

Tesis defendida por

Gabriel Mejía Ruiz

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. Pedro Gilberto López Mariscal

Director del Comité

Dr. Juan Manuel López Mariscal

Miembro del Comité

Dr. Israel Marck Martínez Pérez

Miembro del Comité

Dr. José Antonio García Macías

*Coordinador del Programa de
Posgrado en Computación*

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

Director de Estudios de Posgrado

5 de Octubre del 2012

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO
EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**

**Solución Numérica de un Modelo para un Fluido Estratificado Fluyendo a
través de un Objeto en dos Dimensiones**

Tesis

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

Presenta:

Gabriel Mejía Ruiz

Ensenada, Baja California, México, Octubre 2012

Resumen de la tesis de **Gabriel Mejía Ruiz**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Computación. Ensenada, Baja California, Octubre 2012.

Solución Numérica de un Modelo para un Fluido Estratificado Fluyendo a través de un Objeto en dos Dimensiones

Resumen aprobado por:

Dr. Pedro Gilberto López Mariscal

Director de Tesis

En este trabajo se resuelve numéricamente un modelo matemático que describe el movimiento de un fluido Newtoniano, incompresible y con estratificación en la densidad que fluye a través de un canal bidimensional que tiene un obstáculo. El modelo se deriva de las ecuaciones de Navier-Stokes que se describen en la formulación vorticidad función-corriente, por lo que queda un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales parciales acopladas para la densidad, el campo de velocidades, la función corriente y la vorticidad.

El sistema se resuelve numéricamente utilizando diferencias finitas, en donde los términos advectivos involucrados en la ecuación de movimiento y en la ecuación de continuidad se aproximan usando la metodología de Flux Corrected Transport. La ecuación de Poisson en dos dimensiones con dominio irregular se resuelve numéricamente para cada iteración en el tiempo utilizando un esquema rápido, basado en la transformada seno y la matriz de capacitancia. Las condiciones de frontera del sistema quedan fijas para cada iteración en el tiempo para las tapas superior (en donde se encuentra el obstáculo) e inferior. En una de las tapas laterales se tiene el flujo entrante, mientras que en la otra se consideran dos condiciones de frontera diferentes: condiciones periódicas y de radiación. Como condiciones iniciales se considera que el fluido se encuentra inicialmente en reposo en donde el flujo entrante es sujeto a una aceleración constante hasta un cierto tiempo en donde este se vuelve uniforme.

El diseño y la implementación de la solución numérica del modelo resulta en una serie de rutinas que permiten obtener una aproximación de las variables independientes y con las cuales se puede simular el movimiento del fluido. De esta manera se pueden ajustar los diferentes parámetros involucrados, incluyendo variaciones en dominio definidos por la forma del obstáculo para simular situaciones reales. En este trabajo se muestran resultados numéricos para diferentes condiciones iniciales definidas por el flujo entrante y las diferentes condiciones de frontera consideradas.

Palabras Clave: **Formulación vorticidad-función corriente, Solución numérica ecuación de Poisson, Flux corrected transport, Matriz de capacitancia**

Abstract of the thesis presented by **Gabriel Mejía Ruiz**, in partial fulfillment of the requirements of the degree of Master in Science in Computer Science. Ensenada, Baja California, October 2012.

Numerical Solution of Fluid Flow past over an Obstacle in two Dimensions

In this work a mathematical model that describes the movement of an incompressible, stratified Newtonian fluid, flowing through a two-dimensional channel with an obstacle is solved numerically. The model derived from the Navier-Stokes equations and described in the vorticity stream-function formulation consists of four coupled partial differential equations for the density, the velocity field, the stream function and the vorticity.

The system is solved numerically using finite differences, where the advective terms involved in the equation of motion and the continuity equation are approximated using the Flux Corrected Transport method. The two-dimensional Poisson's equation with irregular domain is solved for each time step using a fast scheme based on the fast sine transform and the capacitance matrix. The boundary condition in the upper (which contains the obstacle) and lower covers are fixed for each time step. The flow enters through one of the lateral sides and for the outflow two different boundary conditions are considered: periodic and radiation boundary conditions. Initially the fluid is at rest, subject to a constant acceleration until a fixed time where it becomes uniform.

The design and implementation of the numerical solution, results in a set of routines to approximate the values of the independent variables in order to simulate the movement of the fluid. In this way, the different parameters involved, including the shape of the obstacle, can be adjusted to simulate.

Keywords: **Vorticity-stream function formulation, Numerical solution Poisson's equation, Flux corrected transport, Capacitance matrix**

*A mis padres Gabriel y Amelia, gracias
por todo su apoyo.*

Agradecimientos

Al Doctor Gilberto por su paciencia, consejos, atención y hospitalidad; pero más que nada por ser mi asesor, amigo y la mejor persona que he conocido. Gracias por buscar siempre la manera de apoyarme. A la familia del Doctor Gilberto, su esposa Claudia y su hija Isabel por toda su hospitalidad.

A los miembros de mi comité, el Doctor Manuel y el Doctor Israel por todos sus consejos y atención.

Al CICESE por haber me dado la oportunidad de estudiar una maestría. Al Departamento de Ciencias de la Computación por aceptarme como alumno. A la Doctora Ana, por ayudarme con los trámites de ingreso al posgrado.

A mis papás Gabriel y Amelia, por el gran apoyo que siempre me han brindado, a mis hermanas Elena y María por sus buenos deseos y motivación, y a mis abuelitos por preocuparse siempre por mí.

A mis compañeros de generación. Gerardo, Héctor, Karina, Eduardo, Daniel, Moises, José, Limberg, Marco, Martín, Ramón, Ulises, Paúl, Mauricio, Miguel, Jessica, Iván; que compartieron conmigo tanto buenos, como malos momentos. A mi compañera de cubículo Nancy, por darme siempre buenos consejos.

Al CONACYT por otorgarme los recursos económicos necesarios para estudiar una maestría.

Contenido

	Página
Resumen en español	i
Resumen en inglés	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Lista de Figuras	viii
Lista de Tablas	xiii
Notación	xiv
1. Introducción	1
1.1 Descripción del problema y antecedentes	1
1.2 Planteamiento del problema	4
1.3 Justificación y motivación	5
1.4 Objetivos	6
1.4.1 Objetivo General	6
1.4.2 Objetivos Específicos	6
1.5 Metodología	7
1.6 Organización de la tesis	8
2. Modelo Matemático	9
2.1 Modelación Matemática	9
2.1.1 Modelo matemático	10
2.1.2 Ecuaciones diferenciales	11
2.2 El movimiento de los fluidos y las ecuaciones de conservación	16
2.2.1 Cambios en las variables de flujo	16
2.2.2 Conservación de masa	18
2.2.3 Conservación de momentum	19
2.2.4 Aproximación de Boussinesq	23
2.3 Formulación vorticidad función corriente	24
2.3.1 La vorticidad en un fluido en dos dimensiones	24
2.3.2 La función corriente	25
2.4 Modelo	26
2.4.1 Sistema de ecuaciones	26
2.4.2 Dominio y condiciones de frontera	27

3.	Solución numérica de ecuaciones diferenciales	31
3.1	Diferencias Finitas	31
3.2	Diferencias finitas en la solución de ecuaciones diferenciales parciales	41
3.2.1	Solución numérica de la ecuación de Poisson	45
3.3	El método FCT para la solución de ecuaciones de conservación . . .	50
3.3.1	Flux Corrected Transport	50
3.3.2	Solución en una dimensión	53
3.3.3	Solución en dos dimensiones	55
4.	Implementación	58
4.1	Discretización del dominio	59
4.2	Solución rápida de la ecuación de Poisson	61
4.3	Solución numérica de la ecuación de Poisson en un dominio irregular	71
4.4	Solución numérica de los términos no lineales	79
4.4.1	Solución numérica de la vorticidad	80
4.4.2	Solución numérica de la ecuación de densidad	88
4.4.3	Diferencias finitas cercanas a la frontera	91
4.5	Solución numérica del vector de velocidad	92
4.6	Condiciones de frontera en la frontera abierta	93
4.6.1	Condiciones periódicas	94
4.6.2	Condiciones de radiación	94
5.	Resultados numéricos	97
5.1	Solución numérica del modelo matemático en un túnel de laboratorio	97
5.1.1	Dominio	98
5.1.2	Condiciones iniciales	98
5.1.3	Simulaciones realizadas	99
5.2	Experimento con condiciones periódicas	100
5.3	Experimento con condiciones de radiación en la frontera abierta, con velocidad de entrada de 8 cm/s	125
5.4	Experimento con condiciones de radiación en la frontera abierta, con velocidad de entrada de 12 cm/s	142
5.5	Discusión	159
6.	Conclusiones	161
6.1	Trabajo Futuro	162
	Referencias bibliográficas	164
	Anexos	166
A.	Ecuaciones Diferenciales	167
A.1	Definiciones	167
A.2	Ecuaciones diferenciales lineales y no lineales	168
A.2.1	Ecuaciones diferenciales lineales	168

A.2.2	Ecuaciones no lineales	168
B.	Diferencias finitas	169
B.1	Diferencias finitas hacia atrás	169
B.2	Diferencias finitas hacia adelante	169
B.3	Diferencias finitas centrales	170

Lista de Figuras

Figura		Página
1	Representación esquemática de la geometría del problema. Las flechas indican los vectores de velocidad que deseamos obtener solucionando numéricamente el modelo matemático propuesto.	4
2	Sección longitudinal del campo de densidad a lo largo del umbral de San Lorenzo en el Golfo de California. Los valores de densidad estan en kg/cm^3 menos 1000.	5
3	Representación esquemática de un modelo matemático.	10
4	Dominio físico del problema que se estudia en este trabajo.	27
5	Discretización de los puntos: a) Puntos equiespaciados. b) Puntos no equiespaciados con diferentes incrementos.	33
6	Aproximación de una función $f(x)$ utilizando 2 términos de la serie de taylor.	36
7	Flujos de entrada y salida de una celda, en una dimensión.	53
8	Representación de los flujos antidifusivos en dos dimensiones.	55
9	Flujos de entrada y salida de una celda, en dos dimensiones.	56
10	Representación esquemática del dominio físico del problema con geometría irregular.	59
11	Discretización del dominio en las dos dimensiones espaciales.	60
12	Discretización de la frontera irregular S	61
13	Representación del flujo de entrada en una celda	83
14	Líneas de corriente en todo el dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$	102
15	Acercamiento a las líneas de corriente en la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$	103
16	Acercamiento a las líneas de corriente en la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$	104

Figura	Página
17 Acercamiento a las líneas de corriente en la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$	105
18 Interfaz de la densidad en el dominio completo después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$	106
19 Acercamiento a la interfaz de la densidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$	107
20 Acercamiento a la interfaz de la densidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$	108
21 Acercamiento de la interfaz de la densidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$	109
22 Vorticidad en el dominio completo después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$	110
23 Acercamiento de la vorticidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$	111
24 Campo de velocidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$	112
25 Líneas de corriente en todo el dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$	113
26 Acercamiento a las líneas de corriente cerca de la parte irregular del dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$	114
27 Acercamiento a las líneas de corriente cerca de la parte irregular del dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$	115
28 Acercamiento a las líneas de corriente cerca de la parte irregular del dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$	116
29 Interfaz de la densidad en el dominio completo después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$	117

Figura	Página
30 Acercamiento a la Interfaz de la densidad cerca de la parte irregular del domino después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$	118
31 Acercamiento a la interfaz de la densidad cerca de la parte irregular del domino después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$	119
32 Acercamiento a la interfaz de la densidad cerca de la parte irregular del domino después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$	120
33 Vorticidad en todo el dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$	121
34 Acercamiento a la vorticidad cerca de la parte irregular del domino después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$	122
35 Campo de velocidad cerca de la parte irregular del domino después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$	123
36 Distribución de la densidad en todo el domino después de 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$	124
37 Líneas de corriente en todo el dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$	127
38 Acercamiento a las líneas de corriente en la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$	128
39 Interfaz de la densidad en el dominio completo después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$	129
40 Acercamiento a la interfaz de la densidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$	130
41 Vorticidad en el dominio completo después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$	131
42 Acercamiento a la vorticidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$	132
43 Campo de velocidad cerca de la parte irregular del domino después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$	133

Figura	Página
44	Líneas de corriente en todo el dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$ 134
45	Acercamiento a las líneas de corriente cerca de la parte irregular del dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$ 135
46	Interfaz de la densidad en el dominio completo después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$ 136
47	Acercamiento a la interfaz de la densidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$ 137
48	Vorticidad en todo el dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$ 138
49	Acercamiento a la vorticidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$ 139
50	Campo de velocidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$ 140
51	Distribución de la densidad en todo el dominio después de 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$ 141
52	Líneas de corriente en todo el dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$ 144
53	Acercamiento a las líneas de corriente en la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$ 145
54	Interfaz de la densidad en el dominio completo después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$ 146
55	Acercamiento a la Interfaz de la densidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$ 147
56	Vorticidad en el dominio completo después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$ 148
57	Acercamiento a la vorticidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$ 149

Figura	Página
58	Campo de velocidad cerca de la parte irregular del domino después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$ 150
59	Líneas de corriente en todo el dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$ 151
60	Acercamineto a las líneas de corriente cerca de la parte irregular del dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$ 152
61	Interfaz de la densidad en el dominio completo después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$ 153
62	Acercamiento a la interfaz de la densidad cerca de la parte irregular del domino después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$ 154
63	Vorticidad en todo el dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$ 155
64	Acercamiento a la vorticidad cerca de la parte irregular del domino después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$ 156
65	Campo de velocidad cerca de la parte irregular del domino después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$ 157
66	Distribución de la densidad en todo el domino después de 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$ 158

Lista de Tablas

Tabla		Página
I	Algoritmos para resolver sistemas lineales que tienen la forma de la ecuación (69), donde n es el número de variables desconocidas.	62
II	Condiciones iniciales que satisface el modelo matemático.	99
III	Condiciones de frontera para la vorticidad, densidad y función corriente para todo el tiempo $t \geq 0$, utilizando condiciones periódicas en $\overline{AF}$ y $\overline{DE}$ para todo el tiempo $t \geq 0$	100
IV	Parámetros del primer Experimento.	101
V	Condiciones de frontera para la vorticidad, densidad y función corriente para todo el tiempo $t \geq 0$, utilizando condiciones de radiación en la frontera abierta del sistema $\overline{DE}$	125
VI	Parámetros del Experimento.	126
VII	Condiciones de frontera para la vorticidad, densidad y función corriente para todo el tiempo $t \geq 0$, utilizando condiciones de radiación en la frontera abierta del sistema $\overline{DE}$	142
VIII	Parámetros del Experimento.	143

Notación

La notación matemática que se utiliza en la tesis se describe en la siguiente tabla.

Símbolo	Descripción
ζ, ρ, ψ	Vorticidad, Densidad, Función Corriente.
ϕ	Representa cualquier función o variable (ζ, ρ, ψ) .
x, z, t	Coordenada espacial horizontal, vertical y el tiempo
i, j, n	Indices que representan el desplazamiento discreto de las variables
	x, z y t
$\phi(x, z, t)$	Función continua.
$\phi_{i,j}^n$	Función discretizada.
$\mathbf{u}$	Vector de velocidad.
u	Componente horizontal del vector de velocidad $\mathbf{u}$.
w	Componente vertical del vector de velocidad $\mathbf{u}$.
$\mathbf{x}$	Letra negrita en minúscula representa un vector.
$\mathbf{A}$	Letra mayúscula negrita representa una matriz.
$\mathbb{R}$	Números reales
$\nabla \mathbf{u}$	Gradiente de un vector
$\nabla \cdot \mathbf{u}$	Divergencia de un vector
$\nabla \times \mathbf{u}$	Rotacional de un vector
$X_{[l_1, l_2]}^N$	X representa la variable a discretizar, N el número de puntos, l_1 limite inferior del dominio y l_2 limite superior del domino.
u_x, u_{xx}	Notación Leibniz para derivadas.
$\Omega, \partial\Omega$	Dominio y frontera del dominio.
$\mathcal{B}(\partial\Omega)$	Condiciones de frontera en el dominio.

Capítulo 1

Introducción

Para poder describir fenómenos en la naturaleza, se crean modelos que permiten representar dichos fenómenos. La mayoría de estos modelos son formulaciones matemáticas, debido a que se puede abstraer la realidad y hacer manipulaciones utilizando el lenguaje de las matemáticas. En algunas ocasiones la solución analítica de estas formulaciones es imposible de obtener por la complejidad del sistema que se está modelando.

Una alternativa que se tiene para atacar los problemas que son intratables de forma analítica, es utilizando técnicas de análisis numérico. Esta estrategia permite aproximar la solución utilizando simples operaciones algebraicas, lo que además permite realizar programas de computadora capaces de resolver estas operaciones. La gran ventaja que nos brinda el uso de la computación, es que se pueden realizar millones de operaciones en un tiempo muy corto, lo que permite resolver problemas cada vez más complejos y con una mejor aproximación a la solución real.

1.1 Descripción del problema y antecedentes

La solución numérica de modelos matemáticos resulta de gran importancia en el ámbito científico ya que permite solucionar una gran cantidad de problemas complejos e imposibles de solucionar analíticamente. La solución numérica de estos modelos va desde las simulación de colisiones de partículas subatómicas (Sentoku y Kemp, 2008), hasta la expansión estelar de la atmósfera en una supernova (Hauschildt y Baron, 1999). En particular, en este trabajo los modelos matemáticos y numéricos están relacionados con

mecánica de fluidos. Por lo anterior, se puede considerar que el problema pertenece a un área llamada Dinámica de Fluidos por Computadora (**CFD**¹). Los problemas que se abordan en CFD, son muy diversos según las propiedades físicas que tenga el fluido (*e.g. densidad, fluido newtoniano, fluido no newtoniano, compresibilidad, etc.*), el tipo de fluido (*e.g. flujo de dos fases, flujo laminar, flujo turbulento, flujo incompresible, etc.*), el fenómeno que se quiere estudiar (*e.g. capa límite, ondas de choque, turbulencia, vorticidad, arrastre, etc.*) y por las aplicación que tiene (*e.g. aerodinámica, meteorología, física de plasma, oceanografía, etc.*).

En este trabajo se soluciona numéricamente un modelo matemático para un fluido estratificado (variaciones en la densidad), incompresible y no hidrostático, propuesto por Cummins *et al.* (1994) para simular el flujo de un fluido pasando a través de un obstáculo en dos dimensiones. El modelo propuesto está basado en las ecuaciones de **Navier-Stokes** y la aproximación de **Boussinesq**, en la formulación de la Vorticidad Función-Corriente². Esta formulación ha sido anteriormente utilizada por otros autores para la solución numérica de la ecuación de Navier-Stokes, utilizando diferentes esquemas numéricos para la discretización y la solución de las ecuaciones diferenciales involucradas en el modelo.

Calhoun (2002) soluciona numéricamente la ecuación de Navier-Stokes con la formulación de la Vorticidad Función-Corriente, utilizando una combinación de diferencias finitas/volumen finito de segundo orden con una malla cartesiana uniforme, en un dominio irregular de dos dimensiones. Ben-Yu y He-Ping (1991) resuelve numéricamente las mismas ecuaciones, pero utilizando el método de elemento-finito pseudoespectral (**PFM**³) para dos y tres dimensiones. Liu y Weinan (2001) proponen un algoritmo

¹Computer Fluid Dynamics, por sus siglas en inglés.

²En inglés Vorticity Stream-Function formulation.

³Pseudospectral Finite-Element Method, por sus siglas en inglés.

basado en el método de elemento finito, con el objetivo de obtener una mayor exactitud que los esquemas basados en diferencias finitas. Udaykumar *et al.* (2001) describen un algoritmo con el método de malla cartesiana y una combinación del método de elemento-finito y pasos fraccionados para la discretización de la ecuación de Navier-Stokes, también considera el movimiento de cuerpos con geometría compleja. Shirokoff y Rosales (2010) utilizan un esquema de diferencias finitas de segundo orden en una malla uniforme, con dominio irregular. La diferencia clave que tiene sobre los enfoques habituales se produce en la frontera, donde se utilizan condiciones de frontera que permitan inequívocamente recuperar la presión a partir de la velocidad en cualquier momento.

El problema de resolver numéricamente flujos de fluidos con diferentes densidades ha sido también estudiado en la literatura; Sussman *et al.* (2007) propone la solución numérica de un fluido de dos fases con dos densidades inmiscibles diferentes, las cuales pueden tener una variación de densidad de 1 a 1000.

Como se puede ver, el problema de solucionar numéricamente las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido estratificado, incompresible y con geometría irregular ha sido tratada de muchas maneras y la razón es que resulta bastante interesante poder describir fenómenos en los que un fluido se ve involucrado.

Particularmente nosotros estamos interesados en el movimiento en un fluido con diferentes densidades al pasar a través de un obstáculo, que tienen muchas aplicaciones en oceanografía y meteorología. Este fenómeno ha sido estudiado por varios autores en la literatura como Cummins *et al.* (2003) y Varela *et al.* (2007). Stastna y Peltier (2004) estudian como es afectada la corriente en la capas inferiores cuando desciende de una gran altura. Por su parte Xing y Davies (2009, 2011) hacen un estudio, de como se generan las ondas internas cuando se tiene dos montañas juntas y como afecta las

ondas que se generan en una, a las que se generan en la otra.

1.2 Planteamiento del problema

Utilizando el modelo matemático para describir el movimiento de un fluido incompresible y estratificado en dos dimensiones propuesto por Cummins *et al.* (1994), se busca obtener la solución numérica de este modelo para encontrar los vectores de velocidad en todo el dominio para cada iteración en el tiempo, considerando que se tiene una geometría irregular (obstáculo). Las condiciones para el flujo de entrada están definidas para cada paso en el tiempo, pero requieren atención especial las condiciones en la frontera abierta del sistema (flujo de salida). Se consideran las condiciones de libre deslizamiento⁴ y de no traspaso en la frontera superior e inferior del dominio. La Figura 1 ilustra la descripción gráfica de la geometría del dominio físico, donde las flechas indican los vectores que se desean encontrar numéricamente.

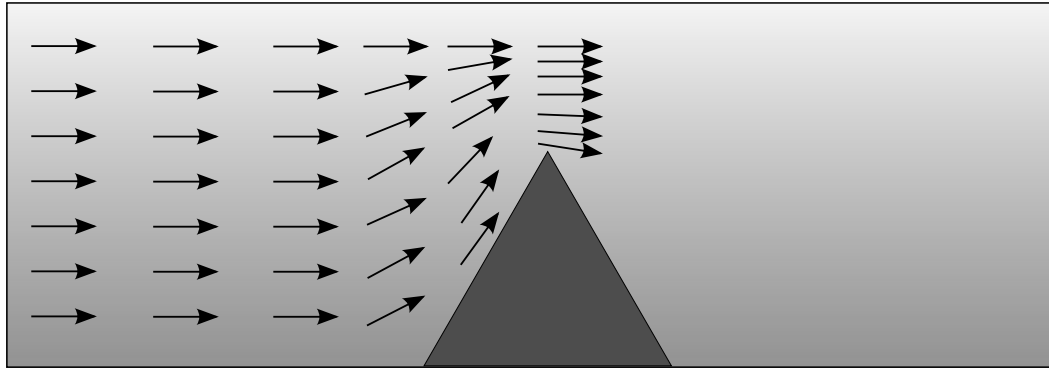


Figura 1: Representación esquemática de la geometría del problema. Las flechas indican los vectores de velocidad que deseamos obtener solucionando numéricamente el modelo matemático propuesto.

⁴free-slip en inglés.

1.3 Justificación y motivación

La solución analítica del modelo matemático no existe, por lo tanto la única forma de obtener resultados es mediante aproximaciones numéricas. La solución numérica del modelo permite fácilmente cambiar tanto la geometría del problema como sus parámetros, mientras que experimentalmente puede ser muy difícil o imposible analizar ciertas geometrías o parámetros.

La motivación para solucionar este tipo de modelos, es por su aplicación a fenómenos de mundo real. En particular estamos interesados en simular un fenómeno de corriente que se presenta en el Golfo de California y se quiere encontrar el flujo resultante, y las variaciones de la densidad generados por la batimetría del fondo del mar, como se ve en la Figura 2.

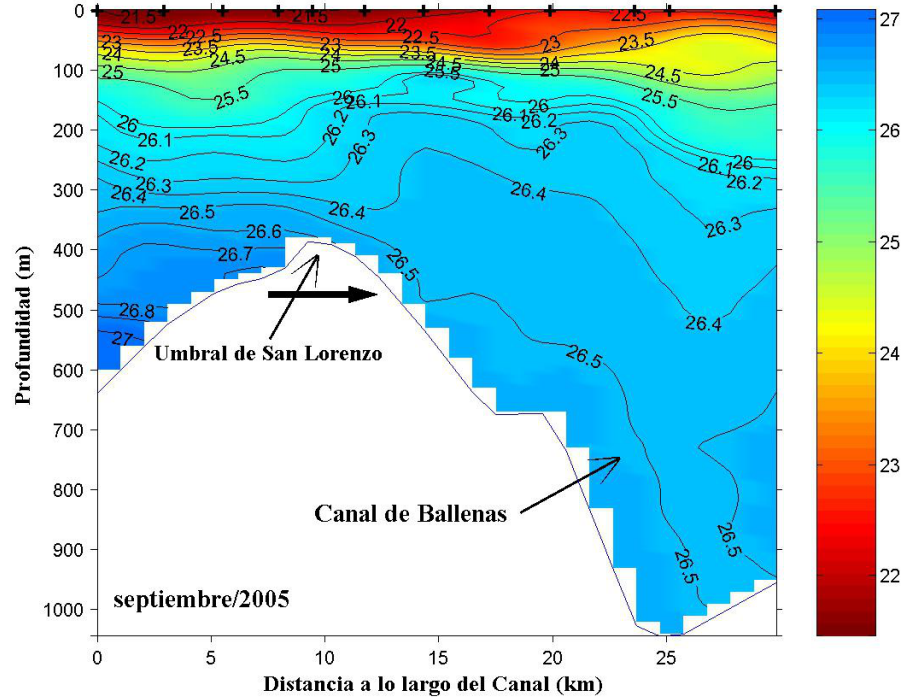


Figura 2: Sección longitudinal del campo de densidad a lo largo del umbral de San Lorenzo en el Golfo de California. Los valores de densidad están en kg/cm^3 menos 1000.

1.4 Objetivos

El objetivo de este trabajo es la solución numérica de un modelo matemático basado en la ecuación de Navier-Stokes, que describe el comportamiento de un fluido incompresible, estratificado y no hidrostático. La solución numérica de este modelo se debe realizar en un dominio con geometría irregular en dos dimensiones espaciales y durante un determinado tiempo.

1.4.1 Objetivo General

Resolver numéricamente el modelo matemático propuesto por Cummins *et al.* (1994) en dos dimensiones espaciales con geometría irregular y con estratificación en la densidad.

1.4.2 Objetivos Específicos

1. Resolver numéricamente la ecuación de Poisson en dos dimensiones con dominio irregular.
2. Resolver numéricamente los términos no lineales (advectivos) de la ecuación de Navier-Stokes.
3. Resolver numéricamente el sistema de ecuaciones del modelo matemático basado en la formulación de la Vorticidad Función-Corriente.
4. Implementar las condiciones de radiación para la frontera abierta.
5. Solucionar numéricamente un problema con parámetros y geometría reales.

1.5 Metodología

La metodología que sigue este trabajo, consta principalmente de dos partes. La primera parte consiste en derivar el modelo matemático para llegar a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales utilizando la formulación de la Vorticidad Función-Corriente en la ecuación de Navier-Stokes, para simplificar matemáticamente el problema. La segunda parte consiste en la solución numérica del sistema de ecuaciones que se genera al utilizar la formulación de la Vorticidad Función-Corriente. Este sistema consta de cuatro ecuaciones, las cuales involucran la solución de la ecuación de Poisson en un dominio irregular de dos dimensiones espaciales para cada paso en el tiempo, dos ecuaciones de evolución que contienen términos no lineales y una ecuación que relaciona la función corriente con el vector de velocidad.

La ecuación de Poisson se soluciona con una combinación del método de la matriz de capacitancia propuesta por Cummins y Vallis (1994) y un esquema para la solución rápida, basado en la transformada discreta seno (Skollermo, 1975).

La solución de las ecuaciones de evolución no lineales que se presentan en el modelo matemático se solucionan utilizando la metodología Flux Corrected Transport (FCT) propuesta por Boris y Book (1973) para tratar físicamente con los términos advectivos, con esquema multidimensional propuesto por Zalesak (1979); para solucionar los pasos en el tiempo utiliza un esquema explícito de diferencias finitas hacia adelante y la parte espacial se soluciona numéricamente con salto de rana ⁵ de segundo y cuarto orden.

La ecuación que relaciona la función corriente con la velocidad se soluciona utilizando diferencias finitas centradas. Para tratar las condiciones de la frontera abierta se utilizan diferentes esquemas propuestos por Miller y Thorpe (1981); Orlanski (1976).

⁵En inglés leap-frog.

1.6 Organización de la tesis

El presente trabajo se encuentra dividido en seis capítulos. El primero consiste en la introducción, donde se muestra una breve descripción del problema que se resuelve en esta tesis, la motivación, objetivos y se mencionan algunos trabajos relacionados. En el Capítulo 2 se presenta la formulación matemática del modelo que se soluciona numéricamente en este trabajo.

El Capítulo 3 muestra la metodología que se usa en este trabajo para resolver numéricamente el modelo matemático propuesto y se describen todos los pasos necesarios para llevar a cabo esta metodología, además se presenta una metodología basada en las diferencias finitas para solucionar los términos no lineales (advectivos) de la ecuación de Navier-Stokes.

En el Capítulo 4 se muestra el desarrollo de las metodologías para la solución numérica de todo el modelo matemático. Se define la discretización del dominio y después se describe la implementación de la solución numérica de cada una de las ecuaciones que componen el modelo matemático. Finalmente se proponen diferentes condiciones de frontera para tratar la frontera abierta del sistema.

En el Capítulo 5 se presentan los resultados de la solución numérica del modelo matemático con diferentes parámetros y diferentes condiciones de frontera. Finalmente el último capítulo presenta las conclusiones del trabajo y se proponen otras ideas a seguir para este proyecto.

Capítulo 2

Modelo Matemático

En este capítulo se presenta el desarrollo para obtener el modelo matemático que describe el movimiento de un fluido incompresible, no hidroestático, con estratificación en las densidades fluyendo a través de un obstáculo en dos dimensiones.

Primero, se muestran una serie de conceptos relacionados a la obtención de modelos matemáticos, los cuales se crean para tratar de describir fenómenos de la naturaleza. En la segunda sección se presenta la derivación de las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido viscoso e incompresible, y sujeto a la aceleración de la gravedad. Posteriormente, se describen las mismas ecuaciones en la formulación Vorticidad Función-Corriente. Finalmente se presenta el modelo completo incluyendo una descripción del dominio y las condiciones de frontera, que se estudia en este trabajo.

2.1 Modelación Matemática

En general, un modelo se puede considerar como una representación de la realidad. Existen diferentes formas de realizar esta representación, gráficamente, esquemáticamente, conceptualmente, matemáticamente, etc. La idea principal es la de intentar dar una representación que se parezca lo mas posible a la realidad, con el objetivo de poder estudiarlo, describirlo, predecirlo, explicarlo, etc.

2.1.1 Modelo matemático

Un modelo matemático es entonces la representación de un fenómeno del mundo real, utilizando los conceptos inherentes a las matemáticas y descrito en el lenguaje matemático. Por lo general, una parte sustancial de esta representación se da en forma de un sistema de ecuaciones, el cual contiene las relaciones entre las diferentes variables involucradas. Muy comunmente estas ecuaciones contienen razones de cambios infinitesimales, las cuales se pueden representar como derivadas y entonces se llaman ecuaciones diferenciales. Resolviendo estas ecuaciones diferenciales podemos encontrar el valor de las variables que nos permiten describir el fenómeno en un momento determinado.

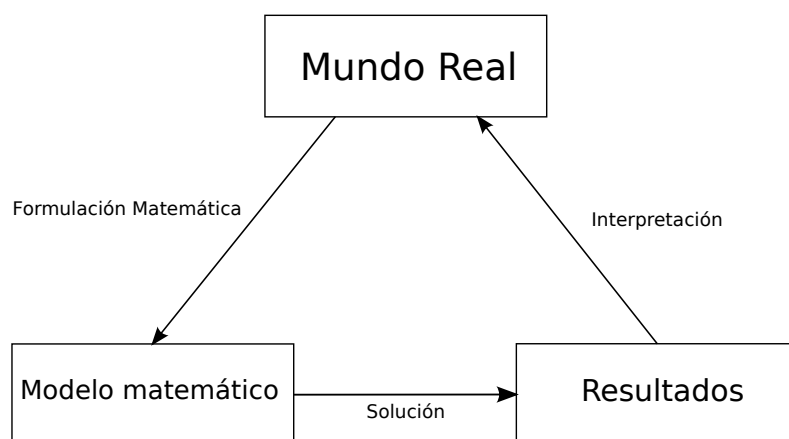


Figura 3: Representación esquemática de un modelo matemático.

La Figura 3 muestra la relación que existe entre un modelo matemático y el mundo real, donde primero se debe abstraer la información que se conoce de un determinado fenómeno y realizar una formulación matemática para crear un modelo matemático. Después, se resuelve esta formulación, se interpretan los resultados, y se realizan predicciones las cuales deben ser muy parecidas al mundo real.

2.1.2 Ecuaciones diferenciales

Una **ecuación diferencial** es una ecuación que involucra derivadas, o razones de cambio infinitesimales (Edwards y Penny, 2008); es por esto que permite representar adecuadamente un modelo matemático, ya que la mayoría de fenómenos que se intentan modelar son dinámicos e involucran razones de cambio (*derivadas*).

El principal objetivo que se busca al resolver una ecuación diferencial, es encontrar el valor de la variable dependiente. Según el número de variables independientes en la ecuación diferencial, estas se dividen en dos grandes grupos

- Ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Ecuaciones diferenciales parciales.

Matemáticamente, la variable dependiente es una función desconocida que se desea resolver en base a la información que se tiene (derivadas de la función desconocida por ejemplo).

En un modelo, la variable dependiente representa lo que se está modelando, por ejemplo si se tiene un modelo que describe como crece cierta población en un determinado tiempo, entonces la variable dependiente es la población P y la variable independiente es el tiempo t . Resolviendo este modelo se encuentra la función $P(t)$, que permite predecir la población en un tiempo específico. Para que la predicción sea correcta es necesario que el modelo sea lo más parecido a la realidad. Sin embargo, es muy difícil poder describir completamente el mundo real debido a la gran cantidad de variables que existen y a la complejidad de los sistemas.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias, son aquellas en donde las variables dependientes son funciones de una sola variable independiente. Una ecuación diferencial de

orden n , es aquella que contiene derivadas de la variable independiente $f(x)$ hasta de orden n . De esta forma si $f^{(n)}(x)$ representa a la n -ésima derivada, la ecuación diferencial tiene la forma:

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0.$$

En muchas ocasiones se puede expresar la derivada de orden mayor en función de todas las derivadas de orden menor y la variable independiente,

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = G(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)).$$

Utilizando esta representación explícita, se puede ver que al integrar n veces ambos lados de la ecuación, se pueden obtener la función de la variable independiente. En el apéndice A se listan algunas propiedades de las ecuaciones diferenciales.

Ecuaciones diferenciales parciales

Las ecuaciones diferenciales parciales son ecuaciones que contienen más de una variable independiente $x_1, x_2, \dots, x_n$ y tiene la forma:

$$F(D^k f(\mathbf{x}), D^{k-1} f(\mathbf{x}), \dots, Df(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

donde $D^k f(\mathbf{x})$ es un operador diferencial que representa las *késima* derivada de la variable dependiente con respecto a todas las variables independientes. Por ejemplo una ecuación diferencial parcial de segundo orden con dos variables independientes x y

y tiene la forma:

$$F(x, y, f(x, y), f_x(x, y), f_y(x, y), f_{xy}(x, y), f_{xx}(x, y), f_{yy}(x, y)) = 0,$$

donde los subíndices indican derivadas parciales con respecto a las variables independientes. Este tipo de ecuaciones son más complejas que las ordinarias y en general permiten dar una descripción más acertada del mundo real, debido a que se pueden considerar cualquier cantidad de variables independientes (Strauss, 1992).

Condiciones iniciales y de frontera

La solución de una ecuación diferencial debe cumplir con cierta información además de satisfacer sus n derivadas. En un modelo matemático esta información representa datos reales obtenidos del fenómeno que se está modelando. Por ejemplo, si buscamos la solución de un modelo que predice el crecimiento de cierta población $P(t)$ cuya razón de cambio es proporcional al número de individuos al tiempo t ,

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad k > 0,$$

cuya solución general,

$$P(t) = Ae^{kt}, \tag{1}$$

define a toda una familia de soluciones para diferentes valores de la constante A , quedará completamente determinada si además sabemos que la ecuación debe satisfacer cierta información a un tiempo determinado. Por ejemplo la población inicial $P(0) = P_0$, entonces para que la solución (1) pueda satisfacer esta condición, es necesario que $A = P_0$.

El hecho de que se necesite información extra es debido a que estamos resolviendo una ecuación que esta en función de sus derivadas, por cada derivada, se pierden términos que son recuperados cuando integra la ecuación para obtener el valor original de la variable dependiente.

Típicamente, las condiciones iniciales indican el valor que la solución y todas sus derivadas de orden menor al orden de la ecuación deben satisfacer en todos los puntos a un tiempo determinado. Para una ecuación diferencial parcial en un dominio espacial $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y que además evoluciona en el tiempo, se tiene la siguiente condición inicial:

$$f(\mathbf{x}, t_0) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

donde $g(\mathbf{x})$ es una función que asigna el valor inicial para cada punto en el dominio Ω al tiempo t_0 . Si además la ecuación involucra una segunda derivada en el tiempo, se requiere entonces una condición para

$$\left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} = h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

donde $h(\mathbf{x})$ es una función que asigna el valor inicial a la primera derivada temporal en cada punto del dominio Ω al tiempo t_0 .

Las condiciones de frontera indican el valor que la solución de la ecuación diferencial debe satisfacer en los puntos de la frontera $\partial\Omega$ del dominio Ω . Cuando se conoce el valor de la función en toda la frontera $\partial\Omega$, se les llaman condiciones de frontera de **Dirichlet**.

En un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ se tienen las siguientes condiciones:

$$f(x_0) = f_0 \quad x_0 \in \partial\Omega,$$

$$f(x_n) = f_n \quad x_n \in \partial\Omega,$$

para el caso de que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se tiene la siguiente condición:

$$f(x, y) = g(x, y) \quad \forall x, y \in \partial\Omega,$$

donde $g(x, y)$ es una función que asigna un valor a cada punto que se encuentra en la frontera $\partial\Omega$. Cuando se conoce el valor de la derivada en la frontera se les llaman condiciones de frontera de **Neumann**; en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ se tienen las siguientes condiciones:

$$f'(x_0) = f_0 \quad x_0 \in \partial\Omega,$$

$$f'(x_n) = f_n \quad x_n \in \partial\Omega,$$

para el caso de que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se tiene la siguiente condición de frontera:

$$D^1 f(x, y) = g(x, y) \quad \forall x, y \in \partial\Omega,$$

donde $D^1 f(x, y)$ es la derivada en una dirección determinada para cada punto que se encuentra en la frontera $\partial\Omega$.

2.2 El movimiento de los fluidos y las ecuaciones de conservación

Para poder escribir el modelo matemático que representa las relaciones de conservación de masa, momentum y energía en un fluido, se debe de llegar primero a una descripción matemática de las variables que intervienen en la descripción del fluido. Además es conveniente adoptar una notación general.

2.2.1 Cambios en las variables de flujo

Una manera de modelar el movimiento de los fluidos se basa en realizar una descripción de lo que pasa en un punto fijo del espacio $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$. En este contexto, conocido como **descripción Euleriana** (Kundu y Cohen, 2004), las variables independientes son el vector posición $\mathbf{r}$ y el tiempo t , de tal manera que una variable de flujo está dada por $F = F(\mathbf{r}, t)$. En cada punto del espacio buscamos un cambio infinitesimal de la variable F siguiendo una partícula de identidad fija $\mathbf{a} = \mathbf{r}(t_0)$, de tal manera que

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \cdot d\mathbf{a}.$$

Si $\mathbf{u}$ es la velocidad en ese punto al instante t , $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$,

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F. \quad (2)$$

Esta cantidad representa el cambio total de F y es llamada la derivada material (o derivada sustancial) de F . Se adopta la notación DF/Dt , para enfatizar el hecho de que la derivada de F con respecto al tiempo, se toma siguiendo al elemento de fluido. Identificando a las componentes de la velocidad en coordenadas cartesianas

cartesianas $\mathbf{u} = (u, v, w)$, la ecuación (2) se escribe como,

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z}. \quad (3)$$

Si por otra parte se considera un campo vectorial,

$$\mathbf{F}(x, y, z, t) = (F_x(x, y, z, t), F_y(x, y, z, t), F_z(x, y, z, t)),$$

la ecuación (2) es una ecuación vectorial, i.e. se tienen 3 ecuaciones del tipo (3), una para cada una de las tres componentes de $\mathbf{F}$. En muchas ocasiones, para facilitar el proceso de escritura de las ecuaciones vectoriales, se adopta una notación indicial $(x, y, z) \rightarrow (x_1, x_2, x_3)$, $(u, v, w) \rightarrow (u_1, u_2, u_3)$ y $(F_x, F_y, F_z) \rightarrow (F_1, F_2, F_3)$, de esta manera, la ecuación (2) se escribe como,

$$\frac{DF_i}{Dt} = \frac{\partial F_i}{\partial t} + u_1 \frac{\partial F_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial F_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial F_i}{\partial x_3} = \frac{\partial F_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j},$$

donde el hecho de que $i = 1, 2, 3$ queda implícito, a menos de que se señale lo contrario.

Para la derivación de las ecuaciones se asumirá además la convención de tomar la suma sobre índices repetidos, con lo cual la relación anterior se puede escribir como,

$$\frac{DF_i}{Dt} = \frac{\partial F_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j}.$$

2.2.2 Conservación de masa

Si tomamos a $\rho = \rho(x, y, z, t)$ como la densidad del fluido, el cambio de masa dentro de un volumen V , estará dado por,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV.$$

En donde dV es un elemento infinitesimal de volumen. Si el volumen V está fijo en el espacio,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Por otra parte, la cantidad de fluido que sale a través de la superficie S que encierra al volumen V , es

$$\int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS.$$

En donde $\mathbf{n}$, es el vector unitario saliente y que es ortogonal al elemento de superficie dS . Suponiendo que no hay una fuente en donde se esté creando masa en el interior del volumen, la conservación de masa en el volumen V , cuya frontera es la superficie S , estará dada por,

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4)$$

La relación (4) es la forma integral de la conservación de masa. Aplicando la relación de Gauss al lado derecho de esta relación y pasando este término al lado derecho, se llega a la siguiente forma de la conservación de masa,

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \right) dV = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0.$$

Utilizando la ecuación (2), la relación anterior se puede escribir como,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (5)$$

Para un fluido incompresible, la derivada material de la densidad es cero, por lo que se llega a la llamada ecuación de continuidad,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (6)$$

2.2.3 Conservación de momentum

Antes de poder escribir una relación que exprese la conservación de momentum, se necesita una descripción de las fuerzas que actúan sobre el fluido. Al aplicar fuerzas sobre la superficie de un elemento de fluido, este sufrirá deformaciones. La razón de deformación del elemento de fluido, queda caracterizada por el tensor de razón de deformación $\mathbf{e}$. En coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) , las nueve componentes del tensor $\mathbf{e} = e_{ij}$ que representan la deformación que sufre el elemento de fluido que tiene forma de paralelepípedo rectangular y cuyas caras son ortogonales a los ejes coordenados, están dados por (Kundu y Cohen, 2004),

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (7)$$

Es evidente que el tensor razón de deformación es simétrico $e_{ij} = e_{ji}$. Los elementos de la diagonal representan deformaciones lineales o normales en cada una de las tres direcciones de los ejes coordenados, mientras que los elementos fuera de la diagonal son

la razón a la que se sufren las deformaciones cortantes.

Una de las aproximaciones que se realiza frecuentemente al describir las fuerzas sobre un elemento de fluido es la de suponer una relación lineal entre los esfuerzos $\boldsymbol{\tau} = \tau_{ij}$ a los que se somete y la razón de deformación,

$$\tau_{ij} = \alpha_{ij} + q_{ij;kl} e_{kl}, \quad (8)$$

en donde α_{ij} es un tensor simétrico y $q_{ij;kl}$ es un tensor de cuarto orden. A los fluidos que cumplen con esta relación constitutiva (8) se les conoce como fluidos Newtonianos. Para un fluido isotrópico, la relación (8) debe ser invariante a traslaciones y rotaciones del sistema de coordenadas, lo que implica que α_{ij} y $q_{ij;kl}$ deben de ser tensores isotrópicos, por lo que deben tener la siguiente forma (Chandrasekhar, 1961; Kundu y Cohen, 2004),

$$\alpha_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (9)$$

y

$$q_{ij;kl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (10)$$

donde p , λ y μ son funciones escalares que dependen del estado termodinámico local del fluido y δ_{ij} es la delta de Kronecker. Al introducir las ecuaciones (9) y (10) en la ecuación (8),

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}e_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})e_{kl},$$

que al tomar las sumas sobre índices repetidos,

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}e_{kk} + 2\mu e_{ij}. \quad (11)$$

Tomando $i = j$ en (11) y sumando sobre índices repetidos,

$$\tau_{ii} = -3p + (3\lambda + 2\mu) e_{ii}. \quad (12)$$

En un fluido estático isotrópico

$$p = -\frac{1}{3}\tau_{ii},$$

es una presión termodinámica la cual queda determinada en función de otras variables termodinámicas como la densidad y la temperatura. Sin embargo, en el caso general, se puede definir una presión mecánica $\bar{p} = -\frac{\tau_{ii}}{3}$ de la ecuación (12), de tal manera que,

$$p - \bar{p} = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) e_{ii}.$$

Debido a que $e_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{u}$, de la ecuación (6) resulta evidente de que para un fluido incompresible $p = \bar{p}$, en cuyo caso la expresión para el tensor de esfuerzos queda como,

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (13)$$

En el caso general, la suposición $p = \bar{p}$, de lo cual resulta que $3\lambda + 2\mu = 0$ es conocida como la aproximación de Stokes y

$$\tau_{ij} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}.$$

Si se denota al vector $\mathbf{g}$ como la fuerza por unidad de masa, debido a un campo de fuerzas externo (la gravedad o un campo magnético). La conservación de momentum (**segunda ley de Newton**), para un volumen material arbitrario $V(t)$ cuya frontera

es la superficie S, queda expresado por,

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \rho \mathbf{g} dV + \int_S \boldsymbol{\tau} dS.$$

Aplicando la relación de Gauss al segundo término del lado derecho y tomando en cuenta que se trata de un fluido incompresible,

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_V \rho \mathbf{g} dV + \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} dV.$$

Dado que el volumen es arbitrario, el integrado por si mismo tiene que satisfacer la relación anterior y el balance de momentum por unidad de volumen estará dada por,

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (14)$$

El segundo término del lado derecho, que expresa las fuerzas por unidad de volumen debido al contacto entre los elementos de fluido (fuerzas de superficie), se puede expresar en forma indicial como (utilizando (13)),

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (-p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\mu \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j}.$$

Utilizando la ecuación de continuidad (6) y la expresión para el tensor rapidez de deformación, ecuación (7), se tiene que para un fluido incompresible y suponiendo que la viscosidad μ es una constante, la expresión para estas fuerzas por unidad de volumen actuando en la dirección de x_i , está dada por,

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = -\nabla p + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}.$$

Lo cual en notación vectorial se expresa como,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (15)$$

Al sustituir la ecuación (15) en la ecuación (14) llegamos a las llamadas ecuaciones de Navier Stokes para un fluido incompresible con viscosidad constante, y que se encuentra bajo la acción de una fuerza externa por unidad de volumen $\mathbf{g}$,

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \equiv \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (16)$$

2.2.4 Aproximación de Boussinesq

En muchas situaciones prácticas, las variaciones en la densidad del fluido son despreciables. Sin embargo, existen situaciones en que la densidad no es constante, pero la condición de incompresibilidad, ecuación (6), sigue siendo válida. Si se considera una perturbación de la densidad,

$$\rho = \rho_0 + \hat{\rho},$$

en donde ρ_0 es la densidad en el estado de reposo cuya presión es p_0 , de tal manera que $\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g}$. Al sustituir esta relación en la ecuación (16) y dividir entre ρ ,

$$\frac{\rho}{\rho_0} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\hat{\rho}}{\rho_0} \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla \hat{p} + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \mathbf{u}.$$

en donde $\hat{p} = p - p_0$. La aproximación de Boussinesq consiste en tomar $\hat{\rho} \ll \rho_0$ de inercia, de tal manera que $\rho/\rho_0 = (1 + \hat{\rho}/\rho_0) \approx 1$ en el término del lado izquierdo.

2.3 Formulación vorticidad función corriente

Si se considera un fluido en tan solo las dos dimensiones espaciales (x, z) , con velocidades correspondientes (u, w) , en donde la gravedad actúa hacia abajo en la dirección z , la ecuación de continuidad es simplemente,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (17)$$

mientras que las ecuaciones de Navier-Stokes bajo la aproximación de Boussinesq, quedan de la siguiente manera,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (18)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\rho}{\rho_0} g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (19)$$

en donde la densidad de referencia ρ_0 y la viscosidad cinemática $\nu = \mu/\rho_0$ son constantes.

2.3.1 La vorticidad en un fluido en dos dimensiones

Si se deriva la ecuación (18) con respecto a z ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + \nu \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \right), \quad (20)$$

y la ecuación (19) con respecto a x ,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial x} + \nu \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial x} \right). \quad (21)$$

Al restar la ecuación (21) a la ecuación (20) y simplificando la expresión resultante,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z} \right] \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Si ahora identificamos a la cantidad

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (22)$$

como la componente y de la vorticidad,

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, 0, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (u, 0, w) = \left(0, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, 0 \right).$$

La ecuación de balance de momentum queda expresada como,

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right) = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \nu \nabla^2 \zeta, \quad (23)$$

en donde ahora ∇^2 es el Laplaciano en dos dimensiones.

2.3.2 La función corriente

Al expresar la ecuación de conservación de momento en la forma (23) se sustituyeron las dos ecuaciones (18) y (19) por una sola. El sistema será equivalente si se define ahora una función corriente $\psi = \psi(x, z, t)$ de tal manera que,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (24)$$

$$w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (25)$$

Con las ecuaciones (24) y (25), la función corriente satisface la ecuación de continuidad (17). Además, de las ecuaciones (24) y (25) se puede ver que la vorticidad (22) y la función corriente quedán relacionadas por la ecuación de Poisson,

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \nabla^2 \psi.$$

2.4 Modelo

2.4.1 Sistema de ecuaciones

En resumen, el sistema de ecuaciones en la formulación vorticidad-función corriente que describe el movimiento de un fluido incompresible, no hidroestático, con estratificación en las densidades que fluye en dos dimensiones bajo la aproximación de Boussinesq que relaciona a la vorticidad $\zeta(x, z, t)$, a la densidad, $\rho(x, z, t)$, a la función corriente y $\psi(x, z, t)$ y al campo de velocidades bidimensional $\mathbf{u} = (u(x, z, t), 0, w(x, z, t))$, es el siguiente,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \nu \nabla^2 \zeta, \quad (27)$$

$$\nabla^2 \psi = \zeta, \quad (28)$$

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \quad (29)$$

Dependiendo del problema que se quiere resolver, el sistema de ecuaciones (26-29) se debe de resolver sujeto a condiciones de frontera para cada una de las variables independientes y especificando condiciones iniciales apropiadas.

2.4.2 Dominio y condiciones de frontera

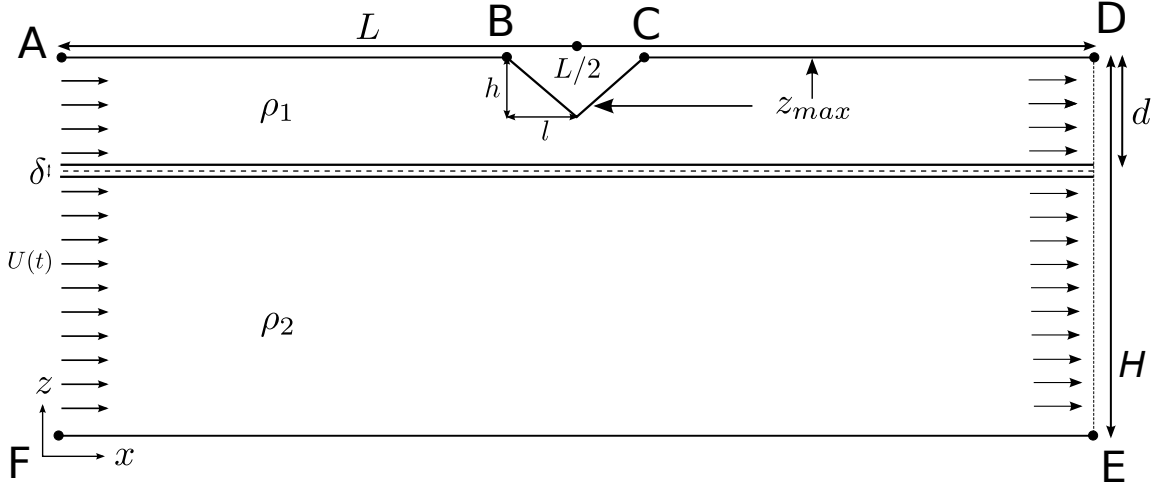


Figura 4: Dominio físico del problema que se estudia en este trabajo.

En el problema que se estudia en este trabajo se resuelve bajo el dominio ilustrado en la Figura 4, se modela como un canal rectangular de longitud L y altura H , en donde entra fluido por un lado $\overline{AF}$ y sale por el otro $\overline{DE}$ con un obstáculo situado en la parte media de la tapa superior. De esta manera, el dominio Ω queda descrito por

$$0 < x < L, \quad 0 < z < H,$$

sujeto a las siguientes condiciones iniciales,

$$\rho(x, z, 0) = G(z), \quad \zeta(x, z, 0) = 0, \quad \psi(x, z, 0) = 0, \quad u(x, z, 0) = 0, \quad w(x, z, 0) = 0,$$

donde ζ es la vorticidad, ρ es la densidad, (u, w) son las componentes horizontal y vertical del vector de velocidad $\mathbf{u}$, $G(z)$ es una función que relaciona la densidad con la

altura,

$$G(z) = \begin{cases} \rho_2 & 0 \leq z \leq H - d - \delta \\ \rho_2 - \Delta\rho \frac{(z - H + d + \delta)}{2\delta} & H - d - \delta < z < H - d + \delta \\ \rho_1 & H - d + \delta \leq z \leq H \end{cases} \quad (30)$$

donde ρ_1 y ρ_2 son las densidades de la capa superior e inferior respectivamente y δ es la separación que existe entre las dos capas de densidades constantes. El modelo también satisface las siguientes condiciones de frontera en la vorticidad para cualquier tiempo $t \geq 0$,

$$\zeta(x, 0, t) = 0, \quad \zeta(x, z_{\max}(x), t) = 0, \quad \zeta(0, z, t) = 0, \quad \zeta(L, z, t) = \zeta_\beta(L, z, t),$$

donde $z_{\max}(x)$ es una función que determina la geometría del obstáculo en la parte superior del rectángulo en base a la coordenada vertical x ,

$$z_{\max}(x) = \begin{cases} H & A \leq x \leq B \\ H - (h/l)(x - B) & B < x < L/2 \\ H + (h/l)(x - C) & L/2 < x < C \\ H & C \leq x \leq D \end{cases}, \quad (31)$$

h/l es la pendiente del triángulo y $\zeta_\beta(L, z, t)$ es una función que varia según en tipo de condiciones que se implementen en la frontera abierta de salida del sistema,

$$\zeta_\beta(L, z, t) = \begin{cases} 0 & t \leq t_a \\ 0 & \text{Condiciones periódicas, } t > t_a \\ \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial t} - c \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial x} = 0 & \text{Condiciones de radiación, } t > t_a \end{cases},$$

el modelo también debe satisfacer las condiciones de frontera para la función corriente en cualquier tiempo $t \geq 0$,

$$\psi(x, 0, t) = 0, \quad \psi(x, z_{\max}(x), t) = F(H, t), \quad \psi(0, z, t) = F(z, t),$$

$$\psi(L, z, t) = \psi_\beta(L, z, t),$$

donde,

$$F(z, t) = \begin{cases} U_0 \frac{t}{t_a} z & t < t_a \\ U_0 z & t \geq t_a \end{cases}, \quad (32)$$

es una función que relaciona la función corriente con la altura z y el tiempo t , y $\psi_\beta(L, z, t)$ es una función que varia según en tipo de condiciones que se implementen en la frontera abierta de salida del sistema,

$$\psi_\beta(L, z, t) = \begin{cases} F(z, t) & t \leq t_a \\ F(z, t) & \text{Condiciones periódicas, } t > t_a \\ \frac{\partial \psi_\beta}{\partial t} - c \frac{\partial \psi_\beta}{\partial x} = 0 & \text{Condiciones de radiación, } t > t_a \end{cases}.$$

Finalmente el modelo también debe satisfacer las siguientes condiciones de frontera para la densidad en cualquier tiempo $t \geq 0$,

$$\rho(x, 0, t) = \rho_2, \quad \rho(x, z_{max}(x), t) = \rho_1, \quad \rho(0, z, t) = G(z), \quad \rho(L, z, t) = \rho_\beta(L, z, t),$$

donde $G(z)$ está dada por la ecuación (30), y $\rho_\beta(L, z, t)$ es una función que varia según en tipo de condiciones que se implementen en la frontera abierta de salida del sistema,

$$\rho_\beta(L, z, t) = \begin{cases} G(z) & t \leq t_a \\ G(z) & \text{Condiciones periódicas, } t > t_a \\ \frac{\partial \rho_\beta}{\partial t} - c \frac{\partial \rho_\beta}{\partial x} = 0 & \text{Condiciones de radiación, } t > t_a \end{cases}.$$

Una vez desarrollado el modelo matemático que describe el flujo de un fluido incompresible, estratificado y no hisdroestático que fluye sobre una geometría irregular, es momento de presentar la metodología que se utiliza para solucionar numéricamente este modelo matemático. Cabe destacar que por la dificultad del modelo no es posible obtener su solución exacta (*analítica*), por lo que se utiliza otras técnicas, que permiten realizar aproximaciones a la solución real. En el siguiente capítulo se presenta la metodología que se utiliza en este trabajo para solucionar numéricamente las ecuaciones que componen el modelo matemático.

Capítulo 3

Solución numérica de ecuaciones diferenciales

La solución analítica de algunas ecuaciones diferenciales puede ser muy difícil de obtener y en algunos casos imposible. Para este tipo de ecuaciones que resultan intratables analíticamente se utilizan técnicas numéricas para realizar una aproximación de la solución. En este capítulo, se describe la metodología de diferencias finitas, que se utiliza para aproximar numéricamente la solución de ecuaciones diferenciales.

3.1 Diferencias Finitas

Diferencias finitas es una metodología que sirve para aproximar numéricamente la solución de ecuaciones diferenciales. La idea central, es la de transformar un problema de cálculo en uno algebraico (Hoffman, 2001). A grandes rasgos, la metodología consiste en,

- Discretizar el dominio físico continuo, en un dominio finito discreto.
- Aproximar las derivadas involucradas en la ecuación diferencial utilizando series de Taylor.
- Substituir las aproximaciones de la variable dependiente y sus derivadas correspondientes en la ecuación diferencial y según sea el caso en las condiciones iniciales y/o de frontera.
- Resolver el sistema de ecuaciones para la variable dependiente.

El primer paso en la metodología es la discretización, la cual consiste en utilizar solamente cierta información del continuo. De esta manera si $u = f(x)$ es una función de la variable x definida en el intervalo $a \leq x \leq b$, el dominio discreto estará dado por el conjunto de $N + 1$ puntos $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\}$, mientras que la variable dependiente toma valores discretos en cada uno de estos puntos,

$$u_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

La información puede ser tomada de manera homogénea (equiespaciada), es decir la distancia entre dos punto contiguos x_i y x_{i+1}

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1,$$

es siempre la misma. Por simplicidad, es común utilizar estos puntos equiespaciados para el cual el *iésimo* punto del dominio queda determinado por,

$$x_i = x_0 + i\Delta x, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (33)$$

Generalmente el punto inicial del dominio $x = a$ coincide con el primer punto discreto $x_0 = a$, mientras que el punto final es $x_N = b$. Claramente, la cantidad de información que se desea mantener está dada por el número de puntos discretos, y casi siempre entre más información, más aproximada será la solución de la ecuación diferencial, pero también aumenta la dificultad de la solución debido a que incrementa el número de variables desconocidas al disminuir la longitud de los incrementos Δx que además

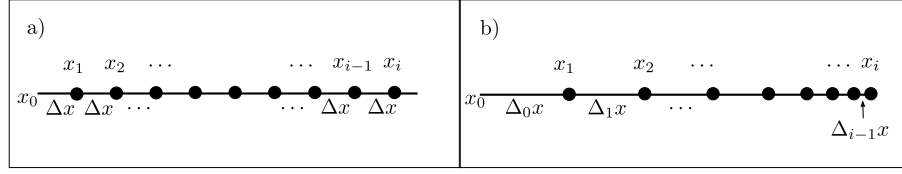


Figura 5: Discretización de los puntos: a) Puntos equiespaciados. b) Puntos no equiespaciados con diferentes incrementos.

depende directamente de la longitud del dominio $L = b - a$. De esta manera,

$$\Delta x = \frac{L}{N}. \quad (34)$$

La distancia entre dos puntos puede también no ser equiespaciada y tener diferentes incrementos $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \Delta_3 x, \dots, \Delta_n x$. Los puntos no equiespaciados usualmente suelen ser usados en problemas donde se requiere mayor precisión en una determinada región del dominio, en la cual se reduce la distancia entre los puntos y se modifican los incrementos. En este caso, el *iésimo* punto discreto queda determinado por,

$$x_i = x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \Delta_k x.$$

Como en el caso anterior, el punto inicial y final son tales que $x_0 = a$ y $x_N = b$. En la Figura 5 se esquematizan puntos equiespaciados y no equiespaciados.

De manera análoga al caso en una dimensión, podemos representar el valor de funciones escalares en dos (o mas) dimensiones $u = f(x, y)$, en cierto número de puntos discretos. Para el caso de dos dimensiones la función toma valores en los $(N + 1) \times (M + 1) \{(x_i, y_j) / i = 0, 1, 2, \dots, N, j = 0, 1, 2, \dots, M\}$ puntos discretos uti-

lizando la siguiente notación,

$$u_{i,j} = f(x_i, y_j), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M. \quad (35)$$

La ecuación (35) representa la discretización de una función continua de dos dimensiones espaciales y en donde para cada una de las direcciones espaciales x y y , se definen incrementos Δx y Δy (ó $\Delta_p x$ y $\Delta_p y$), de manera similar a el caso en una dimensión. Cuando la función depende además del tiempo t , $u = f(x, y, t)$ (como es el caso de las funciones involucradas en este trabajo), utilizaremos la siguiente notación,

$$u_{i,j}^k = f(x_i, y_j, t_k),$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M, \quad k = 0, 1, 2, \dots, P.$$

en donde es usual tomar $t_0 = 0$ y $t_P = T$, en donde $t = T$ es el tiempo máximo para el cual se busca la solución.

El segundo paso de la metodología consiste en aproximar las derivadas utilizando **series de Taylor**. Estas series nos permiten expresar una función como una serie de potencia, donde los coeficientes son las derivadas de la función, en el caso que la función sea infinitamente diferenciable en un intervalo de la recta real (a, b) , se puede expresar la función como una serie infinita (Hildebrand, 1974),

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c) (x - c)^k}{k!}, \quad \forall x, c \in (a, b), \quad (36)$$

en donde $f^{(k)}(c)$ representa a la k ésima derivada en el punto $x = c$. Sin embargo, resolver una serie infinita en lugar de simplificar el problema lo complica aún más. Una

manera de restar complejidad es truncar la serie de Taylor, lo que da como resultado una aproximación a la función en lugar de una igualdad,

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k. \quad (37)$$

Los términos omitidos se pueden ver como un error de magnitud,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}, \quad \xi \in [c, x],$$

es decir, la información que falta para que la ecuación sea una igualdad. Tomando $h = x - c$, la ecuación (37) se puede escribir de nuevo como una igualdad agregando el término del error,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k + \mathcal{O}(h^{n+1}). \quad (38)$$

Si h es suficientemente pequeño, se puede lograr que la aproximación sea muy cercana al valor real. Sin embargo, en el caso discreto en donde $\Delta x \sim h$ esto incrementa el número de puntos discretos, debido a que de la relación (34), se puede ver que $\Delta x \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$, lo cual aumenta el número de variables y la complejidad de la solución. Generalmente, se busca un balance entre el orden de la aproximación y el tamaño de la discretización Δx para obtener una buena aproximación de la solución.

Realizando una aproximación de segundo orden utilizando la ecuación (38) con $n = 1$, tenemos que,

$$f(x) = f(c) + f'(c) \Delta x + \mathcal{O}(h^2). \quad (39)$$

En la Figura 6 se ejemplifica la aproximación al valor de la función en un punto que

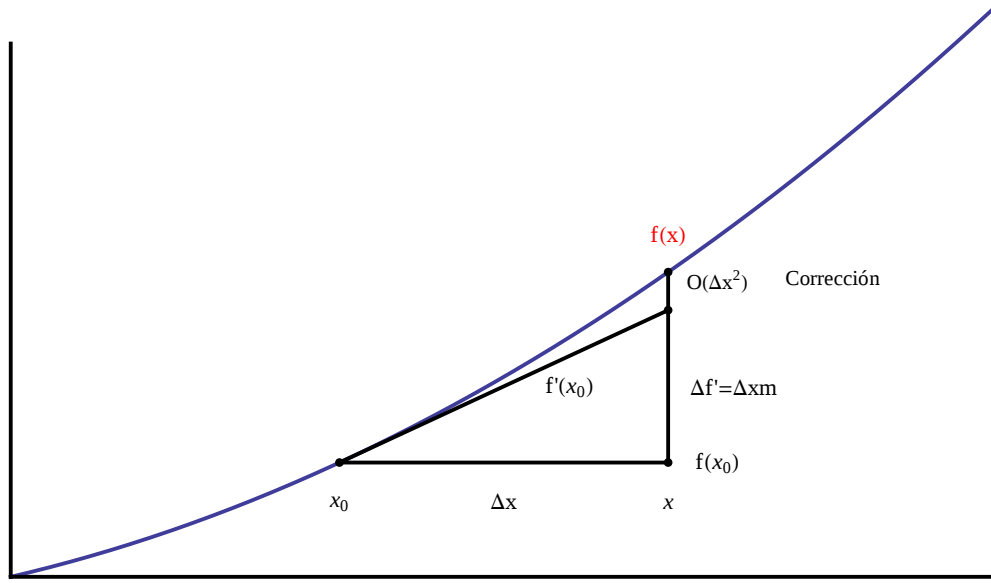


Figura 6: Aproximación de una función $f(x)$ utilizando 2 términos de la serie de Taylor.

está a una distancia h de c , utilizando la serie de Taylor truncada (39), en donde

$$m = \frac{f(x) - f(c)}{h} = \frac{\Delta f}{h},$$

de lo cual

$$\Delta f = mh = f'(c)h. \quad (40)$$

Si ahora se despeja $f'(c)$ de la ecuación (39),

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(c)}{h} + \frac{\mathcal{O}(h^2)}{h} = \frac{f(x) - f(c)}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (41)$$

se obtiene el valor de la primera derivada de $f(x)$ en el punto $x = c$ con una aproximación $\mathcal{O}(h)$, lo cual significa que es una aproximación de primer orden. Al tomar el caso discreto para $u = f(x)$ $x_i = c$ y $h = \Delta x$ se tiene la aproximación de la primera derivada en el punto $x = x_i$, conocida como diferencias finitas hacia adelante, que utiliza

la información de la función en los puntos x_i y x_{i+1} ,

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = f'(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x). \quad (42)$$

Procediendo de una forma análoga con $h = -\Delta x$, se obtiene una aproximación de la primera derivada en el punto $x = x_i$, conocida como diferencias finitas hacía atrás,

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = f'(x_i) = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x). \quad (43)$$

Al retener dos términos mas en la serie de Taylor truncada (38) se tienen las siguientes relaciones para $h = \Delta x$ y $h = -\Delta x$,

$$u_{i+1} = u_i + f'(x_i) \Delta x + \frac{1}{2} f''(x_i) \Delta x^2 + \frac{1}{6} f'''(x_i) \Delta x^3 + \mathcal{O}(\Delta x^4), \quad (44)$$

$$u_{i-1} = u_i - f'(x_i) \Delta x + \frac{1}{2} f''(x_i) \Delta x^2 - \frac{1}{6} f'''(x_i) \Delta x^3 + \mathcal{O}(\Delta x^4), \quad (45)$$

respectivamente. Al restar (45) de (44),

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2f'(x_i) \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

se llega a una aproximación $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ de la primera derivada en el punto $x = x_i$ con diferencias finitas centrales,

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = f'(x_i) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (46)$$

Análogamente, se puede aproximar la segunda derivada en el punto $x = x_i$ con diferencias finitas hacia adelante truncando (38) con $n = 3$, tomando primero $h = \Delta x$

y luego $h = 2\Delta x$,

$$u_{i+1} = u_i + f'(x_i) \Delta x + \frac{1}{2} f''(x_i) \Delta x^2 + \frac{1}{6} f'''(x_i) \Delta x^3 + \mathcal{O}(\Delta x^4),$$

$$u_{i+2} = u_i + 2f'(x_i) \Delta x + 2f''(x_i) \Delta x^2 + \frac{4}{3} f'''(x_i) \Delta x^3 + \mathcal{O}(\Delta x^4),$$

de las cuales se elimina $f'(x_i)$, para llegar a la fórmula deseada,

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i = f''(x_i) = \frac{-u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x). \quad (47)$$

Se puede llegar a una fórmula para la segunda derivada en el punto $x = x_i$ con diferencias finitas centrales, si ahora se suman (44) y (45),

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i = f''(x_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2); \quad (48)$$

la cual resulta ser $\mathcal{O}(\Delta x^2)$.

Las aproximaciones a las derivadas que se han obtenido, se pueden ver como las derivadas de los polinomios que interpolan localmente en la vecindad del punto $(x_i, f(x_i))$, por lo que en la mayoría de los casos, las aproximaciones que utilizan mas puntos aumentan el grado del polinomio interpolante y en consecuencia aumenta el orden de la aproximación de la derivada particular. En el Apéndice B se muestra el desarrollo de otras fórmulas de aproximación a las derivadas.

Una vez que se hayan realizado las aproximaciones a las derivadas utilizando series de Taylor truncadas, estas se sustituyen en las ecuaciones diferenciales involucradas, que resulta en un sistema algebraico. Para aproximar una derivada de un orden particular, la elección de la fórmula de diferencias finitas no depende tan solo del orden de la

aproximación que se desea, si no también de otros factores como la convergencia del método y la información propia del problema específico. Esto queda mejor ilustrado con los ejemplos que se muestran a continuación.

Supongamos primero que se quiere resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y'(x) = F(x, y(x)), \quad (49)$$

en donde en general $F(x, y(x))$ puede ser una función complicada de x y y . La ecuación (49), se resuelve sujeta a la condición inicial,

$$y(0) = a. \quad (50)$$

Como un caso particular consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea para la cual,

$$F(x, y(x)) = ky(x), \quad (51)$$

y que tiene la solución ,

$$y(x) = ae^{kx}. \quad (52)$$

De (33), la discretización estará dada por,

$$x_i = i\Delta x,$$

con $y_0 = a$. Por lo que se busca la solución discreta en los puntos,

$$y_i = y(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Al sustituir en la ecuación diferencial (49) la fórmula de diferencias finitas hacia adelante (42) para $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ y con $F_i = F(x_i, y_i)$, se obtiene la fórmula recursiva,

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x F_i.$$

en donde se ha omitido el orden de la aproximación que en este caso es $\mathcal{O}(\Delta x^2)$, sin embargo este orden en la aproximación es tan solo en un paso, después de N pasos hay un error acumulado y el método es en realidad $\mathcal{O}(\Delta x)$.

Para el caso particular (51),

$$y_{i+1} = y_i (1 + k\Delta x),$$

que al iterar $N - 1$ veces,

$$y_N = y_0 (1 + k\Delta x)^{N-1}.$$

Notemos que en el límite cuando $n \rightarrow \infty$, la solución se mantiene acotada solo si $|1 + k\Delta x| < 1$,

$$-2 < k\Delta x < 0.$$

El caso en que $k > 0$, la solución exacta crece exponencialmente, sin embargo, el caso en que $k < 0$, para el cual la solución exacta decrece exponencialmente, el método numérico es estable si y solo si Δx es suficientemente pequeño,

$$\Delta x < \frac{2}{|k|}.$$

Si ahora se sustituye la derivada en la ecuación diferencial (49) con diferencias finitas hacia atrás (43) para $i = 1, 2, \dots, N$,

$$y_i = y_{i-1} + F_i \Delta x,$$

lo cual define un sistema de N ecuaciones con N incógnitas que depende de la forma de $F(x, y)$ y que puede resultar difícil de resolver. Para el caso lineal (51),

$$y_i = \frac{y_{i-1}}{(1 - k\Delta x)},$$

que al iterar N veces,

$$y_N = \frac{y_0}{(1 - k\Delta x)^N}.$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, la solución crece para toda $k > 0$ y decrece para $k < 0$ como era de esperarse.

Usando diferencias centrales,

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2\Delta x F_i,$$

aumenta el orden de la aproximación, pero resulta en un sistema que involucra a tres puntos consecutivos de la malla.

3.2 Diferencias finitas en la solución de ecuaciones diferenciales parciales

Para ilustrar el proceso completo de la utilización del método de diferencias finitas incluyendo la solución del sistema de ecuaciones resultante, a continuación se consideran ejemplos particulares de la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales

lineales utilizando esta metodología.

Solución numérica de la ecuación de onda en una dimensión

La ecuación de onda es una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden que describe el comportamiento físico que tienen las ondas (acústicas, eléctricas, magnéticas, etc.) y tiene la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \nabla^2 u = 0. \quad (53)$$

En una sola dimensión espacial la ecuación (53) toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in (0, L), \quad t > 0, \quad (54)$$

donde $u = u(x, t)$ es una función escalar que describe la onda (altura) en función de la variable independiente del tiempo t y la posición x en el intervalo $(0, L)$ de la recta real. La solución de (53) se busca sujeta a las condiciones de frontera homogéneas,

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (55)$$

y bajo las siguientes condiciones iniciales,

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x), \quad 0 < x < L. \quad (56)$$

La discretización del dominio espacial se lleva a cabo utilizando $M + 1$ puntos discretos,

$$\Delta x = \frac{L}{M},$$

mientras que la discretización en el tiempo se calcula para cada cierto intervalo de tiempo

$$\Delta t = \frac{T}{N},$$

donde T es el tiempo total y N es el número de puntos temporales en donde se desea discretizar. De esta manera, la solución al problema (53-56) en el punto $x_i = i\Delta x$ y al tiempo $t_j = j\Delta t$, esta dada por,

$$u_i^j = u(x_i, t_j), \quad i = 0, 1, \dots, M+1, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Realizando la aproximación de segundo orden con diferencias finitas centrales (48) de las derivadas de orden dos que aparecen en (53),

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{(x_i, t_j)} = \frac{1}{(\Delta t)^2} (u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}) + \mathcal{O}(\Delta t^2),$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(x_i, t_j)} = \frac{1}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

Al sustituir estas expresiones en (53),

$$\frac{1}{\Delta t^2} (u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}) = \frac{\alpha^2}{\Delta x^2} (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j), \quad (57)$$

y despejando (57) queda una expresión para la solución al tiempo t_{j+1} ,

$$u_i^{j+1} = 2(\beta - 1)u_i^j + \beta(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - u_i^{j-1}, \quad (58)$$

en donde,

$$\beta = \left(\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2. \quad (59)$$

Se puede observar que dadas las condiciones de frontera (55),

$$u_0^j = u_M^j = 0, \quad (60)$$

para todo j . Utilizando las condiciones iniciales (56) se puede notar primero que,

$$u(x_i, t_0) = u_i^0 = f(x_i) = f_i, \quad i = 1, \dots, M-1. \quad (61)$$

Por otra parte, la solución u_i^{j+1} en (58) es función de la solución a los tiempos t_j y t_{j-1} , por lo cual se aproxima $\partial u(x, 0) / \partial t = g(x)$ con diferencias centrales (46),

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(x_i, 0)} = \frac{1}{2\Delta t} (u_i^1 - u_i^{-1}) = g(x_i) = g_i.$$

Despejando u_i^{-1} introduciéndolo en (58) con $j = 0$,

$$u_i^1 = (\beta - 1) u_i^0 + \frac{\beta}{2} (u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0) + \Delta t g_i, \quad i = 1, \dots, M-1 \quad (62)$$

y usando (61) y (60),

$$u_i^1 = \begin{cases} (\beta - 1) f_1 + \beta f_2 / 2 + \Delta t g_1 & i = 1 \\ (\beta - 1) f_i + \beta (f_{i+1} + f_{i-1}) / 2 + \Delta t g_i, & i = 2, \dots, M-2 \\ (\beta - 1) f_m + \beta f_{m-2} / 2 + \Delta t g_{m-1} & i = M-1 \end{cases} \quad (63)$$

(58) se puede expresar como un sistema matricial para, $j = 1, 2, \dots, N - 1$,

$$\begin{bmatrix} u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ u_3^{j+1} \\ \vdots \\ u_{m-2}^{j+1} \\ u_{m-1}^{j+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ u_3^j \\ \vdots \\ u_{m-2}^j \\ u_{m-1}^j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1^{j-1} \\ u_2^{j-1} \\ u_3^{j-1} \\ \vdots \\ u_m^{j-1} \\ u_{m-1}^{j-1} \end{bmatrix},$$

donde la matriz $\mathbf{A}$ está dada por,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2(\beta - 1) & \beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta & 2(\beta - 1) & \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta & 2(\beta - 1) & \beta & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \beta & 2(\beta - 1) & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta & 2(\beta - 1) \end{bmatrix},$$

en donde se utilizan (61) y (63) para calcular u_i^0 y u_i^1 , respectivamente.

3.2.1 Solución numérica de la ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson (64) es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, lineal y no homogénea,

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (64)$$

que usualmente se escribe simplemente como,

$$\nabla^2 u = f,$$

donde ∇^2 es un operador diferencial lineal, mejor conocido como **operador Laplaciano**¹. En un sistema cartesiano el operador toma la siguiente forma:

$$\nabla^2 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2},$$

donde x_k representa cada una de las variables independientes involucradas en $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. En coordenadas cartesianas, la ecuación de Poisson (64) en dos dimensiones tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (65)$$

La ecuación (65) definida en el rectángulo $x \in (-a, a)$, $y \in (-b, b)$ y sujeta a las condiciones de frontera de Dirichlet,

$$u(x, -b) = g_1(x), \quad u(x, b) = g_2(x), \quad x \in (-a, a), \quad (66)$$

$$u(-a, y) = h_1(y), \quad u(a, y) = h_2(y), \quad y \in (-b, b), \quad (67)$$

se puede resolver fácilmente con el método de diferencias finitas. La discretización del dominio estará dada por,

$$x_i = x_0 + i\Delta x, \quad i = 0, \dots, N,$$

$$y_j = y_0 + j\Delta y, \quad j = 0, \dots, M,$$

¹En ocasiones el operador laplaciano es escrito simplemente como Δ , pero en este trabajo reservamos Δ para los incrementos.

con

$$\begin{aligned}x_0 &= -a, & x_N &= a, \\ y_0 &= -b, & y_M &= b,\end{aligned}$$

de tal manera que,

$$\Delta x = \frac{2a}{N}, \quad \Delta y = \frac{2b}{M}.$$

La solución discreta $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$ a (65) se puede encontrar utilizando diferencias finitas centrales (48) para aproximar el Laplaciano en dos dimensiones,

$$\nabla^2 u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = f_{i,j},$$

en donde $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$.

Considerando $\alpha = \Delta x = \Delta y$ podemos simplemente expresar la ecuación anterior como,

$$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} = \alpha^2 f_{i,j}.$$

Para el caso cuando es necesario tomar $\Delta x \neq \Delta y$ definimos,

$$\alpha = \Delta x, \quad \beta = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2, \quad \gamma = -2(\beta + 1)$$

en cuyo caso,

$$u_{i+1,j} + \beta u_{i,j+1} + \gamma u_{i,j} + \beta u_{i,j-1} + u_{i-1,j} = \alpha f_{i,j}. \quad (68)$$

La relación (68) define un sistema lineal de $(N-1) \times (M-1)$ ecuaciones con $(N+1) \times (M+1)$ variables (aunque en realidad no se consideran los 4 valores de

las esquinas). La información faltante viene de las condiciones de frontera (66-67).

$$u_{i,0} = g_1(x_i), \quad u_{i,M} = g_2(x_i), \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$u_{0,j} = h_1(y_j), \quad u_{N,j} = h_2(y_j), \quad j = 1, \dots, M-1,$$

Por ejemplo, si se quiere resolver la ecuación de Poisson (65) en dos dimensiones, con condiciones de frontera (66-67) para $N = M = 4$, entonces el número de ecuaciones y variables desconocidas es $3 \times 3 = 9$. El sistema lineal de ecuaciones resultante es,

$$\begin{bmatrix} 2\gamma & 1 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\gamma & 1 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\gamma & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 2\gamma & 1 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 1 & 2\gamma & 1 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 1 & 2\gamma & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 2\gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 1 & 2\gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 1 & 2\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \\ u_{1,3} \\ u_{2,3} \\ u_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha f_{1,1} - u_{0,1} - \beta u_{1,0} \\ \alpha f_{2,1} - \beta u_{2,0} \\ \alpha f_{3,1} - u_{4,1} - \beta u_{3,0} \\ \alpha f_{1,2} - u_{0,2} \\ \alpha f_{2,2} \\ \alpha f_{3,2} - u_{4,2} \\ \alpha f_{1,3} - u_{0,3} - \beta u_{1,4} \\ \alpha f_{2,3} - \beta u_{2,4} \\ \alpha f_{3,3} - u_{4,3} - \beta u_{3,4} \end{bmatrix}$$

Una cosa importante que se debe notar, es que siempre se debe tener 5 valores de u en todas las ecuaciones, por ejemplo en la ecuación uno se tiene 3 en la primera fila de la matriz y dos condiciones de frontera al lado derecho de la igualdad, para un total de 5, esto se debe mantener para todas las ecuaciones. En general, el sistema de ecuaciones que se forma considerando que se tienen condiciones de frontera a partir de las aproximaciones de diferencias finitas de segundo orden para la ecuación (65), tiene

la forma,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & \dots & \beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \beta & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{\text{N-3}} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{i-1,1} \\ \vdots \\ u_{i-1,j-1} \end{bmatrix} = \mathbf{B}, \quad (69)$$

donde,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \Delta\alpha^2 f_{1,1} - u_{0,1} - \beta u_{1,0} \\ \Delta\alpha^2 f_{2,1} \\ \vdots \\ \Delta\alpha^2 f_{i-1,1} - u_{i,1} - \beta u_{i-1,0} \\ \vdots \\ \Delta\alpha^2 f_{i-1,j-1} \end{bmatrix},$$

resolviendo este sistema se obtiene la solución numérica de la Ecuación de Poisson en dos dimensiones (65) con condiciones de frontera de Dirichlet.

3.3 El método FCT para la solución de ecuaciones de conservación

La solución del término no lineal que aparece en la ecuación de Navier-Stokes (27) y en general para diferentes ecuaciones de evolución, se puede resolver utilizando diferentes esquemas para tratar los términos no lineales que llegan a aparecer en la ecuación diferencial. Sin embargo, esto no asegura la solución adecuada del problema físico. En esta sección, se presenta una metodología que surge considerando la física del problema y que toma en consideración los términos de transporte, conservación, difusión y advección de la ecuación.

3.3.1 Flux Corrected Transport

Flux Corrected Transport (**FCT**) es un algoritmo basado en diferencias finitas diseñado por Boris y Book (1973) para solucionar ecuaciones diferenciales que describen relaciones de conservación de una variable física y que, en general son no lineales,

$$\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t) = 0, \quad (70)$$

donde $\mathbf{q}$ y $\mathbf{f}$ son funciones vectoriales de las variables independientes $\mathbf{x}$ y t . De esta manera, el método puede ser usado para resolver diferentes tipos de ecuaciones de conservación como, la ecuación de continuidad de un medio compresible,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (71)$$

las ecuaciones de Euler (momentum),

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) + \nabla p + \rho \mathbf{g} = 0,$$

y la ecuación de Navier-Stokes,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{u},$$

entre otras.

Las principales ventajas del método FCT es que se puede adecuar para ser de orden alto, monotónicamente conservativos y no arroja resultados muy pronunciados ni con valores negativos. Esto último resulta de mucha utilidad cuando se trabaja con algunas propiedades físicas, por ejemplo si se quiere resolver numéricamente la densidad, el método asegura que los resultados no sean valores negativos, ya que no existen densidades negativas.

La idea central del método consiste en representar las variables conservativas mediante flujos. Cada uno de los flujos representan la información que entra y sale en cada punto discreto del dominio, con esto se asegura de que la información se conserve (solo transporte). Tomando como ejemplo ilustrativo, se considera la ecuación de continuidad (71) en una sola dimensión,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (72)$$

Utilizando diferencias finitas hacia adelante para aproximar las derivadas, resulta la siguiente aproximación de primer orden,

$$\rho_i^{j+1} = \rho_i^j - \varepsilon [\rho_{i+1}^j - \rho_i^j], \quad (73)$$

en donde se ha utilizado la notación usual $\rho_i^j = \rho(x_i, t_j)$, mientras que $\varepsilon = u\Delta t/\Delta x$ representa al número de Courant (Courant *et al.*, 1967). El número de Courant resulta de particular importancia debido a que funciona como criterio de convergencia. Para

este ejemplo particular se debe cumplir que $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Resulta que este esquema explícito (73) hace que se presente difusión numérica, para la cual se necesita un esquema de mayor orden, pero esto puede resultar en problemas de estabilidad si la cantidad ρ se debe mantener positiva.

Por otra parte, en el FCT se propone un esquema de flujos numéricos que conectan a celdas adyacentes los cuales se utilizan para avanzar la solución en el tiempo,

$$\rho_i^{j+1} = \rho_i^j - \frac{1}{(\Delta x)_i} [F_{i+1/2} - F_{i-1/2}],$$

en donde,

$$F_{i+1/2} = u_{i+1/2}^j \rho_{i+1/2}^j \Delta t,$$

y,

$$\begin{aligned} u_{i+1/2}^j &= \frac{1}{2} [u_{i+1}^j + u_i^j], \\ \rho_{i+1/2}^j &= \frac{1}{2} [\rho_{i+1}^j + \rho_i^j]. \end{aligned}$$

Sin embargo el hecho de considerar las variables como flujos no asegura que la solución numérica sea la correcta. En el FCT los flujos son calculados dos veces en cada paso en el tiempo. Primero se utiliza un algoritmo para calcular flujos de orden bajo que garantiza soluciones positivas. Se calculan además flujos de orden alto principalmente en las partes suaves del dominio. En el FCT en cada paso temporal se construyen los flujos netos como promedios ponderados de estas dos cantidades, tratando de dar prioridad a los flujos altos siempre y cuando se garantice la existencia de cantidades físicas positivas.

3.3.2 Solución en una dimensión

En una sola dimensión espacial la ecuación (70) tiene la forma,

$$\frac{\partial \mathbf{q}(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(\mathbf{q}, x, t)}{\partial x} = 0$$

donde $\mathbf{q}$ puede ser cualquier variable conservativa de las variables independientes x y t . Utilizando este hecho, podemos representar a los flujos como información conservativa que entra y sale de una celda, por lo tanto el flujo que sale en una celda debe ser el mismo que entra, como se ilustra en la Figura 7. Sin embargo, esto no es suficiente debido a que no se está considerando la difusión utilizando simplemente el esquema conservativo, para ello es necesario definir unos flujos antidifusivos y restarlos.

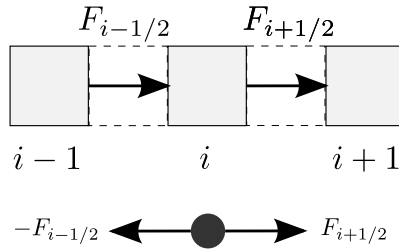


Figura 7: Flujos de entrada y salida de una celda, en una dimensión.

Es necesario además utilizar un limitador para evitar la formación de picos en la parte suave del dominio o en los lugares donde surgen cambios muy abruptos. La construcción de este limitador debe asegurar no generar valores negativos para los casos donde la variable física no pueda tener este tipo de valor. Realizando todas estas consideraciones la metodología se puede resumir en los siguientes seis pasos:

- Soluciona los flujos de orden bajo $F_{i+(1/2)}^L$ utilizando un método que garantice la

obtención de valores físicos según el problema (e.g. una densidad negativa es un valor físico imposible).

- Soluciona los flujos de orden alto $F_{i+(1/2)}^H$ utilizando un esquema que tenga gran exactitud en la partes suaves del problema que se este resolviendo.
- Definir los flujos antidifusivos como:

$$A_{i+(1/2)} \equiv F_{i+(1/2)}^H - F_{i+(1/2)}^L$$

- Solucionar el paso en el tiempo para los flujos de orden bajo:

$$q_i^{td} = q_i^n - \frac{1}{(\Delta x)_i} [F_{i+(1/2)}^L - F_{i-(1/2)}^L]$$

- Se limitan los flujos antidifusivos de tal manera que q_i^{n+1} tenga valores físicos:

$$A_{i+(1/2)}^C = A_{i+(1/2)} C_{i+(1/2)}, \quad 0 \leq C_{i+(1/2)} \leq 1$$

- Se calcula q_i^{n+1} aplicando los flujos antidifusivos:

$$q_i^{n+1} = q_i^{td} - \frac{1}{(\Delta x)_i} [A_{i+(1/2)}^C - A_{i-(1/2)}^C]$$

Los pasos anteriores se deben realizar para cada punto discreto en el domino espacial, por cada iteración en el tiempo.

3.3.3 Solución en dos dimensiones

La solución en múltiples dimensiones fue propuesta por Zalesak (1979) como extensión del trabajo de Boris y Book (1973). El aporte especial que tuvo Zalesak fue en la definición de los limitadores para múltiples dimensiones.

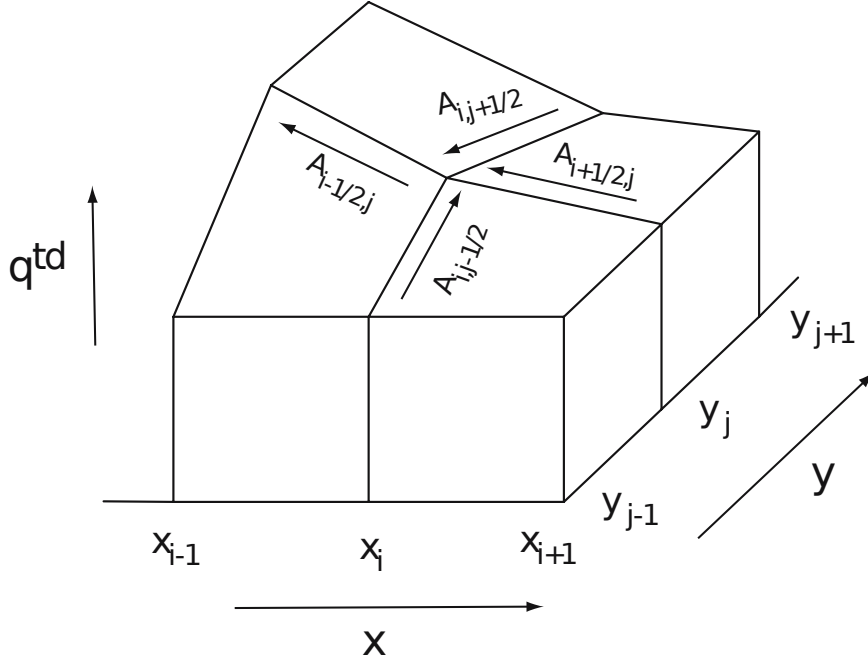


Figura 8: Representación de los flujos antidifusivos en dos dimensiones.

La Figura 8 representa la corrección de los flujos antidifusivos que se realiza sobre q^{td} que representa solamente el transporte de la variable conservativa. En dos dimensiones la ecuación (70) tiene la forma,

$$\frac{\partial \mathbf{q}(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}, x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}, x, y, t)}{\partial y} = 0,$$

donde $\mathbf{q}$ es una variable conservativa, y de la misma forma que se conservan en una sola dimensión, en dos dimensiones todos los flujos deben conservarse como se muestra en la

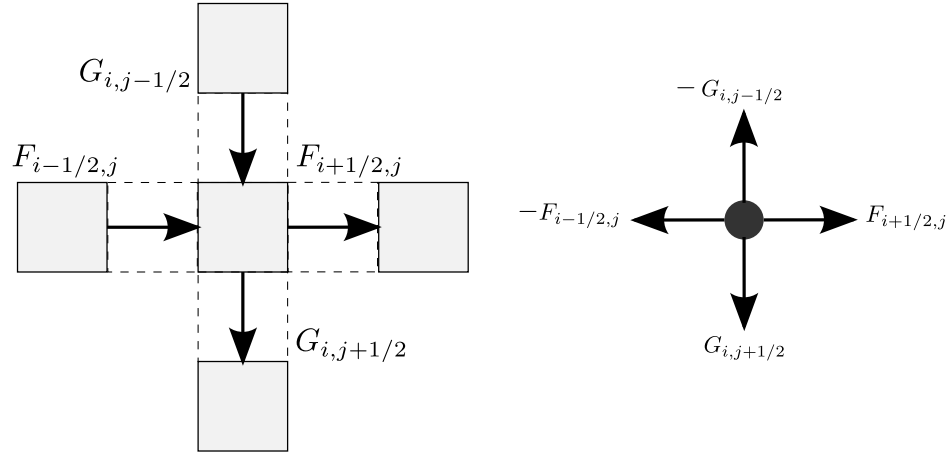


Figura 9: Flujos de entrada y salida de una celda, en dos dimensiones.

Figura 9. Similarmente al caso de una sola dimensión, la solución para dos dimensiones requiere los siguientes seis pasos:

- Se calculan los flujos de orden bajo $F_{i+(1/2),j}^L$ y $G_{i,j+(1/2)}^L$ usando un método que garantice no generar valores no físicos, según el problema.
- Se calculan los flujos de orden alto $F_{i+(1/2),j}^H$ y $G_{i,j+(1/2)}^H$ usando un método que asegure gran exactitud en las partes suaves.
- Se definen los flujos antidifusivos:

$$A_{i+1/2,j} \equiv F_{i+1/2,j}^H - F_{i+1/2,j}^L,$$

$$A_{i,j+1/2} \equiv F_{i,j+1/2}^H - F_{i,j+1/2}^L,$$

- Soluciona el paso en el tiempo para los flujos de orden bajo:

$$q_{i,j}^{n+1} = q_{i,j}^{td} - \Delta V_{i,j}^{-1} [F_{i+1/2,j}^L - F_{i-1/2,j}^L + G_{i,j+1/2}^L - G_{i,j-1/2}^L],$$

donde $(\Delta V)_{i,j} = (\Delta x)_i (\Delta y)_j$ representa el área de la celda en la posición i, j cuando solo se consideran dos dimensiones espaciales. Cuando son n dimensiones ΔV representa los incrementos de todas las variables independientes, en ese determinado punto a excepción de la variable independiente del tiempo.

- Se limitan los flujos antidifusivos, considerando un esquema que asegure valores no físicos, al momento de calcular $q_{i,j}^{n+1}$:

$$A_{i+(1/2),j}^C = C_{i+(1/2),j} A_{i+(1/2),j} \quad 0 \leq C_{i+(1/2),j} \leq 1,$$

$$A_{i,j+(1/2)}^C = C_{i,j+(1/2)} A_{i,j+(1/2)} \quad 0 \leq C_{i,j+(1/2)} \leq 1$$

- Finalmente se soluciona $q_{i,j}^{n+1}$ aplicando los flujos antidifusivos:

$$q_{i,j}^{td} = q_{i,j}^n - \Delta V_{i,j}^{-1} [A_{i+(1/2),j}^C - A_{i-(1/2),j}^C + A_{i,j+(1/2)}^C - A_{i,j-(1/2)}^C]$$

Del mismo modo que en una sola dimensión, todos los pasos anteriores se deben calcular para cada punto en el dominio discreto, por cada iteración en el tiempo.

Capítulo 4

Implementación

En este capítulo se presenta la solución numérica del modelo matemático que se obtuvo en el Capítulo 2 para describir el movimiento de un fluido incompresible, no hidroestático, con estratificación en las densidades que fluye en dos dimensiones. El modelo (26-29) se resuelve utilizando diferencias finitas y el algoritmo “Flux Corrected Transport” (**FCT**) para tratar los términos advectivos que aparecen en el sistema de ecuaciones, como se describió en el Capítulo 3. La solución numérica del sistema se realiza sobre un dominio bidimensional con geometría irregular sujeto a las condiciones de frontera que se establecieron en el Capítulo 2.

Primero se detalla el dominio físico del problema y su discretización. Después se describe la solución de la ecuación de Poisson (28) en un dominio bidimensional utilizando un esquema basado en la transformada de Fourier el cual permite obtener rápidamente la solución de la ecuación de Poisson en dominios regulares. Posteriormente, se muestra la metodología para obtener la solución a la ecuación de Laplace en un dominio irregular utilizando el método de la matriz de capacitancia. Además, se muestran los detalles para obtener la solución numérica de las ecuaciones de conservación utilizando la metodología **FCT** para tratar con los términos advectivos. Finalmente, se considera la implementación de diferentes condiciones de frontera para tratar con los flujos de salida en la frontera abierta del sistema.

4.1 Discretización del dominio

El dominio físico Ω consiste en un rectángulo R alineado con las coordenadas espaciales x y z , el cual presenta un corte en su tapa superior como se muestra en la Figura 10. Las fronteras laterales $\overline{FA}$ y $\overline{DE}$ son fronteras abiertas, las cuales representan la circulación del fluido (flujo de entrada y flujo de salida, respectivamente). Las tapa inferior $\overline{EF}$ se toma paralelo al eje de las x , al igual que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. El rectángulo R se corta en el segmento $\overline{BC}$ en donde se coloca el obstáculo representado por la curva $S = \{(x, z) / z = g(x), x \in \overline{BC}\}$. De esta manera se busca la solución de la ecuación

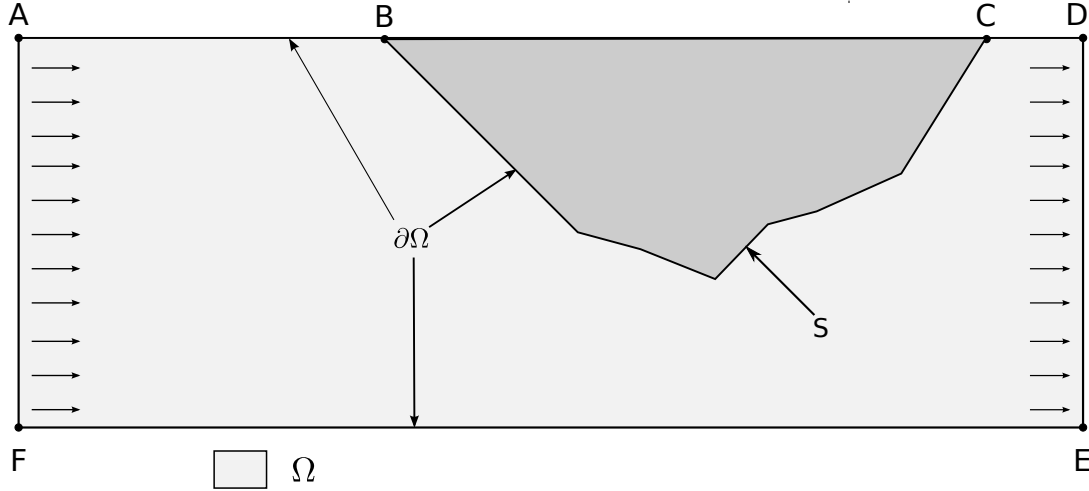


Figura 10: Representación esquemática del dominio físico del problema con geometría irregular.

de Poisson en el dominio Ω cuya frontera es $\partial\Omega = \overline{AB} \cup S \cup \overline{CD} \cup \overline{DE} \cup \overline{EF} \cup \overline{FA}$.

La discretización del dominio físico se lleva a cabo considerando solo cierta información del dominio completo, que se representa como una malla de $(N + 1) \times (M + 1)$

puntos equiespaciados

$$x_i = x_0 + i\Delta x,$$

$$z_j = z_0 + j\Delta z,$$

donde x_0 y z_0 representan los puntos iniciales en las direcciones respectivas, mientras que $i = 0, 1, 2, \dots, N$ y $j = 0, 1, 2, \dots, M$, esquematizado en la Figura 11. La discretización

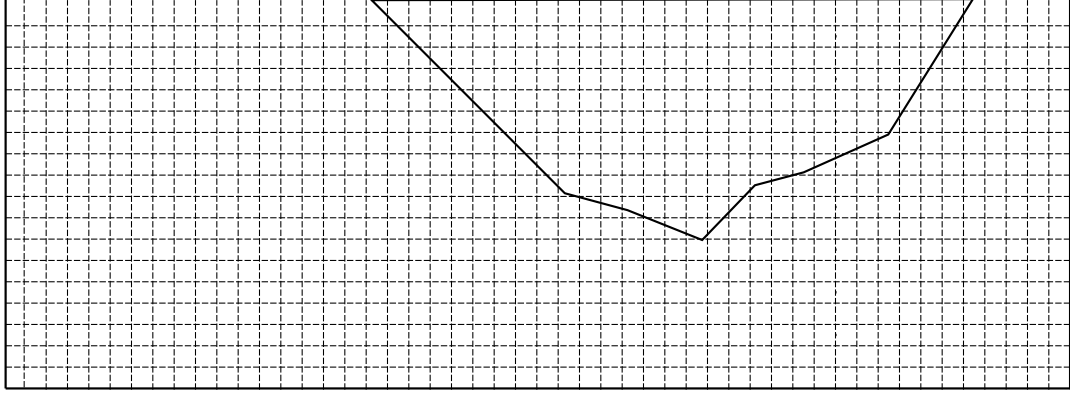


Figura 11: Discretización del dominio en las dos dimensiones espaciales.

en la frontera irregular S , no se puede representar de forma discreta en su totalidad, debido a que la información es tomada cada cierto intervalo y se pierde cierta información que queda dentro de los intervalos. Por ejemplo, si se quiere representar un punto de la geometría irregular que se encuentra dentro de un incremento es necesario representarlo o un punto antes o un punto después, como se ve en la Figura 12. Se puede aumentar la exactitud de la representación del dominio irregular tomando la información en intervalos espaciales Δx y Δz más pequeños, sin embargo esto aumenta el número de puntos que se tiene que computar por cada iteración en el tiempo.

La discretización temporal se lleva a cabo utilizando un esquema de diferencias

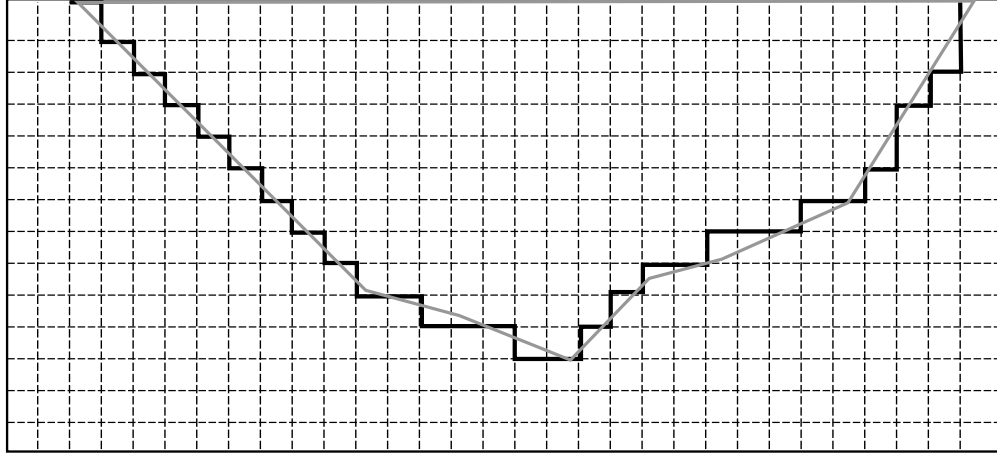


Figura 12: Discretización de la frontera irregular S .

finitas hacía adelante, con el mismo incremento en el tiempo Δt para todos los pasos temporales.

4.2 Solución rápida de la ecuación de Poisson

La solución numérica de la ecuación de Poisson en dos dimensiones (65) utilizando el esquema normal de diferencias finitas visto en el Capítulo 3, resulta muy costoso computacionalmente debido a que es necesario resolver un sistema lineal de ecuaciones de $(N \times M)^2$, donde N y M representa la cantidad de puntos discretos para cada dimensión espacial. En la Tabla I se muestran algunos algoritmos utilizados para resolver sistemas lineales de ecuaciones con la forma de la ecuación (69), su orden y el tiempo aproximado que tarda en resolver un sistema con $n = 10^6$ en una maquina de un TeraFlop (Dehmel, 2012).

Utilizando un esquema basado en la multiplicación de la transformada seno, se puede mejorar el algoritmo de diferencias finitas. En lugar de integrar las aproximaciones de u_{xx} y u_{yy} en una sola ecuación para formar el sistema lineal de ecuaciones, se considera

Tabla I: Algoritmos para resolver sistemas lineales que tienen la forma de la ecuación (69), donde n es el número de variables desconocidas.

Algoritmo	Orden	Tiempo Aproximado (con $n = 1000^2$) TF
Eliminación Gaussiana	$O(n^3)$	10 años
Full Cholesky	$O(n^3)$	10 años
Band Cholesky	$O(n^2)$	1/2 hora
Diagonalization	$O(n^{3/2})$	8 segundos
FFT	$O(n \log(n))$	1/2 segundo

una matriz de diferenciación $\mathbf{T}$ que contiene la información de la aproximación en diferencias centrales de segundo orden al Laplaciano y otra matriz $\mathbf{U}$ que contiene los valores desconocidos de la función en cada uno de los puntos de la malla para llegar a una relación de la forma,

$$\mathbf{TU} + \mathbf{UT} = \mathbf{B}. \quad (74)$$

En donde $\mathbf{B} \in \mathbb{M}^{n \times m}$ es la matriz que contiene los valores discretos del lado derecho de la ecuación de Poisson y las contribuciones de la frontera.

Considerando primero el caso particular $N - 1 = M - 1 = n$, $\mathbf{T} \in \mathbb{M}^{n \times n}$ es una matriz tridiagonal la cual representa los coeficientes de la aproximación de diferencias finitas de segundo orden para $-u_{xx}$ y $-u_{yy}$,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

y $\mathbf{U} \in \mathbb{M}^{n \times n}$ es la matriz de los valores desconocidos,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \dots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & \dots & u_{2,n} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} & \dots & u_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & u_{n,3} & \dots & u_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Se puede notar que la matriz $\mathbf{T}$ es diagonalizable, es decir existe una matriz no singular $\mathbf{Q} \in \mathbb{M}^{n \times n}$, tal que

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}, \quad (75)$$

donde $\mathbf{Q} \in \mathbb{M}^{n \times n}$ es la matriz cuyas columnas son los eigenvectores de $\mathbf{T}$, y $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{M}^{n \times n}$ es la matriz diagonal que contiene los eigenvalores correspondientes

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Remplazando a la matriz $\mathbf{T} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}$, en la relación (74),

$$\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{B}. \quad (76)$$

Si ahora se multiplica (76) por la derecha por $\mathbf{Q}$ y por la izquierda por $\mathbf{Q}^{-1}$, y se

introduce $\widehat{\mathbf{U}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{Q}$ y $\widehat{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}$ se tiene que,

$$\Lambda\widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathbf{U}}\Lambda = \widehat{\mathbf{B}}. \quad (77)$$

La matriz resultante del producto $\widehat{\mathbf{U}}\Lambda$, es simplemente la multiplicación de cada uno de los elementos de la columna *jotésima* de $\widehat{\mathbf{U}}$ por el eigenvalor λ_j . Esto se puede ver como una multiplicación directa elemento por elemento $\widehat{\mathbf{U}} * \widehat{\Lambda}$ en donde $\widehat{\Lambda} \in \mathbb{M}^{n \times n}$ tiene la forma

$$\widehat{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Finalmente se despeja $\widehat{\mathbf{U}}$ realizando una división elemento por elemento,

$$\widehat{\mathbf{U}} = \frac{\widehat{\mathbf{B}}}{\widehat{\Lambda} + \widehat{\Lambda}^T}.$$

Finalmente, se deben calcular las matrices $\widehat{\mathbf{U}}$ y $\widehat{\mathbf{B}}$, para lo cual se necesitan $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{Q}^{-1}$. Es conveniente notar que dado que $\mathbf{T}$ es una matriz simétrica, la diagonalización (75) es ortogonal. Esto es,

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T.$$

Además $\mathbf{T}$ tiene n eigenvalores reales diferentes y n vectores ortonormales (las columnas de $\mathbf{Q}$). La matriz $\mathbf{Q}$ se puede encontrar con la transformada discreta seno; sin embargo, la estructura simple de $\mathbf{T}$ permite calcularlos directamente. Sea λ un eigenvalor de $\mathbf{T}$ y $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ el eigenvector correspondiente, definiendo $2\beta = 2 - \lambda$, las componentes de $\mathbf{x}$ satisfacen,

$$x_2 - 2\beta x_1 = 0, \quad (79)$$

$$x_{k+1} - 2\beta x_k + x_{k-1} = 0, \quad \text{para } k = 2, 3, \dots, n-1, \quad (80)$$

$$-2\beta x_n + x_{n-1} = 0. \quad (81)$$

La ecuación en recurrencias (80) tiene al menos una solución particular que es múltiplo de ρ^k . Al sustituir en (80),

$$\rho^{k+1} - 2\beta\rho^k + \rho^{k-1} = 0.$$

Evidentemente, $\rho \neq 0$, por lo que ρ satisface la ecuación de segundo grado,

$$\rho^2 - 2\beta\rho + 1 = 0. \quad (82)$$

Al examinar (80) se puede ver que ambas soluciones a (80) son de la forma ρ^k , ya que $\beta \neq \pm 1$, de lo contrario las componentes del eigenvector serían una combinación lineal de 1 y k , lo cual no es posible. Se concluye que la solución general a (80) es una combinación lineal de las dos soluciones a (82). Es conveniente expresar la solución general de la forma

$$x_k = \alpha e^{ik\theta} + \bar{\alpha} e^{-ik\theta}, \quad (83)$$

en donde α es una constante y $\bar{\alpha}$ su complejo conjugado. Al sustituir (83) en (80)

$$\alpha e^{i(k+1)\theta} + \bar{\alpha} e^{-i(k+1)\theta} - 2\beta\alpha e^{ik\theta} - 2\beta\bar{\alpha} e^{-ik\theta} + \alpha e^{i(k-1)\theta} + \bar{\alpha} e^{-i(k-1)\theta} = 0$$

y simplificando,

$$\alpha e^{ik\theta} (e^{i\theta} - 2\beta + e^{-i\theta}) + \bar{\alpha} e^{-ik\theta} (e^{i\theta} - 2\beta + e^{-i\theta}) = 0.$$

Como antes $\alpha e^{ik\theta} + \bar{\alpha} e^{-ik\theta} \neq 0$, por lo que,

$$2\beta = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta. \quad (84)$$

Al sustituir (83) en (79),

$$\alpha e^{2i\theta} + \bar{\alpha} e^{-2i\theta} - 2\beta \alpha e^{i\theta} - 2\beta \bar{\alpha} e^{-i\theta} = 0$$

reacomodando términos, utilizando (84) y simplificando se llega a que α es una constante púramente imaginaria,

$$\alpha + \bar{\alpha} = 0. \quad (85)$$

Sustituyendo ahora (83) en (81),

$$\begin{aligned} 0 &= -2\beta \alpha e^{in\theta} - 2\beta \bar{\alpha} e^{-in\theta} + \alpha e^{i(n-1)\theta} + \bar{\alpha} e^{-i(n-1)\theta} \\ &= \alpha e^{in\theta} (e^{-i\theta} - 2\beta) + \bar{\alpha} e^{-in\theta} (e^{i\theta} - 2\beta). \end{aligned}$$

Usando nuevamente (84),

$$\alpha e^{i(n+1)\theta} + \bar{\alpha} e^{-i(n+1)\theta} = 0,$$

lo cual se puede escribir como,

$$e^{2i(n+1)\theta} = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = 1 = e^{2\pi i j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

en donde se utilizó (85). Los diferentes valores de j definen diferentes valores de θ y por ende los diferentes eigenvalores, sin embargo tan solo n de ellos son linealmente independientes (ya que también se excluye al $j = 0$ que no corresponde a un eigenvector).

De esta manera, los n eigenvalores de $\mathbf{T}$ son

$$\begin{aligned}\lambda_j &= 2 - 2\beta = 2 - 2\cos\theta_j \\ &= 2 \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{n+1} j \right) \right), \quad j = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}\quad (86)$$

Para cada uno de ellos el eigenvector correspondiente $\mathbf{x}^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$, en donde,

$$x_k^{(j)} = i\gamma (e^{ik\theta_j} - e^{-ik\theta_j}) = -2\gamma \sin k\theta_j = -2\gamma \sin \left(\frac{\pi}{n+1} kj \right), \quad (87)$$

en donde $k, j = 1, 2, \dots, n$ y γ es una constante real, que sale del proceso de normalización de los eigenvectores,

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|^2 = -\gamma^2 \sum_{k=1}^n (e^{ik\theta_j} - e^{-ik\theta_j})^2 = 1,$$

la sumatoria se puede calcular fácilmente,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}^{(j)}\|^2 &= -\gamma^2 \sum_{k=1}^n (e^{ik\theta_j} - e^{-ik\theta_j})^2 = -\gamma^2 \sum_{k=1}^n (e^{2ik\theta_j} - 2 + e^{-2ik\theta_j}) \\ &= -\gamma^2 \left(\frac{e^{2i\theta_j} - e^{2i(n+1)\theta_j}}{1 - e^{2i\theta_j}} + \frac{e^{-2i\theta_j} - e^{-2i(n+1)\theta_j}}{1 - e^{-2i\theta_j}} - 2n \right),\end{aligned}$$

pero $e^{\pm 2i(n+1)\theta_j} = 1$, de tal manera que $2\gamma^2 (n+1) = 1$ y

$$\gamma^2 = \pm \left(\frac{1}{2(n+1)} \right)^{1/2}.$$

Por conveniencia se toma el signo de menos al sustituir esta expresión en (86)

$$x_k^{(j)} = \left(\frac{2}{n+1} \right)^{1/2} \sin \left(\frac{\pi}{n+1} k j \right). \quad (88)$$

De esta manera se llega a una expresión cerrada para la matriz $\mathbf{Q}$, la cual es a su vez una matriz simétrica $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$, pero además es una matriz ortogonal, por lo que, $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}$.

El Algoritmo 1 (las operaciones de matrices siguen el formato de matlab) describe la solución rápida de la ecuación de Poisson en dos dimensiones utilizando los eigenvalores y eigenvectores de la matriz $\mathbf{T}$ que contiene la información a la aproximación al Laplaciano.

Algoritmo 1: Solución rápida de la ecuación de Poisson en dos dimensiones (65) con $N = M$ y dominio regular.

```

input :  $B \in \mathbb{M}^{N-1 \times M-1}, \Delta x, \Delta z, \partial\Omega, \mathcal{B}(\partial\Omega), N$ 
output:  $U \in \mathbb{M}^{N-1 \times M-1}$ 
// Aplica las condiciones de frontera del dominio regular sobre  $B$ 
1  $n = N - 1$ ;
2  $\text{SetBoundaryCondition}(B, \partial\Omega, \mathcal{B}(\partial\Omega))$ ;
3  $\lambda = 2(1 - \cos((1 : n)\pi/(n+1)))$ ;
// Donde ./ es la división elemento por elemento
4  $\lambda = \text{ones}(n, n)./(\lambda^T * \text{ones}(1, n) + \text{ones}(n, 1) * \lambda)$ ;
// dst es la transformada discreta de seno
5  $U = \text{dst}(\text{dst}(B^T)^T)(2/(n+1))$ ;
// Donde .* es la multiplicación de elemento por elemento
6  $U = \lambda .* U$ ;
7  $U = \text{dst}(\text{dst}(U^T)^T)(2/(n+1))$ ;
// Como se considera a  $T$  como la matriz negativa de los
// coeficientes para la aproximación de segundo orden de  $u_{xx}$ , al
// final se debe multiplicar por  $-1$ 
8  $U = -U$ ;

```

El resultado anterior corresponde al caso particular $N = M$ en donde la matriz

solución $\mathbf{U}$ es una matriz cuadrada. En el caso general $N \neq M$, la matriz solución $\mathbf{U} \in \mathbb{M}^{n \times m}$ ($n = N - 1$, $m = M - 1$) por lo que se definen ahora dos matrices cuadradas tridiagonales $\mathbf{T}_1 \in \mathbb{M}^{n \times n}$ y $\mathbf{T}_2 \in \mathbb{M}^{m \times m}$, las cuales representan los coeficientes de la aproximación de diferencias finitas de segundo orden para cada una de las direcciones espaciales. De esta manera (74) queda como,

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{T}_2 = \mathbf{B}. \quad (89)$$

Cada matriz $\mathbf{T}_i$ ($i = 1, 2$), tiene su correspondiente matriz de eigenvectores $\mathbf{Q}_i$ y su matriz diagonal de eigenvalores $\mathbf{\Lambda}_i$, cuyos elementos se calculan utilizando las relaciones (86) y (88). De esta manera las matrices $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \mathbf{Q}_1 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{Q}_1^{-1}, \\ \mathbf{T}_2 &= \mathbf{Q}_2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{Q}_2^{-1}. \end{aligned}$$

Al sustituir estas relaciones en (89),

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{Q}_2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{Q}_2^{-1} = \mathbf{B}.$$

Multiplicando ahora la relación anterior por $\mathbf{Q}_1^{-1}$ a la izquierda y por $\mathbf{Q}_2$ a la derecha, se obtiene el siguiente resultado:

$$\mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{U} \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{U} \mathbf{Q}_2 \mathbf{\Lambda}_2 = \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Q}_2. \quad (90)$$

Definiendo ahora $\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{U} \mathbf{Q}_2$ y $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Q}_2$, la ecuación (90) se puede escribir

como,

$$\mathbf{\Lambda}_1 \widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathbf{U}} \mathbf{\Lambda}_2 = \widehat{\mathbf{B}}. \quad (91)$$

Como en el caso anterior, la multiplicación $\mathbf{\Lambda}_1 \widehat{\mathbf{U}}$ se puede ver como una multiplicación elemento por elemento de una matriz $\widehat{\mathbf{\Lambda}}_1 \in \mathbb{M}^{n \times m}$ cuyas columnas tienen elementos constantes correspondientes a los n eigenvalores de $\mathbf{T}_1$ (78), por a matriz $\widehat{\mathbf{U}}$. A su vez, la multiplicación de $\widehat{\mathbf{U}} \mathbf{\Lambda}_2$ es una multiplicación elemento por elemento de la matriz $\widehat{\mathbf{U}}$ por la matriz transpuesta de la matriz cuyas columnas son los m eigenvalores de $\mathbf{T}_2$. Si se denota a esta matriz por $\widehat{\mathbf{\Lambda}}_2^T \in \mathbb{M}^{n \times m}$ y se define una matriz $\widehat{\mathbf{\Lambda}}_1 + \widehat{\mathbf{\Lambda}}_2^T \in \mathbb{M}^{n \times m}$.

Con estas definiciones y teniendo en cuenta que la multiplicación elemento por elemento es asociativa,

$$\widehat{\mathbf{U}} * (\widehat{\mathbf{\Lambda}}_1 + \widehat{\mathbf{\Lambda}}_2^T) = \widehat{\mathbf{B}}.$$

Finalmente se despeja $\widehat{\mathbf{U}}$,

$$\widehat{\mathbf{U}} = \frac{\widehat{\mathbf{B}}}{(\widehat{\mathbf{\Lambda}}_1 + \widehat{\mathbf{\Lambda}}_2^T)}.$$

donde la división es una división elemento por elemento. El Algoritmo 2 describe los pasos para resolver la ecuación de Poisson en dos dimensiones con $N \neq M$.

Algoritmo 2: Solución rápida de la ecuación de Poisson en dos dimensiones (65) con $N \neq M$ y dominio regular.

```

input :  $B \in \mathbb{M}^{N-1 \times M-1}, \Delta x, \Delta z, \mathcal{B}(\partial\Omega), N, M$ 
output:  $U \in \mathbb{M}^{N-1 \times M-1}$ 
1  $n = N - 1;$ 
2  $m = M - 1;$ 
   // Aplica las condiciones de frontera del dominio regular sobre  $B$ 
3 SetBoundaryConditions( $B, \Delta x, \Delta z, \partial\Omega, \mathcal{B}(\partial\Omega)$ );
4  $\lambda_1 = 2(1 - \cos((1:m)\pi/(m+1)))$ ;
5  $\lambda_2 = 2(1 - \cos((1:n)\pi/(n+1)))$ ;
6  $\lambda = \text{ones}(n, m) ./ (\text{ones}(n, 1) * \lambda_1 + \lambda_2^T * \text{ones}(1, m))$ ;
   // dst es la transformada discreta de seno
7  $U = \text{dst}(\text{dst}(B^T)^T)(2/(m+1))^{1/2}(2/(n+1))^{1/2}$ ;
8  $U = \lambda * U$ ;
9  $U = \text{dst}(\text{dst}(U^T)^T)(2/(m+1))^{1/2}(2/(n+1))^{1/2}$ ;
   // Como se considera a  $T$  como la matriz negativa de los
   // coeficientes para la aproximación de segundo orden de  $u_{xx}$ , al
   // final se debe multiplicar por  $-1$ .
10  $U = -U$ ;
```

4.3 Solución numérica de la ecuación de Poisson en un dominio irregular

La solución a la ecuación de Poisson en el dominio irregular Ω cuya frontera es $\partial\Omega$ (Figura 10), se realiza con el método de la matriz de capacitancia. Antes de aplicar este método es conveniente formular la solución a la ecuación de Poisson bidimensional,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (92)$$

$$u(x, y) = \phi(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (93)$$

en términos de la función de Green $G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})$ con $\mathbf{x} = (x, y)$ y $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$, la cual satisface

$$\frac{\partial^2 G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial y^2} = -\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \in \Omega, \quad (94)$$

$$G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) = 0, \quad \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \in \partial\Omega, \quad (95)$$

en donde $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ es la función delta de Dirac la cual tiene la propiedad de que,

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) f(x, y) dA = \begin{cases} f(\xi, \eta) & \text{si } (\xi, \eta) \in \Omega \\ 0 & \text{si } (\xi, \eta) \notin \overline{\Omega} \end{cases}.$$

Multiplicando ambos lados de (92) por $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ e integrando en todo el dominio se tiene que,

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \nabla^2 u(x, y) dA = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) f(x, y) dA. \quad (96)$$

Similarmente al multiplicar ambos lados de (94) por $U(x, y)$ e integrando en todo el dominio se tiene que,

$$\int_{\Omega} u(x, y) \nabla^2 G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) dA = - \int_{\Omega} u(x, y) \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) dA = -u(\xi, \eta). \quad (97)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x, y) \nabla^2 G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) dA &= \int_{\Omega} [\nabla \cdot (u \nabla G) - \nabla G \cdot \nabla u] dA \\ &= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial G}{\partial n} dl - \int_{\Omega} \nabla G \cdot \nabla u dA. \end{aligned} \quad (98)$$

En donde en el último paso se utilizó el teorema de la divergencia. Si ahora en esta relación (98) se invierten los papeles de u y G ,

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \nabla^2 u(x, y) dA = \int_{\partial\Omega} G \frac{\partial u}{\partial n} dl - \int_{\Omega} (\nabla G \cdot \nabla u) dA, \quad (99)$$

al restar (98) de (99),

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \nabla^2 u(x, y) dA - \int_{\Omega} u(x, y) \nabla^2 G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) dA = \int_{\partial\Omega} G \frac{\partial u}{\partial n} dl - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial G}{\partial n} dl.$$

Pero los valores de G y u son conocidos en la frontera, de tal manera que,

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \nabla^2 u(x, y) dA - \int_{\Omega} u(x, y) \nabla^2 G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) dA = - \int_{\partial\Omega} \phi(x, y) \frac{\partial G}{\partial n} dl.$$

Sustituyendo (96) y (97),

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) f(x, y) dA + u(\xi, \eta) = - \int_{\partial\Omega} \phi(x, y) \frac{\partial G}{\partial n} dl. \quad (100)$$

Invirtiendo los papeles de $\mathbf{x}$ y $\boldsymbol{\xi}$ y tomando en cuenta que la función de Green es simétrica $G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) = G(\boldsymbol{\xi}|\mathbf{x})$, se tiene que,

$$u(x, y) = - \int_{\Omega} G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) f(\xi, \eta) dA' - \int_{\partial\Omega} \phi(\xi, \eta) \frac{\partial G}{\partial n} dl', \quad (101)$$

en donde las primas indican que la integración se realiza en términos de las variables ξ, η .

A grandes rasgos en este método de la matriz de capacitancia, la ecuación de Poisson bidimensional (92-93) se resuelve en dos partes. Primero se resuelve (92-93) en el rectángulo R que contiene a Ω ,

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in R, \quad (102)$$

$$u_1(x, y) = \phi(x, y), \quad (x, y) \in \partial R. \quad (103)$$

La solución a (102-103), es la solución al problema, (92-93), salvo que los valores en la curva S (ver Figura 10) no son los deseados, en donde,

$$u_1(x, y) = \phi_S(x, y), \quad (x, y) \in S.$$

La otra parte de la solución al problema original (92-93) es,

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (104)$$

$$u_2(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (105)$$

en donde,

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 0 & si \quad (x, y) \in \partial\Omega - S \\ \phi(x, y) - \phi_S(x, y) & si \quad (x, y) \in S \end{cases}. \quad (106)$$

De tal manera que,

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega.$$

La solución a (102-103) no presenta mayor problema, ya que es simplemente la solución a la ecuación de Poisson en el rectángulo, mientras que la solución a (104-105) se podría realizar utilizando la formulación de la función de Green (101), pero esto sería casi igual de laborioso que resolver el problema completo utilizando la formulación de la función de Green en el problema original.

La solución a (104-105) se obtiene reemplazando la condición de frontera inhomogénea $\varphi(x, y)$ por una distribución de fuentes adecuada $\hat{f}(x, y)$ que aparece en el lado derecho de (104), para que $u_2(x, y) = \phi(x, y) - \phi_S(x, y)$ en S y se anule en todos

los demás puntos. Para determinar $\widehat{f}(x, y)$ se vuelve al rectángulo de tal manera que,

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \widehat{f}(x, y), \quad (x, y) \in R,$$

$$u_2(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial R.$$

en donde se busca

$$u_2(x, y) = \varphi(x, y) = \phi(x, y) - \phi_S(x, y), \quad \text{en } S.$$

Ahora si se utiliza la formulación de la función de Green (101),

$$u(x, y)_2 = - \int_R G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \widehat{f}(\xi, \eta) dA',$$

pero $\widehat{f}(\xi, \eta)$ se anula en todos los puntos salvo en S ,

$$\begin{aligned} u_2(x, y) &= \varphi(x, y) = \phi(x, y) - \phi_S(x, y) \\ &= - \int_R G(\mathbf{x}=S|\boldsymbol{\xi}=S') \widehat{f}(S) dA', \quad \text{en } S. \end{aligned} \quad (107)$$

En este punto, la solución a todo el problema se reduce a encontrar $\widehat{f}(S)$ y por ende $\widehat{f}(x, y)$ a partir de (107). En forma discreta escribimos,

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{G}\boldsymbol{\rho},$$

en donde $\boldsymbol{\varphi}$ y $\boldsymbol{\rho}$ son los vectores que contiene los valores discretos de $\varphi(x, y) = \phi(x, y) - \phi_S(x, y)$ y $\widehat{f}(x, y)$ en los NP puntos discretos de la curva S , respectivamente. Mientras que la matriz $\mathbf{G} \in \mathbb{M}^{NP \times NP}$ representa a la función de Green equivalente a la inversa

de la matriz de capacitancia $\mathbf{C}$, de tal forma que,

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}. \quad (108)$$

De esta manera los pasos a seguir para construir la solución de la ecuación de Laplace (92-93) se pueden resumir en:

1. Se resuelve la ecuación de Laplace en el rectángulo (102-103) de donde se obtiene ϕ_S en cada uno de los puntos del obstáculo (frontera irregular del dominio).
2. Se utiliza el valor de ϕ_S para construir la matriz de capacitancia (108).
3. Se obtienen los valores de la fuente $\hat{f}(x, y)$.
4. Se vuelve a resolver la ecuación de Poisson (92-93), pero en el lado derecho se suma $\hat{f}(x, y)$ a $f(x, y)$, y esta es la solución.

La matriz de capacitancia $\mathbf{C}$ se construye a partir de los resultados de la solución numérica de la ecuación de Poisson en dos dimensiones (92) con,

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x, y \in S \\ 0 & x, y \notin S \end{cases},$$

para cada uno de los NP puntos P_i que se encuentran en la curva S . Cada vector columna de $\mathbf{C}$ contiene el valor la solución numérica de la ecuación de Poisson con la fuente unitaria en ese punto. Si se está resolviendo para el primer punto irregular P_0 de S , entonces el lado derecho de la ecuación de Poisson en su forma discreta, es la matriz $\mathbf{R} \in \mathbb{M}^{N \times M}$ cuyos elementos son ceros excepto en P_0 , donde N y M son el número de puntos discretos del dominio en la dirección x y z , respectivamente. Si la solución a

este problema es la matriz $\mathbf{U}^{(0)}$, el primer vector columna de la matriz de capacitancia $\mathbf{C}$ esta integrado por los valores obtenidos de $\mathbf{U}^{(0)}$ correspondientes a la curva S ,

$$\begin{bmatrix} U_{P_0}^{(0)} \\ U_{P_1}^{(0)} \\ U_{P_2}^{(0)} \\ \vdots \\ U_{P_{NP-1}}^{(0)} \end{bmatrix}.$$

El superíndice 0 indica que es la solución a la ecuación de Poisson con una fuente unitaria en el punto P_0 de S , el subíndice indica el valor de U en el *iésimo* punto P_i de S . Este procedimiento se hace para el siguiente punto P_1 , donde se crea otra matriz $\mathbf{R} \in \mathbb{M}^{N \times M}$ cuyos elementos son ceros excepto en el punto P_1 . S . Este procedimiento se hace para cada uno de los NP puntos $P_i \in S$,

$$C = \begin{bmatrix} U_{P_0}^{(0)} & U_{P_0}^{(1)} & \dots & U_{P_0}^{(NP-1)} \\ U_{P_1}^{(0)} & U_{P_1}^{(1)} & \dots & U_{P_1}^{(n-1)} \\ U_{P_2}^{(0)} & U_{P_2}^{(1)} & \dots & U_{P_2}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{P_{NP-1}}^{(0)} & U_{P_{NP-1}}^{(1)} & \dots & U_{P_{NP-1}}^{(NP-1)} \end{bmatrix},$$

El Algoritmo 3 describe los pasos para encontrar la matriz de capacitancia de la ecuación de Poisson en dos dimensiones.

Algoritmo 3: Algoritmo para calcular la matriz de capacitancia de la ecuación de Poisson en dos dimensiones (65).

```

input :  $G \in \mathbb{M}^{3 \times NP}, NP, N, M$ 
output:  $C \in \mathbb{M}^{NP \times NP}$ 
// NP es el número de puntos en el domino irregular.
// n y m son el número de puntos discretos en el dominio en la
// dirección z y x, respectivamente.
// G es la matrix que contiene las coordenadas de los puntos en la
// frontera regular y condición de frontera en el punto.
1 for  $i \leftarrow 1$  to  $NP$  do
2    $R = \text{zeros}(N, M);$ 
3    $R(G(1, i), G(2, i)) = 1;$ 
4    $U = \text{Poisson}(R);$ 
5   for  $j \leftarrow 1$  to  $NP$  do
6      $C(i, j) = U(G(1, j), G(2, j));$ 
7   end
8 end

```

La siguiente parte consiste en encontrar los coeficientes ρ_i que se utilizaran en la parte irregular del dominio, resolviendo el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} U_{P_0}^{(0)} & U_{P_0}^{(1)} & \dots & U_{P_0}^{(NP-1)} \\ U_{P_1}^{(0)} & U_{P_1}^{(1)} & \dots & U_{P_1}^{(n-1)} \\ U_{P_2}^{(0)} & U_{P_2}^{(1)} & \dots & U_{P_2}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{P_{NP-1}}^{(0)} & U_{P_{NP-1}}^{(1)} & \dots & U_{P_{NP-1}}^{(NP-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_{NP-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{NP-1} \end{bmatrix}, \quad (109)$$

donde f_i es el valor que tienen los puntos del dominio irregular después de resolver la ecuación de Poisson en dos dimensiones con dominio regular y restando las condiciones de frontera de la parte irregular,

$$f_i = U_{P_i} - BC_i,$$

donde U_{P_i} es el valor que tiene la solución de la ecuación de Poisson en dos dimensiones con dominio regular en el punto P_i y BC_i es el valor que tiene la condición de frontera en el punto P_i . Finalmente se ajustan las condiciones de frontera sumando los coeficientes ρ_i de la ecuación (109) a las condiciones de frontera en la parte irregular y se soluciona con estos valores la ecuación de Poisson en dos dimensiones. El Algoritmo 4 describe los pasos para obtener la solución numérica de la ecuación de Poisson en dos dimensiones en un dominio irregular, utilizando la matriz de capacitancia $\mathbf{C}$.

Algoritmo 4: Solución numérica de la ecuación de Poisson en dos dimensiones (65) con dominio irregular.

```

input :  $B \in \mathbb{R}^{N-1 \times M-1}, G \in \mathbb{M}^{3 \times NP}, \Delta x, \Delta z, \mathcal{B}(\Omega), NP$ 
output:  $U \in \mathbb{R}^{N-1 \times M-1}$ 
// Aplica las condiciones de frontera del dominio regular e
// irregular sobre  $B$ .
1 SetBoundaryConditions( $B, \Delta x, \Delta z, \partial\Omega, \mathcal{B}(\partial\Omega)$ );
2  $U = \text{Poisson}(B)$ ;
3 for  $i \leftarrow$  to  $NP$  do
4   |  $ComGeo(i) = G(3, i) - U(G(1, i), G(2, i))$ ;
5 end
6  $ComGeo = C \setminus ComGeo^T$ ;
7 for  $i \leftarrow$  to  $NP$  do
8   |  $B(G(1, i), G(2, i)) = B(G(1, i), G(2, i)) + ComGeo(i)$ ;
9 end
10  $U = \text{Poisson}(B)$ ;

```

4.4 Solución numérica de los términos no lineales

En esta sección se presenta la solución numérica de los términos no lineales (advec-tivos) que aparecen en las ecuaciones (26) y (27) del modelo matemático, utilizando la metodología **FCT** que se describió en el Capítulo 3.

4.4.1 Solución numérica de la vorticidad

La ecuación (27) es una ecuación diferencial parcial no lineal, no homogénea y de segundo orden para la vorticidad ζ . Es la ecuación más difícil de resolver numéricamente del sistema de ecuaciones que compone el modelo matemático. Su complejidad reside en la no linealidad de los términos advectivos $\mathbf{u} \cdot \nabla$. Considerando que el fluido no tiene viscosidad, es decir $\nu = 0$, el término de segundo orden de la ecuación se elimina quedando como,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\zeta) = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (110)$$

que ahora es una ecuación diferencial parcial no lineal, no homogénea de primer orden para la vorticidad ζ .

Esquema explícito

Una primera aproximación para solucionar numéricamente la vorticidad ζ en la ecuación (110) es utilizar diferencias finita hacia adelante en el tiempo para resolver la ecuación de evolución y diferencias finitas hacia adelante en las dos dimensiones espaciales. La forma explícita calcula los valores en un determinado tiempo ζ^{n+1} , en función de los resultados en un tiempo anterior ζ^n ,

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n \left[\frac{\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i,j}^n}{\Delta x} \right] + w_{i,j}^n \left[\frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j}^n}{\Delta z} \right] = \xi(\rho_{i,j}^n),$$

donde ξ es una función que depende de la densidad ρ . La ecuación anterior se puede ver simplemente como una función que depende de la información en un tiempo anterior,

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \eta(\zeta_{i,j}^n, \rho_{i,j}^n, u_{i,j}^n, v_{i,j}^n),$$

donde,

$$\eta(\zeta_{i,j}^n, \rho_{i,j}^n, u_{i,j}^n, v_{i,j}^n) = \zeta_{i,j}^n - \Delta t \left[u_{i,j}^n \left[\frac{\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i,j}^n}{\Delta x} \right] + w_{i,j}^n \left[\frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j}^n}{\Delta z} \right] - \xi(\rho_{i,j}^n) \right] \quad (111)$$

y

$$\xi(\rho_{i,j}^n) = \frac{g}{\rho_0} \left[\frac{\rho_{i+1,j}^n - \rho_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right],$$

es la derivada de la densidad utilizando el esquema de diferencias finitas centrales de segundo orden. Agrupando (111), y realizando las aproximaciones espaciales en puntos intermedios para la derivada de la vorticidad ζ_x y ζ_y , se obtiene,

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^n - \beta \left[u_{i,j}^n \Delta z (\zeta_{i+1/2,j}^n - \zeta_{i-1/2,j}^n) + w_{i,j}^n \Delta x (\zeta_{i,j+1/2}^n - \zeta_{i,j-1/2}^n) - \xi(\rho_{i,j}^n) \right], \quad (112)$$

$$\beta = \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta z}$$

donde ahora la discretización espacial es de segundo orden, debido a que estamos considerando puntos intermedios en la dirección de x ,

$$\begin{aligned} \zeta_{i+1/2,j} &= \zeta_{i,j} + \frac{\Delta x}{2} \left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{8} \left. \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right|_{i,j} + \mathcal{O}(\Delta x^3), \\ \zeta_{i-1/2,j} &= \zeta_{i,j} - \frac{\Delta x}{2} \left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{8} \left. \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right|_{i,j} + \mathcal{O}(\Delta x^3), \\ \left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{i,j} &= \left[\frac{\zeta_{i+1/2,j} - \zeta_{i-1/2,j}}{\Delta x} \right] + \mathcal{O}(\Delta x^2), \end{aligned}$$

y en la dirección de z ,

$$\begin{aligned}\zeta_{i,j+1/2} &= \zeta_{i,j} + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta z^2}{8} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \Big|_{i,j} + \mathcal{O}(\Delta z^3), \\ \zeta_{i,j-1/2} &= \zeta_{i,j} - \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta z^2}{8} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \Big|_{i,j} + \mathcal{O}(\Delta z^3), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial z} \Big|_{i,j} &= \left[\frac{\zeta_{i,j+1/2} - \zeta_{i,j-1/2}}{\Delta z} \right] + \mathcal{O}(\Delta z^2),\end{aligned}$$

La ecuación (112) finalmente se puede expresar como,

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^n - \frac{1}{(\Delta V)_{i,j}} [F_{i+(1/2),j}^n - F_{i-(1/2),j}^n + G_{i,j+(1/2)}^n - G_{i,j-(1/2)}^n] + \Delta t \xi(\rho_{i,j}^n),$$

donde,

$$\begin{aligned}F_{i+(1/2),j}^n &= u_{i+(1/2),j}^n \Delta z \Delta t \zeta_{i+(1/2),j}^n, \\ F_{i-(1/2),j}^n &= u_{i-(1/2),j}^n \Delta z \Delta t \zeta_{i-(1/2),j}^n, \\ G_{i,j+(1/2)}^n &= w_{i,j+(1/2)}^n \Delta x \Delta t \zeta_{i,j+(1/2)}^n, \\ G_{i,j-(1/2)}^n &= w_{i,j-(1/2)}^n \Delta x \Delta t \zeta_{i,j-(1/2)}^n,\end{aligned}\tag{113}$$

y $(\Delta V)_{i,j} = (\Delta x)_i (\Delta z)_j$. Las cuatro ecuaciones anteriores representan los flujos de entrada y salida en las dos dimensiones para cada celda $\zeta_{i,j}$. El flujo es la cantidad ϕ que pasa por un determinado espacio ΔS en un determinado tiempo Δt , debido a que el fluido que se esta transportando lleva una velocidad u , entonces la cantidad que entra o sale por una determinada celda se expresa como,

$$F = \phi u \Delta S \Delta t.$$

Las cuatro ecuaciones (113) cumplen con esta estructura, por lo que pueden representarse como flujos, además la variable que se está utilizando es conservativa. La Figura 13 muestra la representación del flujo entrante en una celda.

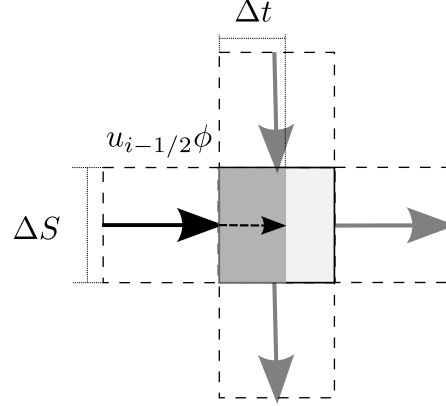


Figura 13: Representación del flujo de entrada en una celda

La solución numérica de la ecuación (110) se obtiene utilizando la metodología Flux Corrected Transport descrita en el Capítulo 3. Primeramente se definen los flujos de orden bajo,

$$F_{i+(1/2),j}^L = \zeta_{i+(1/2),j}^L u_{i+(1/2),j}^n (\Delta z)_j \Delta t,$$

$$G_{i,j+(1/2)}^L = \zeta_{i,j+(1/2)}^L w_{i,j+(1/2)}^n (\Delta x)_i \Delta t,$$

donde los componentes de velocidad u y w representan la velocidad intermedia de entrada y salida entre cada celda. La velocidad intermedia se calcula con **Leap-Frog**

de segundo orden,

$$\begin{aligned} u_{i+(1/2),j}^n &= \frac{1}{2}[u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n], \\ w_{i,j+(1/2)}^n &= \frac{1}{2}[w_{i,j+1}^n + w_{i,j}^n]. \end{aligned}$$

Los valores espaciales de la vorticidad también se calculan para los puntos intermedios entre cada celda,

$$\begin{aligned} \zeta_{i+(1/2),j}^L &= \frac{1}{2}[\zeta_{i+1,j}^n + \zeta_{i,j}^n], \\ \zeta_{i,j+(1/2)}^L &= \frac{1}{2}[\zeta_{i,j+1}^n + \zeta_{i,j}^n]. \end{aligned}$$

El siguiente paso consiste en definir los flujos de orden alto,

$$\begin{aligned} F_{i+(1/2),j}^{H4} &= \zeta_{i+(1/2),j}^{H4} u_{i+(1/2),j}^n S_{i+(1/2),j} \Delta t + F_{i+(1/2),j}^{D4}, \\ G_{i,j+(1/2)}^{H4} &= \zeta_{i,j+(1/2)}^{H4} w_{i,j+(1/2)}^n S_{i,j+(1/2)} \Delta t + F_{i,j+(1/2)}^{D4}, \end{aligned}$$

donde los componentes de velocidad $u_{i+(1/2),j}^n, w_{i,j+(1/2)}^n$ se calculan con las fórmulas que aparecen arriba y los puntos espaciales intermedios de la vorticidad ζ se calcula utilizando **Leap-Frog** de cuarto orden,

$$\begin{aligned} \zeta_{i+(1/2),j}^{H4} &= \frac{7}{12}(\zeta_{i+1,j}^n + \zeta_{i,j}^n) - \frac{1}{12}(\zeta_{i+2,j}^n + \zeta_{i-1,j}^n), \\ \zeta_{i,j+(1/2)}^{H4} &= \frac{7}{12}(\zeta_{i,j+1}^n + \zeta_{i,j}^n) - \frac{1}{12}(\zeta_{i,j+2}^n + \zeta_{i,j-1}^n), \end{aligned}$$

y S representa la sección por donde pasa el flujo, Δz para F^{H4} y Δx para G^{H4} y F^{D4} ,

G^{D4} representan los flujos disipativos de cuarto orden,

$$\begin{aligned} F_{i+(1/2),j}^{D4} &= -|u_{i+(1/2),j}| \left[\frac{3}{16}(\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i,j}^n) + \frac{1}{16}(\zeta_{i+2,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n) \right] \alpha, \\ G_{i+(1/2),j}^{D4} &= -|w_{i,j+(1/2)}| \left[\frac{3}{16}(\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j}^n) + \frac{1}{16}(\zeta_{i,j+2}^n - \zeta_{i,j-1}^n) \right] \beta. \end{aligned}$$

donde $\alpha = (\Delta z)_i \Delta t$ y $\beta = (\Delta x)_j \Delta t$.

La siguiente parte consiste en definir los flujos antidifusivos,

$$\begin{aligned} A_{i+(1/2),j} &= F_{i+(1/2),j}^{H4} - F_{i+(1/2),j}^L, \\ A_{i,j+(1/2)} &= G_{i,j+(1/2)}^{H4} - G_{i,j+(1/2)}^L. \end{aligned}$$

Después se calcula ζ^{td} ,

$$\zeta^{td} = \zeta^n - \frac{1}{(\Delta x)_i (\Delta z)_j} [F_{i+(1/2),j}^L - F_{i-(1/2),j}^L + G_{i,j+(1/2)}^L - G_{i,j-(1/2)}^L] + \Delta t \xi(\rho^n), \quad (114)$$

donde ξ es una función que relaciona la densidad. La derivada de la densidad ρ con respecto de x se discretiza con diferencias finitas centrales,

$$\xi(\rho_{i,j}^n) = -\frac{g}{\rho_0} \left[\frac{\rho_{i+1,j}^n - \rho_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right].$$

El siguiente paso consiste en establecer los límites que acotan los valores máximos y mínimos que puede tener un punto con respecto a sus puntos vecinos, con el objetivo de evitar la formación de picos en las regiones suaves del dominio. Primero se definen los máximos y mínimos de una determinada celda, considerando los valores de los puntos

vecinos,

$$\begin{aligned}\zeta_{i,j}^+ &= \max(\zeta_{i,j}^n, \zeta_{i,j}^{td}), \\ \zeta_{i,j}^{max} &= \max(\zeta_{i-1,j}^+, \zeta_{i,j}^+, \zeta_{i+1,j}^+, \zeta_{i,j-1}^+, \zeta_{i,j+1}^+),\end{aligned}\tag{115}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{i,j}^- &= \min(\zeta_{i,j}^n, \zeta_{i,j}^{td}), \\ \zeta_{i,j}^{min} &= \min(\zeta_{i-1,j}^-, \zeta_{i,j}^-, \zeta_{i+1,j}^-, \zeta_{i,j-1}^-, \zeta_{i,j+1}^-),\end{aligned}\tag{116}$$

después se calculan las diferencias entre los máximos de los flujos antidifusivos de entrada y los mínimos de los flujos antidifusivos de salida en una celda.

$$\begin{aligned}P_{i,j}^+ &= \max(A_{i-(1/2),j}, 0) - \min(A_{i+(1/2),j}, 0) + \\ &\quad \max(A_{i,j-(1/2)}, 0) - \min(A_{i,j+(1/2)}, 0).\end{aligned}\tag{117}$$

Luego se calcula la diferencia entre el valor de ζ^{td} y el valor máximo de los puntos vecinos que está dado por la ecuación (115) y se multiplica por el área $(\Delta V)_{i,j} = (\Delta x)_i(\Delta z)_j$,

$$Q_{i,j}^+ = (\zeta_{i,j}^{max} - \zeta_{i,j}^{td})(\Delta V)_{i,j}.\tag{118}$$

Se calcula la proporción entre Q^+ y P^+ , la cual debe de estar entre 0 y 1,

$$R_{i,j}^+ = \min(1, Q_{i,j}^+/P_{i,j}^+).\tag{119}$$

Los mismos pasos de la ecuación (117) se realizan, pero ahora considerando las diferencias entre los máximos de los flujos antidifusivos de salida y los mínimos de los flujos

antidifusivos de entrada,

$$P_{i,j}^- = \max(A_{i+(1/2),j}, 0) - \min(A_{i-(1/2)}, 0) + \max(A_{i,j+(1/2)}, 0) - \min(A_{i,j-(1/2)}, 0), \quad (120)$$

después se calcula la diferencia entre el valor de ζ^{td} y el valor minimo de los puntos vecinos que esta dado por la ecuación (116) y se multiplica por el área $(\Delta V)_{i,j}$,

$$Q_{i,j}^- = (\zeta_{i,j}^{td} - \zeta_{i,j}^{\min})(\Delta V)_{i,j}. \quad (121)$$

Se calcula la proporción entre Q^- y P^- , la cual debe de estar entre 0 y 1,

$$R_{i,j}^- = \min(1, Q_{i,j}^-/P_{i,j}^-). \quad (122)$$

Utilizando los resultados de las ecuaciones (119) y (122), se determinan los coeficientes C que multiplicaran los flujos antidifusivos,

$$C_{i+(1/2),j} = \begin{cases} \min(R_{i+1,j}^+, R_{i,j}^-) & \text{cuando } A_{i+(1/2),j} > 0 \\ \min(R_{i,j}^+, R_{i+1,j}^-) & \text{cuando } A_{i+(1/2),j} \leq 0 \end{cases} \quad (123)$$

$$C_{i,j+(1/2)} = \begin{cases} \min(R_{i,j+1}^+, R_{i,j}^-) & \text{cuando } A_{i,j+(1/2)} > 0 \\ \min(R_{i,j}^+, R_{i,j+1}^-) & \text{cuando } A_{i,j+(1/2)} \leq 0 \end{cases} \quad (124)$$

donde los coeficientes $C_{i+(1/2),j}$ y $C_{i,j+(1/2)}$ siempre deben de estar entre 0 y 1. La última parte de limitar los flujos antidifusivos consiste en aplicar los coeficientes calculados en

las ecuaciones (123) y (124),

$$\begin{aligned} A_{i+(1/2),j}^C &= C_{i+(1/2),j} A_{i+(1/2),j}, \\ A_{i,j+(1/2)}^C &= C_{i,j+(1/2)} A_{i,j+(1/2)}, \end{aligned} \quad (125)$$

y anular los flujos antidifusivos si se cumplen la condición,

$$\begin{aligned} A_{i+(1/2),j} &= 0 \text{ si } A_{i+(1/2),j}(\zeta_{i+1,j}^{td} - \zeta_{i,j}^{td}) \leq 0, \\ A_{i,j+(1/2)} &= 0 \text{ si } A_{i,j+(1/2)}(\zeta_{i,j+1}^{td} - \zeta_{i,j}^{td}) \leq 0. \end{aligned} \quad (126)$$

El ultimo paso de la metodología consiste en agregar la corrección hecha de los flujos antidifusivos a la ecuación (114),

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^{td} - \Delta V_{i,j}^{-1} [A_{i+(1/2),j}^C - A_{i-(1/2),j}^C + A_{i,j+(1/2)}^C - A_{i,j-(1/2)}^C]. \quad (127)$$

4.4.2 Solución numérica de la ecuación dedensidad

La ecuación (26) del modelo matemático, es una ecuación diferencial parcial no lineal, homogénea de primer orden en ρ . Esta ecuación se resuelve numéricamente utilizando la metodología al igual que en la sección anterior. Primeramente se definen los flujos de orden bajo,

$$\begin{aligned} F_{i+(1/2),j}^L &= \rho_{i+(1/2),j}^L u_{i+(1/2),j}^n (\Delta z)_j \Delta t, \\ G_{i,j+(1/2)}^L &= \rho_{i,j+(1/2)}^L w_{i,j+(1/2)}^n (\Delta x)_i \Delta t, \end{aligned}$$

donde los componentes de velocidad u y w , representa la velocidad intermedia de entrada y salida entre cada celda,

$$\begin{aligned} u_{i+(1/2),j}^n &= \frac{1}{2}[u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n], \\ w_{i,j+(1/2)}^n &= \frac{1}{2}[w_{i,j+1}^n + w_{i,j}^n]. \end{aligned}$$

Los valores espaciales de la densidad también se calculan para los puntos intermedios entre cada celda,

$$\begin{aligned} \rho_{i+(1/2),j}^L &= \frac{1}{2}[\rho_{i+1,j}^n + \rho_{i,j}^n], \\ \rho_{i,j+(1/2)}^L &= \frac{1}{2}[\rho_{i,j+1}^n + \rho_{i,j}^n]. \end{aligned}$$

y S representa la sección por la que el flujo pasa, para el caso de F^L es Δz y para G^L es Δx . El siguiente paso consiste en definir los flujos de orden alto,

$$\begin{aligned} F_{i+(1/2),j}^{H4} &= \rho_{i+(1/2),j}^{H4} u_{i+(1/2),j}(\Delta z)_j \Delta t + F_{i+(1/2),j}^{D4}, \\ G_{i,j+(1/2)}^{H4} &= \rho_{i,j+(1/2)}^{H4} w_{i,j+(1/2)}(\Delta x)_i \Delta t + F_{i,j+(1/2)}^{D4}, \end{aligned}$$

Los puntos intermedios de la densidad ρ , estan dados por la siguiente relación,

$$\begin{aligned} \rho_{i+(1/2),j}^{H4} &= \frac{7}{12}(\rho_{i+1,j}^n + \rho_{i,j}^n) - \frac{1}{12}(\rho_{i+2,j}^n + \rho_{i-1,j}^n), \\ \rho_{i,j+(1/2)}^{H4} &= \frac{7}{12}(\rho_{i,j+1}^n + \rho_{i,j}^n) - \frac{1}{12}(\rho_{i,j+2}^n + \rho_{i,j-1}^n), \end{aligned}$$

ρ^n representa la densidad en un tiempo anterior y F^{D4} , G^{D4} representan los flujos disipativos de cuarto orden,

$$\begin{aligned} F_{i+(1/2),j}^{D4} &= -|u_{i+(1/2),j}| \left[\frac{3}{16}(\rho_{i+1,j}^n - \rho_{i,j}^n) + \frac{1}{16}(\rho_{i+2,j}^n - \rho_{i-1,j}^n) \right] \alpha, \\ G_{i+(1/2),j}^{D4} &= -|w_{i,j+(1/2)}| \left[\frac{3}{16}(\rho_{i,j+1}^n - \rho_{i,j}^n) + \frac{1}{16}(\rho_{i,j+2}^n - \rho_{i,j-1}^n) \right] \beta. \end{aligned}$$

donde $\alpha = \Delta S_{i+(1/2),j} \Delta t^n$ y $\beta = \Delta S_{i,j+(1/2)} \Delta t^n$. Después se definen los flujos antidifusivos,

$$\begin{aligned} A_{i+(1/2),j} &= F_{i+(1/2),j}^{H4} - F_{i+(1/2),j}^L, \\ A_{i,j+(1/2)} &= G_{i,j+(1/2)}^{H4} - G_{i,j+(1/2)}^L. \end{aligned}$$

Se calcula ρ^{td} ,

$$\rho^{td} = \rho^n - \frac{1}{(\Delta x)_i (\Delta z)_j} [F_{i+(1/2),j}^L - F_{i-(1/2),j}^L + G_{i,j+(1/2)}^L - G_{i,j-(1/2)}^L]. \quad (128)$$

Los limites que se utilizan para la densidad son los mismos que se utilizan para la vorticidad en la sección anterior,

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}^+ &= \max(\rho_i^n, j^n, \rho_{i,j}^{td}), \\ \rho_{i,j}^{max} &= \max(\rho_{i-1,j}^+, \rho_{i,j}^+, \rho_{i+1,j}^+, \rho_{i,j-1}^+, \rho_{i,j+1}^+), \\ \rho_{i,j}^- &= \min(\rho_{i,j}^n, \rho_{i,j}^{td}), \\ \rho_{i,j}^{min} &= \max(\rho_{i-1,j}^-, \rho_{i,j}^-, \rho_{i+1,j}^-, \rho_{i,j-1}^-, \rho_{i,j+1}^-), \end{aligned}$$

Los valores de $P_{i,j}^+, Q_{i,j}^+, R_{i,j}^+, P_{i,j}^-, Q_{i,j}^-, R_{i,j}^-$ estan dados por las ecuaciones (117-122) y la selecci3n de los coeficientes que limitan a los flujos antidifusivos estan dados por (123-126). Finalmente se aplica la correcci3n de los flujos antidifusivos a la ecuaci3n (128),

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^{td} - \Delta V_{i,j}^{-1} [A_{i+(1/2),j}^C - A_{i-(1/2),j}^C + A_{i,j+(1/2)}^C - A_{i,j-(1/2)}^C]. \quad (129)$$

4.4.3 Diferencias finitas cercanas a la frontera

Para calcular los valores en los puntos que colindan con la frontera, es necesario utilizar otras aproximaciones num3ricas. La posici3n relativa que tiene un punto respecto a la frontera determina que ecuaci3n se debe utiliza para aproximar su valor; si se requiere calcular los puntos ubicados pr3ximos a la frontera $\overline{AF}$ y los que se encuentran a la derecha del obst3culo en la direcci3n de x , se utilizan las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} \phi_{i+(1/2),j}^{H4} &= \frac{7}{12}(\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i,j}^n) - \frac{1}{12}(\phi_{i+2,j}^n + 2\phi_{i,j}^n - \phi_{i+1,j}^n), \\ F_{i+(1/2),j}^{D4} &= \frac{3}{16}(\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i,j}^n) + \frac{1}{16}(\phi_{i+2,j}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i+1,j}^n), \end{aligned}$$

donde ϕ es una variable que puede representar la vorticidad ζ o la densidad ρ . Los puntos que se encuentran a la izquierda del obst3culo y antes de la frontera $\overline{DE}$ en la direcci3n x se calculan utilizando las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} \phi_{i+(1/2),j}^{H4} &= \frac{7}{12}(\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i,j}^n) - \frac{1}{12}(2\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i,j}^n + \phi_{i+1,j}^n), \\ F_{i+(1/2),j}^{D4} &= \frac{3}{16}(\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i,j}^n) + \frac{1}{16}(2\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i,j}^n - \phi_{i-1,j}^n). \end{aligned}$$

Los puntos que se encuentra por debajo de la fronteras $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y debajo del obstáculo en la dirección z , se calculan con utilizando las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned}\phi_{i,j+(1/2)}^{H4} &= \frac{7}{12}(\phi_{i,j+1}^n + \phi_{i,j}^n) - \frac{1}{12}(2\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j}^n + \phi_{i,j-1}^n), \\ F_{i,j+(1/2)}^{D4} &= \frac{3}{16}(\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j}^n) + \frac{1}{16}(2\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j}^n - \phi_{i,j-1}^n).\end{aligned}$$

Finalmente los puntos que se encuentran por abajo del obstáculo y arriba de la frontera $\overline{FE}$ se calculan utilizando las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned}\phi_{i,j+(1/2)}^{H4} &= \frac{7}{12}(\phi_{i,j+1}^n + \phi_{i,j}^n) - \frac{1}{12}(2\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j}^n + \phi_{i,j-1}^n), \\ F_{i,j+(1/2)}^{D4} &= \frac{3}{16}(\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j}^n) + \frac{1}{16}(2\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j}^n - \phi_{i,j-1}^n).\end{aligned}$$

4.5 Solución numérica del vector de velocidad

La solución numérica del vector velocidad $\mathbf{u}$ con componentes (u, v) , se calcula numéricamente con la relación de la función corriente, ecuación (29). La solución numérica se aproxima con diferencias finitas centrales de segundo orden para todos los puntos que no se encuentran en la frontera, utilizando la siguientes relaciones,

$$\begin{aligned}u_{i,j}^n &= \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2\Delta z}, \\ w_{i,j}^n &= \frac{\psi_{i-1,j}^n - \psi_{i+1,j}^n}{2\Delta x}.\end{aligned}\tag{130}$$

Los valores del vector de velocidad $\mathbf{u}$ en la frontera también son obtenidas numéricamente a partir de la función corriente ψ . La componente de velocidad en la horizontal u , para la frontera $\overline{FE}$ (Figura 4) se aproximá numéricamente con la siguiente relación de

segundo orden,

$$u_{i,1}^n = \frac{4\psi_{i,2}^n - 3\psi_{i,1}^n - \psi_{i,3}^n}{2\Delta z},$$

y para las fronteras $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ con la siguiente relación,

$$u_{i,H}^n = \frac{\psi_{i,M-2}^n - 4\psi_{i,M-1}^n + 3\psi_{i,M}^n}{2\Delta y},$$

donde M es el número total de puntos discretos en la coordenada vertical z .

$$u_{p_i,p_j}^n = \frac{\psi_{p_i,p_j-2}^n - 4\psi_{p_i,p_j-1}^n + 3\psi_{p_i,p_j}^n}{2\Delta z}, \quad (131)$$

donde (p_i, p_j) son pares ordenados que pertenecen al conjunto de puntos que conforma el dominio irregular del obstáculo.

Para calcular w en la frontera $\overline{AF}$ se utiliza la siguiente aproximación de segundo orden,

$$w_{1,j}^n = -\frac{4\psi_{2,j}^n - 3\psi_{1,j}^n - \psi_{3,j}^n}{2\Delta x},$$

y para w en la frontera $\overline{DE}$ se utiliza la siguiente aproximación de segundo orden,

$$w_{L,j}^n = -\frac{\psi_{N-2,j}^n - 4\psi_{N-1,j}^n + 3\psi_{N,j}^n}{2\Delta x},$$

donde N es el número total de puntos discretos en la coordenada x .

4.6 Condiciones de frontera en la frontera abierta

Las condiciones de frontera a lo largo de la frontera abierta $\overline{DE}$ que se implementan en este trabajo para solucionar numéricamente el modelo matemático son dos, condiciones de frontera periódicas y condiciones de radiación.

4.6.1 Condiciones periódicas

Las condiciones de frontera periódicas tienen el mismo valor cada cierto intervalo (periodo), por ejemplo, sea ϕ una función que pertenece a $\mathbb{R}^1$, la condición de frontera asignada para un punto x_0 inicial $\phi(x_0) = \phi_0$ se asigna para otro punto en $\phi(x_0 + kt)$, donde k es el intervalo que divide cada periodo y t es un número entero que representa el periodo.

En este trabajo las condiciones periódicas se aplican sobre la coordenada espacial z en la entrada y salida del sistema,

$$\phi(x_0, z, t) = \phi(x_n, z, t_n) = f(z, t),$$

donde ϕ representa la vorticidad (ζ), densidad (ρ) o función corriente (ψ), x_0 y x_n los periodos, t el tiempo en el cual se aplican estas condiciones y $f(z, t_n)$ es una función que asigna el valor que tiene en la frontera según el tiempo y la altura.

4.6.2 Condiciones de radiación

Las condiciones de radiación utilizan la ecuación de onda en una dimensión para calcular los valores en la frontera,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \hat{c} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (132)$$

donde ϕ puede ser la vorticidad ζ o densidad ρ o función corriente ψ y $\hat{c}$ es la velocidad de propagación de onda que debe ser calculada,

$$\hat{c} = -\frac{\psi_t}{\psi_x}. \quad (133)$$

La ecuación (133) se discretiza con diferencias finitas hacia atrás temporalmente y espacialmente en el punto $B - 1$, donde B representa el último punto en la coordenada horizontal x ,

$$\hat{c} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \left[\frac{\phi_{B-1,j}^n - \phi_{B-1,j}^{n-1}}{\phi_{B-2,j}^{n-1} - \phi_{B-1,j}^{n-1}} \right],$$

definimos,

$$\hat{r} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \hat{c}$$

cuyo valor debe estar en el siguiente intervalo $0 \leq \hat{r} \leq 1$ según se menciona en el trabajo de Miller y Thorpe (1981).

La ecuación (132) se discretiza temporalmente con diferencias finitas hacia adelante y diferencias finitas hacia atrás en el punto B ,

$$\phi_{B,j}^{n+1} = \phi_{B,j}^n - \hat{c} \Delta t \left[\frac{\phi_{B,j}^n - \phi_{B-1,j}^n}{\Delta x} \right],$$

reemplazamos $\frac{\Delta t}{\Delta x} \hat{c}$ por $\hat{r}$ en la ecuación anterior y obtenemos,

$$\phi_{B,j}^{n+1} = \phi_{B,j}^n (1 - \hat{r}) + \hat{r} \phi_{B-1,j}^n,$$

que finalmente se puede expresar como,

$$\phi_{B,j}^{n+1} = \frac{\phi_{B,j}^n (\phi_{B-1,j}^n - \phi_{B-2,j}^{n-1}) - \phi_{B-1,j}^n (\phi_{B-1,j}^n - \phi_{B-1,j}^{n-1})}{(\phi_{B-1,j}^{n-1} - \phi_{B-2,j}^{n-1})}. \quad (134)$$

Una vez obtenidas todas las aproximaciones numéricas necesarias para resolver el modelo matemático (26-29), bajo el dominio previamente descrito, es momento de resolver numéricamente el problema físico que se plantea en este trabajo. En el siguiente capítulo se presentan los resultados correspondientes a las variables involucradas en el

modelo matemático utilizando diferentes parámetros.

Capítulo 5

Resultados numéricos

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos al solucionar numéricamente el modelo matemático presentado en el Capítulo 2 que describe el flujo de un fluido no hidroestático, incompresible, estratificado pasando por un obstáculo en dos dimensiones espaciales (26-29). Los diferentes resultados presentados corresponden a las diversas velocidades y condiciones de frontera implementadas.

5.1 Solución numérica del modelo matemático en un túnel de laboratorio

Se resuelve numéricamente el modelo matemático que describe el comportamiento de un fluido no hidroestático, incompresible, fluyendo a través de un obstáculo en dos dimensiones espaciales (26-29), con los esquemas numéricos planteados en el Capítulo 4. La solución numérica se realiza en un dominio irregular, el cual consiste en un rectángulo con un obstáculo triangular situado en la parte media superior. Inicialmente el fluido se encuentra en reposo, en seguida comienza a ser acelerado hasta un tiempo t_a , y después de haber transcurrido en el tiempo t_a , el fluido deja de ser acelerado y mantiene una velocidad constante U_0 en la frontera de entrada $\overline{AF}$ (Figura 4) del dominio. Inicialmente la estratificación del fluido consiste en dos capas de densidades diferentes ρ_1, ρ_2 y una capa intermedia (*interface*) delgada que tiene una variación lineal entre los valores de las dos densidades. Las condiciones para la frontera abierta $\overline{DE}$ del sistema se mantiene periódica durante el tiempo t_a mientras el fluido es acelerado, después se utilizan diferentes condiciones de frontera y se muestran los diversos resultados.

5.1.1 Dominio

El dominio consiste en un túnel rectangular con un obstáculo triangular situado en el centro del rectángulo en la parte media superior. El rectángulo tiene, 512 cm. de longitud por 70 cm. de profundidad, la Figura 4 muestra la geometría del domino, donde L representa la longitud del rectángulo, H la profundidad, δ representa el espesor de la interface, d la altura que tiene la capa superior de densidad ρ_1 , ρ_1 y ρ_2 representan las dos densidades, donde $\rho_2 > \rho_1$. El triángulo se sitúa en la parte superior del rectángulo, en el punto $(L/2, H)$ con longitud media $l = 16$ cm. y altura $h = 5.5$ cm., $U(t)$ representa la velocidad de entrada al tiempo t , $\overline{AF}$, $\overline{DE}$, $\overline{FE}$, $\overline{AD}$ representan cada una de las cuatro fronteras del sistema y $z_{\max} = z_{\max}(x)$ es una función que determina la altura de la frontera superior con respecto a la posición en la coordenada x , ecuación (31).

5.1.2 Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales que tiene el fluido en todo el dominio espacial al tiempo $t = 0$, son condiciones estacionarias es decir el fluido se encuentra en reposo. La Tabla II muestra el valor inicial que tiene cada una de las variables, donde (u, w) son las componentes del vector de velocidad $\mathbf{u}$, ζ es la vorticidad, ρ es la densidad y ψ es la función corriente.

Tabla II: Condiciones iniciales que satisface el modelo matemático.

Variable	Condiciones iniciales
$\zeta(x, z, 0)$	0
$\psi(x, z, 0)$	0
$u(x, z, 0)$	0
$w(x, z, 0)$	0
$\rho(x, z, 0)$	$G(z)$

donde $G(z)$ es una función que relaciona el valor de la densidad con la altura en la coordenada z , ecuación (30).

5.1.3 Simulaciones realizadas

Se corrieron 2 conjuntos de simulaciones diferentes, según el tipo de condición de frontera implementada,

- Condiciones periódicas.
- Condiciones de radiación.

En cada caso se muestran resultados para diferentes valores de la velocidad de entrada U_0 , tiempo de aceleración t_a y las variables involucradas en el modelo,

- Líneas de corriente.
- Vorticidad.
- Interfaz de la densidad (en algunos casos), donde esta se calcula como $\rho_1 + \Delta\rho/2$.
- Campo de velocidades (en algunos casos).

5.2 Experimento con condiciones periódicas

El primer experimento consiste en resolver numéricamente el sistema de ecuaciones (26-29) implementando los esquemas numéricos presentados en el Capítulo 4, en el dominio que se muestra en la Figura 4, con condiciones periódicas para la vorticidad ζ , densidad ρ y función corriente ψ en las fronteras $\overline{AF}$ y $\overline{DE}$ para todo el tiempo $t \geq 0$ (estas condiciones se resumen en la Tabla III). La discretización del dominio espacial se logra utilizando una malla de $N = 1024$ puntos en la coordenada horizontal x y $M = 140$ puntos en la coordenada vertical z ; la discretización en el tiempo utiliza $T = 3000$ pasos en el tiempo.

Tabla III: Condiciones de frontera para la vorticidad, densidad y función corriente para todo el tiempo $t \geq 0$, utilizando condiciones periódicas en $\overline{AF}$ y $\overline{DE}$ para todo el tiempo $t \geq 0$.

Variable	Frontera	Condiciones de frontera
$\zeta(0, z, t)$	$\overline{AF}$	0
$\zeta(L, z, t)$	$\overline{DE}$	0
$\zeta(x, 0, t)$	$\overline{FE}$	0
$\zeta(x, \hat{z}_{\max}(x), t)$	$\overline{AD}$	0
$\psi(0, z, t)$	$\overline{AF}$	$F(z, t)$
$\psi(L, z, t)$	$\overline{DE}$	$F(z, t)$
$\psi(x, 0, t)$	$\overline{FE}$	0
$\psi(x, \hat{z}_{\max}(x), t)$	$\overline{AD}$	$F(H, t)$
$\rho(0, z, t)$	$\overline{AF}$	$G(z)$
$\rho(L, z, t)$	$\overline{DE}$	$G(z)$
$\rho(x, 0, t)$	$\overline{FE}$	ρ_2
$\rho(x, \hat{z}_{\max}(x), t)$	$\overline{AD}$	ρ_1

En la Tabla anterior $G(z)$ es la función que relaciona la densidad con la altura, descrita en la ecuación (30) y $F(z, t)$ es una función que relaciona el valor de la función corriente con la altura, ecuación (32). Las componentes de velocidad se calculan

numéricamente como se muestra en el Capítulo 4. Los parámetros del experimento se muestran en la Tabla IV, donde las dos densidades deben satisfacer la siguiente relación $1 - \rho_1/\rho_2 = .021$, según se propone en el experimento que realiza Cummins y Vallis (1994).

Tabla IV: Parámetros del primer Experimento.

Parámetro	Valor
ρ_1	1.029 g/cm^3 .
ρ_2	1.007 g/cm^3 .
ρ_0	1 g/cm^3 .
t_a	10 s .
U_0	8 cm/s .
δ	1 cm .
d	11 cm .
Δt	.01
$\Delta x, \Delta z$	.5
N	1024
M	140
T	3000

El experimento numérico se ejecuto por un total de 3000 iteraciones en el tiempo lo cual son 30 segundos de simulación. En una cluster de 12 procesadores intel a 2.1 GHz y 30 GB en memoria RAM, con una duración aproximada de 6 horas 40 minutos, cada iteración en el tiempo tardaba aproximadamente 8 segundos utilizando un solo procesador.

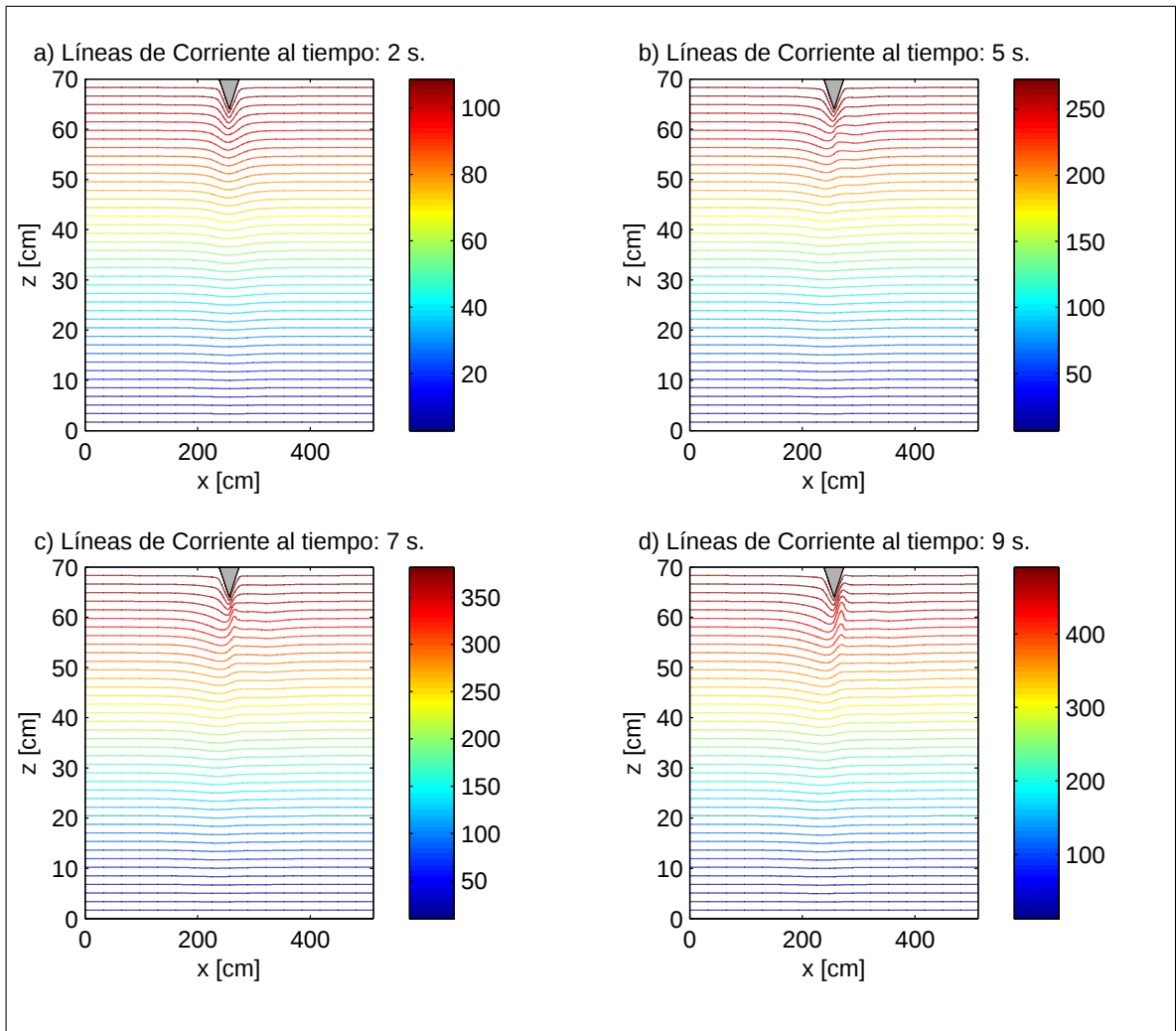


Figura 14: Líneas de corriente en todo el dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$.

La Figura 14 muestra las líneas de corriente que corresponde a la variable de la función corriente después 2, 5, 7, 9 segundos, en todo el dominio con velocidad de entrada de 8 cm/s . La Figura 15 muestran los mismos valores de la función corriente pero con un acercamiento en el obstáculo.

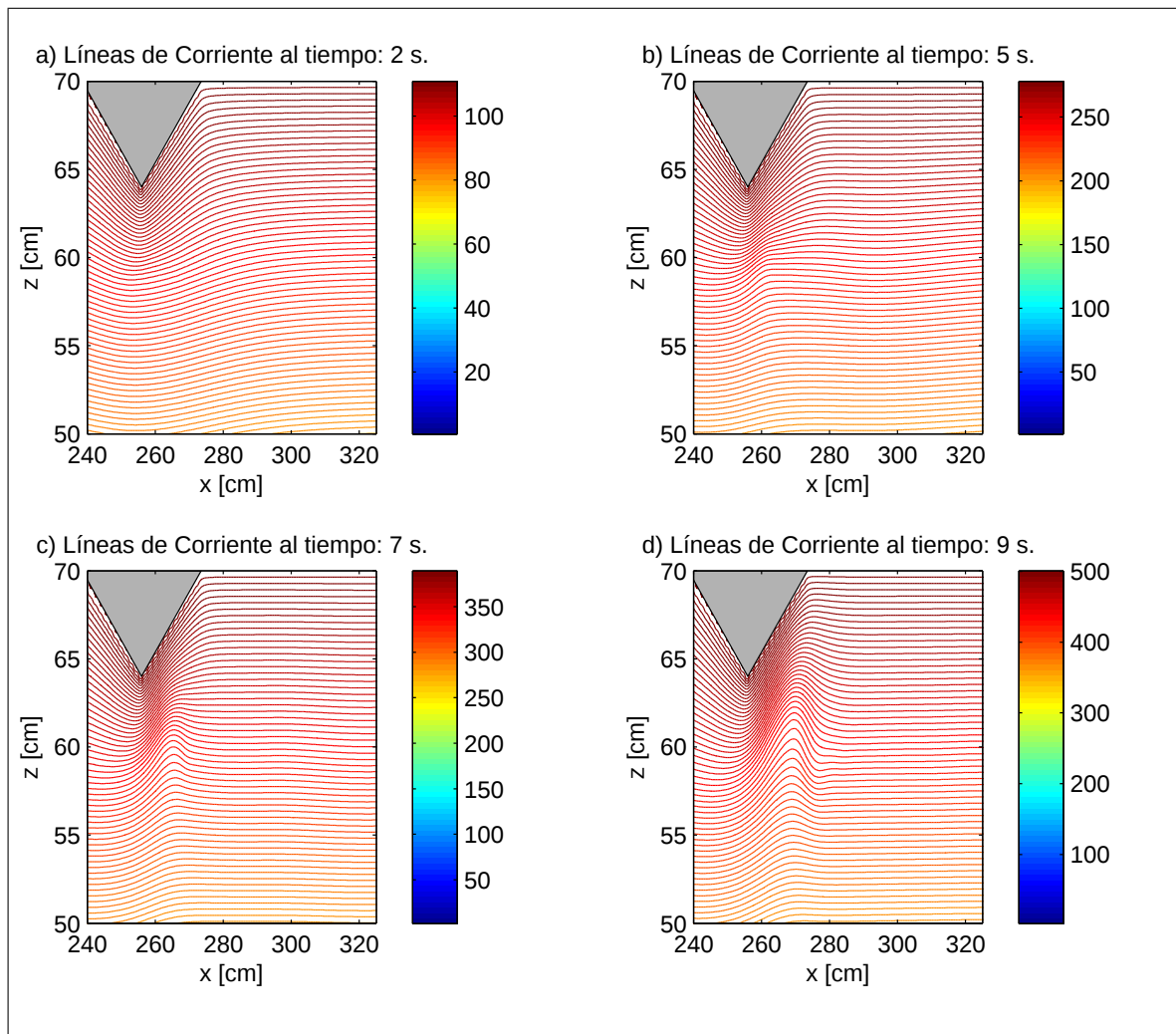


Figura 15: Acercamiento a las líneas de corriente en la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$.

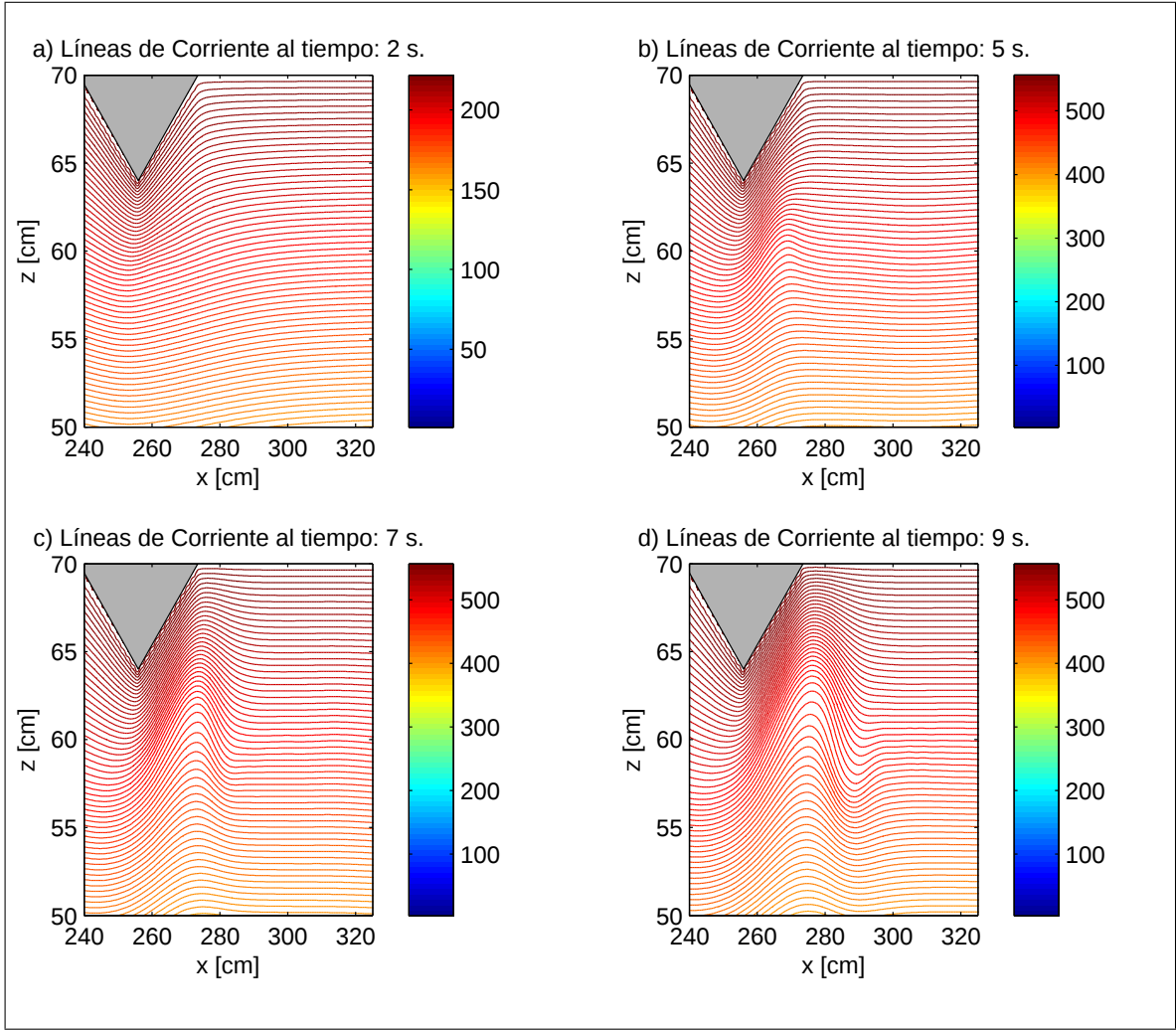


Figura 16: Acercamiento a las líneas de corriente en la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$.

La Figura 16 muestra los resultados de la función corriente al resolver numéricamente el mismo experimento pero modificando el parámetro del tiempo de aceleración t_a a 5 segundos y velocidad de entrada U_0 a 8 cm/s .

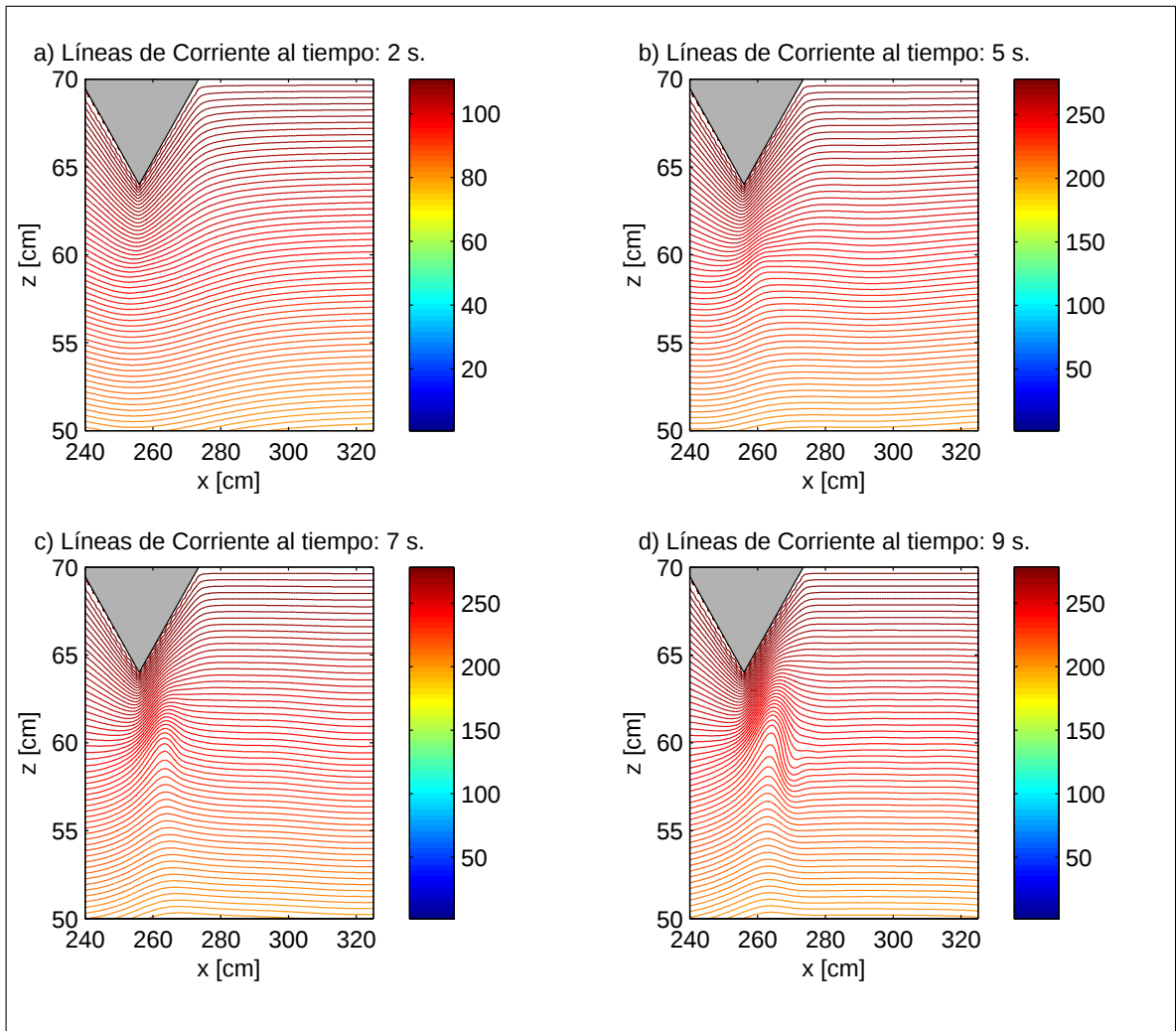


Figura 17: Acercamiento a las líneas de corriente en la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$.

La Figura 17 muestra los resultados de la función corriente al resolver numéricamente el mismo experimento pero modificando los parámetros del tiempo de aceleración t_a a 5 segundos y velocidad de entrada U_0 a 4cm/s .

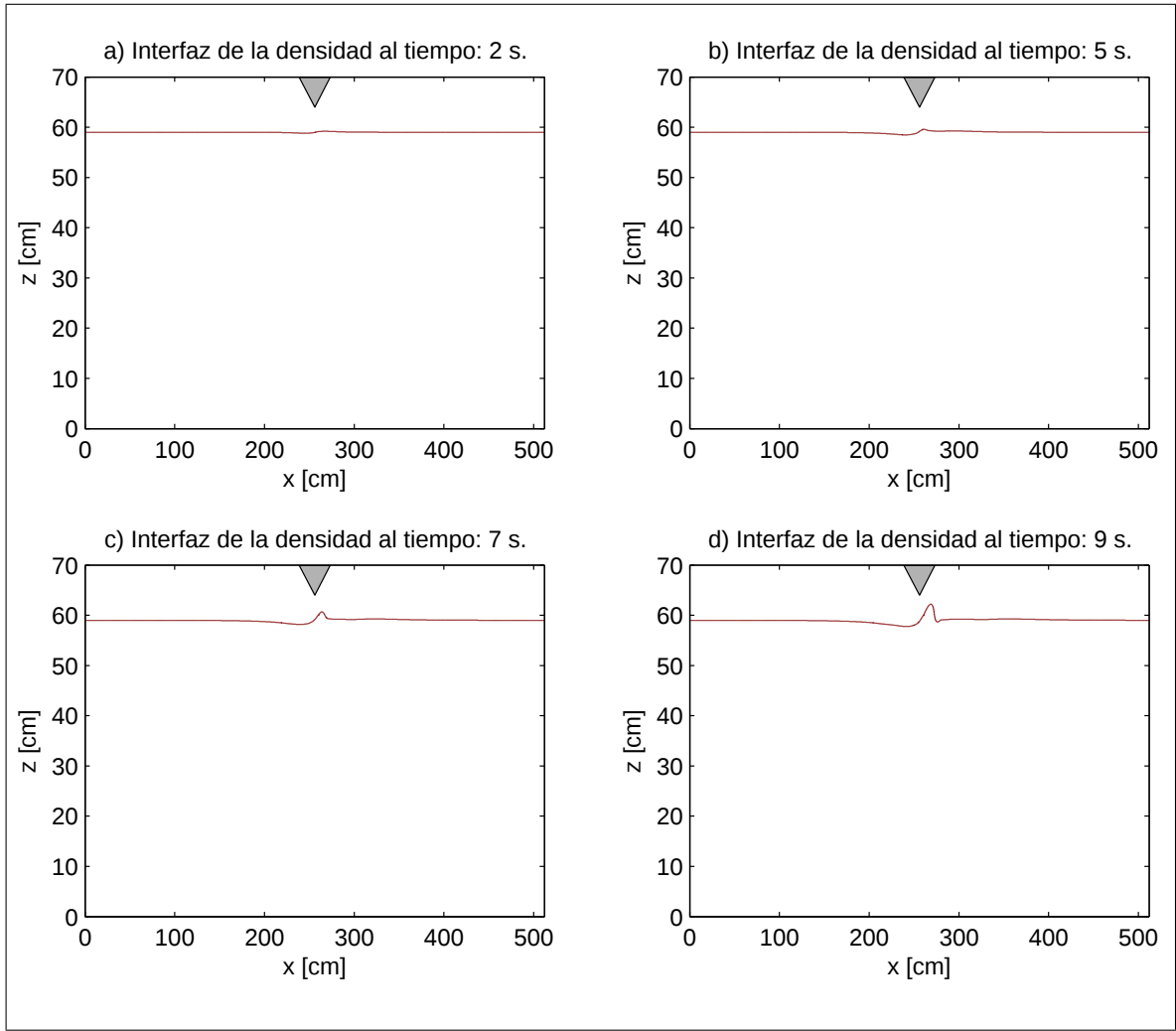


Figura 18: Interfaz de la densidad en el dominio completo después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 18 muestra la interfaz de la densidad después de 2, 5, 7, 9 segundos con $U_0 = 8\text{cm/s}$ y $t_a = 10\text{s}$. La interfaz es la capa que divide las dos densidades y es equivalente a una densidad de 1.018 g/cm^3 . La Figura 19 muestra la misma interfaz con un acercamiento en la parte irregular del domino.

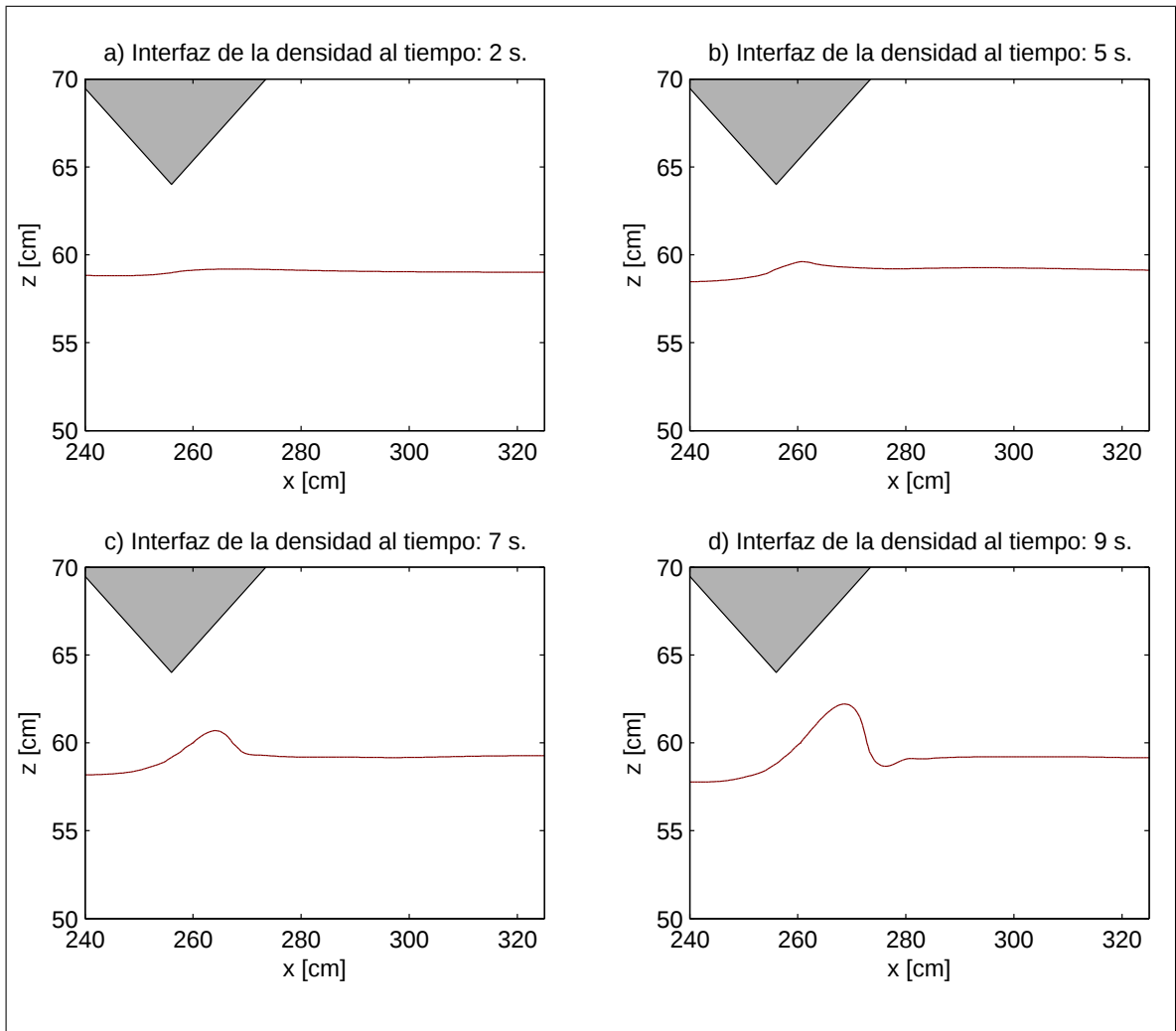


Figura 19: Acercamiento a la interfaz de la densidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

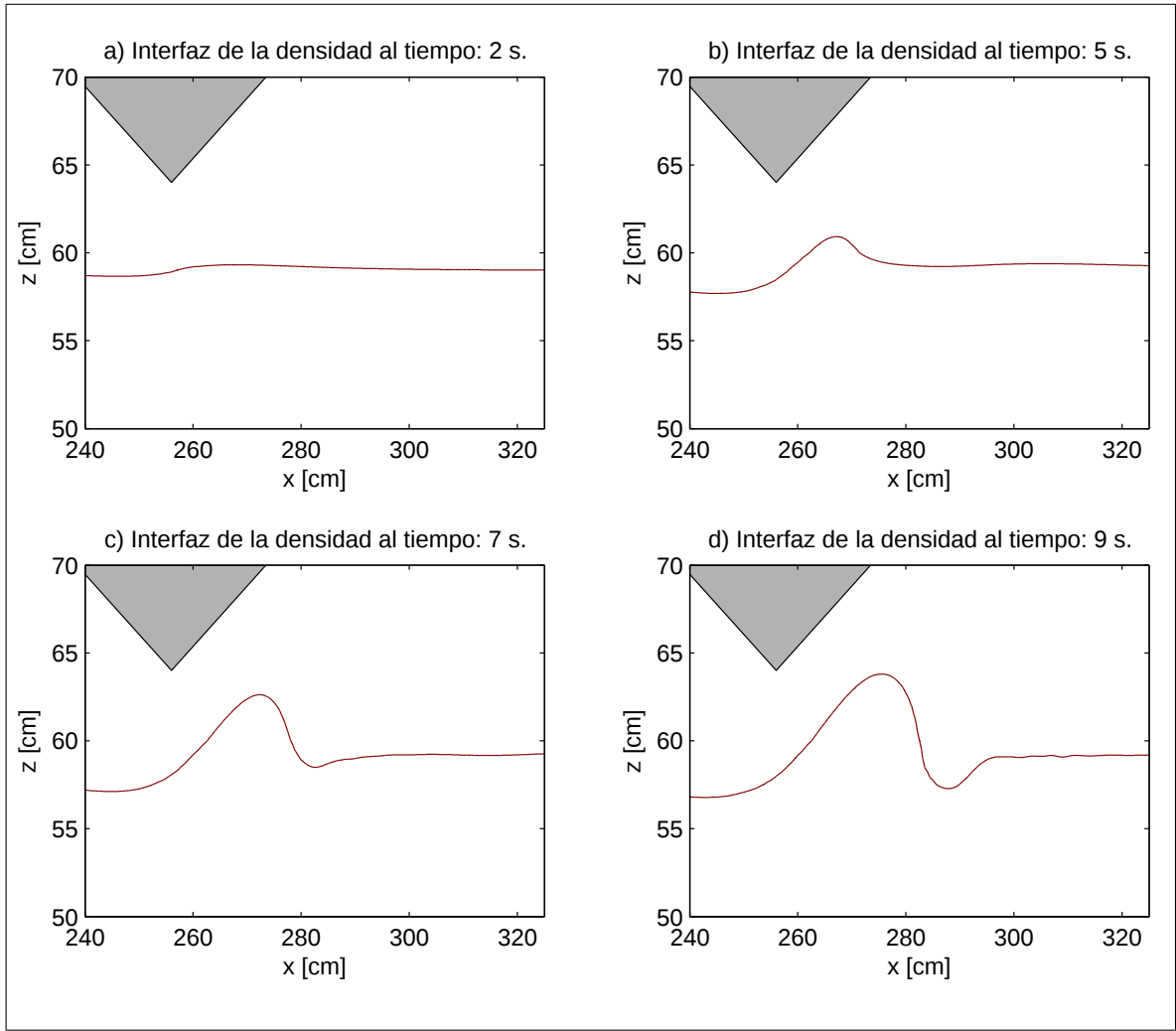


Figura 20: Acercamiento a la interfaz de la densidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 20 muestra los resultados de la interfaz de la densidad al solucionar numéricamente el mismo experimento pero modificando el parámetro de tiempo de aceleración t_a a 5 segundos y velocidad de entrada U_0 a 8 cm/s .

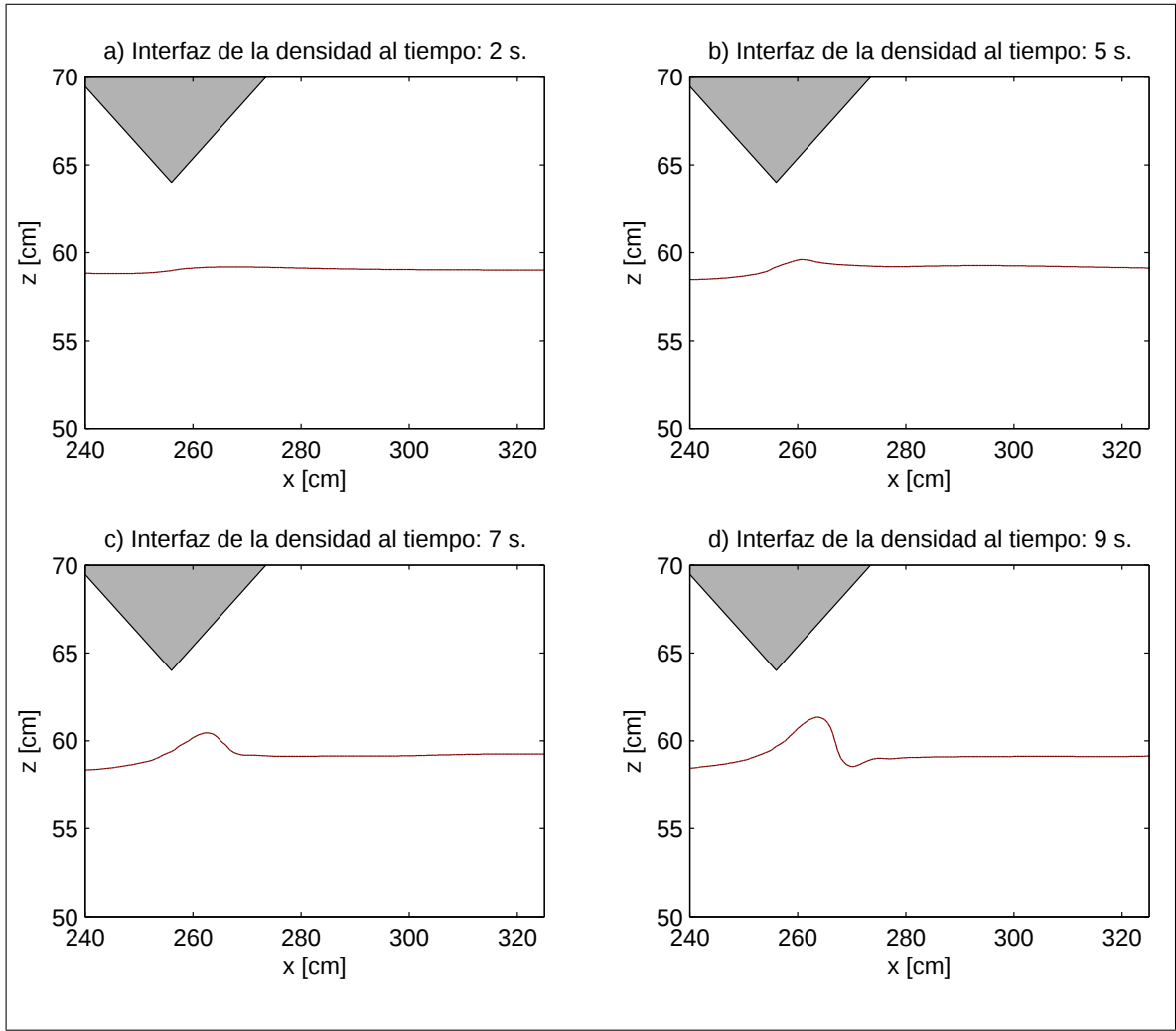


Figura 21: Acercamiento de la interfaz de la densidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 21 muestra los resultados de la interfaz de la densidad al solucionar numéricamente el mismo experimento pero modificando los parámetros de tiempo de aceleración t_a a 5 segundos y velocidad de entrada U_0 a 4cm/s .

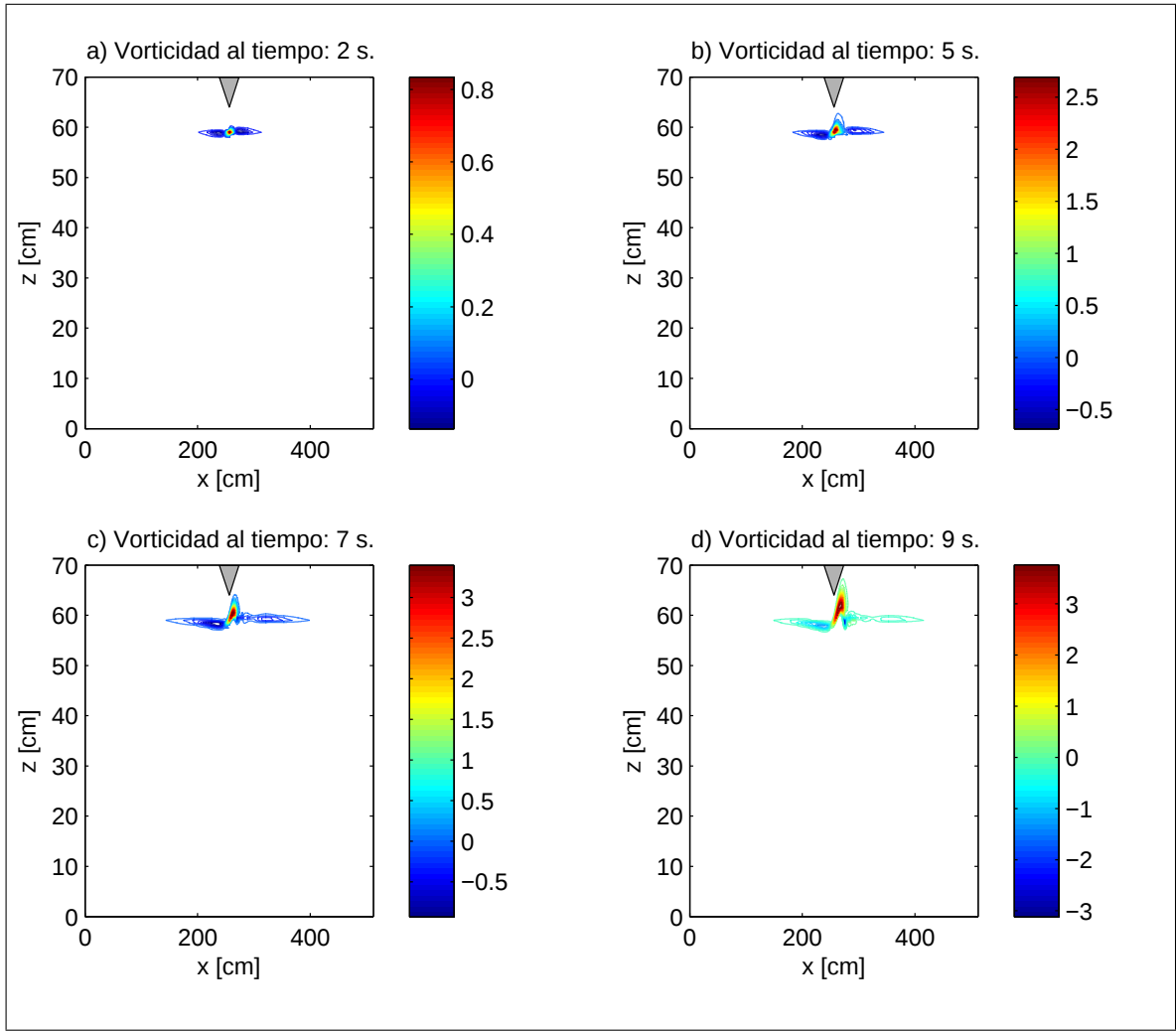


Figura 22: Vorticidad en el dominio completo después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 22 representa la vorticidad después de 2, 5, 7, 9 segundos, con velocidad de entrada $U_0 = 8\text{cm/s}$ y tiempo de aceleración $t_a = 10$ segundos. La Figura 23 muestra el mismo valor de vorticidad con un acercamiento en la parte irregular del dominio.

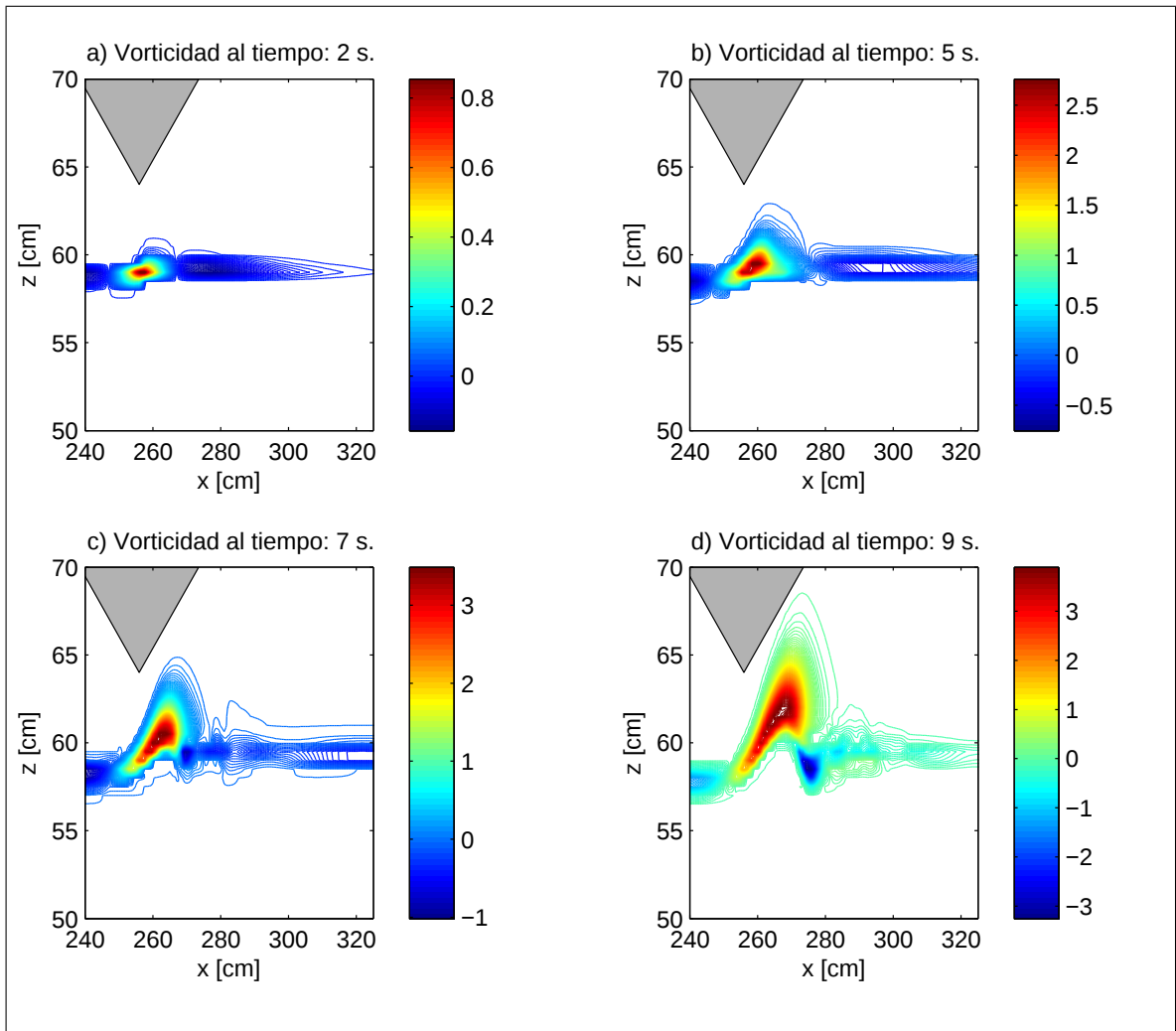


Figura 23: Acercamiento de la vorticidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

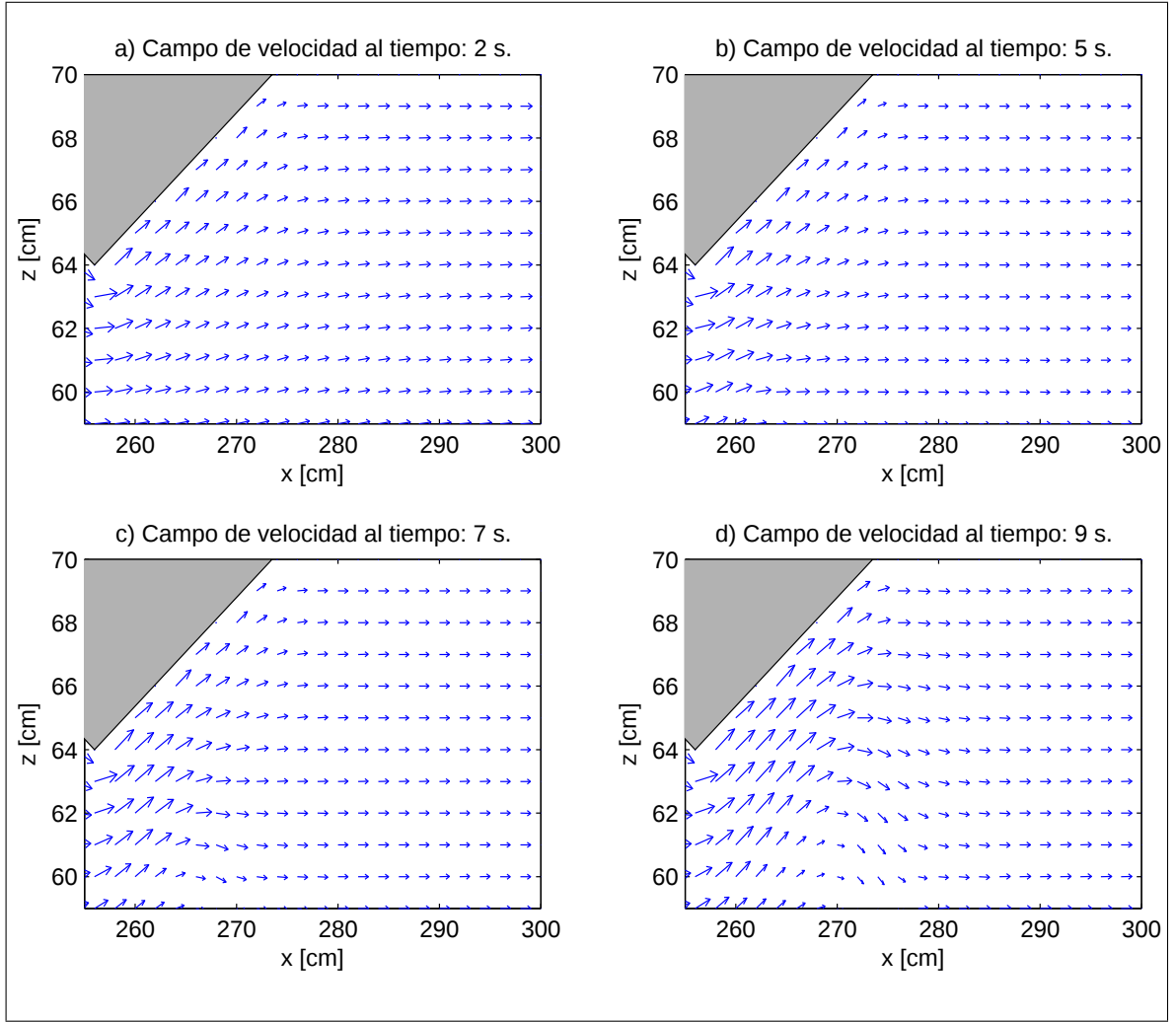


Figura 24: Campo de velocidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 24 muestra el campo de velocidad cerca de la región irregular del dominio después de 2, 5, 7, 9 segundos. El campo de velocidad corresponde a los vectores de velocidad con componentes de velocidad (u, w) , con velocidad de entrada $U_0 = 8 \text{ cm/s}$ y tiempo de aceleración $t_a = 10$ segundos.

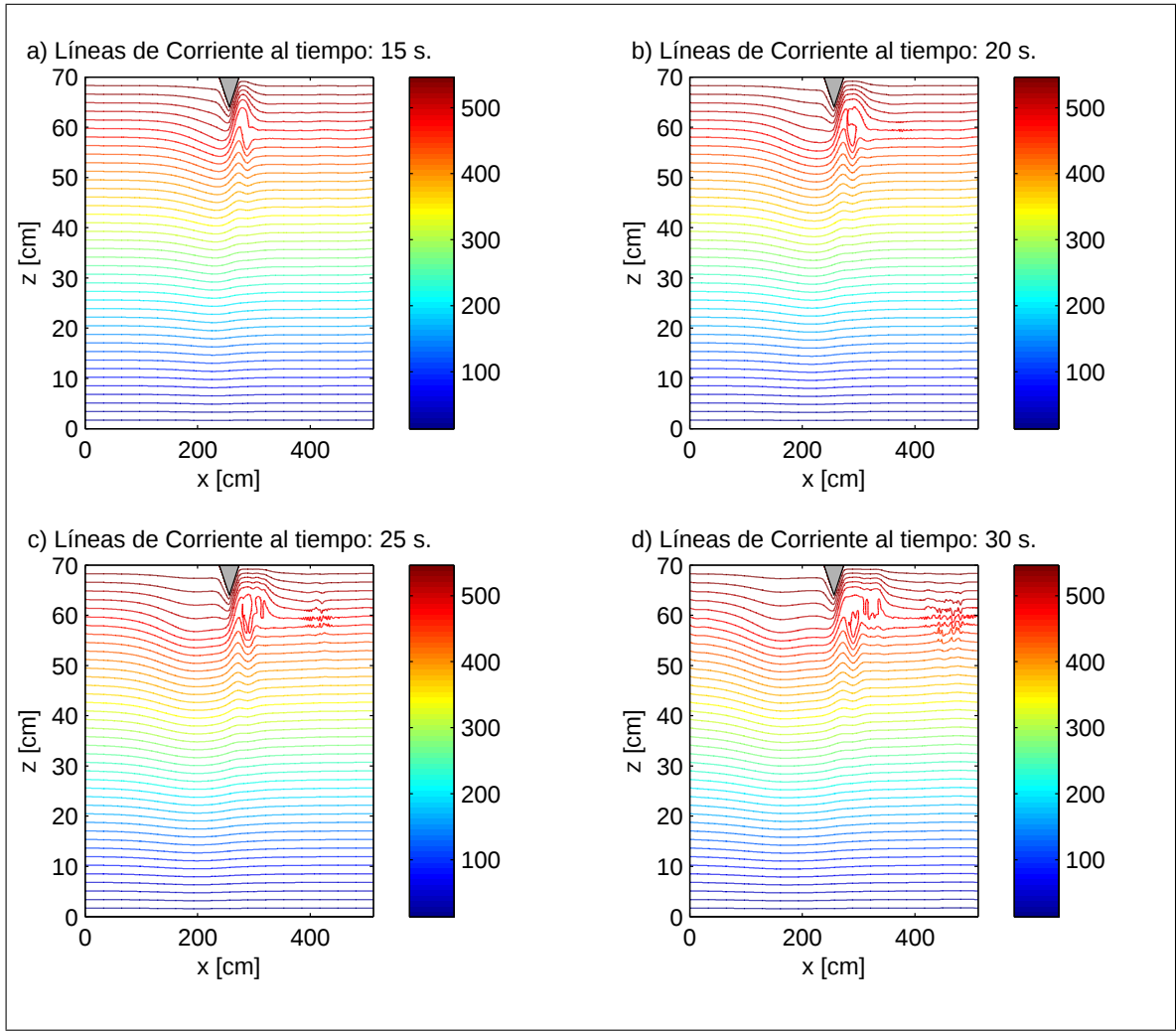


Figura 25: Líneas de corriente en todo el dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$.

La Figura 25 muestra las líneas de corriente que corresponden a la función corriente a los 15,20,25,30 segundos, con velocidad de entrada $U_0 = 8\text{cm/s}$ y tiempo de aceleración $t_a = 10$ segundos. La Figura 26 muestra las mismas líneas de corriente con un acercamiento en la parte irregular del dominio.

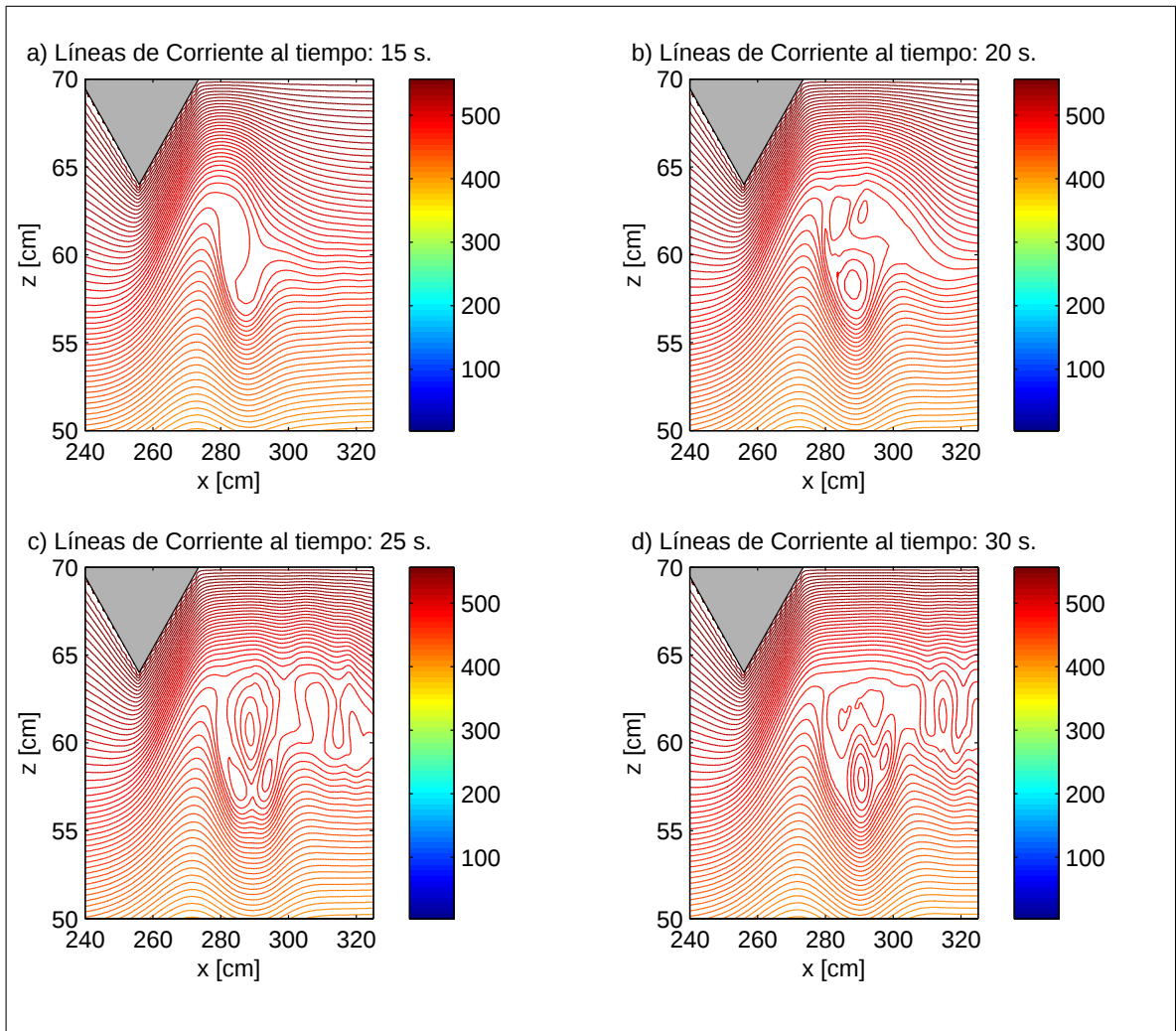


Figura 26: Acercamiento a las líneas de corriente cerca de la parte irregular del dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$.

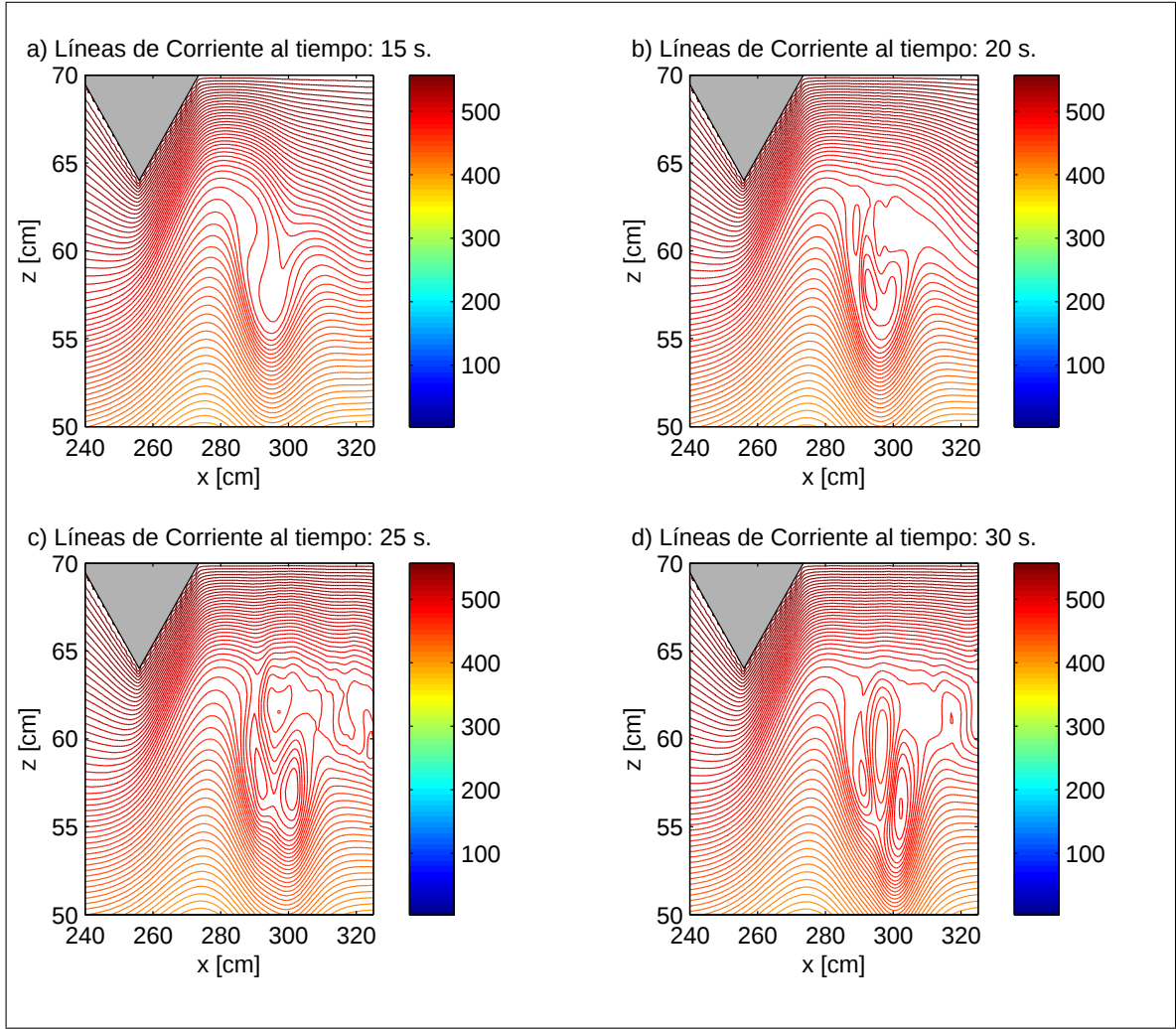


Figura 27: Acercamiento a las líneas de corriente cerca de la parte irregular del dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$.

La Figura 27 muestra los resultados de la función corriente al resolver numéricamente el mismo experimento pero modificando el parámetro del tiempo de aceleración t_a a 5 segundos y velocidad de entrada U_0 a 8 cm/s .

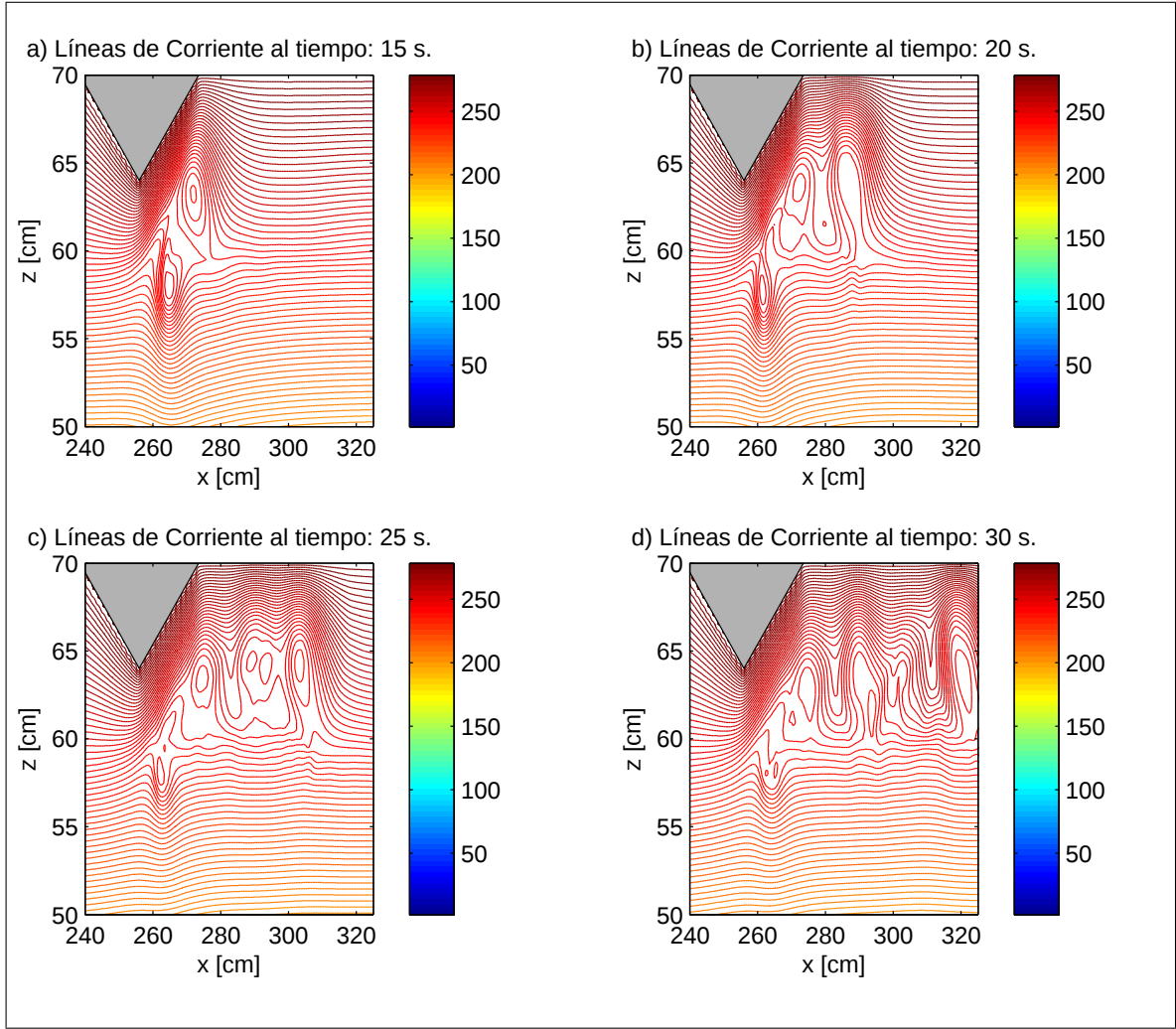


Figura 28: Acercamiento a las líneas de corriente cerca de la parte irregular del dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$.

La Figura 28 muestra los resultados de la función corriente al resolver numéricamente el mismo experimento pero modificando los parámetros del tiempo de aceleración t_a a 5 segundos y velocidad de entrada U_0 a 4cm/s .

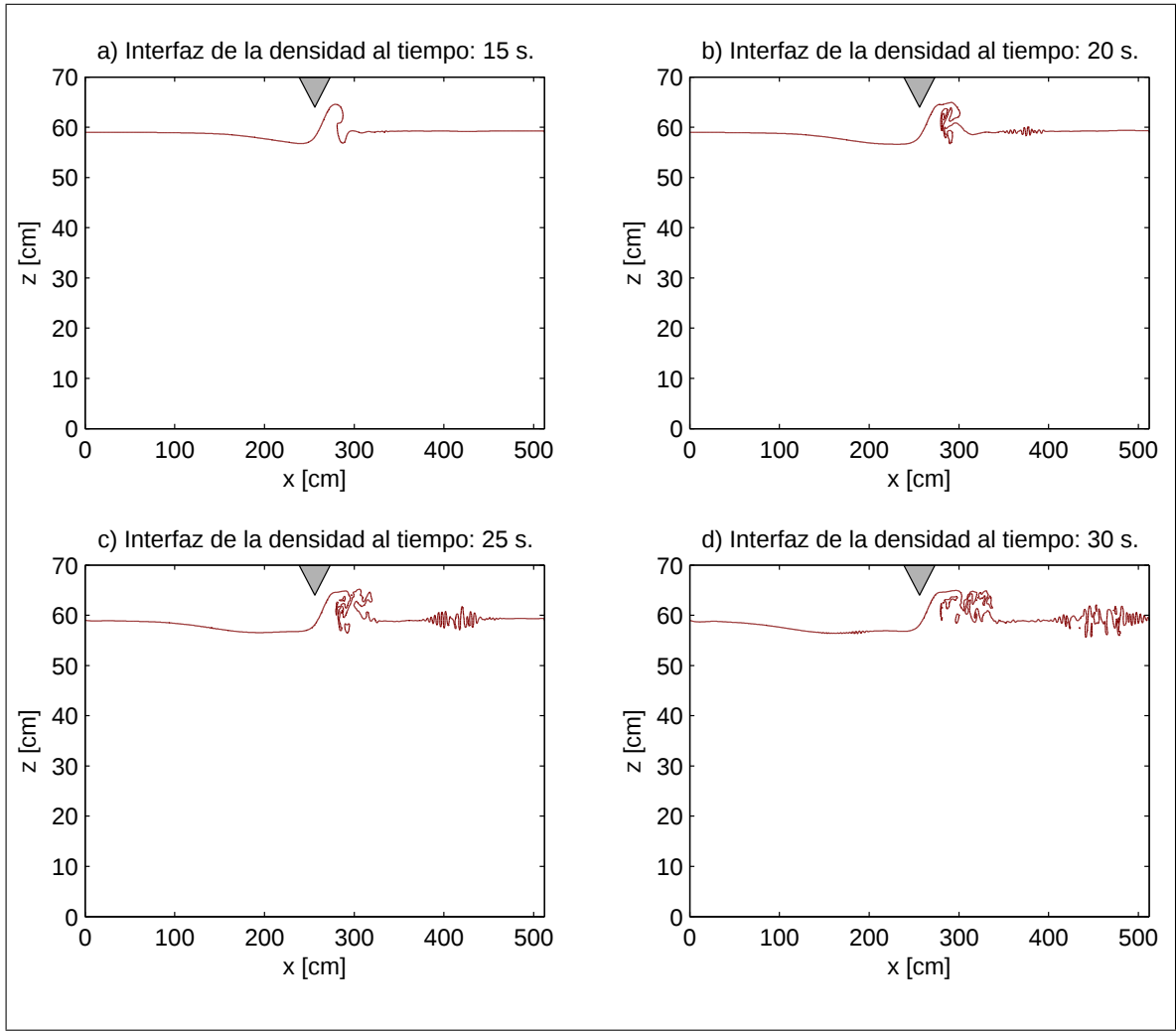


Figura 29: Interfaz de la densidad en el dominio completo después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 29 muestra la interfaz de la densidad después de 15, 20, 25, 30 segundos, con velocidad de entrada $U_0 = 8 \text{ cm/s}$ y tiempo de aceleración $t_a = 10 \text{ s}$. La Figura 30 muestra la misma interface con un acercamiento en la parte irregular del dominio.

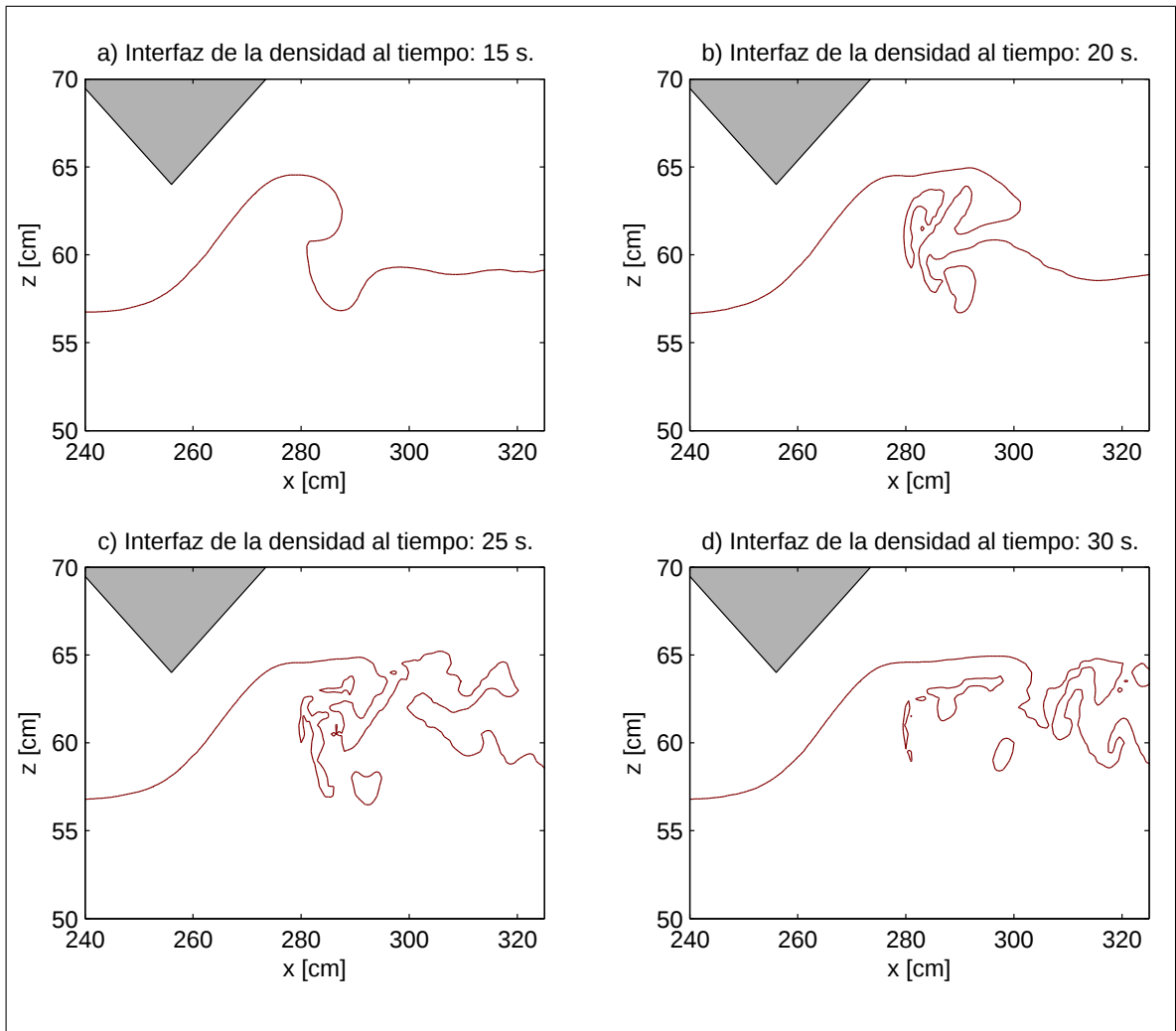


Figura 30: Acercamiento a la Interfaz de la densidad cerca de la parte irregular del domino después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

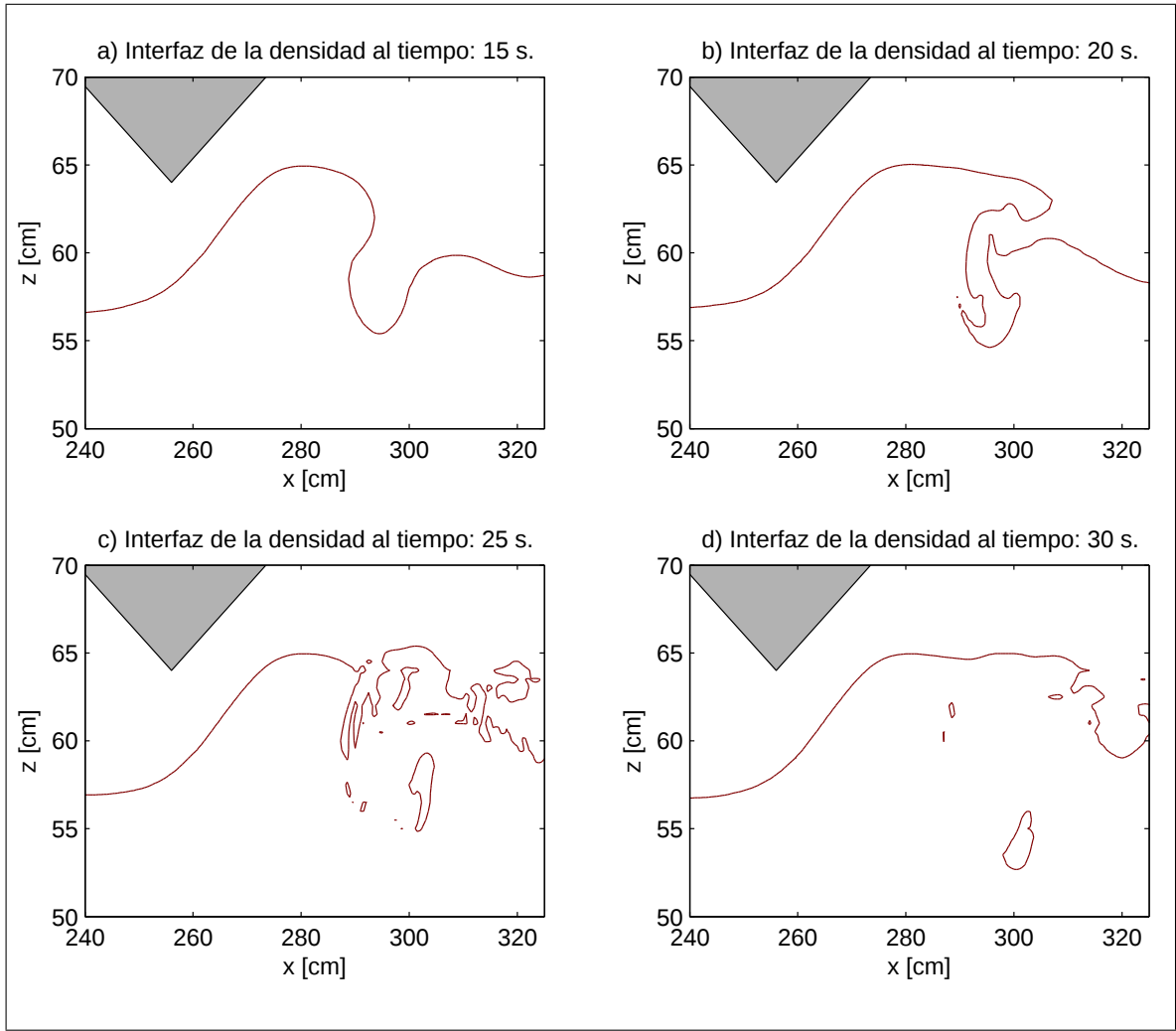


Figura 31: Acercamineto a la interfaz de la densidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 31 muestra los resultados de la interfaz de la densidad al resolver numéricamente el mismo experimento pero modificando el parámetro del tiempo de aceleración t_a a 5 segundos y velocidad de entrada U_0 a 8cm/s .

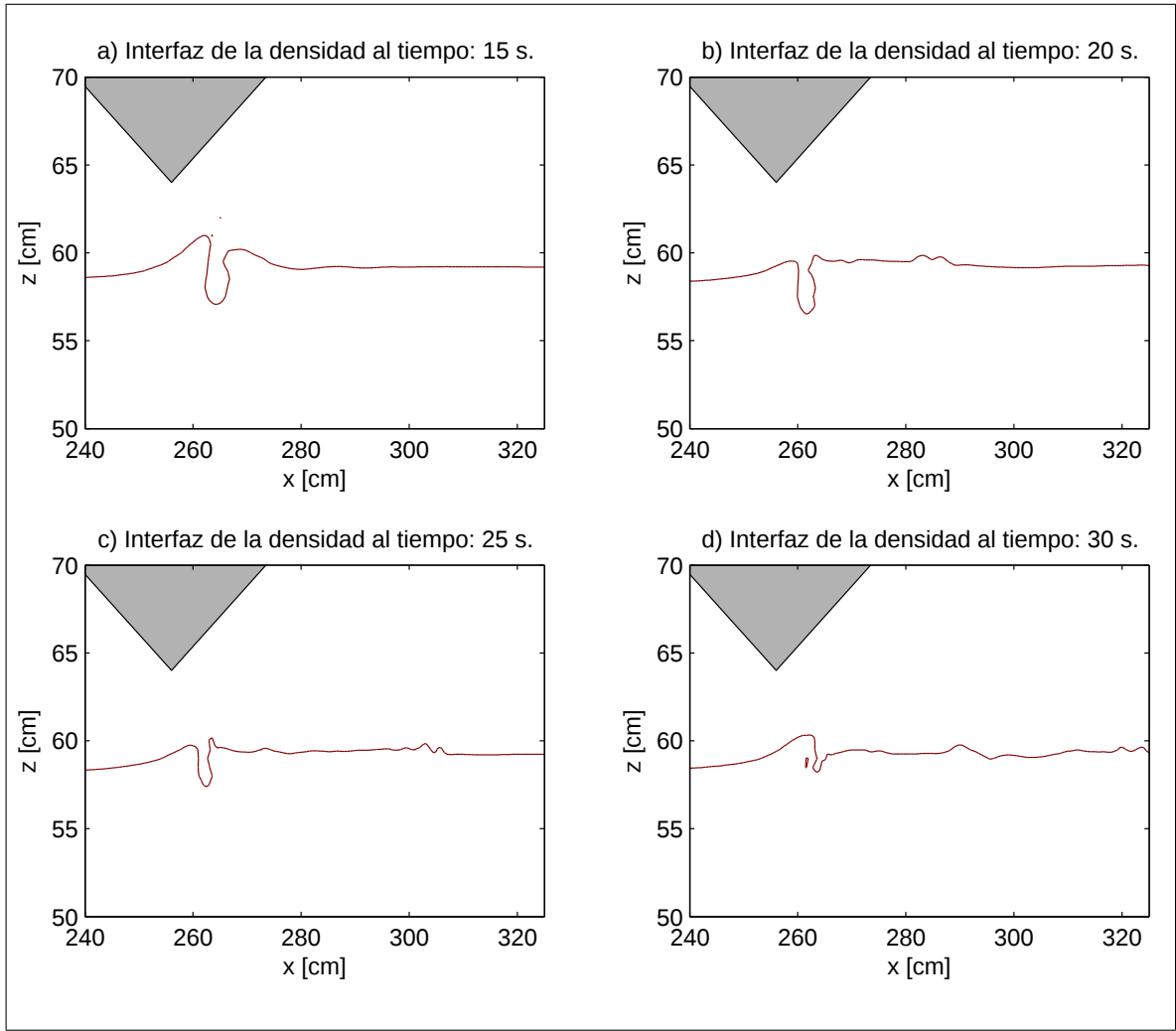


Figura 32: Acercamiento a la interfaz de la densidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 32 muestra los resultados de la interfaz de la densidad al resolver numéricamente el mismo experimento pero modificando los parámetros del tiempo de aceleración t_a a 5 segundos y velocidad de entrada U_0 a 4cm/s .

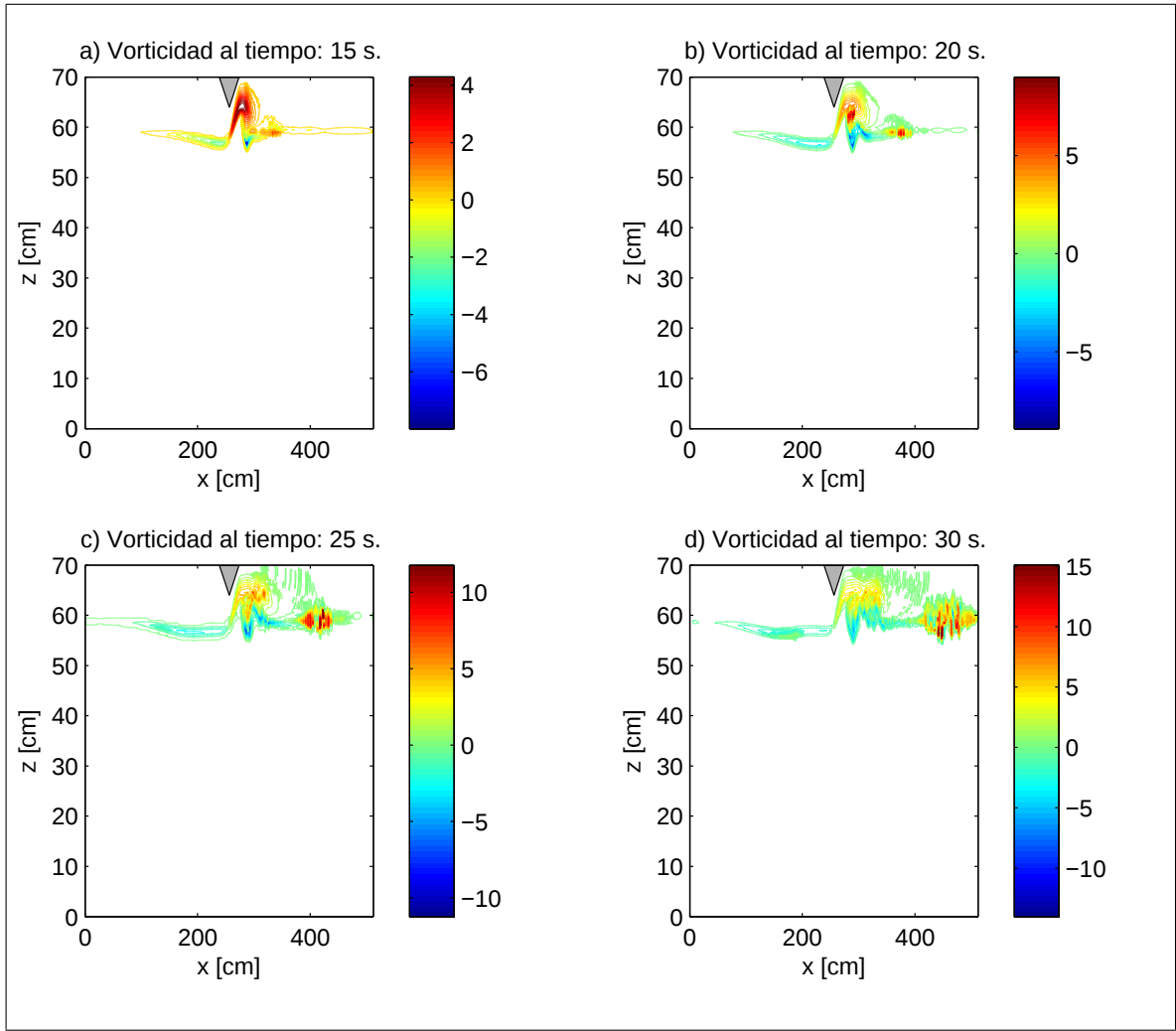


Figura 33: Vorticidad en todo el dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 33 representa la vorticidad después de 15,20,25,30 segundos en todo el dominio, con velocidad de entrada $U_0 = 8\text{cm/s}$ y tiempo de aceleración $t_a = 10$ segundos. La Figura 34 muestra la misma variable de vorticidad con un acercamiento en la parte irregular del dominio.

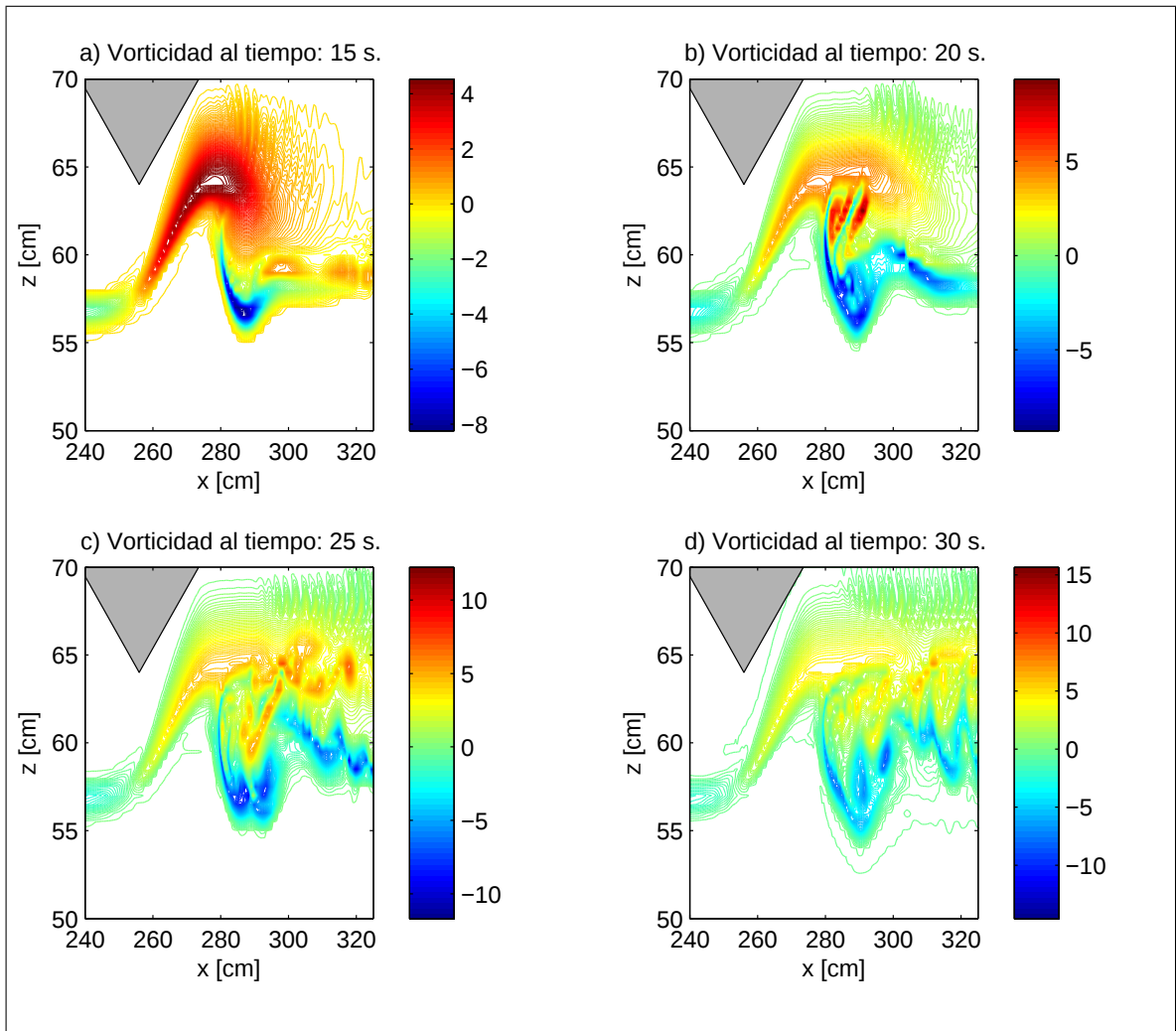


Figura 34: Acercamiento a la vorticidad cerca de la parte irregular del domino después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$.

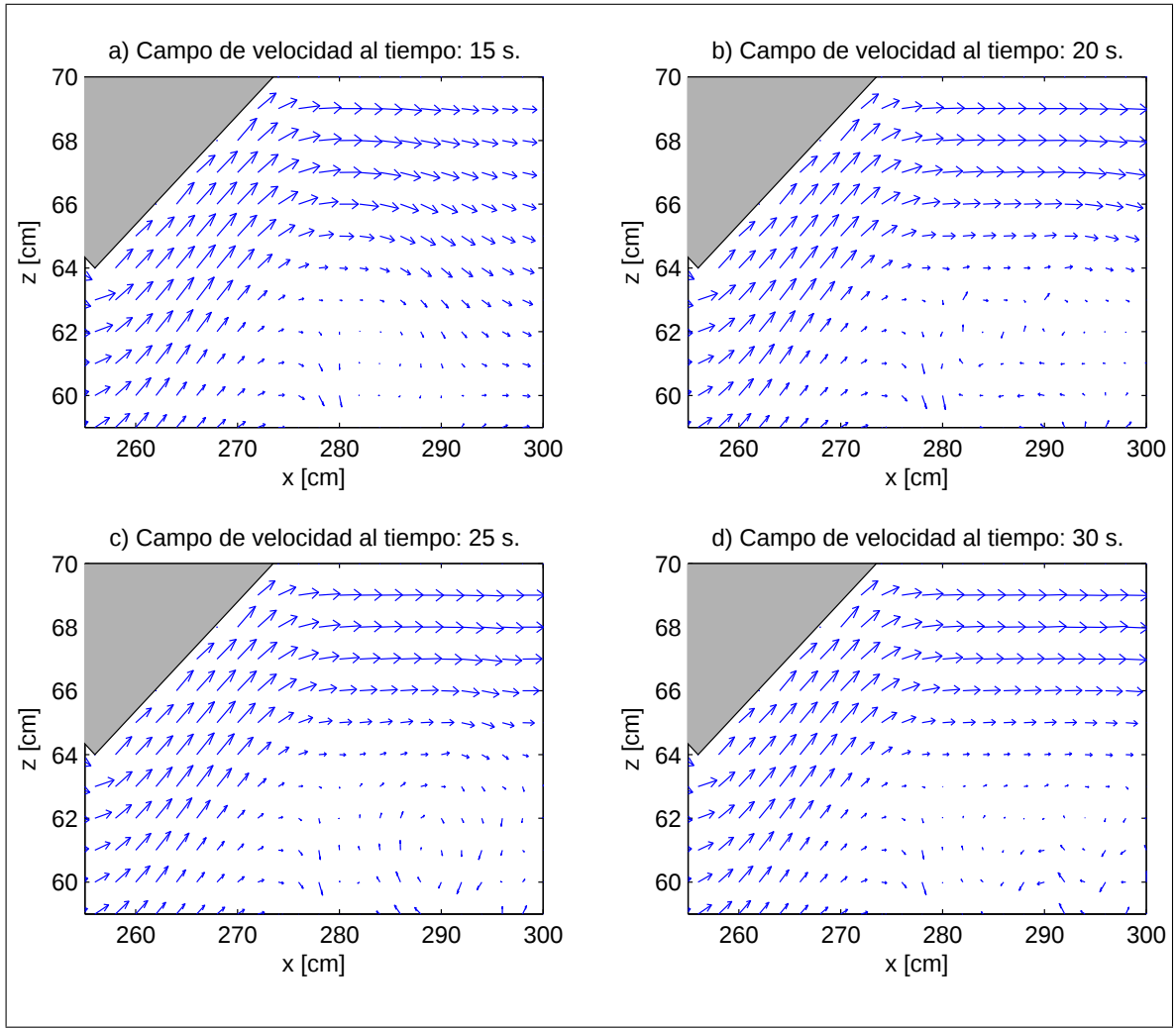


Figura 35: Campo de velocidad cerca de la parte irregular del domino después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 35 representa el campo de velocidad que se genera después de 15, 20, 25, 30 segundos, con velocidad de entrada $U_0 = 8\text{cm/s}$ y tiempo de aceleración $t_a = 10$ segundos, cerca de la parte irregular del domino.

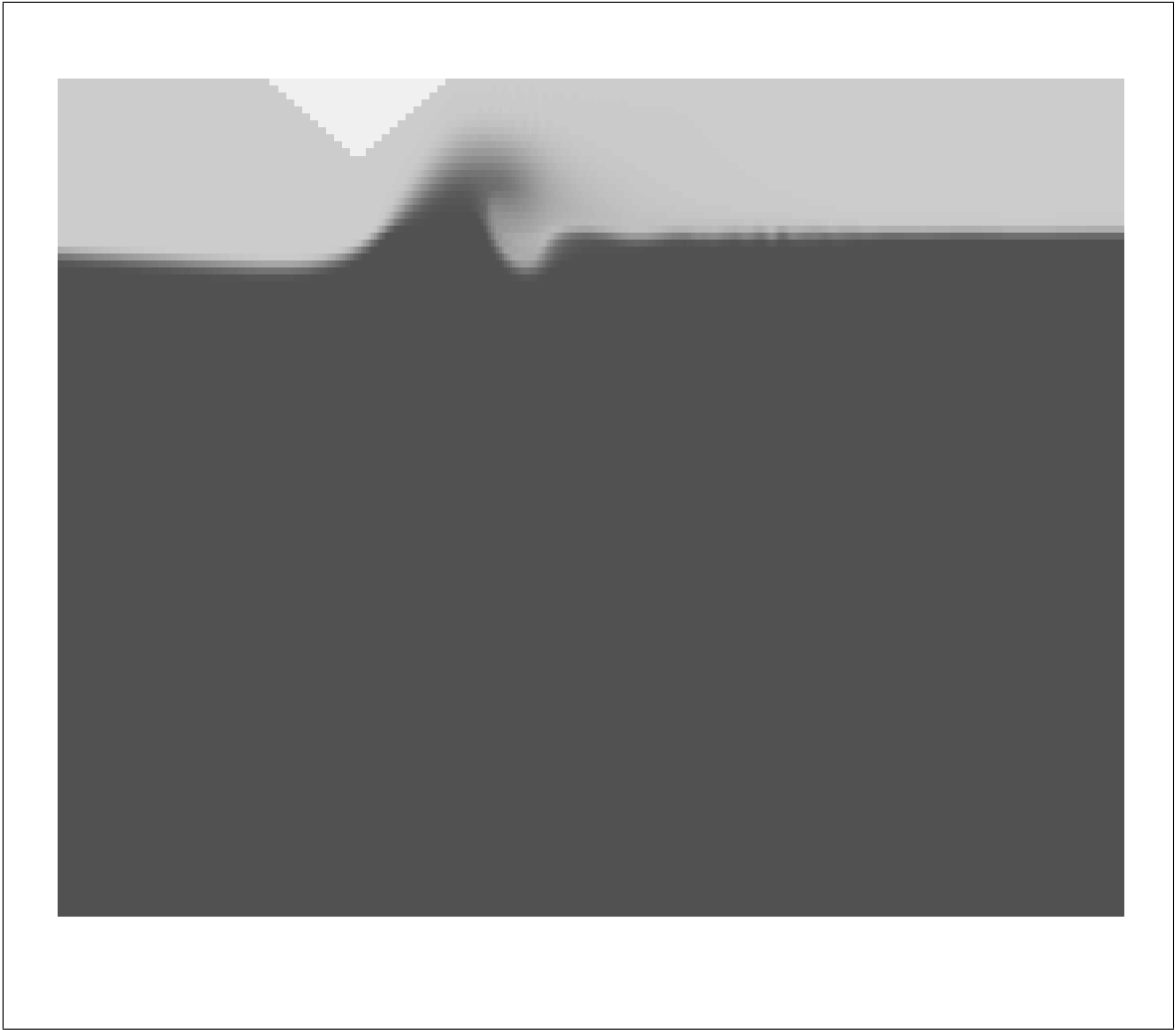


Figura 36: Distribución de la densidad en todo el dominio después de 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 36 representa la distribución de densidades del fluido donde el color más oscuro corresponde a la de mayor densidad y los colores más claros corresponden a las densidades menores. La distribución que se muestra es generada después de 30 segundos con condiciones periódicas, velocidad de entrada $U_0 = 8\text{cm/s}$ y tiempo de aceleración $t_a = 10$ segundos.

5.3 Experimento con condiciones de radiación en la frontera abierta, con velocidad de entrada de 8 cm/s

El segundo experimento consiste en resolver el sistema de ecuaciones (26-29) utilizando los esquemas numéricos presentados en el Capítulo 4, sobre el dominio físico representado por la Figura 4. Se usan condiciones periódicas en la frontera abierta $\overline{DE}$ del sistema durante un tiempo t_a , después se utilizan condiciones de radiación. Las condiciones de fronteras para la vorticidad, función corriente y densidad para $t \geq 0$ se resumen en la Tabla V. Los parámetros utilizados para este experimento se resumen en la Tabla VI.

Tabla V: Condiciones de frontera para la vorticidad, densidad y función corriente para todo el tiempo $t \geq 0$, utilizando condiciones de radiación en la frontera abierta del sistema $\overline{DE}$.

Variable	Frontera	Condiciones de frontera
$\zeta(0, z, t)$	$\overline{AF}$	0
$\zeta(L, z, t)$	$\overline{DE}$	$P(L, z, t)$
$\zeta(x, 0, t)$	$\overline{FE}$	0
$\zeta(x, \hat{z}_{\max}(x), t)$	$\overline{AD}$	0
$\psi(0, z, t)$	$\overline{AF}$	$F(z, t)$
$\psi(L, z, t)$	$\overline{DE}$	$Q(L, z, t)$
$\psi(x, 0, t)$	$\overline{FE}$	0
$\psi(x, \hat{z}_{\max}(x), t)$	$\overline{AD}$	$F(H, t)$
$\rho(0, z, t)$	$\overline{AF}$	$G(z)$
$\rho(L, z, t)$	$\overline{DE}$	$R(L, z, t)$
$\rho(x, 0, t)$	$\overline{FE}$	ρ_2
$\rho(x, \hat{z}_{\max}(x), t)$	$\overline{AD}$	ρ_1

En la Tabla anterior $G(z)$ es la función que relaciona la densidad con la altura, descrita en la ecuación (30), $F(z, t)$ es una función que relaciona el valor de la función corriente con la altura, ecuación (32) y P, Q, R representan las condiciones de radiación

(134) para ζ, ρ, ψ respectivamente, donde por ejemplo P representa la ecuación que resulta de aproximar las condiciones de radión reemplazando ζ por ϕ en (134).

Tabla VI: Parámetros del Experimento.

Parámetro	Valor
ρ_1	$1.029 \text{ g/cm}^3.$
ρ_2	$1.007 \text{ g/cm}^3.$
ρ_0	$1 \text{ g/cm}^3.$
t_a	5 s.
U_0	8 cm/s.
δ	1 cm.
d	11 cm.
Δt	$.01$
$\Delta x, \Delta z$	$.5$
N	1024
M	140
T	3000

El experimento numérico se ejecutó por un total de 1000 iteraciones temporales que representan 30 segundos de simulación en una cluster de 12 procesadores intel a 2.1 GHz y 30 GB en memoria RAM, con una duración aproximada de 9 horas, cada iteración en el tiempo tardaba aproximadamente 8 segundos utilizando un solo procesador.

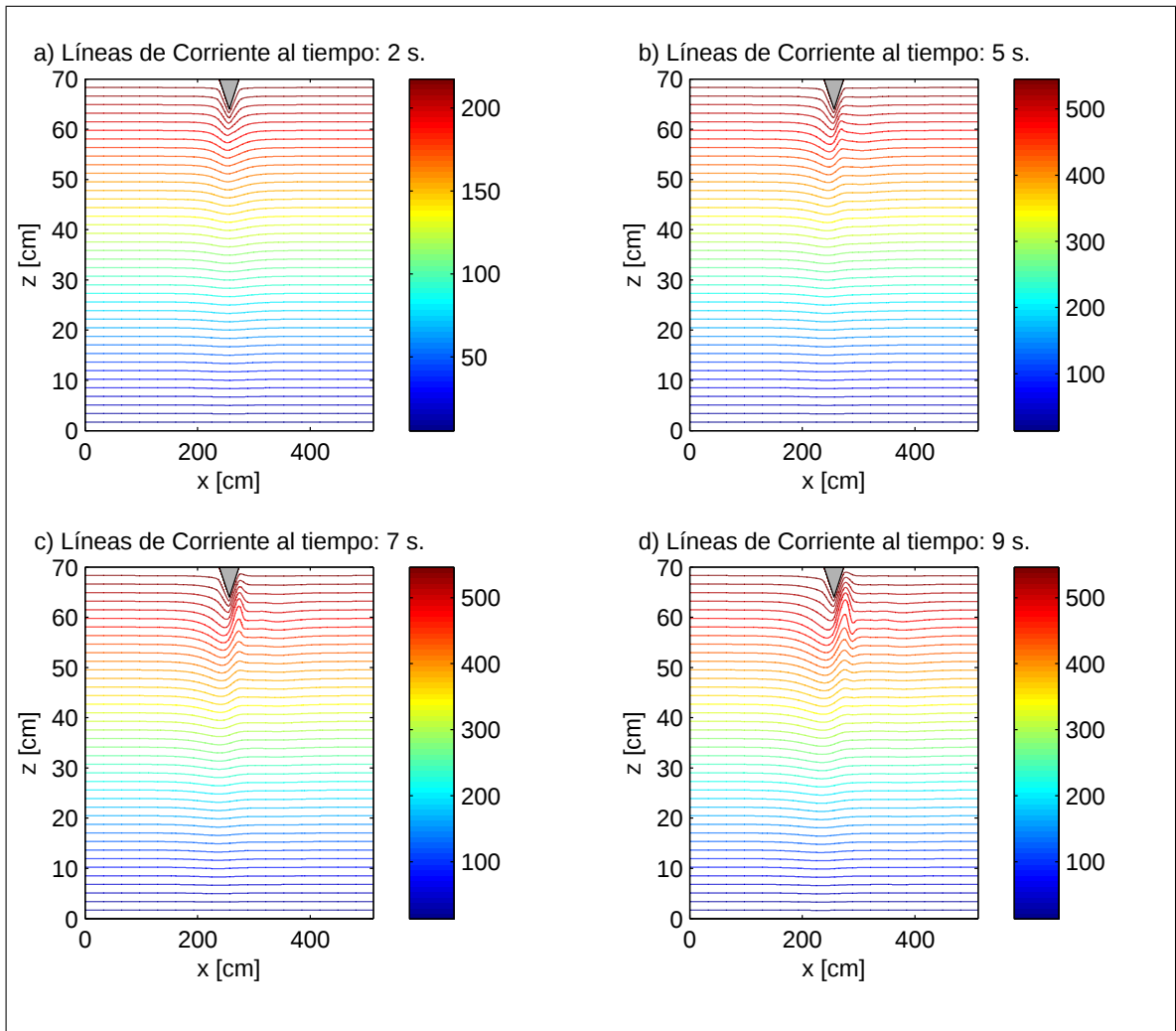


Figura 37: Líneas de corriente en todo el dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$.

La Figura 37 muestra las líneas de corriente que corresponde a la variable de la función corriente después 2,5,7,9 segundos, en todo el dominio con velocidad de entrada de 8 cm/s . La Figura 38 muestra los mismos valores de la función corriente pero con un acercamiento en el obstáculo.

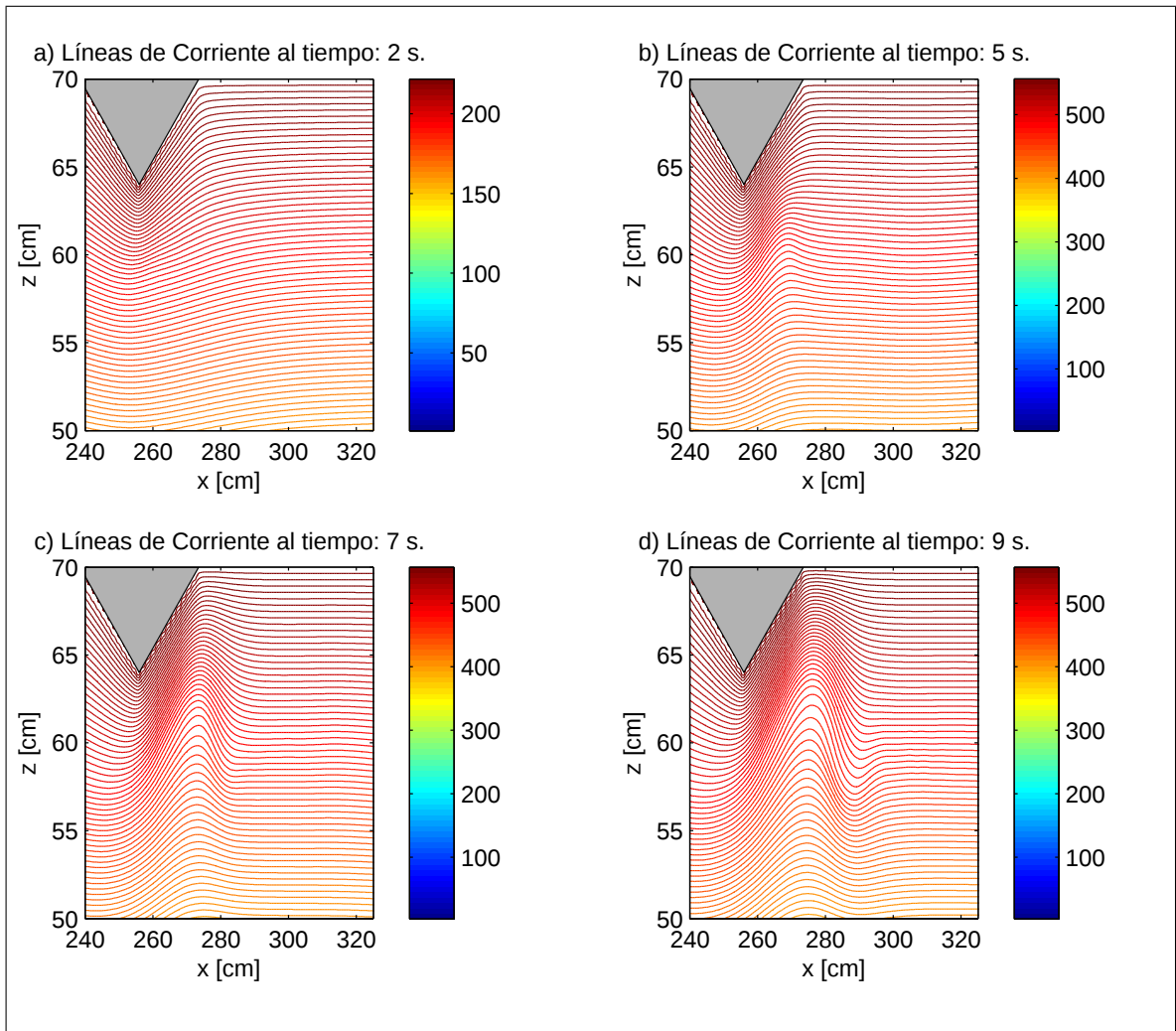


Figura 38: Acercamiento a las líneas de corriente en la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$.

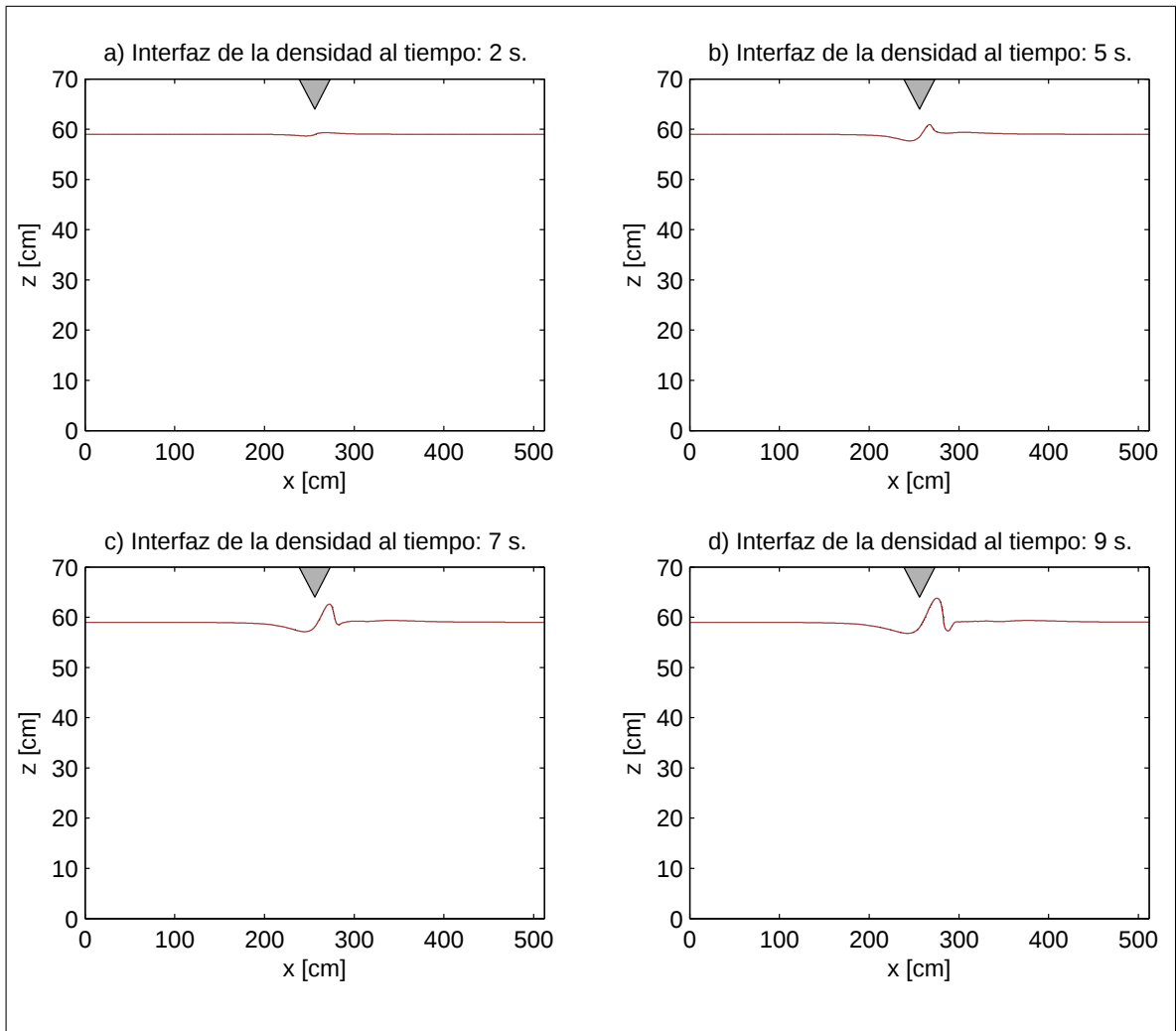


Figura 39: Interfaz de la densidad en el dominio completo después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 39 muestra la interfaz de la densidad después de 2, 5, 7, 9 segundos. La Figura 40 muestra la misma interfaz con un acercamiento en la parte irregular del dominio.

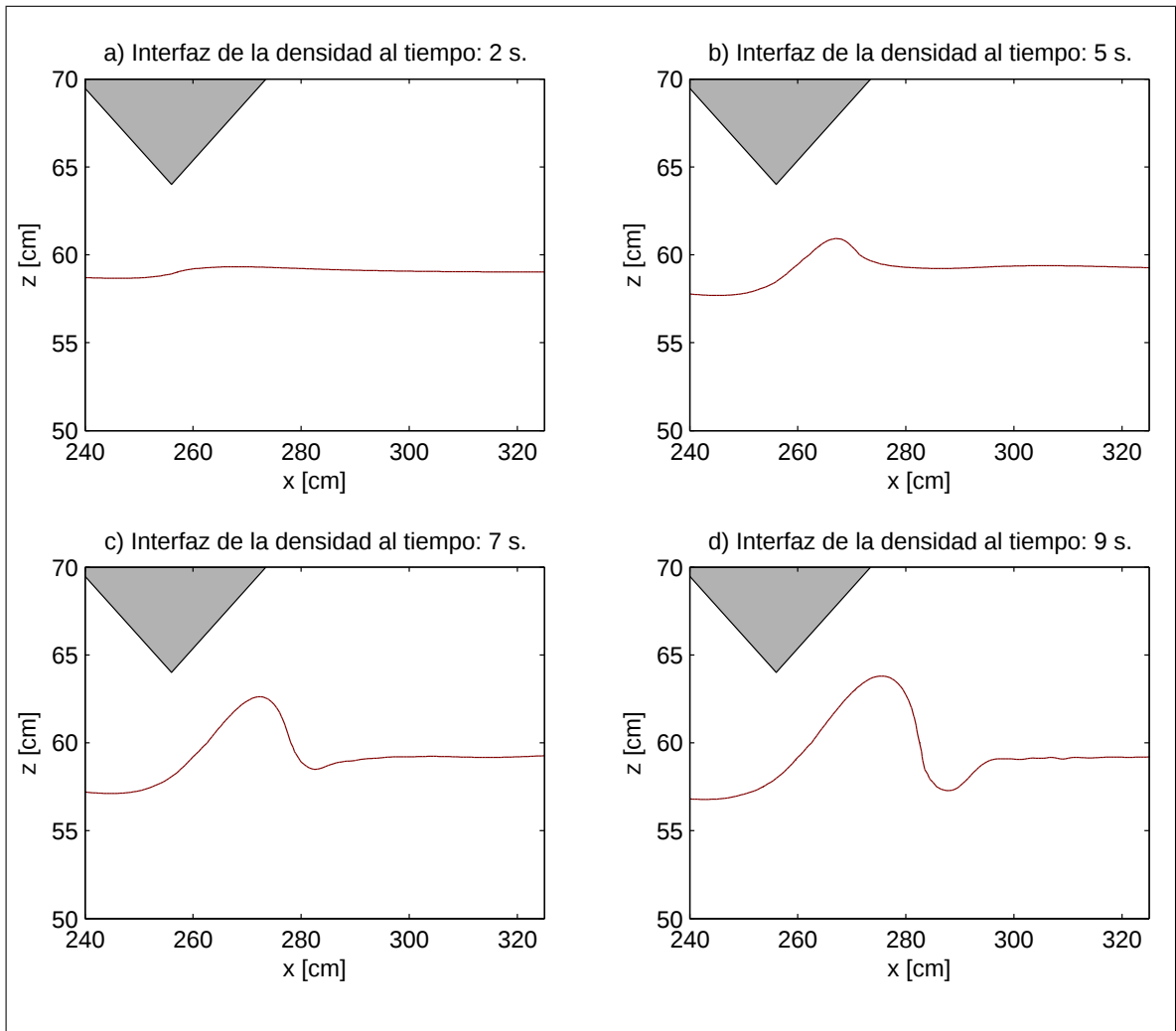


Figura 40: Acercamiento a la interfaz de la densidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

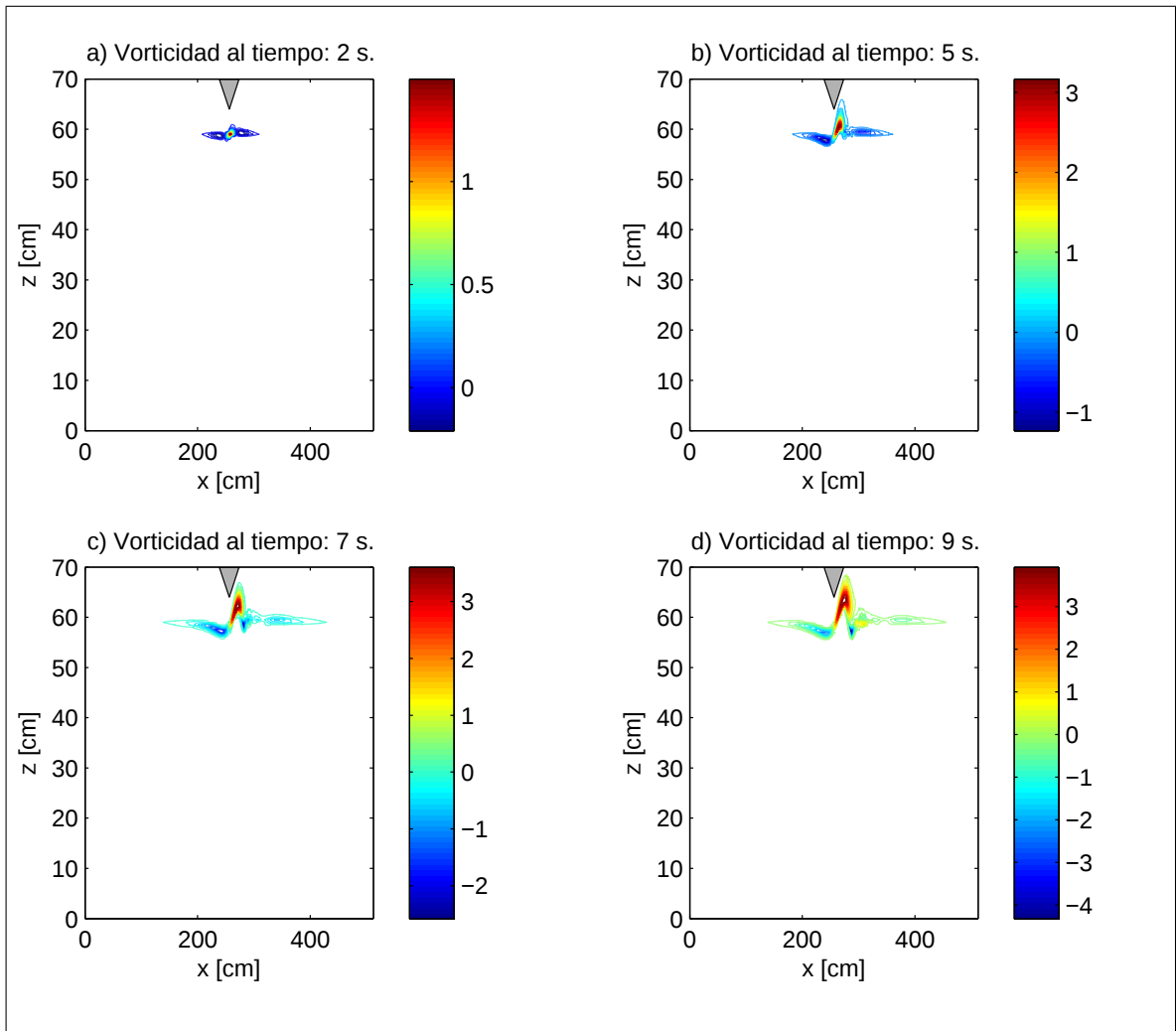


Figura 41: Vorticidad en el dominio completo después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 41 representa la vorticidad después de 2,5,7,9 segundos en todo el dominio. La Figura 42 muestra el mismo valor de vorticidad con un acercamiento en la parte irregular del dominio.

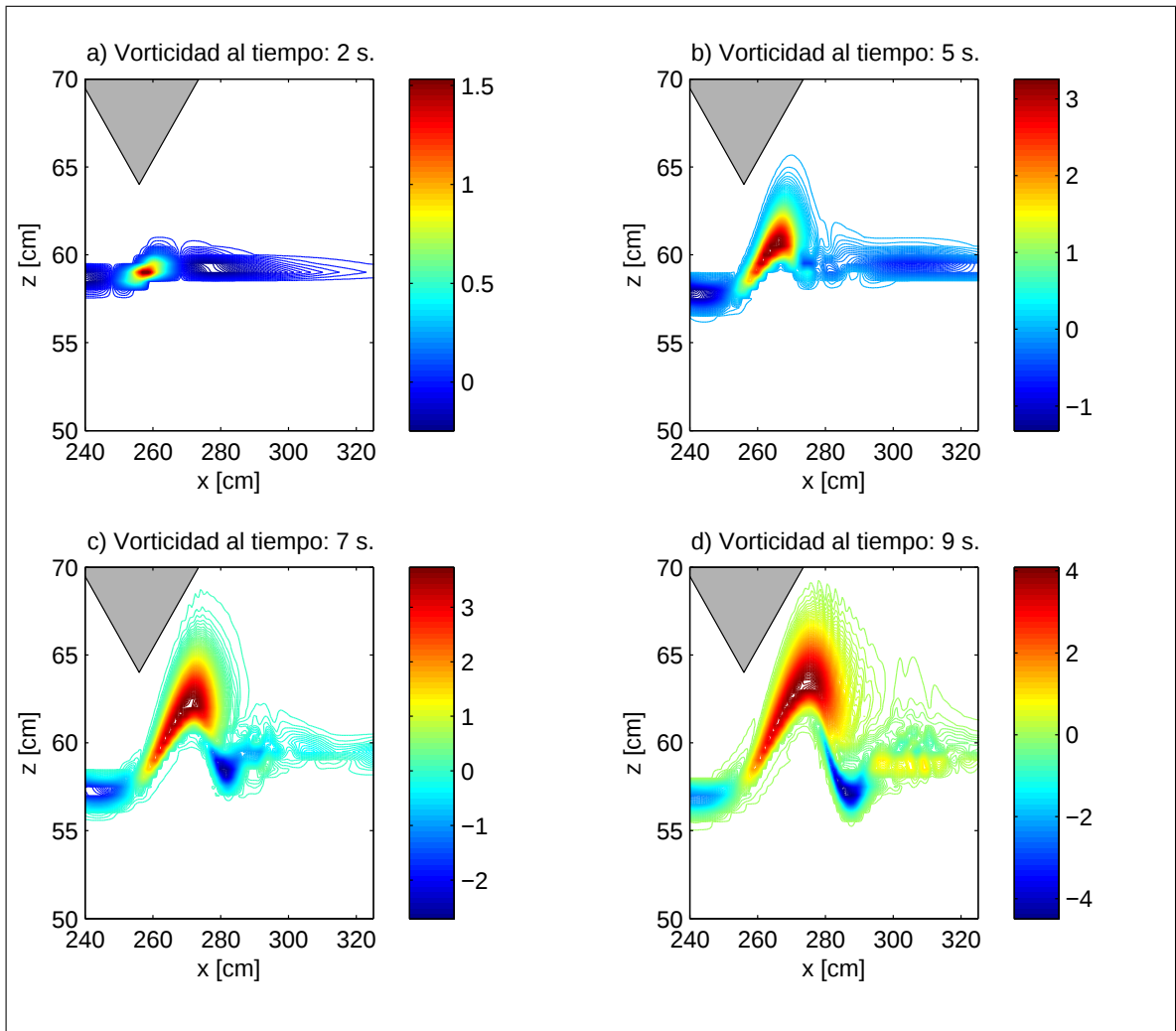


Figura 42: Acercamiento a la vorticidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

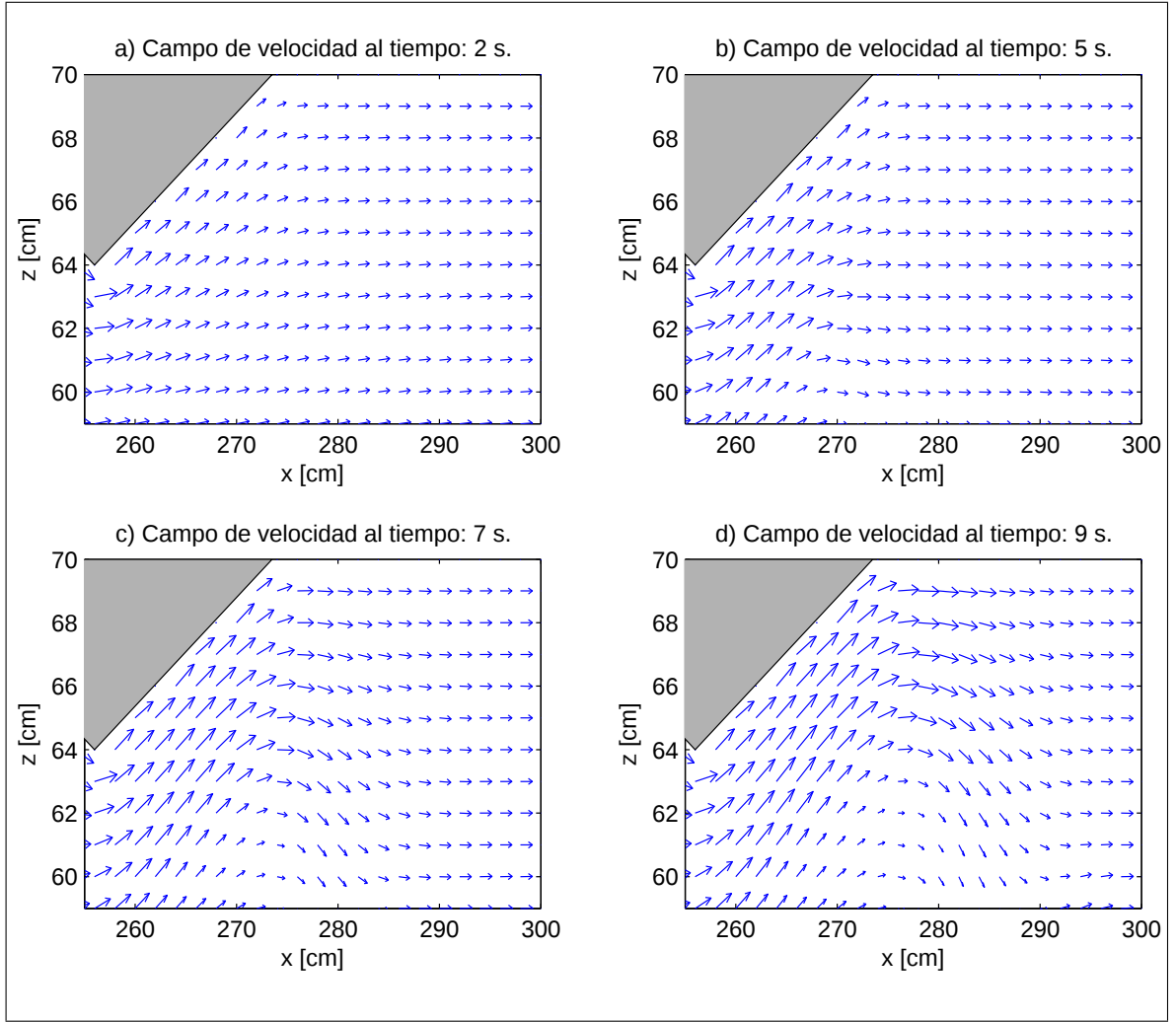


Figura 43: Campo de velocidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 43 muestra el campo de velocidad en la región irregular del dominio después 2, 5, 7, 9 segundos. El campo de velocidad corresponde a los vectores de velocidad con componentes de velocidad (u, w) .

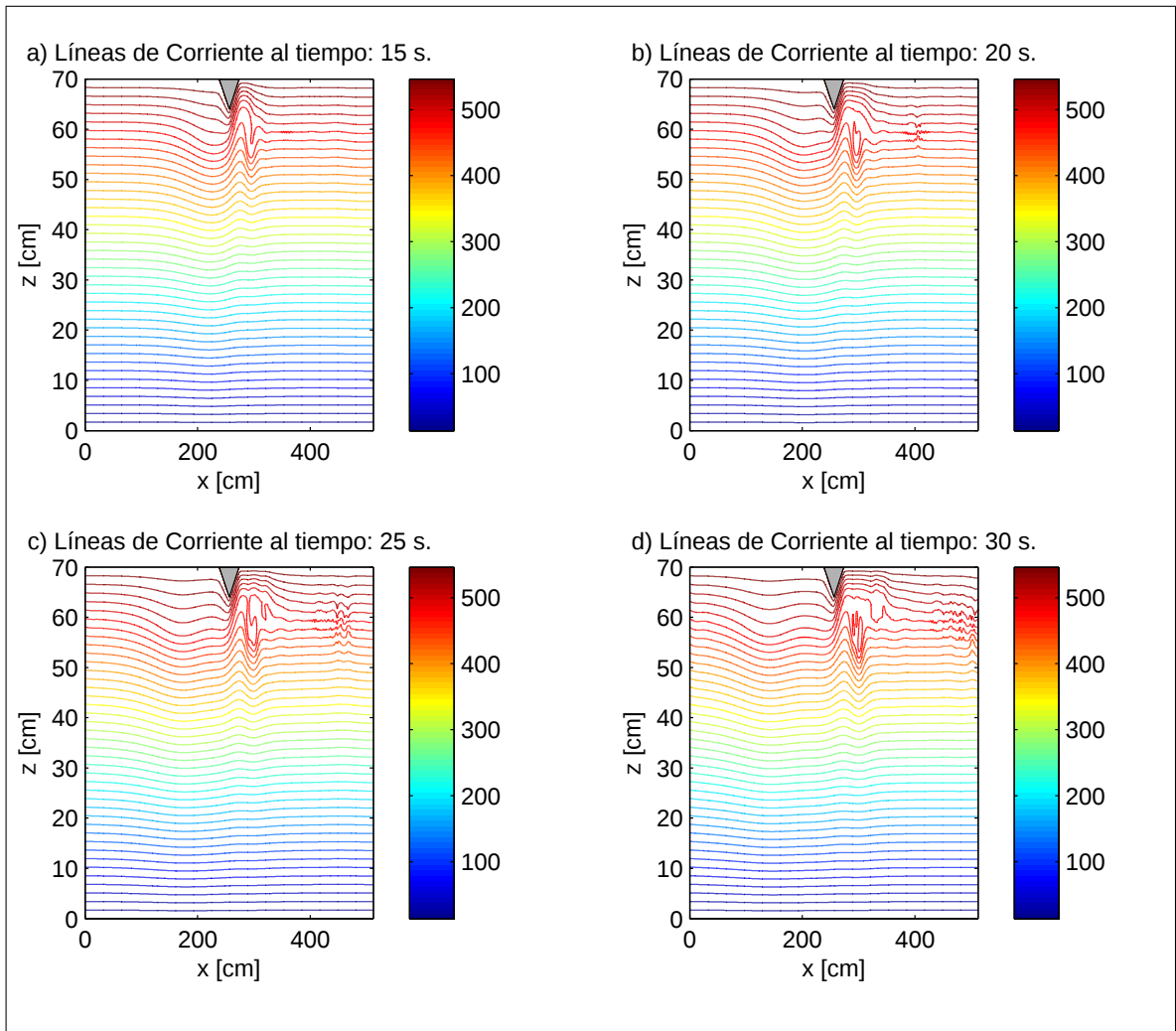


Figura 44: Líneas de corriente en todo el dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$.

La Figura 44 muestra las líneas de corriente que corresponden a la función corriente a los 15,20,25,30 segundos. La Figura 45 muestra las mismas líneas de corriente con un acercamiento en la parte irregular del dominio.

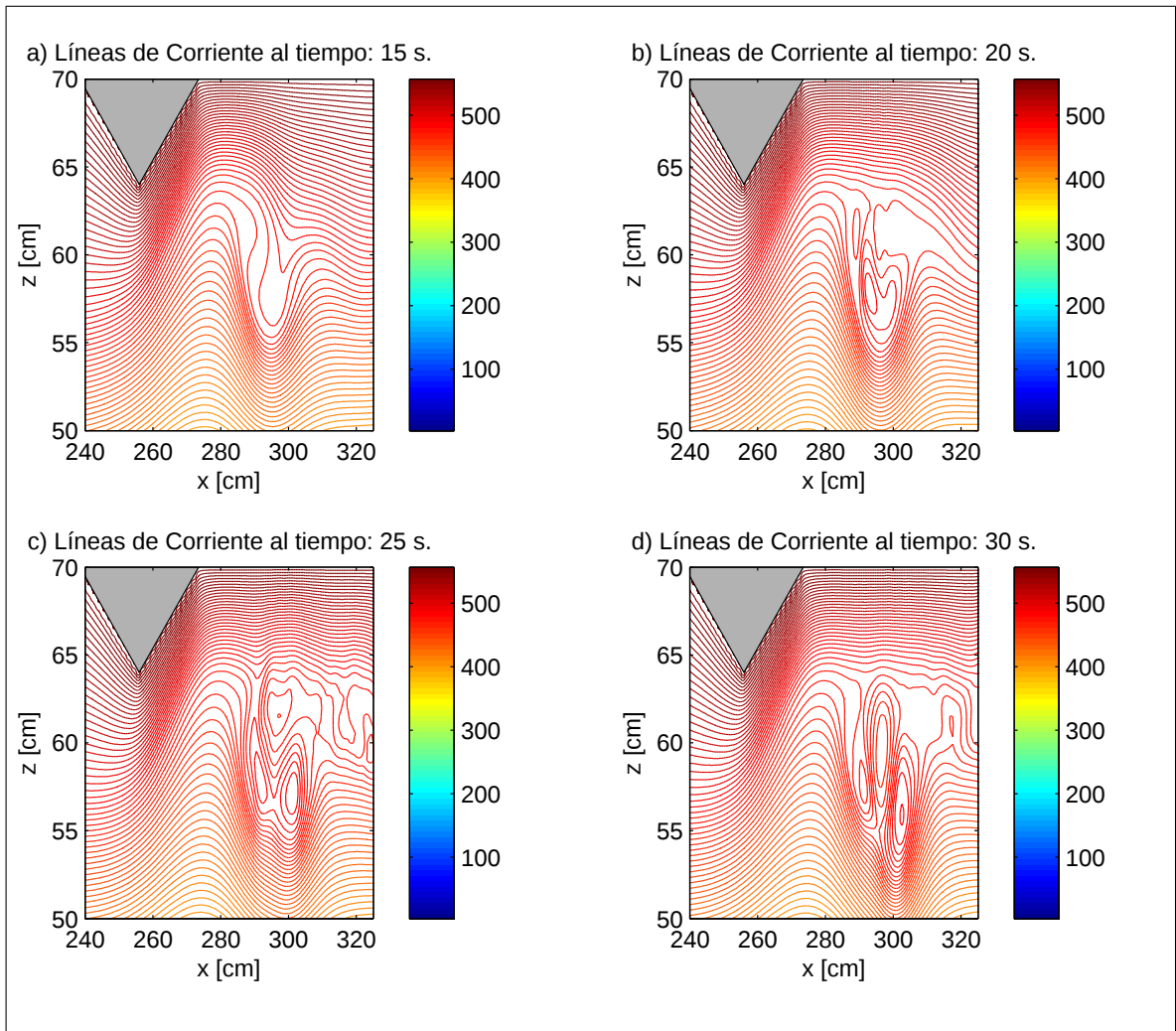


Figura 45: Acercamiento a las líneas de corriente cerca de la parte irregular del dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$.

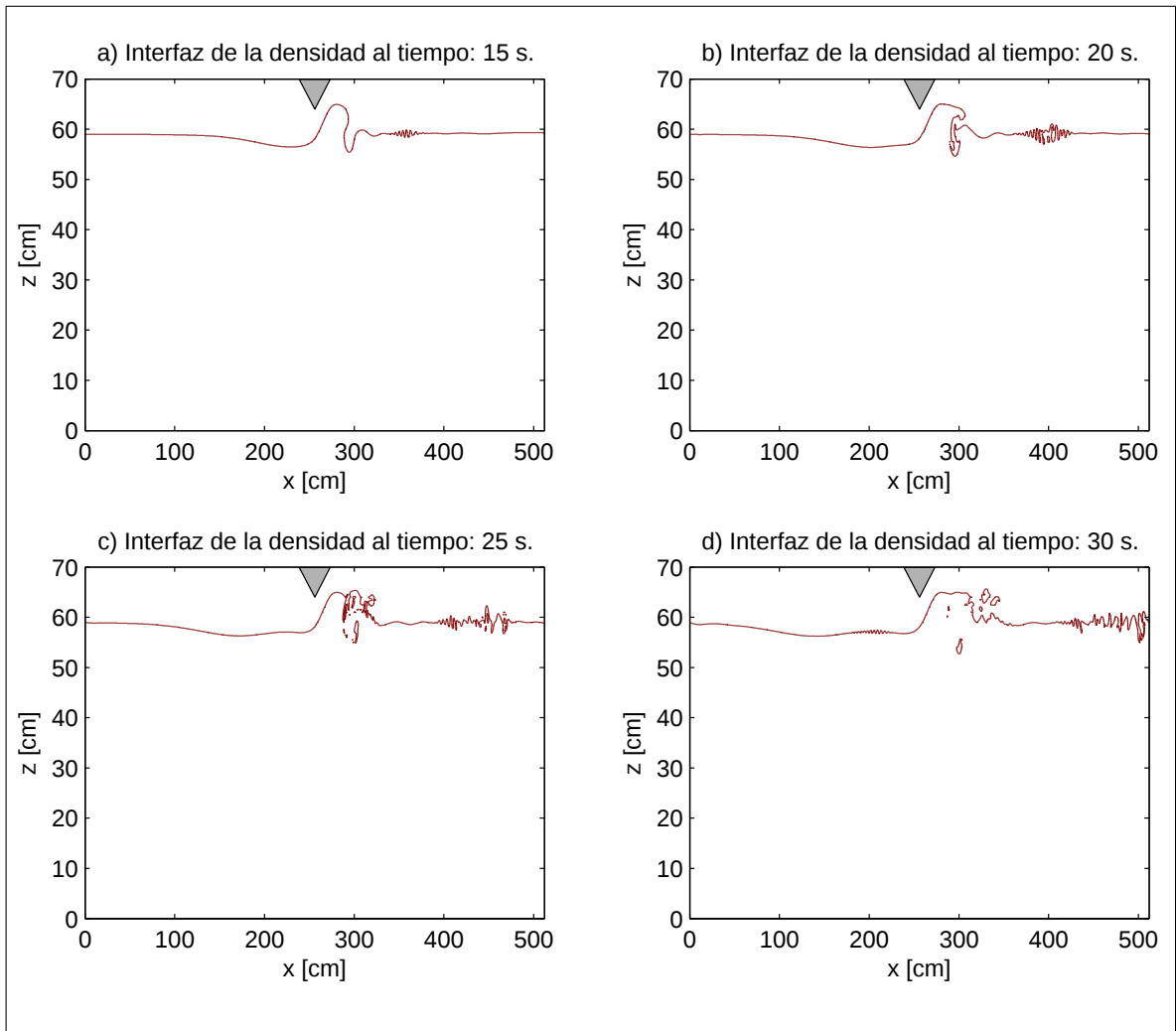


Figura 46: Interfaz de la densidad en el dominio completo después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 46 muestra la interfaz de la densidad después de 15, 20, 25, 30 segundos. La Figura 47 muestra la misma interfaz con un acercamiento en la parte irregular del dominio.

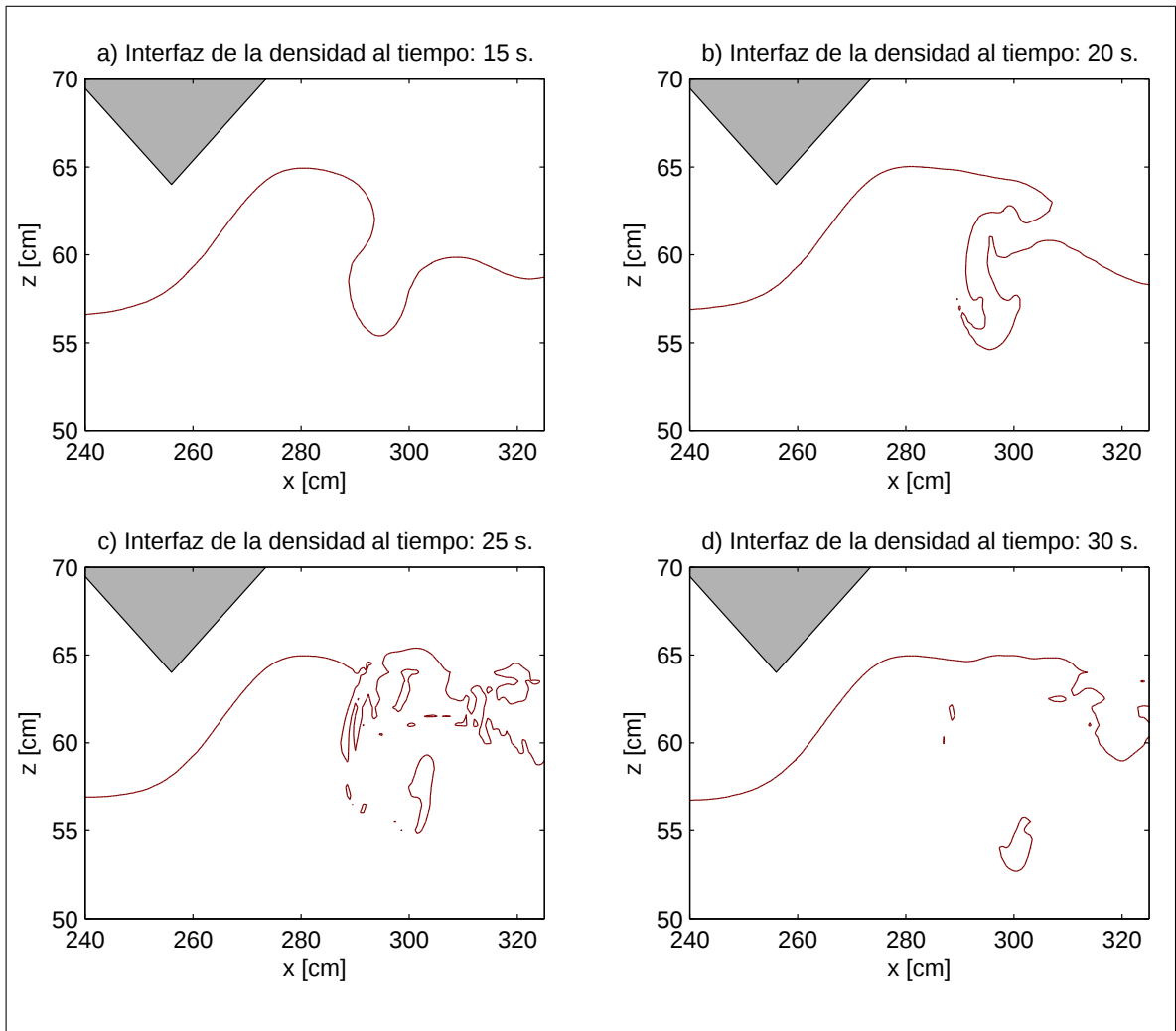


Figura 47: Acercamiento a la interfaz de la densidad cerca de la parte irregular del domino después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

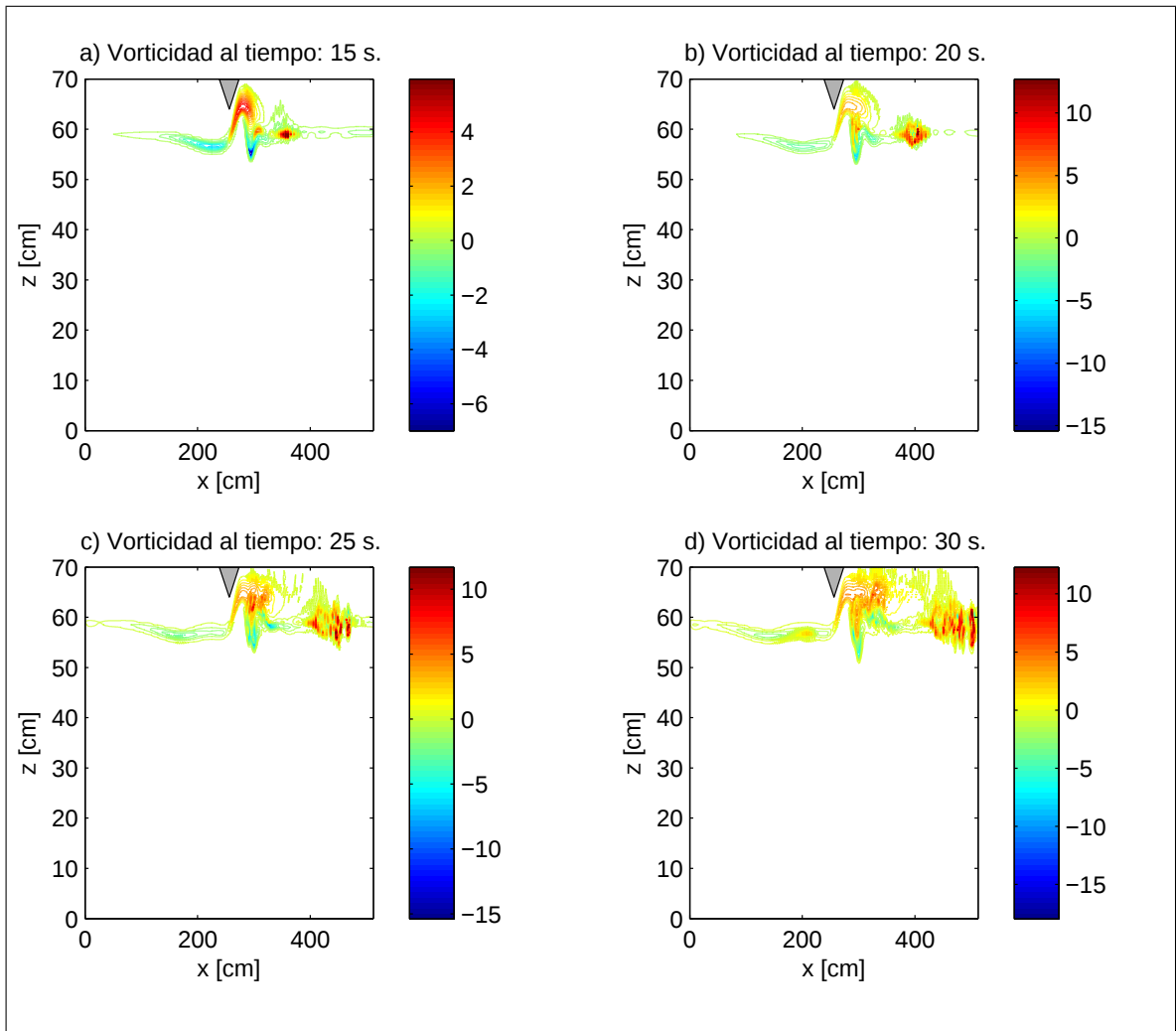


Figura 48: Vorticidad en todo el dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 48 representa la vorticidad después de 15, 20, 25, 30 segundos en todo el dominio. Las Figura 49 muestra la misma variable de vorticidad con un acercamiento en la parte irregular del dominio.

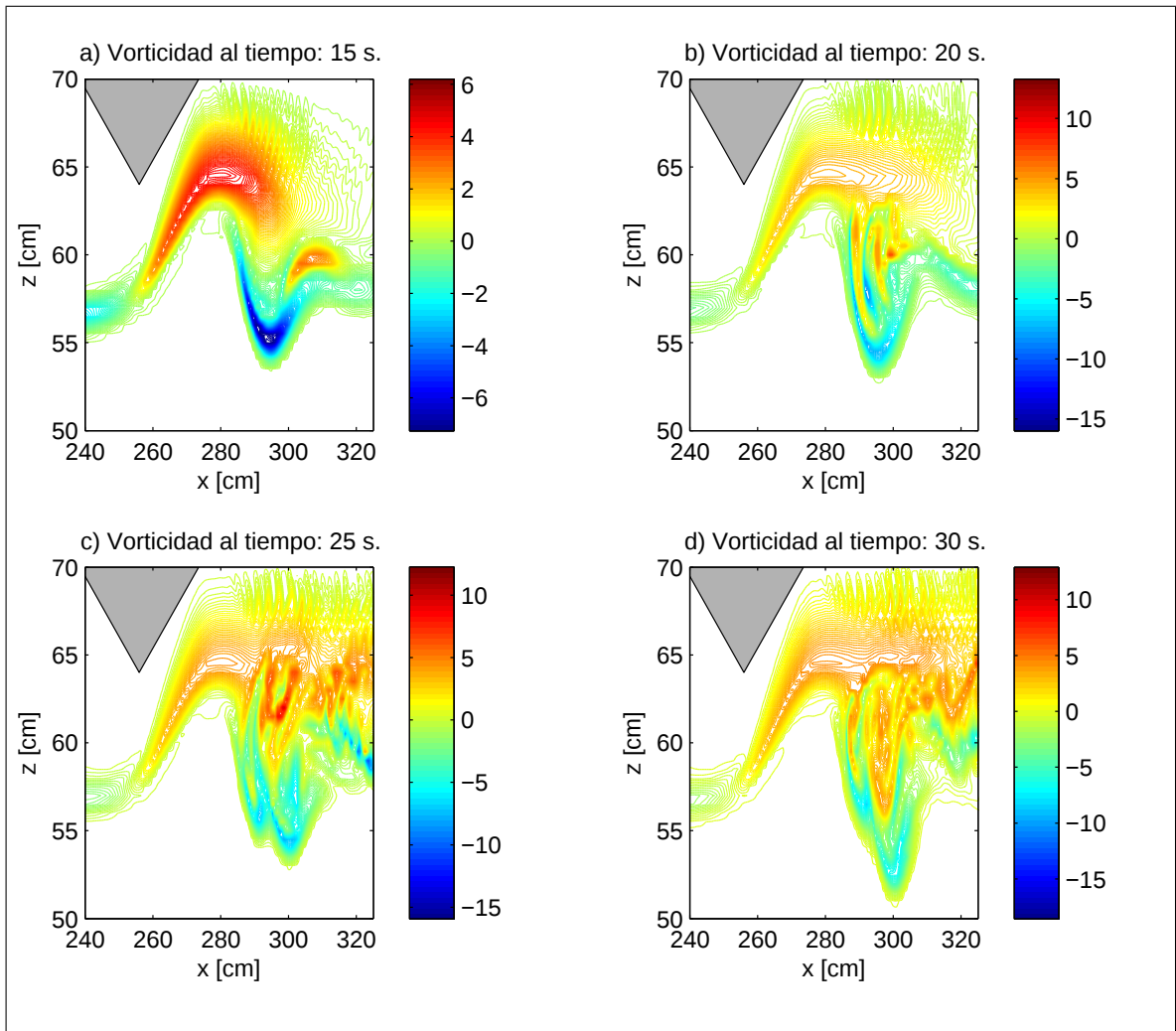


Figura 49: Acercamiento a la vorticidad cerca de la parte irregular del domino después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$.

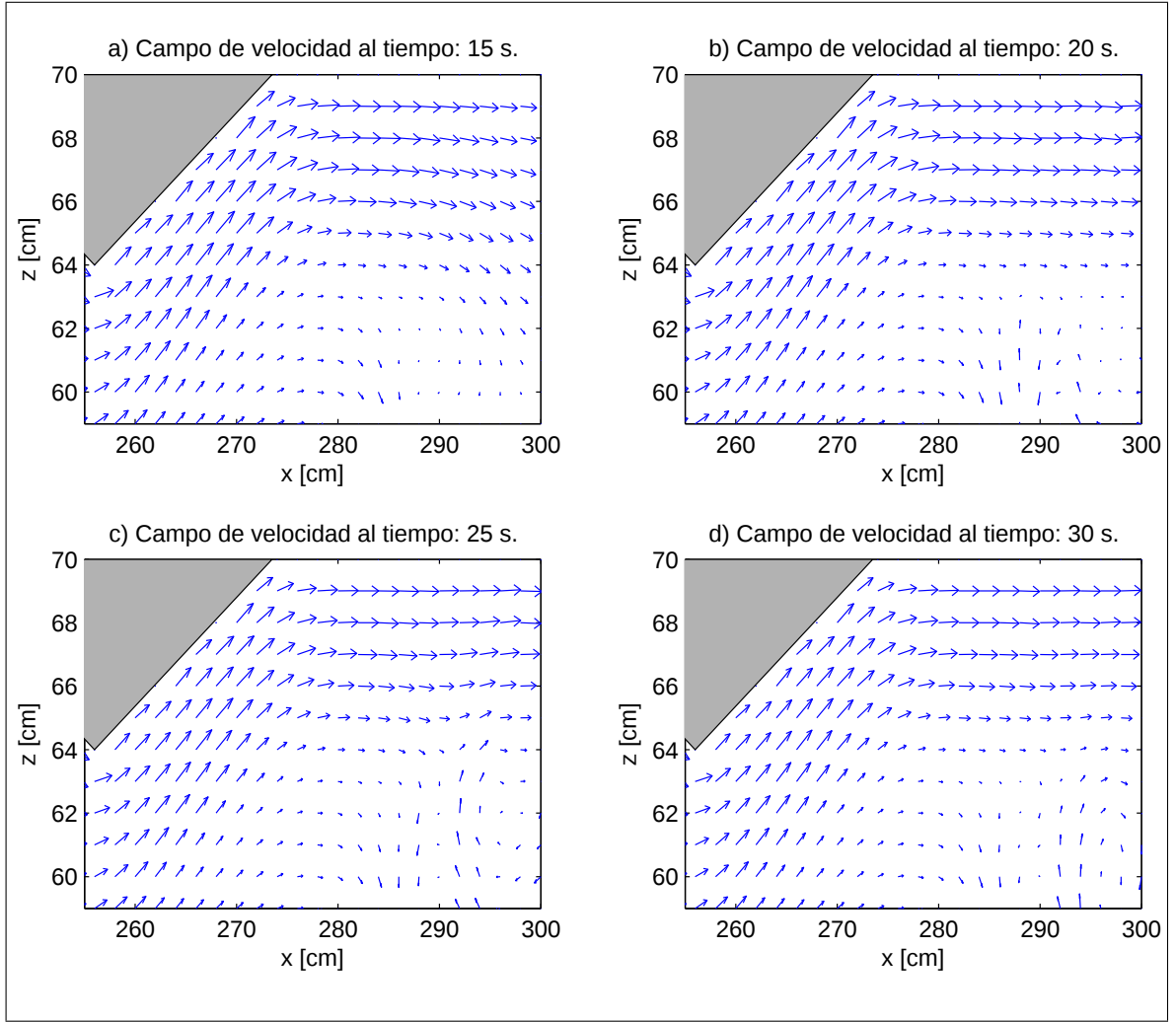


Figura 50: Campo de velocidad cerca de la parte irregular del domino después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 50 representa el campo de velocidad que se genera después de 15, 20, 25 y 30 segundos cerca de la parte irregular del domino y corresponde a los vectores de velocidad con componentes (u, w) .



Figura 51: Distribución de la densidad en todo el dominio después de 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 51 representa la distribución de la densidad donde el color más oscuro corresponde a la mayor densidad y los colores más claros corresponden a las densidades menores. La distribución que se muestra es generada después de 30 segundos con condiciones de radiación en la frontera abierta.

5.4 Experimento con condiciones de radiación en la frontera abierta, con velocidad de entrada de 12 cm/s

El tercer experimento consiste en resolver el sistema de ecuaciones (26-29) sobre el dominio físico representado en la Figura 4. Se utilizan condiciones periódicas en la frontera abierta del sistema durante un tiempo t_a , después se utilizan condiciones de radiación, las demás fronteras satisfacen las condiciones establecidas en la Tabla VII. Los parámetros utilizados para este experimento se resumen en la Tabla VIII.

Tabla VII: Condiciones de frontera para la vorticidad, densidad y función corriente para todo el tiempo $t \geq 0$, utilizando condiciones de radiación en la frontera abierta del sistema $\overline{DE}$.

Variable	Frontera	Condiciones de frontera
$\zeta(0, z, t)$	$\overline{AF}$	0
$\zeta(L, z, t)$	$\overline{DE}$	$P(L, z, t)$
$\zeta(x, 0, t)$	$\overline{FE}$	0
$\zeta(x, \hat{z}_{\max}(x), t)$	$\overline{AD}$	0
$\psi(0, z, t)$	$\overline{AF}$	$F(z, t)$
$\psi(L, z, t)$	$\overline{DE}$	$Q(z, t)$
$\psi(x, 0, t)$	$\overline{FE}$	0
$\psi(x, \hat{z}_{\max}(x), t)$	$\overline{AD}$	$F(D, t)$
$\rho(0, z, t)$	$\overline{AF}$	$G(z)$
$\rho(L, z, t)$	$\overline{DE}$	$R(z, t)$
$\rho(x, 0, t)$	$\overline{FE}$	ρ_2
$\rho(x, \hat{z}_{\max}(x), t)$	$\overline{AD}$	ρ_1

En la Tabla anterior $G(z)$ es la función que relaciona la densidad con la altura, descrita en la ecuación (30), $F(z, t)$ es una función que relaciona el valor de la función corriente con la altura, ecuación (32) y P, Q, R representan las condiciones de radiación (134) para ζ, ρ, ψ respectivamente, donde por ejemplo P representa la ecuación que resulta de aproximar las condiciones de radiación reemplazando ζ por ϕ en (134).

Tabla VIII: Parámetros del Experimento.

Parámetro	Valor
ρ_1	$1.029 \text{ g/cm}^3.$
ρ_2	$1.007 \text{ g/cm}^3.$
ρ_0	$1 \text{ g/cm}^3.$
t_a	5 s.
U_0	12 cm/s.
δ	1 cm.
d	11 cm.
Δt	.01
$\Delta x, \Delta z$	.5
N	1024
M	140
T	1000

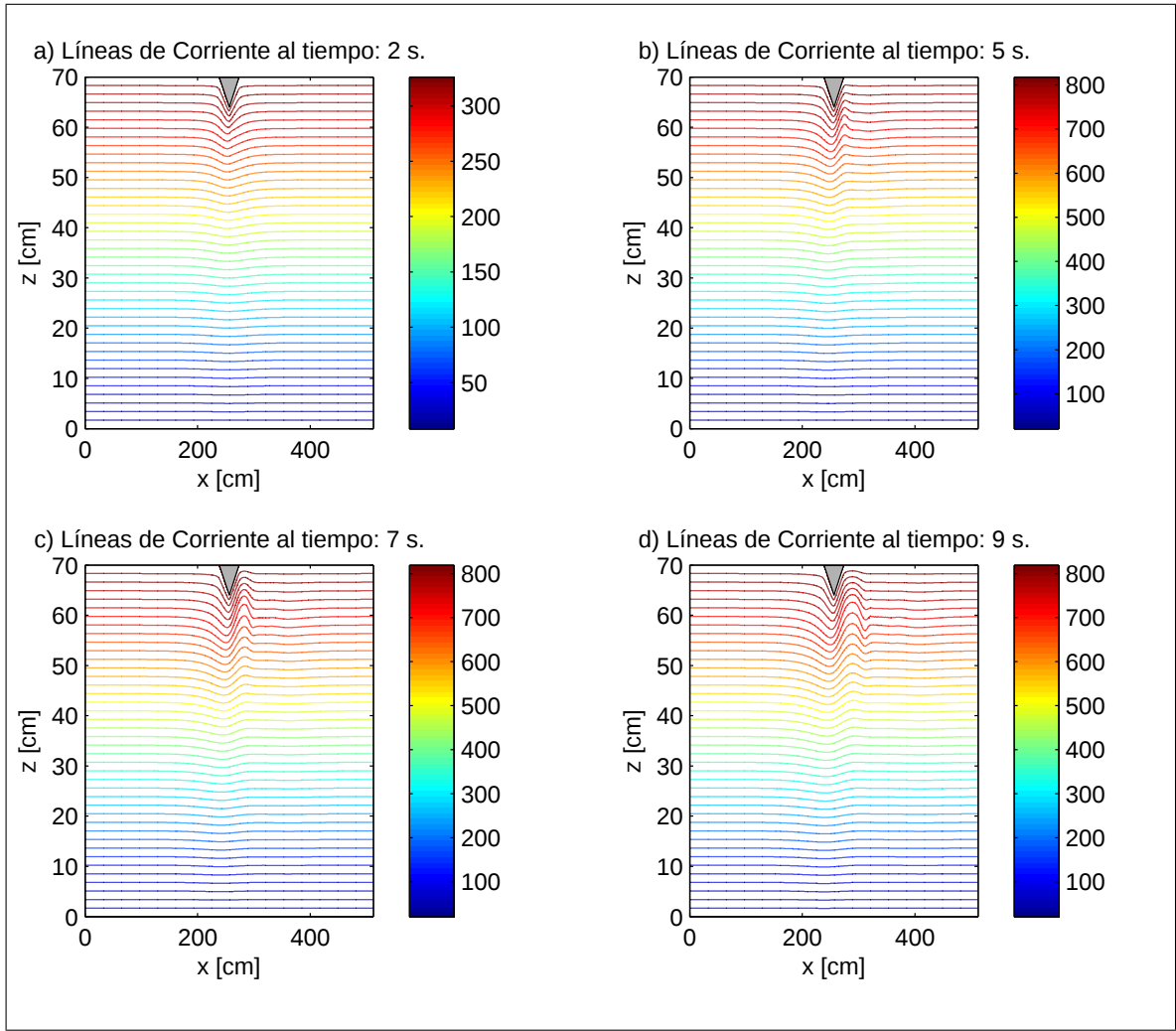


Figura 52: Líneas de corriente en todo el dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$.

La Figura 52 muestra las líneas de corriente que corresponde a la variable de la función corriente después 2,5,7,9 segundos, en todo el dominio con velocidad de entrada de 8 cm/s . La Figura 53 muestra los mismos valores de la función corriente pero con un acercamiento en el obstáculo.

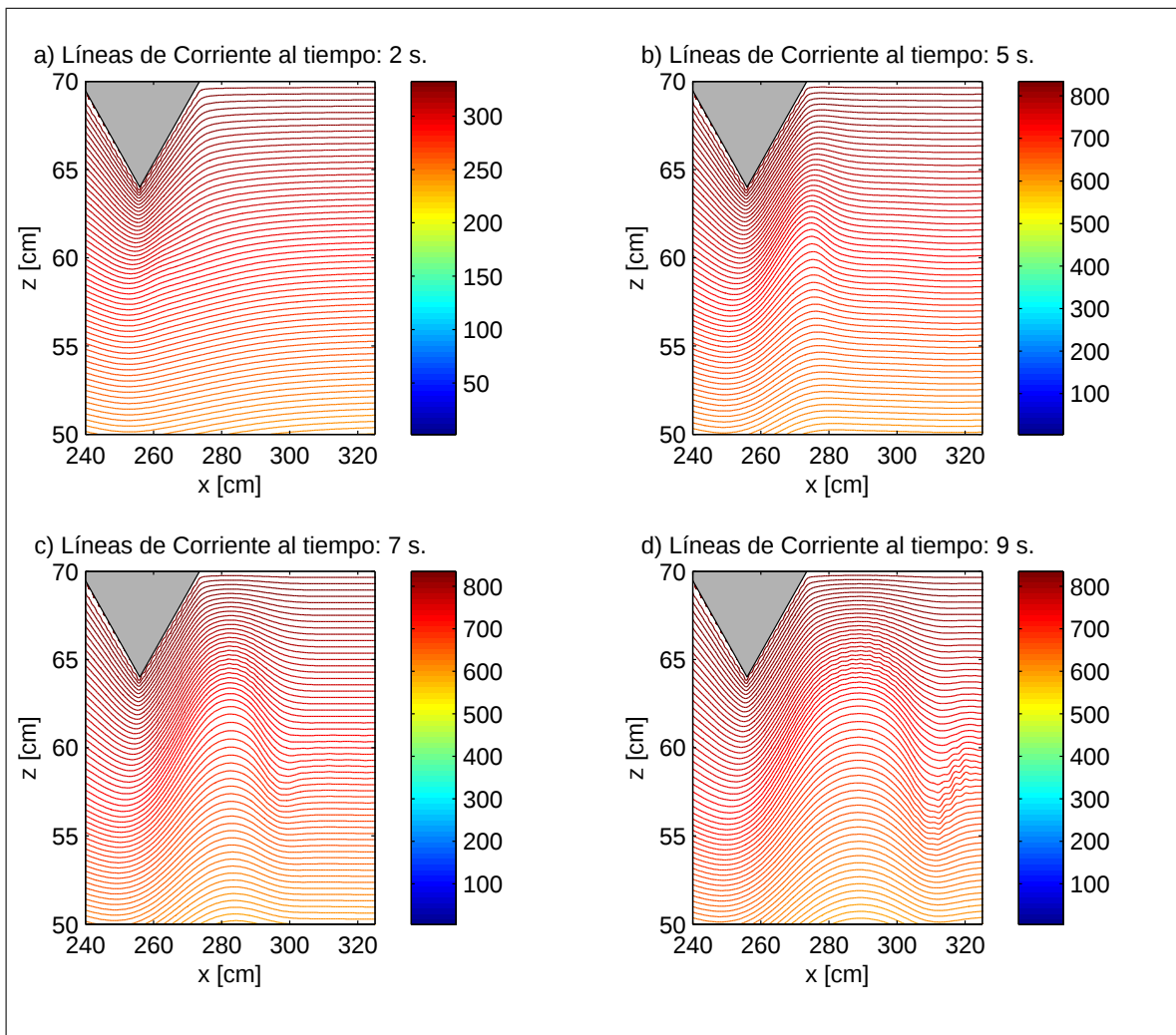


Figura 53: Acercamiento a las líneas de corriente en la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$.

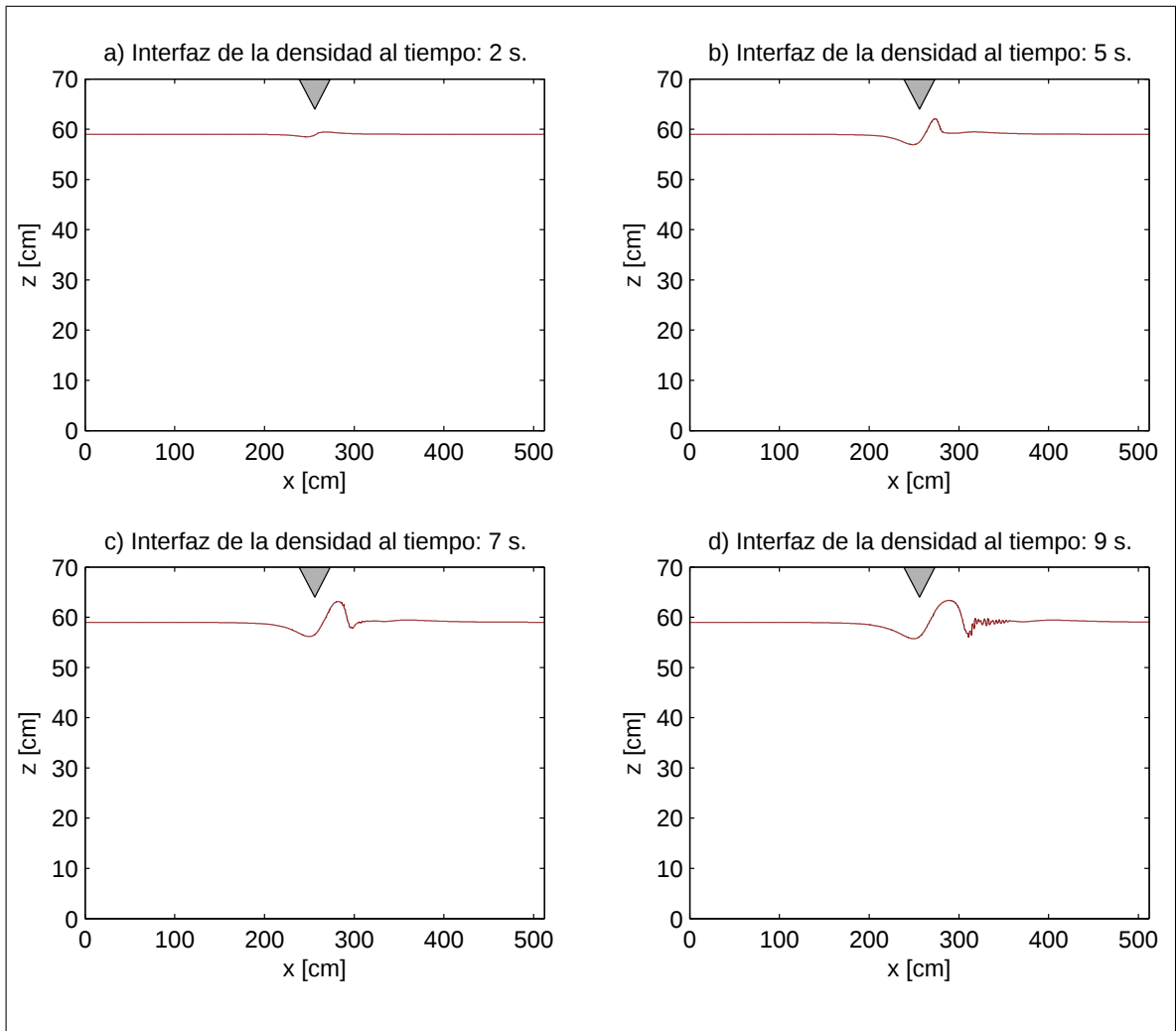


Figura 54: Interfaz de la densidad en el dominio completo después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 54 muestra la interfaz de la densidad después de 2, 5, 7, 9 segundos en todo el dominio. La Figura 55 muestra la misma interfaz con un acercamiento en la parte irregular del dominio.

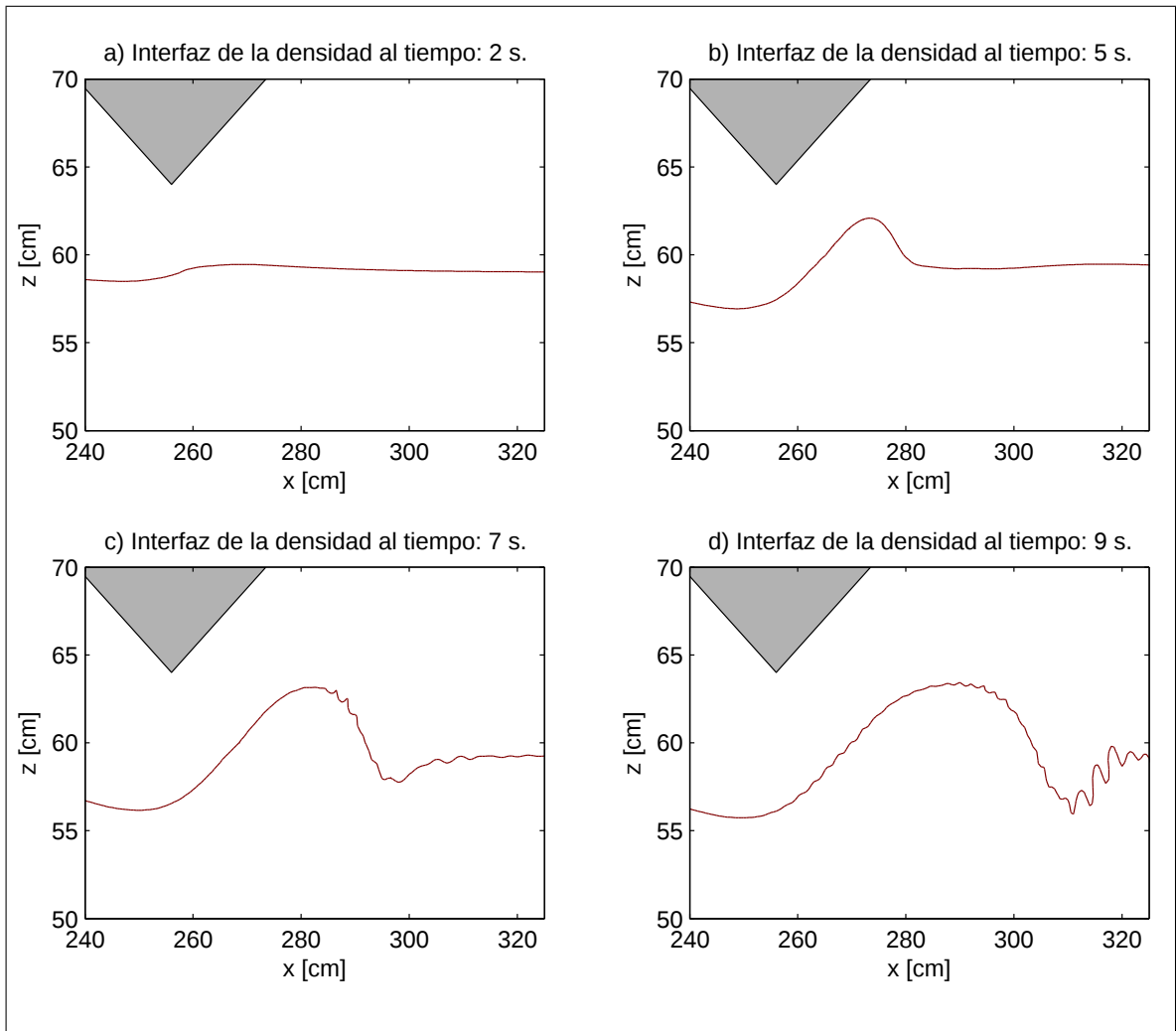


Figura 55: Acercamiento a la Interfaz de la densidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

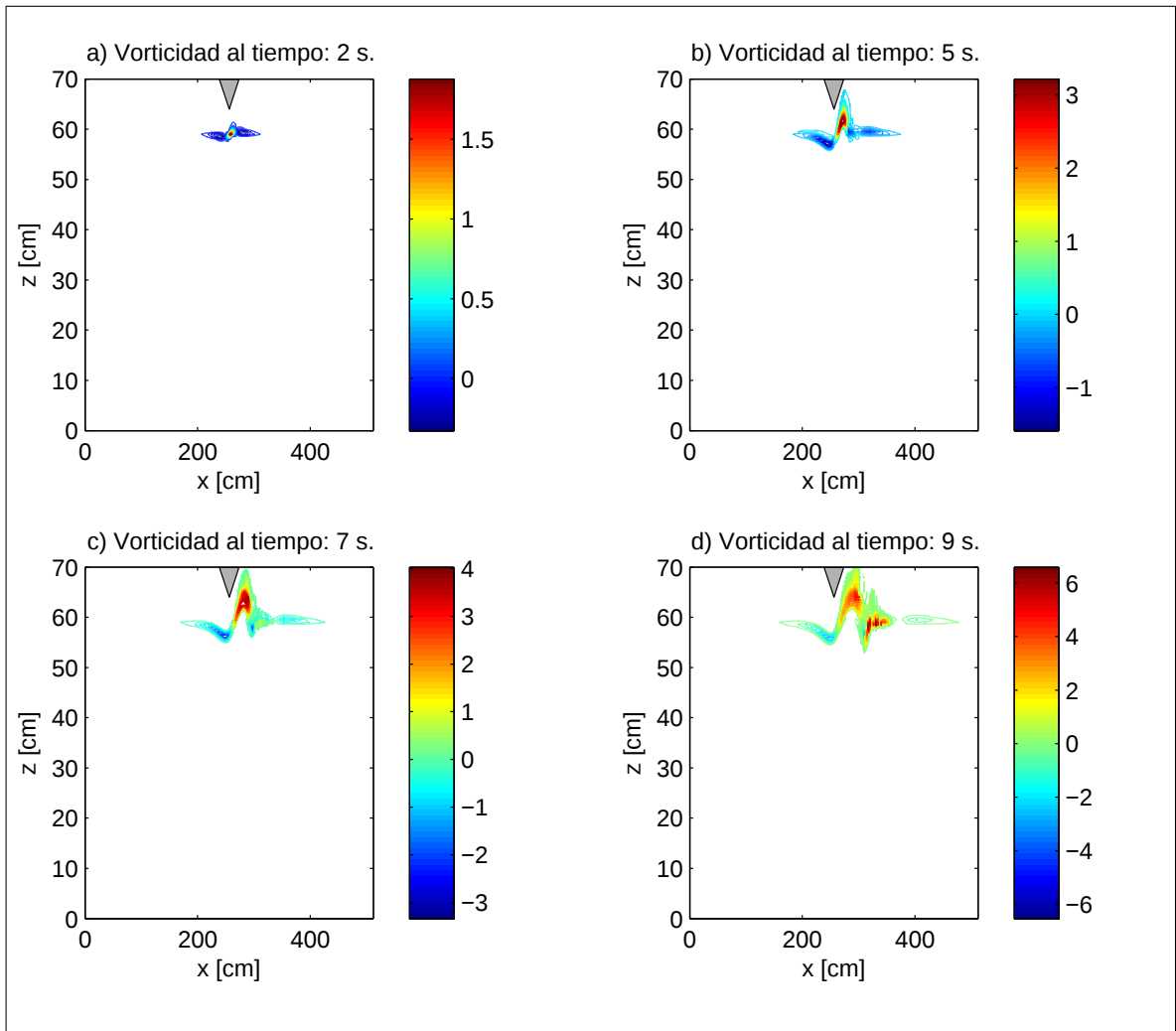


Figura 56: Vorticidad en el dominio completo después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 56 representa la vorticidad después de 2, 5, 7, 9 segundos en todo el dominio. La Figura 57 muestra el mismo valor de vorticidad con un acercamiento en la parte irregular del dominio.

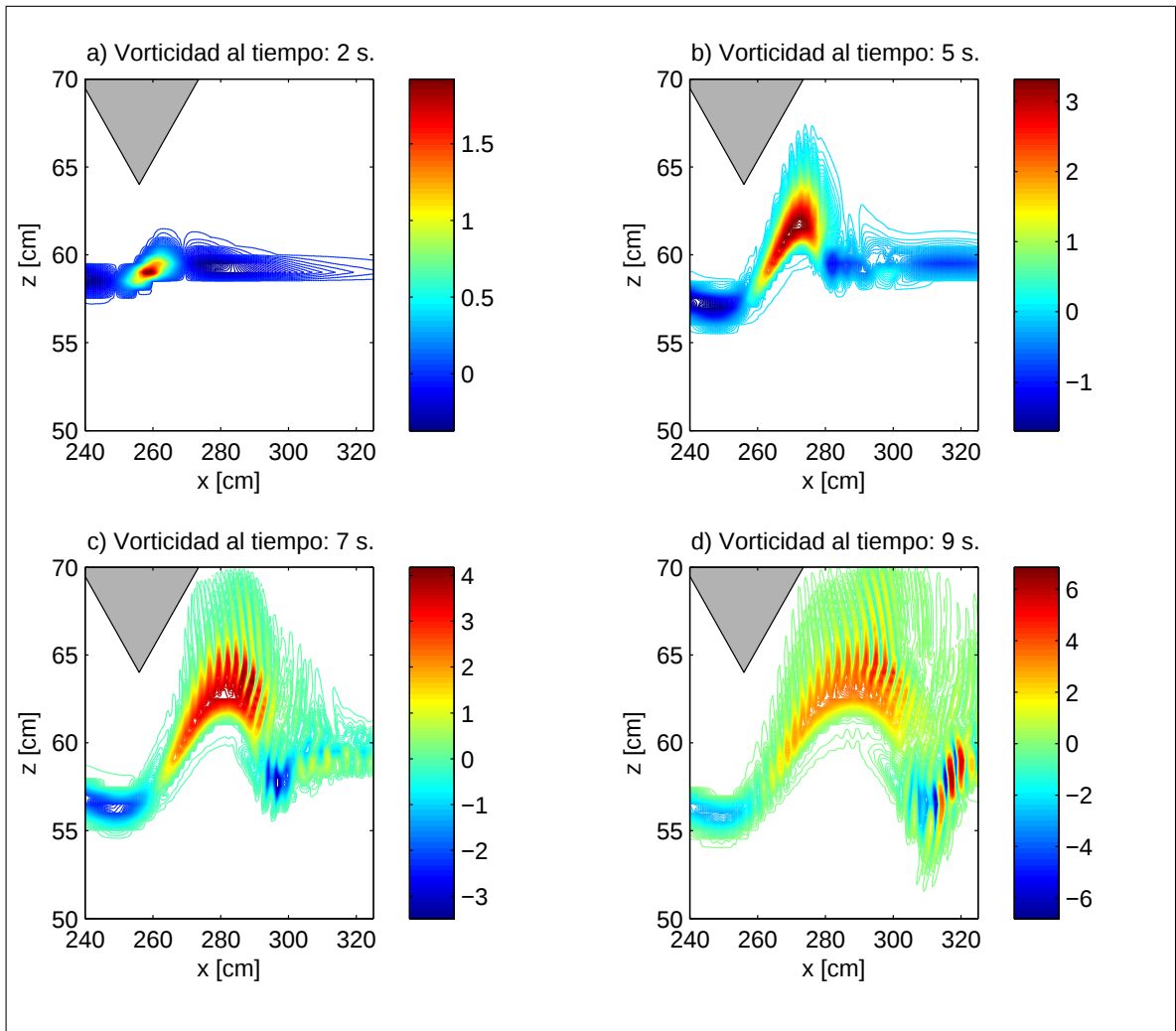


Figura 57: Acercamiento a la vorticidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

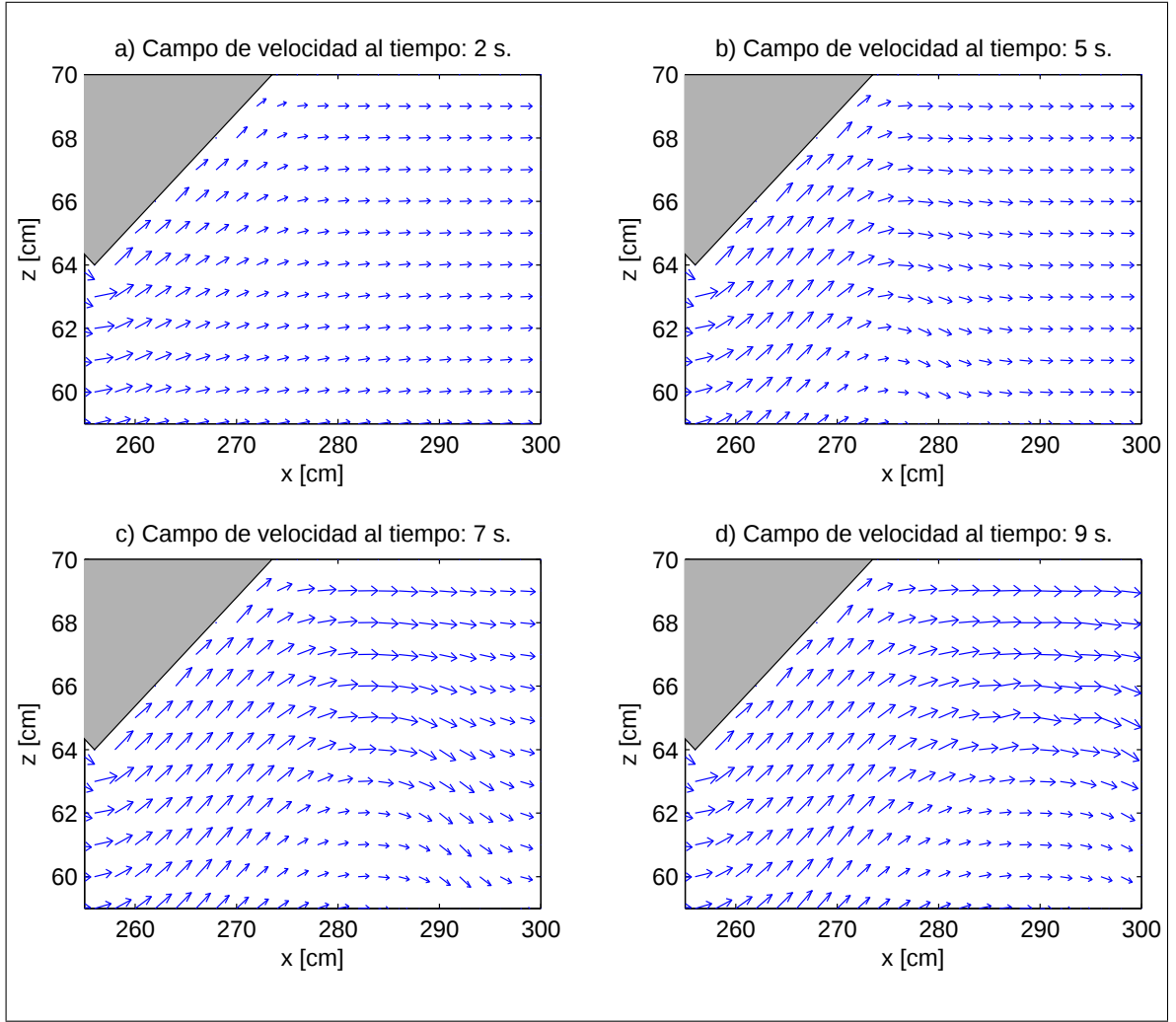


Figura 58: Campo de velocidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 200 b) 500 c) 700 d) 900 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 58 muestra el campo de velocidad en la región irregular del dominio después 2, 5, 7, 9 segundos. El campo de velocidad corresponde a los vectores de velocidad con componentes de velocidad (u, w) .

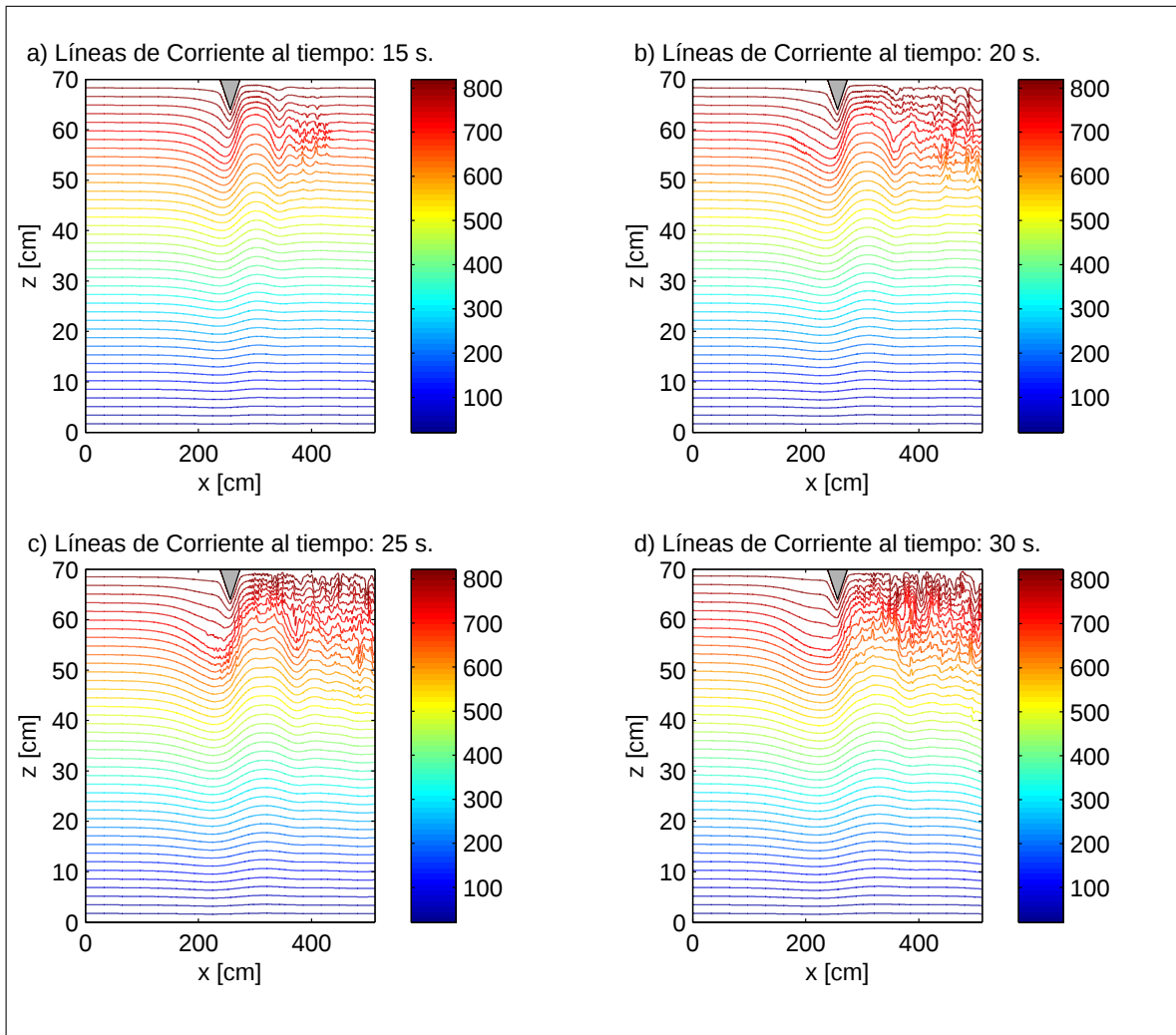


Figura 59: Líneas de corriente en todo el dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$.

La Figura 59 muestra las líneas de corriente que corresponden a la función corriente a los 15,20,25,30 segundos en todo el dominio. La Figura 60 muestra las mismas líneas de corriente con un acercamiento en la parte irregular del dominio.

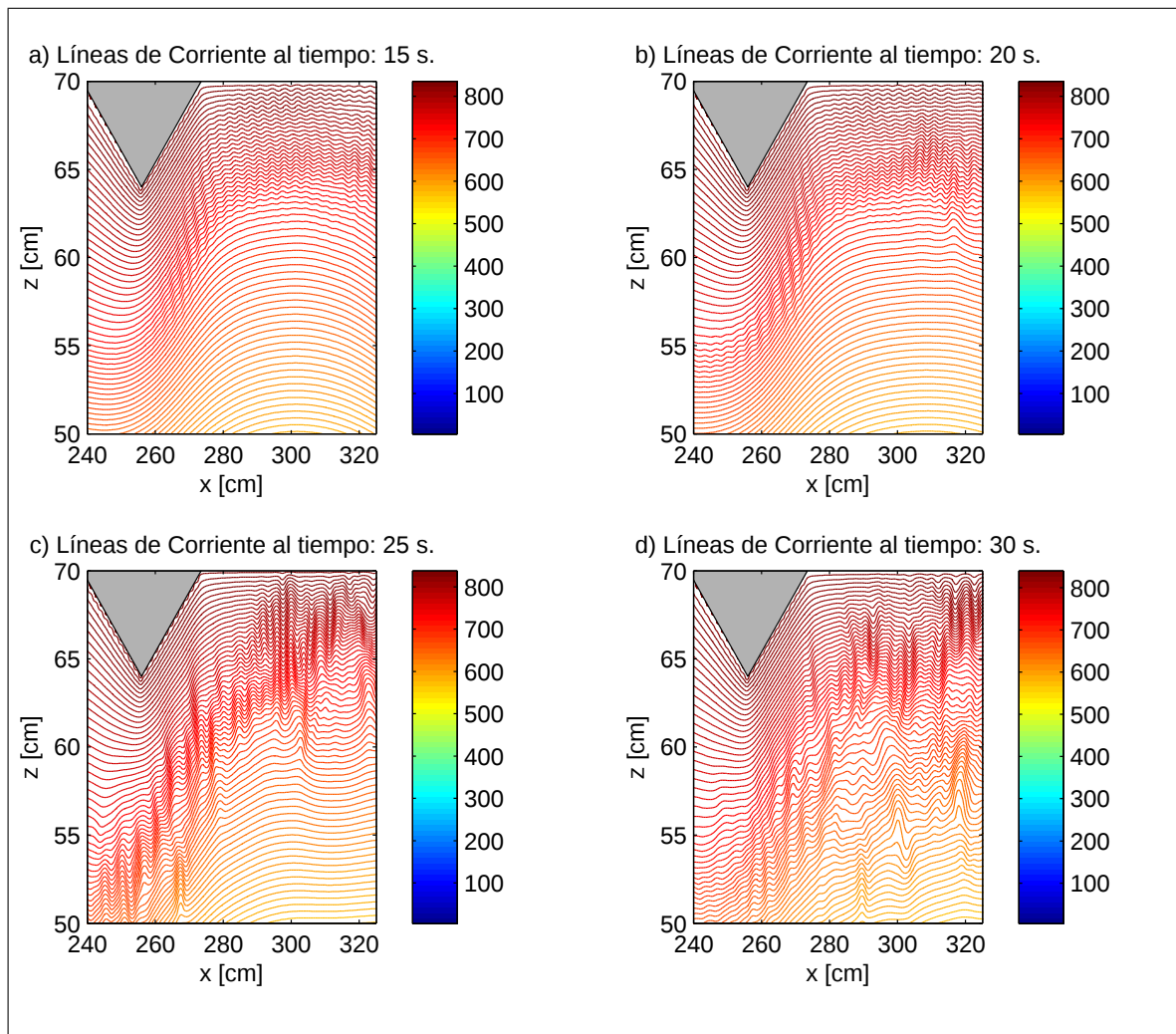


Figura 60: Acercamineto a las líneas de corriente cerca de la parte irregular del dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo, con $\Delta t = .01$.

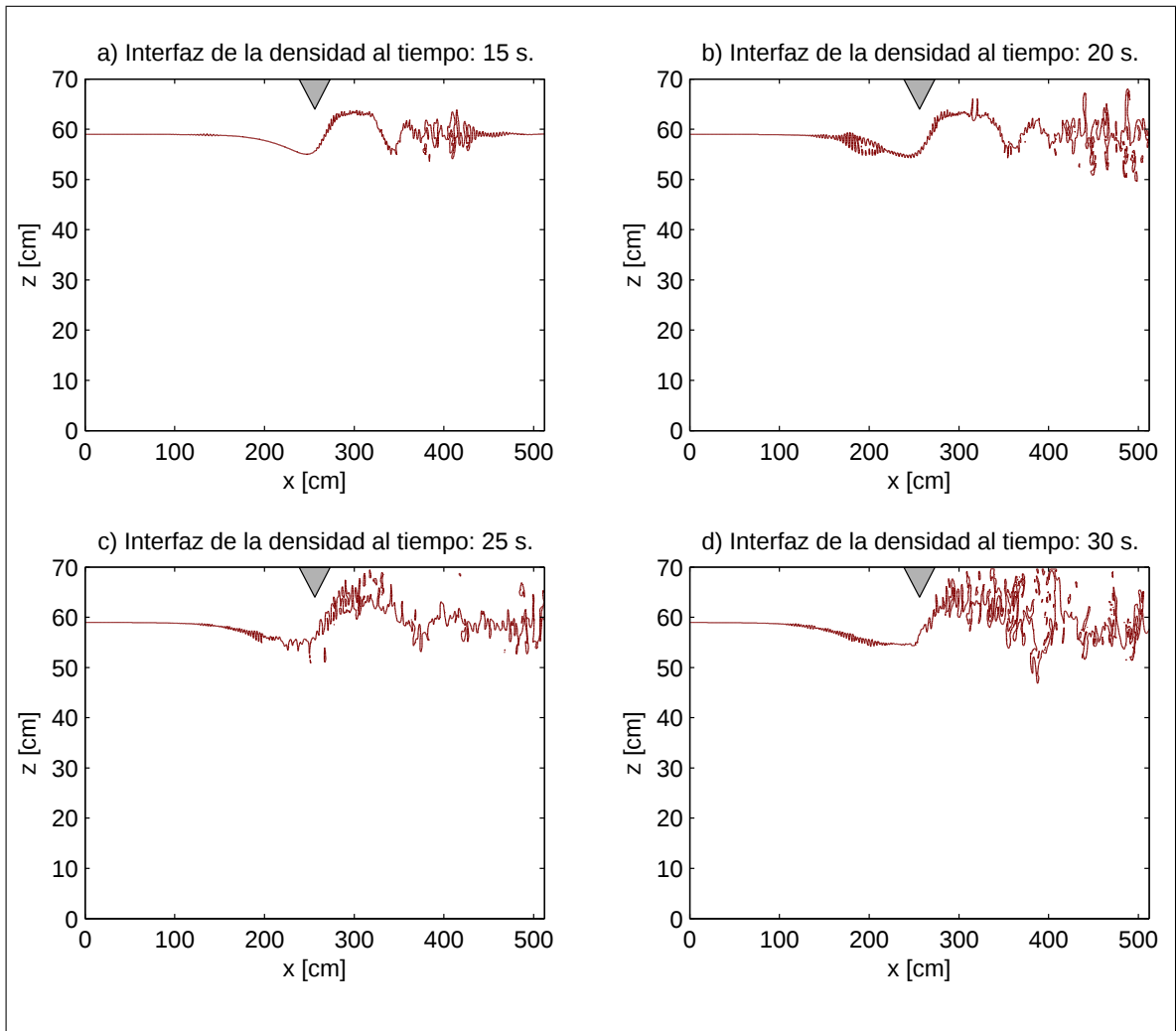


Figura 61: Interfaz de la densidad en el dominio completo después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 61 muestra la interfaz de la densidad después de 15, 20, 25, 30 segundos. La Figura 62 muestra la misma interfaz con un acercamiento en la parte irregular del dominio.

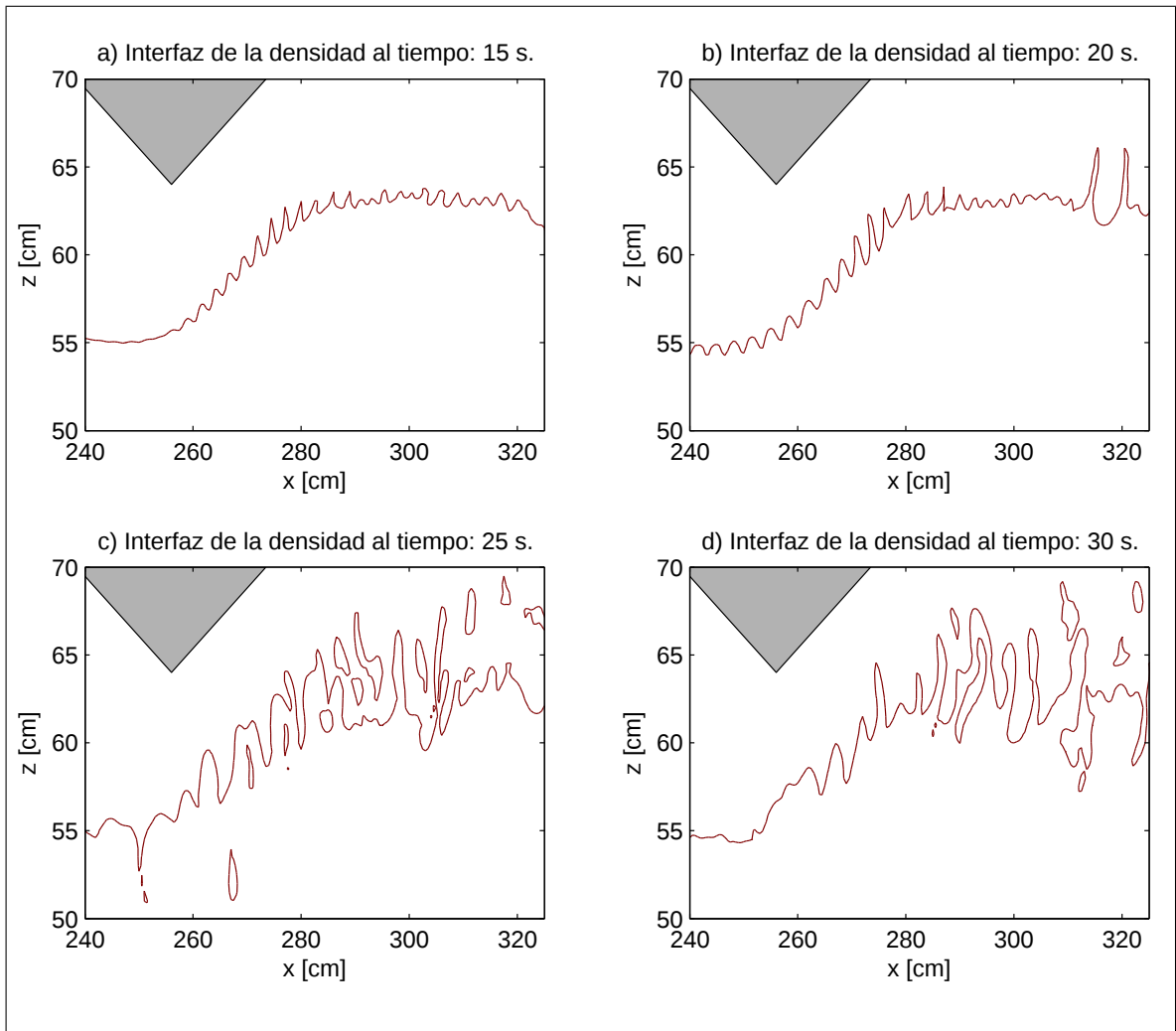


Figura 62: Acercamiento a la interfaz de la densidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 pasos en el tiempo con $\Delta t = .01$.

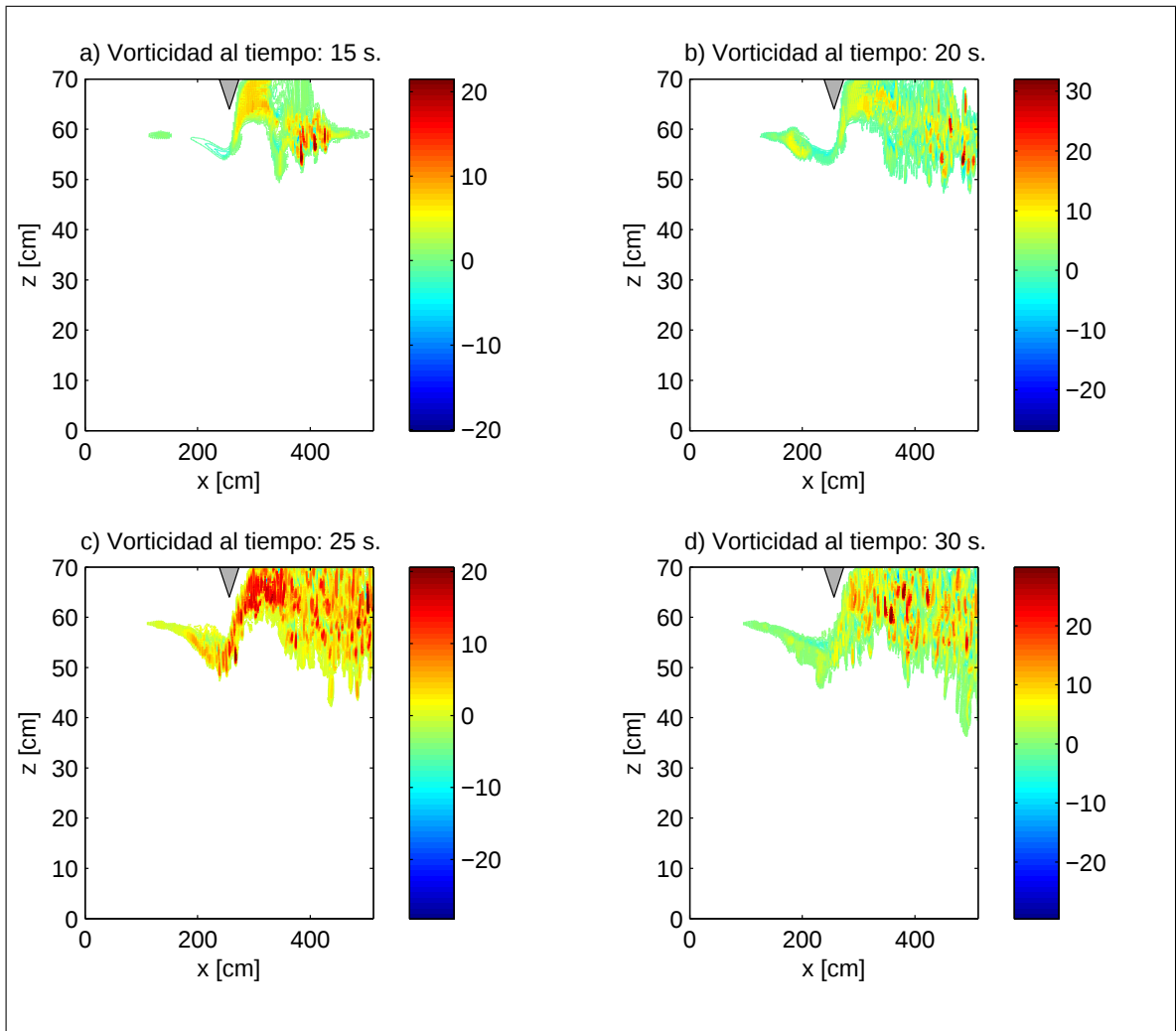


Figura 63: Vorticidad en todo el dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 63 representa la vorticidad después de 15, 20, 25, 30 segundos en todo el dominio. La Figura 64 muestra la misma variable de vorticidad con un acercamiento en la parte irregular del dominio.

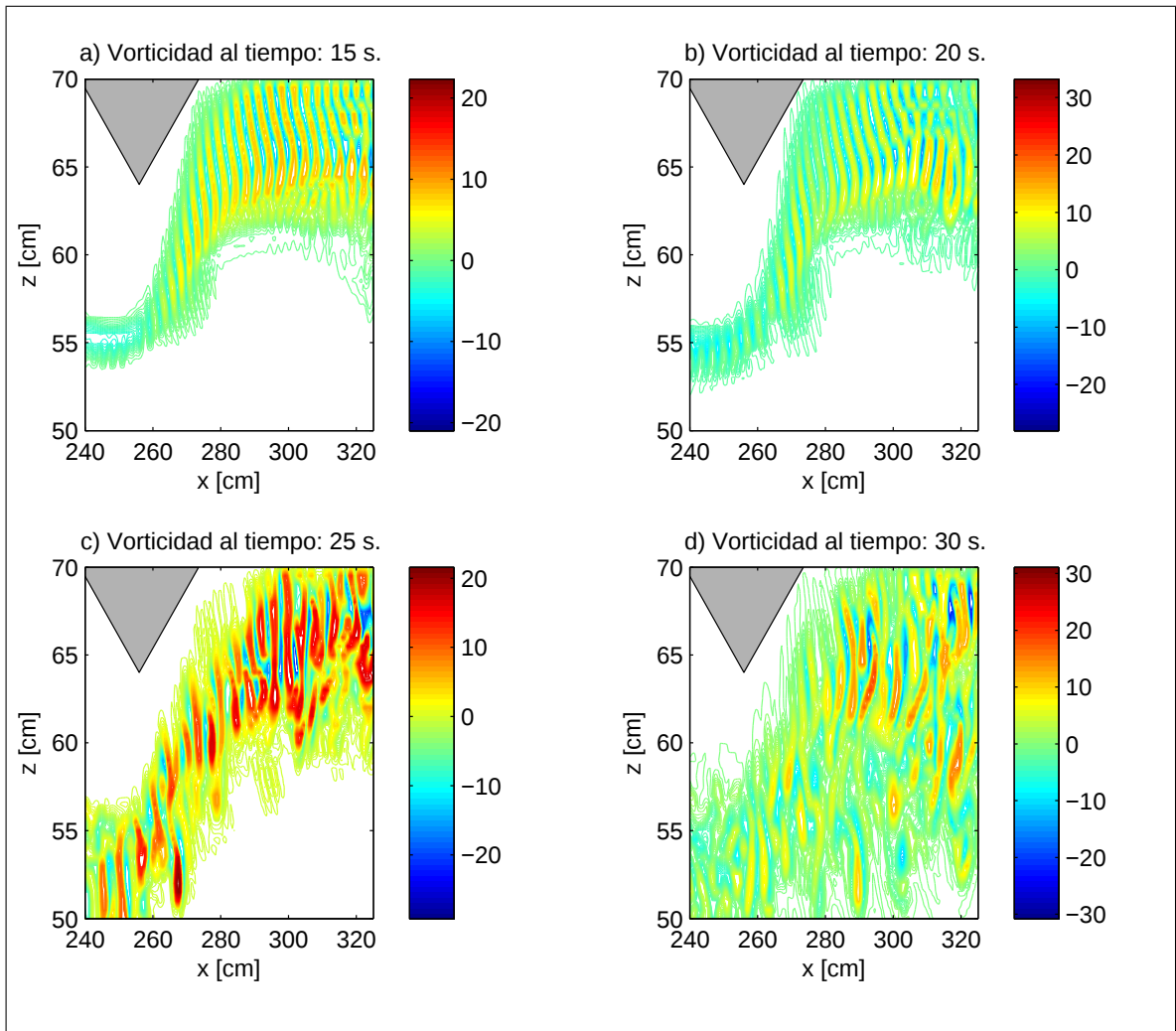


Figura 64: Acercamiento a la vorticidad cerca de la parte irregular del dominio después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$.

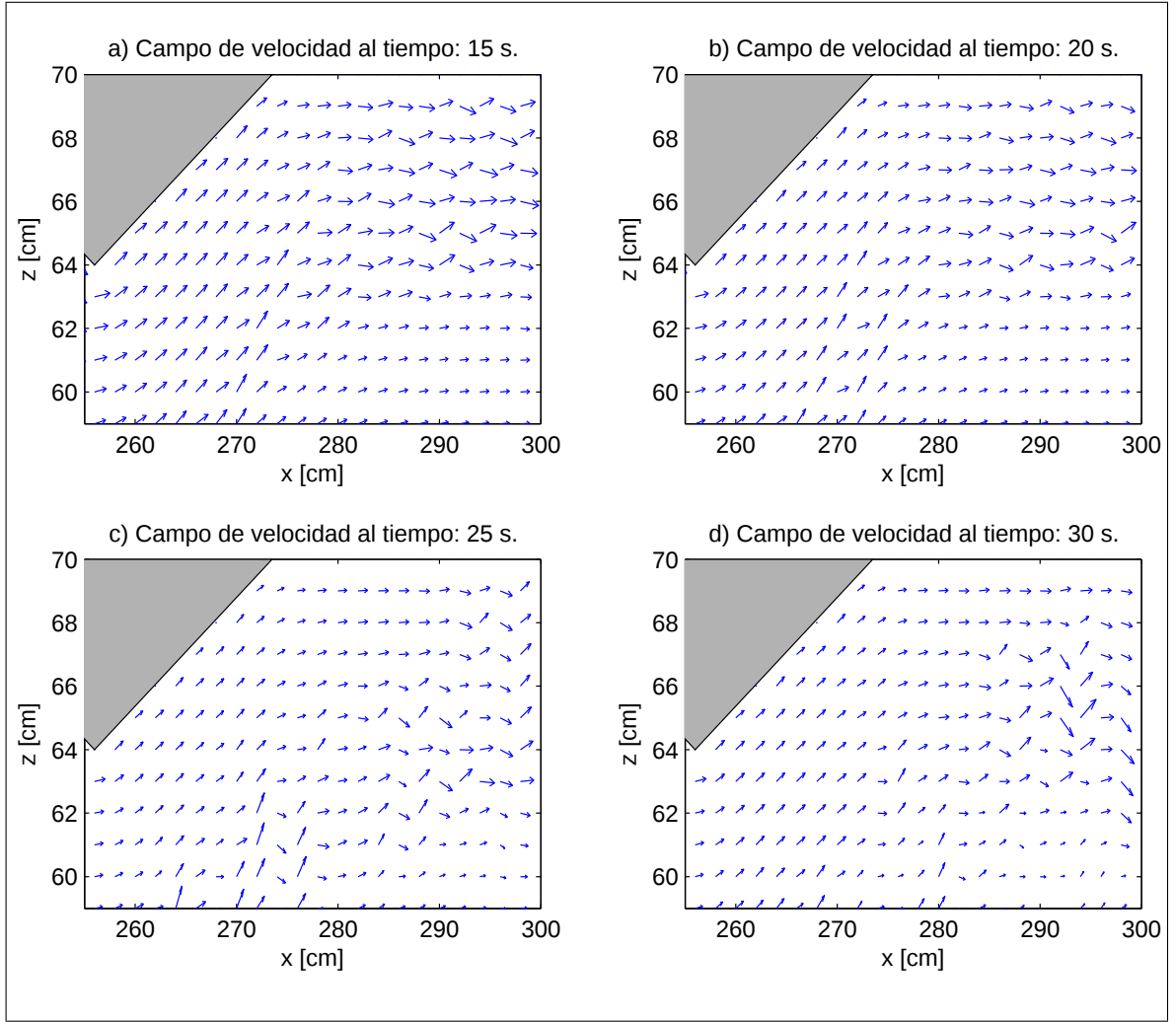


Figura 65: Campo de velocidad cerca de la parte irregular del domino después de a) 1500 b) 2000 c) 2500 d) 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 65 representa el campo de velocidad que se genera después de 15, 20, 25, 30 segundos cerca de la parte irregular del domino y corresponde a los vectores de velocidad con componentes (u, w) .

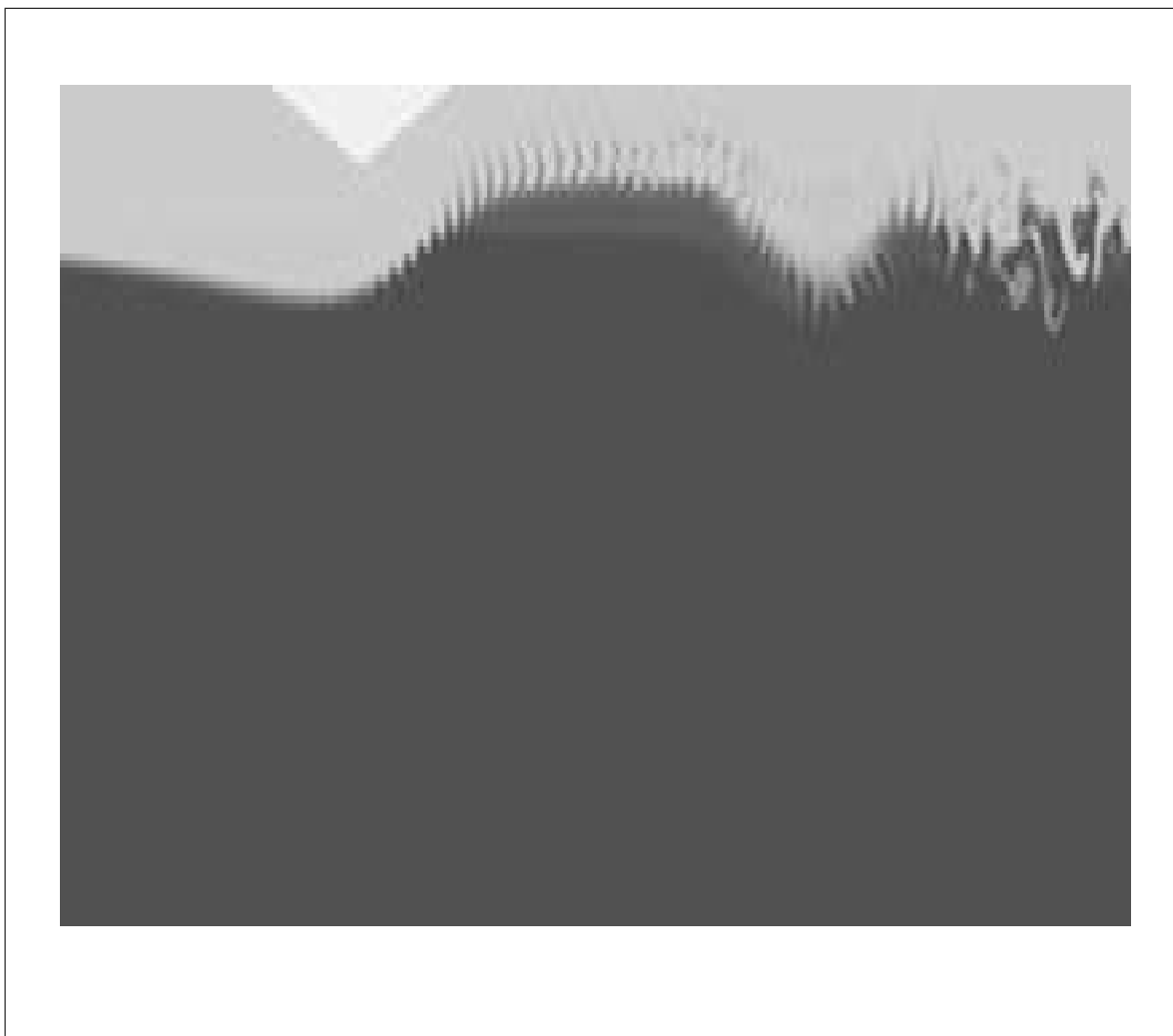


Figura 66: Distribución de la densidad en todo el dominio después de 3000 iteraciones en el tiempo con $\Delta t = .01$.

La Figura 66 representa la distribución de la densidad donde el color más oscuro corresponde a la mayor densidad y los colores más claros corresponden a las densidades menores. La distribución que se muestra es generada después de 30 segundos con condiciones de radiación en la frontera abierta.

5.5 Discusión

Los resultados numéricos obtenidos en el primer experimento con condiciones periódicas en el flujo de salida, varían ligeramente en los primeros 10 segundos de simulación con el tiempo de aceleración de 10 y 5 segundos, de hecho parecen tener el mismo comportamiento a los 5 segundos, cuando el primer caso con $t_a = 10s$ aún está siendo acelerando, mientras que el segundo y tercer caso con $t_a = 5s$ ya tiene una velocidad uniforme en el flujo de entrada. Las diferentes velocidades que se implementaron en el primer experimento tampoco presentan muchos cambios en los primeros 10 segundos de simulación, solamente se observan unas ondas ligeramente más prolongadas cerca del obstáculo cuando se tiene una mayor velocidad de entrada. Los resultados después de los 10 segundos son muy similares para los dos casos con velocidad de entrada de $8cm/s$ sin importar los tiempos de aceleración, sin embargo si parecen variar con respecto del experimento con velocidad de entrada de $4cm/s$, en el que se observa que las ondas se comienzan a generar justo arriba del obstáculo mientras que en los otros dos con velocidad de entrada mayor parecen moverse al lado derecho de este.

Los resultados numéricos obtenidos de los dos experimentos con condiciones de radiación, también presentan una gran similitud en los primeros 10 segundos de simulación, la única diferencia notable, es que la onda que se genera a un lado del obstáculo parece tener mayor amplitud cuando se tiene una mayor velocidad; después de los 10 segundos de simulación los dos experimentos se comportan de diferente manera, mientras que el experimento con velocidad de $8cm/s$ se generan unas pequeñas ondas cerca de la frontera de salida, en el experimento con velocidad de $12cm/s$ parecen estar en todas partes después del obstáculo. Finalmente entre los dos experimentos con condiciones de

radiación y condiciones periódicas que comparten los mismos parámetros (velocidad de entrada $U_0 = 8cm/s$ y tiempo de aceleración $t_a = 5s$), no parecen tener muchas variaciones cerca del obstáculo y unas pequeñas variaciones en la frontera de salida.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se obtuvo un modelo matemático para describir el comportamiento que tiene un fluido incompresible, no hidroestático, con estratificación en las densidades fluyendo a través de un obstáculo en dos dimensiones espaciales. Como resultado, se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales parciales que no tiene solución analítica. Esta situación llevó a desarrollar un modelo numérico basado en diferencia finitas para aproximar la solución, el cual consta de aproximar tres tipos diferentes de ecuaciones, la ecuación de Poisson en un dominio irregular en dos dimensiones espaciales para cada paso en el tiempo, dos ecuaciones de evolución no lineales y una ecuación que relaciona la función corriente con el vector velocidad, el cual se resolvió directamente a diferencia de los primeros dos.

Para la solución numérica de la ecuación de Poisson en dos dimensiones con dominio irregular se desarrolló un algoritmo para resolver rápidamente la ecuación, explotando el hecho de que el operador de Laplace discreto es diagonalizable ortogonalmente. Además, se utilizó el método de la matriz de capacitancia para resolver el problema en el dominio irregular. Al comparar los resultados de la implementación realizada en este trabajo con la solución a otros problemas físicos similares que utilizan otras metodologías, se pudieron recuperar los resultados esperados. Por otra parte, la metodología del Flux Corrected Transport para resolver numéricamente las dos ecuaciones de evolución no lineales del modelo, tuvo los resultados esperados al compararlos con los publicados por los autores de la metodología.

La implementación de las condiciones de frontera periódicas tienen un comportamiento similar a las condiciones de radiación y solamente presentan ligeros cambios cerca de la frontera de salida. En ambos casos, al reducir el tiempo durante el cual el fluido se aceleraba aumentaba más rápido los valores de la función corriente, especialmente cerca del obstáculo, también se observa que tiene mayor movimiento a la derecha del obstáculo el experimento numérico que tiene mayor tiempo de aceleración.

En suma, se ha desarrollado un esquema capaz de resolver numéricamente el modelo para un fluido incompresible, no hidrostático, con estratificación en las densidades fluyendo a través de un obstáculo en dos dimensiones espaciales. Los diferentes algoritmos presentados y que están codificados en Matlab pueden servir para realizar investigaciones futuras y además modelar situaciones reales de una manera relativamente sencilla y flexible ya que es posible realizar modificaciones en los parámetros y variables del problema físico y poder observar las consecuencias que tiene estos cambios.

6.1 Trabajo Futuro

El trabajo realizado permite su extensión en diferentes ramas del mismo, entre las cuales sobresalen algunas que se proponen como trabajo futuro y que se describen a continuación,

- Paralelización de código para reducir el tiempo de procesamiento, especialmente el método de flux corrected transport que es totalmente paralelizable.
- Extender la implementación en dos dimensiones a tres dimensiones espaciales.
- Comparar datos de experimentos físicos con los resultados numéricos.
- Implementar diferentes condiciones de frontera, además de las que se utilizaron

en este trabajo.

- Solucionar el modelo matemático con otros esquemas numéricos y compararlos con los obtenidos en este trabajo, como por ejemplo el uso de métodos semiespectrales para buscar alta convergencia.
- Explorar técnicas de adaptación de malla para tener mejor resolución numérica en regiones de interés como son las cercanas al obstáculo y la interfase.
- Extender los resultados a modelos con una estratificación mas general.
- Realizar una aplicación para poder dibujar geometrías complejas y que sean capaces de leerse por el sistema.
- Solucionar numéricamente modelos de otros modelos físicos adaptando partes de implementación realizada en este trabajo.

Referencias bibliográficas

- Ben-Yu, G. y He-Ping, M. (1991). A Pseudospectral Finite-Element Method for Solving Two-Dimensional Vorticity Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **28**(1): 113–132.
- Boris, J. y Book, D. (1973). Flux-Corrected Transport. I. SHASTA, A Fluid Transport Algorithm That Works. *J. of Computational Physics*, **11**(1): 38–69.
- Calhoun, D. (2002). A Cartesian Grid Method for Solving the Two-Dimensional Streamfunction-Vorticity Equations in Irregular Regions. *J. of Computational Physics*, **176**(2): 231–275.
- Chandrasekhar, S. (1961). *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford University Press, Londres.
- Courant, R., Friedrichs, K., y Lewy, H. (1967). On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics. *IBM Journal of Research and Development*, **11**(2): 215–234.
- Cummins, P. F. y Vallis, G. K. (1994). Algorithm 732. Solvers for Self-Adjoint Elliptic Problems in Irregular Two-Dimensional Domains. *ACM Transactions on Mathematical Software*, **20**(3): 247–261.
- Cummins, P. F., Topham, D. R., y Pite, H. D. (1994). Simulated and Experimental Two-Layer Flows Past Isolated Two-Dimensional Obstacles. *Fluid Dynamics Research*, **14**(3): 105–119.
- Cummins, P. F., Vagle, S., Armi, L., y Farmer, D. M. (2003). Stratified Flow over Topography: Upstream Influence and Generation of Nonlinear Internal Waves. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **459**(2034): 1467–1487.
- Dehmel, R. C. (2012). Solving the Discrete Poisson Equation using Jacobi, SOR, Conjugate Gradients, and the FFT. Recuperado de: <http://www.eecs.berkeley.edu/~dehmel/cs267/lecture24/lecture24.html>.
- Edwards, H. y Penny, D. (2008). *Elementary Differential Equations*. Pearson Education, Upper Saddle River, 6ta. ed.
- Hauschildt, P. H. y Baron, E. (1999). Numerical solution of the expanding stellar atmosphere problem. *J. of Computational and Applied Mathematics*, **109**(1-2): 41 – 63.
- Hildebrand, F. B. (1974). *Introduction to Numerical Analysis*. Dover Publication, New York, 2da. ed.

- Hoffman, J. D. (2001). *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. Dekker, New York, 2da. ed.
- Kundu, P. K. y Cohen, I. M. (2004). *Fluid Mechanics*. Elsevier Academic Press, San Diego, 3ra. ed.
- Liu, J.-G. y Weinan, E. (2001). Simple Finite Element Method in Vorticity Formulation for Incompressible Flows. *Mathematics of computation*, **70**(234): 579–594.
- Miller, M. y Thorpe, A. (1981). Radiation Conditions for the lateral Boundaries of Limited-Area Numerical Models. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, **107**(453): 615–628.
- Orlanski, I. (1976). A Simple Boundary Condition for Unbounded Hyperbolic Flows. *J. of Computational Physics*, **21**(3): 251–269.
- Sentoku, Y. y Kemp, A. (2008). Numerical methods for particle simulations at extreme densities and temperatures: Weighted particles, relativistic collisions and reduced currents. *J. of Computational Physics*, **227**(14): 6846 – 6861.
- Shirokoff, D. y Rosales, R. (2010). An Efficient Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations on Irregular Domains with No-Slip Boundary Conditions, High Order up to the Boundary. *Journal of Computational Physics*.
- Skolleremo, G. (1975). A Fourier Method for the Numerical Solution of Poisson’s Equation. *Mathematics of Computation*, **29**(131): 697–711.
- Stastna, M. y Peltier, W. R. (2004). Upstream-Propagating Solitary Waves and Forced Internal-Wave Breaking in Stratified Flow over a Sill. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **460**(2051): 3159–3190.
- Strauss, W. (1992). *Partial Differential Equations: An Introduction*. Wiley, New York.
- Sussman, M., Smith, K., Hussaini, M., Ohta, M., y Zhiwei, R. (2007). A Sharp Interface Method for Incompressible Two-Phase Flows. *J. of Computational Physics*, **221**(2): 469–505.
- Udaykumar, H., Mitall, R., Rampungoon, P., y Khanna, A. (2001). A Sharp Interface Cartesian Grid Method for Simulating Flows with Complex Moving Boundaries. *J. of Computational Physics*, **174**(1): 345–380.
- Varela, J., Araujo, M., Bove, I., Cabeza, C., Usera, G., Marti, a., Montagne, R., y Sarasua, L. (2007). Instabilities developed in stratified flows over pronounced obstacles. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **386**(2): 681–685.
- Xing, J. y Davies, A. M. (2009). Influence of Multiple Sills upon Internal Wave Generation and the Implications for Mixing. *Geophysical Research Letters*, **36**(13): 1–5.

- Xing, J. y Davies, A. M. (2011). On the Interaction of Internal Tides over Two Adjacent Sills in a Fjord. *J. of Geophysical Research*, **116**(C4): 1–21.
- Zalesak, S. (1979). Fully Multidimensional Flux-Corrected Transport Algorithms for Fluids. *J. of Computational Physics*, **31**(3): 335–362.

Apéndice A

Ecuaciones Diferenciales

A.1 Definiciones

El orden de una ecuación diferencial es el número de la mayor derivada, por ejemplo la Ecuación (135) es una ecuación diferencial de segundo orden, mientras que la Ecuación (136) es de primer orden,

$$f'' - f' = 0, \tag{135}$$

$$f' - xf = c. \tag{136}$$

Una ecuación diferencial es homogénea si el lado derecho de la ecuación es igual a 0, y se le llama no homogénea si el lado derecho relaciona una función.

$$\nabla^2 u = 0, \tag{137}$$

$$\nabla^2 u = f. \tag{138}$$

Por ejemplo la Ecuación (137) es una ecuación de segundo orden homogénea, mejor conocida como Laplaciano y la Ecuación (138) es una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea mejor conocida como ecuación de Poisson.

A.2 Ecuaciones diferenciales lineales y no lineales

A.2.1 Ecuaciones diferenciales lineales

Se dice que una ecuación diferencial es lineal, si existe un operador diferencial $\mathcal{L}$ tal que satisfaga las siguientes dos propiedades,

$$\mathcal{L}[u + v] = \mathcal{L}[u] + \mathcal{L}[v],$$

$$\mathcal{L}[\alpha u] = \alpha \mathcal{L}[u].$$

A.2.2 Ecuaciones no lineales

Las ecuaciones no lineales se pueden clasificar según su forma como:

- Ecuaciones diferenciales semilineales.

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0.$$

- Ecuaciones diferenciales quasilineales.

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0.$$

- Ecuaciones diferenciales completamente no lineales. Si depende no linealmente en la máxima derivada

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y D^k es un operador diferencial, que representa todas las k derivadas, con respecto a x .

Apéndice B

Diferencias finitas

B.1 Diferencias finitas hacia atrás

Se calcula la serie de Taylor de segundo orden para f_{i-1} ,

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_i + \mathcal{O}(\Delta x^2),$$

despejando para $\left. \frac{df}{dx} \right|_i$ nos queda,

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x).$$

B.2 Diferencias finitas hacia adelante

Se calcula la serie de Taylor de segundo orden para f_{i+1} ,

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_i + \mathcal{O}(\Delta x^2),$$

despejando para $\left. \frac{df}{dx} \right|_i$ nos queda,

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x).$$

B.3 Diferencias finitas centrales

Se calcula la serie de Taylor de tercer orden para f_{i+1} y f_{i-1} ,

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i + \mathcal{O}(\Delta x^3), \quad (139)$$

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i - \mathcal{O}(\Delta x^3), \quad (140)$$

restando la Ecuación (139) a la Ecuación (140) y despejando para $\left. \frac{df}{dx} \right|_i$ nos queda la siguiente expresión,

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{1}{2} \left[\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta x} \right] + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$