

La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California).

La investigación fue financiada por el CONAHCYT (Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías).

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo o titular de los Derechos de Autor.

CICESE© 2023. Todos los derechos reservados.

**Centro de Investigación Científica y de Educación  
Superior de Ensenada, Baja California**



---

**Doctorado en Ciencias  
en Nanociencias**

---

**Fabricación adaptativa de filtros inhomogéneos por erosión  
iónica para curvas continuas**

Tesis  
para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Doctor en Ciencias

Presenta:

**Emmanuel Villa Flores**

Ensenada, Baja California, México  
2023

Tesis defendida por  
**Emmanuel Villa Flores**

y aprobada por el siguiente Comité

---

**Dr. Roberto Machorro Mejía**  
Director de tesis

**Dra. Noemí Abundiz Cisneros**

**Dr. Roberto Sanginés de Castro**

**Dr. Víctor Ruíz Cortés**

**Dr. Pedro Guillermo Reyes Romero**



---

**Dra. Catalina López Bastidas**  
Coordinadora del Posgrado en nanociencias

---

**Dra. Ana Denise Re Araujo**  
Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta **Emmanuel Villa Flores** como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Nanociencias.

### **Fabricación adaptativa de filtros inhomogéneos por erosión iónica para curvas continuas**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Roberto Machorro Mejía  
**Director de tesis**

El método de síntesis por transformada de Fourier para filtros inhomogéneos permite obtener perfiles de índices de refracción para casi cualquier curva de transmitancia o reflectancia arbitraria, con una respuesta espectral aproximada a la deseada. El objetivo del presente trabajo es el de obtener un dominio de las condiciones iniciales y los métodos iterativos, para sintetizar filtros inhomogéneos que reproduzcan las respuestas espectrales deseadas y que puedan ser crecidos mediante erosión iónica. Para lograr el objetivo planteado se creó un código computacional en Python, y el trabajo se dividió en dos secciones principales: la síntesis numérica y la síntesis experimental. La primera sección consta de tres partes: A) Determinar las condiciones iniciales del espesor óptico ( $x$ ), la función  $Q$ , y la fase inicial ( $\Phi_0$ ), para conseguir una respuesta espectral cercana a la deseada. B) Comprender el impacto de los métodos iterativos sobre el filtro inhomogéneo y su respuesta espectral, utilizando iteraciones de corrección por amplitud. C) Aplicando los conocimientos previamente adquiridos, se realiza un refinamiento sobre el perfil de índices de refracción utilizando el método iterativo de distribución de energía conocido como "Stored Wave Inverse Fourier Transform" o SWIFT, para obtener filtros inhomogéneos con valores reproducibles experimentalmente por erosión iónica, con respuestas espectrales cercanas a las deseadas. Para llevar a cabo la primera sección, se han analizado tres siluetas como respuestas espectrales: La cúpula del capitolio de Washington D.C., el volcán Xinantecatl y una Gaussiana invertida. La segunda gran sección corresponde a la parte experimental del trabajo, donde se utiliza la técnica de erosión iónica para crecer el filtro inhomogéneo, utilizando un blanco de silicio. Se añadió al código computacional una rutina para transformar el archivo del perfil de índices de refracción, conformado por el espesor por capa y el índice de refracción correspondiente a cada capa, a un archivo que contiene los flujos de gases de oxígeno ( $O_2$ ) y nitrógeno ( $N_2$ ) por segundo para obtener  $SiO_xN_y$  con el índice de refracción y espesor correspondientes a cada capa del perfil de índices. Se creó una interfaz gráfica para facilitar el trabajo de síntesis y análisis de los filtros a partir del algoritmo creado. Los resultados obtenidos demuestran que el correcto establecimiento de las condiciones iniciales  $x$ ,  $Q$ ,  $\Phi_0$ , permiten obtener una buena respuesta espectral, por lo que no deben de ser ignoradas. Pese a que se pudieron crecer filtros inhomogéneo de forma experimental, hacen falta más estudios para demostrar la reproducibilidad del método. Adicionalmente, se cuenta una sección anexos, donde se repasa la teoría de filtros inhomogéneos y de métodos iterativos de corrección por amplitud y SWIFT. Se incluye un manual de referencia sobre el uso de la interfaz gráfica del programa para la síntesis y el análisis de filtros inhomogéneos.

**Palabras clave:** filtros ópticos, rugate, sputtering, síntesis, multicapas.

Abstract of the thesis presented by **Emmanuel Villa Flores** as a partial requirement to obtain the PhD degree in Nanoscience.

### **Adaptative fabrication of inhomogeneous filters for continuous curves by sputtering**

Abstract approved by:

---

PhD. Roberto Machorro Mejía  
**Thesis Director**

The Fourier synthesis method for inhomogeneous filters allows to achieve refractive index profiles for almost any arbitrary transmittance or reflectance curves, whose spectral responses reproduces the desired ones. The objective of this work is to reach a deep domain over the initial conditions of the synthesis method and the iterative methods, to obtain the desired spectral responses and grow up by the sputtering deposition technique the inhomogeneous filters. To fulfill the main objective a computational code on Python was created and the work was divided into two sections: numerical synthesis and experimental synthesis. The numerical synthesis section is divided into three subsections. A) The initial conditions, optical thickness ( $x$ ), the  $Q$  function, and initial phase ( $\Phi_0$ ), were determined, so that a starting point for the optimal synthesis can be established. B) Once those conditions are set, a refinement method of the  $Q$  function amplitude is applied over the spectral curves, so that the influence of the refinement methods over the refractive index profile and its spectral response could be studied. C) By using the Stored Wave Inverse Fourier Transform (SWIFT) iterative method, the index profile was refined to the point that its values can be experimentally reproduced by the sputtering technique. To make the studies from the first section, three spectral curves corresponding to the Washington's, D.C, capitol silhouette, the "Xinantecat!" volcano silhouette, and an inverted Gaussian shape, were studied. On the experimental synthesis section, a silicone target was used on the reactive sputtering technique. To the computational code, a routine was added, so that the file which contains the refractive index profile was transformed into a new file in terms of the oxygen ( $O_2$ ) and nitrogen ( $N_2$ ) fluxes per second to achieve the  $SiO_xN_y$  with the corresponding refractive index and thickness for each layer of the filter. A graphical user interface was created to make it easier to use the code. The initial conditions  $x$ ,  $Q$ , and  $\Phi_0$ , allowed to achieve a better spectral response. Despite an inhomogeneous filter could be experimentally grown, it will be necessary to make more experiments to demonstrate the reproducibility of the method. Additionally, five annexes are included, where the inhomogeneous theory and the iterative methods are deeply studied. The annex E is a manual of the program for synthesizing and analyzing the inhomogeneous filters.

**Keywords:** Optical filters, rugate, sputtering, synthesis, multilayer.

## Dedicatoria

El presente trabajo es un logro combinado entre los compañeros del laboratorio, la familia y yo.

Dedico este trabajo a mi esposa, Claudia Magaly Alvarado Condes, quién estuvo a mi lado durante los cuatro años que duró el doctorado y me aguantó durante todo el encierro de la pandemia. Espero los resultados de este trabajo sean recíprocos con todo el esfuerzo y amor que invertiste en mí a lo largo de esta travesía. Y ojalá siempre podamos gozar de buenos momentos.

También me gustaría dedicar el trabajo al Dr. Roberto Machorro Mejía, quien fungió como asesor de tesis e hizo todo lo posible para sacar lo mejor de mí y de esta investigación. Sin su gran ayuda, no sé en qué hubiera concluido este trabajo.

Una mención especial a los compañeros del laboratorio, pues gracias a ellos el trabajo pudo avanzar, pero también por los momentos de amistad vividos fuera del laboratorio.

Finalmente, este trabajo lo debo dedicar en parte a mis padres, Manuel Villa Contreras y Georgina Flores Rivera, pues nunca han dejado de apoyarme en todos mis proyectos. Gracias a ustedes es que he podido llegar tan lejos.

## Agradecimientos

Se agradece al Consejo Nacional de Humanidades Ciencias y Tecnologías (CONAHCyT) por la beca de doctorado otorgada desde 2019 y hasta 2023, gracias a la cual pude realizar el presente trabajo.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California (CICESE), por servir como alma *mater* a lo largo de mis estudios de doctorado. Sin el apoyo del CICESE este trabajo no hubiera sido posible. Aquí se agradece especialmente a los miembros administrativos, los cuales siempre están al pendiente de nosotros los alumnos, preocupándose tanto del correcto desarrollo de nuestro trabajo, como de nuestro bienestar personal.

A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), por alojarme dentro del campus CNyN y convivir con los investigadores y sus laboratorios.

Un especial agradecimiento al SAOM Lab y sus investigadores, pues fueron quienes aceptaron que trabajara con el proyecto de investigación en el presente trabajo.

Gracias al proyecto PAPIIT IG101220 mediante el cual se financió parte de la investigación realizada en el SAOM Lab y este trabajo.

Nuevamente se agradece al Dr. Roberto Machorro Mejía por toda la asesoría e interminable conocimiento que se aportó al presente trabajo. Se hace un agradecimiento especial a la Dra. Noemí Abundiz Cisneros, al Dr. Roberto Sanginés de Castro y al Dr. Juan Águila Cruz, miembros del SAOM y quienes apoyaron día con día al desarrollo del trabajo.

Se agradece al Dr. Víctor Ruíz Cortes y al Dr. Pedro Guillermo Reyes Romero, por ser parte de los sinodales, pues sus comentarios y retroalimentación sobre el trabajo permitieron avanzar oportunamente.

## Tabla de contenido

Resumen en español .....	ii
Resumen en inglés.....	iii
Dedicatoria .....	iv
Agradecimientos.....	v
Lista de figuras.....	ix
Lista de tablas .....	xiii
<b>Capítulo 1. Introducción.....</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción .....	1
1.2 Antecedentes .....	2
1.2.1 Métodos de análisis y métodos de síntesis.....	4
1.2.2 La función de Mérito .....	4
1.2.3 Filtro inhomogéneo.....	5
1.2.4 Erwin Delano y la aplicación de la transformada de Fourier para filtros inhomogéneos.....	5
1.2.5 Planteamiento de la transformada de Fourier por L. Sossi para filtros inhomogéneos .....	7
1.2.6 J. A. Dobrowolski y la demostración del potencial del método de transformada de Fourier para filtros inhomogéneos.....	9
1.2.7 Nuevas funciones Q desarrolladas por P. Verly .....	11
1.2.8 Método de Southwell para la síntesis de filtros inhomogéneos.....	14
1.3 Justificación .....	15
1.4 Hipótesis.....	15
1.5 Objetivos .....	16
1.5.1 Objetivos generales.....	16
1.5.2 Objetivos específicos.....	16

<b>Capítulo 2. Marco teórico y metodología .....</b>	<b>18</b>
2.1 Síntesis de filtros inhomogéneos .....	18
2.1.1 Ecuaciones fundamentales para la síntesis de filtros inhomogéneos por transformada de Fourier (TF) .....	19
2.1.2 Programa de síntesis de filtros inhomogéneos .....	21
2.2 Condiciones iniciales en la síntesis de filtros inhomogéneos .....	23
2.2.1 Espesor óptico (filtraje de frecuencias).....	24
2.2.2 La función $Q$ .....	24
2.2.3 Fase inicial $\phi_0$ .....	25
2.2.4 Condiciones fijas.....	26
2.3 Refinamiento de la síntesis por transformada de Fourier utilizando métodos iterativos .....	26
2.3.1 Refinamiento por amplitud de la función $Q$ .....	27
2.3.2 Refinamiento por fase (SWIFT) .....	27
2.4 Descripción de la interfaz gráfica .....	29
2.4.1 Pestaña: “síntesis por transformada de Fourier” .....	29
2.4.2 Pestaña: “Southwell” .....	30
2.4.3 Pestaña: “experimento” .....	30
2.4.4 Pestaña: “compara diseños” .....	30
2.5 Crecimiento de filtros inhomogéneos por erosión iónica.....	31
2.5.1 Técnicas de caracterización.....	31
2.5.2 Erosión iónica .....	32
2.5.3 Calibración del sistema de erosión iónica .....	35
2.5.4 Sistema de erosión iónica.....	36
2.5.5 Condiciones de depósito .....	37
2.5.6 Crecimiento de los filtros inhomogéneos .....	38
2.5.7 Determinación de la transmitancia del filtro inhomogéneo.....	39

<b>Capítulo 3. Resultados</b> .....	<b>40</b>
3.1 Interfaz gráfica .....	41
3.1.1 Pestaña: “Síntesis por Transformada de Fourier” .....	41
3.1.2 Pestaña “Southwell” .....	42
3.1.3 Pestaña “Experimento” .....	43
3.1.4 Pestaña “Compara Diseños” .....	45
3.2 Síntesis de filtros inhomogéneos sin métodos iterativos .....	46
3.2.1 Cúpula del Capitolio en Washington D.C. (Sin Refinamiento). .....	46
3.2.2 Silueta del volcán Xinantecatl o nevado de Toluca .....	53
3.2.3 Gaussiana invertida .....	62
3.3 Refinamiento del perfil de índices por amplitud .....	70
3.3.1 Refinamiento por amplitud: capitolio .....	71
3.3.2 Refinamiento por amplitud: volcán Xinantecatl .....	73
3.4 Refinamiento del perfil de índices por SWIFT .....	75
3.4.1 Refinamiento del perfil de índices por SWIFT: capitolio .....	76
3.4.2 Refinamiento del perfil de índices por SWIFT: nevado de Toluca .....	81
3.5 Resultados experimentales .....	86
3.5.1 Filtro de perfil de índices senoidal .....	87
3.5.2 Filtro de perfil de índices de Gaussiana invertida. ....	90
<b>Capítulo 4. Conclusiones</b> .....	<b>97</b>
<b>Literatura citada</b> .....	<b>98</b>
<b>Anexos</b> .....	<b>101</b>

## Lista de figuras

Figura	Página
1. Modificación del perfil de índices (curvas continuas) para 1, 2 y 3 pasabandas en el espectro T y la función de fase empleada (curvas punteadas). (Imagen modificada de: Dobrowolski & Lowe, 1978, figura 3).....	11
2. Ejemplo de un perfil de índices. (Imagen modificada de: P. Verly et al., 1989, figura 1). .....	12
3. Filtro cuya respuesta espectral se aproxima a la silueta del Taj Mahal. (Imagen modificada de: Verly, 1993), figura 3).....	13
4. a) Perfil de índices sin apodizado, b) Respuesta espectral, c) Perfil de índices con apodizado, d) respuesta espectral. (Imagen modificada de: Southwell, 1989 ,figuras 1 y 5). .....	14
5. Ejemplo de un perfil de índices sintetizado. ....	21
6. Ejemplo de la respuesta espectral calculada de un diseño. ....	22
7. Comparación de funciones Q vs transmitancia. Las funciones Q utilizadas corresponden a la numeración mostrada en la Tabla 1.....	25
8. Comparación entre un filtro inhomogéneo sin refinamiento (línea roja), con uno refinado por SWIFT (línea azul). .....	29
9. Diagrama de transferencia de momento y desprendimiento de moléculas del blanco.....	33
10. Diagrama del proceso de erosión iónica asistida por magnetrón. ....	34
11. Parte frontal y trasera del sistema de vacío utilizado para el presente trabajo. ....	36
12. Pestaña de síntesis por transformada de Fourier. ....	42
13. Pestaña de síntesis de filtros "Southwell". ....	43
14. Gráficas de interpolación para el ajuste de calibración. ....	44
15. Pestaña "Experimento". ....	44
16. Pestaña "Compara Diseños". ....	45
17. A) Silueta del capitolio y respuesta espectral del filtro inhomogéneo (línea negra continua). B) Perfil de índice de 2.5 $\mu\text{m}$ . C) Perfil de índices discretizado a partir de B. D) Perfil de índices tipo "agujas". (Dobrowolski, 1986). ....	46
18. aI-aII) Perfil de índice con espesor óptico de 10 $\mu\text{m}$ y su respuesta espectral. bI-bII) Perfil de índice con espesor óptico de 20 $\mu\text{m}$ y su respuesta espectral. cI-cII) Perfil de índice con espesor óptico de 30 $\mu\text{m}$ y su respuesta espectral. dI-dII) Perfil de índice con espesor óptico de 40 $\mu\text{m}$ y su respuesta espectral.....	48

19. Perfil de índice y respuesta espectral sintetizado con al-all) Función $Q1$ . bl-bll) Función $Q2$ . cl-cll) Función $Q3$ . dl-dll) Función $Q4$ . el-ell) Función $Q5$ . fl-fll) Función $Q6$ . gl-gll) Función $Q7$ . hl-hll) Función $Q8$ .....	51
20. Perfil de índice y su respuesta espectral con frecuencia al-all) $\pi 2$ . bl-bll) $\pi$ . cl-cll) $3\pi$ . dl-dll) $2\pi$ . el-ell) $6\pi$ .....	53
21. Silueta que se consideró de la imagen del volcán Xinantecatl (Turimexico, 2016). .....	54
22. al-all) Perfil de índice de $10 \mu m$ y su respuesta espectral. bl-bll) Perfil de índice de $20 \mu m$ y su respuesta espectral. cl-cll) Perfil de índice de $30 \mu m$ y su respuesta espectral. dl-dll) Perfil de índice de $40 \mu m$ y su respuesta espectral. ....	55
23. Perfil de índice y respuesta espectral sintetizados con al-all) Función $Q1$ . bl-bll) Función $Q2$ . cl-cll) Función $Q3$ . dl-dll) Función $Q4$ . el-ell) Función $Q5$ . fl-fll) Función $Q6$ . gl-gll) Función $Q7$ . hl-hll) Función $Q8$ .....	58
24. Perfil de índice y respuesta espectral con fase al-all) $\pi 2$ . bl-bll) $\pi$ . cl-cll) $3\pi 2$ . dl-dll) $2\pi$ . el-ell) $6\pi 5$ .....	60
25. al-all) Perfil de índices y respuesta espectral con índices superior e inferior de 2.8 y 1.15 y fase $\pi 2$ . bl-bll) Perfil de índices y respuesta espectral con índices superior e inferior de 2.8 y 1.15 y fase $3\pi 2$ . ....	61
26. al-all) Perfil de índices con espesor óptico de $10 \mu m$ y su respuesta espectral. bl-bll) Perfil de índices con espesor óptico de $20 \mu m$ y su respuesta espectral. cl-cl) perfil de índices con espesor óptico de $30 \mu m$ y su respuesta espectral. dl-dl) Perfil de índices con espesor óptico de $40 \mu m$ y su respuesta espectral. ....	63
27. Perfiles de índices de refracción y sus respuestas espectrales sintetizadas con al-all) Función $Q1$ . bl-bll) Función $Q2$ . cl-cll) Función $Q3$ . dl-dll) Función $Q4$ . el-ell) Función $Q5$ . fl-fll) Función $Q6$ . gl-gll) Función $Q7$ . hl-hll) Función $Q8$ . ....	66
28. al-all) Perfil de índice con índices superior e inferior de 1.91 y 1.62 y su respuesta espectral. bl-bll) Perfil de índice con índices superior e inferior de 1.91 y 1.64 y su respuesta espectral... ..	67
29. Perfil de índice y su respuesta espectral con fase al-all) $\pi 2$ . bl-bll) $\pi$ . cl-cll) $3\pi 2$ . dl-dll) $2\pi$ . el-ell) $6\pi 5$ .....	69
30. Perfil de índice y su respuesta espectral al-all) 1 iteración. bl-bll) 3 iteraciones. cl-cll) 12 iteraciones. dl-dll) 45 iteraciones.....	72
31. Perfil de índice y su respuesta espectral al-all) 1 iteración. bl-bll) 4 iteraciones. cl-cll) 32 iteraciones. dl-dll) 168 iteraciones. ....	74
32. Capitolio: Perfiles de índice refracción de $12 \mu m$ de espesor sintetizados por SWIFT y sus respuestas espectrales. al-II) 1 iteración. bl-II) 9 iteraciones. cl-II) 21 iteraciones. dl-II) 41 iteraciones.....	77
33. Capitolio: Perfiles de índice refracción de $12 \mu m$ de espesor sintetizados por SWIFT y sus respuestas espectrales. al-II) 1 iteración. bl-II) 9 iteraciones. cl-II) 21 iteraciones. dl-II) 32 iteraciones.....	79

34. Capitolio: Perfiles de índice refracción de  $5\ \mu\text{m}$  de espesor sintetizados por SWIFT y sus respuestas espectrales. al-all) 1 iteración. bl-bll) 9 iteraciones. cl-cll) 21 iteraciones. dl-dll) 41 iteraciones. el-ell) 41 iteraciones con modificación: índices de refracción superior e inferior de 1.97 y 1.53..... 80
35. Nevado de Toluca: Perfiles de índice de refracción de  $20\ \mu\text{m}$  de espesor sintetizados por SWIFT y sus respuestas espectrales. al-all), 1 iteración. bl-bll) 9 iteraciones. cl-cll) 21 iteraciones. dl-dll) 41 iteraciones..... 82
36. Nevado de Toluca: Perfiles de índice de refracción de  $12\ \mu\text{m}$  de espesor sintetizados por SWIFT y sus respuestas espectrales. al-all) 1 iteración. bl-bll) 9 iteraciones. cl-cll) 21 iteraciones. dl-dll) 41 iteraciones. el-ell) 112 iteraciones, modificación: índices de refracción superior e inferior de 1.97 y 1.53..... 84
37. Nevado de Toluca: Perfiles de índice de refracción de  $12\ \mu\text{m}$  de espesor sintetizados por SWIFT y sus respuestas espectrales. al-all) 1 iteración. bl-bll) 9 iteraciones. cl-cll) 21 iteraciones. dl-dll) 41 iteraciones. el-ell) 70 iteraciones, modificación: índice de refracción superior e inferior de 1.97 y 1.53..... 86
38. Perfil de índices sinusoidal que se desea crecer y su respuesta espectral. .... 87
39. a) Índice de refracción vs flujo de  $O_2$ . b) Flujo de oxígeno vs tasa de depósito. Calibración N3H. .... 88
40. Gráfica del tiempo de depósito vs flujo de oxígeno para el filtro sinusoidal que se va a crecer experimentalmente..... 89
41. Respuestas espectrales teóricas y experimentales del filtro inhomogéneo crecido, con un pico de transmitancia mínimo en los 480nm. .... 89
42. Perfil de índices con respuesta espectral de Gaussiana invertida cuya transmitancia mínima se encuentra en los 612 nm. .... 91
43. a) Gráfica de índice de refracción vs flujo de  $O_2$ . b) Flujo de oxígeno vs tasa de depósito. Calibración N6S. .... 91
44. Tiempo de depósito vs flujo de oxígeno para el filtro de Gaussiana invertida con transmitancia mínima en los 612 nm..... 92
45. Comparación de la respuesta espectral experimental (línea negra punteada), con la respuesta espectral ideal esperada (línea azul) y la respuesta espectral ideal aproximada (línea roja), para el filtro de 612 nm..... 92
46. Perfil de índices con respuesta espectral de Gaussiana invertida cuya transmitancia mínima se encuentra en los 532 nm. .... 94
47. Tiempo de depósito vs flujo de oxígeno para el filtro de Gaussiana invertida con transmitancia mínima en los 532 nm..... 94
48. Comparación de la respuesta espectral experimental (línea negra punteada), con la respuesta espectral ideal esperada (línea azul) y la respuesta espectral ideal aproximada (línea roja), para el filtro de 532 nm..... 95

49. A) Filtro inhomogéneo 1, transmitancia mínima en los 630 nm. B) Filtro inhomogéneo 2, transmitancia mínima en los 559 nm.....	96
50. Esquema de la reflexión y transmisión de una onda electromagnética a incidencia normal. Modificada de: MacLeod, (2010). .....	103
51. Ejemplo de un filtro óptico de multicapas. Modificado de: Wu et al., (2010).....	107
52. Esquema de un filtro con capa de cuarto onda. Modificada de: MacLeod, (2010). .....	108
53. Reflexión de la onda incidente (cuarto de onda), caso $n_0 < n_1 < n_2$ . Modificada de: MacLeod, (2010). .....	108
54. Reflexión de la onda incidente (cuarto de onda), caso $n_0 < n_1 > n_2$ . Modificada de: MacLeod, (2010). .....	109
55. Esquema de un filtro con capa de media onda. Modificada de: MacLeod, (2010). .....	110
56. Reflexión de la onda incidente (media onda), caso $n_0 < n_1 < n_2$ . Modificada de: MacLeod, (2010). .....	110
57. Reflexión de la onda incidente (media onda), caso $n_0 < n_1 > n_2$ . Modificada de: MacLeod, (2010). .....	111
58. Ejemplo de un recubrimiento antirreflejante, con apilamiento de 4 capas (Modificada de: MacLeod, 2010).....	112
59. Esquema de acoplamiento de un filtro inhomogéneo con el sustrato y el medio de incidencia. Modificada de: Sossi, (1976). .....	113
60. Arreglo de dos interfaces paralelas separadas por un espesor $\Delta$ . Modificada de: Southwell, (1984). .....	114
61. Energía del espectro en el espacio de frecuencias. Modificada de: Guan & McIver, (1990). .....	141
62. Diagrama de flujo de la interfaz gráfica del programa de síntesis y análisis de filtros inhomogéneos.....	145
63. Pestaña “Síntesis por Transformada de Fourier” .....	146
64. Pestaña “Southwell” . .....	148
65. Pestaña “Experimento” .....	150
66. Pestaña “Compara Diseños” . .....	152

## Lista de tablas

Tabla	Página
1. Funciones Q reportadas en la literatura. ....	20
2. Parámetros utilizados para sintetizar el perfil de índice por Southwell. ....	87
3. Parámetros utilizados para sintetizar el perfil de índices con una respuesta espectral de transmitancia mínima del 30% en los 612 nm. ....	90
4. Condiciones iniciales utilizadas para sintetizar el perfil de índices con una respuesta espectral de transmitancia mínima del 30% en los 532nm. ....	93

# Capítulo 1. Introducción

---

## 1.1 Introducción

Los filtros ópticos son dispositivos capaces de modificar el espectro de onda incidente mediante fenómenos interferenciales. Estos filtros son diseñados para transmitir y reflejar longitudes de onda específicas, mediante una película delgada o un apilamiento de multicapas (MacLeod, 2010). Al tratarse de filtros interferenciales, se deben emplear materiales que no presenten absorción o que sea mínima para el rango de longitudes de onda de interés. Convencionalmente, los filtros ópticos eran desarrollados a prueba y error, realizando una serie de apilamientos de materiales con diferentes índices de refracción y evaluando la respuesta espectral, hasta encontrar el resultado deseado, lo cual es un método de análisis. A medida que las respuestas espectrales buscadas se volvieron más complejas, se llegó a un estancamiento en el desarrollo de los filtros, pues mediante los métodos de análisis el problema se volvía bastante complejo (Knittl, 1976).

Los métodos de creación de filtros inhomogéneos tuvieron que evolucionar a métodos de síntesis para poder generar perfiles de índices capaces de reproducir respuestas espectrales más sofisticadas. Entre los métodos de síntesis se encuentra el método de Transformada de Fourier, siendo la parte principal de este trabajo. A partir del método de transformada de Fourier se pueden sintetizar filtros inhomogéneos con buenas respuestas espectrales, en un corto periodo de tiempo y sin la necesidad de gran poder computacional (Dobrowolski & Lowe, 1978).

Este trabajo se divide en cuatro capítulos y una sección de anexos. El primer capítulo sirve como introducción al lector, donde se habla sobre los antecedentes de los filtros ópticos hasta derivar una breve introducción a la teoría de síntesis de filtros inhomogéneos. También se incluye la motivación, justificación, hipótesis y objetivos planteados. Dentro del segundo capítulo están contenidos el marco teórico y la metodología, de tal forma que se pueda comprender a detalle la teoría sobre filtros inhomogéneos utilizada en este trabajo, parte del programa computacional creado y los métodos empleados para llevar a cabo la investigación.

En el capítulo tres se muestran y discuten los resultados obtenidos en este trabajo, comenzando por aquellos de síntesis teórica, donde se realizan pruebas sobre las condiciones iniciales y los métodos

iterativos, para obtener un filtro con una buena respuesta espectral y que sea reproducible experimentalmente. Posteriormente, se reportan tres filtros inhomogéneos crecidos por erosión iónica, para demostrar la posibilidad de crecimiento experimental de este tipo de filtros. En el cuarto capítulo, se encuentran las conclusiones obtenidas a partir de los resultados mostrados en este trabajo. Finalmente, en los anexos se describe a fondo la teoría elemental de transformada de Fourier para la síntesis de filtros inhomogéneos y de los métodos de refinamiento de corrección por amplitud y SWIFT. Un breve manual que sirve como guía para el uso de la interfaz gráfica creada para el presente trabajo, se encuentra ubicado en la parte final de los anexos.

## 1.2 Antecedentes

Históricamente no se sabe con exactitud a partir de cuándo la humanidad ha hecho uso de los filtros ópticos, pero se tiene registro en antiguas iglesias romanas, donde se hacía uso de recubrimientos de alabastro sobre ventanas, de modo que la luz transmitida estuviera considerablemente atenuada (Smith, 2004). Sir Isaac Newton, muchos años antes de que la luz fuera asociada a un comportamiento ondulatorio, pudo demostrar que se podía transmitir un sólo color a través de un material, variando el espesor de este.

Otro científico contemporáneo a Newton fue Christiaan Huygens, quien, gracias a su interés en el campo de la óptica, logró formular una teoría para explicar el comportamiento de la luz, conocido como principio de Huygens, donde el frente de onda de la luz podía ser visto como una combinación de fuentes puntuales, que se recombinaban para generar el siguiente frente de onda. Gracias a este principio, Huygens fue capaz de dar explicación a la reflexión y refracción de la luz (MacLeod, 2010).

En 1801 cuando Thomas Young formuló un enunciado para el fenómeno de interferencia de la luz, logrando dar una explicación concreta sobre el fenómeno, aunque no fue aceptado por la comunidad científica ya que la idea de atribuir a la luz propiedades ondulatorias, era algo muy abstracto para la época (MacLeod, 2010).

Conforme fue pasando el tiempo, más científicos terminaron aceptando el comportamiento ondulatorio de la luz como correcto, hasta que finalmente Augustin Jean Fresnel realizó estudios en el campo de la óptica, obteniendo resultados que derivaban en atribuir a la luz un comportamiento ondulatorio (Starke

& Schober, 2018). Combinando las teorías de Huygens y Young, Fresnel describió el fenómeno de difracción de la luz, demostrando el carácter ondulatorio de la luz (MacLeod, 2010).

James Clerk Maxwell en 1873, tras resumir toda la teoría de la electricidad y el magnetismo en cuatro ecuaciones, pudo derivar una expresión para el campo eléctrico y magnético en forma de la ecuación de onda, para posteriormente obtener un valor exacto de la velocidad de la luz en el vacío, dejando en claro el carácter ondulatorio de la luz y su posible descripción a partir del campo eléctrico y magnético (Russakoff, 1970).

Al tener una teoría sólida sobre la composición de la luz y su comportamiento y los fenómenos interferenciales, la comunidad científica comenzó a desarrollar nuevas tecnologías. En 1891, Dennis Taylor presentó un avance revolucionario para mejorar la transparencia en los lentes utilizados para telescopios, permitiendo captar una mayor cantidad de luz (MacLeod, 2010).

Años después, en 1899 se inventó el interferómetro de Fabry-Perot, el cual dependía de recubrimientos de películas delgadas sobre lentes para poder funcionar. De esta forma, se demostró el gran potencial de esta clase de recubrimientos para el ámbito de la óptica, de modo que el espectro electromagnético incidente pudiera ser modificado, para adaptarse a las necesidades del problema, naciendo así el estudio de los filtros interferenciales (Quirrenbach, 2001).

A partir de 1930 múltiples grupos de investigación se dedicaron a estudiar materiales y técnicas de depósito de películas delgadas con la finalidad de fabricar filtros interferenciales, generándose diferentes modelos de filtros como los pasabanda, atenuadores, polarizadores, etc. (MacLeod, 2010). Con los resultados obtenidos, se podía tener una buena respuesta espectral de los filtros interferenciales para una longitud de onda central, sin embargo, cuando se consideraban múltiples longitudes de onda centrales, la complejidad en la construcción de un filtro interferencial por apilamiento de capas se complica considerablemente (MacLeod, 2010).

Los investigadores se dieron cuenta que mientras más capas eran agregadas, se obtenía una mejor respuesta espectral. No obstante, las formas para modelar filtros ópticos multicapas no estaban muy bien estudiadas y los modelos computacionales eran muy restringidos. Nuevas teorías para la fabricación de filtros interferenciales fueron introducidas, haciendo uso de métodos de síntesis y aprovechando el creciente poder de cómputo tras la segunda guerra mundial.

### 1.2.1 Métodos de análisis y métodos de síntesis

El análisis es un método de investigación que parte de una fuente de información y se enfoca en estudiar una propiedad específica de esta, para darle una explicación simple y precisa (Diferencias, 2020). En los métodos de análisis se parte de un modelo planteado, el cual es estudiado en una propiedad específica de este, de forma tal que se obtiene un profundo conocimiento sobre tal propiedad. Los filtros ópticos son convencionalmente construidos por métodos de análisis, donde se propone un apilamiento de capas y se analiza su respuesta espectral. Posteriormente se van incluyendo o eliminando capas hasta que se logra el desempeño óptico deseado (MacLeod, 2010).

El método de síntesis se basa en información ya existente y a partir de ella genera información nueva, por lo que síntesis significa crear (Diferencias, 2020). Se parte de la información del resultado deseado y se construye una solución que reproduzca la propiedad de interés (MacLeod, 2010). En filtros ópticos, el resultado buscado es la respuesta espectral en términos de la reflectancia (R) o transmitancia (T). Utilizando la información de R o T, se construye el filtro óptico y se mide su respuesta espectral (Dobrowolski & Lowe, 1978). La ventaja de un método de síntesis sobre uno de análisis en la fabricación de filtros ópticos es que sólo se necesita conocer la respuesta espectral para poder generar una solución que satisfaga el problema. En este trabajo la palabra síntesis se utiliza para referirse a los perfiles de índices de refracción construidos a partir del código computacional.

### 1.2.2 La función de Mérito

Dobrowolski previo a trabajar con el método de síntesis por transformada de Fourier para filtros multicapas utilizó la función de mérito (Dobrowolski, 1976), para determinar el grado de aproximación de sus diseños respecto a la respuesta espectral esperada. La función planteada por Dobrowolski es:

$$M = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( \frac{T_i^T - T_i}{\delta T_i} \right)^2} \quad (1).$$

Se busca que la función de mérito  $M$  sea lo más cercana a cero, por lo que la variable  $T_i$  la cuál es la transmitancia obtenida para el arreglo de multicapas, debe ser lo más cercana a  $T_i^T$  que es la transmitancia objetivo o ideal. La variable  $m$  es un valor de tolerancia definido por el usuario. Mientras más pequeño sea el valor de la función mérito, mejor será la respuesta espectral del arreglo de multicapas diseñado. Una gran ventaja al trabajar con la función de mérito de acuerdo con lo reportado por Dobrowolski, es que se pueden introducir el número de variables necesarias para hacer lo más realista posible la aproximación del filtro respecto a la respuesta espectral esperada.

### 1.2.3 Filtro inhomogéneo

Un filtro inhomogéneo es aquel cuyo índice de refracción varía en la dirección normal respecto a la superficie del sustrato donde es crecido. La variación del índice de refracción es continua a lo largo del espesor del filtro (Dobrowolski & Lowe, 1978).

El perfil de índices, el cual es el filtro inhomogéneo, se sintetiza a través de un método de transformada de Fourier, partiendo del método reportado por L. Sossi (Sossi, 1976). Las ecuaciones empleadas se describen más adelante. Resultaría imposible crecer experimentalmente capas infinitamente delgadas, por lo que la variación del índice de refracción debe ser discretizado en un número finito de capas. Cada capa debe tener un espesor en la escala de nanómetros, de modo que la transición de índices de refracción entre capa y capa sea pequeña. Con el perfil de índices discretizado en capas, es posible determinar su respuesta espectral en términos de la transmitancia o la reflectancia.

### 1.2.4 Erwin Delano y la aplicación de la transformada de Fourier para filtros inhomogéneos

En 1966, Erwin Delano presenta su tesis doctoral enfocada en la síntesis de multicapas, mediante el método de transformada de Fourier. Su investigación consiste en sintetizar un filtro utilizando la teoría de transformada de Fourier. El método de síntesis parte de un espectro de reflectancia ( $R$ ) o transmitancia ( $T$ ), para posteriormente construir el filtro a partir de la función compleja  $\rho^2$ , la cual contiene la amplitud y fase del espectro  $R/T$  (Delano, 1967). Posteriormente, la amplitud de la función compleja se convertiría en la función  $Q$  definida por Sossi y J. A. Dobrowolski.

Cuando Delano estudiaba el método de síntesis de transformada de Fourier para filtros inhomogéneos, sólo se contaban con métodos iterativos para la síntesis de filtros homogéneos, tal como lo reportado por R. Pegis (Pegis, 1961). Delano realizó modificaciones a las ecuaciones para derivar en un método de transformada de Fourier para la síntesis de filtros ópticos de multicapa.

Pese a que el modelo de transformada de Fourier genera un filtro inhomogéneo sin fronteras definidas entre capas, Delano demuestra que utilizando el teorema del muestreo (Bracewell, 1968) es posible discretizar la curva continua del filtro para obtener un arreglo de apilamiento de multicapas, todas con el mismo espesor. Erwin Delano, argumenta que el motivo por el cual el método de síntesis de transformada de Fourier es aplicable al diseño de filtros interferenciales, se debe a que estos son causales, lineales, e invariantes en el tiempo, en el sentido de la teoría de comunicaciones. A partir de lo reportado por R. Pegis en 1961, para un arreglo de multicapas, Delano establece los siguientes pares transformados:

A partir de lo reportado por R. Pegis en 1961, para un arreglo de multicapas, Delano establece los siguientes pares transformados:

$$\rho(k) = \int_0^X F(x)e^{-i2\pi kx} dx \quad (2),$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(k)e^{i2\pi kx} dk \quad (3),$$

donde  $p$  el espesor óptico dado por:  $x = \int_0^z n(z)\cos(\varphi(z))dz$  y  $\varphi(z)$  el ángulo de incidencia. La variable  $z$  es el espesor físico. El espesor óptico total está denotado por la variable  $X$ . El número de onda está contenido en la exponencial y expresada mediante la variable  $k$ .

De acuerdo con la teoría de Transformada de Fourier (TF), las ecuaciones (2), (3), son pares transformados. La ecuación (2), corresponde al dominio de frecuencias espaciales en donde está contenido el espesor óptico del filtro. La ecuación (3), se encuentra en el dominio espacial y contiene la información sobre la información espectral. Para información detallada sobre la teoría de TF consultar a Bracewell, (1968).

A partir de la aproximación de la admitancia para un filtro multicapas  $y_n = F(x)dx$ , con el coeficiente de Fresnel de la reflexión  $r_n$  para las  $n - \text{ésimas}$  capas del filtro, tal que  $y_n \approx r_n$ , se obtiene:

$$F(x) \approx -\frac{n'(x)}{2n(x)} \quad (4),$$

de la ecuación (4),  $n$  corresponde al índice de refracción y  $n' = dn/dz$  siendo  $z$  el espesor físico.

Como parte del desarrollo, Delano propone la expresión  $\rho(k)$  la cual contiene la información del espectro de interés:

$$\rho(k) = \sqrt{\frac{1}{T} - 1} \quad (5),$$

por lo que la función  $F(x)$  puede ser expresada a partir de otra función formada por el índice de refracción.

Delano hace uso de la función  $F(x)$  para asignarle formas definidas al perfil de índices, como lo sería una función rectangular o una función  $\text{sinc}(a) = \frac{\text{sen}(a)}{a}$ , para posteriormente evaluar la respuesta espectral de dicha función mediante la expresión  $\rho(k)$ . El punto débil de esta derivación es que no se hace referencia al factor de fase de información espectral, el cuál es una condición inicial muy importante, tal como se demuestra más adelante en este trabajo. Por lo que la teoría propuesta por Delano tuvo que evolucionar para mejorar sus resultados.

### 1.2.5 Planteamiento de la transformada de Fourier por L. Sossi para filtros inhomogéneos

El artículo publicado por Sossi, (1974), hace referencia a que el problema de síntesis de recubrimientos dieléctricos no había sido resuelto de manera satisfactoria, ya que los métodos desarrollados hasta ese momento sólo eran aplicables a los tipos más simples de respuestas espectrales, requiriendo de largos y costosos tiempos de cómputo. Bajo esta premisa y tomando parte de los resultados de la tesis doctoral de Erwin Delano, L. Sossi propone el método de transformada de Fourier como método de síntesis de filtros ópticos.

La ventaja principal de este método de síntesis es que no se requieren de grandes tiempos de cómputo y se puede aplicar a espectros de reflectancia o transmitancia con formas arbitrarias, siendo esta la única información necesaria para la construcción del filtro. Otro punto importante sobre los beneficios del método de síntesis por transformada de Fourier es que no es necesario tener un espesor físico por capa definido al inicio del diseño y este espesor por capa se puede adaptar al momento de calcular la respuesta espectral.

De acuerdo con el método de síntesis, se construye un perfil de índices de refracción cuyos valores varían a lo largo de un doble espesor óptico. Para construir el perfil de índices, sólo se necesita conocer el espectro de reflectancia o transmitancia de interés. Una vez sintetizado el filtro inhomogéneo, este se discretiza en cierto número de capas de espesores nanométricos para poder calcular su respuesta espectral. De modo similar a lo reportado por Delano, L. Sossi deriva una expresión de transformada de Fourier que relaciona una función del índice de refracción en el espacio de frecuencias, con una función que contiene la información espectral y se encuentra en el espacio coordenado.

La posición de los índices de refracción a lo largo del espacio de frecuencias es lo que genera la distribución de la onda a lo largo del filtro inhomogéneo, de forma tal que se puede alcanzar la respuesta espectral deseada, tal como se demuestra en la sección de resultados. Tal ecuación se expresa de la siguiente manera:

$$Q(k)e^{i\varphi(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{dx} \frac{1}{2n} e^{ikx} dx \quad (6),$$

donde se introduce la función  $Q(k)$  que es la amplitud del espectro R o T y  $\varphi(k)$  un factor de fase arbitrario, con el cual se garantiza que el valor del índice de refracción  $n$  sea real. El vector de onda es  $k$ . Del lado derecho de la expresión,  $x$  representa el doble espesor óptico dado por:  $x = 2 \int_0^z n(u) du$ , siendo  $z$  el espesor físico.

L. Sossi, deriva dos formas explícitas para la función  $Q(k)$  y durante este proceso, nombra la abreviatura Q, para la función que contiene la amplitud del espectro de transmitancia o reflectancia:

$$Q(k) = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} - T \right)} \quad (7),$$

aplicando la transformada inversa de Fourier para la expresión (6), L. Sossi deriva la expresión para el índice de refracción  $n$ :

$$\frac{n'(x)}{2n(x)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Q(k) \cos(kx - \varphi(k)) dk \quad (8),$$

donde  $n' = \frac{dn}{dz}$ . Como el espectro está limitado a una región específica de longitudes de onda, Sossi impone la restricción para la ecuación (8), del modo:

$$\begin{aligned} \frac{n'(x)}{2n(x)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Q(k) \cos(kx - \varphi(k)) dk & x_0 \leq x \leq x_s \\ \frac{n'(x)}{2n(x)} &= 0 & x < x_0, x > x_s \end{aligned}$$

donde  $x_0$  y  $x_s$  representan el inicio y final del perfil de índices, por lo que fuera de esta región todos los valores del índice de refracción son considerados como cero durante los cálculos, pues se encuentran fuera del área de interés. El factor de fase  $\varphi(k)$  es despreciado por Sossi en sus resultados reportados.

A partir de la ecuación (8), Sossi construye un perfil de índices a partir de un espectro de reflectancia cuadrangular. El perfil de índices es dividido en espesores físicos, para poder determinar su respuesta espectral. También introduce una corrección al perfil de índices, de modo que la respuesta espectral sea más cercana a la esperada, dicha corrección se menciona en el capítulo 2. Mediante estos resultados, demuestra la viabilidad del uso de la transformada de Fourier para la síntesis de filtros inhomogéneos, donde se emplea poco tiempo cómputo y sólo es necesario conocer el espectro R o T. El trabajo de Sossi, (1974) representa un punto de partida fundamental en la teoría para el diseño de filtros inhomogéneos. No obstante, pese a que Sossi demuestra el gran potencial del método de síntesis de Fourier, no ahonda más allá de los detalles básicos de la teoría.

### 1.2.6 J. A. Dobrowolski y la demostración del potencial del método de transformada de Fourier para filtros inhomogéneos

A partir de la formulación sobre el método de transformada de Fourier publicado por L. Sossi; J. A. Dobrowolski mejora el código desarrollado para la síntesis del perfil de índices de refracción y realiza un

estudio más a fondo sobre su alcance. J. A. Dobrowolski busca demostrar la adaptabilidad de este método para casi cualquier espectro de reflectancia o transmitancia. En el artículo publicado por Dobrowolski & Lowe, (1978), se parte de la expresión para la transformada de Fourier desarrollada por L. Sossi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{dx} \frac{1}{2n} e^{ikx} dx = Q(k) e^{i\varphi(k)} = f(k)$$

Al aplicar la transformada inversa de Fourier e integrar respecto al espesor óptico, Dobrowolski obtiene una expresión del perfil de índices, similar a la derivada por Sossi:

$$n(x) = \exp\left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(k)}{k} \text{sen}(\varphi(k) - kx) dk\right) \quad (9),$$

donde usa la función  $Q(k)$  derivada por Sossi:

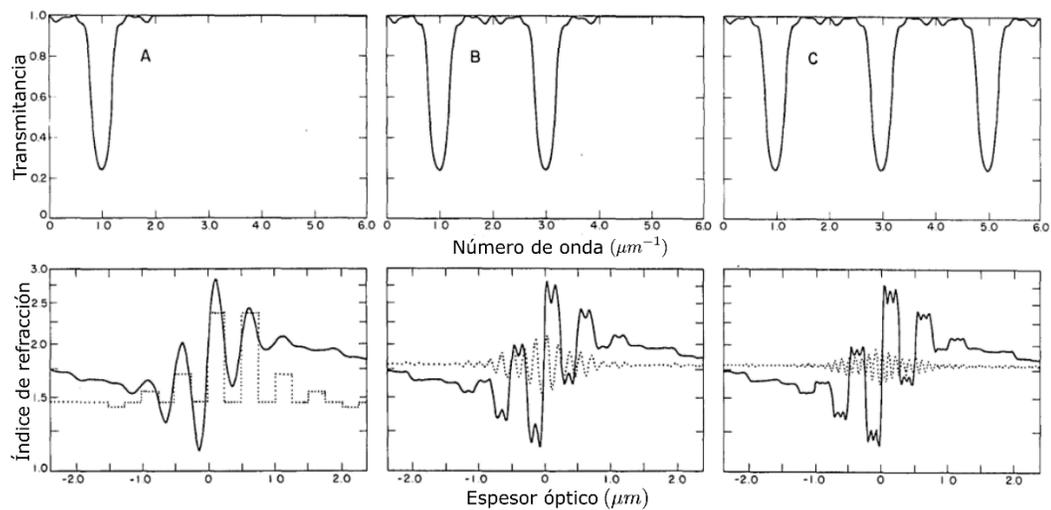
$$Q(k) = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} - T \right)}$$

La derivación de la ecuación (9), y la función  $Q$  se reportan en el apéndice de este trabajo.

En su investigación, Dobrowolski no desprecia al factor de fase  $\varphi(k)$  y lo utiliza con valores arbitrarios, ya sean constantes o variantes. Mediante la expresión de  $n(x)$  de la ecuación (9), Dobrowolski construye el perfil de índices de refracción y analiza su respuesta espectral. Primero, mide la respuesta para la curva continua del perfil de índices. En caso de que la respuesta espectral del perfil de índices se aproxime a lo esperado, esta se subdivide en un arreglo de multicapas con espesores definidos y se vuelve a medir la respuesta espectral. En ambos casos, si la respuesta espectral difiere considerablemente respecto a lo esperado, el código somete al perfil de índices o al arreglo de multicapas a un refinamiento donde se introduce un nuevo factor de fase, para posteriormente reevaluar la respuesta espectral. Se itera hasta que se obtiene una respuesta espectral aceptable.

Entre los resultados sobresalientes reportados por Dobrowolski, se tiene la demostración de que un perfil de índices para un espectro de tres pasabandas puede ser diseñado de manera óptima, logrando alcanzar una muy buena respuesta espectral, tal como se muestra en la Figura 1. Debido a que en esos momentos no existían diversas funciones  $Q(k)$ , Dobrowolski concluye que debido a la naturaleza de aproximación de

la función  $Q(k)$ , algunos espectros R o T no pueden ser aproximados de manera correcta, tal como lo demuestra en espectros cuya transmitancia es menor al 40%.



**Figura 1.** Modificación del perfil de índices (curvas continuas) para 1, 2 y 3 pasabandas en el espectro T y la función de fase empleada (curvas punteadas). (Imagen modificada de: Dobrowolski & Lowe, 1978, figura 3).

De esta manera, Dobrowolski complementa el trabajo publicado por L. Sossi y corrobora el gran potencial del método de transformada de Fourier para la síntesis de filtros inhomogéneos, aunque muestra que aún hace falta mucha investigación en el tema para lograr su óptima aplicación, pues la función  $Q(k)$  no es universal, el factor de fase aún no se estudia detalladamente y los filtros inhomogéneos para bajas transmitancias tienen un mal desempeño.

### 1.2.7 Nuevas funciones Q desarrolladas por P. Verly

El autor P. Verly, continuó con los resultados de Dobrowolski y trabajó bajo su tutela para demostrar que mediante esta técnica de síntesis es posible obtener filtros ópticos para cualquier transmitancia deseada. A partir de los resultados obtenidos, Verly et al., (1989), publican un artículo donde obtienen filtros reflectores con una transmitancia tan baja como  $10^{-4}$ .

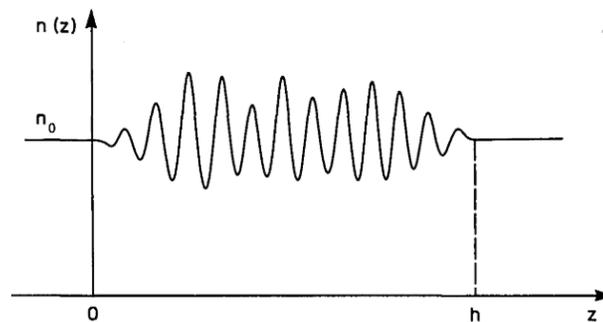
El artículo publicado en 1989 se basa en la necesidad de obtener filtros interferenciales cuyo ancho de banda sólo sea de un máximo del 6% respecto a la longitud de onda central para la que son modelados y que a su vez reflejen el 99.99%, algo que es complicado o casi imposible de realizar de realizar bajo los

métodos tradicionales para el diseño de filtros interferenciales. Se propone la implementación de la transformada de Fourier (TF), tal como lo hace L. Sossi, haciendo mención de que, partiendo de un espectro de reflectancia o transmitancia deseado, es posible sintetizar filtros ópticos que puedan adaptarse a la respuesta espectral deseada. Cabe resaltar, que pese a utilizar la misma función derivada por Sossi y Dobrowolski, P. Verly mantiene la forma exponencial del kernel de la TF, ya que considera el factor de fase diferente de 0 y omite la restricción de considerar que la función Q es par. Otro parámetro en el que difiere Verly, es que los límites de integración en el espacio coordenado van desde  $n_0$  hasta  $n$ , donde  $n_0$  es el primer índice de refracción del perfil de índices y  $n$  el último valor. Con estas consideraciones, la expresión para construir el perfil de índices es:

$$\ln\left(\frac{n(x)}{n_0}\right) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(k)}{k} e^{-i2\pi kx} dk$$

Despejando la expresión en términos de  $n(x)$ , se obtiene:

$$n(x) = n_0 \exp\left(\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(k)}{k} e^{-i2\pi kx} dk\right) \quad (10).$$



**Figura 2.** Ejemplo de un perfil de índices. (Imagen modificada de: P. Verly et al., 1989, figura 1).

Mediante la ecuación (10), se construye el perfil de índices mostrado en la Figura 2. Verly recapitula el camino seguido por Sossi para derivar la ecuación (8), recordando que se desprecia tanto la dispersión como la absorción. Posteriormente, propone dos nuevas funciones Q. La primera se trata de una función Q compuesta a partir de las funciones Q derivadas por Delano y Sossi, cuya expresión es:

$$Q(k) = \omega \sqrt{1-T} + (1-\omega) \sqrt{\frac{1}{T} - 1} \quad (11),$$

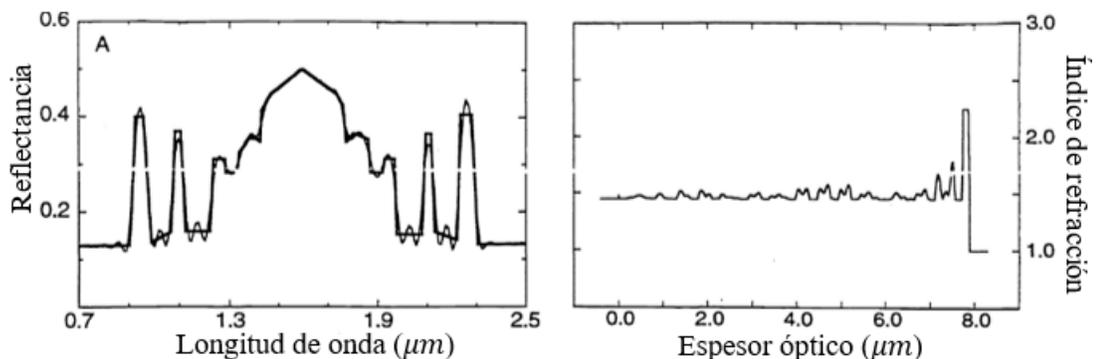
donde  $\omega$  corresponde a un factor de peso que abarca de  $0 \leq \omega \leq 1$ , el cual se va adaptando de manera iterativa durante los cálculos para la construcción del perfil de índices. De este modo, se pueden ir ajustando valores calculados para el perfil de índices, hasta alcanzar la respuesta espectral deseada. La segunda función Q propuesta por Verly, es del tipo logarítmica:

$$Q(k) = \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) \quad (12),$$

donde  $\gamma$  contiene la información de la transmitancia del modo:

$$\gamma = 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{T} - T \right)$$

A partir de las nuevas funciones Q propuestas, se prueba el desempeño de dichas funciones y se comparan respecto a las funciones Q derivadas por L. Sossi y E. Delano, donde realiza pruebas para espectros con formas Gaussianas y rectangulares, cuya respuesta espectral es cercana al 0% de transmitancia en la longitud de onda de interés. Esto demuestra que dependiendo de las características espectrales de R/T habrá una función Q que pueda generar un mejor perfil de índices. En 1993, P. Verly ya no se enfoca en el desarrollo de filtros inhomogéneos de alta reflexión, sino que busca llevar a cabo un estudio más general sobre el alcance de este tipo de filtros, mostrando que se pueden generar diseños para obtener respuestas espectrales como lo haría un filtro pasabanda. A partir del conocimiento adquirido, el autor toma la silueta del Taj Mahal como un espectro en función de la transmitancia y la longitud de onda y aplicando el método de transformada de Fourier, determina el correspondiente perfil de índices.

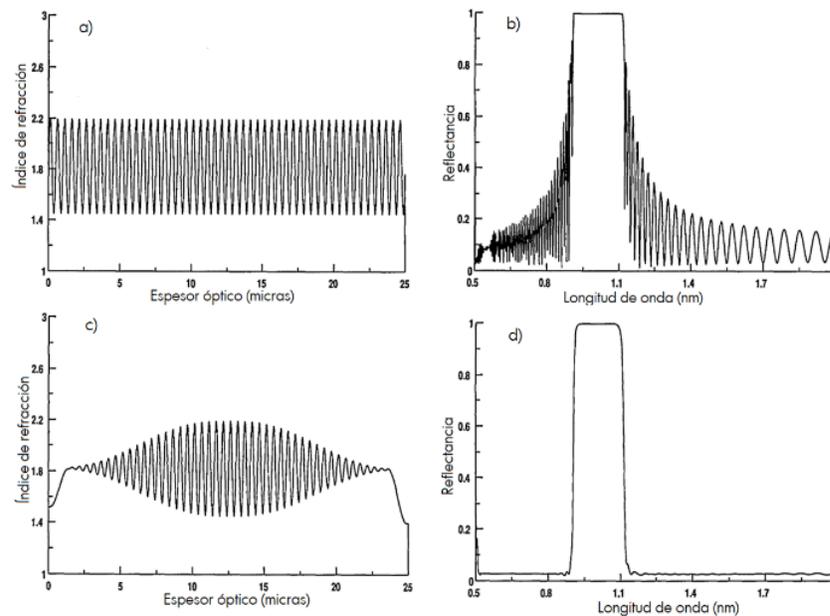


**Figura 3.** Filtro cuya respuesta espectral se aproxima a la silueta del Taj Mahal. (Imagen modificada de: Verly, 1993), figura 3).

Como lo demuestra Verly, aplicando el método de transformada de Fourier, es posible construir un perfil de índices que reproduzca una respuesta espectral cercana a la deseada. También demuestra que las diferentes funciones  $Q$  reportadas en la literatura pueden fallar en reproducir una respuesta espectral arbitraria. Lo anterior corrobora que no existe a la fecha una función  $Q$  universal y que probablemente, debido a la generalidad que se tiene con el método de transformada de Fourier para filtros inhomogéneos, sea imposible desarrollar una función  $Q$  aplicable para cualquier espectro.

### 1.2.8 Método de Southwell para la síntesis de filtros inhomogéneos

A finales de los años ochenta, William H. Southwell propone un método de síntesis de filtros inhomogéneos a partir de funciones sinusoidales, las cuales son consideradas como el perfil de índices. Este tipo de filtros sólo pueden servir como filtros pasabanda (Southwell, 1989). Southwell aplica sobre el perfil de índices un apodizado para disminuir considerablemente los lóbulos laterales que se encuentran fuera de la región de interés y que por ende añaden señales no deseadas en la respuesta espectral. El apodizado, consiste en modular la amplitud del índice de refracción del filtro inhomogéneo mediante una de las múltiples funciones que se encuentran en la literatura, como lo puede ser una función lineal, rectangular, triangular, gaussiana, etc.



**Figura 4.** a) Perfil de índices sin apodizado, b) Respuesta espectral, c) Perfil de índices con apodizado, d) respuesta espectral. (Imagen modificada de: Southwell, 1989 ,figuras 1 y 5).

Como se aprecia en la Figura 4, el apodizado suprime considerablemente los lóbulos exteriores a la región de interés. Adicionalmente, se utiliza una función de quinto orden para acoplar el perfil de índices en los extremos al sustrato y al medio. Dicha función es de la siguiente forma:

$$n = n_L + (n_H - n_L)(10t^3 - 15t^4 + 6t^5) \quad (13),$$

donde  $n$  es el índice de refracción. Los índices de refracción máximo y mínimo se denotan respectivamente por  $n_H$  y  $n_L$ . El espesor óptico por capa se denota mediante la letra  $t$ . El acoplamiento en los extremos con el índice de refracción del sustrato y del medio permitirá tener una simulación del filtro más realista, por lo que es importante considerarla, sobre todo cuando se desean reproducir experimentalmente los filtros.

### 1.3 Justificación

Tras haber revisado a los autores principales, que han desarrollado la teoría para la síntesis por transformada de Fourier de filtros inhomogéneos, se demuestra que aún existen muchos puntos por analizar y mejorar en el proceso de síntesis. Se busca expandir la investigación reportada en la literatura, para lograr un mejor control en la síntesis de filtros inhomogéneos. En la actualidad se cuentan con muy pocos programas capaces de sintetizar filtros inhomogéneos, pues no se les ha dado la importancia que merecen, debido a lo complicado que puede resultar su crecimiento experimental. Mediante este trabajo se busca generar un programa capaz de sintetizar filtros inhomogéneos utilizando el método de transformada de Fourier combinado con los métodos iterativos. Se espera sintetizar filtros inhomogéneos con índices de refracción y espesores físicos que sean viables para ser reproducidos experimentalmente.

### 1.4 Hipótesis

Determinar las condiciones iniciales óptimas (espesor óptico ( $x$ ), función Q y fase inicial  $\phi_0$ ) para el método de transformada de Fourier y utilizando métodos iterativos, permitirá sintetizar filtros inhomogéneos con valores de índices de refracción y espesores reproducibles experimentalmente y cuyos valores de Reflectancia/Transmitancia se aproximen a los deseados.

## 1.5 Objetivos

### 1.5.1 Objetivos generales

Crear un programa de síntesis de filtros inhomogéneos por transformada de Fourier, para estudiar las condiciones iniciales óptimas de síntesis combinando métodos iterativos, de forma tal que se puedan obtener filtros inhomogéneos con valores reproducibles experimentalmente y con respuestas espectrales cercanas a las deseadas.

Crear un filtro inhomogéneo mediante erosión iónica reactiva a partir de un blanco de silicio, con la finalidad de demostrar que los filtros sintetizados por transformada de Fourier pueden ser reproducidos experimentalmente.

### 1.5.2 Objetivos específicos

#### 1.5.2.1 Síntesis de filtros inhomogéneos

1. Generar un programa en Python que sintetice perfiles de índice a partir de la teoría de transformada de Fourier, utilizando sólo la Transmitancia/Reflectancia deseada. Incluir la corrección por métodos iterativos de Amplitud y “Stored Wave Inverse Fourier Transform” (SWIFT).
2. Determinar los valores óptimos para las condiciones iniciales de espesor óptico ( $x$ ), función  $Q$ , y el factor de fase ( $\phi_0$ ), durante la síntesis sin ningún método iterativo.
3. Combinar los valores óptimos de las condiciones iniciales con los métodos iterativos de corrección por amplitud y SWIFT, para refinar la respuesta espectral obtenida.
4. Crear una interfaz gráfica que pueda ser utilizada por cualquier usuario, sin conocimientos previos de programación. Incluir un manual de usuario como referencia rápida.

### 1.5.2.2 Crecimiento por erosión iónica de filtros inhomogéneos

1. Convertir los resultados del perfil de índices de refracción a un archivo con los parámetros experimentales que contengan los flujos de oxígeno ( $O_2$ ) y nitrógeno ( $N_2$ ) por segundo.
2. Crear capas de  $SiO_xN_y$  a partir de los parámetros experimentales utilizando la técnica de erosión iónica reactiva, para obtener un filtro inhomogéneo.
3. Discutir las limitaciones que se tienen para crecer los filtros inhomogéneos y las discrepancias que puedan existir entre lo sintetizado y lo experimental.

## Capítulo 2. Marco teórico y metodología

---

A lo largo de este capítulo se describirán las metodologías seguidas para obtener los resultados de acuerdo con los objetivos planteados en el capítulo 1. Cinco secciones principales conforman este capítulo.

La primera sección describe la forma en que el programa para la síntesis de filtros inhomogéneos fue creado, incluyendo todos los métodos de síntesis con los que se cuentan.

En la segunda sección se explican las condiciones iniciales necesarias para llevar a cabo la síntesis y el análisis de filtros inhomogéneos a través del programa, sin ningún tipo de refinamiento.

La tercera sección se enfoca en describir la metodología para utilizar los métodos iterativos de corrección por amplitud y “Stored Wave Inverse Fourier Transform” (SWIFT), mediante los cuales se refina el método de síntesis para lograr una mejor aproximación de las respuestas espectrales de los filtros sintetizados.

En la cuarta sección se explican a manera de introducción, los componentes de la interfaz gráfica y sus funciones.

La quinta sección consiste en describir la metodología seguida durante esta investigación para crecer por erosión iónica los filtros inhomogéneos y los métodos de caracterización empleados antes, durante y después del crecimiento experimental del filtro.

### 2.1 Síntesis de filtros inhomogéneos

De acuerdo con los alcances propuestos, se necesita comprender primero a fondo la teoría, para posteriormente poder crear y mejorar el algoritmo de síntesis de filtros inhomogéneos.

En esta sección, se comenzará por analizar las ecuaciones básicas para la síntesis de filtros inhomogéneos.

### 2.1.1 Ecuaciones fundamentales para la síntesis de filtros inhomogéneos por transformada de Fourier (TF)

El primer paso de este trabajo consistió en estudiar y comprender las ecuaciones referenciadas por autores como Dobrowolski et al. (1978), pues tales ecuaciones son la teoría fundamental para la construcción del perfil de índices. La relación de transformada de Fourier para este caso es:

$$Q(k)e^{i\phi(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n'}{2n} e^{ikx} dx \quad (14),$$

donde  $Q(k)$  es conocida como función  $Q$  y contiene la información espectral que se desea obtener en términos de la transmitancia. El factor de fase  $e^{i\phi(k)}$  mantiene a la función siempre en los reales.

El índice de refracción se indica mediante  $n$ , siendo su diferencial de la forma:  $n' = dn/dz$ , donde  $z$  corresponde al espesor físico.

El doble espesor óptico  $x$  se puede expresar de la forma:  $x = 2 \int_0^z n(u) du$ . La derivación de la ecuación (14) se describe a fondo en el Anexo B.

Para esta sección, basta con mencionar que la ecuación (14) es una relación de TF entre el espacio coordinado representando en términos del vector de onda  $k = 2\pi/\lambda_0$  y el espacio de frecuencias representado por el doble espesor óptico  $x$ .

Se debe despejar a  $n$  de la ecuación (14), para obtener la expresión que construye al perfil de índices, siendo esta:

$$n(x) = \exp \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q_m(k)}{k} \text{sen}(\phi_0(k) - kx) dk \right] \quad (15).$$

La derivación de la ecuación para construir el perfil de índices se encuentra descrita detalladamente en el Anexo B.

Mediante esta ecuación se realizaron las síntesis de los perfiles de índices a partir de la reflectancia ( $R$ ) o transmitancia ( $T$ ) deseada.

El subíndice  $m$  de la función  $Q$  denota que se puede elegir alguna de las funciones  $Q$  reportadas en la literatura, de las cuales, para este trabajo se consideraron las siguientes:

**Tabla 1.** Funciones  $Q$  reportadas en la literatura.

Función $Q$	Número de ecuación	Referencia
$Q_1 = \sqrt{1 - T}$	(16)	Delano, (1967)
$Q_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T} - T\right)}$	(17)	Sossi & Kard, (1968)
$Q_3 = \sqrt{\frac{1}{T} - 1}$	(18)	Verly et al., (1989)
$Q_4 = \omega\sqrt{1 - T} + (1 - \omega)\sqrt{\frac{1}{T} - 1},$  <i>donde <math>0 \leq \omega \leq 1</math></i>	(19)	Verly et al., (1989)
$Q_5 = \ln\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}\right),$  <i>con <math>\gamma = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{T} - T\right)</math></i>	(20)	Verly et al., (1989)
$Q_6 = \sqrt{\log\left(\frac{1}{T}\right)}$	(21)	Bovard, (1988)
$Q_7 = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{T}} - \sqrt{T}}$	(22)	Bovard, (1993)
$Q_8 = \frac{1}{2}\sqrt{-\ln(T)} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{T}} - \frac{1}{T}}$	(23)	Druessel et al., (1993)
$Q_9 = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \sqrt{1 - T}}{1 - \sqrt{1 - T}}\right)$	(24)	Bovard, (1993)

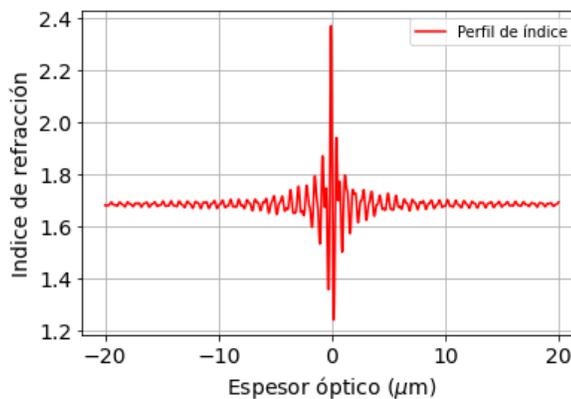
Nota: La función  $Q_9$  sólo es presentada, pero no se utiliza en este trabajo, ya que sólo es aplicable cuando se trabaja considerando partes complejas.

Más adelante se describirá la importancia de estas funciones  $Q$  para el trabajo. Por ahora basta con tener en cuenta que estas funciones contienen la información espectral de  $R$  o  $T$  deseada y que se introducen en la ecuación (15), para sintetizar un perfil de índices.

### 2.1.2 Programa de síntesis de filtros inhomogéneos

La parte principal del trabajo consistió en sintetizar filtros inhomogéneos, de modo que se pudieran estudiar a fondo sus variables para alcanzar respuestas espectrales con valores cercanos a los deseados, además de índices de refracción y espesores ópticos viables para ser reproducidos experimentalmente. El programa fue escrito en el lenguaje Python para versiones 3.10 y posteriores.

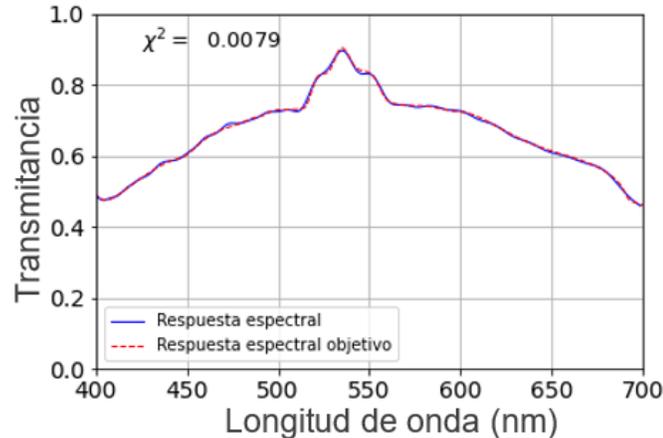
En un inicio comenzamos con un algoritmo simple donde sólo la función  $Q_2$  estaba incluida, ya que se buscaba reproducir resultados encontrados en la literatura, para corroborar el correcto funcionamiento del programa. Los archivos de datos tienen una terminación `.dat`, con formato  $(x, y)$ , donde  $x$  es la longitud de onda y  $y$  la transmitancia en una escala de 0 a 1. Este archivo es el que se carga en la función  $Q$ . Una vez que la función  $Q$  cuenta con la información espectral, se realiza el cálculo para construir el perfil de índices utilizando la ecuación (15). Se obtiene un perfil de índices como el que se muestra a continuación.



**Figura 5.** Ejemplo de un perfil de índices sintetizado.

Simultáneamente, se genera un archivo de formato `.dis` el cual contiene los siguientes datos: la polarización, el ángulo de incidencia, la longitud de onda, el rango de longitud de ondas consideradas, el tipo de dispersión y una lista de los espesores ópticos con su índice de refracción asociado. El valor de

espesor óptico por capa y el espesor óptico total es dado por el usuario. El programa automáticamente discretiza en capas al espesor óptico total en función del espesor óptico por capa. Mediante el archivo .dis, el algoritmo calcula la respuesta espectral utilizando matriz de recurrencia o matriz característica. La teoría sobre la matriz de recurrencia o matriz característica puede ser encontrada en MacLeod, 2010. Tras determinar el desempeño óptico el programa dibuja una gráfica que compara visualmente la respuesta espectral del diseño sintetizado con la transmitancia deseada, a continuación, se muestra un ejemplo.



**Figura 6.** Ejemplo de la respuesta espectral calculada de un diseño.

Adicionalmente, sobre la gráfica se muestra el valor de la función chi cuadrada ( $\chi^2$ ) que es la referencia utilizada para saber qué tan cercana es la respuesta espectral calculada respecto a la deseada. Matemáticamente se expresa:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (25),$$

donde  $O_i$  para este caso, es la transmitancia correspondiente al diseño actual del perfil de índices, mientras que  $E_i$  corresponde a la transmitancia deseada. El siguiente paso en la evolución del programa, consistió en introducir las diferentes funciones  $Q$  mostradas, de forma que se puedan estudiar sus comportamientos para diferentes diseños de transmitancias. En este punto, el programa ya era capaz de generar perfiles de índice con muy buenas respuestas espectrales, no obstante, los valores de índices de refracción máximo y mínimo no eran reproducibles dentro del laboratorio. Al utilizar el material  $SiO_xN_y$  sólo se cuenta con un rango de índices de refracción entre 2.0 correspondiente al  $Si_3N_4$  y 1.5 correspondiente al  $SiO_2$ .

Para acotar los de los índices de refracción en valores reproducibles experimentalmente, se tuvieron que añadir al programa los métodos iterativos. El primer método iterativo es una corrección por amplitud, donde la función  $Q$  es sometida a un proceso de corrección para el perfil de índices de tal forma que se mejore la respuesta espectral. El apéndice C. 2 describe detalladamente las ecuaciones y el proceso de corrección. Posteriormente, al algoritmo se introdujo la corrección por fase, la cual utiliza la corrección por amplitud en la función  $Q$ , a la vez que se introduce un factor de fase  $\Phi$  encargado de distribuir la energía del espectro a lo largo de todo el perfil de índices. Este método iterativo representa a la fecha el máximo grado de corrección que existe reportado en la literatura, además de que permite sintetizar filtros inhomogéneos que sean reproducibles experimentalmente en nuestro laboratorio, tal como se muestra en la sección de resultados.

Más adelante se encuentra una subsección detallando este método, el cual se conoce como SWIFT y es un acrónimo en inglés para "Stored Wave Inverse Fourier Transform". En este punto, el programa ya cuenta con todos los métodos de síntesis de filtros inhomogéneos por TF que se encuentran reportados en la literatura, los cuales son: la síntesis directa y por métodos iterativos. El siguiente paso consistió en convertir las líneas de código a una interfaz gráfica con la finalidad de que cualquier usuario que lo deseara y sin tener conocimientos previos de programación, pudiera sintetizar un filtro inhomogéneo de interés.

## 2.2 Condiciones iniciales en la síntesis de filtros inhomogéneos

Las condiciones iniciales son el punto de partida más importante para la síntesis de un filtro inhomogéneo, ya que son los valores que se introducen en la ecuación (15) para construir el perfil de índices de refracción. Tres de estas condiciones iniciales son las que se deben de ajustar para establecer un buen punto de partida de la síntesis. Dichas condiciones son: el espesor óptico. La función  $Q$ . La fase inicial  $\phi_0$ . El resto de las condiciones iniciales se denominan en este trabajo como fijas, ya que estas no impactan de forma directa el punto de partida en la síntesis del filtro inhomogéneo y son condiciones que se pueden ajustar a las necesidades del usuario.

A continuación, se dedican tres subsecciones a las condiciones iniciales del espesor óptico, la función  $Q$  y la fase inicial  $\phi_0$ , debido a su gran importancia para establecer el correcto punto de partida para la síntesis. En una cuarta subsección se describen las condiciones iniciales fijas.

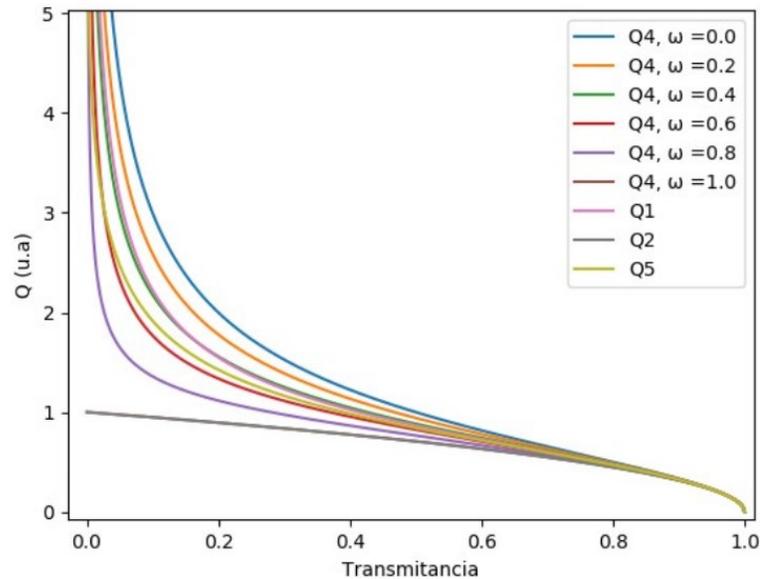
### 2.2.1 Espesor óptico (filtraje de frecuencias)

Al tratarse de un método de síntesis por transformada de Fourier, el espesor óptico  $x$ , corresponde a un espacio de frecuencias, tal como se menciona en el Anexo B. Las primeras pruebas realizadas durante la síntesis de filtros inhomogéneos consistieron en cambiar el espesor óptico de los filtros, para analizar el impacto en la respuesta espectral debido al cambio en el número de frecuencias espaciales. Se debe recordar que cada uno de los elementos de  $x$  contienen una fracción de información sobre la distribución de la energía espectral (Anexo B). Los espesores ópticos centrales del diseño contienen la información sobre la forma general de energía espectral, mientras que los espesores ópticos alejados del centro contienen información sobre los detalles finos de esta distribución de energía. A medida que se vaya incrementando el espesor óptico, la respuesta espectral debe mejorar.

Experimentalmente lo conveniente es tener un filtro lo más pequeño posible, para evitar largos tiempos de depósito, aunque tal espesor debe ser lo suficientemente grande para mantener una respuesta espectral cercana a la esperada. Para estudiar el impacto del espesor óptico sobre la respuesta espectral, se utilizó el filtraje de frecuencias espaciales, el cual consiste en reducir el espesor óptico y calcular su respuesta espectral. La reducción del espesor se hace hasta que la respuesta espectral deja de coincidir con la esperada. Mediante el filtraje de frecuencias se determina cuáles son los espesores adecuados para el filtro inhomogéneo estudiado. Parte de estos resultados se encuentran ya publicados en el artículo: Villa, & Machorro-Mejía, 2023.

### 2.2.2 La función $Q$

De acuerdo con la teoría de Fourier, la función  $Q$  contiene la información de la respuesta espectral deseada en el espacio coordinado, por lo que juega un papel importante en la síntesis de filtros inhomogéneos. Tal como se muestra en la Figura 7, para altas transmitancias ( $T$ ) todas las funciones  $Q$  convergen hacia el mismo punto. A medida que el valor de  $T$  va disminuyendo, el valor de la pendiente en las funciones va aumentando, generando un problema de aproximación en el método de síntesis. La divergencia en los valores para bajas  $T$ , se deben a las aproximaciones hechas para la reflexión durante la derivación de la expresión de transformada de Fourier (Verly & Dobrowolski, 1990). Actualmente no existe una función  $Q$  universal que pueda empatar adecuadamente para todas las respuestas espectrales, debido a la forma en la que la función  $Q$  es derivada.



**Figura 7.** Comparación de funciones  $Q$  vs transmitancia. Las funciones  $Q$  utilizadas corresponden a la numeración mostrada en la Tabla 1.

Una vez establecido el correcto espesor óptico para la curva de transmitancia analizada, se prosigue a determinar la correcta función  $Q$ . Se probaron ocho diferentes funciones  $Q$  sobre tres diseños de transmitancia, para demostrar que existen funciones  $Q$  que darán buenos resultados en algunos casos, mientras que en otros no. El desempeño de cada función depende de la forma que tenga la curva de transmitancia. Mediante los resultados obtenidos, se espera encontrar que el uso de una correcta función  $Q$  es vital para el correcto punto de partida durante la síntesis del filtro inhomogéneo.

### 2.2.3 Fase inicial $\phi_0$

Una vez determinados el mejor espesor óptico y la función  $Q$  adecuada, se prosigue a definir cuál será la fase inicial  $\phi_0$  correcta. Cabe resaltar que esta condición inicial casi siempre es despreciada por los autores, pues en la mayoría de los casos se reporta con un valor de 0 o su equivalente  $2\pi$ .

La fase inicial  $\phi_0$  define la distribución de los valores de los índices de refracción a lo largo del espesor óptico, por lo que, dependiendo de tal distribución, se podrá obtener una mejor o peor respuesta espectral, ya que cualquier cambio en el espacio de frecuencias repercutirá en el espacio real. En la sección 3.1 se demuestra la importancia de esta distribución.

#### 2.2.4 Condiciones fijas

Estas condiciones iniciales son de importancia para el impacto de la respuesta espectral, pero resulta más conveniente dejarlas fijas, pues se pueden modificar de acuerdo con las necesidades del usuario.

La primera es el espesor óptico por capa. En este trabajo es un valor constante definido por el usuario. El espesor óptico total es dividido entre el espesor óptico por capa para determinar el número total de capas.

La segunda condición es la diferencia que existe entre el índice de refracción inferior y superior. Tal diferencia permite desplazar la respuesta espectral sobre el eje de la transmitancia.

Una mayor separación entre los índices de refracción aumentará todos los valores de transmitancia. Una menor separación de índices de refracción disminuirá todos los valores de la transmitancia.

Para determinar el espesor óptico por capa y el índice de refracción superior e inferior, se realizan síntesis de pruebas preliminares, variando los valores a prueba y error, hasta que se logra obtener una respuesta espectral similar a la deseada.

### 2.3 Refinamiento de la síntesis por transformada de Fourier utilizando métodos iterativos

Los métodos iterativos son utilizados en la síntesis por transformada de Fourier para refinar los perfiles de índice de forma tal, que se pueda alcanzar una mejor respuesta espectral. El uso de métodos iterativos también permite reducir el espesor óptico y minimizar la brecha que existe entre el índice de refracción superior e inferior del filtro inhomogéneo.

Se cuentan con dos tipos de métodos iterativos, el primero considera la corrección por amplitud de la función  $Q$ , mientras que el segundo aparte de tomar la corrección por amplitud también corrige la fase mediante el factor de fase  $\Phi$ , a este método se le conoce como SWIFT (Cheng et al., 2008). Ambos métodos iterativos fueron utilizados en este trabajo, por lo que a continuación se describen brevemente.

### 2.3.1 Refinamiento por amplitud de la función Q

El refinamiento por amplitud de la función Q consiste en cambiar los valores de transmitancia introducidos a la función Q para cada iteración. A la función Q con la información de la iteración actual, se le suma un intervalo de transmitancias dado por la diferencia que existe entre la transmitancia deseada y la transmitancia calculada de la iteración anterior. Matemáticamente esto se escribe de la siguiente forma:

$$Q_{i+1} = Q_i(T(k)) + Si\Delta T(k) \quad (26),$$

donde  $Q_i(T(k)) = Q(T_{i-1}(k))$ ,  $\Delta T(k) = T_D(k) - T_A(k)$ . El subíndice  $i$  denota la iteración actual. El subíndice  $i - 1$  corresponde a la iteración anterior. La respuesta espectral deseada se denota como  $T_D(k)$  y  $T_A(k)$  es la respuesta espectral de la iteración anterior. La descripción detallada de la ecuación (26), se describe en el Anexo C. Se añade un factor de corrección llamado  $Si$ . En este trabajo se maneja un valor inicial de 2, el cuál fue tomado en de la literatura (Verly & Dobrowolski, 1990).

En caso de que el valor de la función chi cuadrada ( $\chi^2$ ), ecuación (25), no aumente o disminuya en más de un 20% respecto a su iteración anterior, el valor de la  $Si$  permanecerá constante. Si la respuesta espectral de la nueva función  $Q_{i+1}$  presenta una disminución mayor al 20% en el valor de la  $\chi^2$  respecto a la iteración anterior, el factor de corrección  $Si$  se divide entre dos para evitar una sobre corrección en la siguiente iteración. Cuando el valor de la  $\chi^2$  aumenta más del 10% respecto a la iteración anterior, el factor de corrección es duplicado con la finalidad de incrementar el grado de corrección en la siguiente iteración. El factor de corrección aumentará o disminuirá los valores de corrección que se están introduciendo a la función Q al multiplicarse por  $\Delta T(k)$ .

### 2.3.2 Refinamiento por fase (SWIFT)

El método de refinamiento por fase (SWIFT) consiste en utilizar un factor de fase  $\Phi$ , el cuál sustituye a la fase inicial  $\phi_0$  durante las iteraciones. La fase inicial  $\phi_0$  es la que dicta la distribución de los valores de los índices de refracción. El propósito del factor de fase  $\Phi$  es el de distribuir la energía espectral a lo largo de todo el espesor óptico que se esté considerando, de forma tal que cada parte del espesor óptico del filtro, sin importar que sean bajas o altas frecuencias, aporten un grado significativo de información para

reconstruir la respuesta espectral. El factor de fase  $\Phi$ , de acuerdo con Cheng et al., 2008, es utilizado para llevar a cabo la distribución de energía. Su expresión matemática es:

$$\Phi(k) = \frac{x - x_0}{\int_0^\infty G(\xi) d\xi} \int_0^k \int_0^\xi G(\eta) d\eta d\xi + x_0 k + \Phi_0(k) \quad (27),$$

cuenta con tres términos: el primer término,  $\frac{x-x_0}{\int_0^\infty G(\xi) d\xi} \int_0^k \int_0^\xi G(\eta) d\eta d\xi$ , es de segundo orden y establece el rango de espesor óptico sobre el cuál se llevará a cabo la distribución de energía espectral. La función  $G(k) = |Q(k)/k|^2$  contiene la energía espectral que se desea distribuir. Las variables  $\eta$  y  $\xi$  son un cambio de variable respecto a  $k$  para evitar confusión entre las integrales que se realizan sobre la función  $G()$ . El segundo término,  $x_0 k$ , es de primer orden y sirve para declarar el punto de partida de la distribución espectral. El tercer término,  $\Phi_0(k)$ , es una constante y corresponde al factor de fase usado inicialmente.

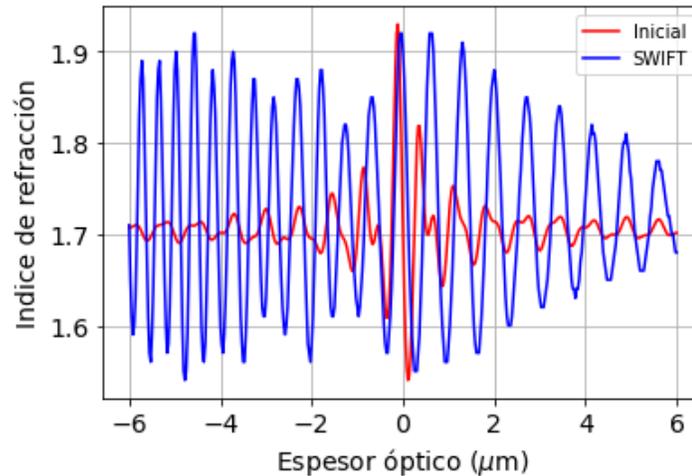
La función de fase se sustituye en lugar de la fase inicial  $\Phi_0$  de la ecuación (15), quedando como:

$$n(x) = \exp \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{Q_m(k)}{k} \text{sen}(\Phi(k) - kx) dk \right] \quad (28),$$

Adicionalmente, en la parte de la corrección por amplitud, el factor de corrección  $Si$  es cambiado por  $\frac{dQ}{dT}$  tal como lo reporta Cheng et al., 2008. La nueva corrección mediante el factor  $\frac{dQ}{dT}$ , permite realizar correcciones más puntualizadas a lo largo del perfil de índices, pues ahora se está usando una función que es la derivada de  $Q$  respecto de  $T$ . El factor  $\frac{dQ}{dT}$  asigna un valor específico para cada punto del perfil de índices, a diferencia del valor  $Si$  que utiliza un mismo valor para todo el filtro. En el método *SWIFT* se introducen dos nuevas condiciones que se deben variar para mejorar la respuesta espectral a lo largo de las iteraciones. Dichas condiciones son:

El rango de distribución de energía. dado por  $x - x_0$ , el cual establece el intervalo de espesor óptico que será sometido a la distribución de energía. No se ha reportado un valor específico o ideal para esta condición. En este trabajo el rango se determina a prueba y error para el espesor óptico que se esté analizando. La segunda condición inicial adicional para *SWIFT* está dada por  $x_0 k$ , donde  $x_0$  es el punto de partida sobre el cuál comenzará la distribución de la energía espectral. El punto de partida  $x_0$  no está forzado a ser siempre el valor inicial del espesor óptico en el perfil de índices, por lo que puede comenzar antes del espesor óptico total elegido para el filtro o en un punto dentro del espesor óptico total.

Dependiendo del tipo de curva espectral con la cual se esté trabajando, el valor de  $x_0$  se determina a prueba y error para el espesor óptico utilizado. La Figura 8 compara un perfil de índices sin refinamiento y con refinamiento por SWIFT. El filtro sin refinar es representado de color rojo. Al aplicar el refinamiento por SWIFT se obtiene el perfil de índices de refracción azul, con variaciones de índices de refracción distribuidos en una mejor proporción, de tal forma que cada frecuencia posee un peso similar en la reconstrucción de la respuesta espectral.



**Figura 8.** Comparación entre un filtro inhomogéneo sin refinamiento (línea roja), con uno refinado por SWIFT (línea azul).

## 2.4 Descripción de la interfaz gráfica

Fue creada utilizando el programa PAGE, el cuál funciona utilizando las paqueterías de Tkinter de Python. Para más información referente al programa Page y su relación con Tkinter, consultar a Walters, (2023). El programa cuenta con cuatro pestañas. En esta sección se introduce al lector sobre la función de cada una de las pestañas, mientras que en la sección 3.1 correspondiente a los resultados, se describen de forma más detallada cada una de ellas. Adicionalmente se ha creado el Anexo E, el cual sirve como manual de usuario para la interfaz gráfica.

### 2.4.1 Pestaña: “síntesis por transformada de Fourier”

Esta pestaña contiene todos los elementos para sintetizar filtros inhomogéneos utilizando la teoría de transformada de Fourier. El usuario puede realizar síntesis directa o utilizando métodos iterativos de

corrección por amplitud o SWIFT. Es necesario contar con el espectro de transmitancia deseado para cargarlo en la memoria del programa. Se deben introducir las condiciones iniciales de síntesis y el programa realizará el número de iteraciones solicitadas, graficando el perfil de índices de refracción y su correspondiente respuesta espectral. A medida que las iteraciones van realizándose, si el valor de la función chi cuadrada va disminuyendo (ecuación (25)), se guarda tal respuesta espectral con su respectivo perfil de índices, para tener un registro de la evolución de la respuesta espectral, por lo que no es necesario que el usuario esté supervisando el proceso iterativo.

#### 2.4.2 Pestaña: “Southwell”

Esta pestaña está basada en lo reportado por Southwell, (1989), donde en vez de utilizar las ecuaciones de síntesis por transformada de Fourier para filtros inhomogéneos, se parte de una función periódica sinusoidal como un perfil de índices de refracción. Para desplazar la respuesta espectral del filtro, se puede variar el espesor físico por capa y el número de ciclos considerados de la función. La gran limitante de esta pestaña es que, al utilizarse sólo funciones periódicas como perfiles de índices, se obtienen respuestas espectrales similares a una Gaussiana. Para más información sobre la teoría, consultar el Anexo E.

#### 2.4.3 Pestaña: “experimento”

Esta pestaña convierte los perfiles de índices de refracción sintetizados en un archivo de flujos de oxígeno y nitrógeno en función del tiempo, de forma tal que se pueda crecer el filtro inhomogéneo utilizando la técnica de erosión iónica reactiva asistida por magnetrón. En la sección 2.5.6 se describe el propósito del uso de este archivo de flujos. Para poder realizar la conversión del perfil de índices de refracción es necesario contar con un archivo de calibración el cual contiene la relación de mezcla de flujos de oxígeno, nitrógeno y argón para obtener cierto índice de refracción y espesor físico por minuto. La información sobre el archivo de calibración se detalla en la subsección 2.5.3.

#### 2.4.4 Pestaña: “compara diseños”

Se incluyó esta pestaña para poder analizar respuestas espectrales de diferentes perfiles de índices de refracción sintetizados por el programa, con la respuesta espectral de un filtro inhomogéneo crecido

experimentalmente. Al momento de publicado este trabajo, se pueden comparar hasta dos respuestas espectrales teóricas con una respuesta espectral experimental.

## 2.5 Crecimiento de filtros inhomogéneos por erosión iónica

Utilizando las condiciones iniciales ideales previamente determinadas y el método iterativo SWIFT, se obtiene un filtro con una respuesta espectral cercana a la planteada. El siguiente paso es crecer el filtro inhomogéneo mediante erosión iónica para corroborar que la parte teórica empata con la experimental. Un blanco de silicio será sometido a una mezcla de gases de  $O_2$  y  $N_2$  para generar  $SiO_xN_y$ . La absorción de luz en el rango del visible es despreciable para este material. Mediante las especies estequiométricas del  $SiO_xN_y$  se puede alcanzar un rango de índices de refracción por arriba de 1.46 y por debajo de 2.0 en los 600 nm. Previo a entrar en la parte de erosión iónica, se hace una breve mención sobre las caracterizaciones que se utilizaron durante la realización de la parte experimental de este trabajo.

### 2.5.1 Técnicas de caracterización

En esta subsección se hace una breve mención de las técnicas de caracterización que serán usadas para la realización de este trabajo. Tales caracterizaciones son: Espectroscopía óptica de emisión, elipsometría y espectrofotometría en el rango Uv-Vis.

#### 2.5.1.1 Espectroscopía óptica de emisión

Comúnmente abreviada por sus siglas en inglés como OES. Es una técnica de análisis *in situ*, en la cual mediante una fibra óptica se capta la luz proveniente de una fuente de emisión. La fibra óptica se encuentra conectada a un espectrómetro el cuál separa la luz en sus diferentes longitudes de onda, de modo que puedan ser analizadas las líneas de emisión de la fuente (Herman, 1996). Trabajos previos como el de Sanginés et al., (2018), hacen uso de la técnica de OES para analizar el comportamiento y la evolución de las líneas de emisión del plasma, donde se demuestra que existe una relación entre las líneas de emisión del plasma y el índice de refracción.

### 2.5.1.2 Elipsometría

La elipsometría es una técnica de caracterización que mide el cambio en la polarización de un haz de luz linealmente polarizado emitido por una fuente a un ángulo de inclinación, el cual incide sobre la superficie de una muestra y sufre un proceso de interferencia. (Bandyopadhyay & Bose, 2013). Un detector colecta la luz reflejada, la cual estará elípticamente polarizada y determina los parámetros:  $\Psi$  correspondiente a la amplitud de la elipse y  $\Delta$  correspondiente a la diferencia de fase de la elipse. Mediante modelos como el de Cauchy, aproximación de medio efectivo (EMA), osciladores, entre otros, se pueden relacionar los parámetros  $\Psi$  y  $\Delta$  con las propiedades ópticas de un material. A partir de estos modelos se puede estimar el índice de refracción, la absorción y el espesor de un material (Bandyopadhyay & Bose, 2013).

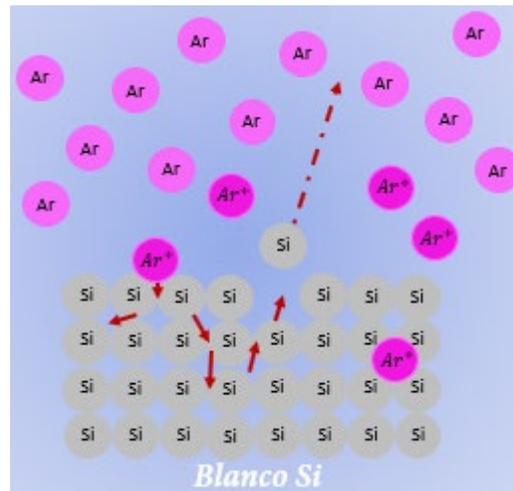
### 2.5.1.3 Espectrofotometría en el rango Uv-Vis

Se utiliza un espectrofotómetro para determinar la transmitancia y absorción de un material para las longitudes de onda entre el rango del ultravioleta y el visible. Se hace incidir luz normal a la superficie a diferentes longitudes de onda sobre el material de interés. En la parte trasera del material se encuentra un detector cuya función es colectar la luz que se transmitió. Se genera una gráfica con la transmitancia de la luz colectada para las longitudes de onda establecidas (Chen et al., 2013). Mediante esta técnica se puede caracterizar el desempeño óptico de los filtros inhomogéneos.

### 2.5.2 Erosión iónica

Conocido en inglés como "sputtering", es una técnica de crecimiento de películas delgadas. Consiste en la expulsión de átomos o moléculas de un blanco, mediante el bombardeo con iones con altas energías (Swann, 1988). Se utilizan como iones un gas noble, de modo que no suceda alguna reacción química y el material arrancado del blanco sea el que se deposite. Para este trabajo se utiliza el gas de argón ( $Ar$ ), pues es relativamente sencillo de ionizar, necesitando una energía de 1.76 eV. Durante el proceso de erosión iónica se necesita una generación constante átomos ionizados, para llevar a cabo el bombardeo de la superficie del blanco. Algunos átomos de argón ionizado o no ionizado pueden emitir luz a ciertas longitudes de onda. De acuerdo con Depla et al., (2010), la técnica de erosión iónica emplea un arreglo de ánodo y cátodo separados a cierta distancia para generar una diferencia de potencial.

Sobre el cátodo se coloca el blanco, mientras que sobre el ánodo se coloca el sustrato sobre el cuál se desea crecer la película delgada. La diferencia de potencial que se genera entre el ánodo y el cátodo es utilizada para acelerar a los electrones libres que se encuentran dentro del equipo de vacío. Los electrones acelerados impactarán con los átomos de argón generando una transferencia de energía, derivando en la excitación u ionización del átomo.

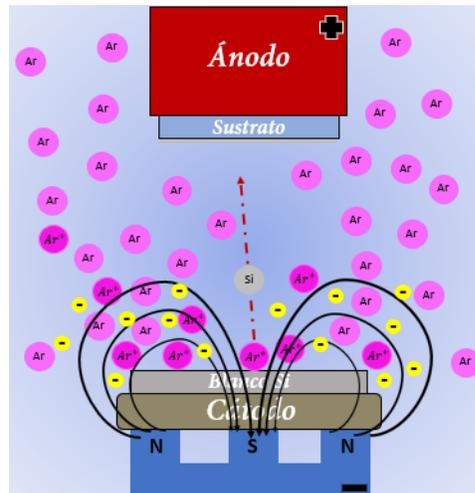


**Figura 9.** Diagrama de transferencia de momento y desprendimiento de moléculas del blanco.

Tal como se ejemplifica en la Figura 9, el  $Ar^+$  transfiere parte de su momento al colisionar sobre la superficie del blanco. Dicha transferencia de momento si es lo suficientemente fuerte, generará una ruptura en la red del sólido desprendiendo un átomo o molécula de la superficie, así como electrones secundarios (Williams, 1979). El átomo o molécula desprendido del blanco se encontrará en estado gaseoso y se añadirá sobre la primera superficie solida que encuentre (Depla et al., 2010), por lo que se comenzará a crecer una película delgada, principalmente sobre el sustrato colocado en el cátodo, aunque también existirán depósitos a lo largo de las paredes de la cámara de vacío.

### 2.5.2.1 Erosión iónica asistida por magnetron

La técnica de erosión iónica presenta un bajo grado de ionización en el plasma y una baja tasa de depósito (Kelly & Arnell, 2000). Para reducir este problema, de acuerdo con Kelly & Arnell, (2000), se debe utilizar un campo magnético debajo del cátodo, con la finalidad de confinar a los electrones secundarios cerca de la superficie del blanco, tal como se muestra en la Figura 10.



**Figura 10.** Diagrama del proceso de erosión iónica asistida por magnetrón.

Los electrones secundarios al encontrarse confinados por las líneas del campo magnético incrementan las probabilidades de colisión, favoreciendo la ionización de los átomos cercanos a la superficie del blanco, e incrementando la densidad del plasma en la región alrededor del blanco. A mayor número de átomos ionizados, mayor será la tasa de colisión sobre la superficie del blanco, resultado en un aumento en la tasa de depósito.

### 2.5.2.2 Erosión iónica reactiva asistida por magnetrón

Dentro de la cámara de vacío, se pueden introducir gases reactivos para llevar a cabo el proceso de reacción sobre la superficie del blanco, el cuál es conocido también como envenenamiento del blanco (Swann, 1988). Dependiendo de la cantidad de gas reactivo que se introduzca, será el grado de envenenamiento que alcance el blanco. Este envenenamiento afecta el proceso de erosión de la superficie del blanco y la tasa de depósito, pero es lo que permite cambiar la estequiometría del material (Sanginés et al., 2018).

En este trabajo se utilizaron como gases reactivos el oxígeno ( $O_2$ ) y el nitrógeno ( $N_2$ ), con la finalidad de generar  $SiO_xN_y$  sobre un blanco de silicio. Los gases introducidos se hacen en una concentración  $O_2/N_2$ , dejando al  $N_2$  con un valor fijo debido a su bajo grado de reactividad. La cantidad de  $O_2$  introducido se irá variando con el tiempo, debido a que es altamente reactivo. Dependiendo del grado de concentración entre el  $O_2$  y el  $N_2$ , se logrará formar un compuesto de  $SiO_xN_y$  con cierto índice de refracción.

### 2.5.3 Calibración del sistema de erosión iónica

La calibración del sistema de erosión iónica se realiza para determinar los valores de los índices de refracción que se obtienen mediante la mezcla de gases de  $O_2$  y el  $N_2$  para el  $SiO_xN_y$  y la tasa de depósito por minuto. Con esto se puede crear una lista de flujos para crecer las capas del filtro inhomogéneo. La calibración requiere del uso de dos técnicas *in situ*: La espectroscopía óptica de emisión (OES) y la elipsometría.

Primero se trabaja con el gas reactivo de nitrógeno. A partir de lo reportado por, Rodríguez R. (2023) la calibración para el sistema de vacío del laboratorio debe hacer a una potencia fija entre los 60 y 70 W. La presión de trabajo se maneja con un valor fijo que puede ser entre 5.0 y 6.0 mTorr. Una vez seleccionados los valores de potencia y presión de trabajo, estos deben ser los mismos para toda la calibración. Se maneja un flujo de argón de 20 sccm. Se varía el flujo de  $N_2$  en un rango de 1 hasta 9 sccm para identificar la zona de transición de modo metálico a modo envenenado para el blanco de silicio. El envenenamiento del blanco es la formación de un compuesto dieléctrico sobre la superficie de este. Un súbito aumento en el voltaje y un mayor tiempo de estabilización del plasma en las mediciones de OES es lo que identifica a la zona de transición (Rodríguez-López et al., 2022).

Una vez identificada la zona de transición se realizan depósitos de dos minutos sobre un sustrato de vidrio, variando el flujo de gas con pasos intermedios entre el flujo determinado para la zona de transición y el siguiente escalón. Entre capa y capa se interrumpe el depósito colocando el obturador con la finalidad de dar tiempo al plasma para estabilizarse. Mediante elipsometría cada una de las capas crecidas es medida durante su depósito. Posteriormente los datos son procesados para determinar el espesor por capa, el índice de refracción y la concentración de silicio amorfo y huecos. El flujo de  $N_2$  que genere una capa con un índice de refracción más cercano a 2.0 y con la menor cantidad de silicio amorfo es el que se selecciona para ser utilizado, pues su valor corresponde a una capa de  $Si_3N_4$ .

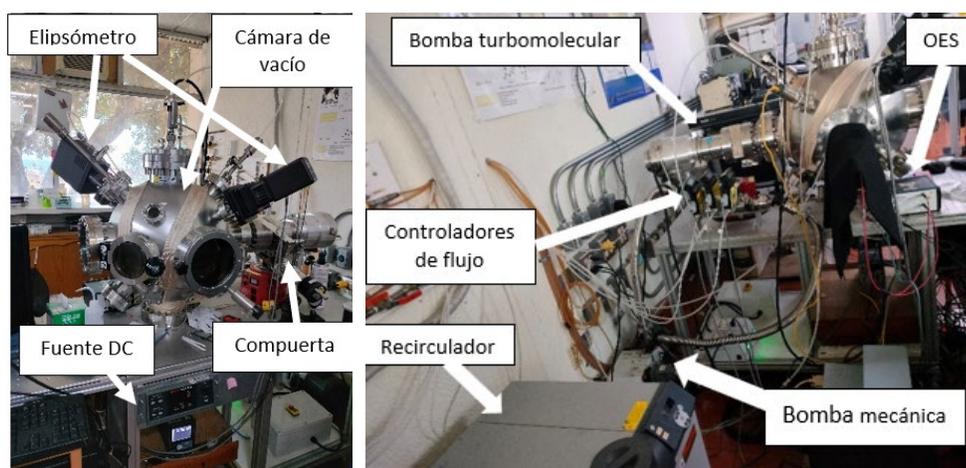
Con el flujo de  $N_2$  determinado, se realiza un nuevo depósito sobre un sustrato de vidrio. Se depositan escalones variando el flujo de  $O_2$  desde 1.5 hasta 0.3 sccm. El tiempo entre escalones es de 1 minuto. El depósito se hace de forma continua y sin cerrar el obturador entre escalones, pues las variaciones son de 0.1 sccm, por lo que el plasma tiene un cambio mínimo. Durante el depósito se toma una medición continua por elipsometría, para posteriormente procesar los datos y determinar los índices de refracción y tasa de depósito para cada flujo de  $O_2$ . Mediante los datos estimados por elipsometría se crea un archivo de texto en el cual se indica el flujo de  $O_2$ , el flujo de  $N_2$ , y el flujo de  $Ar$ , para obtener cierto índice de

refracción y la tasa de crecimiento por minuto. Cabe resaltar que los flujos de  $N_2$  y  $Ar$  se mantienen constantes, ya que el  $O_2$  es sumamente reactivo, por lo que se varía en pequeñas cantidades para cambiar el grado de oxidación y alcanzar el índice de refracción deseado.

El archivo denominado como archivo de calibración, es el que se utiliza en el programa de síntesis para convertir los datos del perfil de índices a una lista de flujos de gases y tiempos de depósito.

#### 2.5.4 Sistema de erosión iónica

A continuación, se muestra una fotografía del equipo de vacío y sus aditamentos.



**Figura 11.** Parte frontal y trasera del sistema de vacío utilizado para el presente trabajo.

La cámara de vacío es modelo Kurt J, Lesker 18". En su interior se tiene un solo cañón modelo Kurt J. Lesker Torus. El cañón está ubicado en la parte superior y sobre este se coloca el blanco de silicio de 2" de diámetro, tipo N dopado con fósforo, marca Kurt J Lesker, con pureza del 99.999%. Debajo del blanco de silicio se encuentra el magnetrón. El cañón está protegido por un escudo de cátodo para evitar la formación de plasma sobre él. El porta-sustratos se encuentra posicionado de forma paralela al blanco, a una distancia de 5 cm respecto al blanco, sobre la parte inferior de la cámara. Un shutter u obturador cubre al sustrato para evitar depósito de material erosionado cuando no se desee. En este trabajo se utilizaron sustratos de vidrio de forma cuadrada de aproximadamente 2 cm por lado.

Se utiliza un recirculador de agua modelo Thermo Scientific TF-900. Su función es evitar que el cañón y la bomba turbomolecular se sobrecalienten durante su funcionamiento.

Dos bombas están acopladas a la cámara de vacío. La primera es una bomba mecánica modelo Leybold TRIVAC D-16 B, utilizada para hacer un vacío del orden de  $10^{-2}$  Torr. La segunda bomba es una turbomolecular modelo Turbotronik NT 151/361, mediante la cual se alcanza un vacío del orden de  $10^{-6}$  Torr. Se cuenta con una compuerta para ajustar la presión dentro de la cámara de vacío. La presión es monitoreada por un sensor cátodo frío modelo Leybold PenningVac PTR 237 N.

Un elipsómetro modelo Woollam MD2000, se encuentra acoplado en la parte superior de la cámara de vacío a  $60^\circ$  respecto del porta sustratos, para realizar medidas *in situ* sobre el sustrato en un rango de 192.1 nm y 1688.4 nm.

De forma horizontal sobre una de las ventanas del equipo se encuentra colocado el arreglo experimental para las mediciones de OES. El arreglo consiste en dos fibras ópticas apuntando hacia la región donde se encuentra el blanco de silicio. Las fibras van conectadas a un espectrómetro de dos sensores modelo Avantes, AvaSpec ULS3648-2-USB2, con rangos de detección de 193 a 466 nm y 386 a 933 nm.

Se cuentan con tres controladores de flujos máxicos modelo Aalborg GFC17, correspondientes al Ar, O<sub>2</sub> y N<sub>2</sub>, con sus rangos respectivamente de: 0-50 sccm ( $\pm 0.01$ ), 0-10 sccm ( $\pm 0.01$ ), 0-10 sccm ( $\pm 0.01$ ).

La fuente de poder suministra una salida de corriente directa, de modo que se puede realizar erosión iónica por corriente directa. El modelo es DC Advanced Energy MDX-500.

### 2.5.5 Condiciones de depósito

Las condiciones de depósito deben de permanecer invariantes durante todo el depósito, ya que a partir de esos valores fue que se llevó a cabo el proceso de calibración. A continuación, se mencionan las condiciones de depósito utilizadas en este trabajo.

**Presión base:** Previo a encender el plasma dentro, la presión siempre se llevó a un valor por debajo de los  $5 \times 10^{-6}$  Torr.

**Presión de trabajo:** Se introduce el gas de trabajo, que en este caso es  $Ar$ . La introducción de este gas significa un incremento en la presión dentro de la cámara. Mediante la compuerta se hace un ajuste de la presión hasta dejarla en un rango entre los  $5\text{ mTorr}$  y  $6\text{ mTorr}$ .

Al introducirse gases reactivos la presión de trabajo variará. Es importante regular la presión para mantenerla constante, ya que un cambio en esta genera un cambio en el camino libre medio del material.

**Potencia:** La fuente de poder es la que suministra la potencia entre el ánodo y cátodo, de forma tal, que se lleve a cabo el proceso de ionización. En este trabajo se ha usado una potencia entre los  $60\text{ W}$  y  $70\text{ W}$ .

**Flujos:** Se maneja un flujo constante de  $Ar$  de  $20\text{ sccm}$ . El valor constante para el flujo de  $N_2$  fue de  $9\text{ sccm}$ . El flujo de  $O_2$  utilizado se varió entre  $0.2\text{ sccm}$  y  $1.5\text{ sccm}$ .

### 2.5.6 Crecimiento de los filtros inhomogéneos

Mediante el archivo de calibración obtenido al finalizar la calibración del sistema de erosión iónica, se puede generar un archivo de flujos y tiempos de depósito para un perfil de índices de refracción sintetizado de interés. El archivo de flujos y tiempos es colocado sobre la computadora que está conectada a los controladores de flujo. Un programa creado en LabView lee el archivo de texto e indica a los controladores el tiempo y la cantidad de flujo de  $O_2$  que se debe introducir para crecer cada capa de  $SiO_xN_y$  con el índice de refracción y espesor correspondientes. El espesor del filtro define el tiempo que dura el experimento. Durante los depósitos, el operador debe de abrir el obturador al inicio del experimento y cerrarlo al final. También debe ajustar la presión de trabajo mediante la compuerta para mantenerla constante.

En este trabajo y como primera aproximación en el crecimiento de filtros inhomogéneos, se han trabajado con tres filtros con respuestas espectrales del tipo Gaussiana invertida. La forma sinusoidal de sus perfiles de índices les permite mantener su respuesta espectral muy similar a la sintetizada, sin la necesidad de un acoplamiento de los índices de refracción en los extremos del filtro hacia el sustrato sobre el cual es crecido y el medio incidente. El primer filtro inhomogéneo fue creado por el método de Southwell y consiste en una función seno como perfil de índice. Su respuesta espectral tiene un pico de transmitancia mínima del 2% en los 530 nm. El segundo filtro inhomogéneo fue sintetizado utilizando el método de transformada de Fourier. Como respuesta espectral deseada se utilizó una Gaussiana invertida con un pico

de transmitancia mínima del 29%, centrado en los 612 nm. El tercer filtro inhomogéneo también fue sintetizado por el método de transformada de Fourier. Se usó una Gaussiana invertida con un pico mínimo de transmitancia deseada en los 532 nm y una amplitud del 30%, con la finalidad de funcionar como un divisor de haz de un láser.

### 2.5.7 Determinación de la transmitancia del filtro inhomogéneo

El interés del crecimiento por erosión iónica de los filtros inhomogéneos es el de demostrar que es posible reproducir los filtros sintetizados mediante el programa. La transmitancia de los filtros inhomogéneos crecidos por erosión iónica fue medida mediante un espectrofotómetro en un rango entre los 400 y los 900 nm. El espectrofotómetro utilizado es marca Perkin Elmer, modelo 330. El resultado fue comparado con la transmitancia deseada del filtro inhomogéneo sintetizado.

## Capítulo 3. Resultados

---

A lo largo de este capítulo se presentan y discuten los resultados obtenidos de la interfaz gráfica, la síntesis de filtros inhomogéneos y la parte experimental de los filtros inhomogéneos crecidos por erosión iónica. En la parte de síntesis, se trabajaron tres diferentes curvas arbitrarias en términos de la transmitancia, las cuales se consideran ejemplos representativos sobre el alcance de los filtros inhomogéneos. Tales ejemplos son: la cúpula del capitolio de Washington D.C., tal como lo reporta Dobrowolski, (1986). La silueta tomada del "Xinantecatl", volcán ubicado en la región del Valle de Toluca y cuya silueta cuenta con dos picos de transmitancia máxima. Finalmente, una función Gaussiana invertida, cuya amplitud central fue variada y que puede fungir como un filtro tipo pasabanda para una región específica en el rango visible. La finalidad de las diferentes pruebas realizadas en este trabajo fue conseguir un dominio en la síntesis de filtros inhomogéneos, de modo que se lograron obtener las mejores respuestas espectrales, además de índices de refracción y espesores reproducibles experimentalmente.

Para medir el grado de aproximación entre la respuesta espectral del filtro sintetizado respecto a la respuesta espectral deseada, se calculó el valor de la función chi cuadrada ( $\chi^2$ ), tal como se describe en la ecuación (25). Mientras más pequeño sea este valor, mayor será el grado de aproximación alcanzado por la respuesta espectral del filtro sintetizado. Los resultados del presente trabajo se encuentran divididos en cuatro secciones principales.

En la primera sección (3.1), se explica la interfaz gráfica creada para realizar la síntesis teórica de filtros inhomogéneos y la conversión del perfil de índices de refracción a un archivo de flujos de gases con el tiempo. La segunda sección (3.2), muestra los resultados que se obtienen al emplear la ecuación para construir el perfil de índice de forma directa. Para ello se variaron los espesores ópticos hasta encontrar el óptimo. Posteriormente se probaron las diferentes funciones Q y se determinó cuál de ellas da el mejor resultado. Finalmente, se analizaron diferentes fases iniciales y se encontró la más adecuada para la curva analizada. Las fases iniciales utilizadas fueron múltiplos de  $\pi$ , observando el impacto que se tiene sobre la distribución de los índices de refracción, especialmente para las bajas frecuencias. En la tercera sección (3.3), se sintetizaron filtros inhomogéneos mediante el método iterativo de corrección por amplitud, de modo que se incrementó la precisión de la respuesta espectral. La cuarta sección (3.4) retomó el método iterativo de corrección por amplitud y se combinó con el método iterativo de corrección por fase, conocido en la literatura por el acrónimo *SWIFT*. La teoría detallada sobre este método iterativo puede

encontrarse en el Anexo D del presente trabajo. Finalmente, en la quinta sección (3.5), se muestran tres filtros inhomogéneos crecidos experimentalmente mediante erosión iónica.

### 3.1 Interfaz gráfica

La interfaz gráfica fue creada con la finalidad de que cualquier usuario sin conocimientos previos de programación, pueda realizar síntesis de filtros inhomogéneos y obtener los datos para reproducirlo experimentalmente. A lo largo de la sección 3.1 se explica en qué consiste la interfaz gráfica, mientras que el Anexo E complementa los resultados presentados.

#### 3.1.1 Pestaña: “Síntesis por Transformada de Fourier”

Esta pestaña cuenta con todas las herramientas para sintetizar filtros inhomogéneos mediante transformada de Fourier (TF) y refinarlos. La Figura 12 muestra la estructura de esta pestaña. Se encuentra separada en tres recuadros. El recuadro llamado “Variables de entrada”, es donde el usuario inserta los valores para diseñar el filtro, incluyendo la función  $Q$  que se desea utilizar. En caso de que se busque crear un diseño rápido sin la necesidad de algún refinamiento, sólo se utilizan estas variables. El recuadro llamado “Tipo de refinamiento”, es el que permite seleccionar si se realizará una síntesis directa o una síntesis con algún tipo de refinamiento. Dependiendo de la opción que elija el usuario, las entradas del recuadro “Variables de refinamiento” serán habilitadas, ya que sólo son utilizadas cuando se usan los métodos de refinamiento.

Se cuenta con una serie de botones para cargar la información de la respuesta espectral de interés en términos de  $T$ , iniciar la síntesis, parar la síntesis en caso de que el resultado no sea el esperado durante las iteraciones, guardar los valores de entrada que dieron un buen resultado y finalizar el programa. En la parte derecha de la pestaña se cuenta con un área de graficado dividida en tres partes. La superior muestra el perfil de índices creado, la gráfica intermedia muestra su respuesta espectral y la gráfica inferior muestra los valores de la función  $Q$  para la iteración actual. Las gráficas se van actualizando en tiempo real conforme se van realizando los cálculos.

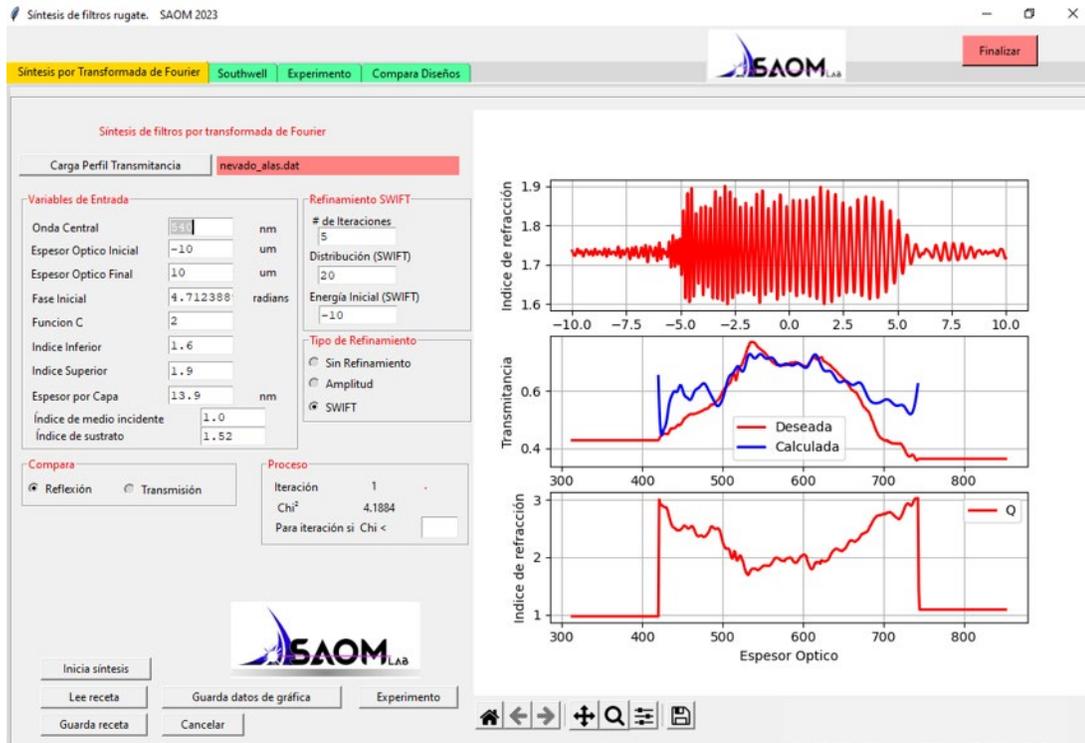


Figura 12. Pestaña de síntesis por transformada de Fourier.

El programa guarda las gráficas de respuesta espectral y perfil de índices cuyo valor de  $\chi^2$  sea menor a los previamente calculados, para dar un seguimiento a la evolución de la respuesta espectral y conocer el número de iteración en el cual se alcanzó dicha respuesta espectral.

### 3.1.2 Pestaña “Southwell”

La pestaña funciona para sintetizar filtros inhomogéneos utilizando una función periódica, tal como se muestra en la Figura 13. La función periódica se encuentra en términos del espesor físico y el índice de refracción. W. H. Southwell, fue quien propuso este tipo de filtros (Southwell, 1989).

Se cuentan con 6 funciones periódicas para sintetizar diferentes perfiles de índice. Las 6 funciones comparten algunas variables de entrada como lo son el número de capas, el espesor por capa y el número de ciclos, entre otras. La pestaña se encuentra separada en diferentes recuadros, los cuales contienen valores de entrada que pueden o no ser usados, dependiendo del tipo de función seleccionada. Para este caso, como la función seleccionada es la que funge como perfil de índice, no se necesita cargar una

respuesta espectral deseada. La síntesis por el método de Southwell se restringe a obtener respuestas espectrales correspondiente al par transformado de la función seleccionada como perfil de índices.

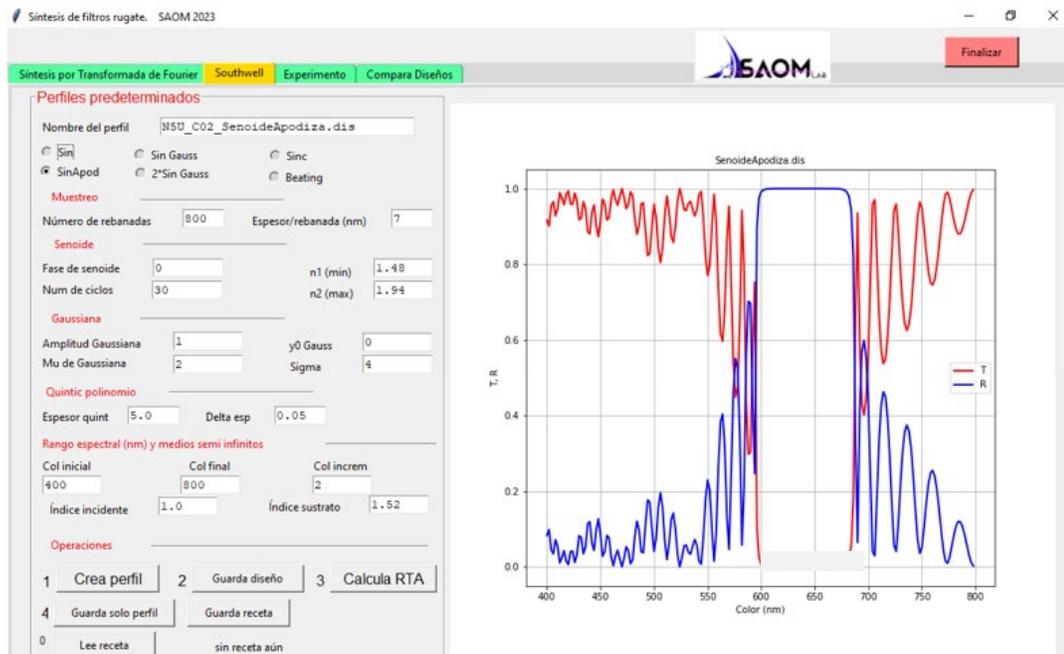


Figura 13. Pestaña de síntesis de filtros “Southwell”.

La longitud de onda central de la respuesta espectral se puede ajustar a partir del espesor o el número de ciclos. El mínimo valor de transmitancia para la longitud de onda central se puede ajustar a partir de la diferencia de índices de refracción máximo y mínimo. Aumentar la diferencia entre los índices de refracción disminuye los valores de las transmitancias a lo largo de todas las longitudes de onda. Disminuir la diferencia entre los índices de refracción, aumenta todos los valores de las transmitancias. Los botones se encuentran ubicados en el recuadro inferior del programa. Su uso detallado se describe en el Anexo E.

### 3.1.3 Pestaña “Experimento”

Mediante esta pestaña se realizó la conversión del archivo de diseño del filtro inhomogéneo a uno de variación de flujo de oxígeno y nitrógeno a través del tiempo, utilizando los datos de calibración sobre nuestra cámara, tal como lo describe la subsección 2.5.3. Los datos para el flujo de gas de oxígeno, índices de refracción y espesor por minuto, contenidos en el archivo de calibración, son interpolados en esta pestaña, de modo que se puedan obtener puntos intermedios, esto se realiza dando clic al botón “Graf

calib". Para mostrar la interpolación, el programa realiza dos gráficas, la primera en términos del índice de refracción contra el flujo de oxígeno y la segunda el flujo de oxígeno contra tiempo de depósito, tal como lo muestra la Figura 14. Por su parte, en la Figura 15, se muestra la pestaña.

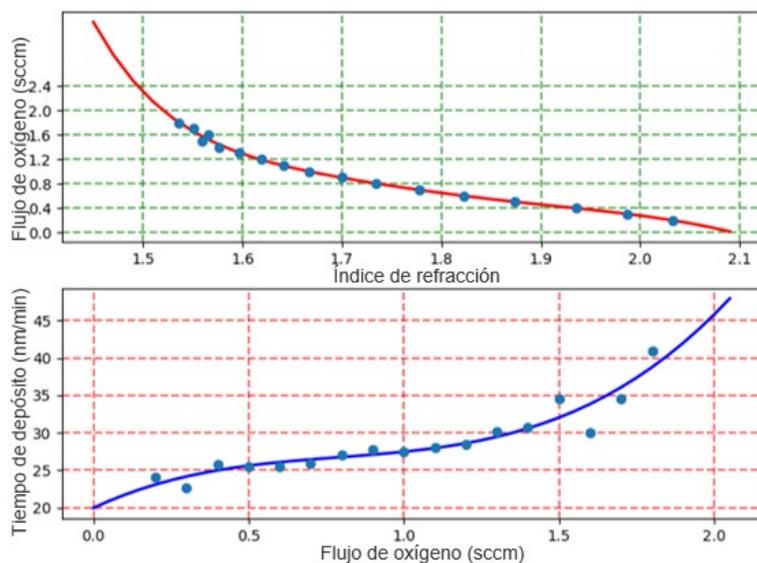


Figura 14. Gráficas de interpolación para el ajuste de calibración.

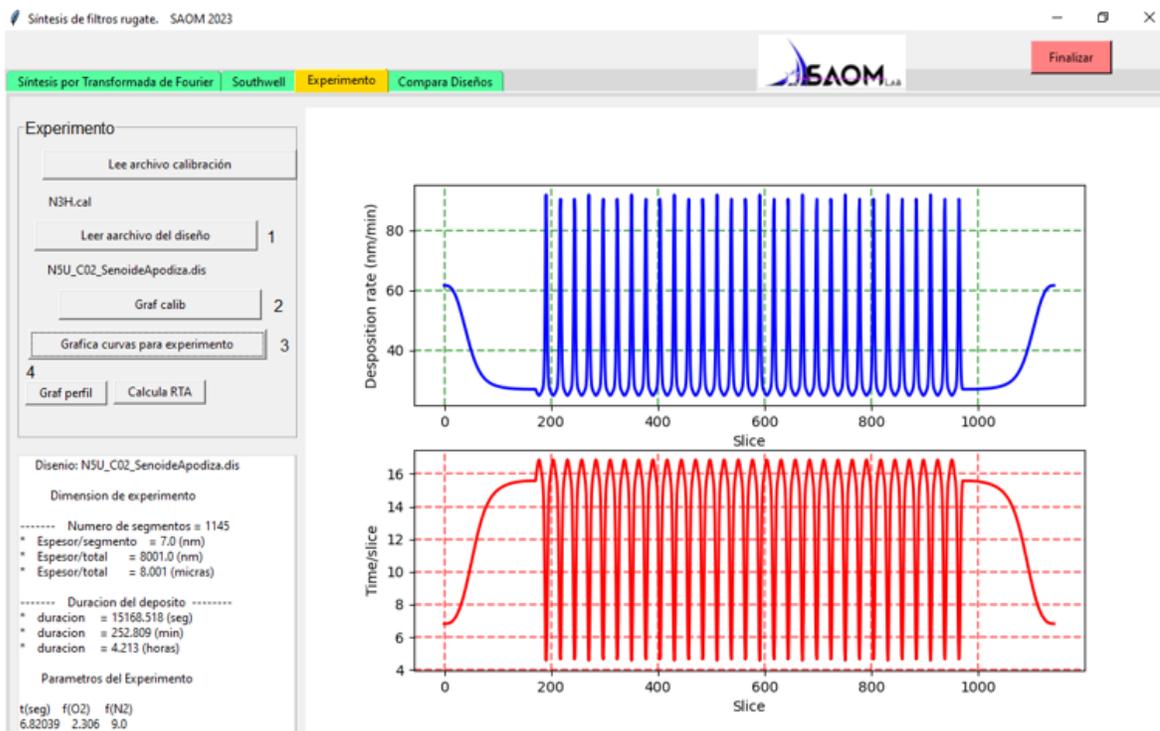


Figura 15. Pestaña "Experimento".

Una vez hecha la interpolación, se hace clic sobre el botón (3) “Grafica curvas para experimento”, para convertir el perfil de índices de interés en un archivo de flujos de gases de oxígeno, nitrógeno y el tiempo de depósito. Los flujos y tiempos se muestran sobre el recuadro blanco en la parte inferior izquierda de la pestaña, incluyéndose también el número de capas, espesor físico total del filtro y tiempo de duración total del depósito. Adicionalmente, como se muestra en la Figura 15, se realizan dos gráficas para mostrar el número de capas en función de la tasa de depósito y el tiempo correspondiente para cada capa. El archivo de flujos resultante es el que se utilizó para crecer el filtro inhomogéneo por erosión iónica.

### 3.1.4 Pestaña “Compara Diseños”

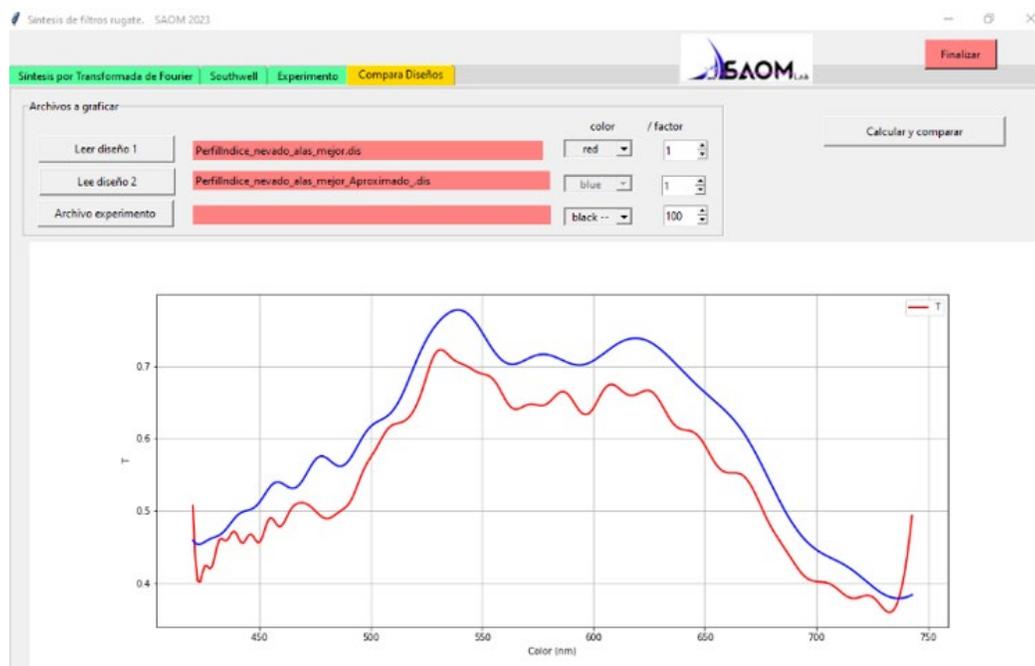


Figura 16. Pestaña “Compara Diseños”.

Se trata de la pestaña para el análisis de los resultados obtenidos, pues permite comparar dos respuestas espectrales sintetizadas con una respuesta espectral medida experimentalmente a través del espectrofotómetro en el rango Uv-vis. Su diseño se muestra en la Figura 16. Para cada curva se puede seleccionar el color deseado, además de que cuenta con una opción de factor para escalar los valores de las transmitancias en caso de ser necesario. Al dar clic en el botón “Calcular y comparar” se realiza el ajuste de escalas y se dibujan las gráficas en la parte inferior. Como el resto de las pestañas, cuenta con un botón para cerrar el programa, el cuál en este caso es “Fin”.

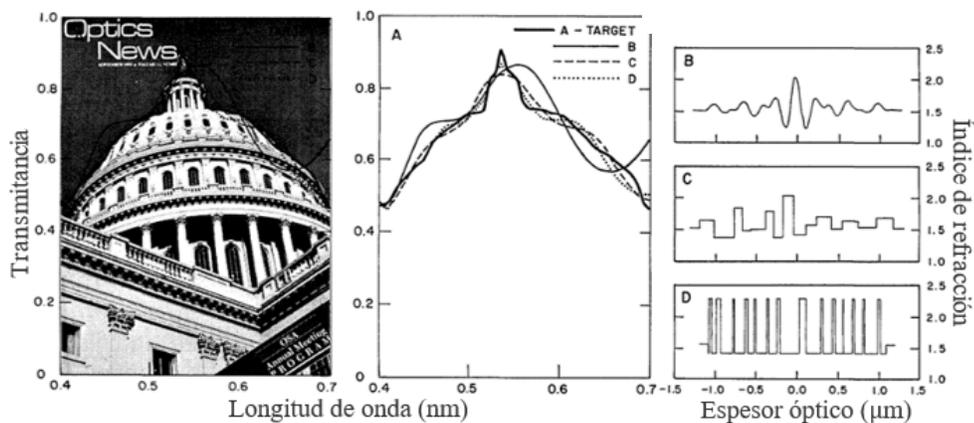
## 3.2 Síntesis de filtros inhomogéneos sin métodos iterativos

Al emplear la ecuación para construir el perfil de índices de refracción (ecuación (15)):

$$n(x) = \exp \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q_m(k)}{k} \text{sen}(\Phi_0(k) - kx) dk \right],$$

se obtiene un filtro inhomogéneo cuya respuesta espectral debe ser calculada y comparada con la deseada. Las condiciones iniciales de espesor óptico, función Q y fase inicial, influyen directamente en la respuesta espectral, por lo que para comprender a fondo los filtros inhomogéneos, de modo que se puedan obtener los mejores resultados, se debe partir del estudio de estas tres condiciones iniciales, como se verá a continuación. Para simplificar los resultados mostrados en las siguientes subsecciones, se han omitido las síntesis preliminares en las cuales se determinaron los valores de partida para las pruebas realizadas. Durante las pruebas preliminares se determinó a prueba y error el rango de índice de refracción superior e inferior para las 3 curvas analizadas. El procedimiento consistió en partir de un índice de refracción superior de 2.0 y un índice de refracción inferior de 1.5. A partir de la respuesta espectral obtenida por el filtro sintetizado, se modificó el rango de separación de índices de refracción utilizando el siguiente criterio. Si la respuesta espectral se encontraba por debajo de los valores esperados para todas las longitudes de onda, la diferencia de índices de refracción era disminuida. Si los valores de la transmitancia resultaban mayores a los esperados, la diferencia de índices de refracción era aumentada.

### 3.2.1 Cúpula del Capitolio en Washington D.C. (Sin Refinamiento).



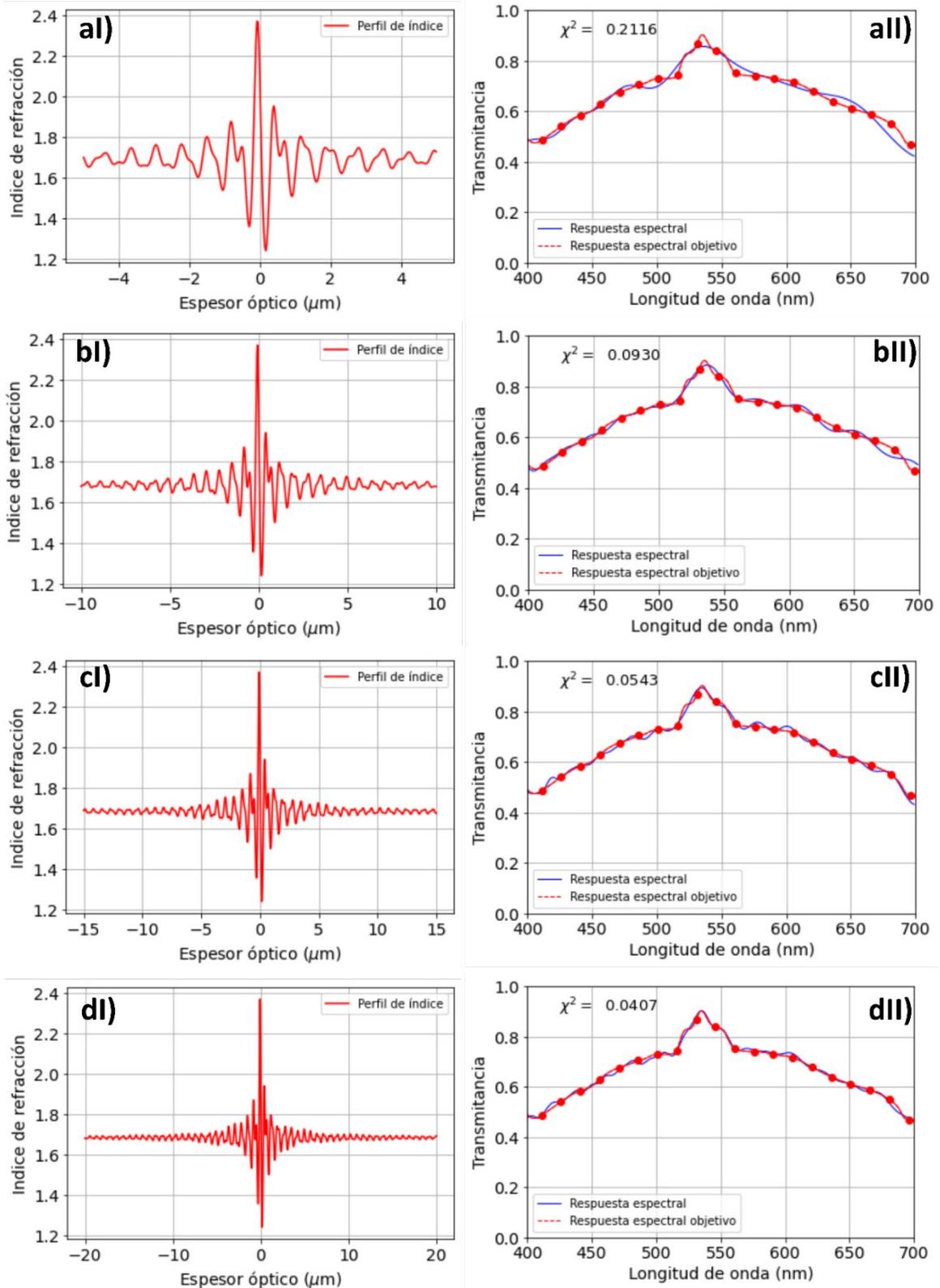
**Figura 17.** A) Silueta del capitolio y respuesta espectral del filtro inhomogéneo (línea negra continua). B) Perfil de índice de 2.5 μm. C) Perfil de índices discretizado a partir de B. D) Perfil de índices tipo “agujas”. (Dobrowolski, 1986).

En su artículo de 1986, Dobrowolski toma esta silueta como ejemplo de una respuesta espectral arbitraria. En su ejemplo, sólo se considera un espesor óptico de  $2.5 \mu m$ , tal como se muestra en la Figura 17, B. Para los filtros sintetizados en esta tesis, se variaron los espesores ópticos, de modo que se demostró la evolución de la respuesta óptica espectral, a la par que se determinó la mejor respuesta a partir de los espesores ópticos analizados. La fase inicial propuesta se mantuvo constante en  $\frac{6}{5}\pi$ . Tal fase es reportada por Verly & Dobrowolski, (1990) y dio buenos resultados en las pruebas preliminares previamente realizadas. Los valores del índice de refracción superior e inferior se mantuvieron fijos siendo estos 2.37 y 1.24. Tales valores fueron determinados a prueba y error en pruebas preliminares. Mediante tales pruebas, también se encontró que el mejor espesor óptico por capa fue de 13.9 nm. Se trabajó con la función  $Q_2$  como punto de partida para todas las pruebas preliminares realizadas.

### 3.2.1.1 Modificación del espesor óptico (filtraje de frecuencias, capitolio)

Las curvas de transmitancia contra longitud de onda se encuentran en el dominio coordenado o real, mientras que el perfil de índice contra espesor óptico se encuentra en el dominio de las frecuencias espaciales. Aquello implica que el espesor óptico del filtro inhomogéneo contiene parte de la información espectral necesaria para poder recrear de forma efectiva la curva deseada, por lo que añadiendo o retirando espesores ópticos, se modificará la respuesta espectral. En la Figura 18, se muestran las gráficas obtenidas para los espesores ópticos de  $10 \mu m$ ,  $20 \mu m$ ,  $30 \mu m$  y  $40 \mu m$  y sus respectivas respuestas espectrales.

Al analizar los resultados en la Figura 18, comenzando por el espesor óptico de  $10 \mu m$ , la reconstrucción de la respuesta óptica no es la adecuada, pero la curva obtenida comienza a tomar la forma deseada. Duplicando el espesor óptico a  $20 \mu m$ , se mejora la respuesta espectral de forma considerable, pues el valor de la  $\chi^2$  pasó de 0.2116 a 0.0930, aunque existen oscilaciones no deseadas en los extremos. Para los  $30 \mu m$ , el espesor óptico se obtiene una respuesta espectral que aproxima a la deseada, donde el valor de la  $\chi^2$  fue de 0.0543, no obstante, todavía existen algunas oscilaciones. Con  $40 \mu m$  de espesor, se obtiene la mejor respuesta espectral cuyo valor de  $\chi^2$  fue de 0.0407, siendo un cambio poco significativo si se compara con el valor obtenido para  $30 \mu m$ . Mediante estos resultados, se comprueba que incrementar el ancho de frecuencias consideradas (espesor óptico) mejora el desempeño óptico, aunque como se muestra en el resultado de  $40 \mu m$ , el valor de la  $\chi^2$  sólo disminuye una centésima.



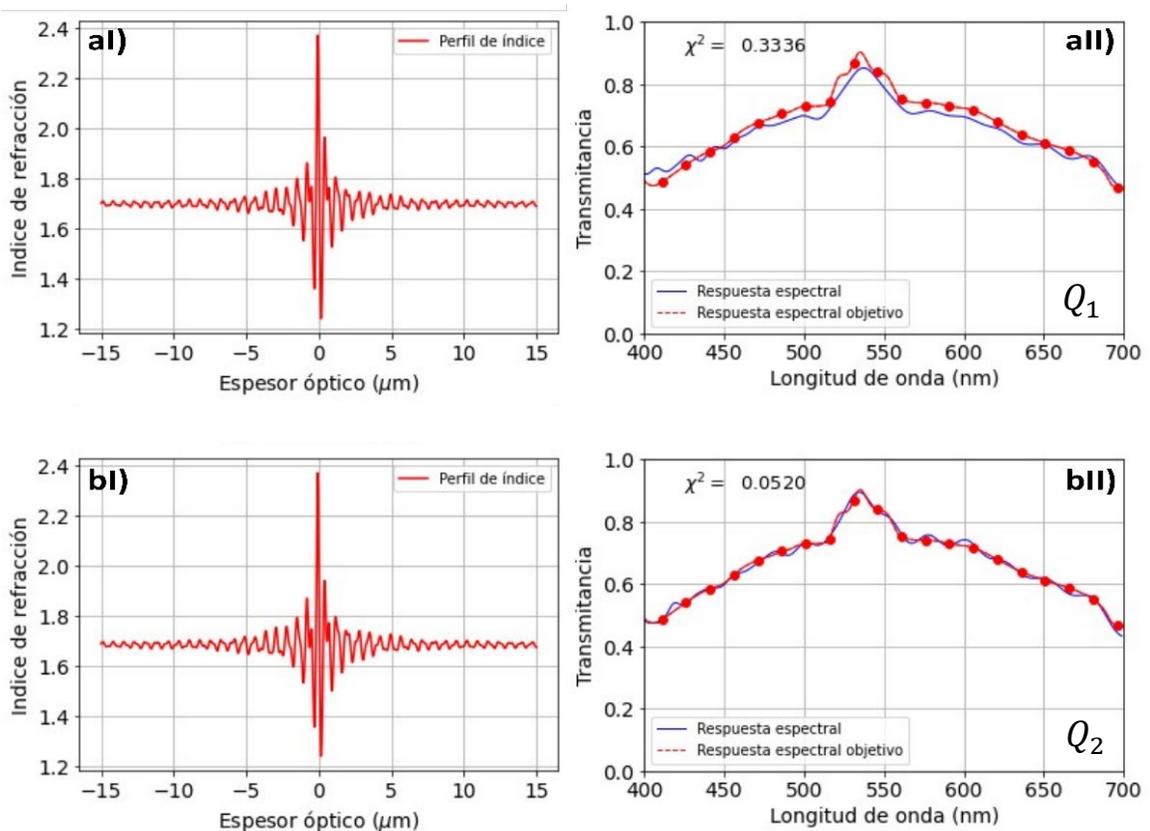
**Figura 18.** aI-aII) Perfil de índice con espesor óptico de 10  $\mu\text{m}$  y su respuesta espectral. bI-bII) Perfil de índice con espesor óptico de 20  $\mu\text{m}$  y su respuesta espectral. cI-cII) Perfil de índice con espesor óptico de 30  $\mu\text{m}$  y su respuesta espectral. dI-dII) Perfil de índice con espesor óptico de 40  $\mu\text{m}$  y su respuesta espectral.

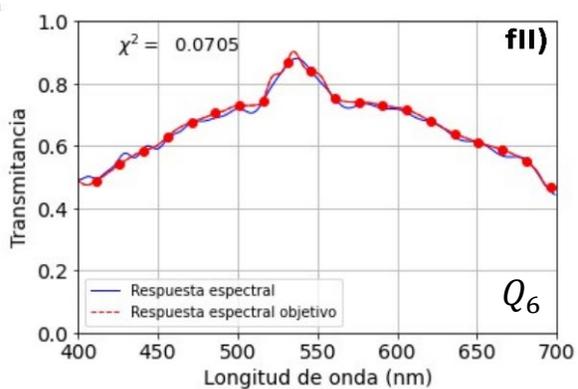
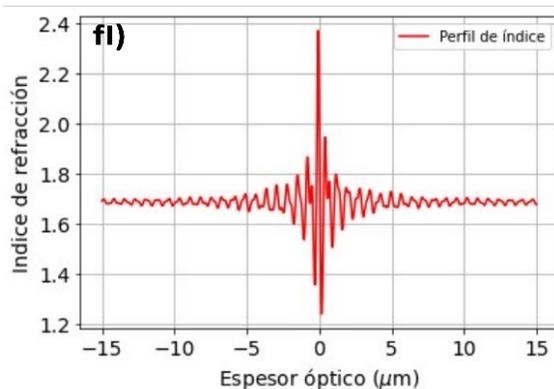
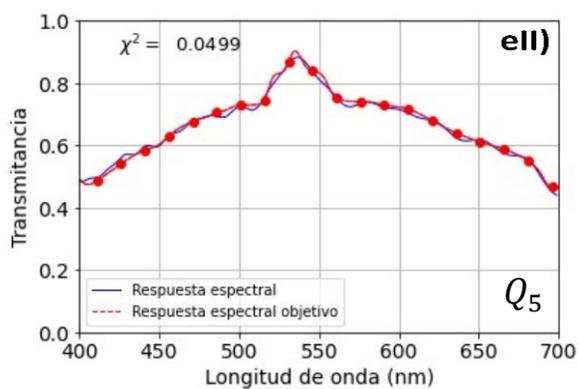
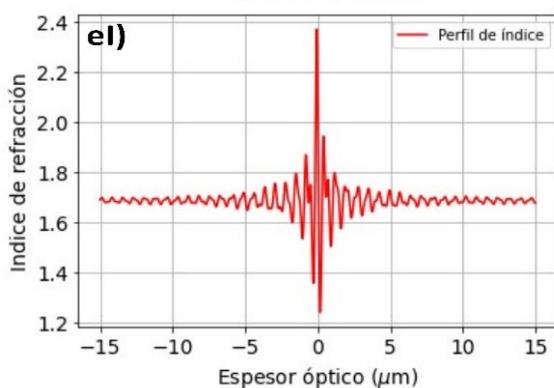
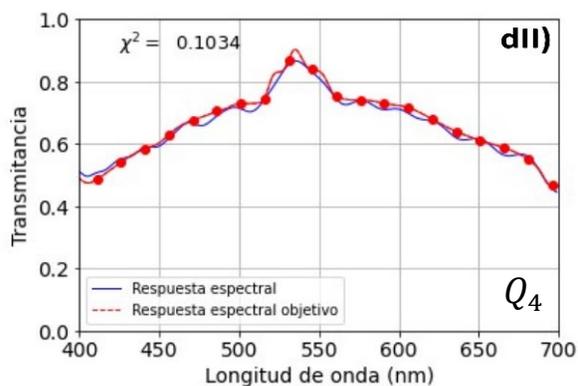
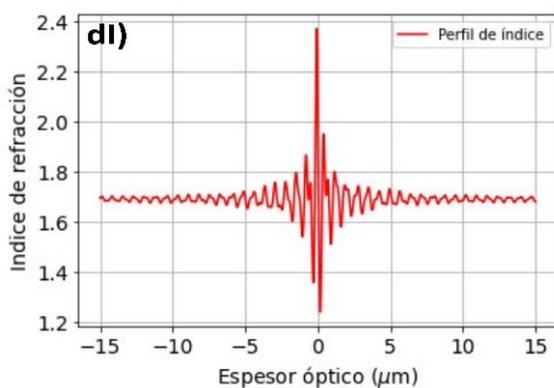
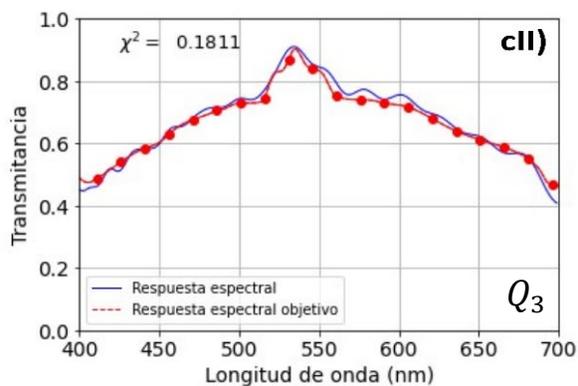
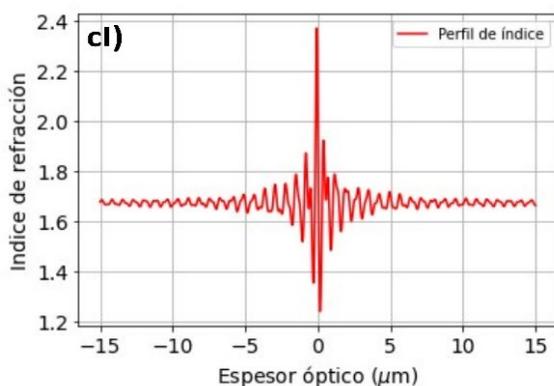
Tiene que considerarse que, a mayor espesor, mayores serán los tiempos de crecimiento del filtro inhomogéneo, por lo que el usuario tendrá que decidir sobre el costo beneficio del espesor óptico que seleccione. A partir de los resultados mostrados en la Figura 18, se obtienen buenas respuestas espectrales para espesores ópticos entre los 20  $\mu\text{m}$  y 40  $\mu\text{m}$ . Se optó por utilizar 30  $\mu\text{m}$  de espesor óptico para las siguientes pruebas, por ser el valor intermedio del rango de espesores mediante los cuales se obtiene una buena respuesta espectral.

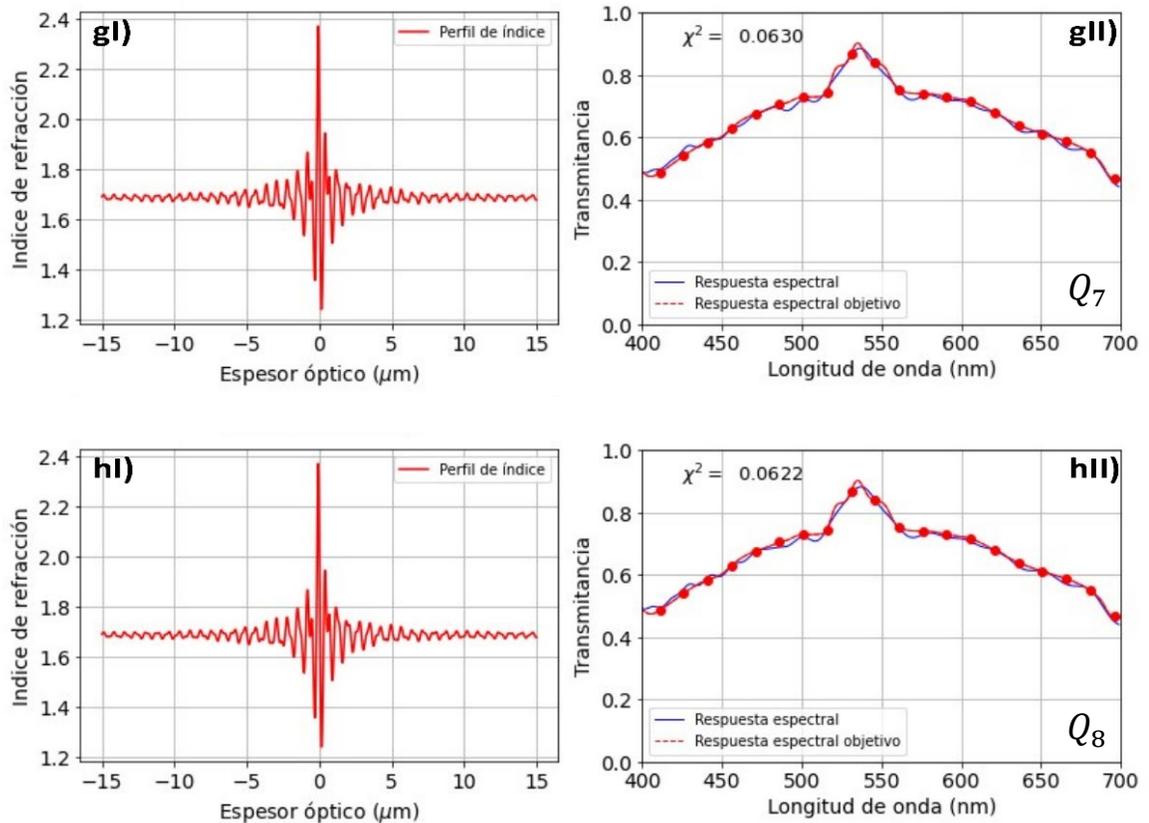
### 3.2.1.2 Determinando la mejor función Q (capitolio)

Una vez que el espesor óptico ideal del filtro ha sido determinado, se prosigue a probar las 8 diferentes funciones  $Q$  tal como se reportan en la Tabla 1, de modo que se pueda determinar cuál da el mejor desempeño óptico. La fase inicial se mantuvo constante en  $\frac{6}{5}\pi$ .

Los resultados obtenidos al probar las funciones  $Q$  son los siguientes:







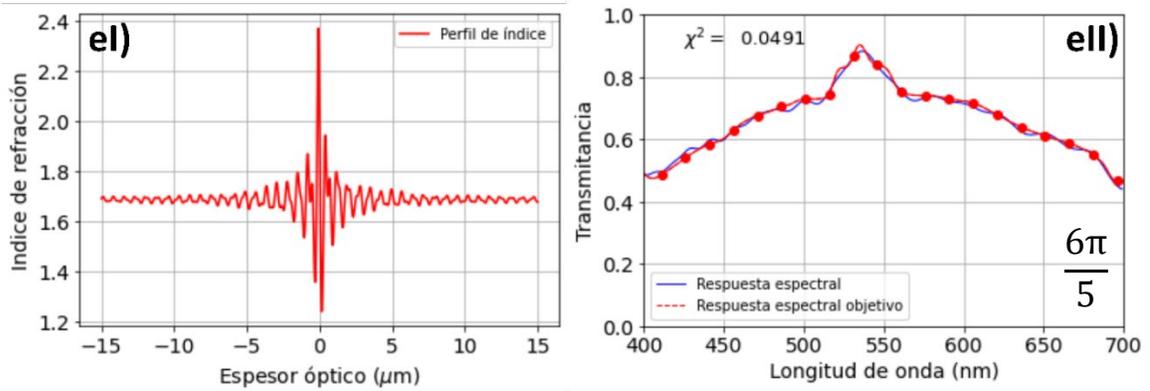
**Figura 19.** Perfil de índice y respuesta espectral sintetizado con al-all) Función  $Q_1$ . bl-bII) Función  $Q_2$ . cl-cII) Función  $Q_3$ . dl-dII) Función  $Q_4$ . el-eII) Función  $Q_5$ . fl-fII) Función  $Q_6$ . gl-gII) Función  $Q_7$ . hl-hII) Función  $Q_8$ .

A partir de los valores obtenidos de la  $\chi^2$ , vemos que las funciones  $Q$  arrojan diferentes resultados, por lo que listándolas en orden de la peor a la mejor quedarían de la siguiente forma:  $Q_1$ :  $\chi^2 = 0.3336$ ,  $Q_3$ :  $\chi^2 = 0.1811$ ,  $Q_4$ :  $\chi^2 = 0.1034$ ,  $Q_6$ :  $\chi^2 = 0.0705$ ,  $Q_7$ :  $\chi^2 = 0.0630$ ,  $Q_8$ :  $\chi^2 = 0.0622$ ,  $Q_2$ :  $\chi^2 = 0.0543$ ,  $Q_5$ :  $\chi^2 = 0.0499$ . Para la silueta del capitolio la peor función  $Q$  fue la 1, mientras que la mejor fue la 5, sin embargo, la función  $Q_2$  dio un resultado similar al de  $Q_5$ , por lo que puede también ser utilizada para obtener una buena respuesta espectral.

### 3.2.1.3 Determinando la mejor fase inicial (capitolio)

La fase inicial  $\Phi_0$ , contenida en la ecuación (15) determina la distribución de las frecuencias centrales, las cuales se debe recordar poseen la información sobre la forma general de la silueta, por lo que establecer la fase inicial adecuada permitió obtener una respuesta espectral más cercana a la deseada.





**Figura 20.** Perfil de índice y su respuesta espectral con frecuencia al-all)  $\frac{\pi}{2}$ . bl-bII)  $\pi$ . cl-clI)  $\frac{3}{2}\pi$ . dl-dII)  $2\pi$ . el-eII)  $\frac{6}{5}\pi$ .

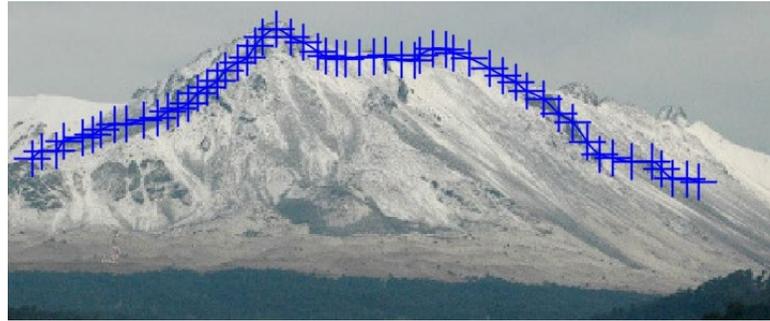
En esta sección, se hizo una variación de la fase inicial en múltiplos de  $\pi$ :  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3}{2}\pi$ ,  $2\pi$  y  $\frac{6}{5}\pi$ . De acuerdo con los resultados obtenidos de las subsecciones anteriores, se trabajó con un espesor óptico de  $30 \mu m$  y la función  $Q_5$ , a partir de los cuales se logró obtener el menor valor de  $\chi^2$ . A partir de las condiciones iniciales mencionadas, se obtuvieron los resultados mostrados en la Figura 20.

Los resultados obtenidos demuestran la influencia de la fase inicial en la respuesta espectral, pues para las fases de  $\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{3}{2}\pi$  se obtuvieron los peores resultados en los valores de la  $\chi^2$ , siendo estos de 0.4106 y 0.5949 respectivamente, además de que en sus gráficas de la respuesta espectral (all y cII), se notan oscilaciones en los extremos, lo cual generó una mala respuesta espectral. Por otra parte, las frecuencias  $\pi$ ,  $2\pi$  y  $\frac{6}{5}\pi$ , arrojan resultados muy similares en la función  $\chi^2$ , siendo el mejor resultado cuando se usó la frecuencia  $\pi$ , aunque las variaciones entre tales resultados son mínimas, por lo que, para el ejemplo analizado, las 3 frecuencias son viables. A partir de los resultados obtenidos, las condiciones iniciales óptimas para este tipo de siluetas y utilizando un rango de índices de refracción entre 2.37 y 1.24, son: espesor óptico de  $30 \mu m$ , la función  $Q_5$  y una fase inicial de  $\pi$ .

### 3.2.2 Silueta del volcán XinantecatI o nevado de Toluca

Se utilizó la silueta del volcán XinantecatI como segundo ejemplo. Para generar la curva de transmitancias, se digitalizó parte de la silueta del volcán utilizando el programa Engauge Digitizer (Mitchell et al., 2023). De la Figura 21, se estableció que la transmitancia tuviera porcentajes entre 40 y el 80%. Las longitudes

de onda consideradas se consideraron entre los 400 nm a los 750 nm para abarcar el rango de longitudes de onda en el visible.



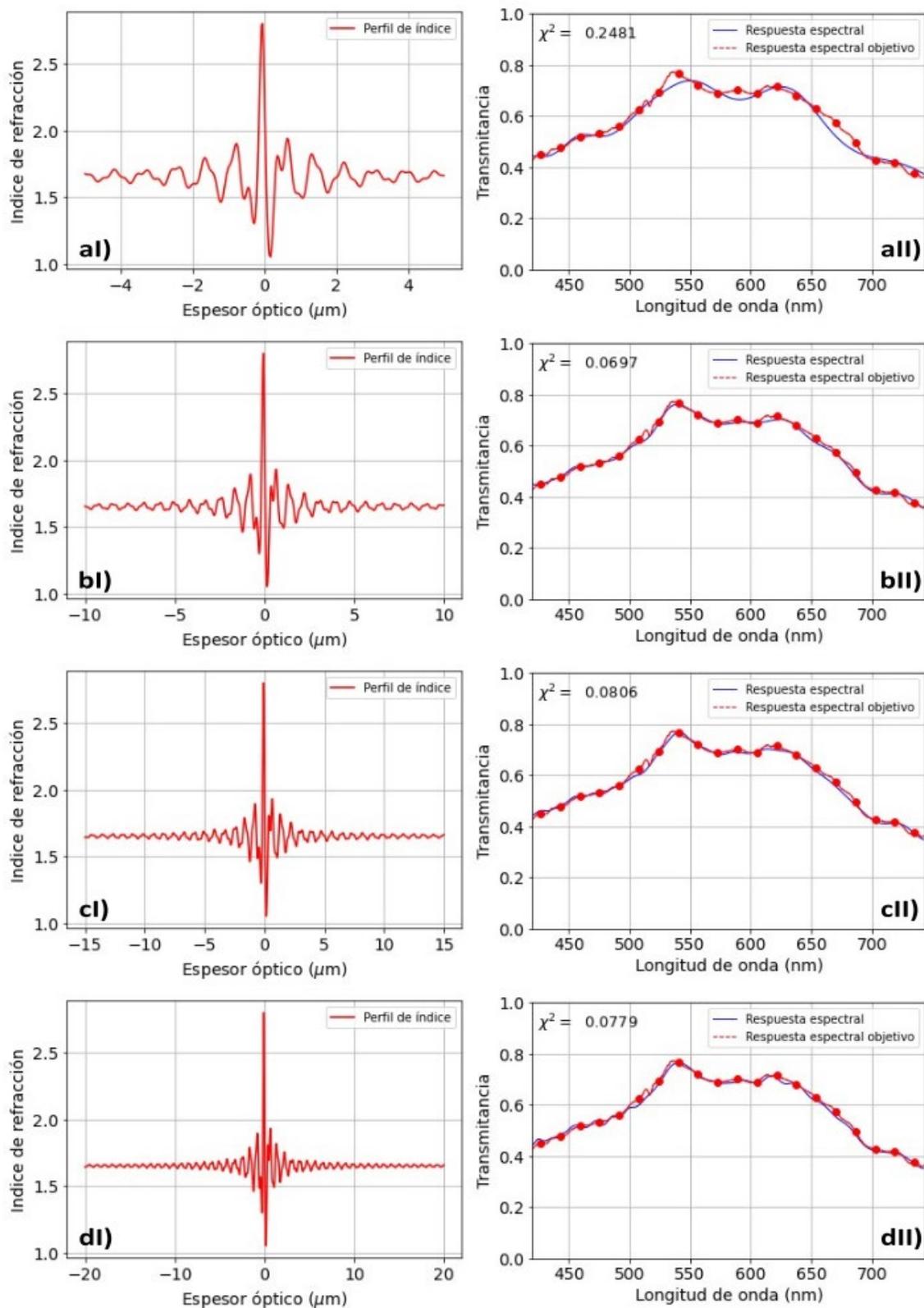
**Figura 21.** Silueta que se consideró de la imagen del volcán Xinantecatl (Turimexico, 2016).

### 3.2.2.1 Modificación del espesor óptico (nevado de Toluca)

Para seguir un protocolo que arrojara resultados comparables entre las síntesis de las tres siluetas consideradas para este trabajo, se sintetizaron los mismos espesores ópticos, siendo estos de  $10\ \mu\text{m}$ ,  $20\ \mu\text{m}$ ,  $30\ \mu\text{m}$  y  $40\ \mu\text{m}$ . La función  $Q$  utilizada fue la  $Q_2$  y la fase inicial  $\frac{6}{5}\pi$ . Los índices de refracción superior e inferior se mantuvieron constantes y fueron de 2.8 y 1.05. Dichos valores fueron previamente determinados en pruebas preliminares. El espesor óptico por capa fue de  $13.9\ \text{nm}$ , siendo este el mismo valor usado para el ejemplo del capitolio.

A partir de estas condiciones iniciales se obtuvieron los perfiles de índice y sus correspondientes respuestas espectrales, tal como se muestra en la Figura 22.

De acuerdo con los resultados, vemos que el espesor óptico de  $10\ \mu\text{m}$  se obtiene un valor de  $\chi^2 = 0.2481$ , de modo que se obtiene la forma general de la silueta, pero existen discrepancias en varios puntos al centro y en los extremos de la curva. Al incrementar el espesor óptico a  $20\ \mu\text{m}$ , el valor de la  $\chi^2$  disminuye considerablemente, pasando de 0.2481 a 0.0697. La gráfica de la respuesta espectral bii), una buena aproximación e la respuesta espectral del filtro respecto a la esperada, por lo que para el volcán Xinantecatl, a partir de los  $20\ \mu\text{m}$  de espesor óptico se obtiene un buen resultado. Para un espesor óptico de  $30\ \mu\text{m}$ , el valor de la  $\chi^2$  incrementa hasta 0.0806, mientras que para los  $40\ \mu\text{m}$ , se alcanza un valor de  $\chi^2$  de 0.0779



**Figura 22.** aI-aII) Perfil de índice de  $10 \mu\text{m}$  y su respuesta espectral. bI-bII) Perfil de índice de  $20 \mu\text{m}$  y su respuesta espectral. cI-cII) Perfil de índice de  $30 \mu\text{m}$  y su respuesta espectral. dI-dII) Perfil de índice de  $40 \mu\text{m}$  y su respuesta espectral.

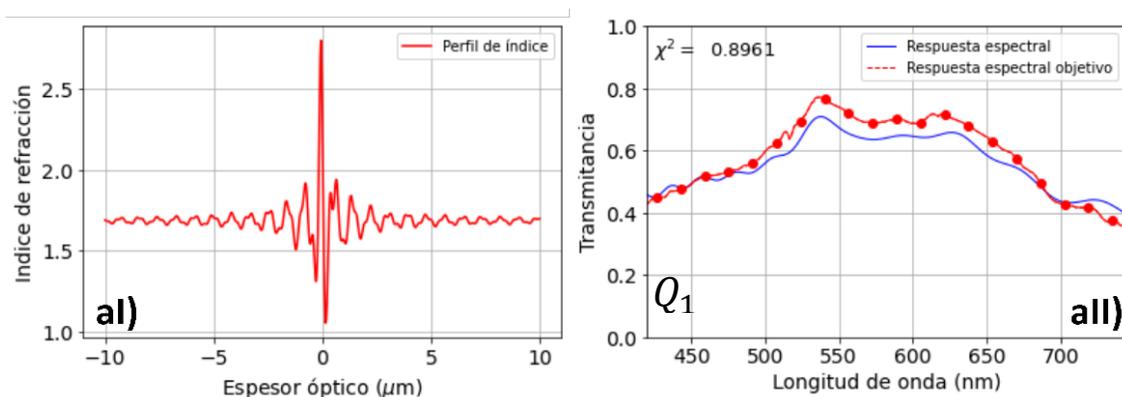
A medida que se incrementa el espesor óptico por arriba de los  $20\mu\text{m}$ , se tiene un ligero incremento en los valores de la  $\chi^2$ , por lo que este es un claro ejemplo para demostrar que existe un límite máximo del espesor óptico respecto a la mejora espectral, donde incluso si se sobrepasa dicho límite, se puede generar pérdida de definición en el desempeño óptico. Se repitió la síntesis en varias ocasiones utilizando las mismas condiciones, de modo que se pudiera descartar un error sobre los valores obtenidos, sin embargo, siempre el valor más bajo de la  $\chi^2$  para este ejemplo, fue cuando se trabajó con  $20\mu\text{m}$ , lo cual es un resultado positivo, pues en futuras secciones se explicará la necesidad de reducir lo máximo posible el espesor del filtro inhomogéneo.

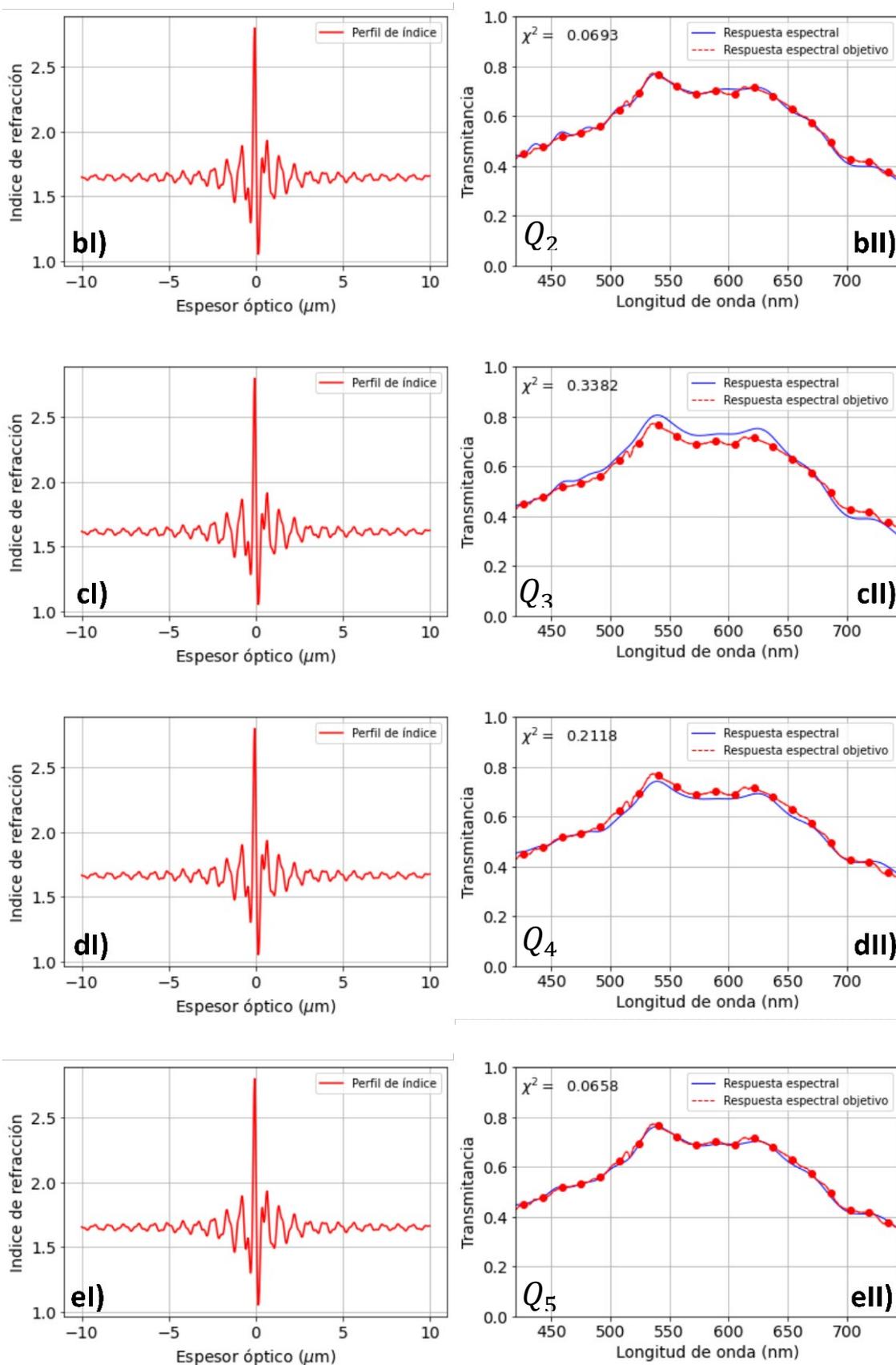
Una posible explicación del por qué con un menor espesor óptico ( $20\mu\text{m}$ ) respecto al ejemplo del capitolio ( $30\mu\text{m}$ ) se obtiene una mejor respuesta espectral, puede ser debido a la forma de la silueta del volcán, la cual tiene menos cambios abruptos, a diferencia del capitolio, donde se cuenta con una cúpula, por lo que se requiere de más información por parte de las altas frecuencias para poder reproducir dichos detalles.

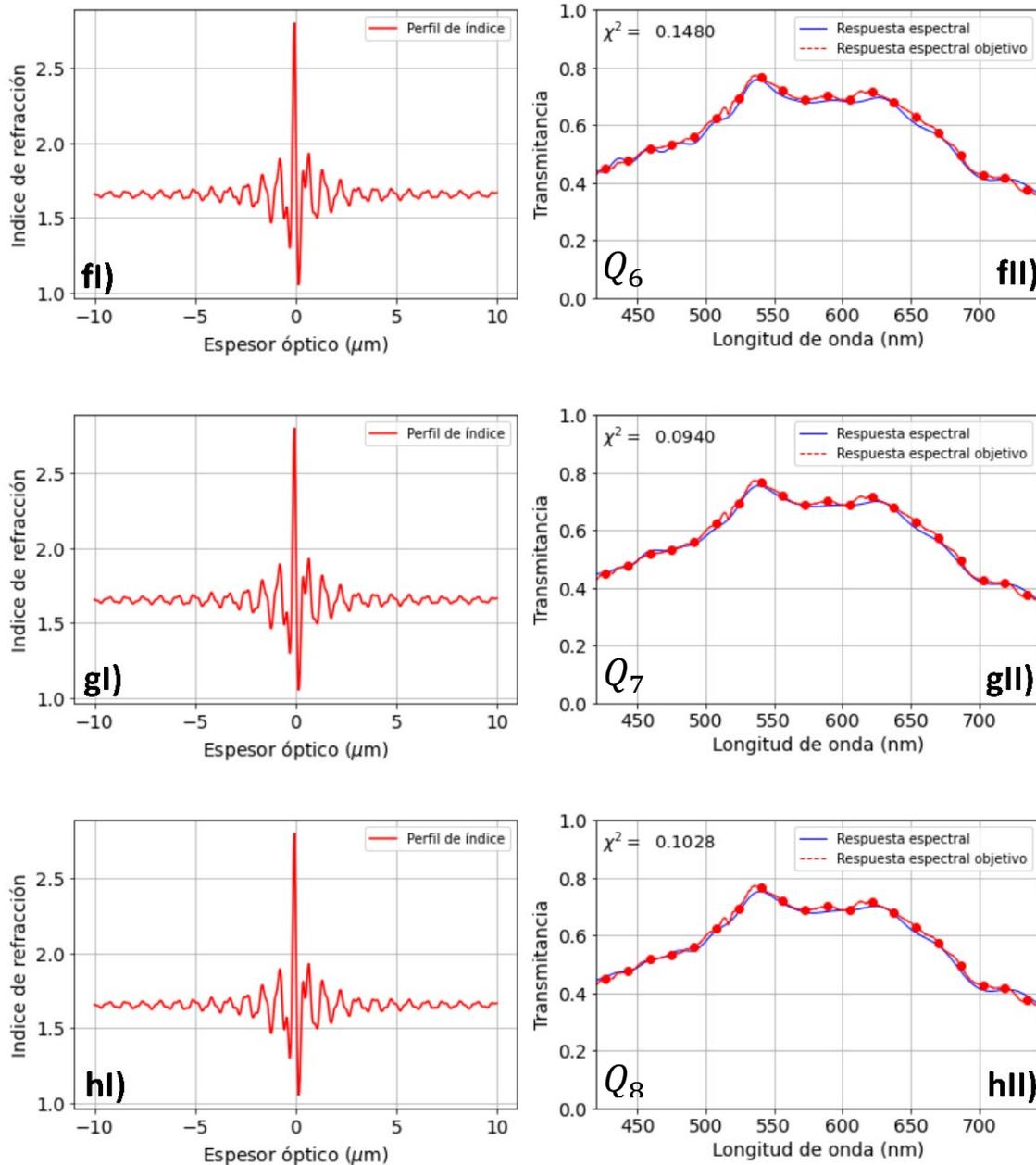
### 3.2.2.2 Determinando la mejor función Q (nevado de Toluca)

Una vez que se seleccionó el espesor óptico ideal de  $20\mu\text{m}$  para esta silueta, se realizaron las pruebas sobre las 8 diferentes funciones Q encontradas en la literatura, con la finalidad de determinar la mejor o mejores para esta clase de siluetas. Se obtuvieron los resultados mostrados en la Figura 23.

La respuesta espectral de la gráfica aII) muestra que la función  $Q_1$  da un mal desempeño óptico, pues no se alcanzan las transmitancias deseadas en el centro, además de que presentan oscilaciones en los extremos, por lo que se obtiene un valor de  $\chi^2 = 0.8961$ .





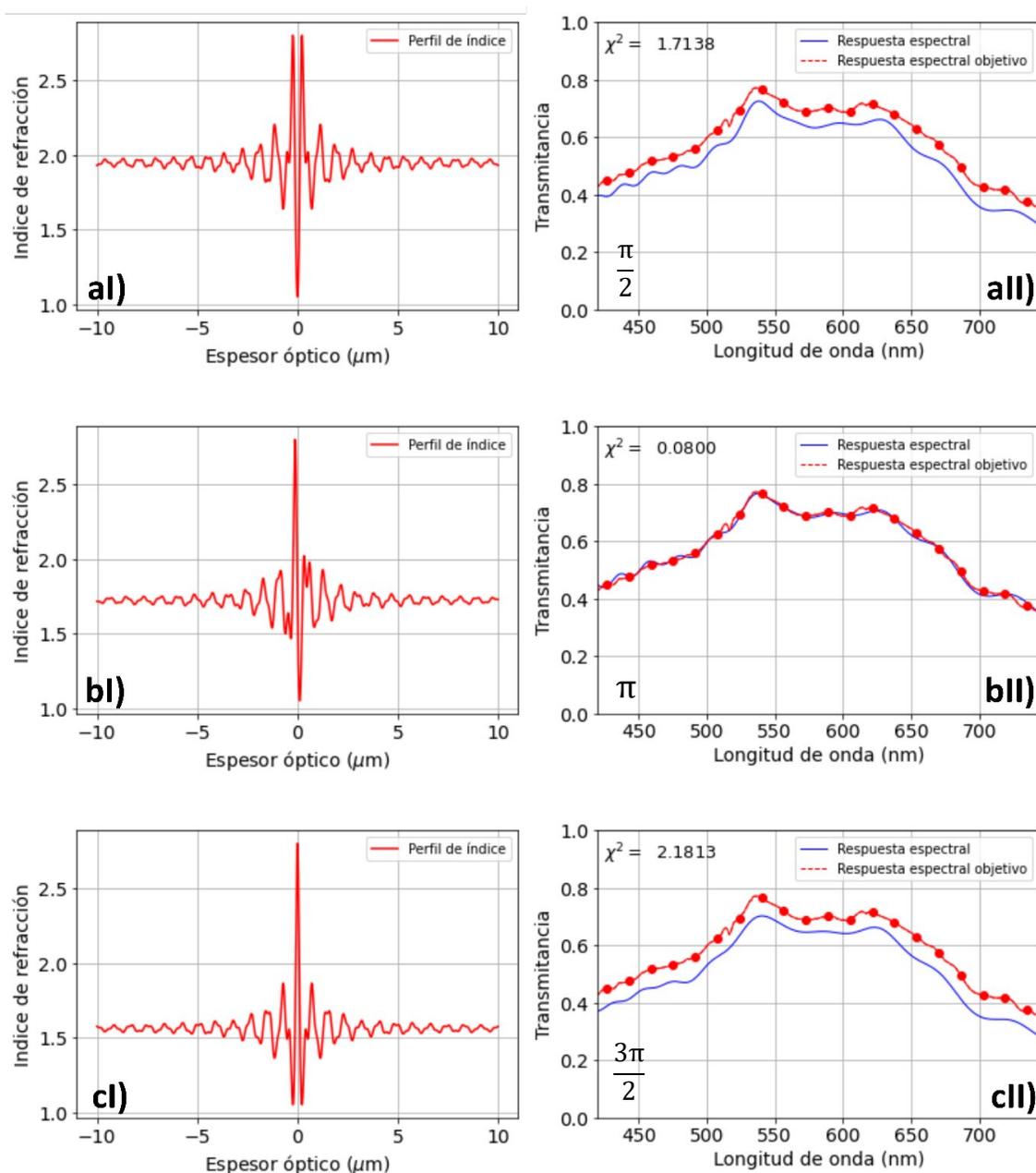


**Figura 23.** Perfil de índice y respuesta espectral sintetizados con al-all) Función  $Q_1$ . bl-bII) Función  $Q_2$ . cl-clI) Función  $Q_3$ . dl-dII) Función  $Q_4$ . el-eII) Función  $Q_5$ . fl-fII) Función  $Q_6$ . gl-gII) Función  $Q_7$ . hl-hII) Función  $Q_8$ .

La función  $Q_3$  fue la segunda con peor desempeño, con un valor de  $\chi^2$  de 0.3382, ya que los valores de las transmittancias se encuentran por encima de lo esperado. El desempeño de las funciones  $Q_2$  y  $Q_5$  fueron los mejores, con valores de  $\chi^2$  muy similares, siendo estos de 0.0693 y 0.0658, por lo que, para el ejemplo del nevado de Toluca, la función  $Q_5$  resultó dar el mejor desempeño en cuanto a la respuesta espectral. Sin embargo, la función  $Q_2$  también puede ser utilizada, demostrándose que no existe una función Q universal y que diversas funciones Q pueden dar resultados similares.

### 3.2.2.3 Determinando la mejor fase inicial (nevado de Toluca)

Los filtros presentados anteriormente, fueron realizados con una fase de  $\frac{6}{5}\pi$ , por lo que en esta sección se analizaron otras fases iniciales, siendo estas:  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3}{2}\pi$  y  $2\pi$ . El resto de las condiciones iniciales se mantuvo constante, pues ya se determinaron los valores óptimos, siendo un espesor óptico de  $20 \mu\text{m}$  y la función  $Q_5$ . A partir de estas condiciones y probando las diferentes fases iniciales, se obtuvieron los perfiles de índices y las respuestas espectrales mostradas en la Figura 24.



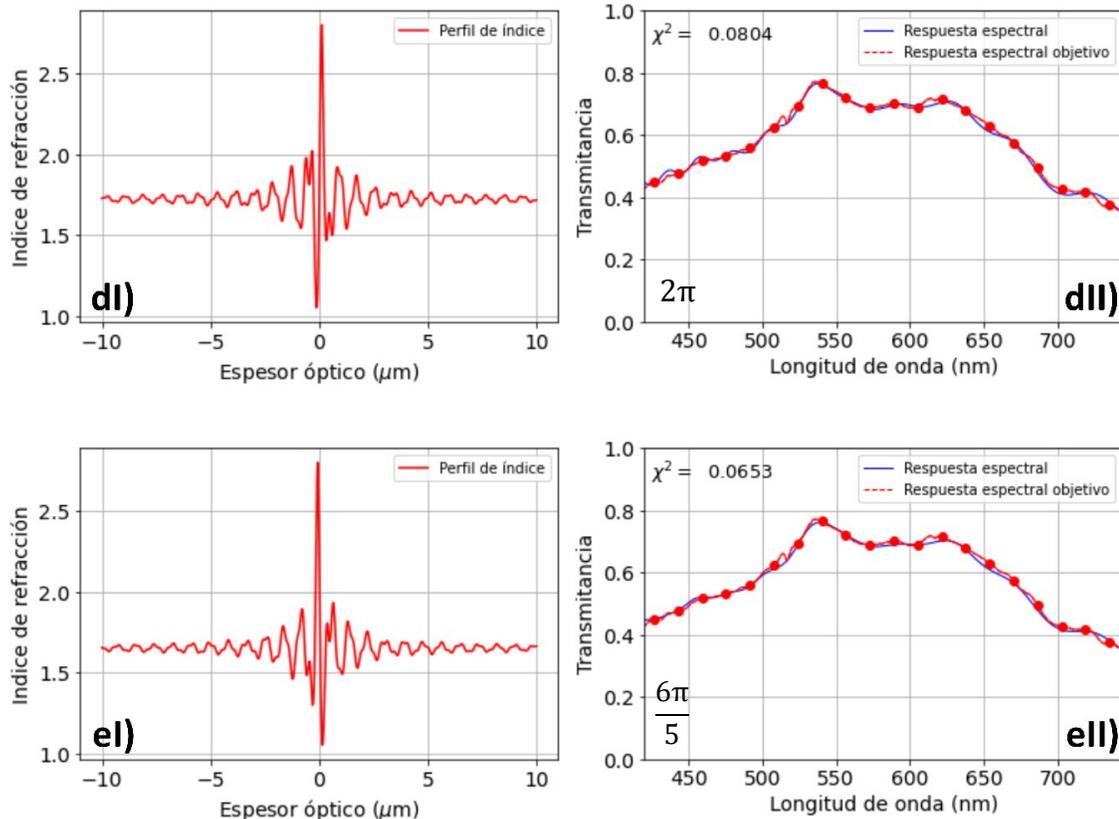
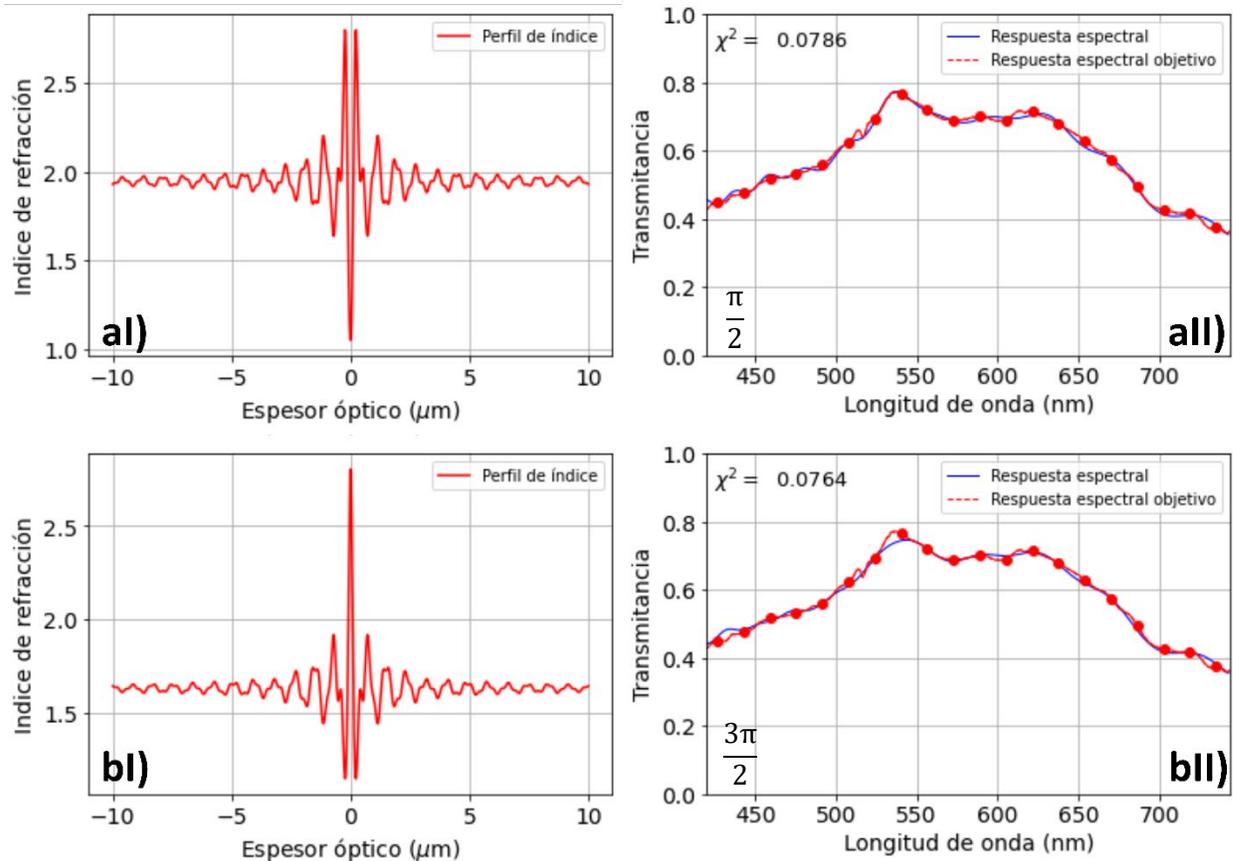


Figura 24. Perfil de índice y respuesta espectral con fase aI-all)  $\frac{\pi}{2}$ . bI-bII)  $\pi$ . cI-cII)  $\frac{3\pi}{2}$ . dI-dII)  $2\pi$ . eI-eII)  $\frac{6\pi}{5}$ .

La fase con la que se había trabajado en los filtros previos resultó ser la más adecuada para este ejemplo, pues con ella se obtuvo un valor de  $\chi^2$  de 0.0653. Las fases  $\pi$  y  $2\pi$  dieron también resultados aceptables, aunque no tan bajos respecto a los obtenidos por  $\frac{6\pi}{5}$ .

Las fases  $\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{3\pi}{2}$  muestran una respuesta espectral con valores por debajo de los esperados para la transmitancia, lo cual indica que la diferencia entre índices de refracción superior e inferior (2.8 y 1.05) está por arriba de lo necesitado.

Los valores pueden ser modificados sobre el eje de la transmitancia al reducir la diferencia de los índices de refracción. Tras probar varias combinaciones se encontró que la mejor respuesta espectral se obtenía con el rango de índices de refracción entre 2.8 y 1.15, obteniéndose los siguientes resultados:



**Figura 25.** aI-aII) Perfil de índices y respuesta espectral con índices superior e inferior de 2.8 y 1.15 y fase  $\frac{\pi}{2}$ . bI-bII) Perfil de índices y respuesta espectral con índices superior e inferior de 2.8 y 1.15 y fase  $\frac{3\pi}{2}$ .

Al reducir la diferencia entre los índices de refracción superior e inferior del filtro inhomogéneo de 2.8 y 1.05 a 2.8 y 1.15, se logra una buena respuesta espectral, reduciendo en un orden de magnitud el valor de la  $\chi^2$ , por lo que, para  $\frac{\pi}{2}$  los valores de  $\chi^2$  pasaron de 1.7138 a 0.0786, mientras que para la fase de  $\frac{3\pi}{2}$  pasaron de 2.1813 a 0.0764, siendo tales valores cercanos a los obtenidos por la fase de  $\frac{6\pi}{5}$ . Es importante destacar que sólo se aumentó en 0.10 el valor del índice de refracción inferior para poder empatar los valores de las transmitancias del filtro sintetizado, con la respuesta espectral deseada. Este resultado demuestra cómo la posición de los valores de transmitancia en el desempeño óptico del filtro puede alterarse si se cambia la diferencia entre el índice de refracción superior e inferior, de modo que, si se buscan obtener valores más altos en la transmitancia, la diferencia entre estos índices debe ser reducida, mientras que, si se buscan reducir los valores de transmitancia, la diferencia de los índices de refracción superior e inferior debe ser aumentada.

La modulación en la posición de la transmitancia se debe a la información que aportan los picos de las frecuencias centrales en el espesor óptico, las cuales pueden ser vistas como deltas de Dirac, que, de acuerdo con la teoría de transformada de Fourier, aportan una señal infinita para una amplitud en específico, por lo que, al modificar la amplitud de tal frecuencia en un espacio, la amplitud de tal señal en su par transformado también cambiará. En este caso, una modificación en la amplitud de los espesores ópticos centrales generará una modificación en la amplitud de los valores de la transmitancia. Finalmente, de acuerdo con los resultados mostrados, se puede concluir que, para el nevado de Toluca, las condiciones iniciales óptimas son: una función  $Q_5$ , un espesor óptico de  $20 \mu m$ , un rango de índices de refracción entre 2.8 y 1.15 y una fase de  $\frac{3\pi}{2}$ .

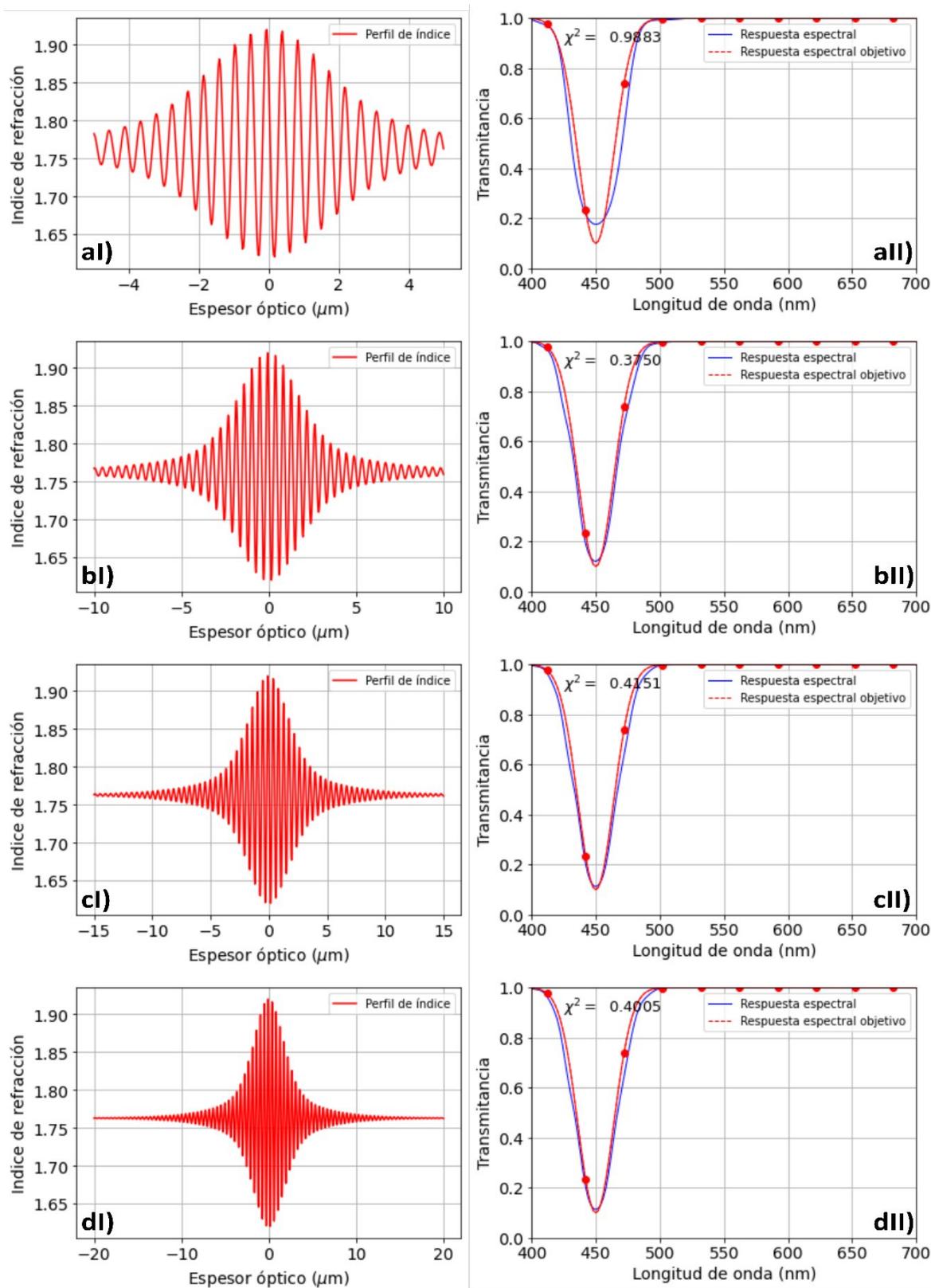
### 3.2.3 Gaussiana invertida

Una clase de filtros muy utilizados en diferentes áreas de la industria y la ciencia son los pasabanda o también denominados como notch, cuya característica es permitir el paso de las longitudes de onda, salvo por una fracción considerada del espectro donde su transmitancia se desea que sea mínima. A partir de tal definición, una Gaussiana invertida puede ser aproximada como un filtro de este tipo.

#### 3.2.3.1 Modificación del espesor óptico (Gaussiana invertida)

Se analizaron los espesores ópticos de  $10 \mu m$ ,  $20 \mu m$ ,  $30 \mu m$  y  $40 \mu m$ , tal como se hizo para las secciones anteriores. Los índices de refracción superior e inferior que mejor resultado dieron en las pruebas preliminares fueron 1.92 y 1.62. La fase inicial se mantuvo constante, con un valor de  $\frac{6\pi}{5}$ . La función empleada fue  $Q_5$ . La gaussiana invertida se moduló de tal forma que tuviera un valor mínimo de transmitancia del 10% en 450nm. A partir de estas condiciones iniciales se sintetizaron los perfiles de índices de refracción y se midieron sus respuestas espectrales, tal como se muestra en la Figura 26.

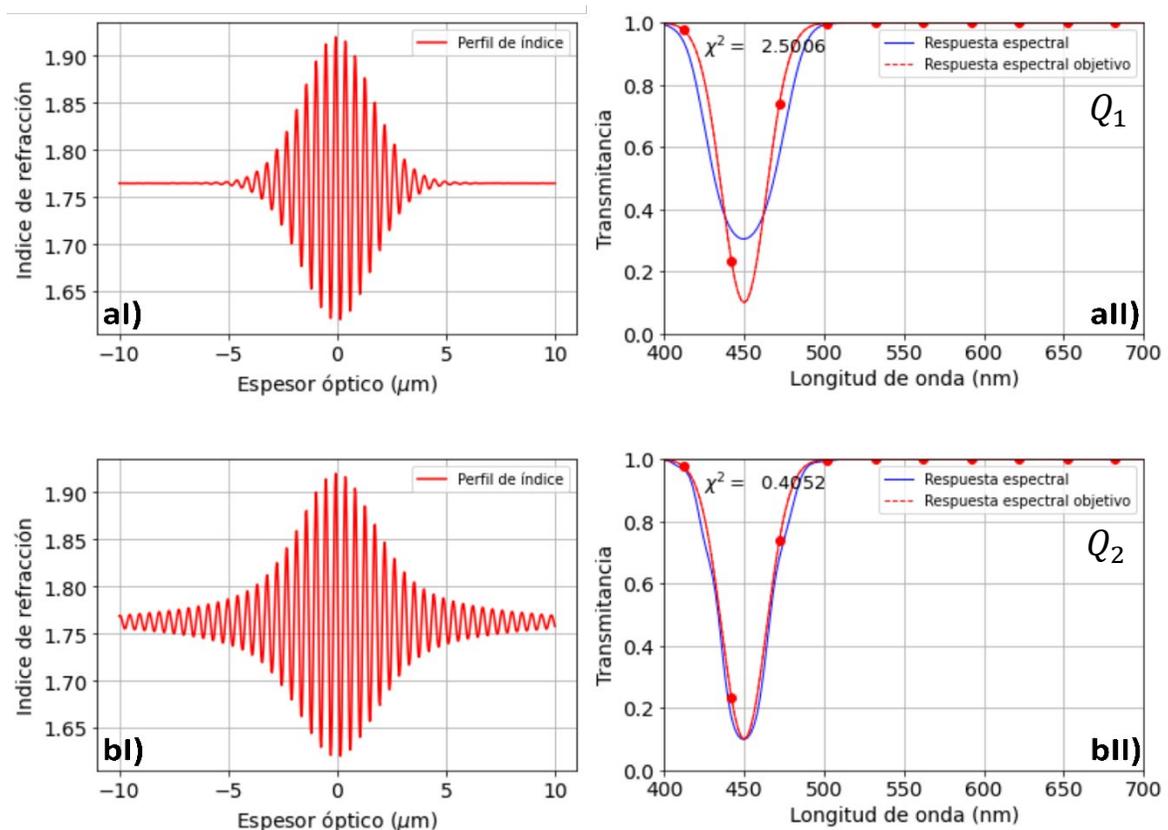
A partir de la variación del espesor óptico se logró mejorar la respuesta espectral del filtro inhomogéneo, sin embargo, tal corrección no fue significativa, pues para los espesores de  $20 \mu m$ ,  $30 \mu m$  y  $40 \mu m$ , se obtuvieron valores similares para la  $\chi^2$ , siendo el mejor resultado cuando se tiene un espesor óptico de  $20 \mu m$ , cuyo valor corresponde a  $\chi^2 = 0.3750$ .

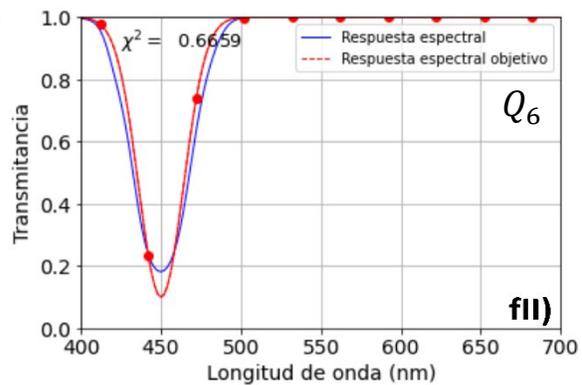
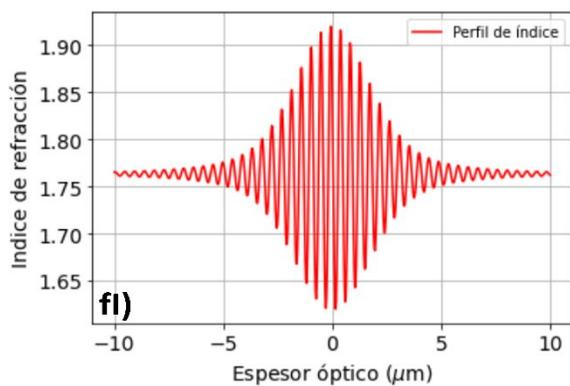
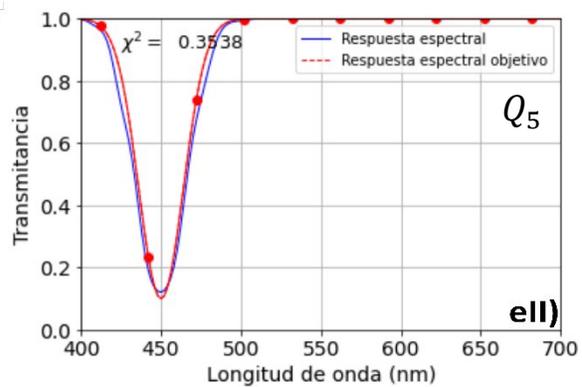
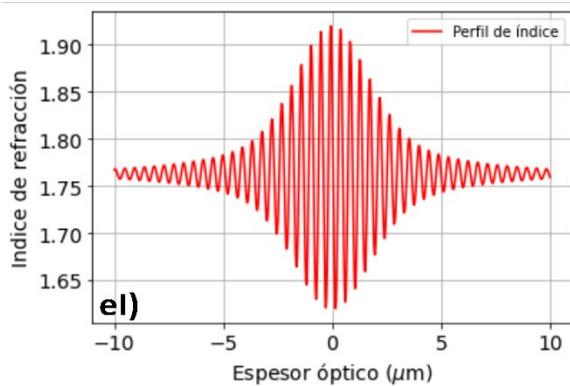
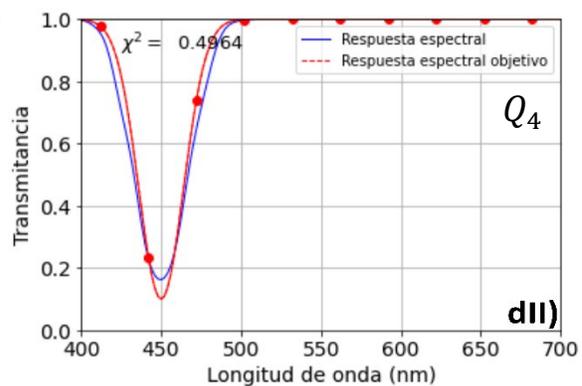
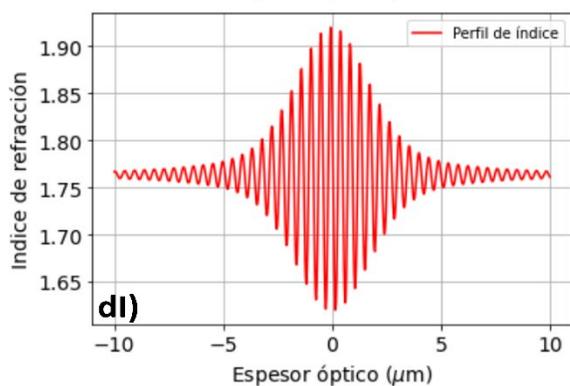
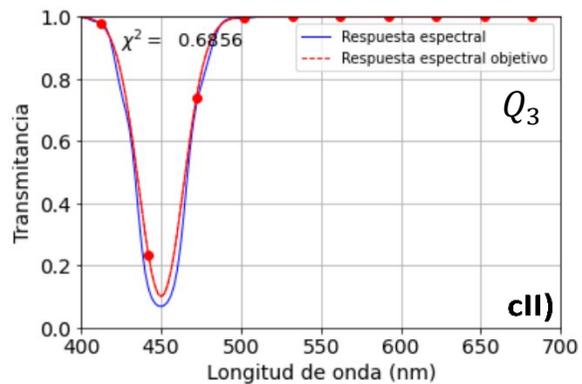
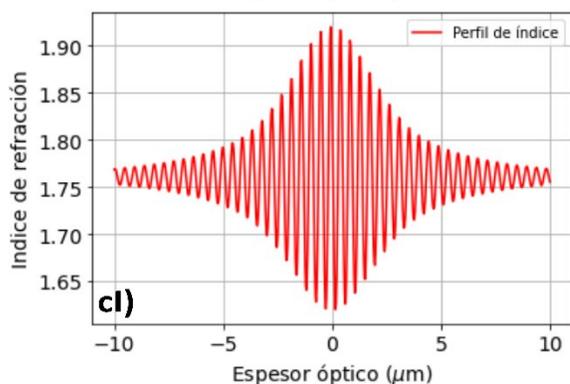


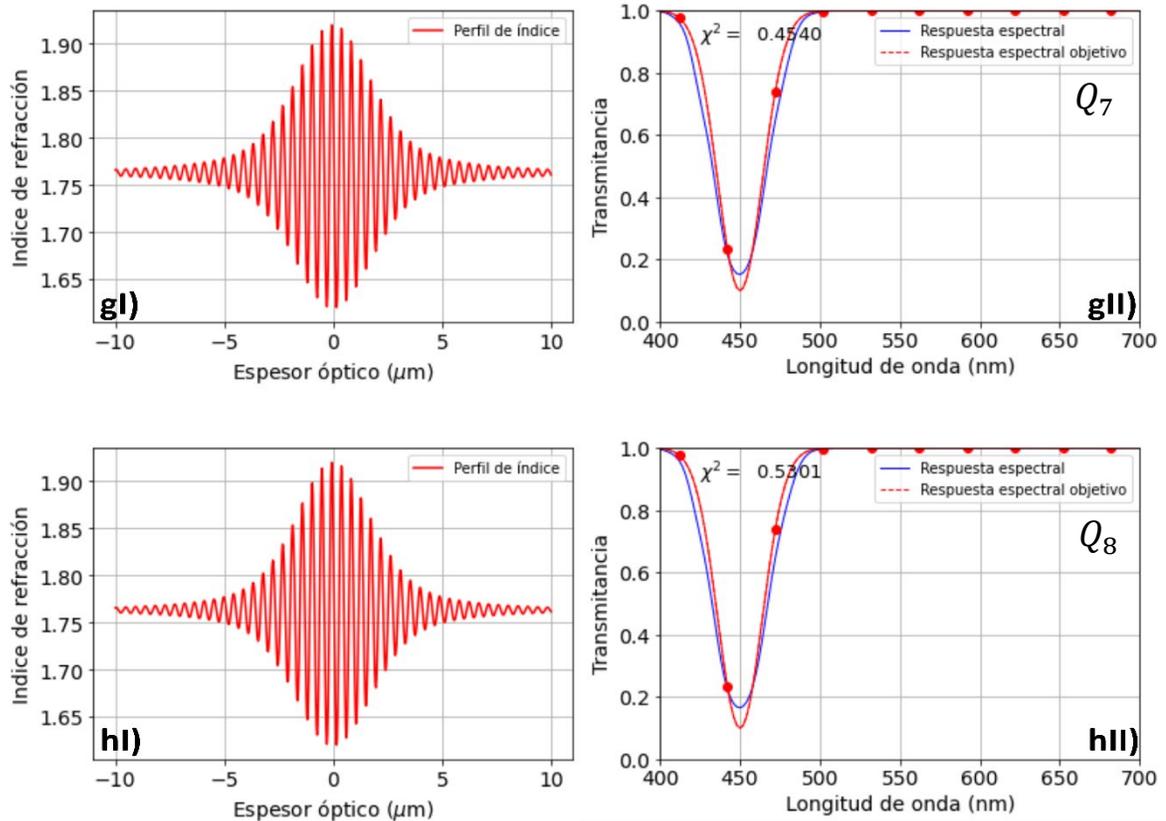
**Figura 26.** aI-aII) Perfil de índices con espesor óptico de  $10 \mu\text{m}$  y su respuesta espectral. bI-bII) Perfil de índices con espesor óptico de  $20 \mu\text{m}$  y su respuesta espectral. cI-cl) perfil de índices con espesor óptico de  $30 \mu\text{m}$  y su respuesta espectral. dI-dII) Perfil de índices con espesor óptico de  $40 \mu\text{m}$  y su respuesta espectral.

Por otro lado, la peor respuesta espectral se obtuvo al tener un espesor óptico de  $10\ \mu\text{m}$ , tal como se aprecia en la figura aII), donde incluso no se alcanza el valor mínimo de la transmitancia deseada y el valor de  $\chi^2$  es de 0.9883. Las respuestas espectrales obtenidas hasta el momento han sido las que mayor valor en cuanto a la  $\chi^2$  se refiere al capitolio y el Nevado de Toluca, siendo estos valores un orden de magnitud mayor. Sin embargo, de los tres ejemplos analizados, sólo la gaussiana ha podido dar una respuesta espectral similar a la deseada, cuando es sintetizada utilizando valores en los índices de refracción que se pueden reproducir de forma experimental en nuestro laboratorio y sin la necesidad de un método iterativo. Dicho rango de índices de refracción debe encontrarse entre 1.5 y 2.0, cuyos valores corresponden al  $\text{SiO}_x\text{N}_y$ .

### 3.2.3.2 Determinando la mejor función Q (Gaussiana invertida)



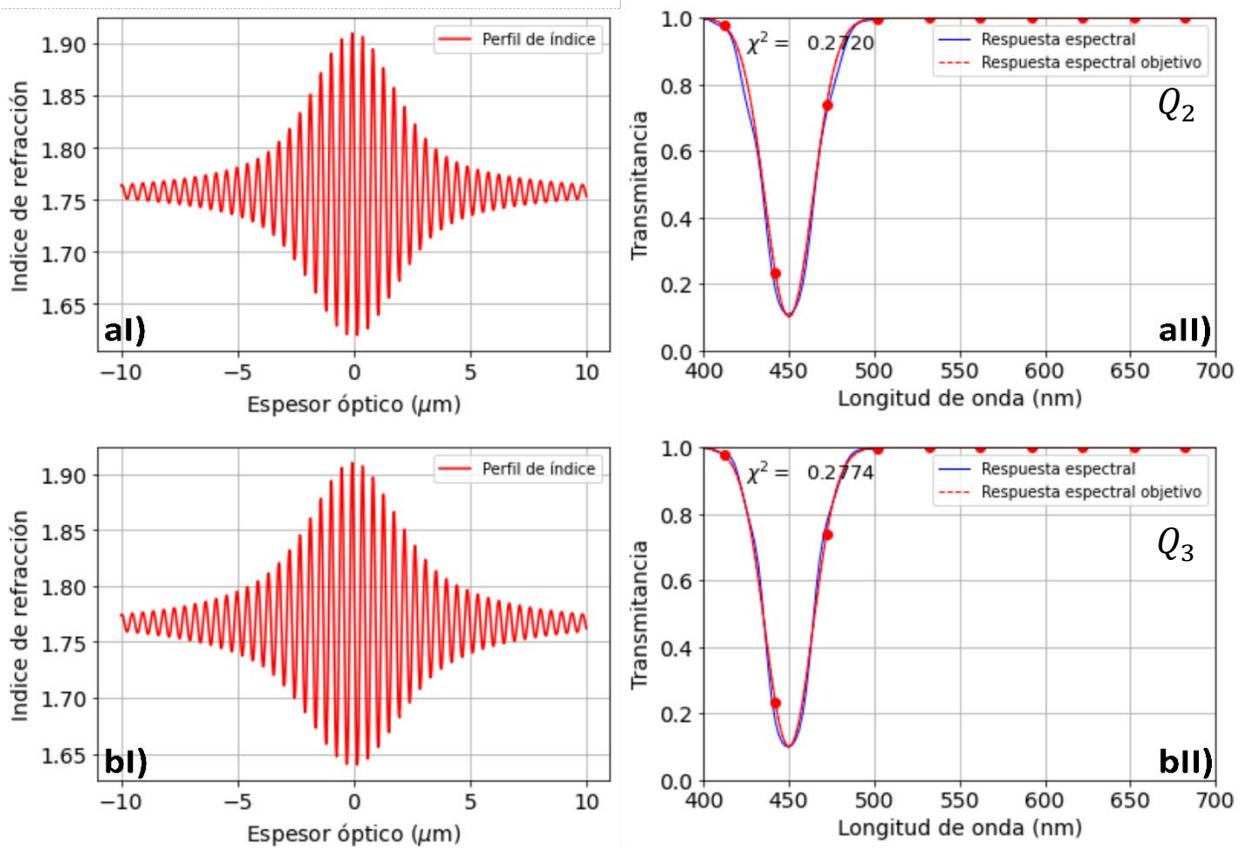




**Figura 27.** Perfiles de índices de refracción y sus respuestas espectrales sintetizadas con al-aII) Función  $Q_1$ . bl-bII) Función  $Q_2$ . cl-cII) Función  $Q_3$ . dl-dII) Función  $Q_4$ . el-eII) Función  $Q_5$ . fl-fII) Función  $Q_6$ . gl-gII) Función  $Q_7$ . hl-hII) Función  $Q_8$ .

Al igual que en los ejemplos del capitolio y el volcán Xinantecatl, para la función Gaussiana invertida se hicieron las pruebas de las 8 funciones  $Q$  para determinar cuál de ellas funciona mejor en este tipo de siluetas. Como condiciones iniciales, se utilizó el mejor espesor óptico de la sección anterior, siendo este de  $20\mu\text{m}$ . La fase inicial fue de  $\frac{6\pi}{5}$ .

A partir de las condiciones iniciales mencionadas y variando la función  $Q$ , se obtuvieron los resultados mostrados en la Figura 27. La función  $Q_5$  fue la que mejor resultado dio para este tipo de siluetas, mientras que el resto falló en alcanzar el valor mínimo de transmitancia, lo cual resultó en valores de la  $\chi^2$  mayores. Pese a tales resultados, las funciones  $Q_2$  y  $Q_3$  quedaron por debajo del valor de la transmitancia deseada, siendo el caso de  $Q_3$  donde mejor se aprecia.



**Figura 28.** aI-aII) Perfil de índice con índices superior e inferior de 1.91 y 1.62 y su respuesta espectral. bI-bII) Perfil de índice con índices superior e inferior de 1.91 y 1.64 y su respuesta espectral.

Si los valores de la transmitancia se encuentran por debajo de lo esperado, quiere decir que la diferencia entre el índice de refracción superior e inferior es superior a la necesaria. Reduciendo la diferencia entre los índices, modifica los valores de la transmitancia para obtener una mejor respuesta espectral. Para  $Q_2$ , los nuevos valores de índices de refracción superior e inferior fueron 1.91 y 1.62. Con  $Q_3$  se utilizaron los siguientes valores de índices de refracción: 1.91 y 1.64. Para tales ajustes en el intervalo de índices de refracción se obtuvieron los resultados mostrados en la Figura 28.

Reduciendo de 1.92 a 1.91 el índice de refracción superior, la función  $Q_2$  logra realizar un mejor ajuste en la respuesta espectral, entregando incluso un mejor resultado que la función  $Q_5$  (Figura 27, eII), ya que al comparar ambos valores de sus respectivas  $\chi^2$ , se tiene que  $Q_2$  llega a 0.2720, mientras que  $Q_5$  alcanza un valor de 0.3538. Analizando las gráficas de la Figura 28, bII), y comparando los resultados con los obtenidos en Figura 27, eII), se aprecia una reducción del valor de la  $\chi^2$ , siendo para  $Q_3$  de  $\chi^2 = 0.2774$ ,

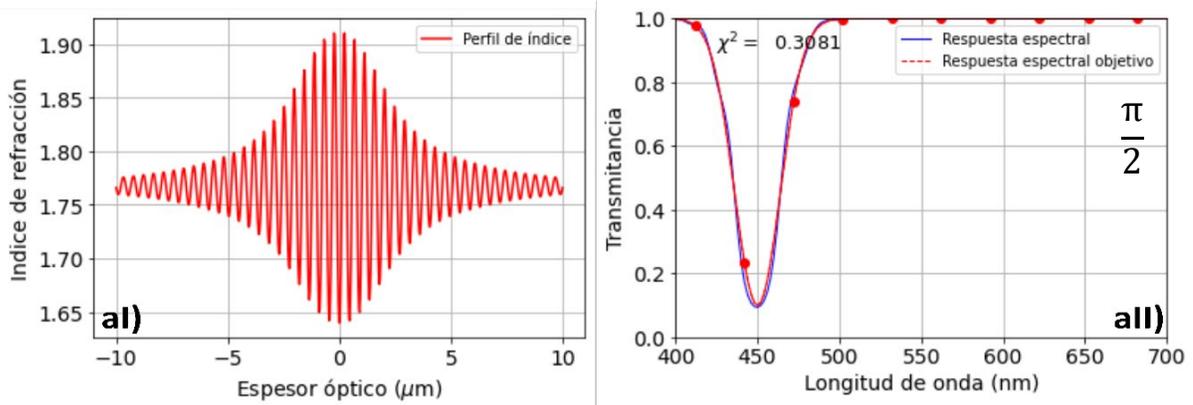
mientras que para  $Q_5$  de  $\chi^2 = 0.3538$ , por lo que las funciones  $Q_2$  y  $Q_3$  con sus respectivos ajustes en el intervalo de índices de refracción, arrojan un mejor resultado que el obtenido por la función  $Q_5$ .

En los tres ejemplos de siluetas estudiadas en este trabajo, la función  $Q_2$  entrega una buena aproximación de la respuesta espectral deseada, esto puede ser debido a la forma en que se derivada. Tal como se explica en el Anexo B, la función  $Q_2$  nace de la derivación de la ecuación para establecer la transformada de Fourier en filtros inhomogéneos (ecuación (6)), a diferencia del resto de funciones Q las cuales se obtienen mediante aproximaciones adicionales (para mayor información consultar el Anexo B).

La naturaleza de la función  $Q_2$  la hace una función más general para sintetizar un filtro inhomogéneo con una buena aproximación espectral, aunque como se demostró en los ejemplos estudiados, se pueden obtener mejores resultados utilizando otra función Q, como lo es el caso de la función  $Q_5$  para el capitolio y el Nevado de Toluca.

### 3.2.3.3 Determinando la mejor fase inicial (Gaussiana invertida)

Para la silueta de Gaussiana invertida se determinó que se obtiene una buena respuesta espectral al trabajar con un espesor óptico de  $20 \mu\text{m}$ , la función  $Q_3$  y los índices superior e inferior de 1.91 y 1.62. Se determinó cuál es la mejor fase inicial para este ejemplo usando los valores de  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$  y  $2\pi$ . Los resultados obtenidos de las síntesis se muestran en la Figura 29.



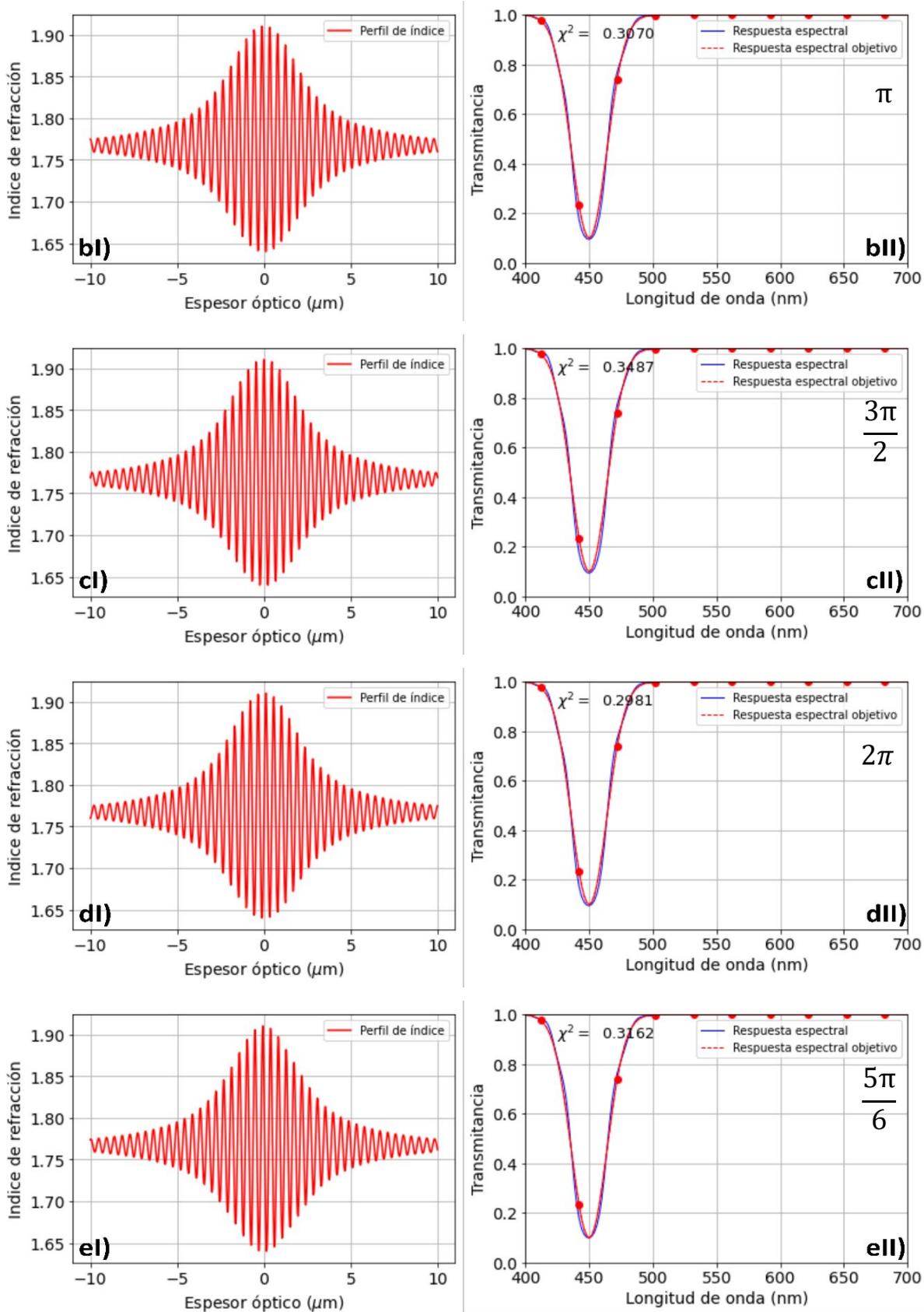


Figura 29. Perfil de índice y su respuesta espectral con fase aI-all)  $\frac{\pi}{2}$ . bI-bII)  $\pi$ . cI-cII)  $\frac{3\pi}{2}$ . dI-dII)  $2\pi$ . eI-eII)  $\frac{6\pi}{5}$ .

Como se aprecia en los resultados, todas las fases analizadas entregan respuestas espectrales muy similares, siendo el valor más bajo de la función  $\chi^2$  de 0.2981 cuando se utiliza la fase  $2\pi$  (dII). Para el caso de una función Gaussiana, la fase inicial no impacta de forma notoria en la respuesta espectral. La forma sinusoidal del espesor óptico se mantiene sin importar el tipo de frecuencia, a diferencia de los otros ejemplos analizados, donde dependiendo la frecuencia empleada, la distribución y amplitud de las frecuencias variaba, siendo muy notable en el centro del espesor óptico donde se tiene la mayor amplitud entre los índices de refracción. Este ejemplo demuestra que se cumple la teoría de transformada de Fourier para pares transformados, donde siempre el par transforma de una función Gaussiana invertida será una función  $Sinc = \frac{\sin(a)}{a}$ , por lo que la fase no puede alterar la forma de *Sinc*, de lo contrario se estaría violando la teoría de transformadas de Fourier.

En resumen, para el caso de un filtro inhomogéneo con transmitancia en forma de Gaussiana invertida, las mejores condiciones iniciales son: una función  $Q_3$ , un espesor óptico de  $20 \mu m$ , un rango de índices de refracción contenido entre 1.91 y 1.62 y una fase de  $2\pi$ , aunque se podría omitir el paso de buscar una fase apropiada para este tipo de siluetas, ya que todas arrojan un resultado muy similar.

### 3.3 Refinamiento del perfil de índices por amplitud

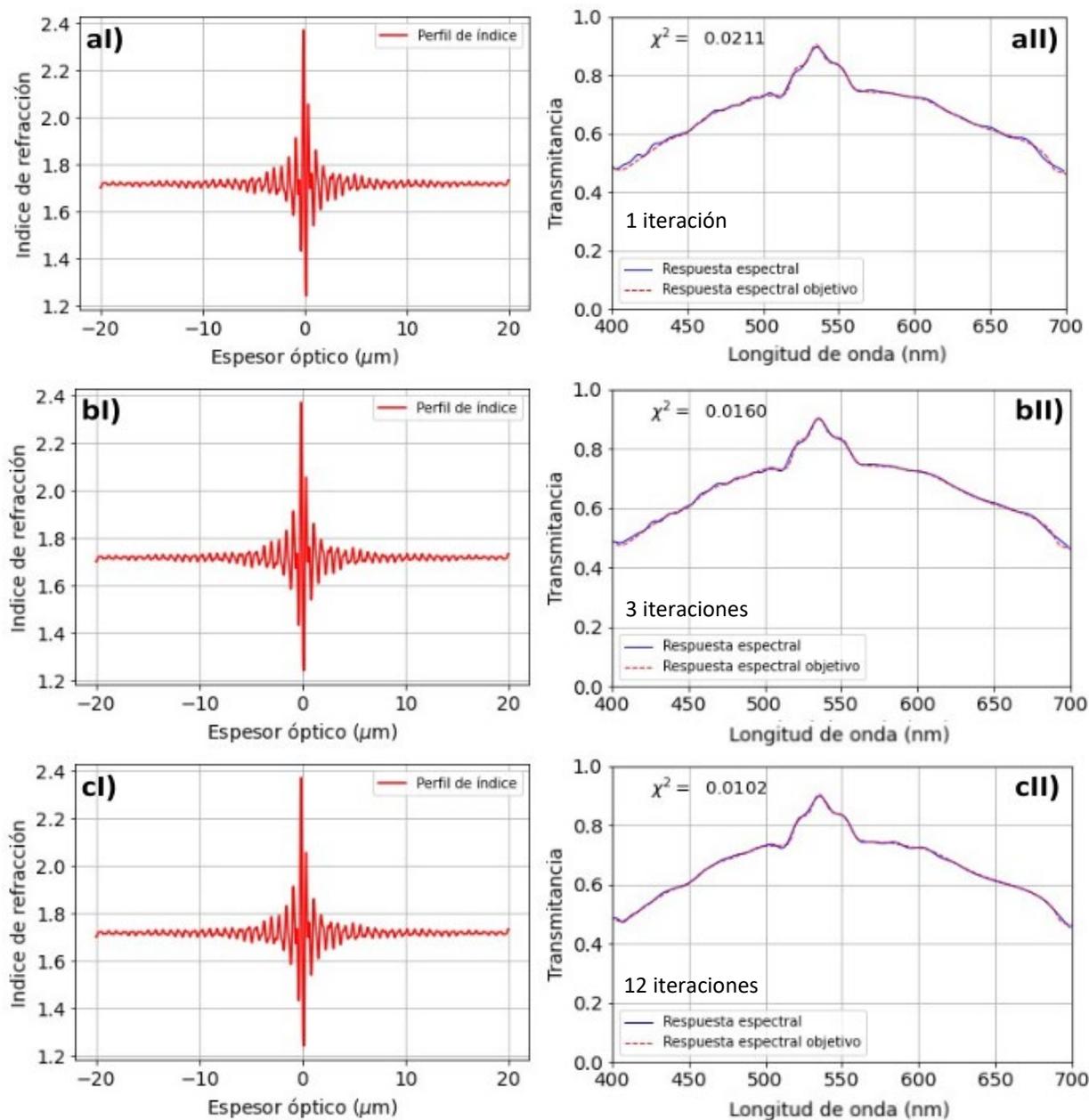
En la sección anterior se demostró la importancia de establecer las condiciones iniciales adecuadas para obtener el mejor desempeño óptico en una sola iteración, sin embargo, dicho desempeño puede ser mejorado si se introducen métodos iterativos. La forma en que se aplica el refinamiento por amplitud de la función  $Q$  para la síntesis de filtros inhomogéneos, se describe a fondo en la metodología, subsección 2.3.1 y en el Anexo C. Los ejemplos presentados en la sección anterior para el capitolio y el nevado de Toluca han sido refinados mediante esta corrección por amplitud, demostrando que se obtiene una mejora en la respuesta espectral bastante significativa respecto a los resultados anteriores, tal como lo reportan autores como Verly, 2010 y Cheng, 2013.

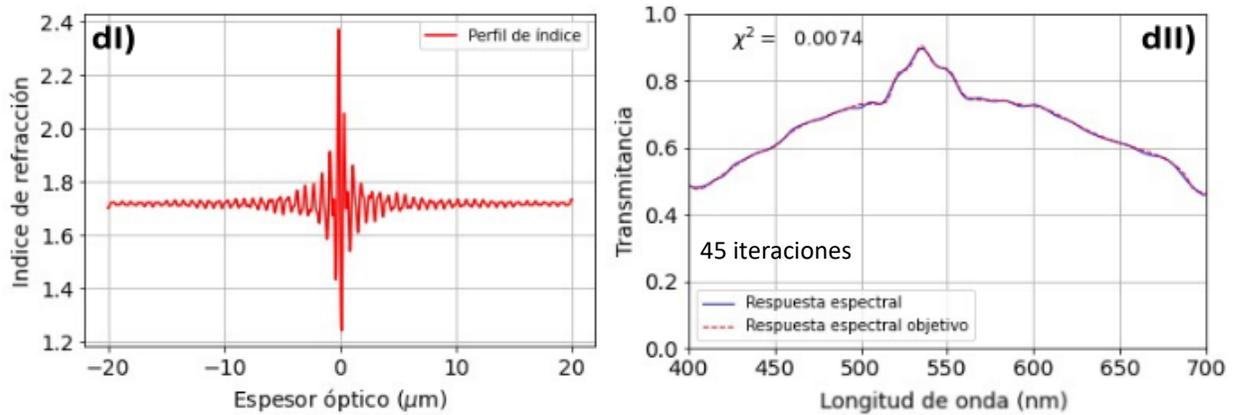
El perfil Gaussiano invertido no puede ser corregido por este tipo de refinamiento, pues mediante las iteraciones se pierde la forma de función *Sinc* en el perfil de índices, perdiéndose la relación de par transformado. Se realizaron 250 iteraciones (Cheng et al., 2008) utilizando las condiciones iniciales óptimas previamente determinadas. Tal como se menciona en la subsección 2.4.1, el programa guarda en

automático las gráficas de perfil de índices y respuesta espectral a medida que el valor de  $\chi^2$  va disminuyendo, para determinar la iteración en la cual se obtuvo la mejor respuesta espectral.

### 3.3.1 Refinamiento por amplitud: capitolio

Las condiciones óptimas iniciales determinadas previamente para la silueta del capitolio son: un espesor óptico de  $40\mu\text{m}$ , la función  $Q_5$ , una fase de  $\pi$  y un rango de índices de refracción entre 2.37 y 1.24. Los resultados obtenidos son los siguientes.





**Figura 30.** Perfil de índice y su respuesta espectral al-ai) 1 iteración. bi-bii) 3 iteraciones. ci-cii) 12 iteraciones. di-dii) 45 iteraciones.

Apenas 45 de las 250 iteraciones realizadas fueron necesarias para alcanzar este valor mínimo, las iteraciones subsecuentes se mantuvieron en valores bajos, pero nunca se logró superar tal respuesta espectral, por lo que el hecho de realizar un gran número de iteraciones no garantizará obtener un mejor resultado debido a que la mejora obtenida por las iteraciones no es lineal. A partir de la primera iteración de corrección por amplitud, se obtiene una mejora espectral, pues tal como se aprecia en la figura ai) el valor de la  $\chi^2$  se ve reducido a 0.0211, siendo que este valor sin refinar fue de 0.0491. Para la tercera iteración dicho valor se vuelve 0.0160, significando que a medida que se van realizando las iteraciones es posible obtener una mejora en el desempeño óptico del filtro.

No obstante, el proceso de corrección no es lineal, pues cada iteración subsecuente no garantiza una disminución en el valor de la  $\chi^2$ , por lo que existen iteraciones donde tal valor incrementa hasta alcanzar un punto en que las iteraciones vuelven a reducir el valor de la  $\chi^2$  alcanzando otro valor mínimo. Para este caso, el mejor resultado se muestra en la Figura 30, dii), donde el valor de  $\chi^2$  es 0.0074, logrando un buen empate con la transmitancia deseada. Para el ejemplo del capitolio, la respuesta espectral se puede mejorar en gran medida, pues el mejor valor obtenido de  $\chi^2$  es 0.0074, que es un orden de magnitud menor respecto al del punto de partida, por lo que se alcanza un resultado en la transmitancia muy similar al deseado.

Definir hasta qué punto se desea disminuir el valor de la  $\chi^2$  dependerá del grado de aproximación que se desee obtener. En este trabajo no se buscó o estableció un valor mínimo de la  $\chi^2$  y se dejó iterar el programa para conocer cuál era el mínimo valor obtenible.

### 3.3.2 Refinamiento por amplitud: volcán Xinantecatl

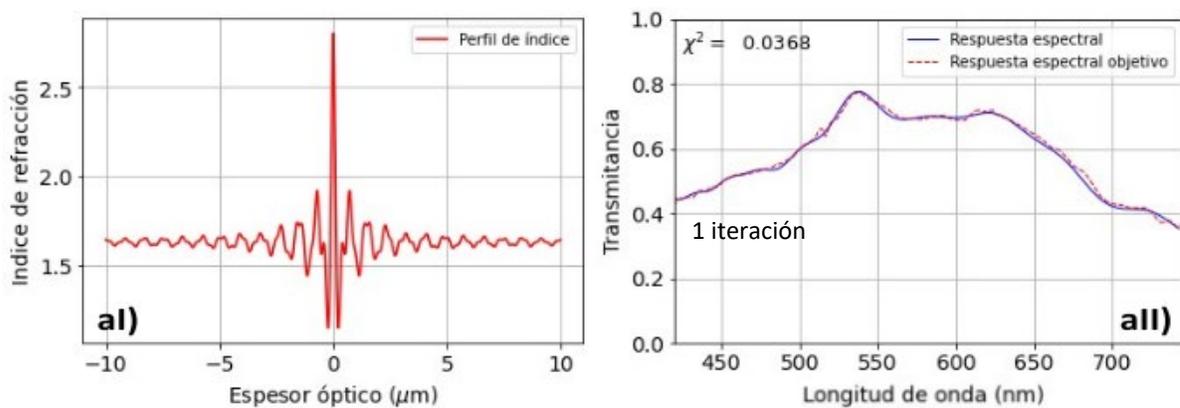
La silueta del volcán analizada en la sección anterior también fue sometida al método de corrección por amplitud para corroborar la contribución de este tipo de iteraciones en la respuesta espectral. Se utilizaron las condiciones iniciales ideales determinadas en la sección anterior: un espesor óptico de  $20\mu\text{m}$ , la función  $Q_5$ , un rango de índices de refracción entre 2.8 y 1.15 y una fase de  $\frac{3\pi}{2}$ .

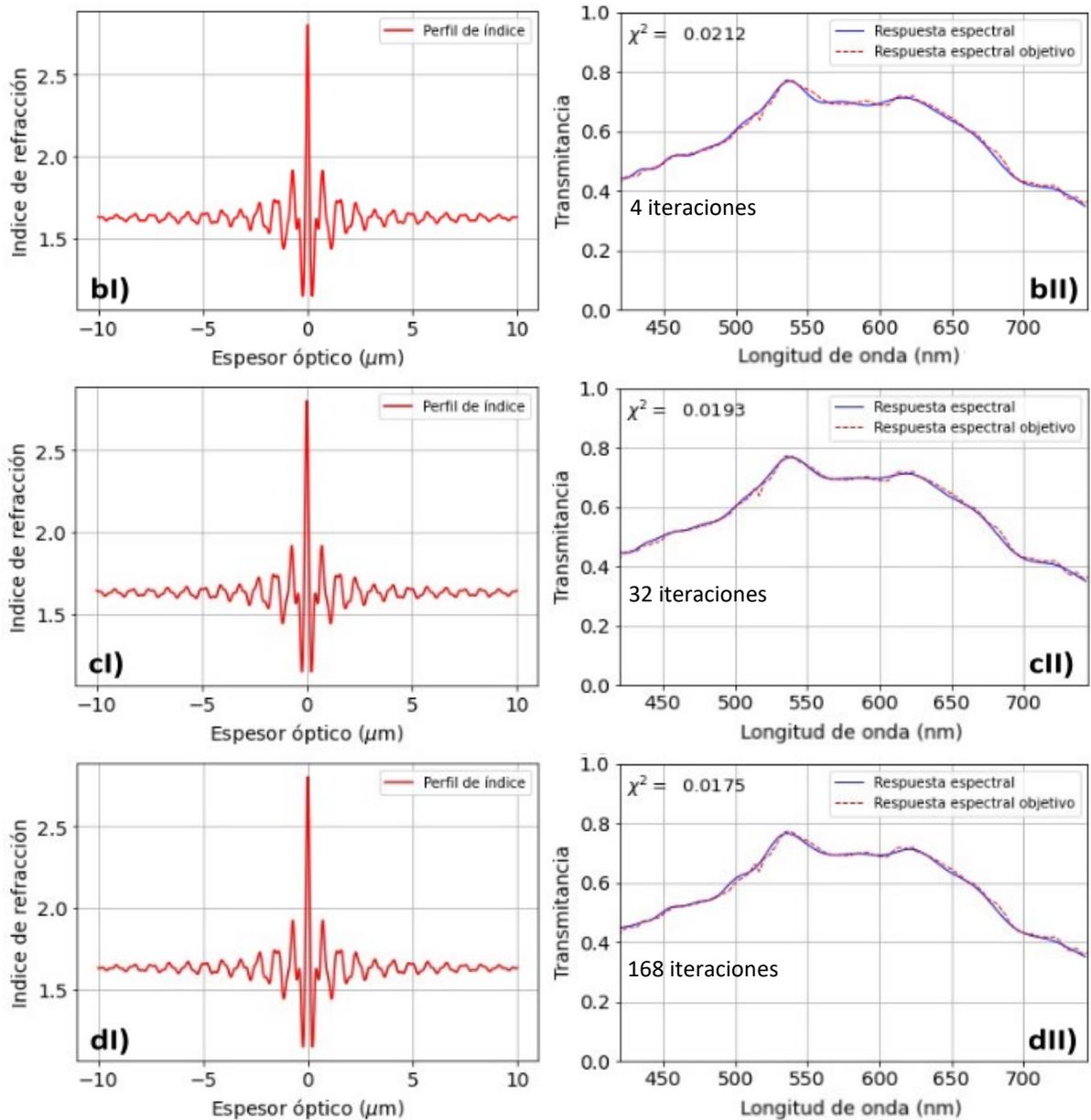
Realizando la corrección por amplitud se obtuvieron los resultados mostrados en la Figura 31.

Para la primera iteración se obtuvo un valor de la  $\chi^2$  de 0.0368, siendo un valor por debajo de la mitad respecto al obtenido sin ningún tipo de refinamiento, el cual fue de 0.0764 (Figura 25, aII). Para este ejemplo, fueron necesarias 168 iteraciones para alcanzar el valor más bajo de la  $\chi^2$ , tomando un valor de 0.0175, tal como se muestra en la Figura 31, dII).

De las 250 iteraciones realizadas, ninguna logró reducir un orden de magnitud el valor de la  $\chi^2$ , también fue necesario realizar más iteraciones para alcanzar el valor más bajo, todo esto comparando los resultados con los obtenidos de la silueta del capitolio.

Pese a no haber podido reducir el orden de magnitud, el desempeño óptico del filtro tras el refinamiento empata en varias partes de la curva, además se trabajó con sólo  $20\mu\text{m}$  de espesor óptico, algo que es deseado cuando se busque crecer el filtro de forma experimental, pues a medida que se reduzca la longitud del filtro, menor tiempo será necesario para crecerlo.





**Figura 31.** Perfil de índice y su respuesta espectral al-ai) 1 iteración. bi-bii) 4 iteraciones. ci-cii) 32 iteraciones. di-dii) 168 iteraciones.

De acuerdo con la teoría de transformadas de Fourier, si se agregara más espesor óptico al diseño del filtro, lo cual equivaldría a añadir frecuencias, se mejoraría su desempeño óptico, no obstante, se busca establecer un balance entre una respuesta espectral aceptable con el menor tamaño posible del perfil de índices. Lo que se considera como respuesta espectral aceptable dependerá de cada usuario en base al grado de aproximación que desee alcanzar.

### 3.4 Refinamiento del perfil de índices por SWIFT

En la sección anterior, se analizó la eficacia del refinamiento utilizando como valores de corrección la amplitud de la transmitancia, alcanzando respuestas espectrales muy cercanas a las deseadas. Sin embargo, existen dos problemas: el primero es la extensión del espesor óptico, que sigue siendo igual o mayor a las  $20\mu m$  para los ejemplos analizados, algo que resulta muy complicado de crecer de forma experimental mediante el método de erosión iónica. Al convertir el espesor óptico a espesor físico, los  $20\mu m$  pasan a ser  $11\mu m$ . Cada capa discretizada del filtro pasa de  $13.9\mu m$  de espesor óptico a aproximadamente  $9\text{ nm}$  de espesor físico, significando que para crecer  $11\mu m$ , son necesarias un total de 1,222 capas, donde aproximadamente se tiene un crecimiento de espesor de  $20\text{ nm}/\text{min}$ , lo cual da un aproximado de 9.2 horas de crecimiento.

El segundo problema, es que, para el Capitolio y el Nevado de Toluca, los valores máximos y mínimos de los índices de refracción se encuentran fuera muy por arriba de los valores alcanzables por el  $SiO_xN_y$ , cuyo rango de índice de refracción se encuentra entre 1.5-2.0, por lo que estos filtros previamente sintetizados no son reproducibles experimentalmente. Como se discutió en el capítulo de Marco teórico y Metodología, la posición de las amplitudes de las transmitancias (eje Y), puede ser alterado mediante la diferencia de rango de los índices de refracción máximo y mínimo, que pueden ser vistos como deltas de Dirac en el espacio de las frecuencias. Si se reduce el rango entre índices de refracción superior e inferior, la posición sobre el eje Y será disminuida, mientras que en el caso contrario esta aumentará, significando que resulta imposible ajustar los valores de los índices de refracción sin alterar la respuesta espectral, ya que al encontrarse relacionados los pares transformados, cualquier cambio que sufra un espacio, al realizar su transformada de Fourier, por ende, el otro espacio se verá afectado.

Para corregir el problema de los índices de refracción, autores como Cheng et al., 2008, proponen un método de refinamiento por SWIFT, cuyas siglas en inglés son “*Stored Wave Inverse Fourier Transform*”.

En las siguientes subsecciones se analizó el impacto de reducir el espesor óptico del filtro inhomogéneo utilizando el método SWIFT, con la finalidad de sintetizar un filtro inhomogéneo que pueda ser reproducido experimentalmente por erosión iónica utilizando  $SiO_xN_y$ . Tal como se hizo en la sección 3.3, se manejaron 250 iteraciones, donde cada vez que el valor de la  $\chi^2$  disminuyó, las gráficas correspondientes del perfil de índices y su respuesta espectral se guardaron para dar seguimiento a la evolución del proceso y determinar en qué iteración se obtuvo la mejor respuesta espectral.

### 3.4.1 Refinamiento del perfil de índices por SWIFT: capitolio

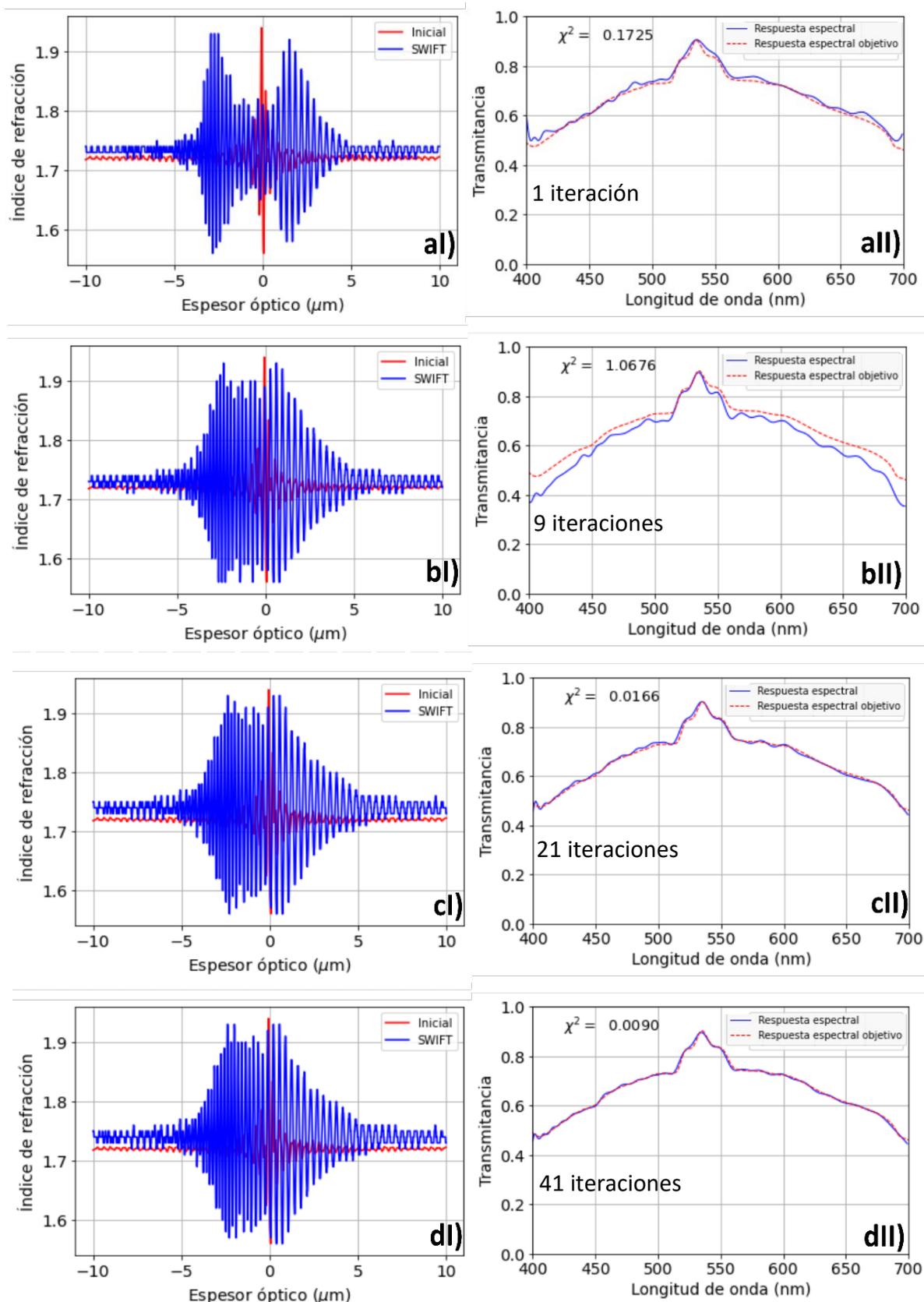
Sin refinamiento por SWIFT, el espesor óptico de  $40 \mu\text{m}$ , la función  $Q_5$  y la fase  $\pi$ , fueron las condiciones iniciales que mejor resultado dieron. Se mantuvo un espesor óptico por capa de  $13.9 \text{ nm}$ . Mediante pruebas preliminares se encontró que los valores de los índices de refracción superior e inferior pueden ser  $1.94$  y  $1.56$  respectivamente cuando se usa SWIFT. El espesor óptico se redujo a  $20 \mu\text{m}$  con la finalidad de demostrar que, para el método de SWIFT, no se requiere de un gran espesor óptico para mantener una buena respuesta espectral. Esto se muestra en la Figura 32.

Adicionalmente, mediante el método de SWIFT se tienen dos parámetros nuevos: el rango de distribución de energía y el punto de partida de esta distribución. Los valores asignados a estos parámetros fueron de  $12 \mu\text{m}$  y  $-6.7 \mu\text{m}$ . Los valores fueron encontrados a prueba y error. Si se revisa la Figura 32, bI), se ve que la distribución de energía se realiza sólo en  $12 \mu\text{m}$  del perfil de índices, comenzando en  $-6.7 \mu\text{m}$ , fuera de dicha región la variación de índices de refracción sigue siendo pequeña. Los resultados obtenidos fueron los siguientes.

Como el rango de distribución de energía sólo abarcó  $12 \mu\text{m}$  de espesor, el perfil de índices muestra una gran variación sólo dentro de este rango. Tal como se aprecia en la Figura 32, dII), el valor más bajo de la  $\chi^2$  es de  $0.009$  después de  $41$  iteraciones, algo muy cercano al valor alcanzado de  $0.0074$  cuando no se usó SWIFT.

La Figura 32, aII), muestra una buena respuesta espectral para la primera iteración, mientras que para la iteración  $9$ , la respuesta espectral no es tan buena y se encuentran los valores de transmitancia por debajo de los deseados, esto se debe a que la diferencia de índices de refracción todavía se podría reducir más, lo cual generaría este incremento en los valores de transmitancia. Cabe destacar que la primera iteración todavía no tiene una correcta distribución de energía, por lo que el perfil de índice de refracción se ve un poco diferente respecto del resto.

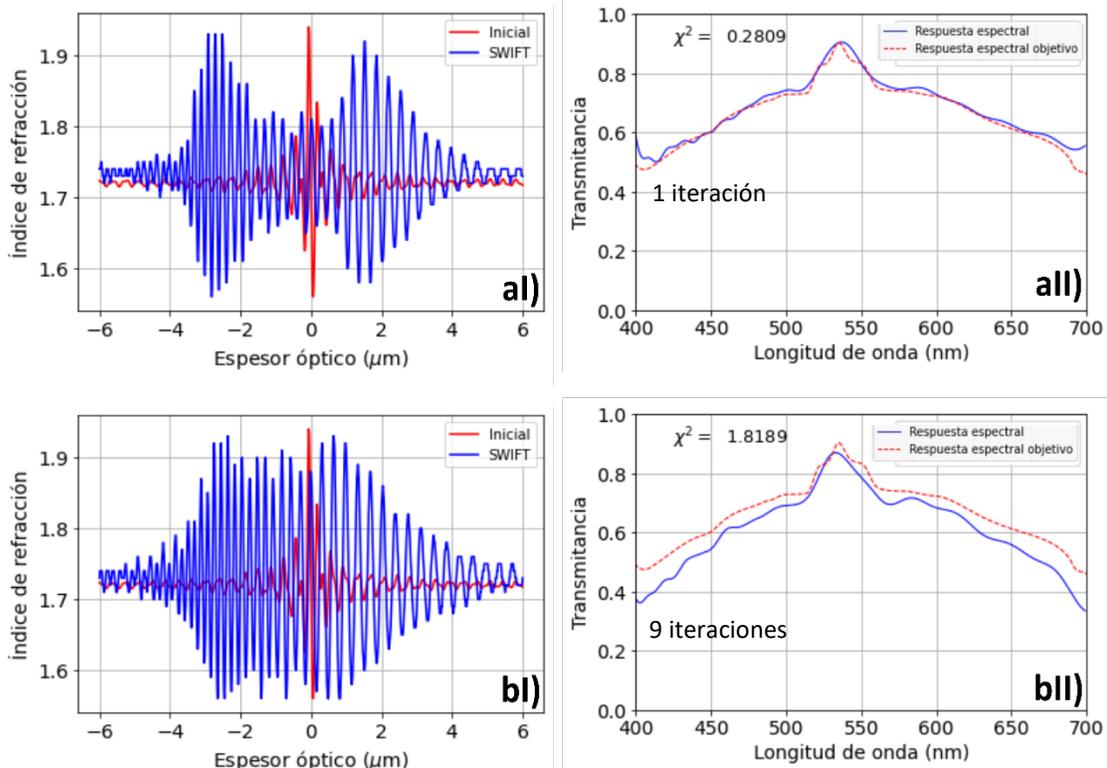
En las siguientes iteraciones ya no se verá afectado de forma drástica, debido a que la mayoría de la información ha sido distribuida, por lo que las siguientes iteraciones sólo tendrán correcciones significativas en las zonas donde haga falta debido al uso de la expresión  $\frac{dQ}{dT}$ , tal como se explica en el Anexo D. El espesor óptico se vio considerablemente reducido de  $40 \mu\text{m}$  a  $20 \mu\text{m}$ , sin afectar la respuesta espectral. Los índices de refracción superior e inferior ( $1.94$  y  $1.56$ ) se pueden reproducir experimentalmente.

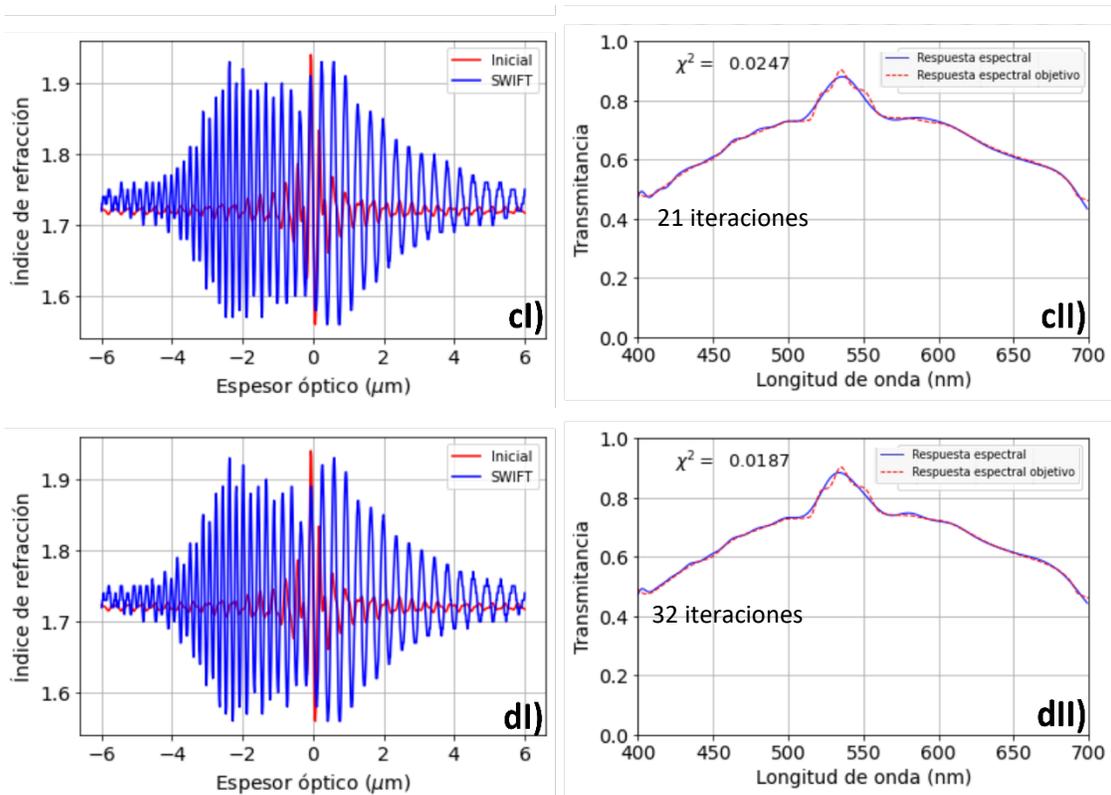


**Figura 32.** Capitulo: Perfiles de índice refracción de  $12\ \mu\text{m}$  de espesor sintetizados por SWIFT y sus respuestas espectrales. aI-II) 1 iteración. bI-II) 9 iteraciones. cI-II) 21 iteraciones. dI-II) 41 iteraciones.

Se puede realizar un mayor refinamiento para reducir el espesor óptico, para ello se optó por quitar  $4 \mu\text{m}$  de espesor óptico en ambos extremos del filtro, de modo que aún se contaran con altas frecuencias. El resto de las condiciones iniciales se mantuvieron fijas. Los perfiles de índices y sus respuestas espectrales se muestran en la Figura 33. Para un espesor de  $12 \mu\text{m}$  y mediante las condiciones iniciales seleccionadas se logra alcanzar una respuesta espectral con un valor de  $\chi^2 = 0.0187$ . Pasando las 32 iteraciones ya no se obtuvo un valor más bajo. Pese al bajo valor alcanzado en la  $\chi^2$ , en el centro de la respuesta espectral, que es donde se encuentra la cúpula, se tiene una pérdida de definición debido al recorte de las altas frecuencias, ocasionando una pérdida de información sobre el detalle fino de la silueta.

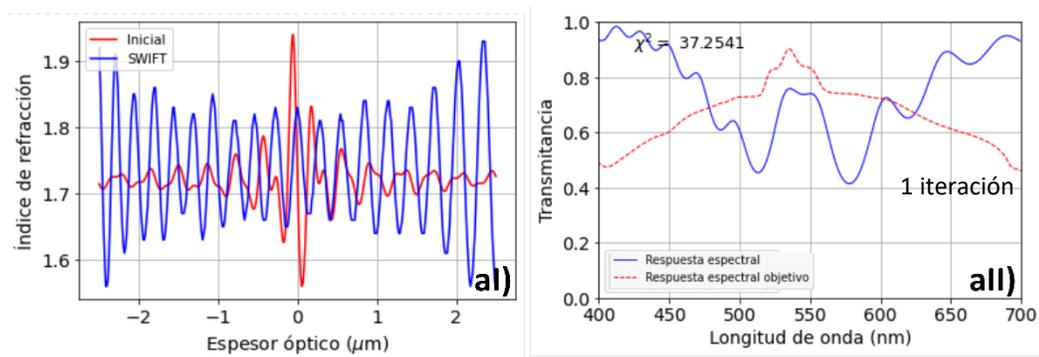
Se redujo una vez más el espesor del filtro para analizar el impacto de la falta de altas frecuencias sobre la respuesta espectral de este. Mientras más se pueda reducir el espesor óptico del filtro, menor será el tiempo de crecimiento por erosión iónica, por lo que es necesario identificar el espesor óptico mínimo, mediante el cual se puede seguir alcanzado una buena respuesta espectral. Para  $5 \mu\text{m}$  de espesor óptico, se emplearon como condiciones del punto de partida de la distribución de la energía y el rango de distribución valores de:  $-8.0$  y  $16.0$ . Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 34. Las respuestas espectrales muestran oscilaciones e incluso en los extremos se comienzan a separar los valores de las transmitancias calculadas. Lo anterior se debe a las pocas altas frecuencias que se están considerando en el perfil de índices.

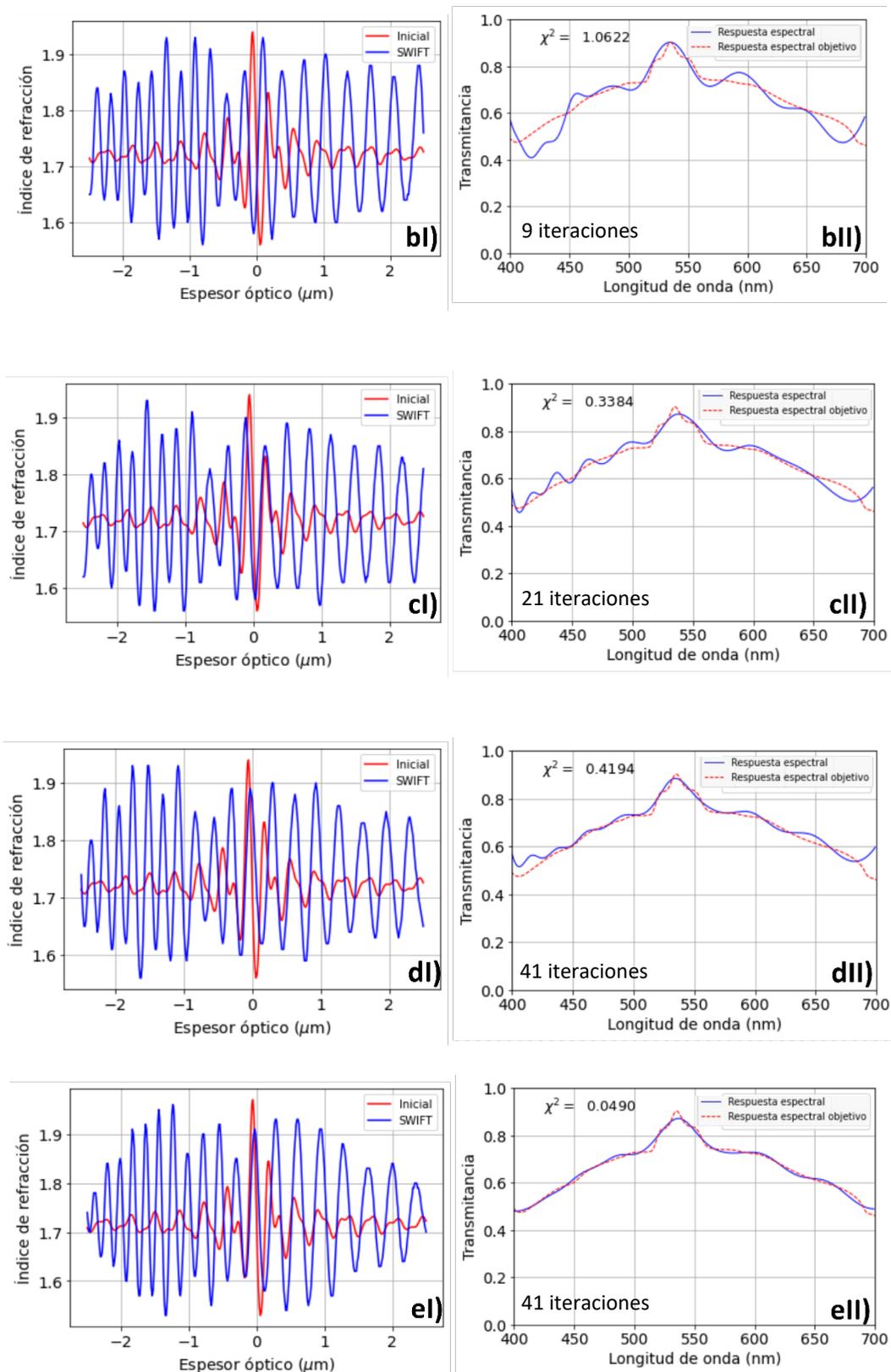




**Figura 33.** Capitulo: Perfiles de índice refracción de  $12\mu\text{m}$  de espesor sintetizados por SWIFT y sus respuestas espectrales. al-II) 1 iteración. bl-II) 9 iteraciones. cl-II) 21 iteraciones. dl-II) 32 iteraciones.

Para la gráfica e), se amplió la diferencia de índices de refracción, pasando de 1.94 y 1.56 a 1.97 y 1.53. Adicionalmente, se tuvo que realizar un ajuste al valor del rango de distribución de energía, pasando a ser de  $9\mu\text{m}$ , mientras que el punto de partida de la distribución fue de  $-4.5\mu\text{m}$ .





**Figura 34.** Capitolio: Perfiles de índice refracción de 5  $\mu\text{m}$  de espesor sintetizados por SWIFT y sus respuestas espectrales. al-all) 1 iteración. bl-bll) 9 iteraciones. cl-cll) 21 iteraciones. dl-dll) 41 iteraciones. el-ell) 41 iteraciones con modificación: índices de refracción superior e inferior de 1.97 y 1.53.

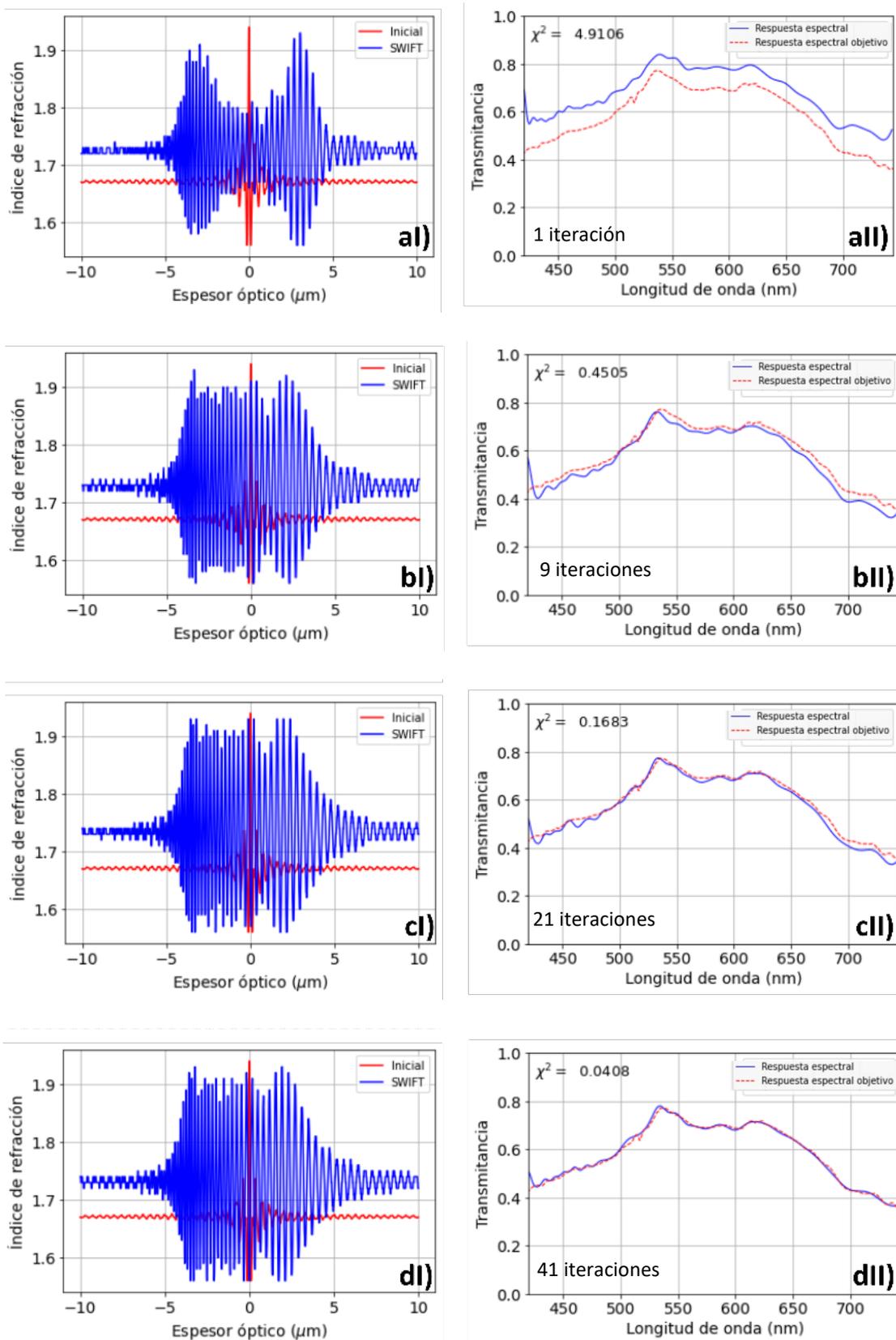
Los ajustes se realizaron con la finalidad obtener una mejor respuesta espectral, debido a que en dII) se observa que los valores de la transmitancia son ligeramente superiores a los deseados especialmente en los extremos. Tales ajustes permitieron deshacerse de la mayor parte de las oscilaciones, sin embargo, la definición de la cúpula sigue sin alcanzar una buena resolución.

### 3.4.2 Refinamiento del perfil de índices por SWIFT: nevado de Toluca

Tal como se hizo para el capitolio, en esta sección se reducirá el espesor óptico para estudiar el cambio de la respuesta espectral y poder sintetizar un filtro que pueda ser reproducible experimentalmente. La primera prueba se realizó utilizando un espesor óptico a  $20 \mu m$ . Realizando pruebas preliminares se determinó un valor de índice de refracción superior de 1.94 e inferior de 1.56. La función  $Q_5$  y una fase inicial de  $\frac{3\pi}{2}$  fueron los valores de las condiciones iniciales que mejor resultado dieron de acuerdo con los resultados previamente mostrados. Se consideraron espesores ópticos por capa de 13.9 nm.

A las dos nuevas variables introducidas para el refinamiento SWIFT correspondientes al punto de partida de la distribución de energía y su rango de distribución, se les asignaron valores de:  $-8.4 \mu m$  y  $16.4 \mu m$ , los cuales fueron previamente determinados a prueba y error. Un perfil de índices de  $20 \mu m$  de espesor refinado mediante SWIFT para esta silueta, arroja un buen resultado de transmitancia, alcanzándose el mejor valor tras 41 iteraciones, siendo la  $\chi^2=0.0408$ . La contribución por parte de las altas frecuencias es lo que permite alcanzar tan buena respuesta espectral, con valores de los índices de refracción reproducibles experimentalmente.

En la primera iteración, el desempeño óptico obtenido tal como se muestra en la Figura 35, aII) es muy deficiente, pues la información por parte de las bajas frecuencias todavía no se encuentra bien distribuida, provocando que la silueta general y la posición de los valores de la transmitancia no sean alcanzables. Para la novena iteración, ya se cuenta con una buena distribución de la información a lo largo del espesor óptico, tal como se aprecia en bI), lo que permite tener la forma general de la silueta que se desea reproducir y los valores de las transmitancias deseadas dentro de valores aceptables, por lo que sólo hace falta refinar algunos segmentos del perfil de índice para mejorar la respuesta espectral.

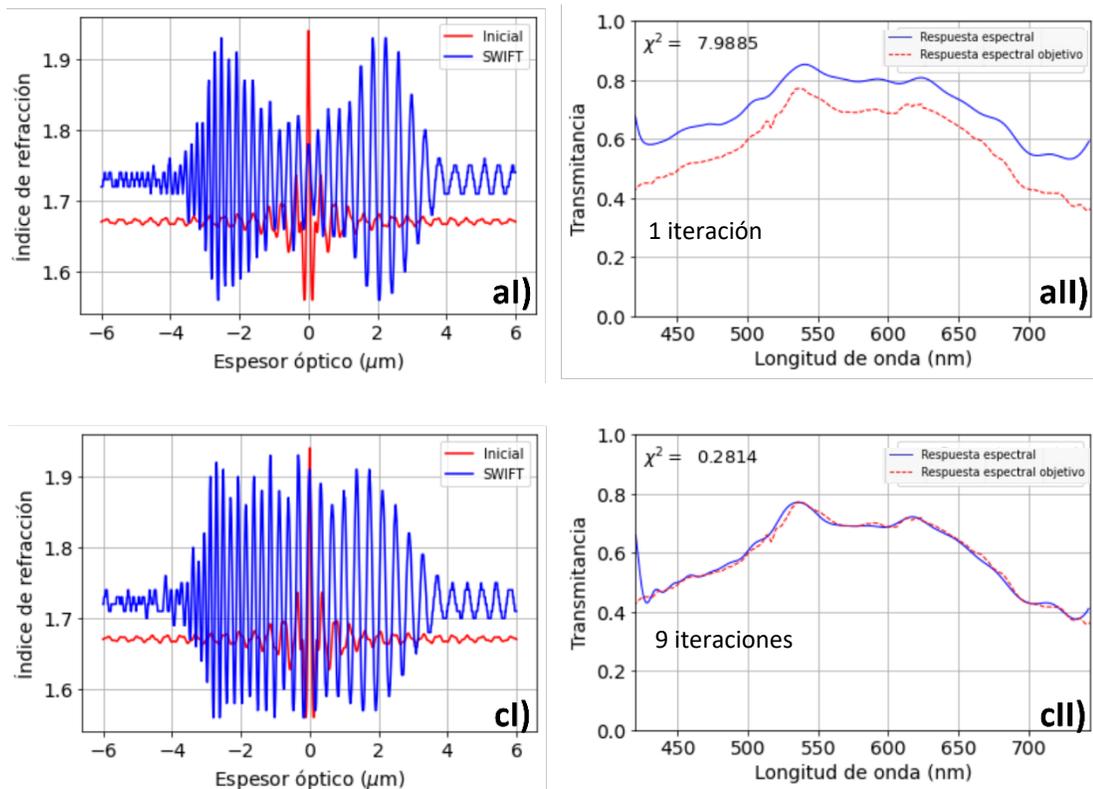


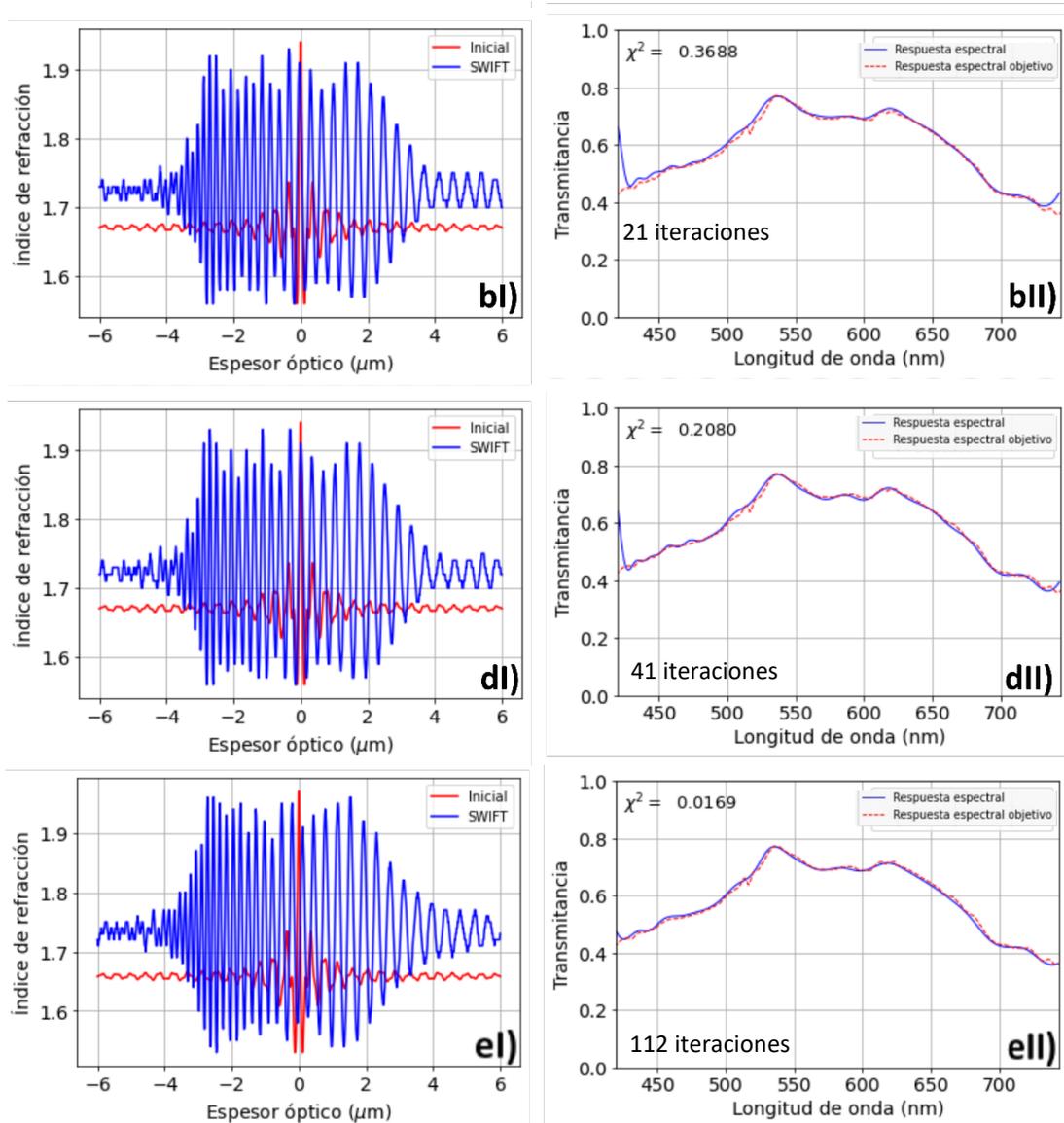
**Figura 35.** Nevado de Toluca: Perfiles de índice de refracción de 20  $\mu\text{m}$  de espesor sintetizados por SWIFT y sus respuestas espectrales. aI-aII), 1 iteración. bI-bII) 9 iteraciones. cI-cII) 21 iteraciones. dI-dII) 41 iteraciones.

Tal como se hizo para el capitolio, el espesor óptico fue reducido a  $12\ \mu\text{m}$ . Los valores del índice de refracción superior e inferior se tuvieron que ajustar. Mediante prueba y error se determinaron que los valores con las mejores respuestas espectral eran 1.94 y 1.56. El valor determinado para el punto de partida de la distribución de energía fue de  $-6.4\ \mu\text{m}$ , mientras que el valor de la distribución total de dicha energía fue  $12.3\ \mu\text{m}$ . Mediante estas condiciones iniciales se obtuvieron los resultados mostrados en la Figura 36. Para este caso el mejor valor alcanzado de  $\chi^2$  se vio aumentado un orden de magnitud respecto al filtro con  $20\ \mu\text{m}$  de espesor, debido a que se recortaron altas frecuencias.

Se obtiene una respuesta espectral similar a la deseada, tal como se observa en la Figura 36, dII), con un valor de  $\chi^2 = 0.2080$ , sin embargo, en los extremos es donde se comienza a mostrar una falta de exactitud de la transmitancia obtenida respecto a la deseada.

Se pudo mejorar aún más la respuesta espectral, tal como se ve en la Figura 36 eII), aumentando un poco los índices de refracción máximo y mínimo, sin embargo, esto conllevó a estar cerca del límite respecto a los valores que se pueden alcanzar con el  $\text{SiO}_x\text{N}_y$ .

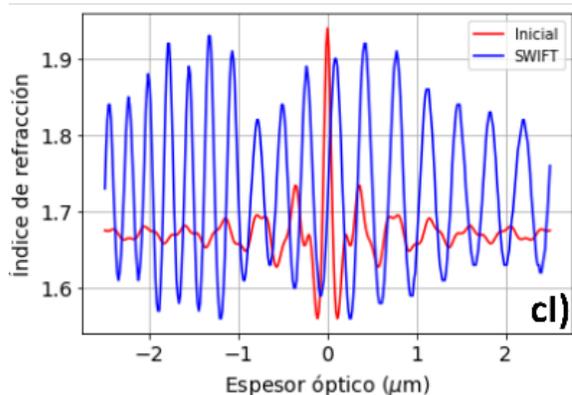
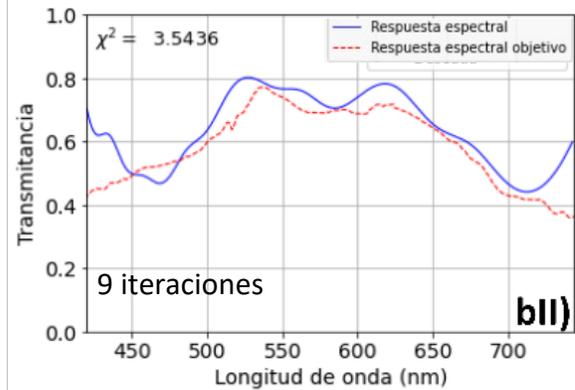
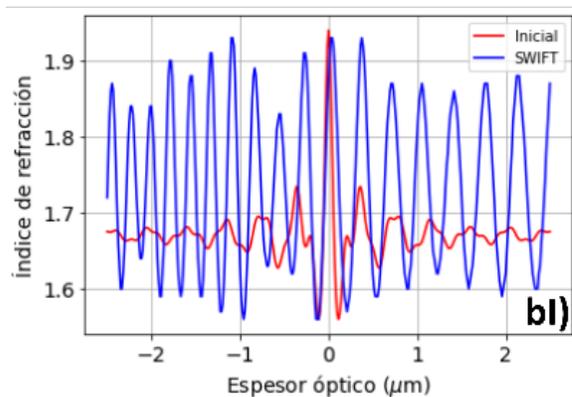
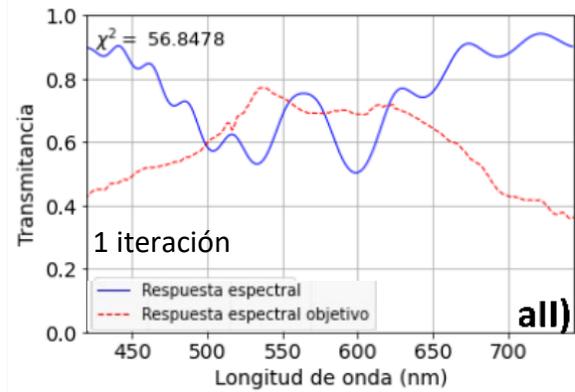
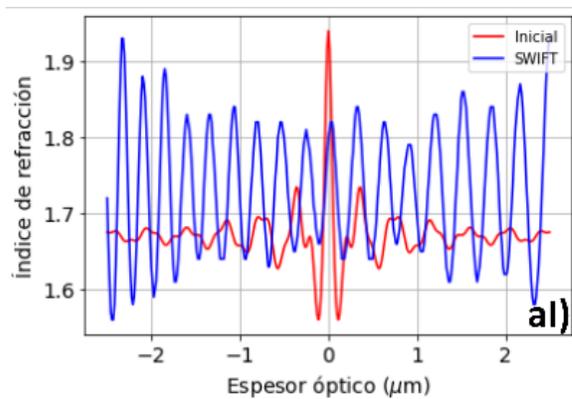


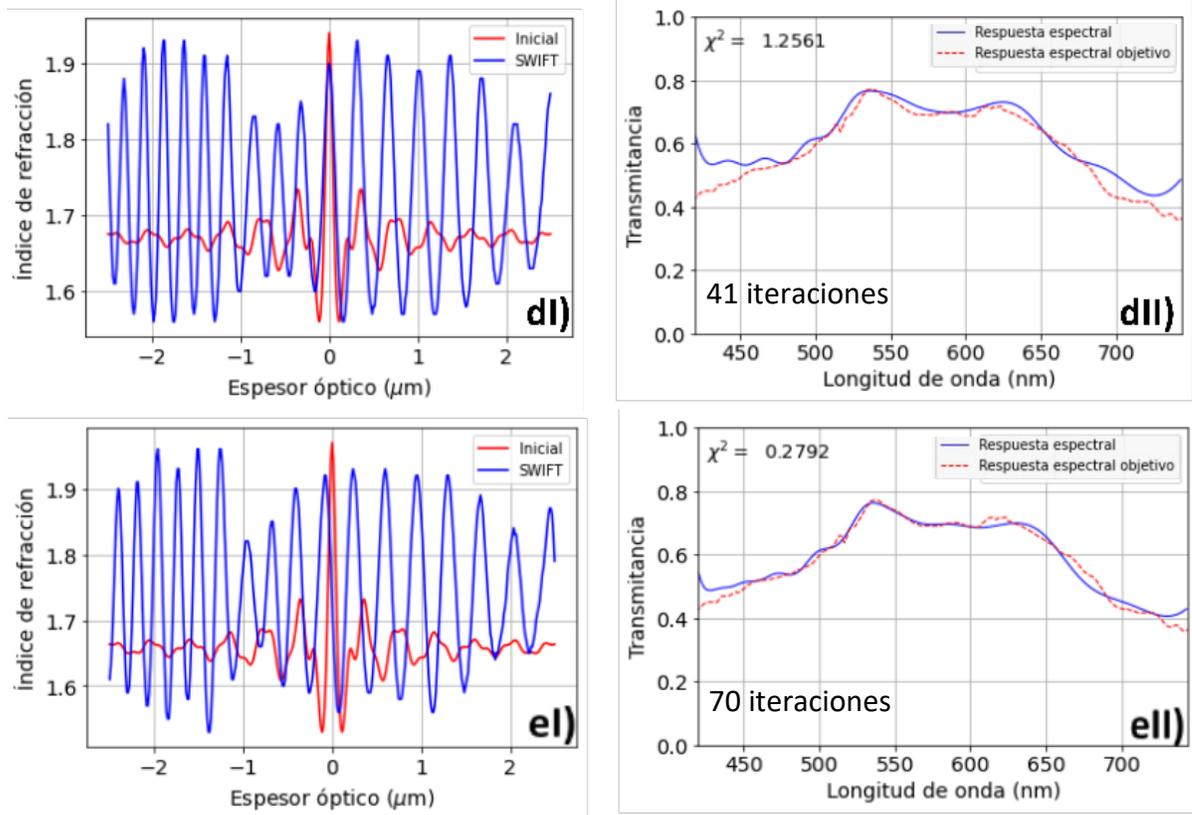


**Figura 36.** Nevado de Toluca: Perfiles de índice de refracción de  $12\mu\text{m}$  de espesor sintetizados por SWIFT y sus respuestas espectrales. al-all) 1 iteración. bl-bll) 9 iteraciones. cl-cll) 21 iteraciones. dl-dll) 41 iteraciones. el-ell) 112 iteraciones, modificación: índices de refracción superior e inferior de 1.97 y 1.53.

Continuando con la reducción del espesor óptico y siguiendo los resultados mostrados para el capitolio, se sintetizaron perfiles de índice de  $5\mu\text{m}$  de espesor, siendo los valores de índices de refracción superior e inferior iguales a los ejemplos anteriores, 1.94 y 1.56. Como valor del punto de partida de la distribución de energía se eligió  $-10.125\mu\text{m}$ , mientras que el valor de la distribución total de dicha energía fue  $20.25\mu\text{m}$ . Tales valores se tuvieron que obtener mediante prueba y error, hasta que se alcanzó un buen resultado en la respuesta espectral. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 37.

Para este espesor óptico se tiene una considerable reducción de la respuesta espectral obtenida, pues si se observa la Figura 37, dII), se nota la falta de definición en varias partes de la silueta del volcán, donde para casi todas las longitudes de onda consideradas, los valores de la transmitancia son superiores respecto a los que se desean alcanzar. Para compensar el error inducido por la falta altas frecuencias, se amplió el intervalo de índices de refracción como se muestra en la Figura 37 eI), logrando reducir en un orden de magnitud el valor de la  $\chi^2$ , sin embargo, en los ambos extremos de la respuesta espectral se sigue teniendo un gran error de ajuste, ya que los valores de las transmitancias se encuentran por arriba de los deseados, aunque no tan grave como en la Figura 37 dII).





**Figura 37.** Nevado de Toluca: Perfiles de índice de refracción de  $12\mu\text{m}$  de espesor sintetizados por SWIFT y sus respuestas espectrales. al-all) 1 iteración. bl-bll) 9 iteraciones. cl-cll) 21 iteraciones. dl-dll) 41 iteraciones. el-eII) 70 iteraciones, modificación: índice de refracción superior e inferior de 1.97 y 1.53.

### 3.5 Resultados experimentales

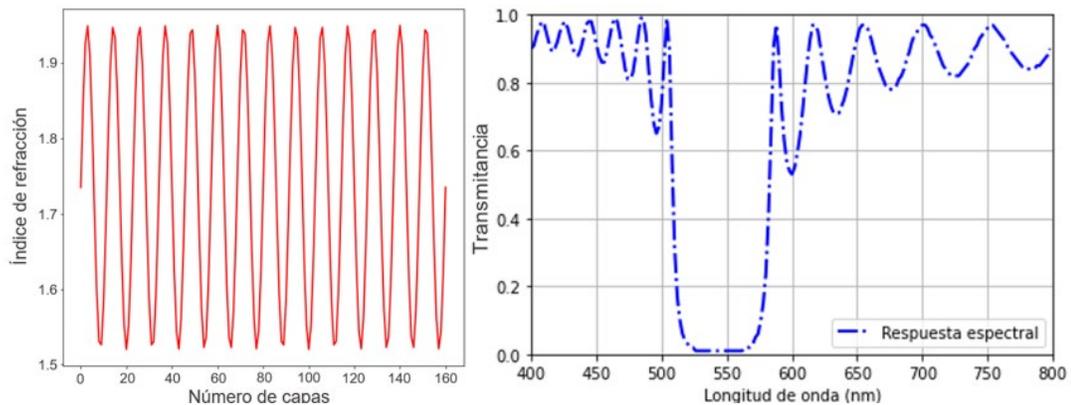
A lo largo de esta sección se muestran los resultados de un filtro inhomogéneo crecido a través de la técnica de erosión iónica (sputtering). Se indican los valores de las condiciones iniciales utilizadas durante la síntesis y por qué se han elegido tales valores. Principalmente, se comparan los resultados medidos experimentalmente con los teóricos para demostrar que los filtros sintetizados mediante el programa son reproducibles experimentalmente. Como se mencionó en la metodología, los filtros crecidos en este trabajo son la primera aproximación para el crecimiento de filtros inhomogéneos por erosión iónica. Se manejaron Gaussianas invertidas como la respuesta espectral objetivo, para evitar tener que realizar un acoplamiento de los índices de refracción en los extremos del filtro, con el índice de refracción del sustrato y del medio de incidencia.

### 3.5.1 Filtro de perfil de índices senoidal

El primer filtro inhomogéneo crecido en el laboratorio se realizó mediante el método de Southwell. La razón de utilizar este método en vez del de transformada de Fourier, fue para corroborar que la calibración del sistema de erosión iónica y la conversión del perfil de índices a un archivo de flujos de oxígeno, nitrógeno y argón por segundo eran correctas, mediante el depósito rápido de un perfil de índices de una función seno. Se optó crecer un con una transmitancia cercana al 0 para una longitud de onda de 480 nm. Los parámetros introducidos para sintetizar la senoide fueron:

**Tabla 2.** Parámetros utilizados para sintetizar el perfil de índice por Southwell.

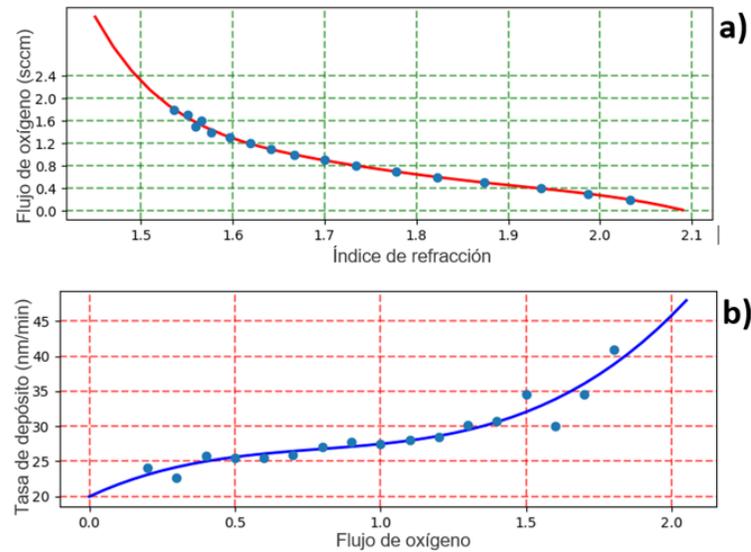
Número de capas	160
Espesor físico por capa	14 nm
Número de ciclos	14
Índice de refracción inferior	1.52
Índice de refracción superior	1.94



**Figura 38.** Perfil de índices sinusoidal que se desea crecer y su respuesta espectral.

En la Figura 28, se muestra el perfil de índices que se obtiene a partir de los datos mostrados en la Tabla 2, e introducidos en el programa (pestaña “Southwell”). El perfil de índices debe ser convertido a un archivo de texto que contenga los flujos de gases y tiempos de depósito. Se utilizó la calibración con el nombre asignado N3H, que de acuerdo con el código del laboratorio hace referencia al año, mes y día en

que fue realizada. Las condiciones de trabajo para esta calibración fueron: presión de trabajo de 5mTorr, potencia de 70 W, flujo de Ar de 20 sccm, flujo de  $O_2$  entre 0.2 y 1.7 sccm, flujo de  $N_2$  de 9 sccm y una distancia de blanco-sustrato de 5 cm.

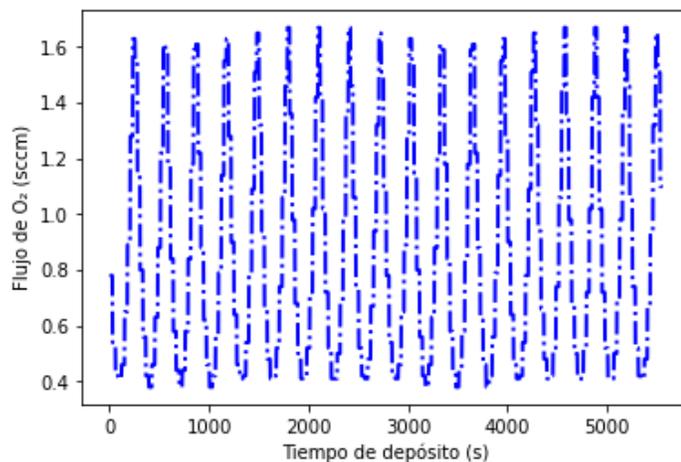


**Figura 39.** a) Índice de refracción vs flujo de  $O_2$ . b) Flujo de oxígeno vs tasa de depósito. Calibración N3H.

La gráfica a) de la Figura 39, muestra cómo va variando el índice de refracción en función del flujo de oxígeno. Los puntos azules son los valores que se obtuvieron experimentalmente, mientras que la curva roja es un ajuste polinomial realizado por el programa de modo que se puedan estimar los valores intermedios entre los puntos medidos. La gráfica b) de la Figura 39 corresponde a la tasa de depósito en función del flujo de oxígeno que se utilizó. Pese a que todas las capas tienen el mismo grosor de 14 nm, dependiendo de la capa que se esté creciendo, se tendrá un tiempo de depósito diferente debido a la variación de flujo de oxígeno entre capa y capa.

Sobre la gráfica b) también se realizó un ajuste polinomial para obtener puntos intermedios de la tasa de depósito. El ajuste introduce cierto error en los puntos de las tasas de depósito de los flujos de oxígeno que están más dispersos respecto a la curva resultante del ajuste, especialmente aquellos por arriba de 1.5 sccm. Mediante el ajuste de curvas realizadas sobre las gráficas a) y b) de la Figura 39, el programa genera un nuevo archivo en forma de tabla, que contiene una columna de tiempo de depósito, una segunda de flujo de oxígeno y una tercera de flujo de nitrógeno.

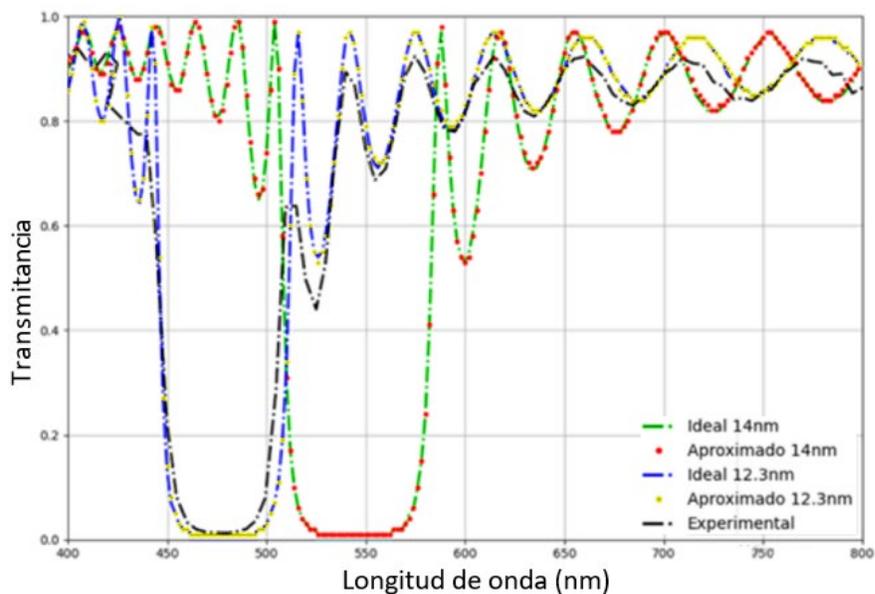
La variación del flujo de oxígeno respecto al tiempo para este experimento se muestra a continuación:



**Figura 40.** Gráfica del tiempo de depósito vs flujo de oxígeno para el filtro sinusoidal que se va a crecer experimentalmente.

El archivo con los flujos y tiempos de depósito se introduce a la computadora que, mediante un programa creado por uno de los miembros del laboratorio, controla la entrada de gases en el sistema de erosión iónica.

Para más información sobre el proceso de calibración del sistema de vacío y cuestiones técnicas del experimento, consultar el trabajo de tesis de Ramón Rodríguez López, 2023, realizado de forma paralela a esta investigación y se aborda un enfoque más experimental sobre estos resultados.



**Figura 41.** Respuestas espectrales teóricas y experimentales del filtro inhomogéneo crecido, con un pico de transmitancia mínimo en los 480nm.

Los picos del lado derecho, cuyo centro está situado aproximadamente en 530 nm, corresponden a la síntesis original, a partir de la cual se generó la lista de flujos. Se esperaba un espesor físico por capa de 14 nm, pero se teoriza que en realidad se estuvieron creciendo capas de aproximadamente 12.3 nm, debido a que al realizarse una nueva síntesis considerando tales espesores físicos, el pico central de mínima transmitancia corresponde con el medido experimentalmente mediante espectroscopía en el rango Uv-Vis. Lo anterior se puede deber a que la parte superior de cada capa tiene cierta rugosidad, provocando una interfaz compartida con la capa subsecuente, generando así la disminución de los espesores para cada capa de 14 nm a 12.3 nm. Se necesitan hacer estudios para determinar el espesor por capa para poder corroborar tal teoría.

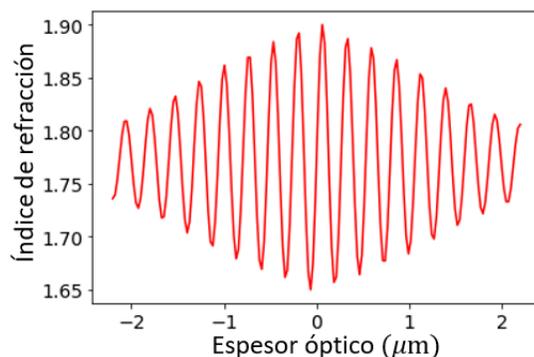
### 3.5.2 Filtro de perfil de índices de Gaussiana invertida.

Tras haber comprobado que era posible crecer un filtro inhomogéneo a partir el archivo de flujos de gases y tiempos, se prosiguió a crecer filtros inhomogéneos pro transformada de Fourier. Los perfiles de índice mostrados en esta subsección están basados en los análisis realizados a la Gaussiana invertida de la subsección 3.2.3. El primer filtro se sintetizó para reproducir una respuesta con un pico de transmitancia mínima del 30% en los 612 nm. La Tabla 3 muestra los valores de las condiciones iniciales empleaos. La Figura 42 muestra al perfil de índices correspondiente.

**Tabla 3.** Parámetros utilizados para sintetizar el perfil de índices con una respuesta espectral de transmitancia mínima del 30% en los 612 nm.

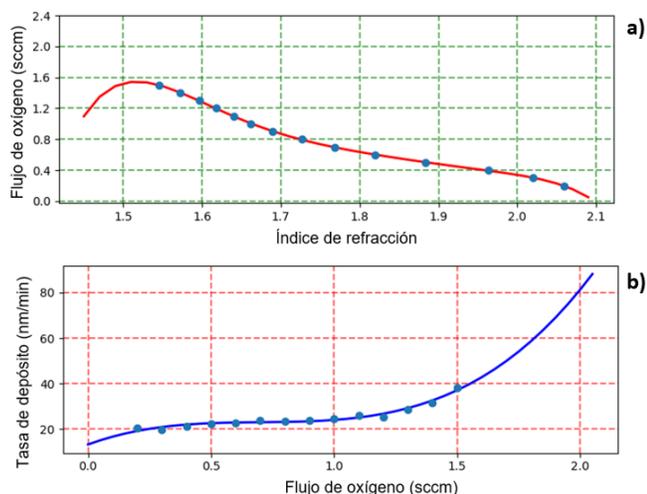
Espesor óptico inferior	$-2.2 \mu m$
Espesor óptico superior	$2.2 \mu m$
Fase inicial ( $\Phi_0$ )	$2\pi$
Función Q	$Q_3 = \sqrt{\frac{1}{T} - 1}$
Índice de refracción inferior	1.65
Índice de refracción superior	1.9
Espesor óptico por capa	25 nm

Para poder crecer el filtro inhomogéneo obtenido por el método de transformada de Fourier, el espesor óptico es transformado a espesor físico dividiendo cada capa entre su índice de refracción correspondiente. Mediante este cálculo, las capas pasan de 25 nm a valores entre los 12 y 14 nm de espesor físico, por lo que el filtro se reduce de  $4.4 \mu\text{m}$  de espesor óptico a  $2.84 \mu\text{m}$  de espesor físico. Teniendo el perfil de índices de refracción en términos de espesores físicos, se realiza la conversión a flujos de gases, de modo que se pueda pasar a la parte de crecimiento experimental del filtro por erosión iónica.



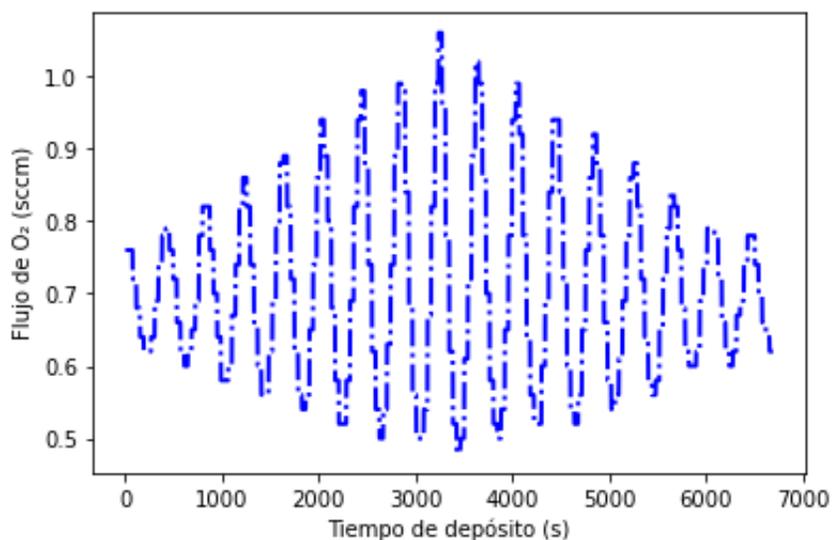
**Figura 42.** Perfil de índices con respuesta espectral de Gaussiana invertida cuya transmitancia mínima se encuentra en los 612 nm.

Debido al desgaste sufrido por el blanco durante la realización de otras pruebas no relacionadas con este trabajo, se tuvo que realizar una nueva calibración, cuyo nombre asignado fue N6S. Las condiciones de depósito para esta calibración fueron: una presión de trabajo de  $5.5\text{mTorr}$ , potencia de 70 W, 20 sccm de flujo de argón, 9 sccm de flujo de  $N_2$  y un rango de flujos de oxígeno entre 0.2 y 1.5 sccm. Las curvas de calibración se muestran en la Figura 43.



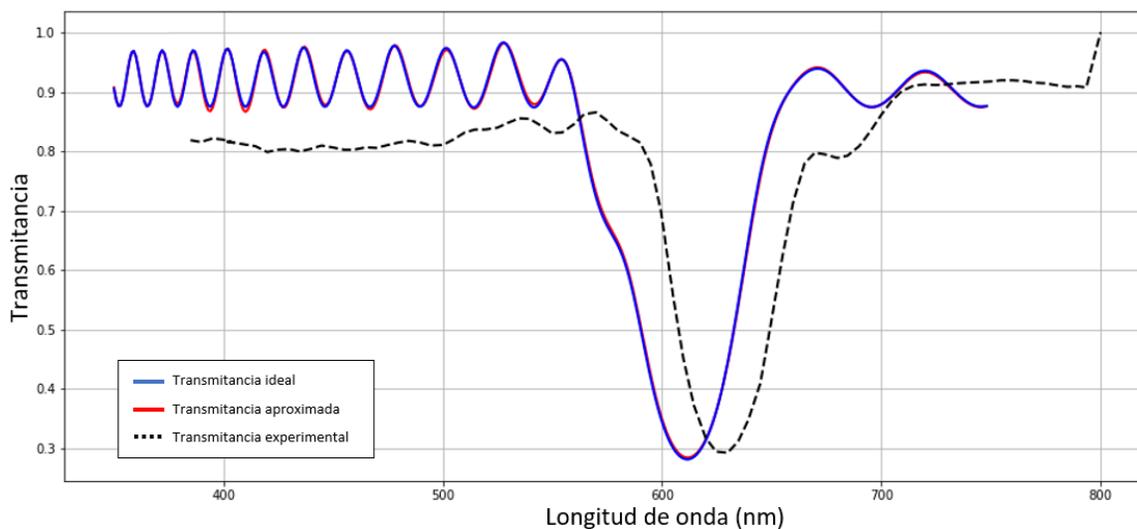
**Figura 43.** a) Gráfica de índice de refracción vs flujo de  $O_2$ . b) Flujo de oxígeno vs tasa de depósito. Calibración N6S.

La Figura 44 muestra la variación de flujo de oxígeno con el tiempo. El tiempo de depósito para este filtro fue de 1 hora, 48 minutos y 17 segundos.



**Figura 44.** Tiempo de depósito vs flujo de oxígeno para el filtro de Gaussiana invertida con transmitancia mínima en los 612 nm.

Los resultados del filtro crecido comparados con los datos estimados por el programa se muestran en la Figura 45.

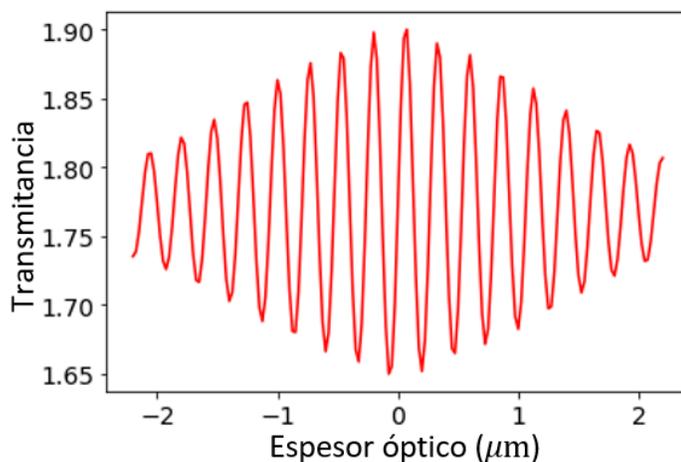


**Figura 45.** Comparación de la respuesta espectral experimental (línea negra punteada), con la respuesta espectral ideal esperada (línea azul) y la respuesta espectral ideal aproximada (línea roja), para el filtro de 612 nm.

La curva roja de la Figura 45 corresponde a la respuesta espectral aproximada tras el redondeo de tiempos en la lista con los datos experimentales de tiempo vs flujo de oxígeno. Los redondeos se realizan sobre los milisegundos, redondeando hacia el segundo superior, de modo que todos los tiempos queden en segundos, pues es el rango de resolución de los controladores a cambios de flujos. El ligero desplazamiento de la curva roja respecto a la azul se debe a que los redondeos en el tiempo añaden algunos segundos adicionales durante el tiempo de depósito, generando un filtro un poco más grande respecto al ideal. En este filtro el redondeo añadió 43 segundos al depósito, cantidad que es mínima si se compara con los 6,497 segundos que dura el depósito total, aunque suficiente para causar un ligero desplazamiento de la respuesta espectral. Se esperaba obtener un valor mínimo de transmitancia en los 612 nm (línea roja), pero la Figura 45 muestra que dicho valor en el filtro crecido experimentalmente se encuentra en los 630 nm (línea negra punteada). Esto podría significar una mayor tasa de depósito por minuto respecto a la estimada, aunque con es necesario crecer más filtros inhomogéneos para corroborar esta hipótesis. La región de transmitancia máxima del filtro crecido tiene una disminución entre el 10 y 15% respecto a lo esperado. Tal disminución se atribuye a los efectos de dispersión debido a imperfecciones a lo largo de la película. El segundo filtro planteado mediante el método de síntesis por transformada de Fourier consiste en utilizar una Gaussiana invertida, con una transmitancia mínima del 30% en los 532nm, cuya aplicación puede ser un divisor de haz de láser. Las condiciones iniciales utilizadas se reportan en la Tabla 4. Se maneja un espesor óptico de  $4.4\mu m$ , dividido en capas de 25nm de espesor óptico, tal como se hizo para el ejemplo anterior. Esto significa que ambos perfiles de índices de refracción sintetizados por el método de transformada de Fourier, tiene el mismo espesor óptico.

**Tabla 4.** Condiciones iniciales utilizadas para sintetizar el perfil de índices con una respuesta espectral de transmitancia mínima del 30% en los 532nm.

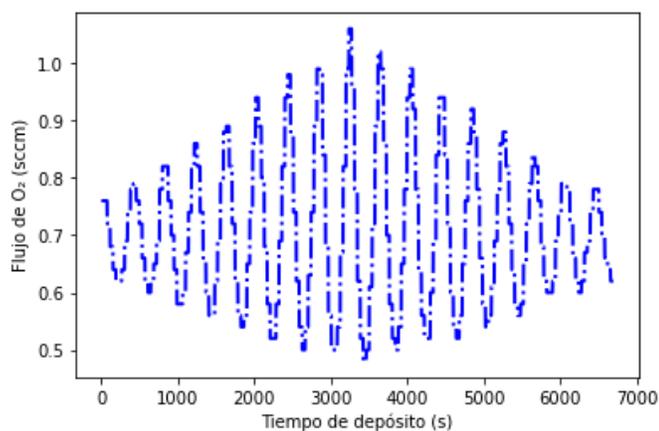
Espesor óptico inferior	$-2.2 \mu m$
Espesor óptico superior	$2.2 \mu m$
Fase inicial ( $\Phi_0$ )	$2\pi$
Función Q	$Q_3 = \sqrt{\frac{1}{T} - 1}$
Índice de refracción inferior	1.65
Índice de refracción superior	1.9
Espesor óptico por capa	25 nm



**Figura 46.** Perfil de índices con respuesta espectral de Gaussiana invertida cuya transmitancia mínima se encuentra en los 532 nm.

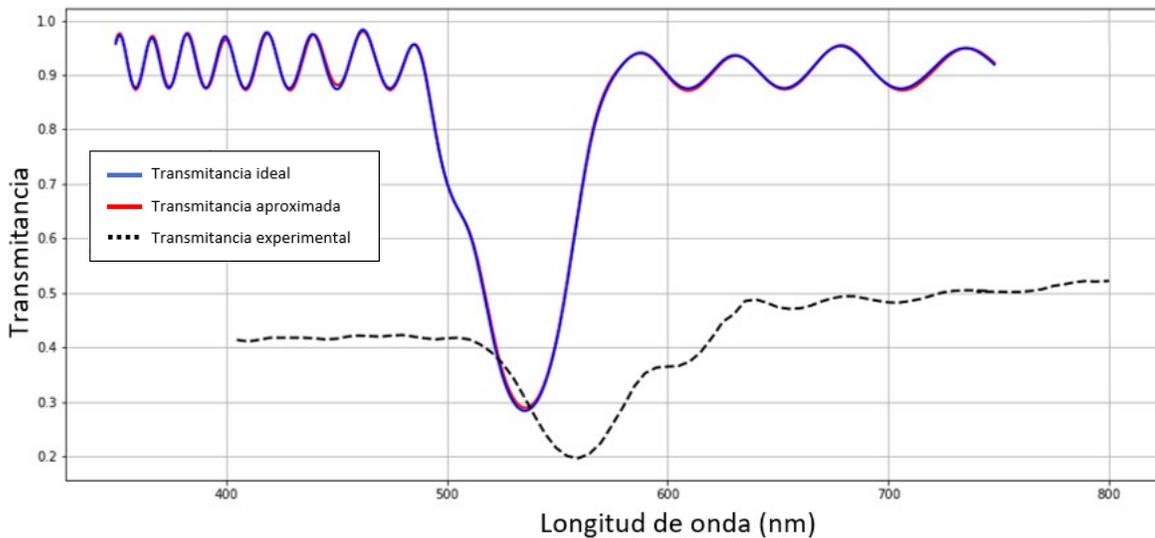
El perfil de índices sintetizado a partir de las condiciones de depósito se muestra en la Figura 46. Las capas de 25 nm de espesor óptico al ser transformadas a espesor físico dieron valores entre los 12 y 14nm. El espesor físico fue de  $2.84\mu\text{m}$ .

La calibración fue la misma respecto al filtro anterior, por lo que las condiciones de depósito fueron, una presión de trabajo de  $5.5\text{ mTorr}$ , potencia de 70 W, 20 sccm de flujo de argón, 9 sccm de flujo de  $N_2$  y un rango de flujos de oxígeno entre 0.2 y 1.5 sccm. El tiempo de depósito total fue de 1 hora y 48 minutos. El archivo de tiempos contra flujos de oxígeno se muestra en la figura Figura 47.



**Figura 47.** Tiempo de depósito vs flujo de oxígeno para el filtro de Gaussiana invertida con transmitancia mínima en los 532 nm.

Tras haber crecido el filtro, se midió su respuesta espectral y se comparó el resultado con los datos de la síntesis, tal como se muestran a continuación.

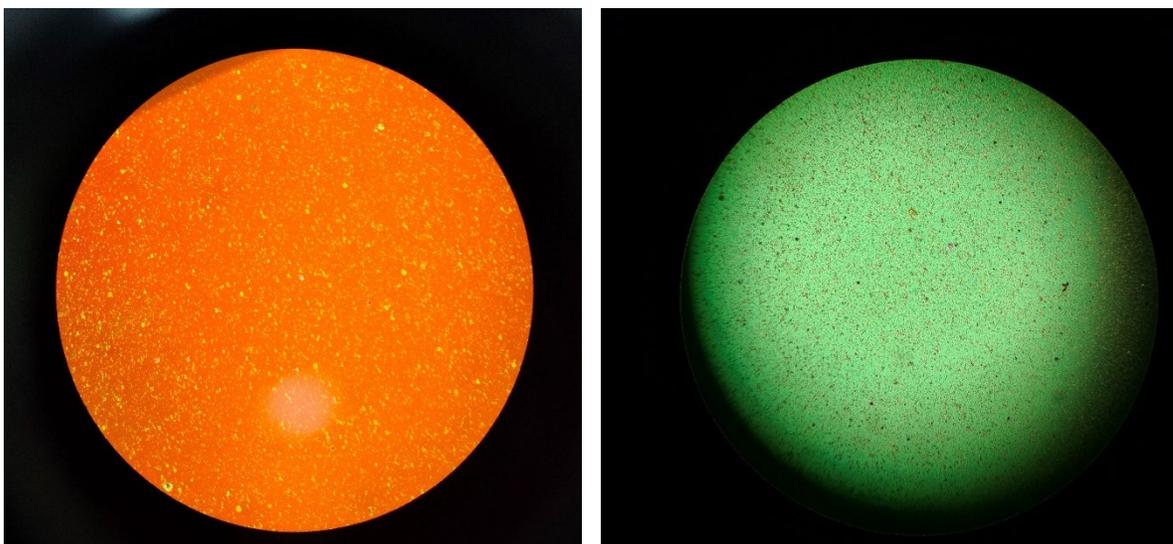


**Figura 48.** Comparación de la respuesta espectral experimental (línea negra punteada), con la respuesta espectral ideal esperada (línea azul) y la respuesta espectral ideal aproximada (línea roja), para el filtro de 532 nm.

La respuesta espectral mostrada en la Figura 48 muestra un pobre desempeño respecto al esperado, ya que en los extremos sólo se alcanza un 50% de transmittancia. Por su parte, el pico de transmittancia menor se esperaba con un porcentaje del 30% y resultó ser del 20%, desplazándose hacia los 559 nm, cuando de acuerdo con la curva roja, se esperaba la transmittancia mínima en aproximadamente los 536 nm.

Ambos filtros sintetizados por el método de transformada de Fourier dieron una respuesta espectral con un corrimiento hacia la derecha en sus longitudes de onda. Se teoriza que la tasa de depósito estimada en la calibración es mayor a la esperada. Considerando que cada filtro inhomogéneo sintetizado es una solución única, se debe hacer una nueva calibración para corroborar los cálculos, de forma tal que se pueda garantizar una reproducción fidedigna del perfil de índices deseado. El no haber alcanzado las amplitudes de transmittancias máximas en ambos casos se atribuye a efectos de dispersión.

La superficie de los filtros fue analizada mediante un microscopio óptico, donde se observaron grandes imperfecciones en forma de cráteres, tal como se aprecia en la Figura 49.



**Figura 49.** A) Filtro inhomogéneo 1, transmitancia mínima en los 630 nm. B) Filtro inhomogéneo 2, transmitancia mínima en los 559 nm.

Mediante los resultados experimentales de este trabajo se demostró que fue posible crecer filtros inhomogéneos por erosión iónica, para los perfiles de índices sintetizados mediante el programa creado en el laboratorio.

## Capítulo 4. Conclusiones

---

El método de transformada de Fourier (TF) para la síntesis de filtros inhomogéneos demuestra ser una herramienta que se puede adaptar para reproducir curvas de transmitancias/reflectancias arbitrarias.

Se construyó una interfaz gráfica para el programa de síntesis de filtros inhomogéneos, la cuál facilitó su uso, haciendo más sencilla la conversión de perfiles de índices de refracción a archivos de flujos y la comparación de las respuestas espectrales deseadas, esperadas y obtenidas experimentalmente.

En este trabajo se demostró que las condiciones iniciales (espesor óptico ( $x$ ), función  $Q$ , y fase inicial  $\Phi_0$ ) son parte fundamental para sintetizar filtros inhomogéneos con respuestas espectrales similares a las deseadas. Las tres condiciones iniciales deben ser analizados para cada silueta con la que se desee trabajar, de forma que se pueda alcanzar la mejor respuesta espectral posible.

Determinar los correctos valores de las condiciones iniciales (espesor óptico ( $x$ ), función  $Q$ , y fase inicial  $\Phi_0$ ), y las dos condiciones iniciales de SWIFT (el punto inicial de la distribución de energía de la onda y el rango de distribución de la energía de la onda) permitió sintetizar mediante el método iterativo SWIFT filtros inhomogéneos con valores de índices de refracción y espesores viables para su reproducción experimental. Esto corrobora la hipótesis propuesta.

Se demostró que es posible crecer por erosión iónica y utilizando  $SiO_xN_y$ , tres filtros sintetizados mediante el programa de síntesis de filtros inhomogéneos creado en el laboratorio.

El primer filtro inhomogéneo sintetizado por el método de Southwell y crecido experimentalmente, muestra una respuesta espectral que se aproxima a la estimada. Los filtros sintetizados por transformada de Fourier no alcanzaron el desempeño esperado. Se deben crecer más filtros, para dar una explicación al corrimiento en longitud de onda de la respuesta espectral y corregir el problema de dispersión.

A medida que se crezcan más filtros inhomogéneos de forma experimental, se tendrá un mayor conocimiento de los alcances y limitaciones de crecer este tipo de filtros por erosión iónica.

Como trabajo futuro, se propone que las condiciones iniciales y condiciones por SWIFT sean determinadas mediante el algoritmo, utilizando un método iterativo, para automatizar la búsqueda de estas condiciones. En la parte experimental se debe hacer una nueva calibración y crecer más filtros inhomogéneos.

## Literatura citada

---

- Bandyopadhyay, A., & Bose, S. (2013). *Characterization of Biomaterials*. Elsevier. <https://doi.org/10.1016/C2011-0-04481-2>.
- Bovard, B. G. (1988). Derivation of a matrix describing a rugate dielectric thin film. *Applied Optics*, 27(10), 1998–2005. <https://doi.org/10.1364/AO.27.001998>.
- Bracewell, R. N. (1968). *The Fourier Transform and Its Applications* (3rd ed.). McGraw-Hill. chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcgiclfndmkaj/https://see.stanford.edu/materials/lsoftae261/book-fall-07.pdf
- Chen, Z., Deutsch, T. G., Dinh, H. N., Domen, K., Emery, K., Forman, A. J., Gaillard, N., Garland, R., Heske, C., Jaramillo, T. F., Kleiman-Shwarscstein, A., Miller, E., Takanabe, K., & Turner, J. (2013). *UV-Vis Spectroscopy*. Springer. [https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8298-7\\_5](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8298-7_5).
- Cheng, X., Fan, B., Dobrowolski, J. A., Wang, L., & Wang Z. (2008). Gradient-index optical filter synthesis with controllable and predictable refractive index profiles. *Optics Express*, 16(4), 2315–2321. <https://doi.org/https://doi.org/10.1364/OE.16.002315>.
- Delano, E. (1967). Fourier Synthesis of Multilayer Filters. *Journal of the optic society of America*, 57(12), 1529–1533. <https://doi.org/https://doi.org/10.1364/JOSA.57.001529>.
- Depla, D., Mahieu, S., & Greene, J. E. (2010). Sputter deposition processes. En *Handbook of Deposition Technologies for Films and Coatings* (3rd ed.). Elsevier. <https://biblio.ugent.be/publication/1095343>
- Diferencias. (2020). *Análisis y síntesis*. <https://www.diferencias.cc/analisis-sintesis/>
- Dobrowolski, J. A. (1976). Modern computational methods for optical thin film systems. *Thin Solid Films*, 34, 313–321. [https://doi.org/10.1016/0040-6090\(76\)90480-6](https://doi.org/10.1016/0040-6090(76)90480-6).
- Dobrowolski, J. A. (1986). Comparison of the Fourier transform and flip-flop thin-film synthesis methods. *Applied Optics*, 25(12), 1966–1972. <https://doi.org/10.1364/AO.25.001966>.
- Dobrowolski, J. A., & Lowe, D. (1978). Optical thin film synthesis program based on the use of Fourier transforms. *Applied Optics*, 17(19), 3039–3050. <https://doi.org/10.1364/AO.17.003039>.
- Druessel, J., Grantham, J., & Haaland, P. (1993). Optimal phase modulation for gradient-index optical filters. *Optics Letters*, 18(19), 1583–1585. <https://doi.org/10.1364/ol.18.001583>.
- Guan, S., & McIver, R. T. (1990). Optimal phase modulation in stored wave form inverse Fourier transform excitation for Fourier transform mass spectrometry. I. Basic algorithm. *The Journal of Chemical Physics*, 92(10), 5841–5846. <https://doi.org/10.1063/1.458405>.
- Hecht, E. (2016). *Óptica* (5th ed.). Pearson Educación.
- Herman, I. P. (1996). Optical Emission Spectroscopy. En *Optical Diagnostics for Thin Film Processing* (pp. 157–213). Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-012342070-1/50007-3>.

- Kelly, P. J., & Arnell, R. D. (2000). Magnetron sputtering: a review of recent developments and applications. *Vacuum*, *56*(3), 159–172. [https://doi.org/10.1016/S0042-207X\(99\)00189-X](https://doi.org/10.1016/S0042-207X(99)00189-X).
- Knittl, Z. (1976). *Optics of Thin Films: An Optical Multilayer Theory*. John Wiley & Sons.
- MacLeod, H. Angus. (2010). *Thin Film Optical Filters* (4th ed.). CRC Press.
- Mitchell, M., Muftakhidinov, B., & Winchen, T. (2023). *Engauge Digitizer Software*. <http://markummitchell.github.io/engauge-digitizer>.
- Pegis, R. J. (1961). An Exact Design Method for Multilayer Dielectric Films. *Journal of the Optical Society of America*, *51*(11), 1255–1264. <https://doi.org/10.1364/JOSA.51.001255>.
- Quirrenbach, A. (2001). Optical Interferometry. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, *39*(1), 353–401. <https://doi.org/10.1146/annurev.astro.39.1.353>.
- Rodríguez-López, R. (2023). *Análisis y control de películas delgadas con índice de refracción variable sintetizadas por pulverización catódica reactiva*. Tesis de Doctorado en Ciencias. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California. <https://biblioteca.cicese.mx/catalogo/tesis/ficha.php?id=26361>.
- Rodríguez-López, R., Soto-Valle, G., Sanginés, R., Abundiz-Cisneros, N., Águila-Muñoz, J., Cruz, J., & Machorro-Mejía, R. (2022). Study of deposition parameters of reactive-sputtered Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> thin films by optical emission spectroscopy. *Thin Solid Films*, *754*, 1–8. <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2022.139313>.
- Russakoff, G. (1970). A Derivation of the Macroscopic Maxwell Equations. *American Journal of Physics*, *38*(10), 1188–1195. <https://doi.org/10.1119/1.1976000>.
- Sanginés, R., Abundiz-Cisneros, N., Hernández Utrera, O., Diliegros-Godines, C., & Machorro-Mejía, R. (2018). Plasma emission spectroscopy and its relation to the refractive index of silicon nitride thin films deposited by reactive magnetron sputtering. *Journal of Physics D: Applied Physics*, *51*(9), 1–13. <https://doi.org/10.1088/1361-6463/aaa8d4>.
- Smith, A. (2004). What is the history of medieval optics really about? *Proceedings of the American Philosophical Society*, *148*(2), 180–194. <https://www.jstor.org/stable/1558283>.
- Sossi, L. (1974). A Method for the Synthesis of Multilayer Dielectric Interference Coatings. *EESTI NSV Teaduste Akadeemia Toimetised*, *23*(3), 229–237.
- Sossi, L. (1976). On Theory of the Synthesis of Multilayer Dielectric Light Filters. *EESTI NSV Teaduste Akadeemia Toimetised*, *25*(2), 171–176.
- Sossi, L., & Kard, P. (1968). On the Theory of Reflection and Transmission of Light by a Thin Inhomogeneous Dielectric Film. *EESTI NSV Teaduste Akadeemia Toimetised*, *17*(1), 41–48.
- Southwell, W. H. (1984). Use of gradient index for spectral filters. *SPIE*, *464*, 110–114. <http://spiedl.org/terms>
- Southwell, W. H. (1989). Using apodization functions to reduce sidelobes in rugate filters. *Applied Optics*, *28*(23), 5091–5094. <https://doi.org/10.1364/AO.28.005091>.
- Starke, R., & Schober, G. A. H. (2018). Why history matters: Ab initio rederivation of Fresnel equations confirms microscopic theory of refractive index. *Optik*, *157*, 275–286. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2017.11.026>.

- Swann, S. (1988). Magnetron sputtering. *Physics in Technology*, 19(2), 67–75. <https://doi.org/10.1088/0305-4624/19/2/304>.
- Turimexico. (2016). *Parque Nacional Nevado de Toluca, Estado de México*. <https://www.turimexico.com/estados-de-la-republica-mexicana/estado-de-mexico-mexico/ecoturismo-en-el-estado-de-mexico/parque-nacional-nevado-de-toluca-estado-de-mexico/>
- Verly, P. G. (1993). Design of Inhomogeneous and Quasi-Inhomogeneous Optical Coatings at the NRC. *SPIE*, 2046, 36–45. <http://spiedl.org/terms>.
- Verly, P. G. (2010). Optimum phase for rugate filter synthesis by Fourier transforms. *Applied Optics*, 50(9), 124–128. <https://doi.org/10.1364/AO.50.00C124>
- Verly, P. G., & Dobrowolski, J. A. (1990). Iterative correction process for optical thin film synthesis with the Fourier transform method. *Applied Optics*, 29(25), 3672–3684. <https://doi.org/10.1364/AO.29.003672>.
- Verly, P. G., Dobrowolski, J. A., Wild, W. J., & Burton, R. L. (1989). Synthesis of high rejection filters with the Fourier transform method. *Applied Optics*, 28(14), 2864–2875. <https://doi.org/10.1364/AO.28.002864>.
- Villa, E., & Machorro-Mejía, R. (2023). Analysis of the Influence of the Spectral Response for Rugate Filters by Modifying the Frequency Domain. *Applied Optics*, 62(7), B7–B13. <https://doi.org/10.1364/ao.471774>.
- Walters, G. (2023). *Python GUI Programming with PAGE: Create professional-looking GUIs for Python applications efficiently and effectively*. BPB. <https://doi.org/978-9355518378>.
- Williams, P. (1979). The sputtering process and sputtered ion emission. *Surface Science*, 90(2), 588–634. [https://doi.org/10.1016/0039-6028\(79\)90363-7](https://doi.org/10.1016/0039-6028(79)90363-7).
- Wu, C.-J., Rau, Y.-N., & Han, W.-H. (2010). Enhancement of photonic band gap in a disordered quarter-wave dielectric photonic crystal. *Progress In Electromagnetics Research*, 100, 27–36. <https://doi.org/10.2528/PIER09111610>.

## Anexos

---

Una onda electromagnética es una perturbación en el espacio compuesta por un campo eléctrico y uno magnético, siendo perpendiculares entre sí y respecto a su dirección de propagación (Hecht, 2016). El comportamiento del campo eléctrico ( $\vec{E}$ ) y el campo magnético ( $\vec{B}$ ) pueden ser descritos mediante las ecuaciones de Maxwell, las cuales están expresadas en forma diferencial de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \nabla \cdot E &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \quad \text{Ley de Gauss (campo eléctrico)} \\
 \text{b) } \nabla \cdot B &= 0 \quad \text{Ley de Gauss (campo magnético)} \\
 \text{c) } \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{Ley de Faraday} \\
 \text{d) } \nabla \times B &= \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad \text{Ley de Ampere-Maxwell}
 \end{aligned} \tag{29},$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad dieléctrica del vacío,  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética en el vacío,  $J$  es la densidad de corriente eléctrica,  $t$  es el tiempo. A partir de las ecuaciones de Maxwell se puede derivar la ecuación de onda para el campo eléctrico o el campo magnético. La ecuación de onda describe el comportamiento de la onda en términos de uno de los campos, respecto al medio sobre el cual se propaga (Knittl, 1976). Su forma matemática es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 E &= 0 \\
 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 B &= 0
 \end{aligned} \tag{30}.$$

### A.1 Propagación de ondas electromagnéticas en medios continuos

Se considera como medio continuo a aquel espacio cuyo índice de refracción se mantiene constante para cualquier punto que lo conforma. Para lograr mantener un índice de refracción constante, el medio debe estar conformado por el mismo material. Considerando que el medio es no absorbente, la onda electromagnética puede propagarse libremente en este sin sufrir pérdidas en amplitud (Knittl, 1976). Una onda viajera se describe a partir de la solución de la ecuación de onda y dependiendo de las coordenadas con las que se están trabajando. En este trabajo se utilizan coordenadas cartesianas. La onda viajera en este caso se describe de la siguiente forma:

$$f(z, t) = Ae^{i(kz - \omega t)} \quad (31),$$

donde  $A$  es la amplitud de la onda; el vector de onda:  $k = 2\pi/\lambda$ ; la dirección de propagación:  $z$ ;  $\omega$  la frecuencia angular; y  $t$  el tiempo. El índice de refracción está asociado con la permitividad dieléctrica del medio de la forma:

$$n = \sqrt{\epsilon} \quad (32).$$

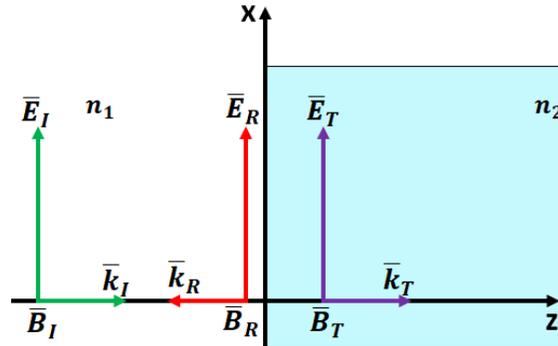
Para el caso donde el material sobre el cual se propaga la onda sea absorbente, por ejemplo, un metal, tanto la permitividad, como el índice de refracción, se vuelven complejos (Knittl, 1976):

$$n + i\kappa = \sqrt{\epsilon_1 + i\epsilon_2} \quad (33),$$

donde  $n$  es el índice de refracción,  $\kappa$  el coeficiente de absorción,  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  son la parte real e imaginaria de la permitividad dieléctrica del medio. El índice de refracción puede ser asociado como el cociente de la velocidad de la luz en el vacío  $c$  respecto a la velocidad de la luz sobre el medio  $v$ , esto de la forma:

$$n = \sqrt{\epsilon_1} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu\epsilon_0}} = \frac{c}{v} \quad (34).$$

Si una onda electromagnética incide sobre un material con índice de refracción diferente al medio de propagación, parte de esta se reflejará y el resto se transmitirá. Estos son los fenómenos de reflexión y transmisión de ondas, propuestos por Heinrich Rudolf Hertz. Si el medio incidente es no absorbente (índice de refracción real), la onda se propagará sin pérdidas de la energía transmitida, mientras que, si el medio es absorbente, esta viajará perdiendo amplitud hasta el punto en que toda su energía haya sido absorbida por el medio (Hecht, 2016). Considerando una onda electromagnética plana viajando sobre un medio, con índice de refracción  $n_1$  y que incide de manera normal (ángulo de incidencia  $\theta = 0$ ) sobre un medio con índice de refracción  $n_2$ , tal como lo muestra la Figura 50, es posible estimar el porcentaje de la energía de la onda que se va a reflejar, para aquello lo primero que se debe hacer es determinar las expresiones de los coeficientes de Fresnel, tal como se hará a continuación.



**Figura 50.** Esquema de la reflexión y transmisión de una onda electromagnética a incidencia normal. Modificada de: MacLeod, (2010).

La componente del campo eléctrico incidente se denota como  $E_I$ , la componente del campo eléctrico transmitido es  $E_T$  y  $E_R$  corresponde a la componente del campo eléctrico reflejo. El campo magnético, siguiendo la convención de la mano derecha, se encuentra apuntando en todos los casos, en dirección fuera de la hoja. A partir del arreglo establecido en la Figura 50, se puede establecer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \bar{E}_I &= E_{0I} \text{sen}(k_I z - \omega t) \widehat{U}_x \\
 \bar{E}_R &= E_{0R} \text{sen}(-k_R z - \omega t) \widehat{U}_x \\
 \bar{E}_T &= E_{0T} \text{sen}(K_T z - \omega t) \widehat{U}_x \\
 \bar{B}_I &= B_{0I} \text{sen}(k_I z - \omega t) \widehat{U}_y \\
 \bar{B}_R &= -B_{0R} \text{sen}(k_R z - \omega t) \widehat{U}_y \\
 \bar{B}_T &= B_{0T} \text{sen}(k_T z - \omega t) \widehat{U}_y
 \end{aligned} \tag{35}$$

Nótese que la componente del campo magnético reflejada ( $B_R$ ), posee un signo negativo en su expresión, pues de acuerdo con la regla de la mano derecha, su dirección de giro va en contra de las manecillas del reloj.  $E_0$  y  $B_0$ , son la amplitud de la onda incidente, reflejada o transmitida.  $k$  es el número de onda,  $z$  la dirección de propagación,  $\omega$  la frecuencia angular,  $t$  el tiempo y  $\widehat{U}$  el vector unitario de la dirección en que apunta el campo  $\bar{E}$  o  $\bar{B}$ . Para derivar los coeficientes de Fresnel, se deben considerar las condiciones de frontera entre los medios  $n_1$  y  $n_2$ , donde  $z = 0$ . Las tres ondas analizadas en la Figura 50, por ser incidencia normal, todos los casos los componentes  $\bar{E}$  y  $\bar{B}$  son tangenciales respecto a la interfaz que separa a los medios, por lo que en ese punto los campos  $\bar{E}$  y  $\bar{B}$  son continuos (MacLeod, 2010), de modo que:

$$\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} \\ \frac{B_{1t}}{\mu_1} &= \frac{B_{2t}}{\mu_2} \end{aligned} \quad (36).$$

Si se considera un medio cuya permeabilidad del campo magnético es:  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ , se tiene la siguiente igualdad:

$$B_{1t} = B_{2t} \quad (37).$$

Realizando un balance entre los campos del medio incidente y el saliente, y considerando que no existe reflexión, tenemos que:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{It} + \bar{E}_{Rt} &= \bar{E}_{Tt} \\ \bar{B}_{It} + \bar{B}_{Rt} &= \bar{B}_{Tt} \end{aligned} \quad (38).$$

Sustituyendo los valores para las igualdades anteriores en el conjunto de ecuaciones de (35), con  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} E_{0It} \text{sen}(-\omega t) \widehat{U}_x + E_{0Rt} \text{sen}(-\omega t) \widehat{U}_x &= E_{0Tt} \text{sen}(-\omega t) \widehat{U}_x \\ (B_{0It} \text{sen}(-\omega t) - B_{0Rt} \text{sen}(-\omega t)) &= (B_{0Tt} \text{sen}(-\omega t)) \end{aligned} \quad (39).$$

Como se ha eliminado la dependencia espacial, los senos pueden ser factorizados y eliminados:

$$\begin{aligned} E_{0It} + E_{0Rt} &= E_{0Tt} \\ B_{0It} - B_{0Rt} &= B_{0Tt} \end{aligned} \quad (40).$$

A partir de las ecuaciones de Maxwell, se sabe que existe una proporcionalidad entre las amplitudes de los campos  $\bar{E}$  y  $\bar{B}$ , donde a partir de una, se puede determinar la otra (MacLeod, 2010):

$$E_0 = B_0 v, \rightarrow B_0 = \frac{E_0}{v} \quad (41),$$

donde  $v$  es la velocidad de la onda en el medio. Sustituyendo esta igualdad en la expresión para el campo magnético, se tiene que:

$$\left( \frac{E_{0It}}{v_I} - \frac{E_{0Rt}}{v_R} \right) = \frac{E_{0Tt}}{v_T} \quad (42).$$

El índice de refracción se encuentra expresando de la forma:  $n = c/v$ , por lo que al multiplicar la expresión anterior por la velocidad de la luz y factorizando, se obtiene:

$$n_1 E_{0It} - n_1 E_{0Rt} = n_2 E_{0Tt} \quad (43).$$

Con lo que se tiene un conjunto de dos ecuaciones lineales, ambas dependientes de las amplitudes del campo eléctrico tangencial:

$$E_{0It} + E_{0Rt} = E_{0Tt} \quad (44).$$

$$n_1 E_{0It} - n_1 E_{0Rt} = n_2 E_{0Tt} \quad (45).$$

Resolviendo estas dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, la ecuación (44) se debe multiplicar por  $-n_2$ :

$$-n_2 E_{0I} - n_2 E_{0R} = -n_2 E_{0T} \quad (46),$$

a esta expresión se le suma la ecuación (46):

$$M - n_2 E_{0I} - n_2 E_{0R} + n_1 E_{0I} - n_1 E_{0R} = -n_2 E_{0T} + n_2 E_{0T} \quad (47),$$

factorizando términos y despejando:

$$r = \frac{E_{0R}}{E_{0I}} = \frac{(n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)} \quad (48),$$

este es el coeficiente de reflexión de Fresnel.

Para derivar el coeficiente de Fresnel de la transmisión, la ecuación (44) se multiplica por  $n_1$ :

$$n_1 E_{0I} + n_1 E_{0R} = n_1 E_{0T} \quad (49),$$

sumándole la ecuación (45):

$$n_1 E_{0I} + n_1 E_{0R} + n_1 E_{0I} - n_1 E_{0R} = n_1 E_{0T} + n_2 E_{0T}$$

Agrupando términos y despejando:

$$t = \frac{E_{0T}}{E_{0I}} = \frac{2n_1}{(n_1 + n_2)} \quad (50).$$

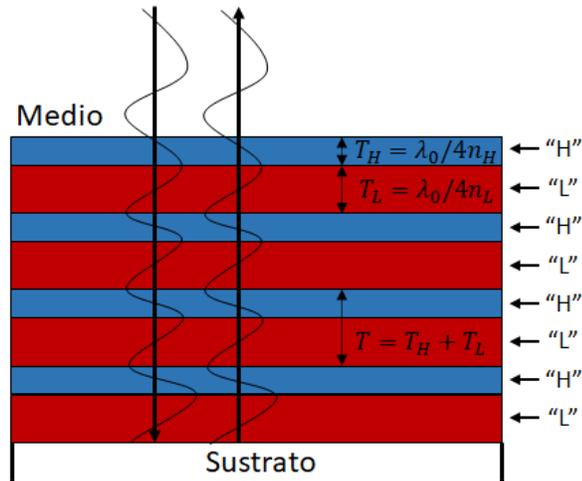
Los coeficientes de Fresnel son parte importante en la derivación del método de transformada de Fourier para la síntesis de filtros inhomogéneos.

## A.2 Propagación de ondas electromagnéticas en multicapas

Se conoce como medio discreto a una estructura cuyo índice de refracción es constante a lo largo de su espesor y cuyas fronteras están definidas (MacLeod, 2010).

La manera convencional de fabricar filtros ópticos es primero simular un apilamiento de medios discretos con diferentes índices de refracción y espesores sobre un sustrato, posteriormente se calcula su reflectancia o transmitancia a partir de la longitud de onda de interés. Si los resultados son los esperados, el filtro es crecido experimentalmente, de lo contrario, se cambia el arreglo de multicapas (Knittl, 1976).

Este método de apilamiento de capas es el más usado a nivel tanto industrial como de investigación y se trata de un método de análisis, pues a partir del apilamiento de múltiples capas, se mide la respuesta espectral que tendrá el filtro. Un ejemplo de un filtro multicapas se muestra a continuación, donde  $n_H$  es una capa de espesor  $T_H$ , con índice de refracción alto y  $n_L$  es una capa de espesor  $T_L$ , con índice de refracción bajo.



**Figura 51.** Ejemplo de un filtro óptico de multicapas. Modificado de: Wu et al., (2010).

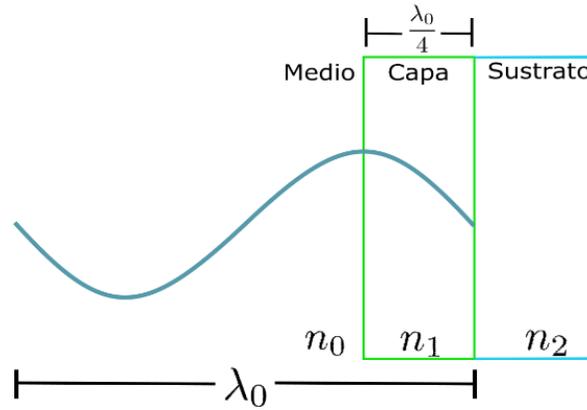
Se debe recordar que los filtros ópticos funcionan mediante fenómenos interferenciales, esto quiere decir que cuando dos o más ondas interactúan entre sí, se superponen, formando una nueva onda cuya amplitud depende de la diferencia de fase y amplitud que poseen las ondas en ese instante. Por lo que, cuando se posee una diferencia de fase entre las ondas de  $2m\pi$ , con  $m$  un número entero, se obtendrá interferencia constructiva, con lo que la onda resultante poseerá un máximo de amplitud (Hecht, 2016).

El caso opuesto se da cuando la diferencia de fase es de  $(2m + 1)\pi$ , de modo que el máximo de una onda coincide con el mínimo de la otra, generando la interferencia destructiva. Ambas situaciones mencionadas, representan los extremos posibles de interacción para fenómenos interferenciales, más no forzosamente las ondas que se superponen deben de poseer una de las dos fases mencionadas.

Existen dos casos particulares donde el índice de refracción de la capa y su espesor, son tales que, inducen un camino óptico especial, siendo estos casos: las capas de cuarto de onda y capas de media onda, para una longitud de onda específica. A continuación, se revisan estos casos.

### A.2.1 Capas de cuarto de onda

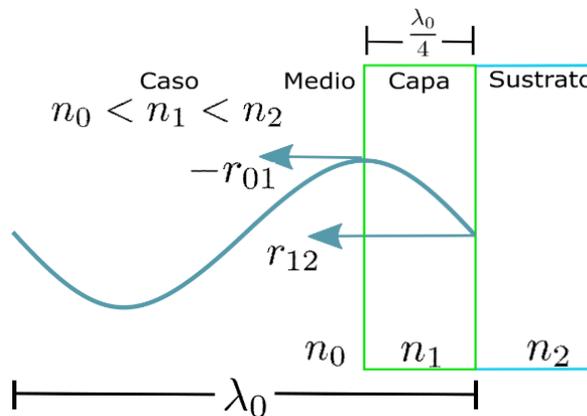
Obtener interferencia constructiva o destructiva máximas es posible mediante el uso de capas de cuarto de onda. A este tipo de capas se les denomina con dicho nombre, pues su espesor óptico corresponde a un cuarto de la longitud de onda ( $\lambda$ ) para la cual se está diseñando el filtro (MacLeod, 2010), tal como se muestra en la siguiente figura:



**Figura 52.** Esquema de un filtro con capa de cuarto onda. Modificada de: MacLeod, (2010).

La Figura 52 representa uno de los casos más simples para filtros ópticos a incidencia normal, donde se tiene una capa de cuarto de onda de espesor óptico para una  $\lambda_0$  depositada sobre un sustrato. Recordando la Figura 50, la onda al incidir sobre alguna interfaz, parte de esta se reflejará, mientras que el resto se transmitirá. Nótese la importancia que tendrá el índice de refracción tanto del medio sobre el que viaja la onda, como sobre el medio incidente, para generar un cambio de fase en la onda reflejada, como se verá a continuación:

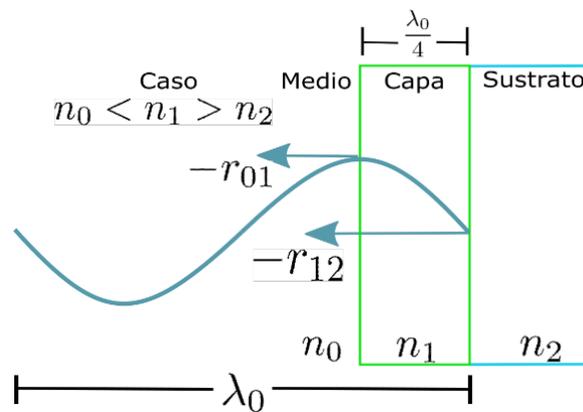
**Caso 1:** El índice de refracción de la capa es mayor que la del medio de propagación, pero menor que la del sustrato ( $n_0 < n_1 < n_2$ ). Siguiendo a la Figura 52, el medio de propagación posee un índice de refracción  $n_0$ , mientras que la capa de cuarto de onda (medio incidente) un índice de  $n_1$  y finalmente el sustrato un índice de  $n_2$ . Si se considera que  $n_0 < n_1 < n_2$ , entonces las ondas reflejadas por la interfaz entre  $n_0$  y  $n_1$  y entre  $n_1$ ,  $n_2$  serán:



**Figura 53.** Reflexión de la onda incidente (cuarto de onda), caso  $n_0 < n_1 < n_2$ . Modificada de: MacLeod, (2010).

La onda ha viajado un cuarto de su longitud para llegar a la interfaz capa-sustrato y ha viajado otro cuarto de onda más tras la reflexión para regresar a la interfaz capa-medio, por lo que en total ha viajado  $\lambda/2$ , generándose un desfase de  $180^\circ$  ( $\pi$ ). En este ejemplo las ondas reflejadas, generarán interferencia destructiva.

**Caso 2:** El índice de refracción de la capa es mayor al índice de refracción del medio y del sustrato ( $n_0 < n_1 > n_2$ ). Para este caso  $n_0$  seguirá siendo menor que  $n_1$ , pues es común que el medio de propagación de la onda sea aire, cuyo índice de refracción es igual a 1, por lo que materiales con índices de refracción menores no existen. En la interfaz capa-sustrato es donde se presenta un cambio respecto al caso 1, pues  $n_1 > n_2$ , por lo que las primeras reflexiones para cada interfaz serán:



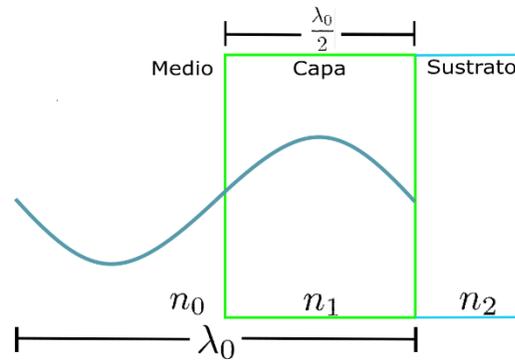
**Figura 54.** Reflexión de la onda incidente (cuarto de onda), caso  $n_0 < n_1 > n_2$ . Modificada de: MacLeod, (2010).

En este caso, las dos ondas reflejadas por sus interfaces se suman constructivamente.  $r_{12}$  sufrirá un desfase en  $\pi$  de la onda por el viaje que ha realizado en el interior de la capa. Otros casos pueden ser analizados, sin embargo, estos dos son los más comunes.

### A.2.2 Capas de media onda

Se les denominan capas de media onda a aquellas capas cuyo espesor óptico es igual a la mitad de la longitud de onda para la cual se está diseñando el filtro.

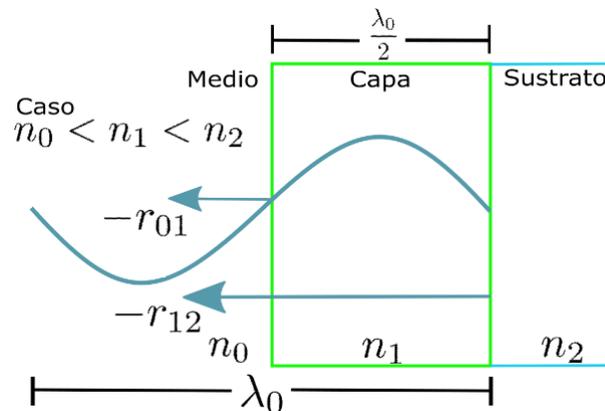
Supongamos el siguiente arreglo:



**Figura 55.** Esquema de un filtro con capa de media onda. Modificada de: MacLeod, (2010).

La onda para viajar desde la interfaz medio-capas hasta la interfaz capas-sustrato, tendrá que recorrer la mitad de su longitud de onda, por lo que analizando los mismos casos que para las capas cuarto de onda, se tendrán diferentes resultados.

**Caso1:** El índice de refracción de la capa es mayor que el del medio, pero menor que el del sustrato ( $n_0 < n_1 < n_2$ ). Al considerar sólo la primera reflexión por interfaz, se tendrá que:



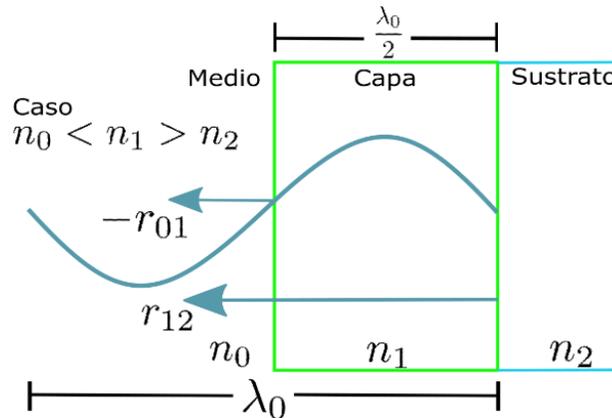
**Figura 56.** Reflexión de la onda incidente (media onda), caso  $n_0 < n_1 < n_2$ . Modificada de: MacLeod, (2010).

Sabiendo que  $n_0 < n_1$  y  $n_1 < n_2$  y resolviendo el coeficiente de Fresnel para la reflexión, se obtiene que la reflexión en la interfaz medio-capas será  $r_{01}$ , mientras que para la interfaz capas-sustrato será  $r_{12}$ .

Como ya se mencionó, la onda viajará por la capa la mitad de su longitud de onda para llegar a la interfaz capas-sustrato. Al ser reflejada por el sustrato, tendrá que viajar otra mitad de su longitud de onda hasta alcanzar la interfaz capas-medio, por lo que en total la onda dentro de la capa habrá viajado una longitud

de onda entera, significando que la onda experimenta un desfase de  $360^\circ$  ( $2\pi$ ), equivalente a no haber sufrido un cambio de fase.

**Caso 2:** El índice de refracción de la capa es mayor que el índice de refracción del medio y del sustrato ( $n_0 < n_1 > n_2$ ). Para esta situación, las reflexiones obtenidas serán:



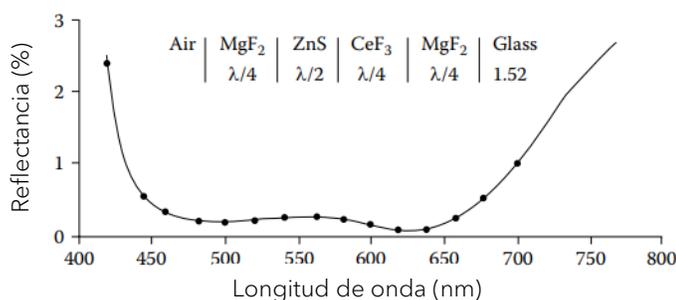
**Figura 57.** Reflexión de la onda incidente (media onda), caso  $n_0 < n_1 > n_2$ . Modificada de: MacLeod, (2010).

Al mantenerse la equivalencia  $n_0 < n_1$ , la reflexión de la interfaz medio-capa se ve inalterada respecto del caso anterior. Como se analizó en el caso de las capas cuarto de onda, la onda reflejada por la interfaz capa-sustrato, que sale de la interfaz capa-medio, no sufre un cambio de fase, lográndose una interferencia constructiva. Las capas de onda en ocasiones son denominadas capas ausentes, pues no agregan un cambio de fase a las ondas reflejadas, sin embargo, estas capas suelen ser útiles al momento de diseñar filtros interferenciales de cuarto de onda.

### A.3 Recubrimientos antirreflejantes

Un recubrimiento antirreflejante busca que se transmita la mayor cantidad de energía posible para la región de interés. Para lograr esto, se hace uso de apilamientos de capas cuarto de onda y media onda. Las capas de media onda se utilizan para separar algunas capas de cuarto de onda, de modo que se obtenga el cambio de fase necesario para generar la reflexión mínima deseada (MacLeod, 2010).

En la literatura se pueden encontrar diferentes tipos de recubrimientos antirreflejantes, a continuación, se muestra un ejemplo de apilamiento de cuatro capas del tipo cuarto de onda y media onda:



**Figura 58.** Ejemplo de un recubrimiento antirreflejante, con apilamiento de 4 capas (Modificada de: MacLeod, 2010).

Para este ejemplo, la reflectancia de la capa se ve disminuida drásticamente para la mayor parte de las longitudes de onda en el rango del visible. Este tipo de recubrimientos son de gran utilidad para acoplar a los filtros ópticos con el medio incidente. Por ejemplo, para el caso de aire como medio incidente, si el último índice de refracción del filtro fue de 1.5, se tiene un salto de índices de refracción entre esta capa y el aire (1.0), generando fenómenos interferenciales que modifican la respuesta espectral. Es aquí cuando los recubrimientos antirreflejantes son utilizados, para lograr un correcto acoplamiento entre estos índices de refracción, de forma tal, que la respuesta espectral del filtro óptico no se vea afectada, esto incluye a los filtros inhomogéneos.

#### A.4 Limitaciones de filtros por apilamiento

Los filtros interferenciales diseñados a partir de capas de cuarto y media onda son los más empleados en la industria, por su fácil producción y diseño, también traen consigo ciertos problemas que no se pueden evitar. Uno muy importante, son los fallos que presentan los filtros en los extremos fuera de la región de interés, pues se presentan oscilaciones no deseadas en los extremos, debido a la naturaleza del apilamiento de las capas (Knittl, 1976). Para suprimir las oscilaciones, se pueden agregar más capas, lo cual complica aún más el problema de diseño del filtro.

La segunda gran limitación presente en este tipo de filtros es que a medida que el espectro de interés posee formas variadas a lo largo de su extensión, el diseño del filtro se puede complicar demasiado o incluso resultar ser imposible de realizar mediante este método, debido a las posibles combinaciones de apilamientos que se deben realizar (Verly, 2010). La solución a estas limitaciones es bastante compleja, pero actualmente se pueden encontrar algunas, como lo son, el método de "Flip-Flop", o el método de síntesis por transformada de Fourier.

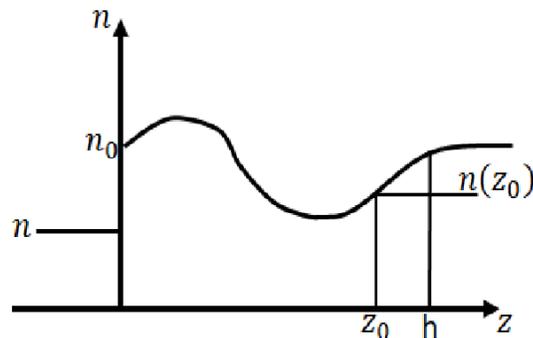
## Anexo A. Derivación de la ecuación de transformada de Fourier para la síntesis de filtros inhomogéneos

### B.1 Introducción

El método de síntesis para el desarrollo de filtros interferenciales inhomogéneos data de finales de los años 50, siendo autores como E. Delano, (1967) y Sossi & Kard, (1968), quienes desarrollaron los conceptos teóricos para su síntesis. Partiendo de tales bases, nuevos autores realizaron mayores contribuciones tanto teórica, como experimentalmente, sin embargo, las ecuaciones, se asumen como verdaderas y tras una profunda revisión en la literatura, se ha encontrado que dichas derivaciones no se pueden localizar de forma directa, pues es necesario consultar de varias fuentes para lograr reconstruir los pasos y operaciones necesarias para derivarlas. Por tal motivo, es que se escribe el siguiente anexo, cuya finalidad es la de recapitular el desarrollo matemático que se debe seguir para derivar el método de transformada de Fourier para la síntesis de filtros inhomogéneos. Parte de esta derivación, sirve para demostrar el origen de la función  $Q$  y el porqué de su importancia para la problemática analizada en la tesis.

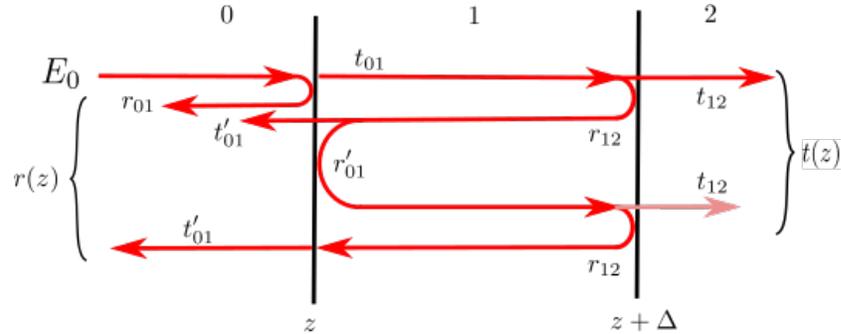
### B.2 Ecuación de Ricatti para la reflexión y transmisión

El punto de partida consiste en analizar la reflexión y transmisión de luz monocromática con incidencia normal sobre una película inhomogénea de material dieléctrico, tal como lo plantean Sossi & Kard, (1968), y Southwell, (1984). La película delgada se extiende a lo largo del eje coordenado  $z$ , con un espesor físico desde  $z = 0$ , hasta  $z = h$ . Para el caso inicial, donde  $z = 0$ , se realiza un acoplamiento con el sustrato con un índice de refracción  $n$ , mientras que para  $z = h$ , el acoplamiento debe realizarse con el medio que rodea a la película y cuyo índice de refracción se puede denotar como  $n_0$ . El siguiente diagrama ejemplifica lo mencionado.



**Figura 59.** Esquema de acoplamiento de un filtro inhomogéneo con el sustrato y el medio de incidencia. Modificada de: Sossi, (1976).

De acuerdo con la Figura 59,  $z_0$  representa un punto arbitrario tomado dentro de la extensión de la capa inhomogénea y cuyo índice de refracción será  $n(z_0)$ . Se tiene que considerar un arreglo de dos interfaces paralelas con índices de refracción  $n_0, n_1, n_2$ . La onda incidente tendrá una amplitud  $E_0$ . Sólo se tomarán en cuenta las primeras y segundas reflexiones y transmisiones de la interfaz 1 – 2. La siguiente figura ejemplifica el arreglo descrito.



**Figura 60.** Arreglo de dos interfaces paralelas separadas por un espesor  $\Delta$ . Modificada de: Southwell, (1984).

### B.2.1 Derivación de la ecuación de Ricatti para $r$

El campo eléctrico incidente se propaga a través de un medio con dos fronteras paralelas, una en  $z$  y la segunda en  $z + \Delta$ . La expresión del campo eléctrico reflejado se puede derivar a partir del arreglo planteado, siendo esta ecuación:

$$r(z) \cdot E_0 = r_{01}E_0 + t_{01}r_{12}t'_{01} \cdot E_0 e^{-2ik(n\Delta \cos \theta)} + t_{01}r_{12} \cdot e^{-2ik(n\Delta \cos \theta)} r'_{01}r_{12}t'_{01} \cdot E_0 e^{-2ik(n\Delta \cos \theta)} + \sigma(\Delta) \quad (51),$$

donde,  $\sigma(\Delta)$  es el camino óptico que recorre el campo. En cada viaje de ida y vuelta, el campo sufre un desfase respecto al medio incidente justo en la interfaz  $z$ , este desfase se expresa de la siguiente manera:  $\beta = -2ik(nt \cos \theta)$ . Cancelando  $E_0$  en ambos lados de la ecuación:

$$r(z) = r_{01} + t_{01}r_{12}t'_{01} \cdot e^{-2ik(n\Delta \cos \theta)} + t_{01}r_{12} \cdot e^{-2ik(n\Delta \cos \theta)} r'_{01}r_{12}t'_{01} \cdot e^{-2ik(n\Delta \cos \theta)} + O(\Delta) \quad (52).$$

Suponiendo un ángulo de incidencia pequeño, tal que,  $\theta \approx 0$ , los coeficientes de Fresnel adoptan la siguiente forma:

$$r_{01} = \frac{n_1 - n_0}{n_1 + n_0}$$

$$r_{12} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = r$$

Analizando un caso particular donde los índices de refracción se aproximan en el límite, de modo que se puedan considerar casi iguales:

$$\lim_{n_0 \rightarrow n_1} r_{01} = \lim_{n_0 \rightarrow n_1} \frac{n_1 - n_0}{n_1 + n_0}$$

$$dr = \frac{dn}{2n} \rightarrow \frac{dn}{2n} \cdot \frac{dz}{dz} = \frac{n'}{2n} dz$$

$$\lim_{n_0 \rightarrow n_1} t_{01} = \lim_{n_0 \rightarrow n_1} \frac{2n_1}{n_1 + n_0} \rightarrow dt = \frac{2n}{2n} \rightarrow 1$$

$$t_{12} = \frac{2n_2}{n_2 + n_1} = t$$

Aplicando estas condiciones a la ecuación (52), el primer término no representa problema alguno al sustituirse cuando se considera  $dr$ . Para el segundo término, al ser  $r_{12}$  la segunda interfaz y de la cual no interesa lo que sucede más allá de ella, se puede aproximar la reflexión del modo  $r_{12} \rightarrow r$ , sin embargo, el cambio de fase al encontrarse dentro de la región de análisis y depender respecto al espesor, debe de ser derivado cuando se toma en cuenta  $dr$ , por lo que se llega a la siguiente expresión:

$$d(e^{-2ik(n\Delta \cos \theta)}) = -2iknd(\Delta) \cos \theta e^{-2ik(n\Delta \cos \theta)}$$

Aproximando  $\Delta \rightarrow z \rightarrow 0$  y considerando  $\cos \theta \approx 1$ , para  $\theta \approx 0$ :

$$d(e^{-2ik(n\Delta \cos \theta)}) = -2iknd(z)e^{-2ik(n\Delta)}$$

Para el tercer término de la expresión, las exponenciales al multiplicarse terminan sumándose estas, por lo que se tiene  $e^{-4ik(ndz \cos \theta)}$ , de modo que se puede considerar la siguiente aproximación:

$$e^{-4ik(ndz \cos \theta)} = \cos(4knd(z)) - i \operatorname{sen}(4knd(z)) \approx 1 - 0i$$

El término  $r'_{10}$  al suceder en el interior del espesor  $\Delta$ , debe tener un signo negativo, por lo que el tercer término de la ecuación se reduce a:

$$r'_{12} \left( -\frac{n'}{2n} dz \right)$$

Juntando los tres términos, la ecuación se ve reducida de la siguiente manera:

$$dr(z) = \frac{n'}{2n} dz - r \cdot 2ikndze^{-2ik(nz)} - r^2 \frac{n'}{2n} dz \quad (53).$$

Despejando a  $dz$  hacia el lado izquierdo de la igualdad:

$$r'(z) = \frac{dr(z)}{dz} = \frac{n'}{2n} - r \cdot 2ikne^{-2ik(nz)} - r^2 \frac{n'}{2n} \quad (54).$$

La ecuación de Ricatti para la reflexión considera sólo la amplitud del coeficiente de reflexión de Fresnel para una capa (Southwell, 1984), por lo que los términos exponenciales correspondientes a la fase pueden ser despreciados, por lo que se tiene:

$$r'(z) = \frac{n'}{2n} - 2iknr - \frac{n'}{2n} r^2 \quad (55),$$

que es la ecuación de Ricatti para la reflexión.

## B.2.2 Derivación de la ecuación de Ricatti para t

Partiendo de la Figura 60, si se consideran las primeras dos transmisiones de la interfaz 2, se puede deducir la siguiente expresión:

$$t \cdot E_0 = E_0 \cdot t_{01} e^{-ikn\Delta \cos\theta} t_{12} + E_0 \cdot t_{01} e^{-ikn\Delta \cos\theta} t_{12} r_{12} r'_{01} e^{-2ikn\Delta \cos\theta}$$

Considerando una aproximación para ángulos pequeños, tal como se hizo en la sección anterior,  $\cos\theta \approx 1$ , para  $\theta \approx 0$  y cancelando las  $E_0$  de ambos lados de la igualdad:

$$t = t_{01} e^{-ikn\Delta} t_{12} + t_{01} e^{-ikn\Delta} t_{12} r_{12} r'_{01} e^{-2ikn\Delta} \quad (56),$$

Las consideraciones realizadas para derivar la ecuación de Ricatti para la reflexión son también aplicadas para este caso, por lo que tomándolas en cuenta para  $dt$  de la ecuación (56), tal que,  $\Delta \rightarrow z \rightarrow 0$ . Además, la exponencial  $e^{-3ikn\Delta}$  puede ser considerada tan pequeña, que es igual a uno, tal como se hizo en Ricatti para la reflexión. Aplicando el diferencial de  $t$  cuando  $\Delta \rightarrow z \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} t_{01} &\rightarrow 1 \\ t_{12} &\rightarrow t \\ r'_{01} &\rightarrow -\frac{n'}{2n} d(z) \\ r_{12} &\rightarrow r \\ -iknz &\rightarrow 0, \quad e^{-iknz} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

$$dt = (1) \cdot d(e^{-iknz})t + (1) \cdot t \cdot r \cdot \left(-\frac{n'}{2n} d(z)\right)$$

$$dt = -iknd(z)(e^{-iknz})t - t \cdot r \cdot \left(\frac{n'}{2n} d(z)\right)$$

Despejando y simplificando términos, se tiene que:

$$t' = \frac{dt}{dz} = -ikn(e^{-iknz})t - t \cdot r \cdot \left(\frac{n'}{2n}\right) \quad (57).$$

La exponencial del primer término de la derecha de la igualdad corresponde a la fase y como la ecuación de Ricatti corresponde a la amplitud de la transmisión, este cambio de fase es despreciable. Si se considera que  $z$  tiende a 0 y  $e^{-iknz}$  tiende a 1, la expresión anterior se transforma en la ecuación de Ricatti para la transmisión:

$$t' = -iknt - tr \frac{n'}{2n} \quad (58).$$

Las ecuaciones de Ricatti son ecuaciones diferenciales que pueden ser implementadas en múltiples áreas de la física y la ingeniería. Para este caso, analizamos su aplicación óptica para la síntesis de filtros inhomogéneos, utilizando como punto de partida las ecuaciones de Ricatti derivadas para la reflexión y la transmisión.

$$\begin{aligned} r' &= \frac{n'}{2n}(1 - r^2) - 2iknr \\ t' &= -\frac{n'}{2n}rt - iknt \end{aligned} \quad (59).$$

La ecuación de Ricatti para la reflexión representa la amplitud del coeficiente de reflexión de Fresnel para una capa. La ecuación de Ricatti para la transmisión representa la amplitud del coeficiente de transmisión de Fresnel, donde  $t$  es el cociente de amplitudes de la onda transmitida respecto a la onda incidente. En estas ecuaciones,  $n$  es el índice de refracción,  $n' = \frac{dn}{dz}$  y  $k$  el vector de onda.

Estas son las ecuaciones que emplea Sossi en su artículo de 1968 para obtener una relación de transformada de Fourier entre el índice de refracción  $n$  y la función espectral. Antes de poder derivar la expresión de Transformada de Fourier, primero es necesario encontrar una solución a ambas ecuaciones diferenciales.

### B.3 Solución de la ecuación de Ricatti de $r$ , funciones auxiliares $F$ y $G$

Se parte de la ecuación de Ricatti para  $r$ , proponiendo una solución del tipo:

$$r(z) = \frac{F(z)}{G(z)} e^{-2ik \int_0^z n(u) du} \quad (60),$$

donde  $F(x)$  y  $G(x)$  son dos nuevas funciones introducidas como parte de la solución y de las cuales se tienen que determinar sus expresiones.

Mediante la sustitución de la solución propuesta en la ecuación (60), sobre la ecuación de Ricatti para la reflexión, ecuación (55), se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d \left\{ \frac{F(z)}{G(z)} \right\}}{dz} e^{-2ik \int_0^z n(u) du} &= \frac{n'}{2n} \left( 1 - \left\{ \frac{F(z)}{G(z)} e^{-2ik \int_0^z n(u) du} \right\}^2 \right) \\ &\quad - 2ikn \left\{ \frac{F(z)}{G(z)} e^{-2ik \int_0^z n(u) du} \right\} \end{aligned} \quad (61).$$

Resolviendo la diferencial del lado izquierdo, cuya derivada del cociente de dos funciones se calcula del modo:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{u}{v} \right\} = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$\frac{d \left\{ \frac{F(z)}{G(z)} \right\}}{dz} = \frac{G(z) \frac{d(F(z))}{dz} - F(z) \frac{d(G(z))}{dz}}{G^2(z)}$$

Sustituyendo el resultado en la ecuación (61)

$$\begin{aligned} \frac{G(z) \frac{d(F(z))}{dz} - F(z) \frac{d(G(z))}{dz}}{G^2(z)} e^{-2ik \int_0^z n(u) du} &= \frac{n'}{2n} \left( 1 - \left\{ \frac{F(z)}{G(z)} e^{-2ik \int_0^z n(u) du} \right\}^2 \right) \\ &\quad - 2ikn \left\{ \frac{F(z)}{G(z)} e^{-2ik \int_0^z n(u) du} \right\} \end{aligned}$$

Despejando  $G_2$  y la exponencial de la izquierda:

$$\begin{aligned} G(z) \frac{d(F(z))}{dz} - F(z) \frac{d(G(z))}{dz} &= G^2(z) e^{2ik \int_0^z n(u) du} \frac{n'}{2n} \left( 1 - \left\{ \frac{F(z)}{G(z)} e^{-2ik \int_0^z n(u) du} \right\}^2 \right) \\ &\quad - 2ikn G^2(z) e^{2ik \int_0^z n(u) du} \left\{ \frac{F(z)}{G(z)} e^{-2ik \int_0^z n(u) du} \right\} \\ G(z) \frac{d(F(z))}{dz} - F(z) \frac{d(G(z))}{dz} &= \left( \frac{n'}{2n} G^2(z) e^{2ik \int_0^z n(u) du} - \frac{n'}{2n} G^2(z) e^{2ik \int_0^z n(u) du} \left\{ \frac{F^2(z)}{G^2(z)} e^{-4ik \int_0^z n(u) du} \right\} \right) \\ &\quad - 2ikn G^2(z) e^{2ik \int_0^z n(u) du} \left\{ \frac{F(z)}{G(z)} e^{-2ik \int_0^z n(u) du} \right\} \end{aligned}$$

$$G(z) \frac{d(F(z))}{dz} - F(z) \frac{d(G(z))}{dz} = \left( \frac{n'}{2n} G^2(z) e^{2ik \int_0^z n(u) du} - \frac{n'}{2n} F^2(z) e^{-2ik \int_0^z n(u) du} \right) - 2iknG(z)F(z)$$

El término  $2iknG(z)F(z)$  puede ser despreciado, pues no contiene una exponencial, por lo que no contribuye en la fase de la reflexión.

Se realizará el siguiente cambio de variable:

$$\Phi = \frac{n'}{2n} e^{2ik \int_0^z n(u) du}$$

Cuyo complejo conjugado es:

$$\Phi^* = \frac{n'}{2n} e^{-2ik \int_0^z n(u) du}$$

Aplicando el cambio de variable se tiene que:

$$G(z) \frac{d(F(z))}{dz} - F(z) \frac{d(G(z))}{dz} = (G^2(z)\Phi - F^2(z)\Phi^*) \quad (62).$$

Por lo que para satisfacer la igualdad se proponen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} M \frac{dF(z)}{dz} &= \Phi G \\ \frac{dG(z)}{dz} &= \Phi^* F \end{aligned} \quad (63).$$

#### B.4 Derivación explícita de las funciones F y G

La ecuación de Ricatti se ha reducido a un sistema de dos ecuaciones lineales que se pueden resolver mediante un método iterativo. Asumiendo que, para la primera aproximación de los términos de las funciones,  $G$  tendrá un valor constante y en términos de simetría de la ecuación (60) con respecto a  $F$  y  $G$ , esta última tendrá un valor de  $G_0 = 1$ , de modo que la ecuación (60) se satisfaga en caso de que  $z = 0$ .

Se sustituye la expresión de  $G$  sobre la ecuación (63):

$$\frac{dF}{dz} = \Phi * G_0$$

$$\frac{dF}{dz} = \Phi * 1$$

Despejando la diferencial  $dz$  e integrando se tiene que:

$$F - F_0 = \int_0^z \Phi(z_1) dz_1$$

Como se está considerando la primera aproximación, se tiene que  $F_0 = r_0$ , que es correspondiente al coeficiente de Fresnel para la reflexión cuando  $z = 0$ , por lo que acomodando términos se tiene que:

$$F = \int_0^z \Phi(z_1) dz_1 + r_0 \quad (64).$$

Sustituyendo la ecuación (64) en la diferencial de  $G$  de (63):

$$\frac{dG}{dz} = \Phi^*(z) \left( \int_0^z \Phi(z_1) dz_1 + r_0 \right)$$

Despejando a  $dz$  e integrando toda la expresión correspondiente a la segunda aproximación de  $G$ , se obtiene:

$$G - G_0 = \int_0^z \Phi^*(z_1) \left( \int_0^{z_1} \Phi(z_2) dz_2 \right) dz_1 + r_0 \int_0^z \Phi^*(z_1) dz_1$$

Sabiendo que  $G_0 = 1$  y despejando el valor constante:

$$G = \int_0^z \Phi^*(z_1) \left( \int_0^{z_1} \Phi(z_2) dz_2 \right) dz_1 + r_0 \int_0^z \Phi^*(z_1) dz_1 + 1 \quad (65),$$

Si el resultado obtenido para  $G$  se vuelve a sustituir sobre la diferencial de  $F$  en la ecuación (63), se obtiene una segunda aproximación para  $F$ , que puede ser sustituida nuevamente en  $G$ , de modo que tal iteración se puede repetir hasta el infinito, dando como resultado  $n$  aproximaciones.

Se concluye que la expresión general para cada función es:

$$\begin{aligned} F &= f + r_0 g^* \\ G &= g + r_0 f^* \end{aligned} \quad (66),$$

siendo  $f$  y  $g$  dos series de aproximaciones infinitas del modo:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^z \Phi(z_1) \int_0^{z_1} \Phi^*(z_2) \int_0^{z_2} \Phi(z_3) \dots \dots \int_0^{z_{2m}} \Phi(z_{2m+1}) dz_{2m+1} dz_{2m} dz_{2m-1} \dots \dots dz_1 \\ g(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^z \Phi^*(z_1) \int_0^{z_1} \Phi(z_2) \int_0^{z_2} \Phi^*(z_3) \dots \dots \int_0^{z_{2m-1}} \Phi(z_{2m}) dz_{2m} dz_{2m-1} dz_{2m-2} \dots \dots dz_1 \end{aligned}$$

Nótese que el primer término de  $g(z)$  cuando  $m=0$ , es igual a la unidad como previamente se había estipulado, pues se debe de cumplir la relación para la ecuación (60), correspondiente a la solución propuesta para la ecuación de Ricatti para  $r$ , cuando  $z=0$ .

Se ha encontrado la solución para la ecuación de Ricatti de  $r$ .

## B.5 Solución general para la ecuación de Ricatti de $r$

De acuerdo con lo derivado, se satisface la condición principal cuando  $r(0) = r_0$ . Por lo que la solución propuesta (ecuación (60)), puede ser expresada de la forma:

$$r(z) = \frac{F(z)}{G(z)} e^{-2ik \int_0^z n(u) du} = \frac{(f + r_0 g^*)}{(g + r_0 f^*)} e^{-2ik \int_0^z n(u) du}$$

Analizando un caso particular, donde  $r_0 = 0$ ,  $r(z)$  se expresa de la siguiente forma:

$$r(z) = \frac{f}{g} e^{-2ik \int_0^z n(u) du} \quad (67).$$

Teniendo en cuenta que  $r_0 = 0$ , implicaría que la onda viene directamente desde  $-\infty$ , hacia el medio inhomogéneo sin reflexión inicial.

## B.6 Solución de la ecuación de Ricatti para t

La solución para la ecuación de Ricatti de t se puede obtener mediante sustitución de la solución previamente derivada, pues es dependiente de r.

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{n'}{2n} r t - iknt$$

Considerando el caso para  $r_0$ , se sustituye la solución obtenida (ecuación (67), en la ecuación de Ricatti para t:

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{n'}{2n} \left( \frac{f}{g} e^{-2ik \int_0^z n(u) du} \right) t - iknt$$

Factorizando t y despejando términos para poder resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dt}{dz} = t \left( -\frac{n'}{2n} \left( \frac{f}{g} e^{-2ik \int_0^z n(u) du} \right) - ikn \right)$$

$$\frac{dt}{t} = \left( -\frac{n'}{2n} \left( \frac{f}{g} e^{-2ik \int_0^z n(u) du} \right) - ikn \right) dz$$

Recordando que  $\Phi = \frac{n'}{2n} e^{2ik \int_0^z n(u) du}$ , se puede simplificar la expresión anterior:

$$\frac{dt}{t} = \left( -\frac{f}{g} \Phi^* - ikn \right) dz$$

Integrando:

$$\int_0^z \frac{dt}{t} = \int_0^z \left( -\frac{f}{g} \Phi^* - ikn \right) dz$$

$$\int_0^t \frac{dt}{t} = - \int_0^{z_1} \frac{f}{g} \Phi^* dz - ik \int_0^z n(u) du$$

$$\ln(t(z)) = - \int_0^{z_1} \frac{f}{g} \Phi^* dz - ik \int_0^z n(u) du$$

Tal como se demostró para  $F$  y  $G$ , las ecuaciones  $f$  y  $g$  deben de satisfacer las ecuaciones diferenciales propuestas del modo:

$$\frac{df(z)}{dz} = \Phi g(z)$$

$$\frac{dg(z)}{dz} = \Phi^* f(z)$$
(68).

Por lo que utilizando la ecuación para el diferencial de  $g$ , se tiene que:

$$\ln(t) = - \int_0^{z_1} \frac{dg}{g} \frac{1}{g} dz - ik \int_0^z n(u) du$$

$$\ln(t) = - \int_0^{z_1} \frac{dg}{g} - ik \int_0^z n(u) du$$

Integrando:

$$\ln(t) = -\ln(g(z)) - ik \int_0^z n(u) du$$

Despejando el término  $-\ln(g)$ :

$$\ln(t) + \ln(g) = -ik \int_0^z n(u) du$$

Usando leyes de los logaritmos se tiene que:

$$\ln(t * g) = -ik \int_0^z n(u) du$$

Multiplicando por una exponencial a toda la ecuación:

$$t * g = e^{-ik \int_0^z n(u) du}$$

Cambiando de lado de la igualdad a la función  $g$ :

$$t(z) = e^{-ik \int_0^z n(u) du} (g(z)^{-1}) \quad (69),$$

que es la para solución propuesta de la ecuación de Ricatti cuando  $r_0 = 0$ .

## B.7 Derivación de la expresión de TF y función Q

Al dividir la solución de  $r$  entre  $t$ , se puede derivar una nueva expresión que será de utilidad más adelante.

$$\frac{r}{t} = \frac{\frac{f}{g} e^{-2ik \int_0^z n(u) du}}{e^{-ik \int_0^z n(u) du} (g^{-1})} \quad (70).$$

$$\frac{r}{t} = \left( f e^{-2ik \int_0^z n(u) du} \right) \left( e^{ik \int_0^z n(u) du} \right)$$

Simplificando términos:

$$\frac{r}{t} = f e^{-ik \int_0^z n(u) du} \quad (71).$$

Se puede considerar un caso especial del modo:

$$\frac{1}{t} = e^{ik \int_0^z n(u) du} (g) \quad (72).$$

Como la exponencial  $e^{ik \int_0^z n(u) du}$  afecta únicamente a la fase tanto en  $r$  como en  $t$ , se puede omitir para el caso donde sólo se busca determinar la amplitud, por lo que los resultados quedarían:

$$\begin{aligned} \frac{r}{t} &= f \\ \frac{1}{t} &= g \end{aligned} \quad (73),$$

significando que las amplitudes al dividir  $\frac{r}{t}$  estarán regidas por la función  $f$ , mientras que para  $\frac{1}{t}$  estarán regidas por la función  $g$ .

De acuerdo con Sossi & Kard, (1968), las series de las funciones  $f$  y  $g$  poseen una rápida convergencia, pudiéndose reemplazar por expresiones aproximadas, donde supóngase que para pequeños valores de  $|r|$  sólo será necesario considerar el primer término de las funciones  $f, g$ .

Además, se introducirá el cambio de variable:

$$da = \frac{n'}{2n} e^{ikx} dx \quad (74),$$

de modo que:

$$\begin{aligned} \Phi &= da \\ \Phi^* &= da^* \end{aligned} \quad (75),$$

si se integra la variable “ $da$ ”, se tendrá:

$$a = \int_{x_0}^x \frac{n'}{2n} e^{ikx} dx \quad (76),$$

donde  $x$  representa al doble espesor óptico del modo:

$$x = 2 \int_0^z n(u) du \quad (77).$$

Realizando el cambio de variable para el caso  $\frac{1}{t}$ :

$$\frac{1}{t} = g = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^z \Phi^*(z_1) \int_0^{z_1} \Phi(z_2) \int_0^{z_2} \Phi^*(z_3) \dots \int_0^{z_{2m-1}} \Phi(z_{2m}) dz_{2m} dz_{2m-1} dz_{2m-2} \dots dz_1$$

$$\frac{1}{t} = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2) \int_{x_0}^{x_2} da^*(x_3) \dots \int_{x_0}^{x_{2m-1}} da(x_{2m}) dx_{2m} dx_{2m-1} dx_{2m-2} \dots dx_1$$

Nótese que el cambio de variable implicó un cambio de longitud métrica ( $z$ ) por longitud en espesor óptico ( $x$ ).

Al tomar sólo los primeros dos términos de la serie, la expresión aproximada será:

$$\frac{1}{t} \approx \frac{1}{t_2} = 1 + \int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2) \quad (78),$$

mientras que para  $t$  se sabe que:

$$t(z) = (g^{-1})$$

Por lo que al realizar el inverso de  $1/t$  a  $t$ , los límites de integración se ven afectados del modo:

$$t = 1 + \int_x^{x_0} da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2)$$

Lo cual se puede reescribir volviendo a invertir los límites de integración:

$$t = 1 - \int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2) \quad (79),$$

### B.7.1 Derivación de la función $Q_2$

La amplitud de la transmisión se puede calcular mediante la transmitancia, cuya expresión matemática es el módulo al cuadrado del coeficiente de Fresnel para la transmisión:

$$T = |t|^2 = t^*t \quad (80),$$

por lo que se puede proponer la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{T} - T$$

Tal que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \left(1 + \int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2)\right) \left(1 + \int_{x_0}^x da(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da^*(x_2)\right) \\ T &= \left(1 - \int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2)\right) \left(1 - \int_{x_0}^x da(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da^*(x_2)\right) \end{aligned}$$

Por lo que, sustituyendo las expresiones, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} - T &= \left(1 + \int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2)\right) \left(1 + \int_{x_0}^x da(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da^*(x_2)\right) \\ &\quad - \left(1 - \int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2)\right) \left(1 - \int_{x_0}^x da(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da^*(x_2)\right) \end{aligned}$$

Resolviendo las operaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} - T &= \left[1 + \int_{x_0}^x da(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da^*(x_2) + \int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2)\right) \\ &\quad + \left(\left\{\int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2)\right\} \left\{\int_{x_0}^x da(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da^*(x_2)\right\}\right) \\ &\quad - \left[1 - \int_{x_0}^x da(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da^*(x_2) - \int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2)\right) \\ &\quad + \left(\int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2)\right) \left(\int_{x_0}^x da(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da^*(x_2)\right) \end{aligned}$$

Para facilitar el cálculo se hará un cambio de variable:

$$\alpha = \int_{x_0}^x da(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da^*(x_2)$$

$$\beta = \int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2)$$

$$\gamma = \left\{ \int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2) \right\} \left\{ \int_{x_0}^x da(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da^*(x_2) \right\}$$

Por lo que haciendo el cambio de variable:

$$\frac{1}{T} - T = 1 + \alpha + \beta + \gamma - 1 + \alpha + \beta - \gamma$$

$$\frac{1}{T} - T = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$$

Sustituyendo las expresiones  $\alpha$ ,  $\beta$ :

$$\frac{1}{T} - T = 2 \left( \int_{x_0}^x da(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da^*(x_2) + \int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2) \right) \quad (81).$$

Por lo que recordando las expresiones  $a = \int_{x_0}^x \frac{n'}{2n} e^{ikx} dx$ ,  $da = \frac{n'}{2n} e^{ikx} dx$ , se pueden obtener las siguientes relaciones:

$$\int_{x_0}^x da(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da^*(x_2) = a \int_{x_0}^{x_1} da^*(x_2)$$

$$\int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2) = a^* \int_{x_0}^{x_1} da(x_2)$$

De modo que sustituyendo estas relaciones en la ecuación (81), se obtiene:

$$\frac{1}{T} - T = 2 \left( a \int_{x_0}^{x_1} da^*(x_2) + a^* \int_{x_0}^{x_1} da(x_2) \right) \quad (82).$$

Existe una identidad tal que:

$$d | a |^2 = a^* da + a da^* \quad (83).$$

Integrando la ecuación (83):

$$\int_A^B d | a |^2 = a^* \int_A^B da + a \int_A^B da^*$$

Aplicando la identidad en la ecuación (82):

$$\frac{1}{T} - T = 2 \int_{x_0}^{x_1} d | a |^2$$

Resolviendo la integral:

$$\frac{1}{T} - T = 2 | a |^2$$

Despejando la variable  $a$ :

$$\left( \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{T} - T \right] \right)^{1/2} = | a | \quad (84).$$

Sustituyendo la expresión de  $a$ :

$$\left( \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{T} - T \right] \right)^{1/2} = \int_{x_0}^x \frac{n'}{2n} e^{ikx} dx \quad (85).$$

La ecuación derivada, claramente indica una relación de TF entre  $T$  y  $n$ . El término de la izquierda es la denominada función  $Q$  en filtros inhomogéneos, cuya expresión para este caso es:

$$Q_1 = \left( \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{T} - T \right] \right)^{1/2} \quad (86).$$

Esta función  $Q$  es la reportada por Sossi, 1968.

A partir de las ecuaciones:

$$\frac{1}{t} \approx \frac{1}{t_2} = 1 + \int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2)$$

$$t = 1 - \int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2)$$

Es posible derivar otras funciones  $Q$ .

### B.7.2 Derivación de la función $Q_1$

Partiendo de:

$$t = 1 - \int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2)$$

Su expresión para la transmitancia será:

$$T = tt^* = \left(1 - \int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2)\right) \left(1 - \int_{x_0}^x da(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da^*(x_2)\right)$$

Resolviendo la multiplicación de términos:

$$= 1 - \int_{x_0}^x da(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da^*(x_2) - \int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2) + \int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2) \\ * \int_{x_0}^x da(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da^*(x_2)$$

Del mismo modo que para las aproximaciones anteriores, el tercer término de la ecuación es despreciado, por lo que se tiene:

$$= 1 - \int_{x_0}^x da(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da^*(x_2) - \int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2)$$

Aplicando la identidad:

$$\begin{aligned}
 d | a |^2 &= a^* da + ada^* \\
 \int_A^B d | a |^2 &= a^* \int_A^B da + a \int_A^B da^* = 1 - \left( a(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da^*(x_2) + a^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2) \right) \\
 &= 1 - \int_{x_0}^{x_1} d | a |^2 \\
 T &= 1 - | a |^2
 \end{aligned}$$

Despejando a  $| a |$ :

$$(1 - T)^{1/2} = | a |$$

Sustituyendo la forma explícita de  $| a |$ :

$$(1 - T)^{1/2} = \int_{x_0}^x \frac{n'}{2n} e^{ikx} dx \quad (87).$$

Del lado izquierdo de la ecuación se encuentra la función  $Q$  derivada por Delano, 1967.

## B.8 Derivación de otras funciones $Q$ encontradas en la literatura

La aproximación previa para deducir las funciones  $Q$ , fue considerando sólo la primera y segunda reflexión y transmisión entre la interfaz 1-2, y una reflexión inicial  $r_0 = 0$ , significando que el sustrato y el primer índice de refracción del filtro es el mismo. No obstante, es posible considerar un mayor número de reflexiones y transmisiones, aumentando así el número de términos a considerar en el planteamiento de ecuaciones, haciendo más complicada la obtención de una solución para las ecuaciones planteadas. Buscando una expresión para la función  $Q$  que sea más general, se propone una expansión por series de Taylor (Verly et al., 1989), del modo:

$$S(T) = S(1) + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{T=1} (T-1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial T^2}\right)_{T=1} (T-1)^2 + \dots$$

Para que sea válida esta expansión por series de Taylor, se debe de cumplir que para cuando  $T=1$ :

$$S = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial T} = -1$$

Con lo cual P. G. Verly en su artículo de 1989, deriva la siguiente función Q:

$$Q = \omega\sqrt{1-T} + (1-\omega)\sqrt{\frac{1}{T}-1}$$

Donde  $\omega$  es un factor de peso que se encuentra entre 0 y 1 y es usado para ajustar de manera iterativa al perfil de índices, buscando obtener una mejor respuesta espectral. Tomando la expresión derivada de la ecuación de Ricatti para la reflexión y transmisión, se puede derivar una función  $Q$ , aunque considerando mayores órdenes de aproximación, siendo el resultado:

$$Q = \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) \quad (88).$$

$$\text{Con: } \gamma = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{T} - T\right).$$

## B.9 Derivación de la ecuación para construir el perfil de índices, parte I

Se parte de la ecuación derivada de la TF:

$$F(k) = Q(k)e^{i\phi(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n'}{2n} e^{ikx} dx \quad (89).$$

Tanto la parte izquierda como derecha de la ecuación (89), corresponden a la transformada de Fourier, por lo que es posible aplicar la transformada inversa de Fourier (TIF) a la ecuación en ambos lados de la igualdad. La expresión de la transformada inversa de Fourier es:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{-ikx} dk$$

Aplicando la TIF a la parte derecha de la igualdad:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn(x')}{dx'} \frac{1}{2n(x')} e^{ikx'} e^{-ikx} dx' dk$$

Nota: El cambio de  $x$  por  $x'$ , es para denotar la variable de integración.

Agrupando términos:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn(x')}{dx'} \frac{1}{2n(x')} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x'-x)} dk \right\} dx'$$

Recordando una de las propiedades de la función  $\delta$  de Dirac:

$$\delta(x' - x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x'-x)} dk$$

Aplicando la delta de Dirac a  $f(x)$ :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn(x')}{dx'} \frac{1}{2n(x')} \delta(x' - x) dx'$$

Recordando la definición de función de impulso:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x' - x) dx'$$

Aplicando la propiedad a  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{dn(x)}{dx} \frac{1}{2n(x)}$$

Integrando respecto a  $x$ :

$$\int f(x)dx = \int \frac{dn(x)}{dx} \frac{1}{2n(x)} dx$$

$$\int f(x)dx = \int \frac{dn(x)}{2n(x)}$$

Resolviendo la integral del lado izquierdo se obtiene:

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2} \ln(n(x)) \quad (90).$$

## B.10 Derivación de la ecuación para construir el perfil de índices, parte II

Aplicando TIF a la parte izquierda de la ecuación (89):

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(k) e^{i\phi(k)} e^{-ikx} dk$$

Recordando la notación de Euler:

$$e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i \sin(\theta)$$

Por lo que expresando la transformada inversa de Fourier se tiene:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} Q(k) (\cos(\phi(k) - kx) + i \sin(\phi(k) - kx)) dk \right]$$

La integral de una función impar que va desde  $-\infty$  hasta  $\infty$  es igual a 0, por lo que la parte imaginaria de la integral se elimina. Mientras que la integral de una función para evaluada desde  $-\infty$  a  $\infty$  es igual al doble de la integral evaluada de 0 a  $\infty$ , por lo que los límites de integración para la parte real cambian. Aplicando ambas definiciones se tiene que:

$$f(x) = \frac{2}{2\pi} \left[ \int_0^{\infty} Q(k) \cos(\phi(k) - kx) dk \right]$$

Integrando respecto a  $x$ :

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\infty} Q(k) \cos(\phi(k) - kx) dk \right] dx$$

Resolviendo la integral respecto a  $dx$ :

$$\int f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\infty} \frac{Q(k) \sin(\phi(k) - kx)}{-k} dk \right] \quad (91).$$

Como se considera sólo la parte real de la función, además de que está restringida a una función par, el símbolo negativo puede ser suprimido.

### B.11 Derivación de la ecuación para construir el perfil de índices, parte III

Igualando las ecuaciones (90) y (91), se tiene que:

$$f(x) dx = \frac{1}{2} \ln(n(x)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(k)}{k} \sin(\phi(k) - kx) dk$$

Despejando a  $n(x)$ :

$$n(x) = \exp \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q_m(k)}{k} \sin(\phi(k) - kx) dk \right] \quad (92),$$

siendo la ecuación utilizada para sintetizar el perfil de índices.

## Anexo B. Métodos iterativos: corrección por amplitud

### C.1 Métodos iterativos

Un método iterativo consiste en la repetición de los mismos pasos, cambiando los valores de entrada en las operaciones iniciales, de forma que se pueda mejorar el resultado final. Como punto de referencia para rastrear si el resultado de la iteración ha mejorado se utiliza en este trabajo el valor de la función  $\chi^2$ , donde siempre que este valor disminuya, indicará una mejora en la respuesta espectral. Durante este apéndice se revisará un método iterativo primeramente propuesto por Sossi, (1974), para los filtros inhomogéneos, no obstante, sólo considera una iteración para corregir el perfil de índices y mejorar la respuesta espectral. Posteriormente, Verly & Dobrowolski, (1990), modifican la ecuación para hacerla capaz de iterar un número de veces.

### C.2 Corrección por amplitud para filtros inhomogéneos

En su artículo de 1974, L. Sossi propuso una forma de corregir el perfil de índice mediante los valores que se introducen a la función Q, aunque su propuesta sólo se limitaba a considerar la respuesta espectral objetivo. Él consideró modificar los valores de la amplitud de la función Q mediante la siguiente ecuación:

$$Q_m(k) = 2Q_D - Q_A \quad (93).$$

Donde  $Q_D$  corresponde a los valores de la respuesta espectral en términos de  $T$  o  $R$  deseados, mientras que  $Q_A$  contiene los valores de la respuesta espectral obtenidos tras el primer diseño generado del perfil de índice. El valor de la  $Q_m$  es introducido en la ecuación para construir el perfil de índice del modo:

$$n(x) = \exp \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q_m(k)}{k} \text{sen}(\phi(k) - kx) dk \right] \quad (94).$$

La ecuación debe ser resuelta una vez más por el algoritmo para los nuevos valores introducidos en  $Q_m(k)$ , de modo que se obtiene un perfil de índice nuevo con su respuesta espectral mejorada. Este fue el primer paso dado para el refinamiento por amplitud. Nótese que en este tipo de refinamiento sólo se está trabajando con la amplitud de la función Q, mientras que la fase  $\phi(k)$  no se ve alterada. El siguiente avance de este refinamiento fue propuesto por P. G. Verly y J. A. Dobrowolski (1990), donde se modificó

la ecuación (94) para poder realizar un número indeterminado de iteraciones, de modo que el perfil de índice pueda ser refinado hasta alcanzar la respuesta espectral deseada. El primer paso consiste en considerar la información de la respuesta espectral de la iteración anterior, e introducirla en la función  $Q$  del modo:

$$Q_i(T(k)) = Q(T_{i-1}(k)) \quad (95).$$

La ecuación (95) se expresa en términos de  $T$ . Cuando se va a realizar la primera iteración, la ecuación (95) se vuelve:

$$Q_1(T(k)) = Q(T_D(k)) \quad (96),$$

la ecuación (96) introduce la información de la transmitancia deseada a la función  $Q$ , pero esto sólo ocurre para una primera iteración, el resto se maneja con la información obtenida previamente de  $T_{i-1}$ .

El siguiente paso consiste en realizar una resta de la información entre la transmitancia deseada con la actual:

$$\Delta T(k) = T_D(k) - T_A(k) \quad (97),$$

donde  $T_D(k)$  es la información de la respuesta espectral que se desea obtener y  $T_A(k)$  es la transmitancia obtenida para el perfil de índices actual. La resta se realiza entre las transmitancias y en ningún momento son introducidas a la función  $Q$ , esto con el propósito de funcionar como contraste en la ecuación general de refinamiento, como a continuación se mostrará. Los resultados obtenidos son sumados de la siguiente forma:

$$Q_{i+1} = Q_i(T(k)) + \Delta T(k) \quad (98).$$

Donde los valores de la función  $Q_i$ , se encuentran invertidos respecto a los de la función  $\Delta T(k)$ , creando un contraste de valores, de forma que la información introducida a la función  $Q$  generará una modificación del perfil de índice. Es posible también introducir los valores del  $\Delta T(k)$  dentro de la función  $Q$  para llevar a cabo el proceso de refinamiento, esto sería de la siguiente forma:

$$\Delta Q(k) = Q(T_D(k)) - Q(T_A(k)) \quad (99).$$

Si se considera la ecuación (99), se puede deducir el caso de la primera iteración propuesto por Sossi de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Q_{i+1} &= Q_i(T(k)) + \Delta Q(T(k)) \\ Q_1 &= Q_1(T(k)) + (Q(T_D(k)) - Q(T_A(k))) \end{aligned} \quad (100).$$

Como ya se definió previamente,  $Q_1(T(k)) = Q(T_D(k))$ , por lo que sustituyendo y juntando valores se tiene que:

$$Q_1 = 2Q(T_D(k)) - Q(T_A(k))$$

Esta es la expresión mostrada por Sossi. No obstante, trabajar con  $\Delta Q(T(k))$  en vez de  $\Delta T(k)$ , genera un menor contraste en la modificación de los perfiles de índice, derivando en una baja eficiencia del refinamiento. Por su parte, los valores de  $\Delta T(k)$  generan el contraste necesario para obtener un mejor refinamiento, no obstante, por si solos los valores introducidos no son suficientes para refinar de forma satisfactoria todos los valores de  $T$ , por lo que Verly introdujo un factor de peso denominado como  $S_i$ , el cuál multiplica a los valores de  $\Delta T(k)$ . Tal factor de peso puede tomar valores entre 0 y 1. De modo que introduciendo tal valor en la ecuación (98), se tiene:

$$Q_{i+1} = Q_i(T(k)) + S_i \Delta T(k) \quad (101).$$

Este factor de peso  $S_i$ , puede resultar efectivo si se combina con un algoritmo capaz de asignar diversos valores para la  $S_i$  a lo largo de los diferentes puntos de la transmitancia, pues existen regiones donde hace falta un mayor factor de peso que otras y en algunos casos donde no es casi necesario. Afortunadamente, existe una alternativa al factor de peso  $S_i$ , propuesto por Cheng et al., 2008. Tal solución consiste en obtener el diferencial la función  $Q$  respecto a la  $T$ , del modo  $\frac{dQ}{dT}$ . Tal diferencial permite refinar de forma específica los puntos del espectro de acuerdo con sus necesidades y sin la necesidad de un algoritmo adicional para ir asignando los valores del factor de peso. Un ejemplo puede ser la derivación de la función  $Q_2$ .

$$Q_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} - T \right)}$$

Cuyo diferencial respecto de T es:

$$\frac{dQ}{dT} = \frac{-\left(\frac{1}{T^2} + 1\right)}{2^{2/3} \sqrt{\frac{1}{T} - T}} \quad (102).$$

Introduciendo el diferencial a la ecuación (98), se tiene que:

$$Q_{i+1} = Q_i(T(k)) + \frac{dQ}{dT} \Delta T(k) \quad (103),$$

la ecuación (103) es introducida finalmente en la ecuación para construir el perfil de índices:

$$n(x) = \exp \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{Q_{i+1}(k)}{k} \text{sen}(\phi(k) - kx) dk \right] \quad (104).$$

Múltiples iteraciones pueden ser realizadas con la ecuación (104), hasta que se alcance una respuesta espectral aceptable.

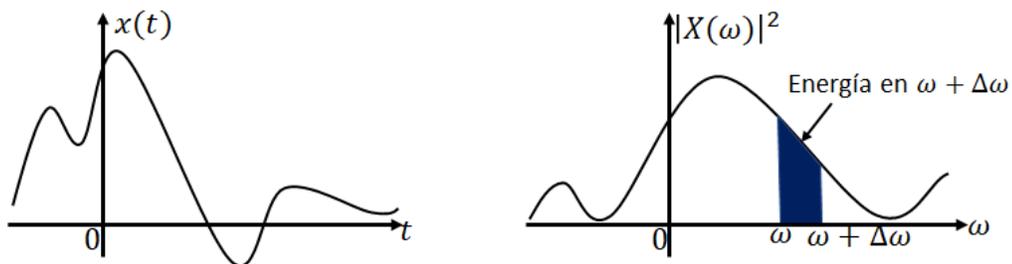
## Anexo C. Métodos iterativos: SWIFT

El método SWIFT, es un acrónimo en inglés para “Stored Wave Inverse Fourier Transform”. Consiste en la modulación de la fase proveniente de la transformada de Fourier, para disminuir las amplitudes máximas de los picos de frecuencias, a la vez que se genera una distribución uniforme de dichas amplitudes a lo largo del resto de frecuencias. Esto ayuda a una mejor distribución de la información entre las frecuencias. En este anexo, se analiza la función de fase derivada por (Guan & McIver, 1990) y posteriormente adaptada para la síntesis de filtros inhomogéneos por Druessel et al., (1990).

En filtros inhomogéneos, la implementación de este método permite la disminución del rango que existe entre el índice de refracción máximo y mínimo, cuyos valores en la mayoría de los casos no son reproducibles experimentalmente. Otro beneficio es la disminución del espesor óptico necesario para obtener una buena respuesta espectral, pues se puede distribuir mejor la información de la potencia del espectro (energía de la onda incidente) en un menor espacio, de forma que los filtros sintetizados pueden ser aptos para ser crecidos experimentalmente.

### D.1 Derivación el método SWIFT

Para desarrollar la función de fase se emplean dos propiedades de la teoría de transformadas de Fourier. Se parte del teorema de Parseval.



**Figura 61.** Energía del espectro en el espacio de frecuencias. Modificada de: Guan & McIver, (1990).

El fundamento de este teorema parte del valor medio de la señal analizada, que está compuesto por la media de todos los valores que componen a dicha señal. Guan & McIver, (1990), demostraron que el ancho de un paquete de ondas es proporcional al área bajo la curva del perfil de la energía del espectro, donde consideraron el paquete de ondas viajando en el espacio como una función  $x(t)$ , cuya transformada de

Fourier expresada en el espacio de frecuencias es  $X(\omega)$ , tal como se ejemplifica a continuación. Al integrar dichos valores, se obtiene el área debajo de la curva para el periodo considerado del modo:

$$\text{Área} = \int_0^k F(k)dk$$

Esto se puede trasladar a la potencia promedio de una señal, también conocida como densidad de potencia espectral, la cual describe la distribución de la potencia de una señal continua en el espacio de frecuencias. Matemáticamente se determina a partir de la integral para un periodo de los elementos espectrales que componen a la función y elevados cuadrado. Para el par transformado coordenado-frecuencias esto se expresa del modo:

$$p = \frac{1}{k_0} \int_{-k_0}^{k_0} |F(k)|^2 dk \quad (105).$$

Cuando no se tienen señales periódicas, como es el caso de análisis para filtros inhomogéneos, la ecuación (105) representa la energía total contenida en la señal. La energía de la señal del espectro que se desea reproducir mediante el filtro inhomogéneo se puede determinar utilizando el teorema de Parseval, donde el diferencial del doble espesor óptico  $dx$ , debe ser directamente proporcional al área debajo de la potencia del espectro que se está considerando, denotado en este caso como  $G(k)$ :

$$dx = cG(k)dk \quad (106),$$

donde  $G(k) = |Q(k)/k|^2$ , contiene la información referente a la potencia del espectro, mientras que  $c$  es una constante de proporcionalidad. La expresión anterior representa la densidad de potencia espectral. Integrando sobre todo el espesor óptico se obtiene:

$$\int_{x_0}^x dx = c \int_0^k G(\xi)d\xi$$

Integrando del lado izquierdo de la igualdad:

$$x - x_0 = c \int_0^k G(\xi) d\xi \quad (107).$$

La ecuación (107), distribuye a lo largo de un doble espesor óptico considerado  $x - x_0$  la contribución de energía por parte de cada uno de los índices de refracción contenidos en  $dk$ . Dicho doble espesor óptico no forzosamente tiene que ser el considerado en el diseño inicial del filtro, pudiendo ser mayor o menor. La variable  $\xi$  ha sido introducida como variable muda para evitar confusiones con los límites de la integral, por lo que sustituyen a  $dk$  para la conveniencia de la notación. Despejando a la constante para determinar su expresión se tiene que:

$$c = \frac{x - x_0}{\int_0^\infty G(\xi) d\xi} \quad (108).$$

Aplicando el “teorema del desplazamiento”, el cual demuestra que un retraso lineal de la energía de la señal en el espacio coordinado corresponderá a un factor de fase lineal en el espacio de frecuencias, donde dicho factor de fase se denominará como “función de fase  $\Phi(k)$ ”. El teorema del desplazamiento para filtros inhomogéneos relaciona la función de fase respecto a cada posición en el filtro, por lo que se puede expresar del modo:

$$d\Phi(k) = x dk \quad (109).$$

Sustituyendo la ecuación (107) en (109):

$$d\Phi(k) = \left( c \int_0^k G(\xi) d\xi + x_0 \right) dk$$

Integrando ambos lados de la igualdad:

$$\int_{\Phi_0}^{\Phi} d\Phi(k) = c \int_0^k \int_0^\xi G(\eta) d\eta d\xi + \int_0^k x_0 dk$$

$$\Phi(k) - \Phi_0(k) = c \int_0^k \int_0^\xi G(\eta) d\eta d\xi + x_0 k$$

$$\Phi(k) = c \int_0^k \int_0^\xi G(\eta) d\eta d\xi + x_0 k + \Phi_0(k)$$

Sustituyendo la expresión de  $c$ :

$$\Phi(k) = \frac{x - x_0}{\int_0^\infty G(\xi) d\xi} \int_0^k \int_0^\xi G(\eta) d\eta d\xi + x_0 k + \Phi_0(k) \quad (110).$$

La ecuación (110), es la expresión matemática de la función de fase utilizada en el método SWIFT. Consta de 3 términos. El primer término es cuadrático debido a la doble integral, donde se introdujo una nueva variable muda  $\eta$  para no confundir los límites de integración. Dicho término se encarga de distribuir las variaciones y amplitudes de los índices de refracción de manera uniforme a lo largo de un doble espesor óptico  $x - x_0$ . El segundo término es de primer orden y se encarga de fijar el punto de partida del intervalo de espesor óptico que será modulado a través de  $x_0$ . El tercer término corresponde la fase inicial  $\Phi_0(k)$  y por ende es un término constante.

La función de fase es introducida sobre la expresión de la transformada de Fourier, a la vez que se utiliza la corrección por amplitud sobre la función  $Q$ . Matemáticamente el método SWIFT para sintetizar los filtros inhomogéneos es:

$$n(x) = \exp \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{Q_{i+1}(k)}{k} \text{sen}(\Phi(k) - kx) dk \right] \quad (111).$$

Durante el refinamiento por amplitud se utiliza el diferencial  $dQ/dT$  tal como lo mencionan (Cheng et al., 2008), para automáticamente determinar la magnitud de corrección y evitar sobre correcciones en cada punto del perfil de índices. Por lo que finalmente, el método de refinamiento iterativo de amplitud se convierte en las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} Q_i(k) &= Q_{i-1}(k) \\ \Delta T_i(k) &= T_D(k) - T_A(k) \\ Q_{i+1}(k) &= Q_i(k) + \frac{dQ}{dT} \Delta T_i(k) \end{aligned}$$

donde  $Q_i(k)$  corresponde a la información de la respuesta espectral de la iteración anterior cargada sobre la función  $Q$ . Para la primera iteración  $Q_{i-1}(k) = Q_D(k)$ .  $T_D(k)$  es la información de la respuesta espectral deseada.  $T_A(k)$  corresponde a la respuesta espectral del diseño de la iteración actual.

## Anexo D. Interfaz gráfica para sintetizar y analizar filtros inhomogéneos

El propósito de este anexo es el de servir como una guía de referencia rápida para los usuarios de la interfaz gráfica del programa de filtros inhomogéneos. La interfaz gráfica fue construida utilizando PAGE. Para más información sobre el código PAGE consultar a Walters, (2023). A lo largo de este anexo, se presentan las pestañas del programa para sintetizar y analizar filtros inhomogéneos, con una descripción de sus componentes. A continuación, se muestra un diagrama de flujo que describe la forma de operar del programa.

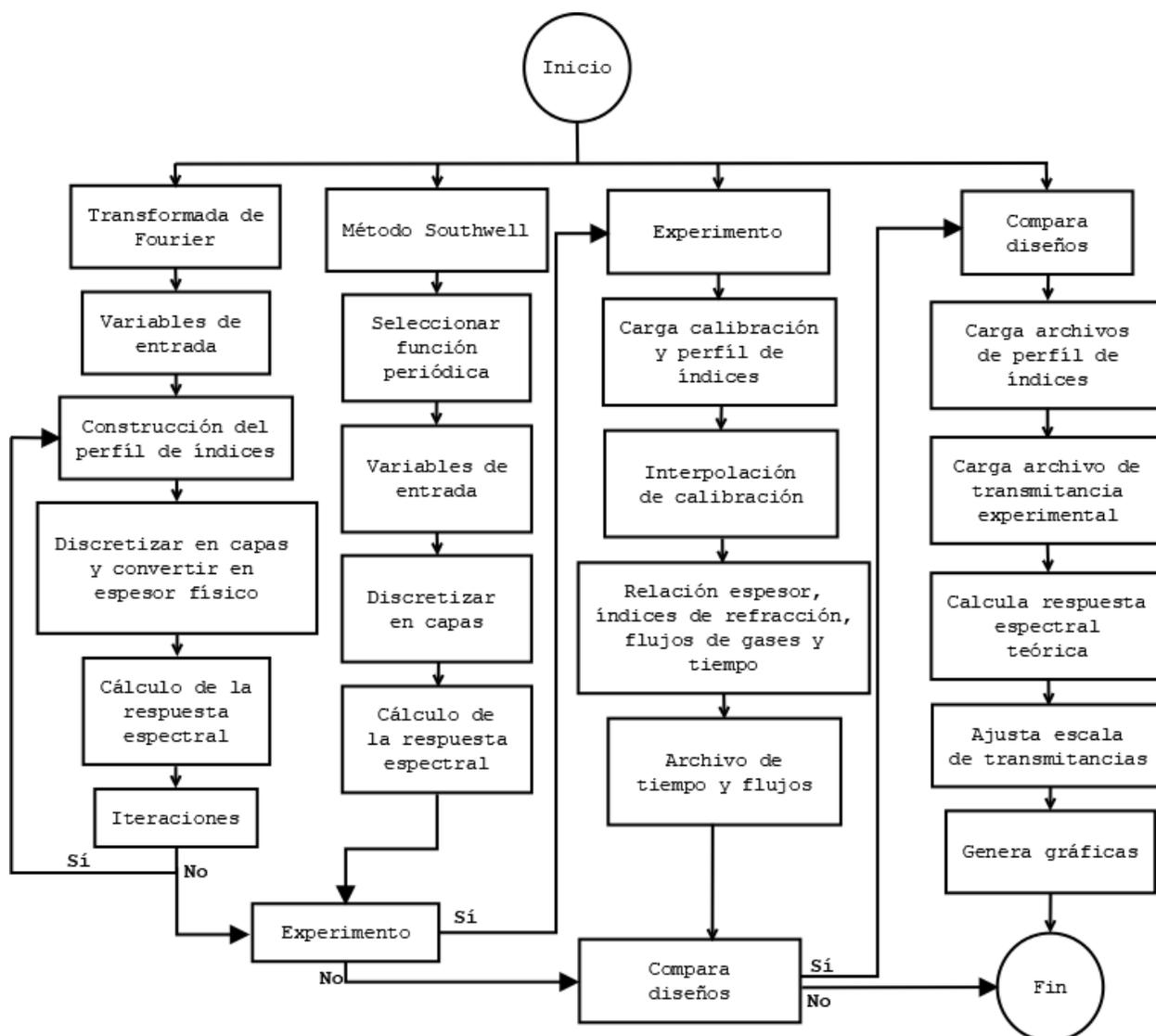


Figura 62. Diagrama de flujo de la interfaz gráfica del programa de síntesis y análisis de filtros inhomogéneos.

## E.1 Pestaña: “Síntesis por transformada de Fourier”

Esta pestaña usa la teoría de transformada de Fourier para la síntesis de filtros inhomogéneos. Gráficamente se ve de la siguiente forma:

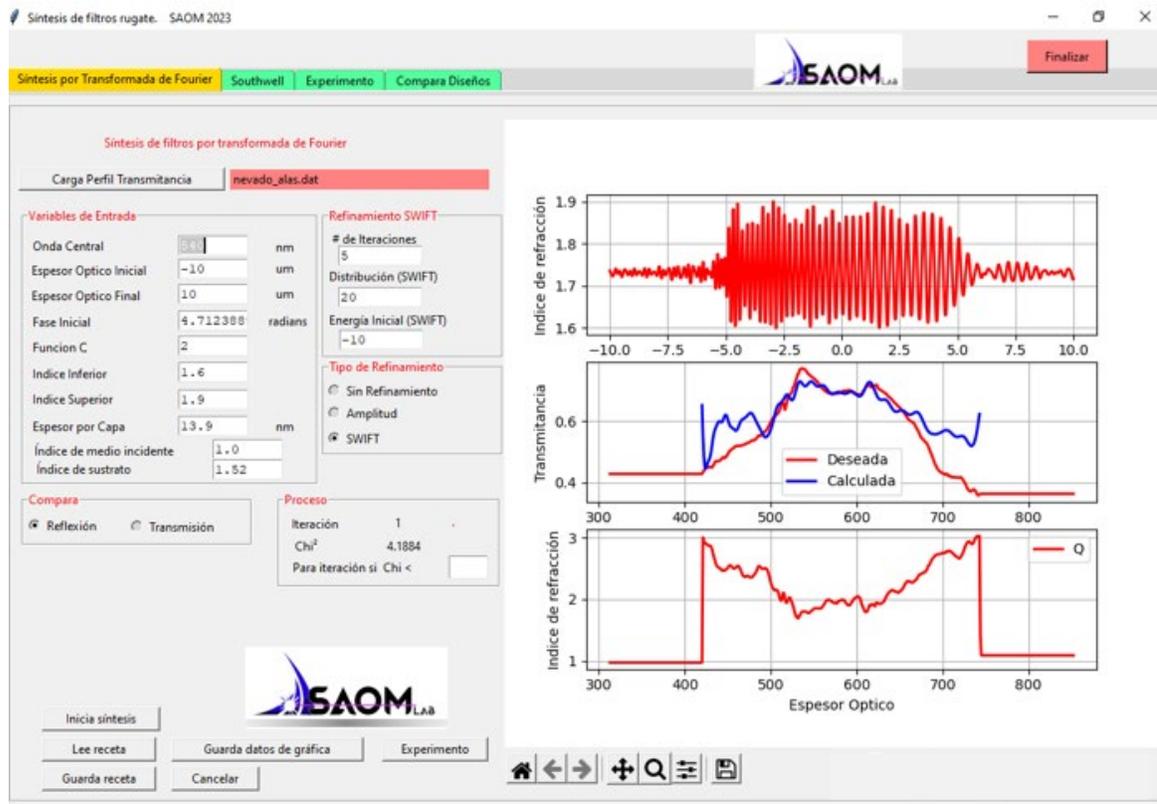


Figura 63. Pestaña “Síntesis por Transformada de Fourier”.

El diseño de la pestaña se ha realizado de tal forma que del lado izquierdo se encuentran agrupadas las variables de entrada que el usuario debe introducir. Del lado derecho se ubican las gráficas y en la parte inferior se encuentran ubicados los botones de acciones. El propósito de esta pestaña es permitir al usuario sintetizar filtros inhomogéneos utilizando el método de Transformada de Fourier, con o sin refinamiento. Para comenzar una síntesis se debe dar clic en el botón “Carga Perfil Transmitancia”, donde se abrirá una ventana para seleccionar el archivo de transmitancia con formato .dat que se desee utilizar. El siguiente paso es llenar las casillas del recuadro “Variables de Entrada”. En espesor óptico inicial y final, se encuentra el rango de extensión del perfil de índices en  $\mu\text{m}$ . La fase inicial se refiere a  $\phi_0$  y comúnmente es 0 o un múltiplo de  $\pi$  el programa reconoce a la entrada “pi” como tal número.

En función  $Q$  es donde se selecciona una de las funciones  $Q$ , por lo que se debe elegir un valor entre 1 – 8, siendo estos números correspondientes a la numeración de las funciones  $Q$  reportadas en esta tesis. Índice Inferior e Índice Superior, corresponden a los valores mínimos y máximos que se desean tener en el filtro. El Espesor por Capa indica el tamaño en términos del espesor óptico que tendrá cada capa, a su vez, define el número de capas en las que se dividirá el filtro. Índice de medio incidente, sirve para indicar el valor del índice de refracción del medio de incidencia. Índice del sustrato, indica el valor del índice de refracción para el sustrato sobre el cuál se deposita el filtro. Una vez introducidas las variables de entrada, el siguiente paso es seleccionar una de las tres opciones disponibles en el recuadro “Tipo de Refinamiento”.

La opción “Sin Refinamiento” sólo construye una vez el perfil de índices y calcula su respuesta espectral a partir de los datos dados por el usuario. La opción “Amplitud” se selecciona cuando se desean realizar múltiples iteraciones para refinar mediante corrección por Amplitud de la función  $Q$ . La opción “SWIFT” realiza iteraciones utilizando la corrección por amplitud y fase. Dependiendo de la opción seleccionada del recuadro “Tipo de Refinamiento”, las opciones en el recuadro de “Refinamiento SWIFT” se habilitarán o deshabilitarán. Para la opción de “Sin Refinamiento”, no se activa ninguna casilla, pues no son necesarias. Con el refinamiento “Amplitud”, se activa la casilla “# de Iteraciones” para que el usuario seleccione cuantas iteraciones desea realizar. La opción “SWIFT” habilita las tres casillas, donde, en la casilla “Distribución (SWIFT)”, se elige el rango de distribución de la energía, mientras que la casilla “Energía Inicial (SWIFT)” se usa para establecer el punto de partida de esta distribución.

El recuadro “Compara”, permite graficar la respuesta espectral en términos de la Reflexión o la Transmisión, dependiendo de la opción seleccionada. Finalmente, el recuadro “Proceso”, sirve como referencia para mostrar la iteración actual y el valor de la  $\chi^2$  alcanzado en la iteración. Adicionalmente, se puede llenar la casilla “Para iteración si Chi=” para indicarle al programa el momento en que debe detenerse cuando se alcance un valor igual o por debajo del establecido. Del lado derecho de la pestaña, se van generando 3 gráficas de forma simultánea. La gráfica superior muestra el perfil de índices generado por el método de TF para la iteración actual. En la gráfica intermedia se muestra la respuesta espectral correspondiente, mientras que la parte inferior muestra el valor de corrección por Amplitud de la iteración actual. Esta última gráfica sirve sólo como ayuda visual, para monitorear que la corrección no tome valores muy elevados, pues de ser el caso, se derivará en un resultado incorrecto.

Para iniciar la síntesis del filtro inhomogéneo y su refinamiento, una vez que se ha cargado la curva de transmitancia y se han introducido las variables de entrada, se debe hacer clic en el botón “Iniciar Síntesis”.

En automático el programa iterará el número de veces indicado, a la vez que va generando un archivo de diseño con la información del perfil de índice que alcanza la mejor respuesta espectral. En caso de que se obtenga una buena respuesta espectral para las variables de entrada dadas, tales valores pueden ser guardados en un archivo al hacer clic sobre el botón “Guarda receta”. Si se desean cargar estos valores, se hace clic sobre sobre el botón “Lee receta”.

El botón “Guarda datos de gráfica” genera un archivo con el diseño del perfil de índice en dos columnas, la primera corresponde al índice de refracción, la segunda al espesor óptico. El botón “Experimento”, transfiere al usuario a la pestaña “Experimento”, cargando en automático el diseño del perfil de índice con la mejor respuesta espectral. Finalmente, el botón “Cancela”, detiene las iteraciones, siendo este botón útil cuando se necesitan corregir las variables de entrada.

## E.2 Pestaña: “Southwell”

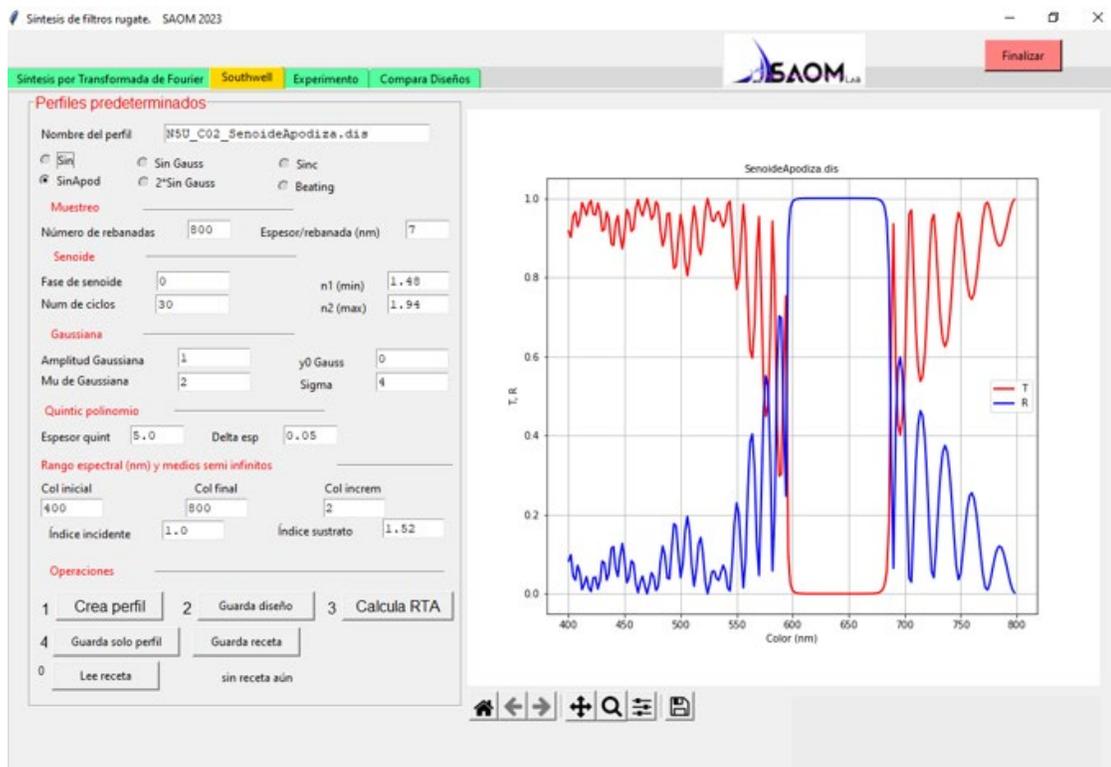


Figura 64. Pestaña “Southwell”.

La pestaña “Southwell” sigue un diseño similar al de la pestaña “Síntesis por Transformada de Fourier”. Se utiliza para construir perfiles de índice de funciones periódica, las cuales se seleccionan en el recuadro

“Perfiles predeterminados”. El recuadro que corresponde al nombre del perfil es llenado en automático cuando se genera el diseño del perfil de índices. En apartado de muestreo, sobre la casilla “Número de rebanadas”, se coloca el valor correspondiente al número de capas en las que se desea dividir el perfil de índices. La casilla “Espesor/rebanada (nm)”, es donde el usuario introduce el tamaño de espesor físico que se desea tener por capa.

Dentro del recuadro “Senoide”, se tienen las opciones para las características de la senoide. En la casilla “Fase de senoide”, se introduce un valor diferente de cero cuando se desea que esta tenga un desfase. La casilla “Num de ciclos” establece el número de ciclos que tendrá el perfil de índice y este número de ciclos es el que se dividirá en el número de rebanadas y el espesor indicado. “n1 (min)”, corresponde al valor del índice de refracción inferior del filtro, mientras que “n2 (max)”, sirve para asignar el valor máximo de los índices de refracción, teniendo así el acotamiento de valores máximos y mínimos para los índices de refracción.

El apartado de “Gaussiana” se utiliza en el caso de haber seleccionado una de las funciones Gaussianas. Para definir la amplitud de esta función, se llena el recuadro “Amplitud Gaussiana. La casilla “Mu de Gaussiana” es el valor de la distribución normal de media de la Gaussiana. “y0 Gauss” es la diferencia de amplitud de las oscilaciones. “Sigma” es la varianza de la función Gaussiana. El recuadro “Quintic polinomio” sirve para dar el tamaño del polinomio de quinto grado que se utiliza para acoplar los extremos del perfil de índice hacia un valor de 1.5 en el índice de refracción en los extremos. Para definir el espesor del polinomio de acoplamiento en ambos extremos se llena el recuadro “Espesor quint”, mientras que el recuadro “Delta esp” indica el número de capas en los que se dividirá esta curva de acoplamiento, donde, mientras menor sea este valor, mayor será el número de capas en los que se divida.

Finalmente, en “Rango espectral (nm) y medios semi infinitos”, tenemos la opción para definir el rango sobre el cual se calculará la respuesta espectral del perfil de índices construido, por lo que los límites en el rango de longitud de onda  $\lambda$ , los establece el usuario al llenar los recuadros “Col inicial” y “Col final”. El recuadro “Col increm” es para indicar al programa el espaciado entre puntos de  $\lambda$ . El recuadro “Índice incidente” añade al inicio del diseño del perfil de índices una capa con el valor de índice de refracción del medio incidente indicado por el usuario. El recuadro “Índice sustrato” añade una capa al final del diseño del perfil de índices con el valor del índice de refracción del sustrato sobre el cuál se crece el filtro.

En esta pestaña tenemos una sola gráfica, ya que en este método no se realizan múltiples iteraciones. Una vez que se han colocado los valores deseados, se procede a construir el perfil de índices, dando clic al

botón “Crea perfil”. El botón “Guarda diseño” se activa una vez que el botón “Crea perfil” ha sido seleccionado. Mediante este botón, se genera el diseño del perfil de índices en el formato manejado por este programa. Tras haber dado clic sobre el botón “Guarda diseño”, se habilita el tercer botón, el cuál es “Calcula RTA” y mediante el cual se calcula la respuesta espectral del perfil de índices fabricado. Simultáneamente, del lado derecho de la pestaña, se dibuja la respuesta espectral obtenida. Los botones “Guarda sólo perfil” y “Guarda receta” se habilitan. La opción “Guarda sólo perfil” genera un archivo con los valores de los índices de refracción para del diseño del filtro. “Guarda receta” genera un archivo con los valores introducidos para el perfil de índices que ha dado una buena respuesta espectral. El botón “Lee receta” permite cargar el archivo con los valores que dieron buenos resultados, de forma tal, que no deban de ser introducidos manualmente.

### E.3 Pestaña: “Experimento”

En esta pestaña se convierten los datos teóricos de los perfiles de índice a datos experimentales, en términos de tiempo y flujos de gases de  $O_2$  y  $N_2$ . Gráficamente se ve de la siguiente manera.

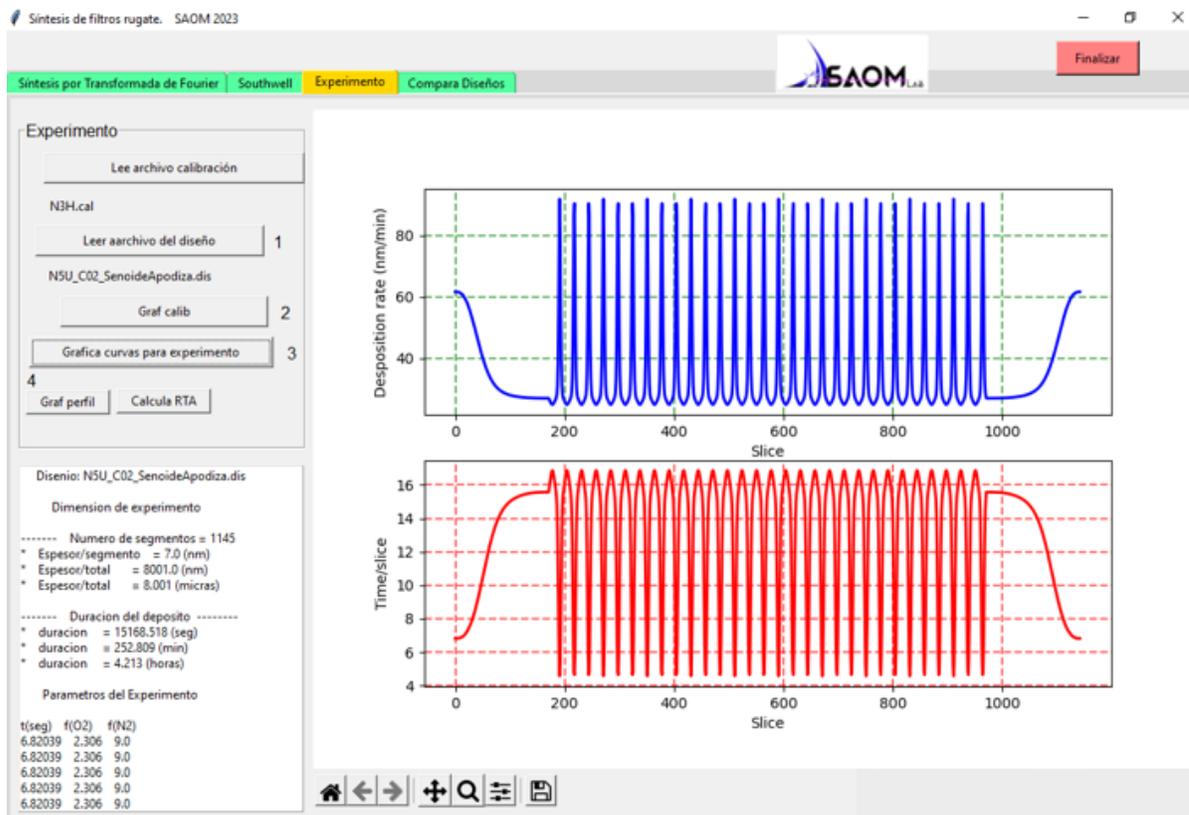


Figura 65. Pestaña “Experimento”.

Dentro de esta pestaña, el usuario no debe introducir ningún valor numérico, pero si necesita contar con el archivo de calibración correspondiente a la calibración actual del equipo de erosión iónica, así como el perfil de índices que se desea crecer. El botón “Lee archivo calibración” carga el archivo de calibración. El botón (1) “Lee archivo del diseño” carga el perfil de índices de interés. En caso de haber utilizado la pestaña “Southwell”, al pasar a la pestaña “Experimento”, en automático se encontrará cargado este archivo con el último diseño creado. Si el perfil de índice se construyó con la pestaña “Síntesis por Transformada de Fourier”, al dar clic sobre el botón “Experimento”, se pasa a esta pestaña, cargando en automático el perfil de índices que dio la mejor respuesta espectral.

El botón (2) “Graf calib” genera un ajuste polinomial para el archivo de calibración. El botón (3) “Grafica curvas para experimento” utiliza el ajuste polinomial generado por el botón anterior y genera el archivo de flujos y tiempo. Adicionalmente, al picar este botón, se genera una lista en la parte inferior izquierda, mostrando el espesor del perfil, así como el tiempo que tomará crecerlo y los primeros datos de la lista de tiempos y flujos. Del lado derecho se generan las gráficas mostradas, las cuales corresponden a rebanadas vs tasa de depósito, y rebanadas vs tiempo. El botón “Graf perfil” al darle clic manda a la pestaña “Southwell” y grafica el perfil de índices del archivo cargado. El botón “Calcula RTA” realiza una función similar, pero graficando la respuesta espectral del perfil de índices.

#### **E.4 Pestaña: “Compara diseños”**

Mediante esta pestaña se realiza la comparación de las transmitancias calculadas con las medidas. En la Figura 66 se muestra dicha pestaña. Los botones “Lee diseño 1”, “Lee diseño 2”, se utilizan para cargar perfiles de índice de interés. El botón “Archivo experimento”, carga un archivo de respuesta espectral. Las transmitancias en el programa se calculan en una escala de 0 a 1, pero pueden existir archivos de transmitancias dadas en una escala de porcentaje, tal como lo hace el espectroscopio, cuyos valores van 0 a 100, por lo que el recuadro de factor hace posible escalar los valores de transmitancias, de forma tal, que todos se encuentren en la misma escala y que sean comparables.

El botón “Calcular y comparar” calcula primero la respuesta espectral de los perfiles de índice introducidos y posteriormente, grafica estas respuestas junto con la medida experimentalmente. Mediante el apartado de “color”, se puede elegir el color y la forma de los puntos que tendrá cada una de las curvas graficadas. El botón “Finalizar”, que se encuentra en la parte superior derecha, y el cuál está contenido en todas las pestañas, sirve para cerrar el programa.

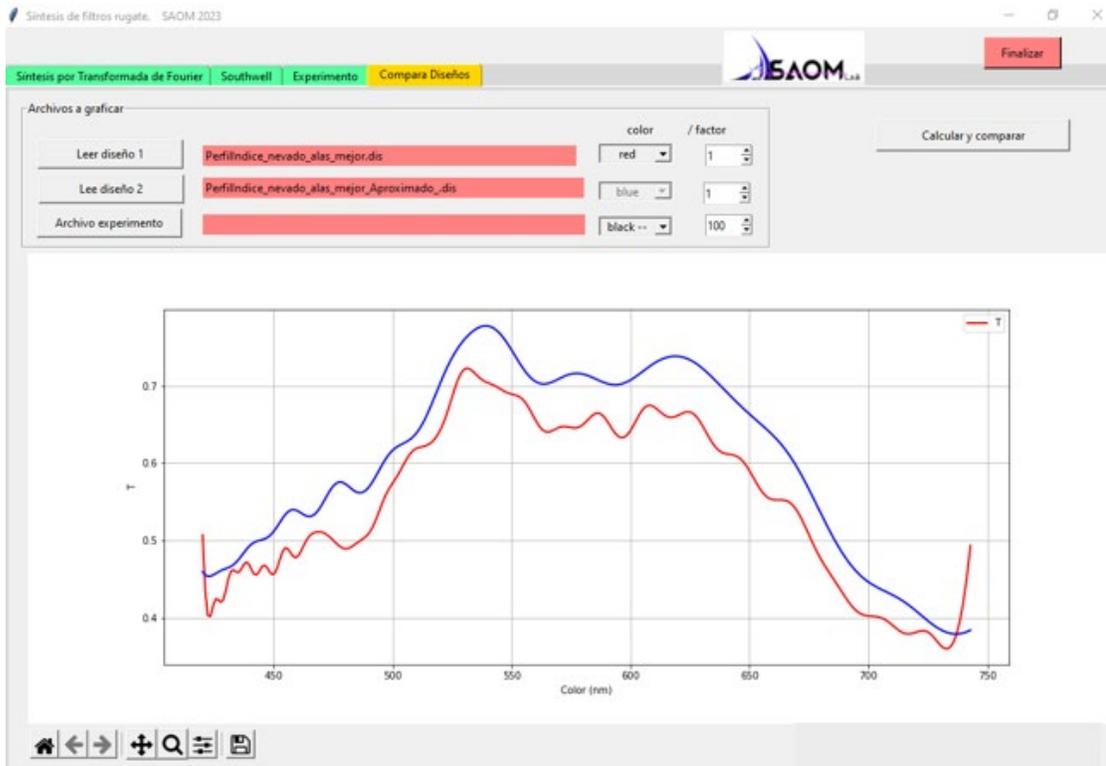


Figura 66. Pestaña "Compara Diseños".