

La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, B.C.). La investigación fue financiada por el CONAHCYT (Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías).

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo o titular de los Derechos Autor.

CICESE © 2023, Todos los Derechos Reservados, CICESE

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California



Maestría en Ciencias en Ciencias de la Tierra

Modelo electromagnético de un rayo artificial nube-tierra y su potencial aplicación a la exploración geofísica

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Jorge Alcocer Gómez

Ensenada, Baja California, México

2023

Tesis defendida por

Jorge Alcocer Gómez

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Enrique Gómez Treviño

Director de tesis

Dr. José Manuel Romo Jones

Dr. Heriberto Márquez Becerra

Dr. Luis Manuel Farfán Molina



Dr. Diego Ruiz Aguilar

Coordinador del Posgrado en Ciencias de la Tierra

Dra. Ana Denise Re Araujo

Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Jorge Alcocer Gómez como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Ciencias de la Tierra.

Modelo electromagnético de un rayo artificial nube-tierra y su potencial aplicación a la exploración geofísica

Resumen aprobado por:

Dr. Enrique Gómez Treviño

Director de tesis

Los rayos nube-tierra son la fuente indirecta del método magnetotelúrico para periodos inferiores a un segundo. No importa dónde se produzcan en el planeta, los campos electromagnéticos llegan al lugar de medición como ondas planas que viajan entre la ionosfera y la tierra. Por lo tanto, no es necesario modelar directamente el efecto de los rayos en el método magnetotelúrico. Sin embargo, en esta tesis se plantea que la aplicación directa de los rayos puede proporcionar información del subsuelo. Para lograrlo, se formuló la ecuación diferencial del fenómeno y se obtuvieron los campos electromagnéticos dentro de la tierra. Además, se realizó un análisis funcional con las derivadas de Fréchet para determinar la profundidad de investigación. También se propusieron nuevas definiciones de resistividad aparente, analizando su comportamiento en una tierra estratificada. El desarrollo matemático demuestra que es posible modelar los campos electromagnéticos para una tierra homogénea y anisotrópica, además, se obtuvo la solución analítica para las derivadas de Fréchet. Es importante mencionar que bajo el modelo teórico de los rayos, se puede considerar el método de corriente directa y el magnetotelúrico como casos particulares de una sola técnica.

Palabras clave: Rayos nube-tierra, modelo electromagnético, derivadas de Fréchet, resistividad aparente

Abstract of the thesis presented by Jorge Alcocer Gómez as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Master of Science.

Electromagnetic model of an artificial cloud-to-ground lightning and its potential use on geophysical exploration

Abstract approved by:

Dr. Enrique Gómez Treviño
Thesis Director

Cloud-to-ground lightning are the indirect source of the magnetotelluric method for periods of less than one second. No matter where they occur on the planet, electromagnetic fields arrive at the measurement site as plane waves traveling between the ionosphere and the ground. Therefore, it is not necessary to directly model the effect of lightning in the magnetotelluric method. However, in this thesis it is proposed that the direct application of lightning can provide information from the subsurface. To achieve this, the differential equation of the phenomenon was formulated and the electromagnetic fields inside the earth were obtained. In addition, a functional analysis was performed with Fréchet derivatives to determine the depth of investigation. New definitions of apparent resistivity were also proposed, analyzing its behavior on a stratified earth. Mathematical development shows that it is possible to model electromagnetic fields for a homogeneous and anisotropic earth, in addition, the analytical solution for Fréchet derivatives was obtained. It is important to mention that under the theoretical model of lightning, the direct current and the magnetotelluric methods can be considered as particular cases of a single technique.

Keywords: Cloud-to-ground lightning, electromagnetic model, Fréchet derivative, apparent resistivity

Dedicatoria

A todas las personas que me han inspirado y/o enseñado a lo largo de la vida...

Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California (CICESE), por brindarme la oportunidad de estudiar y entender el mundo de la ciencia. Asimismo, por el desarrollo personal que cultivó en mí.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

A mi director de tesis, el Dr. Enrique Gómez Treviño, por creer y apoyar desde el primer momento una idea, la cual eventualmente se convirtió en este proyecto de investigación. Además, por su disposición y paciencia para explicarme conceptos muy complejos.

A los miembros del comité de tesis: el Dr. José Manuel Romo Jones, Dr. Heriberto Márquez Becerra y Dr. Luis Manuel Farfán Molina, por sus aportaciones para el enriquecimiento de esta tesis.

A mi familia por apoyar mi decisión de estudiar lejos de casa.

A mis amigas: Amelia García, Gloria Hernández, Marisol Juárez, Pamela Márquez y Vanessa González; asimismo, a mi amigo Ricardo Hidalgo, y por supuesto, a mi buen Fernando Valencia, por los momentos que compartimos en Ensenada y las enseñanzas que me han dejado.

A mi vecina Francy Carvajal y a mi estimado casero Ernesto Reynoso, por su confianza y la camaradería, además, por formar parte de mi vida cotidiana.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	viii
Capítulo 1. Introducción	
1.1. Antecedentes	2
1.2. Hipótesis	3
1.3. Objetivos	3
1.3.1. Objetivo general	3
1.3.2. Objetivos específicos	3
Capítulo 2. Fundamentos teóricos	
2.1. Generalidades sobre los rayos	5
2.2. Las ecuaciones de Maxwell	8
2.3. Métodos de resistividad eléctrica	10
2.4. Condiciones de frontera	14
2.4.1. Campo eléctrico tangencial y perpendicular	15
2.4.2. Campo magnético tangencial y perpendicular	17
2.5. Las derivadas de Fréchet	20
Capítulo 3. Metodología	
3.1. Ecuación diferencial de un rayo artificial	22
3.2. Ecuación diferencial en el dominio del número de onda	26
3.3. Solución para los campos electromagnéticos. Caso medio homogéneo anisotrópico ..	27
3.4. Solución general para las derivadas de Fréchet del campo magnético: caso resistivi-	
dad media	30
3.5. Solución general para las derivadas de Fréchet del campo magnético: caso anisotropía	33
3.6. Solución general para las derivadas de Fréchet del campo eléctrico: caso resistividad	
media	34
3.7. Solución general para las derivadas de Fréchet del campo eléctrico: caso anisotropía	35
3.8. Solución analítica para las derivadas de Fréchet del campo eléctrico: caso resistividad	
media uniforme	36
3.9. Solución analítica para las derivadas de Fréchet del campo eléctrico: caso anisotropía	
uniforme	39
3.10. Casos particulares	40
3.10.1. Método de Corriente Directa (DC)	40
3.10.2. Método Magnetotelúrico (MT)	41
3.11. Definiciones de resistividad aparente	43
3.12. Derivadas de Fréchet para la resistividad aparente	45
3.13. Modelo de dos capas	48

Capítulo 4. Resultados y Discusiones	
4.1. Los campos electromagnéticos del rayo	52
4.2. Las derivadas de Fréchet del campo eléctrico	59
4.3. Definiciones de resistividad aparente	65
4.4. Las derivadas de Fréchet de la resistividad aparente	68
4.5. Particularidades de $Re(\rho_{a_{MT}})$	71
Capítulo 5. Conclusiones	
Literatura citada	75
Anexos	78

Lista de figuras

Figura	Página
1. Distribución de cargas en la nube cumulonimbus y algunos tipos de rayos (Modificado de Encyclopaedia Britannica, 2023).	5
2. Origen de un rayo negativo tipo nube-tierra. Los tiempos debajo de cada recuadro expone la duración aproximada del proceso (Modificado de Rakov & Uman, 2007).	6
3. Técnica <i>rocket-and-wire</i> . a) El cohete es lanzado a una velocidad de 200 m/s . b) Alrededor de los 300 m de altura el cable se vaporiza debido al ascenso de un líder positivo. c) Flujo continuo de corriente entre nube-tierra. d) Intervalo sin flujo de corriente. e) Descenso de un <i>dart leader</i> . f) Ocurrencia del <i>return stroke</i> . (Modificado de Dwyer & Uman, 2014).	7
4. Principio del método de corriente directa (DC) utilizando un arreglo polo-polo.	11
5. Variación de la resistividad aparente para un arreglo de electrodos tetrapolar tipo Wenner, r indica la distancia entre electrodos (Modificado de Kearey et al., 2002a).	12
6. Esquema del método magnetoteléurico. El campo magnetoteléurico es generado por las fluctuaciones en la ionósfera y los rayos nube-tierra. El campo inducido es producto de las corrientes telúricas generadas por los campos magnetoteléuricos.	12
7. Curvas de resistividad aparente de un sondeo magnetoteléurico. El eje de abscisas muestra el periodo en segundos; el eje de ordenadas la resistividad aparente en $\Omega \cdot m$ (Modificado de Naidu, 2012).	13
8. Esquema de la técnica <i>grounded wire-coil</i> ; r es la separación entre el centro del cable transmisor y la bobina receptora; θ es el ángulo entre el eje x y r	14
9. Continuidad del campo eléctrico tangencial E_{\parallel} . Un contorno de integración cerrado atraviesa la superficie de contacto entre el contraste $\epsilon_1\mu_1\sigma_1$ y $\epsilon_2\mu_2\sigma_2$	15
10. Continuidad en la densidad de corriente perpendicular J_{\perp} ; discontinuidad de E_{\perp} . Un volumen de integración atraviesa la frontera de contacto entre el contraste $\epsilon_1\mu_1\sigma_1$ y $\epsilon_2\mu_2\sigma_2$	16
11. Continuidad del campo magnético tangencial H_{\parallel} . Una superficie de integración atraviesa la frontera de contacto entre el contraste $\epsilon_1\mu_1\sigma_1$ y $\epsilon_2\mu_2\sigma_2$	18
12. Discontinuidad del campo magnético perpendicular H_{\perp} . Un volumen de integración atraviesa la frontera de contacto entre el contraste $\epsilon_1\mu_1\sigma_1$ y $\epsilon_2\mu_2\sigma_2$	19
13. Diferencia entre las derivadas convencionales y de Fréchet. a) Derivada convencional, E depende de valores discretos de conductividad ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$). b) Derivadas de Fréchet, E es un funcional ya que depende de $\sigma(z)$; $G(z)$ es la derivada de Fréchet.	20
14. Cable semi-infinito conectado a una tierra anisotrópica. P indica la posición para modelar los campos electromagnéticos.	22
15. Cable semi-infinito conectado a una tierra estratificada. P indica el punto para calcular el campo eléctrico.	49
16. Módulo del campo eléctrico radial en escala logarítmica base diez. Tanto el eje de ordenadas (r) como el de abscisas (z) es normalizado con la <i>skin depth</i> . Se modela empleando un medio isotrópico de $100\ \Omega \cdot m$ (coeficiente de anisotropía $f = 1$), y frecuencia de 1 Hz	52

17. Módulo del campo magnético azimutal en escala logarítmica base diez. Tanto el eje de ordenadas (r) como el de abscisas (z) es normalizado con la *skin depth*. Se modela empleando un medio isotrópico de $100 \Omega \cdot m$ (coeficiente de anisotropía $f = 1$), y frecuencia de $1 Hz$ 53
18. Módulo del campo eléctrico vertical en escala logarítmica base diez. Tanto el eje de ordenadas (z) como el de abscisas (r) es normalizado con la *skin depth*. Se modela empleando un medio isotrópico de $100 \Omega \cdot m$ (coeficiente de anisotropía $f = 1$), y frecuencia de $1 Hz$ 54
19. Módulo del campo eléctrico radial en escala logarítmica base diez. a) Caso de un medio anisotrópico ($f = 0.5$) con resistividad promedio de $200 \Omega \cdot m$ ($\rho_p = \sqrt{\rho_h \cdot \rho_z}$). b) Escenario de un medio anisotrópico ($f = 2$) con resistividad promedio de $50 \Omega \cdot m$. Ambos se modelan con corriente de $12.5 kA$ a frecuencia de $1 Hz$. Los ejes coordenados son normalizados con la *skin depth* vertical (δ_z). 54
20. Módulo del campo magnético azimutal en escala logarítmica base diez. a) Caso de un medio anisotrópico ($f = 0.5$) con resistividad promedio de $200 \Omega \cdot m$ ($\rho_p = \sqrt{\rho_h \cdot \rho_z}$). b) Escenario de un medio anisotrópico ($f = 2$) con resistividad promedio de $50 \Omega \cdot m$. Ambos contextos se modelan con corriente de $12.5 kA$ a frecuencia de $1 Hz$. Los ejes coordenados son normalizados con la *skin depth* vertical (δ_z). 55
21. Módulo del campo eléctrico vertical en escala logarítmica base diez. a) Caso de un medio anisotrópico ($f = 0.5$) con resistividad promedio de $200 \Omega \cdot m$ ($\rho_p = \sqrt{\rho_h \cdot \rho_z}$). b) Escenario de un medio anisotrópico ($f = 2$) con resistividad promedio de $50 \Omega \cdot m$. Ambos se modelan con corriente de $12.5 kA$ a frecuencia de $1 Hz$. Los ejes coordenados son normalizados con la *skin depth* vertical (δ_z). 56
22. Módulo del campo eléctrico radial en escala logarítmica base diez. a) Caso de un medio anisotrópico ($f = 2$) con resistividad promedio de $200 \Omega \cdot m$. b) Escenario de un medio anisotrópico ($f = 0.5$) con resistividad promedio de $50 \Omega \cdot m$. Ambos contextos se modelan con corriente de $12.5 kA$ a frecuencia de $1 Hz$. Los ejes coordenados son normalizados con la *skin depth* horizontal (δ_h). 57
23. Módulo del campo magnético en escala logarítmica base diez. a) Caso de un medio anisotrópico ($f = 2$) con resistividad promedio de $200 \Omega \cdot m$. b) Escenario de un medio anisotrópico ($f = 0.5$) con resistividad promedio de $50 \Omega \cdot m$. Ambos contextos se modelan con corriente de $12.5 kA$ a frecuencia de $1 Hz$. Los ejes coordenados son normalizados con la *skin depth* horizontal (δ_h). 58
24. Módulo del campo eléctrico vertical en escala logarítmica base diez. a) Caso de un medio anisotrópico ($f = 2$) con resistividad promedio de $200 \Omega \cdot m$. b) Escenario de un medio anisotrópico ($f = 0.5$) con resistividad promedio de $50 \Omega \cdot m$. Ambos contextos se modelan con corriente de $12.5 kA$ a frecuencia de $1 Hz$. Los ejes coordenados son normalizados con la *skin depth* horizontal (δ_h). 59
25. Correlación entre $E_r(r, z = 0)$ y G_ρ . a) $|\frac{\partial T \cdot E(r, z=0)}{\partial T}|$ en logaritmo base diez, el color de cada punto correlaciona E_r con G_ρ . b) G_ρ normalizada con la magnitud máxima de cada curva. Los ejes de abscisas son normalizados con la δ_p 60

26. Caso corriente directa (DC). a) Derivadas de Fréchet del rayo, la magnitud de la curva se normaliza con r^3 . b) Derivadas de Fréchet por Gómez-Treviño y Esparza (2014), la magnitud de la curva se normaliza con r^3 y se multiplica por ρ para establecer dependencia. Ambos escenarios son modelados para una tierra isotrópica de $100 \Omega \cdot m$ con corriente de $12.5 kA$ y $F = 0 Hz$ 61
27. Caso magnetoteléurico (MT). a) Derivadas de Fréchet del rayo, la magnitud de la curva se normaliza con r/w . b) Derivadas de Fréchet por Oldenburg (1979), la magnitud de la curva se amplifica con $i\mu I/2\pi$ para establecer correspondencia con las derivadas del rayo. Ambos escenarios son modelados para una tierra isotrópica de $100 \Omega \cdot m$ con corriente de $12.5 kA$ 62
28. Efecto del coeficiente de anisotropía en G_ρ . a) Caso de un medio anisotrópico ($f = 0.5$) con $\rho_z = 100 \Omega \cdot m$ y $\rho_h = 400 \Omega \cdot m$. b) Escenario de un medio anisotrópico ($f = 2$) con $\rho_z = 100 \Omega \cdot m$ y $\rho_h = 25 \Omega \cdot m$. Ambos contextos se modelan con corriente de $12.5 kA$ a frecuencia de $1 Hz$. Los ejes coordenados son normalizados con la *skin depth* vertical (δ_z). 63
29. Efecto del coeficiente de anisotropía en G_ρ . a) Caso de un medio anisotrópico ($f = 2$) con $\rho_z = 400 \Omega \cdot m$ y $\rho_h = 100 \Omega \cdot m$. b) Escenario de un medio anisotrópico ($f = 0.5$) con $\rho_z = 25 \Omega \cdot m$ y $\rho_h = 100 \Omega \cdot m$. Ambos contextos se modelan con corriente de $12.5 kA$ a frecuencia de $1 Hz$. Los ejes coordenados son normalizados con la *skin depth* horizontal (δ_h). 64
30. a) Resistividad aparente obtenida con la impedancia E_r/H_ϕ del rayo y la ecuación de Cagniard (1953). b) Fase de la impedancia E_r/H_ϕ . Los gráficos se obtuvieron para una tierra isotrópica de $100 \Omega \cdot m$, usando corriente de $12.5 kA$ y $F = 1 Hz$ 65
31. Valor absoluto de ρ_{aDC} y ρ_{aMT} en escala logarítmica base diez. Se modela para un medio isotrópico de $100 \Omega \cdot m$, usando corriente de $12.5 kA$ y $F = 1 Hz$. El eje de abscisas es normalizado con la *skin depth*. 66
32. a) Parte real de ρ_{aDC} . b) Parte imaginaria de ρ_{aDC} . Ambos escenarios se modelan para una tierra isotrópica de $100 \Omega \cdot m$, empleando corriente de $12.5 kA$ y $F = 1 Hz$ 67
33. a) Componente real de ρ_{aMT} . b) Componente imaginaria de ρ_{aMT} . Ambos escenarios se modelan para una tierra isotrópica de $100 \Omega \cdot m$, empleando corriente de $12.5 kA$ y $F = 1 Hz$ 67
34. a) Curva de campo. b) Curva maestra. *In situ* se puede obtener una sección de curva de campo, dicha porción se sobrepone en la curva maestra, y por medio de operaciones con logaritmos podemos obtener la resistividad real del subsuelo, siempre y cuando sea un medio homogéneo isotrópico. 68
35. a) Valor absoluto de $G_{\rho_{aDC}}$ normalizado con r/ρ ; se utiliza $F = 0 Hz$. b) Valor absoluto de $G_{\rho_{aMT}}$ normalizado con $I/rE_r(r, z = 0)$; se emplea una distancia a la fuente de $10^6 m$. Ambas figuras son modeladas para un medio isotrópico de $100 \Omega \cdot m$ 69
36. a) $Re(G_{\rho_{aDC}})$ normalizada con r/ρ . b) $Im(G_{\rho_{aMT}})$ normalizada con r/ρ . Ambos escenarios se modelan para un medio isotrópico de $100 \Omega \cdot m$ utilizando $F = 0 Hz$ 70

37. a) $Re(G_{\rho_{a_{MT}}})$. b) $Im(G_{\rho_{a_{MT}}})$. Ambas figuras son normalizadas con $I/r|E_r(r, z = 0)|$, se modela para un medio isotrópico de $100 \Omega \cdot m$ utilizando $r = 10^6 m$ 70
38. a) $\frac{\partial T \cdot Re(\rho_{a_{MT}})}{\partial T}$ modelado para un medio isotrópico de $100 \Omega \cdot m$ y $F = 1 Hz$; el eje de abscisas es la distancia a la fuente normalizada con la *skin depth*. b) $Re(G_{\rho_{a_{MT}}})$ normalizado con la amplitud máxima; el eje de abscisas es la profundidad normalizada con la *skin depth*. 71
39. Comparación de la resistividad aparente de Cagniard (1953) y $Re(\rho_{a_{MT}})$; se modela para un medio de dos capas a una distancia del rayo de $10^6 m$ 72
40. $Re(\rho_{a_{MT}})$ con $F = 1 Hz$, modelado para un medio estratificado. 72
41. a) Valor absoluto de E_r en logaritmo base diez. b) Componente imaginaria de E_r en logaritmo base diez. c) Componente real de E_r en logaritmo base diez. d) Resistividad aparente $Re(\rho_{a_{MT}})$. Todas las figuras son modeladas para un medio homogéneo isotrópico de $10 \Omega \cdot m$ utilizando $F = 1 Hz$ e $I = 1 A$. La curva roja es la solución analítica de $E_r(r, z = 0)$ (Ec. 69) para un medio homogéneo, mientras que la azul es $E_r(r, z = 0)$ obtenido de $E_r(\lambda, z = 0)$ (Ec. 179). 73

Capítulo 1. Introducción

El objetivo principal de la geofísica aplicada es obtener una imagen detallada del subsuelo, lo cual se logra mediante diversas metodologías. Estas incluyen la propagación de ondas mecánicas (sismología), el estudio del campo gravitacional y magnético terrestre (métodos potenciales), la inyección de corriente (método de corriente directa, DC) y la propagación de ondas electromagnéticas (métodos electromagnéticos, EM).

Tanto el método de corriente directa (DC) como los métodos electromagnéticos (EM) presentan ventajas y desventajas particulares. Por ejemplo, en el método de corriente directa, si se busca aumentar la capacidad de investigación en profundidad, es necesario incrementar la distancia entre los electrodos transmisores de corriente y los receptores de potencial. Sin embargo, en la práctica esto implica el uso de cables cada vez más largos, ya que a grandes distancias se requiere una mayor intensidad de corriente inyectada para que la señal pueda registrarse adecuadamente.

Por otro lado, los métodos electromagnéticos pueden utilizar tanto fuentes artificiales como naturales. Las fuentes artificiales incluyen bobinas inductoras o la inyección de corriente alterna, mientras que las fuentes naturales se generan a partir de fenómenos como los vientos solares en interacción con la ionósfera terrestre o los rayos de las tormentas eléctricas. Sin embargo, la capacidad de investigación en profundidad en estos métodos se ve afectada por la frecuencia de la fuente electromagnética y, en algunos casos, por la distancia a la fuente.

Ahora bien, los rayos asociados con tormentas eléctricas son la fuente del método magnetotelúrico (MT) para periodos menores de un segundo (Naidu, 2012), independientemente del lugar donde se produzcan en el planeta, los campos electromagnéticos llegan a la zona de medición como ondas planas viajando entre la ionósfera (región atmosférica con base entre 70 y 80 km (American Meteorological Society, 2023)) y la tierra. En este contexto, los rayos se han limitado en geofísica como una fuente indirecta electromagnética, es decir, no es necesario modelar su efecto en el sitio de interés. Por tal razón, en esta tesis se propone el uso de los rayos como fuente directa para la prospección geofísica, o sea, modelando los campos electromagnéticos en el área de estudio para tratar de obtener información del subsuelo.

Se puede plantear como objeción que la incidencia natural de los rayos es aleatoria, al igual que la trayectoria entre la nube y la tierra. Sin embargo, se ha logrado modular tanto la incidencia como la trayectoria mediante la técnica *rocket-and-wire* (Dwyer & Uman, 2014; Rakov & Uman, 2007). En este sentido, esta tesis propone una idealización del rayo nube-tierra como un cable vertical semi-infinito conectado al suelo, lo cual permite modelar los campos electromagnéticos dentro de la tierra. Es

importante destacar que, mediante este modelo se puede entender el método de corriente directa (DC) y magnetotelúrico (MT) como una metodología unificada.

Este trabajo consta de cinco capítulos, comenzando con la introducción. A continuación, se exponen los fundamentos teóricos que incluyen los rayos, la teoría electromagnética, los métodos de resistividad en geofísica y las derivadas de Fréchet. En el tercer capítulo se presenta la metodología utilizada para modelar el rayo, donde se plantea la ecuación diferencial correspondiente y se realiza un análisis funcional detallado; además, se introducen nuevas definiciones de resistividad aparente. Consecutivamente, se analizan y discuten los resultados obtenidos. Finalmente, en el capítulo de conclusiones se resumen los conocimientos aportados por este trabajo y se presentan recomendaciones para futuras investigaciones en este campo; se hace hincapié en la importancia de los resultados obtenidos y se identifican posibles líneas de investigación que podrían seguirse en el futuro.

1.1. Antecedentes

Dentro del campo de la ingeniería eléctrica, es común modelar los rayos como antenas que emiten radiación electromagnética. En muchos casos se supone que la tierra es un conductor perfecto (Rakov & Uman, 2007). No obstante, la investigación realizada por Mimouni et al. (2014) analiza el comportamiento del campo eléctrico vertical generado por un rayo, tanto por encima como por debajo de la superficie terrestre, considerando una tierra compuesta por dos capas. Para llevar a cabo este análisis, los mencionados autores resolvieron las ecuaciones de Maxwell utilizando el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo.

Por otra parte, en la geofísica hasta ahora no se ha estudiado el uso directo de los rayos para la prospección electromagnética. Sin embargo, Edwards (1980) propone el uso de un cable vertical semi-infinito conectado a tierra como fuente electromagnética, el cual en este trabajo se interpreta como un rayo nube-tierra. Es importante mencionar que el autor obtiene expresiones para el campo eléctrico radial (E_r) y el campo magnético azimutal (B_ϕ) dentro de la tierra. Además, encuentra que la razón E_r/B_ϕ , evaluada a grandes distancias, permite obtener la misma relación de resistividad aparente que Cagniard (1953) establece para el método magnetotelúrico. En la discusión del artículo, Wait (1981) complementa la expresión de E_r en la superficie terrestre para el caso de una tierra anisotrópica.

Asimismo, Edwards et al. (1984) presentan un análisis del modelo electromagnético de un cable vertical

que se extiende desde la superficie del mar hasta el lecho marino. En este estudio, se exponen los principios teóricos de la metodología, y se realiza la modelación del campo magnético azimutal tanto en el océano como en la corteza terrestre. Además, se presenta una definición de resistividad basada en la relación entre el campo magnético oceánico y el cortical. Por último, se lleva a cabo un análisis de la profundidad de investigación utilizando las derivadas de Fréchet.

1.2. Hipótesis

Teóricamente es posible obtener información del subsuelo utilizando un rayo nube-tierra como fuente. Además, que el modelo de un cable vertical tiene solución analítica para los campos electromagnéticos, así como para las derivadas de Fréchet con respecto a la resistividad del subsuelo anisotrópico.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Caracterizar la información del subsuelo que se puede obtener calculando en la superficie de la tierra los campos eléctricos y magnéticos producidos por un cable vertical (rayo), el cual inyecta en la tierra corriente alterna de determinada frecuencia.

1.3.2. Objetivos específicos

- Calcular los campos electromagnéticos a profundidad, así como la sensibilidad de los campos a pequeños cambios de la resistividad eléctrica en función de la profundidad.
- Obtener la solución general para una tierra anisotrópica cuya resistividad varía arbitrariamente con la profundidad.
- Obtener la solución analítica para el caso de una tierra anisotrópica cuya resistividad no varía con la profundidad.

- Caracterizar tres métodos electromagnéticos utilizando una y la misma solución: 1) resistividad de corriente directa, 2) métodos electromagnéticos de fuente controlada excluyendo el radar de penetración de tierra, y 3) el método magnetotelégrafo.

Capítulo 2. Fundamentos teóricos

2.1. Generalidades sobre los rayos

Durante una tormenta eléctrica presenciamos múltiples destellos en el cielo, inclusive algunos descienden y arremeten algún objeto sobresaliente en la superficie terrestre. Dichos fenómenos son rayos, los cuales pueden acontecer dentro de la nube, en medio de dos nubes, entre la nube y el aire, y finalmente, los de interés en este trabajo: los rayos nube-tierra (Fig. 1). No obstante, antes de hablar de este particular tipo de rayo, debemos entender su concepto y origen. A grandes rasgos, un rayo se puede definir como una chispa de más de un kilómetro de longitud (Dwyer & Uman, 2014); en general, esta clase de fenómeno se origina en la nube tipo cumulonimbus, la cual tiene una altura máxima entre 10 y 20 km producida por la presencia de corrientes ascendentes intensas asociadas a la condensación de aire húmedo (Uman, 1984). Dentro de la nube cumulonimbus emergen zonas cargadas eléctricamente debido a la interacción de gotas de agua y pequeños cristales de hielo, influenciados por el efecto gravitacional y el gradiente de temperatura (Rakov & Uman, 2007; Uman, 1984). La polarización eléctrica consiste en una zona de cargas negativas (ZCN) situada en la parte intermedia de la nube, delimitada tanto en la parte superior como inferior de una zona principal (ZPCP) y secundaria (ZSCP) de cargas positivas (Fig. 1).

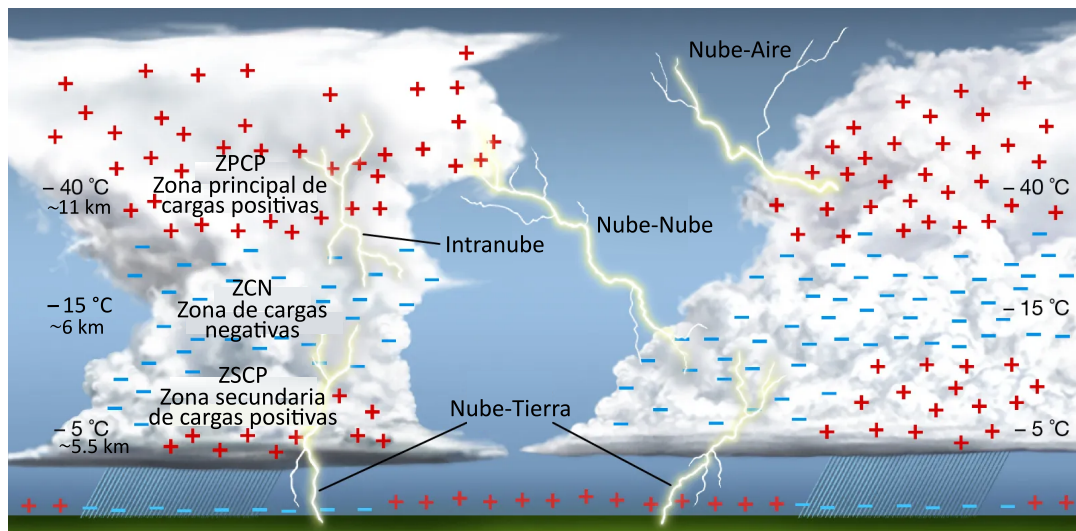


Figura 1. Distribución de cargas en la nube cumulonimbus y algunos tipos de rayos (Modificado de Encyclopaedia Britannica, 2023).

Ahora bien, los rayos deben entenderse como un conjunto de eventos de transferencia de cargas. En este sentido, el proceso comienza mediante la ionización del aire entre la ZCN y la ZSCP, de esta manera

se produce una región de mínima resistencia eléctrica que desencadena la ruptura preliminar (en inglés *preliminary breakdown*), véase la figura 2. Posteriormente, desde la ZCN las cargas negativas se despliegan en dirección a la tierra, a este fenómeno se le denomina líder intermitente o en inglés *stepped leader*, ya que pareciera descender por etapas de alrededor de 50 metros de longitud. Consecutivamente, cuando los electrones se aproximan al suelo atraen cargas positivas en la superficie de la tierra, dando lugar al ascenso de un líder positivo (rayo). A continuación, ocurre el proceso de unión (*attachment process*) entre el *stepped leader* y el líder positivo ascendente de la tierra. Finalmente, acontece el primer choque de retorno o *first return stroke*, es decir, los electrones depositados en el líder fluyen hacia la tierra. Si después de la neutralización de cargas se produce alguna descarga eléctrica entre la cima del *first return stroke* y la región más alta de la ZCN, es decir, si ocurren los procesos K y J (*K and J processes*), entonces, un líder continuo (*dart leader*) atraviesa la trayectoria de mínima resistencia eléctrica creada por el líder intermitente, y en consecuencia acontece un segundo choque de retorno (*second return stroke*); cabe destacar que estos procesos se pueden repetir de manera cíclica, en promedio acontecen entre 3 y 4 choques de retorno (*return strokes*) por cada descenso de un *stepped leader* (Rakov, 2013; Rakov & Uman, 2007; Uman, 1984).

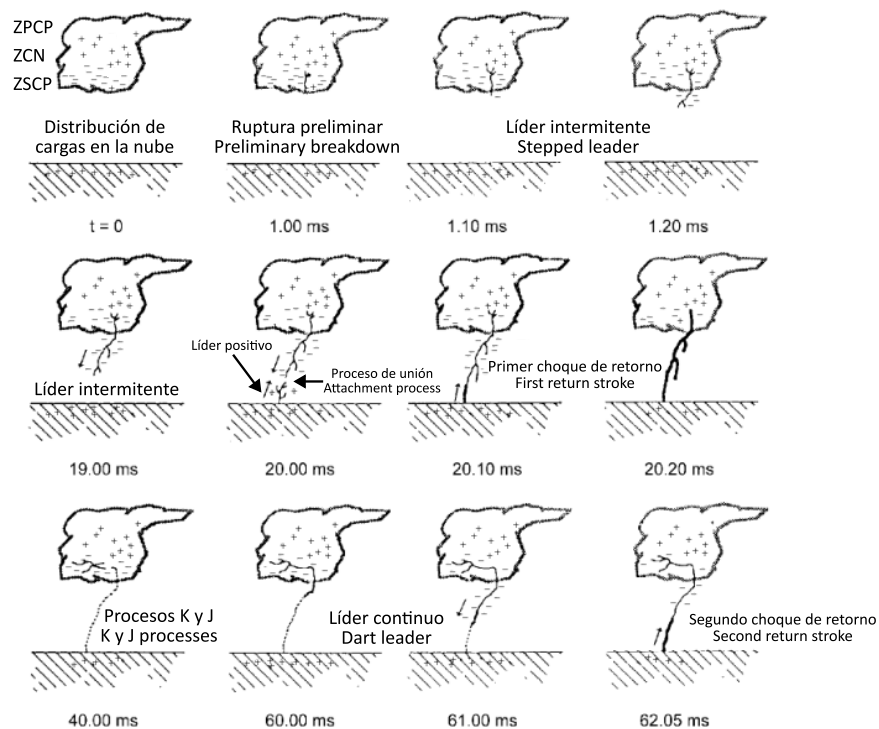


Figura 2. Origen de un rayo negativo tipo nube-tierra. Los tiempos debajo de cada recuadro expone la duración aproximada del proceso (Modificado de Rakov & Uman, 2007).

Cabe mencionar que lo descrito hasta el momento corresponde a los rayos nube-tierra descendentes

negativos, sin embargo, también puede haber rayos descendentes positivos, e inclusive rayos ascendentes, es decir, el despliegue de cargas se desarrolla desde la superficie terrestre hacia la nube (Dwyer & Uman, 2014). No obstante, alrededor del 90 % de los rayos entre nube-tierra son del tipo descendente con carga negativa (Rakov, 2013).

Por otra parte, tanto la trayectoria como el descenso aleatorio de un rayo se pueden regular artificialmente mediante la técnica del cohete o en inglés *rocket-and-wire*, la cual consiste en disparar hacia la nube un cohete que lleva atado un alambre de cobre cuyo extremo inferior se mantiene conectado a tierra, tal y como se ilustra en la figura 3. A grandes rasgos, cuando el cohete asciende incrementa el potencial eléctrico, desencadenando un líder positivo ascendente (*upward positive leader*), de esta forma, se establece un flujo continuo inicial de corriente (*initial continuous current*) que transporta carga negativa de la nube a la tierra. Cuando la corriente inicial cesa, pueden acontecer una o más secuencias *dart leader* y *return stroke*. Se debe agregar que existe otra variante del cohete disparador, de manera general la metodología es la misma, pero cambia el tipo de conexión entre el cohete y la tierra, puesto que se sustituye por un aislante delimitado tanto en la parte superior como inferior de un conductor (Rakov & Uman, 2007).

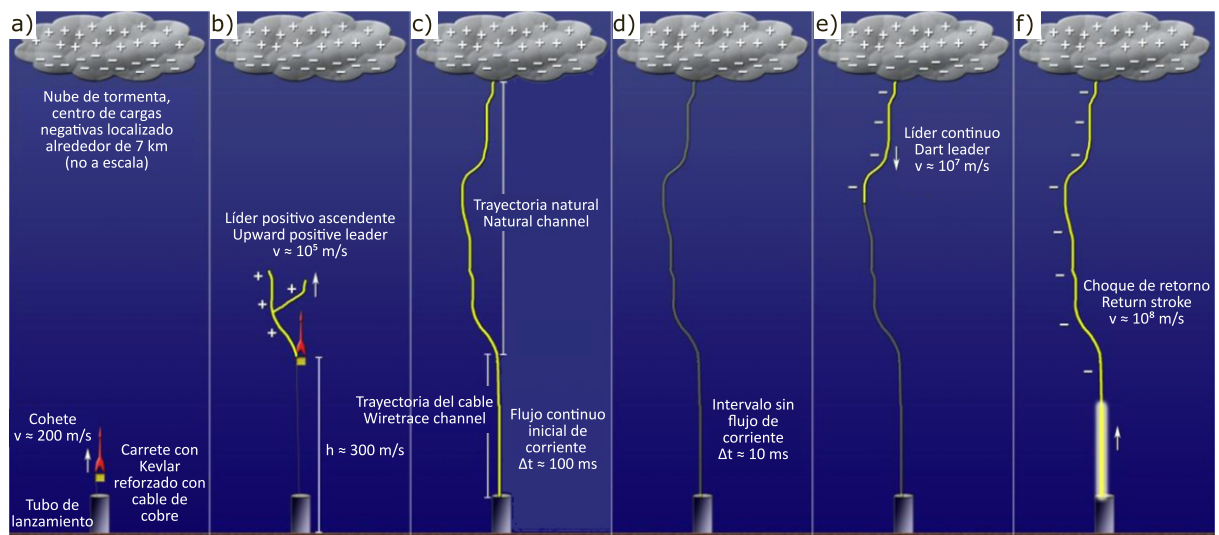


Figura 3. Técnica *rocket-and-wire*. a) El cohete es lanzado a una velocidad de 200 m/s . b) Alrededor de los 300 m de altura el cable se vaporiza debido al ascenso de un líder positivo. c) Flujo continuo de corriente entre nube-tierra. d) Intervalo sin flujo de corriente. e) Descenso de un *dart leader*. f) Ocurrencia del *return stroke*. (Modificado de Dwyer & Uman, 2014).

La intensidad de corriente durante el *return stroke* mediante la técnica *rocket-and-wire* varía entre un mínimo de 2.8 kA y un máximo de 42.3 kA , con una media aritmética y geométrica de 13.9 kA y 12.2 kA , respectivamente (Schoene et al., 2009). Se debe considerar que estos datos corresponden a experimentos realizados en el norte central de Florida con 206 muestras. Cabe mencionar que no existe

diferencia significativa entre un choque de retorno artificial (por medio de la técnica *rocket-and-wire*) y el de un rayo natural.

Existen otros tipos de descargas eléctricas entre la nube cumulonimbus y la ionósfera inferior, conocidos como eventos luminosos transitorios, o en inglés *transient luminous events* (TLEs). A grandes rasgos, dichos procesos representan un mecanismo de transferencia de cargas entre la cúspide de la nube y la base de la ionósfera (Rakov, 2013). En este sentido, el planeta Tierra es una especie de capacitor eléctrico, es decir, la superficie terrestre cargada negativamente por los rayos nube-tierra, y la ionósfera con cargas positivas debido a los TLEs; sin embargo, se debe considerar que la atmósfera es ligeramente conductora, por tal razón el conjunto ionósfera-tierra se comporta como un capacitor con pérdida eléctrica, no obstante, permanece cargado ya que continuamente las tormentas eléctricas retroalimentan el sistema (Kelley, 2014).

2.2. Las ecuaciones de Maxwell

Todo evento electromagnético se rige por las ecuaciones de Maxwell, dichas expresiones son descripciones matemáticas de fenómenos eléctricos y magnéticos empíricos. Cabe mencionar que existe considerable bibliografía al respecto, no obstante, en este apartado nos apoyaremos de Ward y Hohmann (1988). Dicho lo anterior, en el dominio de la frecuencia las ecuaciones de Maxwell son:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\mu\omega\mathbf{H}, \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + i\epsilon\omega) \mathbf{E}, \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot (\mu\mathbf{H}) = 0, \quad (1c)$$

$$\text{y } \nabla \cdot (\epsilon\mathbf{E}) = q, \quad (1d)$$

donde μ , ϵ y σ son la permeabilidad magnética, permitividad dieléctrica, y conductividad, respectivamente. Estas propiedades de los materiales son tensoriales y funciones de la frecuencia angular (ω), la magnitud del campo eléctrico (\mathbf{E}) o magnético (\mathbf{H}), la posición ($\bar{\mathbf{r}}$), la temperatura y la presión; no obstante, se realizan simplificaciones dependiendo del problema por bordar, o inclusive pueden considerarse propiedades isotrópicas e invariantes de la posición.

Ahora bien, la ecuación 1a es la ley de Faraday, matemáticamente relaciona el rotacional del campo eléctrico con el campo magnético, físicamente, si un campo eléctrico se encuentra circulando alrededor

de un punto, entonces, se induce un campo magnético dependiente de la frecuencia de rotación de \mathbf{E} . Por el contrario, la ley de Ampère (Ec. 1b) relaciona el rotacional del campo magnético con el campo eléctrico, es decir, si un \mathbf{H} rota alrededor de un punto, entonces se inducirá un \mathbf{E} dependiente de la frecuencia de circulación de \mathbf{H} . Cabe mencionar que σ en la expresión 1b corresponde a las corrientes de conducción, mientras que el término $i\epsilon\omega$ pertenece a las corrientes de desplazamiento; además, si la frecuencia de los campos electromagnéticos es menor a 10^5 Hz , entonces las corrientes de desplazamiento se pueden despreciar, ya que son mucho menores a las corrientes de conducción, en esta situación decimos que los campos electromagnéticos son cuasi-estáticos.

Por otra parte, las expresiones 1c y 1d son las leyes de Gauss para el campo magnético y eléctrico, respectivamente. A grandes rasgos, la ecuación 1c establece la inexistencia de los monopolos magnéticos, ya que la divergencia de $\mu\mathbf{H}$ equivale a cero, es decir, a través de una superficie cerrada las líneas de campo magnético que entran son las mismas que salen. Por el contrario, la expresión 1d fundamenta que la cantidad de $\epsilon\mathbf{E}$ a través de una superficie cerrada es igual a la carga encerrada por dicha superficie.

Cabe mencionar que las expresiones 1 son ecuaciones diferenciales de primer orden, las cuales están acopladas entre ellas por medio de las relaciones constitutivas:

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \quad (2a)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad (2b)$$

$$\text{y } \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \quad (2c)$$

donde \mathbf{D} es el desplazamiento eléctrico, y \mathbf{B} la densidad de flujo magnético. Es importante señalar que la ecuación 2c es la forma puntual de la ley de Ohm, la cual relaciona la densidad de corriente \mathbf{J} con el campo eléctrico \mathbf{E} por medio de la conductividad σ ; esta expresión es clave en el desarrollo de los métodos de resistividad eléctrica en geofísica.

En síntesis, los fenómenos electromagnéticos son descritos por ecuaciones diferenciales parciales (EDP), las cuales se deben plantear dependiendo de la simetría y las características del modelo. Una vez establecida la EDP, se debe encontrar la función que satisfaga la ecuación diferencial; existen diferentes métodos para hallar dicha función dependiendo del tipo de EDP, sin embargo, nos limitaremos con explicar la solución por medio de la transformada de Hankel:

1. Aplicar la transformada de Hankel (Ec. 3), es decir, transformar la EDP del dominio radial (r) al dominio del número de onda (λ), esto implica que la EDP se convierte en una ecuación diferencial

ordinaria (EDO) en el dominio λ .

$$\mathcal{H}_n[f(r)] = \int_0^{\infty} r f(r) J_n(\lambda r) dr. \quad (3)$$

2. Resolver la EDO transformada por medio de algún método analítico apropiado. Este proceso involucra aplicar las condiciones de frontera en el dominio λ .
3. Aplicar la transformada inversa de Hankel (Ec. 4). La solución de la EDO debe transformarse del dominio λ a r .

$$\mathcal{H}_n^{-1}[f_n(\lambda)] = \int_0^{\infty} \lambda f_n(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda. \quad (4)$$

Es importante señalar que la transformación analítica de λ a r puede representar un obstáculo, ya que en algunas ocasiones no hay solución disponible. Sin embargo, es posible aproximar la transformada inversa de Hankel utilizando un filtro. A grandes rasgos, un filtro inverso se diseña por medio de una función $f(r)$ conocida y su transformada analítica $f(\lambda)$; en geofísica, Ghosh (1970) fue el pionero en proponer el uso de filtros para resolver el problema directo del método de corriente directa, no obstante, con el transcurrir de los años se desarrollaron diversos filtros (p. ej. Anderson, 1979; O'Neill, 1975), inclusive Werthmüller et al. (2019) implementaron una herramienta para diseñar filtros digitales, a pesar de ello, se debe considerar que esta tarea involucra análisis estadístico para conocer la eficiencia y/o limitaciones del filtro.

2.3. Métodos de resistividad eléctrica

La resistividad eléctrica ρ se define como el inverso de la conductividad (σ^{-1}), a diferencia de la resistencia eléctrica, la resistividad es una propiedad intrínseca de los materiales e independiente de las dimensiones, por ejemplo, si tenemos dos alambres de distinto largo, pero fabricados del mismo material, el de mayor longitud tendrá mayor resistencia eléctrica, no obstante, la resistividad eléctrica es la misma en ambos casos.

Dicho lo anterior, el método de corriente directa (DC) consiste en inyectar corriente en la tierra y medir el voltaje resultante debido al flujo eléctrico que interacciona con la resistividad del medio, tal y como se ilustra en la figura 4. En un principio, se graficaba el potencial eléctrico (V) contra la distancia a la fuente (r), de esta forma se obtenían «mapas potenciales» con los cuales se trataba de conocer la

heterogeneidad del medio (Rust, 1938), no obstante, dichos mapas resultaban difíciles de interpretar, ya que el potencial eléctrico decae al inverso del cuadrado de la distancia a la fuente (r^{-2}), es decir, entre más lejos de la fuente la señal registrada se volvía cada vez más pequeña.

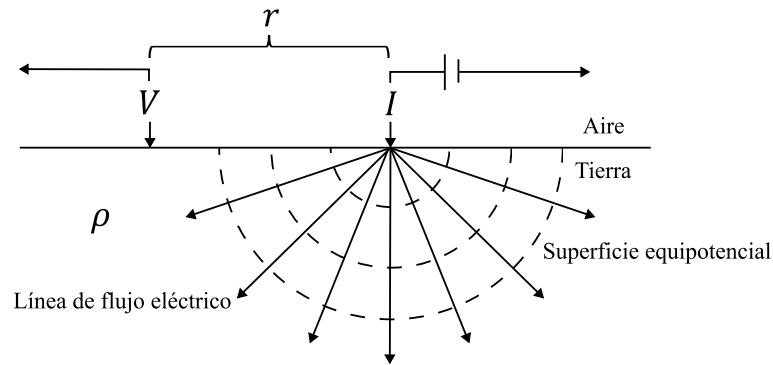


Figura 4. Principio del método de corriente directa (DC) utilizando un arreglo polo-polo.

Por otra parte, Wenner fue el pionero en proponer el uso de la resistividad para caracterizar metales introduciendo el término «resistividad aparente» (Rust, 1938; Spies & Eggers, 1986), además, Wenner (1916) sugiere el empleo de la resistividad aparente para caracterizar el subsuelo. Desde entonces, se popularizó el uso de la resistividad aparente:

$$\rho_{aDC} = K \frac{V}{I}, \quad (5)$$

donde K es un factor geométrico dependiente de la distribución y cantidad de electrodos, I es la corriente inyectada, y V el potencial eléctrico. Para una configuración polo-polo como en la figura 4 se tiene:

$$\rho_{aDC} = 2\pi r \frac{V}{I}. \quad (6)$$

Cabe destacar que la ecuación 6 recupera la resistividad del subsuelo solamente para un medio homogéneo isotrópico, no obstante, se extiende su uso para medios estratificados, de esta forma se puede estimar el número de capas y evaluar la cualidad resistiva o conductora de cada estrato. Por ejemplo, la figura 5 muestra el comportamiento de la resistividad aparente para un medio estratificado de 2 capas, se puede observar que la curva ρ_a recupera la resistividad del primer estrato (ρ_1) en separaciones pequeñas de r (distancia entre electrodos); ahora bien, conforme la distancia r aumenta, la resistividad aparente converge a la resistividad del segundo estrato (ρ_2).

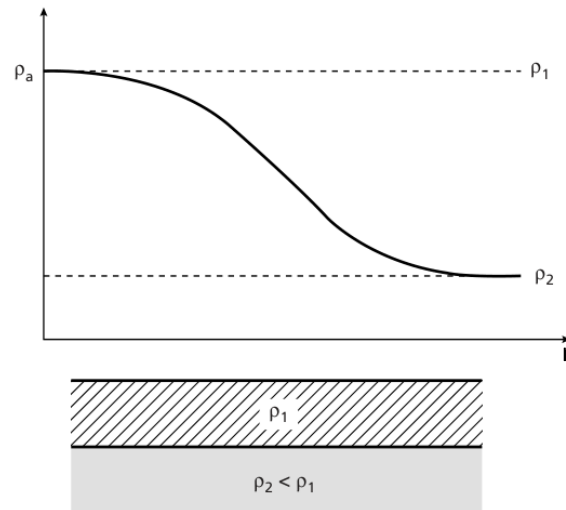


Figura 5. Variación de la resistividad aparente para un arreglo de electrodos tetrapolar tipo Wenner, r indica la distancia entre electrodos (Modificado de Kearey et al., 2002a).

Por otra parte, el método magnetotelúrico (MT) es una técnica que aprovecha los campos electromagnéticos (EM) naturales de la Tierra. Parte de los campos magnetotelúricos se originan debido a la fluctuación de cargas eléctricas en la ionósfera, provocada por la variación diurna del campo magnético terrestre a causa de las emisiones solares (Kearey et al., 2002b); adicionalmente, el *sferic* contribuye con radiación EM en el rango de 1 a 10^5 Hz, el cual es generado por los rayos nube-tierra (Reynolds, 2011). En general, el método MT consiste en registrar las ondas EM inducidas por las corrientes telúricas, las cuales son producto de los campos magnetotelúricos, tal y como se ilustra en la figura 6.

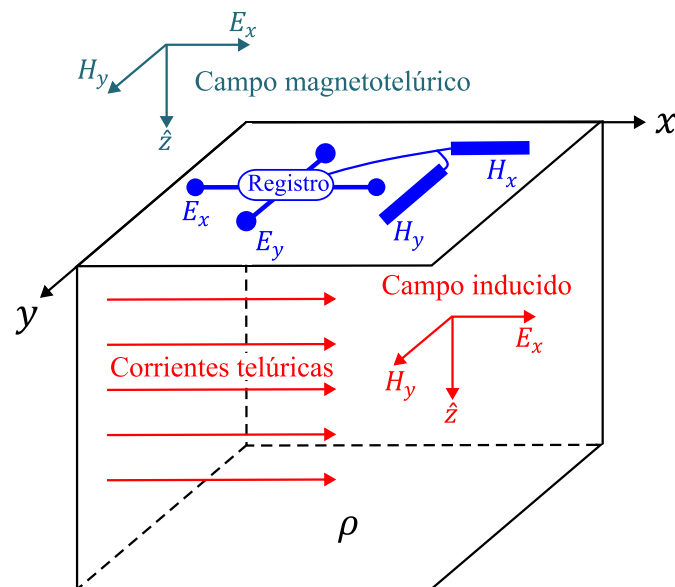


Figura 6. Esquema del método magnetotelúrico. El campo magnetotelúrico es generado por las fluctuaciones en la ionósfera y los rayos nube-tierra. El campo inducido es producto de las corrientes telúricas generadas por los campos magnetotelúricos.

Por otra parte, Cagniard (1953) es el pionero en proponer el uso de la impedancia $Z = E_x/H_y$ de la onda electromagnética inducida (Fig. 6) para obtener la resistividad aparente. De manera resumida, Cagniard (1953) considera la onda electromagnética tanto en el aire como en la tierra, posteriormente aplica las condiciones de frontera y evalúa los campos en la superficie terrestre ($z = 0$), consecutivamente divide campo eléctrico entre magnético (impedancia), y finalmente despeja la resistividad del medio:

$$\rho_{a_{MT}} = \frac{1}{\mu\omega} |Z|^2. \quad (7)$$

Al igual que en DC, la resistividad aparente MT (Ec. 7) representa la resistividad para un medio homogéneo isotrópico, no obstante, su uso se extiende a medios estratificados. Por ejemplo, la figura 7 muestra una curva típica de $\rho_{a_{MT}}$; cabe destacar que para periodos menores de un segundo la fuente EM proviene de los rayos, mientras que para periodos mayores a un segundo el suministro procede de la interacción del viento solar en la ionósfera (Naidu, 2012).

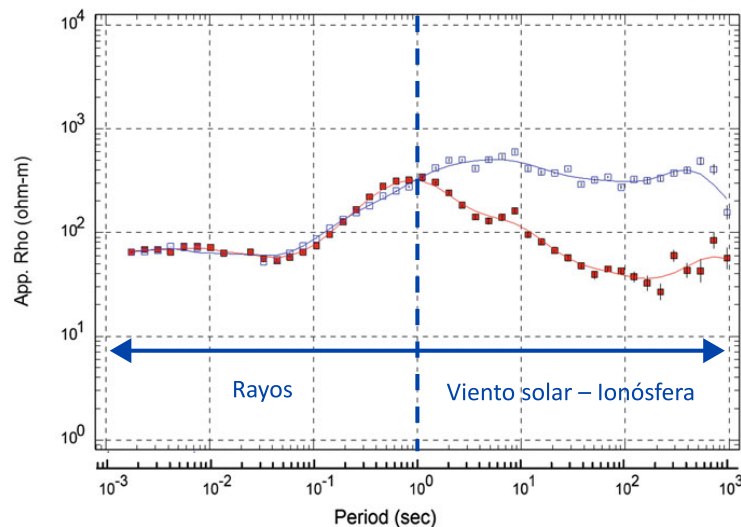


Figura 7. Curvas de resistividad aparente de un sondeo magnetotelúrico. El eje de abscisas muestra el periodo en segundos; el eje de ordenadas la resistividad aparente en $\Omega \cdot m$ (Modificado de Naidu, 2012).

A diferencia del método DC y MT, las técnicas electromagnéticas de fuente controlada (CS) se clasifican dependiendo del tipo de emisor electromagnético. En este sentido, los dipolos eléctricos son fuentes galvánicas, ya que implican la inyección de corriente alterna en la tierra; por el contrario, los dipolos magnéticos son fuentes inductivas, puesto que involucra la inducción de corrientes alternas por medio de campos magnéticos variantes en el tiempo (Zhdanov, 2018). Dicho lo anterior, para ejemplificar una metodología CS nos enfocaremos en la técnica inductiva *grounded wire-coil*, es decir, la fuente EM es un cable a tierra (*grounded wire*) y el receptor una bobina vertical (*coil*), tal y como se ilustra en la figura

8. De manera general, el *grounded wire* genera un campo magnético primario (H_p) con frecuencia de la corriente alterna (AC), asimismo, el H_p induce corrientes en la tierra, de esta forma creando un campo magnético secundario (H_s), el cual es registrado en la bobina receptora (*coil*).

Por otro lado, no hay una definición incuestionable de resistividad aparente para los sondeos de fuente controlada, puesto que no existe una expresión para la resistividad en un medio homogéneo isotrópico (Zhdanov, 2018). No obstante, para el método *grounded wire-coil* (Fig. 8) se emplea una expresión asintótica válida para frecuencias muy bajas,

$$\rho_{aCS} = -i \frac{2\pi r^4 \omega \mu}{3IL \sin(\theta)} H_s, \quad (8)$$

donde I es la intensidad de corriente AC, ω es la frecuencia angular y L el largo del cable fuente. La ecuación 8 indica que la capacidad de investigación vertical es modulada por la distancia a la fuente y la frecuencia, es decir, los sondeos CS son paramétricos (Zhdanov, 2018).

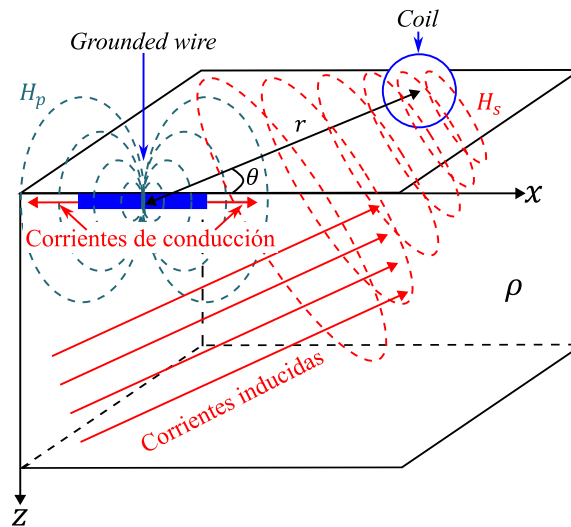


Figura 8. Esquema de la técnica *grounded wire-coil*; r es la separación entre el centro del cable transmisor y la bobina receptora; θ es el ángulo entre el eje x y r .

2.4. Condiciones de frontera

En la sección previa se discutió acerca de los métodos electromagnéticos en geofísica, los cuales se basan en la medición de potencial, corriente o campos EM generados por un campo primario, ya sea natural o

artificial. En este sentido, los campos primarios son responsables de la distribución de cargas y corrientes, dando lugar a la formación de un campo secundario. Es importante destacar que el campo total, el cual representa la suma del campo primario y el secundario, debe cumplir con las ecuaciones de Maxwell (Ec. 1) o con expresiones derivadas de ellas. Además, es necesario aplicar condiciones adecuadas en las fronteras involucradas, como por ejemplo, en la interfase entre el aire y la tierra. Estas situaciones se conocen como problemas con valores en la frontera (Ward & Hohmann, 1988).

2.4.1. Campo eléctrico tangencial y perpendicular

Dicho lo anterior, analizaremos el comportamiento del campo eléctrico total $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ en la interfase entre dos medios con distintas propiedades electromagnéticas (ϵ , μ y σ), tal y como se plantea en la figura 9.

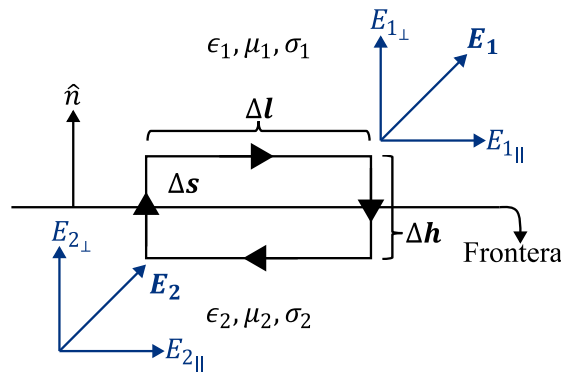


Figura 9. Continuidad del campo eléctrico tangencial $E_{||}$. Un contorno de integración cerrado atraviesa la superficie de contacto entre el contraste $\epsilon_1\mu_1\sigma_1$ y $\epsilon_2\mu_2\sigma_2$.

Ahora bien, aplicando integración de superficie en la ley de Faraday (Ec. 1a) se obtiene

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} ds = -i\mu\omega \int_S \mathbf{H} ds. \quad (9)$$

Empleando el teorema de Stokes en el lado izquierdo de la igualdad

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} ds = \oint_L \mathbf{E} dl = -i\mu\omega \int_S \mathbf{H} ds. \quad (10)$$

Aproximando las integrales

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \Delta \mathbf{h} \cdot \Delta \mathbf{l} = \mathbf{E} \Delta \mathbf{l} = -i\mu\omega \mathbf{H} \Delta \mathbf{h} \cdot \Delta \mathbf{l}. \quad (11)$$

Si $\Delta \mathbf{h} \rightarrow 0$ (Fig. 9) se consigue

$$(E_{1\parallel} - E_{2\parallel}) \Delta \mathbf{l} = 0. \quad (12)$$

Por lo tanto,

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel}. \quad (13)$$

Esta última expresión establece que los campos eléctricos tangenciales a la superficie (Fig. 9) son continuos. Por otra parte, para examinar el comportamiento de \mathbf{E} perpendicular, consideraremos una densidad de corriente total $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ en la interfase entre dos medios con distintas propiedades electromagnéticas (ϵ , μ y σ), tal y como se plantea en la figura 10.

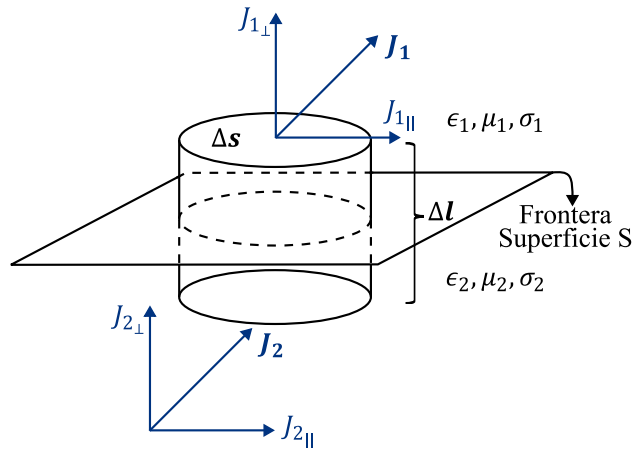


Figura 10. Continuidad en la densidad de corriente perpendicular J_{\perp} ; discontinuidad de E_{\perp} . Un volumen de integración atraviesa la frontera de contacto entre el contraste $\epsilon_1\mu_1\sigma_1$ y $\epsilon_2\mu_2\sigma_2$.

Ahora bien, la ecuación de continuidad establece:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -i\omega\rho_q, \quad (14)$$

donde ρ_q es la densidad de carga. Aplicando integración volumétrica (Ec. 14) se obtiene

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} d\mathbf{v} = -i\omega \int_V \rho_q d\mathbf{v}. \quad (15)$$

Empleando el teorema de la divergencia en el lado izquierdo de la igualdad se consigue

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} d\mathbf{v} = \oint_S \mathbf{J} d\mathbf{s} = -i\omega \int_V \rho_q d\mathbf{v}. \quad (16)$$

Aproximando las integrales

$$(\nabla \cdot \mathbf{J}) \Delta \mathbf{s} \cdot \Delta \mathbf{l} = \mathbf{J} \Delta \mathbf{s} = -i\omega \rho_q \Delta \mathbf{s} \cdot \Delta \mathbf{l}. \quad (17)$$

Si $\Delta \mathbf{l} \rightarrow 0$ (Fig. 10) y aplicamos la ley de Ohm, se alcanza

$$\sigma_1 E_{1\perp} = \sigma_2 E_{2\perp}. \quad (18)$$

La ecuación 18 estipula que los campos eléctricos perpendiculares a la superficie son discontinuos.

2.4.2. Campo magnético tangencial y perpendicular

Ahora estudiaremos el comportamiento del campo magnético total $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ en la interfase entre dos medios con distintas propiedades electromagnéticas (ϵ , μ y σ), tal y como se plantea en la figura 11.

Aplicando integración de superficie en la ley de Ampère (Ec. 1b) se obtiene

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} d\mathbf{s} = \int_S (\sigma + i\epsilon\omega) \mathbf{E} d\mathbf{s}. \quad (19)$$

Utilizando el teorema de Stokes,

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} ds = \oint_L \mathbf{H} dl = \int_S (\sigma + i\epsilon\omega) \mathbf{E} ds. \quad (20)$$

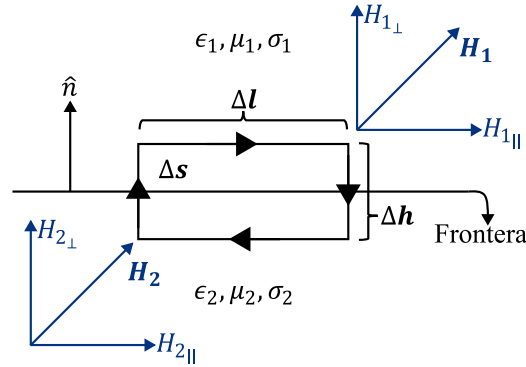


Figura 11. Continuidad del campo magnético tangencial $H_{||}$. Una superficie de integración atraviesa la frontera de contacto entre el contraste $\epsilon_1\mu_1\sigma_1$ y $\epsilon_2\mu_2\sigma_2$.

Aproximando las integrales

$$(\nabla \times \mathbf{H})\Delta l \cdot \Delta \mathbf{h} = \mathbf{H}\Delta l = (\sigma + i\epsilon\omega) \mathbf{E}\Delta l \cdot \Delta \mathbf{h}. \quad (21)$$

Si $\Delta \mathbf{h} \rightarrow 0$ (Fig. 11) entonces,

$$(H_{1||} - H_{2||}) = 0. \quad (22)$$

Equivalentemente,

$$H_{1||} = H_{2||}. \quad (23)$$

Esta última expresión declara que los campos magnéticos tangenciales son continuos en la interfase. Por otro lado, para examinar el comportamiento de H_{\perp} , consideraremos el mismo escenario de la figura 10 pero ahora considerando H en vez de J , tal y como se muestra en la figura 12.

Empleando integración volumétrica en la ley de Gauss para el campo magnético (Ec. 1c):

$$\int_V \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) d\mathbf{v} = 0. \quad (24)$$

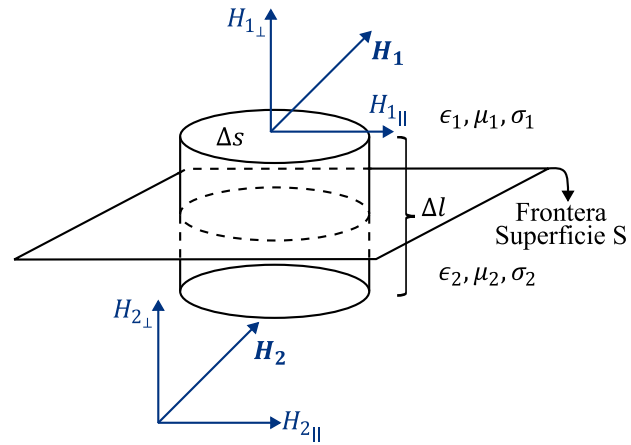


Figura 12. Discontinuidad del campo magnético perpendicular H_{\perp} . Un volumen de integración atraviesa la frontera de contacto entre el contraste $\epsilon_1\mu_1\sigma_1$ y $\epsilon_2\mu_2\sigma_2$.

Aplicando el teorema de la divergencia

$$\int_V \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) dv = \oint_S \mu \mathbf{H} ds. \quad (25)$$

Aproximando las integrales

$$\nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) \Delta s \Delta l = \mu \mathbf{H} \Delta s. \quad (26)$$

Si $\Delta l \rightarrow 0$ (Fig. 12) entonces

$$(\mu_1 H_{1\perp} - \mu_2 H_{2\perp}) \Delta s = 0. \quad (27)$$

Análogamente,

$$\mu_1 H_{1\perp} = \mu_2 H_{2\perp}. \quad (28)$$

De esta forma se estipula que el campo magnético perpendicular es discontinuo en la interfase.

2.5. Las derivadas de Fréchet

Las derivadas de Fréchet extienden el concepto de la derivada. La generalización se refiere a pasar de una función que depende de varias variables discretas, a un funcional que depende de otra función, véase la figura 13.

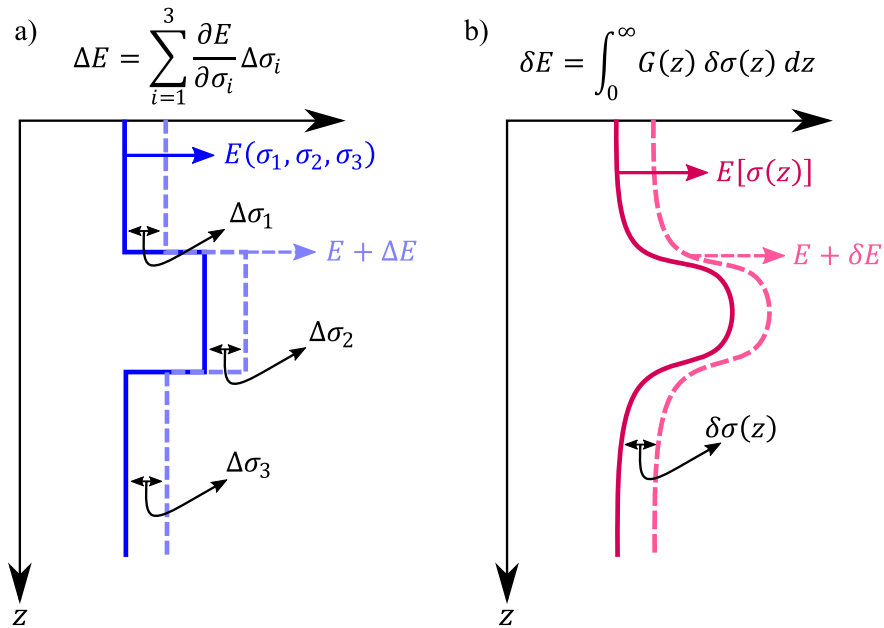


Figura 13. Diferencia entre las derivadas convencionales y de Fréchet. a) Derivada convencional, E depende de valores discretos de conductividad $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. b) Derivadas de Fréchet, E es un funcional ya que depende de $\sigma(z)$; $G(z)$ es la derivada de Fréchet.

Dicho lo anterior, nos apoyaremos con Backus y Gilbert (1967), y Parker (1971, 1972, 1977) para explicar el uso de las derivadas de Fréchet en el contexto de los métodos electromagnéticos en geofísica. Siguiendo esta idea, supongamos que realizamos un sondeo en la superficie terrestre y registramos J mediciones del campo eléctrico E_j^0 (con $j = 1, \dots, J$), dichas mediciones se relacionan a un modelo de conductividad σ mediante:

$$E_j^0 = E_j(\sigma). \quad (29)$$

Donde E_j es un funcional en el espacio de Hilbert (\mathcal{H}) . Ahora bien, E_j en producto interno $(\langle \rangle)$ es Fréchet diferenciable en el punto σ si cualquier perturbación $\delta\sigma$ afecta al funcional por completo, de esta manera

$$E_j(\boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\sigma}) = E_j(\boldsymbol{\sigma}) + \langle \mathbf{G}_j, \delta\boldsymbol{\sigma} \rangle + O(\delta\boldsymbol{\sigma}), \quad (30)$$

donde

$$\langle \mathbf{G}_j, \delta\boldsymbol{\sigma} \rangle = \int_0^a G_j(z) \delta\sigma(z) dz. \quad (31)$$

La expresión 30 representa una aproximación lineal; donde \mathbf{G}_j es un elemento del espacio \mathcal{H} denominado derivada de Fréchet de E_j respecto de $\boldsymbol{\sigma}$; $O(\delta\boldsymbol{\sigma})$ son los términos de orden superior, pero su efecto se vuelve insignificante cuando $\delta\boldsymbol{\sigma} \rightarrow 0$, en este contexto

$$E_j(\boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\sigma}) \cong E_j(\boldsymbol{\sigma}) + \langle \mathbf{G}_j, \delta\boldsymbol{\sigma} \rangle. \quad (32)$$

En los problemas no-lineales, como los electromagnéticos en geofísica, no es evidente la existencia de G_j , ya que debe determinarse a partir de E_j y $\boldsymbol{\sigma}$. Para lograr esto, se debe perturbar la ecuación diferencial del problema EM, de esta forma se relaciona un pequeño cambio δE con $\delta\boldsymbol{\sigma}$.

Capítulo 3. Metodología

3.1. Ecuación diferencial de un rayo artificial

El comportamiento de un rayo nube-tierra comprende distintas etapas, por tal razón, nos enfocaremos en el instante en que ocurre el *return stroke*, debido a que en ese momento hay un flujo directo de corriente entre la nube y la tierra, así como la inherente presencia de los campos electromagnéticos.

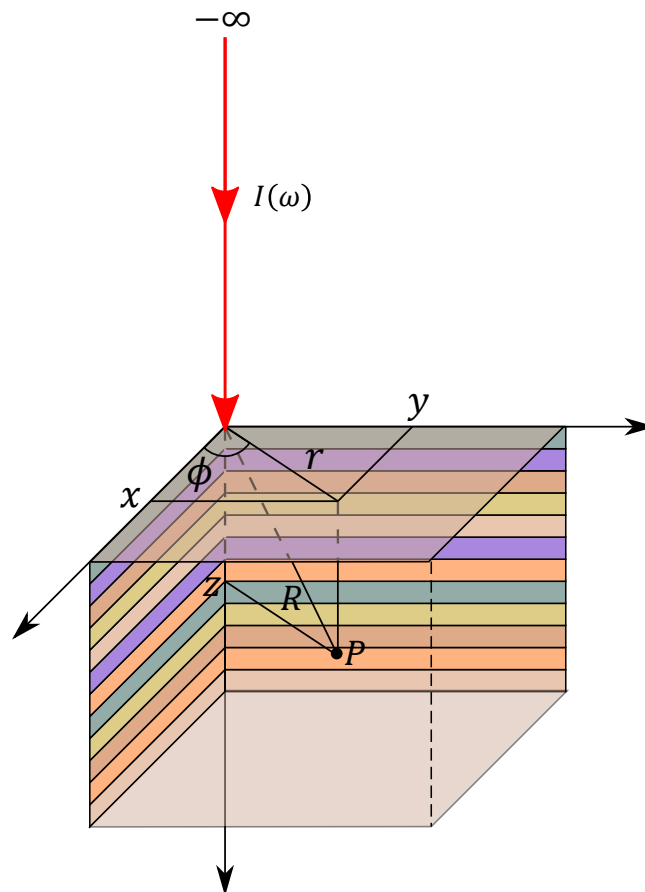


Figura 14. Cable semi-infinito conectado a una tierra anisotrópica. P indica la posición para modelar los campos electromagnéticos.

Ahora bien, para tratar de esquematizar y modelar matemáticamente el *return stroke*, bastará con emplear la simplificación de un cable vertical semi-infinito conectado a tierra, a través del cual circula una corriente alterna $I(\omega)$ (Fig. 14), donde ω corresponde a uno de los armónicos que conforman el espectro del pulso de corriente del rayo (delta de Dirac) en el dominio del tiempo. Este modelo fue estudiado por Edwards (1980) en relación con simulaciones de laboratorio, no obstante, en dicha publicación se considera una

tierra homogénea isotrópica de conductividad constante (σ), lo cual difiere en este trabajo, debido a que consideraremos una tierra anisotrópica de conductividad media variante con la profundidad ($\sigma(z)$). Se debe agregar que por cuestiones de comodidad matemática, el modelo se plantea en el sistema de coordenadas cilíndricas (Fig. 14).

Al incidir en la tierra la corriente eléctrica proveniente del cable, se inducirá en el subsuelo un campo eléctrico radial (E_r) y vertical (E_z), así como un campo magnético azimutal (H_ϕ). En el aire también existen campos EM debido al flujo de corriente en el cable, sin embargo, para este trabajo no son de importancia.

Dicho lo anterior procederemos a obtener la ecuación diferencial del modelo planteado. Partiremos de las ecuaciones de Maxwell en su forma estándar suponiendo conductividad tensorial y campos cuasi-estáticos, con $\mathbf{E} = E_r \hat{\mathbf{r}} + E_z \hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{H} = H_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$. Entonces, la ley de Ampère 1b se sintetiza como:

$$\nabla \times H_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} = \begin{pmatrix} \sigma_h & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r \hat{\mathbf{r}} \\ E_z \hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix}, \quad (33)$$

donde σ_h es la conductividad horizontal y σ_z es la conductividad vertical. Desarrollando el producto matricial del lado derecho de la igualdad (Ec. 33) se obtiene:

$$\nabla \times H_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} = \sigma_h E_r \hat{\mathbf{r}} + \sigma_z E_z \hat{\mathbf{z}}. \quad (34)$$

Aplicando el rotacional en ambos lados de la ecuación se consigue:

$$\nabla \times \nabla \times H_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} = \nabla \times (\sigma_h E_r \hat{\mathbf{r}} + \sigma_z E_z \hat{\mathbf{z}}). \quad (35)$$

Equivalentemente

$$\nabla \times \nabla \times H_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} = \nabla \times (\sigma_h E_r \hat{\mathbf{r}}) + \nabla \times (\sigma_z E_z \hat{\mathbf{z}}). \quad (36)$$

Utilizando la identidad vectorial $\nabla \times (v\mathbf{A}) = v\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla v$, donde v es un escalar y \mathbf{A} es un vector

$$\nabla \times \nabla \times H_\phi \hat{\phi} = \sigma_h \nabla \times (E_r \hat{r}) - E_r \hat{r} \times \nabla \sigma_h + \sigma_z \nabla \times (E_z \hat{z}) - E_z \hat{z} \times \nabla \sigma_z. \quad (37)$$

Considerando que las conductividades son funciones de la profundidad, se tiene que $\nabla \sigma_h = \frac{\partial \sigma_h}{\partial z} \hat{z}$ y $\nabla \sigma_z = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \hat{z}$, entonces:

$$\nabla \times \nabla \times H_\phi \hat{\phi} = \sigma_h \nabla \times (E_r \hat{r}) - E_r \hat{r} \times \frac{\partial \sigma_h}{\partial z} \hat{z} + \sigma_z \nabla \times (E_z \hat{z}) - E_z \hat{z} \times \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \hat{z}. \quad (38)$$

Desarrollando los rotacionales y los productos cruz del lado derecho de la igualdad (para mayor detalle véase los anexos A.2.-A.5.) surge:

$$\nabla \times \nabla \times H_\phi \hat{\phi} = \sigma_h \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} \hat{\phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \hat{z} \right) + E_r \frac{\partial \sigma_h}{\partial z} \hat{\phi} + \sigma_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \hat{r} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \hat{\phi} \right). \quad (39)$$

Expandiendo el lado izquierdo de la igualdad (anexo A.1.), y tomando únicamente la componente $\hat{\phi}$ en toda la ecuación, se obtiene:

$$-\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} + \frac{H_\phi}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} = \sigma_h \frac{\partial E_r}{\partial z} + E_r \frac{\partial \sigma_h}{\partial z} - \sigma_z \frac{\partial E_z}{\partial r}. \quad (40)$$

Multiplicando toda la expresión por -1 y estableciendo que $\sigma'_h = \frac{\partial \sigma_h}{\partial z}$ se consigue:

$$\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} - \frac{H_\phi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} = \sigma_z \frac{\partial E_z}{\partial r} - \sigma_h \frac{\partial E_r}{\partial z} - \sigma'_h E_r. \quad (41)$$

Por otra parte, utilizando la componente $\hat{\phi}$ en la ley de Faraday (Ec. 193 del anexo C) se demuestra que:

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} = -i\omega\mu H_\phi + \frac{\partial E_z}{\partial r}. \quad (42)$$

Hecha esta salvedad, si sustituimos la expresión 42 en 41 se obtiene:

$$\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} - \frac{H_\phi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} = \sigma_z \frac{\partial E_z}{\partial r} - \sigma_h \left(-i\omega\mu H_\phi + \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) - \sigma'_h E_r. \quad (43)$$

De manera análoga:

$$\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} - \frac{H_\phi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} = \sigma_h i \omega \mu H_\phi + \frac{\partial E_z}{\partial r} (\sigma_z - \sigma_h) - \sigma'_h E_r. \quad (44)$$

Utilizando la identidad 195 del anexo D.1. se puede reemplazar $\frac{\partial E_z}{\partial r}$, es decir:

$$\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} - \frac{H_\phi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} = \sigma_h i \omega \mu H_\phi + \left[\frac{1}{\sigma_z} \left(\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} - \frac{H_\phi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial r} \right) \right] (\sigma_z - \sigma_h) - \sigma'_h E_r. \quad (45)$$

Equivalentemente

$$\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} - \frac{H_\phi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} = \sigma_h i \omega \mu H_\phi + \left(\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} - \frac{H_\phi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial r} \right) \left(1 - \frac{\sigma_h}{\sigma_z} \right) - \sigma'_h E_r. \quad (46)$$

Se infiere que los tres primeros términos a la izquierda de la igualdad se cancelan con los de la derecha en producto con la unidad. No obstante, estos mismos elementos quedan multiplicados por la razón de conductividades con signo negativo, de tal manera pasando a la izquierda de la igualdad con signo positivo

$$\frac{\sigma_h}{\sigma_z} \left(\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} - \frac{H_\phi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} = \sigma_h i \omega \mu H_\phi - \sigma'_h E_r. \quad (47)$$

Finalmente, para tener toda la expresión en términos de H_ϕ bastará con usar la equivalencia 189 del anexo B. De este modo se obtiene

$$\frac{\sigma_h}{\sigma_z} \left(\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} - \frac{H_\phi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} = \sigma_h i \omega \mu H_\phi - \sigma'_h \left(-\frac{1}{\sigma_h} \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right). \quad (48)$$

Análogamente,

$$\frac{\sigma_h}{\sigma_z} \left(\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} - \frac{H_\phi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} = \sigma_h i \omega \mu H_\phi + \frac{\sigma'_h}{\sigma_h} \frac{\partial H_\phi}{\partial z}. \quad (49)$$

Considerando que en geofísica se trabaja en términos de resistividad, será útil multiplicar por σ_h^{-1}

$$\frac{1}{\sigma_z} \left(\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} - \frac{H_\phi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sigma_h} \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} = i\omega\mu H_\phi + \frac{\sigma'_h}{\sigma_h^2} \frac{\partial H_\phi}{\partial z}. \quad (50)$$

Si definimos $\rho_z = \sigma_z^{-1}$, $\rho_h = \sigma_h^{-1}$ y $\sigma'_h = -\rho_h^{-2} \rho'_h$ entonces:

$$\rho_z \left(\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} - \frac{H_\phi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial r} \right) + \rho_h \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} = i\omega\mu H_\phi - \rho'_h \frac{\partial H_\phi}{\partial z}. \quad (51)$$

Para obtener las derivadas de Frechét se necesita perturbar tanto la resistividad media ($\rho = \sqrt{\rho_h \cdot \rho_z}$) como el coeficiente de anisotropía ($f = \sqrt{\rho_z \cdot \rho_h^{-1}}$), por tal razón, es indispensable adecuar la ecuación 51 con las identidades del anexo E (expresiones 198-200); de este modo la relación matemática queda:

$$\rho g f^2 \left(\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} - \frac{H_\phi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial r} \right) + \rho g \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} = i\omega\mu H_\phi - (\rho g)' \frac{\partial H_\phi}{\partial z}. \quad (52)$$

Donde $g^2 = f^{-2}$. Aparentemente, la parametrización de la ecuación 52 es redundante, sin embargo, para desarrollos posteriores permitirá perturbar independientemente a ρ , f y g .

3.2. Ecuación diferencial en el dominio del número de onda

Para resolver la ecuación diferencial 52, primero aplicaremos la transformada de Hankel (Ec. 3) a los elementos que la componen (véase los anexos F.2.-F.4). De este modo pasaremos del dominio radial $H_\phi(r, z)$ al dominio del número de onda $H_\phi(\lambda, z)$:

$$-\rho g f^2 \lambda^2 H_\phi - \rho g H_\phi'' = i\omega\mu H_\phi - (\rho g)' H_\phi'. \quad (53)$$

De manera semejante, la ecuación 53 puede ser reescrita como:

$$\rho g H_\phi'' + (\rho g)' H_\phi' - (\rho g f^2 \lambda^2 + i\omega\mu) H_\phi = 0, \quad (54)$$

donde

$$H''_{\phi}(\lambda, z) = \frac{d^2 H_{\phi}(\lambda, z)}{dz^2} \quad (55a)$$

$$\text{y } H'_{\phi}(\lambda, z) = \frac{dH_{\phi}(\lambda, z)}{dz}. \quad (55b)$$

3.3. Solución para los campos electromagnéticos. Caso medio homogéneo anisotrópico

Puesto que la ecuación 54 describe el comportamiento de $H_{\phi}(\lambda, z)$ para una distribución arbitraria de resistividad $\rho(z)$, no puede ser resuelta analíticamente; por tal razón, supondremos un medio de resistividad media uniforme, es decir, la expresión 54 se reduce a la ecuación 56 debido a que $\rho' = 0$, $g' = 0$, $\rho g = \rho_h = \sigma_h^{-1}$ y $\sigma_h = f\sigma$.

$$H''_{\phi} - (f^2\lambda^2 + i\omega\mu f\sigma) H_{\phi} = 0. \quad (56)$$

Dicho lo anterior, la expresión 56 se resuelve como una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, de este modo la solución es:

$$H_{\phi}(\lambda, z) = H(\lambda, 0) e^{-z(f^2\lambda^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (57)$$

donde $\alpha^2 = i\omega\mu f\sigma$. No obstante, como condición de frontera necesitamos $H_{\phi}(\lambda, z = 0)$, es decir, la transformada de Hankel de primer orden del campo magnético $H_{\phi}(r, z = 0)$ (Ec. 224 anexo G) cuando la corriente en el cable es directa $I(\omega = 0)$, dado que en $z = 0$ no afecta la conductividad de la tierra ni la frecuencia; esto es:

$$H_{\phi}(\lambda, 0) = \int_0^{\infty} r \left(\frac{I}{2\pi r} J_1(\lambda r) dr \right). \quad (58)$$

Equivalentemente,

$$H_{\phi}(\lambda, 0) = \frac{I}{2\pi\lambda}. \quad (59)$$

Al sustituir la expresión 59 en la ecuación 57 se obtiene la solución del campo magnético en el dominio de número de onda:

$$H_{\phi}(\lambda, z) = \frac{I}{2\pi\lambda} e^{-z(f^2\lambda^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (60)$$

Sin embargo, necesitamos conocer $H_{\phi}(r, z)$, por tal motivo aplicaremos la transformada inversa de Hankel (Ec. 4), es decir:

$$H_{\phi}(r, z) = \int_0^{\infty} \lambda \left(\frac{I}{2\pi\lambda} e^{-z(f^2\lambda^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}} \right) J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (61)$$

Simplificando,

$$H_{\phi}(r, z) = \frac{I}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-z(f^2\lambda^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}} J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (62)$$

La solución de la integral se encuentra en el anexo F.1. (Ec. 216). De este modo se obtuvo:

$$H_{\phi}(r, z) = \frac{I}{2\pi} \left[\frac{e^{-z\alpha h}}{r} - \left(\frac{fz}{r} \right) \frac{e^{-R\alpha z}}{R} \right], \quad (63)$$

donde $R = \sqrt{r^2 + f^2 z^2}$. En síntesis, la ecuación 63 describe el comportamiento del campo magnético en función de la distancia radial, la profundidad, la conductividad y la frecuencia angular.

Continuando con el análisis, obtendremos la componente radial del campo eléctrico, para lo cual será útil emplear la identidad 189 del anexo B:

$$E_r = -\frac{1}{\sigma_h} \frac{\partial H_{\phi}}{\partial z}. \quad (64)$$

Análogamente,

$$E_r(r, z) = -\frac{1}{f\sigma} \frac{\partial H_\phi(r, z)}{\partial z}. \quad (65)$$

En consecuencia, para hallar $E_r(r, z)$ solo necesitamos reemplazar la derivada parcial de $H_\phi(r, z)$ con respecto a z (Ec. 196 del anexo D.2.), es decir:

$$E_r = -\frac{1}{f\sigma} \left[\frac{I}{2\pi} \left(\frac{-\alpha_h e^{-z\alpha_h}}{r} + \frac{\alpha_z f^3 z^2 e^{-R\alpha_z}}{rR^2} + \frac{f^3 z^2 e^{-R\alpha_z}}{rR^3} - \frac{f e^{-R\alpha_z}}{rR} \right) \right]. \quad (66)$$

Factorizando y ordenando términos:

$$E_r = \frac{I}{2\pi\sigma r} \left[\frac{e^{-R\alpha_z}}{R} \left(1 - \left(\frac{fz}{R} \right)^2 (1 + \alpha_z R) \right) + \frac{\alpha_h e^{-z\alpha_h}}{f} \right]. \quad (67)$$

Si $f = 1$ y $\sigma = \sigma_z = \sigma_h$ reducimos la expresión 67 al caso del medio isotrópico estudiado por Edwards (1980), es decir:

$$E_r = \frac{I}{2\pi\sigma r} \left[\frac{e^{-R\alpha}}{R} \left(1 - \left(\frac{z}{R} \right)^2 (1 + \alpha R) \right) + \alpha e^{-z\alpha} \right]. \quad (68)$$

En este caso $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ y $\alpha = \sqrt{i\omega\mu\sigma}$.

Por otra parte, considerando que Wait (1981) propuso un modelo similar al de Edwards (1980) pero utilizando un medio anisotrópico, podemos comparar nuestro resultado (Ec. 67) con tan solo evaluar en $z = 0$, o sea:

$$E_r = \frac{I}{2\pi\sigma r} \left[\frac{e^{-r\alpha_z}}{r} + \frac{\alpha_h}{f} \right]. \quad (69)$$

Equivalentemente (véase la ecuación 225 del anexo H.1.),

$$E_r = \frac{I}{2\pi r} \frac{i\omega\mu}{\sqrt{i\omega\mu\sigma_h}} \left[1 + \frac{e^{-r\sqrt{i\omega\mu\sigma_z}}}{r\sqrt{i\omega\mu\sigma_z}} \right]. \quad (70)$$

La expresión 70 es la misma que Wait (1981) obtuvo, excepto por el signo negativo, lo cual puede explicarse porque en un caso se considera que la corriente fluye hacia abajo y en el otro hacia arriba.

En síntesis, la ecuación 66 describe el comportamiento del campo eléctrico radial en función de la distancia a la fuente, la conductividad del subsuelo, la frecuencia, y la corriente. Además, el resultado se correlaciona con lo planteado por Edwards (1980) y Wait (1981).

Para finalizar esta sección, se obtendrá el campo eléctrico vertical $E_z(r, z)$, para ello bastará con sustituir $\frac{\partial H_\phi}{\partial r}$ (ecuación 197 anexo D.3) y $H_\phi(r, z)$ (Ec. 63) en la identidad 190 del anexo B, es decir:

$$E_z = \frac{I}{2\pi\sigma_z} \left[-\frac{e^{-z\alpha_h}}{r^2} + fze^{-R\alpha_z} \left(\frac{\alpha_z}{R^2} + \frac{1}{R^3} + \frac{1}{r^2R} \right) + \frac{e^{-z\alpha_h}}{r^2} - \frac{fze^{-R\alpha_z}}{r^2R} \right]. \quad (71)$$

Equivalentemente:

$$E_z = \frac{Ifze^{-R\alpha_z}}{2\pi\sigma_zR^3} (\alpha_zR + 1). \quad (72)$$

3.4. Solución general para las derivadas de Frechét del campo magnético: caso resistividad media

El campo E_r es el único que en la superficie (Ec. 69) depende de la resistividad, por tal razón, en las derivadas de Frechét emplearemos E_r . Nos obstante, primero debemos relacionar un pequeño cambio en la resistividad $\delta\rho$ con una perturbación en el campo magnético δH_ϕ , es decir, perturbando la ecuación 54 obtendremos:

$$\delta(\rho g H_\phi'') + \delta[(\rho g)' H_\phi'] - \delta[(\rho g f^2 \lambda^2 + i\omega\mu) H_\phi] = 0. \quad (73)$$

Equivalentemente,

$$\rho g \delta H_\phi'' + H_\phi'' \delta(\rho g) + (\rho g)' \delta H_\phi' + H_\phi' \delta(\rho g)' - (\rho g f^2 \lambda^2 + i\omega\mu) \delta H_\phi - f^2 \lambda^2 H_\phi \delta(\rho g) = 0. \quad (74)$$

Ahora bien, si suponemos que el cambio δ en ρg solo afecta a ρ , o sea $\delta g = 0$, entonces:

$$\delta(\rho g) = \rho \delta g + g \delta \rho = g \delta \rho. \quad (75)$$

Sustituyendo tanto la expresión 75 como la identidad de $\delta(\rho g)'$ (Ec. 230 del anexo I) en la ecuación 74 se obtiene:

$$\rho g \delta H_\phi'' + H_\phi'' g \delta \rho + (\rho g)' \delta H_\phi' + H_\phi' (g \delta \rho)' - (\rho g f^2 \lambda^2 + i \omega \mu) \delta H_\phi - f^2 \lambda^2 H_\phi g \delta \rho = 0. \quad (76)$$

Empleando las identidades $(\rho g \delta H_\phi)'$ y $(H_\phi' g \delta \rho)'$ del anexo I (Ec. 231 y 232):

$$(\rho g \delta H_\phi)' + (H_\phi' g \delta \rho)' - (\rho g f^2 \lambda^2 + i \omega \mu) \delta H_\phi - f^2 \lambda^2 H_\phi g \delta \rho = 0. \quad (77)$$

Acomodando los términos sin δH_ϕ y $\delta H_\phi'$ en el lado derecho de la igualdad:

$$(\rho g \delta H_\phi)' - (\rho g f^2 \lambda^2 + i \omega \mu) \delta H_\phi = f^2 \lambda^2 H_\phi g \delta \rho - (H_\phi' g \delta \rho)'. \quad (78)$$

Ahora necesitamos que la parte izquierda sea una integral exacta; para ello es conveniente multiplicar por H_ϕ :

$$(\rho g \delta H_\phi)' H_\phi - (\rho g f^2 \lambda^2 + i \omega \mu) H_\phi \delta H_\phi = f^2 \lambda^2 (g \delta \rho) H_\phi^2 - (H_\phi' g \delta \rho)' H_\phi. \quad (79)$$

Utilizando las identidades de $(\rho g \delta H_\phi)' H_\phi$ y $(g \delta \rho H_\phi)'$ (Ec. 234 y 236 del anexo I):

$$(\rho g \delta H_\phi H_\phi)' - \rho g H_\phi' \delta H_\phi' - (\rho g f^2 \lambda^2 + i \omega \mu) H_\phi \delta H_\phi = - (g \delta \rho H_\phi H_\phi)' + g \delta \rho H_\phi'^2 + (g \delta \rho) f^2 \lambda^2 H_\phi^2. \quad (80)$$

Acomodando términos:

$$(\rho g \delta H_\phi H_\phi)' - \rho g H_\phi' \delta H_\phi' - (\rho g f^2 \lambda^2 + i \omega \mu) H_\phi \delta H_\phi + (g \delta \rho H_\phi H_\phi)' = g \delta \rho H_\phi'^2 + (g \delta \rho) f^2 \lambda^2 H_\phi^2. \quad (81)$$

Aplicando la identidad de $(\rho g f^2 \lambda^2 + i \omega \mu) H_\phi \delta H_\phi$ (Ec. 238 del anexo I.6.):

$$(\rho g \delta H'_\phi H_\phi)' - \rho g H'_\phi \delta H'_\phi - \rho g H''_\phi \delta H_\phi - (\rho g)' H'_\phi \delta H_\phi + (g \delta \rho H'_\phi H_\phi)' = g \delta \rho H_\phi'^2 + (g \delta \rho) f^2 \lambda^2 H_\phi^2. \quad (82)$$

Los términos con signo negativo corresponden a la derivada del producto triple $-((\rho g) H'_\phi \delta H_\phi)'$, por lo tanto:

$$(\rho g \delta H'_\phi H_\phi)' - [(\rho g) H'_\phi \delta H_\phi]' + (g \delta \rho H'_\phi H_\phi)' = g \delta \rho H_\phi'^2 + (g \delta \rho) f^2 \lambda^2 H_\phi^2. \quad (83)$$

Factorizando $\delta \rho$ en la parte derecha de la igualdad:

$$(\rho g \delta H'_\phi H_\phi)' - [(\rho g) H'_\phi \delta H_\phi]' + (g \delta \rho H'_\phi H_\phi)' = [g H_\phi'^2 + g f^2 \lambda^2 H_\phi^2] \delta \rho. \quad (84)$$

Llegados a este punto, podemos integrar respecto a la profundidad (dz), es decir, desde la superficie de la tierra (cero) hasta una profundidad infinita:

$$(\rho g \delta H'_\phi H_\phi) \Big|_0^\infty - (\rho g H'_\phi \delta H_\phi) \Big|_0^\infty + (g \delta \rho H'_\phi H_\phi) \Big|_0^\infty = \int_0^\infty [g H_\phi'^2 + g f^2 \lambda^2 H_\phi^2] \delta \rho dz. \quad (85)$$

En los tres casos la evaluación en infinito es cero, porque el campo magnético y su derivada son cero cuando la profundidad tiende al infinito. Por otro lado, la evaluación en $z = 0$ de $\rho g H'_\phi \delta H_\phi$ es igual a cero, debido a que $\delta H_\phi(\lambda, z = 0) = 0$ ya que $H_\phi(\lambda, z = 0)$ no depende de la resistividad (Ec. 59). Asimismo, la valoración en $z = 0$ de $g \delta \rho H'_\phi H_\phi$ es equivalente a cero, porque podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\delta \rho(0) = 0$. Esta última restricción implica que no podemos saber el valor de la derivada en $z = 0$; sin embargo, la derivada puede ser evaluada tan cerca de cero como se quiera y suponer que es continua en $z = 0$; además, se sabe que un punto no contribuye a la integral al menos que el cambio en $z = 0$ sea infinito, lo cual se descarta puesto que tanto $\rho(z)$ como $\delta \rho(z)$ son funciones continuas. Por lo tanto, la expresión 85 se reduce a

$$-\rho(0)g(0)\delta H'_\phi(\lambda, 0)H_\phi(\lambda, 0) = \int_0^\infty [g H_\phi'^2 + g f^2 \lambda^2 H_\phi^2] \delta \rho dz. \quad (86)$$

Despejando $\delta H'_\phi(\lambda, 0)$

$$\delta H'_\phi(\lambda, 0) = -\frac{1}{\rho(0)g(0)H_\phi(\lambda, 0)} \int_0^\infty \left[gH_\phi'^2 + gf^2\lambda^2 H_\phi^2 \right] \delta\rho dz. \quad (87)$$

Esta última expresión se empleará en desarrollos posteriores para encontrar las derivadas del campo eléctrico (E_r).

3.5. Solución general para las derivadas de Frechét del campo magnético: caso anisotropía

Asimismo se puede perturbar tanto el coeficiente de anisotropía (f) como su inverso (g). Se aprecia que ρ y g pueden intercambiarse de lugar en muchos de los términos, Esto significa que podemos considerar perturbaciones δg y utilizar muchas de las factorizaciones que ya se realizaron en la sección 3.4. con tan solo intercambiar g por ρ . Únicamente hay que realizar adecuaciones en el segundo término (Ec. 87) del integrando debido a la simetría.

El factor $\delta\rho$ del integrando (Ec. 87) se puede intercambiar por δg sin ningún inconveniente. El cambio también se puede hacer en el primer sumando, es decir, reemplazando $g\delta\rho$ por $\rho\delta g$. Ahora bien, la transformación no se puede aplicar en el segundo sumando, porque $f = g^{-1}$ y supusimos que no había cambio en g ($\delta g = 0$) y por ende tampoco en f . Si ahora suponemos que no hay cambio en ρ pero sí en g , también habrá que considerar la perturbación en f . Es decir, debemos perturbar $g\rho f^2 = \rho g^{-1}$ considerando el cambio en g :

$$\rho\delta(g^{-1}) = -\rho g^{-2}\delta g = -\rho f^2\delta g. \quad (88)$$

Todas estas observaciones junto con la expresión 88, indican que la nueva integral debe ser:

$$\delta H'_\phi(\lambda, 0) = -\frac{1}{\rho(0)g(0)H_\phi(\lambda, 0)} \int_0^\infty \left[\rho H_\phi'^2 - \rho f^2 \lambda^2 H_\phi^2 \right] \delta g dz. \quad (89)$$

Por otra parte, si consideramos cambios relativos en la resistividad media y en el coeficiente de anisotropía, tanto la ecuación 87 como la 89 se modifican:

$$\delta H'_\phi(\lambda, 0) = -\frac{1}{\rho(0)g(0)H_\phi(\lambda, 0)} \int_0^\infty \left[g\rho H_\phi'^2 + g\rho f^2 \lambda^2 H_\phi^2 \right] \frac{\delta\rho}{\rho} dz, \quad (90)$$

y

$$\delta H'_\phi(\lambda, 0) = -\frac{1}{\rho(0)g(0)H_\phi(\lambda, 0)} \int_0^\infty \left[g\rho H_\phi'^2 - g\rho f^2 \lambda^2 H_\phi^2 \right] \frac{\delta g}{g} dz. \quad (91)$$

Cabe mencionar que las ecuaciones 90 y 91 se utilizarán en desarrollos posteriores para encontrar las derivadas de Fréchet del campo eléctrico (E_r).

3.6. Solución general para las derivadas de Fréchet del campo eléctrico: caso resistividad media

Como anteriormente se mencionó, nos interesan las derivadas de Fréchet para el campo eléctrico E_r . Para ello conviene aplicar la transformada de Hankel a la ecuación 65, de este modo se consigue:

$$E_r(\lambda, z) = -\frac{1}{f\sigma} H'_\phi(\lambda, z). \quad (92)$$

Diferenciando la ecuación 92 se alcanza:

$$\delta E_r(\lambda, z) = -\frac{1}{f\sigma} \delta H'_\phi(\lambda, z) + \frac{\delta\sigma}{f\sigma^2} H'_\phi(\lambda, z). \quad (93)$$

Análogo a la evaluación de la ecuación 85, supondremos que $\delta\sigma(z=0) = 0$, por lo tanto:

$$\delta E_r(\lambda, 0) = -\frac{1}{f(0)\sigma(0)} \delta H'_\phi(\lambda, 0). \quad (94)$$

Sustituyendo $\delta H'_\phi(\lambda, 0)$ (Ec. 90):

$$\delta E_r(\lambda, 0) = -\frac{1}{f(0)\sigma(0)} \left[-\frac{1}{\rho(0)g(0)H_\phi(\lambda, 0)} \int_0^\infty \left[g\rho H_\phi'^2 + g\rho f^2 \lambda^2 H_\phi^2 \right] \frac{\delta\rho}{\rho} dz \right]. \quad (95)$$

Simplificando:

$$\delta E_r(\lambda, 0) = \frac{1}{H_\phi(\lambda, 0)} \int_0^\infty \left[g\rho H_\phi'^2 + g\rho f^2 \lambda^2 H_\phi^2 \right] \frac{\delta\rho}{\rho} dz. \quad (96)$$

Sustituyendo $H_\phi(\lambda, 0)$ (Ec. 59):

$$\delta E_r(\lambda, 0) = \frac{2\pi\lambda}{I} \int_0^\infty \left[g\rho H_\phi'^2 + g\rho f^2 \lambda^2 H_\phi^2 \right] \frac{\delta\rho}{\rho} dz. \quad (97)$$

Dado que necesitamos $\delta E_r(r, 0)$ aplicaremos la transformada inversa de Hankel, es decir:

$$\delta E_r(r, 0) = \int_0^\infty \lambda \left[\frac{2\pi\lambda}{I} \int_0^\infty \left[g\rho H_\phi'^2 + g\rho f^2 \lambda^2 H_\phi^2 \right] \frac{\delta\rho}{\rho} dz \right] J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (98)$$

Acomodando factores y simplificando:

$$\delta E_r(r, 0) = \int_0^\infty \left[\frac{2\pi}{I} \int_0^\infty \left(\lambda^2 \left(g\rho H_\phi'^2 + g\rho f^2 \lambda^2 H_\phi^2 \right) \right) J_1(\lambda r) d\lambda \right] \frac{\delta\rho(z)}{\rho} dz. \quad (99)$$

En esta última expresión, el integrando en corchetes corresponde a las derivadas de Fréchet G_ρ . Estas vienen dadas como

$$G_\rho(r, z) = \frac{2\pi}{I} \int_0^\infty \lambda^2 \left(g\rho H_\phi'^2 + g\rho f^2 \lambda^2 H_\phi^2 \right) J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (100)$$

3.7. Solución general para las derivadas de Fréchet del campo eléctrico: caso anisotropía

En cuanto al caso anisotrópico, si sustituimos la expresión 91 en la ecuación 94 obtendremos las derivadas de Fréchet

$$\delta E_r(\lambda, 0) = -\frac{1}{f(0)\sigma(0)} \left[-\frac{1}{\rho(0)g(0)H_\phi(\lambda, 0)} \int_0^\infty \left[g\rho H_\phi'^2 - g\rho f^2 \lambda^2 H_\phi^2 \right] \frac{\delta g}{g} dz \right]. \quad (101)$$

Equivalentemente,

$$\delta E_r(\lambda, 0) = \frac{1}{H_\phi(\lambda, 0)} \int_0^\infty \left[g\rho H_\phi'^2 - g\rho f^2 \lambda^2 H_\phi^2 \right] \frac{\delta g}{g} dz. \quad (102)$$

Introduciendo $H_\phi(\lambda, 0)$ (Ec. 59)

$$\delta E_r(\lambda, 0) = \frac{2\pi\lambda}{I} \int_0^\infty \left[g\rho H_\phi'^2 - g\rho f^2 \lambda^2 H_\phi^2 \right] \frac{\delta g}{g} dz. \quad (103)$$

Aplicando la transformada inversa de Hankel

$$\delta E_r(r, 0) = \int_0^\infty \lambda \left[\frac{2\pi\lambda}{I} \int_0^\infty \left[g\rho H_\phi'^2 - g\rho f^2 \lambda^2 H_\phi^2 \right] \frac{\delta g}{g} dz \right] J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (104)$$

Acomodando términos y simplificando

$$\delta E_r(r, 0) = \int_0^\infty \left[\frac{2\pi}{I} \int_0^\infty \lambda^2 \left(g\rho H_\phi'^2 - g\rho f^2 \lambda^2 H_\phi^2 \right) J_1(\lambda r) d\lambda \right] \frac{\delta g(z)}{g} dz. \quad (105)$$

En esta última ecuación, el integrando en corchetes corresponde a las derivadas de Fréchet $G_g(r, z)$. La expresión de la derivada se reduce a

$$G_g(r, z) = \frac{2\pi}{I} \int_0^\infty \lambda^2 \left(g\rho H_\phi'^2 - g\rho f^2 \lambda^2 H_\phi^2 \right) J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (106)$$

3.8. Solución analítica para las derivadas de Fréchet del campo eléctrico: caso resistividad media uniforme

La ecuación integral 100 es la representación general o algebraica de las derivadas de Fréchet para el caso de resistividad como función arbitraria de la profundidad $\rho(z)$. No obstante, para obtener una solución analítica, supondremos un medio homogéneo anisotrópico de resistividad media ρ constante, o sea que la perturbación arbitraria $\delta\rho(z)$ (Ec. 99) permanecerá alrededor de ρ constante.

Ahora bien, para evaluar analíticamente la integral (Ec. 100) necesitamos sustituir las expresiones de

$H_\phi(\lambda, z)$ (Ec. 60) y $H'_\phi(\lambda, z)$. Recordando que

$$H_\phi(\lambda, z) = \frac{I}{2\pi\lambda} e^{-\theta z}, \quad (107)$$

con $\theta = \sqrt{f^2\lambda^2 + \alpha^2}$ y $\alpha = \sqrt{i\omega\mu f\sigma}$. Por otra parte, derivando 107 con respecto a z obtendremos:

$$H'_\phi(\lambda, z) = -\frac{I\theta}{2\pi\lambda} e^{-\theta z}. \quad (108)$$

Sustituyendo tanto la ecuación 107 como 108 en la expresión 100

$$G_\rho(r, z) = \frac{2\pi}{I} \int_0^\infty \lambda^2 \left[g\rho \left(-\frac{I\theta}{2\pi\lambda} e^{-\theta z} \right)^2 + g\rho f^2 \lambda^2 \left(\frac{I}{2\pi\lambda} e^{-\theta z} \right)^2 \right] J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (109)$$

Simplificando términos,

$$G_\rho(r, z) = \frac{I\rho}{2\pi f} \int_0^\infty (\theta^2 + f^2\lambda^2) e^{-2\theta z} J_1(\lambda, r) d\lambda. \quad (110)$$

Ahora queda evaluar la integral, para ello es conveniente considerar que

$$\theta^2 + f^2\lambda^2 = f^2\lambda^2 + \alpha^2 + f^2\lambda^2 = 2f^2\lambda^2 + \alpha^2 = 2f^2\lambda^2 + 2\alpha^2 - \alpha^2 = 2\theta^2 - \alpha^2. \quad (111)$$

Sustituyendo la identidad 111 en la ecuación 110, y separando la diferencia en dos integrales conseguimos:

$$G_\rho(r, z) = \frac{I\rho}{2\pi f} \left[2 \int_0^\infty \theta^2 e^{-2\theta z} J_1(\lambda r) d\lambda - \alpha^2 \int_0^\infty e^{-2\theta z} J_1(\lambda r) d\lambda \right]. \quad (112)$$

De manera semejante

$$G_\rho(r, z) = \frac{I\rho}{2\pi f} [2A_1 - \alpha^2 A_2], \quad (113)$$

donde

$$A_1 = \int_0^\infty \theta^2 e^{-2z\theta} J_1(\lambda r) d\lambda \quad (114)$$

y

$$A_2 = \int_0^\infty e^{-2z\theta} J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (115)$$

La primera integral (Ec. 114) es la segunda derivada de la expresión 115 con respecto a z , excepto por una constante (1/4). Entonces, bastará con evaluar A_2 y luego derivar dos veces el resultado para conseguir la integral completa. Cabe destacar que la única diferencia entre la integral A_2 y la que se evaluó para el campo magnético (Ec. 62) es que ahora en lugar de z se trata de $2z$, por lo tanto, podemos sustituir directamente

$$A_2 = \frac{e^{-2z\alpha_h}}{r} - \frac{2fze^{-\alpha_z R_2}}{rR_2}, \quad (116)$$

donde $R_2 = \sqrt{r^2 + 4f^2 z^2}$, $\alpha_h = \sqrt{i\omega\mu\sigma_h}$ y $\alpha_z = \sqrt{i\omega\mu\sigma_z}$. Entonces A_1 queda

$$A_1 = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{e^{-2z\alpha_h}}{r} - \frac{2fze^{-\alpha_z R_2}}{rR_2} \right]. \quad (117)$$

Equivalentemente (consulte el anexo J),

$$A_1 = \frac{1}{4} \left[\frac{4\alpha_h^2 e^{-2z\alpha_h}}{r} - \frac{2f}{r} e^{-\alpha_z R_2} \left(\frac{48f^4 z^3}{R_2^5} + \frac{48f^4 \alpha_z z^3}{R_2^4} + \frac{16f^4 \alpha_z^2 z^3}{R_2^3} - \frac{12f^2 z}{R_2^3} - \frac{12f^2 \alpha_z z}{R_2^2} \right) \right] \quad (118)$$

o sencillamente

$$A_1 = \frac{\alpha_h^2 e^{-2z\alpha_h}}{r} + \frac{fze^{-\alpha_z R_2}}{rR_2} \left(\frac{6f^2 \alpha_z}{R_2} + \frac{6f^2}{R_2^2} - \frac{8f^4 \alpha_z^2 z^2}{R_2^2} - \frac{24f^4 \alpha_z z^2}{R_2^3} - \frac{24f^4 z^2}{R_2^4} \right). \quad (119)$$

Finalmente, para obtener las derivadas de Fréchet del campo eléctrico, bastará con sustituir la ecuación

116 y 119 en la expresión 113:

$$G_{\rho}(r, z) = \frac{\rho I}{2\pi} \left[\frac{2ze^{-\alpha_z R_2}}{rR_2} \left(\frac{6f^2}{R_2^2} - \frac{24f^4 z^2}{R_2^4} \right) + \frac{2ze^{-\alpha_z R_2}}{rR_2} \left(\alpha_z^2 + \frac{6\alpha_z f^2}{R_2} - \frac{8\alpha_z^2 f^4 z^2}{R_2^2} - \frac{24\alpha_z f^4 z^2}{R_2^3} \right) + \frac{\alpha_h^2 e^{-2\alpha_h z}}{fr} \right]. \quad (120)$$

En esta última ecuación se reconocen términos correspondientes a diferentes aspectos físicos. El componente en azul pertenece al método magnetotelúrico, puesto que depende de la frecuencia y la conductividad horizontal (σ_h). En rojo serían los elementos de corriente directa, debido a que solo dependen de la geometría cuando la frecuencia es cero ($\omega = 0$). Por último, los términos en verde engloban a los métodos de fuente controlada, ya que interviene tanto la frecuencia como la distancia a la fuente.

3.9. Solución analítica para las derivadas de Frechét del campo eléctrico: caso anisotropía uniforme

Análogamente, para conseguir la solución analítica de las derivadas de Frechét del caso de anisotropía se supondrá que g es constante. Hecha esta salvedad, sustuiremos las ecuaciones 107 y 108 en la expresión 106, es decir:

$$G_g(r, z) = \frac{2\pi}{I} \int_0^{\infty} \lambda^2 \left(g\rho \left(-\frac{I\theta}{2\pi\lambda} e^{-\theta z} \right)^2 - g\rho f^2 \lambda^2 \left(\frac{I}{2\pi\lambda} e^{-\theta z} \right)^2 \right) J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (121)$$

Simplificando:

$$G_g(r, z) = \frac{\rho I}{2\pi f} \int_0^{\infty} (\theta^2 - f^2 \lambda^2) e^{-2\theta z} J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (122)$$

Ahora necesitamos evaluar la integral, para ello es conveniente considerar

$$\theta^2 - f^2 \lambda^2 = f^2 \lambda^2 + \alpha^2 - f^2 \lambda^2 = \alpha^2 = i\omega\mu f\sigma = i\omega\mu\sigma_h = \alpha_h^2. \quad (123)$$

Utilizando la identidad 123 en la expresión 122 se consigue:

$$G_g(r, z) = \frac{\rho I \alpha_h^2}{2\pi f} \int_0^\infty e^{-2z\theta} J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (124)$$

La integral en la ecuación 124 se evaluó para el caso de resistividad media uniforme (Ec. 115). Entonces, resulta que:

$$G_g(r, z) = \frac{\rho I \alpha_h^2}{2\pi f} \left(\frac{e^{-2z\alpha_h}}{r} - \frac{2fze^{-\alpha_z R_2}}{rR_2} \right). \quad (125)$$

Lo que es igual a

$$G_g(r, z) = \frac{i\omega\mu I}{2\pi} \left(\frac{e^{-2z\alpha_h}}{r} - \frac{2fze^{-\alpha_z R_2}}{rR_2} \right). \quad (126)$$

La ecuación 126 aplica para valores arbitrarios de conductividad y anisotropía, aunque uniformes con la profundidad. Cabe mencionar que a frecuencia cero la expresión es cero, es decir que con corriente directa no se puede vincular $\delta g(z)$ con $\delta E_r(r, z = 0)$; físicamente el campo sigue siendo radial como en el caso isotrópico, por lo que no se puede distinguir entre un medio isotrópico o anisotrópico.

3.10. Casos particulares

3.10.1. Método de Corriente Directa (DC)

Si en la ecuación del campo eléctrico radial (Ec. 67) operamos con una frecuencia $\omega = 0$, obtendremos:

$$E_r(r, z) = \frac{I}{2\pi\sigma r} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R} \left(\frac{fz}{R} \right)^2 \right). \quad (127)$$

Equivalentemente,

$$E_r(r, z) = \frac{I}{2\pi\sigma r} \left(\frac{r^2}{R^3} \right). \quad (128)$$

Por otra parte, en $z = 0$ la expresión 128 se reduce a la ecuación clásica del campo eléctrico (Ec. 129) para el método de corriente directa en geofísica (p. ej. ecuación 8.5 en Kearey et al. (2002a)).

$$E_r(r, 0) = \frac{I}{2\pi\sigma r^2}. \quad (129)$$

Análogamente, si consideramos $\omega = 0$ en la expresión de las derivadas de Fréchet del campo eléctrico (Ec. 120), conseguiremos:

$$G_\rho(r, z) = \frac{\rho I}{\pi} \left[\frac{z}{rR_2} \left(\frac{6f^2}{R_2^2} - \frac{24f^4 z^2}{R_2^4} \right) \right]. \quad (130)$$

Lo que es igual a

$$G_\rho(r, z) = \frac{\rho I}{\pi} \left(\frac{6zf^2 r}{R_2^5} \right). \quad (131)$$

Esta última expresión demuestra que con corriente directa se puede examinar el efecto anisotrópico, debido a que depende de f . Por otra parte, podemos comparar el resultado con lo propuesto por Gómez-Treviño y Esparza (2014) con tan solo derivar la ecuación 256 respecto de z (véase el anexo K):

$$\frac{\partial W(r, z)}{\partial r} = \frac{6Izr}{\pi (r^2 + 4z^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad (132)$$

Cabe destacar que la ecuación 132 fue obtenida para un medio homogéneo isotrópico ($f = 1$). Además, no depende de la resistividad porque no considera cambios relativos, a diferencia de la expresión 131.

3.10.2. Método Magnetotelúrico (MT)

Para $\alpha_z R$ muy grandes, la ecuación 67 se reduce a

$$E_r(r, z) = \frac{I}{2\pi\sigma r} \left(\frac{\alpha_h e^{-z\alpha_h}}{f} \right). \quad (133)$$

Considerando que $f\sigma = \sigma_h$

$$E_r(r, z) = \frac{I\alpha_h e^{-z\alpha_h}}{2\pi r\sigma_h}. \quad (134)$$

En la ecuación 134 solo interviene la conductividad horizontal, es decir, las líneas del campo son completamente horizontales, tal y como se esperaría para el método magnetotelúrico.

Ahora veamos las derivadas de Fréchet (Ec. 120) con $\alpha_z R_2$ muy grandes

$$G_\rho(r, z) = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{\alpha_h^2 e^{-2\alpha_h z}}{fr} \right). \quad (135)$$

Equivalentemente

$$G_\rho(r, z) = \frac{i\omega\mu I e^{-2\alpha_h z}}{2\pi r}. \quad (136)$$

Este resultado puede compararse cualitativamente con lo obtenido por Oldenburg (1979) para el método MT (anexo L). Cabe mencionar que el MT se fundamenta en la propagación de una onda plana, por tal razón, la expresión 137 es para una perturbación $\delta E(z=0)$ relativa a $E'(z=0)$ (Ec. 265 del anexo L).

$$G_\rho = e^{-2z\sqrt{i\omega\mu\sigma}}. \quad (137)$$

Esta última ecuación no depende de la corriente ni de la distancia a la fuente, ya que el campo eléctrico en MT es onda plana. Sin embargo, el exponencial es análogo al de la ecuación 136, de esta forma sabemos que se trata del mismo tipo de curva pero con distinta amplitud; donde σ en 137 es una conductividad homogénea isotrópica. Cabe señalar que la ecuación 136 puede reducirse a 137 normalizando con el campo magnético y considerando conductividad homogénea isotrópica.

3.11. Definiciones de resistividad aparente

En práctica es de interés obtener la resistividad del subsuelo midiendo alguna magnitud física en la superficie terrestre. Para este caso, mediante el campo eléctrico radial se pueden conseguir dos expresiones de resistividad para un medio homogéneo.

Si consideramos que la conductividad promedio en 129 es homogénea isotrópica, se puede alcanzar:

$$\sigma_a(r) = \frac{I}{2\pi r^2 E_r(r, z = 0)}, \quad (138)$$

donde $\sigma_a(r)$ denota la conductividad aparente que depende de la distancia a la fuente. Ahora bien, si consideramos que $\sigma_a = \rho_a^{-1}$ obtendremos

$$\rho_{aDC}(r) = \frac{2\pi r^2 E_r(r, z = 0)}{I}. \quad (139)$$

Cabe destacar que la expresión 139 depende del campo eléctrico de frecuencia cero (corriente directa DC), no obstante, se puede analizar el comportamiento de la resistividad aparente para frecuencias diferentes de cero. Además, esta expresión puede encontrarse ampliamente en la literatura, por ejemplo, despejando la ecuación 8.5 en Kearey et al. (2002a). Por otra parte, considerando que 139 sea una función compleja, podemos descomponer en parte real e imaginaria utilizando $E_r = |E_r|e^{i\phi}$, o sea

$$Re(\rho_{aDC}) = \frac{2\pi r^2 |E_r(r, z = 0)| \cos(\phi)}{I} \quad (140)$$

e

$$Im(\rho_{aDC}) = \frac{2\pi r^2 |E_r(r, z = 0)| \sen(\phi)}{I}. \quad (141)$$

Donde ϕ es la fase del campo eléctrico en la superficie terrestre, denotada por

$$\phi = \arctan \left(\frac{Im(E_r(r, z = 0))}{Re(E_r(r, z = 0))} \right). \quad (142)$$

En segunda instancia, la ecuación 133 puede ser evaluada en $z = 0$,

$$E_r(r, z = 0) = \frac{I\alpha_h}{2\pi r\sigma f}. \quad (143)$$

Recordando que $\alpha_h = \sqrt{i\omega\mu\sigma_h}$. Al igual que el caso anterior, para despejar σ supondremos homogeneidad isotrópica en el medio

$$\sigma_a(r) = \frac{i\omega\mu I^2}{4\pi^2 r^2 E_r^2(r, z = 0)}. \quad (144)$$

Pasando a resistividad aparente:

$$\rho_{a_{MT}}(r) = \frac{-i4\pi^2 r^2 E_r^2(r, z = 0)}{\omega\mu I^2}. \quad (145)$$

En esta última ecuación el subíndice MT se debe a que solo funcionará a grandes distancias r de la incidencia del rayo, no obstante, mientras que en el método magnetoteléurico la fuente proviene de campos externos que se propagan entre la superficie terrestre y la ionósfera, en este caso el rayo tiene conexión galvánica con la tierra. Ahora bien, las componentes de la función 145 son

$$Re(\rho_{a_{MT}}) = \frac{4\pi^2 r^2 |E_r(r, z = 0)|^2 \text{sen}(2\phi)}{\omega\mu I^2} \quad (146)$$

e

$$Im(\rho_{a_{MT}}) = \frac{-4\pi^2 r^2 |E_r(r, z = 0)|^2 \text{cos}(2\phi)}{\omega\mu I^2}. \quad (147)$$

De igual modo, ϕ se define por la ecuación 142. Es importante destacar que por primera vez las expresiones 144-147 son reportadas, además, estas ecuaciones son funciones de respuesta que pueden usarse para una metodología que mida el campo E_r a distintas distancias r de la fuente y para diferentes frecuencias.

3.12. Derivadas de Frechét para la resistividad aparente

Otro aspecto relevante por examinar, es la derivada de Frechét para cada definición de resistividad aparente. Para alcanzar dichas expresiones es necesario relacionar una pequeña perturbación δE_r con un $\delta \rho_a$. Entonces, de la ecuación 139 obtenemos:

$$\delta \rho_{a_{DC}} = \frac{2\pi r^2}{I} \delta E_r. \quad (148)$$

Si $E_r = |E_r|e^{i\phi}$ entonces $\delta E_r = i|E_r|e^{i\phi}\delta\phi + e^{i\phi}\delta|E_r|$, de este modo la ecuación 148 se reestructura en

$$\delta \rho_{a_{DC}} = \frac{2\pi r^2}{I} \left(i|E_r|e^{i\phi}\delta\phi + e^{i\phi}\delta|E_r| \right). \quad (149)$$

Multiplicando el lado derecho de la igualdad por $|E_r|e^{i\phi}/|E_r|e^{i\phi}$, se obtiene:

$$\delta \rho_{a_{DC}} = \frac{2\pi r^2|E_r|e^{i\phi}}{I} \left(i\delta\phi + \frac{\delta|E_r|}{|E_r|} \right). \quad (150)$$

Equivalentemente

$$\delta \rho_{a_{DC}} = \frac{2\pi r^2|E_r|(\cos(\phi) + i\text{sen}(\phi))}{I} \left(i\delta\phi + \frac{\delta|E_r|}{|E_r|} \right). \quad (151)$$

Desarrollando el producto de binomios y acomodando términos

$$\delta \rho_{a_{DC}} = \frac{2\pi r^2|E_r|}{I} \left[\left(\cos(\phi) \frac{\delta|E_r|}{|E_r|} - \text{sen}(\phi)\delta\phi \right) + i \left(\cos(\phi)\delta\phi + \text{sen}(\phi) \frac{\delta|E_r|}{|E_r|} \right) \right]. \quad (152)$$

Donde (véase el anexo I.7.)

$$\frac{\delta|E_r|}{|E_r|} = \int_0^\infty \frac{|G_\rho(r, z)|}{|E_r(r, z=0)|} \cos(\theta - \phi) \frac{\delta\rho}{\rho} dz, \quad (153a)$$

$$\text{y } \delta\phi = \int_0^\infty \frac{|G_\rho(r, z)|}{|E_r(r, z=0)|} \text{sen}(\theta - \phi) \frac{\delta\rho}{\rho} dz. \quad (153b)$$

Para este caso, θ representa la fase de las derivadas de Frechét del campo eléctrico G_ρ (Ec. 120), es

decir

$$\theta = \arctan \left(\frac{\text{Im}(G_\rho)}{\text{Re}(G_\rho)} \right). \quad (154)$$

Entonces, de acuerdo con 153 algebraicamente $\delta\rho_{a_{DC}}$ (Ec. 152) se sintetiza:

$$\delta\rho_{a_{DC}} = \int_0^\infty G_{\rho_{a_{DC}}} \frac{\delta\rho}{\rho} dz, \quad (155)$$

en el cual

$$G_{\rho_{a_{DC}}} = \frac{2\pi r^2 |G_\rho(r, z)| e^{i\theta}}{I}. \quad (156)$$

Es importante señalar que la ecuación 156 corresponde a las derivadas de Fréchet para un $\delta\rho_{a_{DC}}$ cuando la corriente es directa. Por otra parte, si tomamos la parte real e imaginaria de la expresión (Ec. 156) obtendremos

$$\text{Re}(G_{\rho_{a_{DC}}}) = \frac{2\pi r^2 |G_\rho(r, z)| \cos(\theta)}{I} \quad (157)$$

e

$$\text{Im}(G_{\rho_{a_{DC}}}) = \frac{2\pi r^2 |G_\rho(r, z)| \text{sen}(\theta)}{I}. \quad (158)$$

La función 157 es la derivada de Fréchet correspondiente a $\text{Re}(\delta\rho_{a_{DC}})$; así como la expresión 158 pertenece a $\text{Im}(\delta\rho_{a_{DC}})$.

Para concluir esta sección, procederemos a obtener las derivadas de Fréchet para la resistividad aparente del caso MT (Ec. 145). Análogo al escenario anterior, necesitamos relacionar la perturbación del campo eléctrico δE_r a un cambio en la resistividad aparente $\delta\rho_{a_{MT}}$, es decir

$$\delta\rho_{a_{MT}}(r) = \frac{-i4\pi^2 r^2 \delta E_r^2(r, z=0)}{\omega\mu I^2}. \quad (159)$$

Si $\delta E_r^2 = 2E_r \delta E_r$ entonces

$$\delta \rho_{a_{MT}}(r) = \frac{-i8\pi^2 r^2 E_r \delta E_r(r, z=0)}{\omega \mu I^2}. \quad (160)$$

Multiplicando el lado derecho de la igualdad por E_r/E_r , y teniendo en cuenta que tanto $E_r^2 = |E_r|^2 e^{i2\phi}$ como $\delta E_r = i|E_r|e^{i\phi}\delta\phi + e^{i\phi}\delta|E_r|$

$$\delta \rho_{a_{MT}}(r) = \frac{-i8\pi^2 r^2 |E_r|^2 (\text{sen}(2\phi) - i\text{cos}(2\phi))}{\omega \mu I^2} \left(i\delta\phi + \frac{\delta|E_r|}{|E_r|} \right), \quad (161)$$

Desarrollando el producto entre binomios y acomodando términos se alcanza

$$\delta \rho_{a_{MT}}(r) = \frac{8\pi^2 r^2 |E_r|^2}{\omega \mu I^2} \left[\left(\text{sen}(2\phi)\delta\phi - \text{cos}(2\phi) \frac{\delta|E_r|}{|E_r|} \right) - i \left(\text{sen}(2\phi) \frac{\delta|E_r|}{|E_r|} + \text{cos}(2\phi)\delta\phi \right) \right]. \quad (162)$$

De igual manera, $\frac{\delta|E_r|}{|E_r|}$ y $\delta\phi$ son definidos por las expresiones en 153. Teniendo en mente esto, algebraicamente $\delta \rho_{a_{MT}}$ (Ec. 162) se sintetiza como

$$\delta \rho_{a_{MT}} = \int_0^\infty G_{\rho_{a_{MT}}} \frac{\delta \rho}{\rho} dz, \quad (163)$$

donde

$$G_{\rho_{a_{MT}}} = \frac{-i8\pi^2 r^2 |E_r(r, z=0)| |G_\rho(r, z)| e^{i(\phi+\theta)}}{\omega \mu I^2}. \quad (164)$$

Cabe destacar que esta última ecuación corresponde a las derivadas de Fréchet de la resistividad aparente ($\delta \rho_{a_{MT}}$) para el caso MT. Análogamente, tomando la parte real e imaginaria:

$$\text{Re}(G_{\rho_{a_{MT}}}) = \frac{8\pi^2 r^2 |E_r(r, z=0)| |G_\rho(r, z)| \text{sen}(\phi + \theta)}{\omega \mu I^2} \quad (165)$$

e

$$Im(G_{\rho_{a_{MT}}}) = \frac{-8\pi^2 r^2 |E_r(r, z = 0)| |G_\rho(r, z)| \cos(\phi + \theta)}{\omega \mu I^2}. \quad (166)$$

La función 165 es la derivada de Fréchet correspondiente a $Re(\delta\rho_{a_{MT}})$; así como la expresión 166 pertenece a $Im(\delta\rho_{a_{MT}})$.

3.13. Modelo de dos capas

Con el propósito de examinar el comportamiento de la resistividad aparente para una tierra estratificada, plantearemos la solución del campo eléctrico radial en la superficie terrestre $E_r(r, z = 0)$ tomando en cuenta el efecto de dos capas homogéneas anisotrópicas, tal y como se ilustra en la figura 15. En cada estrato se cumple la ecuación diferencial en el dominio del número de onda (Ec. 56), esto indica que debemos proponer un sistema de ecuaciones que involucre tanto campo magnético como eléctrico, respetando las condiciones de frontera del problema, es decir, que el campo magnético y eléctrico tangenciales son continuos en la interfase.

En el primer estrato (color azul Fig. 15) se cumple

$$H_1'' - (f_1^2 \lambda^2 + \alpha_1^2) H_1 = 0, \quad (167)$$

donde $\alpha_1 = \sqrt{i\omega\mu f_1 \sigma_1}$. La expresión 167 se resuelve como una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, de este modo la solución es

$$H_1(\lambda, z) = C_1 e^{zm_1} + C_2 e^{-zm_1}, \quad (168)$$

donde C_1 y C_2 son constantes por determinar, y $m_1 = \sqrt{f_1^2 \lambda^2 + \alpha_1^2}$. Cabe mencionar que la solución 168 solo es válida para $z \leq h$ y $z \geq 0$, véase la figura 15. Por otra parte, aplicando la ley de Ampère (Ec. 92) encontraremos el campo eléctrico

$$E_{r1}(\lambda, z) = \frac{m_1}{f_1 \sigma_1} (C_2 e^{-zm_1} - C_1 e^{zm_1}). \quad (169)$$

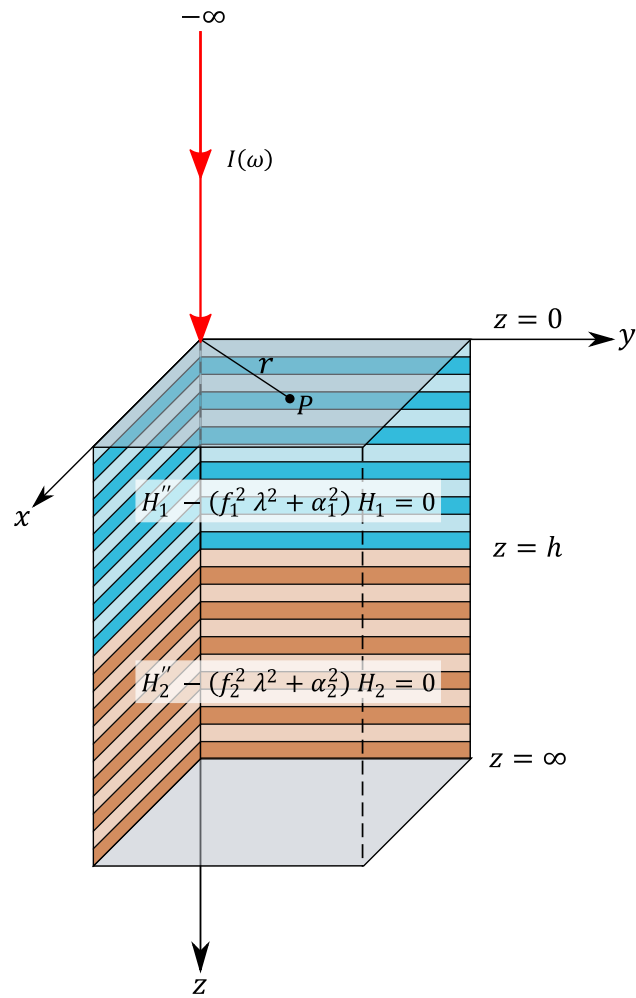


Figura 15. Cable semi-infinito conectado a una tierra estratificada. P indica el punto para calcular el campo eléctrico.

Por otro lado, en el segundo estrato (color café Fig. 15) se cumple:

$$H_2'' - (f_2^2 \lambda^2 + \alpha_2^2) H_2 = 0, \quad (170)$$

donde $\alpha_2 = \sqrt{i\omega\mu f_2\sigma_2}$. Análogo al caso anterior, la expresión 170 se resuelve como una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, de este modo la solución es

$$H_2(\lambda, z) = C_3 e^{zm_2} + C_4 e^{-zm_2}. \quad (171)$$

De igual manera, C_3 y C_4 son constantes por determinar, y $m_2 = \sqrt{f_2^2 \lambda^2 + \alpha_2^2}$. Cabe destacar que la solución 171 solo es válida para $z \geq h$. Por otro lado, aplicando la ley de Ampère (Ec. 92) encontraremos el campo eléctrico asociado

$$E_{r_2}(\lambda, z) = \frac{m_2}{f_2\sigma_2} (C_4e^{-zm_2} - C_3e^{zm_2}). \quad (172)$$

Ahora emplearemos las condiciones de frontera para evaluar las ecuaciones: 168, 169, 171 y 172. Para el primer estrato, $H_1(\lambda, z)$ (Ec. 168) en $z = 0$ debe corresponder a lo expuesto en la ecuación 59, de este modo

$$C_1 + C_2 = \frac{I}{2\pi\lambda}. \quad (173)$$

Asimismo, $H_1(\lambda, z)$ y $E_{r_1}(\lambda, z)$ en $z = h$ establecen

$$H_1(\lambda, h) = C_1e^{hm_1} + C_2e^{-hm_1} \quad (174a)$$

$$\text{y } E_{r_1}(\lambda, h) = \frac{m_1}{f_1\sigma_1} (C_2e^{-hm_1} - C_1e^{hm_1}). \quad (174b)$$

Por otra parte, en el segundo estrato cuando $z \rightarrow \infty$ tanto H_2 como E_{r_2} tienden a cero, por lo tanto, $C_3 = 0$. Entonces, si evaluamos 171 y 172 en $z = h$ con $C_3 = 0$ obtendremos

$$H_2(\lambda, h) = C_4e^{-hm_2} \quad (175a)$$

$$\text{y } E_{r_2}(\lambda, h) = \frac{m_2C_4}{f_2\sigma_2} e^{-hm_2}. \quad (175b)$$

Ahora bien, en la interfase $H_1(\lambda, h) = H_2(\lambda, h)$ y $E_{r_1}(\lambda, h) = E_{r_2}(\lambda, h)$, por consiguiente, igualando las expresiones 174 y 175 se alcanza

$$C_1e^{hm_1} + C_2e^{-hm_1} = C_4e^{-hm_2} \quad (176a)$$

$$\text{y } \frac{m_1}{f_1\sigma_1} (C_2e^{-hm_1} - C_1e^{hm_1}) = \frac{m_2C_4}{f_2\sigma_2} e^{-hm_2}. \quad (176b)$$

Teniendo en cuenta las expresiones 173 y 176, se determina el sistema de ecuaciones por resolver

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{m_1}{f_1\sigma_1}e^{hm_1} & -\frac{m_1}{f_1\sigma_1}e^{-hm_1} & \frac{m_2}{f_2\sigma_2}e^{-hm_2} \\ e^{hm_1} & e^{-hm_1} & -e^{-hm_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I}{2\pi\lambda} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (177)$$

Considerando un par de estratos homogéneos isotrópicos, donde $f_1 = f_2 = 1$ se consigue (véase el anexo

M)

$$C_4 = \frac{-I (e^{-hm_1} - e^{-3hm_1})}{\pi \lambda [2k e^{-h(m_2+2m_1)} - (k+1)e^{-hm_2} - (k-1)e^{-h(m_2+4m_1)}]}, \quad (178a)$$

$$C_2 = \frac{I}{2\pi\lambda} - \frac{e^{-h(m_1+m_2)}}{2} (1-k)C_4, \quad (178b)$$

$$\text{y } C_1 = \frac{I}{2\pi\lambda} - C_2. \quad (178c)$$

Donde $k = \frac{\sigma_1 m_2}{\sigma_2 m_1}$. De esta manera se demuestra que C_2 es función de C_4 , y que C_1 depende de C_2 .

Cabe destacar que con C_1 y C_2 podemos estimar el campo eléctrico en la superficie terrestre

$$E_{r_1}(\lambda, z=0) = \frac{m_1}{f_1 \sigma_1} (C_2 - C_1). \quad (179)$$

Sin embargo, ya que $E_{r_1}(\lambda, z=0)$ está en el dominio λ , debemos aplicar la transformada inversa de Hankel para conseguir $E_{r_1}(r, z=0)$. Sin embargo, analíticamente la transformación puede no tener solución, por tal razón, como se verá en el capítulo 4 la evaluación se realizará numéricamente mediante el filtro de O'Neill (1975).

Capítulo 4. Resultados y Discusiones

4.1. Los campos electromagnéticos del rayo

En este capítulo analizaremos de manera gráfica los campos electromagnéticos (E_r , H_ϕ y E_z), utilizando valores de corriente y de frecuencia propios de los rayos descendentes negativos. Cabe mencionar que debido al amplio rango de amperaje que un rayo puede contener, se optó por emplear la magnitud máxima media de 12.5 kA , la cual usualmente es reportada por diversos autores (Murphy et al., 2021). Por otra parte, los rayos se comportan como antenas que irradian ondas EM en un rango muy amplio de frecuencias (Price, 2016), considerando este hecho y por razones de simplicidad, se empleó 1 Hz en gran parte de los gráficos.

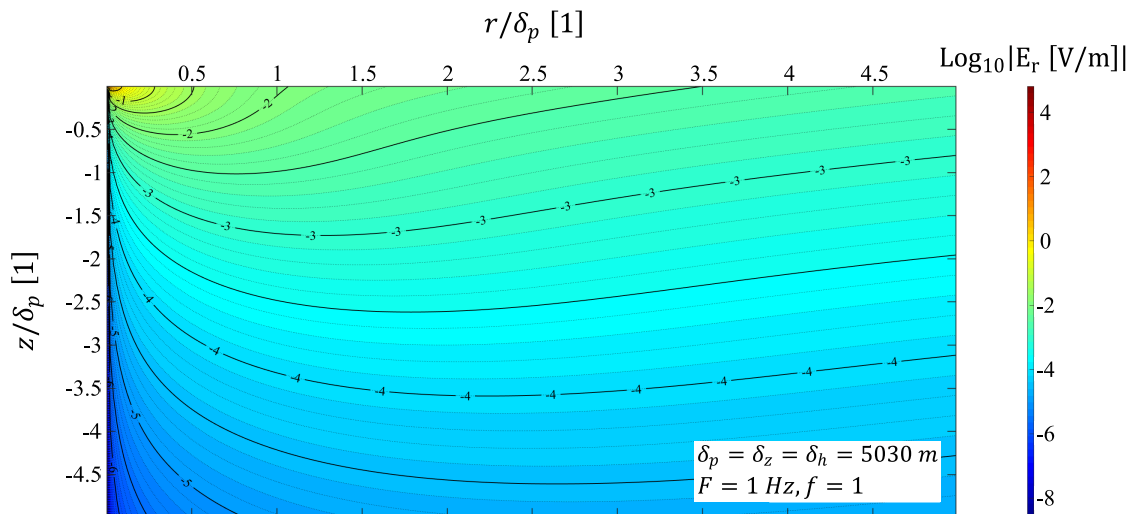


Figura 16. Módulo del campo eléctrico radial en escala logarítmica base diez. Tanto el eje de ordenadas (r) como el de abscisas (z) es normalizado con la *skin depth*. Se modela empleando un medio isotrópico de $100 \Omega \cdot m$ (coeficiente de anisotropía $f = 1$), y frecuencia de 1 Hz .

Comenzaremos con el estudio del campo eléctrico radial (Fig. 16) para un medio isotrópico homogéneo de $100 \Omega \cdot m$; con esta característica y una corriente eléctrica propagándose a una frecuencia de 1 Hz , la profundidad de penetración (en inglés *skin depth*) promedio (δ_p) es de 5030 m . El eje de abscisas es la distancia radial (r) normalizada con la δ_p , de igual manera sucede con el eje de ordenadas, pero con la profundidad (z); es importante destacar que los ejes carecen de unidades debido a la normalización con la *skin depth*, por esta razón, en las etiquetas se indica la adimensionalidad con el número 1. La escala de colores señala el módulo de la intensidad del campo eléctrico en escala logarítmica, la cual ronda en

el intervalo $[10^{-8}, 10^4]$ V/m; el color rojo indica alta intensidad mientras que el azul baja magnitud.

Hacia la esquina superior izquierda (Fig. 16) nos dirigimos a la incidencia del rayo. Suponiendo que estamos en la superficie terrestre ($z = 0$) la ecuación 67 se reduce a la expresión 69, en este contexto, el campo eléctrico radial E_r tiende al infinito conforme nos acercamos al rayo (fuente eléctrica). Por otro lado, el campo eléctrico decae suavemente conforme nos alejamos de la fuente, de tal manera que si $r \rightarrow \infty$ entonces $E_r(z = 0) \rightarrow 0$; este razonamiento es congruente con lo observado en la figura 16, pero cambiando r por r/δ_p . Sin embargo, justo por debajo de la superficie terrestre ($z/\delta_p > 0$), el campo eléctrico radial E_r se aproxima a cero cuando $r/\delta_p \rightarrow 0$, esta idea parece contradecir lo planteado anteriormente, no obstante, la magnitud del vector \hat{r} abajo del rayo debe ser cero. Asimismo, E_r se aproxima a cero cuando $r/\delta_p \rightarrow \infty$ para cualquier profundidad z/δ_p .

De manera semejante, en la superficie ($z = 0$) el módulo del campo magnético H_ϕ (Fig. 17) solo depende de la distancia radial e intensidad de corriente (Ec. 224 del anexo G); en consecuencia, si $r/\delta_p \rightarrow 0$ entonces $H_\phi(z = 0) \rightarrow \infty$, por el contrario, si $r/\delta_p \rightarrow \infty$ entonces $H_\phi(z = 0) \rightarrow 0$. Ahora bien, dentro del subsuelo ($z/\delta_p > 0$) H_ϕ se aproxima a cero ya sea cuando $r/\delta_p \rightarrow 0$ o $r/\delta_p \rightarrow \infty$. Adicionalmente, si $z/\delta_p \rightarrow \infty$ entonces $H_\phi \rightarrow 0$. Cabe destacar que analíticamente, el campo magnético es la integral respecto de z del campo eléctrico radial (Ec. 65), esto explica porque H_ϕ se comporta de manera similar a E_r .

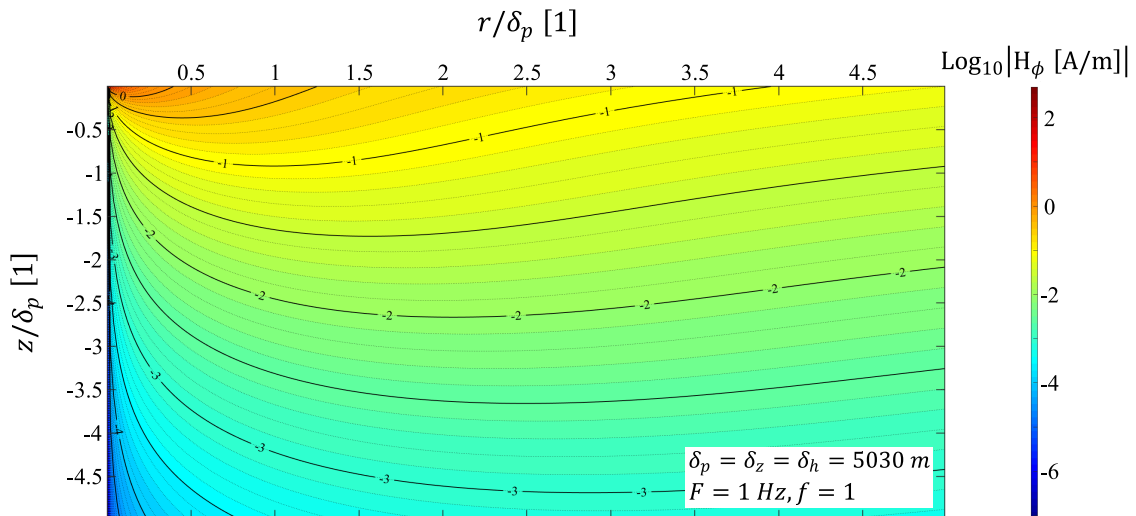


Figura 17. Módulo del campo magnético azimutal en escala logarítmica base diez. Tanto el eje de ordenadas (r) como el de abscisas (z) es normalizado con la *skin depth*. Se modela empleando un medio isotrópico de $100 \Omega \cdot m$ (coeficiente de anisotropía $f = 1$), y frecuencia de 1 Hz .

En contraste con E_r , el módulo del campo eléctrico vertical E_z (Fig. 18) en la superficie terrestre ($z = 0$) es cero (Ec. 72). En la figura 18 cuando $z/\delta_p \rightarrow \infty$ entonces $E_z \rightarrow 0$, para cualquier $r/\delta_p > 0$; este

comportamiento se debe a que E_z disminuye de intensidad con la distancia a la fuente. A diferencia de E_r , justo por debajo del rayo (esquina superior izquierda) E_z tiene su mayor magnitud, y conforme se profundiza el campo eléctrico disminuye gradualmente hasta tender a cero. Por otro lado, para cualquier profundidad $z/\delta_p > 0$, si $r/\delta_p \rightarrow \infty$ entonces $E_z \rightarrow 0$. Cabe mencionar que la escala de colores tanto para E_r como E_z es la misma, ya que en ambos casos se modela con los mismos parámetros.

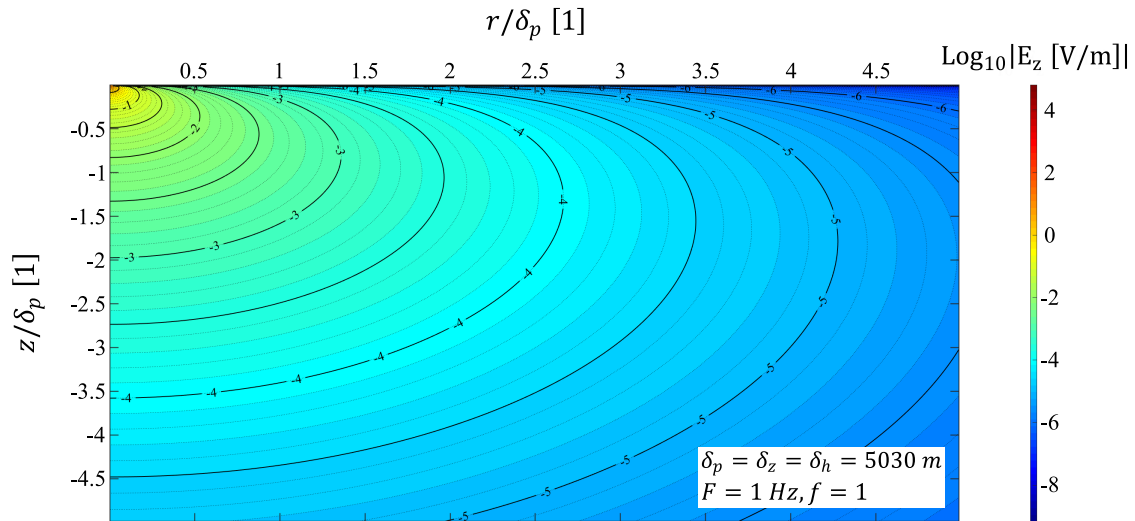


Figura 18. Módulo del campo eléctrico vertical en escala logarítmica base diez. Tanto el eje de ordenadas (z) como el de abscisas (r) es normalizado con la *skin depth*. Se modela empleando un medio isotrópico de $100 \Omega \cdot m$ (coeficiente de anisotropía $f = 1$), y frecuencia de $1 Hz$.

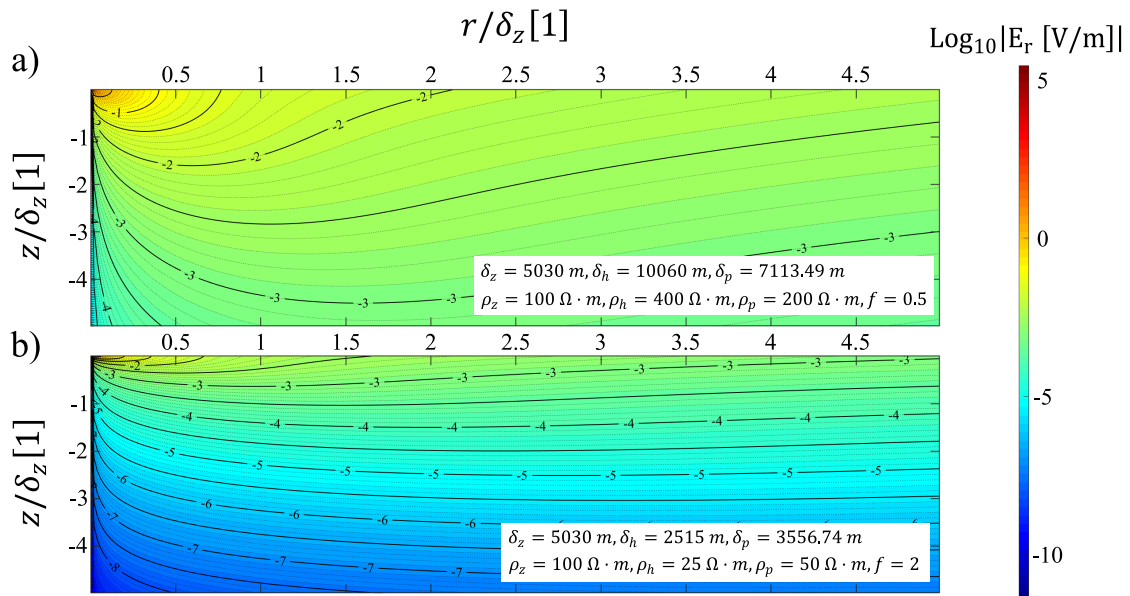


Figura 19. Módulo del campo eléctrico radial en escala logarítmica base diez. a) Caso de un medio anisotrópico ($f = 0.5$) con resistividad promedio de $200 \Omega \cdot m$ ($\rho_p = \sqrt{\rho_h \cdot \rho_z}$). b) Escenario de un medio anisotrópico ($f = 2$) con resistividad promedio de $50 \Omega \cdot m$. Ambos se modelan con corriente de $12.5 kA$ a frecuencia de $1 Hz$. Los ejes coordenados son normalizados con la *skin depth* vertical (δ_z).

Otro aspecto por examinar es el efecto de la anisotropía, primero estudiaremos la variación de la resistividad horizontal (ρ_h). La figura 19 presenta el comportamiento del campo eléctrico radial con distinta ρ_h , pero con igual resistividad vertical (ρ_z). El gráfico 19a expone el caso de un medio con coeficiente de anisotropía 0.5, obtenido con una $\rho_h = 400 \Omega \cdot m$ y $\rho_z = 100 \Omega \cdot m$; es importante destacar que tanto el eje de abscisas (r) como el de ordenadas (z) es normalizado con la *skin depth* vertical ($\delta_z = 503 \cdot \sqrt{\rho_z \cdot T}$). Por otro lado, la figura 19b exhibe el escenario de un medio con coeficiente de anisotropía 2, resultado de una $\rho_h = 25 \Omega \cdot m$ y $\rho_z = 100 \Omega \cdot m$; asimismo, los ejes coordenados son normalizados con la δ_z . Conviene resaltar que ambos casos se modelaron con corriente de 12.5 kA a frecuencia de 1 Hz .

En ambos entornos de la figura 19, hacia la esquina superior izquierda nos dirigimos a la incidencia del rayo. Por otra parte, la resistividad horizontal en 19a es mayor que en 19b, es decir, horizontalmente 19a es resistivo, mientras que 19b conductor. Teniendo en mente que la corriente fluye por la trayectoria de mínima resistencia eléctrica, podemos explicar por qué E_r en 19b penetra poco verticalmente en comparación con el escenario 19a; por ejemplo, la isolínea -3 en 19a sobrepasa $-4 z/\delta_z$, mientras que en 19b ni siquiera alcanza $-1 z/\delta_z$. Esto se debe a que preferentemente la corriente tiende a fluir de manera horizontal, en otras palabras, el campo eléctrico radial asociado a la corriente opta propagarse someramente y seguir la trayectoria de mínima resistencia eléctrica. Ahora bien, 19a en la vertical ($\rho_z = 100 \Omega \cdot m$) es más conductor que horizontalmente ($\rho_h = 400 \Omega \cdot m$), por lo tanto, el campo eléctrico tenderá a profundizar.

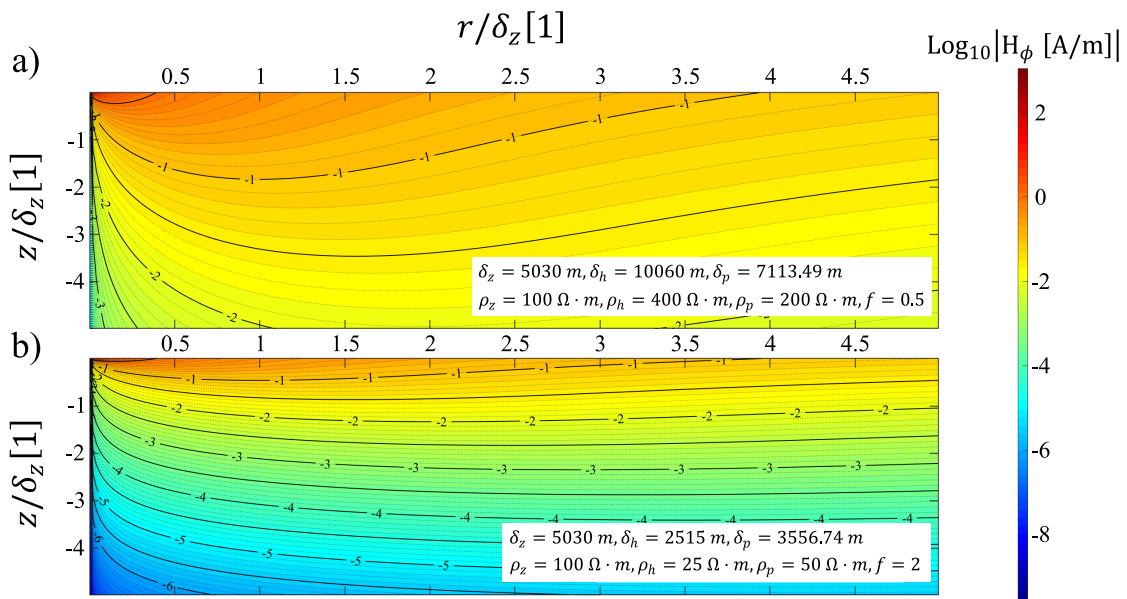


Figura 20. Módulo del campo magnético azimutal en escala logarítmica base diez. a) Caso de un medio anisotrópico ($f = 0.5$) con resistividad promedio de $200 \Omega \cdot m$ ($\rho_p = \sqrt{\rho_h \cdot \rho_z}$). b) Escenario de un medio anisotrópico ($f = 2$) con resistividad promedio de $50 \Omega \cdot m$. Ambos contextos se modelan con corriente de 12.5 kA a frecuencia de 1 Hz . Los ejes coordenados son normalizados con la *skin depth* vertical (δ_z).

Algo semejante ocurre con H_ϕ (Fig. 20), pero ahora relacionando el flujo de corriente con su campo magnético azimuthal asociado. De igual manera se exponen dos escenarios con las mismas características para el caso del campo eléctrico radial. En el gráfico 20a, la corriente eléctrica tiende a fluir preferentemente por la vertical (z/δ_z), por lo tanto, verticalmente H_ϕ avanza más en 20a que en 20b. Dicho en otras palabras, ya que la corriente en 20b prefiere fluir de forma horizontal, el campo magnético penetra poco si comparamos con 20a.

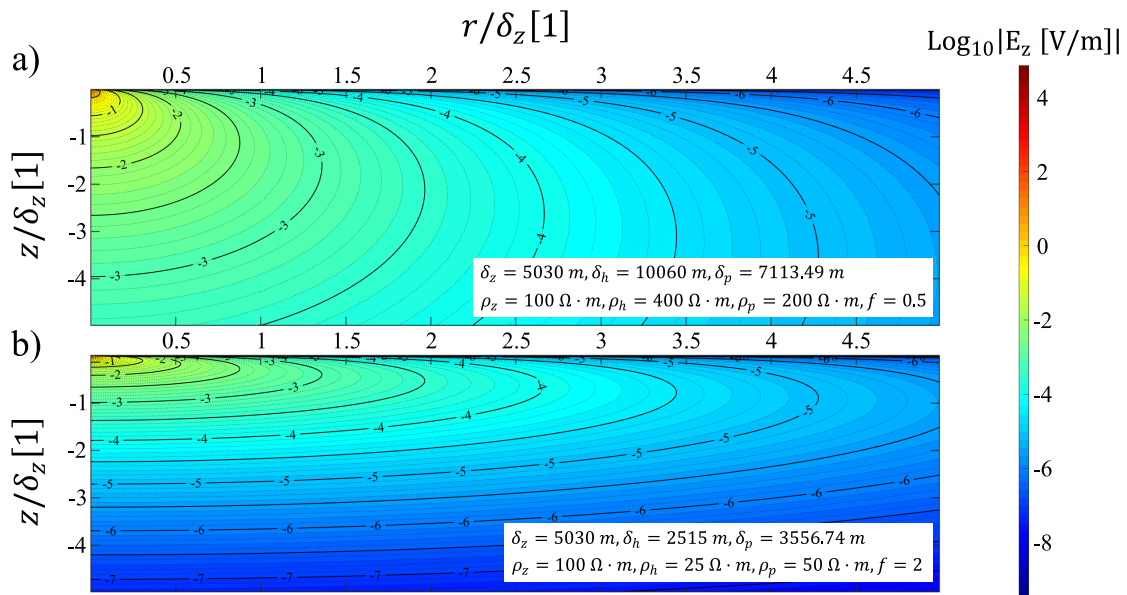


Figura 21. Módulo del campo eléctrico vertical en escala logarítmica base diez. a) Caso de un medio anisotrópico ($f = 0.5$) con resistividad promedio de $200 \Omega \cdot m$ ($\rho_p = \sqrt{\rho_h \cdot \rho_z}$). b) Escenario de un medio anisotrópico ($f = 2$) con resistividad promedio de $50 \Omega \cdot m$. Ambos se modelan con corriente de 12.5 kA a frecuencia de 1 Hz . Los ejes coordenados son normalizados con la *skin depth* vertical (δ_z).

Ahora bien, el efecto de ρ_h en la penetración es evidente en E_z (Fig. 21), debido a que el campo es vertical. Por ejemplo, la isolínea de -3 en 21a se encuentra alrededor de $-4 z/\delta_z$, mientras que en 21b solo profundiza hasta $-1 z/\delta_z$. Para resumir, podemos establecer que un cambio en ρ_h se ve reflejado en la capacidad de penetración de los campos electromagnéticos. De tal forma que poco alcance vertical se relaciona con medios conductores horizontalmente.

En contraste con lo anterior, examinaremos el efecto de la anisotropía variando la resistividad vertical (ρ_z). La figura 22 presenta el comportamiento del campo eléctrico radial (E_r) empleando diferente ρ_z , pero con igual ρ_h . El gráfico 22a expone el caso de un medio con coeficiente de anisotropía 2, obtenido con una $\rho_z = 400 \Omega \cdot m$ y $\rho_h = 100 \Omega \cdot m$; cabe destacar que los ejes coordenados son normalizados con la *skin depth* horizontal ($\delta_h = 503 \cdot \sqrt{\rho_h \cdot T}$). Por otra parte, la figura 22b exhibe el escenario de un medio con coeficiente de anisotropía 0.5, resultado de una $\rho_z = 25 \Omega \cdot m$ y $\rho_h = 100 \Omega \cdot m$; también,

los ejes coordenados son normalizados con la δ_h . Una vez más, ambos casos se modelan con corriente de 12.5 kA a frecuencia de 1 Hz .

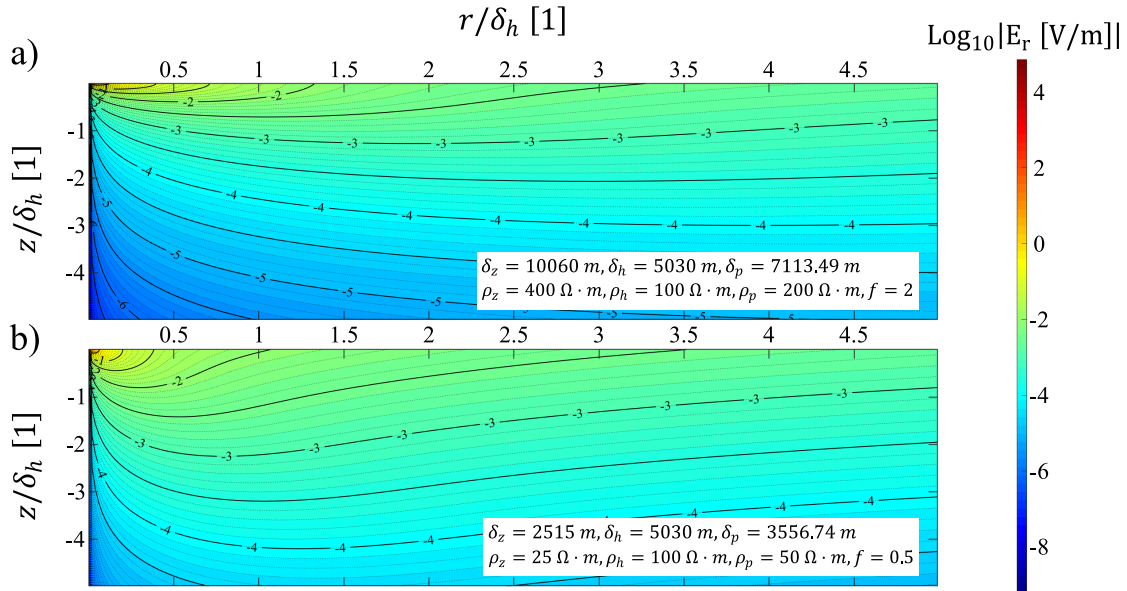


Figura 22. Módulo del campo eléctrico radial en escala logarítmica base diez. a) Caso de un medio anisotrópico ($f = 2$) con resistividad promedio de $200 \Omega \cdot \text{m}$. b) Escenario de un medio anisotrópico ($f = 0.5$) con resistividad promedio de $50 \Omega \cdot \text{m}$. Ambos contextos se modelan con corriente de 12.5 kA a frecuencia de 1 Hz . Los ejes coordenados son normalizados con la *skin depth* horizontal (δ_h).

Para analizar la figura 22 nos apoyaremos de la ecuación 67; a grandes rasgos esta expresión está compuesta por dos sumandos, el primero dominado exponencialmente por la distancia R en conjunto con la conductividad vertical ($e^{-R \cdot \alpha_z}$), y el segundo regido exponencialmente por la profundidad combinada con la conductividad horizontal ($e^{-z \cdot \alpha_h}$). Aledaño al rayo, la contribución del primer sumando es significativa, debido a que $e^{-R \cdot \alpha_z}$ es grande; por tal razón, tanto en la figura 22a como en 22b la resistividad vertical modula la capacidad de penetración de E_r para distancias menores a $3.5 r/\delta_h$. Por otra parte, lejos de la fuente predomina la magnitud del segundo sumando, debido a que si $r/\delta_h \rightarrow \infty$ entonces $e^{-R \cdot \alpha_z} \rightarrow 0$ y por ende también el primer sumando. En este escenario la ecuación 67 se reduce a 133, es decir, para varias *skin depth* la resistividad vertical no interviene en la capacidad de penetración de E_r , por tal motivo las líneas de campo en 22a y 22b se encuentran relativamente en el mismo lugar para distancias mayores a $3.5 r/\delta_h$. Esto también se refleja en el caso con resistividades horizontales distintas (Fig. 19); en el medio resistivo horizontalmente (Fig. 19a) el campo penetra más comparado con el escenario conductor (Fig. 19b), ya que a distancias MT la resistividad horizontal modula la penetración del campo eléctrico radial.

De manera similar, la penetración del campo magnético (Fig. 23) para $r/\delta_h < 3.5$ se ve afectada por

la resistividad vertical. En el medio conductor (Fig. 23b) el campo puede avanzar más verticalmente, debido a que la corriente puede fluir con facilidad, sin embargo, para el caso resistivo (Fig. 23a) el campo no puede penetrar, ya que la corriente prefiere fluir por la horizontal, es decir, el trayecto de mínima resistencia eléctrica. Análogo al campo E_r , para $r/\delta_h > 3.5$ la capacidad de investigación vertical solo es modulada por la resistividad horizontal, por tal razón, tanto en la figura 23a como en 23b los contornos equipotenciales yacen relativamente en la misma profundidad.

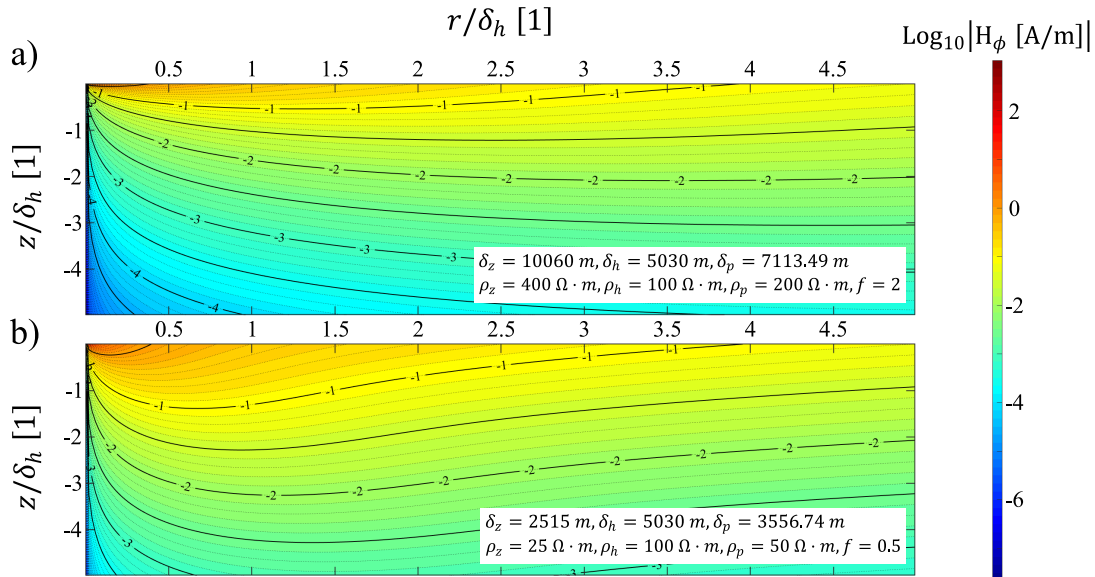


Figura 23. Módulo del campo magnético en escala logarítmica base diez. a) Caso de un medio anisotrópico ($f = 2$) con resistividad promedio de $200 \Omega \cdot m$. b) Escenario de un medio anisotrópico ($f = 0.5$) con resistividad promedio de $50 \Omega \cdot m$. Ambos contextos se modelan con corriente de 12.5 kA a frecuencia de 1 Hz . Los ejes coordenados son normalizados con la *skin depth* horizontal (δ_h).

Por otro lado, el campo eléctrico vertical (Fig. 24) parece contradecir lo dicho hasta el momento, ya que las líneas de igual valor se sitúan a la misma profundidad cuando $r/\delta_h \rightarrow 0$, independientemente del cambio en la resistividad vertical (Fig. 24a y 24b). No obstante, E_z es un caso especial en $r = 0$, ya que no depende de la conductividad vertical, tal y como lo demuestra la ecuación 229 del anexo H.2. Cabe mencionar que la atenuación horizontal en el gráfico 24b se produce porque la intermediación lateral del rayo funge como sumidero para la corriente, por tal razón, E_z se atenúa más horizontalmente en 24b que en 24a.

A simple vista, las figuras 19-21 y 22-24 son las mismas, sin embargo, son diferentes escenarios. A pesar de que las resistividades promedio son iguales (p. ej. entre 19a y 22a), el coeficiente de anisotropía es distinto, ya que, en los gráficos 19-21 se mantiene invariante la resistividad vertical (ρ_z), y en las figuras

22-24 se conserva fija la resistividad horizontal (ρ_h). En este sentido, se puede analizar el contraste de los campos EM normalizando la profundidad y la distancia radial con una *skin depth* invariante, pero con resistividades distintas.

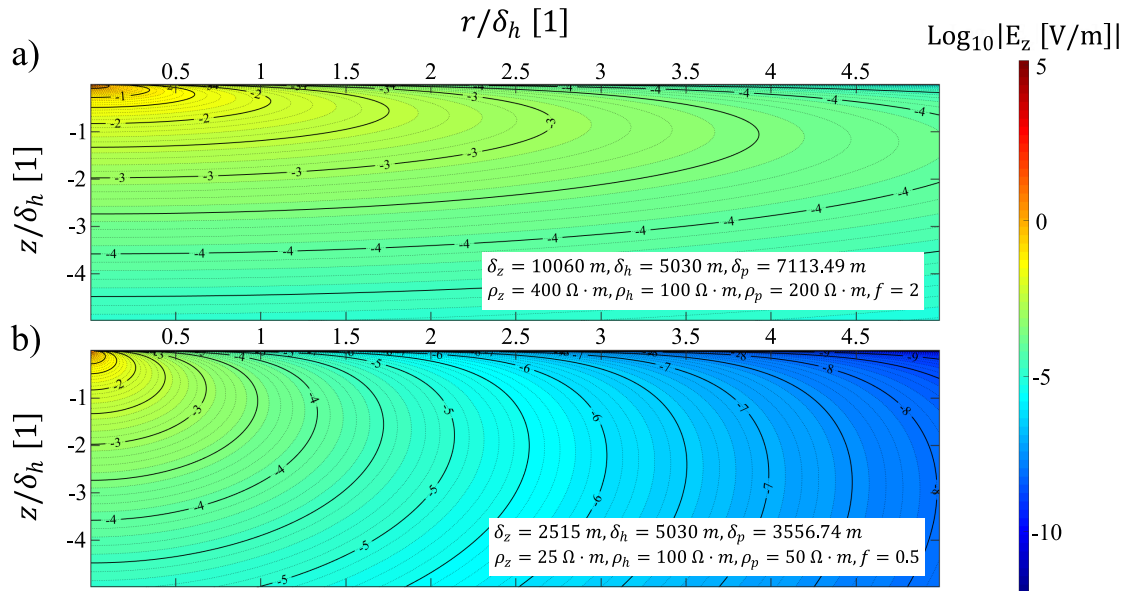


Figura 24. Módulo del campo eléctrico vertical en escala logarítmica base diez. a) Caso de un medio anisotrópico ($f = 2$) con resistividad promedio de $200 \Omega \cdot m$. b) Escenario de un medio anisotrópico ($f = 0.5$) con resistividad promedio de $50 \Omega \cdot m$. Ambos contextos se modelan con corriente de 12.5 kA a frecuencia de 1 Hz . Los ejes coordenados son normalizados con la *skin depth* horizontal (δ_h).

4.2. Las derivadas de Fréchet del campo eléctrico

Las derivadas de Fréchet relacionan una pequeña perturbación $\delta\rho(z)$ con un pequeño cambio $\delta E_r(r, z = 0)$, sin embargo, en la práctica no medimos perturbaciones del campo eléctrico, por tal razón, de alguna manera debemos vincular $E_r(r, z = 0)$ con G_ρ . La solución de este asunto fue dada por Gómez-Treviño (1987) aplicando una forma especial de escalamiento a las ecuaciones de Maxwell. De esta manera podemos relacionar $E_r(r, z = 0)$ con G_ρ . Siguiendo a Gómez-Treviño (1987), el eje de ordenadas del gráfico 25a es el logaritmo base diez de $|\frac{\partial T \cdot E(r, z=0)}{\partial T}|$, donde $T = 2\pi/\omega$, mientras que el eje de abscisas muestra la distancia a la fuente normalizada con la *skin depth* promedio; cabe mencionar que $E_r(r, z = 0)$ fue modelando para una tierra isotrópica de $100 \Omega \cdot m$, usando una corriente de 12.5 kA a frecuencia de 1 Hz . Por otro lado, la figura 25b en las ordenadas presenta la derivada de Fréchet G_ρ normalizada con la magnitud máxima de cada curva, y el eje de abscisas muestra la profundidad normalizada con la δ_p . Es importante mencionar que el color dentro de los gráficos relaciona la medición E_r (Fig. 25a) con

su respectiva derivada de Fréchet (Fig. 25b).

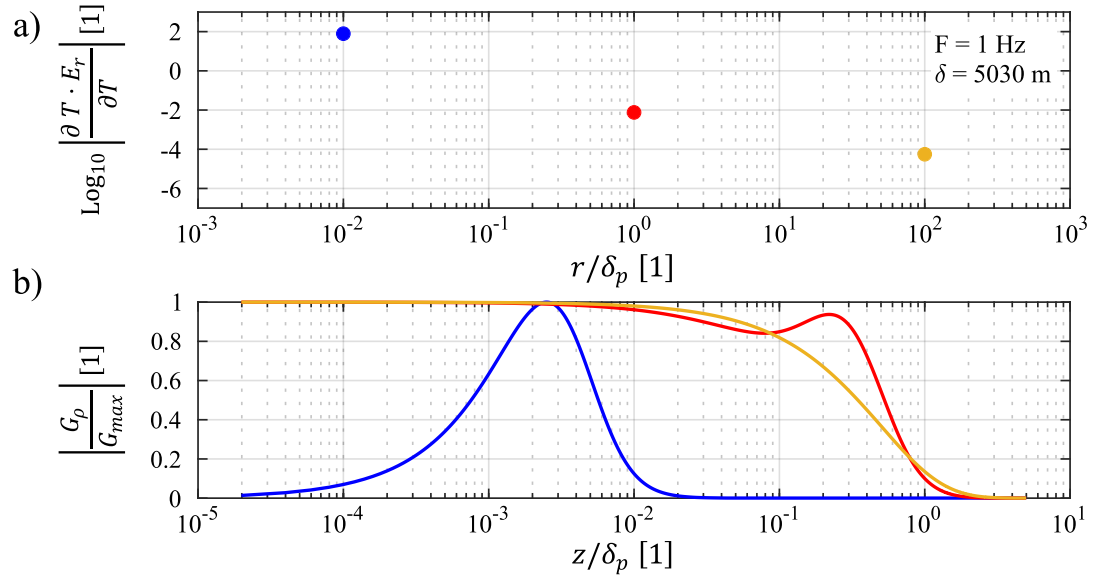


Figura 25. Correlación entre $E_r(r, z = 0)$ y G_p . a) $\left| \frac{\partial T \cdot E(r, z=0)}{\partial T} \right|$ en logaritmo base diez, el color de cada punto correlaciona E_r con G_p . b) G_p normalizada con la magnitud máxima de cada curva. Los ejes de abscisas son normalizados con la δ_p .

A grandes rasgos, el aspecto de G_p para E_r (Fig. 25) se examinó en tres escenarios: $r/\delta_p \ll 1$, $r/\delta_p \gg 1$ y $r/\delta_p = 1$. Para exponer el primer caso nos posicionaremos en $10^{-2} r/\delta_p$ (punto azul en la figura 25a), en este contexto la derivada (curva azul en la figura 25b) describe una forma tipo gaussiana con magnitud máxima en $2.5 \times 10^{-3} z/\delta_p$; esto indica que una medición $E_r(r = 10^{-2} \delta_p, z = 0)$ es más sensible a lo que se encuentre en un rango de profundidades alrededor de $2.5 \times 10^{-3} z/\delta_p$ que a cualquier otra z/δ_p , es decir, si un cuerpo geológico yace en esas profundidades la medición de E_r será más afectada que si el mismo cuerpo estuviese en $10^{-1} z/\delta_p$, o inclusive si estuviera más somero ($z/\delta_p \ll 2.5 \times 10^{-3}$). Por otra parte, para un E_r medido en $10^2 r/\delta_p$ (punto amarillo en la figura 25a), la derivada de Fréchet disminuye progresivamente de intensidad desde la superficie terrestre, de esta forma los objetos someros tienen mayor influencia sobre E_r que los cuerpos profundos, cabe destacar que cualquier objeto a profundidades mayores de $2 z/\delta_p$ tiene efecto nulo sobre E_r . Finalmente, para un E_r medido exactamente a una *skin depth* ($r/\delta_p = 1$), la derivada parte en un punto máximo y desciende hasta alcanzar un mínimo en $7.5 \times 10^{-2} z/\delta_p$, consecutivamente aumenta hasta un máximo en $2.5 \times 10^{-1} z/\delta_p$, y por último disminuye paulatinamente de magnitud, es importante señalar que este caso corresponde a la transición entre distancias del método DC ($r/\delta \ll 1$) y MT ($r/\delta \gg 1$), es decir, la medición $E_r(r = 1 \delta_p, z = 0)$ es sensible tanto para cuerpos muy cercanos a la superficie como para objetos situados en $2.5 \times 10^{-1} z/\delta_p$.

Ahora contrastaremos nuestro resultado con lo obtenido por Gómez-Treviño y Esparza (2014) para el método de resistividad DC, es decir, utilizando $F = 0 \text{ Hz}$. En este escenario, la medición de E_r en superficie corresponderá al utilizado en el método de corriente directa (DC), por tal razón, las ecuaciones de las derivadas de Fréchet por comparar son 131 y 132. La figura 26a expone las derivadas de Fréchet G_ρ obtenidas con el modelo del rayo (Ec. 131), cabe mencionar que el eje de ordenadas se normalizó con r^3 para que todas las curvas mantengan la misma magnitud, además, solo se expone la profundidad z en el eje de abscisas, ya que no se puede calcular una *skin depth*; por otro lado, la leyenda relaciona la derivada con la posición a la fuente en que $E_r(r, z = 0)$ se mide. Por el contrario, la figura 26b presenta las derivadas de Fréchet estipuladas por Gómez-Treviño y Esparza (2014) (Ec. 132), análogamente se normalizó el eje de ordenadas con r^3 , asimismo, se multiplicó la resistividad para establecer dependencia. Cabe destacar que ambos escenarios se modelaron para una tierra isotrópica con resistividad de $100 \Omega \cdot m$, empleando corriente de 12.5 kA .

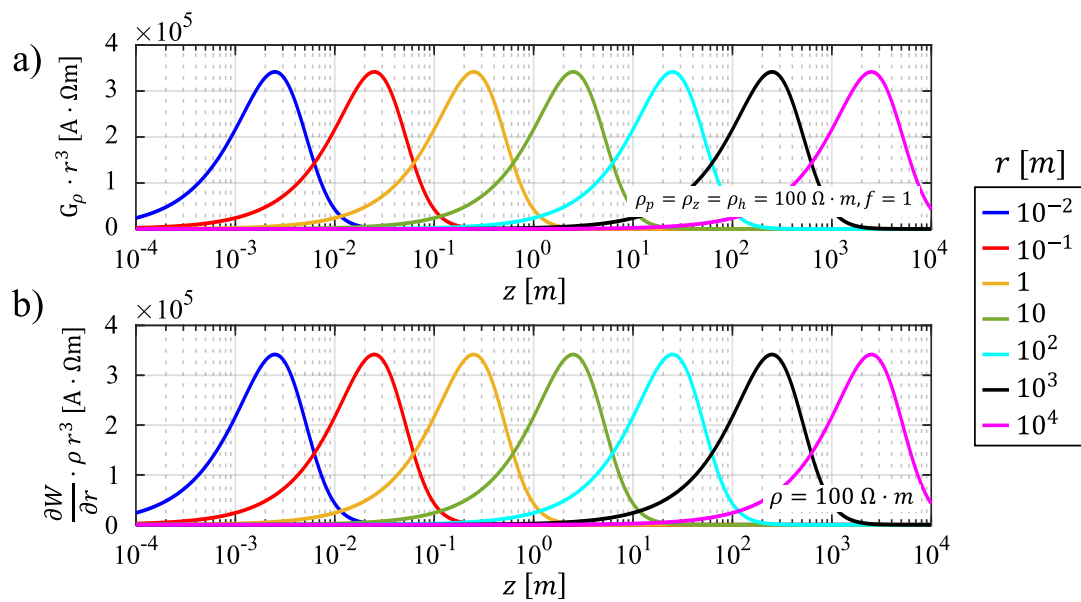


Figura 26. Caso corriente directa (DC). a) Derivadas de Fréchet del rayo, la magnitud de la curva se normaliza con r^3 . b) Derivadas de Fréchet por Gómez-Treviño y Esparza (2014), la magnitud de la curva se normaliza con r^3 y se multiplica por ρ para establecer dependencia. Ambos escenarios son modelados para una tierra isotrópica de $100 \Omega \cdot m$ con corriente de 12.5 kA y $F = 0 \text{ Hz}$.

A grandes rasgos, las derivadas de Fréchet del rayo (Fig. 26a) y las de Gómez-Treviño y Esparza (2014) (Fig. 26b) son las mismas. Ahora bien, en el método DC se incrementa la distancia entre electrodos para obtener información cada vez más profunda del subsuelo, lo cual concuerda con la sensibilidad G_ρ , es decir, conforme nos alejamos del rayo, la información que obtendremos será más profunda, por ejemplo, una medición del campo eléctrico realizada a 1 m del rayo (curva naranja en la figura 26a) será afectada principalmente por los cuerpos entre 0.2 y 0.3 m en z , mientras que una medición a 10

m de la fuente (curva verde) es sensible primordialmente entre 2 y 3 m en z . Cabe señalar que el eje z es logarítmico, o sea que las derivadas de Fréchet no son del mismo alcance vertical, por ejemplo, para $E_r(r = 10^4 m, z = 0)$ obtendremos información del subsuelo en dos órdenes de magnitud, desde 10^2 hasta $10^4 m$, siendo muy sensible entre $2 \times 10^3 - 3 \times 10^3 m$ en z , ya que la curva tipo gaussiana se encuentra centrada en esas profundidades. A diferencia del resultado de Gómez-Treviño y Esparza (2014), con el modelo del rayo podemos estudiar el efecto de la anisotropía.

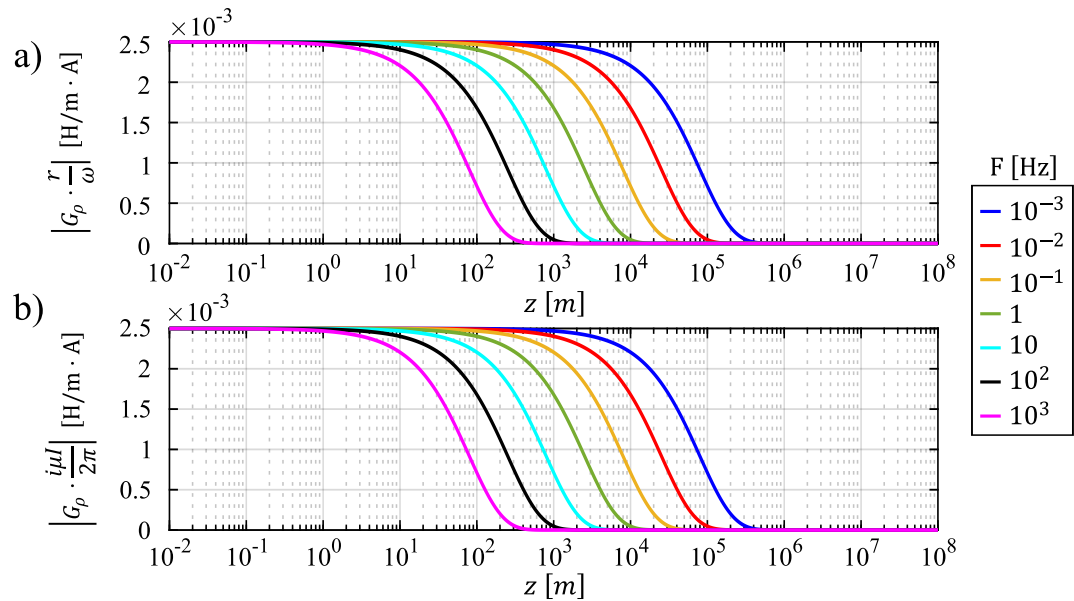


Figura 27. Caso magnetotelúrico (MT). a) Derivadas de Fréchet del rayo, la magnitud de la curva se normaliza con r/w . b) Derivadas de Fréchet por Oldenburg (1979), la magnitud de la curva se amplifica con $i\mu I/2\pi$ para establecer correspondencia con las derivadas del rayo. Ambos escenarios son modelados para una tierra isotrópica de $100 \Omega \cdot m$ con corriente de $12.5 kA$.

A continuación, analizaremos las derivadas de Fréchet cuando la distancia a la fuente es muy grande, es decir, correlacionaremos con lo estipulado por Oldenburg (1979) para el método magnetotelúrico. Por tal razón, contrastaremos el comportamiento de las ecuaciones 136 y 137. La figura 27a expone las derivadas de Fréchet del rayo (Ec. 136), en este escenario el eje de ordenadas es el valor absoluto normalizado con r/ω para que todas las curvas conserven la misma amplitud; por otro lado, el eje de abscisas muestra la profundidad en metros. Por el contrario, el gráfico 27b presenta las derivadas provenientes de la teoría de Oldenburg (1979) (Ec. 137), en este caso las ordenadas exponen el valor absoluto amplificado con $i\mu I/2\pi$, mientras que el eje de abscisas la profundidad en metros. Cabe destacar que ambos escenarios se modelaron para una tierra isotrópica con resistividad de $100 \Omega \cdot m$, empleando corriente de $12.5 kA$.

En general, las derivadas de Fréchet del rayo (Fig. 27a) y las de Oldenburg (1979) (Fig. 27b) son las mismas. No obstante, en el caso de Oldenburg se escala la amplitud por que desconocemos la distancia

e intensidad de la fuente. Por otra parte, a diferencia del método DC, en MT obtenemos información más profunda al variar la frecuencia o periodo, esto concuerda con la sensibilidad G_ρ , es decir, conforme disminuye la frecuencia (periodos largos), la información que obtendremos será cada vez más profunda, por ejemplo, una medición del campo eléctrico realizada con frecuencia de 10^{-3} Hz (curva azul en la figura 27a) puede obtener información desde la superficie terrestre hasta $3 \times 10^5 \text{ m}$ en z , mientras que un sondeo con frecuencia de 10^3 Hz solo captura información hasta $3 \times 10^2 \text{ m}$ en la vertical. Ciertamente, las derivadas de Fréchet en este caso nos indican que los cuerpos más someros afectan en mayor medida que los objetos profundos, sin embargo, debemos tener presente que la escala es logarítmica, por tal razón, también los cuerpos profundos pueden afectar la medición de E_r dependiendo de sus dimensiones. Finalmente, pese que el modelo del rayo se plantea para un medio anisotrópico, no podemos examinar su efecto en las derivadas de Fréchet, ya que la naturaleza de G_ρ a grandes distancias de la fuente solo depende de la conductividad horizontal, al igual que el campo eléctrico y magnético (Fig. 22 y 23).

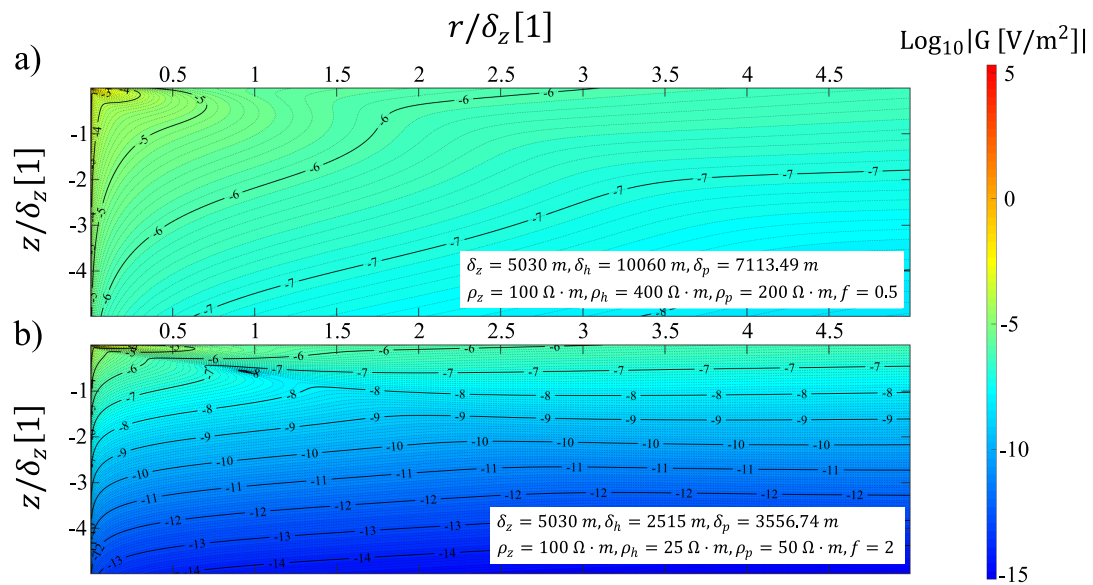


Figura 28. Efecto del coeficiente de anisotropía en G_ρ . a) Caso de un medio anisotrópico ($f = 0.5$) con $\rho_z = 100 \Omega \cdot m$ y $\rho_h = 400 \Omega \cdot m$. b) Escenario de un medio anisotrópico ($f = 2$) con $\rho_z = 100 \Omega \cdot m$ y $\rho_h = 25 \Omega \cdot m$. Ambos contextos se modelan con corriente de 12.5 kA a frecuencia de 1 Hz . Los ejes coordenados son normalizados con la *skin depth* vertical (δ_z).

Para concluir esta sección examinaremos el comportamiento de G_ρ variando el coeficiente de anisotropía, en este contexto, tanto el gráfico 28a como el 28b se modelaron con la misma resistividad vertical, pero con distinta ρ_h , donde 28a es más resistivo horizontalmente que 28b. Considerando que las derivadas de Fréchet fueron obtenidas del campo magnético (Ec. 100) se espera un comportamiento similar. En este sentido, la capacidad de investigación vertical se reduce cuando el medio es conductor horizontalmente (Fig. 28b), ya que la corriente eléctrica prefiere fluir somera y paralela al suelo. Por el contrario, cuando

$\rho_z < \rho_h$ (Fig. 28a) la corriente puede penetrar más, y por lo tanto la capacidad de investigación se incrementa en la vertical.

Ahora bien, cuando variamos la resistividad vertical (Fig. 29) el análisis se invierte, es decir, en un medio resistivo vertical (Fig. 29a) la corriente eléctrica no puede penetrar, en cambio, para un medio conductor vertical (Fig. 29b) la corriente profundiza, de esta forma la capacidad de investigación vertical se incrementa. Cabe señalar que esto sucede en la inmediación del rayo, ya que conforme nos alejamos de la fuente, la derivada de Fréchet dependerá cada vez más de la conductividad horizontal, tal y como lo demuestra la ecuación 136, por tal razón, las equipotenciales después de $4.5 r/\delta_h$ yacen relativamente en la misma posición en 29a y 29b.

A simple vista, las figuras 28 y 29 son las mismas, sin embargo, son diferentes escenarios. A pesar de que las resistividades promedio son iguales (p. ej. entre 28a y 29a), el coeficiente de anisotropía es distinto, ya que, en el gráfico 28 se mantiene invariante la resistividad vertical, y en la figura 29 se conserva fija la resistividad horizontal. En este sentido, se puede analizar el contraste de las derivadas de Fréchet normalizando la profundidad y la distancia radial con una *skin depth* invariante, pero con resistividades distintas.

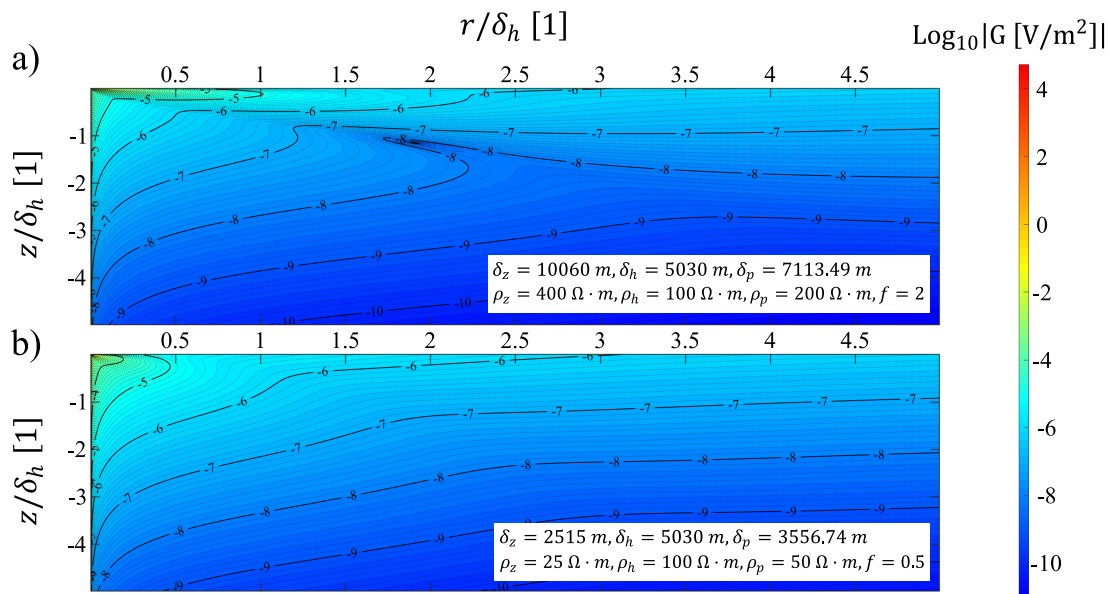


Figura 29. Efecto del coeficiente de anisotropía en G_p . a) Caso de un medio anisotrópico ($f = 2$) con $\rho_z = 400 \Omega \cdot m$ y $\rho_h = 100 \Omega \cdot m$. b) Escenario de un medio anisotrópico ($f = 0.5$) con $\rho_z = 25 \Omega \cdot m$ y $\rho_h = 100 \Omega \cdot m$. Ambos contextos se modelan con corriente de $12.5 kA$ a frecuencia de $1 Hz$. Los ejes coordenados son normalizados con la *skin depth* horizontal (δ_h).

4.3. Definiciones de resistividad aparente

En DC y MT nos interesa conocer la resistividad del subsuelo, no obstante, cada metodología tiene su propia ecuación de resistividad aparente, por tal razón, como primer enfoque emplearemos la fórmula de Cagniard (1953) (Ec. 7) con los campos EM del rayo (Fig. 16 y 17). En este contexto, la figura 30a expone la resistividad aparente de Cagniard (1953) empleando la impedancia E_r/H_ϕ del rayo; los ejes coordenados son normalizados con la *skin depth* promedio. Cabe destacar que se modela un medio de $100 \Omega \cdot m$, utilizando corriente de $12.5 kA$ a frecuencia de $1 Hz$. A grandes rasgos, se recupera la resistividad real del medio para distancias mayores a $1.5 r/\delta_p$ (Fig. 30a), es decir, cuando la fase de la onda (Fig. 30b) se aproxima a 45° , tal y como se esperaría para el método magnetoteléxico. Por otro lado, en distancias menores a $1.5 r/\delta_p$ la resistividad aparente difiere del modelo, ya que la ecuación de Cagniard (1953) funciona cuando la fase de la onda es 45° .

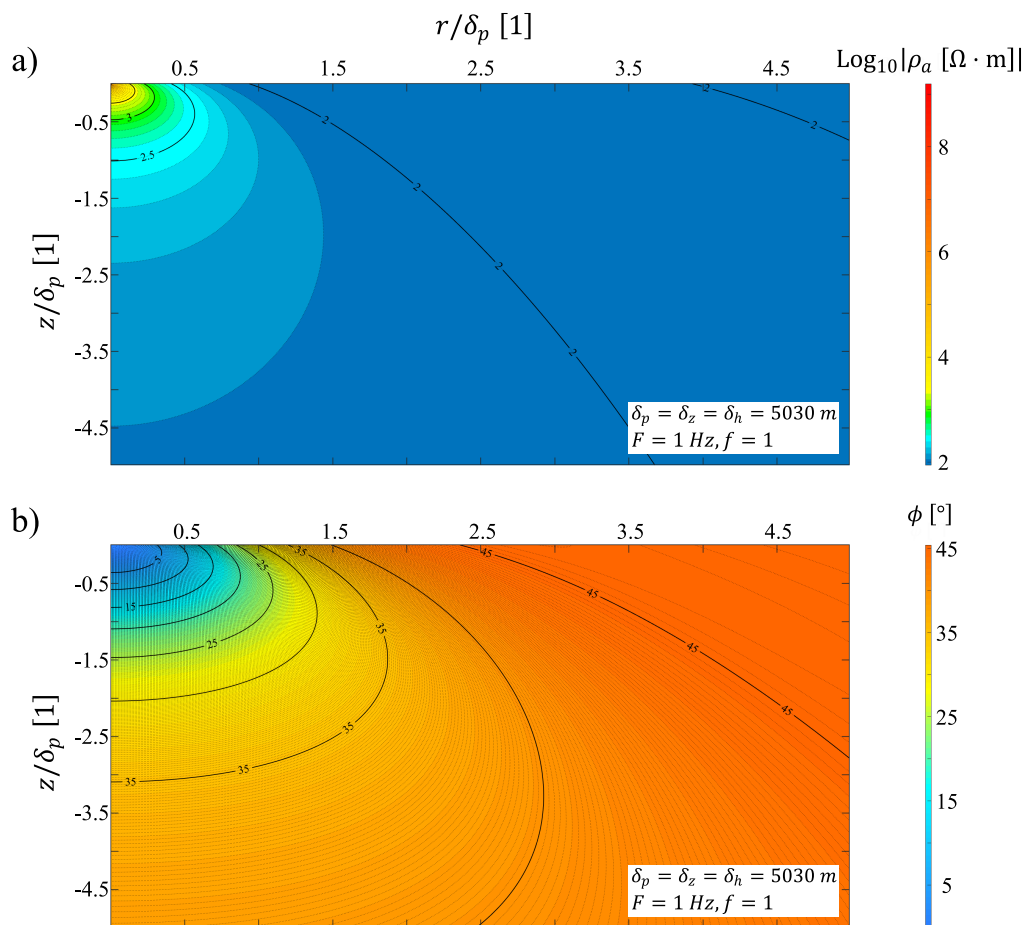


Figura 30. a) Resistividad aparente obtenida con la impedancia E_r/H_ϕ del rayo y la ecuación de Cagniard (1953). b) Fase de la impedancia E_r/H_ϕ . Los gráficos se obtuvieron para una tierra isotrópica de $100 \Omega \cdot m$, usando corriente de $12.5 kA$ y $F = 1 Hz$.

Considerando que la ecuación de Cagniard (1953) no recupera la resistividad del medio en distancias menores a 1.5 skin depth , podemos analizar el valor absoluto de las expresiones de resistividad aparente obtenidas a partir del campo eléctrico radial en la superficie terrestre $E_r(r, z = 0)$ (Ec. 139 y 145). De este modo, la figura 31 muestra el comportamiento de $\rho_{a_{DC}}$ (Ec. 139) y $\rho_{a_{MT}}$ (Ec. 145), modeladas para un medio isotrópico de $100 \Omega \cdot m$ con corriente de 12.5 kA y $F = 1 \text{ Hz}$. Se observa que $\rho_{a_{DC}}$ recupera la resistividad real en distancias menores a 0.5δ , pasando dicha posición $\rho_{a_{DC}}$ diverge debido a que modelamos con frecuencia distinta de cero. Por el contrario, $\rho_{a_{MT}}$ recupera la resistividad del medio solo para distancias mayores a 3δ , ya que la expresión fue obtenida a partir de un campo eléctrico muy lejano a la fuente.

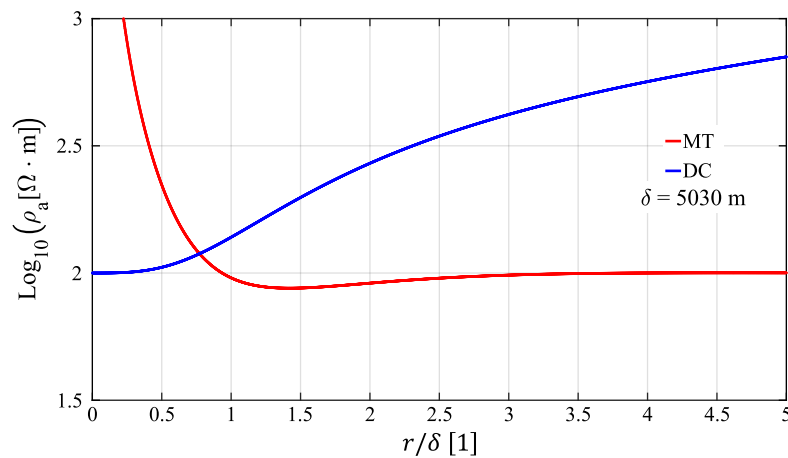


Figura 31. Valor absoluto de $\rho_{a_{DC}}$ y $\rho_{a_{MT}}$ en escala logarítmica base diez. Se modela para un medio isotrópico de $100 \Omega \cdot m$, usando corriente de 12.5 kA y $F = 1 \text{ Hz}$. El eje de abscisas es normalizado con la *skin depth*.

Hasta el momento, podemos obtener la resistividad del subsuelo ya sea con la impedancia E_r/H_ϕ o con el campo eléctrico E_r , sin embargo, cada ecuación estudiada solo aplica en cierto contexto o circunstancia. No obstante, proseguiremos el análisis con la parte real e imaginaria de $\rho_{a_{DC}}$ y $\rho_{a_{MT}}$. La figura 32 presenta la componente real e imaginaria de $\rho_{a_{DC}}$, modeladas para un medio isotrópico de $100 \Omega \cdot m$, utilizando corriente de 12.5 kA y $F = 1 \text{ Hz}$. En este caso, la parte real (Fig. 32a) recupera la resistividad real del medio para distancias menores a $0.5 r/\delta$, tal y como en la figura 31. Por el contrario, la componente imaginaria (Fig. 32b) en ningún punto logra reconstruir la resistividad del medio.

Solo queda examinar la componente real e imaginaria de $\rho_{a_{MT}}$. El gráfico 33a muestra la parte real modelada para un medio isotrópico de $100 \Omega \cdot m$, empleando corriente de 12.5 kA y $F = 1 \text{ Hz}$. Se observa que tanto para $r/\delta < 10^{-2}$ como $r/\delta > 3$ se obtiene la resistividad real del medio, esto quiere decir que la ecuación funciona para distancias DC y MT, es necesario resaltar que por primera vez estos dos métodos son unificados mediante una sola ecuación para la resistividad aparente. Por otro

lado, para $10^{-2} < r/\delta < 3$ la parte real de la resistividad aparente difiere de la resistividad del medio en aproximadamente $20 \Omega \cdot m$, no obstante, podemos resolver este inconveniente mediante una curva maestra del $\text{Log}_{10}(\rho_a/\rho)$ (Fig. 34b), donde ρ_a/ρ es la razón entre la resistividad aparente medida y la resistividad real del medio, de esta forma, podemos sobreponer una curva de campo (Fig. 34a) y operar con las propiedades de los logaritmos para conseguir la resistividad real del medio (Fig. 34b), es importante señalar que esta curva funcionará siempre y cuando el medio sea homogéneo isotrópico; cabe aclarar que la curva de campo de la figura 34a es una curva ideal, ya que una curva de campo real tendría pocas mediciones, con barras de error y posible dispersión entre una observación y otra; además, en la naturaleza difícilmente se puede encontrar un medio homogéneo isotrópico. Finalmente, la componente imaginaria de $\rho_{a_{MT}}$ (Fig. 33b) no revela información representativa del medio estudiado.

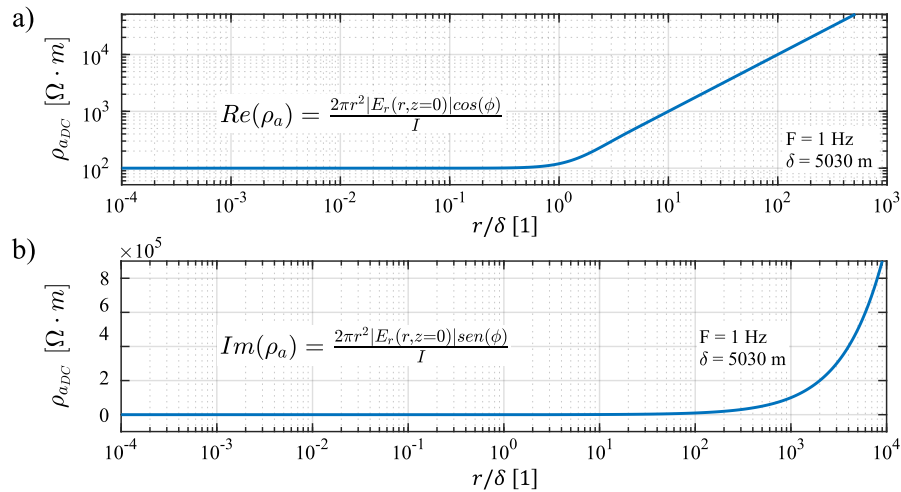


Figura 32. a) Parte real de $\rho_{a_{DC}}$. b) Parte imaginaria de $\rho_{a_{DC}}$. Ambos escenarios se modelan para una tierra isotrópica de $100 \Omega \cdot m$, empleando corriente de 12.5 kA y $F = 1 \text{ Hz}$.

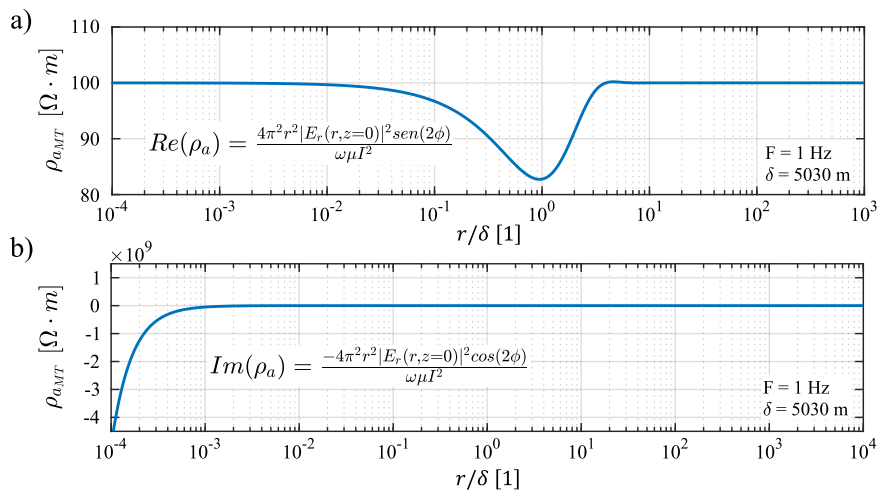


Figura 33. a) Componente real de $\rho_{a_{MT}}$. b) Componente imaginaria de $\rho_{a_{MT}}$. Ambos escenarios se modelan para una tierra isotrópica de $100 \Omega \cdot m$, empleando corriente de 12.5 kA y $F = 1 \text{ Hz}$.

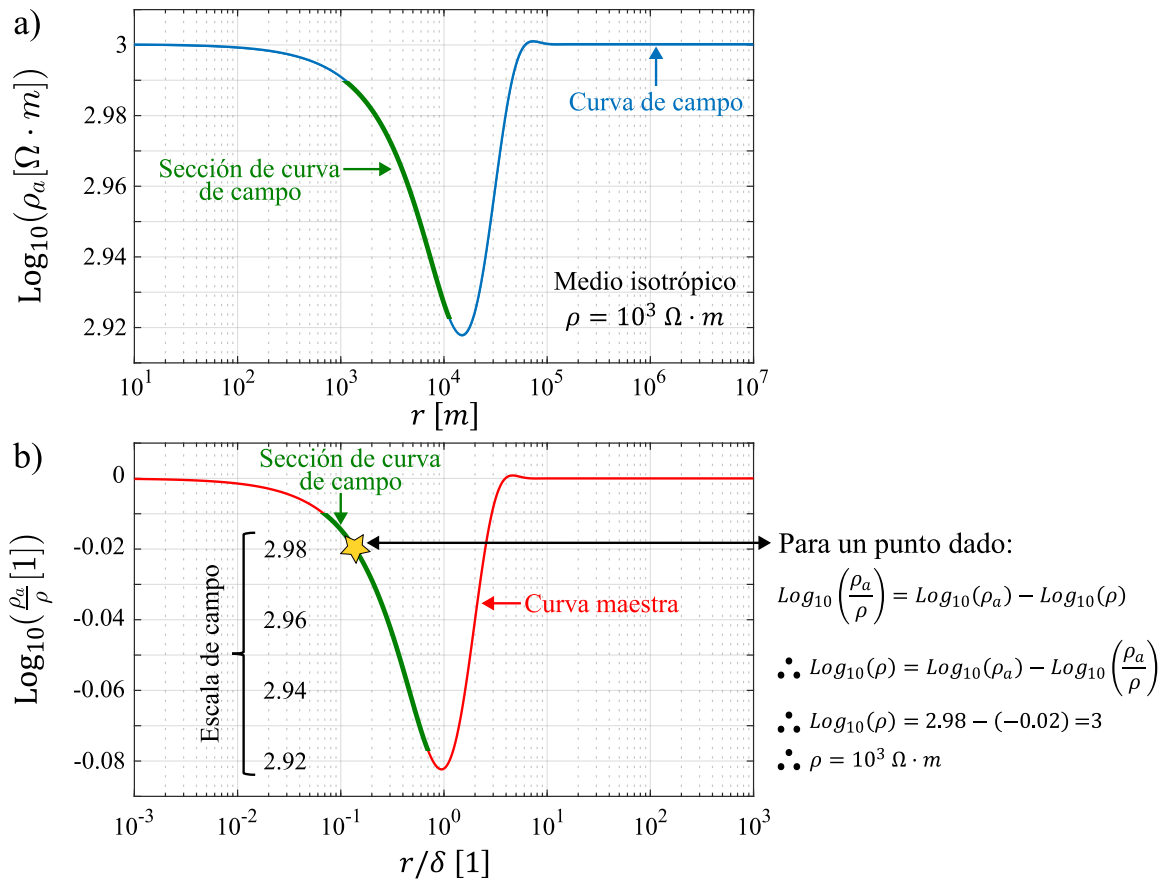


Figura 34. a) Curva de campo. b) Curva maestra. *In situ* se puede obtener una sección de curva de campo, dicha porción se sobrepone en la curva maestra, y por medio de operaciones con logaritmos podemos obtener la resistividad real del subsuelo, siempre y cuando sea un medio homogéneo isotrópico.

4.4. Las derivadas de Fréchet de la resistividad aparente

Las derivadas de Fréchet también pueden proporcionar la sensibilidad de la resistividad aparente, es decir, del cálculo que realizamos con el campo eléctrico medido en la superficie terrestre; asimismo, exponen la firma o comportamiento característico de cada método. Para comenzar, el gráfico 35a muestra las derivadas de Fréchet para $\delta\rho_{aDC}$ (Ec. 156), se modela para una tierra isotrópica de $100 \Omega \cdot m$ utilizando $F = 0 \text{ Hz}$; el eje de ordenadas se normaliza con r para que todas las curvas mantengan la misma amplitud, y se divide entre ρ para que $G_{\rho_{aDC}}$ no dependa de la resistividad del medio. De esta manera, el resultado se correlaciona con la figura 3b de Gómez-Treviño y Esparza (2014). Por otra parte, al igual que las derivadas para el campo eléctrico, al aumentar la distancia a la fuente la información que obtendremos será cada vez más profunda. Por el contrario, la figura 35b presenta las derivadas de Fréchet para $\delta\rho_{aMT}$; las ordenadas son normalizadas con $I/rE_r(r, z = 0)$ para que todas las curvas

conservan la misma amplitud, además, se utiliza $r = 10^6$ m. En este caso, las derivadas presentan la misma forma característica que el campo eléctrico, y así debe corresponder, ya que $G_{\rho_{a_{MT}}}$ depende de las derivadas de F chet del campo eléctrico (Ec. 164); además, al incrementar la frecuencia (periodos cortos) la profundidad de investigación disminuye, tal y como se espera para el método magnetotelúrico.

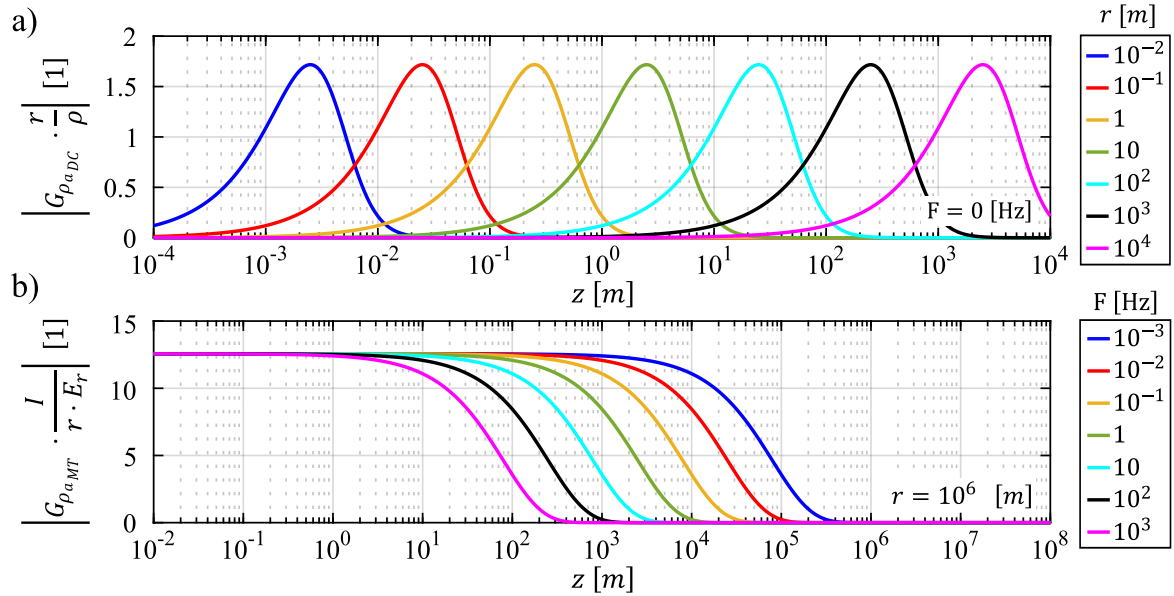


Figura 35. a) Valor absoluto de $G_{\rho_{a_{DC}}}$ normalizado con r/ρ ; se utiliza $F = 0$ Hz. b) Valor absoluto de $G_{\rho_{a_{MT}}}$ normalizado con $I/rE_r(r, z = 0)$; se emplea una distancia a la fuente de 10^6 m. Ambas figuras son modeladas para un medio isotrópico de $100 \Omega \cdot m$.

Ahora bien, la componente real e imaginaria de $G_{\rho_{a_{DC}}}$ corresponde a las perturbaciones $\delta Re(\rho_{a_{DC}})$ y $\delta Im(\rho_{a_{DC}})$, respectivamente. En este sentido, la figura 36a presenta $Re(G_{\rho_{a_{DC}}})$ normalizada con r/ρ , utilizando $F = 0$ Hz; de esta forma, encontramos la curva tipo gaussiana característica para la resistividad aparente DC. Por el contrario, el gráfico 36b muestra $Im(G_{\rho_{a_{DC}}})$ normalizada con r/ρ ; a grandes rasgos, las derivadas de Fréchet son equivalentes a cero, ya que E_r a frecuencia cero solo tiene componente real (véase la ecuación 128), por lo tanto, la parte imaginaria es nula, y en consecuencia no se puede obtener información del subsuelo, tal y como demuestran las derivadas de Fréchet.

Finalmente, la parte real e imaginaria de $G_{\rho_{a_{MT}}}$ se obtienen con las perturbaciones $\delta Re(\rho_{a_{MT}})$ y $\delta Im(\rho_{a_{MT}})$, respectivamente. En este contexto, la figura 37a muestra $Re(G_{\rho_{a_{MT}}})$ normalizada con $I/r|E_r(r, z = 0)|$; se puede observar que las curvas son semejantes a las del método magnetotelúrico (Fig. 27b), sin embargo, presentan una pequeña concavidad pasando el cero en las ordenadas, no obstante, conservan el mismo comportamiento de investigación vertical al disminuir o aumentar la frecuencia. Por el contrario, el gráfico 37b expone $Im(G_{\rho_{a_{MT}}})$ normalizada con $I/r|E_r(r, z = 0)|$; a diferencia de $Re(G_{\rho_{a_{MT}}})$, la curvatura pasando el cero en las ordenadas es más pronunciada. En consecuencia, el área

por debajo de la curva es prácticamente cero. Este hecho es difícil de observar porque está graficada en escala semilogarítmica, pero puede comprobarse mediante integración numérica. Siendo consistente con lo planteado anteriormente, ya que $Im(\rho_{a_{MT}})$ presenta información nula a grandes distancias (Fig. 33b).

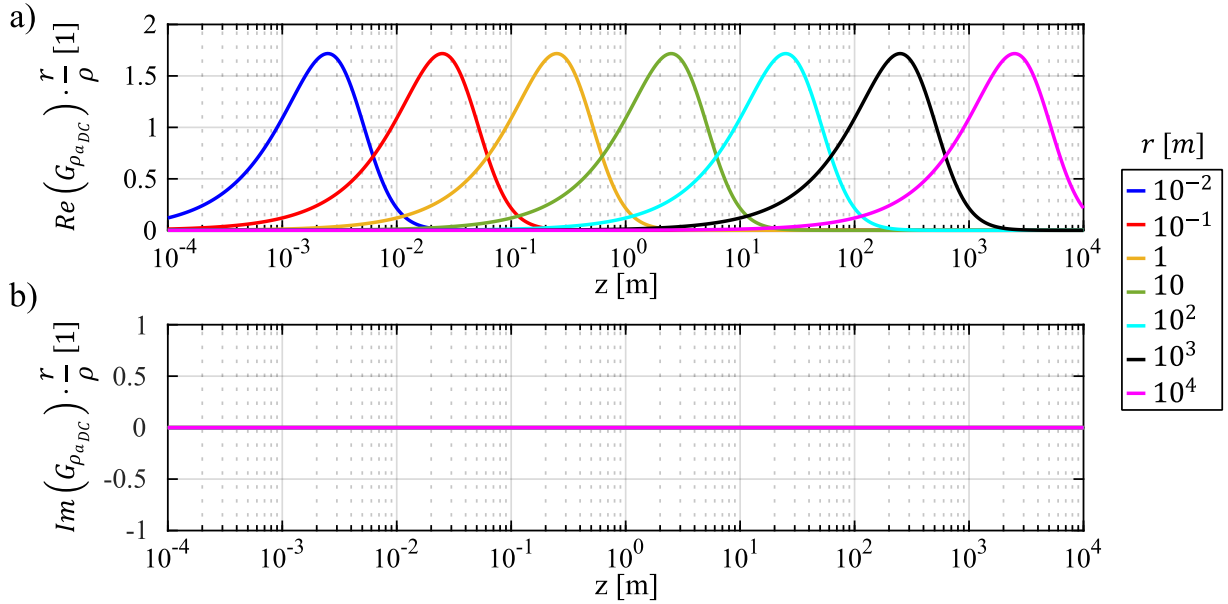


Figura 36. a) $Re(G_{\rho_{a_{DC}}})$ normalizada con r/ρ . b) $Im(G_{\rho_{a_{DC}}})$ normalizada con r/ρ . Ambos escenarios se modelan para un medio isotrópico de $100 \Omega \cdot m$ utilizando $F = 0 \text{ Hz}$

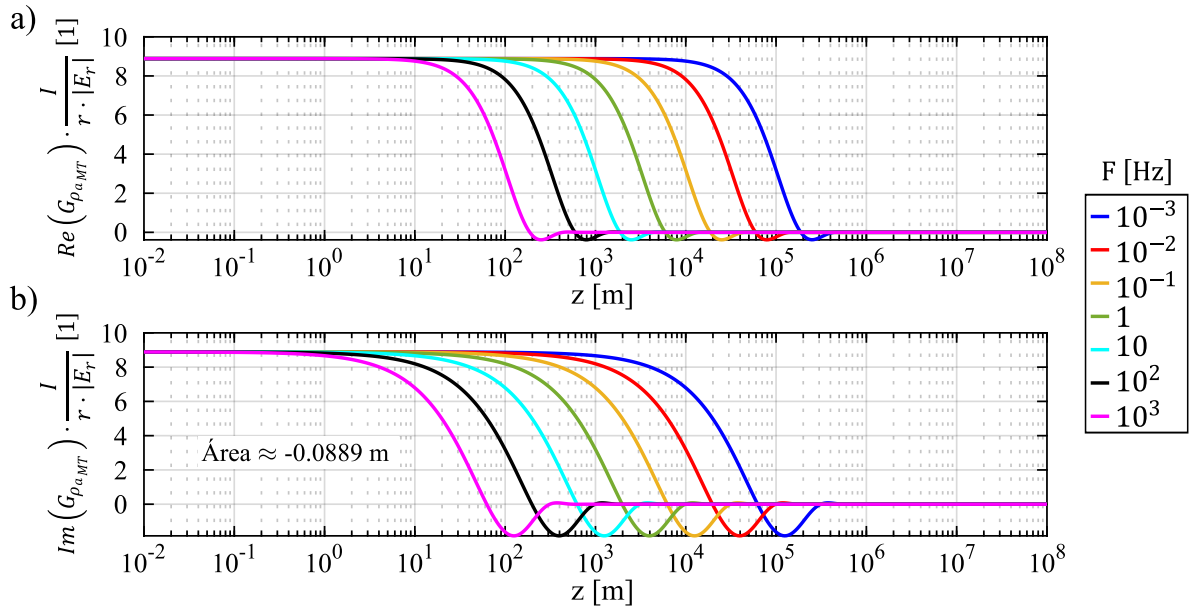


Figura 37. a) $Re(G_{\rho_{a_{MT}}})$. b) $Im(G_{\rho_{a_{MT}}})$. Ambas figuras son normalizadas con $I/r|E_r(r, z = 0)|$, se modela para un medio isotrópico de $100 \Omega \cdot m$ utilizando $r = 10^6 \text{ m}$

4.5. Particularidades de $Re(\rho_{a_{MT}})$

En esta última sección analizaremos en detalle el comportamiento de $Re(\rho_{a_{MT}})$. El primer asunto por abordar es: ¿a distancias mucho menores a una *skin depth*, la sensibilidad de la medición es similar a MT (Fig. 35b) o DC (Fig. 35a)? Para responder esta pregunta se graficó la derivada de Fréchet para mediciones en: $r/\delta \ll 1$, $r/\delta = 1$ y $r/\delta \gg 1$ (Fig. 38). En este sentido, para una medición $Re(\rho_{a_{MT}})$ cercana a la fuente, por ejemplo en $10^{-5} r/\delta$ (punto azul en la figura 38a), la sensibilidad (curva azul en la figura 38b) es análoga a las derivadas de Fréchet cuando la medición $Re(\rho_{a_{MT}})$ se encuentra en distancias $r/\delta \gg 1$ (p. ej. curva naranja de la figura 38b), no obstante, con la diferencia de un aumento en la amplitud antes del decaimiento gradual.

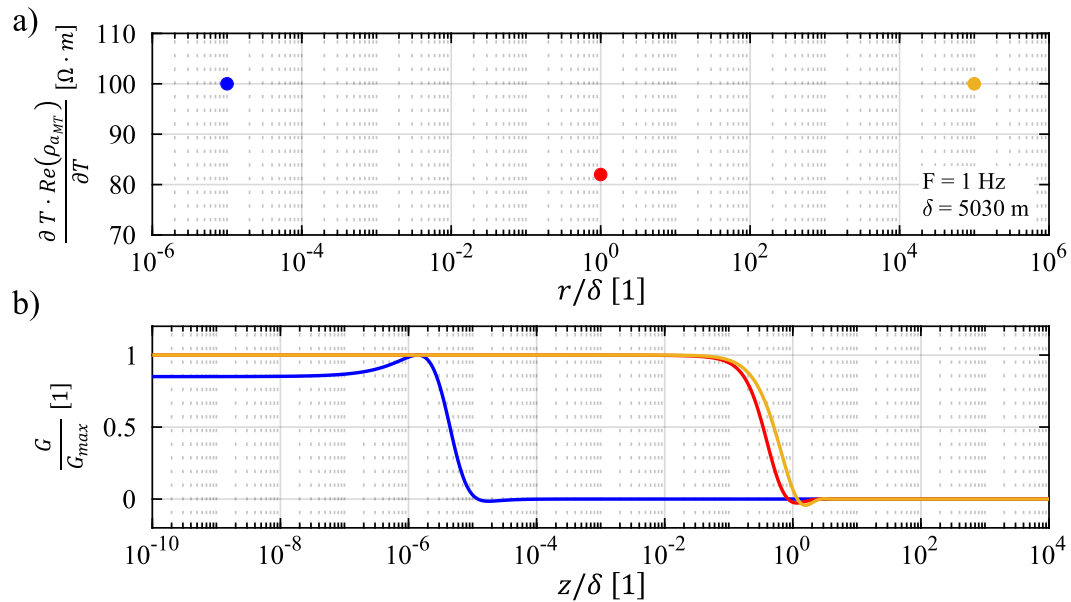


Figura 38. a) $\frac{\partial T \cdot Re(\rho_{a_{MT}})}{\partial T}$ modelado para un medio isotrópico de $100 \Omega \cdot m$ y $F = 1 \text{ Hz}$; el eje de abscisas es la distancia a la fuente normalizada con la *skin depth*. b) $Re(G_{\rho_{a_{MT}}})$ normalizado con la amplitud máxima; el eje de abscisas es la profundidad normalizada con la *skin depth*.

Además, resulta interesante observar que para esta medición ($10^{-5} r/\delta$) la capacidad de investigación en la vertical solo llega hasta $10^{-5} z/\delta$. Por otra parte, para un sondeo exactamente a $1 r/\delta$ (punto rojo en la figura 38a), la resistividad $Re(\rho_{a_{MT}})$ solo obtiene información hasta antes de $1 z/\delta$ (Fig. 38b); ahora bien, por muy lejos que se encuentre el sondeo (p. ej. punto naranja en la figura 38a), la capacidad de investigación solo llegará a $1 z/\delta$. En este sentido, podemos establecer que para distancias menores a una δ , la capacidad de investigación vertical será modulada por la distancia a la fuente, es decir, como si se tratara del método DC pero con sensibilidad MT (*i. e.*, sensibilidad casi constante desde la superficie hasta una profundidad similar a la distancia a la fuente).

Dicho lo anterior, dado un modelo de dos capas (Fig. 15) examinaremos el comportamiento de $Re(\rho_{a_{MT}})$ a $10^6 m$ de la fuente, es decir, variando el periodo (T) para profundizar. En este contexto, la figura 39 muestra la resistividad aparente calculada para una tierra estratificada, donde la primera capa tiene $10 \Omega \cdot m$ y el semi-espacio $100 \Omega \cdot m$, mientras que la interfase se encuentra a $1000 m$ de profundidad. Con estas características, $Re(\rho_{a_{MT}})$ logra recuperar la resistividad real del primer estrato con periodos cortos, mientras que con frecuencias bajas la resistividad aparente converge a la resistividad real del semi-espacio. Este resultado es equiparable al modelado directo de la onda plana para la resistividad aparente de Cagniard (1953), con esto establecemos que $Re(\rho_{a_{MT}})$ para un medio estratificado es consistente; cabe señalar que existe discrepancia entre $0.3 s < T < 200 s$, esto puede deberse a que el filtro de O'Neill (1975) no calcula adecuadamente en dichos periodos.

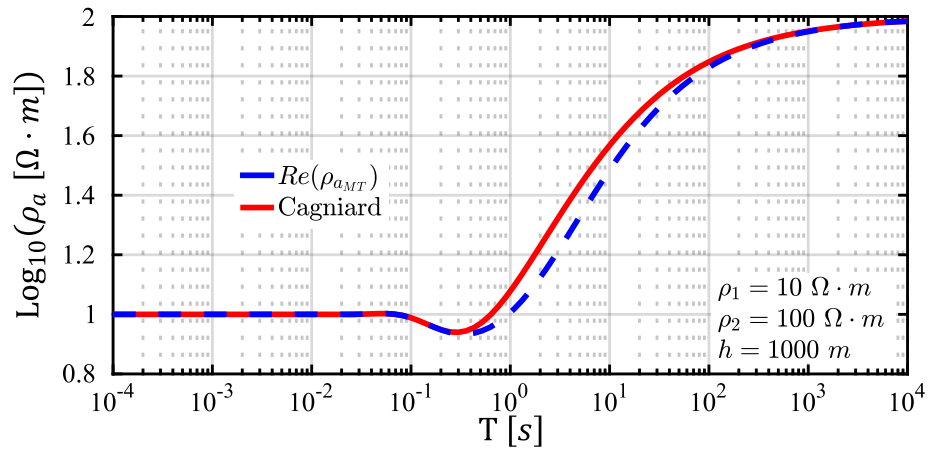


Figura 39. Comparación de la resistividad aparente de Cagniard (1953) y $Re(\rho_{a_{MT}})$; se modela para un medio de dos capas a una distancia del rayo de $10^6 m$.

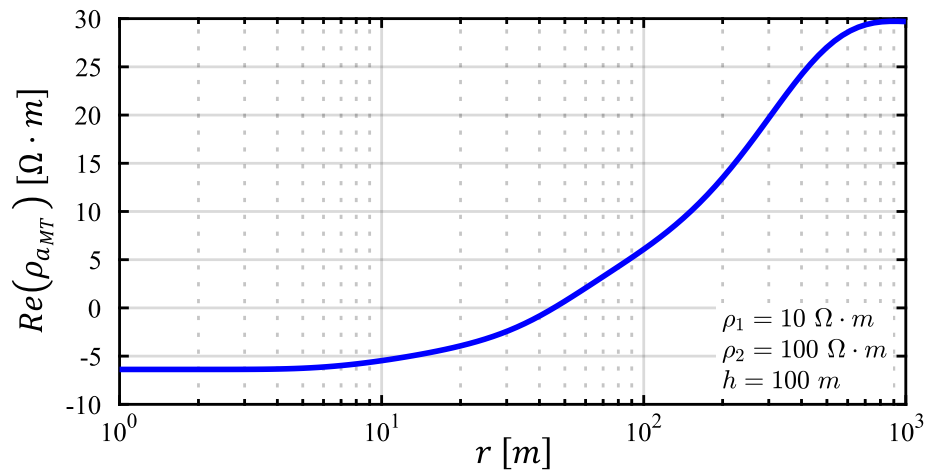


Figura 40. $Re(\rho_{a_{MT}})$ con $F = 1 Hz$, modelado para un medio estratificado.

Ahora bien, la figura 40 presenta $Re(\rho_{a_{MT}})$ para el mismo modelo de capas con interfase a 100 m, pero en este caso variamos la distancia a la fuente para profundizar, es decir, nos encontramos a menos de una *skin depth* ($r \ll 1\delta$) distante del rayo. En este contexto, se esperaría que la curva (Fig. 40) fuese análoga a la expuesta en el gráfico 39, ya que las derivadas de Fréchet son similares (Fig. 38). Se observa en la figura 40 que ni siquiera se reconstruye la resistividad real del primer estrato, sin embargo, este resultado no debe tomarse como verdadero, ya que el filtro de O'Neill (1975) no logra transformar adecuadamente la componente real e imaginaria de $E_r(\lambda, z = 0)$ (Ec. 179) para un medio homogéneo isotrópico, o sea, el campo transformado difiere de la expresión analítica de $E_r(r, z = 0)$ (Ec. 69), véase la figura 41. La solución de este asunto es la creación de un filtro que funcione para $r \ll 1\delta$, y también para $r \gg 1\delta$, ya que a grandes distancias la componente imaginaria de $E_r(\lambda, z = 0)$ se transforma pero con signo contrario, en este sentido, para obtener la curva del gráfico 39 solo se invirtió el signo en $Im(E_r(r, z = 0))$ para después calcular $Re(\rho_{a_{MT}})$.

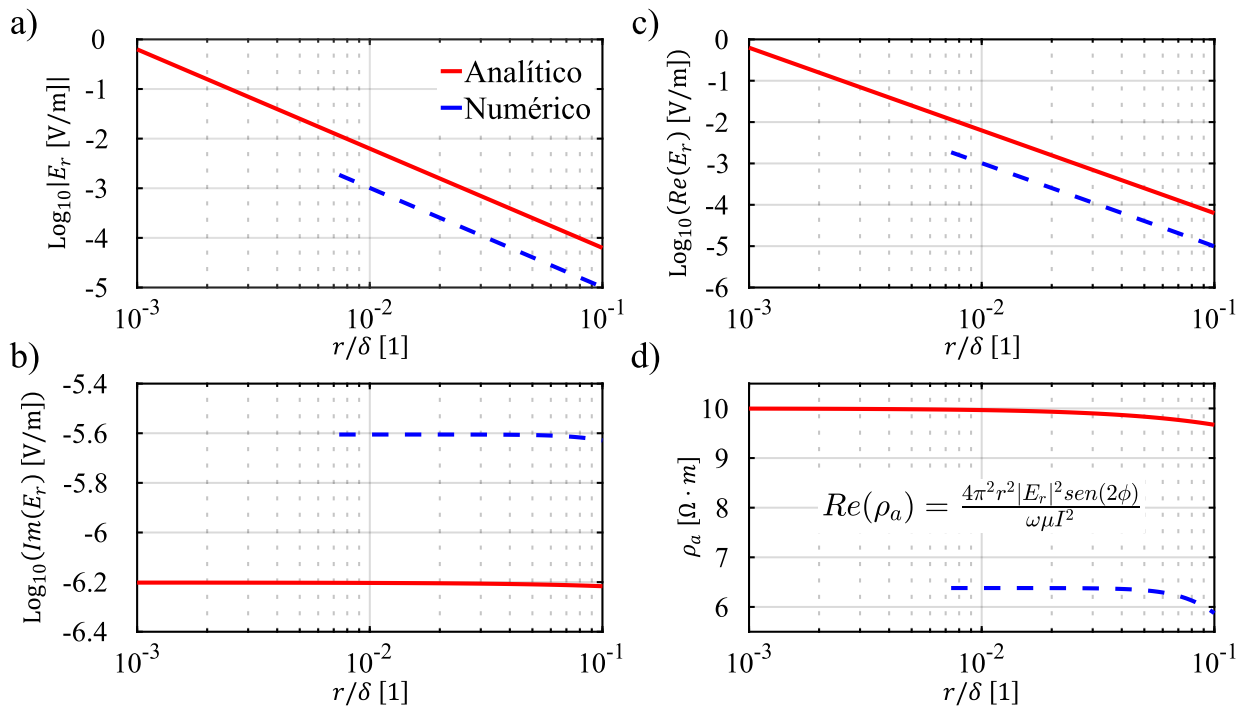


Figura 41. a) Valor absoluto de E_r en logaritmo base diez. b) Componente imaginaria de E_r en logaritmo base diez. c) Componente real de E_r en logaritmo base diez. d) Resistividad aparente $Re(\rho_{a_{MT}})$. Todas las figuras son modeladas para un medio homogéneo isotrópico de $10 \Omega \cdot m$ utilizando $F = 1 \text{ Hz}$ e $I = 1 \text{ A}$. La curva roja es la solución analítica de $E_r(r, z = 0)$ (Ec. 69) para un medio homogéneo, mientras que la azul es $E_r(r, z = 0)$ obtenido de $E_r(\lambda, z = 0)$ (Ec. 179).

Capítulo 5. Conclusiones

La presente investigación se ha centrado en analizar y evaluar la hipótesis planteada sobre el fenómeno electromagnético del rayo nube-tierra. A lo largo del estudio, se han desarrollado los fundamentos teóricos, investigando su comportamiento y características. Se realizaron evaluaciones y comparativas de los resultados obtenidos en relación con la información bibliográfica existente; como resultado de este análisis, se determinó que el modelo del rayo utilizado en este estudio es congruente y coherente con la información revisada. En consecuencia, los resultados obtenidos respaldan la hipótesis planteada y confirma la validez del modelo del rayo nube-tierra.

Se demuestra teóricamente que es posible modelar los campos electromagnéticos del *return-stroke* dentro de la tierra. Además, existen las derivadas de Fréchet de forma analítica, teniendo en cuenta las perturbaciones tanto en la resistividad como en el coeficiente de anisotropía, que dependen de la profundidad. Sin embargo, se debe tener en cuenta que este modelo es cuasi-estático. Por lo tanto, para frecuencias mayores a 10^5 Hz, es necesario replantear el problema. En este sentido, queda abierta la posibilidad de investigación para futuros trabajos. No obstante, se ha demostrado que a medida que aumenta la frecuencia, la capacidad de investigación vertical disminuye.

Los campos electromagnéticos del rayo permiten tratar conjuntamente las técnicas de corriente directa (DC) y magnetotelúrica (MT). Además, se presenta una nueva definición de resistividad aparente ($Re(\rho_{aMT})$) que unifica el enfoque de los sondeos de corriente directa y magnetotelúricos. Es importante destacar que existe un lapso de aproximadamente 37 años entre la propuesta de la resistividad aparente en DC y MT, y desde la introducción de la definición de resistividad aparente en MT hasta la actualidad han pasado 70 años. Esto significa que después de 107 años, este trabajo logra unificar las metodologías con una nueva definición de resistividad aparente.

Una de las ventajas significativas que el rayo aporta a la prospección electromagnética es su amplio espectro de frecuencias, puesto que, en el dominio del tiempo, puede considerarse como un pulso electromagnético similar a un delta de Dirac. Con la teoría desarrollada en este trabajo, podemos intentar caracterizar la resistividad a grandes profundidades utilizando frecuencias muy bajas. Sin embargo, para llevar a cabo esta metodología en la práctica, se requiere una cuidadosa planificación y el desarrollo de equipos de medición especializados. Además, la señal registrada debe ser filtrada de todas las fuentes de interferencia ajenas al rayo. Asimismo, es necesario aplicar análisis estadísticos para examinar múltiples *return-strokes*.

Literatura citada

- American Meteorological Society. (2023). *Ionosphere*. <https://glossary.ametsoc.org/wiki/Ionosphere>
- Anderson, W. L. (1979). Numerical integration of related hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering. *Geophysics*, *44*(7), 1287–1305. <https://doi.org/10.1190/1.1441007>
- Backus, G. E. & Gilbert, J. F. (1967). Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems. *Geophysical Journal International*, *13*(1-3), 247–276. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02159.x>
- Cagniard, L. (1953). Basic theory of the magneto-telluric method of geophysical prospecting. *Geophysics*, *18*(3), 605–635. <https://doi.org/10.1190/1.1437915>
- Debnath, L. & Bhatta, D. (2007). Hankel transforms and their applications. En *Integral Transforms and Their Applications*. (2a ed.) pp. 315–337. Taylor & Francis Group.
- Dwyer, J. R. & Uman, M. A. (2014). The physics of lightning. *Physics Reports*, *534*(4), 147–241. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2013.09.004>
- Edwards, R. N. (1980). A grounded vertical long wire source system for plane wave magnetotelluric analog modeling. *Geophysics*, *45*(10), 1523–1529. <https://doi.org/10.1190/1.1441047>
- Edwards, R. N., Nobes, D. C., & Gómez-Treviño, E. (1984). Offshore electrical exploration of sedimentary basins: The effects of anisotropy in horizontally isotropic, layered media. *Geophysics*, *49*(5), 566–576. <https://doi.org/10.1190/1.1441691>
- Encyclopaedia Britannica. (2023). *Electrical charge distribution in a thunderstorm*. <https://www.britannica.com/science/cumulonimbus#/media/1/146500/19731>
- Ghosh, D. P. (1970). *The application of linear filter theory to the direct interpretation of geoelectrical resistivity measurements* [Tesis doctoral, Technische Universiteit Delft]. Repositorio institucional TUDelft. <http://resolver.tudelft.nl/uuid:88a568bb-ebec-4d7b-92df-6639b42da2b2>
- Gómez-Treviño, E. (1987). Nonlinear integral equations for electromagnetic inverse problems. *Geophysics*, *52*(9), 1297–1302. <https://doi.org/10.1190/1.1442390>
- Gómez-Treviño, E. & Esparza, F. J. (2014). What is the depth of investigation of a resistivity measurement? *Geophysics*, *79*(2), W1–W10. <https://doi.org/10.1190/geo2013-0261.1>
- Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M. (2007). Definite integrals of special functions. En A. Jeffrey & D. Zwillinger (Eds.), *Table of Integrals, Series, and Products*. (7a ed.) pp. 631–857. Academic Press.
- Kearey, P., Brooks, M., & Hill, I. (2002a). Electrical surveying. En *An Introduction to Geophysical Exploration*. (3a ed.) pp. 183–207. Wiley-Blackwell.
- Kearey, P., Brooks, M., & Hill, I. (2002b). Electromagnetic surveying. En *An Introduction to Geophysical Exploration*. (3a ed.) pp. 208–230. Wiley-Blackwell.
- Kelley, M. C. (2014). Atmospheric electricity. En *The Earth's Electric Field*. pp. 29–52. Elsevier.
- Mimouni, A., Rachidi, F., & Rubinstein, M. (2014). Electromagnetic fields of a lightning return stroke in presence of a stratified ground. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, *56*(2), 413–418. <https://doi.org/10.1109/TEM.2013.2282995>

- Murphy, M. J., Cramer, J. A., & Said, R. K. (2021). Recent history of upgrades to the U.S. national lightning detection network. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 38(3), 573–585. <https://doi.org/10.1175/JTECH-D-19-0215.1>
- Naidu, G. D. (2012). *Deep Crustal Structure of the Son-Narmada-Tapti Lineament, Central India*. Springer Berlin Heidelberg.
- Oldenburg, D. W. (1979). One-dimensional inversion of natural source magnetotelluric observations. *Geophysics*, 44(7), 1218–1244. <https://doi.org/10.1190/1.1441004>
- O'Neill, D. J. (1975). Improved linear filter coefficients for application in apparent resistivity computations. *Exploration Geophysics*, 6(4), 104–109. <https://doi.org/10.1071/EG975104>
- Parker, R. L. (1971). The inverse problem of electrical conductivity in the mantle. *Geophysical Journal International*, 22(2), 121–138. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1971.tb03587.x>
- Parker, R. L. (1972). Inverse theory with grossly inadequate data. *Geophysical Journal International*, 29(2), 123–138. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1972.tb02203.x>
- Parker, R. L. (1977). The fréchet derivative for the one-dimensional electromagnetic induction problem. *Geophysical Journal International*, 49(2), 543–547. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1977.tb03723.x>
- Price, C. (2016). ELF electromagnetic waves from lightning: the schumann resonances. *Atmosphere*, 7(9), 116. <https://doi.org/10.3390/atmos7090116>
- Rakov, V. A. (2013). The physics of lightning. *Surveys in Geophysics*, 34, 701–729. <https://doi.org/10.1007/s10712-013-9230-6>
- Rakov, V. A. & Uman, M. A. (2007). *Lightning: physics and effects*. Cambridge University Press.
- Reynolds, J. M. (2011). *An introduction to applied and environmental geophysics*. (2a ed.). Wiley-Blackwell.
- Rust, W. M. (1938). A historical review of electrical prospecting methods. *Geophysics*, 3(1), 1–6. <https://doi.org/10.1190/1.1439461>
- Schoene, J., Uman, M. A., Rakov, V. A., Rambo, K. J., Jerauld, J., Mata, C. T., Mata, A. G., Jordan, D. M., & Schnetzer, G. H. (2009). Characterization of return-stroke currents in rocket-triggered lightning. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 114(D3). <https://doi.org/10.1029/2008JD009873>
- Spies, B. R. & Eggers, D. E. (1986). The use and misuse of apparent resistivity in electromagnetic methods. *Geophysics*, 51(7), 1462–1471. <https://doi.org/10.1190/1.1442194>
- Uman, M. A. (1984). *Lightning*. Dover Publications.
- Wait, J. R. (1981). On: “A grounded vertical long-wire source system for plane wave magnetotelluric analog modeling” by R. N. Edwards (GEOPHYSICS, october 1980, p. 1523–1529). *Geophysics*, 46(6), 934–935. <https://doi.org/10.1190/1.1441232>
- Ward, S. H. & Hohmann, G. W. (1988). Electromagnetic theory for geophysical applications. En *Electromagnetic methods in applied geophysics*. pp. 130–311. Society of Exploration Geophysicists.
- Watson, G. N. (1922). A treatise on the theory of Bessel functions. En *Infinite Integral*. pp. 383–449. Cambridge University Press.

- Wenner, F. (1916). A method of measuring earth resistivity. *Bulletin of the Bureau of Standards*, 12(4), 469–478. <https://doi.org/10.6028/bulletin.282>
- Werthmüller, D., Key, K., & Slob, E. C. (2019). A tool for designing digital filters for the hankel and fourier transforms in potential, diffusive, and wavefield modeling. *Geophysics*, 84(2), F47–F56. <https://doi.org/10.1190/geo2018-0069.1>
- Zhdanov, M. S. (2018). Electromagnetic methods in the frequency and time domains. En *Foundations of Geophysical Electromagnetic Theory and Methods*. (2a ed.). pp. 585–623. Elsevier.

Anexos

Anexo A. Desarrollo algebraico de rotacionales

A.1. $\nabla \times \nabla \times H_\phi \hat{\phi}$

Desarrollando el primer rotacional

$$\begin{aligned} \nabla \times H_\phi \hat{\phi} &= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\phi} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r \cdot H_\phi & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial 0}{\partial \phi} - \frac{\partial r H_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} - \left(\frac{\partial 0}{\partial r} - \frac{\partial 0}{\partial z} \right) r\hat{\phi} + \left(\frac{\partial r H_\phi}{\partial r} - \frac{\partial 0}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{z}} \right] = \\ &= \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial r H_\phi}{\partial z} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial r H_\phi}{\partial r} \hat{\mathbf{z}} \right) = -\frac{\partial H_\phi}{\partial z} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial r H_\phi}{\partial r} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{\partial H_\phi}{\partial z} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial H_\phi}{\partial r} + H_\phi \frac{\partial r}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{z}} = \\ &= -\frac{\partial H_\phi}{\partial z} \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial H_\phi}{\partial r} + \frac{H_\phi}{r} \right) \hat{\mathbf{z}}. \quad (180) \end{aligned}$$

Extendiendo el segundo rotacional

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times H_\phi \hat{\phi} &= \nabla \times \left[-\frac{\partial H_\phi}{\partial z} \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial H_\phi}{\partial r} + \frac{H_\phi}{r} \right) \hat{\mathbf{z}} \right] = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\phi} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial H_\phi}{\partial z} & 0 & \frac{\partial H_\phi}{\partial r} + \frac{H_\phi}{r} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial H_\phi}{\partial r} + \frac{H_\phi}{r} \right) + \frac{\partial 0}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} - \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial H_\phi}{\partial r} + \frac{H_\phi}{r} \right) + \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} \right) r\hat{\phi} + \left(\frac{\partial 0}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial \phi \partial z} \right) \hat{\mathbf{z}} \right] = \\ &= \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial \phi \partial r} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{H_\phi}{r} \right) \right) \hat{\mathbf{r}} - \left(\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{H_\phi}{r} \right) + \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} \right) r\hat{\phi} + \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial \phi \partial z} \hat{\mathbf{z}} \right] = \\ &= \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial \phi \partial r} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{H_\phi}{r} \right) \right) \hat{\mathbf{r}} - \left(\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{H_\phi}{r} \right) + \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} \right) r\hat{\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial \phi \partial z} \hat{\mathbf{z}} \right]. \quad (181) \end{aligned}$$

Desarrollando la componente ϕ

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{H_\phi}{r} \right) - \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} &= -\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} - H_\phi \frac{\partial r^{-1}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} = \\ &= -\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} + \frac{H_\phi}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2}. \quad (182) \end{aligned}$$

A.2. $\nabla \times E_r \hat{\mathbf{r}}$

$$\begin{aligned}
\nabla \times E_r \hat{\mathbf{r}} &= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_r & r \cdot 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial 0}{\partial \phi} - \frac{\partial 0}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} - \left(\frac{\partial 0}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial z} \right) r\hat{\boldsymbol{\phi}} + \left(\frac{\partial 0}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{z}} \right] = \\
&= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial E_r}{\partial z} r\hat{\boldsymbol{\phi}} - \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \hat{\mathbf{z}} \right] = \frac{\partial E_r}{\partial z} \hat{\boldsymbol{\phi}} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \hat{\mathbf{z}}. \quad (183)
\end{aligned}$$

A.3. $\nabla \times E_z \hat{\mathbf{z}}$

$$\begin{aligned}
\nabla \times E_z \hat{\mathbf{z}} &= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r \cdot 0 & E_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial 0}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial 0}{\partial r} \right) r\hat{\boldsymbol{\phi}} + \left(\frac{\partial 0}{\partial r} - \frac{\partial 0}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{z}} \right] = \\
&= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial E_z}{\partial \phi} \hat{\mathbf{r}} - \frac{\partial E_z}{\partial r} r\hat{\boldsymbol{\phi}} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \hat{\mathbf{r}} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (184)
\end{aligned}$$

A.4. $E_r \hat{\mathbf{r}} \times \frac{\partial \sigma_h}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$

$$\begin{aligned}
E_r \hat{\mathbf{r}} \times \frac{\partial \sigma_h}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\mathbf{z}} \\ E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \sigma_h}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(0 \cdot \frac{\partial \sigma_h}{\partial z} - 0 \right) \hat{\mathbf{r}} - \left(E_r \frac{\partial \sigma_h}{\partial z} - 0 \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + (E_r \cdot 0 - 0) \hat{\mathbf{z}} = \\
&= -E_r \frac{\partial \sigma_h}{\partial z} \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (185)
\end{aligned}$$

A.5 $E_z \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$

$$\begin{aligned}
E_z \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 0 & E_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(0 \cdot \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - E_z \cdot 0 \right) \hat{\mathbf{r}} - \left(0 \cdot \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - E_z \cdot 0 \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + (0 - 0) \hat{\mathbf{z}} = 0. \quad (186)
\end{aligned}$$

A.6. $\nabla \times (E_r \hat{\mathbf{r}} + E_z \hat{\mathbf{z}})$

$$\begin{aligned}
\nabla \times (E_r \hat{\mathbf{r}} + E_z \hat{\mathbf{z}}) &= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_r & 0 & E_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial 0}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial z} \right) r\hat{\boldsymbol{\phi}} + \left(\frac{\partial 0}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{z}} \right] = \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \hat{\mathbf{r}} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial z} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} - \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \hat{\mathbf{z}}. \quad (187)
\end{aligned}$$

Anexo B. Ecuaciones obtenidas con la ley de Ampère

Sustituyendo el resultado de $\nabla \times H_\phi \hat{\phi}$ (Ec. 180 del anexo A.1.) en la ley de Ampère (Ec. 34) se consigue

$$-\frac{\partial H_\phi}{\partial z} \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial H_\phi}{\partial r} + \frac{H_\phi}{r} \right) \hat{\mathbf{z}} = \sigma_h E_r \hat{\mathbf{r}} + \sigma_z E_z \hat{\mathbf{z}}. \quad (188)$$

Igualando componentes en ambos miembros de 188 estableceremos las siguientes identidades

$$-\frac{\partial H_\phi}{\partial z} = \sigma_h E_r \quad (189)$$

y

$$\frac{\partial H_\phi}{\partial r} + \frac{H_\phi}{r} = \sigma_z E_z. \quad (190)$$

Anexo C. Ecuaciones obtenidas con la ley de Faraday

A partir de la ley de Faraday (Ec. 1a) con $\mathbf{E} = E_r \hat{\mathbf{r}} + E_z \hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{H} = H_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$ se consigue

$$\nabla \times (E_r \hat{\mathbf{r}} + E_z \hat{\mathbf{z}}) = -i\omega\mu H_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (191)$$

Sustituyendo el desglose de $\nabla \times (E_r \hat{\mathbf{r}} + E_z \hat{\mathbf{z}})$ (Ec. 187 del anexo A.6.)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \hat{\mathbf{r}} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial z} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} - \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \hat{\mathbf{z}} = -i\omega\mu H_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (192)$$

Separando la componente $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ estableceremos

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -i\omega\mu H_\phi. \quad (193)$$

Anexo D. Derivadas parciales

D.1. $\frac{\partial E_z}{\partial r}$

Despejando la ecuación 190 (anexo B) se infiere

$$E_z = \frac{1}{\sigma_z} \left(\frac{\partial H_\phi}{\partial r} + \frac{H_\phi}{r} \right). \quad (194)$$

Derivando con respecto a r

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial r} &= \frac{1}{\sigma_z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial H_\phi}{\partial r} + \frac{H_\phi}{r} \right) = \frac{1}{\sigma_z} \left[\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{H_\phi}{r} \right) \right] = \frac{1}{\sigma_z} \left[\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} + H_\phi \frac{\partial r^{-1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial r} \right] = \\ &= \frac{1}{\sigma_z} \left[\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} - \frac{H_\phi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial r} \right]. \quad (195) \end{aligned}$$

D.2. $\frac{\partial H_\phi}{\partial z}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_\phi}{\partial z} &= \frac{I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{e^{-z\alpha_h}}{r} - \left(\frac{fz}{r} \right) \frac{e^{-R\alpha_z}}{R} \right] = \frac{I}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-z\alpha_h}}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{fz e^{-R\alpha_z}}{r R} \right) \right] = \\ &= \frac{I}{2\pi} \left[\frac{1}{r} (-\alpha_h e^{-z\alpha_h}) - \frac{f}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z e^{-R\alpha_z}}{R} \right) \right] = \\ &= \frac{I}{2\pi} \left[\frac{1}{r} (-\alpha_h e^{-z\alpha_h}) - \frac{f}{r} \left(\frac{z}{R} \frac{\partial e^{-R\alpha_z}}{\partial z} + e^{-R\alpha_z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{R} \right) \right) \right] = \\ &= \frac{I}{2\pi} \left[\frac{1}{r} (-\alpha_h e^{-z\alpha_h}) - \frac{f}{r} \left(\frac{z e^{-R\alpha_z}}{R} \frac{\partial}{\partial z} - R\alpha_z + e^{-R\alpha_z} \left(z \frac{\partial R^{-1}}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial z}{\partial z} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

Considerando que $R = \sqrt{r^2 + f^2 z^2}$, entonces

$$\begin{aligned} &= \frac{I}{2\pi} \left[\frac{1}{r} (-\alpha_h e^{-z\alpha_h}) - \frac{f}{r} \left(\frac{z e^{-R\alpha_z}}{R} \left(\frac{-\alpha_z}{2\sqrt{r^2 + f^2 z^2}} \frac{\partial (r^2 + f^2 z^2)}{\partial z} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-R\alpha_z} \left(\frac{-z}{2(r^2 + f^2 z^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial (r^2 + f^2 z^2)}{\partial z} + \frac{1}{R} \right) \right) \right] = \\ &= \frac{I}{2\pi} \left[\frac{-\alpha_h e^{-z\alpha_h}}{r} - \frac{f}{r} \left(\frac{z e^{-R\alpha_z}}{R} \left(\frac{-2\alpha_z f^2 z}{2R} \right) + e^{-R\alpha_z} \left(\frac{-z}{2R^3} \cdot (2f^2 z) + \frac{1}{R} \right) \right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{I}{2\pi} \left[\frac{-\alpha_h e^{-z\alpha_h}}{r} - \frac{f}{r} \left(\frac{-\alpha_z f^2 z^2 e^{-R\alpha_z}}{R^2} - \frac{f^2 z^2 e^{-R\alpha_z}}{R^3} + \frac{e^{-R\alpha_z}}{R} \right) \right] = \\
&= \frac{I}{2\pi} \left[\frac{-\alpha_h e^{-z\alpha_h}}{r} + \frac{\alpha_z f^3 z^2 e^{-R\alpha_z}}{r R^2} + \frac{f^3 z^2 e^{-R\alpha_z}}{r R^3} - \frac{f e^{-R\alpha_z}}{r R} \right]. \quad (196)
\end{aligned}$$

D.3. $\frac{\partial H_\phi}{\partial r}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_\phi}{\partial r} &= \frac{I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{e^{-z\alpha_h}}{r} - \left(\frac{fz}{r} \right) \frac{e^{-R\alpha_z}}{R} \right] = \\
&= \frac{I}{2\pi} \left[e^{-z\alpha_h} (-r^{-2}) - fz \left(\frac{1}{rR} \frac{\partial e^{-R\alpha_z}}{\partial r} + e^{-R\alpha_z} \frac{\partial (rR)^{-1}}{\partial r} \right) \right] = \\
&= \frac{I}{2\pi} \left[-\frac{e^{-z\alpha_h}}{r^2} - fz \left(\frac{e^{-R\alpha_z}}{rR} \left(-\alpha_z \cdot \frac{1}{2} \cdot (r^2 + f^2 z^2)^{-1/2} \cdot 2r \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + e^{-R\alpha_z} \left(r^{-1} \left(-\frac{1}{2} \cdot (r^2 + f^2 z^2)^{-3/2} \cdot 2r \right) - \frac{1}{r^2 R} \right) \right) \right] = \\
&= \frac{I}{2\pi} \left[-\frac{e^{-z\alpha_h}}{r^2} - fz \left(-\frac{\alpha_z e^{-R\alpha_z}}{R^2} + e^{-R\alpha_z} \left(-\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^2 R} \right) \right) \right] = \\
&= \frac{I}{2\pi} \left[-\frac{e^{-z\alpha_h}}{r^2} + fz e^{-R\alpha_z} \left(\frac{\alpha_z}{R^2} + \frac{1}{R^3} + \frac{1}{r^2 R} \right) \right]. \quad (197)
\end{aligned}$$

Anexo E. Identidades de ρ

Si el coeficiente de anisotropía se define como $f^2 = \rho_z \rho_h^{-1}$, e introducimos la variable $g^2 = f^{-2}$, y además, recordamos que $\rho^2 = \rho_z \rho_h$ entonces se puede demostrar que

$$\rho g = \sqrt{\rho_z \rho_h} \cdot \sqrt{\frac{\rho_h}{\rho_z}} = \sqrt{\rho_h^2} = \rho_h. \quad (198)$$

Asimismo,

$$\rho g f^2 = \sqrt{\rho_z \rho_h} \cdot \sqrt{\frac{\rho_h}{\rho_z}} \cdot \frac{\rho_z}{\rho_h} = \sqrt{\rho_h^2} \cdot \frac{\rho_z}{\rho_h} = \rho_z. \quad (199)$$

Por otra parte, es evidente que al derivar respecto de z en ambos lados de la igualdad en la ecuación 198 conseguiremos

$$\frac{\partial \rho g}{\partial z} = (\rho g)' = \frac{\partial \rho_h}{\partial z} = (\rho_h)'. \quad (200)$$

Anexo F. Transformadas de Hankel

$$\text{F.1. } \int_0^\infty e^{-z\sqrt{f^2\lambda^2+\alpha^2}} J_1(\lambda r) d\lambda$$

La fórmula 2 del párrafo 13.47 en Watson (1922) establece

$$\int_0^\infty J_\mu(bt) \frac{K_\nu \left[a\sqrt{t^2+s^2} \right]}{(t^2+s^2)^{\frac{\nu}{2}}} t^{\mu+1} dt = \frac{b^\mu}{a^\nu} \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{s} \right)^{\nu-\mu-1} K_{\nu-\mu-1} \left[s\sqrt{a^2+b^2} \right]. \quad (201)$$

Con $\mu = 0$ y $\nu = 1/2$ se consigue

$$\int_0^\infty J_0(bt) \frac{K_{\frac{1}{2}} \left[a\sqrt{t^2+s^2} \right]}{(t^2+s^2)^{\frac{1}{4}}} t dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{s} \right)^{-\frac{1}{2}} K_{-\frac{1}{2}} \left[s\sqrt{a^2+b^2} \right]. \quad (202)$$

Considerando que $K_{\frac{1}{2}}(m) = K_{-\frac{1}{2}}(m) = m^{-\frac{1}{2}} e^{-m}$

$$\int_0^\infty J_0(bt) \frac{\left(a\sqrt{t^2+s^2} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-a\sqrt{t^2+s^2}}}{(t^2+s^2)^{\frac{1}{4}}} t dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\sqrt{s}}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}} \right) \left(s\sqrt{a^2+b^2} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-s\sqrt{a^2+b^2}}. \quad (203)$$

Simplificando

$$\int_0^\infty J_0(bt) \frac{e^{-a\sqrt{t^2+s^2}}}{\sqrt{a}\sqrt{t^2+s^2}} t dt = \frac{e^{-s\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a}\sqrt{a^2+b^2}}. \quad (204)$$

Por otra parte, la integral por resolver es $\int_0^\infty e^{-z\sqrt{f^2\lambda^2+\alpha^2}} J_1(\lambda r) d\lambda$ (Ec. 62). Haciendo el cambio de variable $x = \lambda r$, entonces $\lambda = x/r$ y $d\lambda = dx/r$. Así que,

$$\int_0^\infty e^{-z\sqrt{f^2\lambda^2+\alpha^2}} J_1(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{r} \int_0^\infty e^{-z\sqrt{(f x/r)^2+\alpha^2}} J_1(x) dx. \quad (205)$$

Realizando el cambio de variable $z' = z/r$, por consiguiente $z = z'r$. Entonces

$$\frac{1}{r} \int_0^\infty e^{-z'r\sqrt{(f x/r)^2+\alpha^2}} J_1(x) dx = \frac{1}{r} \int_0^\infty e^{-z'\sqrt{(f x)^2+(r\alpha)^2}} J_1(x) dx. \quad (206)$$

Cambiando $a = -z'f$ y $b = r\alpha/f$, entonces $-z' = a/f$ y $\alpha = bf/r$. De este modo,

$$\frac{1}{r} \int_0^\infty e^{-z'\sqrt{(fx)^2+(r\alpha)^2}} J_1(x) dx = \frac{1}{r} \int_0^\infty e^{a\sqrt{x^2+b^2}} J_1(x) dx. \quad (207)$$

Aplicando integración por partes:

$$u = e^{a\sqrt{x^2+b^2}}, \quad (208a)$$

$$du = \frac{ax e^{a\sqrt{x^2+b^2}}}{\sqrt{x^2+b^2}}, \quad (208b)$$

$$dv = J_1(x) dx, \quad (208c)$$

$$y \ v = \int J_1(x) dx = -J_0(x). \quad (208d)$$

Por consiguiente

$$\frac{1}{r} \left[\left(-e^{a\sqrt{x^2+b^2}} J_0(x) \right) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{ax e^{a\sqrt{x^2+b^2}}}{\sqrt{x^2+b^2}} J_0(x) dx \right] = \frac{e^{ab}}{r} + \frac{a}{r} \int_0^\infty \frac{x e^{a\sqrt{x^2+b^2}}}{\sqrt{x^2+b^2}} J_0(x) dx. \quad (209)$$

Sustituyendo $x = \lambda r$ y $dx = r d\lambda$

$$\frac{e^{ab}}{r} + \frac{a}{r} \int_0^\infty \frac{\lambda r e^{a\sqrt{(\lambda r)^2+b^2}}}{\sqrt{(\lambda r)^2+b^2}} J_0(\lambda r) r d\lambda = \frac{e^{ab}}{r} + ar \int_0^\infty \frac{\lambda e^{a\sqrt{(\lambda r)^2+b^2}}}{\sqrt{(\lambda r)^2+b^2}} J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (210)$$

Empleando $a = -z'f = -zf/r$

$$\frac{e^{-zfb/r}}{r} - zf \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-zf\sqrt{\lambda^2+(b/r)^2}}}{\sqrt{(\lambda r)^2+b^2}} J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{e^{-zfb/r}}{r} - \frac{zf}{r} \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-zf\sqrt{\lambda^2+(b/r)^2}}}{\sqrt{\lambda^2+(b/r)^2}} J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (211)$$

Sustituyendo $\alpha = bf/r$, y multiplicando en la integral por \sqrt{zf}/\sqrt{zf}

$$\frac{e^{-z\alpha}}{r} - \frac{zf\sqrt{zf}}{r} \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-zf\sqrt{\lambda^2+(\alpha/f)^2}}}{\sqrt{zf}\sqrt{\lambda^2+(\alpha/f)^2}} J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (212)$$

Utilizando el resultado de la integral (Ec. 204) de Watson (1922) con $a = zf$, $t = \lambda$ y $s = \alpha/f$,

$$\frac{e^{-z\alpha}}{r} - \frac{zf\sqrt{zf}}{r} \left(\frac{e^{-\frac{\alpha}{f}\sqrt{(fz)^2+r^2}}}{\sqrt{zf}\sqrt{(fz)^2+r^2}} \right) = \frac{e^{-z\alpha}}{r} - \frac{zf}{r} \left(\frac{e^{-\frac{\alpha}{f}\sqrt{(fz)^2+r^2}}}{\sqrt{(fz)^2+r^2}} \right). \quad (213)$$

Simplificando

$$\frac{e^{-z\alpha}}{r} - \frac{zf}{r} \left(\frac{e^{-\frac{\alpha}{f}\sqrt{(fz)^2+r^2}}}{\sqrt{(fz)^2+r^2}} \right) = \frac{e^{-z\alpha}}{r} - \left(\frac{fz}{r} \right) \frac{e^{-\frac{\alpha}{f}R}}{R}, \quad (214)$$

donde $R = \sqrt{r^2 + f^2z^2}$. Por último, considerando

$$\alpha = \sqrt{i\omega\mu f\sigma} = \sqrt{i\omega\mu\sqrt{\frac{\sigma_h}{\sigma_z}}\sqrt{\sigma_h\cdot\sigma_z}} = \sqrt{i\omega\mu\sigma_h} = \alpha_h \quad (215a)$$

$$y \frac{\alpha}{f} = \frac{\sqrt{i\omega\mu f\sigma}}{f} = \frac{\sqrt{i\omega\mu\sigma_h}}{\sqrt{\frac{\sigma_h}{\sigma_z}}} = \sqrt{i\omega\mu\sigma_z} = \alpha_z, \quad (215b)$$

la expresión 214 se sintetiza

$$\frac{e^{-z\alpha_h}}{r} - \left(\frac{fz}{r} \right) \frac{e^{-\alpha_z R}}{R}. \quad (216)$$

Esta última ecuación (Ec. 216) representa la solución analítica de la integral en la expresión 62.

$$\mathbf{F.2.} \int_0^\infty r \left(\frac{\partial^2 H_\phi(r,z)}{\partial r^2} - \frac{H_\phi(r,z)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi(r,z)}{\partial r} \right) J_1(\lambda r) dr$$

Del teorema 7.3.4 (Debnath & Bhatta, 2007) sabemos:

$$\mathcal{H}_n \left[\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right] = -\lambda^2 f_n(\lambda). \quad (217)$$

Por otra parte, la expresión por transformar es

$$\int_0^\infty r \left(\frac{\partial^2 H_\phi(r,z)}{\partial r^2} - \frac{H_\phi(r,z)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi(r,z)}{\partial r} \right) J_1(\lambda r) dr. \quad (218)$$

Aplicando el teorema 217 en la integral 218 se deduce

$$\int_0^\infty r \left(\frac{\partial^2 H_\phi(r, z)}{\partial r^2} - \frac{H_\phi(r, z)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi(r, z)}{\partial r} \right) J_1(\lambda r) dr = -\lambda^2 H_\phi(\lambda, z). \quad (219)$$

F.3. $\int_0^\infty r \left(\frac{\partial^2 H_\phi(r, z)}{\partial z^2} \right) J_1(\lambda r) dr$

$$\int_0^\infty r \left(\frac{\partial^2 H_\phi(r, z)}{\partial z^2} \right) J_1(\lambda r) dr = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^\infty r H_\phi(r, z) J_1(\lambda r) dr = \frac{d^2 H_\phi(\lambda, z)}{dz^2}. \quad (220)$$

F.4. $\int_0^\infty r \left(\frac{\partial H_\phi(r, z)}{\partial z} \right) J_1(\lambda r) dr$

$$\int_0^\infty r \left(\frac{\partial H_\phi(r, z)}{\partial z} \right) J_1(\lambda r) dr = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty r H_\phi(r, z) J_1(\lambda r) dr = \frac{dH_\phi(\lambda, z)}{dz}. \quad (221)$$

Anexo G. Campo magnético en la superficie $H_\phi(r, 0)$

La ley de Ampère en su forma integral y despreciando las corrientes de desplazamiento establece:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\bar{\mathbf{l}} = I. \quad (222)$$

Ahora bien, considerando las características del modelo: $\mathbf{H}(r, z = 0) = H_\phi(r, z = 0)\hat{\phi}$ y $d\bar{\mathbf{l}} = rd\phi\hat{\phi}$.

Entonces,

$$\int_0^{2\pi} H_\phi(r, 0)\hat{\phi} \cdot rd\phi\hat{\phi} = rH_\phi(r, 0) \int_0^{2\pi} d\phi = rH_\phi(r, 0)\phi|_0^{2\pi} = rH_\phi(r, 0)2\pi. \quad (223)$$

Por lo tanto,

$$H_\phi(r, 0) = \frac{I}{2\pi r}. \quad (224)$$

Anexo H. Evaluación de los campos eléctricos

H.1. $E_r(r, z = 0)$

Evaluando en $z = 0$ la expresión 66:

$$\begin{aligned} E_r(r, z = 0) &= \frac{I}{2\pi\sigma r} \left[\frac{e^{-r\alpha_z}}{r} + \frac{\alpha_h}{f} \right] = \frac{I}{2\pi\sigma r} \left[\frac{e^{-r\alpha_z}}{r} + \sigma_z \right] = \frac{I}{2\pi\sigma r} \sqrt{i\omega\mu\sigma_z} \left[1 + \frac{e^{-r\sqrt{i\omega\mu\sigma_z}}}{r\sqrt{i\omega\mu\sigma_z}} \right] = \\ &= \frac{I}{2\pi r} \frac{\sqrt{i\omega\mu}}{\sqrt{\sigma_h}} \left[1 + \frac{e^{-r\sqrt{i\omega\mu\sigma_z}}}{r\sqrt{i\omega\mu\sigma_z}} \right] = \frac{I}{2\pi r} \frac{i\omega\mu}{\sqrt{i\omega\mu\sigma_h}} \left[1 + \frac{e^{-r\sqrt{i\omega\mu\sigma_z}}}{r\sqrt{i\omega\mu\sigma_z}} \right]. \end{aligned} \quad (225)$$

H.2. $E_z(r = 0, z)$

Evaluando en $r = 0$ la ecuación 72:

$$E_z(r = 0, z) = \frac{Ifze^{-fz\alpha_z}}{2\pi\sigma_z f^3 z^3} (\alpha_z f z + 1) = \frac{Ie^{-fz\alpha_z}}{2\pi} \left(\frac{\alpha_z}{\sigma_z f z} + \frac{1}{\sigma_z f^2 z^2} \right). \quad (226)$$

Considerando que $\sigma_z f = \sigma_z \sqrt{\frac{\sigma_h}{\sigma_z}} = \sigma$, entonces

$$E_z(r = 0, z) = \frac{Ie^{-fz\alpha_z}}{2\pi} \left(\frac{\alpha_z}{\sigma z} + \frac{1}{\sigma f z^2} \right). \quad (227)$$

Tomando en cuenta que $\frac{\sqrt{\sigma_z}}{\sigma} = \frac{\sqrt{\sigma_z}}{\sqrt{\sigma_h \sigma_z}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_h}}$ y $\sigma f = \sigma_h$ se alcanza

$$E_z(r = 0, z) = \frac{Ie^{-fz\alpha_z}}{2\pi} \left(\frac{\sqrt{i\omega\mu}}{\sqrt{\sigma_h} z} + \frac{1}{\sigma_h z^2} \right) = \frac{Ie^{-fz\alpha_z}}{2\pi z} \left(\frac{\sqrt{i\omega\mu}}{\sqrt{\sigma_h}} + \frac{1}{\sigma_h z} \right). \quad (228)$$

Finalmente, si $\sqrt{\sigma_z} f = \sqrt{\sigma_z} \sqrt{\frac{\sigma_h}{\sigma_z}} = \sqrt{\sigma_h}$ entonces

$$E_z(r = 0, z) = \frac{Ie^{-z\alpha_h}}{2\pi z} \left(\frac{\sqrt{i\omega\mu}}{\sqrt{\sigma_h}} + \frac{1}{z\sigma_h} \right). \quad (229)$$

Anexo I. Identidades con δ

I.1. Desarrollo algebraico $\delta(\rho g)'$

Desarrollando algebraicamente $\delta(\rho g)'$ considerando que no hay perturbación en g , o sea $\delta g = 0$, de este modo

$$\delta(\rho g)' = \delta(\rho g' + \rho' g) = \rho \delta g' + g' \delta \rho + \rho' \delta g + g \delta \rho' = g' \delta \rho + g \delta \rho' = (g \delta \rho)'. \quad (230)$$

I.2. Desarrollo algebraico $(\rho g \delta H'_\phi)'$

Algebraicamente $(\rho g \delta H'_\phi)'$ se consigue

$$(\rho g \delta H'_\phi)' = \rho g \delta H''_\phi + (\rho g)' \delta H'_\phi. \quad (231)$$

I.3. Desarrollo algebraico $(H'_\phi g \delta \rho)'$

Algebraicamente $(H'_\phi g \delta \rho)'$ se consigue

$$(H'_\phi g \delta \rho)' = H'_\phi (g \delta \rho)' + H''_\phi g \delta \rho. \quad (232)$$

I.4. Identidad $(\rho g \delta H'_\phi)' H_\phi$

Si

$$(\rho g \delta H'_\phi H_\phi)' = \rho g \delta H'_\phi H'_\phi + (\rho g \delta H'_\phi)' H_\phi \quad (233)$$

entonces

$$(\rho g \delta H'_\phi)' H_\phi = (\rho g \delta H'_\phi H_\phi)' - \rho g H'_\phi \delta H'_\phi. \quad (234)$$

I.5. Identidad $(g \delta \rho H'_\phi)' H_\phi$

Si

$$(g\delta\rho H'_\phi H_\phi)' = g\delta\rho H_\phi'^2 + (g\delta\rho H'_\phi)' H_\phi \quad (235)$$

entonces

$$(g\delta\rho H'_\phi)' H_\phi = (g\delta\rho H'_\phi H_\phi)' - g\delta\rho H_\phi'^2. \quad (236)$$

I.6. Identidad $(\rho g f^2 \lambda^2 + i\omega\mu) H_\phi \delta H_\phi$

Despejando la ecuación 54 se deduce

$$(\rho g f^2 \lambda^2 + i\omega\mu) H_\phi = \rho g H_\phi'' + (\rho g)' H_\phi'. \quad (237)$$

Multiplicando toda la expresión por δH_ϕ

$$(\rho g f^2 \lambda^2 + i\omega\mu) H_\phi \delta H_\phi = \rho g H_\phi'' \delta H_\phi + (\rho g)' H_\phi' \delta H_\phi. \quad (238)$$

I.7. Identidades de $\delta E_r / E_r$

Considerando que el campo eléctrico (Ec. 67) es una función compleja, podemos representarlo en términos del módulo y la fase: $E_r = |E_r| e^{i\phi}$. Ahora bien, si perturbamos obtendremos: $\delta E_r = i|E_r| e^{i\phi} \delta\phi + e^{i\phi} \delta|E_r|$, dividiendo entre E_r

$$\frac{\delta E_r}{E_r} = \frac{i|E_r| e^{i\phi} \delta\phi + e^{i\phi} \delta|E_r|}{|E_r| e^{i\phi}} = \frac{i|E_r| e^{i\phi} \delta\phi}{|E_r| e^{i\phi}} + \frac{e^{i\phi} \delta|E_r|}{|E_r| e^{i\phi}}. \quad (239)$$

Equivalentemente,

$$\frac{\delta E_r}{E_r} = i\delta\phi + \frac{\delta|E_r|}{|E_r|}. \quad (240)$$

Tomando la parte real e imaginaria de 240

$$Re \left(\frac{\delta E_r}{E_r} \right) = \frac{\delta |E_r|}{|E_r|} \quad (241a)$$

$$e \text{ Im} \left(\frac{\delta E_r}{E_r} \right) = \delta \phi. \quad (241b)$$

Por otra parte, si dividimos entre $E_r(r, z = 0)$ la expresión 99 alcanzaremos

$$\frac{\delta E_r(r, z = 0)}{E_r(r, z = 0)} = \int_0^\infty \frac{G_\rho(r, z)}{E_r(r, z = 0)} \frac{\delta \rho(z)}{\rho} dz. \quad (242)$$

Considerando que tanto G_ρ como E_r son funciones complejas

$$\frac{\delta E_r(r, z = 0)}{E_r(r, z = 0)} = \int_0^\infty \frac{|G_\rho| e^{i\theta}}{|E_r(r, z = 0)| e^{i\phi}} \frac{\delta \rho(z)}{\rho} dz = \int_0^\infty \frac{|G_\rho(r, z)|}{|E_r(r, z = 0)|} e^{i(\theta - \phi)} \frac{\delta \rho(z)}{\rho} dz, \quad (243)$$

donde θ es la fase de las derivadas de Fréchet G_ρ (Ec. 120) del campo eléctrico. Ahora bien, a través de la fórmula de Euler la ecuación 243 se desglosa

$$\frac{\delta E_r(r, z = 0)}{E_r(r, z = 0)} = \int_0^\infty \frac{|G_\rho(r, z)|}{|E_r(r, z = 0)|} (\cos(\theta - \phi) + i \text{sen}(\theta - \phi)) \frac{\delta \rho(z)}{\rho} dz. \quad (244)$$

Tomando parte real e imaginaria de 244

$$Re \left(\frac{\delta E_r(r, z = 0)}{E_r(r, z = 0)} \right) = \int_0^\infty \frac{|G_\rho(r, z)|}{|E_r(r, z = 0)|} \cos(\theta - \phi) \frac{\delta \rho(z)}{\rho} dz \quad (245a)$$

$$e \text{ Im} \left(\frac{\delta E_r(r, z = 0)}{E_r(r, z = 0)} \right) = \int_0^\infty \frac{|G_\rho(r, z)|}{|E_r(r, z = 0)|} \text{sen}(\theta - \phi) \frac{\delta \rho(z)}{\rho} dz. \quad (245b)$$

Considerando las identidades 241 obtendremos

$$\frac{\delta |E_r|}{|E_r|} = \int_0^\infty \frac{|G_\rho(r, z)|}{|E_r(r, z = 0)|} \cos(\theta - \phi) \frac{\delta \rho(z)}{\rho} dz \quad (246a)$$

$$\text{y } \delta \phi = \int_0^\infty \frac{|G_\rho(r, z)|}{|E_r(r, z = 0)|} \text{sen}(\theta - \phi) \frac{\delta \rho(z)}{\rho} dz. \quad (246b)$$

Anexo J. Solución analítica de la Integral A_1 .

Solución de la primera y segunda derivada del primer sumando de la ecuación 117.

Primera derivada,

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{e^{-2z\alpha_h}}{r} \right] = \frac{1}{r} e^{-2z\alpha_h} \frac{\partial(-2z\alpha_h)}{\partial z} = \frac{1}{r} e^{-2z\alpha_h} (-2\alpha_h) = \frac{-2\alpha_h e^{-2z\alpha_h}}{r}. \quad (247)$$

Segunda derivada,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{e^{-2z\alpha_h}}{r} \right] &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{-2\alpha_h e^{-2z\alpha_h}}{r} \right] = \frac{-2\alpha_h e^{-2z\alpha_h}}{r} \frac{\partial(-2z\alpha_h)}{\partial z} = \frac{-2\alpha_h e^{-2z\alpha_h}}{r} (-2\alpha_h) = \\ &= \frac{4\alpha_h^2 e^{-2z\alpha_h}}{r}. \end{aligned} \quad (248)$$

Solución de la primera y segunda derivada del segundo sumando (Ec. 117).

Primera derivada,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{e^{-\alpha_z R_2}}{R_2} \right) &= z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-\alpha_z R_2}}{R_2} \right) + \frac{e^{-\alpha_z R_2}}{R_2} \frac{\partial z}{\partial z} = \\ &= z \left[e^{-\alpha_z R_2} \frac{\partial (r^2 + 4f^2 z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial z} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial e^{-\alpha_z R_2}}{\partial z} \right] + \frac{e^{-\alpha_z R_2}}{R_2} = \\ &= z \left[e^{-\alpha_z R_2} \left(-\frac{1}{2} (r^2 + 4f^2 z^2)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial (r^2 + 4f^2 z^2)}{\partial z} \right) + \frac{e^{-\alpha_z R_2}}{R_2} \frac{\partial (-\alpha_z R_2)}{\partial z} \right] + \frac{e^{-\alpha_z R_2}}{R_2} = \\ &= z \left[e^{-\alpha_z R_2} \left(-\frac{1}{2} (R_2^2)^{-\frac{3}{2}} (8f^2 z) \right) + \frac{1}{R_2} e^{-\alpha_z R_2} (-\alpha_z) \frac{\partial (r + 4f^2 z^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial z} \right] + \frac{e^{-\alpha_z R_2}}{R_2} = \\ &= z \left[-\frac{4f^2 z e^{-\alpha_z R_2}}{R_2^3} + \frac{e^{-\alpha_z R_2}}{R_2} (-\alpha_z) \left(\frac{1}{2} (r + 4f^2 z^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial (r + 4f^2 z^2)}{\partial z} \right) \right] + \frac{e^{-\alpha_z R_2}}{R_2} = \\ &= z \left[-4f^2 z \frac{e^{-\alpha_z R_2}}{R_2^3} + \frac{e^{-\alpha_z R_2}}{R_2} (-\alpha_z) \left(\frac{1}{2} (R_2^2)^{-\frac{1}{2}} (8f^2 z) \right) \right] + \frac{e^{-\alpha_z R_2}}{R_2} = \\ &= z \left[-\frac{4f^2 z e^{-\alpha_z R_2}}{R_2^3} - \frac{4f^2 \alpha_z z e^{-\alpha_z R_2}}{R_2^2} \right] + \frac{e^{-\alpha_z R_2}}{R_2} = e^{-\alpha_z R_2} \left[-\frac{4f^2 z^2}{R_2^3} - \frac{4f^2 \alpha_z z^2}{R_2^2} + \frac{1}{R_2} \right]. \end{aligned} \quad (249)$$

Segunda derivada,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(z \frac{e^{-\alpha_z R_2}}{R_2} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[e^{-\alpha_z R_2} \left(-\frac{4f^2 z^2}{R_2^3} - \frac{4f^2 \alpha_z z^2}{R_2^2} + \frac{1}{R_2} \right) \right] = \\
&= e^{-\alpha_z R_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{4f^2 z^2}{R_2^3} - \frac{4f^2 \alpha_z z^2}{R_2^2} + \frac{1}{R_2} \right) + \left(-\frac{4f^2 z^2}{R_2^3} - \frac{4f^2 \alpha_z z^2}{R_2^2} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial e^{-\alpha_z R_2}}{\partial z} = \\
&= e^{-\alpha_z R_2} \left[-4f^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^2}{R_2^3} \right) - 4f^2 \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^2}{R_2^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_2} \right) \right] + \\
&\quad + \left(-\frac{4f^2 z^2}{R_2^3} - \frac{4f^2 \alpha_z z^2}{R_2^2} + \frac{1}{R_2} \right) \left(-\frac{4f^2 \alpha_z z e^{-\alpha_z R_2}}{R_2} \right) = \\
&= e^{-\alpha_z R_2} \left[-4f^2 \left(z^2 \frac{\partial \left((r^2 + 4f^2 z^2)^{\frac{1}{2}} \right)^{-3}}{\partial z} + \frac{1}{R_2^3} \frac{\partial z^2}{\partial z} \right) - \right. \\
&\quad \left. -4f^2 \alpha_z \left(z^2 \frac{\partial \left((r^2 + 4f^2 z^2)^{\frac{1}{2}} \right)^{-2}}{\partial z} + \frac{1}{R_2^2} \frac{\partial z^2}{\partial z} \right) + \frac{\partial (r^2 + 4f^2 z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial z} \right] + \\
&\quad + e^{-\alpha_z R_2} \left(\frac{16f^4 \alpha_z z^3}{R_2^4} + \frac{16f^4 \alpha_z^2 z^3}{R_2^3} - \frac{4f^2 \alpha_z z}{R_2^2} \right) = \\
&= e^{-\alpha_z R_2} \left[-4f^2 \left(z^2 \left(-\frac{3}{2} (r^2 + 4f^2 z^2)^{-\frac{5}{2}} \frac{\partial (r^2 + 4f^2 z^2)}{\partial z} \right) + \frac{2z}{R_2^3} \right) - \right. \\
&\quad \left. -4f^2 \alpha_z \left(z^2 \left(- (r^2 + 4f^2 z^2)^{-2} \frac{\partial (r^2 + 4f^2 z^2)}{\partial z} \right) + \frac{2z}{R_2^2} \right) + \left(-\frac{1}{2} (r^2 + 4f^2 z^2)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial (r^2 + 4f^2 z^2)}{\partial z} \right) \right] + \\
&\quad + e^{-\alpha_z R_2} \left(\frac{16f^4 \alpha_z z^3}{R_2^4} + \frac{16f^4 \alpha_z^2 z^3}{R_2^3} - \frac{4f^2 \alpha_z z}{R_2^2} \right) = \\
&= e^{-\alpha_z R_2} \left[-4f^2 \left(z^2 \left(-\frac{3}{2} (R_2^2)^{-\frac{5}{2}} (8f^2 z) \right) + \frac{2z}{R_2^3} \right) - 4f^2 \alpha_z \left(z^2 \left(- (R_2^2)^{-2} (8f^2 z) \right) + \frac{2z}{R_2^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{2} (R_2^2)^{-\frac{3}{2}} (8f^2 z) \right] + e^{-\alpha_z R_2} \left(\frac{16f^4 \alpha_z z^3}{R_2^4} + \frac{16f^4 \alpha_z^2 z^3}{R_2^3} - \frac{4f^2 \alpha_z z}{R_2^2} \right) = \\
&= e^{-\alpha_z R_2} \left(\frac{48f^4 z^3}{R_2^5} - \frac{8f^2 z}{R_2^3} + \frac{32f^4 z^3 \alpha_z}{R_2^4} - \frac{8f^2 \alpha_z z}{R_2^2} - \frac{4f^2 z}{R_2^3} + \frac{16f^4 \alpha_z z^3}{R_2^4} + \frac{16f^4 \alpha_z^2 z^3}{R_2^3} - \frac{4f^2 \alpha_z z}{R_2^2} \right) = \\
&= e^{-\alpha_z R_2} \left(\frac{48f^4 z^3}{R_2^5} + \frac{48f^4 \alpha_z z^3}{R_2^4} + \frac{16f^4 \alpha_z^2 z^3}{R_2^3} - \frac{12f^2 z}{R_2^3} - \frac{12f^2 \alpha_z z}{R_2^2} \right). \quad (250)
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(-\frac{2f}{r} z \frac{e^{-\alpha_z R_2}}{R_2} \right) &= -\frac{2f}{r} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(z \frac{e^{-\alpha_z R_2}}{R_2} \right) = \\
&= -\frac{2f}{r} e^{-\alpha_z R_2} \left(\frac{48f^4 z^3}{R_2^5} + \frac{48f^4 \alpha_z z^3}{R_2^4} + \frac{16f^4 \alpha_z^2 z^3}{R_2^3} - \frac{12f^2 z}{R_2^3} - \frac{12f^2 \alpha_z z}{R_2^2} \right). \quad (251)
\end{aligned}$$

Anexo K. Derivadas de Fréchet para el caso DC

La ecuación 12 en Gómez-Treviño y Esparza (2014) establece la derivada de Fréchet general $W(r, z)$ para el potencial eléctrico φ del caso DC, o sea:

$$W(r, z) = \frac{2\pi}{I} \int_0^\infty \lambda \left(\sigma^2 \varphi'^2 + \lambda^2 \sigma^2 \varphi^2 \right) J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (252)$$

Para un medio isotrópico homogéneo

$$\varphi(\lambda, z) = \frac{I\rho}{2\pi\lambda} e^{-\lambda z} \quad (253a)$$

$$\text{y } \varphi'^2(\lambda, z) = -\frac{I^2\rho^2}{4\pi^2} e^{-2\lambda z}. \quad (253b)$$

Sustituyendo las ecuaciones 253 en 252

$$W(r, z) = \frac{2\pi}{I} \int_0^\infty \lambda \left(\sigma^2 \left(\frac{I^2\rho^2}{4\pi^2} e^{-2\lambda z} \right) + \lambda^2 \sigma^2 \left(\frac{I^2\rho^2}{4\pi^2\lambda^2} e^{-2\lambda z} \right) \right) J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (254)$$

Equivalentemente

$$W(\lambda, z) = \frac{I}{\pi} \int_0^\infty \lambda e^{-2\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (255)$$

La integral en 255 corresponde a la número 4 en la sección 6.62-6.63 de Gradshteyn y Ryzhik (2007) con $m = v = 0$, entonces

$$W(r, z) = \frac{I}{\pi} \left(\frac{2z}{(r^2 + 4z^2)^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (256)$$

Anexo L. Derivadas de Fréchet para el caso MT

La ecuación 5 en Oldenburg (1979) establece

$$\delta R(z=0) = \int_0^\infty -\mu \left(\frac{E(z)}{E(z=0)} \right)^2 \delta\sigma(z) dz, \quad (257)$$

donde $R = \mu H/E$. Perturbando esta razón

$$\delta R = \delta \left(\frac{\mu H}{E} \right) = \mu H \delta \left(\frac{1}{E} \right) + \frac{1}{E} \delta(\mu H) = -\frac{\mu H}{E^2} \delta E. \quad (258)$$

Sustituyendo 258 en 257

$$\delta E(z=0) = \frac{E^2(0)}{\mu H(z=0)} \int_0^\infty \mu \left(\frac{E(z)}{E(z=0)} \right)^2 \delta\sigma(z) dz = \int_0^\infty \frac{E^2(z)}{H(0)} \delta\sigma(z) dz. \quad (259)$$

Por otra parte, la ecuación 3 en Oldenburg (1979) manifiesta

$$H = -\frac{1}{i\omega\mu} \frac{dE}{dz} = -\frac{E'}{i\omega\mu}. \quad (260)$$

Reemplazando 260 en 259

$$\delta E(z=0) = \int_0^\infty -i\omega\mu \frac{E^2(z)}{E'(z=0)} \delta\sigma(z) dz. \quad (261)$$

Ya que el fundamento del MT radica en la propagación de una onda plana, consideraremos una perturbación $\delta E(0)$ relativa a $E'(0)$ para después obtener una expresión analítica de las derivadas de Fréchet, es decir

$$\frac{\delta E(0)}{E'(0)} = \int_0^\infty -i\omega\mu \frac{E^2(z)}{E'^2(z=0)} \delta\sigma(z) dz. \quad (262)$$

Ahora bien, para una onda plana que viaja del aire a la tierra:

$$E(z) = \frac{2\gamma_0 A_0}{\gamma_0 + \gamma} e^{-z\gamma}, \quad (263a)$$

$$E'(z) = -\frac{2\gamma_0 \gamma A_0}{\gamma_0 + \gamma} e^{-z\gamma} \quad (263b)$$

$$\text{y } E'(0) = -\frac{2\gamma_0 \gamma A_0}{\gamma_0 + \gamma}. \quad (263c)$$

En este caso $\gamma_0 = \sqrt{i\omega\mu\sigma_0}$, $\gamma = \sqrt{i\omega\mu\sigma}$ y A_0 la amplitud de la onda incidente. Donde, σ_0 y σ son las conductividades del aire y de la tierra, respectivamente. Sustituyendo 263a y 263c en 262 se obtiene

$$\frac{\delta E(0)}{E'(0)} = \int_0^\infty -\frac{e^{-2z\gamma}}{\sigma} \delta\sigma(z) dz. \quad (264)$$

Si $\delta\sigma = -\delta\rho/\rho^2$ entonces 264 se sintetiza

$$\frac{\delta E(0)}{E'(0)} = \int_0^\infty G_\rho \frac{\delta\rho(z)}{\rho} dz, \quad (265)$$

donde G_ρ es la derivada de Fréchet para la perturbación relativa del campo eléctrico en el método MT, es decir

$$G_\rho = e^{-2z\gamma}. \quad (266)$$

Anexo M. Solución algebraica del sistema de ecuaciones

Considerando un par de estratos homogéneos isotrópicos, la expresión 177 se reduce:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{m_1}{\sigma_1} e^{hm_1} & -\frac{m_1}{\sigma_1} e^{-hm_1} & \frac{m_2}{\sigma_2} e^{-hm_2} \\ e^{hm_1} & e^{-hm_1} & -e^{-hm_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I}{2\pi\lambda} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (267)$$

donde σ_1 y σ_2 son conductividades constantes; cabe destacar que $f_1 = f_2 = 1$ tanto en m_1 como en m_2 . Ahora bien, por el método de Gauss, y operando con los renglones (R_1 , R_2 y R_3) tenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{I}{2\pi\lambda} \\ \frac{m_1}{\sigma_1} e^{hm_1} & -\frac{m_1}{\sigma_1} e^{-hm_1} & \frac{m_2}{\sigma_2} e^{-hm_2} & 0 \\ e^{hm_1} & e^{-hm_1} & -e^{-hm_2} & 0 \end{array} \right], \quad (268)$$

$e^{hm_1} \cdot R_1 - R_3 \rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{I}{2\pi\lambda} \\ \frac{m_1}{\sigma_1} e^{hm_1} & -\frac{m_1}{\sigma_1} e^{-hm_1} & \frac{m_2}{\sigma_2} e^{-hm_2} & 0 \\ 0 & e^{hm_1} - e^{-hm_1} & e^{-hm_2} & \frac{Ie^{hm_1}}{2\pi\lambda} \end{array} \right], \quad (269)$$

$\frac{m_1}{\sigma_1} e^{hm_1} \cdot R_1 - R_2 \rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{I}{2\pi\lambda} \\ 0 & \frac{m_1}{\sigma_1} e^{hm_1} + \frac{m_1}{\sigma_1} e^{-hm_1} & -\frac{m_2}{\sigma_2} e^{-hm_2} & \frac{m_1 I e^{hm_1}}{2\pi\lambda\sigma_1} \\ 0 & e^{hm_1} - e^{-hm_1} & e^{-hm_2} & \frac{Ie^{hm_1}}{2\pi\lambda} \end{array} \right], \quad (270)$$

$\frac{m_1}{\sigma_1} \cdot R_3 + R_2 \rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{I}{2\pi\lambda} \\ 0 & \frac{2m_1}{\sigma_1} e^{hm_1} & \frac{m_1}{\sigma_1} e^{-hm_2} - \frac{m_2}{\sigma_2} e^{-hm_2} & \frac{m_1 I e^{hm_1}}{\pi\lambda\sigma_1} \\ 0 & e^{hm_1} - e^{-hm_1} & e^{-hm_2} & \frac{Ie^{hm_1}}{2\pi\lambda} \end{array} \right], \quad (271)$$

$$\frac{\sigma_1}{2m_1} e^{-hm_1} \cdot R_2 \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{I}{2\pi\lambda} \\ 0 & 1 & \frac{e^{-h(m_1+m_2)}}{2} - \frac{\sigma_1 m_2 e^{-h(m_1+m_2)}}{2\sigma_2 m_1} & \frac{I}{2\pi\lambda} \\ 0 & e^{hm_1} - e^{-hm_1} & e^{-hm_2} & \frac{I e^{hm_1}}{2\pi\lambda} \end{array} \right], \quad (272)$$

$$(e^{hm_1} - e^{-hm_1})^{-1} \cdot R_3 \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{I}{2\pi\lambda} \\ 0 & 1 & \frac{e^{-h(m_1+m_2)}}{2} \left(1 - \frac{\sigma_1 m_2}{\sigma_2 m_1}\right) & \frac{I}{2\pi\lambda} \\ 0 & 1 & \frac{e^{-hm_2}}{e^{hm_1} - e^{-hm_1}} & \frac{I}{2\pi\lambda(1 - e^{-2hm_1})} \end{array} \right], \quad (273)$$

$$R_2 - R_3 \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{I}{2\pi\lambda} \\ 0 & 1 & \frac{e^{-h(m_1+m_2)}}{2} \left(1 - \frac{\sigma_1 m_2}{\sigma_2 m_1}\right) & \frac{I}{2\pi\lambda} \\ 0 & 0 & \frac{e^{-h(m_1+m_2)}}{2} \left(1 - \frac{\sigma_1 m_2}{\sigma_2 m_1}\right) - \frac{e^{-hm_2}}{e^{hm_1} - e^{-hm_1}} & \frac{I}{2\pi\lambda} - \frac{I}{2\pi\lambda(1 - e^{-2hm_1})} \end{array} \right]. \quad (274)$$

Por lo tanto,

$$\left[\frac{e^{-h(m_1+m_2)}}{2} \left(1 - \frac{\sigma_1 m_2}{\sigma_2 m_1}\right) - \frac{e^{-hm_2}}{e^{hm_1} - e^{-hm_1}} \right] C_4 = \frac{I}{2\pi\lambda} - \frac{I}{2\pi\lambda(1 - e^{-2hm_1})}. \quad (275)$$

Simplificando se obtiene

$$\left[\frac{e^{-h(m_2+2m_1)}(\sigma_1 m_2 - \sigma_2 m_1) - e^{-hm_2}(\sigma_1 m_2 + \sigma_2 m_1)}{2\sigma_2 m_1 (e^{hm_1} - e^{-hm_1})} \right] C_4 = -\frac{I}{2\pi\lambda} \left(\frac{e^{-2hm_1}}{1 - e^{-2hm_1}} \right). \quad (276)$$

Despejando C_4

$$C_4 = \frac{-2\sigma_2 m_1 I e^{-2hm_1} (e^{hm_1} - e^{-hm_1})}{2\pi\lambda (1 - e^{-2hm_1}) (e^{-h(m_2+2m_1)}(\sigma_1 m_2 - \sigma_2 m_1) - e^{-hm_2}(\sigma_1 m_2 + \sigma_2 m_1))}. \quad (277)$$

Equivalentemente

$$C_4 = \frac{-\sigma_2 m_1 I (e^{-hm_1} - e^{-3hm_1})}{\pi \lambda [2\sigma_1 m_2 e^{-h(m_2+2m_1)} - (\sigma_1 m_2 + \sigma_2 m_1) e^{-hm_2} - (\sigma_1 m_2 - \sigma_2 m_1) e^{-h(m_2+4m_1)}]}. \quad (278)$$

Si $k = \frac{\sigma_1 m_2}{\sigma_2 m_1}$ entonces

$$C_4 = \frac{-I (e^{-hm_1} - e^{-3hm_1})}{\pi \lambda [2k e^{-h(m_2+2m_1)} - (k+1) e^{-hm_2} - (k-1) e^{-h(m_2+4m_1)}]}. \quad (279)$$

Por otra parte, del segundo renglón (R_2) de la ecuación 274 se tiene

$$C_2 + \frac{e^{-h(m_1+m_2)}}{2} \left(1 - \frac{\sigma_1 m_2}{\sigma_2 m_1}\right) C_4 = \frac{I}{2\pi \lambda}. \quad (280)$$

Despejando C_2 , y con $k = \frac{\sigma_1 m_2}{\sigma_2 m_1}$ se alcanza

$$C_2 = \frac{I}{2\pi \lambda} - \frac{e^{-h(m_1+m_2)}}{2} (1 - k) C_4. \quad (281)$$

Finalmente, del primer renglón (Ec. 274) se consigue

$$C_1 = \frac{I}{2\pi \lambda} - C_2. \quad (282)$$

De esta manera se demuestra que C_2 está en función de C_4 , y que C_1 depende de C_2 .