k, l) + n(k, l), \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 \leq l \leq M, \quad (65)$$

donde $\{s(k, l)\}$ es la imagen degradada (imagen observada) como resultado de la imagen de entrada (original) $\{f(k, l)\}$ dañada por un ruido aditivo Gaussiano $\{n(k, l)\}$ la cual tiene una PDF como se describe en la sección II.5.2 y se genera como se explico en la sección II.5.3 , donde (k, l) son las coordenadas de los pixeles y cuyo tamaño de las imágenes son de $M \times M$.

Como se mencionó, en este trabajo consideramos a $\{n(k, l)\}$ como un ruido aditivo Gaussiano no correlacionado con la imagen de entrada e independiente de sus coordenadas espaciales, con media 0 ($\mu = 0$) y varianza σ^2 .

En la figura 1(a) se muestra la imagen original la cual tiene una $\sigma = 49.4$, y la cual es degradada con ruido blanco aditivo Gaussiano, con media cero, no correlacionado con la imagen, y con tres diferentes niveles de SNR : (35 DB, 15 DB y 5 DB), lo cual equivale en términos de la desviación estándar del ruido blanco a : 0.87, 8.79, y 27.80 respectivamente, mostrados en las figuras 1(b),1(c) y 1(d) . Como se puede observar, en los niveles de SNR altos, el ruido no es percibido de manera visual y en niveles bajos el ruido es predominante y se puede apreciar a simple vista, la degradación causada.



(a) Imagen original



(b) Imagen degradada por ruido aditivo con $SNR = 35$



(c) Imagen degradada por ruido aditivo con $SNR = 15$



(d) Imagen degradada por ruido aditivo con $SNR = 5$

Figura 1: Imagen degradada por ruido aditivo blanco Gaussiano

Ruido Impulsivo

A menudo los sensores generan ruido impulsivo (Acharya y Ray, 2005), una imagen afectada con ruido impulsivo es modelada de la siguiente manera:

$$s(k, l) = f(k, l)z(k, l) + (1 - z(k, l))\alpha(k, l), \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 \leq l \leq M \quad (66)$$

$$z(k, l) = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } p_r \\ 1 & \text{con probabilidad } 1 - p_r \end{cases} \quad (67)$$

donde z es un parámetro binario que acepta valores de 0 ó 1, de acuerdo a una probabilidad p_r de ocurrencia en un punto (k, l) y $\alpha(k, l)$ es un proceso aleatorio que representa los pixeles ruidosos, cuyos valores arbitrarios se encuentra dentro de un rango dinámico conforme a una distribución de probabilidades (Chen y Wu, 2001). Donde la PDF del ruido impulsivo esta dada por

$$p(\alpha) = \begin{cases} P_a & \text{si } \alpha = a, \\ P_b & \text{si } \alpha = b, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (68)$$

En el ruido impulsivo, a menudo los pixeles degradados de la imagen original, son reemplazados con valores iguales o cercanos al máximo o mínimo del rango dinámico permitido, a ese ruido se le conoce como “sal y pimienta” el cual es uno de los más representativos del ruido impulsivo.

En este trabajo, el ruido impulsivo está caracterizado físicamente por un daño provocado en el sensor de la cámara que obtendrá las escenas observadas, originando un ruido impulsivo unipolar el cual consiste en que el valor original del pixel dañado por ruido impulsivo será sustituido por el valor de 0.

Dicho ruido impulsivo es invariante en el tiempo y puede formar conglomerados. En la figura 2 se muestra una imagen degradada con ruido impulsivo, usando la ecuación (66).



Figura 2: **Imagen afectada con ruido impulsivo con $p = 0.07$**

La contaminación con ruido impulsivo de una imagen de dimensiones $M \times M$ se realiza de la siguiente manera. Dada una probabilidad de ocurrencia p_r de ruido impulsivo, se genera una matriz binaria z de $M \times M$. Inicialmente la matriz z es de unos. Para generar las posiciones aleatorias (k, l) donde se asignaran los ceros, se utiliza una distribución uniforme que genera un par de valores k y l , entre 0 y 1. Posteriormente se multiplica a ambos valores generados por M . El número de ceros es de $p_r \times M \times M$, en caso de que se repita una posición que ya haya salido ($z(k, l) = 0$), se vuelve a generar otra posición de tal forma que se cumpla el número de pixeles defectuosos. El modelo del ruido impulsivo utilizado en este trabajo es de la siguiente forma

$$s(k, l) = f(k, l)z(k, l), \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 \leq l \leq M, \quad (69)$$

Ruido Uniforme

La PDF del ruido uniforme viene dada por

$$p(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq \alpha \leq b, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (70)$$

Donde la media de esta función esta dada por

$$\mu = \frac{a + b}{2}, \quad (71)$$

y su varianza por

$$\sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{12}. \quad (72)$$

Esta PDF no describe situaciones de ruido en la vida real, sin embargo es utilizada ampliamente como generador de números aleatorios. En este trabajo, se utiliza para generar ruido aditivo Gaussiano y ruido impulsivo, como se ha descrito en secciones previas.

Ruido multiplicativo

El ruido causado por las propiedades de las placas fotográficas, es esencialmente multiplicativo en la naturaleza. El ruido especular que ocurre en los sistemas coherentes, como lo son imágenes de ultrasonido, es de naturaleza multiplicativa; el cual puede ser modelada como

$$s(k, l) = f(k, l)b(k, l), \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 \leq l \leq M, \quad (73)$$

donde $\{b(k, l)\}$ es el ruido multiplicativo. La multiplicación en este caso, es realizado entre los correspondientes parejas de pixeles de f y b . El ruido multiplicativo puede ser visto como un campo aleatorio de ruido blanco con una distribución exponencial, esto es

$$p(b) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-b}{\sigma^2}\right) & \text{si } b \geq 0, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (74)$$

Como se mencionó previamente, existen otros tipos de modelos para ruido, los cuales puede ser consultados siguiendo las referencias presentadas en este trabajo.

III.2.3. Modelo de degradación lineal

La degradación de un sistema lineal se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$s(k, l) = h(k, l) \bullet f(k, l) + n(k, l), \quad (75)$$

donde la función de degradación $\{h(k, l)\}$ es lineal de tamaño M , definida por una PSF, el ruido $\{n(k, l)\}$ es aditivo con una PDF conocida y no correlacionado con la imagen, $\{s(k, l)\}$ es la imagen degradada la cual es resultado de la salida del modelo del sistema y finalmente $\{f(k, l)\}$ representa la imagen original que se desea recuperar.

En la figura 3 se ilustra el modelo lineal de degradación con un emborronamiento por movimiento presentado en la ecuación (61) con $L = 21$ y $\theta = 45$, aplicado a una imagen de entrada 3(a) y su respectiva imagen de salida degradada 3(b).



Figura 3: **Modelo de degradación lineal con un emborronamiento por movimiento**

En la figura 4 se ilustra el modelo lineal de degradación con un emborronamiento por desenfoque presentado en la ecuación (62) con $R = 10$, aplicado a una imagen de entrada 4(a) y su respectiva imagen de salida degradada 4(b) .

En la figura 5 se ilustra el modelo lineal de degradación con un emborronamiento por



(a) Imagen original

(b) Imagen degradada por desenfoco con $R = 10$

Figura 4: **Modelo de degradación lineal con un emborronamiento por desenfoco**

turbulencia atmosférica presentado en la ecuación (63) con $\sigma = 5$, aplicado a una imagen de entrada 5(a) y su respectiva imagen de salida degradada 5(b) .



(a) Imagen original

(b) Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma = 5$

Figura 5: **Modelo de degradación lineal con un emborronamiento por turbulencia atmosférica**

Usualmente, todas las imágenes difuminadas o degradadas bajo el modelo de degradación presentado por la ecuación (75), exhiben características similares, particularmente un suavizado pasa-baja de la imagen original atenuando las altas frecuencias que caracterizan la información de los bordes en la imagen.

III.2.4. Modelo de degradación aditiva

Este modelo de degradación está presente en la adquisición de imágenes térmicas, como pueden ser cámaras de visión nocturna que utilizan una matriz de plano focal (FPA³). Los sensores FPA son usados en muchos sistemas modernos de adquisición de imágenes. La degradación aditiva representa una no uniformidad espacial también conocida como ruido de patrón-fijo, la cual es producido por la variación en la foto respuesta de los detectores individuales en el arreglo (Ratliff *et al.*, 2002, Hayat *et al.*, 1999).

Modelo de degradación aditiva con ruido aditivo

El modelo de degradación aditiva con ruido aditivo se caracteriza por que el rango de la función de degradación es sumado a la imagen original elemento por elemento, quedando de la siguiente manera:

$$s(k, l) = a(k, l) + f(k, l) + n(k, l), \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 \leq l \leq M \quad (76)$$

donde $\{a(k, l)\}$ es la función de degradación aditiva no homogénea.

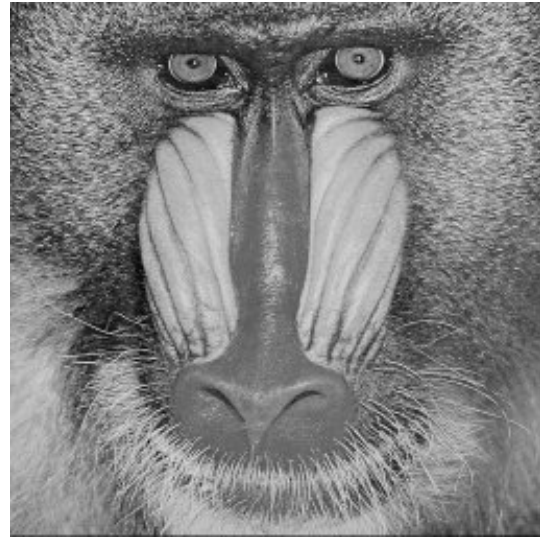
En la figura 17(a) se ilustra la imagen original, cuyo rango de señal es $[0, 225]$. La figura 17(b) muestra la función de degradación, la cual como se puede observar es una imagen no homogénea, por último en la figura 17(c) se muestra la imagen degradada observada la cual tiene una media de ruido blanco $\mu = 0$ y una desviación estándar de $\sigma = 2$, de acuerdo a la ecuación (76).

La imagen que se desea restaurar es la imagen original, en este caso en particular, sería la figura 17(a). Si la desviación estándar del ruido blanco aumenta, la imagen original

³FPA.-Focal Plane Array



(a) Imagen original



(b) Degradación aditiva



(c) Imagen degradada observada

Figura 6: El modelo de degradación aditiva con ruido aditivo (eq. (76)) en imágenes

será más difícil de restaurar, debido al incremento del ruido en la imagen.

Modelo de degradación aditiva con ruido aditivo e impulsivo

El modelo de degradación aditiva con ruido aditivo e impulsivo se presenta de la siguiente manera:

$$s(k, l) = (a(k, l) + f(k, l)) z(k, l) + n(k, l), \quad 1 \leq i, j \leq L \quad (77)$$

donde $\{z(k, l)\}$ fue descrito en la ecuación (85), recordemos que en el presente trabajo, el ruido impulsivo esta caracterizado por *píxeles muertos* dicho de otra manera, por píxeles defectuosos por defecto de fabricación o dañados por el uso; los cuales están permanentemente apagados, es decir, con valor del pixel en ese punto igual a cero.



Figura 7: **Imagen afectada con el modelo de degradación aditiva con ruido aditivo e impulsivo**

En la figura 7 se presenta una imagen observada degradada como resultado de que a la imagen original (figura 17(a)) se aplique una interferencia aditiva (figura 17(b)) con un ruido aditivo blanco con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 2$, y un ruido impulsivo con probabilidad $p = 0.07$.

III.2.5. Modelo de degradación multiplicativa

Este tipo de degradación se puede encontrar en condiciones de iluminación no homogénea. Los cambios en la iluminación son un fenómeno común y natural; por ejemplo, las imágenes que son obtenidas durante el transcurso de un día en diferentes momentos, pueden poseer diferentes efectos de sombra o reflexiones especulares. Así que la distribución de los niveles de gris de una imagen de entrada puede cambiar de una forma no uniforme (García-Martínez *et al.*, 2002), dando paso a este tipo de degradación.

La restauración de la imagen original bajo los efectos del modelo de degradación multiplicativa, es de particular interés en el área de reconocimiento de objetos bajo condiciones de iluminación no uniforme, donde se han publicado trabajos previos (Díaz-Ramírez y Kober, 2009).

Modelo de degradación multiplicativa con ruido aditivo

El modelo de degradación multiplicativa con ruido aditivo se caracteriza por que el rango de la función de degradación es multiplicado elemento por elemento con la imagen original y afectada por un ruido aditivo blanco, lo cual da como resultado una imagen degradada observada, la cual se presenta en la siguiente ecuación:

$$s(k, l) = (b(k, l)f(k, l)) + n(k, l), \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 \leq l \leq M. \quad (78)$$

donde $\{b(k, l)\}$ es la función de degradación multiplicativa no homogénea.

A continuación, se ilustra el modelo de degradación multiplicativa en imágenes, los valores de la señal de entrada se encuentran en $[0, 225]$. En la figura 8(a) se muestra la imagen original, en la figura 8(b) se puede apreciar la función de degradación multiplicativa caracterizada como una función no homogénea de iluminación, el dominio de los valores de esta señal, se encuentran comprendidos en el rango de $[0, 1]$, la cual fue normalizada para su visualización y por último, se puede observar en la figura 8(c) la imagen degradada que se obtiene utilizando la ecuación (78), donde la función de ruido aditivo $\{n(k, l)\}$, se

encuentra caracterizada en este caso, por su media ($\mu = 0$) y su desviación estándar ($\sigma = 1$).



(a) Imagen original



(b) Degradación multiplicativa



(c) Imagen degradada observada

Figura 8: El modelo de degradación multiplicativa (eq. (78)) en imágenes

Modelo de degradación multiplicativa con ruido aditivo e impulsivo

El modelo de degradación multiplicativa con ruido aditivo e impulsivo se representa de la siguiente manera:

$$s(k, l) = (b(k, l)f(k, l)z(k, l) + n(k, l)), \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 \leq l \leq M. \quad (79)$$

donde $\{z(k, l)\}$ fue descrito en la ecuación (85).



Figura 9: **Imagen afectada con el modelo de degradación multiplicativa con ruido aditivo e impulsivo**

En la figura 9, se presenta una imagen observada degradada como resultado de que a la imagen original (figura 8(a)) se le aplique una interferencia multiplicativa (figura 8(b)) con un ruido aditivo blanco con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, y un ruido impulsivo con probabilidad $p = 0.07$.

III.3. Métodos de restauración de imágenes

III.3.1. Métodos de restauración para el modelo de degradación lineal

En esta sección se presentan algunos métodos para restaurar una imagen degradada por el modelo lineal de degradación presentado en la sección 75.

Filtro Inverso

Una de las técnicas más sencillas para restaurar imágenes degradadas que corresponden a la ecuación (75), es aquella donde el factor de degradación es completamente conocido y el factor de ruido es nulo. Esta técnica está categorizada en el dominio de las frecuencias y utiliza las propiedades del espacio discreto de Fourier para realizar la restauración de imágenes degradadas. Recordemos que por el teorema de convolución la operación convolución en el dominio espacial de dos señales discretas, es similar a realizar la multiplicación en el dominio de las frecuencias de la transformada de Fourier de las señales. Así que la salida del modelo de degradación lineal sin ruido, sería

$$s(k, l) = h(k, l) \bullet f(k, l), \quad (80)$$

aplicando la transformada discreta de Fourier (DFT⁴) se obtiene

$$DFT\{s(k, l)\} = DFT\{h(k, l)\}DFT\{f(k, l)\}, \quad (81)$$

simplificando la notación, utilizaremos letras mayúsculas para denotar la función en el dominio de la DFT y reemplazamos las variables k y l por sus equivalentes u y v . Por lo que la ecuación (81) queda

$$S(u, v) = H(u, v)F(u, v). \quad (82)$$

El método de restauración consiste en que si se conoce al operador de degradación es posible proponer el siguiente operador inverso

$$H_r(u, v) = \frac{1}{H(u, v)}, \quad (83)$$

siempre que se cumpla que $H_r(u, v)H(u, v) = 1$, por lo que restauración en el dominio de las frecuencias se obtendría al multiplicar la DFT de la imagen degradada $S(u, v)$ por el

⁴DFT.-Discrete Fourier Transform

operador inverso $H_r(u, v)$, como se muestra a continuación

$$\tilde{F}(u, v) = H_r(u, v)S(u, v). \quad (84)$$

Posteriormente al realizar la transformada inversa de Fourier en el dominio de las frecuencias de $\tilde{F}(u, v)$, obtendríamos la imagen restaurada en el dominio espacial. Esta técnica tiene la ventaja que es fácil de implementar, pero tiene las desventajas de tener que saber con exactitud la función de degradación, lo cual en la vida real es muy difícil, además no se permiten ceros espectrales en el dominio de las frecuencias, ni presencia de ruido aditivo en la imagen observada. Todos estos requisitos, hacen que el filtro inverso no pueda ser aplicado en la vida real y únicamente se utilice como un método de comparación con otros métodos en experimentos de laboratorio, donde se conoce toda la información necesaria para realizar la reconstrucción.

Filtro Pseudoinverso

Para evitar los ceros espectrales generados en el dominio espacial por la transformada de Fourier de la función de degradación (i.e. la función de degradación que produce el desenfoque o el movimiento lineal), surgió el filtro pseudoinverso, el cual básicamente consiste en evitar que los ceros espectrales se conviertan en polos en el filtro constructor. El filtro pseudoinverso se define de la siguiente manera

$$H_{pseudo}(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{H(u, v)} & \text{con } H(u, v) \neq 0 \\ 0 & \text{con } H(u, v) = 0. \end{cases} \quad (85)$$

En la figura 10 se ilustra el rendimiento del filtro pseudoinverso, cuando a la imagen de la figura 3(a) es degradada utilizando un emborronamiento por movimiento uniforme horizontal con $L = 10$ y sin ruido aditivo se obtiene la imagen degradada que se muestra en la figura 10(a), aplicando el filtro pseudoinverso, se obtiene la imagen restaurada que se muestra en la figura 10(b).

Como se puede observar, en ausencia de ruido, la calidad de la restauración a simple

vista es muy buena, sin embargo, si a la misma imagen de la 10(a) se le añade ruido blanco Gaussiano con una $\sigma = 0.42$, de tal forma que la $SNR = 40$, se obtiene la imagen restaurada que se muestra en la figura 10(c). Si reducimos la desviación estándar del ruido blanco Gaussiano a $\sigma = 0.042$, por lo que el $SNR = 60$, se obtiene la imagen restaurada que se muestra en la figura 10(d).

En consecuencia, el filtro pseudoinverso solo debe utilizarse para restaurar imágenes que poseen ruido aditivo muy cercano a cero.

Filtro Wiener

A continuación se presenta la técnica conocida como Filtro de Wiener, y consiste en tratar de minimizar la sensibilidad del ruido presente en las imágenes a restaurar, es decir incorpora información del operador de degradación y características estadísticas del ruido en el proceso de restauración, de tal manera que el error cuadrático medio entre la imagen estimada y la original sea mínimo. Es decir, sean $\{s(k, l)\}$ y $\{f(k, l)\}$ campos aleatorios arbitrarios, con media cero. Se desea obtener el valor estimado $\{\tilde{f}(k, l)\}$ de $\{f(k, l)\}$ a partir de $\{s(k, l)\}$ de modo que el error cuadrático medio (MSE⁵) entre $\{f(k, l)\}$ y $\{\tilde{f}(k, l)\}$ es mínimo. Expresado en forma matemática es

$$MMSE = E\{[f(k, l) - \tilde{f}(k, l)]^2\}. \quad (86)$$

Suponiendo que la estimación es del tipo lineal, $\{f(k, l)\}$ y $\{s(k, l)\}$ son campos aleatorios estacionarios caracterizados por sus dos primeros momentos, y que el sistema que degrada la imagen es lineal e invariante al desplazamiento espacial, se obtiene el siguiente filtro (Jain, 1989).

$$H_W(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + [P_N(u, v)/P_F(u, v)]}, \quad (87)$$

⁵MSE.-Mean Square Error



(a) Imagen degradada por movimiento ($L = 10$) (b) Imagen (a) restaurada utilizando el filtro pseudoinverso



(c) Imagen (a) mas ruido aditivo ($SNR = 40$) restaurada utilizando el filtro pseudoinverso (d) Imagen (a) mas ruido aditivo ($SNR = 60$) restaurada utilizando el filtro pseudoinverso

Figura 10: Restauración de imágenes utilizando el filtro pseudoinverso

donde $P_N(u, v)$ y $P_F(u, v)$ son las funciones de covarianza de $\{n(k, l)\}$ y $\{f(k, l)\}$ respectivamente, en el dominio de las DFT ó espectros de potencia de $N(u, v)$ y $F(u, v)$ respectivamente. En la vida real, la expresión $[P_N(u, v)/P_F(u, v)]$ es sustituida por una variable de ajuste que representa la razón señal-ruido en el dominio de las frecuencias presente en la escena degradada (Gonzalez y Woods, 2008). Por lo que la imagen restaurada en el dominio espacial es dada por la inversa de la transformada de Fourier en el dominio de las frecuencias.

Algunos puntos importantes del filtro Wiener son:

1. Si algún campo aleatorio tiene media diferente de cero, le restamos la media y después del filtrado se la volvemos a sumar.
2. En ausencia del ruido, es decir $\{n(k, l)\} = 0$, el filtro Wiener se convierte en un filtro inverso, que para imágenes representa un filtro pasa-altas.
3. En caso de que $H(u, v) = 1$, es decir, en ausencia de la degradación por emborronamiento, el filtro Wiener se convierte en el filtro Wiener suavizado, que para imágenes representa un filtro pasa-bajas.

En la figura 11 se ilustran ejemplos del filtro Wiener, cuando a la imagen de la figura 3(a) es degradada utilizando un emborronamiento por movimiento uniforme horizontal con $L = 10$, con ruido aditivo Gaussiano con $\sigma = 0.42$, de tal forma que la $SNR = 40$, se obtiene la imagen degradada que se muestra en la figura 11(a) , aplicando el filtro Wiener, se obtiene la imagen restaurada que se muestra en la figura 11(b).

Como se puede observar, la calidad de la restauración a simple vista es buena, sin embargo, si a la imagen de la figura 11(a) le aumentamos la desviación estándar del ruido blanco Gaussiano a $\sigma = 4.2$ ($SNR = 20$) obtenemos la imagen que se muestra en la figura 11(c) y su correspondiente imagen restaurada utilizando el filtro Wiener se presenta en la figura 11(d).

Entre las desventajas del filtro Wiener se encuentra el tener que conocer o estimar la función de degradación y conocer el espectro de potencia del ruido. Adicionalmente en



(a) Imagen degradada por movimiento ($L = 10$) y ruido aditivo $SNR = 40$ y (b) Imagen (a) restaurada utilizando el filtro Wiener



(c) Imagen degradada por movimiento ($L = 10$) y ruido aditivo $SNR = 20$ y (d) Imagen (c) restaurada utilizando el filtro Wiener

Figura 11: Restauración de imágenes utilizando el filtro Wiener

presencia de ruido aditivo muy alto, el filtro Wiener genera lóbulos secundarios cerca de los bordes en la imagen restaurada.

Existen otras técnicas que han surgido al modificar algunas características al filtro Wiener, entre las que se destacan se encuentra el filtro medio geométrico y el filtro de mínimos cuadrados restringido (Gonzalez y Woods, 2008).

III.3.2. Métodos de restauración para el modelo de degradación aditiva

Una de las técnicas más populares para realizar restauración es utilizar un método de minimización lineal del cuadrado medio del error. En el caso de un proceso estacionario y en la ausencia de algún emborronamiento, el método toma la forma simplificada del filtro Wiener presentado en la ecuación (87). La respuesta en frecuencia de un filtro Wiener empírico $H_W(u, v)$, puede ser escrito como:

$$H_W(u, v) = \frac{P_S(u, v) - P_N(u, v)}{P_S(u, v)} \quad (88)$$

donde $P_S(u, v)$ es el espectro de potencia de la función $\{s(k, l)\}$ en el dominio de la DFT y $P_N(u, v)$ es el espectro de potencia de la función $\{a(k, l) - \mu_a + n(k, l)\}$ en el dominio de la DFT, donde μ_a representa la media de la función de degradación aditiva, tal que $P_N(u, v) = P_{a_{\mu=0}}(u, v) + \sigma_n^2$, donde $P_{a_{\mu=0}}(u, v)$ representa el espectro de potencia de $\{a(k, l) - \mu_a\}$.

La ventaja de este filtro es su facilidad de implementación en el dominio de la DFT, y su principal desventaja es que utiliza información *a priori* (conocer el espectro de potencia de la función de degradación, la media de la función de degradación y la varianza del ruido aditivo) para su realización.

En la figura 12 se muestra el resultado de la restauración de una imagen degradada (figura 17(c)) por el modelo de la ecuación (76), utilizando el filtro de Wiener suavizado que se muestra en la ecuación (88).

En el trabajo de Ratliff *et al.* (2002) se aborda el problema de corrección para un sesgo (*offset* o *bias*) no uniforme en arreglos focales planos. La técnica se basa en el uso de



Figura 12: **Imagen restaurada por el filtro de Wiener suavizado**

estimadores de desplazamiento de subpíxeles entre imágenes, en conjunción con un modelo de interpolación para el movimiento, para extraer información del sesgo no uniforme de manera algebraica. Lo cual permite generar dos matrices de corrección, una respecto al movimiento horizontal y otra al movimiento vertical. A partir de estas dos matrices, se genera una matriz general de corrección que es sumada a cada escena de la secuencia de imágenes para realizar la restauración. Una desventaja de este método, es que no toma en cuenta en el modelo de degradación el ruido producido por el sensor, ni la presencia de ruido impulsivo. Además, para generar la matriz de corrección para un determinado sesgo, se necesitan aproximadamente 100 imágenes observadas.

III.3.3. Métodos de restauración para el modelo de degradación multiplicativa

En cuanto al modelo de degradación multiplicativa, los mejores resultados en restauración y mejoramiento de imágenes, se obtienen por medio de filtros homomórficos (Gonzalez y Woods, 2008). Estos son métodos ciegos que asumen que la iluminación varía lentamente en el espacio, así que sus componentes son representados en el dominio del espectro en bajas frecuencias. Por otra parte, la distribución de reflectividad en la imagen, forma los detalles que utilizan un rango de alta frecuencia en el dominio del espectro. Sin

embargo, la simple supresión del extremo inferior (bajas frecuencias) del espectro no conduciría a la ecualización requerida del campo como concierne a la iluminación, debido a que la degradación por iluminación es multiplicativa. Entonces, es necesario convertir la mezcla multiplicativa de los valores de iluminación y reflectancia en una mezcla aditiva por medio de una transformación logarítmica. Los componentes de baja frecuencias son parcialmente suprimidos por un filtro lineal (en el dominio espacial o en el dominio de las frecuencias) para obtener una imagen con la esperanza que no tenga una influencia de iluminación. La imagen obtenida debe ser trasformada punto a punto por la trasformada inversa (exponencial), a fin de que el contraste no sea deformado. Los filtros homomórficos pueden proporcionar una mejora sustancial, pero obviamente no es una completa corrección debido a que la distribución de iluminación no es identificada en detalle (Jan, 2006).

Los filtros homomórficos como se mencionó en la sección anterior, consisten en la utilización de logaritmos aplicados en la imagen para trasformar el modelo de degradación de iluminación multiplicativo a un factor aditivo. Claro que esto sólo es posible si el ruido aditivo tiende a cero, por lo que estas técnicas son muy sensibles al ruido (Pratt, 2007).

Enumerando las desventajas, se tiene que los filtros homomórficos son sensibles al ruido presente en la imagen, y el resultado depende del tipo particular de filtro que se utilice y de los valores de sus parámetros. De igual forma, es posible aplicar el filtro descrito en la ecuación (88) para este modelo de degradación como un filtro homomórfico en el dominio de las frecuencias. En este caso, primero se convierte la interferencia multiplicativa a una aditiva usando la función logaritmo (se ignora el ruido de sensor), entonces, el filtro Wiener empírico con los parámetros conocidos es utilizado. La imagen de salida es obtenida aplicando una función exponencial a la imagen restaurada con el filtro Wiener.

Existen diversos artículos donde se utilizan los filtros homomórficos donde se puede notar, que los filtros son muy particulares al problema a resolver (i.e. reconocimiento de patrones) y donde es necesario tener información *a priori* de la función de iluminación (Diaz-Ramirez y Kober, 2009) o asumen que la función de iluminación es homogénea (Arsenault y Lefebvre, 2000).



Figura 13: **Imagen restaurada por el filtro homomórfico de Wiener suavizado**

En la figura 13 se muestra el resultado de la restauración de una imagen degradada (figura 8(c)) por el modelo de la ecuación (78), utilizando el filtro de Wiener suavizado que se muestra en la ecuación (88) como un filtro homomórfico.

III.4. Métrica de restauración

La métrica utilizada en este trabajo, es la raíz del error cuadrático medio $RMSE$, la cual se define como:

$$RMSE(f, \tilde{f}) = \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M (f(k, l) - \tilde{f}(k, l))^2} \quad (89)$$

Para una imagen, donde $f(k, l)$ es la imagen original y $\tilde{f}(k, l)$ es la imagen restaurada, donde el $RMSE$ representa la raíz cuadrada del valor esperado del error entre f y \tilde{f} .

Existen otras métricas tales como el error absoluto medio (MAE), que de igual manera supone conocida la imagen original $\{f(k, l)\}$ como la imagen restaurada $\{\tilde{f}(k, l)\}$ y se

define de la siguiente manera:

$$MAE(f, \tilde{f}) = \frac{1}{M^2} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M |f(k, l) - \tilde{f}_{k, l}| \quad (90)$$

En este trabajo utilizamos el primer criterio (ecuación (89)).

III.5. Resumen

En este capítulo se realizó una revisión de los modelos mas usuales de degradación por ruido, emborronamiento, lineal, aditivo y multiplicativo y se describieron los escenarios físicos donde se presenta cada uno de ellos. Lo anterior nos permite comprender la complejidad del área de restauración de imágenes digitales, así como la frecuencia en la que se presenta en nuestra vida diaria.. Es importante mencionar que existen otros modelos de degradación, en el caso de emborronamiento, sin embargo los fundamentos teóricos y matemáticos fueron presentados y pueden servir como base para el estudio de nuevos modelos. Asimismo, se describieron los métodos para realizar la restauración de los principales modelos presentados. Se utilizaron imágenes digitales para ejemplificar de manera mas clara la forma en que el esquema degradación-restauración funciona en la práctica. Por último, debido a que la restauración es un proceso matemático que se puede medir su desempeño de manera objetiva, se presentaron métricas que nos ayudan a cuantificar la restauración realizada,

Capítulo IV

Microscaneo

IV.1. Introducción

El microscaneo es un enfoque sistemático para adquirir imágenes con las fases de muestra-escena ligeramente diferentes; entre imágenes sucesivas el sistema es cambiado ligeramente, en una configuración predeterminada o en una configuración aleatoria (Ng y Yau, 2005). Si la configuración es predeterminada se le conoce como microscaneo controlado.

En la figura 17, se ilustra el proceso del microscaneo utilizado por Shi *et al.* (2006) para obtener una secuencia de imágenes $\{s_p(k, l), p = 1..P\}$. En este proceso, se cuenta con una inalterable escena desplazada entre imágenes, con una degradación y ruido variable en cada imagen, y una cuadrícula de muestreo fija.

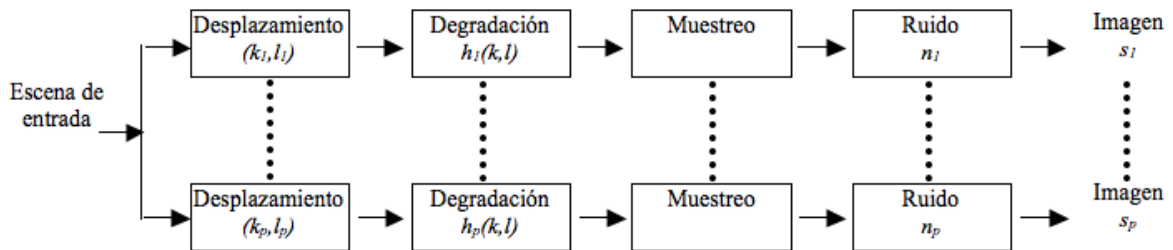


Figura 14: Esquema del microscaneo utilizado por Shi *et al.* (2006)

Una de las aplicaciones de la metodología del microscaneo es obtener información para realizar *Super Resolución*, (Zhang *et al.*, 2011). Los métodos de *Super Resolución* consisten en que a partir de un conjunto finito de imágenes de baja resolución, se puede crear una imagen de alta resolución.

IV.2. Microescaneo propuesto

En el presente trabajo, utilizaremos el microescaneo controlado de un elemento (pixel). Se utilizará una secuencia de cinco imágenes de entrada $\{s_i(k, l), i = 0, \dots, 4\}$, la primera imagen es sin ningún desplazamiento, la segunda y la cuarta con un desplazamiento de un elemento hacia abajo y hacia arriba respectivamente y finalmente la tercera y la quinta imagen, con un desplazamiento de un pixel hacia la derecha y hacia la izquierda, respectivamente.

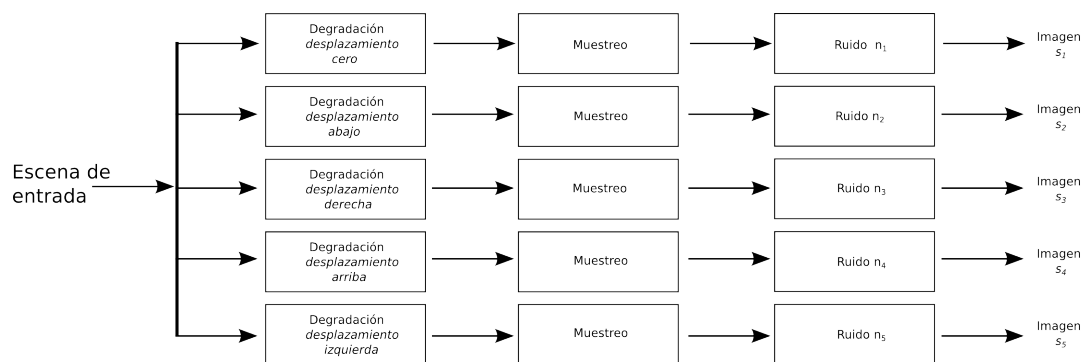


Figura 15: Esquema del microescaneo utilizado en este trabajo

La figura 15 ilustra el proceso de microescaneo utilizado en este trabajo, con una inalterable escena desplazada entre imágenes, con una función de degradación desplazada entre imágenes, con un ruido aditivo variable, y una cuadrícula de muestreo fija.

Es importante mencionar, que la realización del microescaneo propuesto en este trabajo requiere de la exactitud del desplazamiento de un elemento de la imagen (pixel), lo que puede parecer muy complicado de realizar en el mundo real, ya que cualquier movimiento involuntario o vibración no controlada de la cámara, nos alejaría de nuestro propósito. Sin embargo, en la siguiente sección se mostrarán dispositivos físicos que pueden realizar el desplazamiento requerido con la exactitud deseada.

IV.3. Dispositivos físicos

Como se mencionó en la sección anterior, la exactitud en el desplazamiento es muy importante al momento de adquirir el conjunto de imágenes degradadas que servirán para realizar la restauración. Tal exactitud es posible con los actuadores piezoeléctricos. Un actuador piezoeléctrico es un dispositivo que produce movimiento en respuesta de una señal eléctrica. Los actuadores piezoeléctricos usan el efecto inverso de la piezoelectricidad y a menudo son usados en aplicaciones que requieren un desplazamiento pequeño con un control ultrafino. Un amplio rango de diseño de actuadores son posibles dependiendo de la fuerza y el desplazamiento requerido en la aplicación (Sensortech, 2011). Los actuadores que utilizan este fenómeno se utilizan desde hace más de dos décadas y han revolucionado el mundo del posicionamiento de precisión. El movimiento preciso que resulta cuando un campo eléctrico es aplicado al material es de gran utilidad para el nanoposicionamiento.

Algunas de las ventajas de los actuadores piezoeléctricos son las siguientes (Cúpich y Elizondo, 2011):

- *Resolución.*- Un actuador piezoeléctrico puede producir cambios de posición extremadamente finos por abajo del rango subnanómetro. Los pequeños cambios en el voltaje de operación son convertidos en suaves movimientos.
- *Generación de grandes fuerzas.*- Un actuador piezoeléctrico puede generar una fuerza de varios miles de Newtons. Existen unidades comerciales que pueden sostener cargas de varias toneladas y posicionarlas con resolución subnanométrica.
- *Expansión rápida.*- Los piezoactuadores ofrecen el tiempo más rápido de respuesta disponible (microsegundos).
- *Ningún efecto magnético.*- Los actuadores piezoeléctricos no producen campos magnéticos ni son afectados por éstos.
- *Baja potencia de consumo.*- El efecto piezo convierte directamente energía eléctrica en movimiento absorbiendo energía solo durante éste. La operación estática, aún

sosteniendo cargas pesadas no consume potencia.

- *Libre de desgaste y rotura.*- Un actuador piezo no tiene engranes ni ejes rotativos. Su desplazamiento se basa en la dinámica de estado sólido y no muestra desgaste ni rotura.
- *Operación a temperaturas criogénicas.*-El efecto piezo se basa en campos eléctricos y puede operar cerca de cero grados Kelvin.

Algunos materiales naturales utilizados son el cuarzo, la turmalina etc, pero se han desarrollado materiales con propiedades mejoradas tales como los materiales cerámicos ferroeléctricos policristalinos, como el BaTiO₃ y el Zirconato Titanato de Plomo (PZT). En la figura 16 se muestra un actuador piezoeléctrico miniatura, fabricado por *Physik Instrumente*¹.

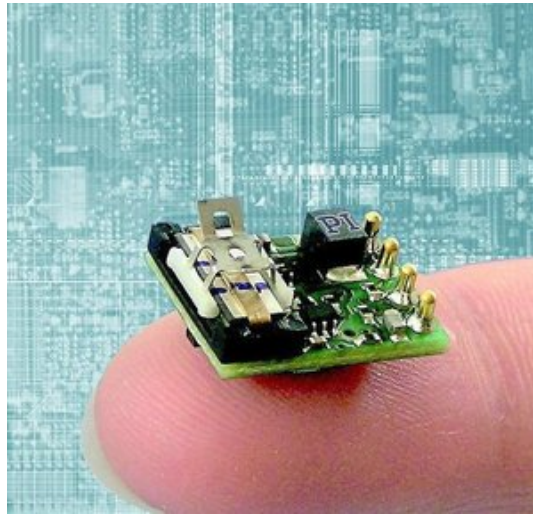


Figura 16: **Actuador piezoeléctrico miniatura (OEM P-653)**

Por otra parte, existen cámaras que realizan el proceso del microescaneo (i.e. *Axiocam HR* de la empresa Carl Zeiss²) para realizar *Súper Resolución* (Carl-Zeiss, 2011). De los ejemplos mencionados en esta sección, se puede concluir que el microescaneo que se propone en este trabajo de investigación es posible de realizar con la exactitud requerida

¹<http://www.directindustry.es/>

²<http://www.zeiss.de/axiocam>

para poder restaurar imágenes degradadas bajo condiciones de interferencias aditivas y multiplicativas con ruido aditivo e impulsivo.

IV.4. Resumen

En este capítulo se presentaron una parte muy importante de nuestro trabajo, ya que se define y describe el proceso a nivel general del microescaneo. De igual forma, se expuso la manera en la cual, el enfoque del microescaneo, será utilizado en nuestros métodos de restauración propuestos, es decir, la forma en la que obtendremos varias imágenes degradadas de la misma escena. Asimismo, se presentan ejemplos de dispositivos reales (i.e. actuador piezoeléctrico) con sus características intrínsecas (posicionamiento nanométrico), que permiten realizar implementaciones que realizan el enfoque del microescaneo. Por último, se mencionan y se dan referencias de cámaras que ya incluyen este proceso, pero con propósitos diferentes a los nuestros.

Capítulo V

Métodos de restauración utilizando microescaneo

En este capítulo, partiendo de los modelos de degradación presentados en los capítulos anteriores y utilizando el criterio de minimización del error cuadrático medio (*MMSE*, por sus siglas en inglés), se diseñan métodos para restaurar imágenes degradadas y se presenta un algoritmo rápido para su implementación en sistemas reales. De esta manera se presenta, el sustento matemático de los métodos propuestos y la metodología para su desarrollo.

El conjunto de imágenes observadas y obtenidas por la técnica del microescaneo está dado por el conjunto $\{s_p(k, l), p = 1, 2, 3, 4, 5\}$ donde p denota el tiempo de captura en cada imagen observada; cada imagen observada será de tamaño $M \times M$, donde por simplicidad $M = 2^x$, donde x es un entero positivo.

V.1. Método de restauración para el modelo de degradación aditiva

En esta sección se describen los métodos de restauración para el modelo de degradación aditiva afectados por ruido aditivo y posteriormente, por ruido aditivo e impulsivo, así como también se describe el caso en el que el modelo de degradación contiene regiones de píxeles dañados en racimo.

V.1.1. Método con ruido aditivo

La primera imagen observada degradada por una interferencia aditiva y ruido aditivo se describe de la siguiente manera:

$$s_1(k, l) = a(k, l) + f(k, l) + n_1(k, l), \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 \leq l \leq M \quad (91)$$

siendo la coordenada $(1, 1)$ la esquina superior izquierda de la imagen observada y donde k representa las filas y l las columnas. Con la ayuda del microescaneo propuesto en el capítulo anterior, se obtienen cuatro imágenes consecutivas con un desplazamiento de un pixel horizontal y otro vertical de la siguiente forma:

$$s_2(k, l) = a(k - 1, l) + f(k, l) + n_2(k, l), \quad 1 < k \leq M, \quad 1 \leq l \leq M \quad (92)$$

$$s_3(k, l) = a(k, l - 1) + f(k, l) + n_3(k, l), \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 < l \leq M \quad (93)$$

$$s_4(k, l) = a(k + 1, l) + f(k, l) + n_4(k, l), \quad 1 \leq k < M, \quad 1 \leq l \leq M \quad (94)$$

$$s_5(k, l) = a(k, l + 1) + f(k, l) + n_5(k, l), \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 \leq l < M \quad (95)$$

en la ecuación (92) la función de degradación se desplaza un pixel hacia abajo, en la ecuación (93) la función de degradación se desplaza un pixel a la derecha, en la ecuación (94) la función de degradación se desplaza un pixel hacia arriba y por último en la ecuación (95), el desplazamiento de la función de degradación de un pixel hacia la izquierda, como se propuso en la figura 15.

La idea del algoritmo de restauración es utilizar la información acerca de las relaciones espaciales entre las imágenes degradadas a través de las filas y las columnas. Se inicia definiendo las matrices de gradientes R_1 , R_2 , C_1 y C_2 como a continuación se describe: para $k = 1, 2, \dots, M$, se cumple que $R_1(M, k) = 0$, $R_2(1, k) = 0$, $C_1(k, M) = 0$ y $C_2(k, 1) = 0$,

para $l = 1, 2, \dots, M$ se tienen las matrices asociadas al movimiento vertical definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} R_1(k, l) &= s_1(k, l) - s_2(k + 1, l) \\ &= f(k, l) - f(k + 1, l) + n_1(k, l) - n_2(k + 1, l), \quad 1 \leq k < M, \quad 1 \leq l \leq M \end{aligned} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} R_2(k, l) &= s_1(k, l) - s_4(k - 1, l) \\ &= f(k, l) - f(k - 1, l) + n_1(k, l) - n_4(k - 1, l), \quad 1 < k \leq M, \quad 1 \leq l \leq M \end{aligned} \quad (97)$$

por lo tanto, de la ecuación (96) se tiene lo siguiente:

$$R_1(k, l) = \begin{bmatrix} s_1(1, 1) - s_2(2, 1) & s_1(1, 2) - s_2(2, 2) & \cdots & s_1(1, M) - s_2(2, M) \\ s_1(2, 1) - s_2(3, 1) & s_1(2, 2) - s_2(3, 2) & \cdots & s_1(2, M) - s_2(3, M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_1(M - 1, 1) - s_2(M, 1) & s_1(M - 1, 2) - s_2(M, 2) & \cdots & s_1(M - 1, M) - s_2(M, M) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (98)$$

y de la ecuación (97) se obtiene la siguiente matriz

$$R_2(k, l) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1(2, 1) - s_4(1, 1) & s_1(2, 2) - s_4(1, 2) & \cdots & s_1(2, M) - s_4(1, M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_1(M, 1) - s_4(M - 1, 1) & s_1(M, 2) - s_4(M - 1, 2) & \cdots & s_1(M, M) - s_4(M - 1, M) \end{bmatrix}, \quad (99)$$

asociados al movimiento horizontal se definen las siguientes matrices C_1 y C_2 , donde

$$\begin{aligned} C_1(k, l) &= s_1(k, l) - s_3(k, l + 1) \\ &= f(k, l) - f(k, l + 1) + n_1(k, l) - n_3(k, l + 1), \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 \leq l < M, \end{aligned} \quad (100)$$

y

$$\begin{aligned} C_2(k, l) &= s_1(k, l) - s_5(k, l - 1) \\ &= f(k, l) - f(k, l - 1) + n_1(k, l) - n_5(k, l - 1), \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 < l \leq M \end{aligned} \quad (101)$$

de la ecuación (100) se tiene:

$$C_1(k, l) = \begin{bmatrix} s_1(1, 1) - s_3(1, 2) & s_1(1, 2) - s_3(1, 3) & \cdots & s_1(1, M - 1) - s_3(1, M) & 0 \\ s_1(2, 1) - s_3(2, 2) & s_1(2, 2) - s_3(2, 3) & \cdots & s_1(2, M - 1) - s_3(2, M) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_1(M, 1) - s_3(M, 2) & s_1(M, 2) - s_3(M, 3) & \cdots & s_1(M, M - 1) - s_3(M, M) & 0 \end{bmatrix}, \quad (102)$$

y de la ecuación (101) se presenta:

$$C_2(k, l) = \begin{bmatrix} 0 & s_1(1, 2) - s_5(1, 1) & s_1(1, 3) - s_5(1, 2) & \cdots & s_1(1, M) - s_5(1, M - 1) \\ 0 & s_1(2, 2) - s_5(2, 1) & s_1(2, 3) - s_5(2, 2) & \cdots & s_1(2, M) - s_5(2, M - 1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & s_1(M, 2) - s_5(M, 1) & s_1(M, 3) - s_5(M, 2) & \cdots & s_1(M, M) - s_5(M, M - 1) \end{bmatrix}. \quad (103)$$

A continuación , utilizando el criterio del *MMSE*, se desea minimizar la varianza del

ruido aditivo presente en las matrices gradientes (R_1 , R_2 , C_1 , y C_2), por lo que se presenta la siguiente función objetivo:

$$F^\alpha = F_a^\alpha + F_b^\alpha + F_c^\alpha \quad (104)$$

donde $\{F_a^\alpha\}$, toma en cuenta la información del ruido contenido en la parte central de la imagen sin considerar los bordes, esto es :

$$F_a^\alpha = \sum_{k,l \in [2, M-1]} \left\{ [R_1(k, l) - f(k, l) + f(k+1, l)]^2 \right. \\ \left. + [C_1(k, l) - f(k, l) + f(k, l+1)]^2 \right. \\ \left. + [R_2(k, l) - f(k, l) + f(k-1, l)]^2 \right. \\ \left. + [C_2(k, l) - f(k, l) + f(k, l-1)]^2 \right\}, \quad (105)$$

donde F_b^α contiene información de los bordes de la imagen excluyendo los elementos de las esquinas,

$$\begin{aligned}
F_b^\alpha = & \sum_{l \in [2, M-1]} \left\{ [R_1(1, l) - f(1, l) + f(2, l)]^2 + [C_1(1, l) - f(1, l) + f(1, l+1)]^2 \right. \\
& \left. + [C_2(1, l) - f(1, l) + f(1, l-1)]^2 \right\} \\
+ & \sum_{k \in [2, M-1]} \left\{ [R_1(k, 1) - f(k, 1) + f(k+1, 1)]^2 + [C_1(k, 1) - f(k, 1) + f(k, 2)]^2 \right. \\
& \left. + [R_2(k, 1) - f(k, 1) + f(k-1, 1)]^2 \right\} \\
+ & \sum_{k \in [2, M-1]} \left\{ [R_1(k, M) - f(k, M) + f(k+1, M)]^2 \right. \\
& + [R_2(k, M) - f(k, M) + f(k-1, M)]^2 \\
& \left. + [C_2(k, M) - f(k, M) + f(k, M-1)]^2 \right\} \\
+ & \sum_{l \in [2, M-1]} \left\{ [C_1(M, l) - f(M, l) + f(M, l+1)]^2 \right. \\
& + [R_2(M, l) - f(M, l) + f(M-1, l)]^2 \\
& \left. + [C_2(M, l) - f(M, l) + f(M, l-1)]^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{106}$$

Finalmente, F_c^α se basa en la información de ruido contenida en las cuatro esquinas de la imagen

$$\begin{aligned}
F_c^\alpha = & [R_1(1, 1) - f(1, 1) + f(2, 1)]^2 + [C_1(1, 1) - f(1, 1) + f(1, 2)]^2 \\
& + [R_1(1, M) - f(1, M) + f(2, M)]^2 + [C_2(1, M) - f(1, M) + f(1, M-1)]^2 \\
& + [C_1(M, 1) - f(M, 1) + f(M, 2)]^2 + [R_2(M, 1) - f(M, 1) + f(M-1, 1)]^2 \\
& + [R_2(M, M) - f(M, M) + f(M-1, M)]^2 \\
& + [C_2(M, M) - f(M, M) + f(M, M-1)]^2.
\end{aligned} \tag{107}$$

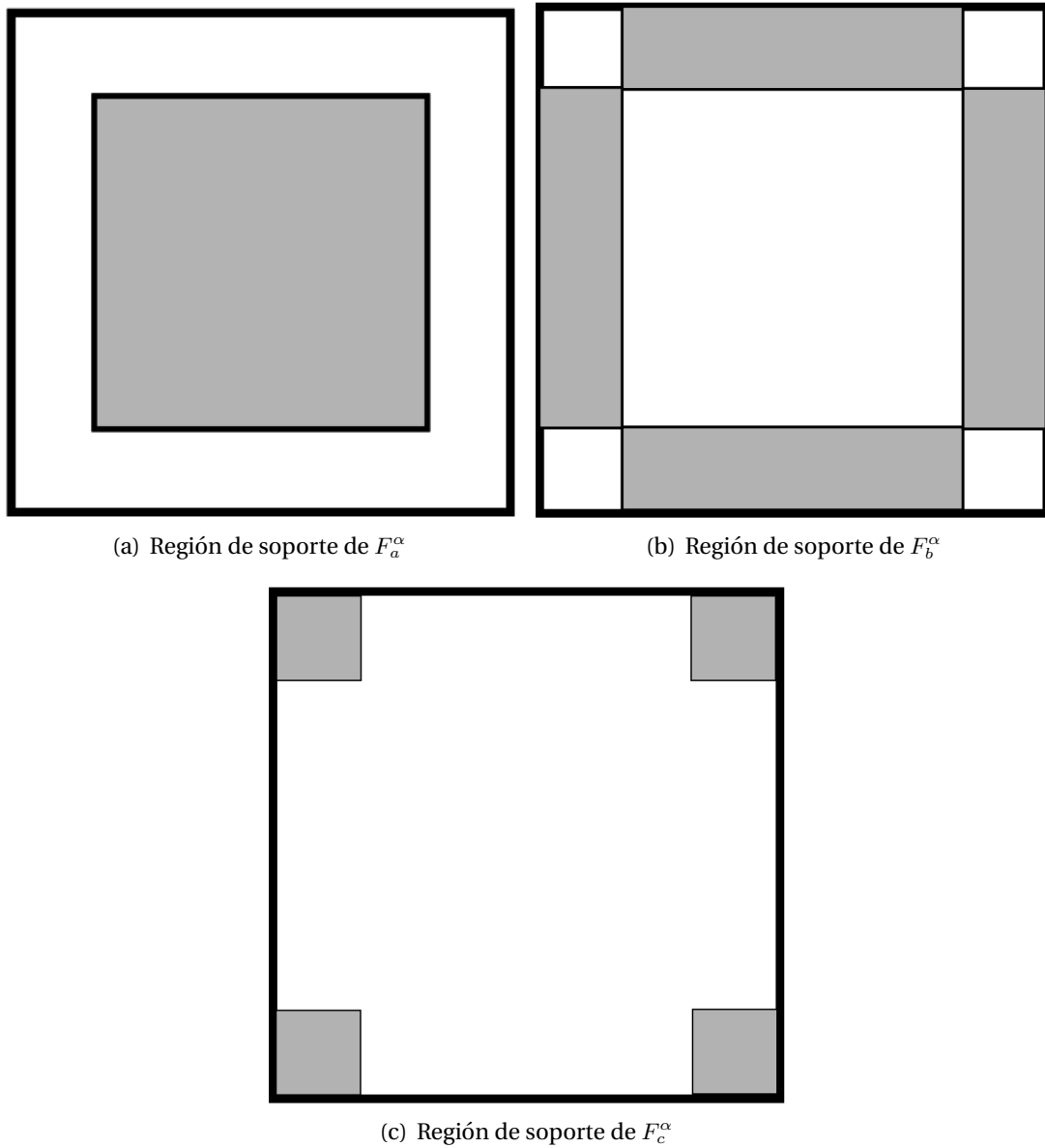


Figura 17: **Regiones de información de ruido que abarca F^α en la imagen**

En la figura 17 se muestran las regiones de soporte (en color gris), que abarcan las funciones F_a^α, F_b^α y F_c^α .

La minimización de la función objetivo, se realiza obteniendo las derivadas de la función objetivo con respecto a $\{f(k, l)\}$, lo cual conduce a un sistema lineal de ecuaciones.

En notación matriz-vector esto puede ser escrito como sigue:

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{u}, \quad (108)$$

donde la matriz \mathbf{A} es de tamaño $M^2 \times M^2$, y \mathbf{f} es la versión de la imagen original en forma de vector de tamaño $M^2 \times 1$, y el vector $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R + \mathbf{u}_C$ de tamaño $M^2 \times 1$. Los vectores \mathbf{u}_R y \mathbf{u}_C son calculados de la siguiente manera:

$$\mathbf{u}_R(l) = R_1(1, l) - R_2(2, l), \quad 1 \leq l \leq M, \quad (109)$$

$$\mathbf{u}_R(kM + l) = R_1(k + 1, l) - R_1(k, l) + R_2(k + 1, l) - R_2(k + 2, l), \quad (110)$$

donde $1 \leq l \leq M$, $1 \leq k \leq M - 2$, y

$$\mathbf{u}_R(M^2 - l) = -R_1(M - 1, M - l) + R_2(M, M - l), \quad 0 \leq l \leq M - 1 \quad (111)$$

$$\mathbf{u}_C(kM + 1) = C_1(k + 1, 1) - C_2(k + 1, 2), \quad 0 \leq k \leq M - 1 \quad (112)$$

$$\mathbf{u}_C(kM + l) = C_1(k + 1, l) - C_1(k + 1, l - 1) + C_2(k + 1, l) - C_2(k + 1, l + 1), \quad (113)$$

con $2 \leq l \leq M - 1$, $0 \leq k \leq M - 1$, y

$$\mathbf{u}_C(kM) = -C_1(k, M - 1) + C_2(k, M), \quad 1 \leq k \leq M. \quad (114)$$

La matriz \mathbf{A} es dispersa y puede ser representada como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \quad (115)$$

donde las matrices $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ y \mathbf{A}_3 , de tamaño $M \times M$ cada una de ellas, son descritas de manera explícitas como:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad (116)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad (117)$$

y donde \mathbf{A}_3 es una matriz diagonal de la siguiente forma

$$\mathbf{A}_3 = \text{diag}[-2, -2, \dots, -2]. \quad (118)$$

El rango de la matriz \mathbf{A} es de $M^2 - 1$, de esta manera la imagen original puede ser

restaurada si a un pixel de la imagen se le asigna de manera *a priori* una constante, para efectos de este trabajo, el último pixel de la imagen que se va a obtener por el proceso de restauración, se asigna el valor de cero. Después de la restauración la imagen obtenida es procesada punto a punto para que obtenga el mismo valor de la media (la cual se asume como conocida) de la imagen original, de esta manera el método de restauración es un método de regularización estadístico, en el cual, la media de la imagen original funciona como el parámetro de regularización para obtener una imagen estimada que se aproxima a la original.

Para resolver el sistema de ecuaciones lineales provista por la ecuación (108), utilizamos el método del gradiente conjugado (Golub y Van Loan, 1996). La complejidad computacional del algoritmo es dada por el orden de ejecución del gradiente conjugado y el tamaño de la imagen a ser restaurada. La complejidad del método del gradiente conjugado es estimada en $O(np)$ operaciones, donde p es el número de entradas no cero en la matriz, y n es el número de iteraciones requeridas para resolver sistemas de ecuaciones. En este caso, $p = O(5M^2)$ y $n = qM$, donde q depende de la precisión de la solución (parametro de regularización), en nuestros experimentos $q \in [3, 10]$. Así la complejidad computacional del método de restauración puede ser estimado como $O(5qM^3)$ operaciones.

Una versión simplificada de este método propuesto puede ser fácilmente obtenida cuando solo las primeras tres imágenes observadas obtenidas por microescaneo son utilizadas. En este caso, la función objetivo esta formado de la siguiente manera

$$F^\beta = F_a^\beta + F_b^\beta \quad (119)$$

donde las funciones F_a^β abarcan la información de ruido presente en la mayor parte de la imagen como se indica en la figura 18(a) (región gris), y se describe de la siguiente manera:

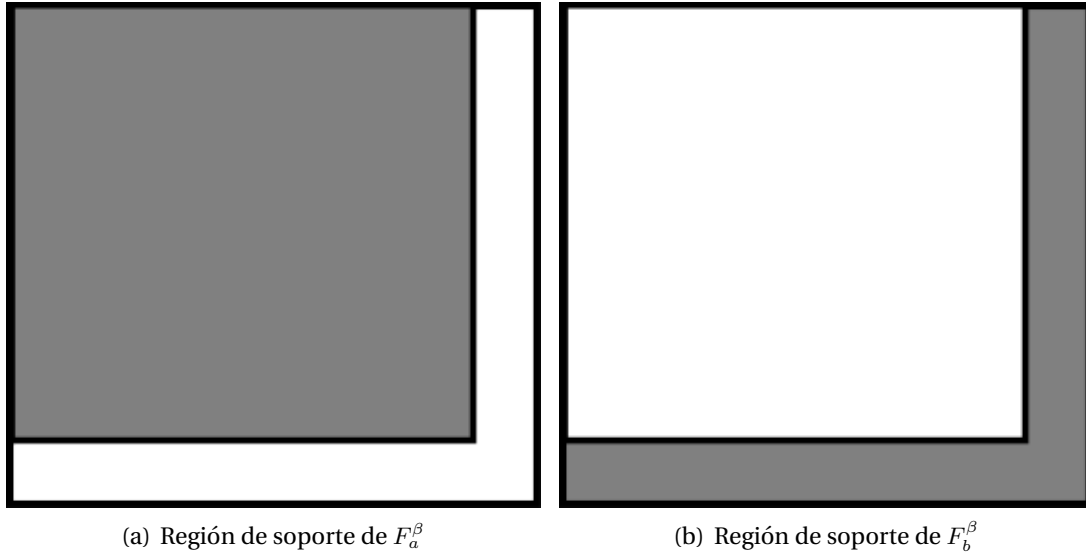


Figura 18: **Regiones de información de ruido que abarca F^β en la imagen.**

$$F_a^\beta = \sum_{k,l \in [M-1]} \left\{ [R_1(k,l) - f(k,l) + f(k+1,l)]^2 + [C_1(k,l) - f(k,l) + f(k,l+1)]^2 \right\}, \quad (120)$$

el otro término F_b^β representa la información contenida en dos de los bordes de la imagen (la columna derecha y la última fila) como se puede apreciar en la figura 18(b) (región gris). La ecuación que representa a F_b^β se describe como:

$$F_b^\beta = \sum_{l \in [M-1]} [C_1(M,l) - f(M,l) + f(M,l+1)]^2 + \sum_{k \in [M-1]} [R_1(k,M) - f(k,M) + f(k+1,M)]^2 \quad (121)$$

La idea es la misma que la ecuación (104), pero utilizando menos información. La minimización de la función objetivo F^β con respecto a $\{f(k, l)\}$ conduce, de la misma manera que la función mostrada en la ecuación (104), a un sistema lineal de ecuaciones. De manera similar, este sistema se puede expresar como la ecuación (108) y sus componentes, con la diferencia de que las entradas no cero de la matriz \mathbf{A} deben ser divididas por un factor de 2 y el vector de \mathbf{u} puede ser calculado del mismo vector utilizado en las cinco imágenes observadas en la ecuación (108) eliminando los términos R_2 y C_2 .

V.1.2. Método con ruido impulsivo

En esta sección, se presenta el modelo de degradación aditiva con ruido aditivo y ruido impulsivo como se describió en el capítulo III, utilizando tres imágenes (por simplicidad) obtenidas por la técnica del microescaneo, tenemos las siguiente ecuaciones:

$$s_1(k, l) = (a(k, l) + f(k, l)) z(k, l) + n_1(k, l), \quad 1 \leq k, l \leq M \quad (122)$$

$$s_2(k, l) = (a(k - 1, l) + f(k, l)) z(k - 1, l) + n_2(k, l), \quad 1 < k \leq M, \quad 1 \leq l \leq M \quad (123)$$

$$s_3(k, l) = (a(k, l - 1) + f(k, l)) z(k, l - 1) + n_3(k, l), \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 < l \leq M \quad (124)$$

donde $\{z(k, l)\}$ representa a la función de ruido impulsivo (caracterizada por una matriz binaria), la cual fue descrita en la ecuación (85), recordemos que en el presente trabajo, el ruido impulsivo esta caracterizado por *píxeles muertos*, dicho de otra manera, por píxeles defectuosos por defecto de fabricación o daño de uso; los cuales están permanentemente apagados, es decir, con valor del pixel en ese punto igual a cero. Las ecuaciones (123) y (124), corresponden al movimiento del microescaneo en el sentido vertical y horizontal respectivamente.

Realizando un procedimiento similar al presentado en la sección anterior, se obtiene la siguiente matriz de gradiente asociado al movimiento vertical de las ecuaciones (122) y (123):

$$\begin{aligned} R_1(k, l) &= s_1(k, l) - s_2(k + 1, l) \\ &= z(k, l) (f(k, l) - f(k + 1, l)) + n_1(k, l) - n_2(k + 1, l), \quad 1 \leq k < M, \quad 1 \leq l \leq M, \end{aligned} \quad (125)$$

y la matriz asociada al movimiento horizontal de las ecuaciones (122) y (124) se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C_1(k, l) &= s_1(k, l) - s_3(k, l + 1) \\ &= z(k, l) (f(k, l) - f(k, l + 1)) + n_1(k, l) - n_3(k, l + 1), \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 \leq l < M, \end{aligned} \quad (126)$$

utilizando las ecuaciones (125) y (126) obtenemos la siguiente función objetivo:

$$F^\gamma = F_a^\gamma + F_b^\gamma \quad (127)$$

donde la función F_a^γ se describe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F_a^\gamma &= \sum_{k, l \in [M-1]} \left\{ [R_1(k, l) - z(k, l) (f(k, l) - f(k + 1, l))]^2 \right. \\ &\quad \left. + [C_1(k, l) - z(k, l) (f(k, l) - f(k, l + 1))]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (128)$$

el otro término F_b^γ representa la información contenida en dos de los bordes de la imagen (la columna derecha y la última fila). La ecuación que representa a F_b^γ se describe como:

$$\begin{aligned}
F_b^\gamma = & \\
& \sum_{l \in [M-1]} [C_1(M, l) - z(M, l)(f(M, l) - f(M, l + 1))]^2 \\
& + \sum_{k \in [M-1]} [R_1(k, M) - z(k, M)(f(k, M) - f(k + 1, M))]^2,
\end{aligned} \tag{129}$$

como es posible apreciar, la función objetivo correspondiente a la ecuación (127), contiene términos de la matriz binaria $\{z(k, l)\}$, la cual es desconocida debido a que estamos desarrollando métodos ciegos; de esta manera, se supone que todos los píxeles de las imágenes observadas son *no-corruptas* por ruido impulsivo. Por otra parte, durante el proceso de microescaneo, la intensidad de la información de cada píxel de la imagen original es capturado por sus tres píxeles vecinos, de tal manera, que si uno de los sensores no es defectuoso, la información acerca de la intensidad del píxel de la imagen original, es contenida en el conjunto de imágenes observadas.

Para dejar mas clara la idea anterior, se propone el siguiente ejemplo: supongamos que tenemos un sensor con un píxel dañado ubicado en el centro de la imagen $z(k_0, l_0)$ y queremos saber como se estimará el valor del píxel $\tilde{f}(k_0, l_0)$ en la imagen restaurada, primero analizamos la ocurrencia de la posición de ese píxel dentro de la función objetivo (ecuación 127), la cual esta dada por:

$$\begin{aligned}
F^\gamma(k_0, l_0) = & \left[R_1(k_0, l_0) - (\tilde{f}(k_0, l_0) - \tilde{f}(k_0 + 1, l_0)) \right]^2 \\
& + \left[C_1(k_0, l_0) - (\tilde{f}(k_0, l_0) - \tilde{f}(k_0, l_0 + 1)) \right]^2 \\
& + \left[R_1(k_0 - 1, l_0) - (\tilde{f}(k_0 - 1, l_0) - \tilde{f}(k_0, l_0)) \right]^2 \\
& + \left[C_1(k_0, l_0 - 1) - (\tilde{f}(k_0, l_0 - 1) - \tilde{f}(k_0, l_0)) \right]^2,
\end{aligned} \tag{130}$$

si ahora procedemos a realizar la primera derivada de la función objetivo con respecto

al pixel $\tilde{f}(k_0, l_0)$ e igualamos a cero, tenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^\gamma}{\partial \tilde{f}(k_0, l_0)} = & \left\{ - \left[R_1(k_0, l_0) - (\tilde{f}(k_0, l_0) - \tilde{f}(k_0 + 1, l_0)) \right] \right. \\ & - \left[C_1(k_0, l_0) - (\tilde{f}(k_0, l_0) - \tilde{f}(k_0, l_0 + 1)) \right] \\ & + \left[R_1(k_0 - 1, l_0) - (\tilde{f}(k_0 - 1, l_0) - \tilde{f}(k_0, l_0)) \right] \\ & \left. + \left[C_1(k_0, l_0 - 1) - (\tilde{f}(k_0, l_0 - 1) - \tilde{f}(k_0, l_0)) \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (131)$$

despejando en $\tilde{f}(k_0, l_0)$ de la ecuación (131),

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k_0, l_0) = & \frac{1}{4} \left\{ \tilde{f}(k_0 + 1, l_0) + \tilde{f}(k_0, l_0 + 1) + \tilde{f}(k_0 - 1, l_0) + \tilde{f}(k_0, l_0 - 1) \right. \\ & \left. + R_1(k_0, l_0) + C_1(k_0, l_0) - R_1(k_0 - 1, l_0) - C_1(k_0, l_0 - 1) \right\}, \end{aligned} \quad (132)$$

sea $z(k_0, l_0) = 0$ debido al ruido impulsivo, y para cualquier otro punto $z(k, l) = 1$, se tiene que $R_1(k_0, l_0) = 0$ y $C_1(k_0, l_0) = 0$, por otra parte, $R_1(k_0 - 1, l_0) = f(k_0 - 1, l_0) - f(k_0, l_0)$, y $C_1(k_0, l_0 - 1) = f(k_0, l_0 - 1) - f(k_0, l_0)$, y suponiendo que los valores de los pixeles que no presentan degradación por ruido impulsivo pueden llegar a aproximarse a los valores correspondientes de la imagen original, es decir:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k_0 + 1, l_0) & \approx f(k_0 + 1, l_0), \\ \tilde{f}(k_0, l_0 + 1) & \approx f(k_0, l_0 + 1), \\ \tilde{f}(k_0 - 1, l_0) & \approx f(k_0 - 1, l_0), \\ \tilde{f}(k_0, l_0 - 1) & \approx f(k_0, l_0 - 1), \end{aligned} \quad (133)$$

si ahora sustituimos las ecuaciones (133), y los valores de $R_1(k_0 - 1, l_0)$ y $C_1(k_0, l_0 - 1)$ en la ecuación (132), obtendremos :

$$\tilde{f}(k_0, l_0) \approx \frac{1}{4} \{f(k_0 + 1, l_0) + f(k_0, l_0 + 1)\} + \frac{1}{2}f(k_0, l_0), \quad (134)$$

de la ecuación (143) podemos concluir de manera teórica que estimar la intensidad del pixel $\tilde{f}(k_0, l_0)$, donde el sensor tiene un ruido impulsivo en $z(k_0, l_0) = 0$, conduce a una combinación lineal formado por la *ruta* que sigue el microescaneo al adquirir las imágenes.

	l_0-1	l_0	l_0+1
k_0-1			
k_0		1/2	1/4
k_0+1		1/4	

Figura 19: Elementos que contribuyen a la estimación del pixel $\tilde{f}(k_0, l_0)$, utilizando tres imágenes obtenidas por microescaneo.

En la figura 19, se ilustran los elementos (en color gris) que contribuyen a la estimación de la intensidad del pixel $\tilde{f}(k_0, l_0)$, cuando se tiene un pixel dañado por ruido impulsivo $z(k_0, l_0) = 0$ y se utilizan tres imágenes obtenidas por microescaneo.

Para el caso de cinco imágenes obtenidas por microescaneo, se pueden obtener los pesos y los pixeles que contribuyen a la estimación de la intensidad de un pixel central $\tilde{f}(k_0, l_0)$, cuando existe un sensor dañado(ruido impulsivo) ubicado en la posición $z(k_0, l_0)$, para eso necesitamos dos imágenes adicionales a las mostradas en las ecuaciones (122),

(123) y (124):

$$s_4(k, l) = (a(k + 1, l) + f(k, l)) z(k + 1, l) + n_4(k, l), \quad 1 \leq k < M, \quad 1 \leq l \leq M \quad (135)$$

$$s_5(k, l) = (a(k, l + 1) + f(k, l)) z(k, l + 1) + n_5(k, l), \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 \leq l < M \quad (136)$$

realizando un procedimiento similar al mencionado con anterioridad, obtenemos las matrices de gradientes asociadas al movimiento vertical y horizontal, utilizando las ecuaciones (122), (135) y (136) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} R_2(k, l) &= s_1(k, l) - s_4(k - 1, l) \\ &= z(k, l)(f(k, l) - f(k - 1, l)) + n_1(k, l) - n_4(k - 1, l), \quad 1 < k \leq M, \quad 1 \leq l \leq M \end{aligned} \quad (137)$$

$$\begin{aligned} C_2(k, l) &= s_1(k, l) - s_5(k, l - 1) \\ &= z(k, l)(f(k, l) - f(k, l - 1)) + n_1(k, l) - n_5(k, l + 1), \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 < l \leq M \end{aligned} \quad (138)$$

para obtener la función objetivo, se utiliza la misma idea descrita en la sección V.1.1, y suponiendo que la función $\{z(k, l)\}$ esta formada por unos, es decir, debido a que los valores reales se desconocen, la función objetivo se describe muy similar a la ecuación(104), con la diferencia en que las matrices de gradientes que definimos en las ecuaciones (125),(126), (137),(138) son utilizadas en la función objetivo (139) para ruido impulsivo y aditivo,

$$F^\phi = F_a^\phi + F_b^\phi + F_c^\phi \quad (139)$$

donde $\{F_a^\phi\}$, se define como

$$\begin{aligned}
 F_a^\phi = \sum_{k,l \in [2, M-1]} & \left\{ [R_1(k, l) - f(k, l) + f(k+1, l)]^2 \right. \\
 & + [C_1(k, l) - f(k, l) + f(k, l+1)]^2 \\
 & + [R_2(k, l) - f(k, l) + f(k-1, l)]^2 \\
 & \left. + [C_2(k, l) - f(k, l) + f(k, l-1)]^2 \right\}, \tag{140}
 \end{aligned}$$

donde la descripción de los términos F_b^ϕ y el termino F_c^ϕ son similares a las ecuaciones (106) y (107) , nuevamente la diferencia son las definiciones de las matrices de gradientes como se mencionó anteriormente.

Por lo anterior, las ecuaciones que forman la función objetivo donde solo aparecen los términos asociados a $\tilde{f}(k_0, l_0)$ para el microescaneo de 5 imágenes es:

$$\begin{aligned}
 F^\phi(k_0, l_0) = F^\gamma(k_0, l_0) & \\
 & + \left[R_2(k_0, l_0) - (\tilde{f}(k_0, l_0) - \tilde{f}(k_0 - 1, l_0)) \right]^2 \\
 & + \left[C_2(k_0, l_0) - (\tilde{f}(k_0, l_0) - \tilde{f}(k_0, l_0 - 1)) \right]^2 \\
 & + \left[R_2(k_0 + 1, l_0) - (\tilde{f}(k_0 + 1, l_0) - \tilde{f}(k_0, l_0)) \right]^2 \\
 & + \left[C_2(k_0, l_0 + 1) - (\tilde{f}(k_0, l_0 + 1) - \tilde{f}(k_0, l_0)) \right]^2, \tag{141}
 \end{aligned}$$

posteriormente, se deriva con respecto al pixel afectado por ruido impulsivo e igualamos a cero. Finalmente se despeja con respecto al pixel que se desea estimar quedando la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(k_0, l_0) &= \frac{1}{4} \left\{ \tilde{f}(k_0 - 1, l_0) + \tilde{f}(k_0, l_0 - 1) + \tilde{f}(k_0, l_0 + 1) + \tilde{f}(k_0 + 1, l_0) \right\} \\
&+ \frac{1}{8} \left\{ -C_1(k_0, l_0 - 1) + C_1(k_0, l_0) + C_2(k_0, l_0) - C_2(k_0, l_0 + 1) \right\} \\
&+ \frac{1}{8} \left\{ -R_1(k_0 - 1, l_0) + R_1(k_0, l_0) + R_2(k_0, l_0) - R_2(k_0 + 1, l_0) \right\}.
\end{aligned} \tag{142}$$

Para poder estimar el valor del pixel, se utilizan las matrices gradientes definidas en los puntos que aparecen en la ecuación (142), teniendo en cuenta que los gradientes $R_1(k_0, l_0) = 0$, $R_2(k_0, l_0) = 0$, $C_1(k_0, l_0) = 0$ y $C_2(k_0, l_0) = 0$, además, se supone que pixeles no dañados por ruido impulsivo pueden aproximarse de manera muy cercana a los valores originales de la imagen a restaurar, como se describió en la ecuación (133). Realizando las sustituciones en la ecuación (142) se obtiene la siguiente combinación lineal que interpola el valor del pixel dañado:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(k_0, l_0) &\approx \\
&\approx \frac{1}{8} \left\{ f(k_0 - 1, l_0) + f(k_0 + 1, l_0) + f(k_0, l_0 - 1) + f(k_0, l_0 + 1) \right\} \\
&+ \frac{1}{2} f(k_0, l_0),
\end{aligned} \tag{143}$$

como se puede observar, la suma de los pesos es igual a 1, y la distribución de los pesos en la *ruta* del microescaneo es isotrópica. Esto es, suponga una mascara en forma de cruz, formada por 5 pixeles, y coloque la máscara centrada sobre el pixel dañado, los pixeles que quedan bajo la mascara le llamamos ruta de microescaneo. En la figura 20, se muestran los elementos (color gris) que contribuyen a la estimación de la intensidad del pixel $\tilde{f}(k_0, l_0)$, cuando se tiene un pixel dañado por ruido impulsivo $z(k_0, l_0) = 0$ y se utiliza cinco imágenes obtenidas por microescaneo.

De esta forma, se muestra que la técnica del microescaneo nos proporciona suficiente

	l_0-1	l_0	l_0+1
k_0-1		1/8	
k_0	1/8	1/2	1/8
k_0+1		1/8	

Figura 20: Elementos que contribuyen a la estimación del pixel $\tilde{f}(k_0, l_0)$, utilizando cinco imágenes obtenidas por microescaneo.

información espacial para poder interpolar la intensidad de los pixeles dañados por ruido impulsivo.

V.1.3. Método para un conjunto de pixeles dañados

A menudo, los pixeles dañados por ruido impulsivo tienden a formar conjuntos dañados de pixeles, lo cual conduce a pérdida de información completa en los pixeles involucrados. En esta sección se muestra de manera analítica, la forma en que los métodos de restauración propuestos pueden estimar información para un pixel dañado que forma parte de un conglomerado o grupo.

Sea un conglomerado de pixeles dañados por ruido impulsivo para una imagen de $M \times M$, definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
z(k_0 - 1, l_0) &= 0, \\
z(k_0, l_0 - 1) &= 0, \\
z(k_0, l_0) &= 0, \\
z(k_0, l_0 + 1) &= 0, \\
z(k_0 + 1, l_0) &= 0,
\end{aligned} \tag{144}$$

como se ilustra en la figura 21, donde las regiones grises tienen el valor de cero y las regiones blancas el valor de uno. Es posible notar, que al realizar el movimiento del microescaneo para tres imágenes, el pixel central $\tilde{f}(k_0, l_0)$, pierde toda información debido a la forma del conglomerado, dicho de otra manera las matrices de gradientes en los puntos $R_1(k_0, l_0) = 0$, $C_1(k_0, l_0) = 0$, $R_1(k_0 - 1, l_0) = 0$ y $C_1(k_0, l_0 - 1) = 0$.

La estimación del pixel $\tilde{f}(k_0, l_0)$ esta dado por la ecuación (132) para el microescaneo de tres imágenes, realizando las sustituciones de las matrices gradientes R_1 y C_1 , tenemos:

$$\tilde{f}(k_0, l_0) = \frac{1}{4} \left\{ \tilde{f}(k_0 + 1, l_0) + \tilde{f}(k_0, l_0 + 1) + \tilde{f}(k_0 - 1, l_0) + \tilde{f}(k_0, l_0 - 1) \right\}, \tag{145}$$

ahora bien, es necesario estimar cada uno de los valores de los pixeles que forman la ecuación (145) utilizando la ecuación (132) para cada uno de ellos, debido a que son pixeles que también fueron dañados por ruido impulsivo. Los valores de estimación para cada uno de los pixeles que forman la ecuación (145) esta dado por :

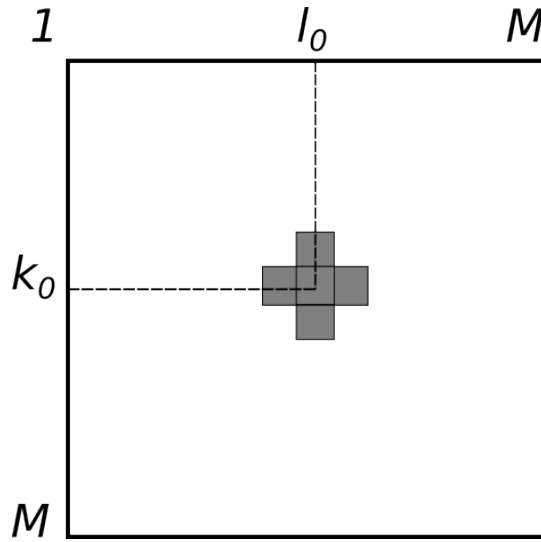


Figura 21: Distribución de los píxeles dañados, formando un conglomerado.

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(k_0 + 1, l_0) &\approx \frac{1}{4} \left(f(k_0 + 2, l_0) + f(k_0 + 1, l_0 + 1) + f(k_0 + 1, l_0) + \tilde{f}(k_0, l_0) \right), \\
 \tilde{f}(k_0, l_0 + 1) &\approx \frac{1}{4} \left(f(k_0 + 1, l_0 + 1) + f(k_0, l_0 + 2) + f(k_0, l_0 + 1) + \tilde{f}(k_0, l_0) \right), \\
 \tilde{f}(k_0 - 1, l_0) &\approx \frac{1}{4} \left(f(k_0 - 1, l_0 + 1) + 2f(k_0 - 1, l_0) + \tilde{f}(k_0, l_0) \right), \\
 \tilde{f}(k_0, l_0 - 1) &\approx \frac{1}{4} \left(f(k_0 + 1, l_0 - 1) + 2f(k_0, l_0 - 1) + \tilde{f}(k_0, l_0) \right),
 \end{aligned} \tag{146}$$

sustituyendo en la ecuación (145) y reordenando los valores de los píxeles, obtenemos que la aproximación esta dado por:

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(k_0, l_0) &\approx \frac{1}{12} \{ f(k_0 + 2, l_0) + f(k_0 + 1, l_0) + f(k_0, l_0 + 2) \\
 &\quad + f(k_0, l_0 + 1) + f(k_0 - 1, l_0 + 1) + f(k_0 + 1, l_0 - 1) \} \\
 &\quad + \frac{1}{6} \{ f(k_0 + 1, l_0 + 1) + f(k_0 - 1, l_0) + f(k_0, l_0 - 1), \}
 \end{aligned} \tag{147}$$

en la figura 22, se ilustran los píxeles que participan en la estimación del pixel $\tilde{f}(k_0, l_0)$,

del cual no se cuenta con información debido a la forma del conglomerado formado por el ruido impulsivo.

	l_0-1	l_0	l_0+1	l_0+2
k_0-1		1/6	1/12	
k_0	1/6		1/12	1/12
k_0+1	1/12	1/12	1/6	
k_0+2		1/12		

Figura 22: Elementos que contribuyen a la estimación del pixel $\tilde{f}(k_0, l_0)$, utilizando microescaneo de 3 imágenes.

como se puede observar, la estimación del pixel dañado se realiza tomando en cuenta la información de sus pixeles vecinos, en particular los vecinos que se encuentren dentro de la *ruta* del microescaneo de 3 imágenes.

Ahora se realiza la misma configuración del grupo de pixeles dañados que se muestra en la ecuación (144) y en la figura 21, y se utiliza un microescaneo de 5 imágenes. La estimación del pixel $\tilde{f}(k_0, l_0)$ esta dada por la ecuación (141) para el microescaneo de cinco imágenes, realizando las sustituciones de las matrices gradientes R_1, C_1, R_2 y C_2 , se obtiene

$$\tilde{f}(k_0, l_0) = \frac{1}{4} \left\{ \tilde{f}(k_0 + 1, l_0) + \tilde{f}(k_0, l_0 + 1) + \tilde{f}(k_0 - 1, l_0) + \tilde{f}(k_0, l_0 - 1) \right\}, \quad (148)$$

como se puede observar la ecuación (148) es similar a la ecuación definida en (145) para tres imágenes, sin embargo, la diferencia está en la estimación de los gradientes en cada uno de los elementos, como a continuación se describen:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(k_0 + 1, l_0) &\approx \frac{1}{8} \left\{ f(k_0 + 1, l_0 - 1) + f(k_0 + 1, l_0 + 1) + f(k_0 + 2, l_0) \right. \\
&\quad \left. + 3f(k_0 + 1, l_0) + 2\tilde{f}(k_0, l_0) \right\}, \\
\tilde{f}(k_0, l_0 + 1) &\approx \frac{1}{8} \left\{ f(k_0 - 1, l_0 + 1) + f(k_0, l_0 + 2) + f(k_0 + 1, l_0 + 1) \right. \\
&\quad \left. + 3f(k_0, l_0 + 1) + 2\tilde{f}(k_0, l_0) \right\}, \\
\tilde{f}(k_0 - 1, l_0) &\approx \frac{1}{8} \left\{ f(k_0 - 2, l_0) + f(k_0 - 1, l_0 - 1) + f(k_0 - 1, l_0 + 1) \right. \\
&\quad \left. + 3f(k_0 - 1, l_0) + 2\tilde{f}(k_0, l_0) \right\}, \\
\tilde{f}(k_0, l_0 - 1) &\approx \frac{1}{8} \left\{ f(k_0 - 1, l_0 - 1) + f(k_0, l_0 - 2) + f(k_0 + 1, l_0 - 1) \right. \\
&\quad \left. + 3f(k_0, l_0 - 1) + 2\tilde{f}(k_0, l_0) \right\},
\end{aligned} \tag{149}$$

sustituyendo en la ecuación (148) y reordenando los valores de los pixeles, se obtiene que la aproximación esta dada por:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(k_0, l_0) &\approx \frac{1}{24} \{ f(k_0 - 2, l_0) + f(k_0, l_0 - 2) + f(k_0, l_0 + 2) + f(k_0 + 2, l_0) \} \\
&\quad + \frac{1}{12} \{ f(k_0 - 1, l_0 - 1) + f(k_0 - 1, l_0 + 1) + f(k_0 + 1, l_0 - 1) \\
&\quad + f(k_0 + 1, l_0 + 1) \} \\
&\quad + \frac{1}{8} \{ f(k_0 - 1, l_0) + f(k_0, l_0 - 1) + f(k_0, l_0 + 1) + f(k_0 + 1, l_0) \}.
\end{aligned} \tag{150}$$

En la figura 23 se muestra que pixeles contribuyen a la estimación del pixel central del conglomerado para un microescaneo de cinco imágenes y los pesos de cada una de ellas. Se puede apreciar que la suma de los pesos es igual a uno y que los pixeles que intervienen, son lo que están en la *ruta* del microescaneo de cada uno de los pixeles que forman el conglomerado, a excepción del pixel central, que como se mencionó no posee información espacial en ese punto. De esta forma, los métodos propuestos de restauración pueden

estimar valores de pixeles dañados por ruido impulsivo.

	l_0-2	l_0-1	l_0	l_0+1	l_0+2
k_0-2			1/24		
k_0-1		1/12	1/8	1/12	
k_0	1/24	1/8		1/8	1/24
k_0+1		1/12	1/8	1/12	
k_0+2			1/24		

Figura 23: Elementos que contribuyen a la estimación del pixel $\tilde{f}(k_0, l_0)$, utilizando microscaneo de 5 imágenes.

V.2. Método de restauración para el modelo de degradación multiplicativa

En esta sección se describen los métodos de restauración para el modelo de degradación multiplicativa afectados por ruido aditivo y posteriormente por ruido aditivo e impulsivo, así como también se describe el caso en el que el modelo de degradación contiene regiones de pixeles dañados en racimo (*cluster*).

V.2.1. Método con ruido aditivo

La primera imagen observada degradada por una interferencia multiplicativa y ruido aditivo, se describe de la siguiente manera:

$$s_1(k, l) = (b(k, l)f(k, l)) + n_1(k, l), \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 \leq l \leq M, \quad (151)$$

donde $\{f(k, l)\}$ es la imagen original, la cual es degradada por una interferencia multiplicativa $\{b(k, l)\}$ (descrita en la sección III.2.2) y dañada por un ruido aditivo que varia

entre las imágenes observadas. Suponiendo que el microescaneo es capaz de separar la imagen original y la interferencia, es posible obtener varias imágenes consecutivas con un desplazamiento de un pixel horizontal y vertical de la siguiente manera:

$$s_2(k, l) = (b(k-1, l)f(k, l)) + n_2(k, l), \quad 1 < k \leq M, \quad 1 \leq l \leq M, \quad (152)$$

$$s_3(k, l) = (b(k, l-1)f(k, l)) + n_3(k, l), \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 < l \leq M, \quad (153)$$

$$s_4(k, l) = (b(k+1, l)f(k, l)) + n_4(k, l), \quad 1 \leq k < M, \quad 1 \leq l \leq M, \quad (154)$$

$$s_5(k, l) = (b(k, l+1)f(k, l)) + n_5(k, l), \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 \leq l < M, \quad (155)$$

Ahora se definen cuatro matrices de cocientes utilizando las razones entre filas y columnas de las imágenes observadas, como se describe a continuación. Primero, asignemos a los elementos que se encuentran en la frontera de las matrices el valor de uno: $V_1(M, k) = 1$, $V_2(1, k) = 1$, $H_1(k, M) = 1$ y $H_2(k, 1) = 1$, $1 \leq k \leq M$. Los demás elementos de las matrices, son calculados de la siguiente manera:

$$V_1(k, l) = \frac{s_1(k, l)}{s_2(k+1, l)}, \quad 1 \leq k < M, \quad 1 \leq l \leq M, \quad (156)$$

$$V_2(k, l) = \frac{s_1(k, l)}{s_4(k-1, l)}, \quad 1 < k \leq M, \quad 1 \leq l \leq M, \quad (157)$$

$$H_1(k, l) = \frac{s_1(k, l)}{s_3(k, l+1)}, \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 \leq l < M, \quad (158)$$

$$H_2(k, l) = \frac{s_1(k, l)}{s_5(k, l-1)}, \quad 1 \leq i \leq M, \quad 1 < j \leq M. \quad (159)$$

De las ecuaciones anteriores, se puede notar que las interferencias multiplicativas son

canceladas cuando no existe un ruido aditivo presente en las imágenes observadas. Así, para pequeñas fluctuaciones de ruido aditivo, las matrices definidas por las ecuaciones (156)-(159) son cercanas a las correspondientes matrices cocientes construidas con la imagen original y sus versiones desplazadas. Tomando en cuenta las propiedades monotónicas de las funciones logarítmicas ($\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$), se presenta la siguiente función objetivo:

$$F^\xi = F_a^\xi + F_b^\xi + F_c^\xi \quad (160)$$

donde las regiones de soporte para las funciones F_a^ξ , F_b^ξ , y F_c^ξ son las mismas que las utilizadas para el modelo de degradación aditiva. A continuación se definen los términos que conforman la ecuación (160).

$$F_a^\xi = \sum_{k,l \in [2, M-1]} \left\{ \begin{aligned} & [\ln(V_1(k, l)) - \ln(f(k, l)) + \ln(f(k+1, l))]^2 \\ & + [\ln(H_1(k, l)) - \ln(f(k, l)) + \ln(f(k, l+1))]^2 \\ & + [\ln(V_2(k, l)) - \ln(f(k, l)) + \ln(f(k-1, l))]^2 \\ & + [\ln(H_2(k, l)) - \ln(f(k, l)) + \ln(f(k, l-1))]^2 \end{aligned} \right\}, \quad (161)$$

$$\begin{aligned}
F_b^\xi = & \\
& \sum_{l \in [2, M-1]} \left\{ [\ln(V_1(1, l)) - \ln(f(1, l)) + \ln(f(2, l))]^2 \right. \\
& \quad + [\ln(H_1(1, l)) - \ln(f(1, l)) + \ln(f(1, l+1))]^2 \\
& \quad \left. + [\ln(H_2(1, l)) - \ln(f(1, l)) + \ln(f(1, l-1))]^2 \right\} \\
+ & \sum_{k \in [2, M-1]} \left\{ [\ln(V_1(k, 1)) - \ln(f(k, 1)) + \ln(f(k+1, 1))]^2 \right. \\
& \quad + [\ln(H_1(k, 1)) - \ln(f(k, 1)) + \ln(f(k, 2))]^2 \\
& \quad \left. + [\ln(V_2(k, 1)) - \ln(f(k, 1)) + \ln(f(k-1, 1))]^2 \right\} \\
+ & \sum_{k \in [2, M-1]} \left\{ [\ln(V_1(k, M)) - \ln(f(k, M)) + \ln(f(k+1, M))]^2 \right. \\
& \quad + [\ln(V_2(k, M)) - \ln(f(k, M)) + \ln(f(k-1, M))]^2 \\
& \quad \left. + [\ln(H_2(k, M)) - \ln(f(k, M)) + \ln(f(k, M-1))]^2 \right\} \\
+ & \sum_{l \in [2, M-1]} \left\{ [\ln(H_1(M, l)) - \ln(f(M, l)) + \ln(f(M, l+1))]^2 \right. \\
& \quad + [\ln(V_2(M, l)) - \ln(f(M, l)) + \ln(f(M-1, l))]^2 \\
& \quad \left. + [\ln(H_2(M, l)) - \ln(f(M, l)) + \ln(f(M, l-1))]^2 \right\},
\end{aligned} \tag{162}$$

$$\begin{aligned}
F_c^\xi = & \\
& [\ln(V_1(1, 1)) - \ln(f(1, 1)) + \ln(f(2, 1))]^2 \\
& + [\ln(H_1(1, 1)) - \ln(f(1, 1)) + \ln(f(1, 2))]^2 \\
& + [\ln(V_1(1, M)) - \ln(f(1, M)) + \ln(f(2, M))]^2 \\
& + [\ln(H_2(1, M)) - \ln(f(1, M)) + \ln(f(1, M - 1))]^2 \\
& + [\ln(H_1(M, 1)) - \ln(f(M, 1)) + \ln(f(M, 2))]^2 \\
& + [\ln(V_2(M, 1)) - \ln(f(M, 1)) + \ln(f(M - 1, 1))]^2 \\
& + [\ln(V_2(M, M)) - \ln(f(M, M)) + \ln(f(M - 1, M))]^2 \\
& + [\ln(H_2(M, M)) - \ln(f(M, M)) + \ln(f(M, M - 1))]^2 .
\end{aligned} \tag{163}$$

La minimización cuadrática de la función objetivo con respecto a $\{\ln(f(k, l))\}$ conduce a un sistema lineal de ecuaciones. Las expresiones explícitas para el sistema lineal son similares a las definidas por el modelo aditivo (ver ecuación (108)). Cuando solo las primeras tres imágenes observadas son utilizadas, se obtiene una versión simplificada del método de restauración. Para resolver el sistema de ecuaciones lineales, se utiliza el método del gradiente conjugado (de la misma manera que en el modelo de degradación aditiva). Posteriormente, para estimar los resultados de la imagen restaurada, se utiliza la función exponencial a la solución obtenida del sistema de ecuaciones lineales. Por último, la imagen obtenida es procesada punto a punto para que obtenga el mismo valor de la media (la cual se asume como conocida) de la imagen original. La complejidad computacional del método de restauración multiplicativa, es muy cercana al método de restauración para degradaciones aditiva, ya que ambos métodos utilizan el gradiente conjugado. Adicionalmente, se debe considerar el tiempo requerido para transformaciones logarítmicas y exponenciales.

Por otra parte, el análisis para píxeles con ruido impulsivo y aditivo con degradación multiplicativa, es semejante al método de interferencias aditiva (ver secciones V.1.2 y V.1.3),

debido a que los sistemas de ecuaciones lineales que se obtiene de ambos métodos de restauración son similares.

V.3. Algoritmo rápido de restauración utilizando microescaneo

En esta sección se presenta un algoritmo rápido de restauración. La idea del algoritmo es descomponer las imágenes observadas en un conjunto piramidal de pequeñas imágenes; posteriormente, aplicar los métodos propuestos de restauración a cada una de las pequeñas imágenes del conjunto y finalmente reconstruir la imagen entera a partir de las pequeñas imágenes restauradas. A continuación se describe el algoritmo para realizar lo descrito anteriormente.

La descomposición de la imagen observada $s_1(k, l)$ de tamaño $M \times M$ consiste en separar la imagen observada en cuatro pequeñas imágenes de tamaño $\frac{M}{2} \times \frac{M}{2}$ compuestas por las muestras de la imagen observada a lo largo de las filas y columnas con respecto a sus índices pares e impares (distribuciones). En la figura 24, se muestra un ejemplo de la descomposición utilizada en el presente método rápido, en la cual, una imagen de tamaño de 16 píxeles ($M = 4$) se separa en cuatro pequeñas imágenes, las flechas y el color de las matrices pequeñas, indican la posición correspondiente en la imagen de entrada. Por lo que se puede observar el muestreo de índices pares e impares que se utiliza para realizar la descomposición.

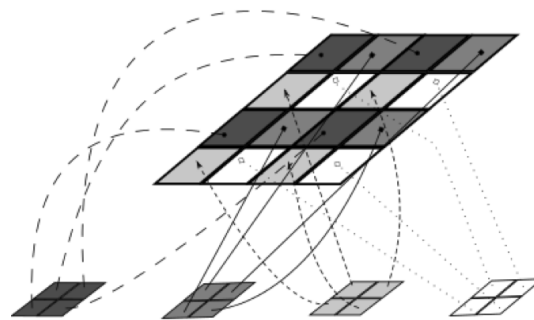


Figura 24: Descomposición de una imagen en cuatro pequeñas imágenes, utilizando el método rápido.

Para ejemplificar la descomposición, supongamos que tenemos una señal en una dimensión y queremos descomponerla en cuatro pequeñas señales, como se ilustra en la figura 25; la primera pequeña señal estaría formada por los valores que toma la señal completa en los puntos 1, 5, 9 y 13; posteriormente, la segunda pequeña señal se formaría por los valores que toma la señal completa en los puntos 2, 6, 10 y 14; de la misma forma, la tercera pequeña señal estaría conformada por los valores que toma la señal completa en los puntos 3, 7, 11 y 15; y por último, la cuarta pequeña señal estaría compuesta de los valores que toma la señal completa en los puntos 4, 8, 12 y 16. De esta forma, la descomposición permite que cada pequeña señal este formada por valores que se encuentran distribuidos en la señal completa.

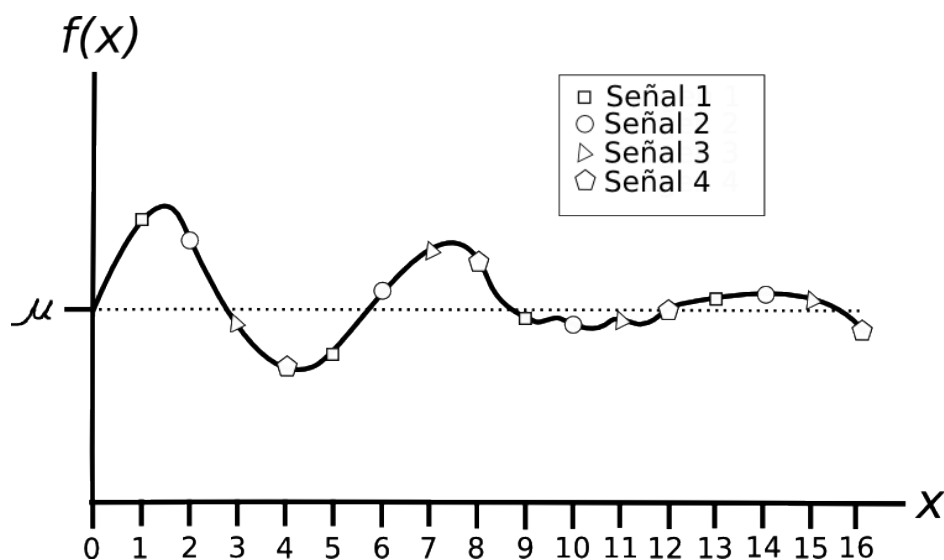


Figura 25: **Descomposición de una señal en cuatro pequeñas señales, utilizando el método basado en distribuciones.**

Por cada pequeña imagen obtenida por la descomposición, es posible obtener cuatro imágenes más pequeñas utilizando el mismo proceso de descomposición; así que repitiendo este procedimiento, se forma un conjunto piramidal de pequeñas imágenes observadas. Es importante mencionar que en cada nivel de la pirámide, la restauración puede llevarse a cabo usando las pequeñas imágenes observadas en ese nivel y la imagen completa resultante puede fácilmente formarse por las pequeñas imágenes restauradas.

Sea $d = 1, \dots, \log_2(M) - 1$ el nivel de la pirámide y $\{s_t^0(k, l) \equiv s_t(k, l), t = 1, 2, \dots, T\}$, el conjunto de imágenes enteras observadas del microescaneo, donde $T = 5$, para el caso de cinco imágenes observadas. El número de conjuntos de imágenes observadas en el nivel d es igual a 4^d . La descomposición de un conjunto de imágenes observadas en cuatro subconjuntos de pequeñas imágenes observadas en el nivel d de la pirámide, se lleva a cabo evaluando las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
s_1^d(k, l; 1) &= s_1^{d-1}(2k - 1, 2l - 1), \\
s_1^d(k, l; 2) &= s_1^{d-1}(2k, 2l - 1), \\
s_1^d(k, l; 3) &= s_1^{d-1}(2k - 1, 2l), \\
s_1^d(k, l; 4) &= s_1^{d-1}(2k, 2l), \quad 1 \leq k, l \leq \frac{M}{2^d},
\end{aligned} \tag{164}$$

y

$$\begin{aligned}
s_2^d(k, l; 1) &= s_2^{d-1}(2k - 1, 2l - 1) + s_2^{d-1}(2k - 2, 2l - 1) - s_1^{d-1}(2k - 2, 2l - 1), \\
s_2^d(k, l; 2) &= s_2^{d-1}(2k, 2l - 1) + s_2^{d-1}(2k - 1, 2l - 1) - s_1^{d-1}(2k - 1, 2l - 1), \\
s_2^d(k, l; 3) &= s_2^{d-1}(2k - 1, 2l) + s_2^{d-1}(2k - 2, 2l) - s_1^{d-1}(2k - 2, 2l), \\
s_2^d(k, l; 4) &= s_2^{d-1}(2k, 2l) + s_2^{d-1}(2k - 1, 2l) - s_1^{d-1}(2k - 1, 2l),
\end{aligned} \tag{165}$$

donde $1 < k \leq \frac{M}{2^d}$, $1 \leq l \leq \frac{M}{2^d}$ y

$$\begin{aligned}
s_3^d(k, l; 1) &= s_3^{d-1}(2k - 1, 2l - 1) + s_3^{d-1}(2k - 1, 2l - 2) - s_1^{d-1}(2k - 1, 2l - 2), \\
s_3^d(k, l; 2) &= s_3^{d-1}(2k, 2l - 1) + s_3^{d-1}(2k, 2l - 2) - s_1^{d-1}(2k, 2l - 2), \\
s_3^d(k, l; 3) &= s_3^{d-1}(2k - 1, 2l) + s_3^{d-1}(2k - 1, 2l - 1) - s_1^{d-1}(2k - 1, 2l - 1), \\
s_3^d(k, l; 4) &= s_3^{d-1}(2k, 2l) + s_3^{d-1}(2k, 2l - 1) - s_1^{d-1}(2k, 2l - 1),
\end{aligned} \tag{166}$$

donde $1 \leq k \leq \frac{M}{2^d}$, $1 < l \leq \frac{M}{2^d}$, y

$$\begin{aligned}
s_4^d(k, l; 1) &= s_4^{d-1}(2k-1, 2l-1) + s_4^{d-1}(2k, 2l-1) - s_1^{d-1}(2k, 2l-1), \\
s_4^d(k, l; 2) &= s_4^{d-1}(2k, 2l-1) + s_4^{d-1}(2k+1, 2l-1) - s_1^{d-1}(2k+1, 2l-1), \\
s_4^d(k, l; 3) &= s_4^{d-1}(2k-1, 2l) + s_4^{d-1}(2k, 2l) - s_1^{d-1}(2k, 2l), \\
s_4^d(k, l; 4) &= s_4^{d-1}(2k, 2l) + s_4^{d-1}(2k+1, 2l) - s_1^{d-1}(2k+1, 2l),
\end{aligned} \tag{167}$$

donde $1 \leq k < \frac{M}{2^d}$, $1 \leq l \leq \frac{M}{2^d}$, y

$$\begin{aligned}
s_5^d(k, l; 1) &= s_5^{d-1}(2k-1, 2l-1) + s_5^{d-1}(2k-1, 2l) - s_1^{d-1}(2k-1, 2l), \\
s_5^d(k, l; 2) &= s_5^{d-1}(2k, 2l-1) + s_5^{d-1}(2k, 2l) - s_1^{d-1}(2k, 2l), \\
s_5^d(k, l; 3) &= s_5^{d-1}(2k-1, 2l) + s_5^{d-1}(2k-1, 2l+1) - s_1^{d-1}(2k-1, 2l+1), \\
s_5^d(k, l; 4) &= s_5^{d-1}(2k, 2l) + s_5^{d-1}(2k, 2l+1) - s_1^{d-1}(2k, 2l+1),
\end{aligned} \tag{168}$$

donde $1 \leq k \leq \frac{M}{2^d}$, $1 \leq l < \frac{M}{2^d}$.

En la figura 26 se muestra el algoritmo rápido en forma de diagramas de bloques, el cual se detalla a continuación:

1. La entrada del algoritmo rápido esta dada por las imágenes observadas por microescaneo y el nivel deseado d en la pirámide.
2. La descomposición de las imágenes de entrada en imágenes pequeñas usando las ecuaciones (164-168).
3. Si el nivel deseado d es alcanzado, ir al paso 4, de otra manera regresar al paso 2.
4. Restauración del grupo de las imágenes pequeñas con el método del gradiente conjugado.
5. Reconstrucción de la imagen restaurada de manera completa a partir del conjunto de imágenes restauradas del paso 4.

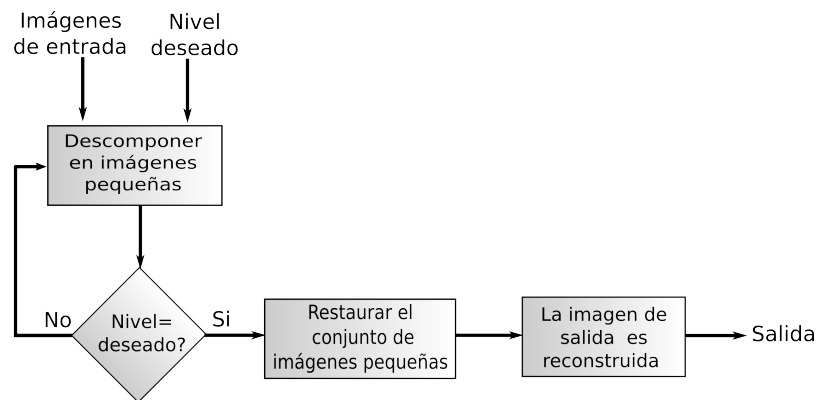


Figura 26: **Diagrama de bloques del algoritmo rápido basado en pirámides.**

La complejidad computacional del algoritmo esta compuesta del costo de crear el árbol piramidal en el nivel deseado d el cual seria $O(M^2d)$, de aplicar el método del gradiente conjugado a cada conjunto de imágenes en el nivel d , $O\left(5q\frac{M^3}{2^d}\right)$ y de formar la imagen resultante. La complejidad computacional puede ser estimada como $O\left(\left(5q\frac{M^3}{2^d}\right) + (M^2d)\right)$.

V.4. Resumen

En este capítulo, uno de los mas fundamentales de este trabajo, se describen matemáticamente con detalle, los métodos propuestos utilizando el microescaneo para la restauración de imágenes digitales. Se repasan los modelos de degradación sobre los cuales se desarrollan los métodos propuestos, pero bajo distintos escenarios (i.e. ruido impulsivo, conjunto de pixeles dañados) y se explica con detalle su funcionamiento. Se analiza y expone la complejidad algorítmica de los métodos propuestos. Por último, se presenta un algoritmo rápido lo cual permite poder implementar los métodos descritos con anterioridad en sistemas de imágenes que necesiten una respuesta antes de un tiempo específico. Asimismo, se analiza la complejidad del algoritmo, lo cual demuestra la baja complejidad del mismo.

Es importante señalar, que debido a la naturaleza de los métodos de restauración propuestos, no es necesario conocer la función de interferencia en el modelo de degradación

(métodos ciegos adaptativos). Por lo que permite su aplicación e implementación en variados escenarios de captura de imágenes, tales como obtención de imágenes por medio de cámaras infrarrojas, microscopios electrónicos etc.

Capítulo VI

Resultados experimentales y análisis de resultados

En este capítulo se presentan los experimentos con imágenes artificiales y reales de los métodos propuestos en los capítulos anteriores y los resultados en cada uno de ellos.

La métrica utilizada en este trabajo, es la raíz del error cuadrático medio (RMSE), la cual se definió en el capítulo 2, por otra parte, las imágenes utilizadas en los experimentos fueron de tamaño 256×256 pixeles, donde el rango de la señal esta dada entre $[0, 255]$. Los experimentos fueron realizados en una computadora con un procesador Intel Core 2 Duo 2.26 GHz con 4 GB.

Para garantizar estadísticamente que los resultados sean correctos, fueron realizadas 30 muestras estadísticas para obtener diferentes realizaciones de ruido blanco. Como se mencionó con anterioridad, se utilizó el método iterativo del gradiente conjugado para resolver un sistema lineal, en el cual se usó como parámetro de convergencia, que el residuo ($\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}$), sea menor a 10^{-10} .

Además, se utiliza una mejora en el despliegue visual con respecto a las diferencias entre la imagen original y la imagen restaurada, esto es para cuantificar el error en un criterio visual humano (Kober *et al.*, 2001). La mejora de la diferencia es definida como :

$$EDIF = \lambda_1 \left(f(k, l) - \tilde{f}(k, l) \right) + \lambda_2 \quad (169)$$

donde λ_1 y λ_2 son constantes predeterminadas para todos los experimentos. En las simulaciones, para el modelo aditivo se utiliza $\lambda_1 = 4$, y $\lambda_1 = 1$ para el modelo multiplicativo y $\lambda_2 = 128$. Si no hay error entre la imagen original y la imagen restaurada en un pixel dado, este pixel será desplegado como gris (el nivel de cuantización es 128). Para un máximo error, el pixel es desplegado como negro o blanco (los niveles de la señal son 0 y 255

respectivamente). Esta resta de imágenes es la base de un criterio de error subjetivo y proporciona información acerca de la calidad de la restauración introducida por el algoritmo, así como la capacidad de minimización del ruido aditivo. El uso de estas medidas de error, permite observar el rendimiento de los algoritmos propuestos.

Con fines de comparación se asume que los parámetros de degradación para el filtro Wiener (ver ecuación (88)) son conocidos a diferencia de los métodos que se proponen en el presente trabajo los cuales no poseen información acerca de la función de degradación.

VI.1. Interferencia aditiva no uniforme

En las figuras 27(a), 27(b) y 27(c), se muestra la imagen original, la interferencia aditiva no uniforme, y la imagen original degradada con la interferencia y un ruido blanco Gaussiano con media cero ($\mu = 0$) y desviación estándar de 2 ($\sigma = 2$), respectivamente. El valor de la media y de la desviación estándar de la interferencia aditiva es de 130 y 40, respectivamente. Las figuras 28(a) y 28(c) muestran las imágenes procesadas usando el método propuesto de restauración con tres y cinco imágenes observadas, respectivamente. Las figuras 28(b) y 28(d), muestran las diferencias entre la imagen original y las imágenes restauradas obtenida con tres y cinco imágenes observadas respectivamente. En las imágenes se puede apreciar que la capacidad de restauración con cinco imágenes es mejor que utilizando tres imágenes.

En la figura 29 se muestra el rendimiento de los métodos propuestos en término del *RMSE* usando tres imágenes (*Am3*), cinco imágenes (*Am5*), y el filtro Wiener con respecto a la desviación estándar del ruido blanco. Como se puede observar en la gráfica, el rendimiento de los métodos propuestos es mucho mejor que el filtro Wiener con parámetros conocidos. Esto ocurre, porque la interferencia aditiva es espacialmente no homogénea y de esta manera no puede ser considerada como una realización de un proceso estacionario.



(a) Imagen original

(b) Degradación aditiva

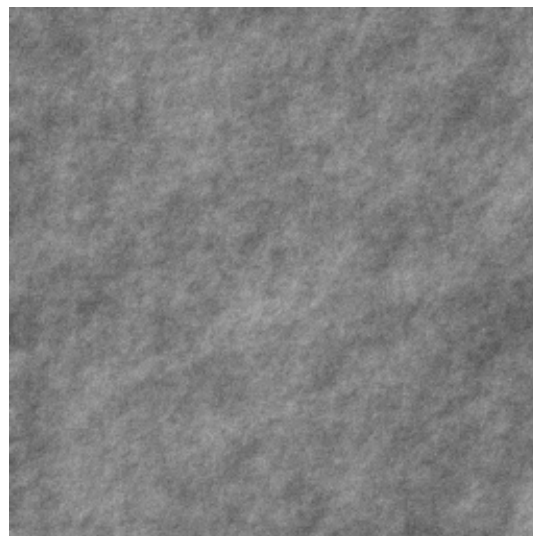


(c) Imagen degradada observada con interferencia aditiva y ruido blanco con $\sigma = 2$

Figura 27: El modelo de degradación aditiva con ruido aditivo en imágenes



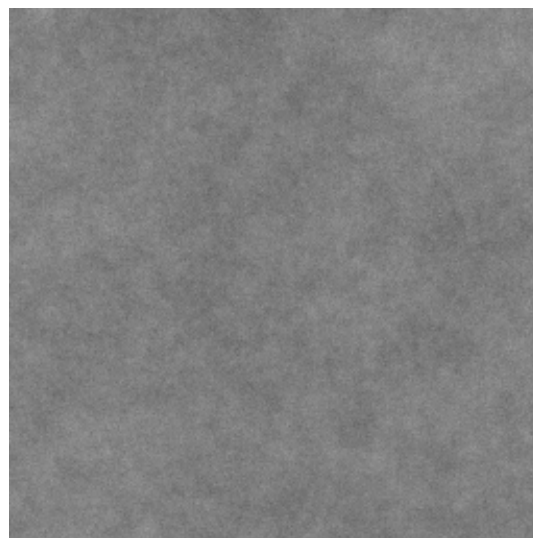
(a) Imagen restaurada con tres imágenes



(b) Diferencia mejorada entre la imagen original y la imagen restaurada, utilizando tres imágenes



(c) Imagen restaurada con cinco imágenes



(d) Diferencia mejorada entre la imagen original y la imagen restaurada, utilizando cinco imágenes

Figura 28: Desempeño del método propuesto para degradación aditiva

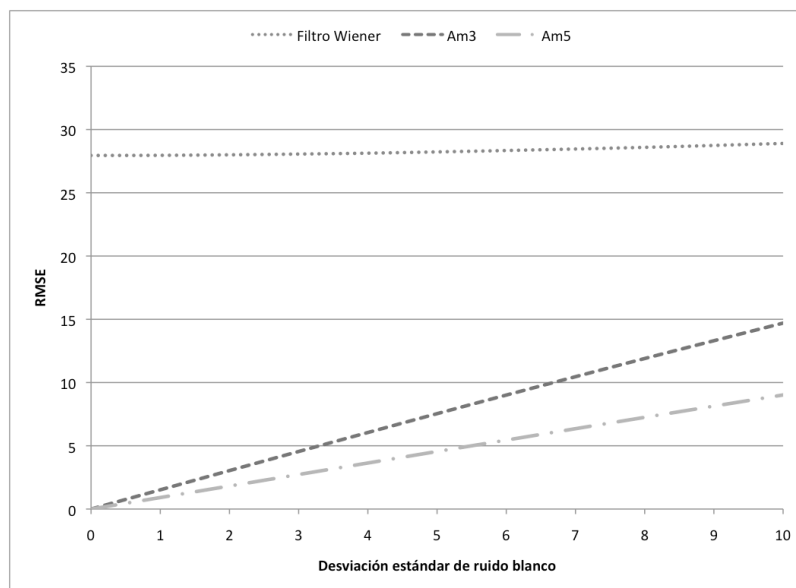


Figura 29: Desempeño del método propuesto para degradación aditiva : RMSE vs. desviación estándar del ruido blanco

La tabla I presenta el desempeño del algoritmo rápido, en términos de tiempo de ejecución en función del nivel de la pirámide. En la figura 30, se muestra la capacidad de restauración utilizando tres y cinco imágenes observadas. En los experimentos la desviación estándar del ruido blanco fue de 2. Como era de esperarse, el tiempo de procesamiento del algoritmo disminuye conforme el nivel de la pirámide se incrementa. Por otra parte, la exactitud de la degradación decrece conforme el nivel de la pirámide aumenta. La figura 31 muestra las imágenes restauradas por medio del algoritmo rápido basado en distribuciones con cinco imágenes observadas en diferentes niveles de la pirámide $d = 1, 2, \dots, 6$, respectivamente. Se puede apreciar que el rendimiento del algoritmo es aceptable en los primeros niveles de la pirámide, porque no hay *artefactos* visibles en la imagen restaurada y el algoritmo es mucho más rápido que el método general descrito con anterioridad.

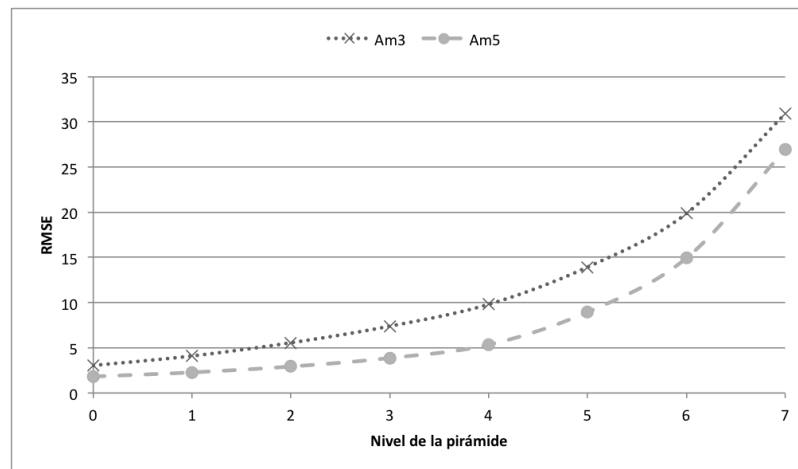


Figura 30: Desempeño del algoritmo rápido para degradación aditiva : RMSE como una función del nivel piramidal

VI.2. Interferencia multiplicativa no uniforme

Un ejemplo de una interferencia multiplicativa es la degradación por condiciones de iluminación no uniforme. En este caso, la apariencia de la imagen de entrada depende de la fuente de luz y de la forma del objeto que la recibe. Un modelo de reflectancia puede describir esta relación. Debido a lo anterior, en los experimentos se utilizó un modelo de reflexión Lambertiana, la cual refleja la luz de igual manera en todas las direcciones con igual amplitud. Este mapa (Horn y Sjobreg, 1979, Diaz-Ramirez y Kober, 2009), puede expresarse como:

$$I(p_0, q_0) = \cos \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctan \left[\frac{r}{\cos(\tau) [(r \tan(\tau) \cos(\alpha) - p_0)^2 + (r \tan(\tau) \sin(\alpha) - q_0)^2]^{1/2}} \right] \right\} \quad (170)$$

donde τ y α son ángulos de inclinación, y r es la magnitud del vector desde el origen de la luz hasta la superficie. Esos parámetros definen la posición de la fuente de la luz con respecto al origen de la superficie. En la figura 32 se muestra la geometría del modelo de iluminación. En los experimentos realizados, se utilizaron los siguientes parámetros para el modelo de iluminación: $\tau = 5^\circ$, $\alpha = 245^\circ$ y $r = \{0.3, 0.7, 1.1, 1.5, 2.0\}$. Una forma de medir el sombreado provocado por la iluminación no uniforme (*Shading*) es dada por la



Figura 31: Resultados de restauración para el modelo aditivo, utilizando cinco imágenes con diferentes niveles d de la pirámide.

Tabla I: Rendimiento en términos del tiempo de ejecución (en segundos) para el algoritmo rápido para degradación aditiva usando 3 y 5 imágenes

Nivel de la pirámide	Tamaño de las imágenes descompuestas (<i>id</i>)	Número de <i>id</i> por nivel	Número de iteraciones por cada <i>id</i>		Tiempo de ejecución (en s) por cada <i>id</i>	
			3 imágenes	5 imágenes	3 imágenes	5 imágenes
0	256 × 256	1	1084	1083	42.44	42.44
1	128 × 128	4	540	549	10.32	10.3
2	64 × 64	16	280	278	2.95	2.94
3	32 × 32	64	140	140	0.83	0.83
4	16 × 16	256	70	69	0.33	0.33
5	8 × 8	1024	34	32	0.18	0.18
6	4 × 4	4096	10	10	0.15	0.15
7	2 × 2	16384	3	3	0.15	0.15

siguiente ecuación Young (2001) :

$$Shading = \frac{\{b(k, l)\}_{max} - \{b(k, l)\}_{min}}{\{b(k, l)\}_{max}} \times 100. \quad (171)$$

La tabla II muestra los valores de iluminación utilizado en nuestros experimentos.

Tabla II: Valores de la función de iluminación

<i>r</i>	Rango de valores tomados por la función de iluminación	Valor de la media	Valor de la desviación estándar	Porcentaje de Sombreado
0.3	0.1 -1.0	0.23	0.13	90 %
0.7	0.23 -1.0	0.45	0.16	77 %
1.1	0.35-1.0	0.60	0.14	65 %
1.5	0.45-1.0	0.70	0.12	55 %
2	0.55-1.0	0.79	0.10	45 %

El valor de la media y de la desviación estándar de la imagen original son $\mu = 115.7$ y $\sigma = 39.6$, respectivamente, con un valor máximo de 202 y mínimo de 29. En la figura 33 se ilustra la imagen original que utilizaremos en los experimentos de iluminación.

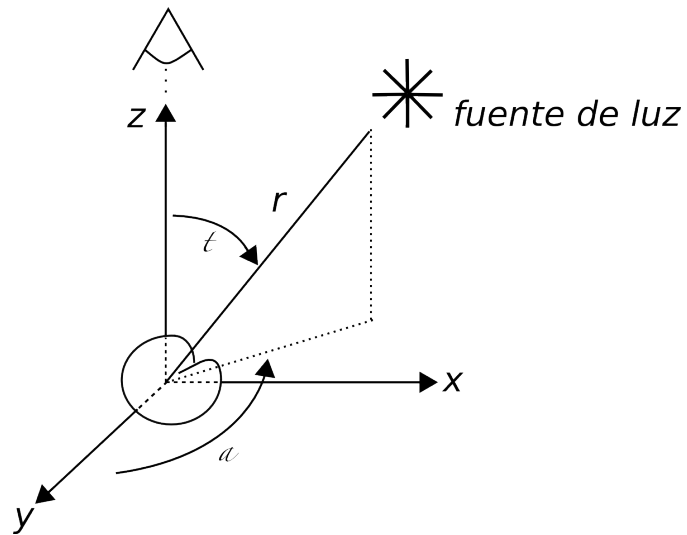


Figura 32: Geometría del modelo de iluminación



Figura 33: Imagen original

Las figuras 34(a), 35(a), 36(a), 37(a) y 38(a) muestran las imágenes degradadas con diferentes funciones de iluminación las cuales están presentadas en las figuras 34(b), 35(b), 36(b), 37(b) y 38(b) con sombreado de 90 %, 77 %, 65 %, 55 % y 45 % respectivamente. Las imágenes degradadas también contienen un ruido aditivo Gaussiano con media cero y desviación estándar de uno. Las figuras 34(c), 35(c), 36(c), 37(c) y 38(c) muestran las imágenes restauradas utilizando el método *Mm3*. Asimismo, en 34(d), 35(d), 36(d), 37(d) y 38(d) se presentan las diferencias mejoradas utilizando el criterio *EDIF* entre la imagen original y las imágenes restauradas utilizando el método con tres imágenes. Por último, en las figuras 34(e), 35(e), 36(e), 37(e) y 38(e) se muestran las imágenes restauradas utilizando el método con cinco imágenes, con sus respectivas diferencias mejoradas presentadas en las figuras 34(f), 35(f), 36(f), 37(f) y 38(f). Se puede observar que la restauración utilizando cinco imágenes es ligeramente mejor que la utilizando tres imágenes observadas.

En las figuras 39, 40, 41, 42 y 43 se muestra el rendimiento en términos del *RMSE* de los métodos propuestos, utilizando tres imágenes (*Mm3*), cinco imágenes (*Mm5*) y el filtro Wiener, mientras la desviación estándar del ruido aditivo es modificada. Se puede observar que el rendimiento del método propuesto con cinco imágenes es mejor que el filtro Wiener, el cual es diseñado con parámetros conocidos. Por otra parte, el método con tres imágenes observadas puede ser usado cuando la desviación estándar del ruido aditivo es bajo. El tiempo requerido para restaurar las imágenes es de aproximadamente 51 segundos. En estos casos, el método iterativo del gradiente conjugado requiere aproximadamente 1070 iteraciones.

Resultados utilizando el algoritmo rápido

A continuación, se investiga el rendimiento del algoritmo rápido, en términos de tiempo de ejecución y errores de restauración cuando el sombreado es de 90 %. En la tabla III se presenta el desempeño del algoritmo en términos de tiempo de ejecución en función del nivel piramidal. Los correspondientes errores de restauración del algoritmo son



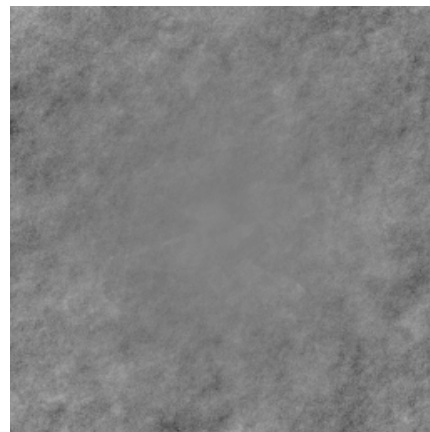
(a) Imagen degradada observada



(b) Función de iluminación no uniforme



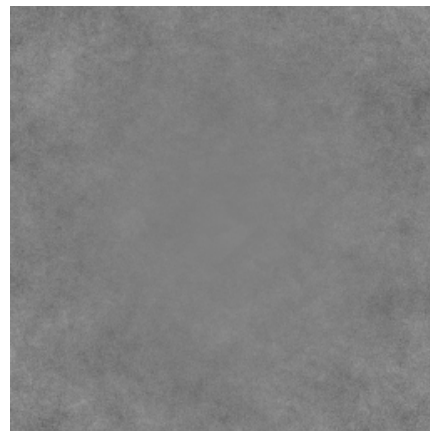
(c) Imagen restaurada (tres imágenes)



(d) Diferencia mejorada (tres imágenes)



(e) Imagen restaurada (cinco imágenes)



(f) Diferencia mejorada (cinco imágenes)

Figura 34: Restauración de iluminación no uniforme, con sombreado del 90% y ruido aditivo Gaussiano con $\sigma = 1$, utilizando los métodos propuestos



(a) Imagen degradada observada



(b) Función de iluminación no uniforme



(c) Imagen restaurada (tres imágenes)



(d) Diferencia mejorada (tres imágenes)



(e) Imagen restaurada (cinco imágenes)



(f) Diferencia mejorada (cinco imágenes)

Figura 35: Restauración de iluminación no uniforme, con sombreado del 77% y ruido aditivo Gaussiano con $\sigma = 1$, utilizando los métodos propuestos



(a) Imagen degradada observada



(b) Función de iluminación no uniforme



(c) Imagen restaurada (tres imágenes)



(d) Diferencia mejorada (tres imágenes)



(e) Imagen restaurada (cinco imágenes)

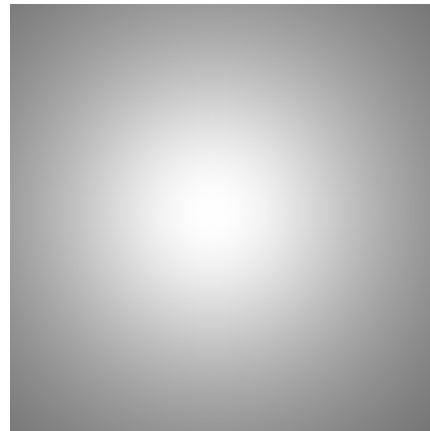


(f) Diferencia mejorada (cinco imágenes)

Figura 36: Restauración de iluminación no uniforme, con sombreado del 65 % y ruido aditivo Gaussiano con $\sigma = 1$, utilizando los métodos propuestos



(a) Imagen degradada observada



(b) Función de iluminación no uniforme



(c) Imagen restaurada (tres imágenes)



(d) Diferencia mejorada (tres imágenes)



(e) Imagen restaurada (cinco imágenes)

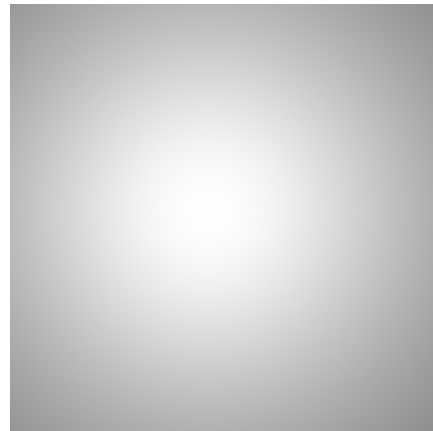


(f) Diferencia mejorada (cinco imágenes)

Figura 37: Restauración de iluminación no uniforme, con sombreado del 55 % y ruido aditivo Gaussiano con $\sigma = 1$, utilizando los métodos propuestos



(a) Imagen degradada observada



(b) Función de iluminación no uniforme



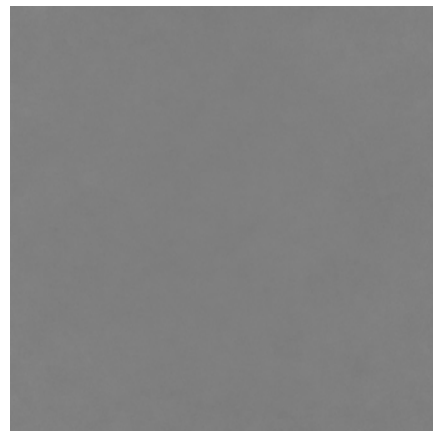
(c) Imagen restaurada (tres imágenes)



(d) Diferencia mejorada (tres imágenes)



(e) Imagen restaurada (cinco imágenes)



(f) Diferencia mejorada (cinco imágenes)

Figura 38: Restauración de iluminación no uniforme, con sombreado del 45 % y ruido aditivo Gaussiano con $\sigma = 1$, utilizando los métodos propuestos

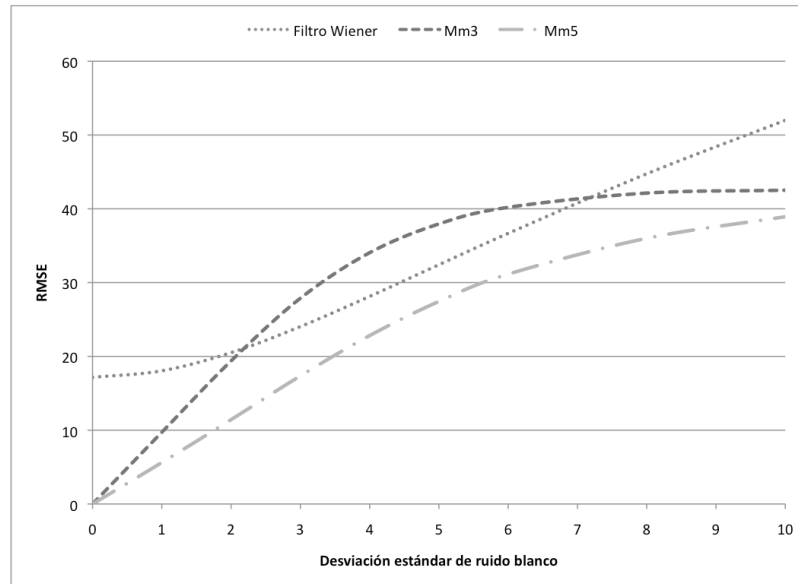


Figura 39: Desempeño del método propuesto para degradación multiplicativa cuando el sombreado es 90 %: RMSE vs. desviación estandar del ruido blanco

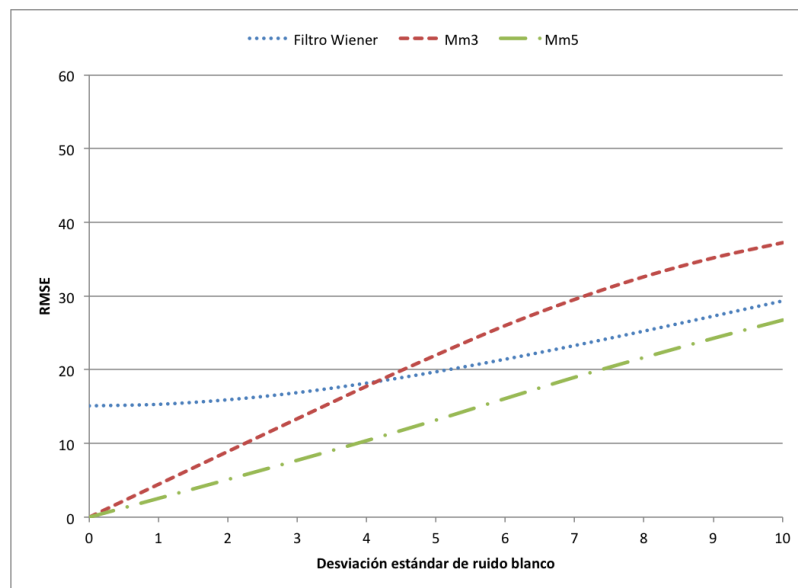


Figura 40: Desempeño del método propuesto para degradación multiplicativa cuando el sombreado es 77 %: RMSE vs. desviación estandar del ruido blanco

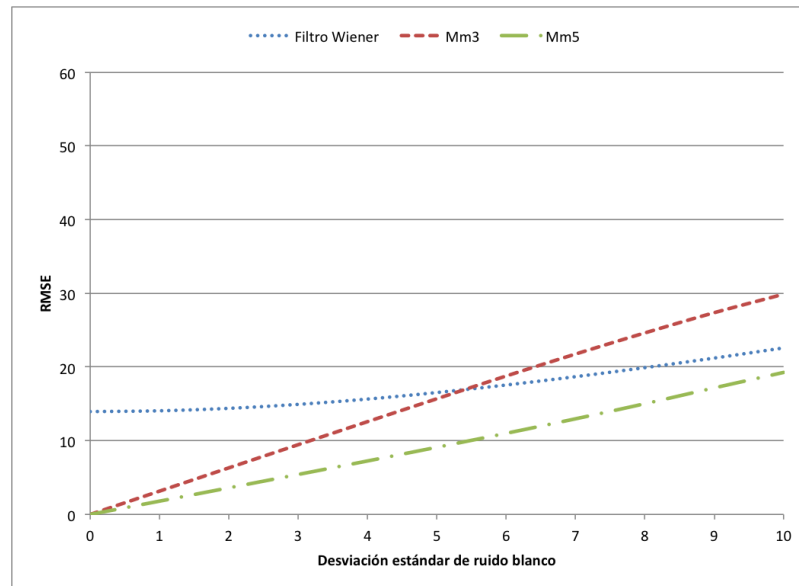


Figura 41: Desempeño del método propuesto para degradación multiplicativa cuando el sombreado es 65 % : RMSE vs. desviación estandar del ruido blanco

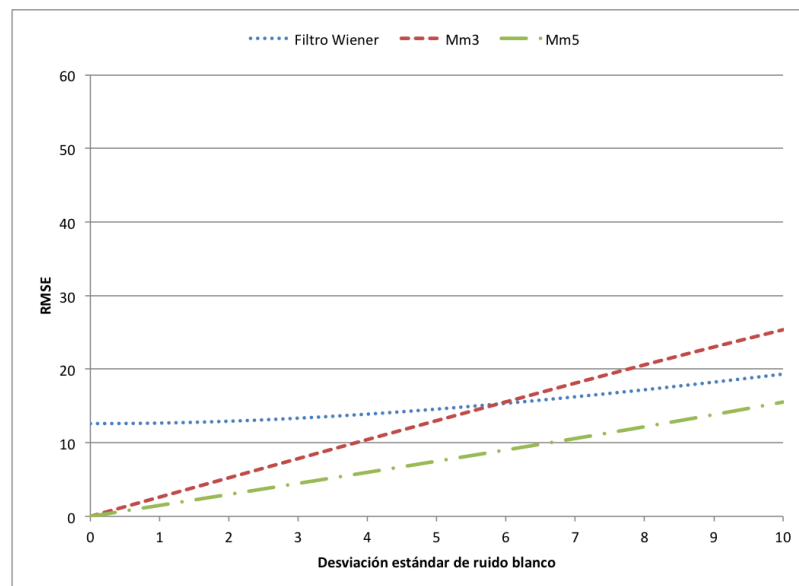


Figura 42: Desempeño del método propuesto para degradación multiplicativa cuando el sombreado es 55 %: RMSE vs. desviación estandar del ruido blanco

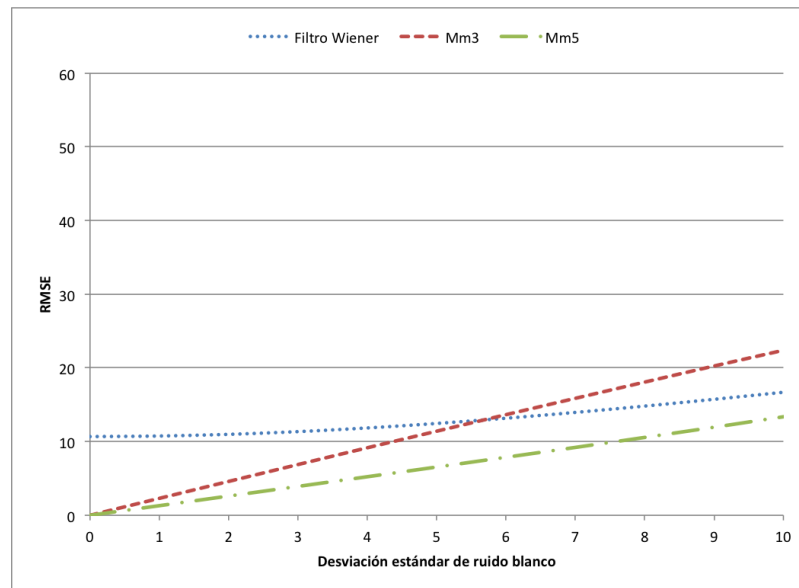


Figura 43: **Desempeño del método propuesto para degradación multiplicativa cuando el sombreado es 45 %: RMSE vs. desviación estándar del ruido blanco**

mostrados en la fig. 44. En los experimentos realizados, la desviación estándar del ruido blanco fue igual a uno. Se puede observar que los *artefactos* aparecen en las imágenes restauradas similares a las presentadas en el modelo aditivo cuando el nivel de la pirámide se incrementa. La figura 45 muestra las imágenes restauradas en diferentes niveles de descomposición piramidal $d = 1, 2, \dots, 6$, respectivamente, utilizando el algoritmo rápido de restauración con cinco imágenes. De manera similar, se puede concluir que el rendimiento del algoritmo rápido es aceptable en los primeros niveles de la pirámide, debido a que no hay *artefactos* visibles en la imagen restaurada y el algoritmo es mucho más rápido que el método general propuesto.

Tabla III: Rendimiento en términos del tiempo de ejecución (en segundos) para el algoritmo rápido para degradación multiplicativa usando 3 y 5 imágenes

Nivel de la pirámide	Tamaño de las imágenes descompuestas (<i>id</i>)	Número de <i>id</i> por nivel	Número de iteraciones por cada <i>id</i>		Tiempo de ejecución (en s) por cada <i>id</i>	
			3 imágenes	5 imágenes	3 imágenes	5 imágenes
0	256 × 256	1	1060	1083	42.98	42.93
1	128 × 128	4	538	549	10.31	10.3
2	64 × 64	16	274	271	2.95	2.94
3	32 × 32	64	140	137	0.83	0.83
4	16 × 16	256	69	68	0.34	0.34
5	8 × 8	1024	33	32	0.21	0.21
6	4 × 4	4096	10	10	0.17	0.17
7	2 × 2	16384	3	3	0.17	0.17

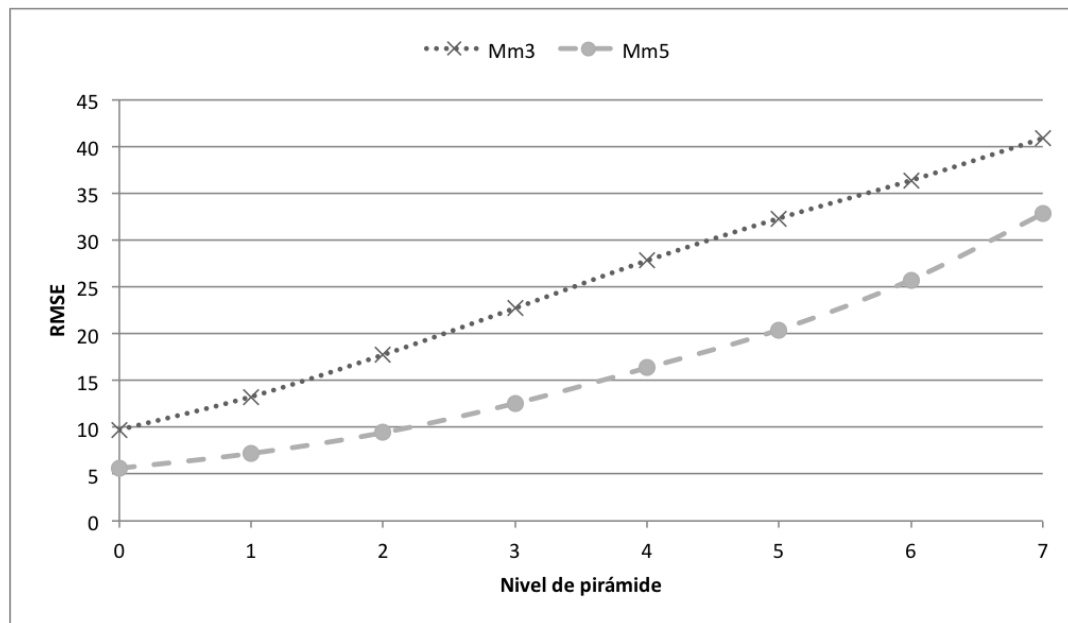


Figura 44: Desempeño del algoritmo rápido para degradación multiplicativa : RMSE como una función del nivel piramidal

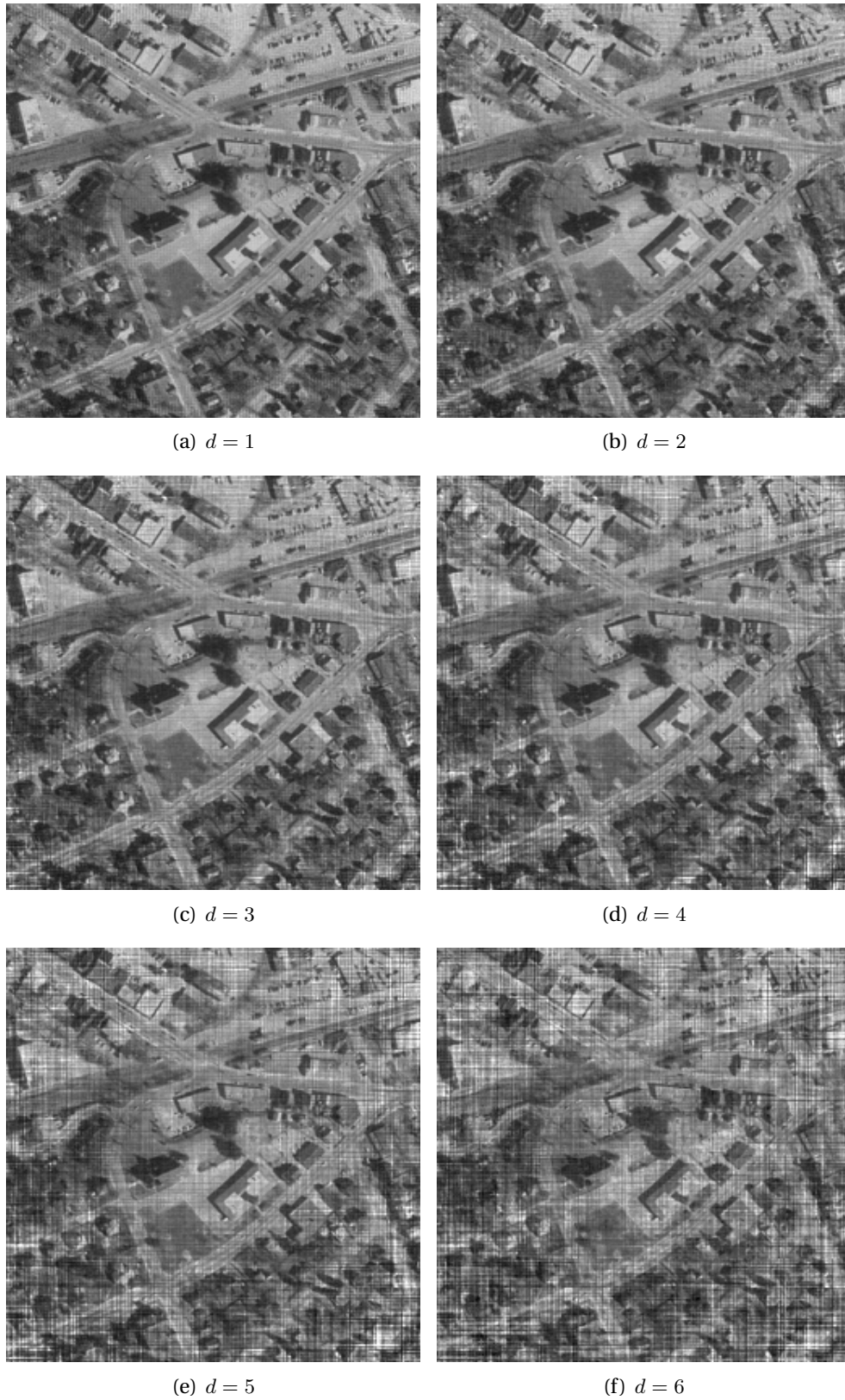


Figura 45: Resultados de restauración para el modelo multiplicativo, utilizando cinco imágenes con diferentes niveles d de la pirámide.

VI.3. Errores al realizar microescaneo

Finalmente, se examina la robustez de los métodos propuestos para pequeños desplazamientos de error durante el microescaneo. Suponemos que cada sensor de un arreglo de multielementos posee un error de posición arbitrario cuando la imagen observada es capturada. Para la simulación del error en un sistema de cómputo, se utiliza una simple interpolación bilineal con el fin de evaluar las imágenes observadas con errores de desplazamiento a nivel subpixel asociados a los elementos del sensor.

La posición del error proveniente de la localización de un sensor es considerado una variable aleatoria con una distribución uniforme en el intervalo de $[-0.5, 0.5]$. Las figuras 46 y 47 ilustran la robustez de los métodos propuestos usando tres imágenes observadas para interferencias aditiva y multiplicativa, respectivamente. Se puede observar que los métodos propuestos proporcionan una buena tolerancia a pequeñas desviaciones de las posiciones de los sensores con respecto a sus posiciones reales.

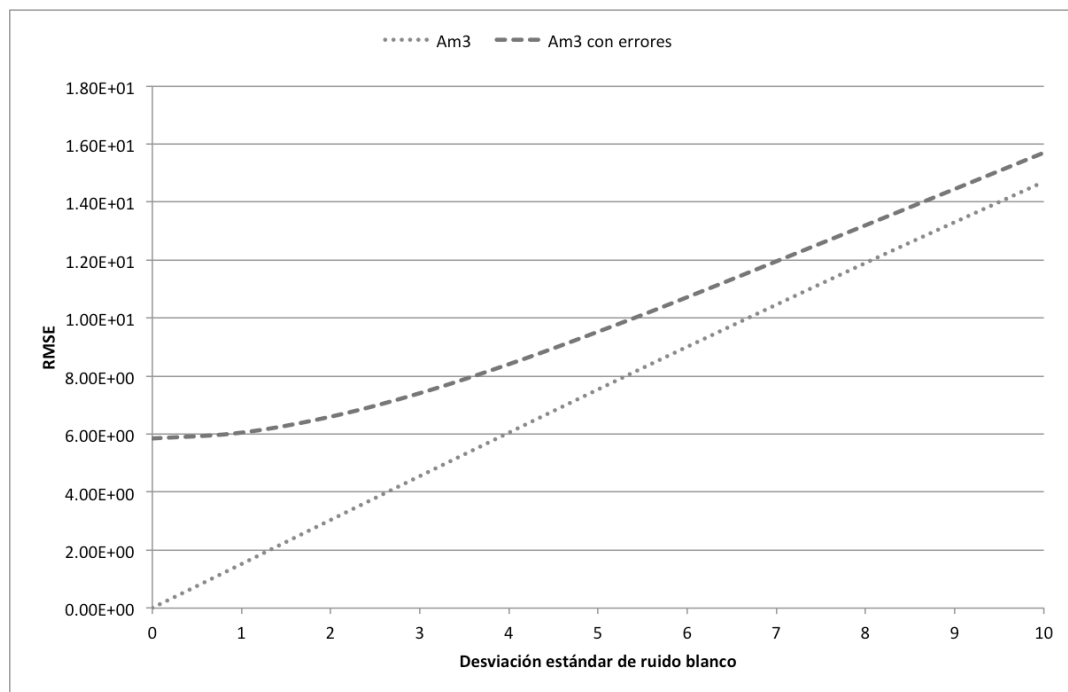


Figura 46: Rendimiento del método de restauración para degradaciones aditivas con error de desplazamiento en las localidades de los sensores

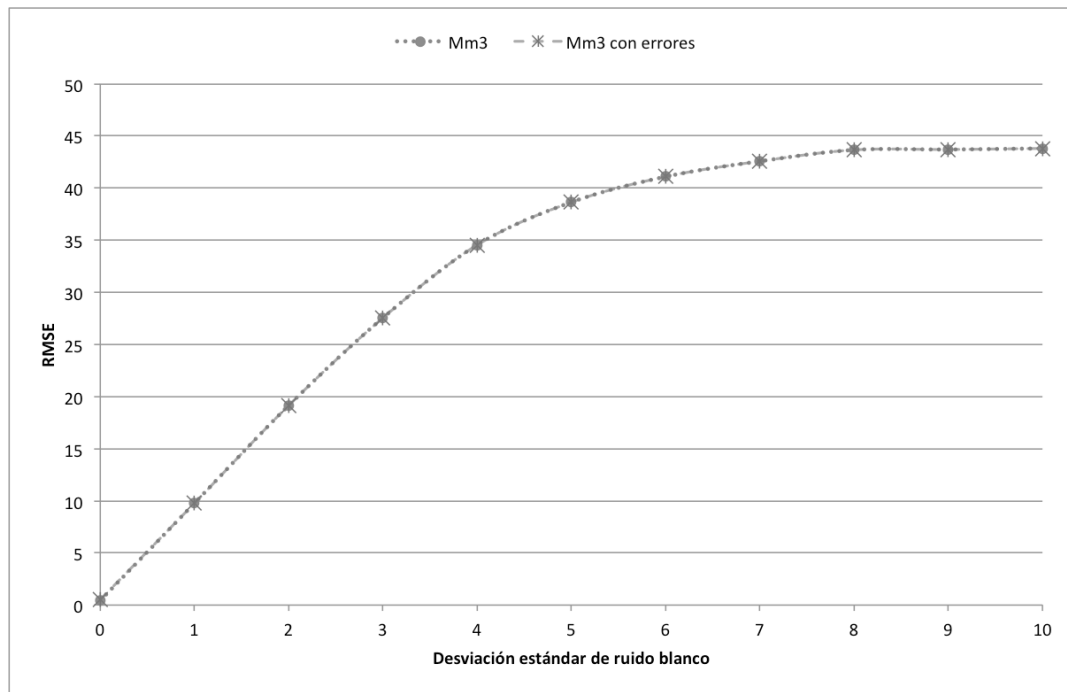


Figura 47: Rendimiento del método de restauración para degradaciones multiplicativas con error de desplazamiento en las localidades de los sensores

En la figura 48(a), se muestra una imagen restaurada a partir de una imagen observada con errores de microescaneo y ruido blanco con una desviación estándar de 2, utilizando tres imágenes para la restauración, la imagen restaurada tiene un RMSE de 6.6 y como se puede observar utilizando el criterio subjetivo en la figura 48(b), se realizó una buena restauración.

VI.4. Interferencia aditiva con ruido impulsivo

En esta sección se presentan los resultados obtenidos con los métodos propuestos en la presencia de ruido impulsivo. En la figura 49(a) se muestra el ruido impulsivo con una probabilidad de ocurrencia de 0.07, es decir, que 4587 píxeles de un total de 65536 presentan ruido impulsivo. El valor que adquiere el ruido impulsivo es cero. En la figura 49(b) se muestra la imagen observada, degradada por una interferencia aditiva, ruido impulsivo con probabilidad de 0.07 y ruido de sensor con una desviación estándar de 5.



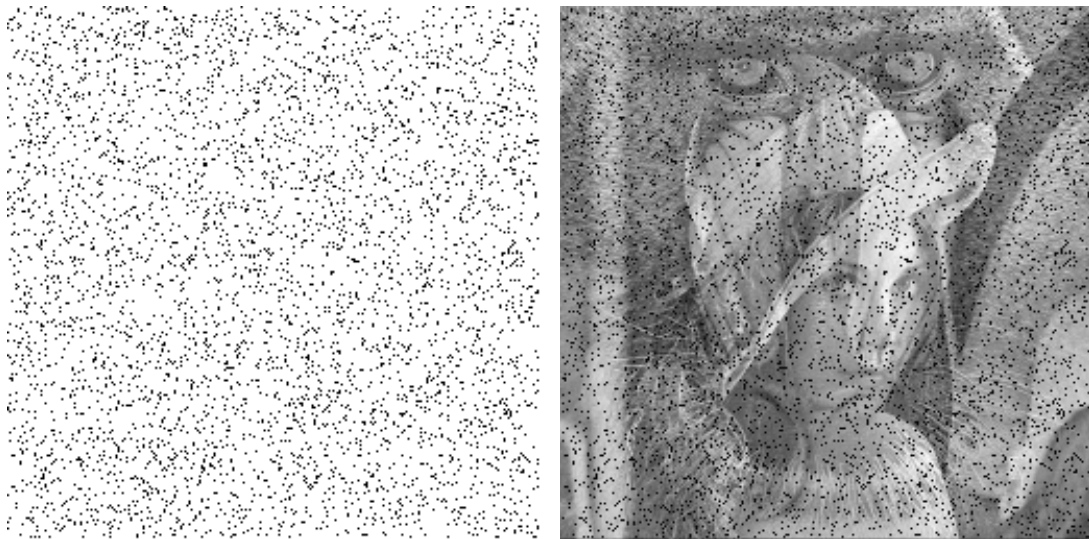
(a) Imagen restaurada con tres imágenes

(b) Diferencia mejorada entre la imagen original y la imagen restaurada, utilizando tres imágenes

Figura 48: Desempeño del método propuesto para degradación aditiva con ruido aditivo con media cero y desviación estándar de 2, en presencia de errores de posicionamiento en el microscaneo.

En las figuras 50(a) y 50(b) se muestran las imágenes restauradas a partir de la imagen observada 49(b) utilizando tres imágenes y la diferencia entre la imagen original y la imagen restaurada, posteriormente se presentan las figuras 50(c) y 50(d), la imagen restaurada utilizando cinco imágenes y la diferencia entre la imagen original y la imagen restaurada respectivamente. Como se puede observar, la calidad de las imágenes de restauración es buena a pesar del daño sufrido en las imágenes observadas.

La figura 51 muestra el rendimiento del algoritmo propuesto en términos del RMSE *vs.* la probabilidad de ocurrencia del ruido impulsivo. Adicionalmente, las imágenes son afectadas con un ruido aditivo con una desviación estándar de 5. Es posible observar que cuando la probabilidad del ruido impulsivo incrementa, la calidad de la restauración disminuye.



(a) Ruido impulsivo con una probabilidad de ocurrencia de 0.07 (b) Imagen observada con interferencia aditiva, ruido impulsivo y ruido aditivo con una desviación estándar de 5

Figura 49: Modelo de degradación aditiva con ruido impulsivo y aditivo en imágenes

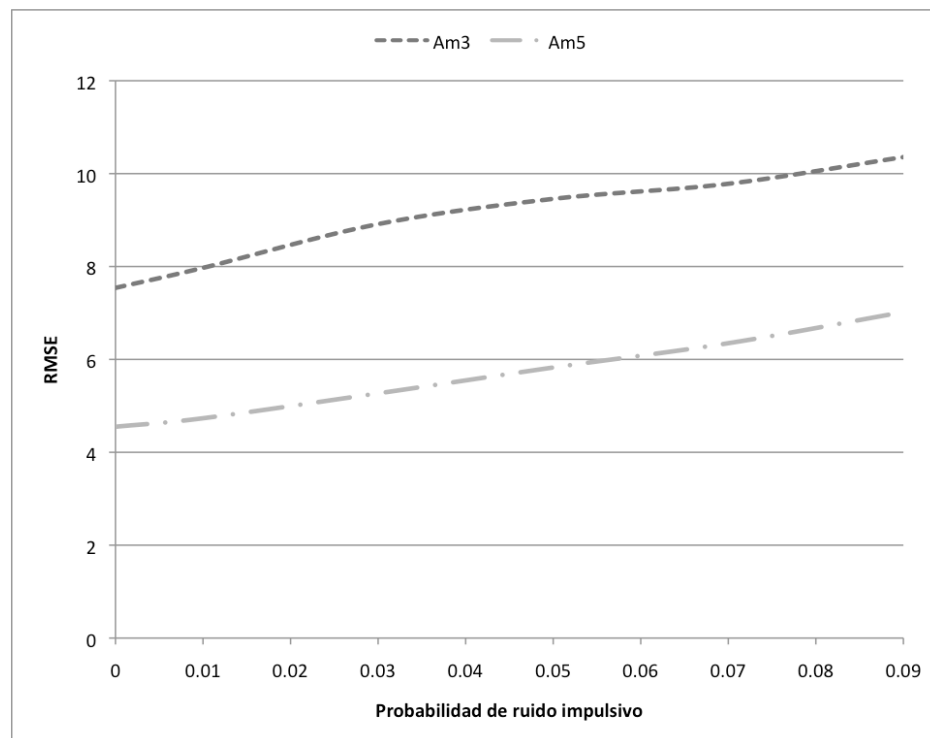
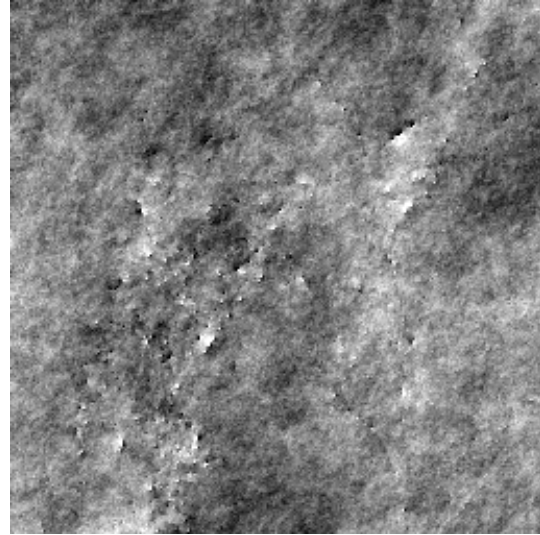


Figura 51: Desempeño del método de restauración para degradaciones aditivas: RMSE vs. probabilidad de ruido impulsivo con una desviación estándar de ruido blanco de 5



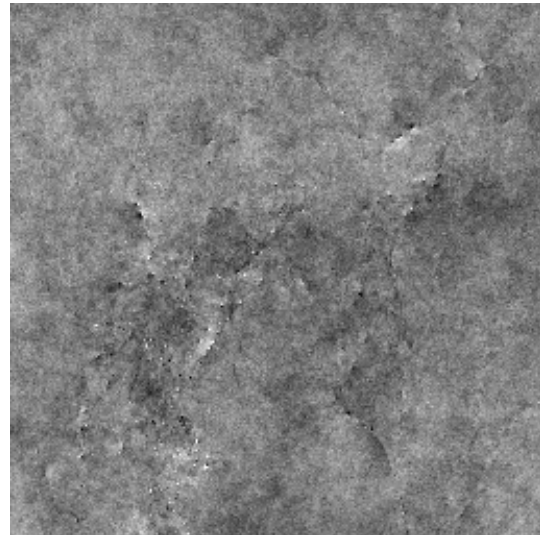
(a) Imagen restaurada con tres imágenes



(b) Diferencia mejorada entre la imagen original y la imagen restaurada, utilizando tres imágenes



(c) Imagen restaurada con cinco imágenes



(d) Diferencia mejorada entre la imagen original y la imagen restaurada, utilizando cinco imágenes

Figura 50: Desempeño del método propuesto para degradación aditiva con ruido impulsivo con probabilidad de ocurrencia de 0.07 y ruido aditivo con media cero y desviación estándar de 5.

Ahora se presenta el rendimiento del algoritmo propuesto, cuando se tiene un ruido impulsivo con una probabilidad fija de ocurrencia de 0.07 y se varia la desviación estándar del ruido blanco. Se observa en la figura 52, que aún cuando la desviación estándar del ruido blanco es baja, el valor del criterio de la restauración es alto, debido a que el ruido impulsivo destruye a la imagen, por lo que afecta su restauración.

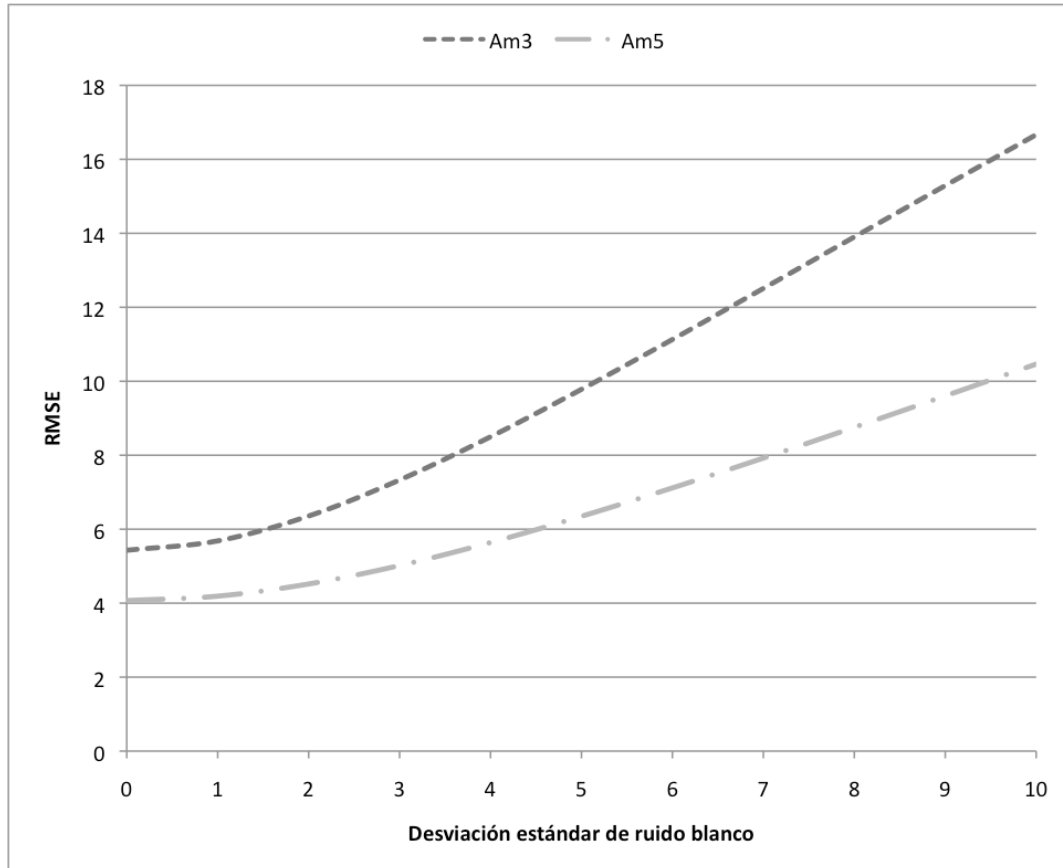


Figura 52: **Desempeño del método de restauración para degradaciones aditivas: RMSE vs. desviación estándar del ruido blanco con ruido impulsivo con probabilidad de ocurrencia de 0.07**

A continuación se muestra el caso de un conjunto de píxeles dañados, lo cual sin pérdida de generalidad será en forma cuadrada con una determinada longitud. Para el caso de este experimento, la ventana tendrá una longitud de 10×10 píxeles en una posición determinada en las escenas observadas, las cuales tendrán un ruido blanco producido por la captura del sensor, en este caso con una desviación estándar de 5 y un ruido impulsivo

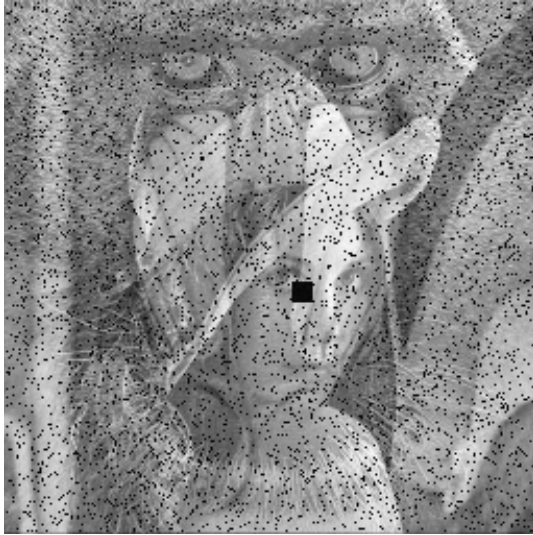
con probabilidad de 0.07. En la figura 53, se muestra la imagen observada, la imagen restaurada y la diferencia entre la imagen original y la imagen restaurada. Es posible observar que el rendimiento de la restauración es de buena calidad fuera del área del conjunto de píxeles dañados. En el área del conjunto de píxeles dañados, el método lleva a cabo una suave interpolación usando información contenida en sus píxeles vecinos.

VI.5. Interferencia multiplicativa con ruido impulsivo

En esta sección se presentan los resultados de las degradaciones con respecto al modelo de interferencia multiplicativa en presencia de ruido impulsivo. La probabilidad de ocurrencia del ruido impulsivo en los experimentos que a continuación se describen es de 0.05 y la desviación estándar del ruido blanco es de 0.5. En las figuras 54(a) y 54(b), se presentan un ejemplo de ruido impulsivo con la probabilidad descrita anteriormente y una de las imágenes observadas con interferencia multiplicativa, ruido impulsivo y ruido aditivo.

En las figuras 55(a) y 55(b) se muestran las imágenes restauradas a partir de la imagen observada 54(b) utilizando tres imágenes y la diferencia entre la imagen original y la imagen restaurada, posteriormente se presentan las figuras 50(c) y 50(d), la imagen restaurada utilizando cinco imágenes y la diferencia entre la imagen original y la imagen restaurada respectivamente. Se puede apreciar a partir del criterio de las diferencias entre las imágenes original y restaurada, que la restauración utilizando cinco imágenes observadas es mejor que utilizar solo tres imágenes.

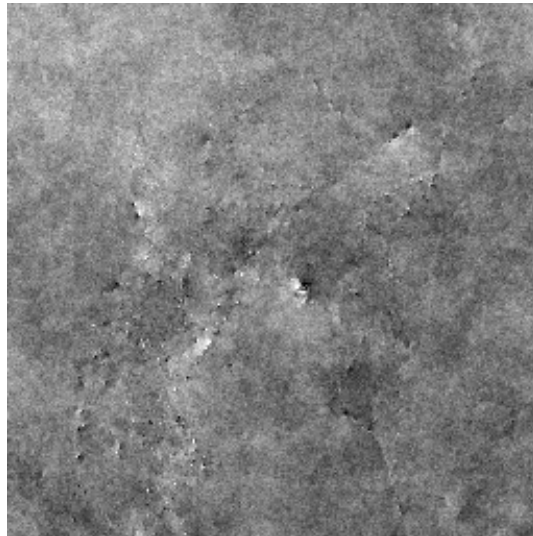
La figura 56 muestra el rendimiento de los algoritmos propuestos para interferencias multiplicativas en términos del RMSE *vs.* la probabilidad de ocurrencia del ruido impulsivo. Adicionalmente, las imágenes son afectadas con un ruido aditivo con una desviación estándar de 0.5. A continuación se presenta el rendimiento del algoritmo propuesto para degradaciones con interferencias multiplicativas, cuando se tiene un ruido impulsivo con una probabilidad fija de ocurrencia de 0.01 y se varia la desviación estándar del ruido blanco. Se puede observar en la figura 57, que aun cuando la desviación estándar del ruido blanco es bajo, el valor del criterio de la restauración es alto, debido a que el ruido



(a) imagen observada

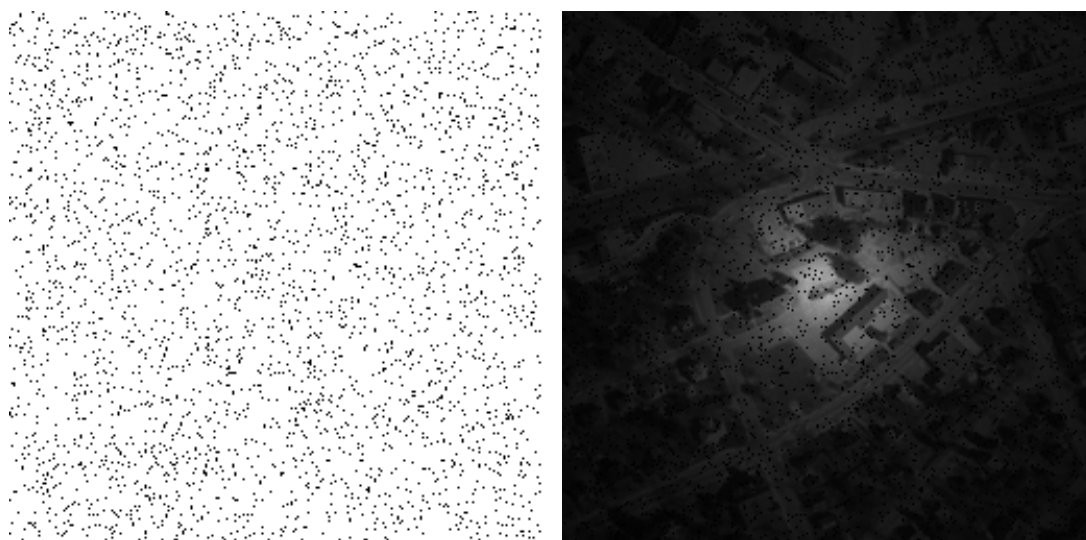


(b) Imagen restaurada con cinco imágenes



(c) Diferencia mejorada entre la imagen original y la imagen restaurada, utilizando cinco imágenes

Figura 53: Desempeño del método propuesto para degradación aditiva con ruido impulsivo con probabilidad de ocurrencia de 0.07, ruido aditivo con media cero y desviación estándar de 5, con un conjunto de 100 píxeles dañados.



(a) Ruido impulsivo con una probabilidad de ocurrencia de 0.05

(b) Imagen observada con interferencia multiplicativa, ruido impulsivo y ruido aditivo con una desviación estándar de 0.5

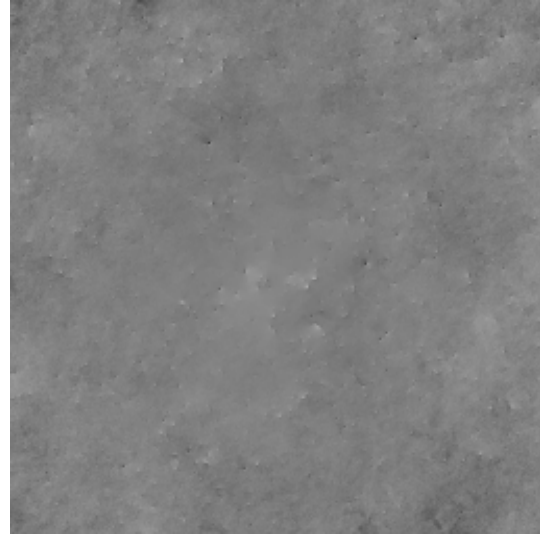
Figura 54: Modelo de degradación multiplicativa con ruido impulsivo y aditivo en imágenes

impulsivo destruye a la imagen, por lo que afecta su restauración.

A continuación se presenta el caso de un conjunto de píxeles dañados, lo cual sin pérdida de generalidad será en forma cuadrada con una determinada longitud. Para el caso de este experimento, la ventana tendrá una longitud de 10×10 píxeles en una posición determinada en las escenas observadas, las cuales tendrán un ruido blanco producido por la captura del sensor, en este caso con una desviación estándar de 0.5. La degradación multiplicativa, es la misma que se utilizó en los experimentos anteriores. En la figura 58, se muestra la imagen observada, la imagen restaurada utilizando cinco imágenes observadas y la diferencia entre la imagen original y la imagen restaurada. Es posible observar que el rendimiento de la restauración es de buena calidad fuera del área del conjunto de píxeles dañados y dentro del área dañada por la ventana, se aprecia una suave interpolación, efecto similar a la producida en presencia de degradación aditiva.



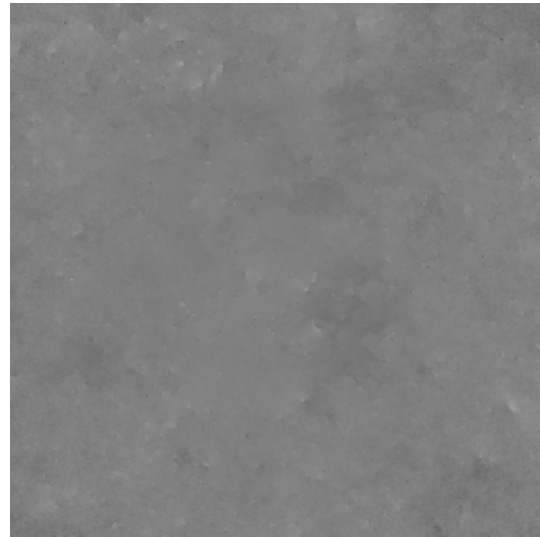
(a) Imagen restaurada con tres imágenes



(b) Diferencia mejorada entre la imagen original y la imagen restaurada, utilizando tres imágenes



(c) Imagen restaurada con cinco imágenes



(d) Diferencia mejorada entre la imagen original y la imagen restaurada, utilizando cinco imágenes

Figura 55: Desempeño del método propuesto para degradación aditiva con ruido impulsivo con probabilidad de ocurrencia de 0.05 y ruido aditivo con media cero y desviación estándar de 0.5.

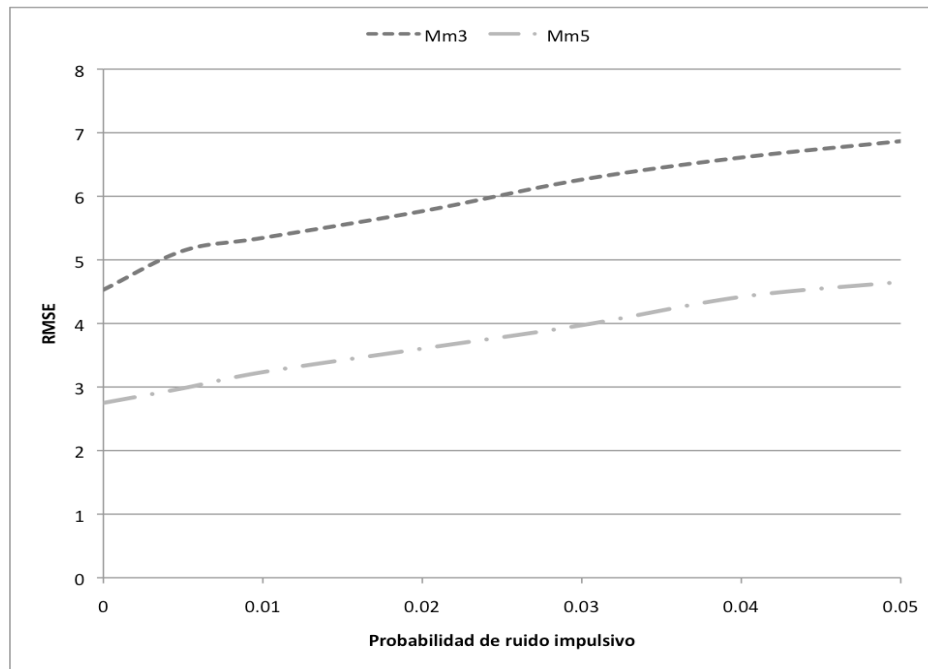


Figura 56: Desempeño del método de restauración para degradaciones multiplicativas: RMSE vs. probabilidad de ruido impulsivo con una desviación estándar fija de ruido blanco de 0.5

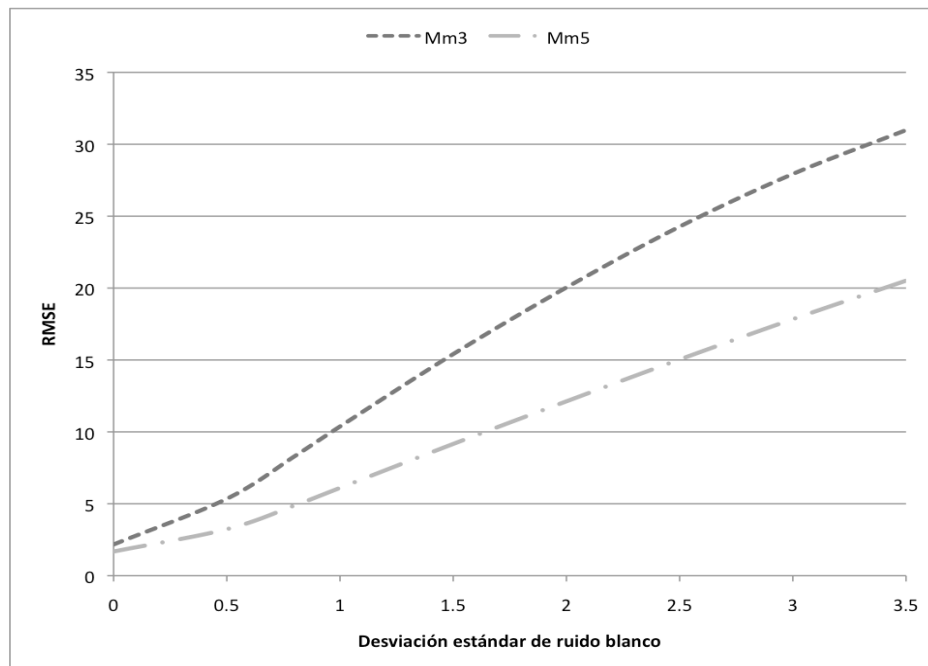
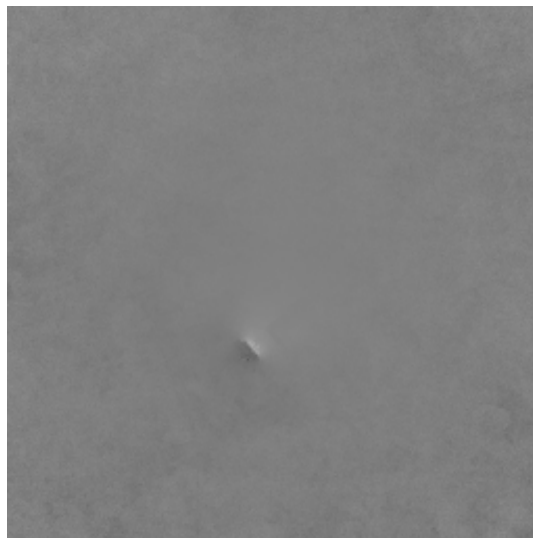


Figura 57: Desempeño del método de restauración para degradaciones multiplicativas: RMSE vs. desviación estándar del ruido blanco con ruido impulsivo con probabilidad de ocurrencia de 0.01



(a) imagen observada

(b) Imagen restaurada con cinco imágenes con un RMSE de 3.29



(c) Diferencia mejorada entre la imagen original y la imagen restaurada, utilizando cinco imágenes

Figura 58: Desempeño del método propuesto para degradación multiplicativa con ruido aditivo con media cero y desviación estándar de 0.5, con un conjunto de 100 píxeles dañados, utilizando cinco imágenes observadas

VI.6. Experimento real

En esta sección se presentan imágenes obtenidas a través de una cámara digital. Para el experimento se utilizó una cámara digital JVC modelo Everio, una pantalla LCD y acetatos impresos. Las imágenes observadas fueron adquiridas como se describe a continuación: la imagen de prueba fue desplegada en una pantalla LCD. Un acetato impreso, fue colocado entre la cámara y la pantalla, esto con el fin de simular una degradación multiplicativa. El microescaneo fue realizado moviendo la imagen de prueba en la pantalla. Las imágenes de prueba fueron de tamaño de 295×284 píxeles.

En la figuras 60, 61 y 62 se presentan imágenes que describen de manera visual el experimento realizado, ya que se puede apreciar cada uno de los elementos que conformaron el sistema. Con detalle se pueden apreciar en las figuras 60(a), 61(a) y 62(a) las imágenes originales adquiridas con la cámara. En las figuras 60(b), 61(b) y 62(b) las degradaciones multiplicativas para cada experimento respectivamente. En las figuras 60(c), 61(c) y 62(c), se muestran una de las cinco imágenes observadas correspondientes a cada experimento. Por último, las imágenes restauradas utilizando cinco imágenes, son mostradas en las figuras 60(d), 61(d) y 62(d), correspondientes a cada experimento. En la cual se puede apreciar que la calidad de las imágenes restauradas con el método propuesto es muy buena, si el nivel del ruido aditivo de sensor es bajo.



Figura 59: Elementos que intervienen en el experimento real para degradación multiplicativa



(a) Imagen original



(b) Interferencia multiplicativa



(c) Una de las imágenes observadas con interferencia multiplicativa



(d) Imagen restaurada utilizando cinco imágenes observadas

Figura 60: Experimentos reales con imágenes con degradación multiplicativa



(a) Imagen original



(b) Interferencia multiplicativa



(c) Una de las imágenes observadas con interferencia multiplicativa



(d) Imagen restaurada utilizando cinco imágenes observadas

Figura 61: Experimentos reales con imágenes con degradación multiplicativa



(a) Imagen original



(b) Interferencia multiplicativa



(c) Una de las imágenes observadas con interferencia multiplicativa



(d) Imagen restaurada utilizando cinco imágenes observadas

Figura 62: Experimentos reales con imágenes con degradación multiplicativa

VI.7. Resumen

En este capítulo, se exponen los resultados que se obtiene al realizar los métodos de restauración a un conjunto de imágenes que se encuentran degradadas por los modelos expuestos en los capítulos previos. De igual forma se muestran resultados en forma de gráficas que demuestran el desempeño y la efectividad de los métodos propuestos y de los algoritmos rápidos bajo diversas condiciones en los parámetros de degradación. Además, se expone el desempeño de los métodos propuestos en caso de errores en la técnica del microscaneo. Asimismo, se presentan resultados con imágenes reales obtenidas a través de un sistema de adquisición de imágenes con interferencias multiplicativas. Los resultados presentados son buenos y nos permiten validar los métodos propuestos, bajo las condiciones expuestas en el experimento.

Capítulo VII

Conclusiones

La restauración de imágenes es de gran utilidad en campos como la medicina, la industria, astronomía, etc. El objetivo principal de esta área del procesamiento de imágenes digitales, es recuperar la imagen original que ha sido degradada por alguna función de interferencia.

En este trabajo se presentaron métodos de restauración ciegos adaptativos, aplicados a modelos de degradación aditiva y multiplicativa utilizando la técnica del microescaneo, la cual proporcionó información suficiente en el dominio del espacio, para poder realizar el proceso de restauración. A partir de estos modelos y utilizando un criterio de minimización, se obtiene un sistema lineal de ecuaciones. La solución al sistema es la imagen restaurada.

Además, se muestra la descripción de un algoritmo rápido, para la implementación de los métodos propuestos en este trabajo, lo cual permite aplicar dichos métodos en sistemas de imágenes que necesiten una respuesta antes de un tiempo específico.

Los modelos de degradación aditiva y multiplicativa con ruido impulsivo, presentados en este trabajo, son modelos generales que pueden adaptarse a situaciones particulares. En el caso del modelo de degradación aditiva es posible aplicarlo para resolver degradaciones provocadas por sensores IFPA¹, y en el caso del modelo de degradación multiplicativa, es posible aplicarlo a sistemas de imágenes adquiridas por medio de resonancia magnética, donde la no uniformidad ocurre cuando el campo magnético es aplicado; también se puede utilizar el método propuesto de restauración en imágenes adquiridas a través de microscopios (TEM²) donde se presenta una iluminación no uniforme provocada por la fuente de luz. Más aún cuando no existe una iluminación uniforme en una imagen digital

¹IFPA.-Infrared Focal-Plane Array

²TEM.-Transmission electron microscopy

observada y se requiere restaurar la imagen para un posterior procesamiento (i.e binarización), tal es el caso del reconocimiento de códigos QR³ adquiridos en condiciones de mala iluminación. A menudo las cámaras que se ubican en ambientes externos utilizados para fines de vigilancia o control de tráfico, presentan degradaciones provocadas por gotas de lluvia o manchas de polvo en el lente de la cámara, los métodos expuestos en este trabajo, podrían aplicarse para restaurar las imágenes adquiridas por este medio, dado que los métodos propuestos son tolerantes a conjunto de pixeles donde no existe información y a ruido impulsivo en caso de que la cámara presente daños en sus pixeles.

VII.1. Aportaciones

La aportación principal de este trabajo es el desarrollo de métodos ciegos adaptativos para resolver problemas de degradación aditiva ó multiplicativa con ruido aditivo e impulsivo, utilizando cinco imágenes observadas obtenidas a través de la técnica conocida como microescaneo. Un sistema explícito de ecuaciones es derivado utilizando el método de mínimos cuadrados, para los modelos de degradación aditiva y multiplicativa. El sistema de ecuaciones lineales se resuelve utilizando algoritmos iterativos. La solución del sistema lineal de ecuaciones es la imagen restaurada.

Otra aportación es la implementación de los métodos de restauración a través de algoritmos rápidos, lo cual permitiría aplicar los métodos propuestos a sistemas de visión o procesamiento que requieren respuesta en segundos.

Con la ayuda de simulaciones en computadora y utilizando datos reales, se presentó y analizó el rendimiento de los métodos propuestos y del algoritmo rápido en términos de un criterio de restauración, tiempo de ejecución y tolerancia a sistemas de microescaneo.

³Quick response.- Es un tipo de código de barras en forma matricial

VII.2. Trabajo futuro

Aún existe mucho trabajo por realizar, en el desarrollo de métodos de restauración utilizando la técnica del microescaneo. Algunas de las oportunidades de mejora y trabajo futuro identificados en la realización de este trabajo son:

- Modificación e implementación del algoritmo para problemas específicos, tales como degradación provocado por niebla (*scattering*) (Narasimhan y Nayar, 2002), etc.
- Considerar la posibilidad de agregar estimación del desplazamiento de la cámara al realizar el microescaneo, en las situaciones donde el desplazamiento global sea a nivel subpixel.
- Métodos de restauración utilizando microescaneo de cámara, donde el movimiento del microescaneo podría ser en cualquier dirección dentro de un radio preestablecido de píxeles.
- Investigar la factibilidad de incluir en los métodos de restauración propuestos, la función de degradación por emborronamiento (*blur*) (Bertero y Boccacci, 2002).
- Estudiar el problema de restauración de imágenes degradadas y utilizar la herramienta del microescaneo para imágenes a color.
- Implementación de los métodos de restauración en algoritmos paralelos en forma teórica (Bräunl *et al.*, 2001) y práctica (Sanders y Kandrot, 2010) .

VII.3. Publicaciones derivadas de este trabajo

Publicaciones en Revistas Arbitradas:

- López-Martínez, J.L. y Kober, V. 2012. Blind adaptative method for image restoration using microscanning. IEICE T. Inf. Syst. E95-D(1). (En prensa)
- López-Martínez, J.L., Kober, V. 2010 y Ovseyevich I. A., Image restoration based on camera microscanning. Pattern Recognition and Image Analysis., 20(3):370,375 p.

Publicaciones en Capítulo de Libro:

- López-Martínez, J.L. y Kober, V. 2012. *Blind image restoration for a microscanning imaging system* del libro *Image restoration*, ISBN 979-953-307-619-4 (En prensa)

Publicaciones en Congresos:

- López-Martínez, J. L. y Kober, V. 2009. Fast Image Restoration Algorithm Based on Camera Microscanning. Proc. SPIE. Applications of Digital Image Processing XXXII. San Diego, CA., USA. SPIE- The International Society for Optical Engineering. 7443(74431).
- López-Martínez, J. L. y Kober, V. 2010. Image Restoration of Nonuniformly Illuminated Images with Camera Microscanning. Proc. SPIE. Applications of Digital Image Processing XXXIII. San Diego, CA., USA. SPIE- The International Society for Optical Engineering. 7798(77982).
- López-Martínez, J. L. y Kober, V. 2011. Accuracy of image restoration using microscanning image system. Proc. SPIE. Applications of Digital Image Processing XXXIV. San Diego, CA., USA. SPIE- The International Society for Optical Engineering. 8135(81351F-1).

Bibliografía

- Acharya, T. y Ray, A. K. 2005. *Image Processing Principles and Applications*. Wiley and Sons, Inc., New York. 428 pp.
- Arsenault, H. y Lefebvre, D. 2000. Homomorphic cameo filter for pattern recognition that is invariant with changes in illumination. *Optics Letters.*, 25(21):1567–1569 p.
- Bertero, M. y Boccacci, P. 2002. *Introduction to Inverse Problems in Imaging*. IOP Publishing Ltd, UK. 351 pp.
- Bjorck, A. 1996. *Numerical Methods for least square problems*. Siam, USA. 408 pp.
- Bovik, A. 2005. *Handbook of Image and Video Processing*. Academic Press, USA. 1410pp.
- Bovik, A. 2009. *The Essential Guide to Image Processing*. Academic Press, USA. 569 pp.
- Bräunl, T., Feyrer, S., Rapf, W. y Reinhardt, M. 2001. *Parallel Image Processing*. Springer-Verlag, Germany. 203 pp.
- Campisi, P. y Egiazarian, K. 2007. *Blind Image Deconvolution: Theory and Applications*. CRC Press, USA. 448 pp.
- Carl-Zeiss. 2011. AxioCam HR, Success Through Performance. URL [http://www.zeiss.de/C1256D18002CC306/0/D09D6F9BEBE83B62C12570C90033753F/\\$file/48-0059_e.pdf](http://www.zeiss.de/C1256D18002CC306/0/D09D6F9BEBE83B62C12570C90033753F/$file/48-0059_e.pdf). Consultado el 17 de marzo del 2011.
- Chen, T. y Wu, H. R. 2001. Space Variant Median Filters for the Restoration of Impulse Noise Corrupted Images. *IEEE transaction on circuits and system II Analog and digital signal processing.*, 48(8):784–789 p.
- Cúpich, M. y Elizondo, F. 2011. Actuadores piezoeléctricos. URL http://www.ingenierias.uanl.mx/6/pdf/6_Miguel_Cupich_et_al_actuadores_Piezo.pdf. Consultado el 19 de mayo del 2011.
- Díaz-Ramírez, V. y Kober, V. 2009. Target recognition under nonuniform illumination conditions. *Appl. Opt.*, 48(7):1408–1418 p.
- García-Martínez, P., Tejera, M., Ferreira, C., Lefebvre, D. y Arsenault, H. H. 2002. Optical implementation of the weighted sliced orthogonal nonlinear generalized correlation for nonuniform illumination conditions. *Appl. Opt.*, 41(32):6867–6874 p.
- Golub, G. y Van Loan, C. 1996. *Matrix computations*. The Johns Hopkins University Press, USA. 698 pp.
- Gonzalez, R. C. y Woods, R. E. 2008. *Digital Image Processing*. Prentice Hall, Inc., USA. 954 pp.
- Grossman, S. 1996. *Álgebra lineal*. McGraw-Hill, México. 634 pp.

- Hautiere, N. y Aubert, D. 2005. Contrast restoration of foggy images through use of an onboard camera. *Proc. IEEE Conf. Intell. Transp. Syst.*, 601–606 p.
- Hayat, M., Torres, S. N., Armstrong, E., Cain, S. C. y Yasuda, B. 1999. Statistical Algorithm for Nonuniformity Correction in Focal-plane Arrays. *Applied Optics*, 38(5):772–7780 p.
- Horn, B. K. P. y Sjobreg, R. W. 1979. Calculating the reflectance map. *Applied Optics.*, 18(11):1770–1779 p.
- Jain, A. K. 1989. *Fundamentals of Digital Image Processing*. Prentice Hall, Inc., USA. 853 pp.
- Jan, J. 2006. *Medical Image Processing, Reconstruction and Restoration*. Taylor and Francis, USA. 730 pp.
- Kay, S. 1993. *Fundamentals of statistical signal processing: Estimation theory*. Prentice Hall, USA. 625 pp.
- Kober, V., Mozero, V. y Alvarez-Borrego, J. 2001. Nonlinear filters with spatially connected neighborhoods. *Opt. Eng.*, 40(6):971–983 p.
- Lagendijk, R. y Biemond, J. 1991. *Iterative identification and restoration of images*. Kluwer Academic Publishers, USA. 208 pp.
- López-Martínez, J. L. y Kober, V. 2008. Image Restoration Based on Camera Microscanning. *Proc. SPIE*, 7073(707322).
- López-Martínez, J. L. y Kober, V. 2009. Fast Image Restoration Algorithm Based on Camera Microscanning. *Proc. SPIE*, 7443(74431).
- López-Martínez, J. L. y Kober, V. 2010. Image Restoration of Nonuniformly Illuminated Images with Camera Microscanning. *Proc. SPIE*, 7798(77982).
- López-Martínez, J. L., Kober, V. y Ovseyevich, I. A. 2010. Image Restoration Based on Camera Microscanning. *Pattern Recognition and Image Analysis.*, 20(3):370,375 p.
- Narasimhan, S. G. y Nayar, S. K. 2002. Vision and the Atmosphere. *I. J. of Computer Vision.*, 48(3):233–254 p.
- Narasimhan, S. G. y Nayar, S. K. 2003. Contrast restoration of weather degraded images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.*, 25(6):713–724 p.
- Ng, M. K. y Yau, A. C. 2005. Super-Resolution Image Restoration from Blurred Low-Resolution Images. *J. of Mathematical Imaging and Vision.*, 23(3):367–378 p.
- Papoulis, A. 1991. *Probability, random variables and stochastic processes*. MacGraw-Hill, USA. 666 pp.
- Pratt, W. 2007. *Digital Image Processing*. John Wiley and Sons, Inc., New Jersey. 786 pp.
- Ratliff, B, Hayat, M. y Hardie, R. 2002. An Algebraic Algorithm for Nonuniformity Correction in Focal-plane Arrays. *Optical Society of America*, 19(9):1737–1747 p.

- Saad, Y. 2003. *Iterative methods for sparse linear system*. Siam, USA. 528 pp.
- Sanders, J. y Kandrot, E. 2010. *CUDA by example: an introduction to general-purpose GPU programming*. Addison-Wesley, USA. 312 pp.
- Sensortech. 2011. Piezoelectric Actuators. URL <http://www.sensortech.ca/site/index.cfm?DSP=Section&ID=18>. Consultado el 17 de marzo del 2011.
- Shi, J., Reichenbach, S y Howe, J. 2006. Small-kernel superresolution methods for microscanning imaging systems. *Optical Society of America.*, 45(6):1203–1214 p.
- Uma, S. y Annadurai, S. 2005. A review-Restoration approaches. *ICGST I. J. on Graphics, Vision and Image Processing*, 8:23–35 p.
- Young, I. T. 2001. *Shading correction: compensation for illumination and sensor inhomogeneities*, Robinson, P., editor, *Current protocols in cytometry*. John Wiley and Sons, Inc, USA.
- Zhang, L., Yuan, Q., Shen, H. y Li, P. 2011. Multiframe Image Super-resolution adapted with local spatial information. *Optical Society of America.*, 28(3):381–390 p.