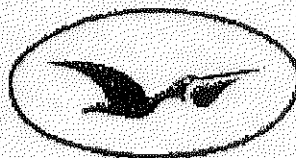


**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR
DE ENSENADA**



CICeSE

**DIVISIÓN DE OCEANOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE OCEANOGRAFÍA FÍSICA**

EL DECAIMIENTO DE FLUJOS EN ROTACIÓN CON FONDO RUGOSO

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

Luis Ramón Siero González

Ensenada, Baja California a mayo del 2004.

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR
DE ENSENADA**



CICESE

**DIVISIÓN DE OCEANOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE OCEANOGRAFÍA FÍSICA**

EL DECAIMIENTO DE FLUJOS EN ROTACIÓN CON FONDO RUGOSO

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

Luis Ramón Siero González

Ensenada, Baja California a mayo del 2004.

RESUMEN de la tesis de Luis Ramón Siero González, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en OCEANOGRAFÍA FÍSICA. Ensenada, Baja California. Mayo del 2004.

EL DECAIMIENTO DE FLUJOS EN ROTACIÓN CON FONDO RUGOSO

Resumen aprobado por:



Dr. Luis Zavala Sansón.
Director.

En este trabajo se analiza el decaimiento de un fluido homogéneo en rotación con fondo rugoso por medio de experimentos de laboratorio y de simulaciones numéricas en dos dimensiones. Esencialmente, dicho decaimiento se debe a los efectos viscosos producidos por las condiciones de frontera en las paredes del tanque y en el fondo del mismo. De particular interés en este estudio son los efectos producidos por la capa límite (capa de Ekman) de un fondo rugoso, los cuales se analizaron mediante dos tipos de experimentos. En primer lugar, se estudió el movimiento de un fluido inicialmente en reposo, el cual se pone a girar con una rapidez predeterminada hasta alcanzar una rotación de cuerpo sólido (proceso de ajuste conocido como *spin-up*). En comparación con el caso de un fondo plano, se encontró que el tiempo de ajuste es reducido cuando el fondo es rugoso. Se propone que este mayor decaimiento se debe a que la capa de Ekman sobre el fondo rugoso es turbulenta durante la primera etapa del ajuste, en la que el número de Reynolds es grande [orden $O(10^5)$]. Se realizaron simulaciones numéricas de casos similares utilizando números de Reynolds menores, las cuales mostraron que el campo de vorticidad en las etapas finales del ajuste se alinea con los contornos de la topografía. En segundo lugar, se realizaron experimentos y simulaciones del decaimiento de un remolino circular inestable, el cual se transforma en una estructura tripolar bien conocida en la literatura. Los resultados muestran que en este caso el fondo rugoso afecta sensiblemente su estructura al adquirir la forma de las variaciones topográficas conforme se disipa. Además, cuando la longitud de onda de las variaciones topográficas son comparables al diámetro del remolino inicial, éste se deforma y puede llegar a dividirse en dos partes. La evolución del tripolo es cualitativamente bien representada

mediante simulaciones numéricas en dos dimensiones con topografía variable. Las simulaciones confirman que conforme el vórtice se disipa el flujo tiende a alinearse con los contornos topográficos, predominando las regiones con vorticidad ciclónica sobre los valles y anticiclónica sobre las crestas.

Palabras clave: *Vórtice, Capa límite, Capa de Ekman, Fondo rugoso, Número de Reynolds.*

ABSTRACT of thesis presented by Luis Ramón Siero González, as partial requirement to obtain the MASTER OF SCIENCE degree in PHYSICAL OCEANOGRAPHY. Ensenada, Baja California, México. Mayo del 2004.

THE DECAY OF ROTATING FLUIDS OVER A VARIABLE TOPOGRAPHY

The decay of rotating, homogeneous flows over variable topography is analyzed by means of laboratory experiments and numerical simulations in two dimensions. Essentially, the decay is due to viscous effects produced by the boundary conditions at the walls and at the solid bottom of the tank. In particular, the effects due to the Ekman layer associated with an irregular topography are analyzed by performing two different types of experiments. The first set of experiments examines the spin-up from rest of a fluid over a sine-shaped topography. In comparison with the flat bottom case, it is shown that the time to complete the spin-up process is shorter for the rough topography. It is proposed that the faster decay over the irregular bottom is due to the turbulent character of the Ekman layer during the early stages of the adjustment process, when the Reynolds number is large [order $O(10^5)$]. Numerical simulations with lower Reynolds numbers show that the vorticity field aligns with topography contours at later stages. In the second set of experiments, the evolution and decay of an initially circular vortex transforming into a well-known tripolar structure is studied. The results show that the rough bottom clearly affects the structure of the vortex, which acquires the shape of the topography as decaying. In addition, when the horizontal length scale of the bottom topography is comparable with the vortex diameter, the cyclonic core is strongly deformed and it might be cleaved in two parts. The evolution of the tripole is qualitatively well represented by numerical simulations in two dimensions with variable topography. The simulations confirm that as the vortex dissipates the flow is aligned with the topographic contours, being the cyclonic (anticyclonic) vorticity areas over deep (shallow) regions of the topography.

Key words: Vórtices, Ekman layer, spin-up, Variabel topography, Reynolds number.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Luis Zavala Sansón por sus enseñanzas, paciencia, apoyo incondicional y por su amistad.

A los miembros del comité, Dr. Edgar Gerardo Pavía López, Dr. Silvio Guido L. Marinone Moschetto, Dr. José Luis Ochoa de la Torre, Dr. Gilberto López Mariscal, por sus comentarios.

Al Dr. Oscar Velazco Fuentes por su ayuda y enseñanzas.

Al Dr. Modesto Ortiz por su ayuda, amistad y consejo.

A mis maestros por sus enseñanzas, consejos, durante estos años.

Al CICESE, por el apoyo económico brindado mediante la beca otorgada.

A mi familia: Martha Alejandra Velazquez Miranda, Luis Eduardo Siero Velazquez, a mis padres José Ramón Siero Estrada, Carmen Alicia González Gallegos, a mis hermanos Monica María Siero González, Alicia del Rosario Siero González, Cesar Alberto Mancillas Murillo y a mis sobrinos Ana Lucia León Siero, Monica Patricia León Siero, Cesar Alberto Mancillas Siero. Por su apoyo incondicional y consejos.

A mis compañeros de la maestría: Ana Laura, Gabriela, Francisco, Atilio, Adrian, Ruben, Alejandro, Mark. Por todo lo que pasamos juntos.

A Lina, Lupita, Roberto, Alina, Citlali, Ivonne, Dolores por su ayuda.

A todos los que omití por descuido, pido disculpas.

Índice

	página.
I. Introducción	1
II. Teoría	5
II.1. Efectos topográficos sin viscosidad	5
II.2. Capa límite del fondo	10
II.3. Efectos topográficos con viscosidad	12
II.4. Modelo numérico	15
III. El problema del ajuste sobre un fondo rugoso	17
III.1. Experimentos de laboratorio	17
III.2. Simulaciones numéricas	23
IV. Evolución de un remolino tripolar sobre un fondo rugoso	33
IV.1. Experimentos de laboratorio	33
IV.2. Simulaciones numéricas	39
V. Conclusiones	46
Referencias	48

Índice de figuras

Figura	página
1. Esquema de una capa de fluido homogéneo en un sistema en rotación con fondo variable.	6
2. Representación gráfica del estiramiento y compresión de las columnas de fluido debido a la condición de Ekman en el fondo.	13
3. Esquema del fondo variable utilizado para los experimentos de laboratorio. Para el problema del ajuste el fondo tiene una amplitud $A = 1$ cm y longitud $\lambda = 6$ cm	18
4. Imágenes de larga exposición tomadas de planta que muestran el ajuste del flujo sobre el fondo rugoso con $Re = 1 \times 10^5$. Las líneas blancas representan las trayectorias de partículas de papel que flotan sobre la superficie del fluido. La profundidad media es $H = 15$ cm, y el tanque gira con una rapidez angular de $\Omega = 0.41$ s ⁻¹ (período de rotación $T \sim 15$ s).	19
5. Imagen de larga exposición tomada a los $t = 900$ s para el problema del ajuste sobre el fondo rugoso con $Re = 2.5 \times 10^5$. La profundidad media es $H = 25$ cm y el tanque gira con una rapidez angular de $\Omega = 1$ s ⁻¹	20
6. Contornos de vorticidad calculados de la simulación del ajuste con el fondo plano. Las líneas continuas (discontinuas) representan contornos de vorticidad positiva (negativa) con un incremento de 0.05 s ⁻¹	25
7. Contornos de vorticidad calculados de la simulación del ajuste con el fondo variable con amplitud $A = 4$ cm y longitud $\lambda = 8$ cm.	26
8. Contornos de vorticidad calculados de la simulación del ajuste con fondo variable con amplitud $A = 12$ cm y longitud $\lambda = 8$ cm.	28
9. Contornos de vorticidad calculados de la simulación mostrada en la figura 8, para tiempos intermedios de $140 - 560$ s.	29
10. Contornos de vorticidad calculados de la simulación del ajuste con fondo variable con amplitud $A = 4$ cm y longitud $\lambda = 50$ cm.	30
11. Decaimiento de la energía total (normalizada con su valor inicial) en las simulaciones con fondo plano y variable. Fondo 1: $\lambda = 8$ cm, $A = 4$ cm. Fondo 2: $\lambda = 12$ cm, $A = 4$ cm. Fondo 3: $\lambda = 50$ cm, $A = 4$ cm.	31
12. Perfiles de velocidad y de vorticidad relativa para un remolino producido por las ecuaciones (62) y (63). En este caso $R = 10$ cm y $\omega_0 = 3$ s ⁻¹	34
13. Fotografías tomadas de planta en donde se puede apreciar la formación y evolución de un remolino tripolar sobre el fondo 1 ($A = 1$ cm, $\lambda = 6$ cm).	36
14. Fotografía tomada de planta en donde se aprecia la alineación del tripolo con la topografía del fondo 1 para $t = 450$ s.	37

15.	<i>Fotografías tomadas de planta en donde se aprecia la formación y evolución de un remolino tripolar sobre el fondo 2 ($A = 2$ cm, $\lambda = 10$ cm). Las flechas blancas en $t = 60$ s señalan los anticiclones del tripolo. Las flechas a los 180 s apuntan a las dos partes en las que se divide el ciclón central. La flecha en $t = 240$ s apunta al filamento de tinta que une a las partes del ciclón dividido.</i>	38
16.	<i>Contornos de vorticidad calculados de la simulación del tripolo con amplitud $A = 1$ cm y longitud $\lambda = 6$ cm, ver figura 6.</i>	40
17.	<i>Trazadores pasivos de la simulación mostrada en la figura 16, donde los puntos grises se encuentran inicialmente en el núcleo del remolino y los puntos negros en la periferia.</i>	42
18.	<i>Giro del tripolo en función del tiempo en el experimento de la Figura 13 y la simulación mostrada en la figura 16.</i>	43
19.	<i>Contornos de vorticidad calculados de la simulación del tripolo con amplitud $A = 2$ cm y longitud $\lambda = 10$ cm, ver figura 6.</i>	44
20.	<i>Trazadores pasivos de la simulación mostrada en la figura 19, donde los puntos grises se encuentran inicialmente en el núcleo del remolino, y los puntos negros en la periferia.</i>	45

Índice de Tablas

Tablas	página
1. Periodo de ajuste T_a en ocho experimentos.	21

I. Introducción

Una de las fuerzas más importantes que actúan sobre un cuerpo o fluido que se mueve lentamente en un sistema en rotación (con velocidad angular constante o variable) es la fuerza de Coriolis. Bajo ciertas condiciones el fluido contenido en un sistema con estas características se comporta de una manera casi bidimensional, es decir, que su movimiento es predominante en el plano perpendicular al eje de rotación. Este comportamiento se presenta en un fluido homogéneo cuando el número de Rossby $R_o = \frac{U}{\Omega L}$ es muy pequeño (con Ω la rapidez angular del sistema, U y L las escalas de velocidad y longitud del fluido, respectivamente). En esta tesis se estudia la evolución de un fluido en un tanque en rotación con $R_o \lesssim 1$, en donde el carácter bidimensional de su movimiento se observa claramente. Para fluidos planetarios (en el océano y la atmósfera) con escala de longitud mucho menor al radio de la Tierra, se puede considerar que su movimiento está restringido a un plano tangente a la superficie terrestre, y el cual gira con rapidez $\Omega = \Omega_T \sin(\varphi_0)$ (con φ_0 la latitud de referencia y Ω_T la rapidez angular de la Tierra). Generalmente en estos casos se tiene $R_o \ll 1$. Aunque en el laboratorio R_o puede ser de orden $O(1)$, conforme avanza el experimento el flujo decae y el número de Rossby tiende a ser mucho menor. Por lo tanto, los experimentos del laboratorio se pueden utilizar como modelo experimental de los fluidos geofísicos afectados por la rotación de la Tierra.

Una de las estructuras más características o abundantes en los fluidos son los vórtices, por lo que el estudio de su dinámica es de suma importancia para modelos geofísicos (Hopfinger y van Heijst, 1993). Un factor relevante en el comportamiento de un vórtice en un sistema en rotación es el efecto del fondo, el cual rompe la bidimensionalidad del flujo. Por ejemplo, van Heijst (1994) hizo un compendio general de dichos efectos de la topografía del fondo en varios tipos de remolinos en un sistema en rotación. En particular, el comportamiento de un remolino sobre una pendiente fue estudiado

por Carnevale *et al.* (1991), quienes mostraron experimentalmente el movimiento de vórtices ciclónicos hacia las partes someras del dominio debido al efecto topográfico. Otras investigaciones en esta área han estudiado la interacción de un vórtice con una montaña submarina (Zavala Sansón y van Heijst, 2002). Uno de los primeros estudios de laboratorio que investigan el ajuste de un fluido en un tanque en rotación fue estudiado por van Heijst (1989), quien realizó experimentos con un tanque circular y fondo plano y usando diferentes velocidades angulares. Otro trabajo experimental reportado por van Heijst *et al.* (1990) estudia el ajuste de un fluido en rotación en un tanque rectangular, variando la razón de aspecto. Un estudio más general realizado por van de Konijnenberg (1995) analiza por medio de experimentos de laboratorio y simulaciones numéricas el problema del ajuste utilizando tanques con diferentes geometrías (cuadrado, circular, triangular y rectangular) y velocidades angulares.

La mayor parte de los estudios mencionados analizan el efecto de topografías con escalas horizontales iguales o mayores a la escala horizontal del flujo (en un vórtice, por ejemplo, dicha escala es el radio). En contraste, en este trabajo se estudia la evolución de flujos en rotación sobre topografías con escala horizontal pequeña (respecto al flujo). El propósito de esta tesis es entender el efecto de un fondo variable con estas características en el comportamiento de flujos cuasi-bidimensionales, por medio de experimentos de laboratorio y simulaciones numéricas. Para lograr este objetivo se analizaron dos problemas diferentes: (a) el ajuste de un fluido homogéneo en un recipiente puesto en rotación y (b) el decaimiento de un vórtice circular inestable el cual se transforma en una estructura tripolar.

En el capítulo II se presenta el modelo físico para la evolución de la vorticidad relativa considerando un fluido homogéneo bidimensional. Se utilizó un modelo en dos dimensiones con la finalidad de entender y describir la evolución del fluido dentro del tanque en rotación con mayor facilidad. En contraste, el uso de un modelo tridimensional es más difícil de interpretar, y la capacidad de cómputo requerida para resolverlo

numéricamente es mucho mayor. Desde el punto de vista físico el fluido se mueve en columnas que permanecen alineadas al eje de rotación. El modelo incluye los efectos asociados con la topografía del fondo y despreciando las variaciones de la superficie libre (tapa rígida).

Es importante mencionar dos tipos de efectos topográficos para fluidos bidimensionales: (a) efectos sin viscosidad y (b) efectos con viscosidad. Los efectos sin viscosidad están asociados con el estiramiento y compresión de la columna de fluido conforme experimenta cambios en la profundidad, es decir, conforme se desplaza sobre un fondo variable. Como estos efectos dependen de la forma del fondo es obvio que no se presentan cuando se considera el fondo plano. Por otro lado los efectos con viscosidad son aquellos producidos por una capa muy pequeña comparada con la capa límite del fondo o capa de Ekman, la cual está asociada con la condición de no deslizamiento en el fondo del tanque. El funcionamiento o mecanismo de la capa límite se explica con más detalle en la sección II.2.

La topografía que se utilizó para los experimentos tiene una forma sinusoidal en una sola dirección, lo que quiere decir que depende de una amplitud A y una longitud de onda λ . En otras palabras, las variaciones topográficas son de la forma $A \sin(\frac{2\pi}{\lambda} x)$. Este tipo de fondo se usó como una primera aproximación, ya que de esta manera es más claro observar los procesos que afectan al fluido debidos a la topografía.

En el capítulo III se analiza el problema del ajuste de un fluido en rotación sobre un fondo irregular. Los experimentos se realizaron utilizando un tanque cuadrado lleno de agua con una cierta profundidad, que se encuentra inicialmente en reposo, el cual se pone a girar a una cierta velocidad angular constante de manera que el fluido en el interior del tanque se ajusta hasta alcanzar el estado de rotación de cuerpo sólido. A todo este proceso de ajuste se le llama *spin-up* o ajuste del fluido. El proceso del ajuste depende de la geometría del dominio (es decir, de la forma del tanque), y también del tipo de fondo que se utilice, el cual puede ser plano o rugoso, debido a

la capa límite en la frontera inferior. En particular, uno de los aspectos a analizar en este estudio es el efecto del fondo rugoso durante el ajuste en un tanque cuadrado. El proceso de ajuste se puede definir en tres etapas principales, las cuales se muestran y se explican con más detalle en el capítulo III.

En el capítulo IV se estudia la evolución de un remolino tripolar con fondo rugoso. Este remolino es inicialmente ciclónico y circular, pero posteriormente se inestabiliza y desprende dos anticiclones adyacentes al ciclón, formando un tripolo. La estructura tripolar gira en el sentido en que gira el sistema, es decir, en sentido ciclónico. Este vórtice ha sido ampliamente estudiado sobre un fondo plano durante los últimos 15 años (van Heijst, *et al* 1991). En contraste, en este capítulo se analizó la evolución del tripolo sobre un fondo rugoso y se observó una gran diferencia con respecto al caso con topografía plana, como se discutirá posteriormente.

Finalmente, el capítulo V presenta las conclusiones más importantes de este estudio, y se plantea los problemas no resueltos y los problemas futuros a estudiar.

II. Teoría

El propósito de este capítulo es presentar el modelo físico que describe la evolución de la vorticidad relativa de un fluido en rotación, considerando efectos topográficos del fondo. En la primera sección se encuentra la ecuación para la evolución de la vorticidad tomando en cuenta los efectos de la topografía variable y despreciando los efectos viscosos del fondo. En la segunda sección se analiza la teoría básica de la capa límite del fondo, conocida como la capa de Ekman. En la tercera parte se consideran de manera conjunta todos los efectos topográficos, viscosos y no viscosos. En la cuarta y última sección se da una breve explicación del modelo que se utilizó para las simulaciones numéricas.

II.1. Efectos topográficos sin viscosidad

Al considerar el movimiento de un fluido geofísico en un plano tangente a la Tierra (aproximación de plano f), la vorticidad planetaria se define como:

$$f = 2\Omega_T \text{sen}(\phi_0), \quad (1)$$

donde ϕ_0 es la latitud de referencia y Ω_T es la rapidez angular del planeta. Los océanos y la atmósfera tienen un movimiento relativo al del planeta dado por las corrientes, el viento y muchos otros factores. La componente de la vorticidad relativa en la dirección vertical (definida como la dirección perpendicular al plano) asociada a estos movimientos está definida por:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2)$$

donde (u, v) son las componentes de la velocidad en las direcciones (x, y) del plano. La suma de la vorticidad planetaria más la vorticidad relativa se define como la vorticidad

absoluta. Por otro lado, en experimentos de laboratorio en un tanque en rotación con rapidez angular Ω la vorticidad “planetaria” es simplemente $f = 2\Omega$.

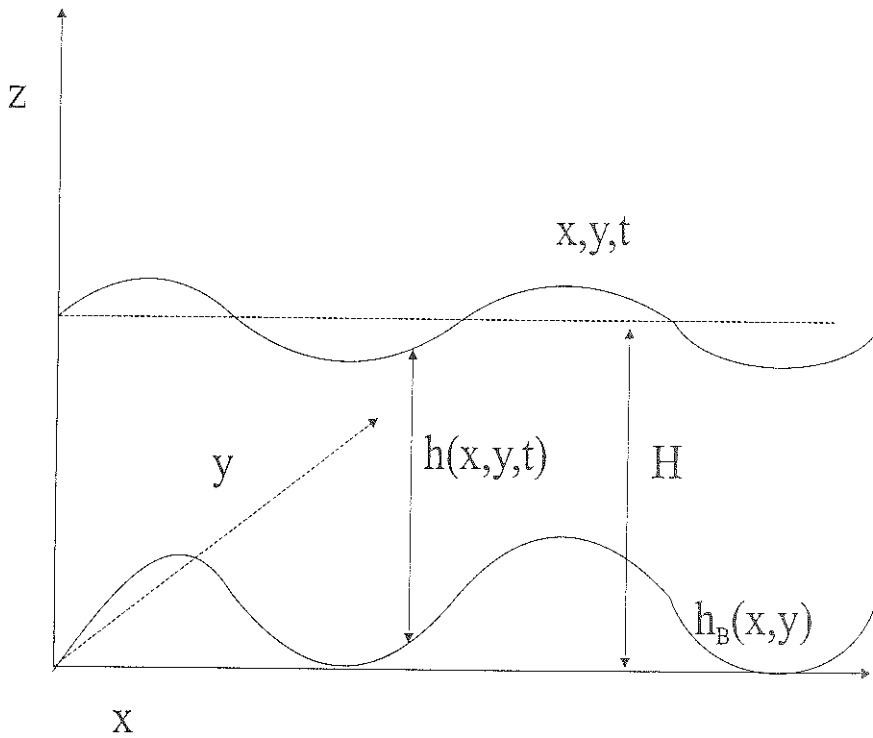


Figura 1: Esquema de una capa de fluido homogéneo en un sistema en rotación con fondo variable.

Tomando en cuenta un fluido homogéneo en rotación, con una profundidad $h(x, y, t)$ sobre una topografía arbitraria $h_B(x, y)$ como en la Figura 1, se puede considerar que si el movimiento es suficientemente “lento” (es decir, que tiene un número de Rossby pequeño, ver Introducción) entonces las siguientes ecuaciones de movimiento y de continuidad gobiernan su evolución:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v, \quad (4)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

Las componentes horizontales de velocidad $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ son independientes de la profundidad z , t es el tiempo, ν es la viscosidad cinemática, el operador Laplaciano se define como $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, p es la presión, g es la gravedad y ρ es la densidad constante del fluido. Bajo esta aproximación, la ecuación (5) indica que prevalece el balance hidrostático en la dirección vertical, aún cuando el fluido se encuentre en movimiento. Es importante notar también que la componente vertical de la velocidad, w , sólo aparece en la ecuación de continuidad (6) que nos dice que el fluido es incompresible. Al integrar la condición de balance hidrostático en la dirección vertical z y aplicando la condición de frontera $p(x, y, H + \eta) = p_0$ se obtiene

$$\int_p^{p_0} dp = - \int_z^{H+\eta} \rho g dz, \quad (7)$$

donde H es la profundidad de referencia desde el nivel $z = 0$, p_0 es la presión atmosférica y $\eta(x, y, t)$ es la elevación de la superficie libre. Resolviendo las integrales se deriva que

$$p_0 - p(x, y, z, t) = -\rho g[H + \eta(x, y, t) - z], \quad (8)$$

es decir, que la presión está dada por

$$p(x, y, z, t) = \rho g[H + \eta(x, y, t) - z] + p_0. \quad (9)$$

Derivando respecto a x e y se obtienen los gradientes de presión, los cuales son independientes de z y son proporcionales a los gradientes de la deformación de la superficie ($\frac{\partial \eta}{\partial x}$ y $\frac{\partial \eta}{\partial y}$, respectivamente). Al sustituir (9) en las ecuaciones de movimiento (3) y (4), tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \nu \nabla^2 u, \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \nu \nabla^2 v. \quad (11)$$

Para eliminar los gradientes de presión se deriva la ecuación (10) respecto de y y la ecuación (11) respecto de x ; al restarlas se obtiene

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) (\omega + f) = \nu \nabla^2 \omega, \quad (12)$$

donde ω , la vorticidad relativa, está definida por (2).

Para determinar la divergencia horizontal se integra la ecuación (6) (ecuación de continuidad) en la dirección z , desde la profundidad $z = h_B$ a la superficie $z = h + h_B$:

$$\int_{w(h_B)}^{w(h+h_B)} dw = - \int_{h_B}^{h+h_B} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz. \quad (13)$$

Al resolver la integral y tomando en cuenta u y v independientes de z :

$$w(z = h + h_B) - w(z = h_B) = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) h. \quad (14)$$

La velocidad vertical en la superficie libre está dada por la condición cinemática, la cual se denota por:

$$w(z = h + h_B) = \frac{D(h + h_B)}{Dt} = \frac{\partial(h + h_B)}{\partial t} + u \frac{\partial(h + h_B)}{\partial x} + v \frac{\partial(h + h_B)}{\partial y}, \quad (15)$$

donde $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ es la derivada material. Por otro lado, la condición de impenetrabilidad en el fondo se define como:

$$w(z = h_B) = \frac{Dh_B}{Dt} = u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y}. \quad (16)$$

La derivada temporal en el fondo es igual a cero ya que la topografía no cambia en el tiempo. Sustituyendo las ecuaciones (15) y (16) en la ecuación (14) resulta

$$\frac{\partial(h + h_B)}{\partial t} + u \frac{\partial(h + h_B)}{\partial x} + v \frac{\partial(h + h_B)}{\partial y} - u \frac{\partial h_B}{\partial x} - v \frac{\partial h_B}{\partial y} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) h.$$

Agrupando términos se llega a obtener la ecuación de conservación de masa

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0. \quad (17)$$

Aplicando la aproximación de tapa rígida, la cual permite despreciar la variación temporal de la superficie libre en la ecuación de conservación de masa, se obtiene que

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0. \quad (18)$$

De la ecuación anterior se puede definir la divergencia horizontal como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{h} \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right). \quad (19)$$

Sustituyendo la ecuación (19) en la ecuación (12) se deriva la expresión para la ecuación de evolución de la vorticidad

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{1}{h} \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) (\omega + f) = \nu \nabla^2 \omega. \quad (20)$$

De la ecuación (18) se define una función transporte de la siguiente manera

$$u = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (21)$$

$$v = -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (22)$$

Nótese que las unidades de la función ψ son $\frac{m^3}{s}$. Sustituyendo (21) y (22) en (20) se deriva la ecuación de evolución de la vorticidad en términos de la vorticidad relativa y la función corriente,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J \left(\frac{\omega + f}{h}, \psi \right) = \frac{\nu}{h} \nabla^2 \omega, \quad (23)$$

donde $J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x}$ es el operador Jacobiano. Por otra parte, despreciando los términos viscosos se puede verificar que

$$\frac{Dq}{Dt} = 0, \quad (24)$$

donde q es la vorticidad potencial y se define como

$$q = \frac{\omega + f}{h}. \quad (25)$$

La ecuación (24) indica la conservación material de vorticidad potencial, es decir, que la vorticidad relativa ω cambia conforme la columna de fluido experimenta cambios en su altura h de manera que q se conserve. Por lo tanto, en este modelo la evolución de la vorticidad se puede asociar con el estiramiento y la compresión de las columnas de agua conforme el fluido experimenta cambios en la profundidad.

Sustituyendo (21) y (22) en la ec (2) la vorticidad relativa se relaciona con la función corriente mediante la expresión

$$\omega = -\frac{1}{h} \nabla^2 \psi + \frac{1}{h^2} \nabla h \cdot \nabla \psi. \quad (26)$$

II.2. Capa límite del fondo

En esta sección se toman en cuenta los efectos producidos por la capa límite en el fondo, conocida como la capa de Ekman. Para poder explicar en forma clara los mecanismos físicos debidos a dicha capa se considera el fondo plano. El número de Ekman, que es la razón entre los efectos viscosos y los efectos de rotación, se define como

$$E = \frac{2\nu}{fH^2}. \quad (27)$$

donde H es la profundidad media del fluido. Para fluidos en rotación como los estudiados en esta tesis, $E \ll 1$. Además, el espesor de la capa límite, δ_E , es muy pequeño comparado con la profundidad H (Gill, 1982), y se define como:

$$\delta_E = \left(\frac{2\nu}{f} \right)^{\frac{1}{2}} = E^{\frac{1}{2}} H. \quad (28)$$

La velocidad vertical en el fluido interior (fuera de la capa de Ekman) es muy pequeña comparada con las velocidades horizontales por lo que se puede considerar que el fluido es bidimensional. Sin embargo, dentro de la capa límite la velocidad vertical es diferente de cero, lo cual produce intercambio de fluido con el interior. Esto es lo que conocemos como la condición de Ekman, la cual se denota por (Zavala Sansón 2000)

$$w(z = \delta_E) = \frac{1}{2} \delta_E \omega. \quad (29)$$

La condición de Ekman puede ser utilizada como condición de frontera en el fondo cuando la ecuación de continuidad es integrada en la vertical, es decir,

$$\int_{w(\delta_E)}^{w(h)} dw = - \int_{\delta_E}^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz. \quad (30)$$

Usando la condición cinemática en la superficie y la condición de Ekman en el fondo, la divergencia horizontal está dada por

$$(h - \delta_E) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \delta_E \omega - \frac{Dh}{Dt}. \quad (31)$$

Esto indica que la divergencia horizontal es causada por los cambios en la columna de fluido producidos por la evolución de la superficie libre, y la velocidad vertical inducida por la capa límite. Aplicando la aproximación de tapa rígida, haciendo $h \sim H$ y considerando que $H \gg \delta_E$, entonces la divergencia horizontal queda como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2} E^{\frac{1}{2}} \omega. \quad (32)$$

Al sustituir (32) en la ecuación de evolución de la vorticidad obtenida en la sección anterior, (12), resulta

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{1}{2} E^{\frac{1}{2}} \omega (\omega + f) + \nu \nabla^2 \omega. \quad (33)$$

Para poder analizar el proceso de amortiguamiento debido a la capa de Ekman se pueden omitir los términos no lineales y la fricción lateral, lo cual implica:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{1}{2} E^{\frac{1}{2}} \omega f. \quad (34)$$

Al resolver esta ecuación se obtiene el decaimiento de la vorticidad relativa provocado por la capa límite:

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{t}{T_E}}, \quad (35)$$

donde el periodo de Ekman se define como

$$T_E = \frac{2}{f E^{\frac{1}{2}}}. \quad (36)$$

El mecanismo de fricción de la capa límite en un fluido bidimensional funciona de la siguiente manera: cuando el fluido interior tiene vorticidad relativa positiva, existe un bombeo de la capa límite al interior (debido a la condición (29)), lo cual provoca una compresión en la columna de fluido; pero si la vorticidad relativa del interior es negativa, entonces la capa límite succiona fluido del interior provocando un estiramiento en la columna de agua (ver Figura 2).

II.3. Efectos topográficos con viscosidad

En esta sección se deriva el modelo bidimensional que contiene efectos topográficos viscosos y no viscosos obtenido por Zavala Sansón y van Heijst (2002). Primero, se hace la suposición de que la velocidad inducida por la capa límite en el fondo está dada por la condición de Ekman. Aplicando esta condición para el fondo variable se obtiene que:

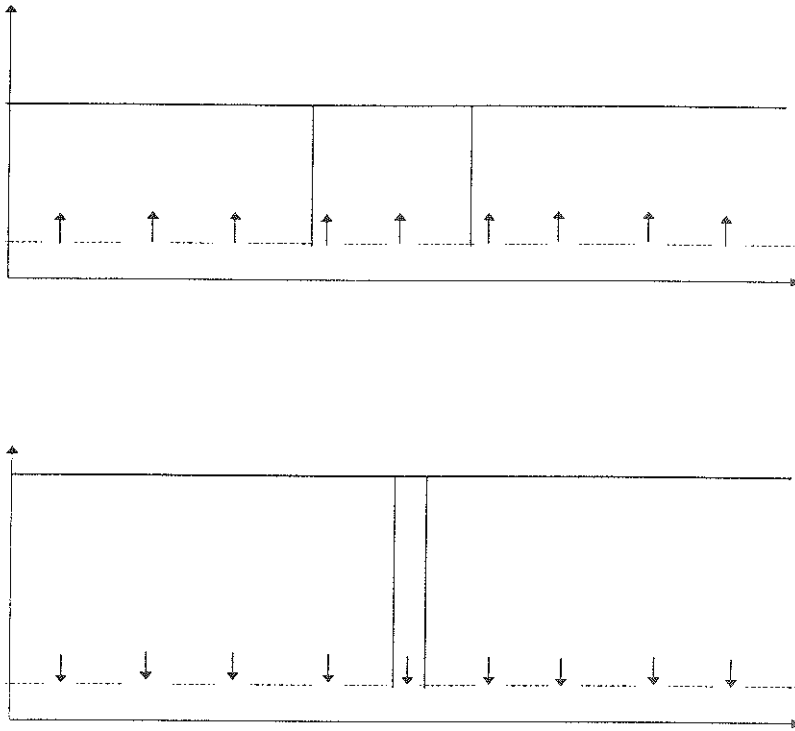


Figura 2: Representación gráfica del estiramiento y compresión de las columnas de fluido debido a la condición de Ekman en el fondo.

$$w(z = h_B) = u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y} + \frac{1}{2} \delta_E \omega. \quad (37)$$

La primera parte, $u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y}$, representa la velocidad vertical debida a la forma de la topografía. Utilizando las ecuaciones (15) y (37) como condiciones de frontera en la integración vertical de la ecuación de continuidad, la divergencia horizontal queda como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\delta_E}{2h} \omega - \frac{1}{h} \frac{Dh}{Dt}. \quad (38)$$

Esta expresión indica que la divergencia horizontal es causada por los cambios en la profundidad del fluido asociados con la superficie libre y la topografía, y por la velocidad vertical producida por la capa límite en el fondo. Aplicando la aproximación de tapa rígida la derivada temporal de h se puede despreciar y se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{h} \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\delta_E}{2h} \omega. \quad (39)$$

Sustituyendo la ecuación (39) en la ecuación (12), y después de hacer algunas manipulaciones algebraicas se llega a obtener una expresión para la ecuación de evolución de la vorticidad, la cual queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + hu \frac{\partial q}{\partial x} + hv \frac{\partial q}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega - \frac{\delta_E}{2h} \omega (\omega + f), \quad (40)$$

donde q es la vorticidad potencial definida por la ecuación (25).

Al agrupar los términos de la ecuación (39) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(hu - \frac{1}{2} \delta_E v \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(hv - \frac{1}{2} \delta_E u \right) = 0, \quad (41)$$

de donde se define una función corriente de tal manera que:

$$hu - \frac{1}{2} \delta_E v = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (42)$$

$$hv + \frac{1}{2} \delta_E u = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (43)$$

De estas ecuaciones se pueden obtener las expresiones para las velocidades horizontales (u, v) , que están dadas por [despreciando términos de orden $O\left(\frac{\delta_E^2}{h^2}\right)$]:

$$u = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\delta_E}{2h} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad (44)$$

$$v = \frac{1}{h} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\delta_E}{2h} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right). \quad (45)$$

Al sustituir las ecuaciones (44) y (45) en la definición de la vorticidad relativa, se obtiene

$$\omega = -\frac{1}{h} \nabla^2 \psi + \frac{1}{h^2} \nabla h \cdot \nabla \psi + \frac{\delta_E}{2h} \frac{2}{h^2} J(h, \psi) \quad (46)$$

Finalmente, la ecuación de evolución de la vorticidad se puede obtener al sustituir las ecuaciones (44) y (45) en la ecuación (40):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(q, \psi) - \frac{\delta_E}{2h} \nabla \psi \cdot \nabla q = \nu \nabla^2 \omega - \frac{\delta_E}{2h} \omega (\omega + f). \quad (47)$$

La ecuación de evolución (47), la ecuación (46) y las velocidades horizontales (44) y (45) representan el modelo cuasi-bidimensional completo con topografía.

II.4. Modelo numérico

Los experimentos de laboratorio que se estudiaron en este trabajo fueron simulados numéricamente mediante un modelo de diferencias finitas que resuelve las ecuaciones (46) y (47). Las ventajas de utilizar un modelo bidimensional es que permite dar una explicación sencilla del comportamiento de un fluido estrictamente tridimensional. La simulación puede representar numéricamente diversas estructuras con una distribución inicial de vorticidad asociada con un monopolo, dipolo, tripolo, un rectángulo con vorticidad uniforme, entre otras. En esta tesis solo se utilizará una distribución de vorticidad inicial uniforme en un cuadrado (capítulo III) y la de un remolino ciclónico que eventualmente se transforma en un tripolo (capítulo IV). Las dimensiones del dominio numérico son iguales a las del tanque en el laboratorio: $100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$. El programa genera una malla de 129×129 puntos por lo que la resolución espacial es de $\Delta x = \Delta y = 0,77 \text{ cm}$. La condición de frontera es de no deslizamiento, la cual dice que la velocidad en las paredes es cero. El tamaño del paso de tiempo, dt fue constante e igual a 0.1 s .

El modelo resuelve las ecuaciones de gobierno por medio de diferencias finitas de segundo orden en una malla cuadrada. Los términos advectivos se discretizan con el esquema explícito de Arakawa, y los términos viscosos por el método implícito de Crank-Nicolson. Para estimar la estabilidad del sistema, el programa debe de calcular el número de Courant el cual se definirá en el capítulo III. La estabilidad del modelo

está determinada por la condición $C_0 \lesssim \sqrt{3}$, donde C_0 es el número de Courant. (van Geffen, 1998).

III. El problema del ajuste sobre un fondo rugoso

III.1. Experimentos de laboratorio

El propósito de este capítulo es analizar el decaimiento de un fluido en un tanque cuadrado puesto en rotación constante con fondo rugoso. Para estudiar este problema se realizaron experimentos de laboratorio y simulaciones numéricas. El experimento consiste en colocar el tanque sobre una mesa giratoria, centrarlo y colocar el fondo que se utilizará dentro del recipiente; enseguida, se llena el depósito con agua hasta obtener una profundidad H deseada; después se pone a girar la mesa con una cierta rapidez angular Ω lo que da inicio al experimento, y el cual termina hasta que el fluido que está dentro del tanque llega a rotación de cuerpo sólido. Los experimentos son visualizados desde el sistema en rotación por medio de una cámara que gira junto con el tanque. Notese que desde el sistema de referencia fijo en el laboratorio el tanque gira en sentido contrario a las manecillas del reloj. Por lo tanto, un remolino “ciclónico” en el sistema en rotación también gira en contra de las manecillas, mientras que un remolino “anticiclónico” gira a favor. Para analizar el efecto de la rugosidad del fondo se utilizó como topografía una lámina de forma sinusoidal con longitud de onda λ y amplitud A (ver Figura 3). Para los experimentos descritos en este capítulo se utilizó un fondo con $\lambda = 6 \text{ cm}$ y $A = 1 \text{ cm}$, además del fondo plano. Ambos casos, el ajuste en el fondo plano y rugoso, son comparados en detalle.

Los experimentos fueron hechos en un tanque de $100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$, con dos diferentes profundidades ($H_1 = 15 \text{ cm}$, $H_2 = 25 \text{ cm}$), utilizando dos números de Reynolds. El número de Reynolds está definido por

$$Re = \frac{UL}{\nu}, \quad (48)$$

donde U es la escala típica de la velocidad del fluido, L la longitud horizontal del vórtice y ν es la viscosidad cinemática del agua ($0.01 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$). La escala de velocidad se

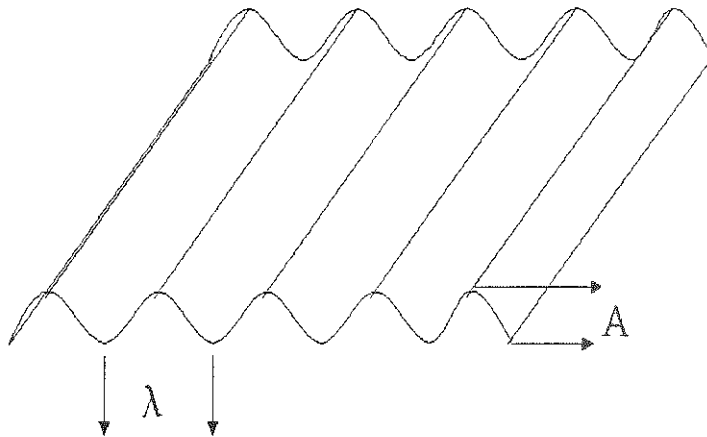


Figura 3: Esquema del fondo variable utilizado para los experimentos de laboratorio. Para el problema del ajuste el fondo tiene una amplitud $A = 1 \text{ cm}$ y longitud $\lambda = 6 \text{ cm}$

puede aproximar como ΩL , donde Ω es la rapidez angular del sistema. Los números de Reynolds utilizados son $Re = 1 \times 10^5$, $Re = 2.5 \times 10^5$, los cuales corresponden a las dos velocidades angulares utilizadas ($0,41 \text{ s}^{-1}$ y 1 s^{-1}).

Uno de los primeros resultados experimentales que se observaron es que el proceso de ajuste en los fondos plano y rugoso son cualitativamente muy parecidos, aunque se dan en escalas de tiempo muy diferentes, como se verá más adelante. El proceso de ajuste se muestra en la Figura 4 para un caso típico con $Re = 1 \times 10^5$ sobre fondo rugoso. En este caso el flujo es visualizado mediante fotos de larga exposición de partículas de papel sobre la superficie tomadas desde el sistema en rotación. Los contornos de la topografía están orientados verticalmente. El ajuste del fluido a la rotación del tanque se puede clasificar en tres etapas principales. (a) Para el tiempo $t = 0 \text{ s}$ el fluido adquiere una vorticidad inicial de -2Ω por inercia en el momento en que empieza a girar el recipiente. (b) Durante los primeros períodos de rotación se genera vorticidad ciclónica en las paredes del tanque, debido a la condición de no deslizamiento. Dicha

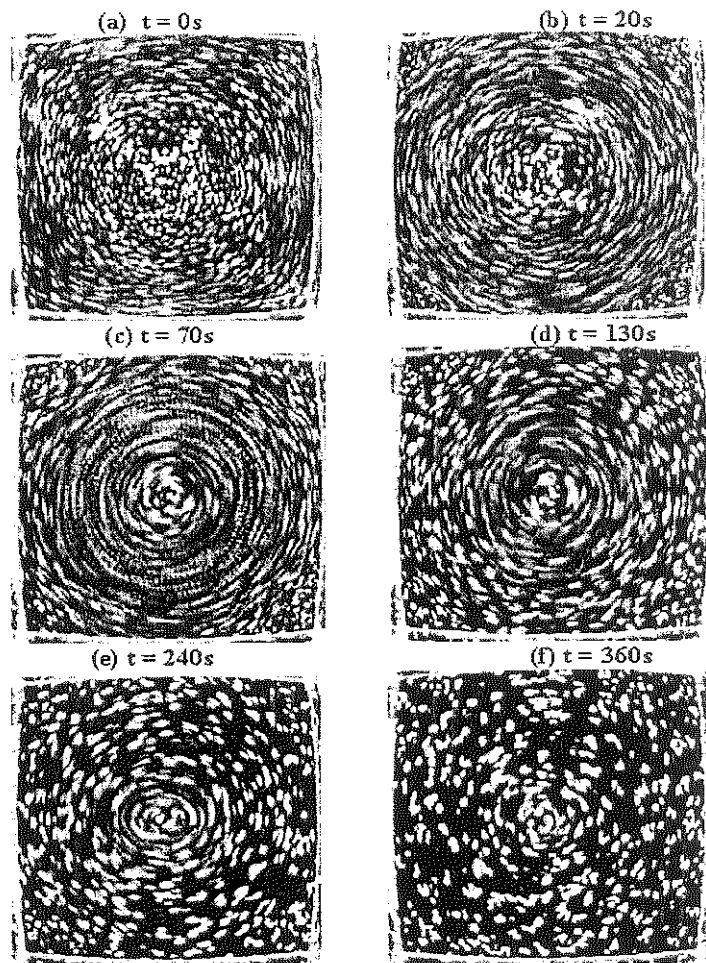


Figura 4: Imágenes de larga exposición tomadas de planta que muestran el ajuste del flujo sobre el fondo rugoso con $Re = 1 \times 10^5$. Las líneas blancas representan las trayectorias de partículas de papel que flotan sobre la superficie del fluido. La profundidad media es $H = 15$ cm, y el tanque gira con una rapidez angular de $\Omega = 0.41$ s^{-1} (período de rotación $T \sim 15$ s).

condición establece que la velocidad en las paredes es cero, y por esta razón se genera vorticidad de signo opuesto a la del flujo inicial. La vorticidad ciclónica se refleja en las fotografías para los tiempos $t = 20$ s hasta $t = 130$ s al acumularse en las esquinas del recipiente, formando pequeños ciclones. (c) En esta etapa el fluido se organiza en un remolino anticiclónico en el centro mientras que los remolinos ciclónicos se disipan para $t = 240$ s hasta $t = 360$ s. Posteriormente el anticiclón decae y se disipa debido a los efectos viscosos asociados con el fondo del tanque.

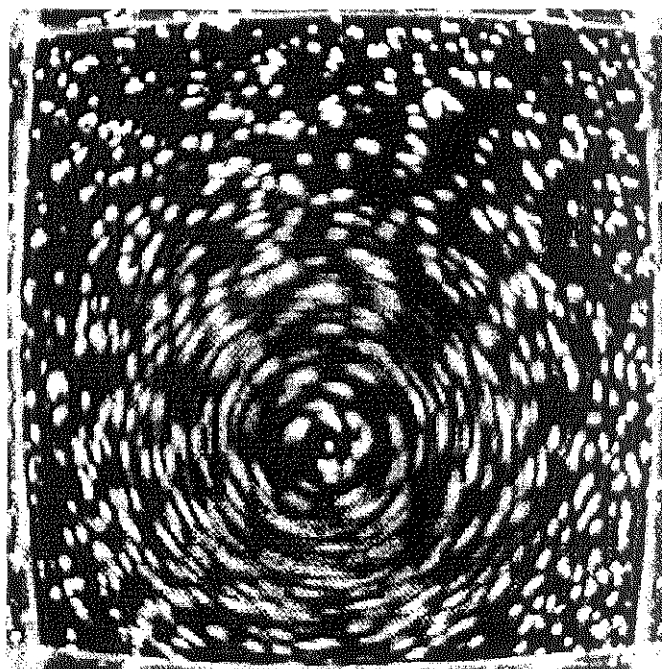


Figura 5: Imagen de larga exposición tomada a los $t = 900$ s para el problema del ajuste sobre el fondo rugoso con $Re = 2.5 \times 10^5$. La profundidad media es $H = 25$ cm y el tanque gira con una rapidez angular de $\Omega = 1$ s $^{-1}$.

Cuando se repite el mismo experimento utilizando un fondo plano se observan resultados muy similares a los de la Figura 4 (el caso del fondo plano ha sido estudiado en detalle por van de Konijnenberg, 1995). De la misma manera, al aumentar el número de Reynolds también se observa un proceso de ajuste parecido, con la excepción de que el remolino central se desplaza ligeramente alrededor del centro. Esto se puede observar en la Figura 5, la cual muestra una imagen de larga exposición para el caso con $Re = 2.5 \times 10^5$ a $t = 900$ s. Dicho desplazamiento es independiente de la forma de la topografía ya que también se observa en el fondo plano (van de Konijnenberg, 1995).

A pesar de que los resultados observados con el fondo rugoso son cualitativamente muy similares a los del fondo plano, se encontró que el proceso de ajuste es significativamente más rápido cuando se tiene la topografía variable. Esto se puede apreciar en la Tabla 1, la cual presenta el periodo de ajuste (T_a) en ocho experimentos. De manera consistente, dicho período es mucho menor en los experimentos con fondo rugoso que

Cuadro 1: Periodo de ajuste T_a en ocho experimentos.

Reynolds	Profundidad	Fondo plano	Fondo rugoso
1×10^5	H = 15 cm	16 min	9 min
	H = 25 cm	27 min	15 min
2.5×10^5	H = 15 cm	14 min	6 min
	H = 25 cm	20 min	10 min

en los de fondo plano.

Para obtener los valores del período de ajuste se utilizó el siguiente criterio: se calculó la velocidad de las cinco partículas más rápidas observadas a tiempos muy largos (varios minutos, es decir, varios periodos de rotación) en la grabación del experimento

$$u_i = \frac{d_i}{t_i}, \quad (49)$$

con $i = 1, 2, 3, 4, 5$, y después se promediaron dichas velocidades

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{n=5} \frac{u_i}{n}. \quad (50)$$

Para determinar que el fluido se encuentra cerca del estado de rotación de cuerpo sólido, se buscó el tiempo T_a para el cual

$$\bar{u} < 0.2 \text{ cm s}^{-1}. \quad (51)$$

El criterio utilizado para determinar T_a , se aplicó durante la última etapa del ajuste, en donde sólo queda el remolino anticiclónico débil, por lo que podemos decir que el experimento está próximo a llegar a rotación de cuerpo sólido. El error asociado en el cálculo de \bar{u} es significativo ($\sim 50\%$) debido a que los desplazamientos d_i se midieron directamente de las imágenes de video. Sin embargo, los resultados obtenidos son consistentes en todos los casos analizados: el ajuste del fluido es claramente más rápido cuando el fondo es rugoso.

Una de las razones por las que el período de ajuste es menor con el fondo variable se debe a que el tamaño o espesor de la capa límite en ese caso es mayor que el espesor de la capa para el fondo plano. El espesor de la capa límite δ_E para el fondo plano está definido en el capítulo de la teoría. Usando los valores típicos de un experimento ($\Omega = 0,41 \text{ s}^{-1}$, $\nu = 0,01 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$) se tiene que

$$\delta_E = \left(\frac{\nu}{\Omega}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0.2 \text{ cm.} \quad (52)$$

Por el contrario, para el fondo variable el espesor de la capa límite se puede considerar al menos del tamaño de la amplitud de sus variaciones, es decir:

$$\delta_{E_{\text{rugoso}}} \approx A \approx 1 \text{ cm.} \quad (53)$$

Al tener una capa límite más grande para el fondo variable, el número de Reynolds asociado tiende a ser mayor que en el del fondo plano, lo cual puede implicar la generación de turbulencia. Dada una capa de Ekman turbulenta, existe entonces la generación de fluctuaciones (“eddies”) en cada valle de la topografía que extraen energía del fluido interior. Este proceso explica, en principio, el menor período de ajuste con el fondo rugoso observado en todos los experimentos.

Para determinar si la capa de Ekman es turbulenta se utilizó el criterio de Greenspan (1968) para el fondo plano, el cual se cumple cuando

$$R_{e_i} = R_o E_i^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{U}{\Omega L}\right) \left(\frac{\Omega L^2}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} > 56, \quad (54)$$

donde R_{e_i} es el número de Reynolds, R_o es en el número de Rossby

$$R_o = \frac{U}{\Omega L}, \quad (55)$$

y E_i es el número de Ekman definido como

$$E_i = \frac{\nu}{\Omega L^2}. \quad (56)$$

En estas expresiones U es la escala de velocidad en el interior del fluido, L es la escala horizontal de longitud. Se puede verificar que el criterio de Greenspan se puede reescribir como

$$R_{e_i} = \frac{U \delta_E}{\nu} > 56. \quad (57)$$

Para el caso del fondo plano se tiene que

$$R_{e_i} \approx 60. \quad (58)$$

Para el fondo variable el número de Reynolds crítico se puede calcular como

$$R_{e_i} = \frac{UA}{\nu} \approx 400. \quad (59)$$

Esto indica que la capa límite en el fondo rugoso tiende a ser turbulenta, por lo que se explica que el período de ajuste con el fondo variable sea menor que el del fondo plano.

III.2. Simulaciones numéricas

En esta sección se presentan simulaciones numéricas del experimento del ajuste con el modelo de diferencias finitas descrito en el capítulo II. El modelo físico está descrito por la ecuación de evolución de la vorticidad relativa (33) con fricción lineal, es decir

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(q, \psi) = \nu \nabla^2 \omega - \frac{1}{2} E^{\frac{1}{2}} \omega f, \quad (60)$$

donde E es el número de Ekman definido por (27), usando la profundidad media. Las simulaciones que se hicieron tienen condiciones iniciales diferentes a las de los experimentos debido a que el código numérico es inestable para números de Reynolds altos. El número de Reynolds de los experimentos fue de $R_e = 1 \times 10^5$ y $R_e = 2.5 \times 10^5$.

Al intentar correr las simulaciones con estos valores se encontró que el cálculo numérico se interrumpía, ya que las velocidades generadas son muy grandes, haciendo inestable el proceso. Para estimar la estabilidad del sistema, el programa debe calcular el número de Courant, el cual se define como

$$C_o = \max \left(\frac{u}{\Delta x} + \frac{v}{\Delta y} \right) \Delta t, \quad (61)$$

donde (u, v) son las velocidades del fluido respecto a (x, y) respectivamente, y $(\Delta x, \Delta y)$ son el tamaño de los cuadros de la malla. Si el número de Courant $C_o \leq \sqrt{3}$ el programa trabaja correctamente debido a que las velocidades no son muy grandes dados Δx , Δy y Δt , pero si $C_o > \sqrt{3}$ significa que las velocidades son muy altas y el programa se interrumpe automáticamente.

A pesar de lo anterior, el problema del ajuste fue analizado numéricamente utilizando una rapidez angular menor, $\Omega = 0,05 \text{ s}^{-1}$. Se usó una profundidad media $H = 35 \text{ cm}$ con los diferentes fondos (plano y variable), en un dominio cuadrado de 100 cm de lado y utilizando la viscosidad cinemática del agua $0,01 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$. Con estos parámetros el número de Reynolds es $R_e = 12500$.

La simulación con el fondo plano se presenta en la Figura 6, donde se muestran contornos de vorticidad a diferentes tiempos. Nótese que en $t = 0 \text{ s}$ no aparece ningún contorno debido a que la condición inicial es -2Ω en cada punto del dominio (es decir, uniforme). A los 20 s se puede apreciar la generación de vorticidad positiva en las paredes, debida a la condición inicial negativa. Al avanzar la simulación, se observa a los 60 s que la vorticidad ciclónica se acumula en las esquinas del dominio, formando cuatro pequeños vórtices. Conforme la simulación progresa la vorticidad positiva se separa ligeramente de las paredes como se aprecia desde los 500 hasta los 800 s . Para tiempos mayores (1140 s hasta 1800 s) el flujo decae y sólo queda vorticidad negativa en el centro del dominio y pequeñas áreas de vorticidad ciclónica cerca de las fronteras. De los resultados anteriores se infiere que durante el ajuste el giro anticiclónico inicial

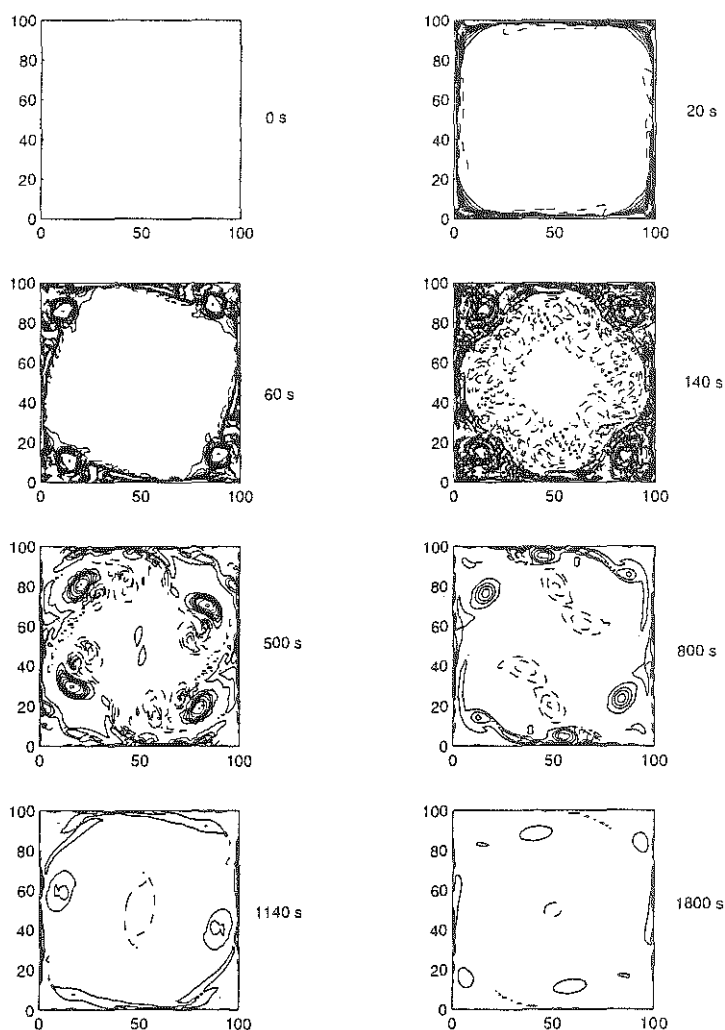


Figura 6: Contornos de vorticidad calculados de la simulación del ajuste con el fondo plano. Las líneas continuas (discontinuas) representan contornos de vorticidad positiva (negativa) con un incremento de 0.05 s^{-1} .

prevalece durante todo el proceso, mientras que la vorticidad ciclónica producida en las paredes es transportada por dicho giro alrededor del dominio.

El caso con fondo variable ($A = 4 \text{ cm}$ y $\lambda = 8 \text{ cm}$), se muestra en la Figura 7. De manera similar a las imágenes de los experimentos, los contornos de la topografía sinusoidal están orientados verticalmente. Se puede apreciar inicialmente la generación de vorticidad ciclónica en las paredes a los 20 s, y la formación de vórtices ciclónicos en las esquinas del dominio a los 60 s. Hasta los 140 s se puede observar un comportamiento

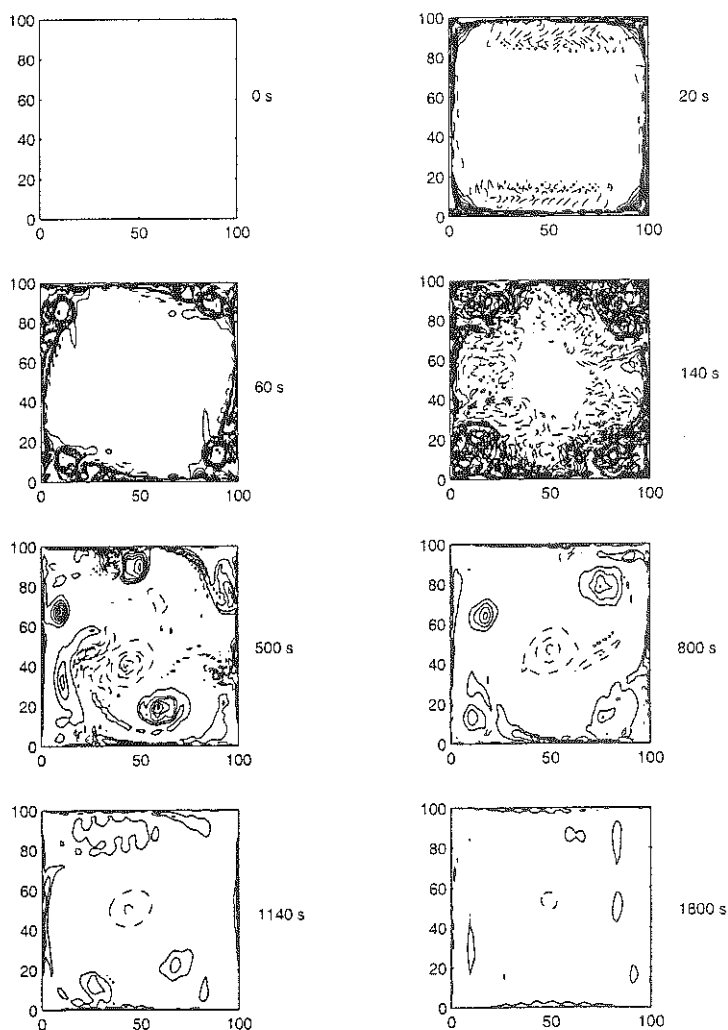


Figura 7: Contornos de vorticidad calculados de la simulación del ajuste con el fondo variable con amplitud $A = 4$ cm y longitud $\lambda = 8$ cm.

similar al del fondo plano, con la pequeña diferencia de que se producen variaciones de la vorticidad anticiclónica cerca de las paredes perpendiculares a la topografía ($t = 20$ s). Para tiempos posteriores a 500 s se puede apreciar que la simetría del flujo se rompe, y que la vorticidad negativa en el centro del dominio prevalece, mientras que en la parte superior izquierda se pueden ver contornos de vorticidad positiva que adquieren la forma de la topografía ($t = 1140$ s). En resumen, se puede afirmar que la forma de la topografía influye en la configuración final del ajuste, como sugieren los tiempos

$t = 1140 - 1800$ s de la simulación. La deformación de los contornos de vorticidad de acuerdo a la topografía se debe a que el flujo tiende a moverse de manera ciclónica al bajar una pendiente (por efectos de estiramiento) y a hacerlo en sentido contrario al subir una pendiente adyacente (por efectos de compresión). Por otro lado, dado que la amplitud de la topografía es relativamente pequeña comparada con H , también se observa el transporte de vorticidad positiva alrededor del dominio, como en el fondo plano. Dicho transporte se da en sentido anticiclónico debido a la condición inicial del flujo.

Para mostrar la importancia de la amplitud de la topografía (la cual modula los efectos de estiramiento), se realizó una simulación con fondo variable en la cual $\lambda = 8$ cm y $A = 12$ cm (ver Figura 8), es decir, con una amplitud de casi la mitad de profundidad total. Al inicio del experimento, desde los 20 hasta los 60 s, se puede apreciar un comportamiento similar a los casos anteriores (fondo plano y fondo variable con $\lambda = 8$ cm y $A = 4$ cm). Sin embargo, esta simulación difiere bastante a partir de los 500 s, ya que los contornos de vorticidad positiva cercanos a las paredes adquieren rápidamente la forma de la topografía, y se mantienen con esa configuración durante el resto del ajuste. Otro efecto relevante se aprecia al estudiar el proceso durante tiempos intermedios, los cuales se muestran en la Figura 9. En estas etapas del ajuste ($t = 140 - 560$ s) la vorticidad ciclónica prácticamente permanece confinada cerca de las paredes. En esta simulación con mayor amplitud, por lo tanto, el efecto de la topografía es más importante que el giro negativo (anticiclónico) en el transporte de la vorticidad generada en las fronteras.

Por último se analizó un fondo variable con una amplitud moderada pero una escala horizontal mucho mayor que en los casos anteriores ($\lambda = 50$ cm y $A = 4$ cm). En esta simulación el comportamiento del flujo es muy diferente a los casos ya vistos debido a que solo se tienen dos crestas y tres valles a lo largo del dominio. Esto significa que la escala horizontal de la topografía es mayor que la escala de los vórtices ciclónicos

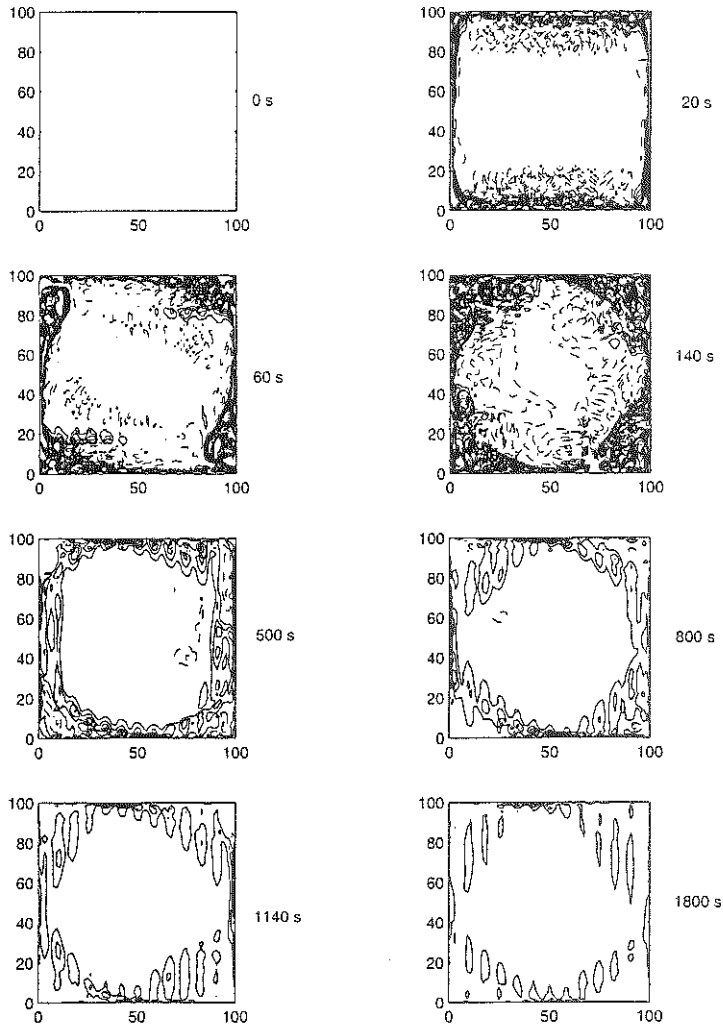


Figura 8: Contornos de vorticidad calculados de la simulación del ajuste con fondo variable con amplitud $A = 12 \text{ cm}$ y longitud $\lambda = 8 \text{ cm}$.

en las esquinas, lo cual permite que se desplacen sobre la pendiente. La deriva de un remolino sobre una pendiente topográfica ha sido estudiada con detalle por otros autores, los cuales han mostrado que los ciclones se mueven hacia la parte somera del dominio, y con una inclinación hacia la izquierda (Carnevale *et al.* 1991; van Heijst, 1994). La Figura 10 muestra el comportamiento del ajuste a partir de los 140 s hasta los 560 s. Las dos crestas de esta topografía están situadas en $x = 17 \text{ cm}$ y $x = 84 \text{ cm}$. A partir de los 140 s se observa que la vorticidad positiva generada en las

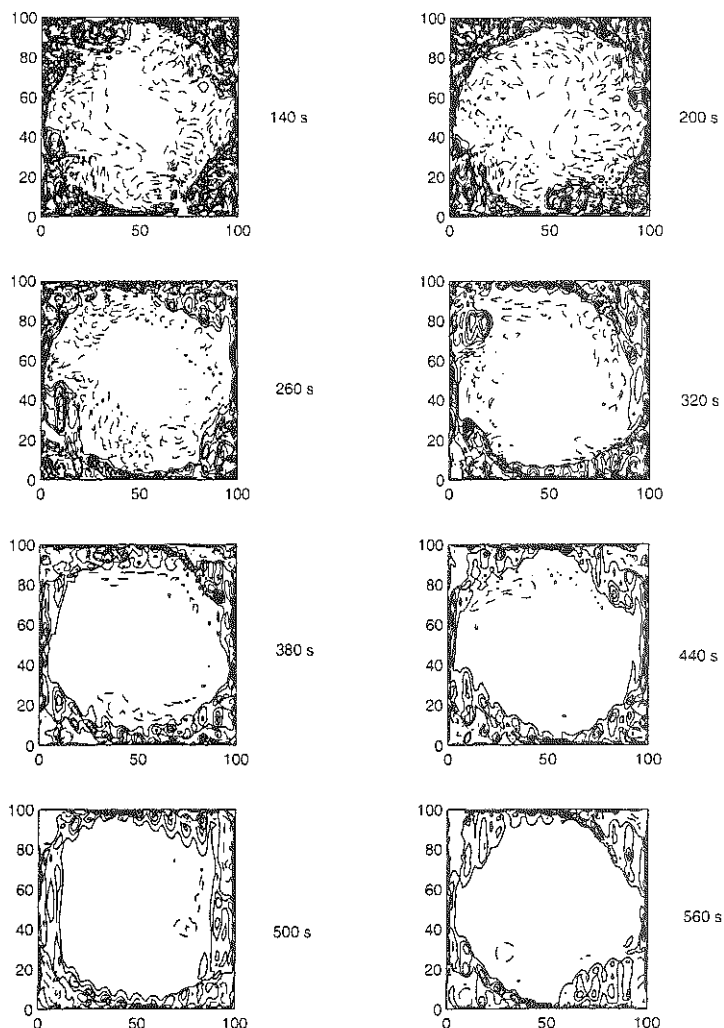


Figura 9: *Contornos de vorticidad calculados de la simulación mostrada en la figura 8, para tiempos intermedios de 140 – 560 s.*

esquinas del dominio es influenciada por las pendientes ascendentes de la topografía. En particular, los ciclones de las esquinas inferior-izquierda (señalado con una flecha) y superior-derecha se separan de las paredes y se desplazan rápidamente hacia otras áreas del dominio. Para tiempos posteriores, los vórtices pueden cruzar las crestas de la topografía y por lo tanto cambiar su desplazamiento. En resumen, la combinación del giro anticiclónico dominante, más los efectos topográficos, resulta en una evolución del flujo muy compleja. Sin embargo, este ejemplo se distingue de los casos anteriores

porque permite el transporte de vorticidad de las paredes hacia el centro del dominio.

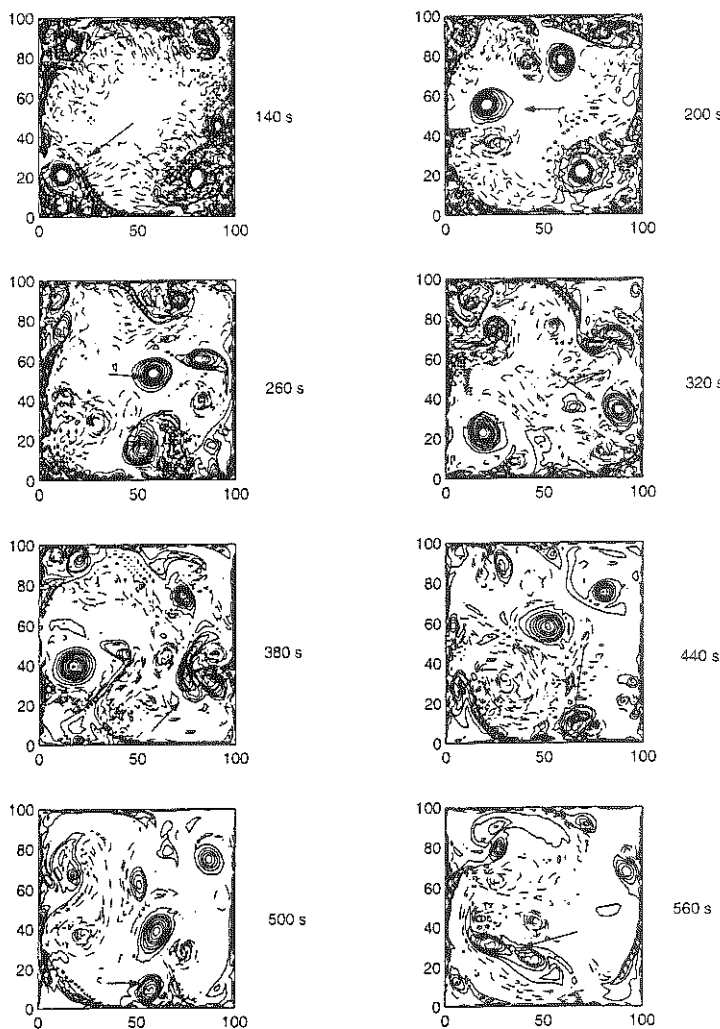


Figura 10: Contornos de vorticidad calculados de la simulación del ajuste con fondo variable con amplitud $A = 4$ cm y longitud $\lambda = 50$ cm.

Respecto al decaimiento de energía en las simulaciones presentadas, se encontró que es muy similar en todas ellas. La energía total se define como $E(t) = \frac{1}{2a} \int |\bar{u}|^2 da$, donde a es el área del dominio y $|\bar{u}|$ es la magnitud de la velocidad horizontal. La Figura 11 muestra el cambio temporal de la energía total para las simulaciones con el fondo plano y con el fondo rugoso. El decaimiento similar de la energía se debe a que el modelo físico utilizado incluye los efectos de una capa límite del fondo laminar, los

cuales están dados por el término lineal en (60). El número de Ekman está calculado con la profundidad media del fluido, la cual fue la misma en todas las simulaciones. Como resultado, el decaimiento de la energía total del sistema es muy similar en todos los casos.

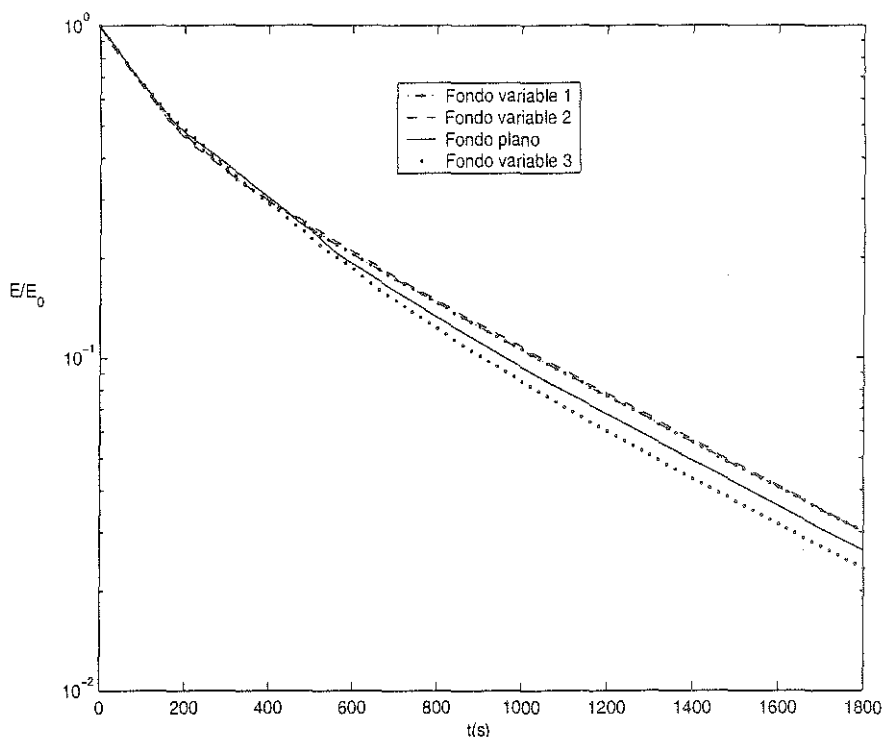


Figura 11: Decaimiento de la energía total (normalizada con su valor inicial) en las simulaciones con fondo plano y variable. Fondo 1: $\lambda = 8$ cm, $A = 4$ cm. Fondo 2: $\lambda = 12$ cm, $A = 4$ cm. Fondo 3: $\lambda = 50$ cm, $A = 4$ cm.

Uno de los aspectos importantes que muestran las simulaciones numéricas es el alineamiento de los contornos de vorticidad con el fondo, el cual es más notable cuando es mayor la amplitud de la topografía. Este comportamiento está asociado con la tendencia del flujo a seguir los contornos topográficos cuando los efectos no lineales dejan de ser dominantes. Se debe mencionar que las trayectorias de las partículas en los experimentos también presentaron ondulaciones de acuerdo a la topografía. Estas oscilaciones se deben a que una columna de fluido que va a subir una pendiente positiva tiende a moverse de manera anticiclónica, y cuando baja una pendiente tiende

a moverse de manera ciclónica por efectos de compresión y estiramiento, respectivamente, lo cual indica la influencia de la forma del fondo. Desafortunadamente, dichas ondulaciones no se lograron registrar en fotografías de larga exposición debido a su muy pequeña magnitud, por lo que sólo se visualizaron en las videograbaciones de los experimentos.

Por otro lado, las simulaciones también revelaron que la topografía promueve el transporte de vorticidad positiva al centro del tanque siempre y cuando la escala horizontal del fondo sea mayor a la de los vórtices producidos en las esquinas. Sin embargo, si la amplitud de la topografía es del orden de la mitad de H (es decir que tenga el tamaño de la mitad de la profundidad media), la vorticidad positiva queda confinada cerca de las paredes y nunca viaja hacia el centro del tanque.

IV. Evolución de un remolino tripolar sobre un fondo rugoso

IV.1. Experimentos de laboratorio

A diferencia del problema del ajuste, en este capítulo la evolución de un remolino inicialmente circular se estudia a partir de que el fluido dentro del recipiente se encuentra en rotación de cuerpo sólido. Existen diversos métodos para crear vórtices circulares, dos de los cuales son por succión y por agitación (Hopfinger y van Heijst, 1993). La diferencia entre ellos es que los remolinos por succión tienen una distribución inicial de vorticidad de un solo signo en todo el dominio, mientras que los remolinos por agitación tienen vorticidad neta nula (por lo que se les considera aislados). Se sabe que para el fondo plano la distribución de la velocidad tangencial y de la vorticidad para un remolino formado por agitación están dadas aproximadamente por (Kloosterziel y van Heijst, 1991)

$$\omega(r) = \omega_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \exp\left(\frac{-r^2}{R^2}\right), \quad (62)$$

$$v(r) = \frac{\omega_0 r}{2} \exp\left(\frac{-r^2}{R^2}\right), \quad (63)$$

donde ω_0 es la máxima vorticidad, R es la escala horizontal del flujo y r es la distancia radial desde el centro del vórtice. En la Figura 12 se pueden ver los perfiles de velocidad y de vorticidad, respectivamente, para un remolino por agitación. Nótese que el núcleo del remolino tiene vorticidad ciclónica y está rodeada por una región de vorticidad anticiclónica.

Los remolinos creados por agitación evolucionan en una estructura tripolar, la cual está formada por un ciclón en el centro y con dos remolinos en los lados con vorticidad anticiclónica (van Heijst *et al*, 1991). Otra característica del tripolo es que toda la

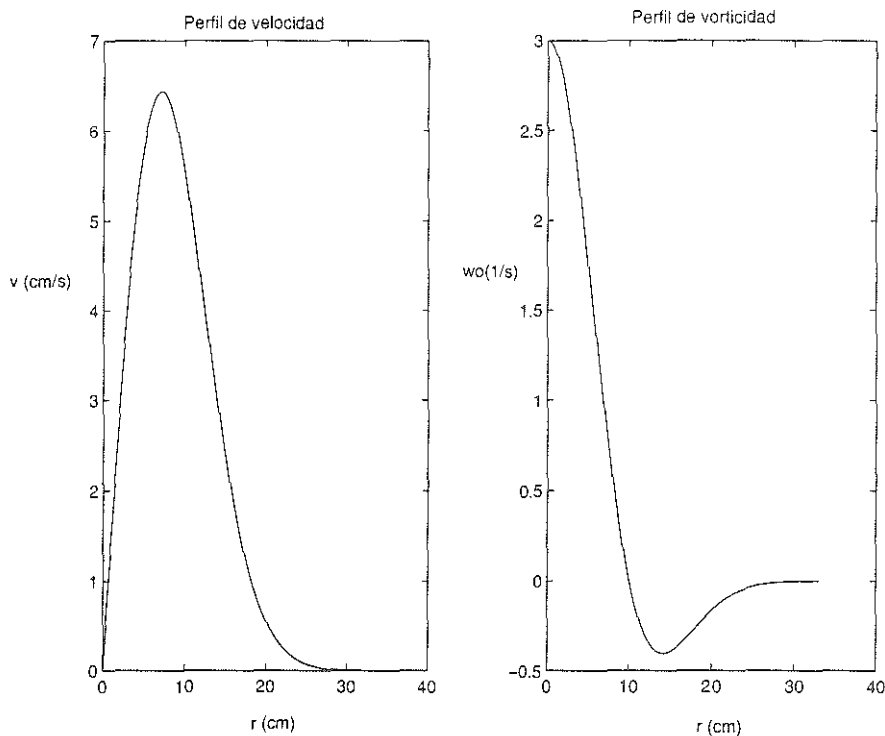


Figura 12: *Perfiles de velocidad y de vorticidad relativa para un remolino producido por las ecuaciones (62) y (63). En este caso $R = 10$ cm y $\omega_0 = 3$ s $^{-1}$.*

disposición de vórtices (esto es, el ciclón del centro junto con sus dos satélites anticiclónicos) gira en el mismo sentido en el que gira el tanque, es decir, en sentido ciclónico. En este trabajo se estudia la evolución de un vórtice tripolar sobre un fondo rugoso, y se compara su comportamiento con el caso del fondo plano.

Los experimentos en esta sección se hicieron en un tanque cuadrado de 100 cm de lado, lleno de agua hasta $H = 15$ cm de profundidad. El tanque se puso a girar a una rapidez angular constante $\Omega = 0.41$ s $^{-1}$ (con un periodo de rotación $\frac{2\pi}{\Omega} \approx 16$ s) alrededor de treinta minutos para que el fluido en su interior se ajuste y llegue a rotación de cuerpo sólido. Enseguida se colocó un cilindro de 15 cm de diámetro sin fondo en el centro del tanque y se agitó el agua dentro del cilindro en sentido ciclónico. Después se agregó tinta fluorescente y se retiró el cilindro. Durante un breve lapso de tiempo el fluido se organiza en un remolino circular. Después de algunos períodos de

rotación del sistema el ciclón se inestabiliza y se transforma en una estructura tripolar. Los experimentos se observaron desde una cámara colocada a una cierta distancia sobre el tanque, la cual gira junto con la mesa, de manera análoga a los experimentos del capítulo anterior.

Se hicieron tres tipos de experimentos con diferentes topografías de fondo. Primero se analizó el caso con fondo plano, el cual ha sido ampliamente estudiado tanto experimentalmente (Kloosterziel y van Heijst, 1991) como numéricamente (Orlandi y van Heijst, 1992). Por otro lado, se realizaron experimentos con dos fondos rugosos del mismo tipo que el empleado en los experimentos del ajuste. La diferencia entre los dos fondos es la amplitud y la longitud de onda. Para el fondo 1 se tiene una amplitud $A = 1 \text{ cm}$ y longitud $\lambda = 6 \text{ cm}$, mientras que el fondo 2 tiene una amplitud $A = 2 \text{ cm}$ y longitud $\lambda = 10 \text{ cm}$.

La Figura 13 muestra la evolución del remolino tripolar sobre el fondo 1. Se puede apreciar desde los 20 s que el vórtice es aproximadamente circular, pero conforme avanza el experimento el remolino se inestabiliza. Después de 60 s se comienzan a formar los satélites adyacentes al ciclón con la vorticidad negativa que rodea a este tipo de vórtices. De esta manera el remolino evoluciona hasta los 80 s, en los que llega a obtener la estructura conocida como tripolo, donde los anticiclones (es decir los satélites con vorticidad negativa) crecen hasta llegar a tener un tamaño similar al del ciclón. De los 120 a los 240 s (aproximadamente 16 periodos de rotación del sistema) la evolución del tripolo es muy similar al caso del fondo plano reportado por otros autores: el centro del remolino permanece en el mismo lugar, mientras que toda la estructura gira ciclónicamente. Sin embargo, existe una clara diferencia asociada con el fondo variable, la cual consiste en la deformación de la periferia del tripolo que coincide con los contornos de la topografía. Este comportamiento se hace más notorio para tiempos largos (240 s), es decir, conforme el vórtice se debilita. Dicha alineación es claramente observada en la Figura 14, donde se presenta la imagen correspondiente

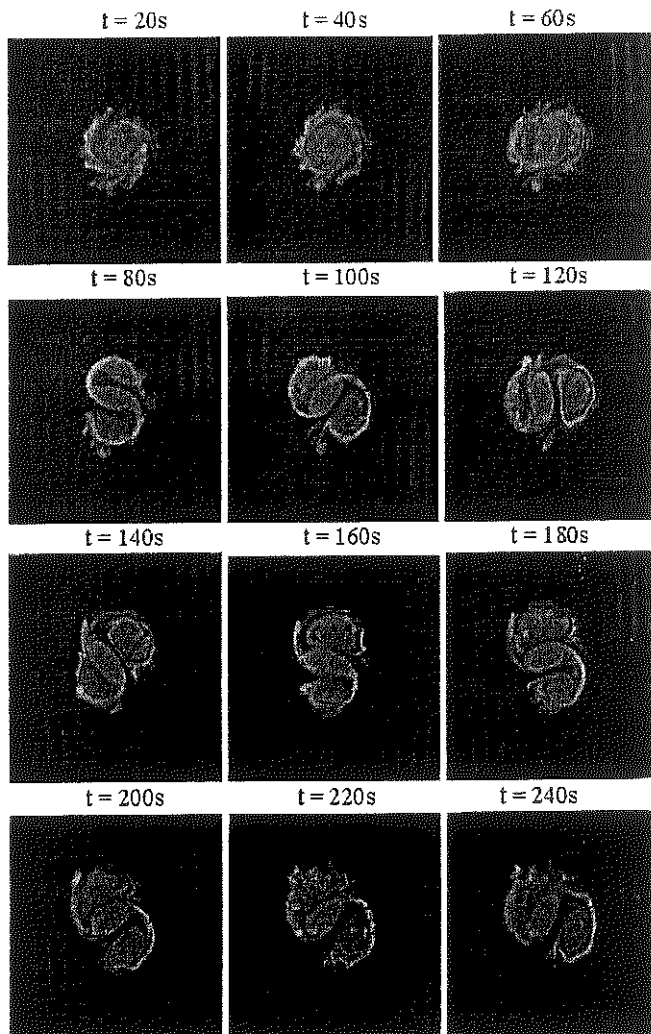


Figura 13: Fotografías tomadas de planta en donde se puede apreciar la formación y evolución de un remolino tripolar sobre el fondo 1 ($A = 1 \text{ cm}$, $\lambda = 6 \text{ cm}$).

a los 450 s.

Por otro lado, en la Figura 15 se analiza el comportamiento del tripolo sobre el fondo 2, el cual tiene el doble de amplitud que el anterior. Al principio del experimento suceden procesos similares que en los del fondo 1, esto es, la formación de un vórtice circular inestable el cual en principio se transformaría en un remolino tripolar. Sin embargo, esto no sucede ya que al empezar a formarse los anticiclones, la topografía inhibe su crecimiento. Este comportamiento se puede apreciar desde los 60 s, cuando



Figura 14: *Fotografía tomada de planta en donde se aprecia la alineación del tripolo con la topografía del fondo 1 para $t = 450$ s.*

se puede distinguir que la estructura tripolar no se puede formar, en contraste con la topografía anterior. Nótese que a los 80 s el remolino ciclónico mantiene una forma aproximadamente circular. Después de los 100 s, la topografía afecta visiblemente la forma del vórtice de tal manera que lo deforma gradualmente hasta los 180 s. Para entonces, los filamentos de tinta empiezan a denotar la forma de la topografía. Después de los 180 s se aprecia una separación del remolino en dos partes unidas por un delgado filamento de tinta. Para tiempos posteriores, la alineación del flujo con los contornos topográficos es evidente.

Las observaciones anteriores se pueden explicar físicamente de la siguiente manera. Uno de los resultados más evidentes es que conforme se deforma el ciclón la tinta se comienza a organizar de acuerdo con la topografía. En los casos estudiados la amplitud

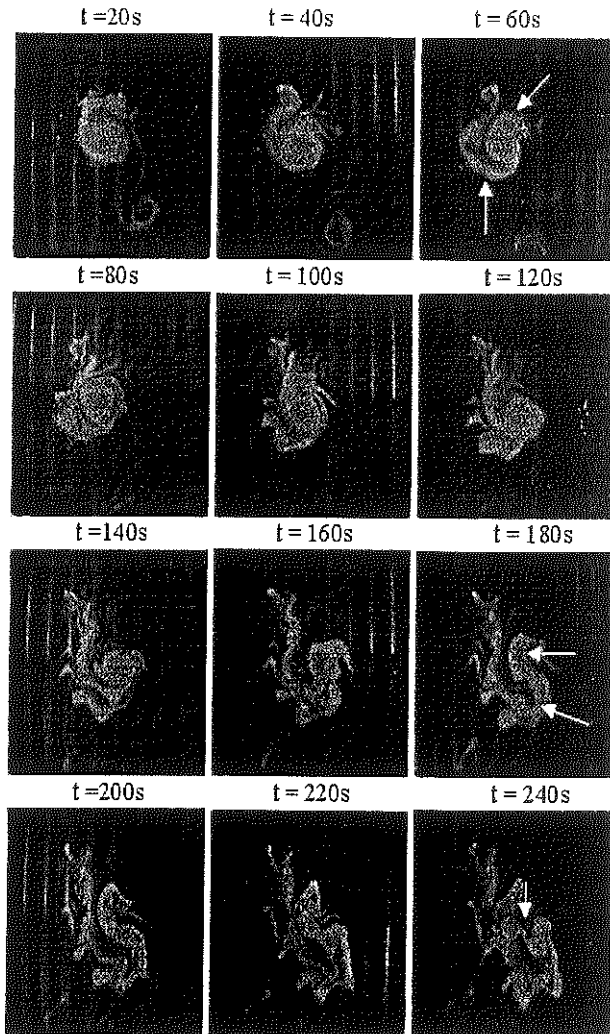


Figura 15: Fotografías tomadas de planta en donde se aprecia la formación y evolución de un remolino tripolar sobre el fondo 2 ($A = 2 \text{ cm}$, $\lambda = 10 \text{ cm}$). Las flechas blancas en $t = 60 \text{ s}$ señalan los anticiclones del tripolo. Las flechas a los 180 s apuntan a las dos partes en las que se divide el ciclón central. La flecha en $t = 240 \text{ s}$ apunta al filamento de tinta que une a las partes del ciclón dividido.

del fondo 2 tiene el doble del tamaño que la del fondo 1, por lo que el flujo se alinea con el fondo 2 de manera más rápida. Esto es similar a lo que se vió en el capítulo anterior, cuando se encontró en las simulaciones con fondo variable que el fluido se alinea con la topografía con mayor facilidad conforme la amplitud es más grande. Una interpretación de este comportamiento se puede obtener de la ecuación de continuidad

(17) escrita en términos de la divergencia horizontal

$$\nabla \cdot \bar{u} = -\frac{1}{h} \bar{u} \cdot \nabla h, \quad (64)$$

donde se ignoran los efectos de la fricción del fondo. Conforme el flujo se debilita predomina entonces el balance geostrófico, lo cual implica que la divergencia horizontal tiende a cero. Por lo tanto, podemos decir que $\bar{u} \cdot \nabla h \approx 0$. Esto quiere decir que \bar{u} y ∇h tienden a ser ortogonales por lo que el fluido se mueve a lo largo de la topografía, causando la alineación del flujo con el fondo. Otra observación importante es la fuerte deformación del tripolo en el caso del fondo 2, la cual conduce al rompimiento del remolino central en dos partes (ver Figura 15, $t = 240$ s). Cuando el ciclón se encuentra sobre una cresta (es decir la parte más somera) de la topografía, una parte del mismo experimenta la influencia de la pendiente adyacente, mientras que la otra parte del remolino experimenta la pendiente opuesta. Esto ocasiona que cada región del vórtice se mueva en direcciones opuestas por la influencia de las dos pendientes. El resultado es el estiramiento del remolino y su división en dos partes, las cuales permanecen unidas por un filamento de tinta muy delgado hasta que se disipan por la fricción del fondo. Este comportamiento fue reportado por Zavala Sansón (2002), quien estudió la evolución de un remolino ciclónico sobre la cresta de una topografía similar.

IV.2. Simulaciones numéricas

Los experimentos de laboratorio mencionados en la sección anterior fueron simulados numéricamente al resolver las ecuaciones (46) y (47). El objetivo principal es la comprensión de los efectos del fondo variable en un remolino tripolar, como los observados experimentalmente. Los parámetros que se utilizaron para las simulaciones son similares a los experimentos: profundidad media de $H = 15$ cm, parámetro de Coriolis $f = 2\Omega = 0,82$ s⁻¹, viscosidad cinemática $\nu = 0,01$ cm²s⁻¹, inicializando el remolino circular en el centro del dominio de 100 cm × 100 cm. Se hicieron simulaciones con

los fondos 1 y 2, descritos en la sección anterior. La estructura del vórtice está dada por las expresiones (62) y (63) en las que $\omega_0 = 3 \text{ s}^{-1}$ y $R = 10 \text{ cm}$, que son valores típicos experimentales obtenidos para este tipo de remolinos (Kloosterziel y van Heijst, 1991). Con la finalidad de inducir la inestabilidad del vórtice, se impuso una pequeña perturbación aleatoria ($\delta\omega \approx 0,1\omega_0$) al perfil de vorticidad en $[0,9R, 1,1R]$.

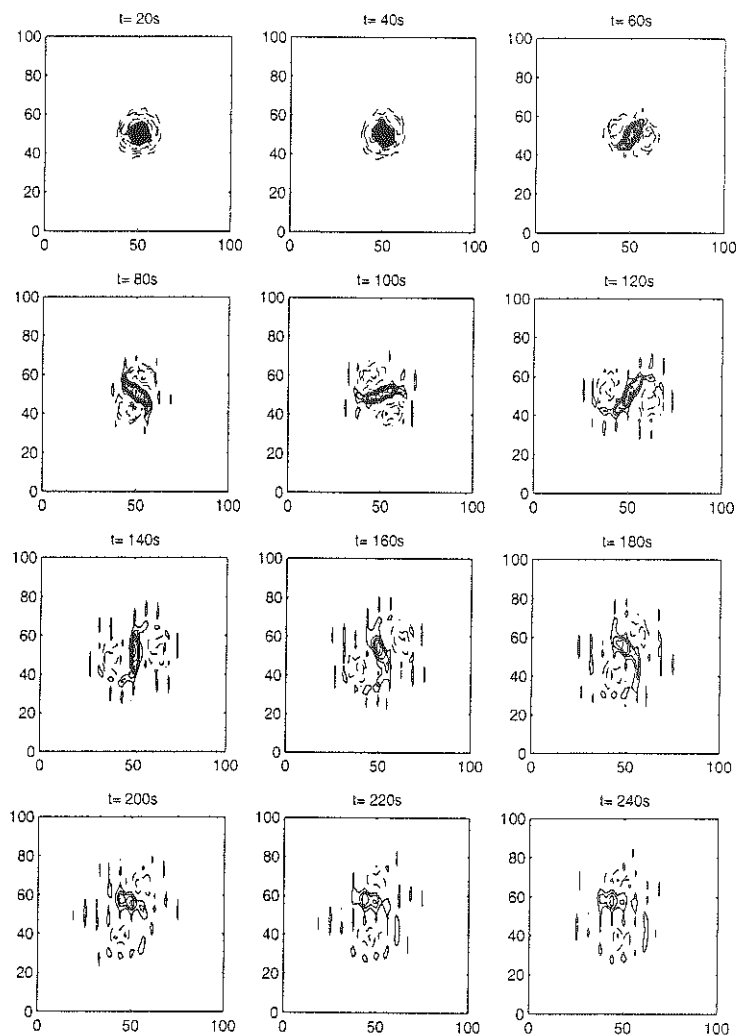


Figura 16: Contornos de vorticidad calculados de la simulación del tripolo con amplitud $A = 1 \text{ cm}$ y longitud $\lambda = 6 \text{ cm}$, ver figura 6.

La Figura 16 muestra la simulación con el fondo 1 mediante contornos de vorticidad desde los 20 s hasta los 240 s, graficados cada 20 s. Al comparar con la Figura 13

se puede apreciar que la simulación numérica es similar al experimento en algunos aspectos. Por ejemplo, a los 60 s aproximadamente se observa la formación de los anticiclones en ambos casos. Después de 80 y 100 s la estructura tripolar ha sido completamente formada, la cual gira en sentido ciclónico y el vórtice central (es decir el ciclón) tiene una forma elíptica. Desde los 80 s se comienza a apreciar una alineación de los contornos de vorticidad ciclónica con la topografía, la cual se acentúa conforme transcurre la simulación. Se debe notar que este proceso ocurre inicialmente con la vorticidad positiva adyacente al remolino, y para tiempos posteriores los contornos del ciclón también se alinean con el fondo. Se debe subrayar que los contornos de vorticidad positiva se adaptan a la forma del fondo en los valles, es decir, donde la profundidad es mayor, debido a que en estas regiones se tienen efectos de estiramiento.

En la Figura 17 se presenta la evolución de trazadores pasivos, los cuales están aleatoriamente distribuidos en una circunferencia de radio $r_1 = 15 \text{ cm}$. Los trazadores en el núcleo del remolino se muestran con puntos finos, mientras que los de la periferia (donde inicialmente la vorticidad es anticiclónica) se representan con puntos gruesos. Las gráficas de la simulación, empiezan desde los 20 hasta 240 s. En esta figura se muestra la evolución del remolino tripolar comparable con las fotos del experimento sobre este fondo (ver Figura 13). En general se aprecia un comportamiento similar al del vórtice experimental: a los 60 s se puede observar que ambos presentan la formación de la estructura tripolar, y a los 80 s se puede apreciar la forma elíptica del vórtice central, la cual mantiene durante toda la simulación hasta los 240 s, lo cual también se observa en el experimento.

Otra característica de un remolino tripolar es que toda la estructura gira en sentido ciclónico (Hopfinger y van Heijst, 1993). Esta rotación se muestra en la Figura 18, donde se grafica dicho giro en función del tiempo en el experimento y la simulación utilizando el fondo 1. Se puede apreciar que el tripolo experimental da una vuelta después de aproximadamente un período de Ekman, mientras que el tripolo de la

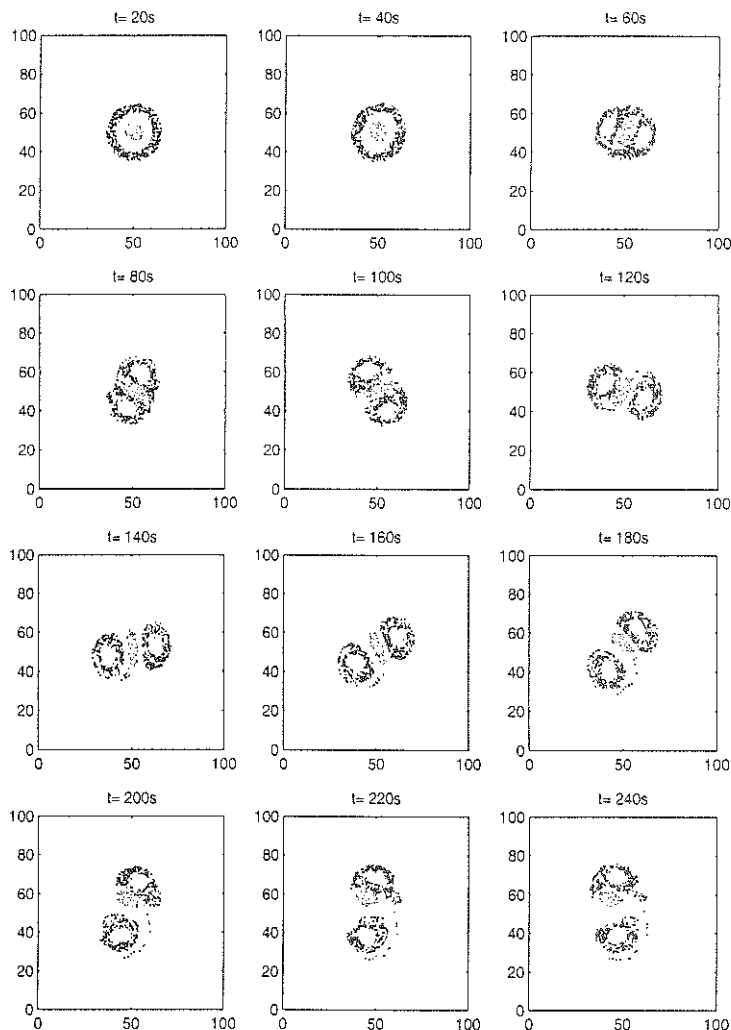


Figura 17: Trazadores pasivos de la simulación mostrada en la figura 16, donde los puntos grises se encuentran inicialmente en el núcleo del remolino y los puntos negros en la periferia.

simulación gira con la misma rapidez durante más de medio periodo de Ekman. Para tiempos posteriores el giro es algo menor (10%) que en el experimento. La razón de esta discrepancia se puede atribuir a la condición inicial en la simulación, la cual es un modelo aproximado del remolino del laboratorio, además de los errores experimentales. Sin embargo, el hecho de que la simulación y el experimento coincidan durante $\frac{T_E}{2} \approx 140$ s (y difieran poco posteriormente) indica que el modelo físico utilizado representa de manera adecuada al experimento.

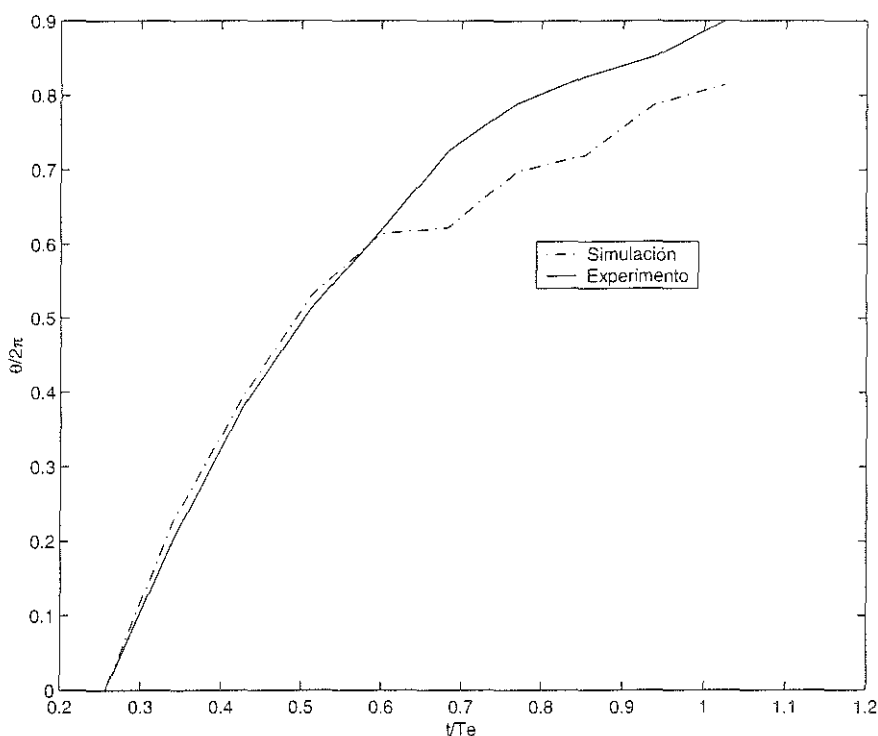


Figura 18: *Giro del tripolo en función del tiempo en el experimento de la Figura 13 y la simulación mostrada en la figura 16.*

La Figura 19 presenta los contornos de vorticidad obtenidos de una simulación utilizando el fondo 2, desde los 20 hasta los 240 s. Desde el principio de la simulación se observa la alineación de los contornos de la vorticidad con la topografía en regiones alrededor del remolino. También se puede ver la formación de una estructura tripolar irregular a los 60 s. Conforme evoluciona el flujo el ciclón del centro se deforma de manera evidente, hasta que a los 180 s se separa en dos vórtices ciclónicos por el efecto de la topografía, de manera análoga al experimento de la Figura 15. La división del vórtice central también ocurre sobre una cresta del fondo. Para los tiempos finales, los dos ciclones resultantes quedan atrapados en los valles adyacentes. De hecho, otra de las características visibles importantes de esta simulación es la alineación de la vorticidad positiva en los valles de la topografía, y de la vorticidad negativa en las crestas. Este comportamiento corresponde a efectos de estiramiento y compresión de las columnas

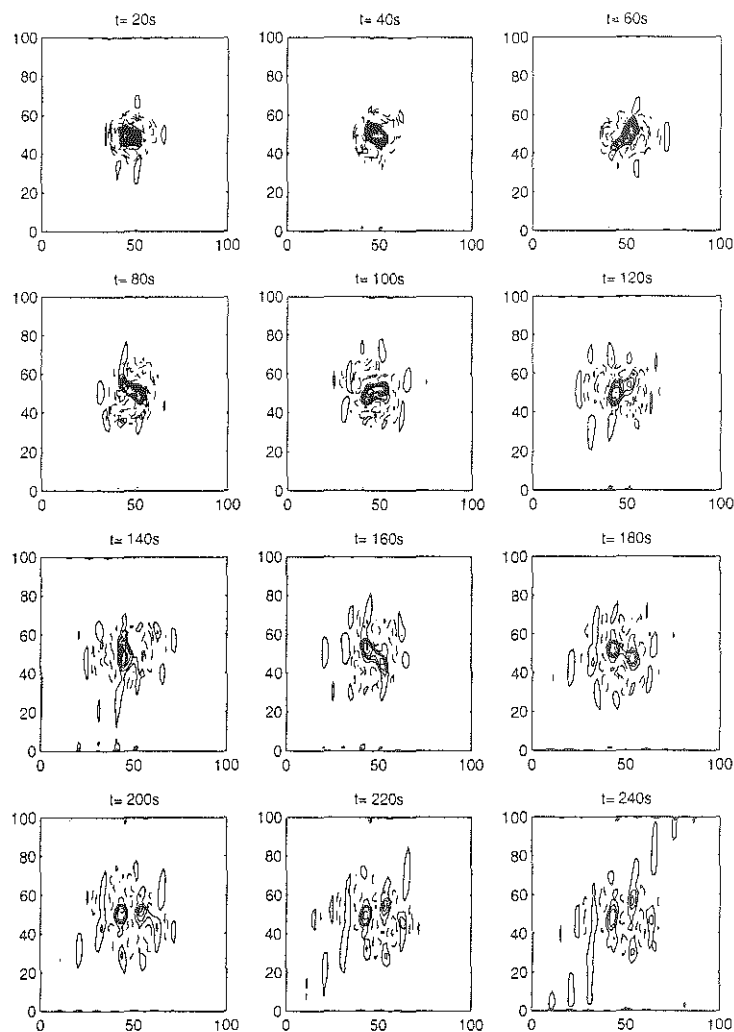


Figura 19: *Contornos de vorticidad calculados de la simulación del tripolo con amplitud $A = 2$ cm y longitud $\lambda = 10$ cm, ver figura 6.*

de fluido, respectivamente. Dicha característica es notoria en esta simulación debido a la mayor amplitud de la topografía, mientras que en la simulación con menor amplitud (Figura 13) el alineamiento de la vorticidad anticiclónica con las crestas es apenas visible.

En la Figura 20 se presentan gráficas de trazadores análogas a las del caso con el fondo 1. A los 180 s se puede apreciar la deformación del ciclón central hasta que llega a separarse en dos partes, lo cual también se observa en el experimento (Figura 15).

Además, la mayor amplitud de esta topografía obliga a los trazadores de la periferia a alinearse a lo largo de los contornos del fondo ($t = 200 - 240$ s).

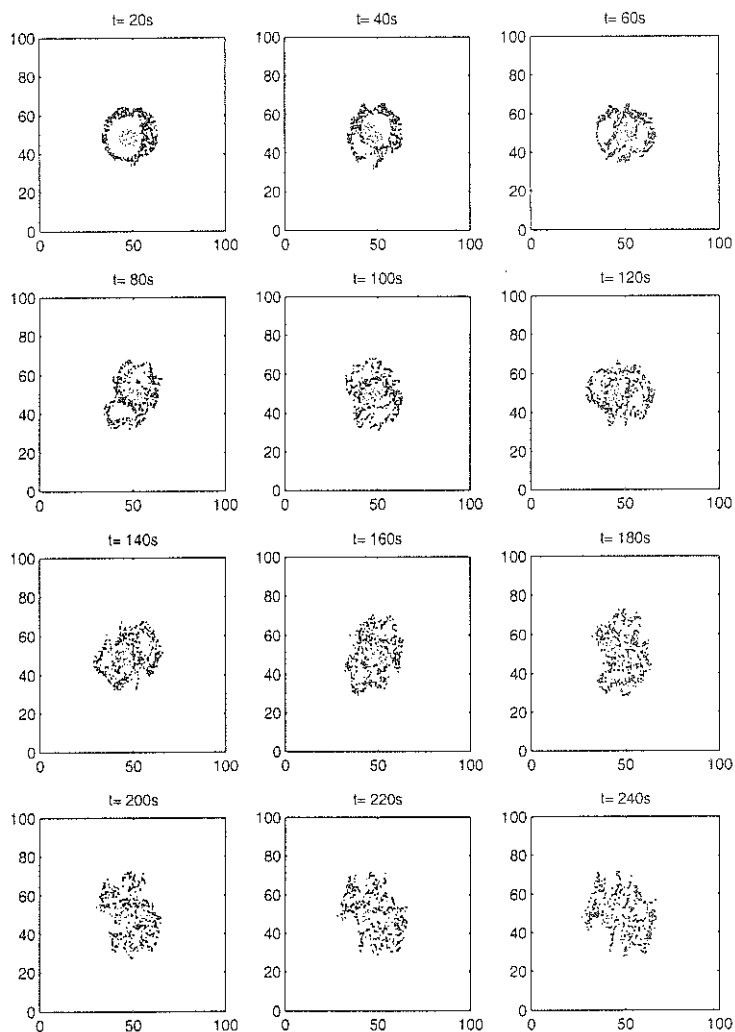


Figura 20: Trazadores pasivos de la simulación mostrada en la figura 19, donde los puntos grises se encuentran inicialmente en el núcleo del remolino, y los puntos negros en la periferia.

V. Conclusiones

En este estudio se analizó el decaimiento de dos diferentes flujos en rotación bajo los efectos disipativos de un fondo rugoso. Los casos estudiados fueron el proceso de ajuste a la rotación del sistema a partir del reposo (capítulo III) y el decaimiento de un vórtice tripolar (capítulo IV). Con el objetivo de apreciar con claridad los efectos del fondo rugoso se utilizó una topografía simplificada de forma sinusoidal en sólo una de las direcciones horizontales, con longitud de onda λ y amplitud A . En el problema del ajuste se mostró que el decaimiento es más rápido con el fondo rugoso que con el plano, como se puede observar en la Tabla 1. Esto se debe a que inicialmente el flujo es muy intenso por lo que la capa límite del fondo rugoso es turbulenta. Por esta razón, el intercambio de líquido entre la capa de Ekman y el interior del fluido es mayor, y por lo tanto el flujo pierde energía más rápido. En otras palabras, el fluido interior alimenta a la capa límite, en donde la energía se disipa rápidamente debido a su carácter turbulento.

El modelo físico con el que se trabajó tiene incluidos los efectos de una capa límite laminar y representa bien los experimentos con un número de Reynolds bajo. Como el experimento del ajuste tiene un número de Reynolds grande (orden de 10^5) el modelo no es adecuado para simularlo. Sin embargo, al realizar simulaciones numéricas del proceso de ajuste con R_e menores, se encontró que el campo de vorticidad tiende a alinearse con los contornos topográficos. Este comportamiento no se logró registrar en los experimentos del ajuste, pero hizo ver la necesidad de analizar otro tipo de experimento para verificarlo.

En el experimento del tripolo se encontró que con el fondo 1 ($A = 1 \text{ cm}$ $\lambda = 6 \text{ cm}$) su comportamiento es similar al caso del fondo plano, lo cual se puede atribuir a la pequeña amplitud de la topografía (A) respecto a la profundidad total ($H = 15 \text{ cm}$). Sin embargo, se observó una ligera alineación con la topografía, como se puede

ver en la Figura 14 para los 450 s. Si se aumenta el tamaño de la rugosidad (es decir la amplitud) al doble, la topografía no permite la formación de una estructura, tripolar como se observó en el experimento con el fondo 2 ($A = 2 \text{ cm}$). Además, en este caso la topografía promueve la alineación del flujo con los contornos del fondo. La adaptación del flujo con la forma de la topografía se debe a que conforme el flujo se debilita predomina el balance geostrófico, lo cual implica que la divergencia horizontal del campo de velocidad tiende a cero. Para cumplir con esta condición el flujo tiende a moverse a lo largo de los contornos topográficos.

Las simulaciones numéricas mostraron que la vorticidad ciclónica se agrupa en los valles y la anticiclónica en las crestas, de acuerdo al estiramiento y compresión del fluido, respectivamente. El modelo bidimensional que se usó para las simulaciones del tripolo reproduce bien los experimentos debido a que el número de Reynolds es bajo $R_e = \frac{UL}{\nu} = 6500$ (donde $L \sim 10 \text{ cm}$ es el diámetro del remolino y $U \approx 6 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ su velocidad máxima).

Es importante destacar que existen pocos trabajos experimentales sobre el decaimiento de flujos en rotación sobre topografía variable y este estudio muestra algunos de los resultados básicos que se pueden encontrar en situaciones similares. Una extensión de esta tesis puede ser la de analizar la evolución de flujos diferentes a los aquí utilizados. Por ejemplo, se puede estudiar la propagación de un remolino dipolar moviéndose ya sea a lo largo de la topografía o perpendicular a ella.

Referencias

- Carnevale, G.F., R.C. Kloosterziel and G.J.F. van Heijst, 1991. Propagation of barotropic vortices over topography in a rotating tank. *J. Fluid Mech.* **233**: 119-139.
- Greenspan, 1968, H.P. Theory of rotating fluids.
- Gill, A.E., 1982. *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Academic Press.
- Hopfinger, E.J. and G.J.F. van Heijst, 1993. Vortices in rotating fluids. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **25**: 241-289.
- Kloosterziel, R.C., 1990. *Barotropic Vortices in a Rotating Fluid*. tesis Doctoral, Universidad de Utrecht. Holanda
- Kloosterziel, R.C. y G.F.J. van Heijst, 1991. An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, **223**, 1-24.
- Orlandi, P. y G.F.J. van Heijst, 1992. Numerical simulation of tripolar vortices in 2D flow. *Fluid Dyn. Res.*, **9**: 179-206.
- van Geffen J.H.G.M., 1998. *NS-evol.* reporte interno R-1466-D, Facultad de física aplicada, Laboratorio de dinamica de fluidos, Universidad tecnológica de Eindhoven, Holanda.
- van Heijst, G.J.F., 1989. *Spin-up* phenomena in non axysymmetric containers. *J. Fluid Mech.* **206**: 171.
- van Heijst, G.J.F., P.A. Davies, y R.G. Davis, 1990, Spin-up in a rectangular container, *Phys. Fluids*, A **2**: 150.
- van Heijst, G.J.F. Kloosterziel, R. C. y Williams C. W., 1991. Laboratory experiments on the tripolar vortex in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **225**: 301-331.
- van Heijst, G.J.F., 1994. Topography effects on vortices in a rotating fluid. *Meccanica* **29**: 431-451.

- van de Konijnenberg, J.A., 1995. *Spin-up in Non-axisymmetric Containers*. tesis Doctoral, Universidad Tecnológica de Eindhoven. Holanda
- Zavala Sansón, 2000. *The effects of topography on rotating barotropic flows*. tesis Doctoral, Universidad Tecnológica de Eindhoven. Holanda
- Zavala Sansón, L., y G.J.F. van Heijst, 2000. Nonlinear Ekman effects in rotating barotropic flows. *J. Fluid Mech.* **412**: 75-91.
- Zavala Sansón L, y van Heijst G.J.F. 2002. *Ekman effects in a rotating flow over bottom topography* *J. Fluid Mech.* **471**: 239-255.
- Zavala Sansón L, 2002. *Vortex-ridge interaction in a rotating fluid* *Dynamics of Atmospheres and Oceans* **35**: 299-325.