

La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California).

La investigación fue financiada por el CONAHCYT (Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías).

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo o titular de los Derechos de Autor.

CICESE © 2023, Todos los Derechos Reservados, CICESE

# Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California



## Maestría en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones

---

### Sincronización y formación de robots móviles aplicando un sistema intermediario con transmisión segura

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

**Carlos Andrés Villalobos Aranda**

Ensenada, Baja California, México

2023

Tesis defendida por

**Carlos Andrés Villalobos Aranda**

y aprobada por el siguiente Comité

---

Dr. Javier Pliego Jiménez

Codirector de tesis

---

Dr. Adrián Arellano Delgado

Codirector de tesis

Dr. César Cruz Hernández

Dr. Rafael Kelly Martínez

Dr. Pedro Gilberto López Mariscal



---

Dra. María del Carmen Maya Sánchez

Coordinadora del Posgrado de Electrónica y Telecomunicaciones

---

Dra. Ana Denise Re Araujo

Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Carlos Andrés Villalobos Aranda como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones.

### **Sincronización y formación de robots móviles aplicando un sistema intermediario con transmisión segura**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Javier Pliego Jiménez

Codirector de tesis

---

Dr. Adrián Arellano Delgado

Codirector de tesis

En esta propuesta de tesis de maestría, se pretende alcanzar la sincronización y formación de dos robots móviles (aéreos o terrestres) haciendo uso de un sistema intermediario o acoplamiento dinámico (acoplamiento indirecto) y enviando información de manera segura. Se aborda el problema de manera numérica y experimental. Se recurre como metodología de trabajo al análisis de una determinada ley de control para los robots móviles. Para acoplar los robots, se emplean acoplamientos dinámicos (indirectos) los cuales reciben y envían datos de manera segura, es decir, estos datos son encriptados con el fin de agregar seguridad a la comunicación entre las redes, para lograrlo, se aplica la teoría de sistemas complejos y teoría de grafos. Los resultados esperados son numéricos y experimentales.

**Palabras clave:** control de robots, encriptamiento, formación, robótica móvil, sincronización

Abstract of the thesis presented by Carlos Andrés Villalobos Aranda as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Electronics and Telecommunications.

**Synchronization and formation of mobile robots applying an intermediary system with secure transmission**

Abstract approved by:

---

PhD. Javier Pliego Jiménez

Thesis Co-Director

---

PhD. Adrián Arellano Delgado

Thesis Co-Director

In this tesis proposal the aim is to achieve synchronization and formation of two mobile robots (aerial or terrestrial) using an intermediary system or dynamic coupling (indirect coupling) and sending information in a safe way. The problem is approached numerically and experimentally. The methodology used is the analysis of a certain control law for mobile robots. To couple the robots, dynamic (indirect) couplings are used, which are encrypted to add security to the communication between the networks. To achieve this, the theory of complex systems and graph theory are applied. The expected results are numerical and experimental.

**Keywords: encryption, formation, mobile robotics, robot control, synchronization**

## Dedicatoria

**A mis padres Andrés y Marcela, a mi hermano Alan y familia por haberme forjado como la persona que soy, a todos mis seres queridos por su apoyo incondicional.**

## Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California por haberme brindado la oportunidad de cursar en su programa de Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones con el objetivo de obtener el grado de Maestro en Ciencias.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnología (CONAHCyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

Al proyecto de Ciencia Básica CONAHCyT, ref. 166654 (A1 - S - 31628) por brindar los recursos necesarios para llevar a cabo la investigación.

A mis codirectores de tesis Dr. Javier Pliego Jiménez y Dr. Adrián Arellano por su atención, tiempo, dedicación y paciencia conmigo durante todo el trayecto en el trabajo de tesis y por compartirme sus valiosos conocimientos en la materia.

A los miembros del comité Dr. César Cruz Hernández, Dr. Rafael Kelly Martínez y Dr. Pedro Gilberto López Mariscal por sus valiosos comentarios y aportaciones.

A mi novia Priscilla Aylin Serrano Coronado por su apoyo incondicional, cariño y amor.

A mis grandes y estimadas amigas y compañeras de generación Arlen González Azuara y Paulina Díaz de La Paz por su apoyo incondicional y brindarme su valiosa amistad.

A mis amigos de licenciatura Ricardo Erick Chávez Gallo y Diego Pimentel Lozano por su valiosa amistad y apoyo.

A mis compañeros de laboratorio y estudiantes de doctorado Carlos Montañez Molina, Michael Montañez Molina, Miguel Ángel Sidón Ayala, Johnny Rubio Pecasso y a Rolando Díaz Castillo por su valiosa amistad y por sus consejos.

A mis amigos de posgrado Néstor Alejandro Mendoza Herrera, Elidad López Payán, Jonathan Jesús Castillo Cruz, Javier Ramón Delgado Durán, Anjuly Astarte Jasso Lara, Juan Andrés Quintana Delgado y a mi mejor amiga Teresita Del Carmen Guarneros Martínez por su valiosa amistad, compañía y apoyo incondicional durante todo el trayecto del posgrado.

Al programa interno de CICESE “Reto vida saludable” por inspirarme a tener un estilo de vida mucho más sano y deportivo.

# Tabla de contenido

	Página
Resumen en español .....	ii
Resumen en inglés .....	iii
Dedicatoria .....	iv
Agradecimientos .....	v
Lista de figuras .....	ix
Lista de tablas .....	xii
<b>Capítulo 1. Introducción</b>	
1.1. Motivación .....	1
1.2. Planteamiento del problema .....	2
1.3. Objetivos .....	3
1.3.1. Objetivo general .....	3
1.3.2. Objetivos específicos .....	3
1.4. Estado del arte .....	3
1.5. Organización de la tesis .....	5
<b>Capítulo 2. Preliminares</b>	
2.1. Modelo matemático del robot .....	7
2.2. Sincronización .....	9
2.2.1. Acoplamiento directo .....	10
2.2.2. Acoplamiento dinámico (indirecto) .....	12
2.3. Discretización de funciones y ecuaciones diferenciales continuas .....	13
2.4. Sistemas caóticos .....	19
2.5. Encriptación de señales .....	21
<b>Capítulo 3. Algoritmos de control</b>	
3.1. Trayectorias deseadas .....	23
3.2. Control por retroalimentación dinámica .....	25
3.3. Control no lineal .....	30
<b>Capítulo 4. Sincronización de robots y comunicación segura</b>	
4.1. Sincronización y formación de robots con comunicación segura .....	32
4.2. Sincronización de robots con sistema intermediario .....	35
<b>Capítulo 5. Resultados en simulación y experimentales</b>	
5.1. Descripción del robot ROSbot 2.0 PRO .....	37
5.2. Simulaciones .....	38
5.2.1. Simulación de la sincronización con linealización por retroalimentación dinámica .....	39
5.2.2. Simulación de la sincronización por control no lineal .....	46

5.3.	Experimentos . . . . .	53
5.3.1.	Metodología para la realización de los experimentos . . . . .	53
5.3.2.	Resultados experimentales generales . . . . .	53
<b>Capítulo 6.</b>	<b>Conclusiones</b>	
6.1.	Trabajo futuro . . . . .	68
<b>Literatura citada</b>	. . . . .	69
<b>Anexos</b>	. . . . .	72

# Lista de figuras

Figura	Página
1. Esquema de trabajo de tesis propuesto para la sincronización de robots móviles. . . . .	2
2. Esquema del modelo cinemático del robot móvil. . . . .	8
3. Conexión unidireccional (maestro-seguidor) de dos sistemas. . . . .	10
4. Conexión bidireccional (global) de dos sistemas. . . . .	11
5. Esquema de acoplamiento dinámico en 2 sistemas. . . . .	13
6. Esquema de encriptamiento de señales. . . . .	21
7. Robot móvil ROSbot 2.0 PRO. . . . .	37
8. Dinámicas temporales de los estados de los robots móviles utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento directo implementado. . . . .	40
9. Gráficas de las velocidades lineal y angular de los robots móviles utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento directo implementado. . . . .	41
10. Trayectorias de los robots móviles maestro (rojo) y seguidor (azul) en el plano $x - y$ utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento directo implementado. . . . .	41
11. Error de posición del robot maestro con respecto a la trayectoria deseada ( $\tilde{p}$ ) y al robot seguidor ( $\bar{p}$ ) utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento directo implementado. . . . .	42
12. Gráficas temporales de los robots móviles utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento dinámico implementado. . . . .	43
13. Velocidades de los robots móviles utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento dinámico implementado. . . . .	43
14. Trayectorias de los robots móviles maestro (rojo) y seguidor (azul) con sistemas intermedios en el plano $x - y$ utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento dinámico implementado. . . . .	44
15. Error de posición del robot maestro con respecto a la trayectoria deseada ( $\tilde{p}$ ) y al robot seguidor ( $\bar{p}$ ) utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento dinámico implementado. . . . .	44
16. Dinámicas temporales de los estados del acoplamiento dinámico implementado en los robots móviles. . . . .	45
17. Encriptamiento y decodificación del estado $x_m(t)$ del robot maestro con respecto al tiempo. . . . .	45
18. Gráficas temporales de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento directo implementado. . . . .	46
19. Velocidades de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento directo implementado. . . . .	47
20. Trayectorias de los robots móviles maestro (rojo) y seguidor (azul) en el plano $x - y$ utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento directo implementado. . . . .	47

Figura	Página
21. Error de posición del robot maestro con respecto a la trayectoria deseada ( $\tilde{p}$ ) y al robot seguidor ( $\bar{p}$ ) utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento directo implementado.	48
22. Dinámicas temporales de los estados aumentados de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento directo implementado. . . . .	48
23. Gráficas temporales de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento dinámico implementado. . . . .	49
24. Velocidades de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento dinámico implementado. . . . .	50
25. Trayectorias de los robots móviles maestro (rojo) y seguidor (azul) con sistemas intermedios en el plano $x-y$ utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento dinámico implementado. . . . .	50
26. Error de posición del robot maestro con respecto a la trayectoria deseada ( $\tilde{p}$ ) y al robot seguidor ( $\bar{p}$ ) utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento dinámico implementado.	51
27. Dinámicas temporales de los estados aumentados de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento dinámico implementado. . . . .	51
28. Dinámicas temporales de los estados del acoplamiento dinámico implementado en los robots móviles. . . . .	52
29. Encriptamiento y decodificación del estado $x_m(t)$ del robot maestro con respecto al tiempo.	52
30. Gráficas temporales de los robots móviles utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento directo implementado. . . . .	54
31. Velocidades de los robots móviles utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento directo implementado. . . . .	55
32. Trayectorias de los robots móviles maestro (rojo) y seguidor (azul) en el plano $x-y$ utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento directo implementado. . . . .	55
33. Error de posición del robot maestro con respecto a la trayectoria deseada ( $\tilde{p}$ ) y al robot seguidor ( $\bar{p}$ ) utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento directo implementado. . . . .	56
34. Gráficas temporales de los robots móviles utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento dinámico implementado. . . . .	57
35. Velocidades de los robots móviles utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento dinámico implementado. . . . .	57

Figura	Página
36. Trayectorias de los robots móviles maestro (rojo) y seguidor (azul) con sistemas intermedios en el plano $x - y$ utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento dinámico implementado. . . . .	58
37. Error de posición del robot maestro con respecto a la trayectoria deseada ( $\tilde{p}$ ) y al robot seguidor ( $\bar{p}$ ) utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento dinámico implementado. . . . .	58
38. Dinámicas temporales de los estados del acoplamiento dinámico implementado en los robots móviles. . . . .	59
39. Encriptamiento y decodificación del estado $x_m(t)$ del robot maestro con respecto al tiempo. . . . .	59
40. Gráficas temporales de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento directo implementado. . . . .	60
41. Velocidades de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento directo implementado. . . . .	61
42. Trayectorias de los robots móviles maestro (rojo) y seguidor (azul) en el plano $x - y$ utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento directo implementado. . . . .	61
43. Error de posición del robot maestro con respecto a la trayectoria deseada ( $\tilde{p}$ ) y al robot seguidor ( $\bar{p}$ ) utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento directo implementado. . . . .	62
44. Dinámicas temporales de los estados aumentados de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento directo implementado. . . . .	62
45. Gráficas temporales de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento dinámico implementado. . . . .	63
46. Velocidades de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento dinámico implementado. . . . .	64
47. Trayectorias de los robots móviles maestro (rojo) y seguidor (azul) con sistemas intermedios en el plano $x - y$ utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento dinámico implementado. . . . .	64
48. Error de posición del robot maestro con respecto a la trayectoria deseada ( $\tilde{p}$ ) y al robot seguidor ( $\bar{p}$ ) utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento dinámico implementado. . . . .	65
49. Dinámicas temporales de los estados aumentados de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento dinámico implementado. . . . .	65
50. Dinámicas temporales de los estados del acoplamiento dinámico implementado en los robots móviles. . . . .	66
51. Encriptamiento y decodificación del estado $x_m(t)$ del robot maestro con respecto al tiempo. . . . .	66

## Lista de tablas

Tabla	Página
1. Valores de los parámetros del robot móvil ROSbot 2.0 PRO. . . . .	38

# Capítulo 1. Introducción

---

En años recientes se ha mostrado un gran interés por parte de la comunidad científica, específicamente del área de control y robótica, al desarrollo de algoritmos de control con el objetivo de coordinar agentes móviles. Esto debido a la creciente necesidad de generar patrones de formación que puedan ser aprovechados para diversas aplicaciones en diferentes áreas, por esta razón la importancia de resolver problemas que involucran agentes móviles que presentan grandes desafíos tanto desde el enfoque teórico como práctico (Zhao et al., 2017).

Así mismo, uno de los desafíos para la coordinación de múltiples agentes robóticos es su sincronización con el fin de alcanzar la capacidad de realizar formaciones en conjunto para lograr ciertos objetivos particulares, cuidando que la comunicación entre cada uno de los miembros sea segura. Si bien es importante el diseñar diferentes técnicas de control para alcanzar la sincronización, también es importante lograrlo en diferentes configuraciones, donde su comportamiento sea eficiente a través del seguimiento de diferentes trayectorias (Saradagi et al., 2017).

Por otra parte, una buena parte de las investigaciones referentes a la sincronización y formación de multi-agentes robóticos es mediante el uso de sistemas de visión para el control de su posición, donde posibilita la capacidad de realizar tareas complejas con gran eficiencia, escalabilidad y robustez. Consecuentemente, las diferentes formaciones geométricas dadas son aplicables para la industria, la logística, desastres naturales, vigilancia, entre otros (Miao et al., 2020).

Cabe resaltar que las formaciones de los agentes robóticos no solo pueden ser formaciones estáticas, sino también variantes en el tiempo, teniendo en cuenta las trayectorias de todos los miembros y la evasión de los mismos si interfieren en sus rutas para evitar colisiones. Por ello es importante el diseño de algoritmos de control que logren esta tarea de manera suave, evitando las oscilaciones no deseadas y las maniobras agresivas (Lippay & Hoagg, 2021).

## 1.1. Motivación

En la actualidad, la complejidad de las tareas es cada vez mayor, al punto en el que un solo robot puede resultar insuficiente para llevar a cabo una tarea determinada. Es por ello que en diversas tareas es necesario coordinar múltiples robots. Por otro lado, con el desarrollo de la tecnología es posible transmitir información utilizando diversos protocolos de comunicación como Wi-Fi, radiofrecuencia, bluetooth, por mencionar algunos. Sin embargo, dichos canales de comunicación pueden ser intervenidos por un agente externo, el cual, puede hurtar información o contaminar la señal (ataque) ocasionando que el sistema

falle. Por lo antes mencionado, en la presente propuesta de investigación se pretende desarrollar leyes de control para lograr la sincronización y la formación de robots móviles tal que utilicen acoplamientos dinámicos indirectos y al mismo tiempo garantizando un envío seguro de la información.

### 1.2. Planteamiento del problema

En el presente trabajo de tesis se plantea el uso de acoplamientos dinámicos indirectos para el envío de señales de control seguras a los robots móviles bajo el esquema de trabajo mostrado en la Figura 1. Donde se pretende enlazar una computadora con el robot maestro y éste, a su vez, enviará señales de control a un sistema intermediario mediante el cuál transmitirá algoritmos de control previamente diseñados de forma encriptada, siendo el robot seguidor responsable de descifrar éstas señales de control y ser guiado con el fin de lograr la sincronización y formación.

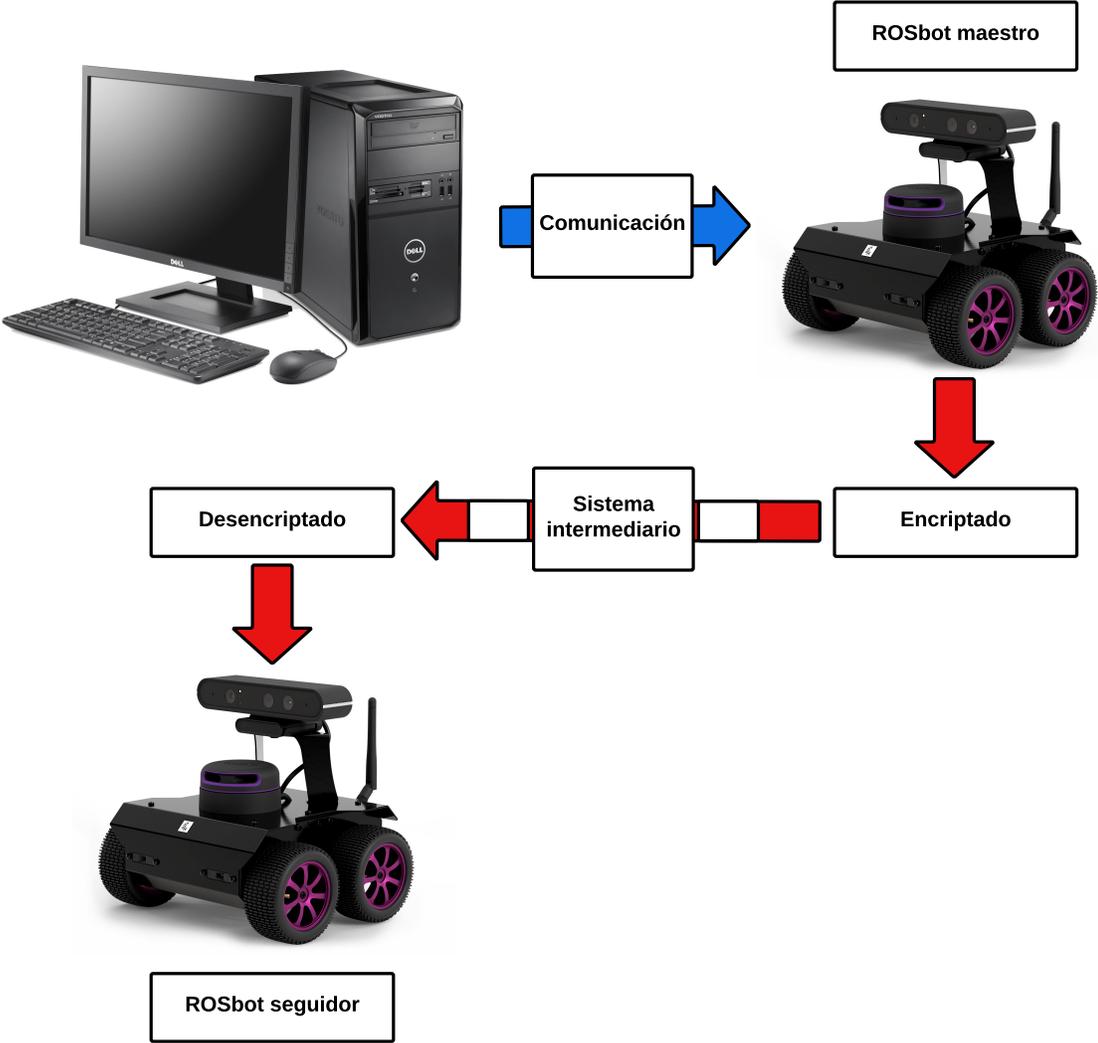


Figura 1. Esquema de trabajo de tesis propuesto para la sincronización de robots móviles.

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. Objetivo general

El objetivo principal del presente trabajo de investigación es diseñar algoritmos de control para sincronizar y lograr la formación de dos o más robots móviles utilizando acoplamientos dinámicos con envío de información de manera segura.

### 1.3.2. Objetivos específicos

- Estudio del modelo cinemático y dinámico de la estructura de los robots móviles.
- Diseño de algoritmos de control para la sincronización y formación de robots móviles.
- Encriptación de señales de control.
- Validación numérica de los algoritmos de control propuestos.
- Validación experimental de los algoritmos de control propuestos.

## 1.4. Estado del arte

Con respecto a los problemas de coordinación y control de multi-agentes móviles en Zhao et al. (2017), los autores propusieron una aproximación de manera general para el diseño de leyes de control que permitieran la coordinación de sistemas multi-agentes sujetos a restricciones de movimiento no holonómicas, tal que su principal aportación fue demostrar que una ley de control de coordinación tipo gradiente-descenso diseñada para agentes con dinámica de doble integrador puede adaptarse para diversas restricciones de movimiento, como pueden ser la saturación de velocidad lineal/angular y otras restricciones de trayectoria.

Por otro lado, Saradagi et al. (2017) diseñaron leyes de control basadas en Lyapunov para lograr varias tareas multiobjeto para una red de robots de péndulo invertido móvil no holonómico, que además son inestables en lazo abierto. Siendo que logran la sincronización de posiciones y velocidades y la formación donde siguen asintóticamente una trayectoria, ya que sus leyes de control están basadas en el modelo cinemático del robot móvil y los pares de control que se extraen mediante una arquitectura de control de dos bucles.

En Miao et al. (2020) se aborda el problema de control de seguimiento de líder de robots móviles con comunicación implícita a través de la detección visual a bordo. Donde se propone nuevos esquemas de control servo-visuales basados en imágenes para garantizar el rendimiento prescrito y las restricciones del campo de visión. El controlador implementado es un controlador adaptativo de ganancia de Nussbaum y un controlador de ganancia no lineal estático sin necesidad de la información del parámetro de profundidad.

Mientras que en Lippay & Hoagg (2021) los autores presentan un algoritmo de control de formación para agentes de doble integrador, en donde la misma formación varía con el tiempo y los controladores de los agentes satisfacen los límites es decir, que los controladores generan señales de control acotadas que evitan la saturación del actuador. Además, cada agente tiene retroalimentación relativa de posición y velocidad de sus agentes vecinos, donde la estructura de comunicación es un gráfico cuasi-fuertemente conectado, y al menos un agente tiene información de su posición y velocidad relativa del líder (si es aplicable).

Cabe señalar que en Peña-Ramírez et al. (2018) se muestra un esquema de sincronización maestro-esclavo modificado para sistemas dinámicos. Se presenta además un esquema de acoplamiento que induce la sincronización en ciertos sistemas que no se pueden sincronizar cuando se usa la interconexión estática clásica. Así mismo, el acoplamiento dinámico logra la sincronización para valores de fuerza de acoplamiento arbitrariamente grandes en ciertos sistemas para los que la configuración estática clásica es aplicable solo dentro de un intervalo estrecho de valores de fuerza de acoplamiento. Los resultados se ilustran en pares de osciladores mecánicos y caóticos idénticos.

Es relevante mencionar que en Arellano-Delgado et al. (2021) se aborda el problema de sincronización externa de redes utilizando acoplamientos dinámicos, donde el acoplamiento dinámico es aplicando el modelo de mundo-pequeño de Newman y Watts. Así mismo, se hizo un análisis comparativo con el objetivo de determinar las fuerzas de acoplamiento para la sincronización interna y externa de las redes para los acoplamientos difusos (directo) y el acoplamiento dinámico propuesto (indirecto). Adicionalmente, el esquema de sincronización propuesto se valida numéricamente utilizando el conocido circuito caótico de Chua (Chua et al., 1993) como nodo para las redes.

En cuanto a encriptación, en Meranza-Castillón et al. (2019) se aborda con un generador de números pseudoaleatorios (PRNG) basado en un mapa mejorado de Hénon (EHM) y su implementación en software y hardware para criptosistemas basados en el caos con alto procesamiento, como el cifrado de imágenes o videos, trabajo precedido por Méndez-Ramírez et al. (2018a,b). Esta es la primera ocasión

en la literatura donde se presenta un análisis de seguridad integral desde un punto de vista criptográfico para la implementación de hardware, como análisis de espacio de claves, sensibilidad de claves, frecuencia flotante, histogramas, autocorrelación, correlación, entropía y rendimiento. Posteriormente, se complementa en Murillo-Escobar et al. (2022) donde se implementa en un microcontrolador un generador de números pseudoaleatorios basado ahora en un mapa hipercaótico 2D de Henon-Sine.

Como se puede constatar, en los trabajos antes mencionados se aborda la manipulación de robots móviles terrestres con diferentes enfoques de acoplamiento y control, pero además, no se presta demasiada atención a la seguridad en las líneas de comunicación entre los robots. En el presente trabajo de investigación se pretende desarrollar leyes de control para lograr la sincronización y la formación de robots móviles tal que utilicen acoplamientos dinámicos indirectos para el envío seguro de señales de control. A continuación se describe la organización de la presente tesis.

## 1.5. Organización de la tesis

El presente trabajo de investigación de tesis está organizado como se describe a continuación:

- En el **Capítulo 2** se presenta de forma detallada el modelo matemático del robot. Así como también se describen los sistemas caóticos utilizados para la encriptación de señales en la transmisión de información de los robots, los conceptos básicos para lograr de manera efectiva la sincronización y la encriptación de datos.
- En el **Capítulo 3** se describe el desarrollo de diferentes leyes de control para el seguimiento de trayectorias. Además, se exponen también las trayectorias que fueron utilizadas en el presente trabajo de tesis.
- En el **Capítulo 4** se expone de manera puntual las modificaciones a los controladores antes presentados para la sincronización y formación de robots móviles, así como también se presenta de manera formal la implementación de un acoplamiento dinámico para su sincronización y la encriptación de señales de control para garantizar que la comunicación entre robots al momento de sincronizarse sea segura.
- En el **Capítulo 5** corresponde a una breve descripción física de los robots móviles utilizados en el presente trabajo de tesis, así como también se presenta la metodología para la realización de los experimentos. De igual manera, se exponen los resultados de las simulaciones numéricas y experimentales obtenidas al emplear todo el esquema de trabajo propuesto. Cabe señalar también

que se presenta de manera gráfica el comportamiento de los robots durante la sincronización y el seguimiento de trayectorias y, de manera gráfica, se presenta la criptografía de las señales de posición y del acoplamiento dinámico enviadas al robot seguidor.

- Finalmente **Capítulo 6** se presentan las conclusiones sobre el trabajo realizado en esta investigación, además de presentar también el trabajo futuro donde se podría dar una posible continuidad para otro trabajo de investigación.

## Capítulo 2. Preliminares

---

A continuación, en el presente capítulo, se expone de manera detallada el modelo matemático de un robot móvil con ruedas de tracción diferencial. Se describen los sistemas caóticos que fueron utilizados para la encriptación de señales de control entre robots móviles, se explica de manera básica acerca de la sincronización en sistemas robóticos y los conceptos básicos en la encriptación de señales utilizando sistemas caóticos para ello.

### 2.1. Modelo matemático del robot

En esta sección se presenta el modelo cinemático de un robot móvil con ruedas de tracción diferencial como se muestra en la Figura 2. El robot está compuesto por cuatro ruedas: dos frontales ( $FR$  y  $FL$ ) y dos traseras ( $RR$  y  $RL$ ). Cada rueda está equipada con un motor capaz de generar una velocidad angular  $\omega_i$  donde  $i = \{FR, FL, RR, RL\}$ . Las velocidades angulares netas generadas por las ruedas derecha e izquierda están dadas por la siguiente expresión:

$$\omega_R = \frac{1}{2}(\omega_{FR} + \omega_{RR}), \quad \omega_L = \frac{1}{2}(\omega_{FL} + \omega_{RL}). \quad (1)$$

Ahora bien, la velocidad lineal generada por las ruedas está dada por:

$$\nu_R = \frac{\omega_R}{r}, \quad \nu_L = \frac{\omega_L}{r}, \quad (2)$$

donde  $r \in \mathbb{R}$  es el radio de las llantas. Tomando en cuenta las expresiones anteriores, las velocidades lineales y angulares netas generadas por las ruedas son:

$$\nu = \frac{1}{2}(\nu_R + \nu_L), \quad \omega = \frac{1}{l}(\nu_R - \nu_L), \quad (3)$$

donde  $l \in \mathbb{R}$  es la distancia entre las ruedas. En este trabajo se considera que  $\nu$  y  $\omega$  son las entradas de control del sistema.

Para continuar con el análisis, considere el sistema de referencia inercial  $\Sigma = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$  y el sistema de referencia fijo al robot denotado por  $\Sigma' = \{\mathbf{x}', \mathbf{y}'\}$ . Dado que el robot es un cuerpo rígido, la posición y orientación del robot puede ser descrito por una matriz de transformación homogénea dada por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (4)$$

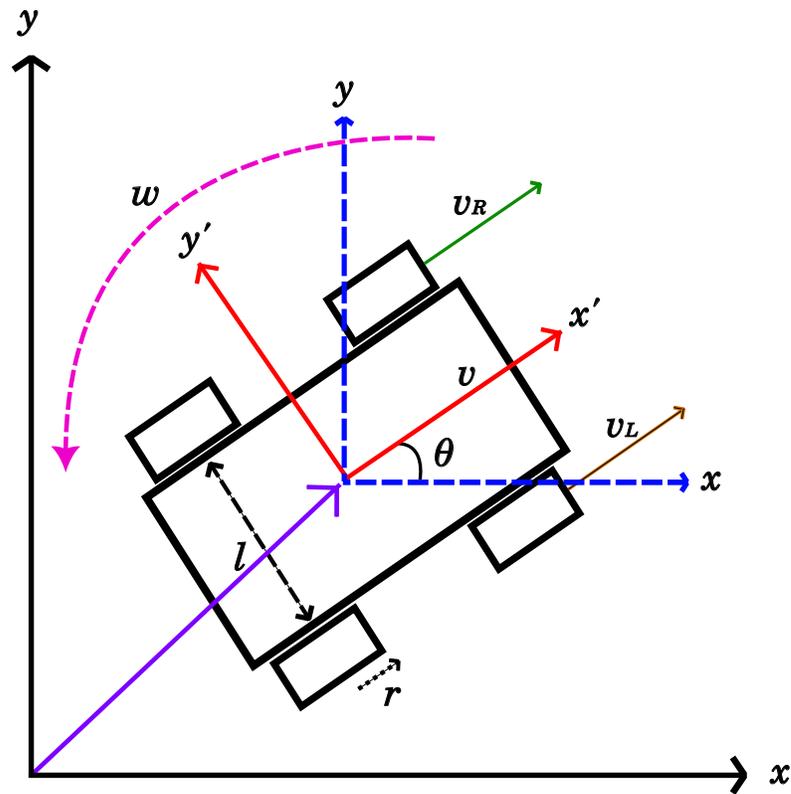


Figura 2. Esquema del modelo cinemático del robot móvil.

donde  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es la posición del robot y  $\mathbf{R} \in SO$  es una matriz de rotación que relaciona los sistemas coordenados  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  y describe la orientación del robot. La matriz de rotación se puede parametrizar mediante el ángulo  $\theta$  (ver Figura 2) de la siguiente manera:

$$\mathbf{R} = \cos(\theta)\mathbf{I} + \sin(\theta)\mathbf{S}, \quad (5)$$

donde  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz antisimétrica y los vectores unitarios  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2$  forman una base canónica en  $\mathbb{R}^2$ , es decir,  $\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$  donde  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es la matriz identidad.

Para obtener las ecuaciones cinemáticas se considera lo siguiente. El eje  $y'$  es paralelo al eje de rotación de las ruedas, mientras que el eje  $x'$  es perpendicular a dicho eje. Dado que los motores de las llantas solo pueden generar velocidad lineal en la dirección normal al eje de rotación de las ruedas y asumiendo que no existe deslizamiento entre las ruedas se tienen las siguientes condiciones:

$$\mathbf{e}_1^\top \mathbf{v}' = \nu, \quad \mathbf{e}_2^\top \mathbf{v}' = 0, \quad (6)$$

donde  $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^2$  es la velocidad lineal expresada con respecto al sistema de referencia  $\Sigma'$  y  $\nu \in \mathbb{R}$  es la

velocidad neta generada por los motores. La restricción Pfaffiana  $e_2^\top \mathbf{v}' = 0$  indica que el robot no se puede mover lateralmente y por lo tanto se tiene  $\mathbf{v}' = \nu \mathbf{e}_1$ . Tomando en cuenta el análisis anterior, las ecuaciones cinemáticas del robot móvil se obtienen al derivar con respecto al tiempo la matriz de transformación homogénea dada en (4) y cuya expresión se muestra a continuación:

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{H}\mathbf{V}, \quad (7)$$

donde la matriz  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  está dada por:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \omega \mathbf{S} & \nu \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

donde  $\dot{\theta} = \omega \in \mathbb{R}$  es la velocidad angular. De la ecuación (7) se tiene que la velocidad lineal del robot móvil expresada con respecto al sistema de referencia inercial está dada por:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}\mathbf{v}' = \nu \mathbf{R}\mathbf{e}_1, \quad (9)$$

donde  $\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^2$ . Tomando en cuenta las expresiones anteriores, la restricción en velocidad  $e_2^\top \mathbf{v}' = 0$  se puede expresar como:

$$e_2^\top \mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{p}} = \dot{y} \cos(\theta) - \dot{x} \sin(\theta) = 0. \quad (10)$$

La restricción anterior es de hecho una restricción no holonómica (Sciavicco, 2001). Considerando que la orientación del robot se puede parametrizar utilizando el ángulo  $\theta$ , un modelo cinemático simplificado que ha sido ampliamente utilizado en la literatura es el siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \nu \cos(\theta), \\ \dot{y} &= \nu \sin(\theta), \\ \dot{\theta} &= \omega, \end{aligned} \quad (11)$$

## 2.2. Sincronización

El término *sincronización* proviene de una palabra compuesta de origen griego *syn-khronos* cuyo significado etimológico es "unido en el tiempo". Así pues, la sincronización es un fenómeno extensamente

estudiado en la literatura dentro de diferentes áreas, siendo la robótica y el control automático algunas de ellas debido a que es un fenómeno con el cuál se puede producir un conjunto de interconexiones entre dos o más sistemas dinámicos que desempeñen una tarea en común (Pikovsky et al., 2001; Blekhman et al., 1997).

Sin embargo, pese a que en la naturaleza la sincronización puede surgir de manera natural, en los sistemas contruidos por el hombre el fenómeno de la sincronización no se presenta de manera natural, y siendo este suceso físico de mucha utilidad e incluso necesaria en algunos casos, la sincronización puede considerarse como un problema de control en sí, de modo que también se le puede denominar como *sincronización controlada* siendo éste enfoque al que se refiere el manuscrito de tesis cuando se menciona la sincronización. En este sentido, existen diversas técnicas de control que han sido utilizadas, siendo una de ellas la retroalimentación lineal de estados (Jiang & Tang, 2002; Sarasola et al., 2003).

Ahora bien, para que la sincronización exista es necesario que los sistemas generen conexiones entre sí, es decir que tengan un tipo de acoplamiento que juega un papel muy importante en el problema de la sincronización. Dentro de los diferentes tipos de acoplamientos que existen el presente trabajo de investigación se centra en solo dos, siendo específicamente el ya estudiado *acoplamiento directo* y el otro siendo un *acoplamiento dinámico*.

### 2.2.1. Acoplamiento directo

Existen dos tipos de conexión para este tipo de acoplamiento, a saber, la unidireccional (maestro-seguidor) y la bidireccional (global). El primer tipo de conexión también se puede denominar como *maestro-seguidor* debido a que el sistema definido como maestro impone su dinámica al resto de sistemas que, como su nombre lo indica, darán seguimiento a ello (ver Figura 3). El segundo tipo de conexión es el resultado de la interacción de todos los sistemas involucrados, ya que de manera global existe retroalimentación en las dinámicas de todos los sistemas entre sí (ver Figura 4).



**Figura 3.** Conexión unidireccional (maestro-seguidor) de dos sistemas.



**Figura 4.** Conexión bidireccional (global) de dos sistemas.

Para generar cualquiera de los dos tipos de conexiones antes mencionados es necesario establecer primero una topología de conexión. Éstas topologías definen el tipo de interacción entre los sistemas donde puede ser definido, además su interacción puede ser de manera unidireccional o bidireccional. Para ello se hace uso de una herramienta matemática cuyo origen pertenece a la ya extensamente estudiada área de teoría de grafos, siendo la matriz de acoplamiento.

La matriz de acoplamiento es un elemento importante que sirve para indicar la topología de conexión de dos o mas sistemas dentro de una red. Es por ello la importancia de su cálculo para determinar e implementar este tipo de acoplamiento a los sistemas involucrados. Para ello se determina en primer lugar la matriz de adyacencia  $\Gamma(G)$ . Esta matriz es de dimensión cuadrada  $n \times n$ , es decir que tiene el mismo número de renglones y de columnas, donde  $n \in \mathbb{N}^*$  representa el número de sistemas interconectados. La matriz se compone en cada uno de sus elementos  $a_{ij}$  de 0's y 1's, los cuales están dados tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in E(G), \\ 0 & \text{de otra forma,} \end{cases} \quad (12)$$

de manera que  $(i, j) \in E(G)$  indica que existe una arista que une los nodos  $i$  y  $j$ , donde  $E(G)$  es el conjunto de aristas presentes en el grafo. Cabe resaltar que si el tipo de conexión es bidireccional entonces  $a_{ij} = 1$  del nodo  $i$  al  $j$  y viceversa mientras que de forma unidireccional solo puede existir de  $i$  a  $j$  o de  $j$  a  $i$  solamente.

De igual manera, es necesario calcular la matriz de grado  $D(G)$ , la cual es diagonal de dimensión  $n \times n$  y representa la cantidad de vecinos que tiene cada nodo. Los elementos de la matriz está dada por  $d_{ij}$  donde:

$$d_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases} \quad (13)$$

Al grado del nodo  $i$  se le denomina como el coeficiente  $d_i$ , el cuál es la suma de todos los elementos del

renglón  $i$  de la matriz de adyacencia  $\Gamma(G)$  tal que:

$$d_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n (i, j) \in E(G). \quad (14)$$

En las conexiones unidireccionales se puede distinguir el grado por entrada  $d_i^-$  y por salida  $d_i^+$ , donde el primero es la suma de todos los enlaces que tienen como final al nodo  $i$ , mientras que el segundo es para todos aquellos que lo tiene al inicio (Martínez Clark, 2014).

Consecuentemente, tras haber determinado las matrices de adyacencia  $\Gamma(G)$  y de grado  $D(G)$  se calcula la matriz Laplaciana, la cuál es el resultado de la diferencia entre las matrices  $D(G)$  y  $\Gamma(G)$  tal que:

$$L(G) = D(G) - \Gamma(G). \quad (15)$$

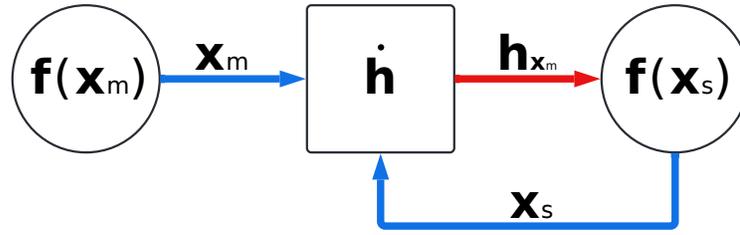
Con ello se determina finalmente la matriz de acoplamiento  $A(G)$  definiendo la matriz Laplaciana  $L(G)$  de manera negativa concretamente, es decir que:

$$A(G) = -L(G), \quad (16)$$

siendo la matriz de acoplamiento importante para las técnicas de sincronización de sistemas utilizadas en los capítulos posteriores. Para una descripción más detallada sobre teoría de grafos ver López Parra (2017); Martínez Clark (2014); Foulds (2012) y algunas de sus aplicaciones ver Montañez Molina (2020); Vara Herrera (2021).

### 2.2.2. Acoplamiento dinámico (indirecto)

A diferencia del acoplamiento directo, el acoplamiento dinámico (indirecto) presenta una multitud de propiedades que lo convierten en una técnica de sincronización atractiva para acoplar de manera indirecta dos sistemas dinámicos, siendo de hecho una ventaja para cierto tipo de sistemas dinámicos que mediante el clásico acoplamiento difuso no podría ser posible la sincronización entre ellos. En otras palabras, el acoplamiento dinámico consta de hacer uso de un sistema intermediario en el cuál las dinámicas de sus estados son utilizadas para sincronizar los sistemas entre sí, este esquema de acoplamiento puede visualizarse en la Figura 5.



**Figura 5.** Esquema de acoplamiento dinámico en 2 sistemas.

Ahora bien, el acoplamiento dinámico está descrito por las siguientes ecuaciones (Vara Herrera, 2021):

$$\dot{x}_m = f(x_m), \quad (17)$$

$$\dot{x}_s = f(x_s) - B_1 h, \quad (18)$$

$$\dot{h} = G h - k B_2 (x_m - x_s), \quad (19)$$

donde  $x_m, x_s \in \mathbb{R}^n$  representan los vectores de estado del sistema maestro y seguidor respectivamente,  $h = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}^T$  tal que  $h_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ , son las variables de estado del acoplamiento dinámico,  $f$  es el vector de ecuaciones que expresan las dinámicas del sistema el cual es generalmente suave y no lineal,  $k \in \mathbb{R}^+$  es una constante positiva que denota la fuerza de acoplamiento y finalmente las matrices  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times 2}$  y  $B_2 \in \mathbb{R}^{2 \times n}$  indican las ecuaciones del sistema seguidor que se le implementará el acoplamiento dinámico y los estados del sistema maestro que serán acoplados al sistema seguidor respectivamente. Por último, la matriz  $G$  está definida tal que:

$$G = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

donde  $\gamma_1, \gamma_2$  y  $\alpha$  son constantes positivas (Peña-Ramirez et al., 2018).

### 2.3. Discretización de funciones y ecuaciones diferenciales continuas

Anteriormente se realizó un análisis sobre el modelo matemático del robot, así como también posteriormente se diseñará una ley de control para el seguimiento de trayectorias deseadas. No obstante, para implementar este tipo de técnicas de control en sistemas robóticos es necesario hacerlo en su forma discreta, ya que la instrumentación de los sistemas creados por el hombre generalmente son digitales. Para ello, existen diferentes técnicas de discretización que permite transformar las funciones continuas y, en este caso, especialmente las ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE por sus siglas en inglés).

Una de las técnicas de discretización muy comúnmente utilizadas en la industria y en la instrumentación electrónica de sistemas de control es el método de Euler, cuyo procedimiento de integración numérica para la solución de ODEs es a partir de un valor como condición inicial dado. Éste método consiste en una serie de ecuaciones recursivas tal que:

$$\begin{aligned}x_1(i+1) &= x_1(i) + \tau f_1(x_1(i), x_2(i), \dots, x_j(i)), \\x_2(i+1) &= x_2(i) + \tau f_2(x_1(i), x_2(i), \dots, x_j(i)), \\&\vdots \\x_j(i+1) &= x_j(i) + \tau f_j(x_1(i), x_2(i), \dots, x_j(i)),\end{aligned}$$

donde  $\tau$  representa el tamaño de paso,  $i$  representa el número de iteraciones,  $j$  representa la cantidad de estados del sistema y  $f$  las ecuaciones diferenciales que describen las dinámicas del sistema (Chapra et al., 2011). No obstante, el método de discretización de Euler presenta varias limitantes, entre ellas los errores de truncamiento (local y global), errores de redondeo y errores acumulativos dependiendo del tamaño de paso dado (Biswas et al., 2013).

Otro método de discretización numérica para la solución de ODEs es el método de Runge-Kutta de 4to orden (RK4) donde, al igual que en el método de Euler, también consiste en la solución de un conjunto de ecuaciones recursivas para diferentes iteraciones. Éstas ecuaciones están descritas tal que:

$$\begin{aligned}x_1(n+1) &= x_1(n) + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\x_2(n+1) &= x_2(n) + \frac{\tau}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4), \\&\vdots \\x_m(n+1) &= x_m(n) + \frac{\tau}{6}(h_1 + 2h_2 + 2h_3 + h_4),\end{aligned}$$

siendo que las variables auxiliares  $k_j$ ,  $l_j$  y  $h_j$ , donde  $j = 1, 2, 3, 4$ , se calculan como sigue:

$$\begin{aligned}k_1 &= f_1(x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)), \\l_1 &= f_2(x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)), \\&\vdots \\h_1 &= f_m(x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= f_1 \left( x_1(n) + \frac{\tau}{2}k_1, x_2(n) + \frac{\tau}{2}l_1, \dots, x_m(n) + \frac{\tau}{2}h_1 \right), \\
l_2 &= f_2 \left( x_1(n) + \frac{\tau}{2}k_1, x_2(n) + \frac{\tau}{2}l_1, \dots, x_m(n) + \frac{\tau}{2}h_1 \right), \\
&\vdots \\
h_2 &= f_m \left( x_1(n) + \frac{\tau}{2}k_1, x_2(n) + \frac{\tau}{2}l_1, \dots, x_m(n) + \frac{\tau}{2}h_1 \right), \\
&\vdots \\
k_3 &= f_1 \left( x_1(n) + \frac{\tau}{2}k_2, x_2(n) + \frac{\tau}{2}l_2, \dots, x_m(n) + \frac{\tau}{2}h_2 \right), \\
l_3 &= f_2 \left( x_1(n) + \frac{\tau}{2}k_2, x_2(n) + \frac{\tau}{2}l_2, \dots, x_m(n) + \frac{\tau}{2}h_2 \right), \\
&\vdots \\
h_3 &= f_m \left( x_1(n) + \frac{\tau}{2}k_2, x_2(n) + \frac{\tau}{2}l_2, \dots, x_m(n) + \frac{\tau}{2}h_2 \right), \\
&\vdots \\
k_4 &= f_1 (x_1(n) + \tau k_3, x_2(n) + \tau l_3, \dots, x_m(n) + \tau h_3), \\
l_4 &= f_2 (x_1(n) + \tau k_3, x_2(n) + \tau l_3, \dots, x_m(n) + \tau h_3), \\
&\vdots \\
h_4 &= f_m (x_1(n) + \tau k_3, x_2(n) + \tau l_3, \dots, x_m(n) + \tau h_3),
\end{aligned}$$

de modo que  $\tau$  representa el tamaño de paso,  $n$  representa el número de iteraciones,  $m$  representa la cantidad de estados del sistema y  $f$  las ecuaciones diferenciales que describen las dinámicas del sistema, siendo un método numérico más preciso que el método de Euler (Butcher, 1996; Tan & Chen, 2012).

Ahora bien, así como los métodos numéricos mostrados anteriormente, existen diversos métodos numéricos para la solución de ODEs que, dependiendo del ámbito, unos son mejores que otros. No obstante, el uso de cada uno de ellos para determinar la solución numérica de un sistema de ecuaciones diferenciales puede representar un trabajo muy complejo que puede conllevar un largo periodo de tiempo para resolverlo, lo cuál no sería práctico si se desea una solución rápida.

Es por ello que hoy en día existen diversos softwares cuyos entornos de trabajo facilitan éste trabajo al momento de calcular la solución numérica de una ODE, siendo el más conocido el programa MATLAB que contiene un conjunto de programas desarrollados para resolver ODEs (Shampine & Reichelt, 1997). Gracias a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el uso de métodos numéricos es

posible que sus aplicaciones no se limiten solo de manera analógica, sino también de manera digital como en Méndez-Ramírez et al. (2019) que utiliza diferentes métodos numéricos para implementar sistemas caóticos en sistemas embebidos.

Por consiguiente, se necesita que el modelo matemático del robot basado en el marco de referencia inercial en (7) o el modelo cinemático simplificado en (11) se representen en su forma discreta para su posterior implementación en los robots móviles. Entonces, utilizando el método de discretización de Euler, se tiene lo siguiente:

$$\mathbf{H}(n+1) = \mathbf{H}(n) + \tau (\mathbf{H}(n)\mathbf{V}(n)), \quad (21)$$

recordando que  $n \in \mathbb{Z}^+$  representa el número de iteraciones, mientras que para el modelo simplificado su expresión discreta para el mismo método es tal que:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= x(n) + \tau (\nu(n) \cos(\theta(n))), \\ y(n+1) &= y(n) + \tau (\nu(n) \text{sen}(\theta(n))), \\ \theta(n+1) &= \theta(n) + \tau (\omega(n)). \end{aligned} \quad (22)$$

De manera alternativa, otra forma de obtener la forma discreta del modelo cinemático del robot es mediante el cálculo de la solución de las propias ecuaciones diferenciales y discretizar esa solución. Para ello se desea determinar la matriz exponencial correspondiente a la matriz  $\mathbf{V}$ . De modo que se determina el polinomio característico de  $\mathbf{V}$ , tal que:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda\omega^2, \quad (23)$$

siendo que el polinomio característico  $p(\lambda)$  es fundamental para determinar los valores propios  $\lambda$  de la matriz  $\mathbf{V}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, \\ \lambda_2 &= i\omega, \\ \lambda_3 &= -i\omega. \end{aligned} \quad (24)$$

Con ello, mediante el *Teorema de Cayley-Hamilton*, se establece que:

$$e^{\mathbf{V}t} = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{V} + \beta_2 \mathbf{V}^2, \quad (25)$$

dado a que la matriz  $V$  es cuadrada de dimensiones  $q \times q$  donde  $q = 3$  y  $V^2$  es tal que:

$$V^2 = \begin{bmatrix} -\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & \nu\omega \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

entonces se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= \beta_0 + \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_1^2, \\ e^{\lambda_2 t} &= \beta_0 + \beta_1 \lambda_2 + \beta_2 \lambda_2^2, \\ e^{\lambda_3 t} &= \beta_0 + \beta_1 \lambda_3 + \beta_2 \lambda_3^2, \end{aligned} \quad (27)$$

de modo que se sustituyen los valores propios  $\lambda$  en el sistema de ecuaciones, determinando de esta manera los coeficientes  $\beta$  tal que:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 1, \\ \beta_1 &= \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i\omega}, \\ \beta_2 &= \frac{1}{\omega^2} \left[ 1 - \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right], \end{aligned} \quad (28)$$

donde se observa que los términos  $\beta_1$  y  $\beta_2$  pueden ser simplificados por la *Identidad de Euler*, de modo que:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 1, \\ \beta_1 &= \frac{1}{\omega} \text{sen}(\omega t), \\ \beta_2 &= \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \text{cos}(\omega t), \end{aligned} \quad (29)$$

entonces, se sustituyen los términos  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  y  $\beta_2$  en la ecuación (25) tal que:

$$e^{Vt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\omega} \text{sen}(\omega t) \begin{bmatrix} 0 & -\omega & \nu \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \left( \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \text{cos}(\omega t) \right) \begin{bmatrix} -\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & \nu\omega \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Ahora bien, se resuelve la ecuación donde se obtiene:

$$e^{\mathbf{V}t} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\text{sen}(\omega t) & \frac{\nu}{\omega} \text{sen}(\omega t) \\ \text{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) & \frac{\nu}{\omega} - \frac{\nu}{\omega} \cos(\omega t) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

siendo lo obtenido la matriz exponencial  $e^{\mathbf{V}t}$  de la matriz  $\mathbf{V}$ .

Una forma alternativa de obtener la matriz exponencial  $e^{\mathbf{V}t}$  sin la necesidad de calcular los valores propios de la matriz  $\mathbf{V}$  es mediante el método de *Laplace*. Para se establece que:

$$e^{\mathbf{V}t} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{V})^{-1}\}, \quad (32)$$

donde  $s$  es la variable dentro del dominio de *Laplace*. Ahora bien, se obtiene la matriz  $(s\mathbf{I} - \mathbf{V})^{-1}$  tal que:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{V})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + \omega^2} & \frac{-\omega}{s^2 + \omega^2} & \frac{\nu}{s^2 + \omega^2} \\ \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} & \frac{s}{s^2 + \omega^2} & \frac{\nu\omega}{s^3 + s\omega^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

siendo que la matriz exponencial se calcula obteniendo la transformada inversa de *Laplace* de la matriz  $(s\mathbf{I} - \mathbf{V})^{-1}$ , de modo que:

$$e^{\mathbf{V}t} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\text{sen}(\omega t) & \frac{\nu}{\omega} \text{sen}(\omega t) \\ \text{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) & \frac{\nu}{\omega} - \frac{\nu}{\omega} \cos(\omega t) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

de modo que  $e^{\mathbf{V}t}$  es la matriz exponencial de  $\mathbf{V}$ , tal que la solución a la ecuación diferencial del modelo cinemático del sistema esta dada por la ecuación descrita en (35).

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}(t_0)e^{\int_0^t \mathbf{V}(\tau) d\tau}. \quad (35)$$

Tomando en cuenta lo anterior, se debe discretizar la solución en (35) donde se considera que  $t \in [0, (n+1)\tau]$  tal que  $n = 0, 1, \dots, i$ . Con ello, se despeja de la integral mostrada en la matriz exponencial

de la solución dada, por lo que entonces:

$$\int_0^{(n+1)\tau} \mathbf{V}(\tau) d\tau = \int_0^{n\tau} \mathbf{V}(\tau) d\tau + \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \mathbf{V}(\tau) d\tau. \quad (36)$$

Recordando que  $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$  y dada la integral despejada en (36) se aplica la propiedad distributiva  $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$ , de modo que:

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}(t_0)e^{\int_0^{n\tau} \mathbf{V}(\tau) d\tau} e^{\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \mathbf{V}(\tau) d\tau}, \quad (37)$$

donde:

$$\mathbf{H}(n\tau) = \mathbf{H}(t_0)e^{\int_0^{n\tau} \mathbf{V}(\tau) d\tau} \quad (38)$$

$$e^{\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \mathbf{V}(\tau) d\tau} = e^{\left[\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} d\tau\right] \mathbf{V}} = e^{\mathbf{V}\tau}, \quad (39)$$

y, considerando la igualdad  $(n+1)\tau - n\tau = \tau$ , se sustituye tal que:

$$\mathbf{H}(n+1) = \mathbf{H}(n)e^{\mathbf{V}^{(n)\tau}}, \quad (40)$$

siendo (40) la solución del sistema en la forma discretizada considerando el modelo dinámico el cuál contempla la matriz homogénea.

## 2.4. Sistemas caóticos

Hay varios fenómenos físicos en nuestro entorno cuyo comportamiento puede ser descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales. Estos fenómenos evolucionan con el tiempo y están sujetos a cambios. Por tanto, son considerados como *sistemas dinámicos*, donde contienen multitud de ellos, siendo los sistemas caóticos uno de estos tipos. Un sistema caótico se refiere a un sistema dinámico que exhibe un comportamiento altamente sensible a las condiciones iniciales, llamado sensibilidad a la condición inicial. Estos sistemas son deterministas, lo que significa que su comportamiento futuro está totalmente determinado por sus condiciones iniciales y sus reglas o ecuaciones subyacentes, así como por sus principales propiedades las cuales son (Alligood et al., 1998):

1. Sensibilidad a las condiciones iniciales: Incluso pequeñas desviaciones en las condiciones iniciales de un sistema caótico pueden generar diferencias significativas en su comportamiento a largo plazo. Esto hace que sea difícil predecir con precisión el comportamiento futuro del sistema.

2. Bifurcaciones: Los sistemas caóticos pueden experimentar bifurcaciones, que son cambios abruptos en el comportamiento cuando cambian ciertos parámetros o condiciones del sistema. Estas bifurcaciones pueden dar como resultado patrones complejos y múltiples trayectorias o estados estacionarios.
3. Irregularidades: El comportamiento de un sistema caótico a menudo se caracteriza por su aparente aleatoriedad y falta de patrones regulares discernibles. Aunque hay una estructura subyacente en el sistema, su comportamiento puede parecer caótico e impredecible.
4. Sensibilidad a las perturbaciones externas: Los sistemas caóticos también son sensibles a las perturbaciones externas. Pequeñas perturbaciones en el sistema pueden amplificarse y tener un impacto significativo en el comportamiento general.
5. Atractores extraños: A menudo, los sistemas caóticos exhiben atractores extraños en el espacio de fase, que son conjuntos de estados en los que el sistema tiende a evolucionar. Estos atractores tienen una estructura fractal y no son periódicos, lo que significa que el sistema nunca se repite exactamente en el tiempo.

En ese sentido, para el análisis y estudio del envío de mensajes de forma segura (en este caso señales de control o trayectorias deseadas) como primera etapa se consideró la implementación individual para un solo robot tomando como mensaje a encriptar las trayectorias deseadas impuestas al robot. Por otra parte, el sistema hipercaótico utilizado para el encriptado en el presente trabajo de investigación es el sistema reportado en los trabajos de Arellano-Delgado et al. (2017) y Arellano-Delgado et al. (2023), el cual es un sistema discreto que presenta dinámicas caóticas e hipercaóticas y está definido como sigue:

$$\mathbf{x}_a(k+1) = \begin{bmatrix} \text{sen}(x_{a_2}(k)) \\ bx_{a_2}(k) \end{bmatrix} + \mathbf{C}\mathbf{u}_1(k), \quad (41)$$

$$\mathbf{x}_b(k+1) = \begin{bmatrix} \text{sen}(x_{b_2}(k)) \\ bx_{b_2}(k) \end{bmatrix} + \mathbf{C}\mathbf{u}_2(k), \quad (42)$$

donde  $\mathbf{x}_a(k) = (x_{a_1}(k), x_{a_2}(k), \dots, x_{a_n}(k))^T \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{x}_b(k) = (x_{b_1}(k), x_{b_2}(k), \dots, x_{b_n}(k))^T \in \mathbb{R}^n$  son estados vectoriales que pertenecen a los sistemas acoplados descritos en (41)-(42),  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz elegida adecuadamente y  $\mathbf{u}_1(k), \mathbf{u}_2(k) \in \mathbb{R}^n$  son las señales de entrada que acoplan a los sistemas (41)-(42).

En el caso de un acoplamiento directo, en (41)-(42) puede ser usado el bien conocido y extensamente estudiado acoplamiento difuso como sigue:

$$\mathbf{u}_1(k) = c(\eta \mathbf{x}_a(k) + \mathbf{x}_b(k)), \quad (43)$$

$$\mathbf{u}_2(k) = c(\eta \mathbf{x}_b(k) + \mathbf{x}_a(k)), \quad (44)$$

donde  $c \neq 0$  es la fuerza de acoplamiento y  $\eta$  es el parámetro de bifurcación que nos permite generar la ruta al caos e hipercaos, además  $\eta$  determina la sincronización en fase o anti-fase entre los sistemas (41)-(42).

## 2.5. Encriptación de señales

La transmisión de datos de manera segura es muy importante para garantizar la integridad de la información en su transmisión, así como también añade seguridad en las comunicaciones. Por este motivo, es crucial el uso de técnicas de encriptación de señales para evitar cualquier tipo de intervención de un agente externo.

Para ello se propone el esquema de encriptación presentado en la Figura 6 el cuál, mediante la sincronización de dos sistemas caóticos, es posible encriptar y descifrar una o varias señales que, para este trabajo de tesis, son los estados  $\mathbf{x}_m$  del robot maestro.

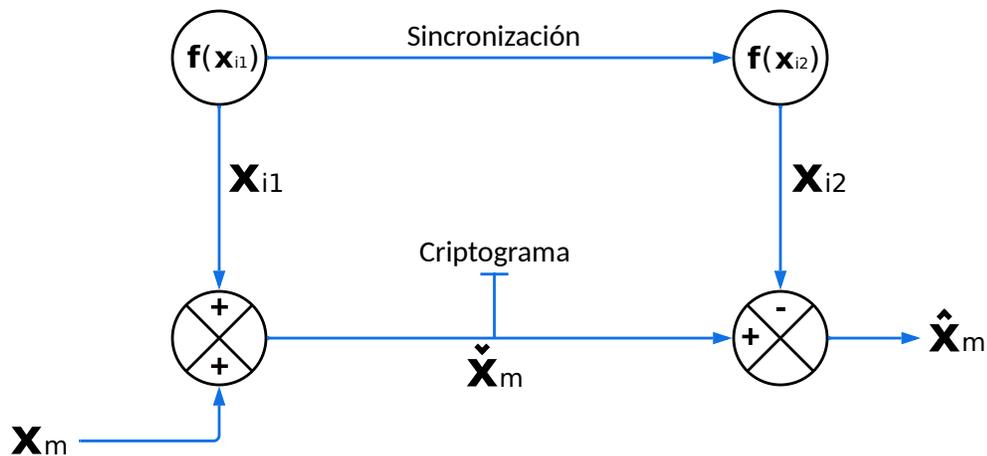


Figura 6. Esquema de encriptamiento de señales.

Para que esto sea posible es necesario ajustar los sistemas caóticos a la misma condición inicial, ya que de lo contrario sus dinámicas con el paso del tiempo serían muy diferentes el uno con el otro provocando

que la señal no sea descifrada y por ende poco útil para su uso. Es decir que, otras palabras, los estados  $x_{i1}$  del 1er sistema caótico se suman a la señal que se desea encriptar, en este caso los estados  $x_m$  del robot maestro tal que:

$$\check{x}_m = x_m + x_{i1}, \quad (45)$$

donde  $\check{x}_m$  representa los estados del robot maestro encriptados. Ahora bien, dado a que los dos sistemas caóticos poseen las mismas condiciones iniciales, los estados del 2do sistema caótico se utilizan para sustraer los estados  $x_{i1}$  del 1er sistema caótico con el fin de decodificar la señal  $x_m$  encriptada, es decir que:

$$\hat{x}_m = \check{x}_m - x_{i2}, \quad (46)$$

de modo que  $\hat{x}_m$  representa los estados del robot maestro descifrados, tal que debe satisfacer  $\hat{x}_m = x_m$  para que la señal descifrada sea efectiva y útil para el robot seguidor el cuál usará esa información para sincronizar sus dinámicas a las del robot maestro.

## Capítulo 3. Algoritmos de control

---

Dentro del ámbito de la robótica móvil es de suma importancia tener en cuenta los objetivos de control, ya que éstos determinan la complejidad en el desarrollo de leyes de control que permitan a los robots móviles realizar sus tareas de manera eficiente u optimizada según sea el caso. Para ello existe de manera general dos objetivos de control muy comunes en la práctica y en la literatura, los cuáles son:

- Regulación a una posición deseada.
- Seguimiento de trayectorias.

Donde, para materializar el objetivo general y los objetivos específicos, se recurre al diseño de leyes de control para robots móviles que cumplan con el objetivo de control de seguimiento de trayectorias. A continuación, en el presente capítulo, se analiza y diseña de manera detallada dos leyes de control para alcanzar el objetivo de control deseado, así como también se definen las características que las trayectorias deseadas deben de satisfacer.

### 3.1. Trayectorias deseadas

Las leyes de control que serán diseñadas a continuación requieren de una trayectoria deseada que satisfaga las siguientes condiciones:

- Deben ser funciones continuas.
- La función de la trayectoria deseada debe ser al menos dos veces diferenciable con respecto al tiempo.
- Finalmente, debe satisfacer  $\|\dot{\mathbf{p}}_d(t)\| > \alpha > 0 \forall t \geq 0$ , donde  $\alpha$  es un valor constante positivo.

Algunas de las trayectorias que cumplen con las condiciones antes mencionadas son las siguientes:

- Trayectoria tipo *Lemniscata*, la cual está definida como:

$$x_d(t) = a \operatorname{sen}(w_1 t), \quad (47)$$

$$y_d(t) = a \operatorname{sen}(w_2 t), \quad (48)$$

donde  $a \in \mathbb{R}$  es la amplitud y  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$  son las frecuencias de la trayectoria. La derivada con respecto al tiempo de las ecuaciones (47) y (48) están dadas por:

$$\dot{x}_d(t) = aw_1 \cos(w_1 t), \quad (49)$$

$$\dot{y}_d(t) = aw_2 \cos(w_2 t). \quad (50)$$

- Trayectoria circular, la cual esta definida como:

$$x_d(t) = \text{sen}(w_1 t), \quad (51)$$

$$y_d(t) = \text{cos}(w_1 t), \quad (52)$$

siendo las ecuaciones (53) y (54) las que corresponden a su primer derivada, donde  $w_1$  y  $w_2$  representan la frecuencia de la trayectoria.

$$\dot{x}_d(t) = w_1 \text{cos}(w_1 t), \quad (53)$$

$$\dot{y}_d(t) = -w_1 \text{sen}(w_1 t), \quad (54)$$

- Trayectoria tipo *Hipocicloide*, la cual esta definida como:

$$x_d(t) = (r_a - r_b) \cos(t) + d \cos\left(\frac{(r_a - r_b)}{r_b} t\right) + x_0, \quad (55)$$

$$y_d(t) = (r_a - r_b) \text{sen}(t) - d \text{sen}\left(\frac{(r_a - r_b)}{r_b} t\right) + y_0, \quad (56)$$

de manera que las ecuaciones descritas en (57) y (58) corresponden a su primer derivada, donde  $r_a$  representa el radio del círculo fijo,  $r_b$  es el radio del círculo rodante,  $d$  es la distancia del punto deseado al centro del círculo rodante y  $(x_0, y_0)$  es el centro del círculo fijo.

$$\dot{x}_d(t) = (r_b - r_a) \text{sen}(t) - \frac{(r_a - r_b)}{r_b} d \text{sen}\left(\frac{(r_a - r_b)}{r_b} t\right), \quad (57)$$

$$\dot{y}_d(t) = (r_a - r_b) \text{cos}(t) - \frac{(r_a - r_b)}{r_b} d \text{cos}\left(\frac{(r_a - r_b)}{r_b} t\right), \quad (58)$$

Con las trayectorias mostradas anteriormente se diseña, en la siguiente sección, una ley de control lineal para el robot móvil.

### 3.2. Control por retroalimentación dinámica

Para que el robot logre cumplir alguno de los objetivos de control antes mencionadas es necesario precisamente el diseño de una ley de control que le permita alcanzar las posiciones deseadas en el menor tiempo posible y con el mínimo error. Sin embargo, y como se puede notar en el modelo clásico, reportado en De Luca & Di Benedetto (1993), descrito en la ecuación (11), las entradas de control  $\nu$  y  $\omega$  están acopladas. Esto genera un problema debido a que se requiere tener las entradas de control desacopladas con la intención de poder diseñar una ley de control para la sincronización y formación de los robots móviles. Es posible resolver este problema mediante la *linealización por retroalimentación dinámica*, técnica planteada en De Luca et al. (2001).

En términos generales esta técnica consiste, de ser posible, en hallar un compensador dinámico tal que:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= a(\mathbf{y}, \xi) + b(\mathbf{y}, \xi)\mathbf{u}, \\ \omega &= c(\mathbf{y}, \xi) + d(\mathbf{y}, \xi)\mathbf{u},\end{aligned}\tag{59}$$

donde  $\xi$  es el vector de estados tal que  $\xi \in \mathbb{R}^k$  y el vector de entradas externas  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ , de modo que resulte equivalente mediante una transformación de estados a un sistema lineal y totalmente controlable, de modo que:

$$\mathbf{z} = T(\mathbf{y}, \xi),\tag{60}$$

recordando que  $\mathbf{z}$  es el vector de estados del sistema transformado. Para ello se define un sistema con  $m$  salidas de la forma:

$$\boldsymbol{\eta} = q(\mathbf{y}),\tag{61}$$

de tal manera que el robot móvil sea capaz de realizar el seguimiento de trayectorias. Con ello es necesario diferenciar la salida del sistema hasta que aparezcan la o las entradas del sistema. Este algoritmo extiende las dinámicas del sistema formando así al compensador dinámico perteneciente al estado  $\xi$ , de tal manera que la suma de los estados  $k$  del sistema más la dimensión del compensador dinámico, tal que  $n + k$ , se obtiene la linealización del sistema.

Ahora bien, para el caso del robot móvil se define el vector de salidas como  $\boldsymbol{\eta} = [x \ y]^T$ , la velocidad lineal como  $\nu = \dot{x}$  y la aceleración tal que  $\dot{\xi} = a$ , donde al diferenciar con respecto al tiempo se obtiene lo siguiente:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu \\ \omega \end{bmatrix},\tag{62}$$

donde se sustituye por la ya definida velocidad lineal  $\nu$  por el estado  $\xi$  de modo que:

$$\dot{\eta} = \xi \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \end{bmatrix}, \quad (63)$$

posteriormente, al diferenciar nuevamente  $\dot{\eta}$ , se tiene que:

$$\ddot{\eta} = \dot{\xi} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} + \xi \dot{\theta} \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\xi \text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \xi \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (64)$$

siendo  $a$  la nueva entrada de control. Consecuentemente, al realizar la multiplicación de matrices con el vector de entrada modificado  $(a, \omega)$ , el resultado no será singular siempre y cuando  $\xi \neq 0$ . Con ello, asumiendo la condición antes mencionada, se puede definir que:

$$\begin{bmatrix} a \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\xi \text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \xi \cos(\theta) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (65)$$

de manera que:

$$\ddot{\eta} = \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{u}. \quad (66)$$

Con lo anterior determinado, el compensador dinámico resultante es:

$$\begin{aligned} a &= u_1 \cos(\theta) + u_2 \text{sen}(\theta), \\ \nu &= \xi, \\ \omega &= \frac{u_2 \cos(\theta) - u_1 \text{sen}(\theta)}{\xi}, \end{aligned} \quad (67)$$

y, dado a que el compensador dinámico es de dimensión uno, el número total de diferenciaciones de la salida del sistema con el compensador dinámico es de 2. Teniendo en cuenta lo anterior, se transforma el sistema en las nuevas coordenadas de modo que:

$$\begin{aligned} z_1 &= x, \\ z_2 &= y, \\ \dot{z}_1 &= \dot{x} = \nu \cos(\theta) = \xi \cos(\theta), \\ \dot{z}_2 &= \dot{y} = \nu \text{sen}(\theta) = \xi \text{sen}(\theta), \end{aligned} \quad (68)$$

siendo un sistema extendido que a su vez es completamente lineal y controlable. Así mismo, esta descrito

por las ecuaciones de segundo orden tal que:

$$\begin{aligned}\ddot{z}_1 &= \ddot{x} = u_1, \\ \ddot{z}_2 &= \ddot{y} = u_2,\end{aligned}\tag{69}$$

donde  $\mathbf{y}$  es el vector de salidas  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dot{z}_1 & \dot{z}_2 \end{bmatrix}^T$  y  $\mathbf{u}$  el vector de entradas  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T$ .

De manera alternativa, y con el fin de ilustrar la misma técnica de control para el modelo cinemático del robot móvil basado en matrices de rotación, se tiene una propiedad muy interesante del modelo cinemático en (7) lo cuál indica que es un sistema *diferencialmente plano*, es decir, existe una salida conocida como *salida plana* que permite expresar de manera algebraica todas las variables del sistema en función de la salida plana y un número finito de sus derivadas (Murray et al., 1995). Para fines de análisis la ecuación (7) puede representarse como:

$$\mathbf{v} = \nu \mathbf{R} \mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{R}} = \omega \mathbf{R} \mathbf{S}.\tag{70}$$

Para el modelo cinemático se toma como salida la posición Cartesiana, esto es,  $\mathbf{y} = \mathbf{p}$ . Donde claramente, la velocidad lineal es la primera derivada de la salida,  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{y}}$ . Ahora bien, de la ecuación (70) la entrada de control  $\nu$  se puede expresar de la siguiente manera:

$$(\nu \mathbf{R} \mathbf{e}_1)^\top (\nu \mathbf{R} \mathbf{e}_1) = \dot{\mathbf{y}}^\top \dot{\mathbf{y}} \implies \nu = \|\dot{\mathbf{y}}\|.\tag{71}$$

Con base al resultado anterior la primera columna de la matriz de rotación se puede expresar como:

$$\mathbf{R} \mathbf{e}_1 = \frac{\dot{\mathbf{y}}}{\|\dot{\mathbf{y}}\|}.\tag{72}$$

De la ecuación (5) se observa que la matriz de rotación  $\mathbf{R} \in SO(2)$  y  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  conmutan, es decir que  $\mathbf{R} \mathbf{S} = \mathbf{S} \mathbf{R}$ . Considerando este resultado y la igualdad  $\mathbf{S} \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$ , la segunda columna de la matriz de rotación se puede obtener como:

$$\mathbf{R} \mathbf{e}_2 = \mathbf{S} \frac{\dot{\mathbf{y}}}{\|\dot{\mathbf{y}}\|}.\tag{73}$$

Finalmente, la matriz de rotación se puede expresar como:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{\mathbf{y}}}{\|\dot{\mathbf{y}}\|} & \mathbf{S} \frac{\dot{\mathbf{y}}}{\|\dot{\mathbf{y}}\|} \end{bmatrix}.\tag{74}$$

No obstante, usando la igualdad  $\mathbf{S} \mathbf{a} \mathbf{a}^\top \mathbf{S} = \mathbf{a} \mathbf{a}^\top - \|\mathbf{a}\|^2 \mathbf{I} \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ , la derivada del vector unitario

$\dot{\mathbf{y}}/\|\dot{\mathbf{y}}\|$  se puede determinar como:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{y}}}{\|\dot{\mathbf{y}}\|} &= \left( \mathbf{I} - \frac{\dot{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{y}}^\top}{\|\dot{\mathbf{y}}\|^2} \right) \frac{\ddot{\mathbf{y}}}{\|\dot{\mathbf{y}}\|}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{y}}}{\|\dot{\mathbf{y}}\|} &= \frac{-\mathbf{S}\dot{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{y}}^\top\mathbf{S}}{\|\dot{\mathbf{y}}\|^2} \cdot \frac{\ddot{\mathbf{y}}}{\|\dot{\mathbf{y}}\|}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{y}}}{\|\dot{\mathbf{y}}\|} &= \left( -\frac{\dot{\mathbf{y}}^\top\mathbf{S}\ddot{\mathbf{y}}}{\|\dot{\mathbf{y}}\|^2} \right) \mathbf{S} \frac{\dot{\mathbf{y}}}{\|\dot{\mathbf{y}}\|},\end{aligned}\quad (75)$$

y por lo tanto, la derivada de la matriz de rotación está dada por:

$$\dot{\mathbf{R}} = \left( -\frac{\dot{\mathbf{y}}^\top\mathbf{S}\ddot{\mathbf{y}}}{\|\dot{\mathbf{y}}\|^2} \right) \mathbf{S}\mathbf{R}. \quad (76)$$

Al comparar la ecuación (76) con la ecuación (7), se concluye que la velocidad angular  $\omega$  se puede expresar como:

$$\omega = -\frac{\dot{\mathbf{y}}^\top\mathbf{S}\ddot{\mathbf{y}}}{\|\dot{\mathbf{y}}\|^2}. \quad (77)$$

A partir de lo anterior se puede deducir que la posición del robot ( $\mathbf{p}, \mathbf{R}$ ) y sus derivadas ( $\mathbf{v}, \dot{\mathbf{R}}$ ), así como las entradas de control ( $\nu, \omega$ ) se puede representar como una función de la salida  $\mathbf{y}$  y sus derivadas ( $\dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}$ ). Por consiguiente, se puede afirmar que la posición Cartesiana es una salida plana para el sistema (7). Es importante comentar que las ecuaciones (76) y (77) son válidas siempre y cuando  $\|\dot{\mathbf{y}}\| \neq 0$ .

Ahora bien, sea  $\mathbf{p}_d(t) \in \mathbb{R}^2$  la posición deseada del robot la cuál satisface las condiciones presentadas en la **Sección 3.1**. El objetivo de control es lograr que la salida plana siga de forma asintótica la salida deseada, es decir que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{p}_d(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{y}}(t) = \dot{\mathbf{p}}_d(t), \quad (78)$$

o de manera equivalente, que los errores de seguimiento definidos como  $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{p}_d(t)$  y  $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{p}}_d(t)$  converjan asintóticamente a cero. Debido a que el sistema es diferencialmente plano la convergencia de los errores de seguimiento también implica la convergencia de la orientación del robot a la orientación deseada, de modo que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{R}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{R}_d(t), \quad \mathbf{R}_d(t) = \begin{bmatrix} \frac{\dot{\mathbf{p}}_d}{\|\dot{\mathbf{p}}_d\|} & \mathbf{S} \frac{\dot{\mathbf{p}}_d}{\|\dot{\mathbf{p}}_d\|} \end{bmatrix}. \quad (79)$$

De la ecuación (70) se tiene:

$$\dot{\mathbf{y}} = \nu \mathbf{R}\mathbf{e}_1, \quad (80)$$

nótese que en la primera derivada de la salida plana solo aparece una entrada de control. Derivando dos

veces la salida plana con respecto al tiempo y usando (7) se obtiene:

$$\ddot{\mathbf{y}} = \dot{\nu} \mathbf{R} \mathbf{e}_1 + \nu \dot{\mathbf{R}} \mathbf{e}_1 = \mathbf{R}(\dot{\nu} \mathbf{e}_1 + \nu \omega \mathbf{e}_2). \quad (81)$$

Al introducir la nueva variable de estado  $\xi = \nu$ , se tiene:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{u}, \quad (82)$$

$$\dot{\xi} = \mathbf{e}_1^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{u}, \quad (83)$$

$$\begin{bmatrix} \nu \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \frac{\mathbf{e}_2^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{u}}{\xi} \end{bmatrix}, \quad (84)$$

donde  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$  es una nueva entrada de control. La entrada de control (84) en combinación con la ecuación dinámica (83) linealiza el sistema (70). Para el sistema linealizado en (82) se propone la siguiente entrada de control lineal:

$$\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{p}}_d(t) - \mathbf{K}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_2 \mathbf{e}, \quad (85)$$

tal que  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  son matrices diagonales positivas definidas. Al sustituir la ley de control (85) en (82) se obtiene la dinámica en lazo cerrado descrita por la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{\mathbf{e}} = -\mathbf{K}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_2 \mathbf{e} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_1 & \mathbf{k}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix}, \quad (86)$$

cuyo único punto de equilibrio está dado por  $(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ . Puesto que las ganancias  $\mathbf{K}_1$  y  $\mathbf{K}_2$  son matrices positivas definidas y la matriz  $\mathbf{A}$  dada en (86) es una matriz Hurwitz. Por lo tanto, se puede concluir que el punto de equilibrio es exponencialmente estable, por lo tanto:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \mathbf{0}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{0}, \quad (87)$$

con lo cual se garantiza el objetivo de control. No debe pasarse por alto que que la ley de control (83)-(85) presenta una singularidad cuando  $\xi(t) = 0$ . Dicha singularidad es posible evitarla mediante una apropiada elección de la condición inicial para (83) así como la selección adecuada de las ganancias del controlador. Un análisis más detallado puede consultarse en De Luca & Di Benedetto (1993).

### 3.3. Control no lineal

Otra técnica de control que se plantea para el seguimiento de trayectorias es un controlador del tipo no lineal. Para ello, de la ecuación (74) se observa que toda la matriz de rotación en  $SO(2)$  se puede expresar como:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{S}\mathbf{r} \end{bmatrix}, \quad (88)$$

donde  $\mathbf{r} \in \mathcal{S}^1 = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{r}^\top \mathbf{r} = 1\}$ . Por lo tanto, una expresión equivalente a la ecuación (70) es la siguiente:

$$\mathbf{v} = \nu \mathbf{r}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \omega \mathbf{R} \mathbf{r}, \quad (89)$$

tal que el vector unitario  $\mathbf{r}$  indica la dirección de la velocidad lineal. Para el modelo cinemático (89) se propone la siguiente ley de control no lineal:

$$\begin{aligned} \nu &= \|\boldsymbol{\xi}\|, \\ \omega &= \Omega - \lambda_1 \mathbf{r}^\top \mathbf{S} \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|}, \quad \Omega = -\frac{\boldsymbol{\xi}^\top \mathbf{S} \dot{\boldsymbol{\xi}}}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2}, \end{aligned} \quad (90)$$

con  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  siendo una constante positiva y el estado  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2$  se obtiene como solución del sistema dinámico auxiliar:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -\boldsymbol{\Lambda}_2 \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\Lambda}_3 \mathbf{e}_p + \mathbf{a}_d(t) + \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{v}_d(t), \quad \boldsymbol{\xi}(0) \neq \mathbf{0}, \quad (91)$$

donde  $\mathbf{e}_p = \mathbf{p} - \mathbf{p}_d(t)$  es el error de posición,  $\mathbf{p}_d(t) \in \mathbb{R}^2$  y  $\mathbf{v}_d(t) = \dot{\mathbf{p}}_d(t) \in \mathbb{R}^2$  son la posición y velocidad deseadas, por consecuencia  $\mathbf{a}_d(t) = \dot{\mathbf{v}}_d(t) \in \mathbb{R}^2$  es la aceleración deseada. Finalmente,  $\boldsymbol{\Lambda}_2$  y  $\boldsymbol{\Lambda}_3 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  son matrices diagonales positivas definidas. Para analizar la dinámica en lazo cerrado obtenida al sustituir la ley de control (90) y (91) en la ecuación cinemática (89), se definen los errores:

$$\mathbf{e}_\xi = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{v}_d(t), \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}^\top \boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \mathbf{e}_1 + \frac{\mathbf{r}^\top \mathbf{S} \boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \mathbf{e}_2. \quad (92)$$

Obsérvese que si  $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_1$ , entonces,  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\xi}/\|\boldsymbol{\xi}\|$ . Tomando en cuenta las ecuaciones (89)-(91), las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de los errores en lazo cerrado ( $\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_r$ ) están dadas por:

$$\dot{\mathbf{e}}_p = \|\boldsymbol{\xi}\| \mathbf{r} - \mathbf{v}_d(t), \quad (93)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\xi = -\boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{e}_\xi - \boldsymbol{\Lambda}_3 \mathbf{e}_p, \quad (94)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_r = -\lambda_1 \left( \mathbf{e}_2^\top \mathbf{e}_r \right) \mathbf{S} \mathbf{e}_r. \quad (95)$$

Dado que  $e_r \in \mathcal{S}^1$ , la ecuación diferencial (95) tiene dos puntos de equilibrio dados por  $e_r = e_1$  y su antipodal  $e_r = -e_1$ . Para analizar la estabilidad del punto de equilibrio  $e_r = e_1$  considere la función candidata de Lyapunov:

$$W = \frac{1 - e_1^\top e_r}{2(1 + e_1^\top e_r)}, \quad \forall e_1^\top e_r \neq -1, \quad (96)$$

cuya derivada a lo largo de (95) está dada por:

$$\dot{W} = \frac{-e_1^\top \dot{e}_r}{(1 + e_1^\top e_r)^2} = \lambda_1 \frac{e_1^\top S e_r e_r^\top e_2}{(1 + e_1^\top e_r)^2}. \quad (97)$$

Al usar las identidades  $e_2 = S e_1$  y  $S a a^\top S = a a^\top - \|a\|^2 I$ , la derivada de  $W$  está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{W} &= -\lambda_1 \frac{1 - (e_1^\top e_r)^2}{(1 + e_1^\top e_r)^2}, \\ \dot{W} &= -\lambda_1 \frac{1 - e_1^\top e_r}{1 + e_1^\top e_r}, \\ \dot{W} &= -2\lambda_1 W \implies W(t) = e^{-2\lambda_1 t} W(0). \end{aligned} \quad (98)$$

Dado que la derivada de  $W$  es negativa definida  $\forall e_1^\top e_r \neq -1$  y si además la condición inicial satisface  $e_1^\top e_r(0) \neq -1$ , entonces el punto de equilibrio  $e_r = e_1$  es exponencialmente estable (la región de atracción es casi global excepto por el punto  $e_r = -e_1$ ). El resultado anterior a su vez implica que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \frac{\xi}{\|\xi\|}.$$

Entonces, para un tiempo suficientemente grande las ecuaciones (93) y (94) se pueden expresar como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_p \\ e_\xi \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} O & I \\ -\Lambda_2 & -\Lambda_2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} e_p \\ e_\xi \end{bmatrix}. \quad (99)$$

Puesto que las matrices  $\Lambda_2$  y  $\Lambda_3$  son matrices definidas, la matriz  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  es Hurwitz. Esto implica que los errores de seguimiento  $e_p(t)$  y  $e_\xi(t)$  convergen a cero exponencialmente y la posición Cartesiana  $p(t)$  sigue exponencialmente a la trayectoria deseada  $p_d(t)$ .

## Capítulo 4. Sincronización de robots y comunicación segura

---

En este capítulo se analizan y se desarrollan diferentes técnicas de sincronización enfocadas en el tipo acoplamiento que involucra las interacciones de los robots móviles entre sí. Donde, en primer lugar, se desarrolla e implementa el acoplamiento directo para la sincronización de los robots abordando la encriptación de sus señales de posición y velocidad para una transmisión segura de datos. De igual manera, se desarrolla el diseño de una ley de control que permita alcanzar la sincronización entre los robots haciendo uso de acoplamientos dinámicos. Las señales transmitidas del robot maestro al robot seguidor se enviarán encriptadas para añadir seguridad a las interacciones entre los robots.

### 4.1. Sincronización y formación de robots con comunicación segura

La sincronización y formación de robots móviles implica generar de manera artificial y controlada una conexión entre todos los sistemas involucrados (en este caso los robots móviles) para que realicen una tarea de manera conjunta, además de que dicha interacción entre los robots sea segura.

Para ello se diseña una ley de control implementado un acoplamiento directo como el mencionado en el **Capítulo 2** bajo el esquema definido en la Figura 1. De modo que, para el caso de la sincronización con linealización por retroalimentación lineal, se modifica la ley de control planteada en (67) para establecerlo bajo el acoplamiento difuso descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{f}(\mathbf{x}_m), \quad (100)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{f}(\mathbf{x}_s) + \mathbf{C}(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s), \quad (101)$$

recordando que  $\mathbf{x}_m$  y  $\mathbf{x}_s$  representan los vectores de estado correspondientes al robot maestro y seguidor respectivamente, siendo la función  $\mathbf{f}$  generalmente suave y no lineal mientras que  $\mathbf{C}$  representa la matriz, cuyos elementos elegidos adecuadamente, que enlaza los estados de un robot con el otro. Entonces, definiendo la forma de las ecuaciones para implementar adecuadamente el acoplamiento difuso en los robots, se tiene lo siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{f}(\mathbf{x}_m, \mathbf{C}\mathbf{u}_m(\dot{x}_d - \dot{x}_m, x_d - x_m)), \quad (102)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{C}\mathbf{u}_s(\dot{x}_m - \dot{x}_s, x_m - x_s)), \quad (103)$$

de modo que los vectores de entrada  $\mathbf{u}_m$  y  $\mathbf{u}_s$  corresponden al robot maestro y seguidor respectivamente.

Ahora bien, para este caso y con la finalidad de facilitar la notación, se definen los errores de posición y velocidad tal que:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m - x_d \\ y_m - y_d \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_m - \dot{x}_d \\ \dot{y}_m - \dot{y}_d \end{bmatrix}, \quad (104)$$

$$\bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s - x_m \\ y_s - y_m \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_s - \dot{x}_m \\ \dot{y}_s - \dot{y}_m \end{bmatrix}. \quad (105)$$

Del igual manera, se define la matriz de enlazamiento  $\mathbf{C}$  como sigue:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}, \quad (106)$$

tal que  $c_{ij} > 0$  donde  $i = 1, 2, 3, 4$  y  $j = 1, 2, 3, 4$ .

Entonces, para el caso de la sincronización con linealización por retroalimentación dinámica, ajustando la ley de control para las ecuaciones (102)-(103), se representan los sistemas como sigue en el caso del robot maestro:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= \xi_m \cos(\theta_m), \\ \dot{y}_m &= \xi_m \sin(\theta_m), \\ \dot{\theta}_m &= \omega_m = \frac{\mathbf{e}_s^\top \mathbf{R}_m^\top \mathbf{u}_m}{\xi_m}, \end{aligned} \quad (107)$$

$$\dot{\xi}_m = \mathbf{e}_1^\top \mathbf{R}_m^\top \mathbf{u}_m,$$

y del robot seguidor:

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= \xi_s \cos(\theta_s), \\ \dot{y}_s &= \xi_s \sin(\theta_s), \\ \dot{\theta}_s &= \omega_s = \frac{\mathbf{e}_s^\top \mathbf{R}_s^\top \mathbf{u}_s}{\xi_s}, \end{aligned} \quad (108)$$

$$\dot{\xi}_s = \mathbf{e}_1^\top \mathbf{R}_s^\top \mathbf{u}_s.$$

Por otra parte, al tratarse de un acoplamiento directo en conexión unidireccional (maestro-seguidor), la

entrada de control  $\mathbf{u}_m = \begin{bmatrix} u_{m1} & u_{m2} \end{bmatrix}^\top$  debe estar acorde a la ecuación planteada en (102) tal que:

$$\begin{bmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix}, \quad (109)$$

de modo que  $c_{12} = c_{14} = c_{21} = c_{23} = 0$  para que se satisfaga la ecuación. De igual modo, para la entrada de control  $\mathbf{u}_s = \begin{bmatrix} u_{s1} & u_{s2} \end{bmatrix}^\top$  de ajustarse en la forma (103), entonces:

$$\begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}} \\ \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix}, \quad (110)$$

siendo los valores de las constantes  $c_{12}, c_{14}, c_{21}, c_{23}$  también iguales 0.

Por otra parte, en el caso de la sincronización por control no lineal, al tratarse de una red de solo 2 robots en configuración maestro-seguidor la implementación del acoplamiento directo para este caso es más sencillo.

Esto se debe a que en su ley de control previamente diseñada en (90) en conjunto con la ecuación solución para el estado aumentado  $\xi$  en (91), solo es necesario sustituir (en el robot seguidor) las posiciones y velocidades de la trayectoria deseada por las posiciones y velocidades del robot maestro en  $x$  y  $y$ . Entonces al realizar esta sustitución la ley de control para el robot maestro se representa tal que:

$$\begin{aligned} \nu_m &= \|\dot{\xi}_m\|, \\ \omega_m &= \Omega_m - \lambda_{1m} \mathbf{r}_m^\top \mathbf{S} \frac{\xi_m}{\|\xi_m\|}, \quad \Omega_m = -\frac{\xi_m^\top \mathbf{S} \dot{\xi}_m}{\|\xi_m\|^2}, \end{aligned} \quad (111)$$

junto con la ecuación solución del estado aumentado descrito como sigue:

$$\dot{\xi}_m = -\Lambda_{2m} \xi_m - \Lambda_{3m} \tilde{\mathbf{p}} + \mathbf{a}_d(t) + \Lambda_{2m} \mathbf{v}_d(t), \quad \xi_m(0) \neq \mathbf{0}. \quad (112)$$

Y, para el robot seguidor, se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \nu_s &= \|\dot{\xi}_s\|, \\ \omega_s &= \Omega_s - \lambda_{1s} \mathbf{r}_s^\top \mathbf{S} \frac{\xi_s}{\|\xi_s\|}, \quad \Omega_s = -\frac{\xi_s^\top \mathbf{S} \dot{\xi}_s}{\|\xi_s\|^2}, \end{aligned} \quad (113)$$

donde, de igual modo, la ecuación solución del estado aumentado del sistema tal que:

$$\dot{\xi}_s = -\Lambda_{2s}\xi_s - \Lambda_{3s}\bar{p} + \Lambda_{2s}v_m(t), \quad \xi_s(0) \neq 0. \quad (114)$$

De modo que cumple con la forma establecida en (102)-(103). Por último, es importante señalar que para las dos técnicas de control para la sincronización planteadas anteriormente se debe tener en cuenta que los estados del robot maestro, como las posición  $p_m$  y la velocidad  $v_m$ , se enviarán al robot seguidor de forma encriptada. De modo que, para efectos prácticos, se define la posición encriptada tal que  $\check{p}_m$  y para la velocidad encriptada como  $\check{v}_m$  haciendo especial hincapié en que dicha información del robot maestro es descifrado en el robot seguidor, por lo que no es necesario sustituir éstas variables en (105).

En la siguiente sección se analiza la implementación de un acoplamiento dinámico para las técnicas de control diseñadas en el **Capítulo 3**.

## 4.2. Sincronización de robots con sistema intermediario

La implementación de un acoplamiento dinámico implica, de manera similar en la definición de un sistema auxiliar para aumentar los estados del sistema como se realizó en el diseño de las leyes de control en el **Capítulo 3**, diseñar un sistema dinámico en donde sus estados sean utilizados de manera auxiliar para acoplar indirectamente un sistema con el otro, tal y como se describe en las ecuaciones dadas en (17)-(19).

Ahora bien, para su implementación en el caso de la sincronización con linealización por retroalimentación dinámica, se establece un sistema de segundo orden donde sus dinámicas serán utilizadas para enlazar los robots maestro y seguidor, entonces según la ecuación (19) es necesario establecer los estados del robot maestro que serán acoplados, los cuáles son  $x_m(t)$  y  $y_m(t)$  para la posición y  $\dot{x}_m(t)$  y  $\dot{y}_m(t)$  para la velocidad. Considerando lo anterior, se modifica la ecuación que define el acoplamiento entre sistemas para ajustarlo a los estados que serán utilizados para sincronizar los robots siendo que, según el estudio realizado por Vara Herrera (2021), los acoplamientos dinámicos se definen de tal manera que:

$$h_x \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{h}_{1_x} \\ \dot{h}_{2_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_{1_x} + h_{2_x} \\ -\gamma_1 h_{1_x} - \gamma_2 h_{2_x} - k(x_m + \beta_1 x_s) \end{bmatrix}, \quad (115)$$

$$h_{\dot{x}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{h}_{1_{\dot{x}}} \\ \dot{h}_{2_{\dot{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_{1_{\dot{x}}} + h_{2_{\dot{x}}} \\ -\gamma_1 h_{1_{\dot{x}}} - \gamma_2 h_{2_{\dot{x}}} - k(\dot{x}_m + \beta_1 \dot{x}_s) \end{bmatrix}, \quad (116)$$

$$\mathbf{h}_y \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{h}_{1_y} \\ \dot{h}_{2_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_{1_y} + h_{2_y} \\ -\gamma_1 h_{1_y} - \gamma_2 h_{2_y} - k(y_m + \beta_2 y_s) \end{bmatrix}, \quad (117)$$

$$\mathbf{h}_{\dot{y}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{h}_{1_{\dot{y}}} \\ \dot{h}_{2_{\dot{y}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_{1_{\dot{y}}} + h_{2_{\dot{y}}} \\ -\gamma_1 h_{1_{\dot{y}}} - \gamma_2 h_{2_{\dot{y}}} - k(\dot{y}_m + \beta_2 \dot{y}_s) \end{bmatrix}, \quad (118)$$

donde  $k \in \mathbb{R}^+$  representa la fuerza de acoplamiento y  $\beta = \pm 1$  representa el valor de fase o antifase en la sincronización de los sistemas que interactúan entre sí. Con ello, acorde a la ecuación descrita en (18), las entradas de control para el robot seguidor quedan definidas como sigue:

$$u_{s1} = \beta_1 h_{2_x} + \beta_1 h_{2_{\dot{x}}}, \quad (119)$$

$$u_{s2} = \beta_2 h_{2_y} + \beta_2 h_{2_{\dot{y}}}, \quad (120)$$

ya que los acoplamientos dinámicos están basados en un sistema de segundo orden *masa-resorte-amortiguador* (Vara Herrera, 2021). En el caso de la sincronización por control no lineal haciendo uso de un acoplamiento dinámico es necesario tener en cuenta las ecuaciones dadas en (17)-(19), y por conjetura en base al trabajo reportado por Vara Herrera (2021) se define el acoplamiento dinámico como un sistema de segundo orden tal que:

$$\ddot{\mathbf{h}} = -\mathbf{\Gamma}_1 \dot{\mathbf{h}} - \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{h} - k(\beta \mathbf{p}_m + \mathbf{p}_s), \quad (121)$$

cuya expresión en variables de estado es:

$$\dot{\mathbf{h}}_1 = \mathbf{h}_2, \quad (122)$$

$$\dot{\mathbf{h}}_2 = -\mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{h}_2 - \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{h}_1 - k(\beta \mathbf{p}_m + \mathbf{p}_s),$$

recordando que  $k \in \mathbb{R}^+$  representa la fuerza de acoplamiento,  $\beta = \pm 1$  representa el valor de fase o antifase en la sincronización de los sistemas involucrados, mientras que  $\mathbf{\Gamma}_1$  y  $\mathbf{\Gamma}_2$  son matrices diagonales positivas y las variables  $\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} h_x & h_y \end{bmatrix}^\top$  y  $\mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} h_{\dot{x}} & h_{\dot{y}} \end{bmatrix}^\top$  son las variables de estado del acoplamiento dinámico. Ahora bien, el sistema solución auxiliar para el robot seguidor se representa como sigue:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_s = -\mathbf{\Lambda}_2 \boldsymbol{\xi}_s + \mathbf{\Lambda}_3 \mathbf{h}_1 + \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{h}_2 + \dot{\mathbf{h}}_2. \quad (123)$$

En el siguiente capítulo, se presenta la implementación numérica y experimental de las técnicas desarrolladas anteriormente para la sincronización de robots móviles.

## Capítulo 5. Resultados en simulación y experimentales

En este capítulo se describe de manera breve las características principales del robot móvil ROSbot 2.0 PRO. Además se muestran los resultados numéricos de las simulaciones realizadas bajo el esquema de trabajo propuesto, así como también se describe la metodología utilizada para la realización de los experimentos y se muestran los resultados experimentales realizados para validar el esquema de trabajo en conjunto con lo obtenido en las simulaciones numéricas.

### 5.1. Descripción del robot ROSbot 2.0 PRO

El robot móvil cuenta con diversas características que lo convierten en una excelente opción para probar diferentes algoritmos de control para su sincronización con otros robots móviles del mismo modelo. Las dimensiones del robot se pueden apreciar claramente en la Figura 7, donde cuenta además con un conjunto de 3 baterías recargables del tipo Li-Ion. El robot está equipado con una serie de sensores que le permiten detectar su posición, velocidad, aceleración y orientación, así como también cuenta con un láser Rplidar A3 con capacidad de girar 360 grados y con un rango de 25 metros. Cabe mencionar además que posee una antena Wi-Fi donde puede transmitir y recibir datos, así como también 4 motores DC donde cada motor cuenta un codificador rotatorio (encoder) y una cámara Orbbec Astra capaz de capturar imágenes a color en una resolución de 640x480 píxeles.

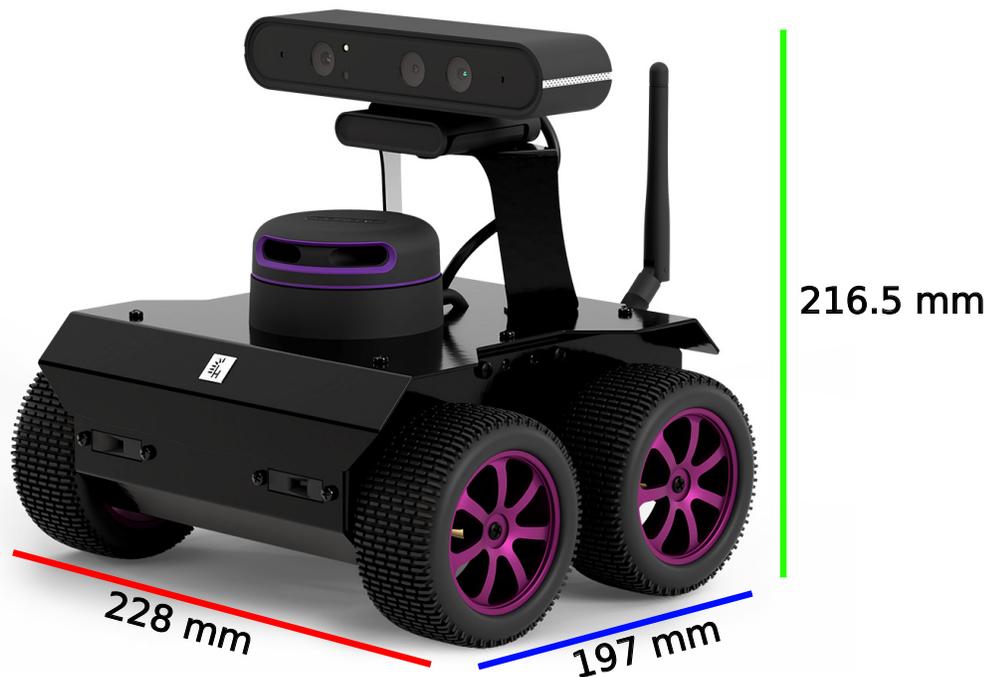


Figura 7. Robot móvil ROSbot 2.0 PRO.

## 5.2. Simulaciones

Con el propósito de validar el esquema de trabajo, planteado en la Figura 1 y en el **Capítulo 4**, se desarrolló una serie de simulaciones numéricas donde se implementa el uso de los controladores establecidos en el **Capítulo 3**. Así mismo, se consideró de manera particular una trayectoria tipo Lemniscata, la cual está descrita en las ecuaciones (47)-(50), donde sus parámetros están dados tal que  $a = 0.8$ ,  $w_1 = 2\pi/50$  y  $w_2 = 2\pi/25$ .

Ahora bien, como se describe en los capítulos antes mencionados, para obtener el comportamiento deseado en los robots móviles es necesario el uso de sistemas auxiliares que permitan tanto la sincronización maestro-seguidor como la encriptación de señales de control entre robots, por lo que entonces se definieron los siguientes parámetros y condiciones iniciales para cada sistema involucrado:

- Parámetros y condiciones iniciales de los robots móviles:

$$x_m(0) = 1$$

$$x_s(0) = -1$$

$$y_m(0) = 1$$

$$y_s(0) = -1$$

$$\mathbf{R}_m(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_s(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Tabla 1.** Valores de los parámetros del robot móvil ROSbot 2.0 PRO.

Parámetros	Valores
$r$	42.5 mm
$l$	192 mm

- Parámetros y condiciones iniciales de los sistemas caóticos:

$$x_{a_1}(0) = 1$$

$$x_{b_1}(0) = 1.1$$

$$x_{a_2}(0) = 2\pi$$

$$x_{b_2}(0) = 2\pi 1.1$$

$$A = 2000$$

$$b = -0.5$$

$$c = 4$$

$$\eta = -0.5$$

- Parámetros y condiciones iniciales del sistema auxiliar de estado aumentado (controlador lineal):

$$\xi_m(0) = 0.1 \qquad \xi_s(0) = 0.1$$

- Parámetros y condiciones iniciales del sistema auxiliar de estado aumentado (controlador no lineal):

$$\xi_m(0) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}^\top \qquad \xi_s(0) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}^\top$$

- Parámetros y condiciones iniciales del sistema intermediario (acoplamiento dinámico para controlador lineal):

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_x(0) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top & \mathbf{h}_y(0) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \\ \mathbf{h}_{\dot{x}}(0) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top & \mathbf{h}_{\dot{y}}(0) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \end{aligned}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}$$

donde  $\alpha = 1$ ,  $\gamma_1 = 0.1$  y  $\gamma_2 = 5$ .

- Parámetros y condiciones iniciales del sistema intermediario (acoplamiento dinámico para controlador no lineal):

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1(0) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top & \mathbf{h}_2(0) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \\ \mathbf{\Gamma}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{\Gamma}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

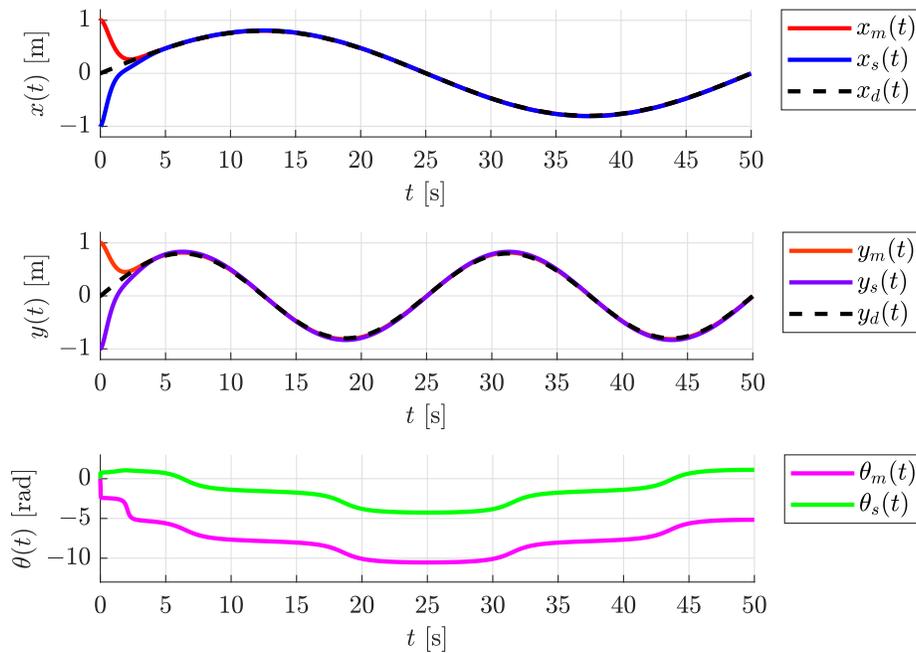
Finalmente, cabe señalar que en todas las simulaciones numéricas fue realizado en el programa MATLAB y, para cada uno de los casos, se realizaron en un periodo de tiempo  $t \in [0, 50]$  segundos, dando como resultado los comportamientos que se muestran a continuación.

### 5.2.1. Simulación de la sincronización con linealización por retroalimentación dinámica

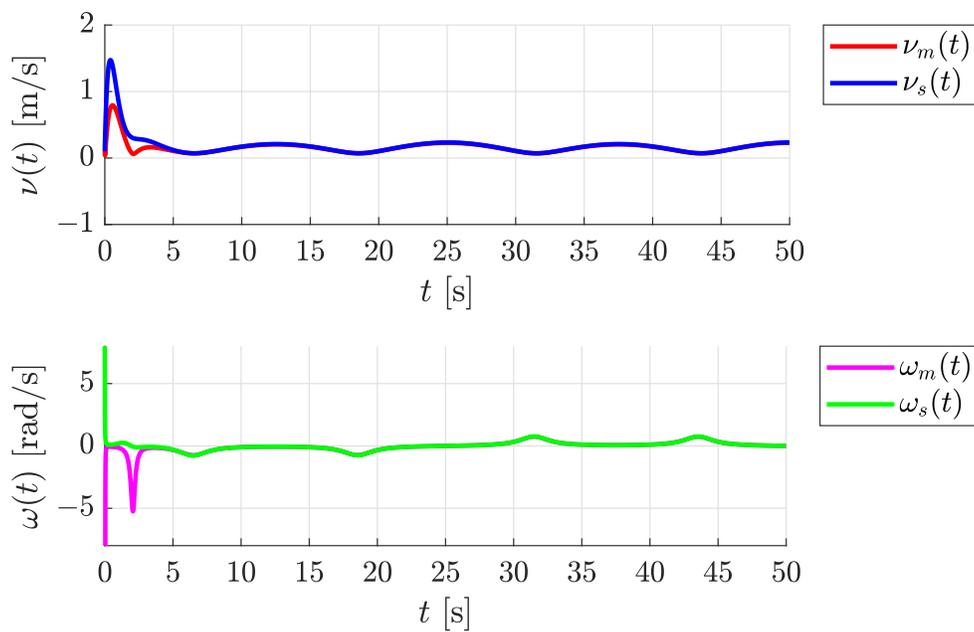
En la Figura 8 muestra una gráfica la cual corresponde a los estados dinámicos de los robots móviles maestro-seguidor donde se logra apreciar que en menos de  $t = 5$  segundos se alcanza la sincronización mediante el acoplamiento directo. Cabe señalar que en este caso hace uso del modelo clásico reportado en

De Luca & Di Benedetto (1993), es por esta razón que en el estado  $\theta(t)$  la posición angular (definida en radianes) aumenta por cada vuelta completa que el robot móvil realiza y se mantiene con ese aumento sin tomar en cuenta el cambio de cuadrante como si lo hace el modelo descrito en la ecuación (7) gracias a la matriz de rotación  $\mathbf{R}$ , siendo observado este fenómeno en la Figura 9 en la velocidad angular  $\omega(t)$ . En la Figura 10 se visualizan las trayectorias realizadas por el robot maestro y seguidor durante su sincronización mutua, donde se puede contemplar que existe un error en estado estacionario muy pequeño con respecto a la trayectoria deseada  $\mathbf{p}_d$  y la posición cartesiana de los robots móviles. Finalmente, en la Figura 11, se exhibe gráficamente el error de posición del robot maestro con respecto a la trayectoria deseada (definido tal que  $\tilde{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{p}_m(t) - \mathbf{p}_d(t)$ ) y el error de posición del robot maestro con respecto a la posición del robot seguidor (definido tal que  $\bar{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{p}_m(t) - \mathbf{p}_s(t)$ ) respaldando lo mencionado anteriormente en cuanto al error en estado estacionario se refiere. Éstos resultados numéricos se obtuvieron considerando las entradas de control para el robot maestro y el robot seguidor descritas en las ecuaciones (109)-(110) respectivamente de modo que:

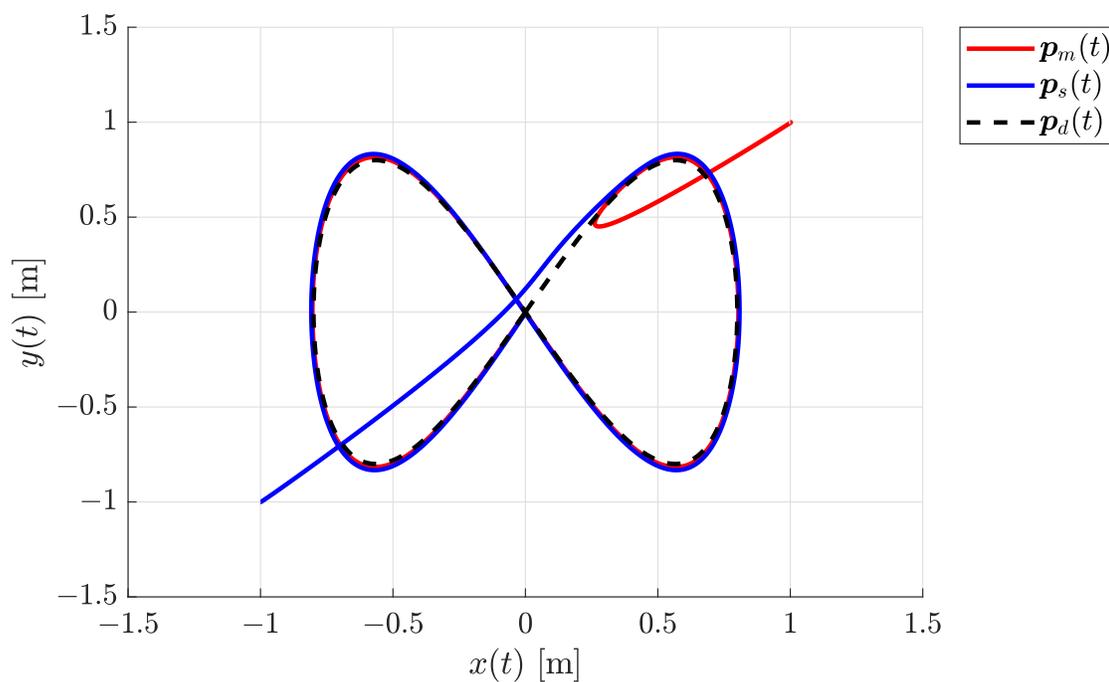
$$\mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$



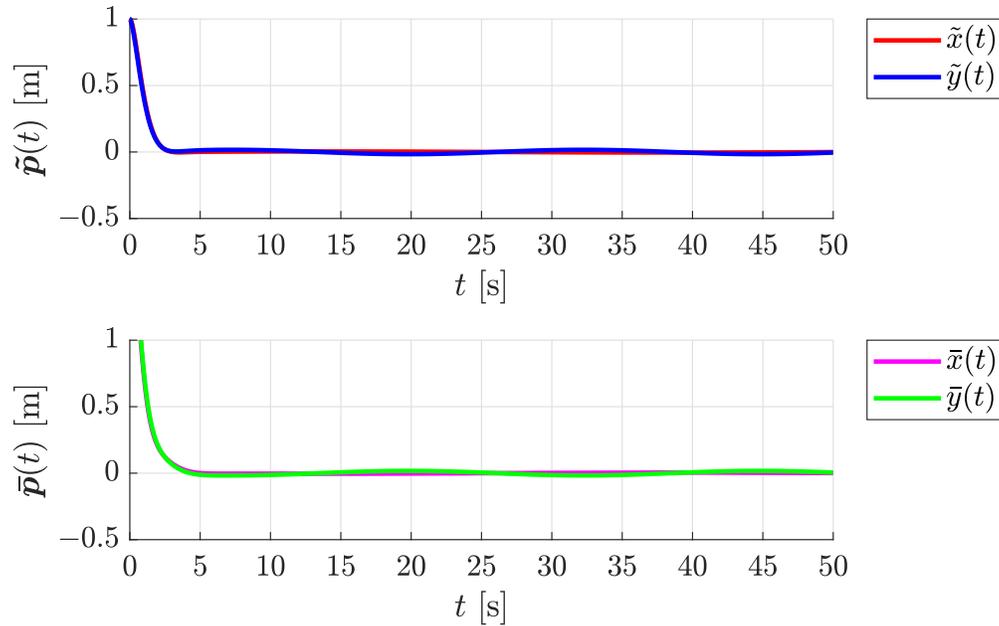
**Figura 8.** Dinámicas temporales de los estados de los robots móviles utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento directo implementado.



**Figura 9.** Gráficas de las velocidades lineal y angular de los robots móviles utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento directo implementado.

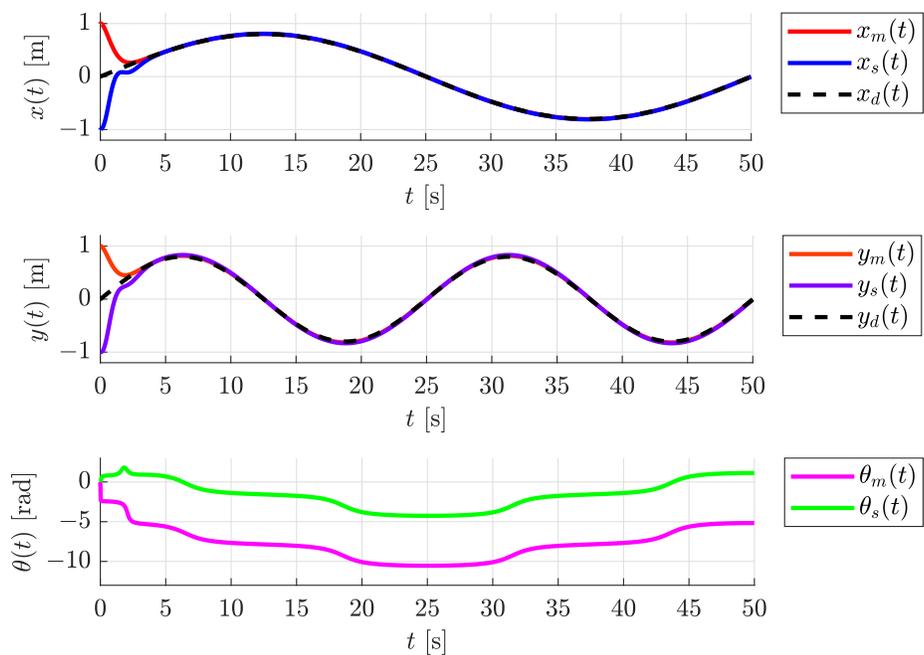


**Figura 10.** Trayectorias de los robots móviles maestro (rojo) y seguidor (azul) en el plano  $x - y$  utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento directo implementado..

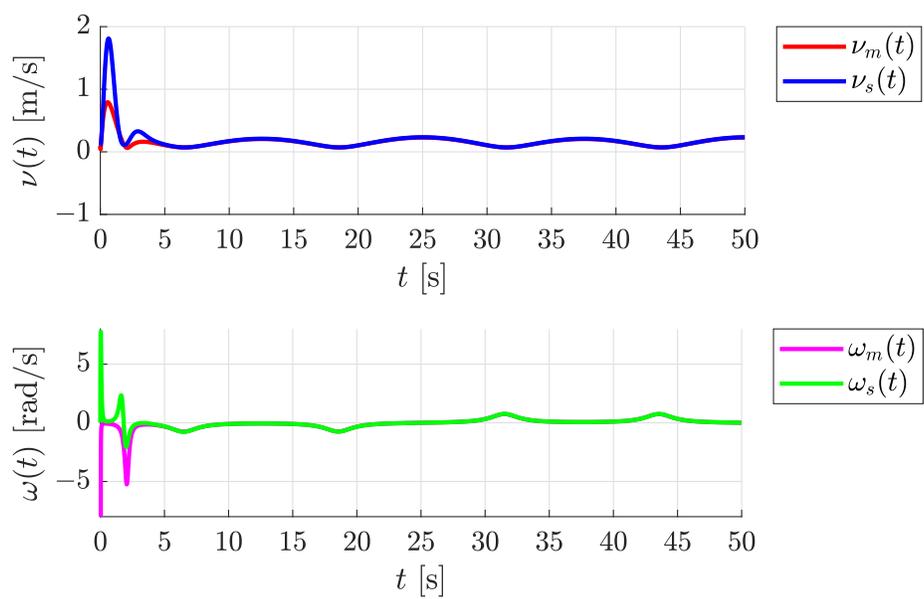


**Figura 11.** Error de posición del robot maestro con respecto a la trayectoria deseada ( $\tilde{p}$ ) y al robot seguidor ( $\bar{p}$ ) utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento directo implementado..

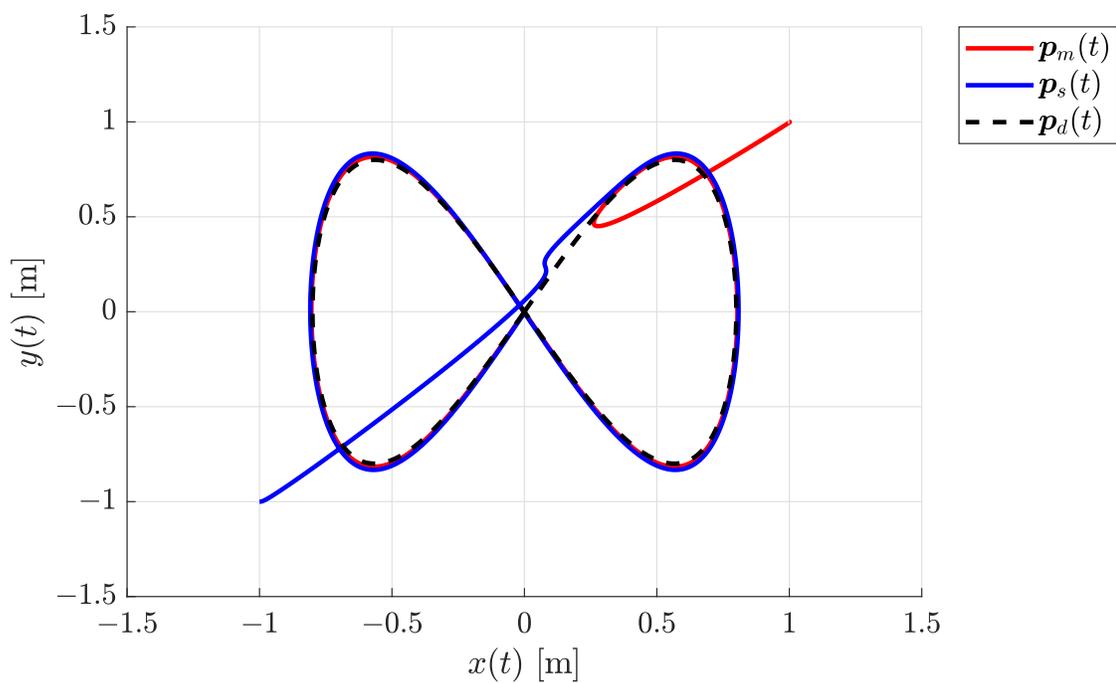
Ahora bien, a diferencia del acoplamiento directo presentado en las gráficas anteriores, el acoplamiento dinámico muestra un comportamiento diferente pese a que el objetivo de sincronización es el mismo. Esto se puede observar mayormente en las dinámicas de los estados de los robots en la Figura 12, así como también se observan éstas diferencias reflejadas en las velocidades (ver Figura 13) y en las trayectorias de los robots móviles (ver Figura 14). El error de posición mostrado en la Figura 15 es ligeramente diferente con respecto al presentado en la Figura 11, aunque sin embargo ambos convergen al valor de cero. Como se mencionó en el **Capítulo 3** el acoplamiento dinámico es un sistema intermediario que, utilizando sus estados auxiliares, acopla las posiciones y velocidades de los robots en  $x$  y en  $y$ . Éstos estados auxiliares pueden contemplarse en la Figura 16. Consecuentemente, para que la comunicación entre los robots sea totalmente segura se encriptaron las señales de la posición y velocidad del robot maestro, mismas que fueron enviadas al robot seguidor el cual se encarga de desencriptar éstas señales para posteriormente utilizarlas en el acoplamiento dinámico con tal de alcanzar la sincronización entre ambos robots. Esto se puede observar de manera visual en la Figura 17 donde se muestra con la posición  $x_m(t)$  del robot maestro es encriptada con el sistema hipercaótico descrito en las ecuaciones (41)-(42), siendo este mismo proceso de encriptamiento el utilizado para la posición  $y_m(t)$  y las velocidades  $\dot{x}_m(t)$  y  $\dot{y}_m(t)$  antes de ser enviadas al robot seguidor. Cabe señalar que, para la presente simulación realizada, los resultados numéricos se obtuvieron considerando la fuerza de acoplamiento  $k = 15$  en fase, es decir que  $\beta_1 = \beta_2 = -1$ .



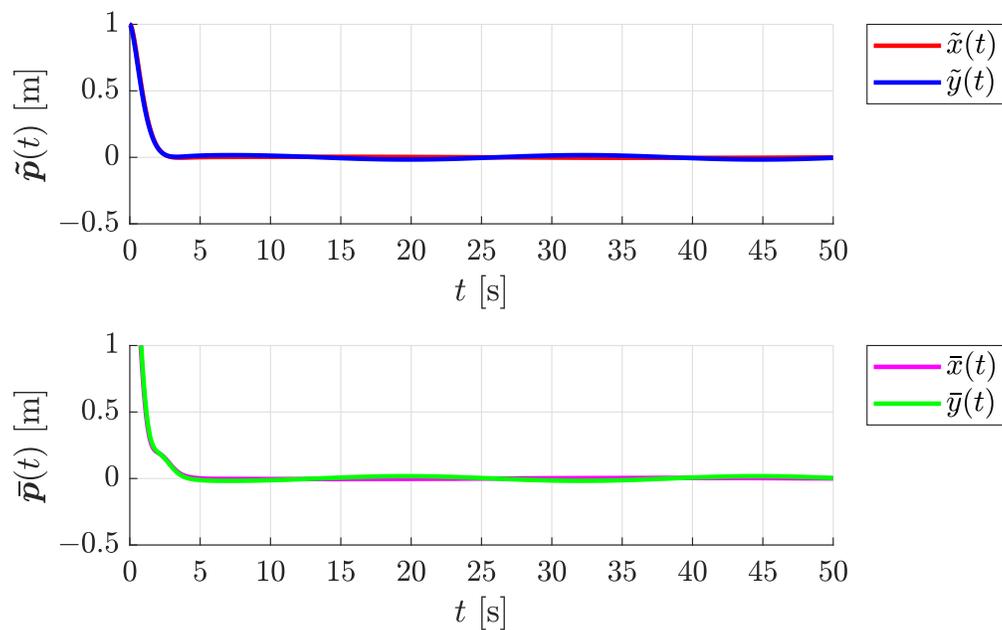
**Figura 12.** Gráficas temporales de los robots móviles utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento dinámico implementado.



**Figura 13.** Velocidades de los robots móviles utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento dinámico implementado.



**Figura 14.** Trayectorias de los robots móviles maestro (rojo) y seguidor (azul) con sistemas intermedarios en el plano  $x - y$  utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento dinámico implementado.



**Figura 15.** Error de posición del robot maestro con respecto a la trayectoria deseada ( $\tilde{p}$ ) y al robot seguidor ( $\bar{p}$ ) utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento dinámico implementado.

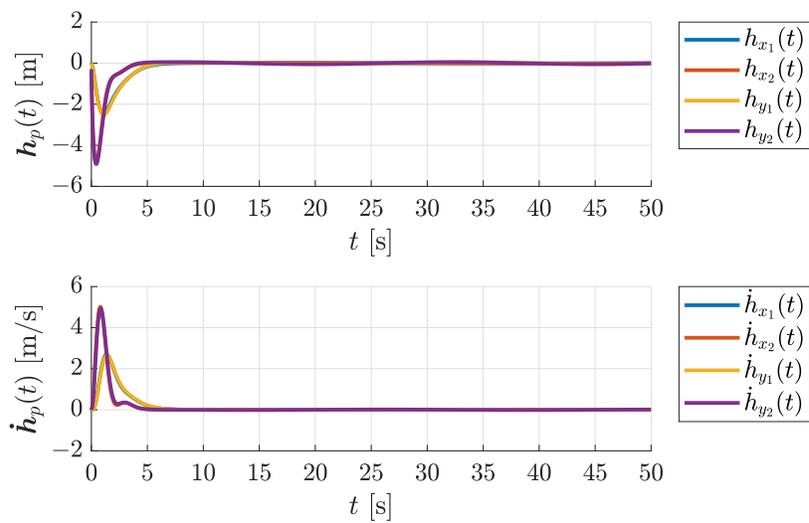


Figura 16. Dinámicas temporales de los estados del acoplamiento dinámico implementado en los robots móviles.

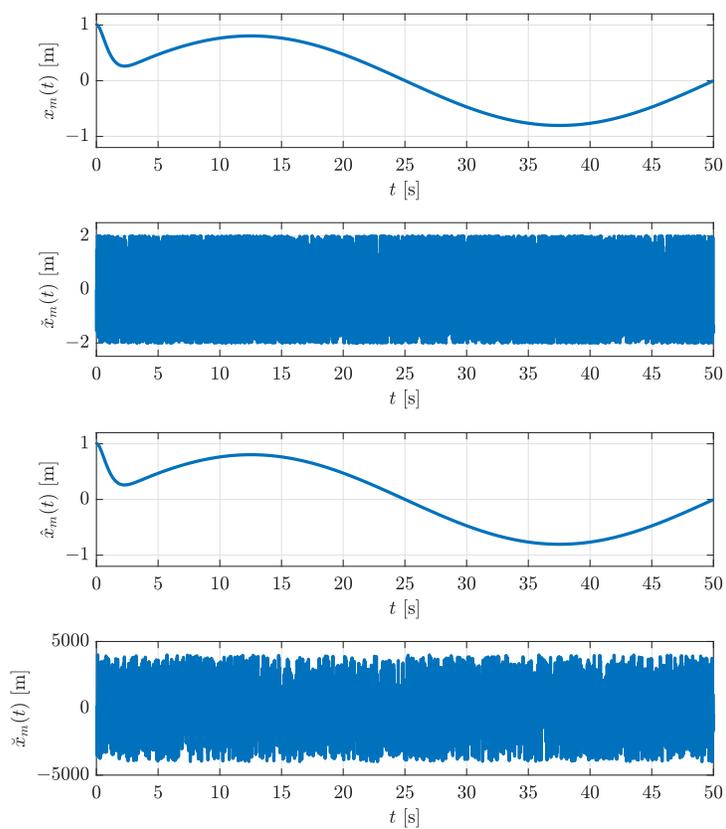


Figura 17. Encriptamiento y decodificación del estado  $x_m(t)$  del robot maestro con respecto al tiempo.

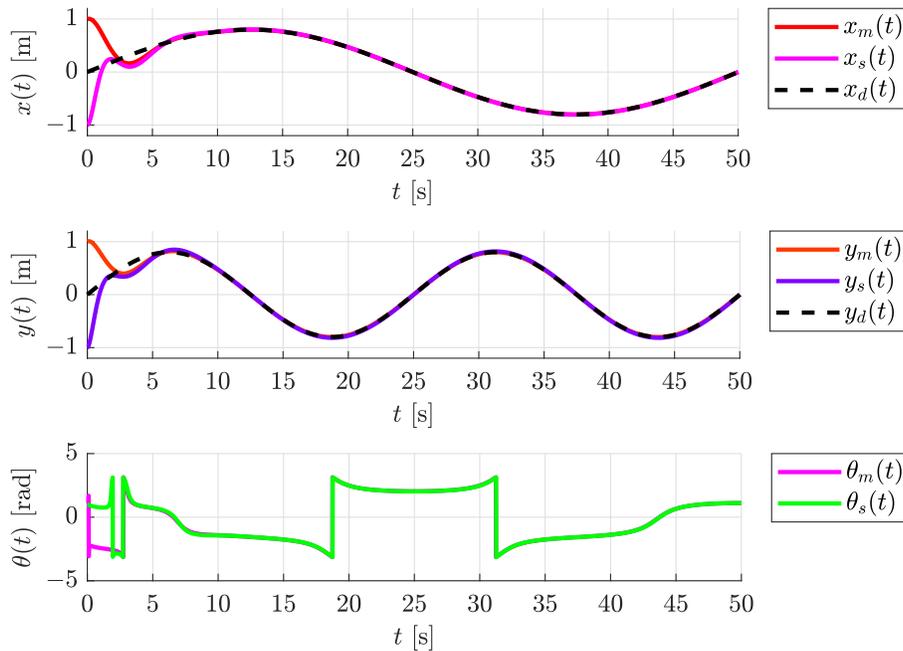
### 5.2.2. Simulación de la sincronización por control no lineal

Para el caso no lineal en la sincronización de robots mediante acoplamiento difuso se consideraron las siguientes ganancias:

$$\Lambda_{2_m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{2_s} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{3_m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{3_s} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

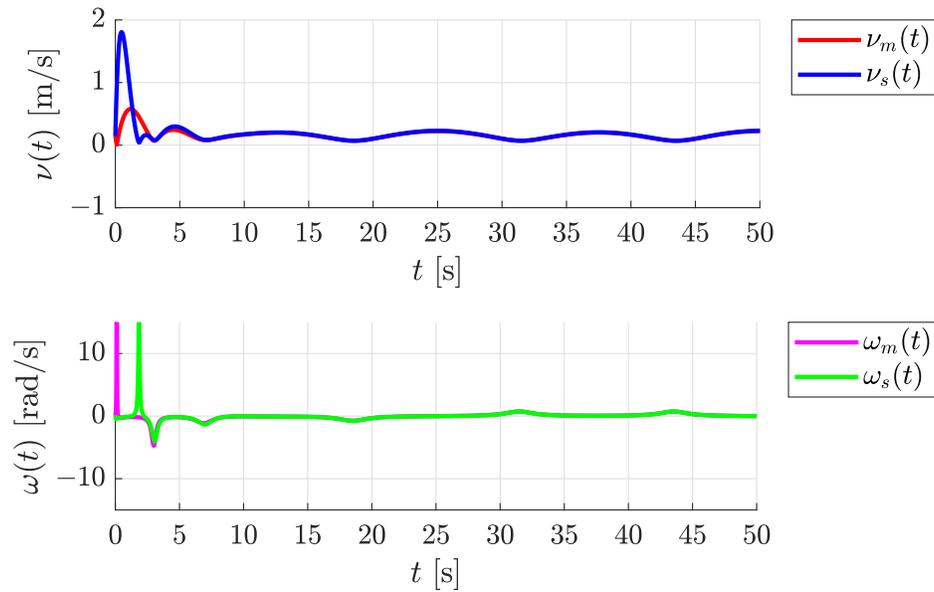
teniendo presente que  $\lambda_{1_m} = \lambda_{1_s} = 2$ . Con ello se puede observar en la Figura 18 como las dinámicas de los estados de los robots alcanzan la sincronización de manera asintótica. También se puede resaltar que el estado  $\theta(t)$  de los robots si considera el cambio de cuadrante dependiendo de la orientación del robot, esto se debe gracias a la matriz de rotación  $\mathbf{R}$  que utiliza el modelo basado en el marco inercial descrito en la ecuación (7).



**Figura 18.** Gráficas temporales de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento directo implementado.

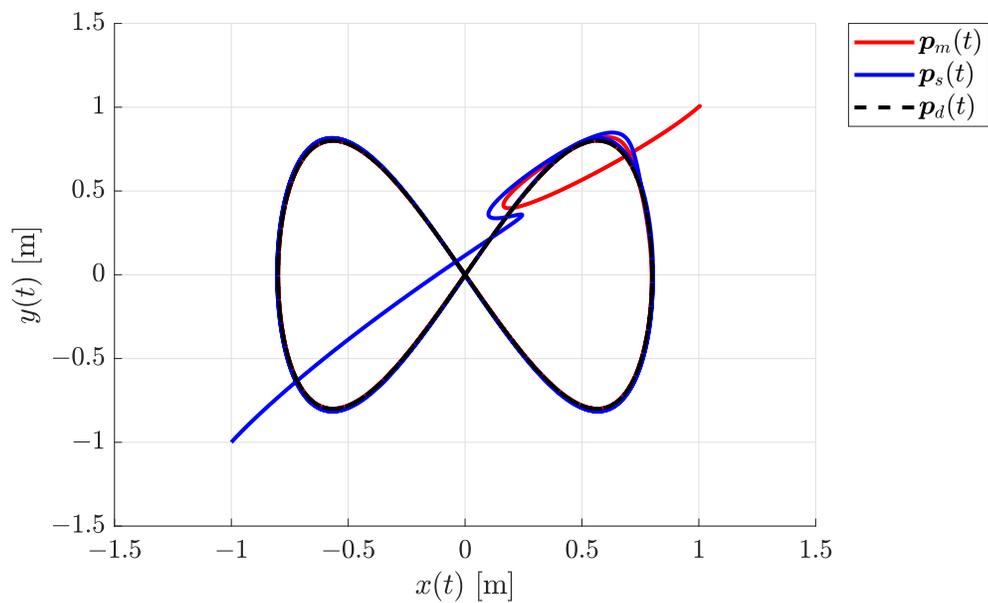
Así mismo, en la Figura 19 se puede ver reflejado como la velocidad angular  $\omega(t)$  de los robots tiene cambios bruscos en periodos de tiempo cortos, la causa de esto es debido a la alta velocidad en el cambio

de orientación de los robots teniendo presente que con el controlador no lineal implementado en este caso si se tiene dominio sobre la orientación.



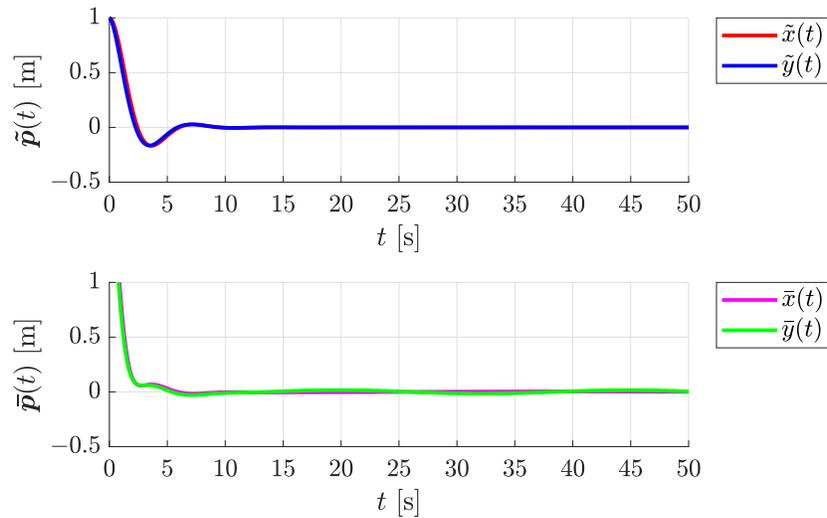
**Figura 19.** Velocidades de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento directo implementado.

Lo anterior es visualizado de mejor manera en la Figura 20 donde se observa que la trayectoria del robot maestro y del robot seguidor convergen a la trayectoria deseada de mejor manera en comparación al mostrado en la Figura 10 con el uso del controlador por retroalimentación dinámica.



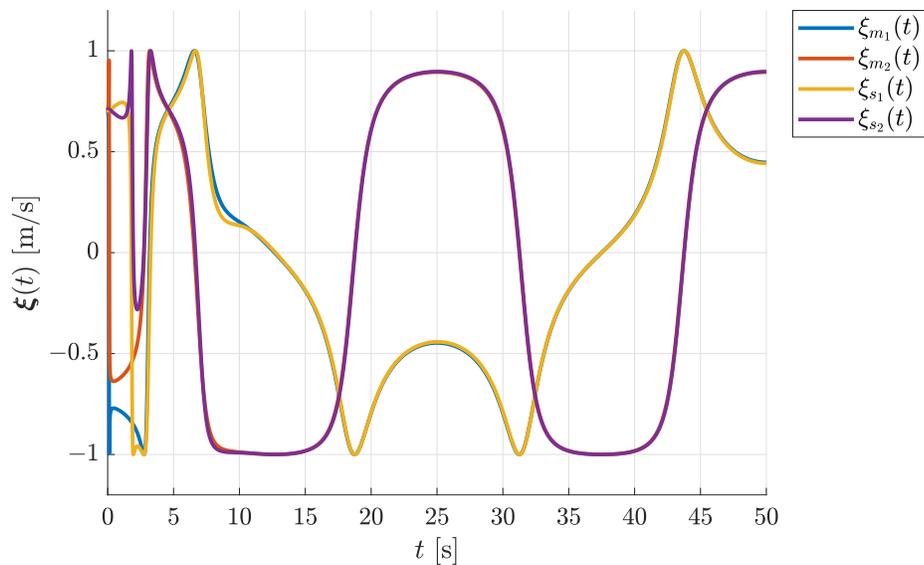
**Figura 20.** Trayectorias de los robots móviles maestro (rojo) y seguidor (azul) en el plano  $x - y$  utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento directo implementado.

La Figura 21 muestra los errores de posición de igual manera que las gráficas de error mostradas anteriormente, sin embargo se muestra visualmente que el error de posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  está subamortiguado, mientras que el error  $\bar{\mathbf{p}}(t)$  está sobre-amortiguado, ambos con una convergencia a cero para un tiempo  $t < 10$ .



**Figura 21.** Error de posición del robot maestro con respecto a la trayectoria deseada ( $\tilde{\mathbf{p}}$ ) y al robot seguidor ( $\bar{\mathbf{p}}$ ) utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento directo implementado.

Por último, en la Figura 22 se muestra el comportamiento de los estados aumentados del robot maestro y seguidor.

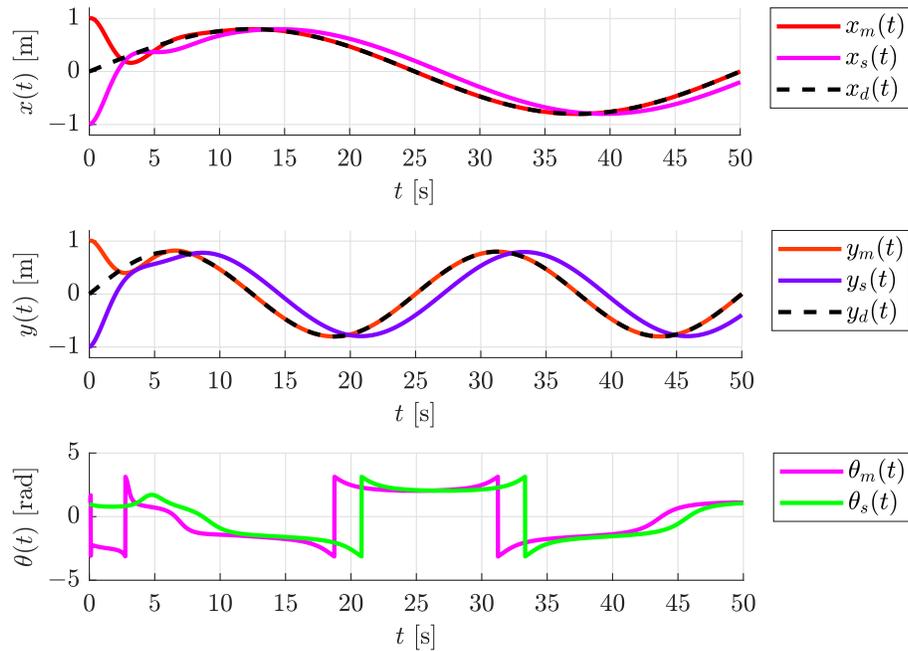


**Figura 22.** Dinámicas temporales de los estados aumentados de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento directo implementado.

Ahora bien, aplicando un sistema intermediario para la sincronización de robots móviles con un controlador no lineal implementado, se obtuvieron las dinámicas de los estados de los robots móviles con un ligero desfase (ver Figura 23). Lo anterior considerando que para este caso se definieron los siguientes parámetros:

$$\Lambda_{2_m} = \Lambda_{2_s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{3_m} = \Lambda_{3_s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

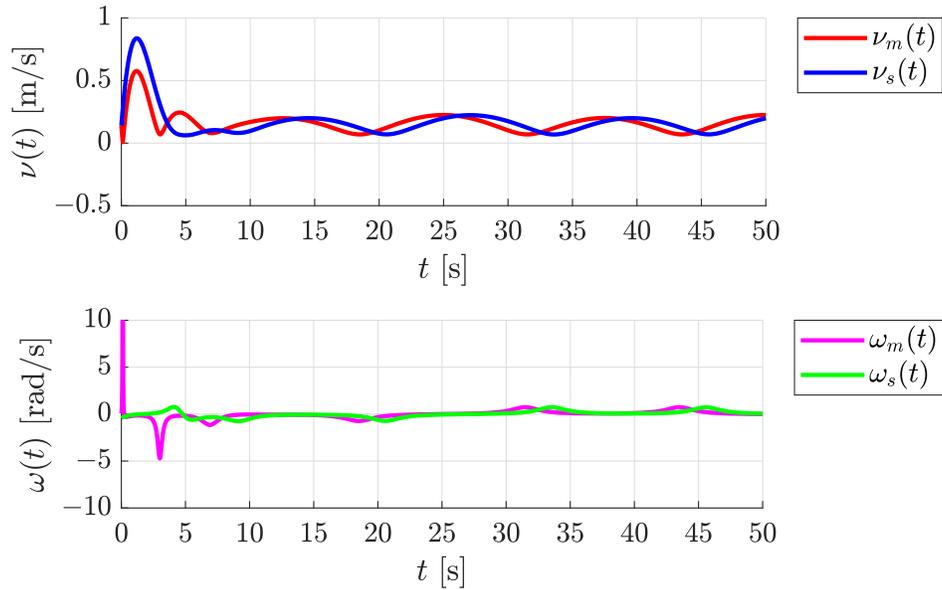
teniendo presente que  $\lambda_{1_m} = \lambda_{1_s} = 2$  y que el valor de la fuerza de acoplamiento es tal que  $k = 0.5$  en fase, es decir que  $\beta = -1$ . Esto puede ser posible dado a que se probó bajo la conjetura del acoplamiento dinámico lineal presentado en el **Capítulo 4** dada su funcionalidad para el controlador lineal. Este mismo desfase se puede contemplar en las velocidades que se muestran en la Figura 24.



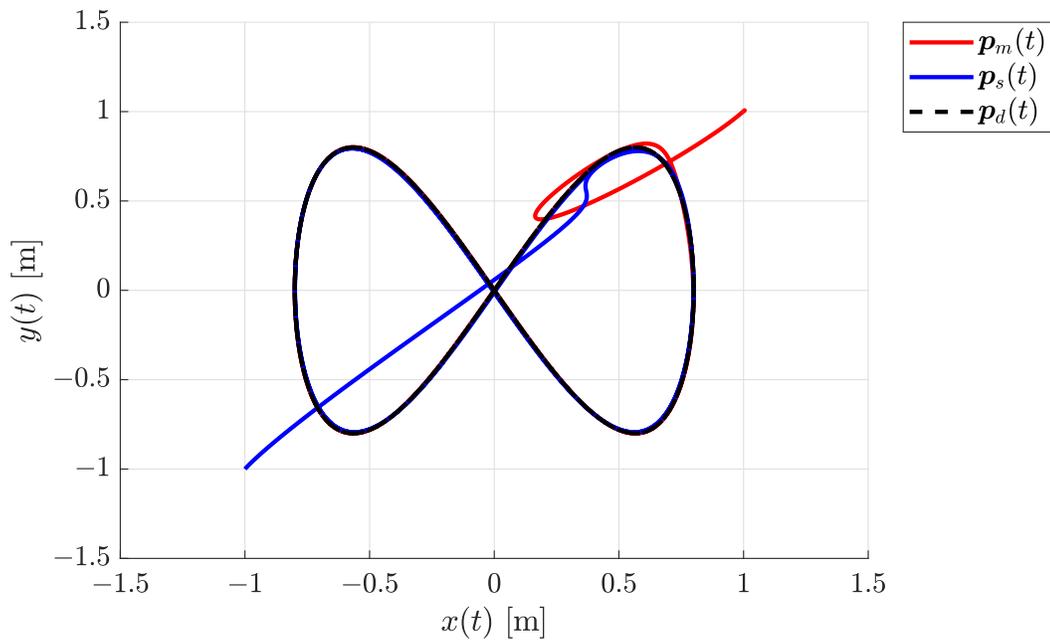
**Figura 23.** Gráficas temporales de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento dinámico implementado.

Pese a lo anterior, en la Figura 25, se puede observar que las trayectorias de los robots maestro y seguidor si logran converger de manera sincronizada a la trayectoria deseada (47)-(48) siendo el error muy pequeño entre ambos robots. Sin embargo, como se muestra en la Figura 26, las posiciones de los robots están desfasadas y, aunque sus trayectorias si convergen con la trayectoria deseada, ambos robots finalizan su recorrido con diferencia de tiempos. Consecuentemente, en las Figuras 27 y 28 se

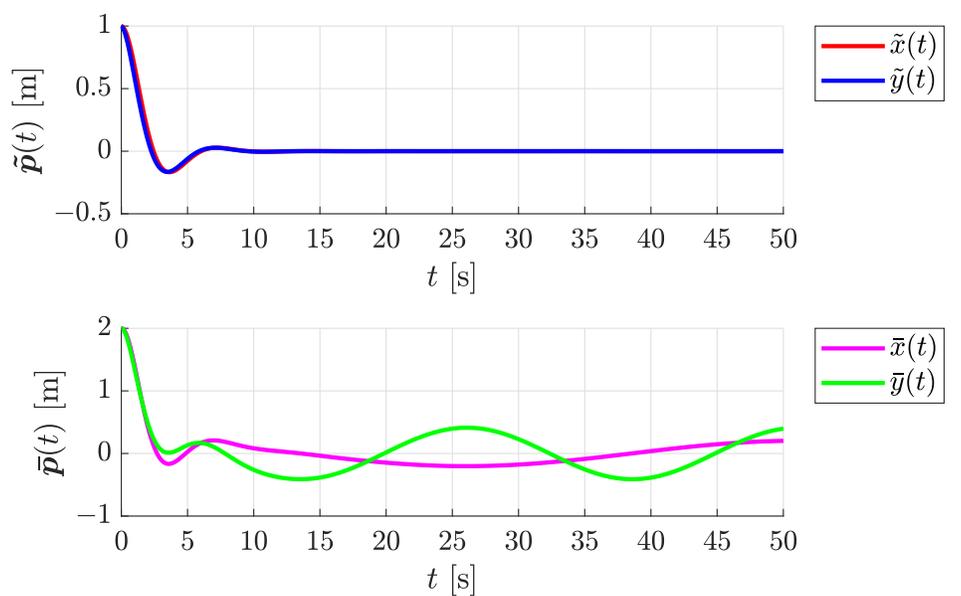
presenta de manera visual el desfase en los estados aumentados del sistema y en los estados auxiliares del acoplamiento dinámico respectivamente. En última instancia, y de igual manera que en la Figura 17, se muestra un estado del robot maestro encriptado utilizando uno de los estados del sistema hipercaótico descrito en (41)-(42).



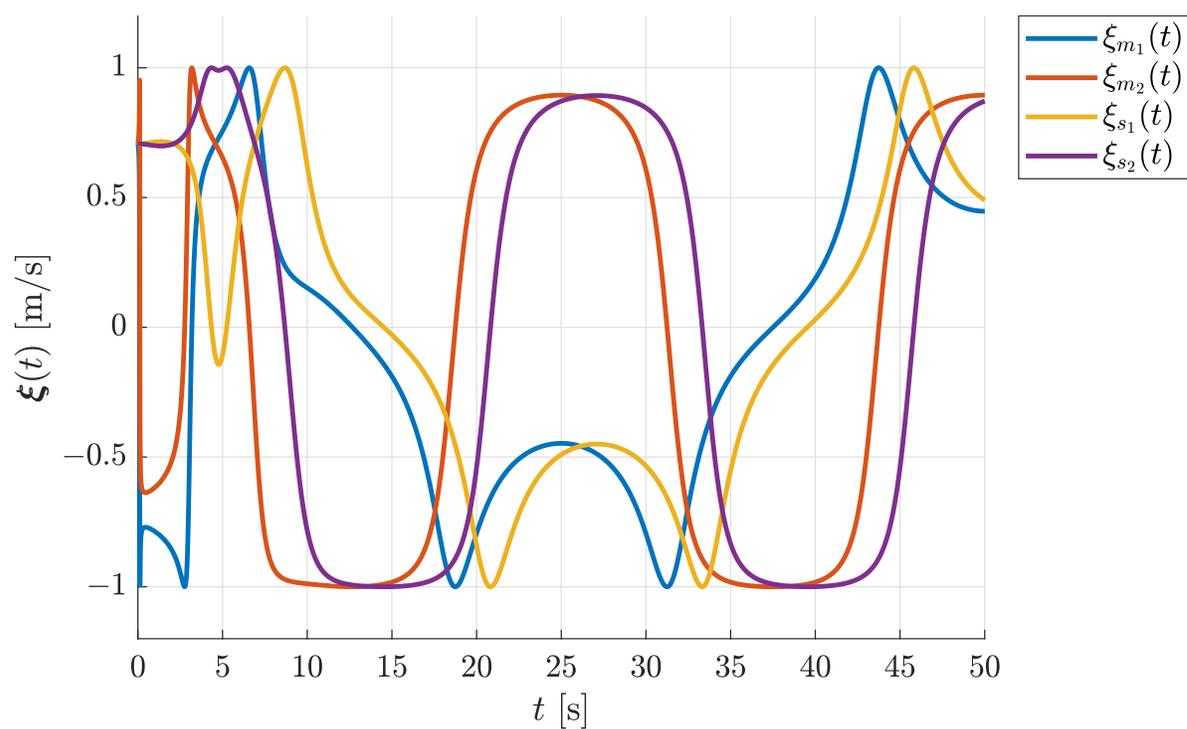
**Figura 24.** Velocidades de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento dinámico implementado.



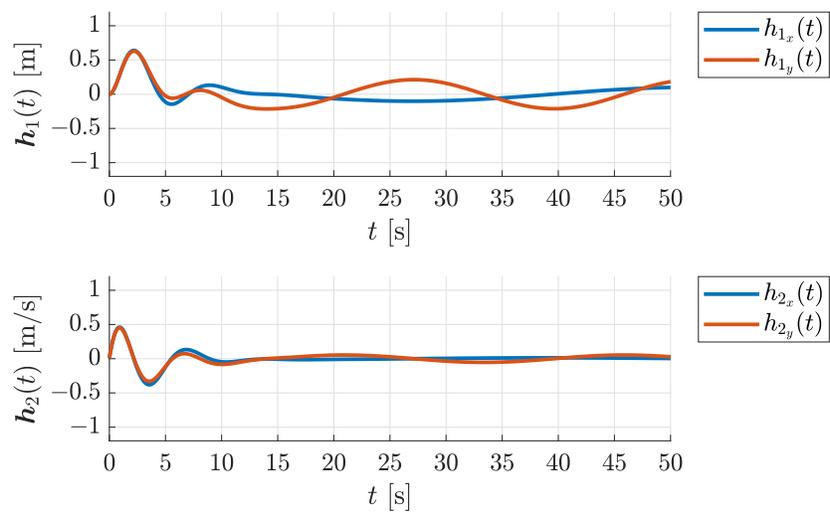
**Figura 25.** Trayectorias de los robots móviles maestro (rojo) y seguidor (azul) con sistemas intermedarios en el plano  $x - y$  utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento dinámico implementado.



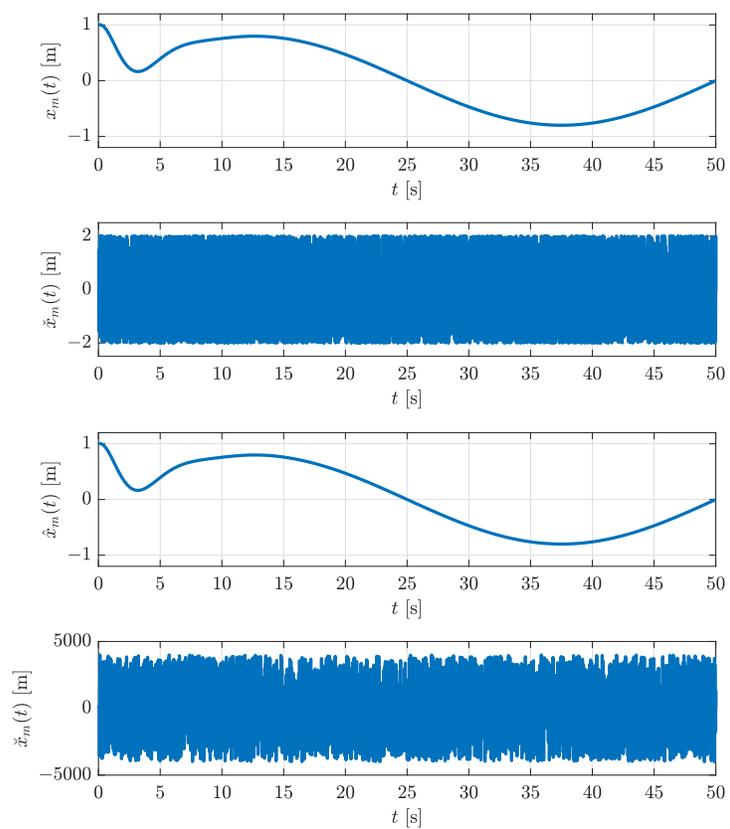
**Figura 26.** Error de posición del robot maestro con respecto a la trayectoria deseada ( $\tilde{p}$ ) y al robot seguidor ( $\bar{p}$ ) utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento dinámico implementado.



**Figura 27.** Dinámicas temporales de los estados aumentados de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento dinámico implementado.



**Figura 28.** Dinámicas temporales de los estados del acoplamiento dinámico implementado en los robots móviles.



**Figura 29.** Encriptamiento y decodificación del estado  $x_m(t)$  del robot maestro con respecto al tiempo.

Como se mostró con anterioridad, las simulaciones fueron llevadas a cabo con el fin de probar la efectividad de los controladores en la sincronización de robots móviles tanto con un sistema intermediario como sin el uso del mismo. Sin embargo, las simulaciones numéricas solo representan los comportamientos del modelo matemático definido del robot bajo condiciones ideales, ya que no toma en cuenta otros factores como el derrape, la fricción, los errores de medición de los sensores, entre otros. Es por esta razón que, en la sección que se presenta a continuación, se muestra una serie de experimentos físicos que contempla alcanzar el mismo objetivo logrado en las simulaciones numéricas, validar el esquema de trabajo propuesto en la presente tesis.

## **5.3. Experimentos**

### **5.3.1. Metodología para la realización de los experimentos**

Para la realización de los experimentos se contempló el uso de dos robots móviles ROSbot 2.0 PRO (ver Figura 7) donde uno fungirá como el robot maestro y el otro como el robot seguidor. Ambos robots, al estar equipados con encoders en cada una de sus ruedas, medirán la posición y velocidad lineal mediante odometría, mientras que la orientación será medida por un giroscopio electrónico interno. Dado que el robot en su software cuenta con un sistema operativo Linux serán programados en Python vinculando los actuadores del robot con el entorno de trabajo preinstalado ROS.

Inicialmente se configuró todos los paquetes necesarios de ROS para los robots y la computadora mediante la cual se realizaron los algoritmos de control cada robot (ver **Anexo**), éstos algoritmos de control se colocaron en la ruta `/home/husarion/husarion_ws/src/controlador/scripts` del sistema operativo de los robots. Posteriormente, dado que los robots miden la posición mediante odometría, se colocaron marcadores en el suelo a una distancia prudente entre ambos robots que, al seguir el robot maestro la trayectoria deseada, no colisionara con el robot seguidor al sincronizarse con el robot maestro. Así mismo se colocó también una cámara en el techo del laboratorio con el objetivo de conseguir evidencia de vídeo con vista aérea de la sincronización de los robots móviles.

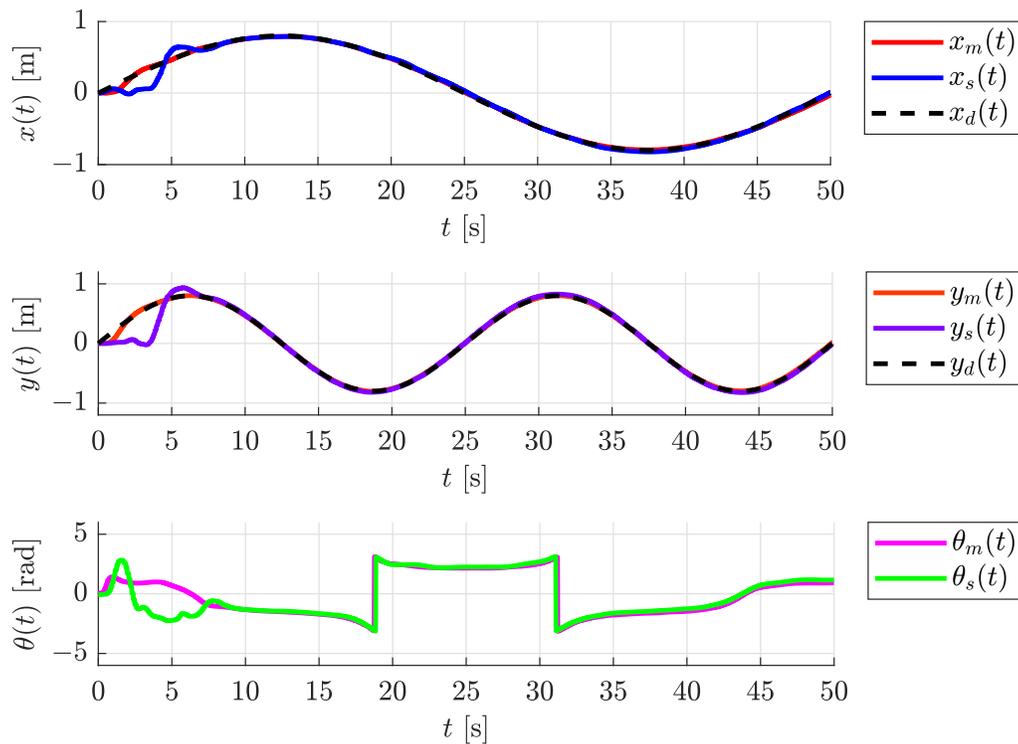
### **5.3.2. Resultados experimentales generales**

Tomando en cuenta las consideraciones previas, se procedió a llevar a cabo los experimentos físicos con los robots móviles, donde en ambos robots se implementó en primer lugar el controlador con linealización por

retroalimentación dinámica con comunicación segura, donde al sintonizarlo bajo las siguientes ganancias:

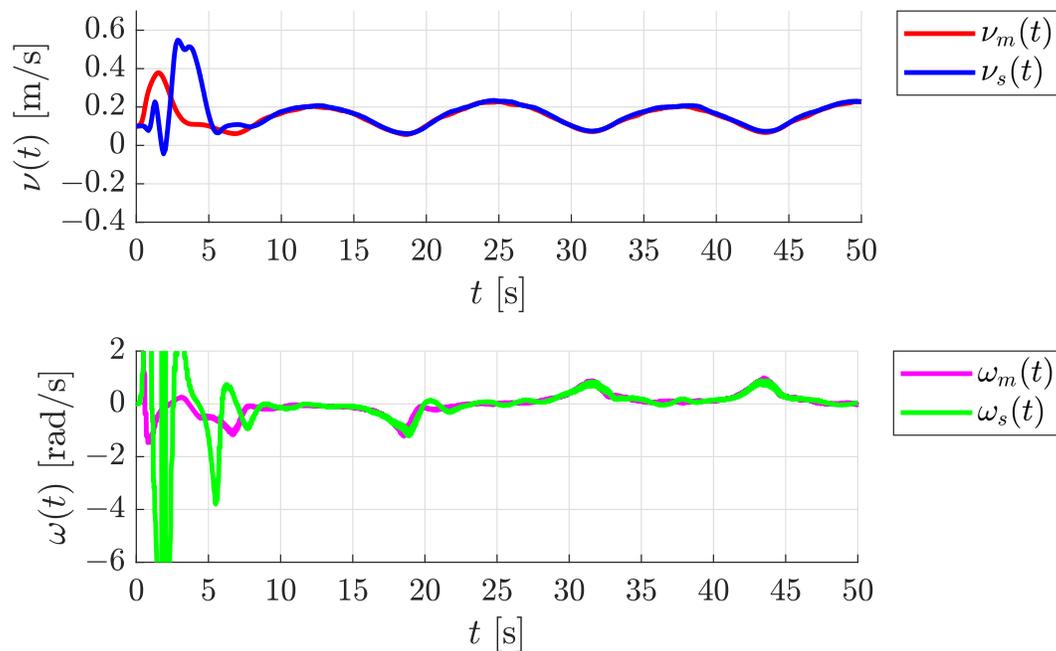
$$C_m = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C_s = \begin{bmatrix} 2.5 & 2 \\ 2.5 & 2 \end{bmatrix},$$

condujo a los resultados presentados de la Figura 30 hasta la Figura 33. Éstos resultados muestran que el desempeño, en comparación al mostrado en su homólogo simulado, son diferentes pese a que ambos logran cumplir su objetivo de control y de sincronización.

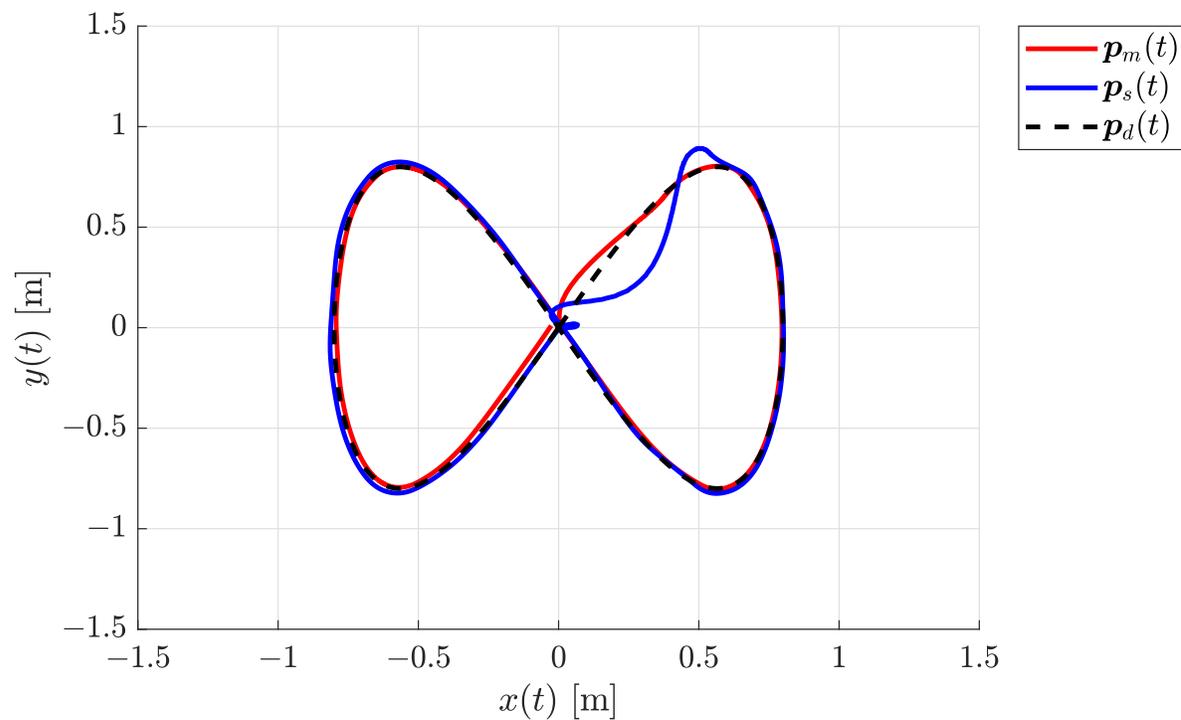


**Figura 30.** Gráficas temporales de los robots móviles utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento directo implementado.

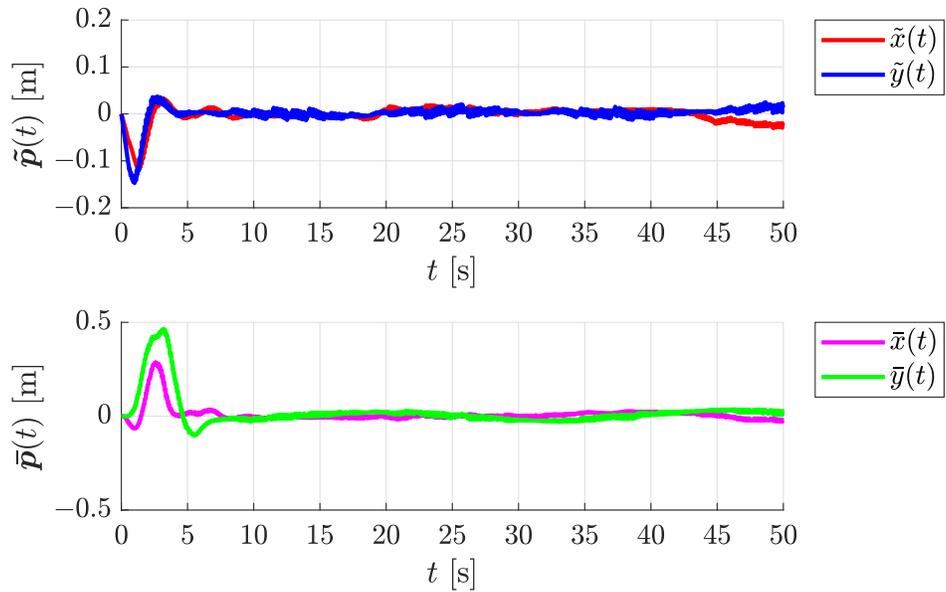
En la Figura 33 se muestra más detenidamente éstas diferencias con respecto a los errores de posición obtenidos en su equivalente simulado, siendo un error mayor en el caso experimental. Las diferencias antes mencionadas se deben a que existen otros factores físicos que en las simulaciones numéricas no considera como lo son el derrape, el error acumulativo por la odometría del robot, entre otros. No obstante, a pesar de existir un mayor error en la implementación experimental, los robots alcanzaron la sincronización de manera satisfactoria cumpliendo el seguimiento de trayectoria a la vez que la sincronización como se contempla en la Figura 32.



**Figura 31.** Velocidades de los robots móviles utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento directo implementado.



**Figura 32.** Trayectorias de los robots móviles maestro (rojo) y seguidor (azul) en el plano  $x-y$  utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento directo implementado.



**Figura 33.** Error de posición del robot maestro con respecto a la trayectoria deseada ( $\tilde{p}$ ) y al robot seguidor ( $\tilde{p}$ ) utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento directo implementado.

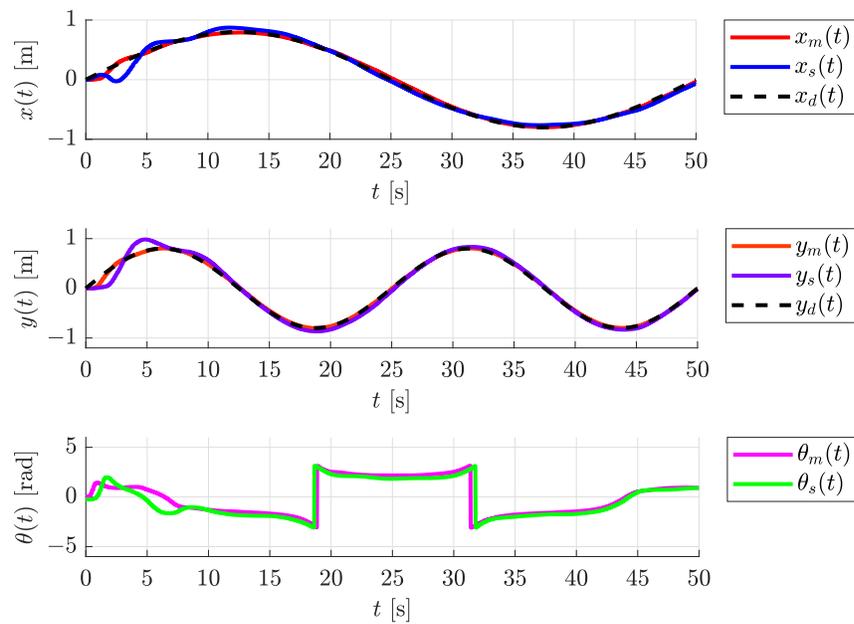
Mientras que para el mismo caso pero con un sistema intermediario (acoplamiento dinámico) implementado se sintonizaron los robots partiendo de las ganancias establecidas en la simulación numérica de la misma forma que en el caso anterior. Con ello se obtuvieron los resultados mostrados de la Figura 34 hasta la Figura 38 bajo las siguientes ganancias:

$$\mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

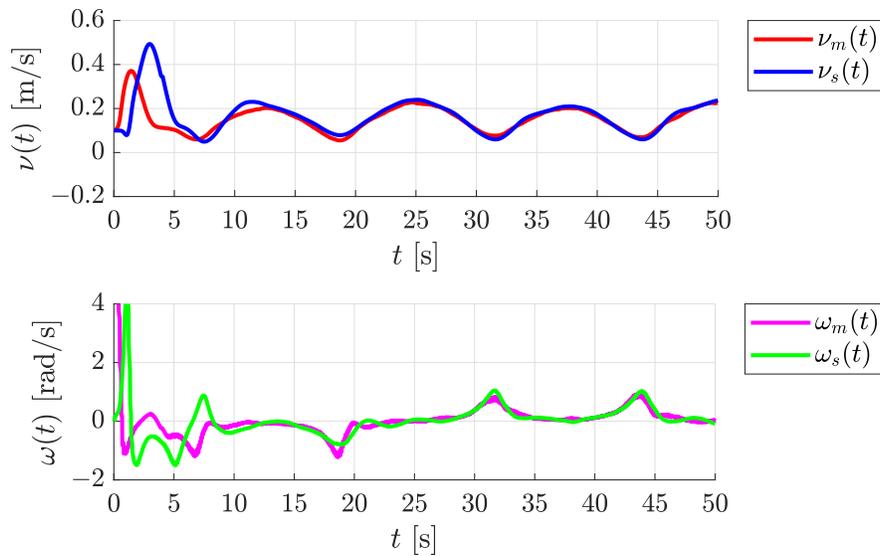
$$k = 6,$$

donde  $k \in \mathbb{R}^+$  representa la fuerza de acoplamiento entre el robot maestro y el robot seguidor, siendo el acoplamiento en fase, es decir que  $\beta_1 = \beta_2 = -1$ . Ahora bien, con respecto al caso sin el uso del acoplamiento dinámico se puede observar que las trayectorias de los robots alcanzan la estabilización y sincronización conforme aumenta el tiempo  $t$ . No obstante, durante el periodo inicial de tiempo  $t \in [0, 50]$  segundos el error inicial contemplado en la Figura 37 es mayor en relación al error inicial correspondiente al mostrado en la Figura 33 aunque posteriormente es compensado. Lo anterior se puede visualizar de mejor manera en la Figura 36 donde se perciben esas diferencias. Como se mencionó con anterioridad, aunque el error inicial es mayor conforme el tiempo transcurre tiende a reducir el error hasta converger a cero dada la naturaleza del acoplamiento dinámico, evitando así el error en estado estacionario de

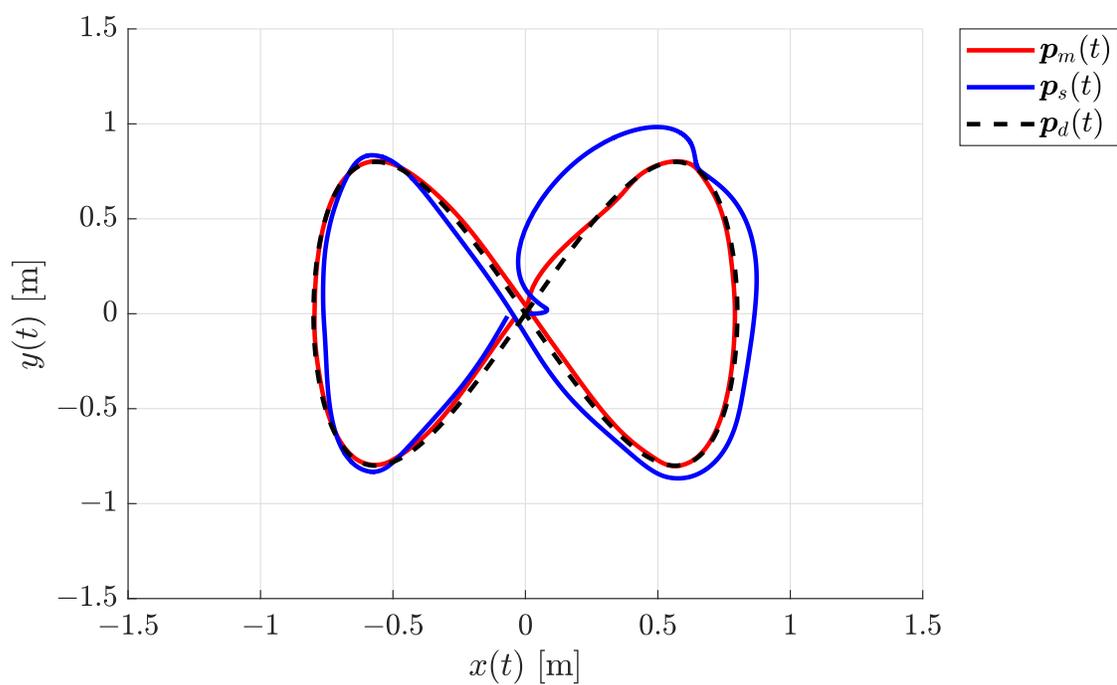
modo que, así como se puede observar esto gráficamente en la Figura 37, en la Figura 38 se observa el comportamiento de las dinámica de los estados auxiliares del acoplamiento dinámico.



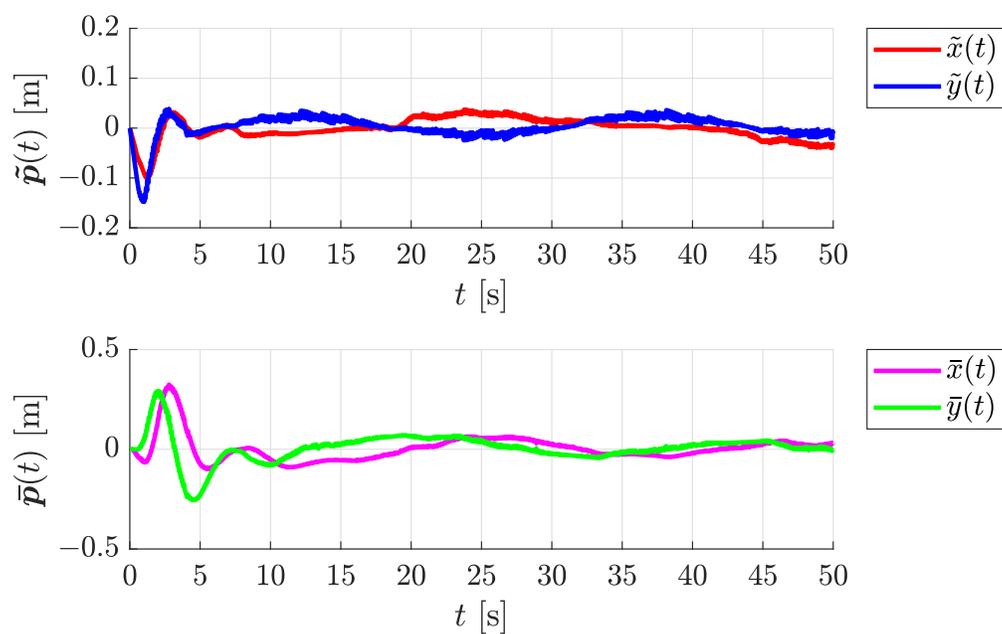
**Figura 34.** Gráficas temporales de los robots móviles utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento dinámico implementado.



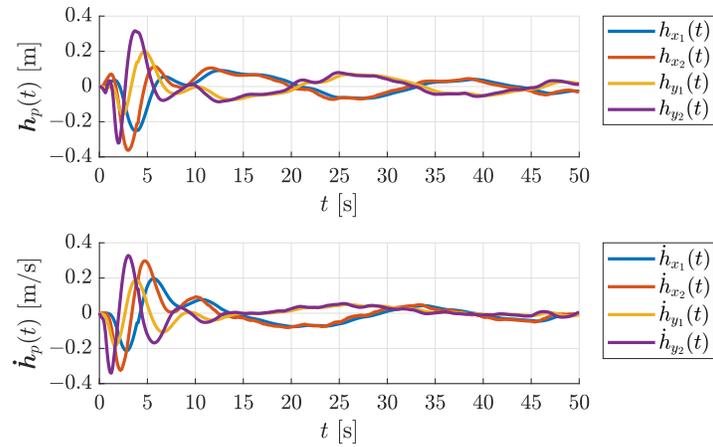
**Figura 35.** Velocidades de los robots móviles utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento dinámico implementado.



**Figura 36.** Trayectorias de los robots móviles maestro (rojo) y seguidor (azul) con sistemas intermedios en el plano  $x - y$  utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento dinámico implementado.

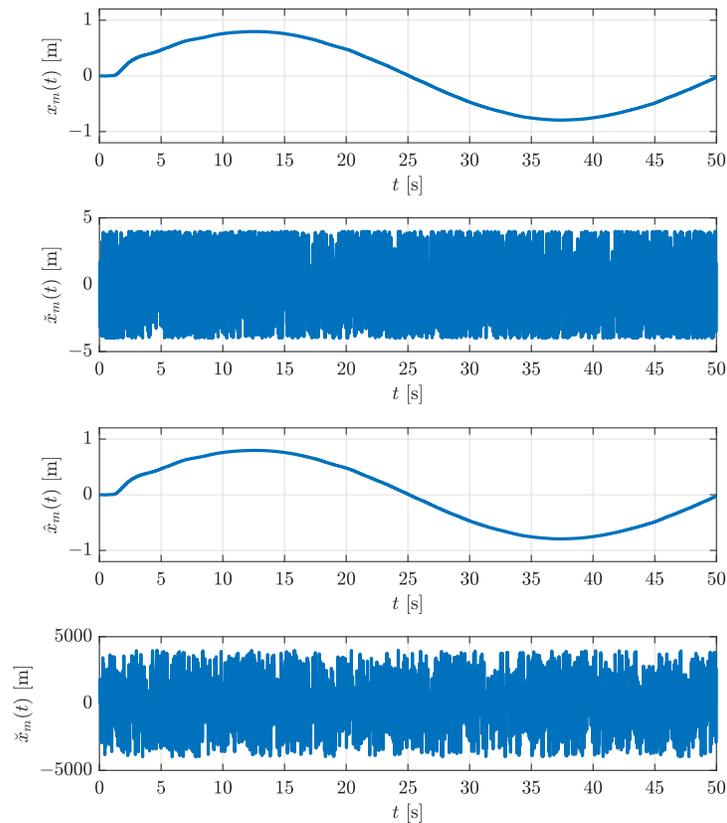


**Figura 37.** Error de posición del robot maestro con respecto a la trayectoria deseada ( $\tilde{p}$ ) y al robot seguidor ( $\bar{p}$ ) utilizando el controlador de linealización por retroalimentación dinámica con un acoplamiento dinámico implementado.



**Figura 38.** Dinámicas temporales de los estados del acoplamiento dinámico implementado en los robots móviles.

Cabe señalar que en los dos casos mostrados anteriormente las señales fueron encriptadas, siendo la Figura 39 un ejemplo real de su encriptación en las posiciones y velocidades cartesianas del robot maestro.

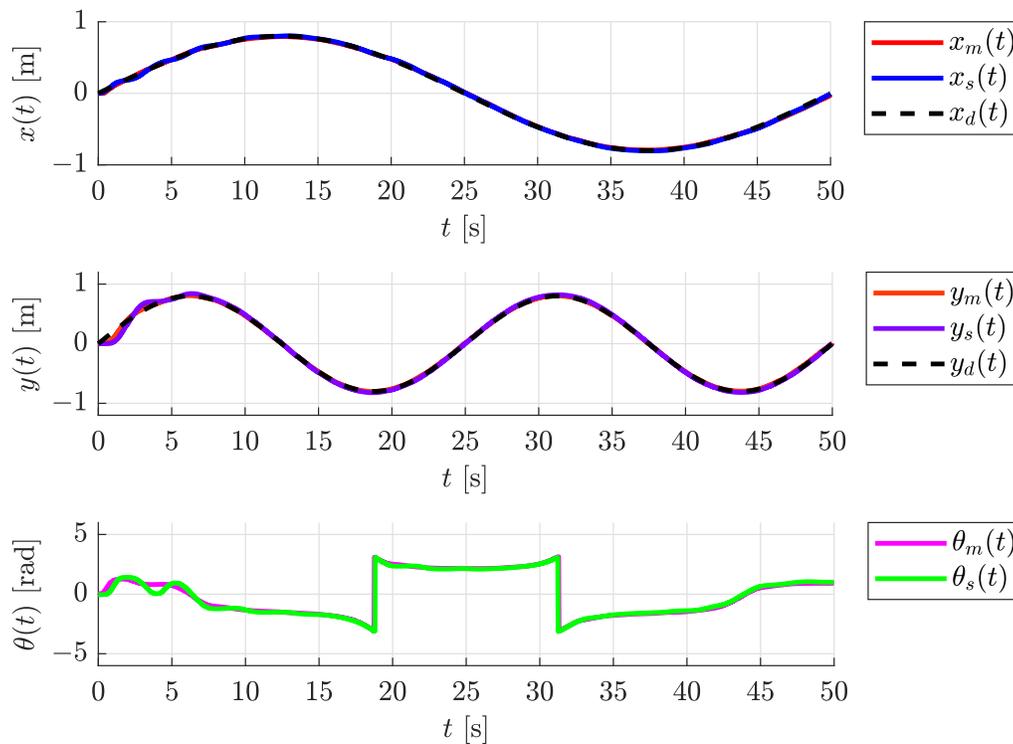


**Figura 39.** Encriptamiento y decodificación del estado  $x_m(t)$  del robot maestro con respecto al tiempo.

Ahora bien, de manera consecuente se implementó el controlador no lineal a los robots maestro y seguidor, siendo el primer caso un acoplamiento directo donde el desempeño de ambos robots se muestra de la Figura 40 hasta la Figura 50. De modo que, se sintonizó el robot iniciando con las ganancias utilizadas en las simulaciones numéricas logrando establecer las siguientes ganancias para el desarrollo de la validación experimental:

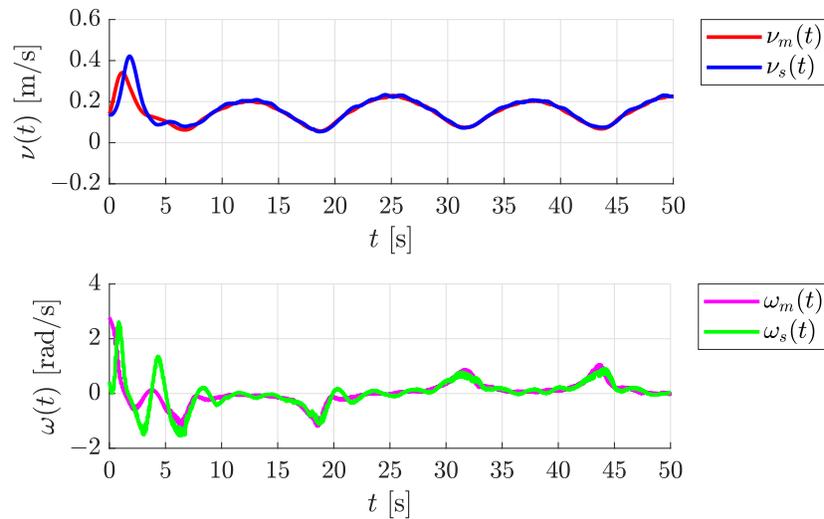
$$\Lambda_{2_m} = \Lambda_{2_s} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{3_m} = \Lambda_{3_s} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

teniendo presente que  $\lambda_{1_m} = \lambda_{1_s} = 2.5$ , ya que de lo contrario la acción de control sobre los actuadores resultaría ser un gasto energético enorme para las baterías de los robots, al mismo tiempo que al tratar de seguir la trayectoria ambos robots tendrían a derrapar por los frenos repentinos durante la estabilización cometiendo errores significativamente grandes. Esto no solo puede provocar que los robots tuvieran un mayor tiempo transitorio hasta alcanzar la estabilización y sincronización asintótica, sino que también (en algunos casos) los robots se volverían inestables y por ende no alcanzar a sincronizarse de manera adecuada.



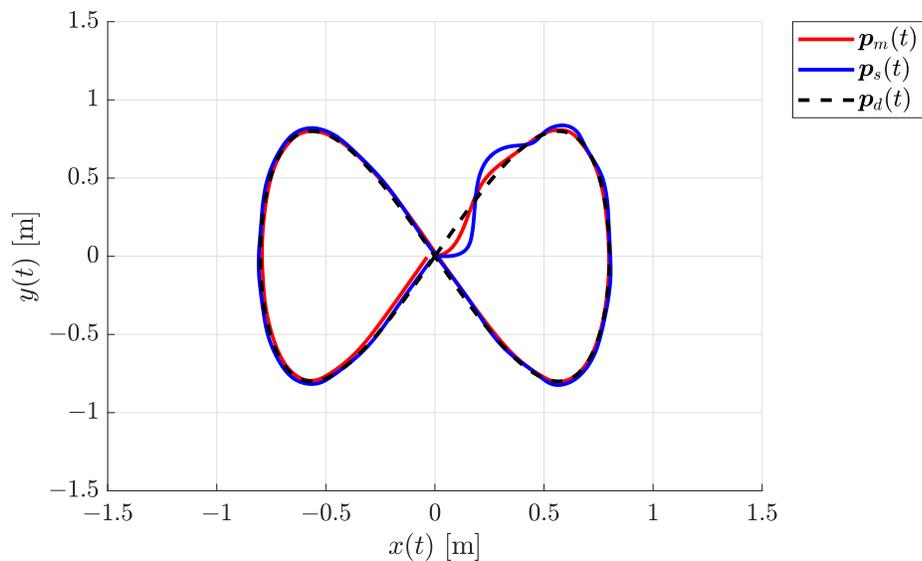
**Figura 40.** Gráficas temporales de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento directo implementado.

Por otra parte, en las Figuras 40-42 se aprecia una mejor convergencia entre las dinámicas de los estados de los robots y sus trayectorias con respecto a la trayectoria deseada, así como un mejor uso y optimización de los actuadores tal que sus velocidades no saturan sus actuadores.

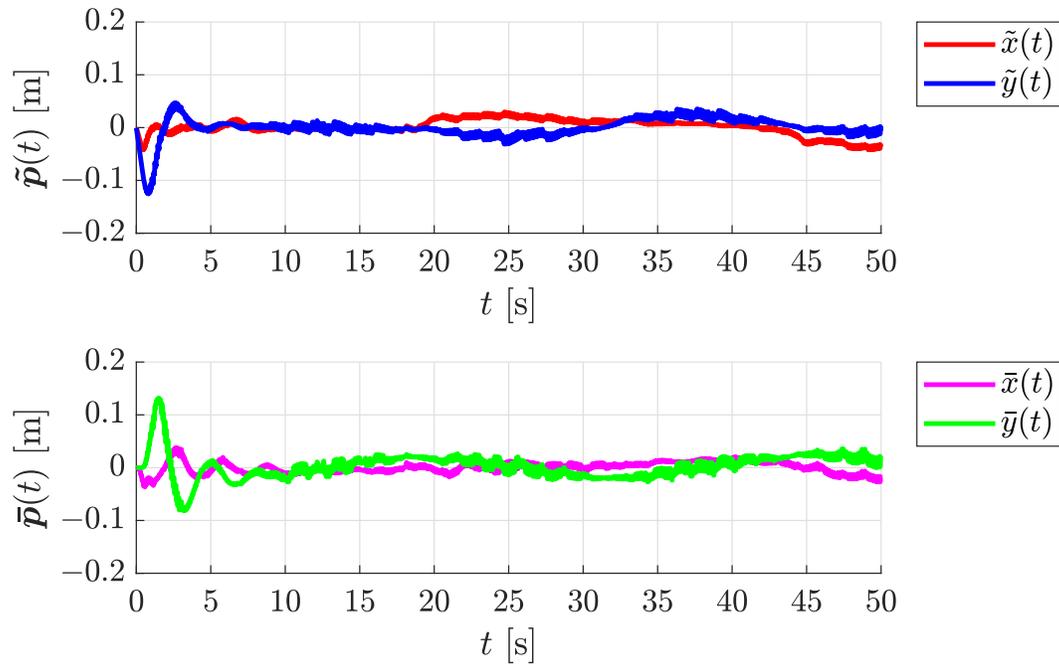


**Figura 41.** Velocidades de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento directo implementado.

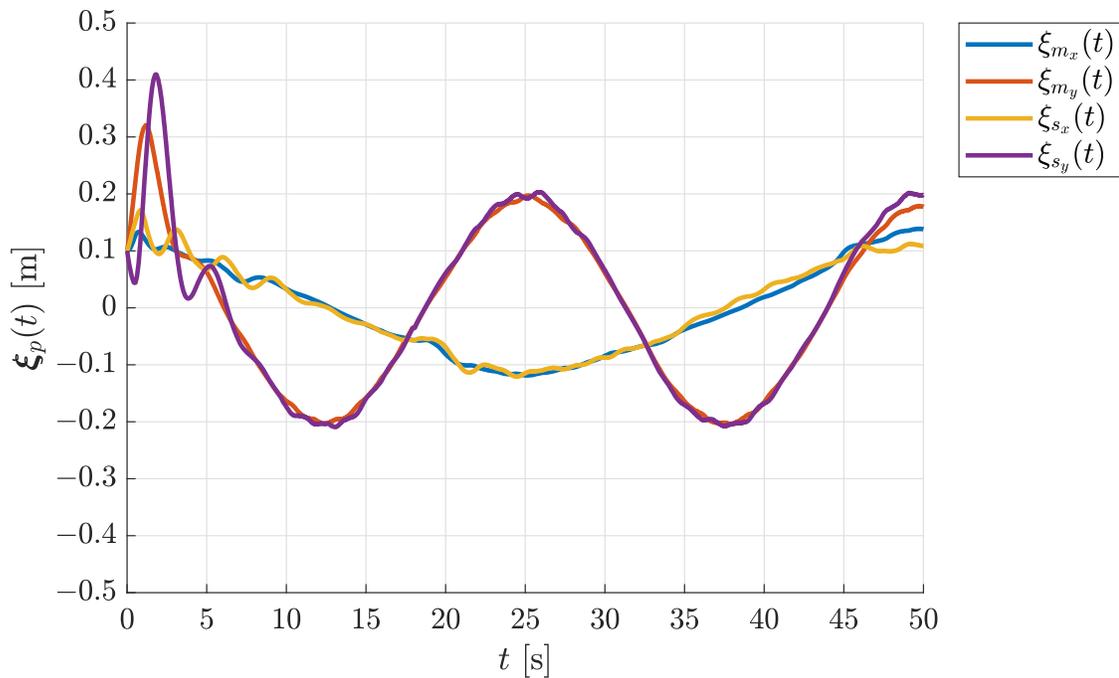
Así mismo, como se muestra en la Figura 43, el error es menor en comparación al mostrado en la Figura 33 utilizando el controlador lineal. Las dinámicas de los estados aumentados del robot se muestran en la Figura 44.



**Figura 42.** Trayectorias de los robots móviles maestro (rojo) y seguidor (azul) en el plano  $x - y$  utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento directo implementado.



**Figura 43.** Error de posición del robot maestro con respecto a la trayectoria deseada ( $\tilde{p}$ ) y al robot seguidor ( $\bar{p}$ ) utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento directo implementado.



**Figura 44.** Dinámicas temporales de los estados aumentados de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento directo implementado.

Por otro lado, de la Figura 45 hasta la Figura 50 se muestran los resultados obtenidos para el caso donde

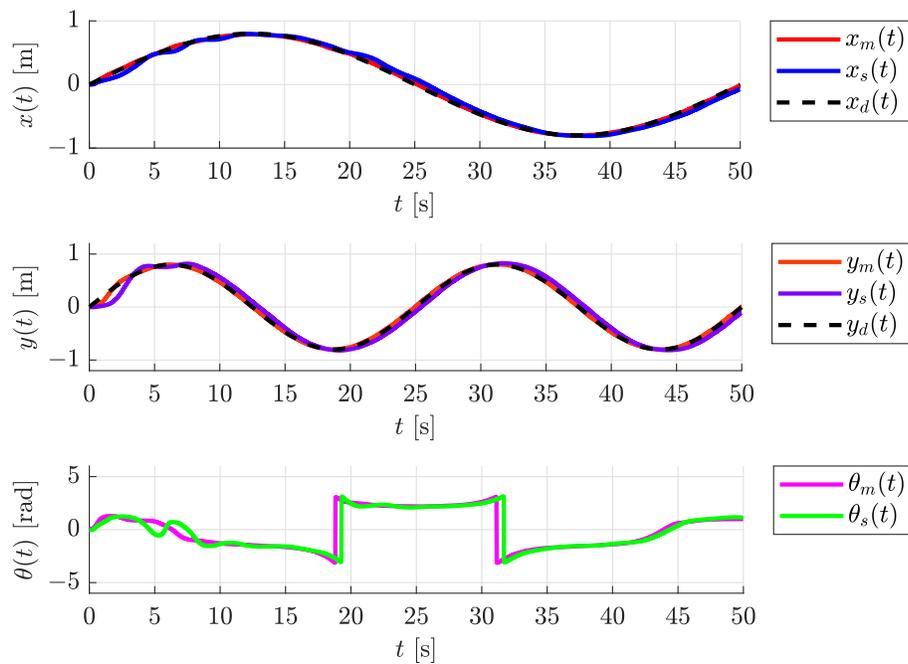
los dos robots hacen uso de un acoplamiento dinámico para su sincronización considerando los siguientes valores de ganancias:

$$\lambda_{1_m} = 2.5, \quad \lambda_{1_s} = 2,$$

$$\Lambda_{2_m} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{2_s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{3_m} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{3_s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

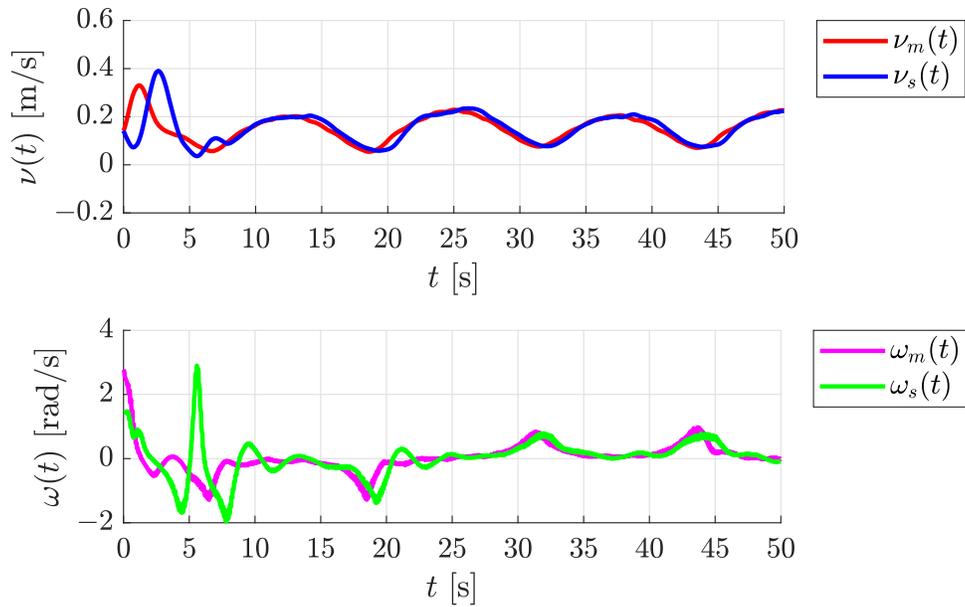
contemplando que la fuerza de acoplamiento es tal que  $k = 2$  en fase, es decir que  $\beta = -1$ . En primer lugar se exhibe el comportamiento que desempeñan las dinámicas de los estados de los robots maestro y seguidor en la Figura 45, donde se puede contemplar un pequeño desfase entre el robot maestro y el robot seguidor.



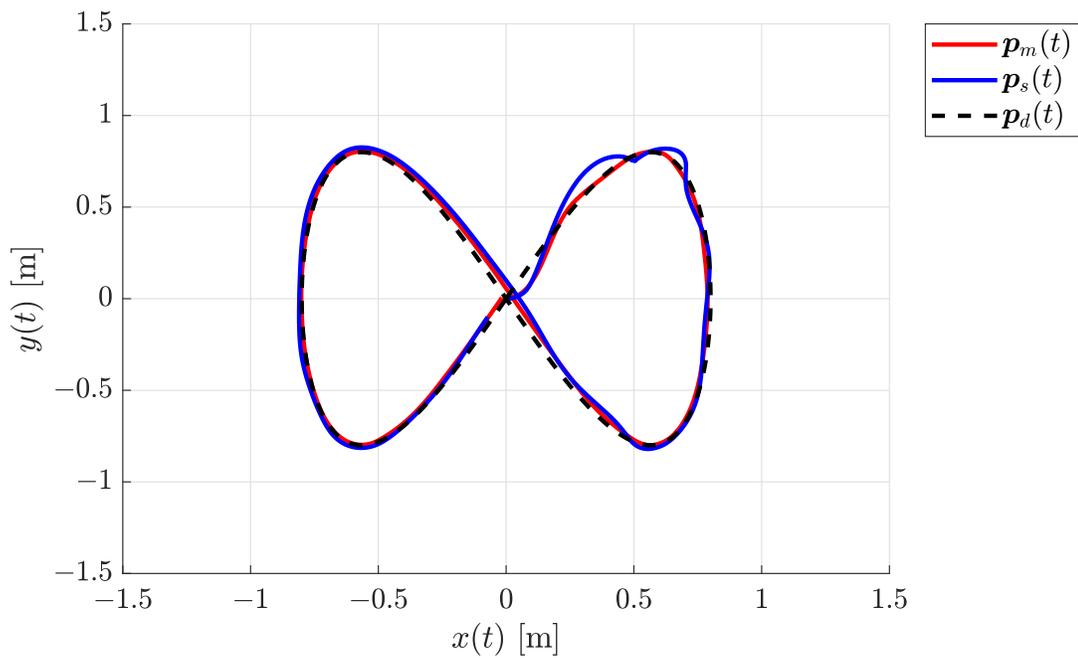
**Figura 45.** Gráficas temporales de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento dinámico implementado.

Lo anterior se refleja en sus velocidades mostradas gráficamente en la Figura 46 y en sus trayectorias individuales en la Figura 47. Como es de esperarse, el desfase ocurrido en la simulación numérica también está presente en la validación experimental, siendo en la Figura 48 donde se observa de mejor manera este

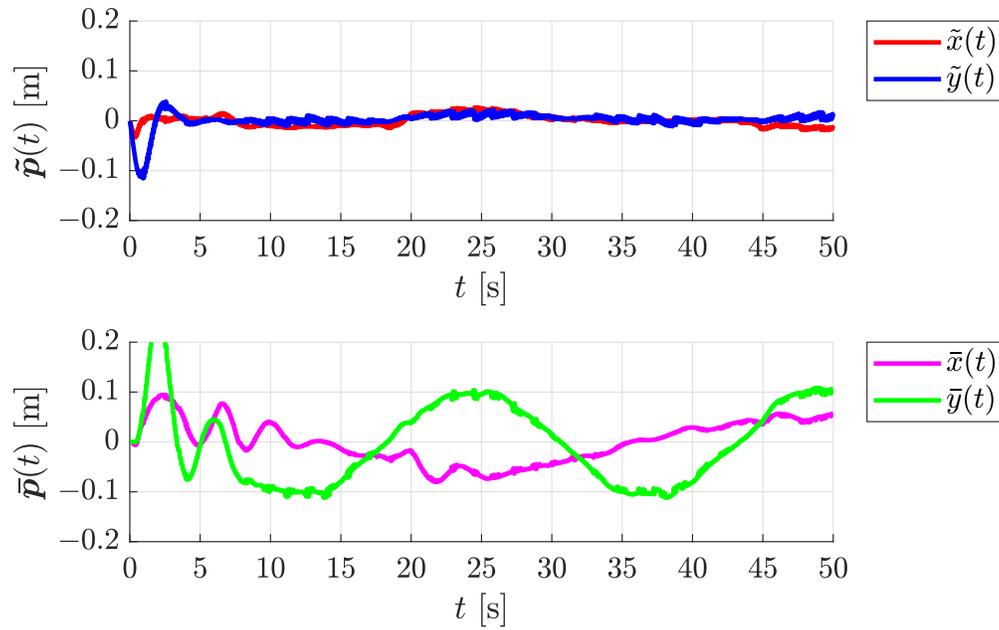
desfase entre el robot maestro y el robot seguidor. Del mismo modo, se puede contemplar en las Figuras 49 y 50 las dinámicas de los estados aumentados del sistema y los estados auxiliares del acoplamiento dinámico respectivamente.



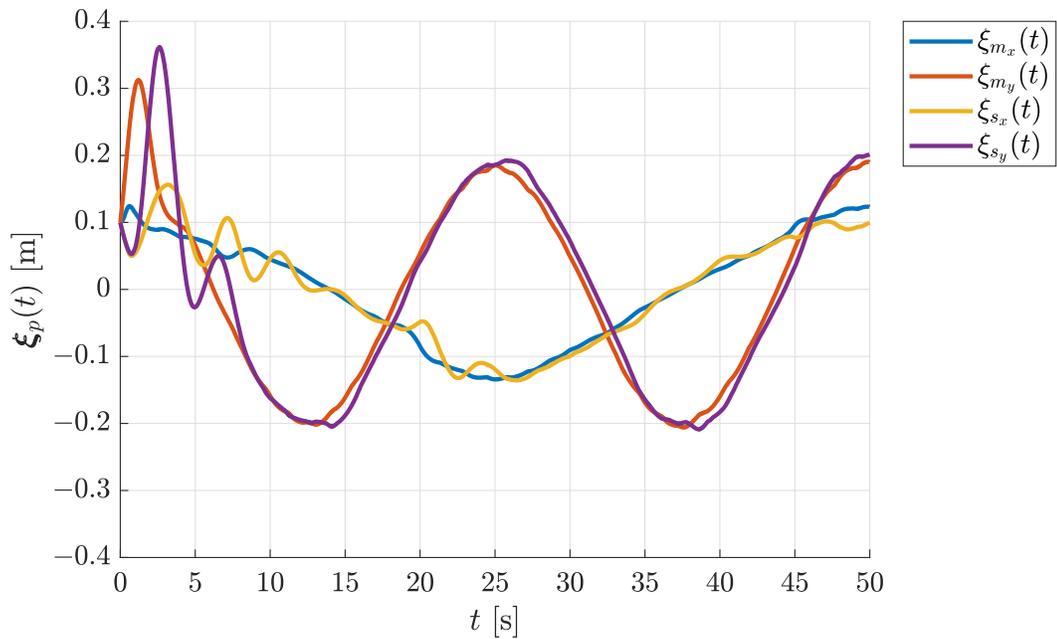
**Figura 46.** Velocidades de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento dinámico implementado.



**Figura 47.** Trayectorias de los robots móviles maestro (rojo) y seguidor (azul) con sistemas intermediarios en el plano  $x - y$  utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento dinámico implementado.

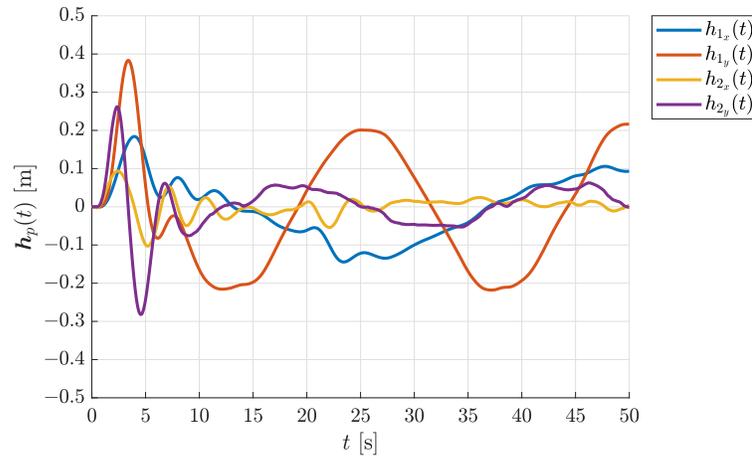


**Figura 48.** Error de posición del robot maestro con respecto a la trayectoria deseada ( $\tilde{p}$ ) y al robot seguidor ( $\bar{p}$ ) utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento dinámico implementado.

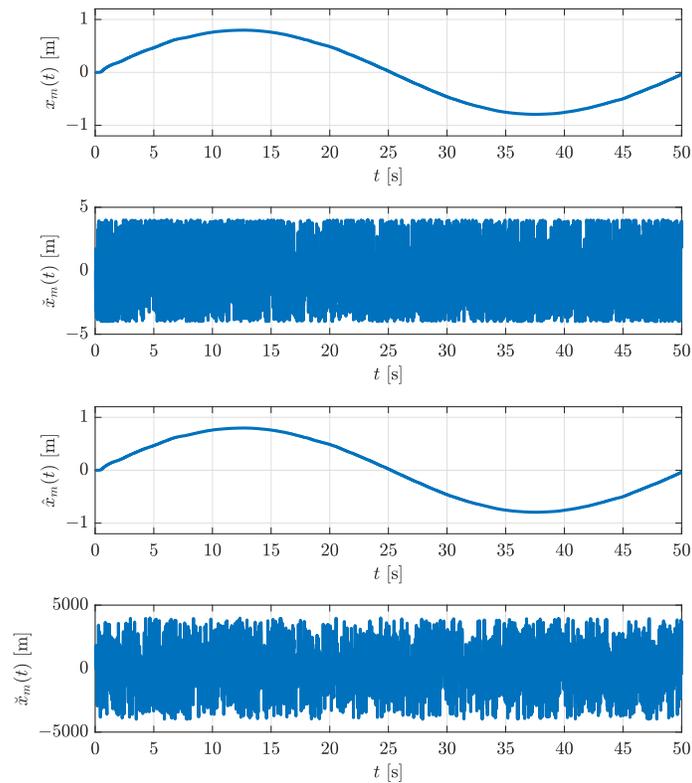


**Figura 49.** Dinámicas temporales de los estados aumentados de los robots móviles utilizando el controlador no lineal con un acoplamiento dinámico implementado.

Por último, en la Figura 51, se muestra una de las señales encriptadas de los estados del robot para su transmisión segura al robot seguidor, el cuál se encarga de decodificar las señales encriptadas para utilizar la información en el acoplamiento dinámico.



**Figura 50.** Dinámicas temporales de los estados del acoplamiento dinámico implementado en los robots móviles.



**Figura 51.** Encriptamiento y decodificación del estado  $x_m(t)$  del robot maestro con respecto al tiempo.

En base a los resultados obtenidos se puede constatar que existen diversas diferencias entre las simulaciones numéricas y los experimentos realizados de manera física por lo que, a continuación en el siguiente capítulo, se presentarán las conclusiones más destacadas del trabajo de investigación realizado.

## Capítulo 6. Conclusiones

---

La culminación del presente trabajo de investigación revela resultados positivos en el uso de las diferentes leyes de control para el seguimiento de trayectorias durante la sincronización y formación de los robots móviles, demostrando la ley de control no lineal ser más efectiva. Sin embargo, pese al excelente desempeño de los robots móviles durante las validaciones experimentales, existen otros factores que entorpecen su comportamiento siendo uno de ellos la medición de posición, ya que la odometría del robot genera errores acumulativos que con el paso del tiempo desvían la ruta del robot de la trayectoria deseada.

Cabe señalar que la encriptación de señales de control es segura porque, al agregar una señal a uno de los estados del sistema hipercaótico, se produce un efecto caótico que hace que la encriptación sea difícil de descifrar. Además, si se cambia mínimamente la condición inicial, la encriptación es aún más segura y prácticamente imposible de descifrar.

Por otra parte, los acoplamientos dinámicos utilizados para la sincronización de los robots móviles mejoran sustancialmente la convergencia entre la ruta del robot y la trayectoria deseada en las validaciones numéricas realizadas. No obstante, durante las validaciones experimentales se observó, al menos durante el transitorio hasta alcanzar la trayectoria deseada, un mayor error entre la posición del robot seguidor con respecto al robot maestro en relación a la misma sincronización sin el uso de acoplamientos dinámicos. Pese a lo anterior existen diversos factores que pueden ser utilizados de manera benéfica, ya que una de las ventajas destacables del uso de acoplamientos dinámicos es evitar el uso de la medición de la velocidad del robot maestro, es decir que solo es necesario conocer la posición del robot maestro para determinar la velocidad del mismo sin la necesidad de medirla haciendo uso únicamente del acoplamiento dinámico como se muestra en la ecuación descrita en (123) en el **Capítulo 4**.

Además de lo concluido anteriormente, se puede agregar que el error en la salida del robot móvil seguidor entre el controlador lineal y no lineal en las validaciones numéricas es alrededor de  $\pm 2$  centímetros con respecto a los resultados obtenidos en las validaciones experimentales. Así mismo, el efecto del algoritmo de control en el robot seguidor durante la sincronización es severamente reducido por el acoplamiento dinámico sin importar el tipo de controlador, presentados en este trabajo de tesis, que utilice. Por otro lado, conforme transcurre el tiempo  $t$  en la experimentación física el error por odometría crece en la posición de los robots móviles.

Por añadidura, si se definen ganancias muy altas para la actuación en la entrada de control del robot maestro, por fricción, al tomar las curvas en las trayectorias deseadas puede llegar a inestabilizar el sistema, y por ende, también volver inestable el robot seguidor. No obstante, aunque las trayectorias

deseadas cumplen con las condiciones descritas en el **Capítulo 3** si éstas son demasiado pequeñas con respecto a las dimensiones del robot puede volverse inestable. A su vez, la batería del robot es mayormente desgastada si se utilizan ganancias muy altas en la entrada de control del robot móvil. Finalmente, el procesamiento computacional del robot puede afectar severamente el rendimiento del mismo si se hace uso de más datos, por lo que es necesario optimizarlo en caso de sincronizar una cantidad más grande de robots móviles.

## 6.1. Trabajo futuro

A través del riguroso análisis y experimentación llevados a cabo en este proyecto de tesis se han observado múltiples campos en los que es posible explorar e implementar como continuación o trabajo futuro. De manera que no solo permite expandir el trabajo de investigación, sino que también aborda la reducción o eliminación de ciertas limitantes expuestas en los resultados experimentales llegando a los siguientes posibles trabajos futuros:

- Demostración analítica de estabilidad de la ecuación (123) para el uso del acoplamiento dinámico en la sincronización de robots móviles utilizando una ley de control no lineal como la descrita en (90).
- Desarrollo de experimentos con el uso de diferentes controladores y acoplamientos dinámicos para otro tipo de robots móviles con comunicación segura.
- Sintonización de controladores y acoplamientos dinámicos haciendo uso de otros sensores para la medición de la posición y la velocidad de los robots móviles.
- Diseño de algoritmos de control para la sincronización y formación de robots móviles haciendo uso sistemas de visión.
- Desarrollo de algoritmos de control para la sincronización heterogénea de diferentes tipos de robots móviles para formación o seguimiento de trayectorias de manera experimental.
- Análisis experimental haciendo uso de diferentes trayectorias.

## Literatura citada

- Abundiz-Pérez, F., Cruz-Hernández, C., Murillo-Escobar, M., López-Gutiérrez, R., & Arellano-Delgado, A. (2016). A fingerprint image encryption scheme based on hyperchaotic rössler map. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016. <https://doi.org/https://doi.org/10.1155/2016/2670494>.
- Alligood, K. T., Sauer, T. D., Yorke, J. A., & Chillingworth, D. (1998). Chaos: an introduction to dynamical systems. *SIAM Review*, 40(3), 732–732.
- Arellano-Delgado, A., López-Gutiérrez, R., Méndez-Ramírez, R., Cardoza-Avendaño, L., & Cruz-Hernández, C. (2021). Dynamic coupling in small-world outer synchronization of chaotic networks. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 423, 132928. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.132928>.
- Arellano-Delgado, A., López-Gutiérrez, R. M., Murillo-Escobar, M. A., Cardoza-Avendaño, L., & Cruz-Hernández, C. (2017). The emergence of hyperchaos and synchronization in networks with discrete periodic oscillators. *Entropy*, 19(8), 413. <https://doi.org/https://doi.org/10.3390/e19080413>.
- Arellano-Delgado, A., Méndez-Ramírez, R. D., López-Gutiérrez, R. M., Murillo-Escobar, M. A., & Cruz-Hernández, C. (2023). Enhancing the emergence of hyperchaos using an indirect coupling and its verification based on digital implementation. *Nonlinear Dynamics*, 1–15. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11071-023-08313-0>.
- Biswas, B., Chatterjee, S., Mukherjee, S., & Pal, S. (2013). A discussion on euler method: A review. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1(2), 2090–2792.
- Blekhman, I., Fradkov, A., Nijmeijer, H., & Pogromsky, A. Y. (1997). On self-synchronization and controlled synchronization. *Systems & Control Letters*, 31(5), 299–305. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(97\)00047-9](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0167-6911(97)00047-9).
- Butcher, J. C. (1996). A history of runge-kutta methods. *Applied numerical mathematics*, 20(3), 247–260. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0168-9274\(95\)00108-5](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0168-9274(95)00108-5).
- Chapra, S. C., Canale, R. P., Ruiz, R. S. G., Mercado, V. H. I., Díaz, E. M., & Benites, G. E. (2011). *Métodos numéricos para ingenieros*, volume 5. McGraw-Hill New York, NY, USA.
- Chua, L. O., Wu, C. W., Huang, A., & Zhong, G.-Q. (1993). A universal circuit for studying and generating chaos. i. routes to chaos. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 40(10), 732–744. <https://doi.org/10.1109/81.246149>.
- De Luca, A. & Di Benedetto, M. D. (1993). Control of nonholonomic systems via dynamic compensation. *Kybernetika*, 29(6), 593–608.
- De Luca, A., Oriolo, G., & Vendittelli, M. (2001). Control of wheeled mobile robots: An experimental overview s. nicosia et al.(eds.): Ramsete, Incis 270. [https://doi.org/10.1007/3-540-45000-9\\_8](https://doi.org/10.1007/3-540-45000-9_8).
- Foulds, L. R. (2012). *Graph theory applications*. Springer Science & Business Media.
- Fradkov, A., Miroshnik, I., & Nikiforov, V. (2013). *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems*. Mathematics and Its Applications. Springer Netherlands.
- Jiang, G.-P. & Tang, W. K. (2002). A global synchronization criterion for coupled chaotic systems via unidirectional linear error feedback approach. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(10), 2239–2253. <https://doi.org/https://doi.org/10.1142/S0218127402005790>.
- Khalil, H. (2015). *Nonlinear Control*. Always Learning. Pearson.

- Lippay, Z. S. & Hoagg, J. B. (2021). Formation control with time-varying formations, bounded controls, and local collision avoidance. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 30(1), 261–276. <https://doi.org/10.1109/TCST.2021.3062824>.
- López Parra, A. (2017). *Formación en grupos de robots móviles*. Tesis de doctorado, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California.
- Martínez Clark, R. (2014). *Control de comportamientos colectivos en grupos de robots móviles*. Tesis de doctorado, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California.
- Méndez-Ramírez, R., Arellano-Delgado, A., Cruz-Hernandez, C., Abundiz-Perez, F., & Martinez-Clark, R. (2018a). Chaotic digital cryptosystem using serial peripheral interface protocol and its dspic implementation. *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering*, 19(2), 165–179. <https://doi.org/https://doi.org/10.1631/FITEE.1601346>.
- Méndez-Ramírez, R., Arellano-Delgado, A., Murillo-Escobar, M., & Cruz-Hernández, C. (2019). Degradation analysis of chaotic systems and their digital implementation in embedded systems. *Complexity*, 2019, 1–22. <https://doi.org/https://doi.org/10.1155/2019/9863982>.
- Méndez-Ramírez, R., Arellano-Delgado, A., Murillo-Escobar, M. A., & Cruz-Hernández, C. (2018b). Multimedia contents encryption using the chaotic macm system on a smart-display. In *Cryptographic and Information Security*, (pp. 263–295 ). CRC Press.
- Meranza-Castillón, M., Murillo-Escobar, M., López-Gutiérrez, R., & Cruz-Hernández, C. (2019). Pseudorandom number generator based on enhanced hénon map and its implementation. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, 107, 239–251. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.aeue.2019.05.028>.
- Miao, Z., Zhong, H., Lin, J., Wang, Y., Chen, Y., & Fierro, R. (2020). Vision-based formation control of mobile robots with fov constraints and unknown feature depth. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 29(5), 2231–2238. <https://doi.org/10.1109/TCST.2020.3023415>.
- Montañez Molina, C. F. (2020). *Formación de vehículos aéreos con aplicaciones a búsqueda y vigilancia*. Tesis de doctorado, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California.
- Murillo-Escobar, D., Murillo-Escobar, M. Á., Cruz-Hernández, C., Arellano-Delgado, A., & López-Gutiérrez, R. M. (2022). Pseudorandom number generator based on novel 2d hénon-sine hyperchaotic map with microcontroller implementation. *Nonlinear Dynamics*, 1–17. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11071-022-08101-2>.
- Murray, R. M., Rathinam, M., & Sluis, W. (1995). Differential flatness of mechanical control systems: A catalog of prototype systems. In *ASME international mechanical engineering congress and exposition*. Citeseer.
- Peña-Ramírez, J., Arellano-Delgado, A., & Nijmeijer, H. (2018). Enhancing master-slave synchronization: The effect of using a dynamic coupling. *Physical Review E*, 98(1), 012208. <https://doi.org/https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.012208>.
- Peña-Ramírez, J., Garcia, E., & Alvarez, J. (2020). Master-slave synchronization via dynamic control. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 80, 104977. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.104977>.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., Kurths, J., & Synchronization, A. (2001). A universal concept in nonlinear sciences. *Self*, 2, 3.

- Saradagi, A., Muralidharan, V., Krishnan, V., Menta, S., & Mahindrakar, A. D. (2017). Formation control and trajectory tracking of nonholonomic mobile robots. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 26(6), 2250–2258. <https://doi.org/10.1109/TCST.2017.2749563>.
- Sarasola, C., Torrealdea, F. J., D'ANJOU, A., Moujahid, A., & Graña, M. (2003). Feedback synchronization of chaotic systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13(01), 177–191. <https://doi.org/https://doi.org/10.1142/S0218127403006443>.
- Sciavicco, Lorenzo & Siciliano, B. (2001). *Modelling and control of robot manipulators*. Springer Science & Business Media.
- Shampine, L. F. & Reichelt, M. W. (1997). The matlab ode suite. *SIAM journal on scientific computing*, 18(1), 1–22. <https://doi.org/https://doi.org/10.1137/S1064827594276424>.
- Tan, D. & Chen, Z. (2012). On a general formula of fourth order runge-kutta method. *Journal of Mathematical Science & Mathematics Education*, 7(2), 1–10.
- Vara Herrera, Y. A. (2021). *Sincronización externa de robots móviles empleando acoplamiento dinámico*. Tesis de doctorado, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California.
- Wang, X. F. (2002). Complex networks: topology, dynamics and synchronization. *International journal of bifurcation and chaos*, 12(05), 885–916. <https://doi.org/https://doi.org/10.1142/S0218127402004802>.
- Zhao, S., Dimarogonas, D. V., Sun, Z., & Bauso, D. (2017). A general approach to coordination control of mobile agents with motion constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(5), 1509–1516. <https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2750924>.

## Anexos

Para visualizar todos los códigos utilizados para llevar a cabo las simulaciones numéricas y su implementación física en los robots móviles visite el siguiente repositorio de *GitHub*:

<https://github.com/Lobocar/C-digos-de-control-para-la-sincronizacion-de-robots-ROScot-2.0-PRO.git>