

La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California).

La investigación fue financiada por el CONAHCYT (Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías).

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo o titular de los Derechos de Autor.

CICESE © 2023, Todos los Derechos Reservados, CICESE

# Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California



---

## Maestría en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones

---

### Sincronización y formación externa de robots móviles heterogéneos con sistema intermediario

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

**Daniel Gastélum Juárez**

Ensenada, Baja California, México

2023

Tesis defendida por

**Daniel Gastélum Juárez**

y aprobada por el siguiente Comité

---

Dr. César Cruz Hernández

Codirector de tesis

---

Dr. Adrián Arellano Delgado

Codirector de tesis

Dr. Javier Pliego Jiménez

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Dr. Víctor Ruiz Cortés



---

Dra. María del Carmen Maya Sánchez

Coordinadora del Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

---

Dra. Ana Denise Re Araujo

Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Daniel Gastélum Juárez como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones.

### **Sincronización y formación externa de robots móviles heterogéneos con sistema intermediario**

Resumen aprobado por:

---

Dr. César Cruz Hernández

Codirector de tesis

---

Dr. Adrián Arellano Delgado

Codirector de tesis

Esta tesis de maestría en ciencias aborda el problema de sincronización y formación interna y externa de dos redes heterogéneas de robots móviles. Se propone que la primera red este compuesta por robots móviles terrestres tipo tracción diferencial, mientras que, la segunda red se construye con robots móviles aéreos no tripulados, concretamente cuadricópteros. Ambas redes están conectadas internamente en topología tipo estrella, mientras que, el acoplamiento entre ambas redes, es decir, el acoplamiento externo, se realiza en una configuración maestro-esclavo a través de un sistema dinámico intermediario. Se aplica la ley de control de linealización por retroalimentación dinámica en el caso de los robots móviles terrestres, mientras que para los robots móviles aéreos se usa un control backstepping. Para lograr la sincronización y formación interna y externa de las redes acopladas se realizan simulaciones numéricas en Matlab utilizando el entorno de diagramas de bloques en Simulink, donde cada red está conformada por nueve robots, tomando en consideración que los resultados pueden extenderse fácilmente para  $N$  número de robots.

**Palabras clave:** Redes de robots heterogéneos, sincronización interna y externa, formación interna y externa, sistema intermediario dinámico, Matlab.

Abstract of the thesis presented by Daniel Gastélum Juárez as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Electronics and Telecommunications.

**Outer synchronization and formation of two complex heterogeneous robotic networks with an intermediary dynamic system**

Abstract approved by:

---

PhD César Cruz Hernández

Thesis Co-Director

---

PhD Adrián Arellano Delgado

Thesis Co-Director

This master of science thesis addresses the problem of inner-outer synchronization and formation of two complex heterogeneous robotic networks. It is proposed that the first network is composed of differential traction-type ground mobile robots, while the second network is built with unmanned aerial mobile robots, specifically quadcopters. Both networks are innerly connected in a star-type topology, while the coupling between both networks, that is, the outer coupling, is carried out in a master-slave configuration through an intermediary dynamic system. The dynamic feedback linearization control law is applied in the case of ground mobile robots, while backstepping control is used for air mobile robots. To achieve the inner-outer synchronization and formation of the coupled networks, numerical simulations are performed in Matlab using the Simulink block diagram environment, where each network is made up of nine robots, taking into consideration that the results can be easily extended for  $N$  number of robots

**Keywords:** Heterogeneous robotic networks, inner-outer synchronization, inner-outer formation, intermediary dynamic system, Matlab.

## Dedicatoria

**A mis padres Francisco Javier Gastélum Beltrán y Josefina Juárez Carrillo por siempre creer en mí y ayudarme en todo lo que he necesitado ...**

## Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California por la instrucción recibida y el uso de sus instalaciones en beneficio de mi formación académica.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría. No. de becario: 29509.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por el apoyo económico recibido a través del proyecto de Investigación en ciencia básica entre instituciones, "Sincronización de Sistemas Complejos y Algunas Aplicaciones". Ref. 166654 y continuación (A1-S-31628).

A mis codirectores Dr. César Cruz Hernández y Dr. Adrián Arellano Delgado por la ayuda y las enseñanzas que me brindaron en mi formación y en la realización de la tesis.

A mis padres por todo su apoyo incondicional y por demostrarme que todo con esfuerzo es posible.

A los miembros del comité Dr. Javier Pliego Jiménez, Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez y Dr. Víctor Ruiz Cortés por todos sus comentarios que enriquecieron al trabajo.

# Tabla de contenido

|   | Página |
|---|--------|
| Resumen en español .....                                  | ii     |
| Resumen en inglés .....                                   | iii    |
| Dedicatoria .....   | iv     |
| Agradecimientos .....                                     | v      |
| Lista de figuras .....                                    | ix     |
| Lista de tablas .....                                     | xiii   |
| <br>  |        |
| <b>Capítulo 1. Introducción</b>                           |        |
| 1.1. Motivación .....                                     | 1      |
| 1.2. Planteamiento del problema .....                     | 2      |
| 1.3. Hipótesis .....                                      | 3      |
| 1.4. Objetivos general y específicos .....                | 3      |
| 1.4.1. Objetivo general .....                             | 4      |
| 1.4.2. Objetivos específicos .....                        | 4      |
| 1.5. Metodología .....                                    | 4      |
| 1.6. Contribuciones de la tesis .....                     | 5      |
| 1.7. Conclusiones del capítulo .....                      | 5      |
| <br>  |        |
| <b>Capítulo 2. Antecedentes</b>                           |        |
| 2.1. Sistemas complejos .....                             | 8      |
| 2.2. Teoría de grafos .....                               | 8      |
| 2.2.1. Tipos de grafos .....                              | 9      |
| 2.2.1.1. Grafo dirigido .....                             | 9      |
| 2.2.1.2. Grafo no dirigido .....                          | 10     |
| 2.2.1.3. Grafo mixto .....                                | 10     |
| 2.2.2. Matrices asociadas .....                           | 11     |
| 2.2.2.1. Matriz de adyacencia .....                       | 11     |
| 2.2.2.2. Matriz de grado .....                            | 11     |
| 2.2.2.3. Matriz laplaciana .....                          | 12     |
| 2.2.2.4. Matriz de acoplamiento .....                     | 13     |
| 2.2.3. Algunas topologías de conexión .....               | 13     |
| 2.2.3.1. Conexión en cadena .....                         | 13     |
| 2.2.3.2. Conexión en vecino cercano .....                 | 14     |
| 2.2.3.3. Conexión en estrella .....                       | 15     |
| 2.2.3.4. Conexión en mundo pequeño .....                  | 16     |
| 2.3. Trabajos relacionados .....                          | 17     |
| 2.4. Conclusiones del capítulo .....                      | 17     |
| <br>  |        |
| <b>Capítulo 3. Robot tipo tracción diferencial</b>        |        |
| 3.1. Modelo matemático .....                              | 19     |
| 3.2. Linealización por retroalimentación dinámica .....   | 20     |
| 3.3. Cálculo de velocidades angulares de las ruedas ..... | 24     |

|   |  |    |
|---|--|----|
| 3.4.                                    | Simulación del comportamiento . . . . .                              | 25 |
| 3.4.1.                                  | Velocidades angulares iguales . . . . .                              | 25 |
| 3.4.2.                                  | Velocidades angulares diferentes . . . . .                           | 27 |
| 3.5.                                    | Conclusiones del capítulo . . . . .                                  | 29 |
| <br>                                    |  |    |
| <b>Capítulo 4. Cuadricóptero</b>        |  |    |
| 4.1.                                    | Modelo dinámico utilizando el formalismo de Euler-Lagrange . . . . . | 30 |
| 4.2.                                    | Modelo matemático del cuadricóptero . . . . .                        | 31 |
| 4.3.                                    | Control backstepping . . . . .                                       | 34 |
| 4.3.1.                                  | Traslación . . . . .   | 36 |
| 4.3.2.                                  | Rotación . . . . .   | 37 |
| 4.4.                                    | Simulación del comportamiento . . . . .                              | 37 |
| 4.4.1.                                  | Estático . . . . .   | 38 |
| 4.4.2.                                  | Ascenso . . . . .  | 39 |
| 4.4.3.                                  | Descenso . . . . .   | 40 |
| 4.4.4.                                  | Avanzar . . . . .  | 41 |
| 4.4.5.                                  | Retroceder . . . . .   | 42 |
| 4.4.6.                                  | Avanzar a la derecha . . . . .                                       | 43 |
| 4.4.7.                                  | Avanzar a la izquierda . . . . .                                     | 44 |
| 4.4.8.                                  | Giro a la izquierda . . . . .  | 45 |
| 4.4.9.                                  | Giro a la derecha . . . . .  | 45 |
| 4.5.                                    | Conclusiones del capítulo . . . . .                                  | 46 |
| <br>                                    |  |    |
| <b>Capítulo 5. Sincronización</b>       |  |    |
| 5.1.                                    | Robot de tipo tracción diferencial . . . . .                         | 48 |
| 5.1.1.                                  | Simulaciones . . . . .   | 48 |
| 5.1.1.1.                                | Punto deseado . . . . .  | 48 |
| 5.1.1.2.                                | Seguimiento de trayectoria . . . . .                                 | 50 |
| 5.2.                                    | Cuadricóptero . . . . .  | 52 |
| 5.2.1.                                  | Simulaciones . . . . .   | 53 |
| 5.2.1.1.                                | Punto deseado . . . . .  | 53 |
| 5.2.1.2.                                | Seguimiento de trayectoria . . . . .                                 | 55 |
| 5.3.                                    | Conclusiones del capítulo . . . . .                                  | 58 |
| <br>                                    |  |    |
| <b>Capítulo 6. Formación</b>            |  |    |
| 6.1.                                    | Robot de tipo tracción diferencial . . . . .                         | 59 |
| 6.1.1.                                  | Simulaciones . . . . .   | 60 |
| 6.2.                                    | Cuadricóptero . . . . .  | 66 |
| 6.2.1.                                  | Simulaciones . . . . .   | 67 |
| 6.3.                                    | Anti colisiones . . . . .  | 70 |
| 6.3.1.                                  | Robot de tipo tracción diferencial . . . . .                         | 71 |
| 6.3.2.                                  | Cuadricóptero . . . . .  | 72 |
| 6.4.                                    | Conclusiones del capítulo . . . . .                                  | 72 |
| <br>                                    |  |    |
| <b>Capítulo 7. Resultados numéricos</b> |  |    |
| 7.1.                                    | Acoplamiento dinámico . . . . .                                      | 73 |
| 7.1.1.                                  | Anticolisiones . . . . .   | 74 |

|                          |                                     |    |
|--------------------------|-------------------------------------|----|
| 7.2.                     | Simulaciones . . . . .              | 75 |
| 7.2.1.                   | Sincronización externa . . . . .    | 75 |
| 7.2.2.                   | Formación externa . . . . .         | 81 |
| 7.3.                     | Conclusiones del capítulo . . . . . | 87 |
| <br>                     |                                     |    |
| <b>Capítulo 8.</b>       | <b>Conclusiones</b>                 |    |
| 8.1.                     | Trabajo futuro . . . . .            | 89 |
| <br>                     |                                     |    |
| <b>Literatura citada</b> | . . . . .                           | 90 |
| <br>                     |                                     |    |
| <b>Anexos</b>            | . . . . .                           | 93 |

# Lista de figuras

| Figura   | Página |
|--|--------|
| 1. Aumento drástico de desastres naturales en los últimos años. . . . .  | 2      |
| 2. Esquema gráfico del problema de estudio. . . . .  | 3      |
| 3. Abstracción de la ciudad de Königsberg. . . . .   | 9      |
| 4. grafo dirigido. . . . .   | 9      |
| 5. grafo no dirigido. . . . .  | 10     |
| 6. grafo mixto. . . . .  | 10     |
| 7. Red en cadena con 4 nodos con conexión bidireccional. . . . .   | 13     |
| 8. Red en vecino cercano con 4 nodos con conexión bidireccional. . . . .   | 14     |
| 9. Red en estrella con 4 nodos con conexión bidireccional. . . . .   | 15     |
| 10. Red en mundo pequeño con 4 nodos con conexión bidireccional. . . . .   | 16     |
| 11. Diagrama esquemático de un robot móvil tipo tracción diferencial. . . . .  | 18     |
| 12. Tareas básicas de un robot móvil: a) Punto deseado, b) Seguimiento de trayectoria. . . .   | 21     |
| 13. Diagrama a bloques del esquema de control del robot. . . . .   | 25     |
| 14. Comportamiento del robot tipo tracción diferencial con velocidades angulares iguales y positivas. . . . .                        | 25     |
| 15. Trayectoria del robot tipo tracción diferencial con velocidades angulares iguales y positivas. . . . .                           | 26     |
| 16. Comportamiento del robot tipo tracción diferencial con velocidades angulares iguales y negativas. . . . .                        | 26     |
| 17. Trayectoria del robot tipo tracción diferencial con velocidades angulares iguales y negativas. . . . .                           | 27     |
| 18. Comportamiento del robot tipo tracción diferencial con velocidad angular mayor en la rueda izquierda. . . . .                    | 27     |
| 19. Trayectoria del robot tipo tracción diferencial con velocidad angular mayor en la rueda izquierda. . . . .                       | 28     |
| 20. Comportamiento del robot tipo tracción diferencial con velocidad angular mayor en la rueda derecha. . . . .                      | 28     |
| 21. Trayectoria del robot tipo tracción diferencial con velocidad angular mayor en la rueda derecha. . . . .                         | 29     |
| 22. Comportamiento del robot tipo tracción diferencial con la misma magnitud de velocidades pero con direcciones diferentes. . . . . | 29     |
| 23. Diagrama del cuerpo libre de un cuadricóptero. . . . .   | 30     |
| 24. Cuadricóptero con respecto al marco inercial. . . . .  | 31     |
| 25. Diagrama a bloques del esquema de control del robot. . . . .   | 34     |
| 26. Cuadricóptero en vuelo estático. . . . .   | 38     |

| Figura   | Página |
|--|--------|
| 27. Trayectoria del cuadricóptero con velocidades angulares iguales. . . . .   | 38     |
| 28. Cuadricóptero en ascenso. . . . .  | 39     |
| 29. Trayectoria del cuadricóptero con velocidades angulares iguales y superiores al del estático. . . . .                                | 39     |
| 30. Cuadricóptero en descenso. . . . .   | 40     |
| 31. Trayectoria del cuadricóptero con velocidades angulares iguales e inferiores al del estático. . . . .                                | 40     |
| 32. Cuadricóptero avanzando hacia adelante. . . . .  | 41     |
| 33. Trayectoria del cuadricóptero con velocidades angulares diferentes. . . . .  | 41     |
| 34. Cuadricóptero retrocediendo. . . . .   | 42     |
| 35. Trayectoria del cuadricóptero con velocidades angulares diferentes. . . . .  | 42     |
| 36. Cuadricóptero avanzando hacia la derecha. . . . .  | 43     |
| 37. Trayectoria del cuadricóptero con velocidades angulares diferentes. . . . .  | 43     |
| 38. Cuadricóptero avanzando hacia la izquierda. . . . .  | 44     |
| 39. Trayectoria del cuadricóptero con velocidades angulares diferentes. . . . .  | 44     |
| 40. Cuadricóptero girando a la izquierda. . . . .  | 45     |
| 41. Cuadricóptero girando a la derecha. . . . .  | 45     |
| 42. Bosquejo del experimento de Huygens de la sincronización entre dos relojes. . . . .  | 47     |
| 43. Estados de los 5 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación. . . . .                                | 49     |
| 44. Plano de fase $(x, y)$ de los 5 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación. . . . .                 | 49     |
| 45. Estados de los 5 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de seguimiento de trayectoria. . . . .                | 50     |
| 46. Plano de fase $(x, y)$ de los 5 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de seguimiento de trayectoria. . . . . | 51     |
| 47. Posición inicial de 5 robots en un plano siguiendo una trayectoria. . . . .  | 51     |
| 48. Posición final de 5 robots en un plano siguiendo una trayectoria. . . . .  | 52     |
| 49. Estados de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación. . . . .                                | 54     |
| 50. Plano de fase $(x, y, z)$ de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación. . . . .              | 54     |
| 51. Posición inicial de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación. . . . .                       | 55     |
| 52. Posición final de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación. . . . .                         | 55     |

| Figura  | Página |
|---|--------|
| 53. Plano de fase $(x, y, z)$ de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de seguimiento de trayectoria. . . . . | 56     |
| 54. Estados de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de seguimiento de trayectoria. . . . .                   | 57     |
| 55. Posición inicial de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de seguimiento de trayectoria. . . . .          | 57     |
| 56. Posición final de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de seguimiento de trayectoria. . . . .            | 58     |
| 57. Formación de un cardumen de peces. . . . .  | 59     |
| 58. Estados de los 5 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación. . . . .                                    | 61     |
| 59. Plano de fase $(x, y)$ de los 5 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación. . . . .                     | 62     |
| 60. Posición inicial de los 5 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación. . . . .                           | 62     |
| 61. Posición final de los 5 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación. . . . .                             | 63     |
| 62. Estados de los 110 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación. . . . .                                  | 64     |
| 63. Plano de fase $(x, y)$ de los 110 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación. . . . .                   | 64     |
| 64. Posición inicial de los 110 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación. . . . .                         | 65     |
| 65. Posición final de los 110 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación. . . . .                           | 65     |
| 66. Estados de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación. . . . .                                    | 68     |
| 67. Plano de fase $(x, y, z)$ de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación. . . . .                  | 69     |
| 68. Posición inicial de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación. . . . .                           | 69     |
| 69. Posición final de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación. . . . .                             | 70     |
| 70. Vector $l$ formado entre los robots $i$ y $j$ . . . . .   | 71     |
| 71. Estados de los 9 robots terrestres en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación externa. . . . .                | 77     |
| 72. Estados de los 9 robots aéreos en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación externa. . . . .                    | 78     |
| 73. Plano de fase $(x, y, z)$ de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación externa. . . . .         | 79     |

| Figura  | Página |
|---|--------|
| 74. Posición inicial de los 9 robots aéreos y terrestres en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación externa. . . . .                | 79     |
| 75. Posición final de los 9 robots aéreos y terrestres en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación externa. . . . .                  | 80     |
| 76. Comparación de estados $(x, y)$ de los 9 robots aéreos y terrestres en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación externa. . . . . | 80     |
| 77. Estados de los 9 robots terrestres en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación externa. . . . .                                   | 83     |
| 78. Estados de los 9 robots aéreos en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación externa. . . . .                                       | 84     |
| 79. Plano de fase $(x, y, z)$ de los 9 robots aéreos y terrestres en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación externa. . . . .        | 85     |
| 80. Posición inicial de los 9 robots aéreos y terrestres en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación externa. . . . .                 | 85     |
| 81. Posición final de los 9 robots aéreos y terrestres en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación externa. . . . .                   | 86     |
| 82. Comparación de estados $(x, y)$ de los 9 robots aéreos y terrestres en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación externa. . . . .  | 86     |

# Lista de tablas

| Tabla   | Página |
|---|--------|
| 1. Parámetros físicos del modelo del cuadricóptero. . . . . | 34     |

# Capítulo 1. Introducción

---

En este capítulo se abordan los temas que justifican la investigación de la presente tesis, se presenta la motivación, el problema y la metodología para lograr los objetivos.

La presente tesis, pretende contribuir a la solución de algunos problemas abiertos en la sincronización y formación de robots móviles (aéreos y terrestres). En particular, a la sincronización y formación de dos redes heterogéneas con el propósito de realizar actividades en conjunto, mediante un acoplamiento dinámico, es decir por un sistema intermediario.

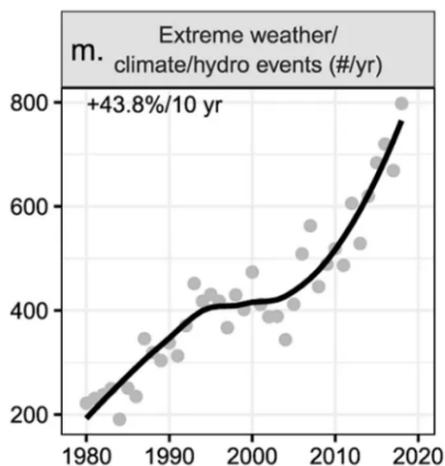
El objetivo principal de esta tesis es controlar dos redes de robots móviles heterogéneas, una de las redes conformada por robots terrestres y la otra conformada por robots aéreos. De esta manera, generar los comportamientos colectivos: sincronización, coordinación y formación, con el propósito de realizar una posible aplicación en tareas de patrullaje, exploración, búsqueda, entre otras.

Para la realización de la tesis, se recurrirá a la teoría de sistemas complejos, y a la teoría de control no lineal. En particular, se aplicará linealización por retroalimentación dinámica, control por backstepping, entre otras.

## 1.1. Motivación

De acuerdo a un estudio de Ripple et al. (2022), los siniestros son cada vez más comunes y más destructivos en todo el mundo. Los desastres naturales y la delincuencia solo han estado en alza a través de los años, cada vez corren más peligro las unidades de búsqueda, apoyo y seguridad. En la figura 1, se puede observar que en 10 años el incremento de siniestros provocados por el clima ha subido un 43.8%.

Los sistemas no tripulados como los drones, robots móviles terrestres, robots móviles acuáticos, entre otros, pueden ayudar a disminuir drásticamente el riesgo del personal humano que asiste en eventos de desastres naturales. Los robots móviles pueden abarcar zonas muy extensas en muy poco tiempo en lo que refiere a aplicaciones como, búsqueda y rescate, donde se puede acceder a zonas que para el ser humano sería muy complicado o imposible. Estos sistemas tienen un factor de error menor al del trabajo humano ya que no tienen las necesidades básicas del ser humano y no disminuyen su eficiencia por cansancio.



**Figura 1.** Aumento drástico de desastres naturales en los últimos años.

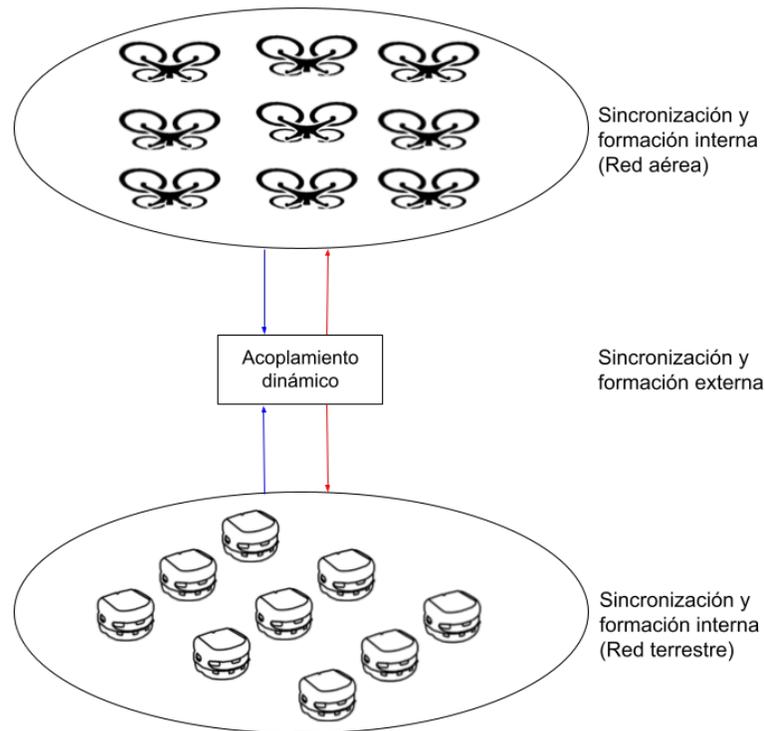
Ahora bien, aunque los robots sean de gran ayuda para una gran variedad de escenarios, también cuentan con sus limitantes, por esto, es necesario aprovechar las ventajas que brindan dos o más grupos de robots móviles distintos. En el caso de esta tesis, se plantea el uso de un grupo de robots móviles terrestre y otro grupo de robots móviles aéreo, así se logra compensar las desventajas de un grupo con las ventajas del otro grupo de robots móviles. Estos dos grupos, aunque sean separados, deben trabajar como si fueran uno mismo, es decir, es necesario que estén sincronizados y cuenten con una formación que les permita trabajar colectivamente de forma eficaz y eficiente, similar a como trabajan ciertos grupos de animales como las hormigas y abejas.

## 1.2. Planteamiento del problema

En esta tesis de maestría, se pretende generar los comportamientos colectivos de sincronización y formación externa entre dos redes heterogéneas de robots móviles. Es decir, entre una red de robots móviles terrestres y otra de robots móviles aéreos, utilizando control por backstepping, linealización por retroalimentación dinámica y haciendo uso de un acoplamiento dinámico a través de un sistema intermediario.

Se aborda el problema de manera numérica empleando simulaciones en Matlab. En particular, se acoplan dos o más cuadricópteros a dos o más robots móviles de tracción diferencial, cada una de las redes, parten con una configuración topológica particular. Se recurre como metodología de trabajo al control por backstepping en el caso de la red de cuadricópteros y a la linealización por retroalimentación dinámica para la red de robots móviles tipo tracción diferencial.

Para acoplar interna o externamente las redes heterogéneas de robots móviles, se emplean acoplamientos conformados por sistemas intermediarios (acoplamientos dinámicos), para lograrlo, se aplicará la teoría de sistemas complejos y teoría de grafos. Los resultados esperados son numéricos y posiblemente experimentales con aplicaciones a tareas de patrullaje, exploración, búsqueda, entre otras, ver figura 2.



**Figura 2.** Esquema gráfico del problema de estudio.

### 1.3. Hipótesis

Es posible alcanzar sincronización y formación externa entre dos redes heterogéneas de robots móviles utilizando control por backstepping, linealización por retroalimentación dinámica y mediante un acoplamiento indirecto a través de un sistema intermediario.

### 1.4. Objetivos general y específicos

Con la realización de la presente tesis de maestría, se pretende alcanzar el siguiente **objetivo general**:

### 1.4.1. Objetivo general

*Generar sincronización y formación externa entre redes heterogéneas de robots móviles aplicando control no lineal, teoría de sistemas complejos y un acoplamiento indirecto.* Mediante los siguientes **objetivos particulares**:

### 1.4.2. Objetivos específicos

- Realizar la sincronización interna de la red de robots móviles terrestres tipo tracción diferencial.
- Realizar la formación interna de la red de robots móviles terrestres tipo tracción diferencial.
- Realizar la sincronización interna de la red de robots móviles aéreos tipo cuadricóptero.
- Realizar la formación interna de la red de robots móviles aéreos tipo cuadricóptero.
- Realizar la sincronización externa de los robots móviles aéreos y terrestres aplicando un acoplamiento indirecto a través de un sistema intermediario.
- Realizar la formación externa de los robots móviles aéreos y terrestres aplicando un acoplamiento indirecto a través de un sistema intermediario.

## 1.5. Metodología

La naturaleza del trabajo a desarrollar en esta tesis es numérica. Los resultados numéricos serán presentados en simulaciones mediante programación, para lo cual, se requiere la utilización de una computadora personal y los paquetes de programación como Matlab y Simulink. Todas las simulaciones fueron realizadas en Simulink de Matlab R2020b. En el caso de un trabajo futuro, los resultados experimentales serán dados a partir de un arreglo de cuadricópteros tipo Parrot o armado frame 250 con ardupilot, robots móviles Khepera III (o IV) y un conjunto de cámaras Optitrack Flex 13. Infraestructura disponible en el laboratorio de Sincronización y Sistemas Complejos del DET.

En cuanto a la metodología de trabajo para controlar y alcanzar formación entre cuadricópteros, se recurrirá al control por backstepping, donde su teoría se puede encontrar en (Kokotovic, 1992) y unas

aplicaciones en (Swarup, 2014), (Saif et al., 2012), (Mian & Daobo, 2008), (Bouabdallah & Siegwart, 2005) y (Bouadi et al., 2007), mientras que para controlar y alcanzar formación entre robots móviles tipo tracción diferencial se empleará la linealización por retroalimentación dinámica (Alessandro, 1993) que es aplicado en (Hernández, 2018), (Rubio, 2018) y (Vara, 2018). Para acoplar las redes interna y externamente se emplearán acoplamientos indirectos (sistemas dinámicos intermediarios) como los reportados en (Arellano et al., 2021), (Pena et al., 2018) y (Arellano et al., 2023). Además, para estar en condiciones de desarrollar la propuesta de trabajo, se utilizará la teoría de sistemas complejos (Wang, 2002). Para la demostración formal de los resultados analíticos, se podrá recurrir a la teoría de estabilidad de Lyapunov para sistemas no lineales (Khalil, 2002), a la teoría de sistemas dinámicos (Fradkov et al., 1999) y teoría de grafos.

## **1.6. Contribuciones de la tesis**

En esta tesis se realizó la sincronización y formación interna y externa de dos redes heterogéneas de robots móviles a nivel simulación para posteriormente (trabajo futuro) ser implementadas en el laboratorio de *Sincronización y sistemas complejos del Departamento Electrónica y Telecomunicaciones del CICESE*

En la literatura consultada, todos los trabajos relacionados se abordaron únicamente con una red de robots o con solo dos robots (uno aéreo y uno terrestre). En esta tesis se implementan dos redes heterogéneas de 9 robots, tomando en consideración que pueden extenderse fácilmente para  $N$  número de robots, al igual que es posible hacer una red de redes.

Se redactó un artículo con los resultados numéricos obtenidos en esta tesis, el cual fue sometido en el XXV Congreso Mexicano de Robótica COMRob 2023, celebrado en la ciudad de Xalapa, Veracruz, del 15 al 17 de noviembre de 2023.

## **1.7. Conclusiones del capítulo**

En este capítulo se presentó la justificación de esta tesis, así como el aporte que tendrá al final de su realización. En los siguientes capítulos se desarrollarán los objetivos propuestos en el presente capítulo.

## Capítulo 2. Antecedentes

---

En este capítulo se presenta la teoría relevante para la realización de la presente tesis, donde se abordan temas como, sistemas complejos, teoría de grafos y trabajos relacionados.

En el año 1918 se tuvo el primer viaje exitoso de un vehículo aéreo no tripulado (Cuerno et al., 2016), desde entonces se ha invertido en investigación para obtener vehículos aéreos más eficientes y veloces. Aunque el diseño y aplicación de un vehículo aéreo autónomo es muy complicado, es más sencillo que para uno terrestre. Por ello, el desarrollo del vehículo terrestre autónomo dio lugar hasta el año 1980 (Li et al., 2018) en la Universidad Carnegie Mellon.

El concepto cuadricóptero existe desde hace mucho tiempo, el primer cuadricóptero con elevación exitosa se construyó en 1907 que lleva como nombre “the Breguet-Richet Quadrotor helicopter Gyroplane No.1” (AbuAssi, 2002). El vehículo se puede describir como cuatro hélices en configuración cruz. A pesar de los cuatro actuadores, el cuadricóptero sigue siendo un sistema subactuado e inestable.

El robot móvil terrestre tipo diferencial, es un vehículo que se constituye de dos ruedas motrices, izquierda y derecha, idénticas y paralelas entre sí, capaces de girar en el mismo sentido o en sentido contrario, además de una rueda pasiva (rueda caster) conducida que asegura que la plataforma del robot se encuentre sobre un plano.

En la actualidad se pueden encontrar distintos tipos de drones que tienen funciones muy específicas y que normalmente trabajan de forma individual. Los más comunes son los que se utilizan para grabaciones, estos generalmente son manejados con un control remoto o los que son autónomos tienen un objetivo en movimiento al cual siguen. Se utilizan para películas, anuncios o por diversión (Gschwindt et al., 2019).

Otra aplicación común es el monitoreo y riego en cultivos de distintas índoles, estos drones tienen un recorrido predeterminado y solo tienen como función mostrar la salud de las plantas por medio de ciertos colores, en algunos casos tienen la opción de riego automático (Veroustraete, 2015).

Una aplicación reciente para estos sistemas aéreos es en la salud, se utilizan los drones para determinar la salud de un paciente de forma remota. El dron es capaz de identificar la temperatura, signos vitales, respiración, entre otras características para determinar si un paciente está sufriendo una crisis o se encuentra estable (Saitoh et al., 2021).

Actualmente se utilizan enjambres de drones en eventos masivos para simular fuegos artificiales y hacer

espectáculos de luces que forman figuras o palabras. Estos espectáculos se pueden observar en conciertos y parques temáticos.

Por otro lado, entre las aplicaciones de grupos de robots móviles terrestres, se pueden encontrar el seguimiento a un líder. Esto consiste en que un grupo de carros autónomos siguen a un carro en específico (Huang et al., 2006).

Uno de los proyectos más recientes que tienen objetivos parecidos a los de esta tesis, es una investigación de la Universidad de Nuevo México en colaboración con la NASA. Esta investigación consiste en crear un enjambre de robots móviles terrestres que puedan minar en zonas delimitadas, cuando uno de estos robots encuentra minerales de interés, llama a todos los robots para que minen en una zona cercana a este. Aunque este proyecto estaba pensado como aplicación espacial, durante la investigación se dieron cuenta que podría tener una aportación en la tierra más allá de solo minar, como en desastres naturales, derrumbes, caminos atascados, entre otras aplicaciones (Siceloff, 2017).

En la Universidad de la República en Uruguay, se llevó a cabo una investigación acerca de la optimización en la exploración con enjambre de robots móviles terrestres. Esta investigación fue aplicada únicamente con simulaciones numéricas y con el único objetivo de encontrar la manera más rápida de explorar un espacio en su totalidad o buscar una salida en un laberinto (Ciuffardi, 2022).

Ahora bien, la sincronización, coordinación y formación de ambos vehículos donde interactúen entre sí para lograr un objetivo, es algo que sigue en investigación, debido a su complejidad, en el caso de sincronización y formación heterogénea, no se tiene registro de que se haya llevado a la aplicación.

Actualmente, para controlar vehículos de este tipo, se recurre al diseño de controladores basados en la matemática no lineal, tales como, modos deslizantes, acoplamiento a modelos, adaptable, activo, backstepping, linealización por retroalimentación dinámica, entre otras. Siendo backstepping una de las más sencillas de desarrollar y aplicar en este tipo de sistemas.

La linealización por retroalimentación dinámica es un método de diseño de sistemas de control con características no lineales. La idea principal es la de transformar, de forma parcial o total, la dinámica no lineal del sistema a controlar en una dinámica lineal.

Backstepping es una técnica de control en la cual las leyes de control se diseñan usando un algoritmo de control recursivo para ciertos estados. Estos estados son nombrados como entradas de control virtuales (Bouabdallah & Siegwart, 2005).

## 2.1. Sistemas complejos

El término “sistemas complejos” es relativamente nuevo, ya que anteriormente el estudio de las cosas era de forma particular y específica, para así comprender todas las partes o funciones de un tema de interés. Pero ahora, lo que se busca es saber el comportamiento y funcionamiento de un conjunto, la unión de varias partes para formar otra totalmente distinta. Este término es muy general, ya que puede ser acuñado por todas las ramas de investigación y desarrollo, tanto científicas como sociales.

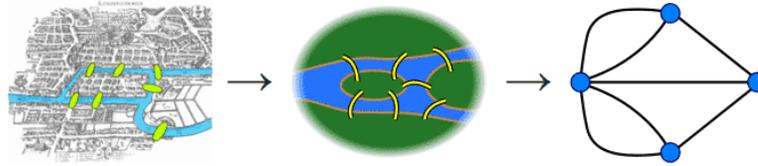
Los sistemas complejos se caracterizan por su comportamiento impredecible y por la gran cantidad de elementos que lo conforman, siendo estos elementos relativamente idénticos. Dichos elementos generan un comportamiento que no puede ser explicado tomando como referencia sus partes por individual. Por esto, para entender el comportamiento de un sistema complejo no es suficiente el conocimiento de los elementos por separado, sino de todo el sistema completo (Munné, 2005).

Se pueden encontrar sistemas complejos en la naturaleza, en la computación, en la electrónica, en la robótica, en la sociedad, incluso en la literatura. Por lo anterior, no podemos hablar de sistemas complejos como algo de una sola área en específico, ya que este término abarca la gran mayoría de los fenómenos que se observan en la vida diaria.

Generalmente, para el análisis de los sistemas complejos se utilizan modelos dinámicos no lineales, ecuaciones diferenciales, teoría de redes, algoritmos genéticos, etc. En los sistemas complejos, se suele utilizar algoritmos para obtener una solución aproximada debido a que la mayoría de estos sistemas son inestables e impredecibles en su dinámica, cualquier variación en sus elementos puede cambiar el comportamiento del sistema en su totalidad.

## 2.2. Teoría de grafos

En el siglo XVIII se originó la teoría de grafos con la solución del célebre problema de los siete puentes de Königsberg. Este consistía en encontrar un camino que lograra recorrer los siete puentes sin pasar más de una vez por cada uno y regresar al punto de partida. En 1736 Leonhard Euler desarrolló un método para resolver este problema mediante un grafo, cada área la represento con un punto, a los cuales llamó nodos, y a cada puente lo representó con una línea o conexión. De esta forma Euler solo se enfocaba en las regiones y sus conexiones, ver figura 3.



**Figura 3.** Abstracción de la ciudad de Königsberg.

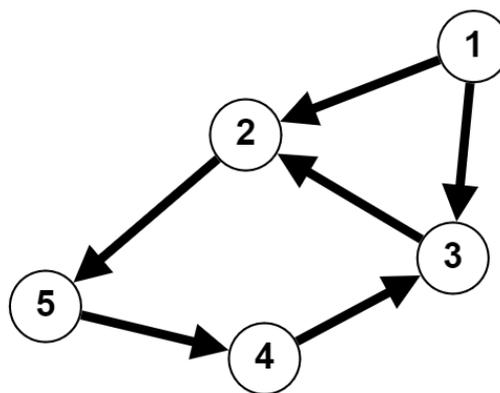
La publicación de Euler fue la primera que hizo una representación geométrica de este tipo, en la cual sólo interesan las propiedades estructurales de los objetos y no sus medidas, como se hacía tradicionalmente en las matemáticas. A esta abstracción Euler le llamó *grafo*, dando como nacimiento a la rama de las matemáticas llamada *topología* (Moreno & Ramírez, 2011).

### 2.2.1. Tipos de grafos

Los grafos se distinguen principalmente en tres tipos, los cuales son los dirigidos, no dirigidos y mixtos.

#### 2.2.1.1. Grafo dirigido

Este tipo de grafos se caracteriza por tener una dirección en todas sus conexiones, dando así un flujo unidireccional entre cada conexión, ver figura 4.



**Figura 4.** grafo dirigido.

### 2.2.1.2. Grafo no dirigido

A diferencia del grafo anterior, este grafo tiene conexiones bidireccionales, esto quiere decir que, no se tiene una dirección específica en las conexiones, ver figura 5.

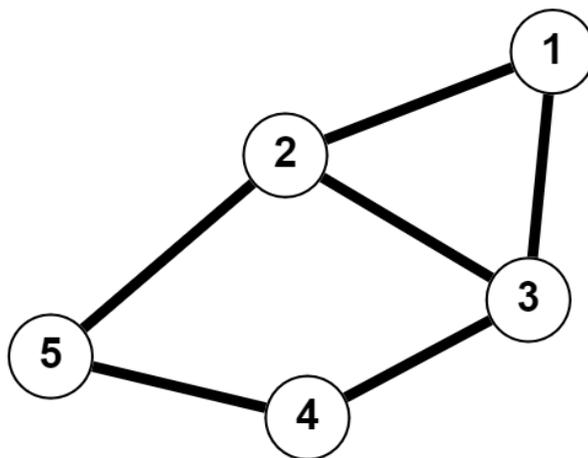


Figura 5. grafo no dirigido.

### 2.2.1.3. Grafo mixto

Por último, a la combinación de los dos grafos anteriores se le llama *grafo mixto*, ver figura 6.

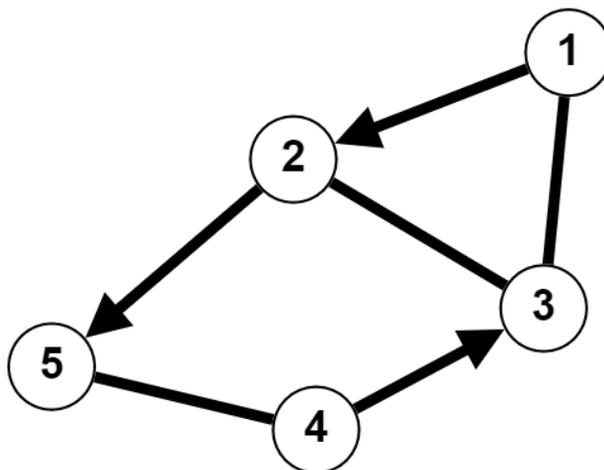


Figura 6. grafo mixto.

## 2.2.2. Matrices asociadas

Los grafos pueden ser representados numéricamente con matrices, estas matrices describen las conexiones y la forma de conexión que tiene el grafo, hay matrices que pueden ser fácilmente asociadas con ciertas topologías.

### 2.2.2.1. Matriz de adyacencia

Esta matriz de  $N \times N$ , donde  $N$  es la cantidad de nodos en el grafo, representa las conexiones que existen entre los nodos. Solo tiene unos y ceros, donde los unos representan la conexión entre la fila con la columna (Wang, 2002).

$$E(G) = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \cdots & \rho_{NN} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad (1)$$

donde

$$\rho_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si el nodo } i \text{ tiene conexión con el nodo } j, i \neq j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2)$$

### 2.2.2.2. Matriz de grado

Es una matriz diagonal de dimensión  $N \times N$  que representa el número de vecinos que tiene cada nodos (Wang, 2002).

$$D(G) = \begin{bmatrix} \delta_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta_{NN} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad (3)$$

donde

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} \delta_i, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4)$$

Con  $\delta_i$  como el grado del nodo  $i$  (con  $i = 1, 2, \dots, N$ ), el cual se determina por la suma de conexiones en la fila  $i$  de  $E(G)$ , de la siguiente manera:

$$\delta_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \rho(i, j) \in E(G) \quad (5)$$

### 2.2.2.3. Matriz laplaciana

Es la matriz resultante de la resta de la matriz de grado  $D(G)$  y la matriz de adyacencia  $E(G)$  (Wang, 2002).

$$L(G) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1N} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & \cdots & l_{NN} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad (6)$$

es decir

$$L(G) = D(G) - E(G). \quad (7)$$

#### 2.2.2.4. Matriz de acoplamiento

Esta matriz es la negativa de la matriz laplaciana  $L(G)$ . Esta matriz es la más utilizada para describir un grafo (Wang, 2002).

$$A(G) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad (8)$$

es decir

$$A(G) = -L(G). \quad (9)$$

### 2.2.3. Algunas topologías de conexión

#### 2.2.3.1. Conexión en cadena

Esta topología consta de una serie de nodos conectados únicamente con dos de sus vecinos más cercanos, para el caso de los nodos internos, y con uno vecino para los nodos de las orillas, ver figura 7. Esta es una de las conexiones más sencillas pero menos eficiente para un grafo extenso. Para esta red, la información que se quiera mandar de un nodo a otro debe pasar por todos los nodos que estén entre estos.



**Figura 7.** Red en cadena con 4 nodos con conexión bidireccional.

La matriz de acoplamiento asociada a este tipo de red para  $N$  nodos conectados, es la siguiente (Jyothi

et al., 2016):

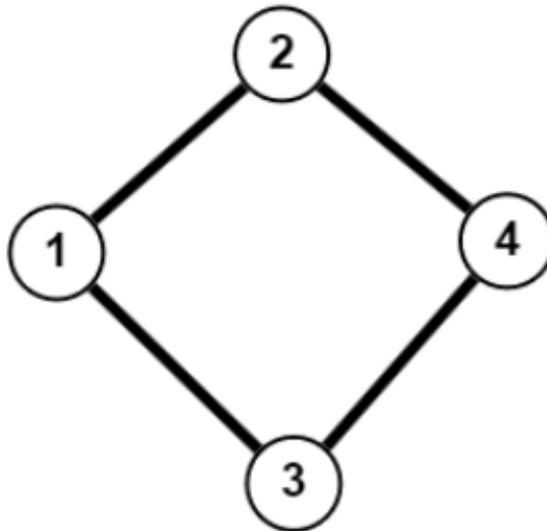
$$A(G)_{cadena} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

Los valores propios de la matriz  $A(G)_{cadena}$  puede encontrarse con la expresión (Jyothi et al., 2016).

$$\lambda_k = -4\text{sen}^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2N}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

### 2.2.3.2. Conexión en vecino cercano

Esta topología es parecida a la anterior pero con las esquinas conectadas entre sí, ver figura 8. A este tipo de conexión también se le llama anillo.



**Figura 8.** Red en vecino cercano con 4 nodos con conexión bidireccional.

La matriz de acoplamiento asociada a este tipo de red para  $N$  nodos conectados, es la siguiente (Jyothi

et al., 2016):

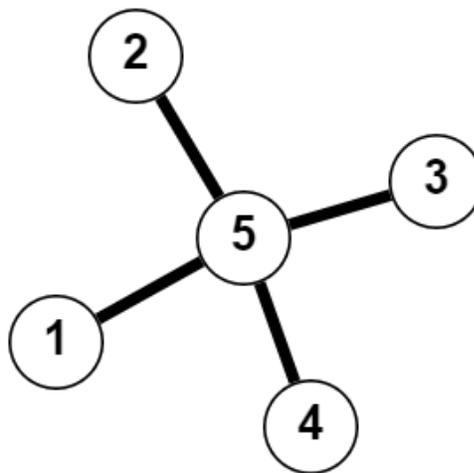
$$A(G)_{anillo} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

Los valores propios de la matriz  $A(G)_{anillo}$  puede encontrarse con la expresión (Jyothi et al., 2016).

$$\lambda_k = -4 \sum_{j=1}^{k/2} \text{sen}^2\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (13)$$

### 2.2.3.3. Conexión en estrella

Esta topología consta de un nodo central que tiene una conexión con todos los demás nodos, este nodo es el único que tiene más de una conexión en toda la red, ver figura 9. Este tipo de conexión se utiliza generalmente cuando se tiene un nodo como maestro y los demás como esclavos.



**Figura 9.** Red en estrella con 4 nodos con conexión bidireccional.

La matriz de acoplamiento asociada a este tipo de red para  $N$  nodos conectados, es la siguiente (Jyothi

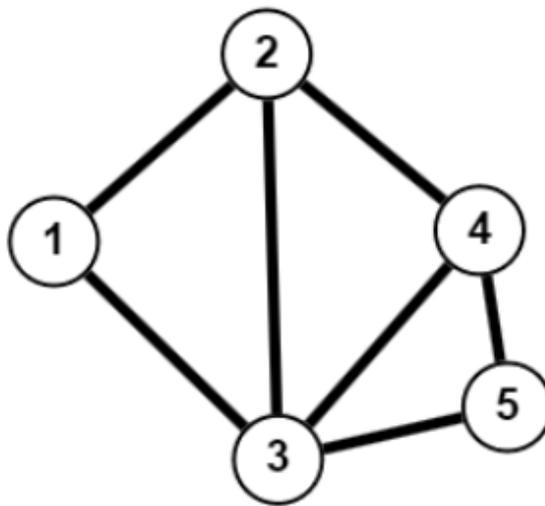
et al., 2016):

$$A(G)_{estrella} = \begin{bmatrix} -N + 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

Los valores propios de  $A(G)_{estrella}$  son (Jyothi et al., 2016):  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -N$ ,  $\lambda_3 = -1$ ,  $\dots$ ,  $\lambda_N = -1$ .

#### 2.2.3.4. Conexión en mundo pequeño

Esta topología es una combinación entre una red regular (cadena, anillo, estrella) y una aleatoria. Está basada en una red de vecino cercano de  $N$  nodos y  $k$  conexiones, posteriormente se agregan conexiones entre nodos con una probabilidad  $p$ , ver figura 10.



**Figura 10.** Red en mundo pequeño con 4 nodos con conexión bidireccional.

La matriz de acoplamiento asociada a este tipo de red para 5 nodos conectados, es la siguiente (Wang & Chen, 2003):

$$A(G)_{mundo} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

Los valores propios de  $A(G)_{mundo}$  son (Wang & Chen, 2003):  $\lambda_1 = -5$ ,  $\lambda_2 = -4$ ,  $\lambda_3 = -3$ ,  $\lambda_4 = -2$ ,  $\lambda_5 = 0$ .

### 2.3. Trabajos relacionados

En el trabajo de Hernández (2018), se presentó la sincronización de dos robots, uno aéreo y uno terrestre. Esta sincronización se realizó de manera directa y sin considerar una expansión en las redes.

La sincronización externa entre robots móviles terrestres con un acoplamiento dinámico se presenta en el trabajo de Vara (2021), donde dicho trabajo se limita únicamente a sincronizar robots terrestres.

Ahora bien, en el trabajo de Rubio (2022), se presenta la formación y el acoplamiento dinámico pero únicamente entre robots aéreos y no contempla la posible expansión de nodos.

### 2.4. Conclusiones del capítulo

Los sistemas complejos se conforman de dos o más elementos que tiene como objetivo una actividad colectiva, dicho comportamiento no se haría de forma individual. Existen diversos estudios y experimentos con sistemas complejos de una o más redes, pero dichos estudios son únicamente de una red heterogénea, quiere decir, que todos los nodos son iguales. En los siguientes capítulos se abordarán dos redes heterogéneas distintas, tanto individuales como en interacción en conjunto.

## Capítulo 3. Robot tipo tracción diferencial

En este capítulo se presenta el modelo del robot terrestre a utilizar, se describe en qué consiste un robot tipo tracción diferencial, el modelo matemático, la linealización y su comportamiento en lazo abierto.

El robot móvil terrestre bajo estudio consta de dos ruedas motrices, una izquierda y otra derecha, idénticas y paralelas entre sí, pueden girar en el mismo sentido o en sentido contrario. Además consta de una rueda omnidireccional pasiva (rueda loca) o bien un punto de apoyo el cual asegura que el robot se encuentre sobre un plano.

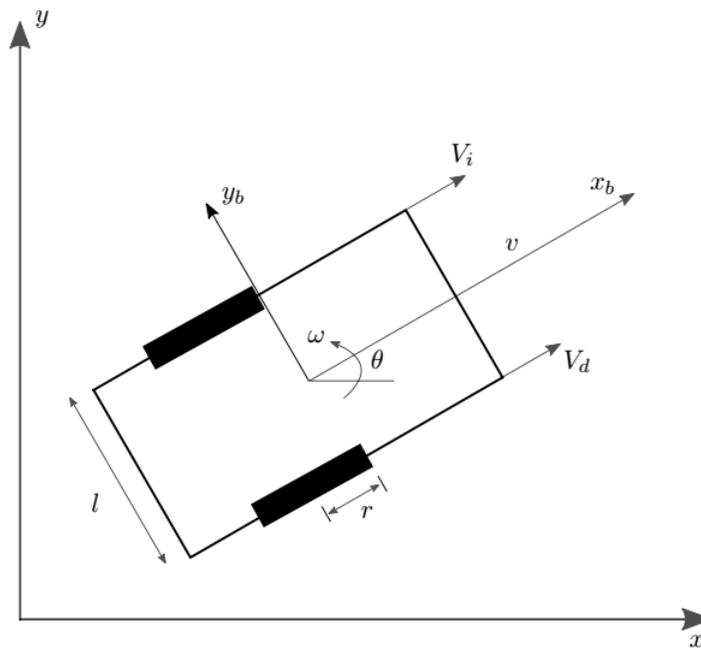


Figura 11. Diagrama esquemático de un robot móvil tipo tracción diferencial.

Acorde a la figura 11 (López, 2017), los ejes coordenados son  $x$  y  $y$ ,  $l$  es la distancia entre las ruedas,  $r$  es el radio de las ruedas,  $V_i$  y  $V_d$  son las velocidades lineales de la rueda izquierda y derecha respectivamente,  $\theta$  es el ángulo de orientación del robot,  $\omega$  es la velocidad angular y  $v$  es la velocidad lineal. Se plantea el modelo matemático de un robot tipo tracción diferencial, tomando en cuenta las siguientes consideraciones (Šuster, 2010):

- El robot se mueve en una superficie perfectamente plana sin deslizamiento, además no considera la resistencia de las llantas.

- La posición del robot está determinada por las coordenadas  $x$  y  $y$  y un ángulo  $\theta$ , el cual representa la rotación del robot en relación al sistema de coordenadas.
- El robot se controla por las velocidades angulares  $\omega_i$  y  $\omega_d$ .

### 3.1. Modelo matemático

La relación entre las velocidades angulares  $\omega_i$  y  $\omega_d$  y las velocidades lineales  $V_i$  y  $V_d$  es la siguiente:

$$V_i = r\omega_i, \quad (16)$$

$$V_d = r\omega_d. \quad (17)$$

Las ecuaciones que describen la cinemática del robot están dadas por:

$$\dot{x} = v\cos(\theta), \quad (18)$$

$$\dot{y} = v\sen(\theta), \quad (19)$$

$$\dot{\theta} = \omega. \quad (20)$$

Con la velocidad lineal  $v$  y la velocidad angular  $\omega$  del robot tipo tracción diferencial definidas como:

$$v = \frac{V_i + V_d}{2}, \quad (21)$$

$$\omega = \frac{V_d - V_i}{l}. \quad (22)$$

De las ecuaciones (18)-(22) se observa que el sistema es no lineal de la forma,

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{f}(\mathbf{R})\mathbf{u}. \quad (23)$$

donde  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^n$  representa el vector de estados,  $\mathbf{u} = (v \ \omega)^T$  representa al vector de entradas, mientras que  $\mathbf{f}$  está definido como,

$$\mathbf{f} = [f_1(\cdot) \ f_2(\cdot)]. \quad (24)$$

con

$$f_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

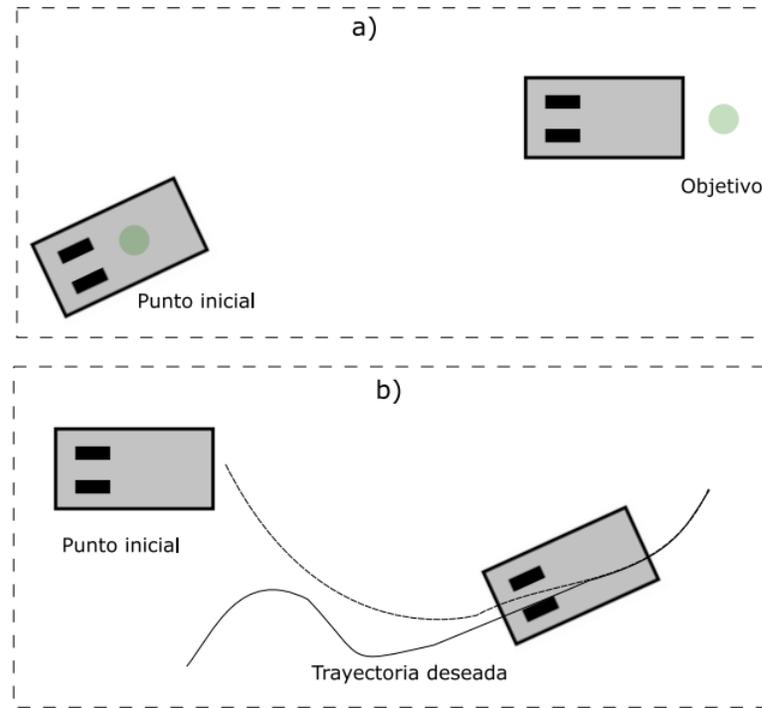
por lo tanto

$$\dot{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega. \quad (27)$$

### 3.2. Linealización por retroalimentación dinámica

El robot móvil terrestre tipo tracción diferencial tiene como objetivo dos tareas básicas como se observa en la figura 12 (López, 2017) y se describen de la siguiente manera:

- Punto deseado: El robot tiene como objetivo alcanzar una posición específica a partir de una posición inicial dada.
- Seguimiento de trayectoria: El robot tiene como objetivo seguir una trayectoria deseada en un plano, a partir de una posición inicial dada.



**Figura 12.** Tareas básicas de un robot móvil: a) Punto deseado, b) Seguimiento de trayectoria.

Estos objetivos pueden lograrse utilizando un control por retroalimentación de estado. Sin embargo, debido a que el sistema (18)-(20) no es lineal, es necesario recurrir a otra técnica para lograr un control adecuado.

La linealización por retroalimentación dinámica consiste en encontrar, si es posible, un compensador dinámico de la forma

$$\dot{\xi} = a(\mathbf{R}, \xi) + b(\mathbf{R}, \xi)\mathbf{u}^*, \quad (28)$$

$$\omega = c(\mathbf{R}, \xi) + d(\mathbf{R}, \xi)\mathbf{u}^*. \quad (29)$$

con vector de estados  $\xi \in \mathbb{R}^k$  y vector de entradas externas  $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^m$ , para que el sistema (23) y (28)-(29) resulte equivalente a través de una transformación de estados,

$$z = T(\mathbf{R}, \xi), \quad (30)$$

a un sistema lineal y controlable. Para lograr esto, se define un sistema con  $m$  salidas de la forma,

$$\eta = h(\mathbf{R}). \quad (31)$$

Después se deriva la salida con respecto al tiempo hasta que se obtenga las entradas en forma explícita. Con este algoritmo obtendremos el estado  $\xi$  del compensador dinámico (28). Cuando las salidas elegidas son invertibles, después de un número finito de diferenciaciones el proceso habrá terminado. Se obtiene la linealización de entrada-salida del sistema equivalente cuando la suma de las diferenciaciones de la salida es igual a la dimensión  $n + k$ . Dado lo anterior, el sistema en lazo cerrado es equivalente a un conjunto de integradores desacoplados. Para nuestro caso, se define un vector de salidas como  $\eta = (x, y)$ ,  $v = \xi$ ,  $\dot{\xi} = a_c$ , diferenciando con respecto al tiempo se obtiene,

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Debido a que  $\dot{\eta}$  sólo es afectado por la velocidad lineal del robot  $v$ , se puede definir como

$$\dot{\eta} = \xi \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$\ddot{\eta} = \dot{\xi} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} + \xi \dot{\theta} \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Sustituyendo  $\dot{\xi} = a_c$  y  $\dot{\theta} = \omega$  en la ecuación (34) y expresado en forma matricial, se obtiene

$$\ddot{\eta} = \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\xi \text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \xi \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_c \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix}, \quad (35)$$

donde

$$\begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\xi \text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \xi \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_c \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (36)$$

En la ecuación (36) la matriz que multiplica al vector formado por  $a_c$  y  $\omega$  es no singular, siempre y cuando  $\xi \neq 0$ . Tomando en cuenta esto, se tiene

$$\begin{bmatrix} a_c \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\frac{\text{sen}(\theta)}{\xi} & \frac{\cos(\theta)}{\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix}. \quad (37)$$

De la ecuación (37) finalmente se tiene que

$$\dot{\xi} = a_c = u_1^* \cos(\theta) + u_2^* \text{sen}(\theta), \quad (38)$$

$$\omega = \frac{u_2^* \cos(\theta) - u_1^* \text{sen}(\theta)}{\xi}. \quad (39)$$

El modelo del robot en las nuevas coordenadas (30) es,

$$z_1 = x, \quad (40)$$

$$z_2 = y, \quad (41)$$

$$\dot{z}_1 = \dot{x} = v \cos(\theta) = \xi \cos(\theta), \quad (42)$$

$$\dot{z}_2 = \dot{y} = v \text{sen}(\theta) = \xi \text{sen}(\theta). \quad (43)$$

Finalmente se obtiene un sistema de segundo orden lineal y controlable,

$$\ddot{z}_1 = \ddot{x} = u_1^*, \quad (44)$$

$$\ddot{z}_2 = \ddot{y} = u_2^*, \quad (45)$$

donde  $\mathbf{R}$  es el vector de salidas  $\mathbf{R} = (z_1, z_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2)$  y  $\mathbf{u}^*$  el vector de entradas  $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*)$ .

Para las entradas de control se proponen entradas de control sencillas como sigue

$$u_1 = c_1(\dot{x}_d - \dot{x}) + c_2(x_d - x), \quad (46)$$

$$u_2 = c_3(\dot{y}_d - \dot{y}) + c_4(y_d - y). \quad (47)$$

### 3.3. Cálculo de velocidades angulares de las ruedas

Tomando las ecuaciones (18)-(22) del modelo original, se pueden calcular las velocidades angulares de las ruedas  $(\omega_d, \omega_i)$ , esto a partir de las nuevas coordenadas del sistema equivalente (40)-(43).

De la ecuación (21) se tiene que

$$v = \frac{V_d}{2} + \frac{V_i}{2}, \quad (48)$$

$$V_d = 2v - V_i. \quad (49)$$

Sustituyendo la ecuación (49) en la ecuación (22) se tiene que

$$\omega = \frac{V_d}{l} - \frac{V_i}{l} = \frac{2v - V_i}{l} - \frac{V_i}{l}, \quad (50)$$

$$V_i = v - \frac{l\omega}{2}, \quad (51)$$

$$\omega_i = \frac{v - \frac{l\omega}{2}}{r}. \quad (52)$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación (52) en la ecuación (21) se obtiene

$$v = \frac{V_d}{2} + \frac{V_i}{2} = \frac{v - \frac{l\omega}{2}}{2} + \frac{V_d}{2}, \quad (53)$$

$$V_d = v + \frac{l\omega}{2}, \quad (54)$$

$$\omega_d = \frac{v + \frac{l\omega}{2}}{r}. \quad (55)$$

El diagrama a bloques del esquema de control del robot móvil terrestre tipo tracción diferencial está representado en la figura 13.

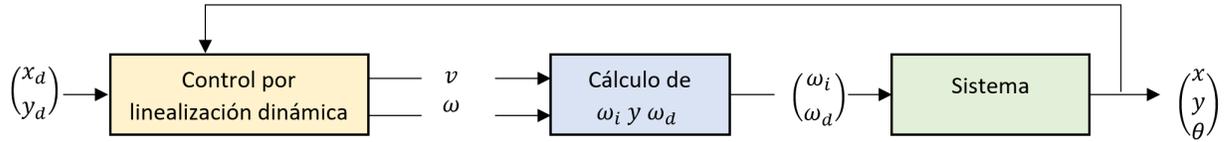


Figura 13. Diagrama a bloques del esquema de control del robot.

### 3.4. Simulación del comportamiento

Para el sistema sin control, la única forma de manipular al robot móvil terrestre, es variando las velocidades angulares de los motores ( $\omega_d, \omega_i$ ). Este tipo de robots solo tiene dos variaciones.

Para replicar las simulaciones se puede utilizar el código del Anexo A, únicamente variando  $\omega_d$  y  $\omega_i$ .

#### 3.4.1. Velocidades angulares iguales

Para esta combinación, se tienen dos variantes. La primera es, si ambas velocidades angulares son positivas ( $\omega_i = \omega_d = 50 \text{ rad/s}$ ) el robot avanzará de manera recta hacia adelante, ver figuras 14 y 15. De lo contrario, si ambas velocidades son negativas ( $\omega_i = \omega_d = -50 \text{ rad/s}$ ), el robot avanza hacia atrás, ver figuras 16 y 17.

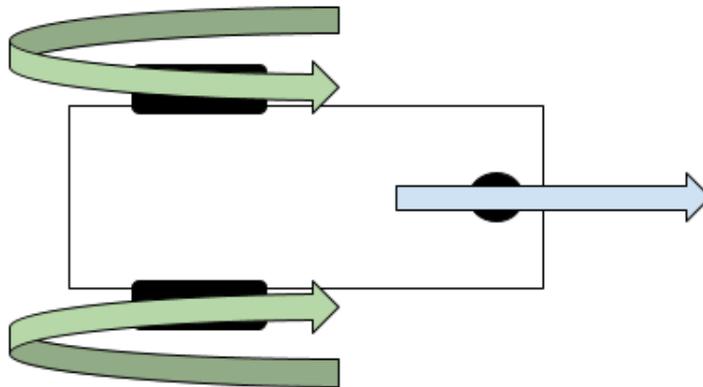


Figura 14. Comportamiento del robot tipo tracción diferencial con velocidades angulares iguales y positivas.

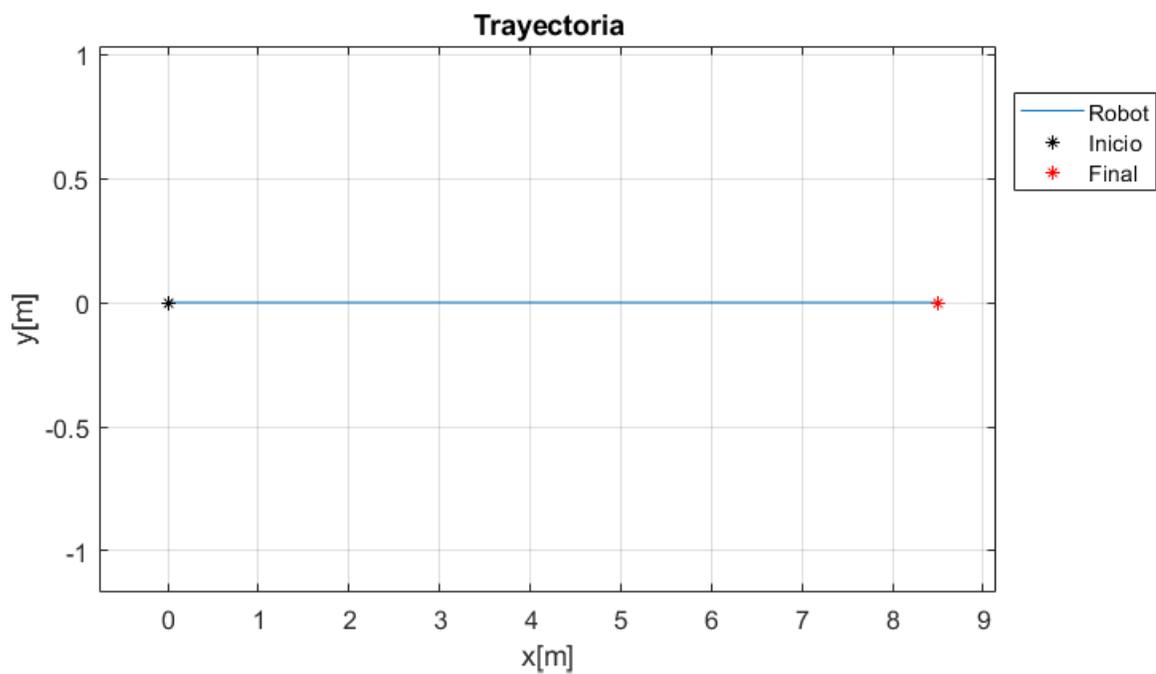


Figura 15. Trayectoria del robot tipo tracción diferencial con velocidades angulares iguales y positivas.

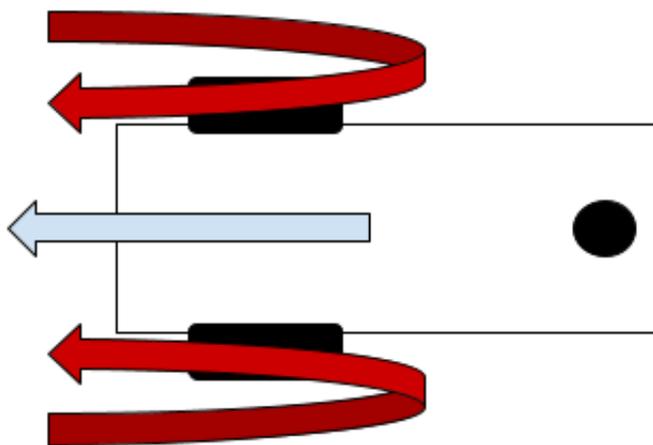


Figura 16. Comportamiento del robot tipo tracción diferencial con velocidades angulares iguales y negativas.

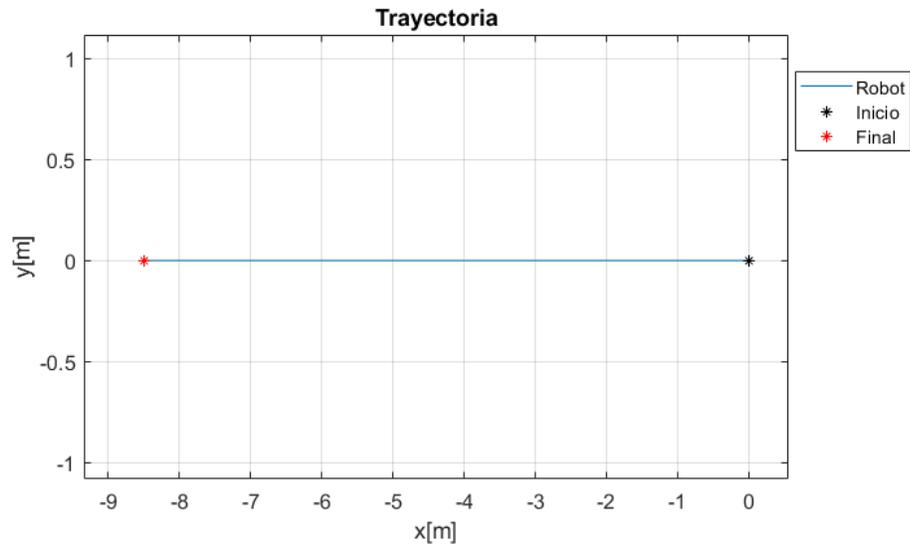


Figura 17. Trayectoria del robot tipo tracción diferencial con velocidades angulares iguales y negativas.

### 3.4.2. Velocidades angulares diferentes

Este comportamiento al igual que el anterior, tiene dos variaciones. Dependiendo de cuál velocidad sea la mayor, el robot girará hacia la derecha o izquierda. El ángulo y la velocidad de giro dependen directamente de la diferencia entre las velocidades.

En la figura 18, se puede observar que, si la rueda izquierda tiene una magnitud mayor de velocidad con respecto a la derecha ( $\omega_i = 30 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_d = 28 \text{ rad/s}$ ), el robot girará hacia la derecha, ver figura 19.

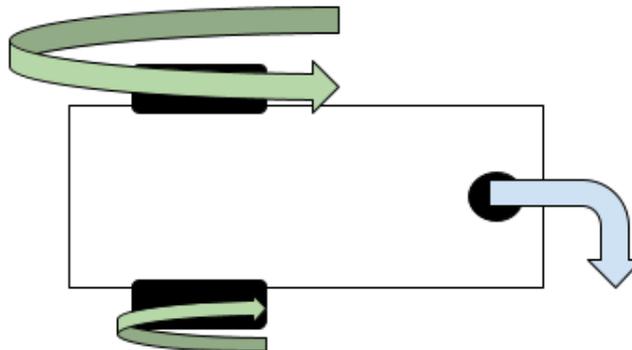
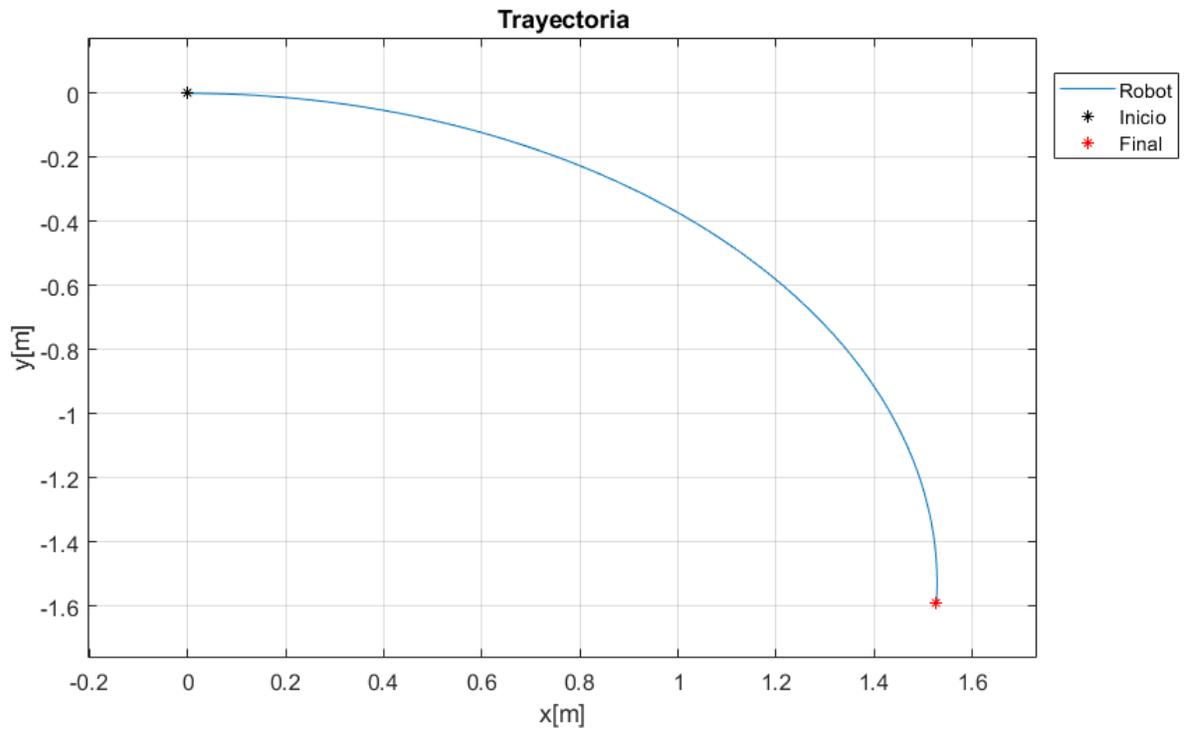
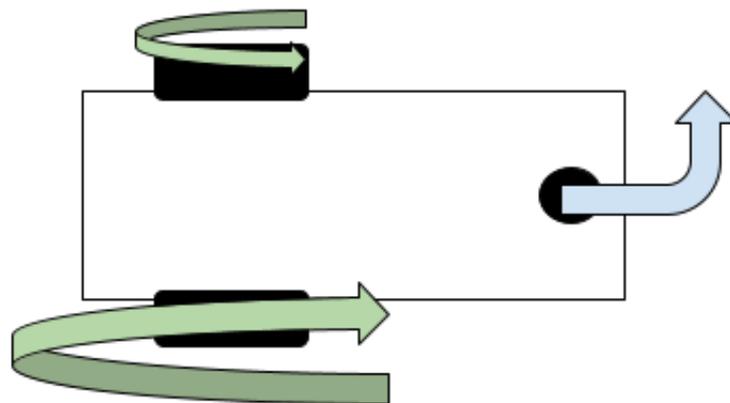


Figura 18. Comportamiento del robot tipo tracción diferencial con velocidad angular mayor en la rueda izquierda.

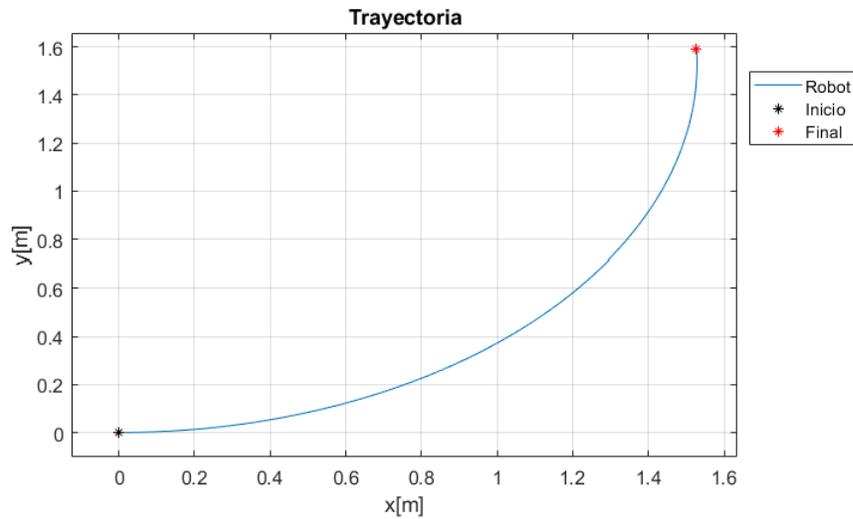


**Figura 19.** Trayectoria del robot tipo tracción diferencial con velocidad angular mayor en la rueda izquierda.

De otro modo, si la rueda derecha es la que cuenta con la velocidad angular mayor ( $\omega_i = 28 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_d = 30 \text{ rad/s}$ ), el robot girará hacia la izquierda, ver figuras 20 y 21.

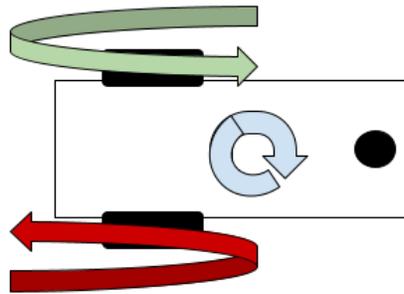


**Figura 20.** Comportamiento del robot tipo tracción diferencial con velocidad angular mayor en la rueda derecha.



**Figura 21.** Trayectoria del robot tipo tracción diferencial con velocidad angular mayor en la rueda derecha.

Ahora bien, si las velocidades angulares son una positiva y otra negativa, esto quiere decir que la velocidad de giro es mucho mayor y la dirección de giro la dictamina la rueda con mayor magnitud de velocidad. Si ambas ruedas tienen la misma magnitud, pero dirección distinta, el robot no avanza y solo gira sobre su misma posición, ver figura 22.



**Figura 22.** Comportamiento del robot tipo tracción diferencial con la misma magnitud de velocidades pero con direcciones diferentes.

### 3.5. Conclusiones del capítulo

El modelo del robot terrestre utilizado para esta tesis es sencillo de controlar, ya que sólo cuenta con dos motores que manipulan las ruedas principales y estos solo varían su dirección y velocidad. Por lo anteriormente mencionado, es un buen objeto de estudio para análisis de enjambres.

## Capítulo 4. Cuadricóptero

En este capítulo se presenta el modelo matemático del robot aéreo a utilizar, se describe en qué consiste un robot tipo cuadricóptero, ecuaciones de movimiento, el control backstepping y su comportamiento en lazo abierto.

Un cuadricóptero es un tipo de vehículo aéreo no tripulado o por sus siglas en inglés UAV (unmanned aerial vehicle), para poder elevarse y moverse en el aire consta de cuatro rotores, los cuales en su mayoría están colocados en forma de "X" o de cruz. También debe contar con sensores inerciales como acelerómetros, giroscopios, magnetómetros y altímetros, los cuales se utilizan para obtener la información necesaria con el fin de calcular la orientación en el espacio, de esta manera, con un algoritmo de control se pueden estabilizar y direccionar solo modificando las velocidades angulares de los rotores.

### 4.1. Modelo dinámico utilizando el formalismo de Euler-Lagrange

El ángulo de ataque y la posición de un cuadricóptero es básicamente la de un cuerpo rígido giratorio con seis grados de libertad. Los ángulos de Euler que representan la orientación, son expresados como  $(\phi, \theta, \psi)$ , donde,  $\phi$  es el ángulo roll alrededor del eje  $x$ ,  $\theta$  es el ángulo pitch alrededor del eje  $y$ , y  $\psi$  es el ángulo yaw alrededor del eje  $z$  como se menciona en (Swarup, 2014), ver figura 23 (Díaz, 2018) .

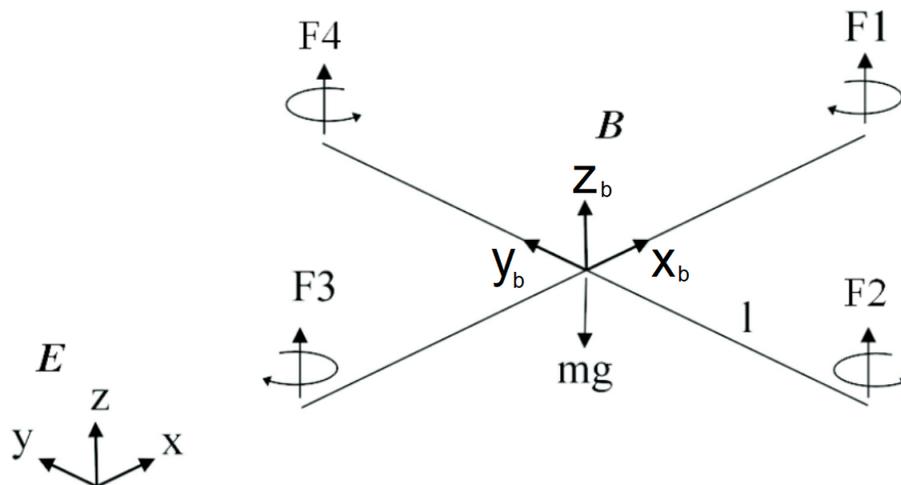


Figura 23. Diagrama del cuerpo libre de un cuadricóptero.

## 4.2. Modelo matemático del cuadricóptero

El modelo dinámico general de un cuadricóptero con los movimientos en el plano  $x, y, z$  y sus ángulos de orientación  $\phi, \theta, \psi$  ("roll", "pitch", "yaw"), se describe a continuación (Swarup, 2014).

$$\ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi}\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) - \frac{J_r}{I_x}\dot{\theta}\Omega + \frac{L}{I_x}U_2, \quad (56)$$

$$\ddot{\theta} = \dot{\phi}\dot{\psi}\left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right) + \frac{J_r}{I_y}\dot{\phi}\Omega + \frac{L}{I_y}U_3, \quad (57)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi}\dot{\theta}\left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right) + \frac{L}{I_z}U_4, \quad (58)$$

$$\ddot{z} = -g + (\cos(\phi)\cos(\theta))\frac{1}{m}U_1, \quad (59)$$

$$\ddot{x} = (\cos(\phi)\sen(\theta)\cos(\psi) + \sen(\phi)\sen(\psi))\frac{1}{m}U_1, \quad (60)$$

$$\ddot{y} = (\cos(\phi)\sen(\theta)\sen(\psi) - \sen(\phi)\cos(\psi))\frac{1}{m}U_1. \quad (61)$$

Las ecuaciones (56)-(58) hacen referencia a la orientación del cuadricóptero  $(\phi, \theta, \psi)^T$ , mientras que las ecuaciones (59)-(61) hacen referencia a la posición con respecto al origen del marco inercial  $(x, y, z)^T$ .

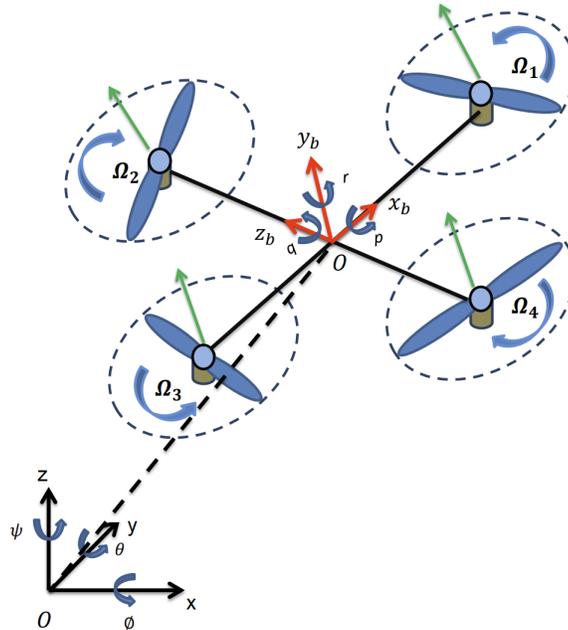


Figura 24. Cuadricóptero con respecto al marco inercial.

En la figura 24 (Díaz, 2018), se ilustra un esquema del cuadricóptero con respecto al marco inercial del origen. Las entradas del sistema están denotadas por  $U_1, U_2, U_3, U_4$ , las cuales se representan de la siguiente manera:

$$U_1 = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2), \quad (62)$$

$$U_2 = b(\Omega_4^2 - \Omega_2^2), \quad (63)$$

$$U_3 = b(\Omega_3^2 - \Omega_1^2), \quad (64)$$

$$U_4 = d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2), \quad (65)$$

$$\Omega = \Omega_2 + \Omega_4 - \Omega_1 - \Omega_3, \quad (66)$$

donde  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  y  $\Omega_4$  son las velocidades angulares de los rotores y  $\Omega$  es una perturbación.

El modelo dinámico descrito en (56)-(61) se puede reescribir en espacio de estados de la forma

$$\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, \mathbf{U}), \quad (67)$$

con el vector de estados

$$\mathbf{X} = [\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}, z, \dot{z}, x, \dot{x}, y, \dot{y}]^T, \quad (68)$$

donde

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi, & x_7 &= z, \\ x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{\phi}, & x_8 &= \dot{x}_7 = \dot{z}, \\ \\ x_3 &= \theta, & x_9 &= x, \\ x_4 &= \dot{x}_3 = \dot{\theta}, & x_{10} &= \dot{x}_9 = \dot{x}, \\ \\ x_5 &= \psi, & x_{11} &= y, \\ x_6 &= \dot{x}_5 = \dot{\psi}, & x_{12} &= \dot{x}_{11} = \dot{y}. \end{aligned} \quad (69)$$

Finalmente, de las ecuaciones (56)-(61) y (69) se obtiene el modelo dinámico del cuadricóptero en espacio de estados,

$$\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4x_6a_1 + x_4a_2\Omega + b_1U_2 \\ x_4 \\ x_2x_6a_3 + x_2a_4\Omega + b_2U_3 \\ x_6 \\ x_4x_2a_5 + b_3U_4 \\ x_8 \\ -g + \cos(x_1)\cos(x_3)\frac{1}{m}U_1 \\ x_{10} \\ u_x\frac{1}{m}U_1 \\ x_{12} \\ u_y\frac{1}{m}U_1 \end{bmatrix}, \quad (70)$$

donde

$$a_1 = \frac{I_y - I_z}{I_x}, \quad (71)$$

$$a_2 = -\frac{J_r}{I_x}, \quad (72)$$

$$a_3 = \frac{I_z - I_x}{I_y}, \quad (73)$$

$$a_4 = \frac{J_r}{I_y}, \quad (74)$$

$$a_5 = \frac{I_x - I_y}{I_z}, \quad (75)$$

$$b_1 = \frac{L}{I_x}, \quad (76)$$

$$b_2 = \frac{L}{I_y}, \quad (77)$$

$$b_3 = \frac{L}{I_z}, \quad (78)$$

$$u_x = (\cos(x_1)\sen(x_3)\cos(x_5) + \sen(x_1)\sen(x_5)), \quad (79)$$

$$u_y = (\cos(x_1)\sen(x_3)\sen(x_5) - \sen(x_1)\cos(x_5)). \quad (80)$$

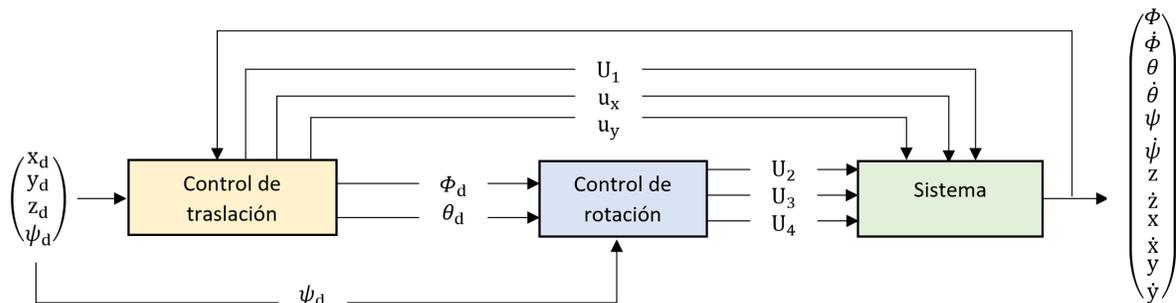
Los parámetros tomados de un robot físico para el modelo (70) se describen en la tabla 1.

**Tabla 1.** Parámetros físicos del modelo del cuadricóptero.

| Símbolo | Definición               | Valor                        |
|---------|--------------------------|------------------------------|
| $m$     | Masa                     | 0.65 kg                      |
| $I_x$   | Inercia en el eje x      | $7.5e^{-3}$ kgm <sup>2</sup> |
| $I_y$   | Inercia en el eje y      | $7.5e^{-3}$ kgm <sup>2</sup> |
| $I_z$   | Inercia en el eje z      | $1.3e^{-3}$ kgm <sup>2</sup> |
| $b$     | Coefficiente de empuje   | $3.13e^{-5}$ Ns <sup>2</sup> |
| $d$     | Coefficiente de arrastre | $7.5e^{-7}$ Nms <sup>2</sup> |
| $J_r$   | Inercia del rotor        | $6e^{-5}$ kgm <sup>2</sup>   |
| $L$     | Longitud del brazo       | 0.23 m                       |
| $g$     | Gravedad                 | 9.81 N/kg                    |

### 4.3. Control backstepping

Para lograr el control en un sistema aéreo tipo cuadricóptero, es necesario tomar en cuenta los dos subsistemas que forman el modelo representado en (70), donde el primer subsistema se encarga del desplazamiento y el segundo de la rotación, ver figura 25.



**Figura 25.** Diagrama a bloques del esquema de control del robot.

Backstepping es una técnica de control que utiliza leyes de control diseñadas con algoritmos recursivos para ciertos estados. Estos estados son llamados *entradas de control virtuales*. El primer paso para realizar el control por backstepping es definir el error de seguimiento.

$$z_1 = x_{1d} - x_1. \quad (81)$$

Después se deriva (81) para obtener

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_{1d} - \dot{x}_1. \quad (82)$$

De la ecuación (70) sabemos que  $\dot{x}_1 = x_2$ , al sustituir esto en (82) se obtiene

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_{1d} - x_2. \quad (83)$$

Ahora, se propone la siguiente función de Lyapunov

$$V(z_1) = \frac{1}{2}z_1^2. \quad (84)$$

Al derivar (84), se obtiene lo siguiente

$$\dot{V}(z_1) = z_1\dot{z}_1. \quad (85)$$

Si se sustituye (83) en (85) se obtiene

$$\dot{V}(z_1) = z_1(\dot{x}_{1d} - x_2). \quad (86)$$

Para poder estabilizar a  $z_1$ , se considera  $x_2$  como una entrada de control virtual, por lo que se obtiene

$$x_2 = \dot{x}_{1d} + \alpha_1 z_1 \quad \text{con } \alpha_1 > 0, \quad (87)$$

donde  $\alpha$  es la ganancia del control. Para obtener una derivada negativa y semi definida, se sustituye (87) en (86)

$$\dot{V}(z_1) = -\alpha_1 z_1^2. \quad (88)$$

Una vez verificado que el sistema es estable, se hace un cambio de variable

$$z_2 = x_2 - \dot{x}_{1d} - \alpha_1 z_1. \quad (89)$$

Para obtener las entradas de control se propone la siguiente función de Lyapunov

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2). \quad (90)$$

Al derivar (90) se obtiene

$$\dot{V}(z_1, z_2) = z_2(x_4 x_6 a_1 + x_4 a_2 \Omega + b_1 U_2) - z_2(\ddot{x}_{1d} - \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1)) - z_1 z_2 - \alpha_1 z_1^2 \quad (91)$$

Considerando  $\ddot{x}_{1d} = 0$  en (91) se obtiene la entrada de control  $U_2$

$$U_2 = \frac{1}{b_1}(z_1 - x_4 x_6 a_1 - x_4 a_2 \Omega - \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1) - \alpha_2 z_2) \quad (92)$$

#### 4.3.1. Traslación

Para la primera parte del control, siguiendo los pasos anteriores (81)-(92), se obtiene

$$z_7 = x_{7d} - x_7, \quad (93)$$

$$z_8 = x_8 - \dot{x}_{7d} - \alpha_8 z_7, \quad (94)$$

$$z_9 = x_{9d} - x_9, \quad (95)$$

$$z_{10} = x_{10} - \dot{x}_{9d} - \alpha_{10} z_9, \quad (96)$$

$$z_{11} = x_{11d} - x_{11}, \quad (97)$$

$$z_{12} = x_{12} - \dot{x}_{11d} - \alpha_{12} z_{11}, \quad (98)$$

$$U_1 = \frac{m}{\cos(x_1)\cos(x_3)}(z_7 + g - \alpha_7(z_8 + \alpha_7 z_7) - \alpha_8 z_8), \quad (99)$$

$$u_x = \frac{m}{U_1}(z_9 - \alpha_9(z_{10} + \alpha_9 z_9) - \alpha_{10} z_{10}), \quad (100)$$

$$u_y = \frac{m}{U_1}(z_{11} - \alpha_{11}(z_{12} + \alpha_{11} z_{11}) - \alpha_{12} z_{12}). \quad (101)$$

Para poder hacer el control de rotación, es necesario obtener los ángulos  $\phi$  y  $\theta$

$$\phi_d = \arcsen(u_x \sen(\psi_d) - u_y \cos(\psi_d)), \quad (102)$$

$$\theta_d = \arcsen\left(\frac{u_x \cos(\psi_d) + u_y \sen(\psi_d)}{\cos(\phi_d)}\right). \quad (103)$$

### 4.3.2. Rotación

Una vez teniendo el control de traslación, se puede hacer el control de rotación utilizando los pasos (81)-(92) y los valores de ángulos deseados (103) y (103) ( $\phi_d = x_{1d}$   $\theta_d = x_{3d}$   $\psi_d = x_{5d}$ ).

$$z_1 = x_{1d} - x_1, \quad (104)$$

$$z_2 = x_2 - \dot{x}_{1d} - \alpha_2 z_1, \quad (105)$$

$$z_3 = x_{3d} - x_3, \quad (106)$$

$$z_4 = x_4 - \dot{x}_{3d} - \alpha_4 z_3, \quad (107)$$

$$z_5 = x_{5d} - x_5, \quad (108)$$

$$z_6 = x_6 - \dot{x}_{5d} - \alpha_6 z_5, \quad (109)$$

$$U_2 = \frac{1}{b_1}(z_1 - x_4 x_6 a_1 - x_4 a_2 \Omega - \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1) - \alpha_2 z_2), \quad (110)$$

$$U_3 = \frac{1}{b_2}(z_3 - x_2 x_6 a_3 - x_2 a_4 \Omega - \alpha_3(z_4 + \alpha_3 z_3) - \alpha_4 z_4), \quad (111)$$

$$U_4 = \frac{1}{b_3}(z_5 - x_2 x_4 a_5 - \alpha_5(z_6 + \alpha_5 z_5) - \alpha_6 z_6). \quad (112)$$

## 4.4. Simulación del comportamiento

En comparación al robot móvil terrestre, el cuadricóptero tiene un comportamiento más complejo. Este sistema cuenta con 9 tareas básicas, éstas dependen de la velocidad angular y la dirección de giro de cada motor o hélice.

Para la simulación del sistema aéreo se puede utilizar el programa del Anexo B. Para las simulaciones se modifica únicamente las velocidades angulares ( $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  y  $\Omega_4$ ).

#### 4.4.1. Estático

Para que el cuadricóptero se mantenga en vuelo sin ascender o descender, es necesario mantener una velocidad angular igual en los cuatro motores ( $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4 = 225.678 \text{ rad/s}$ ). Esto es considerando que el cuadricóptero está bien balanceado, esta velocidad es la necesaria para evitar el descenso pero no la suficiente para una elevación, ver figuras 26 y 27.

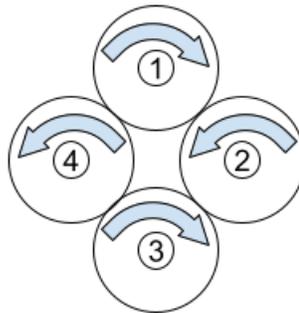


Figura 26. Cuadricóptero en vuelo estático.

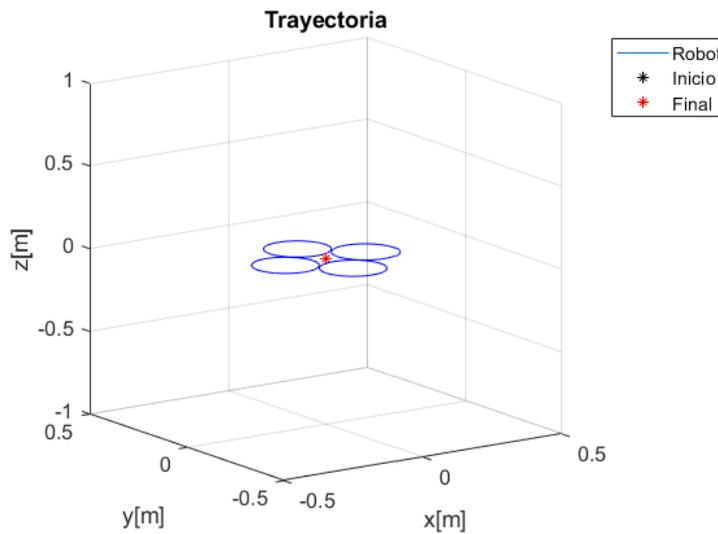


Figura 27. Trayectoria del cuadricóptero con velocidades angulares iguales.

#### 4.4.2. Ascenso

Para que el cuadricóptero pueda ascender, es necesario pasar la velocidad angular mencionada en el punto anterior, todos los motores o hélices deben mantener la misma velocidad ( $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4 = 228 \text{ rad/s}$ ) para tener una elevación correcta, ver figuras 28 y 29.

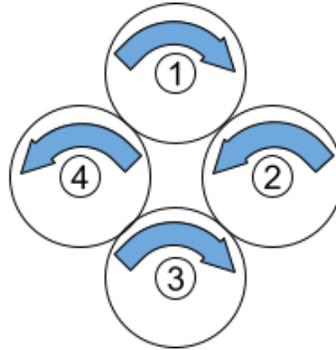


Figura 28. Cuadricóptero en ascenso.

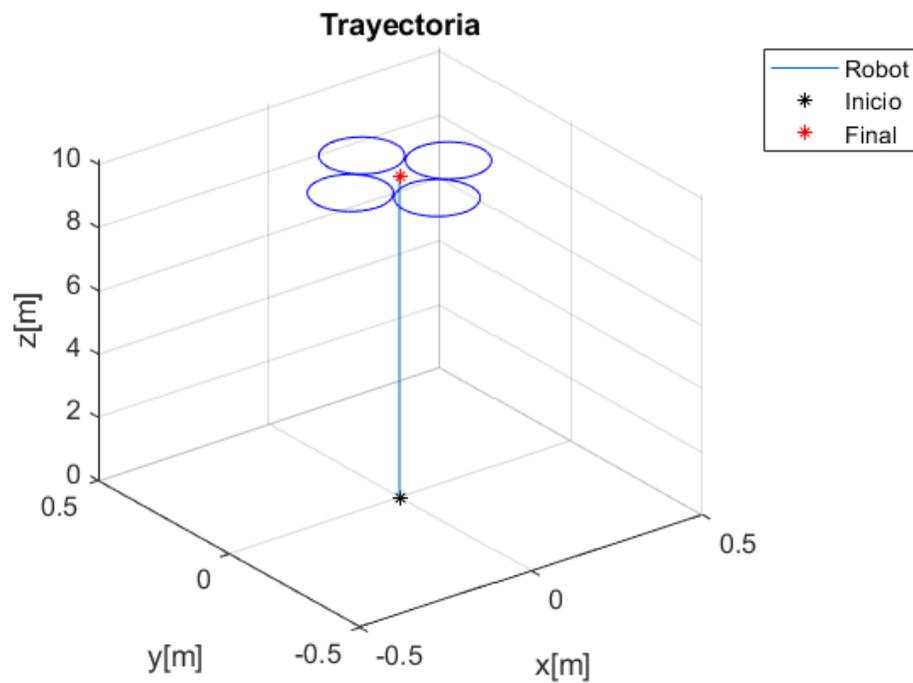


Figura 29. Trayectoria del cuadricóptero con velocidades angulares iguales y superiores al del estático.

### 4.4.3. Descenso

Para el descenso, el cuadricóptero necesita una velocidad angular inferior a la velocidad para estar en modo estático, al igual que lo anterior, es necesario tener la misma velocidad angular ( $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4 = 224 \text{ rad/s}$ ) en todos los motores, ver figuras 30 y 31.

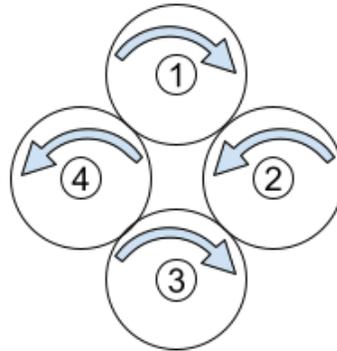


Figura 30. Cuadricóptero en descenso.

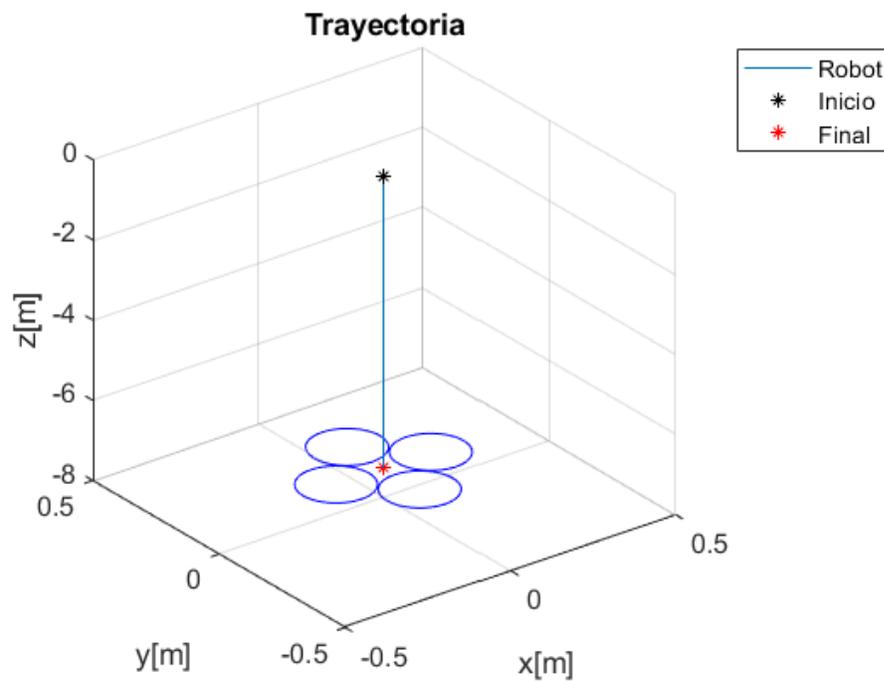


Figura 31. Trayectoria del cuadricóptero con velocidades angulares iguales e inferiores al del estático.

#### 4.4.4. Avanzar

El cuadricóptero avanza hacia adelante cuando el motor trasero mantiene una velocidad de ascenso ( $\Omega_3 = 225.68 \text{ rad/s}$ ), el motor delantero una velocidad de descenso ( $\Omega_1 = 225.677 \text{ rad/s}$ ) y los motores laterales una velocidad estática ( $\Omega_2 = \Omega_4 = 225.678 \text{ rad/s}$ ), como se muestra en las figuras 32 y 33.

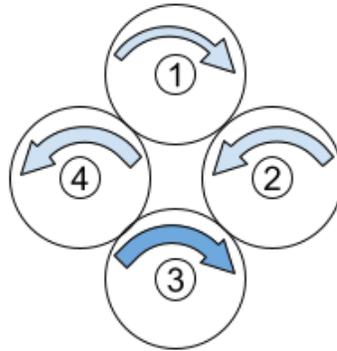


Figura 32. Cuadricóptero avanzando hacia adelante.

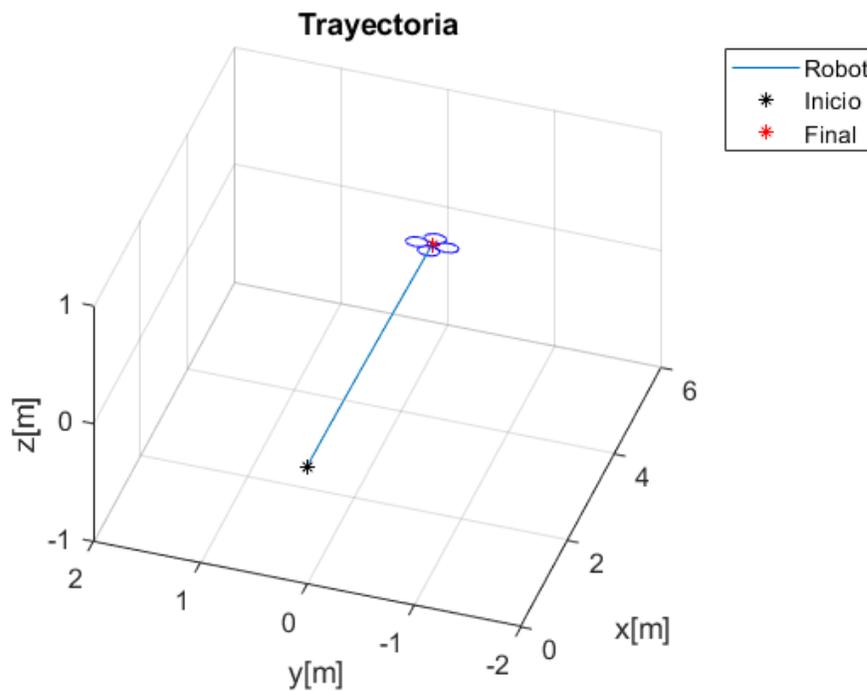


Figura 33. Trayectoria del cuadricóptero con velocidades angulares diferentes.

#### 4.4.5. Retroceder

El cuadricóptero retrocede cuando el motor trasero mantiene una velocidad de descenso ( $\Omega_3 = 225.677 \text{ rad/s}$ ), el motor delantero una velocidad de ascenso ( $\Omega_1 = 225.68 \text{ rad/s}$ ) y los motores laterales una velocidad estática ( $\Omega_2 = \Omega_4 = 225.678 \text{ rad/s}$ ), como se muestra en las figuras 34 y 35.

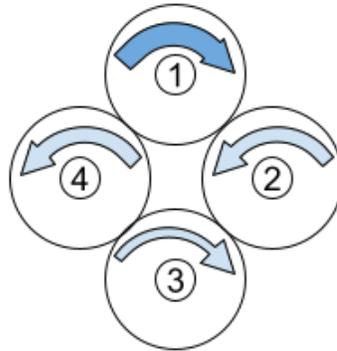


Figura 34. Cuadricóptero retrocediendo.

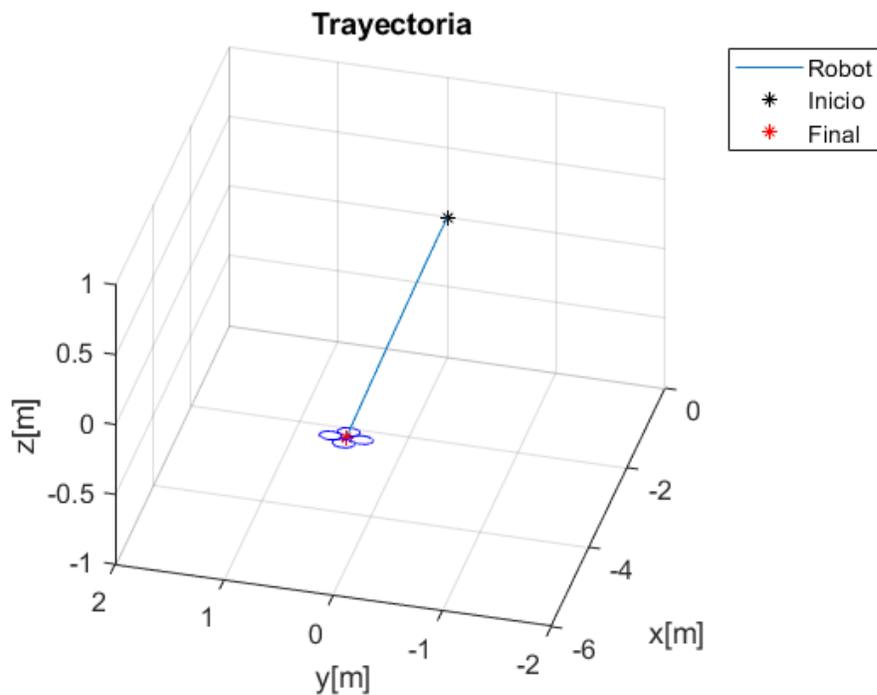


Figura 35. Trayectoria del cuadricóptero con velocidades angulares diferentes.

#### 4.4.6. Avanzar a la derecha

El cuadricóptero avanza a la derecha cuando el motor izquierdo mantiene una velocidad de ascenso ( $\Omega_4 = 225.68 \text{ rad/s}$ ), el motor derecho una velocidad de descenso ( $\Omega_2 = 225.677 \text{ rad/s}$ ) y los motores frontal y trasero una velocidad estática ( $\Omega_1 = \Omega_3 = 225.678 \text{ rad/s}$ ), como se muestra en las figuras 36 y 37.

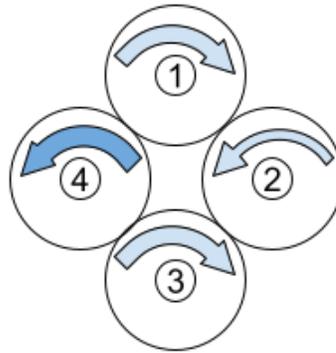


Figura 36. Cuadricóptero avanzando hacia la derecha.

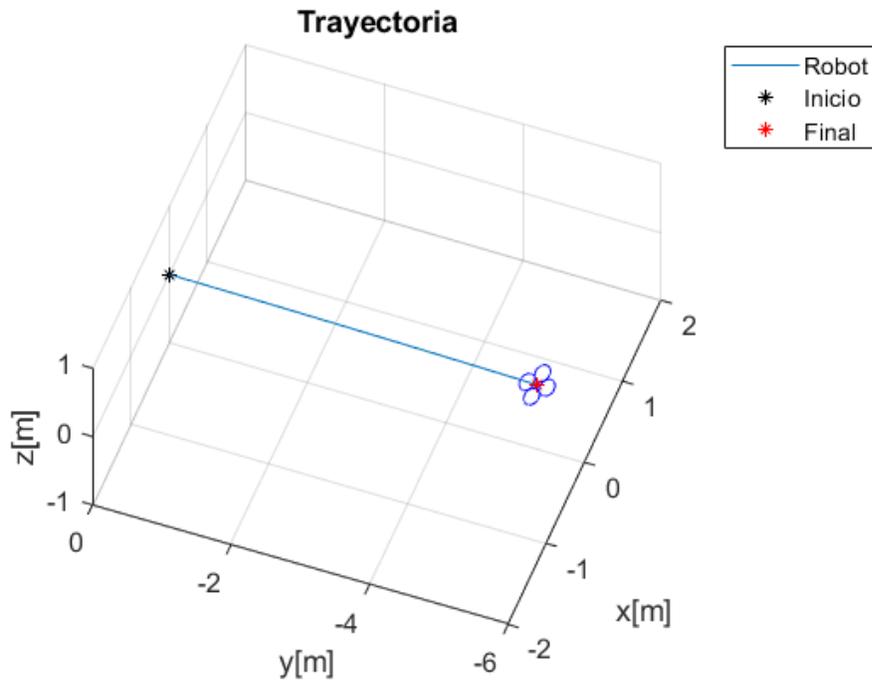


Figura 37. Trayectoria del cuadricóptero con velocidades angulares diferentes.

#### 4.4.7. Avanzar a la izquierda

El cuadricóptero avanza a la izquierda cuando el motor izquierdo mantiene una velocidad de descenso ( $\Omega_4 = 225.677 \text{ rad/s}$ ), el motor derecho una velocidad de ascenso ( $\Omega_2 = 225.68 \text{ rad/s}$ ) y los motores frontal y trasero una velocidad estática ( $\Omega_1 = \Omega_3 = 225.678 \text{ rad/s}$ ), como se muestra en las figura 38 y 39.

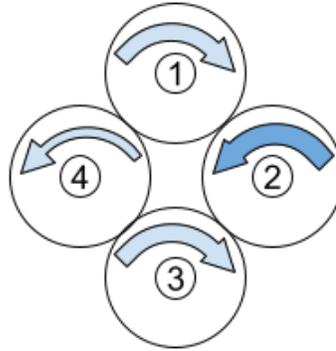


Figura 38. Cuadricóptero avanzando hacia la izquierda.

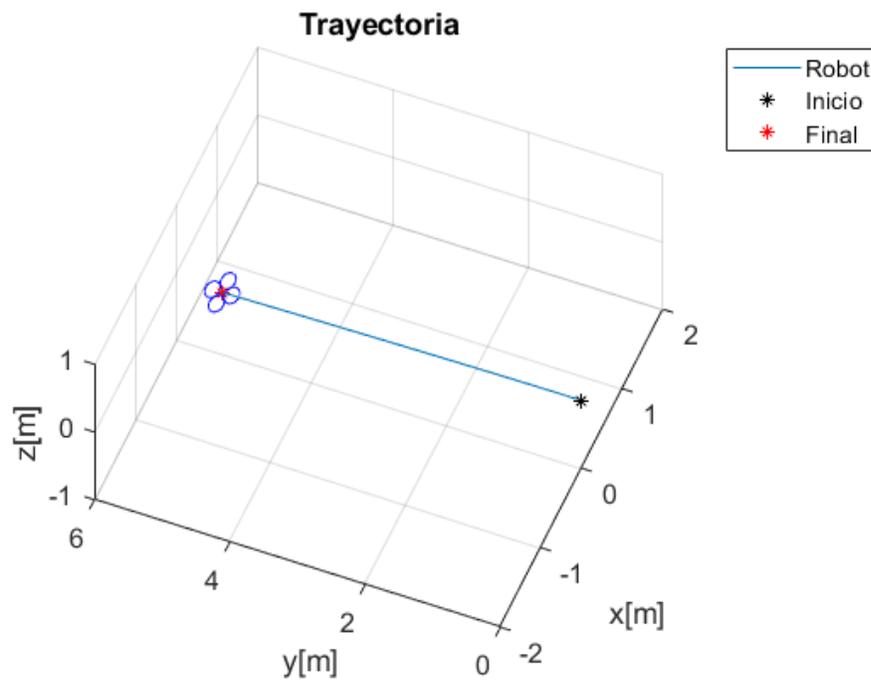


Figura 39. Trayectoria del cuadricóptero con velocidades angulares diferentes.

#### 4.4.8. Giro a la izquierda

Para que el cuadricóptero gire a la izquierda sin moverse de su lugar, los motores delantero y trasero deben tener una velocidad angular de ascenso, mientras que los motores laterales una velocidad de descenso como se muestra en la figura 40.

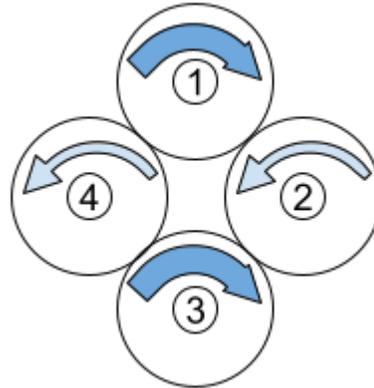


Figura 40. Cuadricóptero girando a la izquierda.

#### 4.4.9. Giro a la derecha

Ahora, si se quiere girar al cuadricóptero a la derecha sin moverse de su lugar, los motores delantero y trasero deben tener una velocidad angular de descenso, mientras que los motores laterales una velocidad de ascenso como se muestra en la figura 41.

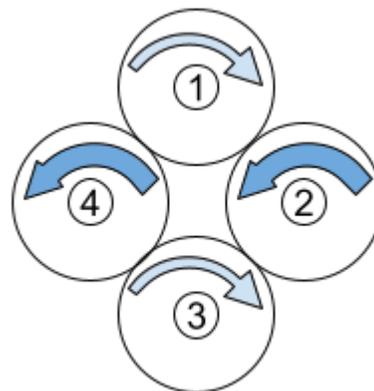


Figura 41. Cuadricóptero girando a la derecha.

## 4.5. Conclusiones del capítulo

Para controlar el sistema aéreo se analizan dos subsistemas, traslación y rotación, donde rotación es únicamente para controlar la orientación del cuadricóptero y traslación se utiliza para controlar la posición del cuadricóptero. Esto se tiene que tomar en cuenta para la sincronización y la formación, ya que solo la parte de traslación es la que se toma en cuenta.

Ahora que ya se presentaron ambos modelos matemáticos, en los siguientes capítulos se presentarán los comportamientos colectivos, tanto internos como externos.

## Capítulo 5. Sincronización

---

En este capítulo se aborda la sincronización interna de la red terrestre (robots tipo tracción diferencial) y la red aérea (robots tipo cuadricóptero). La sincronización se divide en dos tipos, la primera es para el traslado a un punto deseado y la segunda es el seguimiento de una trayectoria.

Según Piekovsky, la sincronización se puede definir como “un ajuste de los ritmos de objetos oscilantes producido por una interacción débil”, esta definición la toma de un experimento realizado por Huygens en 1665, donde cuelga un par de relojes de péndulo sobre un soporte común sostenido por un par de sillas, en este experimento se percató que al estar ambos relojes acoplados al mismo soporte estos se mueven en la misma frecuencia pero en antifase e incluso se escuchaban al mismo tiempo, ver figura 42 (Pikovsky et al., 2003).

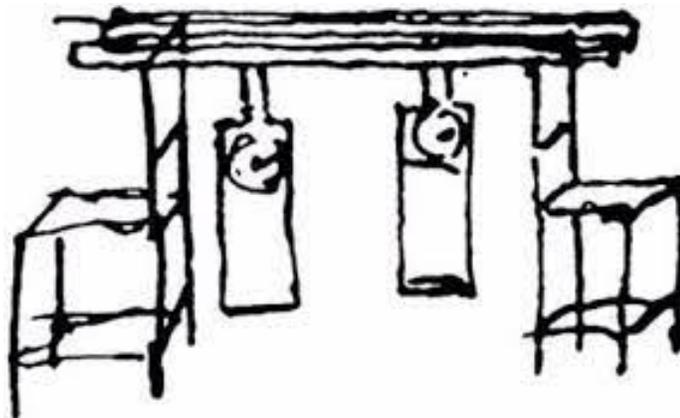


Figura 42. Bosquejo del experimento de Huygens de la sincronización entre dos relojes.

Aunque muchos trabajos se enfocan en los conceptos: objeto oscilante, ritmo, interacción y ajuste de ritmos como medio de estudio para la sincronización, esto no quiere decir que toda sincronización necesariamente implica objetos oscilantes. En la presente tesis entenderemos por sincronización al acoplamiento entre los estados de los nodos que interactúan entre sí. Uno de los enfoques para abordar este tipo de problemas es la teoría de redes complejas, este esquema teórico suele incluir herramientas de sistemas dinámicos para tratar con sistemas de muchos elementos que interactúan de forma no lineal (Pimentel, 2008).

## 5.1. Robot de tipo tracción diferencial

Para la sincronización de  $n$  robots terrestres con una topología tipo estrella dirigida, se utiliza lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^n u_{i1} = u_{i1} + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_i) + c_2(x_1 - x_i), \quad (113)$$

$$\sum_{i=1}^n u_{i2} = u_{i2} + c_3(\dot{y}_1 - \dot{y}_i) + c_4(y_1 - y_i), \quad (114)$$

donde  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  y  $c_4$  son las fuerzas de acoplamiento entre los robots.

### 5.1.1. Simulaciones

Para replicar las siguientes simulaciones se puede utilizar el código del Anexo C.

#### 5.1.1.1. Punto deseado

En la simulación numérica que se presenta a continuación se conectan cinco robots en una topología tipo estrella dirigida. Se tiene como objetivo de control llegar a un punto específico. Para la simulación se utilizaron las siguientes condiciones iniciales:

$$(x_1(0), y_1(0), \theta_1(0), \xi_1(0)) = (2.448, 2.2279, 3.2315, 0.01),$$

$$(x_2(0), y_2(0), \theta_2(0), \xi_2(0)) = (3.546, 3.7734, 1.38, 0.01),$$

$$(x_3(0), y_3(0), \theta_3(0), \xi_3(0)) = (3.398, 3.275, 0.813, 0.01),$$

$$(x_4(0), y_4(0), \theta_4(0), \xi_4(0)) = (0.594, 2.491, 4.798, 0.01),$$

$$(x_5(0), y_5(0), \theta_5(0), \xi_5(0)) = (1.701, 2.9263, 1.119, 0.01),$$

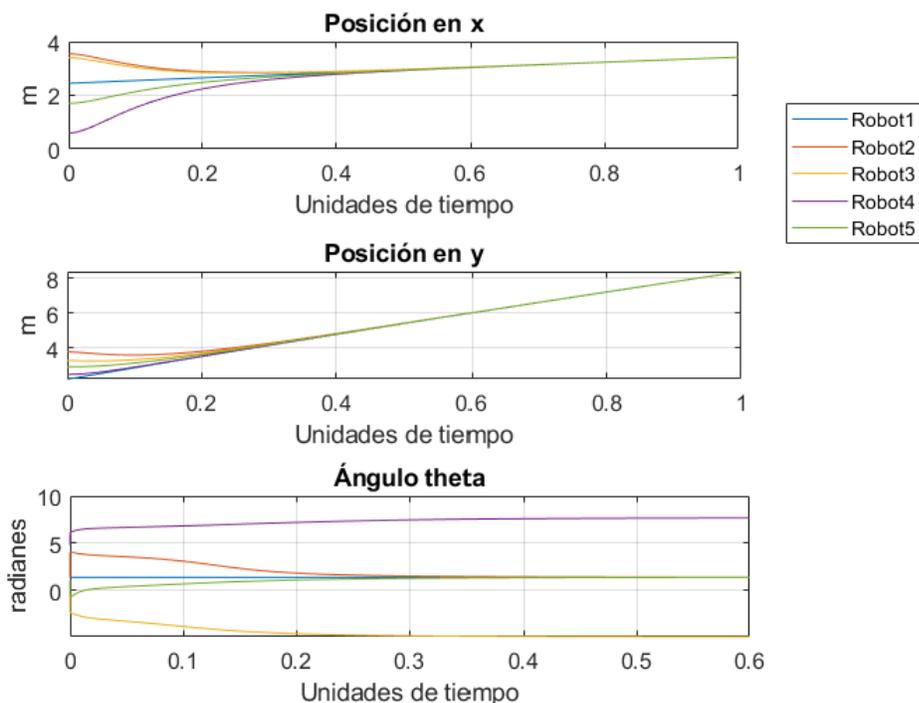
$$c_1 = c_3 = 290 \quad , \quad c_2 = c_4 = 40,$$

$$r = 0.017,$$

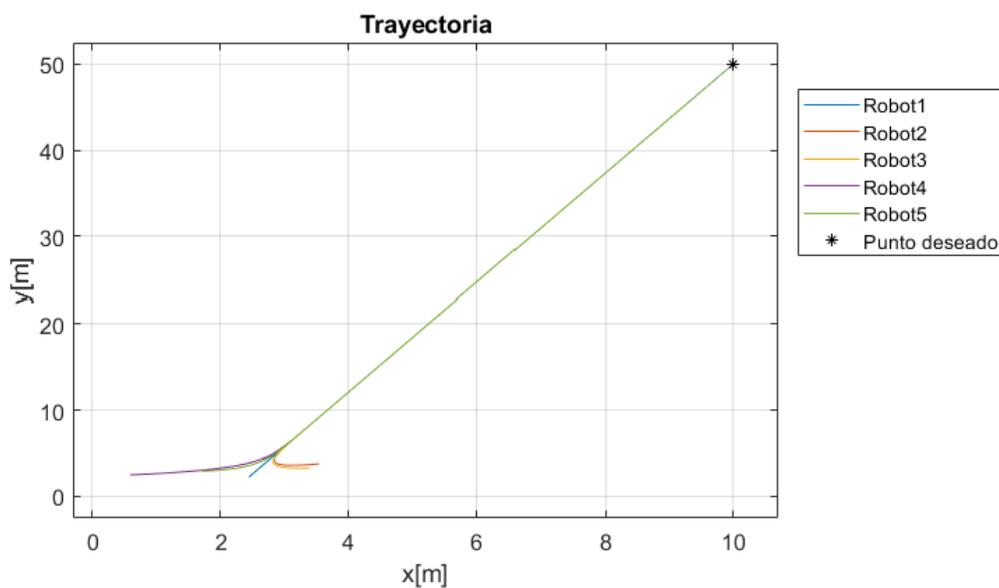
$$L = 0.1054,$$

$$(X_d, Y_d) = (10, 50).$$

En la figura 43 se puede observar una comparación entre los cinco robots terrestres de los tres estados ( $x$ ,  $y$  y  $\theta$ ), estas gráficas están ampliadas para observar con mayor facilidad el cambio de cuando están dispersados a cuando están sincronizados. La trayectoria que recorrieron los robots está plasmada en la figura 44, en esta se puede observar como pasaron de estar en reposo en posiciones distintas a terminar en el mismo punto.



**Figura 43.** Estados de los 5 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación.



**Figura 44.** Plano de fase ( $x$ ,  $y$ ) de los 5 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación.

### 5.1.1.2. Seguimiento de trayectoria

En la simulación numérica que se presenta a continuación se conectaron cinco robots en una topología en estrella dirigida. Se tiene como objetivo de control seguir una trayectoria tipo senoidal. Para la simulación se utilizaron las siguientes condiciones iniciales:

$$(x_1(0), y_1(0), \theta_1(0), \xi_1(0)) = (1.7499, 0.9829, 1.2554, 0.01),$$

$$(x_2(0), y_2(0), \theta_2(0), \xi_2(0)) = (3.08, 2.366, 1.7582, 0.01),$$

$$(x_3(0), y_3(0), \theta_3(0), \xi_3(0)) = (4.1541, 2.926, 2.7486, 0.01),$$

$$(x_4(0), y_4(0), \theta_4(0), \xi_4(0)) = (4.5859, 1.4291, 3.786, 0.01),$$

$$(x_5(0), y_5(0), \theta_5(0), \xi_5(0)) = (3.7686, 1.902, 2.839, 0.01),$$

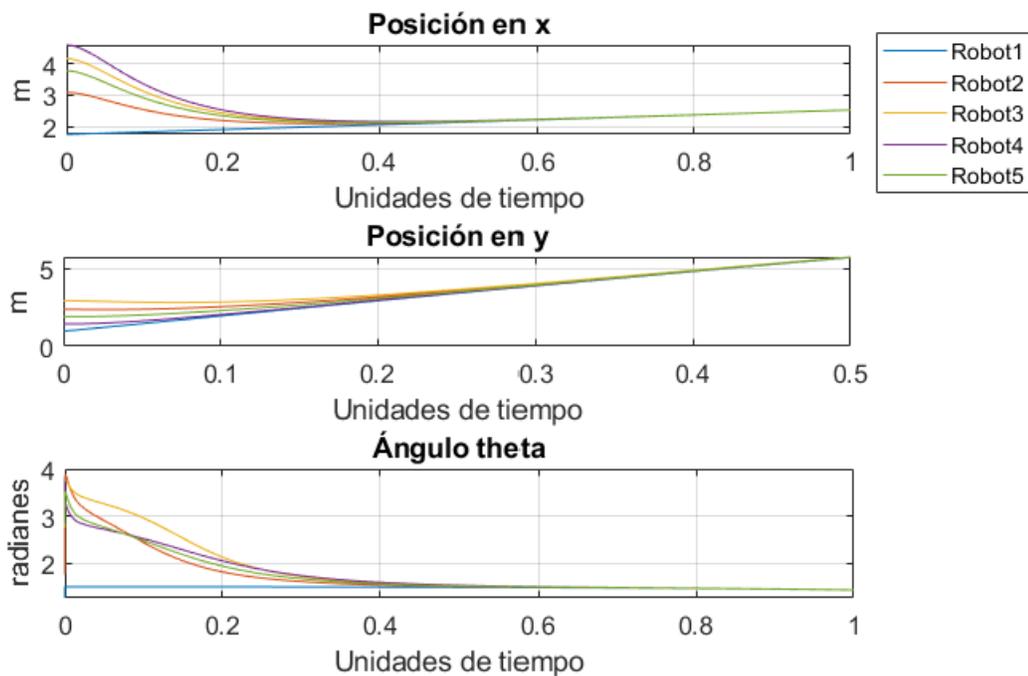
$$c_1 = c_3 = 290,$$

$$c_2 = c_4 = 40,$$

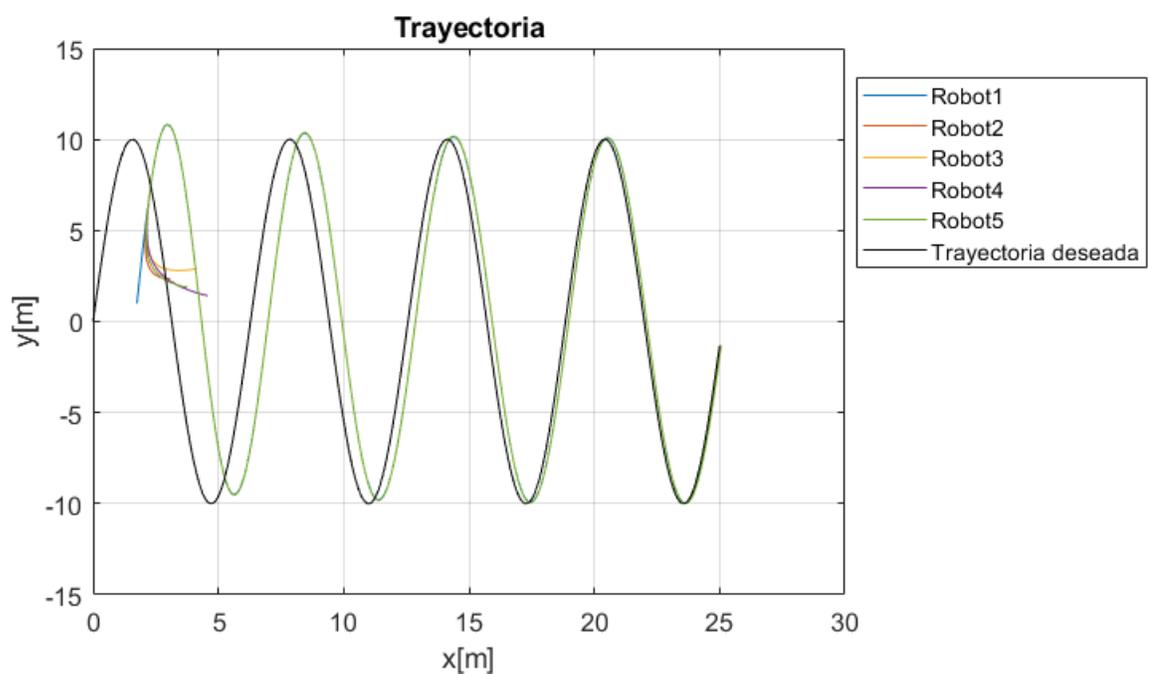
$$r = 0.017,$$

$$L = 0.1054,$$

$$(X_d, Y_d) = (t, 10 * \text{sen}(t)).$$

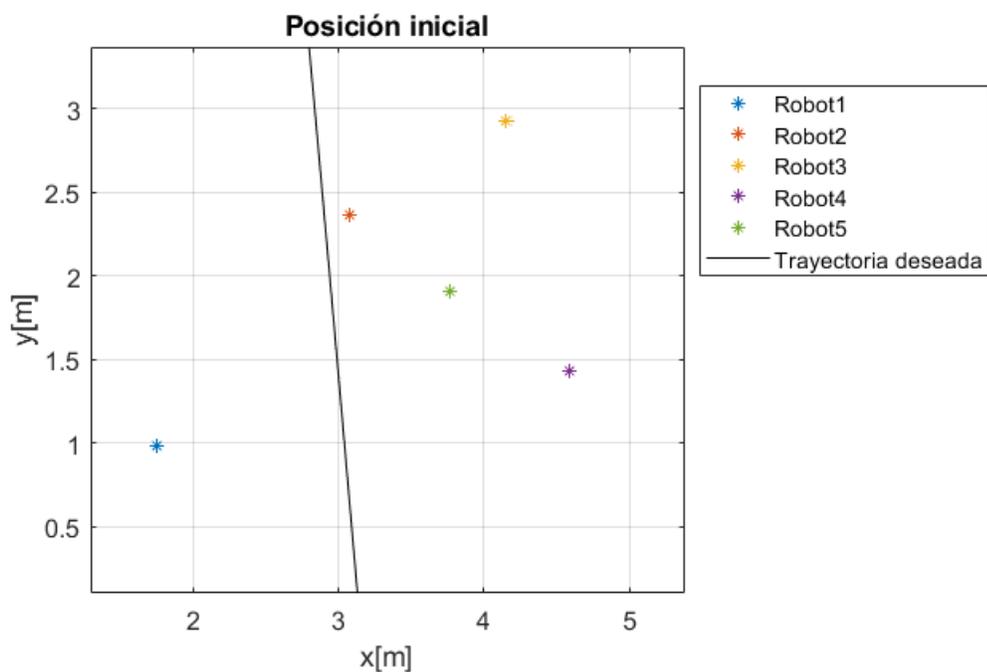


**Figura 45.** Estados de los 5 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de seguimiento de trayectoria.

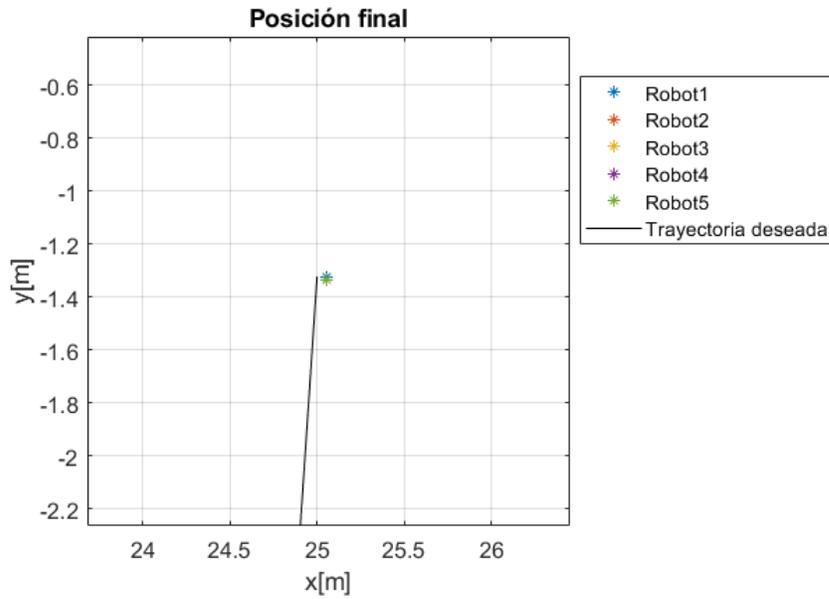


**Figura 46.** Plano de fase  $(x, y)$  de los 5 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de seguimiento de trayectoria.

En la figura 45 se puede observar que para el tiempo 0.4, los cinco robots ya tienen una armonía en la sincronización en los tres estados. Ahora bien, en la figura 46 se observa la trayectoria que siguen en sincronización.



**Figura 47.** Posición inicial de 5 robots en un plano siguiendo una trayectoria.



**Figura 48.** Posición final de 5 robots en un plano siguiendo una trayectoria.

En la figura 47 se tienen las posiciones iniciales de los cinco robots y en la figura 48 la posición final después de sincronizarse y seguir la trayectoria dada.

## 5.2. Cuadricóptero

Para la sincronización de  $n$  robots aéreos con una topología tipo estrella dirigida, se utiliza lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^n z_{i7} = z_{i7} + x_{17} - x_{i7}, \quad (115)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{i8} = z_{i8} - x_{18} + x_{i8} - \alpha_8 z_{i7} \quad (116)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{i9} = z_{i9} + x_{19} - x_{i9}, \quad (117)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{i10} = z_{i10} - x_{110} + x_{i10} - \alpha_{10} z_{i9}, \quad (118)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{i11} = z_{i11} + x_{111} - x_{i11}, \quad (119)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{i12} = z_{i12} - x_{112} + x_{i12} - \alpha_{12} z_{i11}, \quad (120)$$

donde  $\alpha_8$ ,  $\alpha_{10}$  y  $\alpha_{12}$  son la fuerza de acoplamiento.

### 5.2.1. Simulaciones

Para replicar las siguientes simulaciones se puede utilizar el código del Anexo D.

#### 5.2.1.1. Punto deseado

En la simulación numérica que se presenta a continuación se conectaron nueve robots en una topología en estrella dirigida. Se tiene como objetivo de control llegar a un punto específico. Para la simulación se utilizaron las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
 (x_1(0), y_1(0), z_1(0), \psi_1(0)) &= (7.15, 8.77, 2.7637, 0.42), \\
 (x_2(0), y_2(0), z_2(0), \psi_2(0)) &= (5.85, 4.17, 4.3580, 0.22), \\
 (x_3(0), y_3(0), z_3(0), \psi_3(0)) &= (5.07, 12.49, 3.0072, 0.29), \\
 (x_4(0), y_4(0), z_4(0), \psi_4(0)) &= (6.93, 6.77, 5.2975, 0.98), \\
 (x_5(0), y_5(0), z_5(0), \psi_5(0)) &= (7.84, 8.18, 4.3363, 0.10), \\
 (x_6(0), y_6(0), z_6(0), \psi_6(0)) &= (9.25, 17.83, 5.2710, 0.26), \\
 (x_7(0), y_7(0), z_7(0), \psi_7(0)) &= (6.75, 2.40, 3.701, 0.31), \\
 (x_8(0), y_8(0), z_8(0), \psi_8(0)) &= (3.29, 5.21, 3.6915, 0.09), \\
 (x_9(0), y_9(0), z_9(0), \psi_9(0)) &= (6.78, 10.47, 4.7838, 0.69), \\
 \alpha_1 \cdots \alpha_{12} &= 80, \\
 \Omega &= 0, \\
 (X_d, Y_d, Z_d, \Psi_d) &= (10, 15, 5, 0).
 \end{aligned}$$

En la figura 49 se puede observar la comparación entre los seis estados de los nueve robots aéreos, para el tiempo 0.3 todos los estados empiezan a tener armonía en la sincronización. En la figura 50 se observa la trayectoria recorrida de los nueve robots para llegar al punto deseado de forma sincronizada, en las

figuras 51 y 52 se puede observar como iniciaron y como terminaron los robots respectivamente.

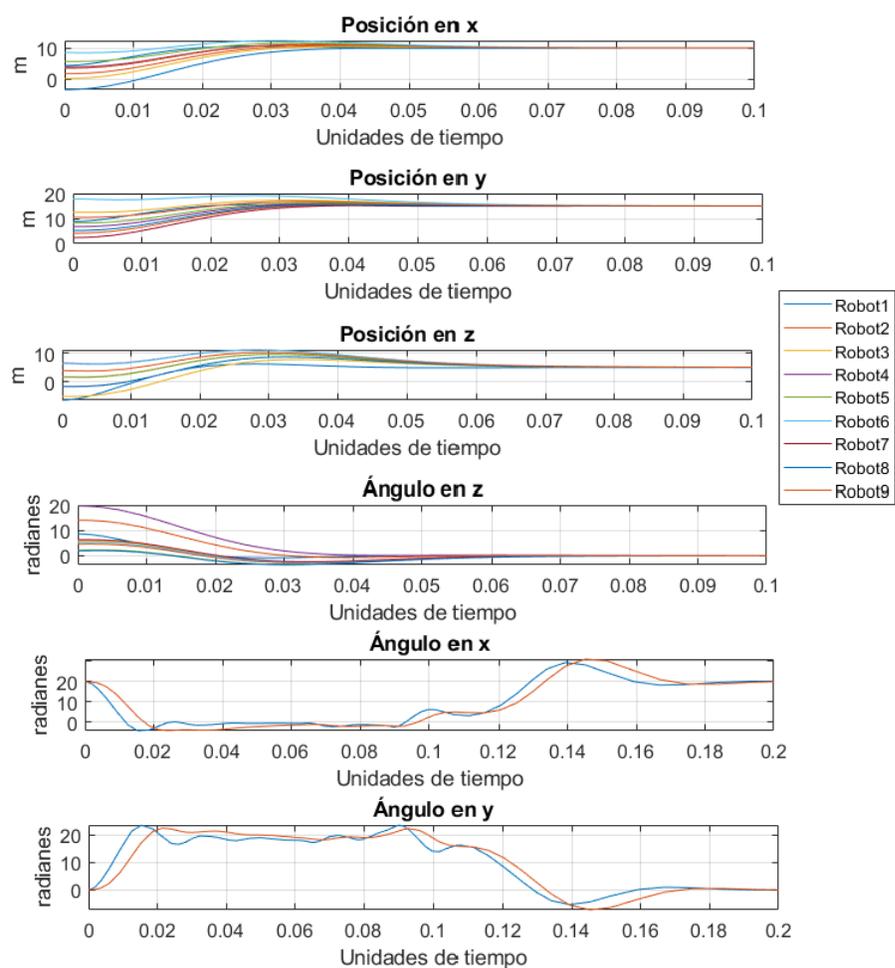


Figura 49. Estados de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación.

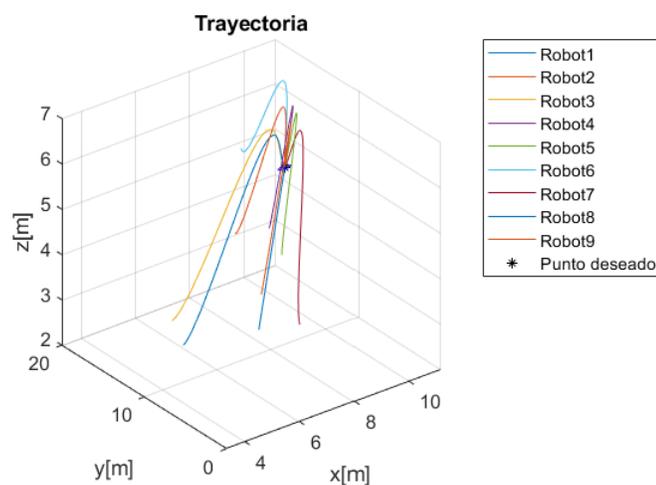


Figura 50. Plano de fase  $(x, y, z)$  de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación.

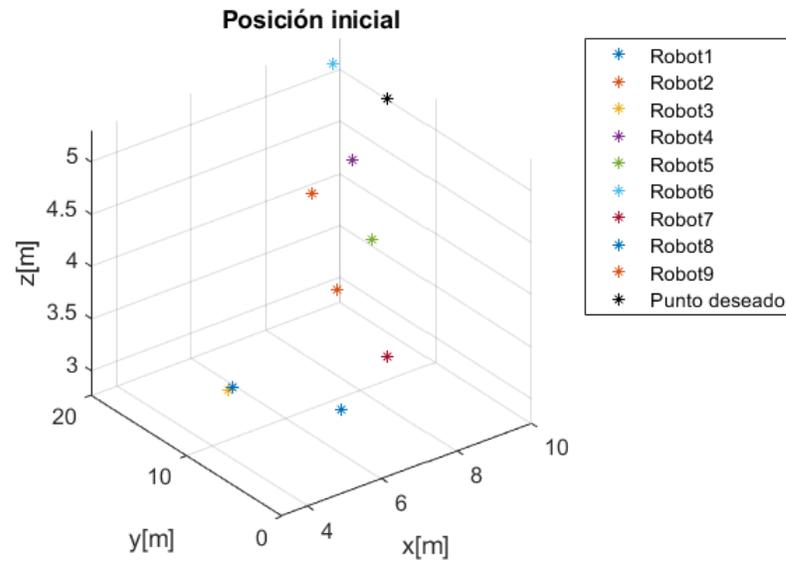


Figura 51. Posición inicial de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación.

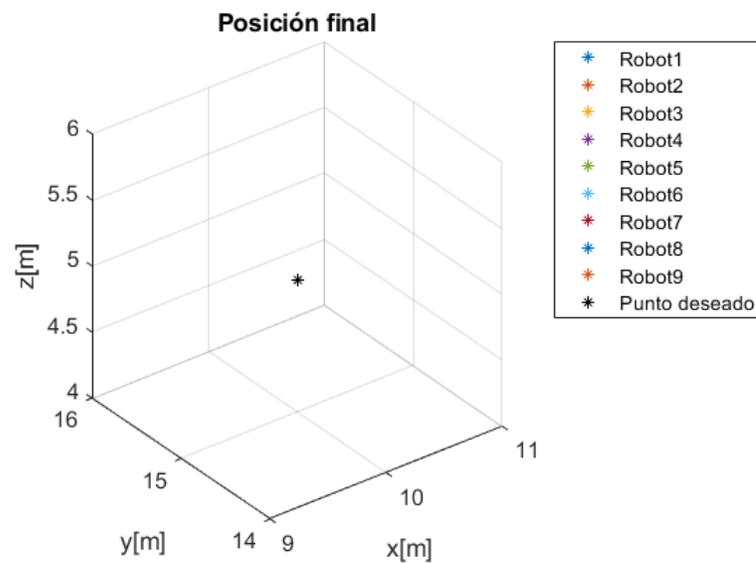


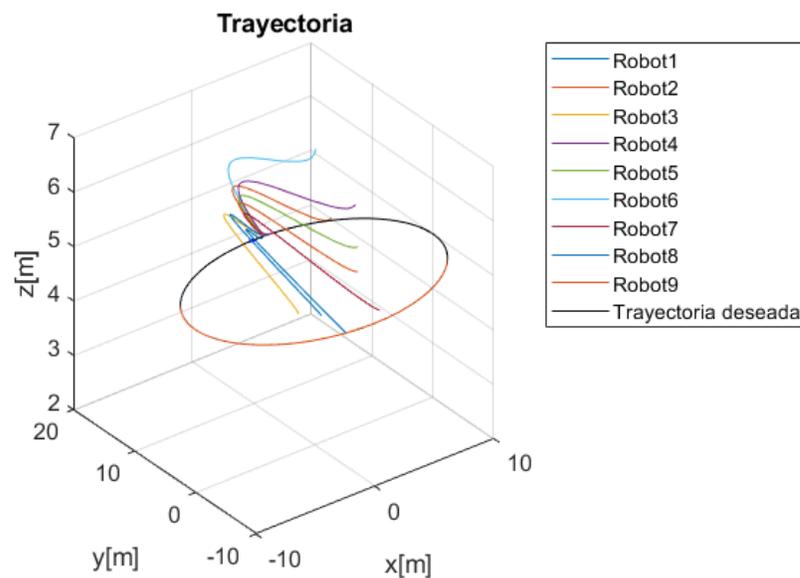
Figura 52. Posición final de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación.

### 5.2.1.2. Seguimiento de trayectoria

En la simulación numérica que se presenta a continuación se conectaron nueve robots en una topología en estrella dirigida. Se tiene como objetivo de control seguir una trayectoria tipo círculo. Para la simulación se utilizaron las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
(x_1(0), y_1(0), z_1(0), \psi_1(0)) &= (7.15, 8.77, 2.7637, 0.42), \\
(x_2(0), y_2(0), z_2(0), \psi_2(0)) &= (5.85, 4.17, 4.3580, 0.22), \\
(x_3(0), y_3(0), z_3(0), \psi_3(0)) &= (5.07, 12.49, 3.0072, 0.29), \\
(x_4(0), y_4(0), z_4(0), \psi_4(0)) &= (6.93, 6.77, 5.2975, 0.98), \\
(x_5(0), y_5(0), z_5(0), \psi_5(0)) &= (7.84, 8.18, 4.3363, 0.10), \\
(x_6(0), y_6(0), z_6(0), \psi_6(0)) &= (9.25, 17.83, 5.2710, 0.26), \\
(x_7(0), y_7(0), z_7(0), \psi_7(0)) &= (6.75, 2.40, 3.701, 0.31), \\
(x_8(0), y_8(0), z_8(0), \psi_8(0)) &= (3.29, 5.21, 3.6915, 0.09), \\
(x_9(0), y_9(0), z_9(0), \psi_9(0)) &= (6.78, 10.47, 4.7838, 0.69), \\
\alpha_1 \cdots \alpha_{12} &= 80, \\
\Omega &= 0, \\
(X_d, Y_d, Z_d, \Psi_d) &= (10\text{sen}(\frac{2\pi i}{5}), 10\text{sen}(\frac{2\pi i}{5} + \frac{\pi i}{2}), 5, 0).
\end{aligned}$$

En la figura 53 se observa la trayectoria recorrida de los nueve robots de forma sincronizada. En la figura 54 se puede observar la comparación entre los seis estados de los nueve robots aéreos, para el tiempo 0.4 todos los estados empiezan a tener armonía en la sincronización. Y en las figuras 55 y 56 se puede observar como iniciaron y como terminaron los robots respectivamente.



**Figura 53.** Plano de fase  $(x, y, z)$  de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de seguimiento de trayectoria.

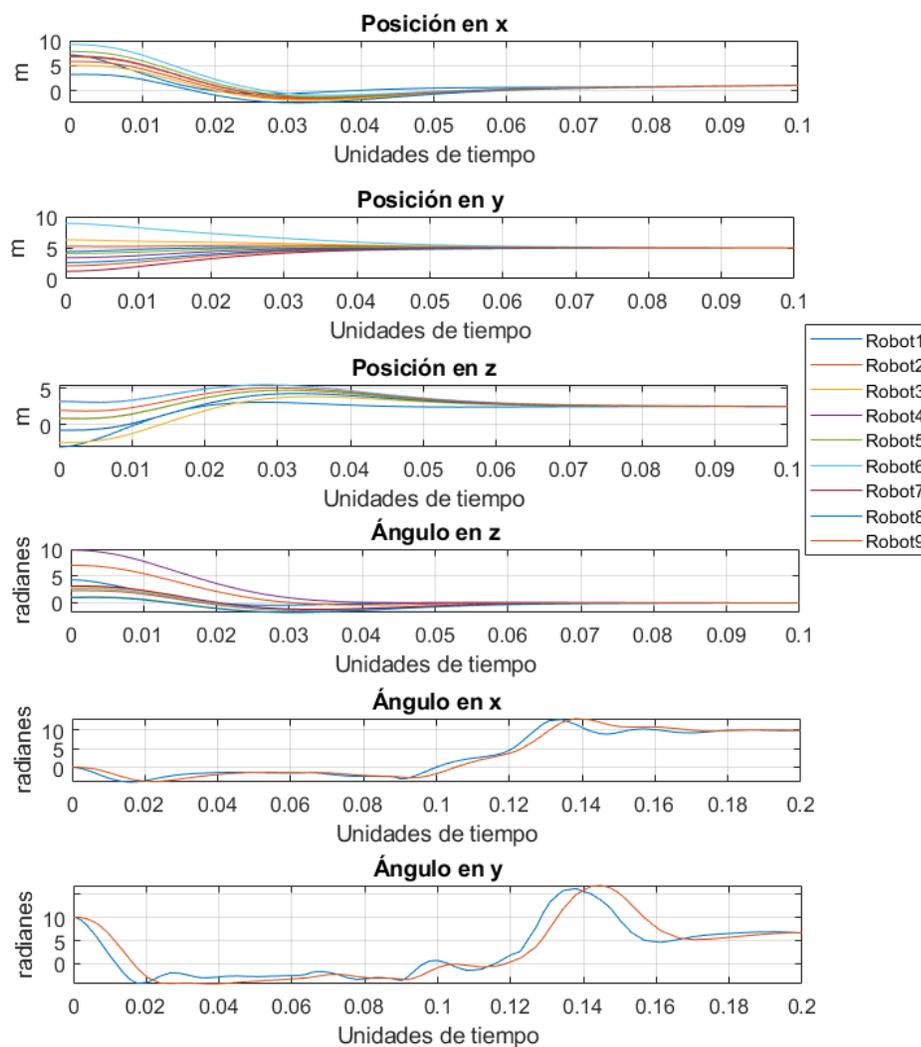


Figura 54. Estados de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de seguimiento de trayectoria.

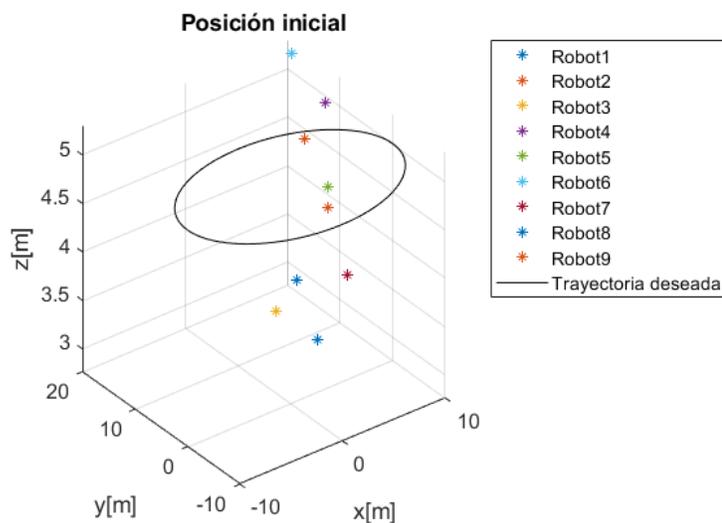
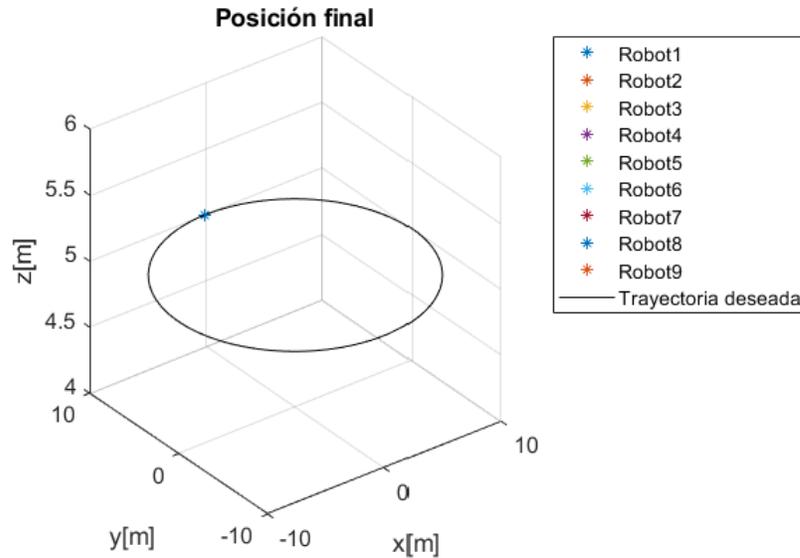


Figura 55. Posición inicial de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de seguimiento de trayectoria.



**Figura 56.** Posición final de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de seguimiento de trayectoria.

### 5.3. Conclusiones del capítulo

La sincronización interna tanto en los robots terrestres como en los robots aéreos tienen una eficiencia parecida, solo varía 0.02 unidades de tiempo entre uno y otro para llegar a una sincronización completa (amplitudes de error menores a 0.3), siendo los terrestres los que tienen una reacción superior.

Este comportamiento colectivo solo puede ser teórico y simulado numéricamente, ya que físicamente es imposible que dos cuerpos estén exactamente en el mismo lugar al mismo tiempo, en esta tesis se utiliza el análisis de la sincronización completa con el fin de verificar que todos los esclavos sigan estrictamente al maestro y así establecer la base para realizar la formación de manera correcta.

## Capítulo 6. Formación

---

En este capítulo se realiza la formación interna de la red terrestre (robots tipo tracción diferencial) y la red aérea (robots tipo cuadricóptero). De igual manera, se presenta el diseño de una etapa anticollisiones utilizada en cada una de las redes internas.

La formación es una versión más compleja de la sincronización, ya que comparten muchas características entre sí, pero la formación, como su nombre lo dice, tiene la particularidad de mantener un orden específico. En la naturaleza se puede observar comportamiento de formación, tal como los cardúmenes de peces, estos usan ciertas formaciones para verse como un pez más grande y así evitar el ataque de depredadores, ver figura 57.



**Figura 57.** Formación de un cardumen de peces.

Para lograr una formación exitosa se requiere de cierta comunicación entre todos los nodos involucrados, ya que solo se logra con la unión de todas las partes.

### 6.1. Robot de tipo tracción diferencial

Para la formación de  $n$  robots terrestres con una topología tipo estrella dirigida, se utiliza lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^n u_{i1} = u_{i1} + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_i) + c_2(x_1 - x_i) + \delta_{ix}(x_1 - x_i + \Delta_{ix}), \quad (121)$$

$$\sum_{i=1}^n u_{i2} = u_{i2} + c_3(\dot{y}_1 - \dot{y}_i) + c_4(y_1 - y_i) + \delta_{iy}(y_1 - y_i + \Delta_{iy}), \quad (122)$$

donde  $\Delta_{ix}$  y  $\Delta_{iy}$  son las distancias esperadas en  $X$  y  $Y$  para la formación,  $\delta_{ix}$  y  $\delta_{iy}$  son los coeficientes de repulsión, los cuales pueden tomar dos valores

$$\delta_{ix,iy} = \begin{cases} 0, & \text{si } |x_1 - x_i| > \Delta_{ix,iy} \\ \delta, & \text{si } |x_1 - x_i| \leq \Delta_{ix,iy} \end{cases}. \quad (123)$$

### 6.1.1. Simulaciones

Para replicar las siguientes simulaciones se puede utilizar el código del Anexo C.

En la simulación que se presenta a continuación se conectaron cinco robots en una topología en estrella dirigida. Se tiene como objetivo de control seguir una trayectoria tipo senoidal de forma coordinada y evitar colisiones manteniendo una distancia mínima de 0.5m entre los robots. Para la simulación se utilizaron las siguientes condiciones iniciales:

$$(x_1(0), y_1(0), \theta_1(0), \xi_1(0)) = (0.2920, 1.3317, 0.0155, 0.01),$$

$$(x_2(0), y_2(0), \theta_2(0), \xi_2(0)) = (0.4841, 3.8672, 0.1062, 0.01),$$

$$(x_3(0), y_3(0), \theta_3(0), \xi_3(0)) = (0.0724, 1.1981, 0.4897, 0.01),$$

$$(x_4(0), y_4(0), \theta_4(0), \xi_4(0)) = (0.4395, 4.1516, 0.9203, 0.01),$$

$$(x_5(0), y_5(0), \theta_5(0), \xi_5(0)) = (0.6527, 0.4379, 0.2691, 0.01),$$

$$\delta_{2x} = \delta_{3x} = \delta_{4x} = \delta_{5x} = 5000,$$

$$\delta_{2y} = \delta_{3y} = \delta_{4y} = \delta_{5y} = 5000,$$

$$r_{21} = r_{31} = r_{41} = r_{51} = 10,$$

$$r_{12} = r_{32} = r_{42} = r_{52} = 10,$$

$$r_{13} = r_{23} = r_{43} = r_{53} = 10,$$

$$r_{14} = r_{24} = r_{34} = r_{54} = 10,$$

$$r_{15} = r_{25} = r_{35} = r_{45} = 10,$$

$$c_1 = c_3 = 290,$$

$$c_2 = c_4 = 40,$$

$$m = 0.5,$$

$$r = 0.017,$$

$$L = 0.1054,$$

$$(X_d, Y_d) = \left(t, 10 * \text{sen}\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$

Distancias esperadas para la formación de los cinco robots en una forma cuadrada:

$$\Delta_{12x} = \Delta_{14x} = -0.5 \quad \Delta_{12y} = \Delta_{13y} = 0.5,$$

$$\Delta_{13x} = \Delta_{15x} = 0.5, \quad \Delta_{15y} = \Delta_{15y} = -0.5.$$

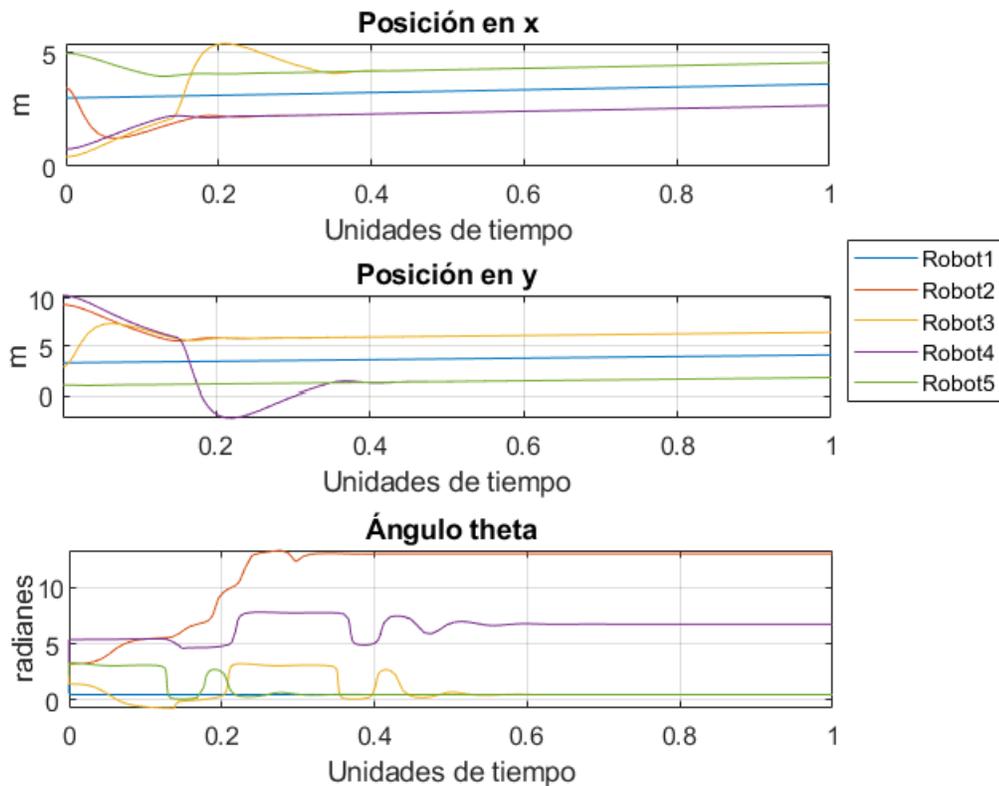
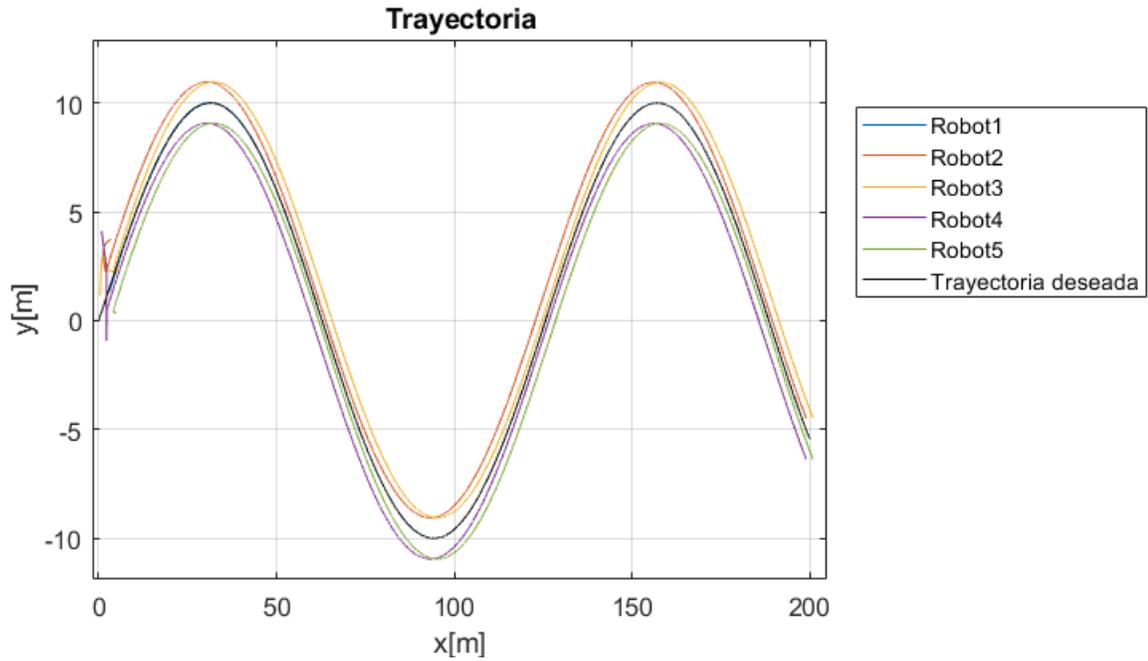
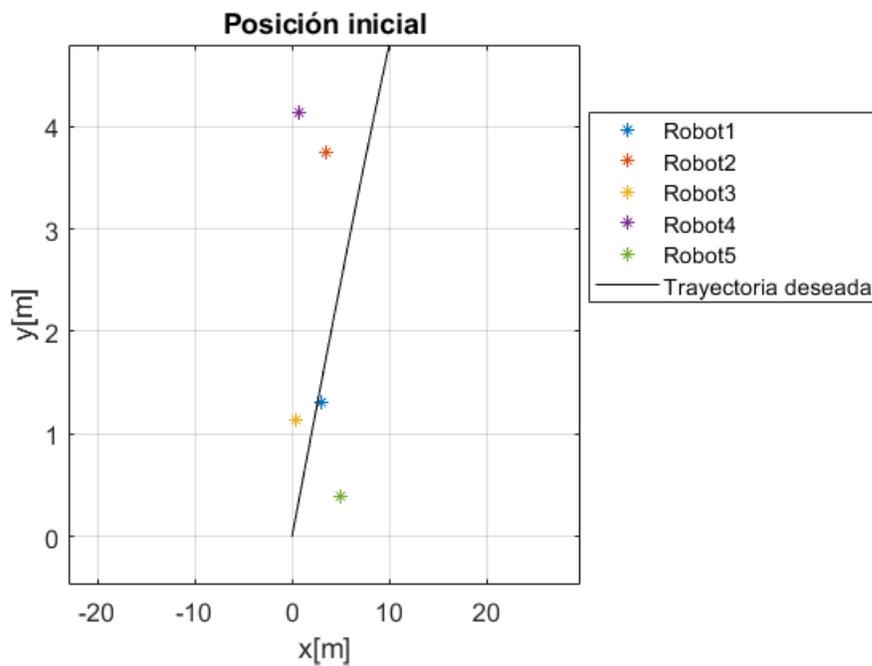


Figura 58. Estados de los 5 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación.

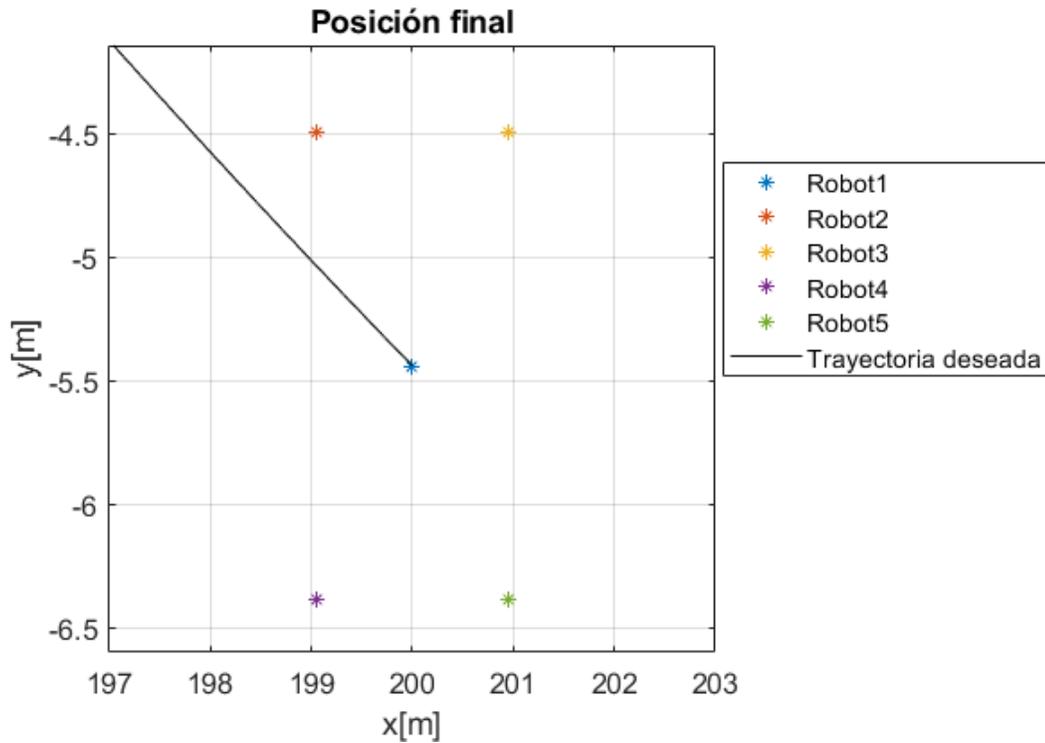


**Figura 59.** Plano de fase  $(x, y)$  de los 5 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación.

En la figura 58 se observa la comparación entre los cinco robots terrestres de los tres estados  $(x, y \text{ y } \theta)$ . Basado en estas gráficas, se puede decir que la formación completa se logra después de 0.5 unidades de tiempo. En la figura 59 se observa el seguimiento de una trayectoria dada de los cinco robots de manera formada.



**Figura 60.** Posición inicial de los 5 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación.



**Figura 61.** Posición final de los 5 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación.

La posición inicial para los cinco robots es diferente para simular una dispersión entre ellos y demostrar que se puede hacer una formación sin importar de la posición inicial, ver figura 60. Al terminar la formación y el seguimiento de la trayectoria, se termina con una posición deseada, en este caso es un tipo cuadrado, donde el centro es el maestro, ver figura 61.

Ahora, para comprobar que las simulaciones se pueden hacer para grandes cantidades de robots, se simuló 110 robots, para esta simulación fue necesario agregar de manera aleatoria los valores iniciales, estos valores están dentro del rango de 0 y 5, esto con la finalidad de que todos iniciaran en diferentes puntos del plano.

Para su formación, se utilizó una forma tipo cuadrada, simulando el llenado de una matriz para mayor facilidad de formación para gran cantidad de robots.

La trayectoria a seguir, tiene el siguiente comportamiento  $(X_d, Y_d) = (t, 10 * \text{sen}(\frac{t}{10}))$ . Con excepción de lo antes mencionado, todas las variables para la simulación fueron las mismas que para la simulación de 5 robots.

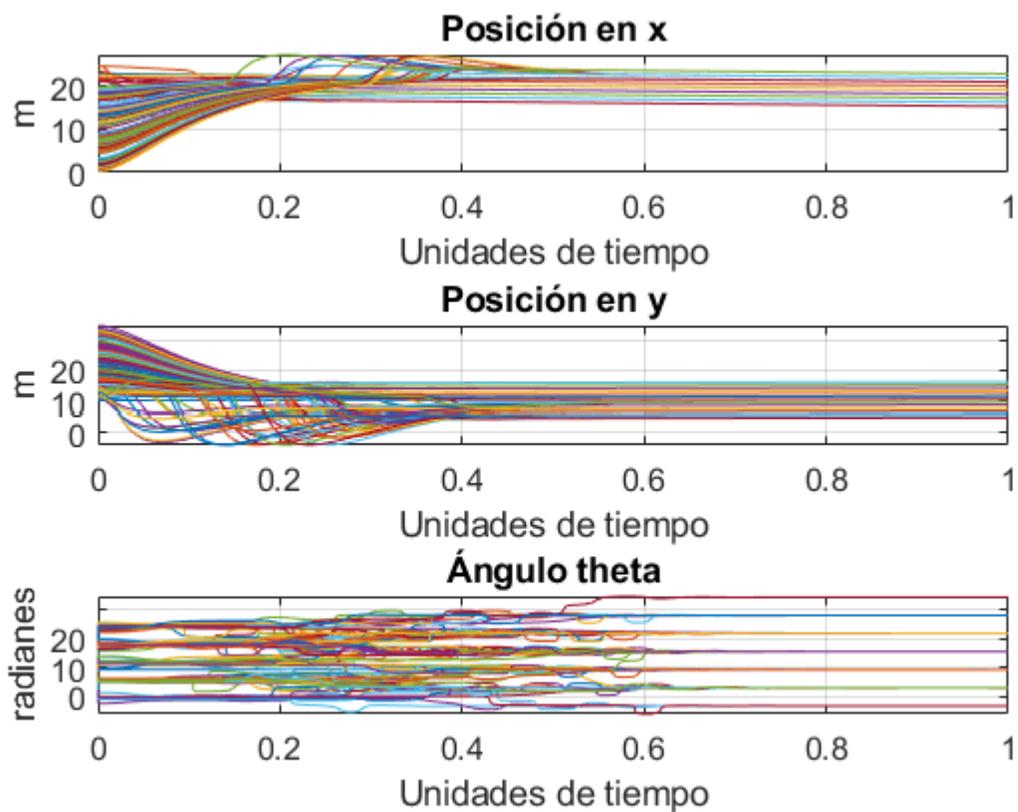


Figura 62. Estados de los 110 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación.

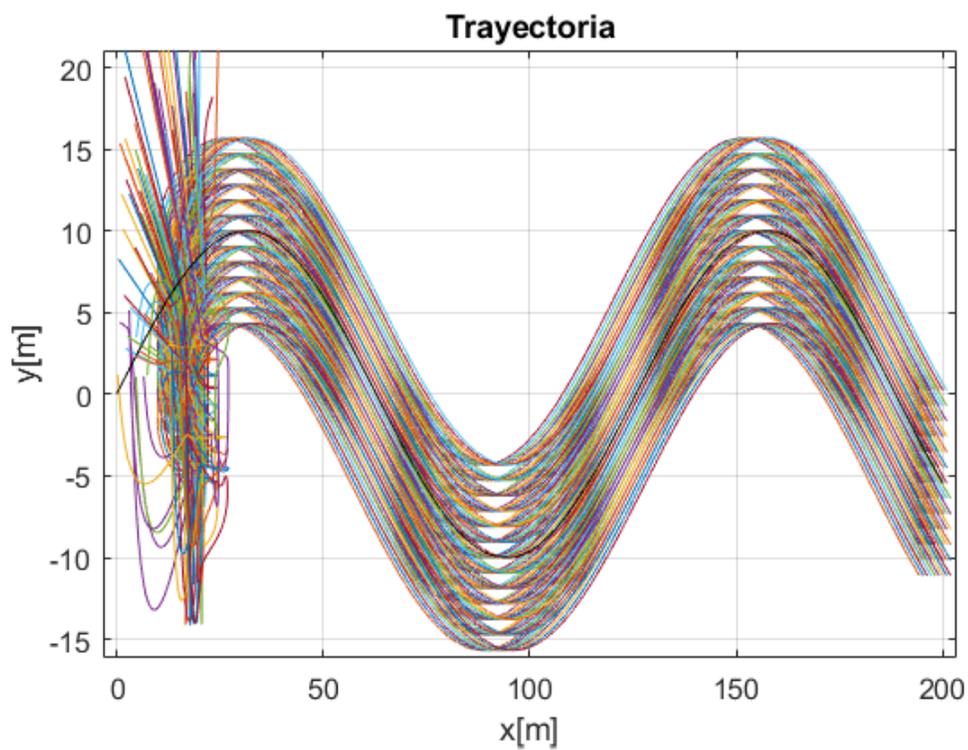
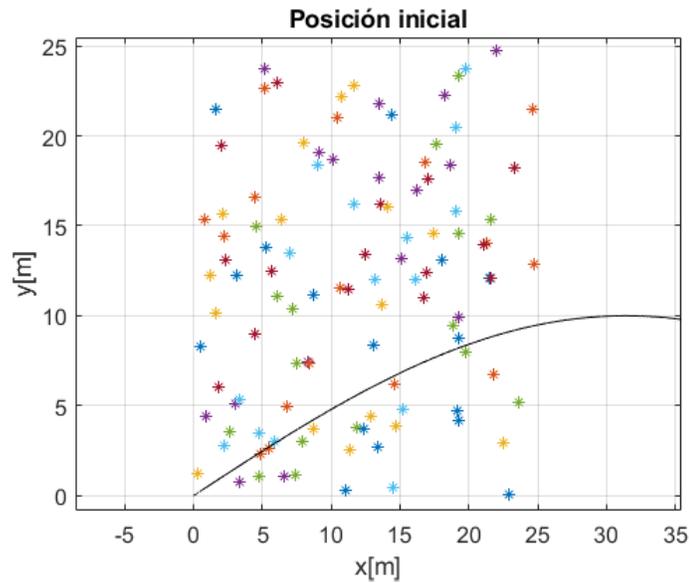
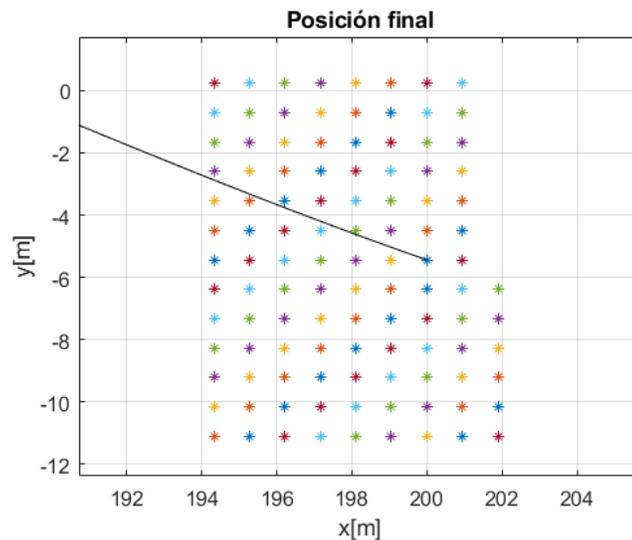


Figura 63. Plano de fase  $(x, y)$  de los 110 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación.

En la figura 62 se observa la comparación entre todos los robots terrestres de los tres estados ( $x$ ,  $y$  y  $\theta$ ). Basado en estas gráficas, se puede decir que la formación completa se logra después de 0.6 unidades de tiempo, esto es debido al ángulo ya que para las posiciones en  $x$  y  $y$  se tiene una formación antes del tiempo 0.5. En la figura 63 se observa el seguimiento de una trayectoria dada de los robots de manera formada. Las posiciones iniciales para este caso, debido a que son una gran cantidad de robots, se hizo de manera aleatoria, por esto, es posible que existan robots muy cercanos, lo cual en lo experimental no pasaría, ver figura 64. Las posiciones finales se hicieron tipo matricial, donde se van acomodando de arriba a abajo por columna, donde el maestro es el centro de la matriz, ver figura 65.



**Figura 64.** Posición inicial de los 110 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación.



**Figura 65.** Posición final de los 110 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación.

## 6.2. Cuadricóptero

Para la formación de  $n$  robots aéreos con una topología tipo estrella dirigida, se utiliza lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^n z_{i7} = z_{i7} + x_{17} - x_{i7} + \delta_{iz}(x_{17} - x_{i7} + \Delta_{iz}), \quad (124)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{i8} = z_{i8} - x_{18} + x_{i8} - \alpha_8 z_{i7}, \quad (125)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{i9} = z_{i9} + x_{19} - x_{i9} + \delta_{ix}(x_{19} - x_{i9} + \Delta_{ix}), \quad (126)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{i10} = z_{i10} - x_{110} + x_{i10} - \alpha_{10} z_{i9}, \quad (127)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{i11} = z_{i11} + x_{111} - x_{i11} + \delta_{iy}(x_{111} - x_{i11} + \Delta_{iy}), \quad (128)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{i12} = z_{i12} - x_{112} + x_{i12} - \alpha_{12} z_{i11}, \quad (129)$$

donde  $\Delta_{ix}$ ,  $\Delta_{iy}$  y  $\Delta_{iz}$  son las distancias esperadas en  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  para la formación,  $\delta_{ix}$ ,  $\delta_{iy}$  y  $\delta_{iz}$  son los coeficientes de repulsión, los cuales pueden tomar dos valores

$$\delta_{ix} = \begin{cases} 0, & \text{si } |x_{19} - x_{i9}| > \Delta_{ix} \\ \delta, & \text{si } |x_{19} - x_{i9}| \leq \Delta_{ix} \end{cases}, \quad (130)$$

$$\delta_{iy} = \begin{cases} 0, & \text{si } |x_{111} - x_{i11}| > \Delta_{iy} \\ \delta, & \text{si } |x_{111} - x_{i11}| \leq \Delta_{iy} \end{cases}, \quad (131)$$

$$\delta_{iz} = \begin{cases} 0, & \text{si } |x_{17} - x_{i7}| > \Delta_{iz} \\ \delta, & \text{si } |x_{17} - x_{i7}| \leq \Delta_{iz} \end{cases}. \quad (132)$$

### 6.2.1. Simulaciones

Para replicar las siguientes simulaciones se puede utilizar el código del Anexo D.

En la simulación que se presenta a continuación se conectaron nueve robots en una topología en estrella dirigida. Se tiene como objetivo de control seguir una trayectoria tipo circular de forma coordinada y evitar colisiones manteniendo una distancia mínima de 0.5m entre los robots.

Para la simulación se utilizaron las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
 (x_1(0), y_1(0), z_1(0), \psi_1(0)) &= (7.15, 8.77, 2.7637, 0.42), \\
 (x_2(0), y_2(0), z_2(0), \psi_2(0)) &= (5.85, 4.17, 4.3580, 0.22), \\
 (x_3(0), y_3(0), z_3(0), \psi_3(0)) &= (5.07, 12.49, 3.0072, 0.29), \\
 (x_4(0), y_4(0), z_4(0), \psi_4(0)) &= (6.93, 6.77, 5.2975, 0.98), \\
 (x_5(0), y_5(0), z_5(0), \psi_5(0)) &= (7.84, 8.18, 4.3363, 0.10), \\
 (x_6(0), y_6(0), z_6(0), \psi_6(0)) &= (9.25, 17.83, 5.2710, 0.26), \\
 (x_7(0), y_7(0), z_7(0), \psi_7(0)) &= (6.75, 2.40, 3.701, 0.31), \\
 (x_8(0), y_8(0), z_8(0), \psi_8(0)) &= (3.29, 5.21, 3.6915, 0.09), \\
 (x_9(0), y_9(0), z_9(0), \psi_9(0)) &= (6.78, 10.47, 4.7838, 0.69),
 \end{aligned}$$

$$\delta_{2x} = \delta_{3x} = \delta_{4x} = \delta_{5x} = \delta_{6x} = \delta_{7x} = \delta_{8x} = \delta_{9x} = 500,$$

$$\delta_{2y} = \delta_{3y} = \delta_{4y} = \delta_{5y} = \delta_{6y} = \delta_{7y} = \delta_{8y} = \delta_{9y} = 500,$$

$$\delta_{2z} = \delta_{3z} = \delta_{4z} = \delta_{5z} = \delta_{6z} = \delta_{7z} = \delta_{8z} = \delta_{9z} = 500,$$

$$r_{21} = r_{31} = r_{41} = r_{51} = r_{61} = r_{71} = r_{81} = r_{91} = 10,$$

$$r_{12} = r_{32} = r_{42} = r_{52} = r_{62} = r_{72} = r_{82} = r_{92} = 10,$$

$$r_{13} = r_{23} = r_{43} = r_{53} = r_{63} = r_{73} = r_{83} = r_{93} = 10,$$

$$r_{14} = r_{24} = r_{34} = r_{54} = r_{64} = r_{74} = r_{84} = r_{94} = 10,$$

$$r_{15} = r_{25} = r_{35} = r_{45} = r_{65} = r_{75} = r_{85} = r_{95} = 10,$$

$$r_{16} = r_{26} = r_{36} = r_{46} = r_{56} = r_{76} = r_{86} = r_{96} = 10,$$

$$r_{17} = r_{27} = r_{37} = r_{47} = r_{57} = r_{67} = r_{87} = r_{97} = 10,$$

$$r_{18} = r_{28} = r_{38} = r_{48} = r_{58} = r_{68} = r_{78} = r_{98} = 10,$$

$$r_{19} = r_{29} = r_{39} = r_{49} = r_{59} = r_{69} = r_{79} = r_{89} = 10,$$

$$\alpha_1 \cdots \alpha_{12} = 80,$$

$$m = 0.5,$$

$$(X_d, Y_d, Z_d, \Psi_d) = (10\text{sen}(\frac{2\pi i}{5}), 10\text{sen}(\frac{2\pi i}{5} + \frac{\pi i}{2}), 5, 0).$$

Distancias esperadas para la formación de los nueve robots en una forma cuadrada:

$$\Delta_{12x} = \Delta_{13x} = \Delta_{14x} = -1, \quad \Delta_{15x} = \Delta_{16x} = 0, \quad \Delta_{17x} = \Delta_{18x} = \Delta_{19x} = 1,$$

$$\Delta_{12y} = \Delta_{15y} = \Delta_{17y} = -1, \quad \Delta_{13y} = \Delta_{18y} = 0, \quad \Delta_{14y} = \Delta_{16y} = \Delta_{19y} = 1.,$$

$$\Delta_{12z} = \Delta_{13z} = \Delta_{14z} = \Delta_{15z} = \Delta_{16z} = \Delta_{17z} = \Delta_{18z} = \Delta_{19z} = 0.$$

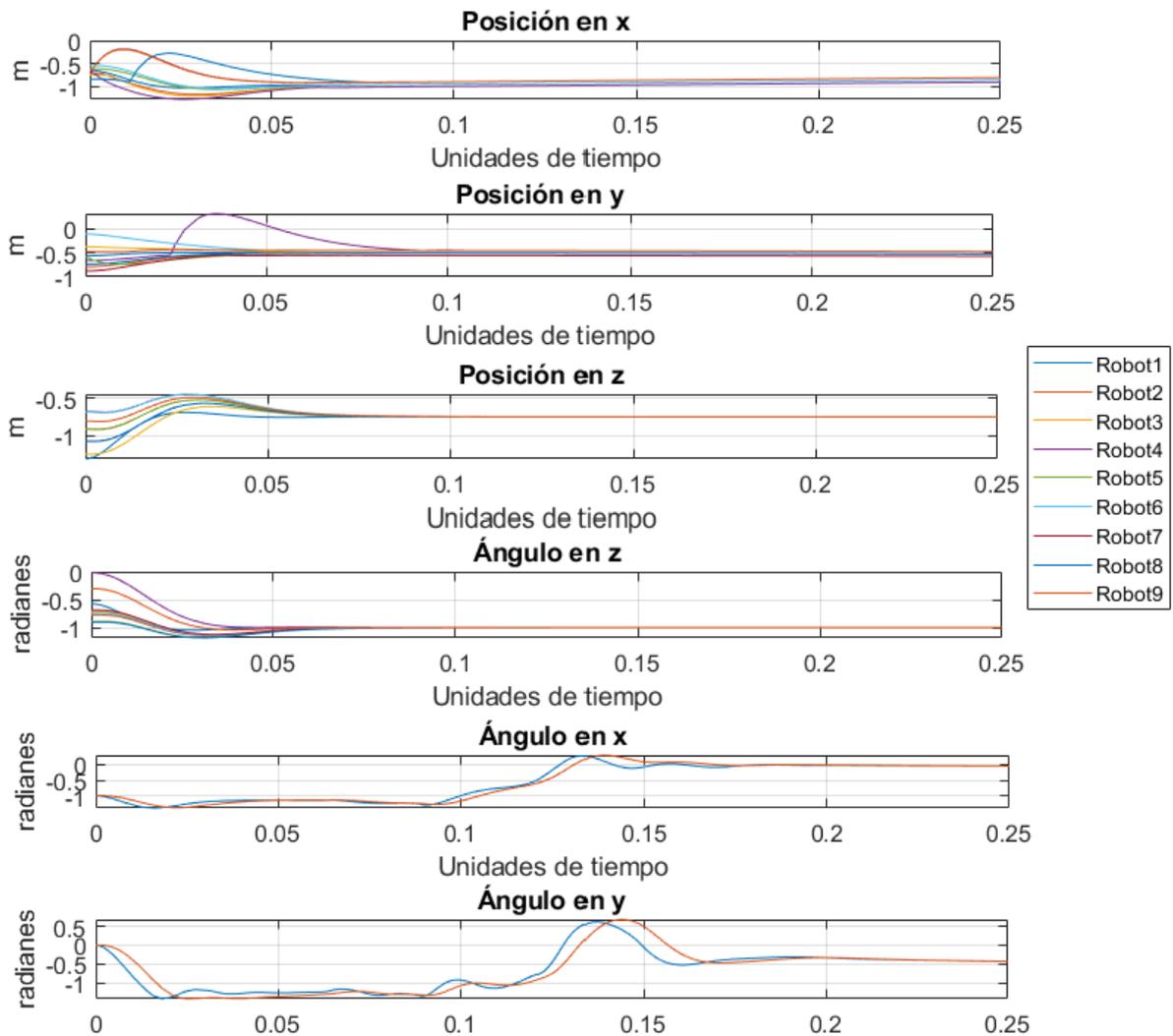
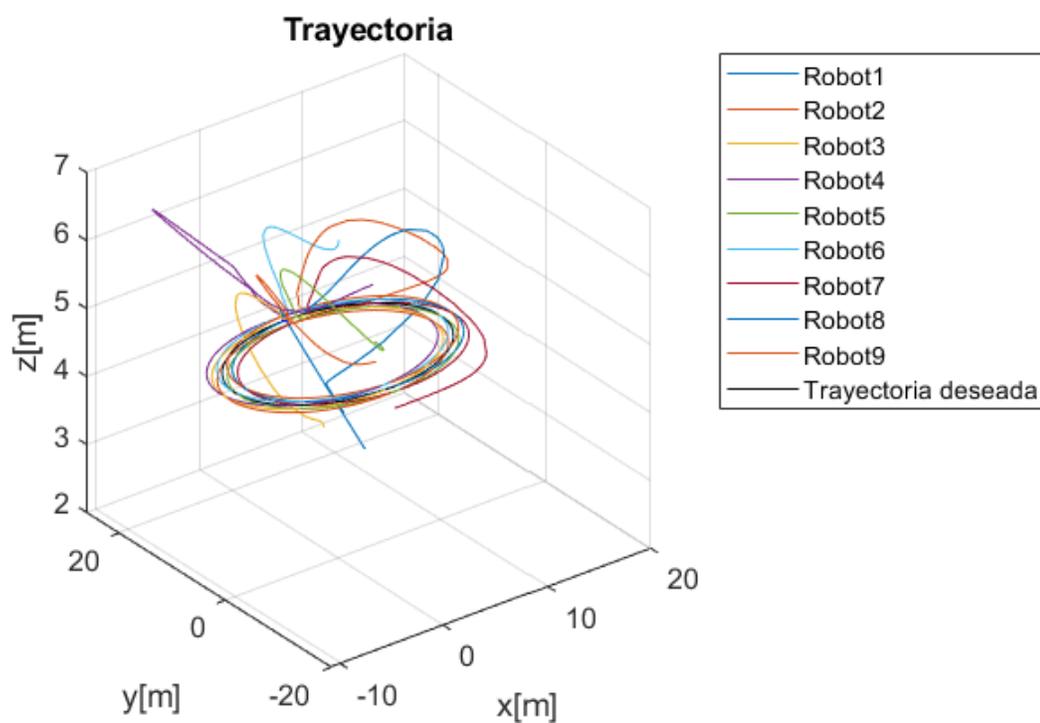
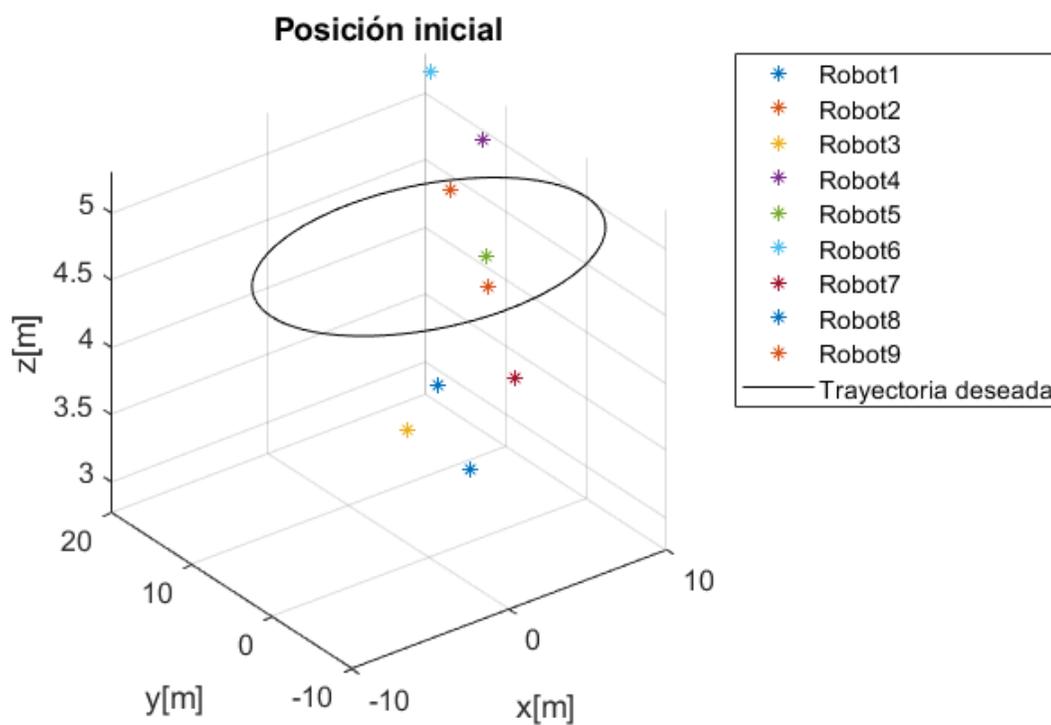


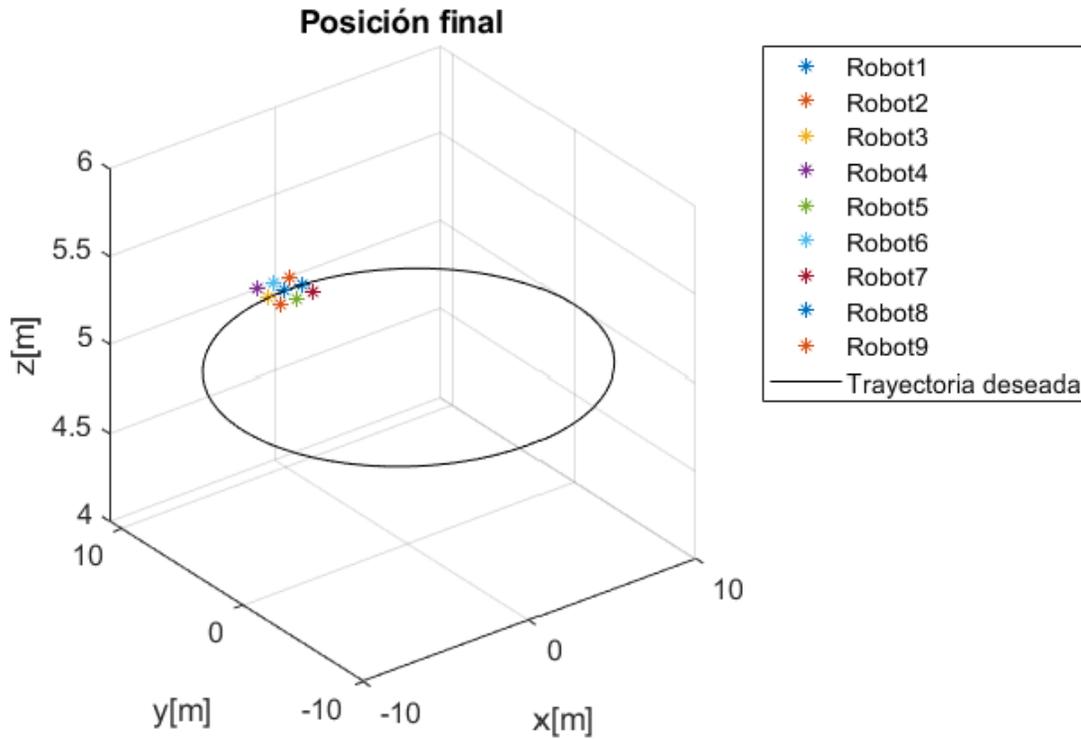
Figura 66. Estados de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación.



**Figura 67.** Plano de fase  $(x, y, z)$  de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación.



**Figura 68.** Posición inicial de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación.



**Figura 69.** Posición final de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación.

En la figura 66 se puede observar que la formación se logra para antes de 0.1 unidades de tiempo para las posiciones  $(x, y \text{ y } z)$ , mientras que para los ángulos  $(\psi, \phi \text{ y } \theta)$  se logra antes de 0.2. Esto quiere decir que la formación completa para este caso, se tiene para antes de 0.2 unidades de tiempo. La trayectoria de los nueve robots aéreos se muestra en la figura 67, donde la trayectoria deseada es un círculo. Las posiciones iniciales están dadas de manera aleatoria, esto quiere decir que todos los robots aéreos pueden iniciar en cualquier lugar dentro de un cierto rango, esto es para simular el comportamiento al hacer una formación de los robots ya en vuelo, ver figura 68. Como posición final se tiene una forma cuadrada, donde el centro es el maestro, ver figura 69.

### 6.3. Anti colisiones

Para evitar choques entre los mismos robots de la red al intentar hacer una formación, se implementa un anti colisiones. Esto hace que los robots eviten acercarse más allá de la distancia dada como mínima. Para implementar esto, es necesario usar una distancia menor a la que se quiere en la formación.

### 6.3.1. Robot de tipo tracción diferencial

Para la implementación del anti colisiones en  $n$  robots terrestres con una topología tipo estrella dirigida, se utiliza lo siguiente:

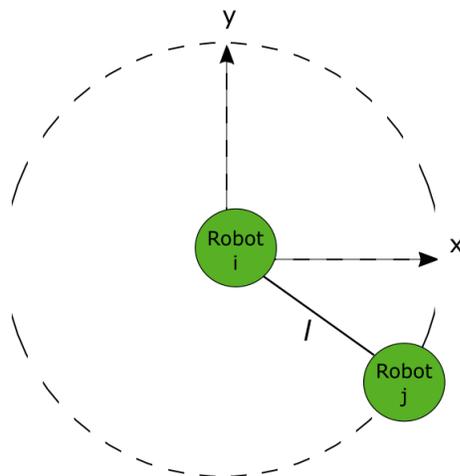
$$\sum_{i=1}^n u_{i1} = u_{i1} - \sum_{j=1}^n r_{ij} \text{sign}(x_j - x_i), \quad (133)$$

$$\sum_{i=1}^n u_{i2} = u_{i2} - \sum_{j=1}^n r_{ij} \text{sign}(y_j - y_i), \quad (134)$$

donde  $r_{ij}$  es el coeficiente de anti colisiones, el cual puede tomar dos valores

$$r_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } \|\vec{l}_{ij}\| > m \\ r, & \text{si } \|\vec{l}_{ij}\| \leq m \end{cases}, \quad (135)$$

donde  $m$  es el umbral de colisión en metros y  $\|\vec{l}_{ij}\|$  es la norma euclidiana formada por las posiciones en cada eje, ver figura 70 (López, 2017).



**Figura 70.** Vector  $l$  formado entre los robots  $i$  y  $j$ .

El vector  $\|\vec{l}_{ij}\|$  se obtiene de la siguiente manera

$$\|\vec{l}_{ij}\| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}, \quad (136)$$

y  $sign(k)$  es la función signo, puede tomar tres valores

$$sign(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k > 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \\ -1 & \text{si } k < 0 \end{cases} . \quad (137)$$

### 6.3.2. Cuadricóptero

Para la implementación del anti colisiones en  $n$  robots aéreos con una topología tipo estrella dirigida, se utiliza lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^n z_{i7} = z_{i7} - \sum_{j=1}^n r_{ij} sign(x_{j7} - x_{i7}), \quad (138)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{i9} = z_{i9} - \sum_{j=1}^n r_{ij} sign(x_{j9} - x_{i9}), \quad (139)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{i11} = z_{i11} - \sum_{j=1}^n r_{ij} sign(x_{j11} - x_{i11}), \quad (140)$$

donde  $r_{ij}$  es lo mismo que en 135, pero con el siguiente cambio en  $\|\vec{l}_{ij}\|$

$$\|\vec{l}_{ij}\| = \sqrt{(x_{j7} - x_{i7})^2 + (x_{j9} - x_{i9})^2 + (x_{j11} - x_{i11})^2}. \quad (141)$$

## 6.4. Conclusiones del capítulo

Para alcanzar la formación se necesita un poco más de tiempo que en la sincronización, esto se debe a que se requiere más procesamiento de datos, pero a diferencia de la sincronización, la formación si puede ser demostrada de forma experimental. Aunque controlar un sistema aéreo es más complejo que un sistema terrestre, se demostró que el tiempo requerido para lograr una formación en ambos es similar, esto quiere decir que no se tendrán problemas en la formación externa entre ambos.

## Capítulo 7. Resultados numéricos

---

En este capítulo se presenta la sincronización y formación externa utilizando un acoplamiento dinámico.

### 7.1. Acoplamiento dinámico

El acoplamiento dinámico propuesto para este trabajo es únicamente entre la comunicación externa de los maestros de cada red, donde para el acoplamiento externo, se toma como maestro al robot aéreo y como esclavo al robot terrestre, ver (Rubio, 2022).

Esto quiere decir que solo se tomarán las posiciones en  $X$  y  $Y$  para el acoplamiento externo y solo se modifican las entradas de control del sistema terrestre  $u_1$  (46) y  $u_2$  (47).

El acoplamiento dinámico quedaría de la siguiente manera

$$u_{1s} = \beta_1 h_{2x} + \beta_1 h_{2\dot{x}}, \quad (142)$$

$$u_{2s} = \beta_2 h_{2y} + \beta_2 h_{2\dot{y}}, \quad (143)$$

$$\dot{h}_{1x} = -h_{1x} + h_{2x}, \quad (144)$$

$$\dot{h}_{2x} = -\gamma_1 h_{1x} - \gamma_2 h_{2x} - k(x_m + \beta_1 x_s - \beta_1 \Delta_x), \quad (145)$$

$$\dot{h}_{1\dot{x}} = -h_{1\dot{x}} + h_{2\dot{x}}, \quad (146)$$

$$\dot{h}_{2\dot{x}} = -\gamma_1 h_{1\dot{x}} - \gamma_2 h_{2\dot{x}} - k(\dot{x}_m + \beta_1 \dot{x}_s), \quad (147)$$

$$\dot{h}_{1y} = -h_{1y} + h_{2y}, \quad (148)$$

$$\dot{h}_{2y} = -\gamma_1 h_{1y} - \gamma_2 h_{2y} - k(y_m + \beta_1 y_s - \beta_2 \Delta_y), \quad (149)$$

$$\dot{h}_{1\dot{y}} = -h_{1\dot{y}} + h_{2\dot{y}}, \quad (150)$$

$$\dot{h}_{2\dot{y}} = -\gamma_1 h_{1\dot{y}} - \gamma_2 h_{2\dot{y}} - k(\dot{y}_m + \beta_1 \dot{y}_s), \quad (151)$$

donde  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son constantes positivas,  $k$  es la fuerza de acoplamiento,  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son parámetros de control para sincronizar en fase o antifase y  $\Delta_x$  y  $\Delta_y$  son desplazamientos en las coordenadas  $x$  y  $y$  respectivamente.

### 7.1.1. Anticolisiones

El esquema de acoplamiento propuesto anteriormente, si funciona correctamente para el objetivo que se requiere, sin embargo, si se requiere extender a una red de redes, es necesario implementar una etapa de anticolisiones para evitar choques entre las redes que no se comunican. Se recurre a modificar el acoplamiento dinámico, basado en un modelo similar (Rubio, 2022), adaptado para este trabajo. La etapa de anticolisiones para el acoplamiento dinámico es la siguiente

$$\dot{h}_{2x} = -\gamma_1 h_{1x} - \gamma_2 h_{2x} - k(x_m + \beta_1 x_s - \beta_1 \Delta_x - r_{ms} \text{sign}(x_m - x_s)), \quad (152)$$

$$\dot{h}_{2\dot{x}} = -\gamma_1 h_{1\dot{x}} - \gamma_2 h_{2\dot{x}} - k(\dot{x}_m + \beta_1 \dot{x}_s - r_{ms} \text{sign}(\dot{x}_m - \dot{x}_s)), \quad (153)$$

$$\dot{h}_{2y} = -\gamma_1 h_{1y} - \gamma_2 h_{2y} - k(y_m + \beta_1 y_s - \beta_2 \Delta_y - r_{ms} \text{sign}(y_m - y_s)), \quad (154)$$

$$\dot{h}_{2\dot{y}} = -\gamma_1 h_{1\dot{y}} - \gamma_2 h_{2\dot{y}} - k(\dot{y}_m + \beta_1 \dot{y}_s - r_{ms} \text{sign}(\dot{y}_m - \dot{y}_s)), \quad (155)$$

donde al igual que en (135),  $r_{ms}$  es el coeficiente anticolisión y  $m$  es el umbral de colisión, que puede tomar los siguientes valores

$$r_{ms} = \begin{cases} 0, & \text{si } \|\vec{l}_{ms}\| > m \\ r, & \text{si } \|\vec{l}_{ms}\| \leq m \end{cases}, \quad (156)$$

el vector  $\|\vec{l}_{ms}\|$  al igual que en (136) se obtiene de la siguiente manera

$$\|\vec{l}_{ms}\| = \sqrt{(x_m - x_s)^2 + (\dot{x}_m - \dot{x}_s)^2 + (y_m - y_s)^2 + (\dot{y}_m - \dot{y}_s)^2}, \quad (157)$$

y  $\text{sign}(k)$  es la función signo, puede tomar tres valores

$$\text{sign}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k > 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \\ -1 & \text{si } k < 0 \end{cases}. \quad (158)$$

## 7.2. Simulaciones

En la simulación numérica presentada a continuación se acoplaron nueve robots terrestres y nueve robots aéreos en una topología tipo estrella dirigida. Ambas redes conectadas externamente con un sistema dinámico intermediario como el presentado en la sección 7.1.

Todos los robots, aéreos y terrestres, tiene condiciones iniciales aleatorias, entre 2 y 20 para los robots aéreos y entre 0 y 35 para los robots terrestres. Inicialmente, las trayectorias deseadas de los robots aéreos y terrestres son diferentes, al no haber conexión entre ellos, cada red sigue su propia trayectoria deseada, posteriormente, después de determinado tiempo (4 unidades de tiempo), se activa el acoplamiento a través del sistema dinámico intermediario, lo que da pie a que los robots terrestres sigan la trayectoria de los robots aéreos.

Para replicar las siguientes simulaciones se puede utilizar el código del Anexo E.

### 7.2.1. Sincronización externa

En la simulación numérica que se presenta a continuación se conectaron nueve robots terrestres y nueve robots aéreos en una topología tipo estrella dirigida, ambas redes conectadas por un sistema externo. Se tiene como objetivo de control seguir una trayectoria tipo círculo.

Para la simulación se utilizaron las siguientes condiciones iniciales.

Sistema terrestre:

$$(x_1(0), y_1(0), \theta_1(0), \xi_1(0)) = (13.64, 20.68, 16.07, 0.01),$$

$$(x_2(0), y_2(0), \theta_2(0), \xi_2(0)) = (1.76, 8, 29.19, 0.01),$$

$$(x_3(0), y_3(0), \theta_3(0), \xi_3(0)) = (0.54, 30.22, 2.73, 0.01),$$

$$(x_4(0), y_4(0), \theta_4(0), \xi_4(0)) = (23.41, 17.50, 7.62, 0.01),$$

$$(x_5(0), y_5(0), \theta_5(0), \xi_5(0)) = (20, 4.27, 23.49, 0.01),$$

$$(x_6(0), y_6(0), \theta_6(0), \xi_6(0)) = (20.98, 1.95, 1.97, 0.01),$$

$$(x_7(0), y_7(0), \theta_7(0), \xi_7(0)) = (5.33, 0.68, 15.23, 0.01),$$

$$\begin{aligned}
(x_8(0), y_8(0), \theta_8(0), \xi_8(0)) &= (29.12, 21.6, 18.2, 0.01), \\
(x_9(0), y_9(0), \theta_9(0), \xi_9(0)) &= (30.23, 3.41, 31.78, 0.01), \\
c_1 = c_2 = c_3 = c_4 &= 180, \\
r &= 0.017, \\
L &= 0.1054, \\
(X_d, Y_d) &= (t, \text{sen}(t)).
\end{aligned}$$

Sistema aéreo:

$$\begin{aligned}
(x_1(0), y_1(0), z_1(0), \psi_1(0)) &= (7.15, 8.77, 7.15, 0.42), \\
(x_2(0), y_2(0), z_2(0), \psi_2(0)) &= (5.85, 4.17, 5.85, 0.22), \\
(x_3(0), y_3(0), z_3(0), \psi_3(0)) &= (5.07, 12.49, 5.07, 0.29), \\
(x_4(0), y_4(0), z_4(0), \psi_4(0)) &= (6.93, 6.77, 6.93, 0.98), \\
(x_5(0), y_5(0), z_5(0), \psi_5(0)) &= (7.84, 8.18, 7.84, 0.10), \\
(x_6(0), y_6(0), z_6(0), \psi_6(0)) &= (9.25, 17.83, 9.25, 0.26), \\
(x_7(0), y_7(0), z_7(0), \psi_7(0)) &= (6.75, 2.40, 6.75, 0.31), \\
(x_8(0), y_8(0), z_8(0), \psi_8(0)) &= (3.29, 5.21, 3.29, 0.09), \\
(x_9(0), y_9(0), z_9(0), \psi_9(0)) &= (6.78, 10.47, 6.78, 0.69), \\
\alpha_1 \cdots \alpha_{12} &= 90, \\
(X_d, Y_d, Z_d, \Psi_d) &= (9\text{sen}(\frac{2pi}{5}) + 10, 9\text{sen}(\frac{2pi}{5} + \frac{pi}{2}) + 10, 4, 0).
\end{aligned}$$

Acoplamiento dinámico:

$$\begin{aligned}
k &= 450, \\
\gamma_1 &= 9, \\
\gamma_2 &= 9, \\
\beta_1 &= -1, \\
\beta_2 &= -1, \\
(\dot{h}_{1x}(0), \dot{h}_{2x}(0), \dot{h}_{1\dot{x}}(0), \dot{h}_{2\dot{x}}(0)) &= (0, 0, 0, 0), \\
(\dot{h}_{1y}(0), \dot{h}_{2y}(0), \dot{h}_{1\dot{y}}(0), \dot{h}_{2\dot{y}}(0)) &= (0, 0, 0, 0).
\end{aligned}$$

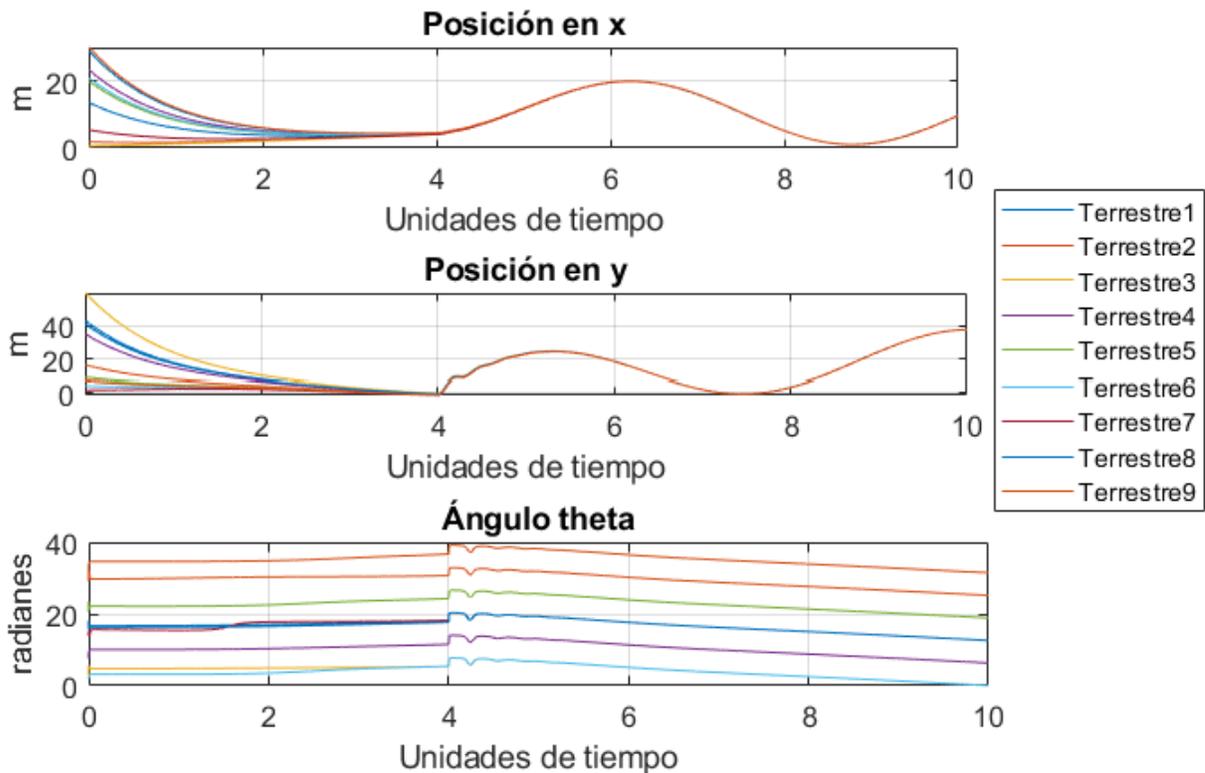
En la figura 71 se puede observar la comparación entre los tres estados ( $x, y, \theta$ ) de los nueve robots terrestres, en estas gráficas se puede observar que los robots terrestres están de forma independiente hasta el tiempo 4 que es cuando se activa el acoplamiento externo.

En la figura 72 se puede observar la comparación de los estados ( $x, y, z, \psi, \phi, \theta$ ) de los nueve robots aéreos, en estas gráficas se demuestra que para aproximadamente 0.06 unidades de tiempo, los cuadricópteros tiene una sincronización exitosa en la posición y para el tiempo 0.15 en los ángulos.

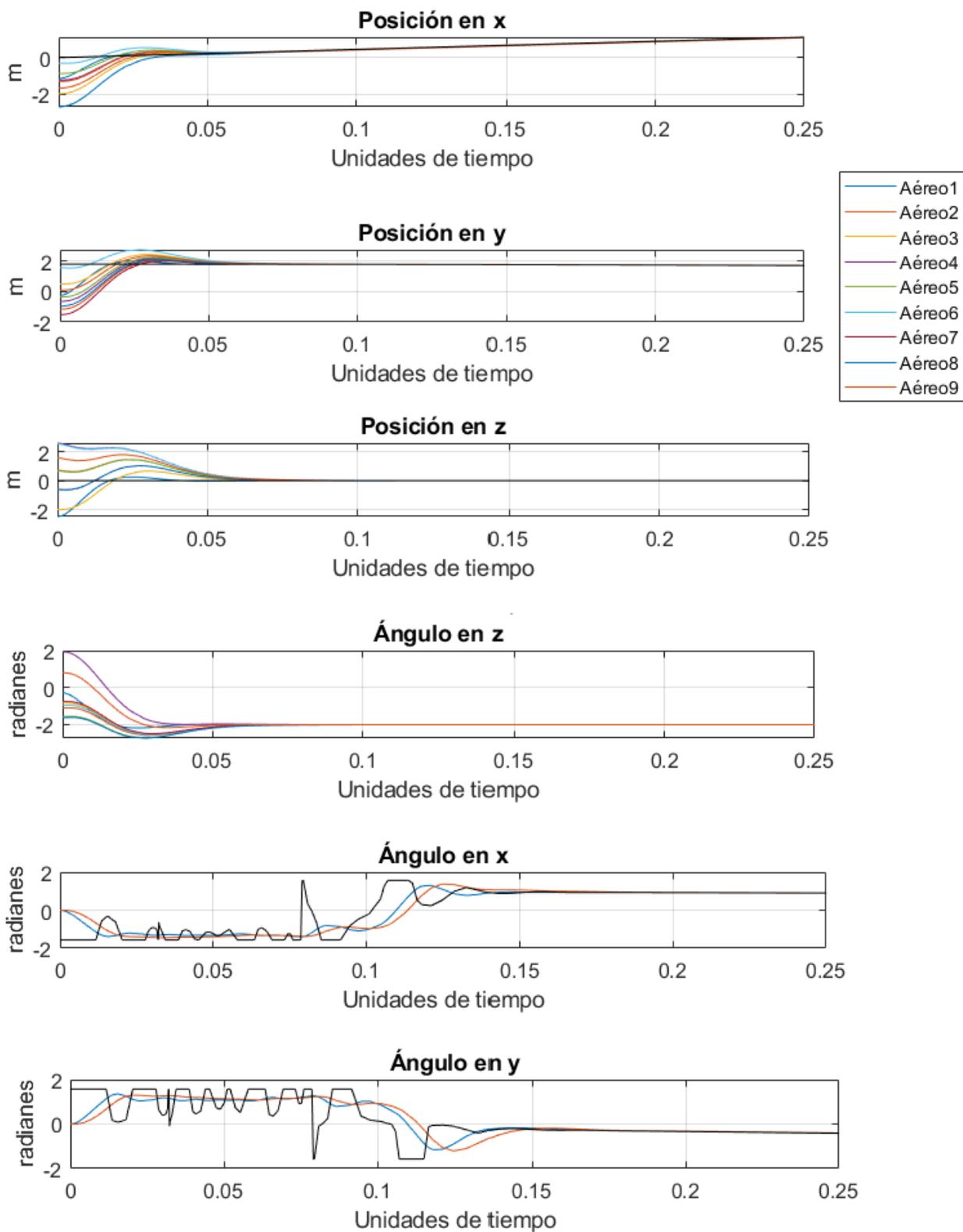
En la figura 73 se tiene la trayectoria de ambas redes, se puede observar de una manera más clara como es que los terrestres andan de forma independiente y en cierto tiempo se sincronizan con los aéreos.

En la figura 74 se observan las posiciones iniciales de cada uno de los robots, mientras que en la figura 75 la posición final de los mismos.

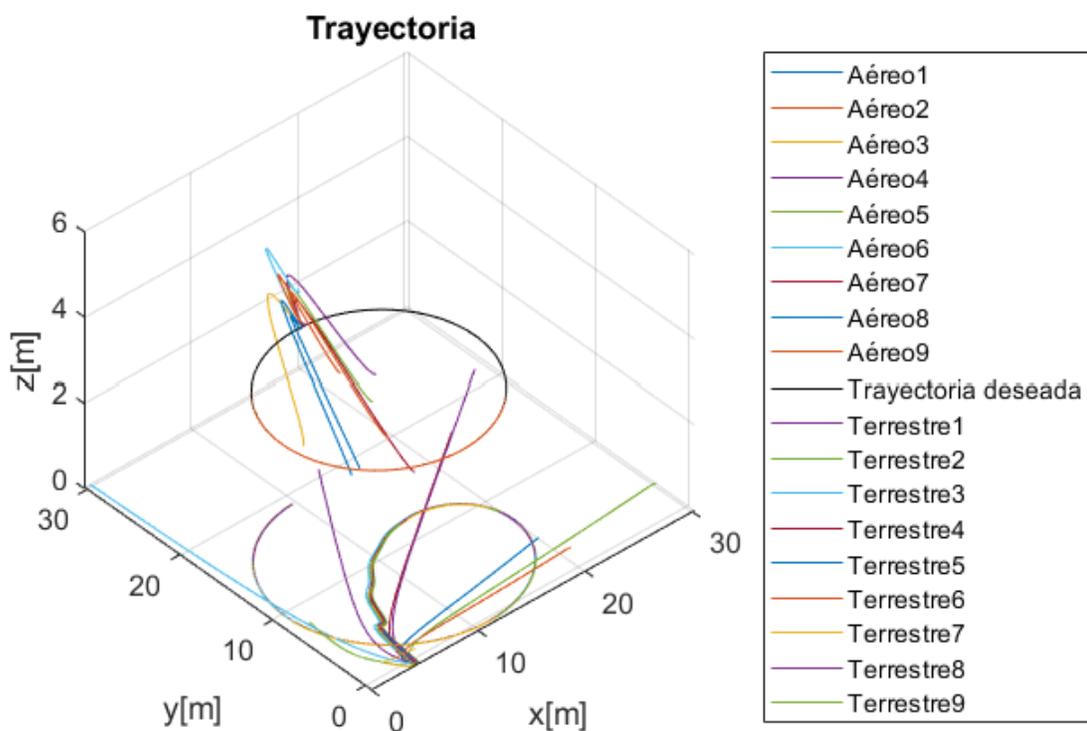
Para observar la comparación de los estados que se sincronizan entre los aéreos y terrestres se tiene la figura 76, basado en esta gráfica se puede decir que para el tiempo 8 se tiene una sincronización entre la red de terrestres y la de aéreos.



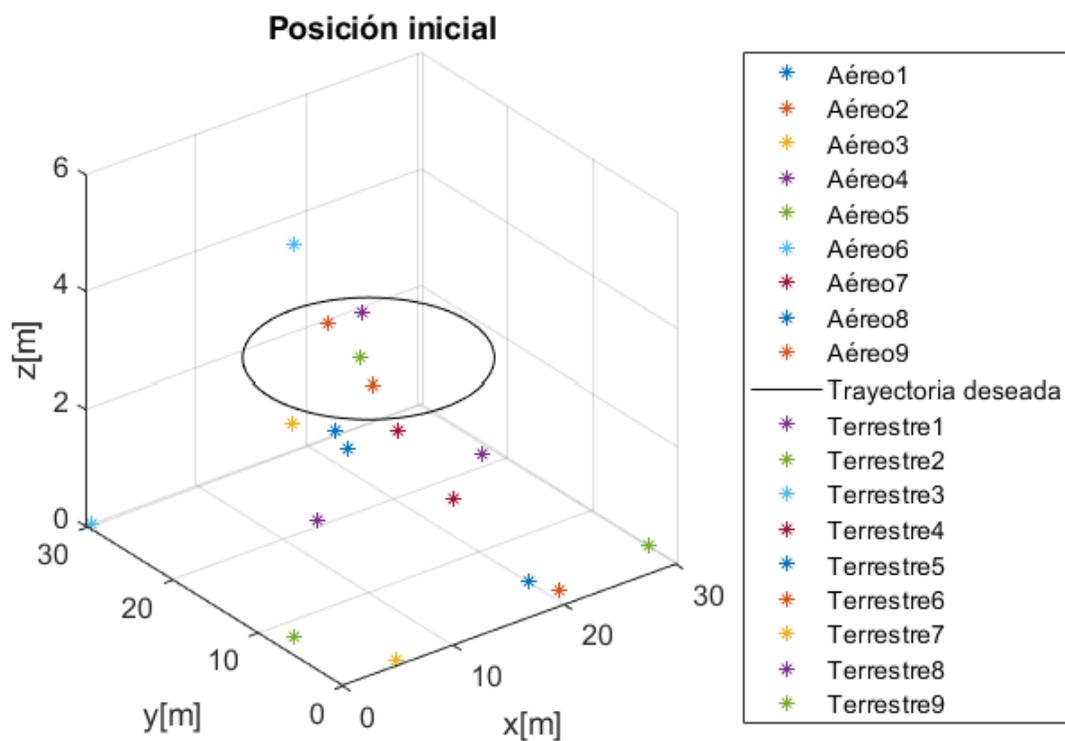
**Figura 71.** Estados de los 9 robots terrestres en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación externa.



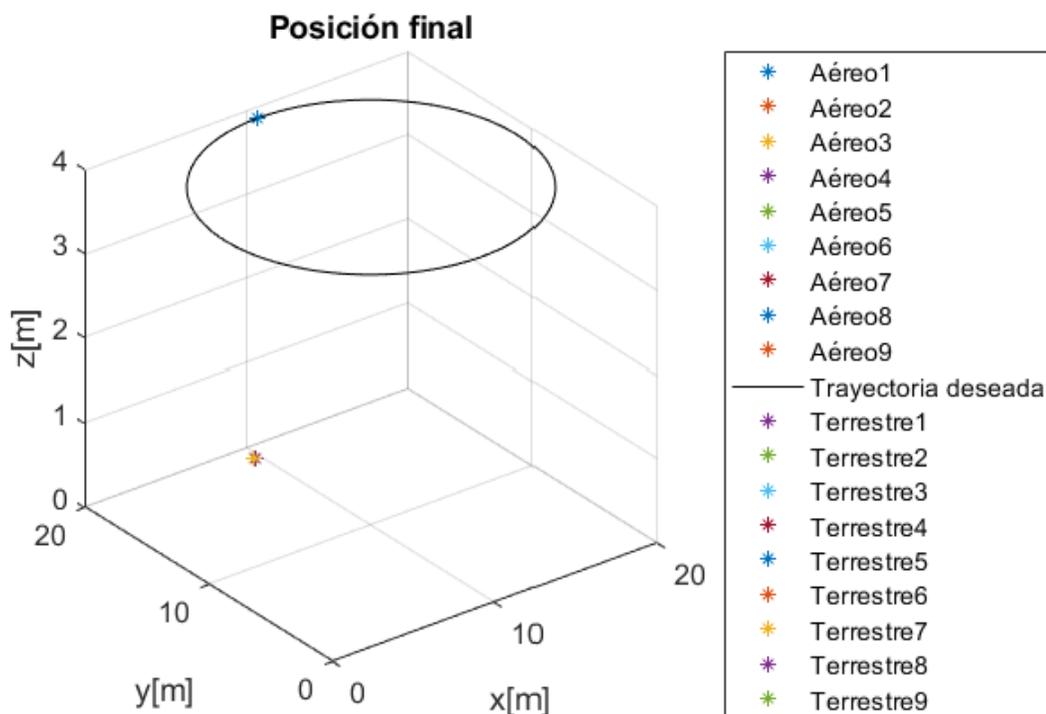
**Figura 72.** Estados de los 9 robots aéreos en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación externa.



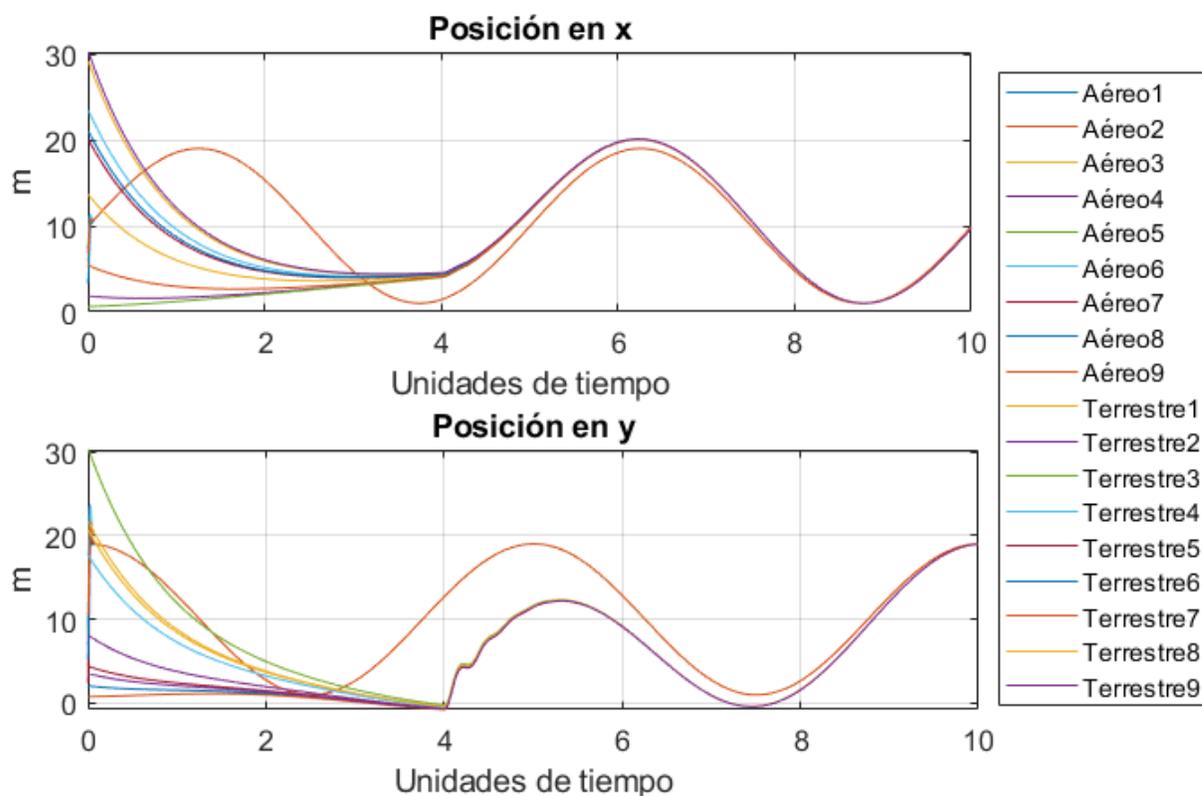
**Figura 73.** Plano de fase  $(x, y, z)$  de los 9 robots en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación externa.



**Figura 74.** Posición inicial de los 9 robots aéreos y terrestres en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación externa.



**Figura 75.** Posición final de los 9 robots aéreos y terrestres en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación externa.



**Figura 76.** Comparación de estados  $(x, y)$  de los 9 robots aéreos y terrestres en topología estrella dirigida con objetivo de control de regulación externa.

### 7.2.2. Formación externa

En la simulación numérica que se presenta a continuación se conectaron nueve robots terrestres y nueve robots aéreos en una topología tipo estrella dirigida, ambas redes conectadas por un sistema externo. Se tiene como objetivo de control seguir una trayectoria tipo circular de forma coordinada y evitar colisiones manteniendo una distancia mínima de 0.5m entre los robots.

Para la simulación se utilizaron las siguientes condiciones iniciales

Sistema Terrestre:

$$(x_1(0), y_1(0), \theta_1(0), \xi_1(0)) = (13.64, 20.68, 16.07, 0.01),$$

$$(x_2(0), y_2(0), \theta_2(0), \xi_2(0)) = (1.76, 8, 29.19, 0.01),$$

$$(x_3(0), y_3(0), \theta_3(0), \xi_3(0)) = (0.54, 30.22, 2.73, 0.01),$$

$$(x_4(0), y_4(0), \theta_4(0), \xi_4(0)) = (23.41, 17.50, 7.62, 0.01),$$

$$(x_5(0), y_5(0), \theta_5(0), \xi_5(0)) = (20, 4.27, 23.49, 0.01),$$

$$(x_6(0), y_6(0), \theta_6(0), \xi_6(0)) = (20.98, 1.95, 1.97, 0.01),$$

$$(x_7(0), y_7(0), \theta_7(0), \xi_7(0)) = (5.33, 0.68, 15.23, 0.01),$$

$$(x_8(0), y_8(0), \theta_8(0), \xi_8(0)) = (29.12, 21.6, 18.2, 0.01),$$

$$(x_9(0), y_9(0), \theta_9(0), \xi_9(0)) = (30.23, 3.41, 31.78, 0.01),$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 180,$$

$$\delta_{2x} = \delta_{3x} = \delta_{4x} = \delta_{5x} = \delta_{6x} = \delta_{7x} = \delta_{8x} = \delta_{9x} = 8000,$$

$$\delta_{2y} = \delta_{3y} = \delta_{4y} = \delta_{5y} = \delta_{6y} = \delta_{7y} = \delta_{8y} = \delta_{9y} = 8000,$$

$$m = 0.5,$$

$$r = 0.017,$$

$$r_{21} = r_{31} = r_{41} = r_{51} = r_{61} = r_{71} = r_{81} = r_{91} = 20,$$

$$r_{12} = r_{32} = r_{42} = r_{52} = r_{62} = r_{72} = r_{82} = r_{92} = 20,$$

$$r_{13} = r_{23} = r_{43} = r_{53} = r_{63} = r_{73} = r_{83} = r_{93} = 20,$$

$$r_{14} = r_{24} = r_{34} = r_{54} = r_{64} = r_{74} = r_{84} = r_{94} = 20,$$

$$r_{15} = r_{25} = r_{35} = r_{45} = r_{65} = r_{75} = r_{85} = r_{95} = 20,$$

$$r_{16} = r_{26} = r_{36} = r_{46} = r_{56} = r_{76} = r_{86} = r_{96} = 20,$$

$$r_{17} = r_{27} = r_{37} = r_{47} = r_{57} = r_{67} = r_{87} = r_{97} = 20,$$

$$r_{18} = r_{28} = r_{38} = r_{48} = r_{58} = r_{68} = r_{78} = r_{98} = 20,$$

$$r_{19} = r_{29} = r_{39} = r_{49} = r_{59} = r_{69} = r_{79} = r_{89} = 20,$$

$$L = 0.1054,$$

$$(X_d, Y_d) = (t, \text{sen}(t)).$$

Sistema aéreo:

$$(x_1(0), y_1(0), z_1(0), \psi_1(0)) = (7.15, 8.77, 7.15, 0.42),$$

$$(x_2(0), y_2(0), z_2(0), \psi_2(0)) = (5.85, 4.17, 5.85, 0.22),$$

$$(x_3(0), y_3(0), z_3(0), \psi_3(0)) = (5.07, 12.49, 5.07, 0.29),$$

$$(x_4(0), y_4(0), z_4(0), \psi_4(0)) = (6.93, 6.77, 6.93, 0.98),$$

$$(x_5(0), y_5(0), z_5(0), \psi_5(0)) = (7.84, 8.18, 7.84, 0.10),$$

$$(x_6(0), y_6(0), z_6(0), \psi_6(0)) = (9.25, 17.83, 9.25, 0.26),$$

$$(x_7(0), y_7(0), z_7(0), \psi_7(0)) = (6.75, 2.40, 6.75, 0.31),$$

$$(x_8(0), y_8(0), z_8(0), \psi_8(0)) = (3.29, 5.21, 3.29, 0.09),$$

$$(x_9(0), y_9(0), z_9(0), \psi_9(0)) = (6.78, 10.47, 6.78, 0.69),$$

$$\alpha_1 \cdots \alpha_{12} = 90,$$

$$\delta_{2x} = \delta_{3x} = \delta_{4x} = \delta_{5x} = \delta_{6x} = \delta_{7x} = \delta_{8x} = \delta_{9x} = 500,$$

$$\delta_{2y} = \delta_{3y} = \delta_{4y} = \delta_{5y} = \delta_{6y} = \delta_{7y} = \delta_{8y} = \delta_{9y} = 500,$$

$$\delta_{2z} = \delta_{3z} = \delta_{4z} = \delta_{5z} = \delta_{6z} = \delta_{7z} = \delta_{8z} = \delta_{9z} = 500,$$

$$r_{21} = r_{31} = r_{41} = r_{51} = r_{61} = r_{71} = r_{81} = r_{91} = 10,$$

$$r_{12} = r_{32} = r_{42} = r_{52} = r_{62} = r_{72} = r_{82} = r_{92} = 10,$$

$$r_{13} = r_{23} = r_{43} = r_{53} = r_{63} = r_{73} = r_{83} = r_{93} = 10,$$

$$r_{14} = r_{24} = r_{34} = r_{54} = r_{64} = r_{74} = r_{84} = r_{94} = 10,$$

$$r_{15} = r_{25} = r_{35} = r_{45} = r_{65} = r_{75} = r_{85} = r_{95} = 10,$$

$$r_{16} = r_{26} = r_{36} = r_{46} = r_{56} = r_{76} = r_{86} = r_{96} = 10,$$

$$r_{17} = r_{27} = r_{37} = r_{47} = r_{57} = r_{67} = r_{87} = r_{97} = 10,$$

$$r_{18} = r_{28} = r_{38} = r_{48} = r_{58} = r_{68} = r_{78} = r_{98} = 10,$$

$$r_{19} = r_{29} = r_{39} = r_{49} = r_{59} = r_{69} = r_{79} = r_{89} = 10,$$

$$m = 0.5,$$

$$(X_d, Y_d, Z_d, \Psi_d) = (9\text{sen}(\frac{2\pi i}{5}) + 10, 9\text{sen}(\frac{2\pi i}{5} + \frac{\pi}{2}) + 10, 4, 0).$$

Acoplamiento dinámico:

$$k = 450,$$

$$\gamma_1 = 9 \quad , \quad \gamma_2 = 9,$$

$$\beta_1 = -1 \quad , \quad \beta_2 = -1,$$

$$(\dot{h}_{1x}(0), \dot{h}_{2x}(0), \dot{h}_{1\dot{x}}(0), \dot{h}_{2\dot{x}}(0)) = (0, 0, 0, 0),$$

$$\dot{h}_{1y}(0), \dot{h}_{2y}(0), \dot{h}_{1\dot{y}}(0), \dot{h}_{2\dot{y}}(0)) = (0, 0, 0, 0).$$

Las distancias para la formación cuadrada es la misma para ambas redes:

$$\Delta_{12x} = \Delta_{13x} = \Delta_{14x} = -1, \quad \Delta_{15x} = \Delta_{16x} = 0, \quad \Delta_{17x} = \Delta_{18x} = \Delta_{19x} = 1,$$

$$\Delta_{12y} = \Delta_{15y} = \Delta_{17y} = -1, \quad \Delta_{13y} = \Delta_{18y} = 0, \quad \Delta_{14y} = \Delta_{16y} = \Delta_{19y} = 1.$$

$$\Delta_{12z} = \Delta_{13z} = \Delta_{14z} = \Delta_{15z} = \Delta_{16z} = \Delta_{17z} = \Delta_{18z} = \Delta_{19z} = 0.$$

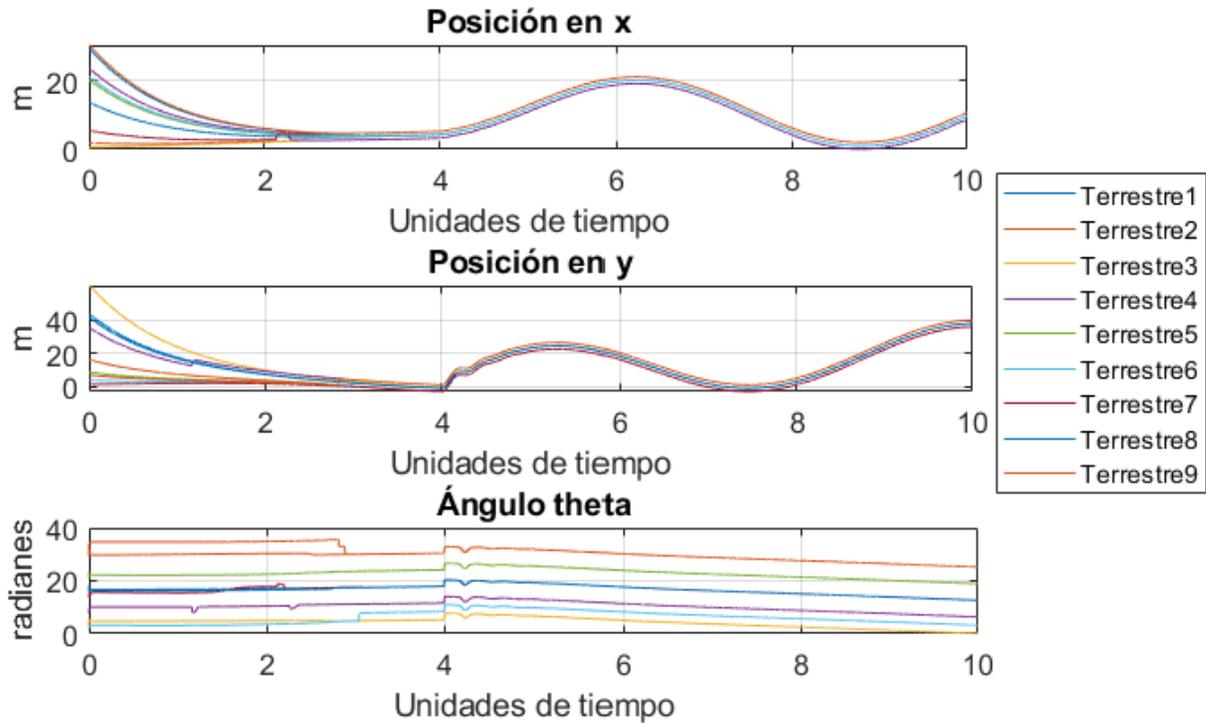
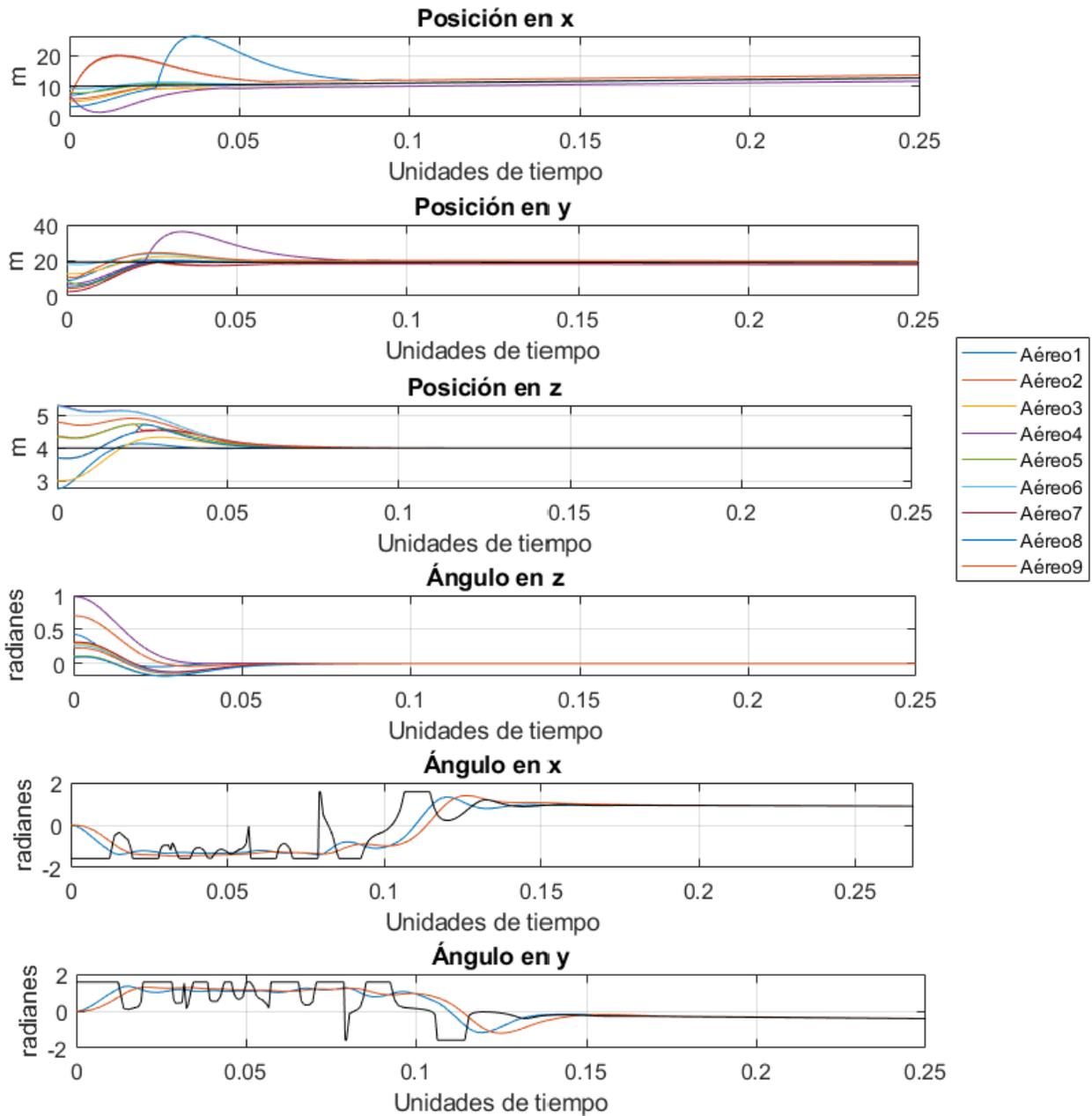


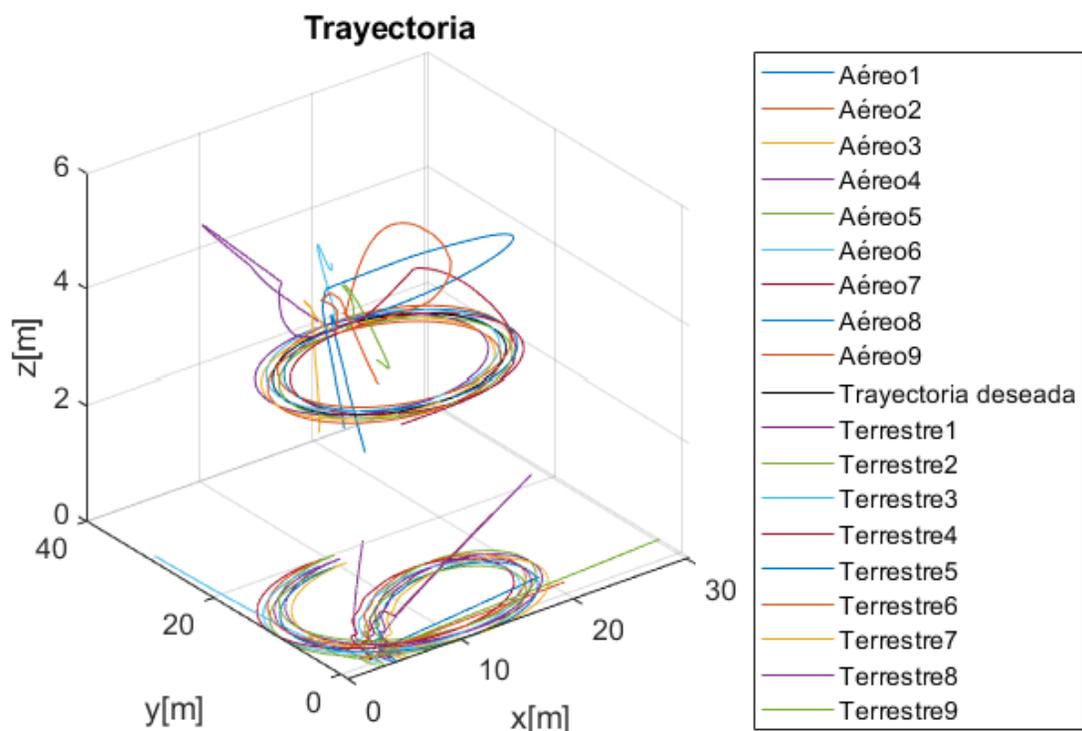
Figura 77. Estados de los 9 robots terrestres en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación externa.



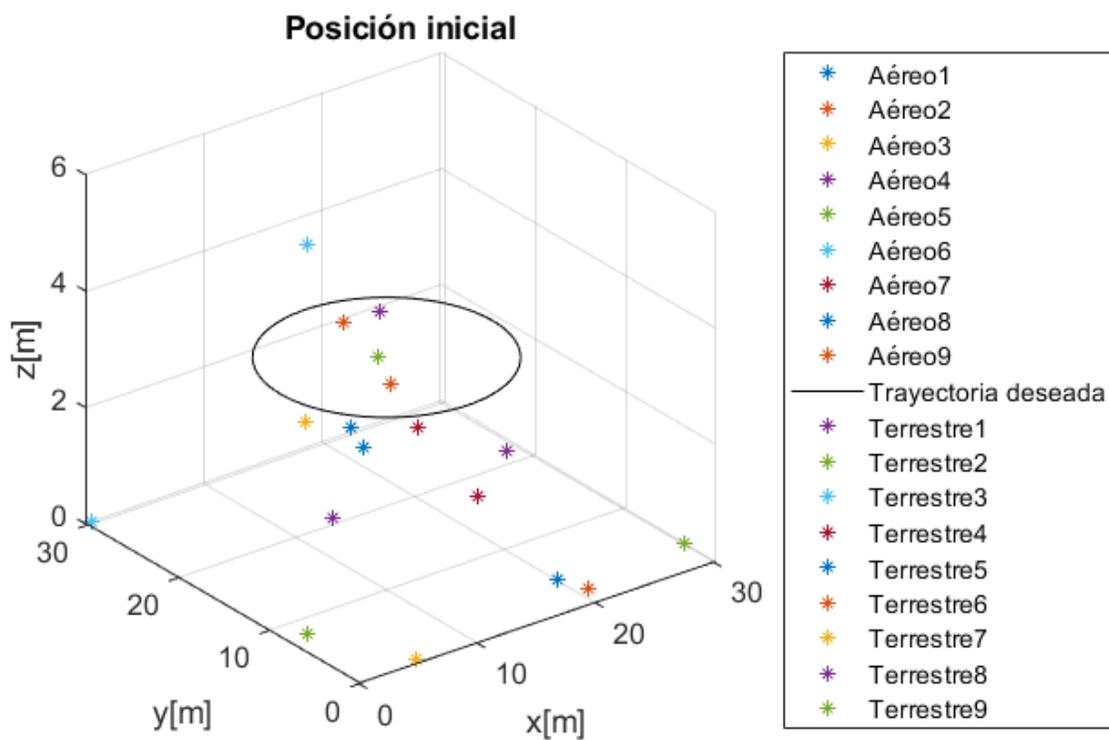
**Figura 78.** Estados de los 9 robots aéreos en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación externa.

En la figura 77 se puede observar la comparación entre los tres estados  $(x, y, \theta)$  de los nueve robots terrestres, en estas gráficas se puede observar que los robots terrestres están de forma independiente hasta el tiempo 4 que es cuando se activa el acoplamiento externo.

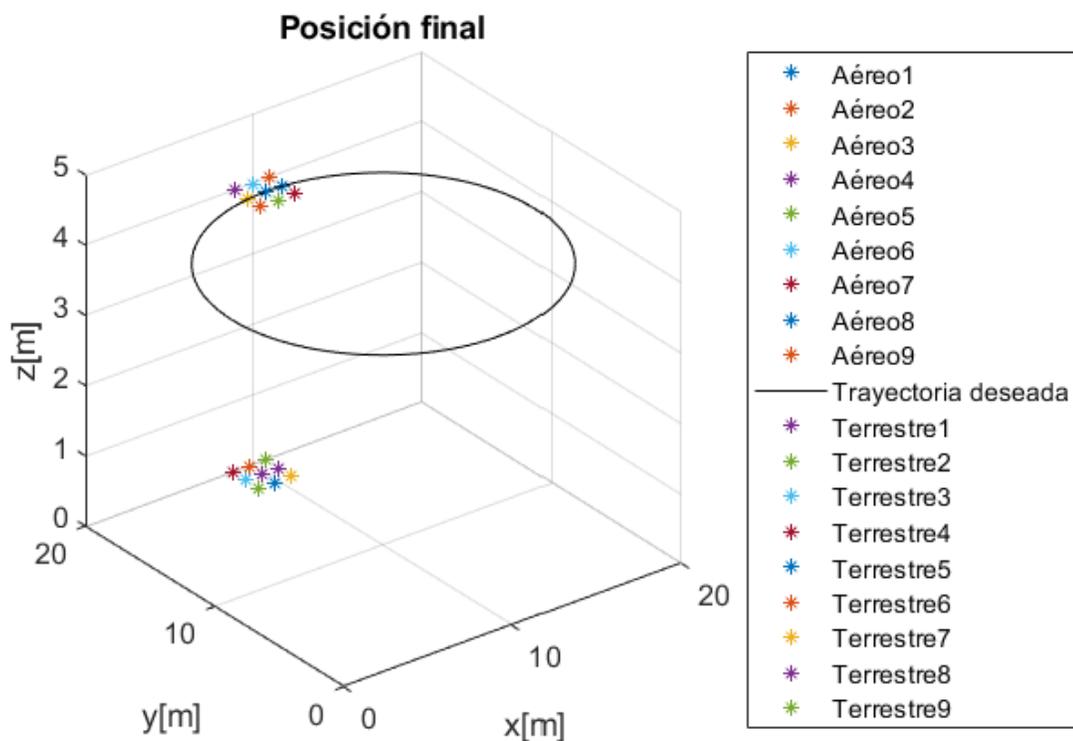
En la figura 78 se puede observar la comparación de los estados  $(x, y, z, \psi, \phi, \theta)$  de los nueve robots aéreos, en estas gráficas se demuestra que para antes de 0.1 unidades de tiempo, los cuadricópteros tiene una formación exitosa en la posición y para el tiempo 0.15 en los ángulos.



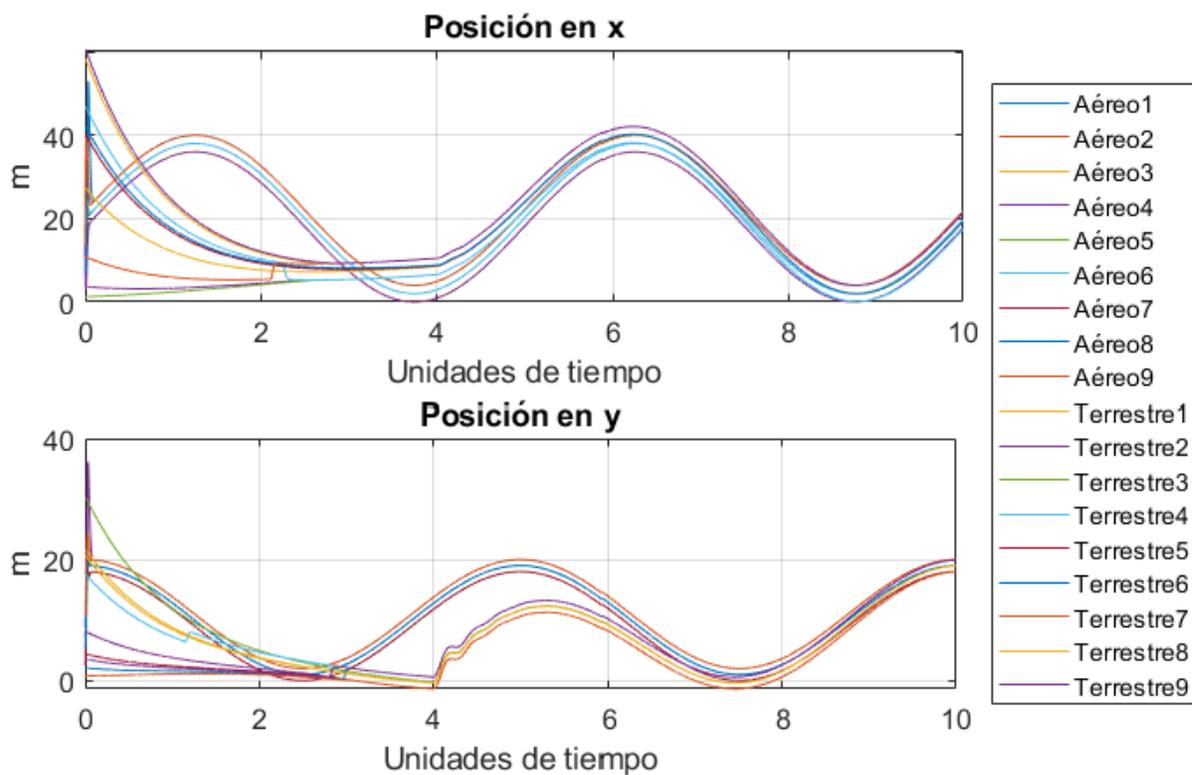
**Figura 79.** Plano de fase  $(x, y, z)$  de los 9 robots aéreos y terrestres en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación externa.



**Figura 80.** Posición inicial de los 9 robots aéreos y terrestres en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación externa.



**Figura 81.** Posición final de los 9 robots aéreos y terrestres en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación externa.



**Figura 82.** Comparación de estados  $(x, y)$  de los 9 robots aéreos y terrestres en topología estrella dirigida con objetivo de control de formación externa.

En la figura 79 se tiene la trayectoria de ambas redes, se puede observar de una manera más clara como es que los robots terrestres andan de forma independiente y en cierto tiempo se sincronizan con los aéreos. En la figura 80 se observan las posiciones iniciales de cada uno de los robots, mientras que en la figura 81 la posición final de los mismos.

Para observar la comparación de los estados que se forman entre los aéreos y terrestres se tiene la figura 82. Basado en esta gráfica se puede decir que para el tiempo 7 se tiene una formación entre la red de terrestres y la de aéreos.

### **7.3. Conclusiones del capítulo**

En este capítulo se presentó el acoplamiento de dos redes heterogéneas mediante el uso de un sistema dinámico intermediario como acoplamiento externo. De los resultados de las simulaciones numéricas presentadas, se observó que este tipo de acoplamiento es eficiente cuando se busca alcanzar la sincronización y formación de dos redes distintas de  $N$  nodos, donde los resultados pueden extenderse para la sincronización y formación de una red de redes. Debido a los resultados de las simulaciones, se considera como trabajo futuro de esta investigación el utilizar las velocidades máximas reales de los rotores para realizar una implementación de manera experimental.

## Capítulo 8. Conclusiones

---

Del presente trabajo de tesis y los resultados que de este emanan, se puede concluir que es posible lograr la sincronización y formación externa de robots móviles heterogéneos con sistema intermediario.

Con respecto al robot móvil terrestre cabe destacar que se puede alcanzar un control más rápido y exacto cuando se utilizan velocidades angulares óptimas, aunque en la experimentación esto no podrá ser de tal manera, ya que los motores tienen ciertas limitaciones. Dado lo anterior, en alguna posible aplicación experimental se tendrá que hacer un equilibrio entre la exactitud y la velocidad del control.

Tomando en cuenta los códigos de programación realizados en el presente trabajo de tesis, se concluye que es posible simular  $N$  cantidad de nodos, con la única limitante de selección en los valores iniciales.

Por otra parte, al utilizar un solo robot como maestro facilita la comunicación y permite alcanzar una buena sincronización, con la única desventaja de que si el robot maestro presenta alguna falla, la red entera dejara de funcionar correctamente.

Con lo que respecta al robot aéreo, en este caso el robot tipo cuadricoptero, presenta una considerable sensibilidad a las variaciones de velocidad angular en las hélices, lo que, como es bien sabido, cualquier perturbación puede generar un comportamiento errático y descontrolado. Es por ello que se selecciono el control backstepping, lo que, dados los resultados obtenidos, resulta ser un control adecuado para lograr la sincronización y formación, tanto en las redes internas como en las redes externas.

Es importante mencionar que, dado que los robots aéreos nunca van a estar a nivel del suelo, no es necesario implementar un anti colisiones entre los robots aéreos y los robots terrestres.

Por ultimo, de los resultados presentados se puede establecer que la sincronización y formación externa entre dos redes heterogéneas se puede extender a un escenario de red de redes.

## 8.1. Trabajo futuro

El trabajo cumple con lo que se esperaba, pero existen mejoras que pueden ser agregadas:

1. Utilizar velocidades angulares reales para lograr un control aplicable experimentalmente, tomando en cuenta las limitaciones del hardware.
2. Probar otro tipo de topología para ver el comportamiento de los robots.
3. Implementar una comunicación segura.
4. Realizar el trabajo de forma experimental.

## Literatura citada

- AbuAssi, L. (2002). The bréguet-richet quad-rotor helicopter of 1907. [https://www.academia.edu/815361/The\\_breguet-richet\\_quad\\_rotor\\_helicopter\\_of\\_1907](https://www.academia.edu/815361/The_breguet-richet_quad_rotor_helicopter_of_1907).
- Alessandro, D. B. M. D. D. L. (1993). Control of nonholonomic systems via dynamic compensation. *Kybernetika*, 29, 593–608.
- Arellano, A., López, R., Méndez, R., Cardoza, L., & Cruz, C. (2021). Dynamic coupling in small-world outer synchronization of chaotic networks. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 423, 132928. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.132928>.
- Arellano, A., Méndez, R. D., López, R. M., Murillo, M. A., & Cruz, C. (2023). Enhancing the emergence of hyperchaos using an indirect coupling and its verification based on digital implementation. *Nonlinear Dynamics*, 111, 9591–9605. <https://doi.org/10.1007/s11071-023-08313-0>.
- Bouabdallah, S. & Siegwart, R. (2005). Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor. 2247–2252. IEEE. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2005.1570447>.
- Bouadi, H., Bouchoucha, M., & Tadjine, M. (2007). Sliding mode control based on backstepping approach for an uav type-quadrotor. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences*, 4, 12–17.
- Ciuffardi, F. (2022). Exploración multi-robot basada en grillas de ocupación probabilística y diagramas de voronoi. [Tesis de Licenciatura en Ingeniería, Universidad de la república de Uruguay].
- Cuerno, C., Garcia, L., Sanchez, A., Carrio, A., Sanchez, J. L., & Campoy, P. (2016). Historical evolution of the unmanned aerial vehicles to the present. *DYNA*, 91(3), 282–288. <https://doi.org/10.6036/7781>.
- Díaz, R. (2018). Vuelo en formación de vehículos aéreos no tripulados. [Tesis de Maestría en Ciencias, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California].
- Fradkov, A. L., Miroshnik, I. V., & Nikiforov, V. O. (1999). *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems*. Springer Netherlands.
- Gschwindt, M., Camci, E., Bonatti, R., Wang, W., Kayacan, E., & Scherer, S. (2019). Can a robot become a movie director? learning artistic principles for aerial cinematography. 1107–1114. IEEE. <https://doi.org/10.1109/IROS40897.2019.8967592>.
- Hernández, E. (2018). Sincronización heterogénea de robots terrestres y aéreos. [Tesis de Maestría en Ingeniería, Universidad Autónoma de Baja California].
- Huang, J., Farritor, S., Qadi, A., & Goddard, S. (2006). Localization and follow-the-leader control of a heterogeneous group of mobile robots. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 11, 205–215. <https://doi.org/10.1109/TMECH.2006.871100>.
- Jyothi, S. A., Singla, A., Godfrey, P. B., & Kolla, A. (2016). Measuring and understanding throughput of network topologies. 761–772. IEEE. <https://doi.org/10.1109/SC.2016.64>.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall.
- Kokotovic, P. (1992). The joy of feedback: nonlinear and adaptive. *IEEE Control Systems*, 12, 7–17. <https://doi.org/10.1109/37.165507>.
- Li, Y., Díaz, M., Morantes, S., & Dorati, Y. (2018). Vehículos autónomos: Innovación en la logística urbana. *Revista de Iniciación Científica*, 4, 34–39. <https://doi.org/10.33412/rev-ric.v4.1.1864>.

- López, A. (2017). Formación en grupos de robots móviles. [Tesis de Maestría en Ciencias, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California].
- Mian, A. A. & Daobo, W. (2008). Modeling and backstepping-based nonlinear control strategy for a 6 dof quadrotor helicopter. *Chinese Journal of Aeronautics*, 21, 261–268. [https://doi.org/10.1016/S1000-9361\(08\)60034-5](https://doi.org/10.1016/S1000-9361(08)60034-5).
- Moreno, E. & Ramírez, H. (2011). *Grafos: fundamentos y algoritmos*. WORLD COLOR CHILE, Chile.
- Munné, F. (2005). ¿qué es la complejidad? encuentros de psicología social. *Universidad de Barcelona*, 3(2), 6–17.
- Pena, J., Arellano, A., & Nijmeijer, H. (2018). Enhancing master-slave synchronization: The effect of using a dynamic coupling. *Physical Review E*, 98, 012208. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.012208>.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., & Kurths, J. (2003). *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge Nonlinear Science Series 12.
- Pimentel, A. (2008). *sincronización y fenómenos colectivos*. Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México.
- Ripple, W. J., Wolf, C., Gregg, J. W., Levin, K., Rockström, J., Newsome, T. M., Betts, M. G., Huq, S., Law, B. E., Kemp, L., Kalmus, P., & Lenton, T. M. (2022). World scientists' warning of a climate emergency 2022. *BioScience*, 72, 1149–1155. <https://doi.org/10.1093/biosci/biac083>.
- Rubio, J. (2022). Formación de cuadrópteros utilizando un control por backstepping y un acoplamiento dinámico. [Tesis de Maestría en Ingeniería, Universidad Autónoma de Baja California].
- Rubio, W. (2018). Sincronización externa entre grupo de pequeños robots móviles. [Tesis de Maestría en Ingeniería, Universidad Autónoma de Baja California].
- Saif, A.-W. A., Dhaifullah, M., Al-Malki, M., & Shafie, M. E. (2012). Modified backstepping control of quadrotor. 1–6. IEEE. <https://doi.org/10.1109/SSD.2012.6197975>.
- Saitoh, T., Takahashi, Y., Minami, H., Nakashima, Y., Aramaki, S., Mihara, Y., Iwakura, T., Odagiri, K., Maekawa, Y., & Yoshino, A. (2021). Real-time breath recognition by movies from a small drone landing on victim's bodies. *Scientific Reports*, 11, 5042. <https://doi.org/10.1038/s41598-021-84575-1>.
- Siceloff, S. (2017). Meet the "swarmies robotics answer to bugs. *NASA*.
- Swarup, A. (2014). Comparison of quadrotor performance using backstepping and sliding mode control. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:12297224>.
- Vara, Y. (2018). Diseño de trayectorias para robots móviles tipo diferencial. [Tesis de Licenciatura en Ingeniería, Universidad Autónoma de Baja California].
- Vara, Y. (2021). Sincronización externa de robots móviles empleando acoplamiento dinámico. [Tesis de Maestría en Ciencias, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California].
- Veroustraete, F. (2015). The rise of the drones in agriculture. *EC Agridulture*, 2, 325–327.
- Wang, X. F. (2002). Complex networks: Topology, dynamics and synchronization. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12, 885–916. <https://doi.org/10.1142/S0218127402004802>.

Wang, X. F. & Chen, G. (2003). Complex networks: Small-world, scale-free and beyond. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 3, 6–20. <https://doi.org/10.1109/MCAS.2003.1228503>.

Šuster, P. (2010). Neural tracking trajectory of the mobile robot khepera ii in internal model control structure. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:199377237>.

## Anexos

Para visualizar todos los códigos utilizados para las simulaciones de esta tesis es necesario entrar al drive del enlace.

[https://drive.google.com/drive/folders/1R5MdtHwxeK8gY1mUxmG7XyrvKyAmab\\_1?usp=sharing](https://drive.google.com/drive/folders/1R5MdtHwxeK8gY1mUxmG7XyrvKyAmab_1?usp=sharing)