

**Centro de Investigación Científica y de
Educación Superior de Ensenada**



**ESTUDIOS DE LA REFLECTANCIA ESPECULAR Y DIFUSA EN EL
ESPARCIMIENTO DE LUZ POR SUPERFICIES ALEATORIAS METÁLICAS
RUGOSAS**

TESIS

DOCTORADO EN CIENCIAS

ALMA GEORGINA NAVARRETE ALCALA

ENSENADA BAJA CALIFORNIA MARZO DE 2003

CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y
DE EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA



División de Física Aplicada
Departamento de Óptica

Estudios de la reflectancia especular y
difusa en el esparcimiento de luz por
superficies aleatorias metálicas rugosas

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el
grado de **Doctor en Ciencias** presenta:

Alma Georgina Navarrete Alcalá

Ensenada, B.C. México. 14 de Marzo del 2003

RESUMEN de la Tesis de Alma Georgina Navarrete Alcalá presentada como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Óptica. Ensenada, Baja California. México. 14 de marzo de 2003.

Estudios de la reflectancia especular y difusa en el esparcimiento de luz por superficies aleatorias metálicas rugosas

Resumen aprobado por:



Dra. Elena Tchaikina
Directora de tesis.

En esta trabajo de tesis se presentan resultados experimentales de la reflectividad y de la distribución angular de la parte incoherente del coeficiente diferencial de reflexión en el esparcimiento de luz por superficies rugosas aleatorias uni y bidimensionales. Las mediciones fueron hechas para las polarizaciones s y p . Las muestras fueron fabricadas en fotorresina y metalizadas con oro. Los perfiles de las superficies constituyen una buena aproximación a procesos aleatorios gaussianos con funciones de correlación gaussianas. Para incluir casos en los que el detalle lateral de la rugosidad de la superficie es menor o comparable a la longitud de onda de la luz, las mediciones fueron hechas en el infrarrojo a las longitudes de onda de 5.5 y $10,6\mu m$. Asimismo, se utilizaron superficies rugosas con desviaciones estándar de alturas de una pequeña fracción de la longitud de onda. La parte coherente del coeficiente diferencial de reflexión (reflectividad) es comparada con resultados de tres teorías perturbativas (de amplitudes pequeñas, de fase y de autoenergía) y con resultados basados en la aproximación de Kirchhoff. Además, para las superficies unidimensionales se hace también la comparación con simulaciones numéricas rugosas del problema. Para la parte incoherente se hace la comparación de los resultados experimentales con resultados basados en la aproximación de Kirchhoff y con las teorías perturbativas de amplitudes pequeñas y de fase. Al igual que para la parte coherente, para las superficies unidimensionales se hace la comparación con simulaciones numéricas rugosas del problema.

Palabras clave: Esparcimiento, superficies rugosas, reflectancia infrarroja, polarización.

ABSTRACT of the Thesis of Alma Georgina Navarrete Alcalá presented as partial requirement for the degree of Doctor of Science in Optics. Ensenada, Baja California, México. March 14th, 2003.

Study of the specular and diffuse reflectance in the scattering of light from random rough metallic surfaces

Abstract approved by:



Dra. Elena Tchaikina
Thesis advisor.

In this thesis, we present experimental results for the reflectivity (strength of the coherent component) and the incoherent part of the differential reflection coefficient for one and two-dimensional randomly rough metallic surfaces. The measurements were done with *s*- and *p*- polarized light. The samples were fabricated in photoresist and coated with gold. Their surface profiles constitute good approximations to Gaussian random processes with a Gaussian autocorrelation function. To include cases in which the lateral scale of the surface roughness is smaller than or comparable to the wavelength of light, the measurements were done in the infrared, at the wavelengths of 5.5 and 10.6 μ m. The experimental results for the coherent part are compared with three perturbation theories (small amplitude, phase perturbation and self energy) and with results obtained with the Kirchhoff approximation. Rough surfaces with rms heights of a small fraction of a wavelength were employed to make meaningful comparisons with the perturbation theories. In addition, for the one-dimensional surfaces we present comparisons with numerical simulations of the problem. For the incoherent part, comparisons are made with results obtained with the Kirchhoff approximation and with two perturbative approaches, the small amplitude and the phase perturbation theory. As with the coherent part, the experimental results for one-dimensional surfaces are compared with numerical simulations of the problem.

Key Words: Scattering, rough surfaces, infrared reflectance, polarization.

Dedicatoria

A mi esposo por siempre estar a mi lado y por el amor que me da.

A mis hijas Gina y Laura Patricia, el mejor regalo que me ha dado la vida.

A mi mamá Carmen Alcalá de Navarrete por su ayuda y cariño.

A mi papá que estaría muy orgulloso en este momento.

A mi mejor amiga Elena Tchaikina por su ayuda incondicional durante la elaboración de esta tesis y por siempre estar detrás de mí para terminarla.

Agradecimientos

A la Dra. Elena Tchaikina, quien me ayudó y brindó las mejores condiciones para la realización del presente trabajo. Gracias por su tiempo, su amistad y ejemplo.

Al Dr. Eugenio Méndez, por su valioso apoyo y ayuda, por el tiempo que me dedicó, y principalmente, por haber confiado en mí desde el principio y por ayudarme a ingresar al programa de doctorado.

A los Doctores Héctor Manuel Escamilla Taylor, Rafael Espinosa Luna y Sofía Elizabeth Acosta Ortiz, por sus valiosas opiniones, las cuales contribuyeron a la culminación del presente trabajo.

A la Dra. Tamara Leskova por su gran apoyo y ayuda en el entendimiento de la teoría presentada en esta tesis, por ser además de una gran científica, una gran amiga.

A mi mejor amigo y compañero de tantos años, David Salazar, por su apoyo, ayuda y por darme siempre ánimo cuando más lo necesitaba.

A mis grandes amigos Javier Camacho y Heriberto Márquez, por brindarme siempre una sonrisa y una palabra de aliento para seguir adelante.

A un gran amigo Efrén García por su valiosa ayuda en el laboratorio y sus palabras

de ánimo.

A los técnicos Fabián Alonso, Marcia Padilla, Jessica Lilián Angel, René Torres y a Francisco Javier Dávalos por brindarme su apoyo durante la elaboración de esta tesis y por su amistad.

A los técnicos del taller de mecánica fina, Israel Ruiz, José Andrés Carrasco, Gilberto García, Francisco García, Arnulfo García, Octavio Magaña y a Javier Fernando López de los Ríos.

Al becario del centro de cómputo del departamento Iván Gutierrez, por ayudarme.

A las secretarias Doña O, Rosy Rodríguez, Ana Gallego, Carmen Ochoa y Olga Badillo, por su ayuda y darme esa sonrisa de aliento cuando más la necesitaba.

Al Lic. Pedro Lereé por su amistad y ayuda en todo lo que se refiere al centro de cómputo del departamento.

Al CICESE y al CONACYT.

Índice general

I. Introducción	1
I.1. Sinopsis de la tesis	4
II. Fabricación de superficies y equipo de esparcimiento	6
II.1. Introducción	6
II.2. Depósito de fotorresina	7
II.3. Propiedades estadísticas del moteado y técnicas de exposición	10
II.3.1. Superficies bidimensionales (2-D)	20
II.3.2. Superficies unidimensionales (1-D)	22
II.4. Caracterización de las muestras utilizadas	24
II.5. Equipo utilizado para las mediciones del esparcimiento	26
II.5.1. Esparcímetro	28
II.5.2. Obtención de resultados experimentales por medio del esparcím- cetro. Componente coherente e incoherente	30
III. Esparcimiento de luz por superficies rugosas aleatorias : Teoría	34
III.1. Presentación del problema físico y de las ecuaciones de esparcimiento	35
III.2. Las ecuaciones reducidas de Rayleigh	40
III.3. El coeficiente diferencial de reflexión	50
III.3.1. Reflectividad de superficies rugosas aleatorias (CDR coherente)	56
III.4. Teoría perturbativa de autoenergía (TPAE)	57
III.5. Teoría perturbativa de amplitudes pequeñas (TPAP)	70
III.6. Teoría perturbativa de fase ó de perturbación de fase (TPF)	77
III.7. Aproximación de Kirchhoff (AK)	85
III.8. Simulación numérica para superficies unidimensionales (SN)	95
IV. Resultados de esparcimiento para superficies unidimensionales (1-D)	101
IV.1. Esparcimiento coherente	102
IV.1.1. Polarización s	102
IV.1.2. Polarización p	113
IV.2. Esparcimiento incoherente	123

IV.2.1. Resultados en polarización <i>s</i> y <i>p</i>	125
V. Resultados de esparcimiento para superficies bidimensionales (2-D)	146
V.1. Esparcimiento coherente	147
V.1.1. Polarización <i>s</i>	147
V.1.2. Polarización <i>p</i>	152
V.2. Esparcimiento incoherente	157
V.2.1. Resultados en polarización <i>s</i> y <i>p</i>	158
VI. Resumen y conclusiones	168
Literatura citada	177

FECHA DE INGRESO
APR 27 2005
BIBLIOTECA CICESE

Índice de figuras

Figura	Página
1. Esquema del depósito de la resina en el sustrato.	9
2. Diagrama esquemático del arreglo óptico para la fabricación de superficies bidimensionales.	11
3. Diagrama esquemático del arreglo óptico para el caso en que iluminamos con un haz gaussiano.	16
4. Función de densidad de probabilidad $p(I)$ para diferentes valores del parámetro \mathcal{M}	21
5. Diagrama esquemático del arreglo óptico para la fabricación de superficies unidimensionales.	23
6. Estadísticas de la muestra (0061) estimadas a partir de los datos del perfilómetro. (a) Función de correlación de alturas. La línea continua corresponde a la correlación estimada, y la línea cortada a una función de correlación gaussiana con longitud de correlación $a = 19\mu m$. (b) La función de densidad de probabilidad de alturas. Las densidades estimadas se muestran como histogramas, y la línea continua corresponde a una función de densidad gaussiana con $\delta = 0,5\mu m$	26
7. Diagrama esquemático del scaterómetro utilizado en las mediciones. . .	29
8. Ejemplo de obtención de mediciones con el esparcímetero. (a) Medición del haz incidente y (b) Medición de la luz reflejada (esparcida) por la muestra.	32
9. Ejemplo de obtención de mediciones con el esparcímetero. (a) medición del haz incidente y (b) medición de la luz reflejada (esparcida) por la muestra.	32
10. Diagrama esquemático de la geometría de esparcimiento.	35
11. Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización s para la muestra A, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 5,5\mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,38\mu m$ y $a = 2,8\mu m$. .	103

12. Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización *s* para la muestra D, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 5,5\mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,75\mu m$ y $a = 6,8\mu m$. . 104
13. Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización *s* para la muestra F, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 5,5\mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,41\mu m$ y $a = 15\mu m$. . 106
14. Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización *s* para la muestra A, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 10,6\mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,38\mu m$ y $a = 2,8\mu m$. 108
15. Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización *s* para la muestra D, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 10,6\mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,75\mu m$ y $a = 6,8\mu m$. 110
16. Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización *s* para la muestra F, iluminando con longitud de onda $\lambda = 10,6\mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,41\mu m$ y $a = 15\mu m$. . 111
17. Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización *p* para la muestra A, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 5,5\mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,38\mu m$ y $a = 2,8\mu m$. . 114
18. Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización *p* para la muestra D, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 5,5\mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,75\mu m$ y $a = 6,8\mu m$. . 115
19. Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización *p* para la muestra F, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 5,5\mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,41\mu m$ y $a = 15\mu m$. . 116
20. Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización *p* para la muestra A, iluminando con longitud de onda de $10,6\mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,38\mu m$ y $a = 2,8\mu m$. . 119
21. Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización *p* para la muestra D, iluminando con longitud de onda de $10,6\mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,75\mu m$ y $a = 6,8\mu m$. . 120
22. Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización *p* para la muestra F, iluminando con longitud de onda de $10,6\mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,41\mu m$ y $a = 15\mu m$. . 122
23. Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra A, con $\delta = 0,38\mu m$ y $a = 2,8\mu m$. La iluminación tiene polarización *s* y longitud de onda de $5,5\mu m$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° . Los triángulos representan los datos experimentales y la línea continua los resultados suavizados. 133
24. Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra A, con $\delta = 0,38\mu m$ y $a = 2,8\mu m$. La iluminación tiene polarización *s* y longitud de onda de $5,5\mu m$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° 134

25. Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra A, con $\delta = 0,38\mu m$ y $a = 2,8\mu m$. La iluminación tiene polarización p y longitud de onda de $5,5\mu m$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° 135
26. Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra D, con $\delta = 0,75\mu m$ y $a = 6,8\mu m$. La iluminación tiene polarización s y longitud de onda de $5,5\mu m$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° 136
27. Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra D, con $\delta = 0,75\mu m$ y $a = 6,8\mu m$. La iluminación tiene polarización p y longitud de onda de $5,5\mu m$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° 137
28. Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra F, con $\delta = 0,41\mu m$ y $a = 15,0\mu m$. La iluminación tiene polarización s y longitud de onda de $5,5\mu m$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° 138
29. Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra F, con $\delta = 0,41\mu m$ y $a = 15,0\mu m$. La iluminación tiene polarización p y longitud de onda de $5,5\mu m$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° 139
30. Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra A, con $\delta = 0,38\mu m$ y $a = 2,8\mu m$. La iluminación tiene polarización s y longitud de onda de $10,6\mu m$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° 140
31. Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra A, con $\delta = 0,38\mu m$ y $a = 2,8\mu m$. La iluminación tiene polarización p y longitud de onda de $10,6\mu m$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° 141
32. Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra D, con $\delta = 0,75\mu m$ y $a = 6,8\mu m$. La iluminación tiene polarización s y longitud de onda de $10,6\mu m$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° 142
33. Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra D, con $\delta = 0,75\mu m$ y $a = 6,8\mu m$. La iluminación tiene polarización p y longitud de onda de $10,6\mu m$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° 143
34. Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra F, con $\delta = 0,41\mu m$ y $a = 15\mu m$. La iluminación tiene polarización s y longitud de onda de $10,6\mu m$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° 144

35. Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra F, con $\delta = 0,41\mu m$ y $a = 15\mu m$. La iluminación tiene polarización p y longitud de onda de $10,6\mu m$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° 145
36. Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización s para la muestra 5122, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 10,6\mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,42\mu m$ y $a = 2,1\mu m$. 148
37. Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización s para la muestra 9032, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 10,6\mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,75\mu m$ y $a = 7,5\mu m$. 149
38. Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización s para la muestra 0061, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 10,6\mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,5\mu m$ y $a = 19\mu m$. 150
39. Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización p para la muestra 5122, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 10,6\mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,42\mu m$ y $a = 2,1\mu m$. 152
40. Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización p para la muestra 9032, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 10,6\mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,75\mu m$ y $a = 7,5\mu m$. 153
41. Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización p para la muestra 0061, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 10,6\mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,5\mu m$ y $a = 19\mu m$. 155
42. Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra 8053, con $\delta = 0,75\mu m$ y $a = 3\mu m$. La iluminación tiene polarización s y longitud de onda de $10,6\mu m$. Los ángulos de incidencia son 5° , 15° y 30° 162
43. Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra 8053, con $\delta = 0,75\mu m$ y $a = 3\mu m$. La iluminación tiene polarización p y longitud de onda de $10,6\mu m$. Los ángulos de incidencia son 5° , 15° y 30° 163
44. Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra 7047, con $\delta = 1,6\mu m$ y $a = 9,53\mu m$. La iluminación tiene polarización s y longitud de onda de $10,6\mu m$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° 164
45. Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra 7047, con $\delta = 1,6\mu m$ y $a = 9,53\mu m$. La iluminación tiene polarización p y longitud de onda de $10,6\mu m$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 60° 165
46. Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra 0061, con $\delta = 0,5\mu m$ y $a = 19\mu m$. La iluminación tiene polarización s y longitud de onda de $10,6\mu m$. Los ángulos de incidencia son 5° , 15° y 30° 166

47. Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra 0061, con $\delta = 0,5\mu m$ y $a = 19\mu m$. La iluminación tiene polarización p y longitud de onda de $10,6\mu m$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° 167

Índice de tablas

Tabla	Página
I. Parámetros estadísticos de las muestras unidimensionales	26
II. Parámetros estadísticos de las muestras bidimensionales	26

Capítulo I

Introducción

El objetivo principal de este trabajo de tesis es el de realizar una evaluación de diversas teorías sobre el fenómeno de esparcimiento de luz por superficies rugosas aleatorias, tanto bidimensionales (2D) como unidimensionales (1D). Para esto, se realizan comparaciones entre resultados experimentales y las teorías más importantes desarrolladas hasta el momento. En el caso de las superficies unidimensionales se hacen también comparaciones con simulaciones numéricas rigurosas del problema.

La contribución principal del trabajo recae sobre aspectos experimentales del problema, y en particular, sobre la realización de mediciones del coeficiente diferencial de reflexión a partir de superficies que han sido bien caracterizadas por medios mecánicos, y que tienen estadísticas sencillas.

El esparcimiento de ondas electromagnéticas por superficies rugosas aleatorias ha sido un campo activo de investigación desde hace muchos años. La mayoría de las investigaciones sobre el esparcimiento de luz por superficies rugosas concierne al estudio

de la distribución angular de la intensidad media esparcida, o su versión normalizada, el coeficiente diferencial de reflexión. El coeficiente diferencial de reflexión se puede descomponer matemáticamente en la suma de dos contribuciones, llamadas componentes coherente e incoherente de la luz esparcida. La contribución de la parte coherente es proporcional a la magnitud al cuadrado del campo promedio esparcido, mientras que la componente incoherente está relacionada con su varianza.

La fracción de la potencia incidente contenida en la componente coherente sólo es significativa cuando la rugosidad de la superficie es pequeña en comparación con la longitud de onda. Esta componente consiste de un haz bien definido que se propaga a lo largo de la dirección especular; por esta razón es también llamada componente especular y está directamente relacionada con la reflectividad de la superficie. La componente coherente de la intensidad de la luz esparcida por superficies metálicas rugosas aleatorias ha sido objeto de muchos estudios en el pasado, ver por ejemplo, [Bennett y Porteus, 1961], [Shen y Maradudin, 1980], [Saillard, 1992], [Greffet, 1992], [Maradudin et al., 1993], [Baylard et al., 1993], [Sánchez-Gil et al., 1995]. En vista de su importancia en áreas fundamentales y aplicadas, la reflectividad puede ser utilizada para estimar parámetros de rugosidad de la superficie [Bennett y Porteus, 1961], [Welford, 1977], [Sánchez-Gil et al., 1995]. Una metodología clásica para estudiar el problema está basada en la aproximación de Kirchhoff [Beckmann y Spizzichino, 1987], que en principio sólo es válida cuando las escalas laterales de la rugosidad son bastante mayores que la longitud de onda. Por otro lado, para el caso de superficies poco rugosas, es posible utilizar métodos perturbativos para describir la reflectividad de las

superficies [Rayleigh, 1896], [Rayleigh, 1907], [Rice, 1951]; un método clásico para describir de manera aproximada la interacción de luz con superficies rugosas aleatorias es la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas de Rayleigh [Rayleigh, 1907] y Rice [Rice, 1951].

El problema general de la interacción de ondas con superficies rugosas no se ha podido resolver por métodos analíticos. Recientemente se han desarrollado otras técnicas perturbativas que toman en cuenta, al menos parcialmente, efectos de esparcimiento múltiple y polarización, que pueden ser importantes cuando la escala lateral de la rugosidad es menor o comparable a la longitud de onda. Dos de las más prometedoras, son la teoría perturbativa de autoenergía [Maradudin et al., 1993], [Baylard et al., 1993], y la teoría perturbativa de fase [Shen y Maradudin, 1980].

Una evaluación crítica de las teorías perturbativas se obtiene comparando sus resultados con los que se obtienen a partir de simulaciones numéricas rigurosas del problema de esparcimiento (disponible sólo para el caso de superficies rugosas aleatorias unidimensionales) y con resultados de experimentos bien controlados; ver, por ejemplo, [Thorsos, 1988], [Thorsos, 1990], [Knotts et al., 1993], [Luna y Méndez, 1995].

Por otro lado, se tiene que la componente incoherente de la intensidad esparcida consiste en un patrón de esparcimiento ancho, que, por lo menos en circunstancias normales (áreas de iluminación grandes y superficies cuyo perfil constituye un proceso aleatorio gaussiano con función de correlación gaussiana), no presenta ninguna estructura sobre la región angular cubierta por la componente especular. La componente incoherente también es conocida como componente difusa [González et al., 2000],

[McGurn y Maradudin, 1996].

El trabajo experimental realizado para cumplir con los objetivos de esta tesis se puede dividir en dos partes. La primera consiste en la preparación de superficies caracterizadas con estadísticas controladas, y la segunda, en realizar mediciones de la luz esparcida por dichas superficies.

El proceso de fabricación de las superficies consiste, esencialmente, en exponer un material fotosensible con respuesta lineal a un patrón aleatorio de luz (patrón de moteado), cuya intensidad obedezca estadísticas conocidas. Con esto se pretende generar superficies cuyo perfil pueda ser considerado un proceso aleatorio gaussiano con función de correlación también gaussiana.

I.1. Sinopsis de la tesis

La tesis se organiza de la siguiente manera:

En el capítulo II se presenta la fabricación de las muestras. Se describen las condiciones de preparación (limpieza, depósito y metalización) de las muestras y la técnica empleada para la exposición a los patrones de moteado. Se presenta también una descripción del arreglo experimental usado para la fabricación de distintos tipos de superficies rugosas, así como los resultados de la caracterización de las mismas superficies por medios mecánicos. También se incluye una descripción del arreglo experimental utilizado para la medición de la luz esparcida por las superficies.

En el capítulo III se presentan las diversas teorías sobre el esparcimiento de luz

por superficies rugosas aleatorias que se utilizaron para obtener las curvas teóricas que se comparan con los datos experimentales, definiéndose la geometría de esparcimiento considerada, así como el coeficiente diferencial de reflexión. Las teorías empleadas en este trabajo, que han sido desarrolladas por otros autores son: la perturbativa de amplitudes pequeñas, la perturbativa de autoenergía, la de perturbación de fase, y la teoría basada en la aproximación de Kirchhoff. También se hace una breve descripción de la simulación numérica utilizada en el estudio de las muestras unidimensionales. El tratamiento teórico sobre esparcimiento incoherente basado en los métodos perturbativos presentado aquí, fue desarrollado y escrito por la Dra. Leskova. Deseo expresar mi agradecimiento por su apoyo y por permitirme utilizar sus resultados teóricos, que aún no han sido publicados.

En los capítulos IV y V se describen las mediciones y se presentan los resultados obtenidos del esparcimiento de luz por las superficies unidimensionales (1D) y bidimensionales (2D), tanto para la componente coherente como para la incoherente. Finalmente, en el capítulo VI se presentan las conclusiones derivadas de este trabajo.

Capítulo II

Fabricación de superficies y equipo de esparcimiento

II.1. Introducción

Para hacer experimentos que tengan algún sentido en el contexto de la verificación crítica de los métodos teóricos, se requiere contar con muestras caracterizadas y que posean estadísticas gaussianas, que son las se que utilizan en la gran mayoría de las teorías reportadas en la literatura.

Una técnica muy conocida y muy utilizada para obtener superficies rugosas con propiedades estadísticas deseadas fue introducida por Gray [Gray, 1978]. En trabajos sobre la comparación detallada teoría - experimento, se utiliza normalmente esta técnica para la fabricación de las superficies [Méndez y O'Donnell, 1987], [Sant et al., 1989].

La fotorresina es un polímero fotosensible en ultravioleta que presenta también

cierta sensibilidad en longitudes de onda del azul. Se comercializa en forma de un líquido viscoso, lo cual permite su depósito en forma de capas o de películas que son horneadas posteriormente para remover solventes residuales. Con ésta es posible generar perfiles superficiales suaves (a diferencia del vidrio esmerilado), libres de ruido granular. La curva de respuesta característica de una película de fotorresina, de tiempo de exposición contra altura superficial, presenta una pequeña región que es prácticamente lineal.

El objetivo fundamental que se pretende alcanzar en lo que respecta a la fabricación de superficies, es el de generar perfiles superficiales con propiedades estadísticas sencillas, fácilmente modelables. Suponiendo que se tiene una respuesta lineal de la fotorresina, se pretende producir en ésta perfiles relacionados con patrones de moteado, los cuales tienen propiedades estadísticas bien conocidas.

El proceso de fabricación de superficies rugosas se hace generalmente en cuatro etapas: preparación de placas con fotorresinas, exposición a patrones de luz, curado, revelado y metalización (en su caso). En las siguientes secciones se describen las técnicas que se emplearon para la fabricación de las superficies utilizadas en este trabajo, usando la fotorresina.

II.2. Depósito de fotorresina

En el depósito de fotorresina se utilizaron como sustratos placas de vidrio con caras planas y paralelas; en algunos casos de forma circular con diámetro de 2 pulgadas y en otros de forma cuadrada de 2 pulgadas de lado. La limpieza de los sustratos es crítica,

pues determina tanto la adherencia de la fotorresina como la uniformidad de ésta. La limpieza se realiza de acuerdo al siguiente procedimiento:

- 1) Lavado con detergente y esponja.
- 2) Lavado en tina de ultrasonido con agua y detergente.
- 3) Lavado en tina de ultrasonido con acetona.
- 4) Secado con gasa suave y con papel de calidad óptica.
- 5) Lavado en tina de ultrasonido con alcohol isopropílico.
- 6) Secado con gasa suave y con papel de calidad óptica.
- 7) Horneado de los substratos a unos 60° C durante una hora para evaporar solventes.

Una vez limpios y fríos los substratos se colocan uno a uno en una base giratoria provista de un orificio central, por donde se ejerce una succión que los adhiere a la base. Acto seguido, se hace girar al sistema base-substrato a unas 2500 rpm por unos 25 segundos y en la parte central se deposita fotorresina con una jeringa de manera continua, hasta que el substrato haya sido cubierto por completo. De esta manera se obtiene una capa uniforme y completa de fotorresina (observar figura 1). En el trabajo aquí descrito se utilizaron las fotorresinas STR1045 y STR1075, fabricadas por la compañía Shipley [Microlithography Chemical Corp, 1254 Chestnut Street, Newton, MA. 02464-1418. EUA, e-mail: mcc@microchem.com]

Una vez depositada la fotorresina, estos substratos se hornean a 60° C durante una hora y se dejan en reposo por 24 horas.

Después, se deposita una segunda capa de fotorresina a los substratos con el fin de

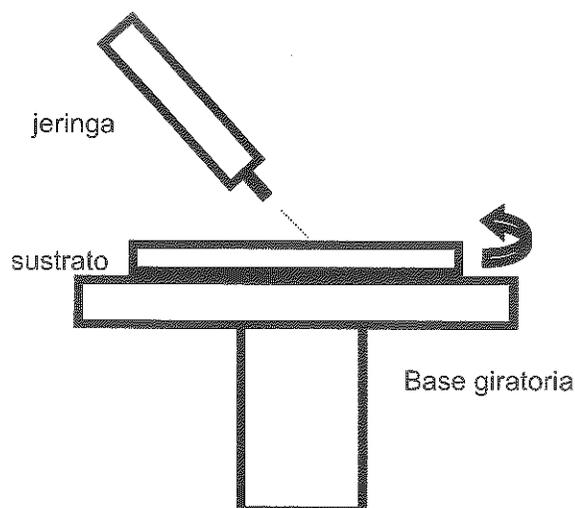


Figura 1: Esquema del depósito de la resina en el sustrato.

obtener una película más gruesa. (Aunque existen fotorresinas más espesas con las que sería posible depositar una sola capa, con éstas es más difícil eliminar burbujas, y los gases existentes dentro del depósito levantan y deforman la resina con mayor facilidad en el momento del secado o del curado). Es importante resaltar que en todo momento se trabaja bajo iluminación amarilla, a la cual la fotorresina es prácticamente insensible.

Antes de exponer las placas, se aplicó una película de pintura negra en la parte posterior de los substratos para disminuir los efectos de reflexiones no deseadas durante la exposición.

Después de expuestas las placas, se revelaron con revelador MF319 (Shipley) sin diluir, por alrededor de 3 min., manteniendo siempre una agitación suave. Al retirarlas del revelador se les aplicó agua a presión con la finalidad de limpiar los restos de fotorresina expuesta, así como la película de pintura negra de la parte posterior. Luego se lavaron con agua destilada. Una vez fuera del agua, se secaron bajo un flujo de aire

para reducir el manchado de la superficie por sales minerales.

Puesto que la fotorresina sigue siendo fotosensible después de la exposición, las muestras se sometieron a un proceso de curado", el cual consistió en exponerlas a luz ambiente (no directa) por alrededor de 8 días, antes de proceder al metalizado. Esto también ayuda a que se evaporen el agua y otros solventes de la capa de la fotorresina.

En nuestro caso, las superficies fueron cubiertas con una capa metálica de oro industrialmente puro (Aldrich Chemical Company, con una pureza del 99.99 %). Para ello se utilizó un sistema de vacío (evaporadora Edwards 360) que alcanzó una presión de 10^{-6} torr. Se depositaron películas de oro de aproximadamente $0.02\mu\text{m}$, que es un grosor suficiente para que la película de oro prácticamente no transmita luz.

II.3. Propiedades estadísticas del moteado y técnicas de exposición

Cuando un haz de luz láser incide sobre una superficie rugosa, la luz esparcida en el campo lejano muestra un fenómeno de interferencia aleatoria, creando la impresión de granulado; a este efecto se le denomina patrón de granulado o moteado láser (speckle) [Goodman, 1975](pág. 10).

Para entender cómo es que se pueden emplear patrones de speckle para generar superficies rugosas con las características deseadas, se presenta ahora una breve descripción de las propiedades estadísticas de estos patrones. Una discusión más amplia puede encontrarse en [Goodman, 1975].

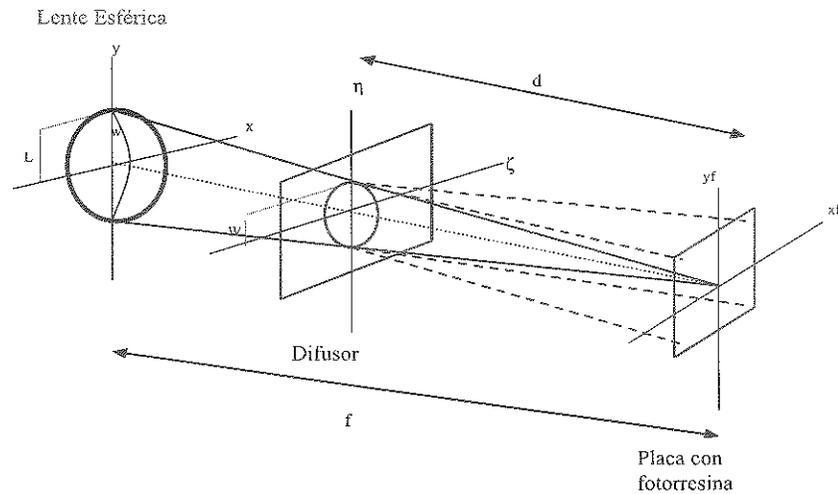


Figura 2: Diagrama esquemático del arreglo óptico para la fabricación de superficies bidimensionales.

Consideremos la geometría de esparcimiento que se presenta en la figura 2. Un haz gaussiano colimado proveniente de un láser se hace pasar por una lente de longitud focal f que lo hace converger hacia el punto $(0,0)$ en el plano (x_f, y_f) . Se coloca un difusor (vidrio esmerilado, por ejemplo) en un plano intermedio, a una distancia d del plano focal de la lente. La amplitud compleja $A(x_f, y_f)$ en el plano focal de la lente puede escribirse en la aproximación de Fresnel [Goodman, 1968] (pág. 60) como

$$A(x_f, y_f) = \frac{\exp(ikd)}{i\lambda d} \exp\left[\frac{ik}{2d}(x_f^2 + y_f^2)\right] \iint_{-\infty}^{\infty} A(\zeta, \eta) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d}(\zeta^2 + \eta^2)\right] \exp\left[\frac{-i2\pi}{\lambda d}(x_f\zeta + y_f\eta)\right] d\zeta d\eta, \quad (1)$$

donde $A(\zeta, \eta)$ es la amplitud compleja de la luz transmitida por el difusor en el plano

(ζ, η) .

Entonces, en cualquier punto (x_f, y_f) del plano de observación, la amplitud compleja $A(x_f, y_f)$ es el resultado de la interferencia entre un gran número de contribuciones con fases aleatorias, uniformemente distribuidas en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Esto último debido a que la rugosidad de la superficie es importante en comparación con la longitud de onda. Con base en el Teorema Central de Límite [Goodman, 1985] (pág. 32), es fácil demostrar que $A(x_f, y_f)$ constituye un proceso aleatorio gaussiano complejo circular [Goodman, 1975].

La función de densidad de probabilidad asociada a la intensidad en cualquier punto en el plano (x_f, y_f) está dada por [Goodman, 1975](pág. 31):

$$p(I) = \begin{cases} \frac{I}{\langle I \rangle} \exp(-\frac{I}{\langle I \rangle}) & I \geq 0 \\ 0 & I < 0 \end{cases} \quad (2)$$

donde $\langle I \rangle$ representa la intensidad media; la desviación estándar está dada por $\sigma_I = \langle I \rangle$. De particular interés es la función de autocorrelación $C_I(x_{f1}, x_{f2}; y_{f1}, y_{f2})$ de la distribución espacial de intensidad $I(x_f, y_f) = |A(x_f, y_f)|^2$. El ancho de esta función constituye una medida de la distancia promedio entre regiones adyacentes de máximos y mínimos de intensidad. Alternativamente, se puede visualizar como una medida del tamaño del speckle o moteado láser. La función de autocorrelación está definida como

$$C_I(x_{f1}, x_{f2}; y_{f1}, y_{f2}) = \langle I(x_{f1}, y_{f1}) I(x_{f2}, y_{f2}) \rangle, \quad (3)$$

donde el promedio se calcula sobre un ensamble de realizaciones de la superficie rugosa.

Para calcular la función de autocorrelación, utilizamos el hecho de que $A(x_f, y_f)$ es un proceso aleatorio complejo gaussiano y circular. En este caso, la función de autocorrelación de la intensidad puede expresarse en términos de la función de autocorrelación del campo,

$$J_A(x_{f1}, y_{f1}; x_{f2}, y_{f2}) = \langle A(x_{f1}, y_{f1}) A^*(x_{f2}, y_{f2}) \rangle, \quad (4)$$

que en la terminología de la teoría de coherencia representa la intensidad mutua del campo, como veremos a continuación.

Para variables aleatorias complejas gaussianas circulares se tiene el siguiente teorema [Goodman, 1985] (pág. 44):

$$\langle Z_1^* Z_2^* Z_3 Z_4 \rangle = \langle Z_1^* Z_3 \rangle \langle Z_2^* Z_4 \rangle + \langle Z_2^* Z_3 \rangle \langle Z_1^* Z_4 \rangle. \quad (5)$$

Con esto, la relación requerida entre la función de autocorrelación (3) y la intensidad mutua (4) es

$$C_I(x_{f1}, x_{f2}; y_{f1}, y_{f2}) = \langle I(x_{f1}, y_{f1}) \rangle \langle I(x_{f2}, y_{f2}) \rangle + |\langle A^*(x_{f1}, y_{f1}) A(x_{f2}, y_{f2}) \rangle|^2, \quad (6)$$

que puede reescribirse de la forma

$$C_I(x_{f1}, x_{f2}; y_{f1}, y_{f2}) = \langle I(x_{f1}, y_{f1}) \rangle \langle I(x_{f2}, y_{f2}) \rangle + |J_A(x_{f1}, x_{f2}; y_{f1}, y_{f2})|^2. \quad (7)$$

En muchos casos es conveniente trabajar con una versión normalizada de la intensidad mutua, conocida como el factor complejo de coherencia, el cual está definido como

$$\mu_A(x_{f1}, y_{f1}; x_{f2}, y_{f2}) = \frac{J_A(x_{f1}, y_{f1}; x_{f2}, y_{f2})}{[J_A(x_{f1}, y_{f1}; x_{f1}, y_{f1}) J_A(x_{f2}, y_{f2}; x_{f2}, y_{f2})]^{1/2}}. \quad (8)$$

Finalmente, la función de autocorrelación de la intensidad del speckle, a partir de la ecuación (7), toma la forma

$$\begin{aligned} C_I(x_{f1}, x_{f2}; y_{f1}, y_{f2}) &= \langle I(x_{f1}, y_{f1}) \rangle \langle I(x_{f2}, y_{f2}) \rangle [1 + |\mu_A(x_{f1}, y_{f1}; x_{f2}, y_{f2})|^2] \\ &= \langle I \rangle^2 [1 + |\mu_A(x_{f1}, y_{f1}; x_{f2}, y_{f2})|^2]. \end{aligned} \quad (9)$$

Entonces el problema de obtener $C_I(x_{f1}, x_{f2}; y_{f1}, y_{f2})$ se reduce sólo a calcular la intensidad mutua $J_A(x_{f1}, x_{f2}; y_{f1}, y_{f2})$.

Ya que estamos interesados en obtener la intensidad mutua $J_A(x_{f1}, x_{f2}; y_{f1}, y_{f2})$ podemos escribir, utilizando la ecuación (1),

$$\begin{aligned} J_A(x_{f1}, y_{f1}; x_{f2}, y_{f2}) &= \frac{1}{\lambda^2 d^2} \exp \left[\frac{ik}{2d} (x_{f1}^2 - x_{f2}^2 + y_{f1}^2 - y_{f2}^2) \right] \iiint \int_{-\infty}^{\infty} \langle A(\zeta_1, \eta_1) A^*(\zeta_2, \eta_2) \rangle \\ &\quad \times \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda d} (\zeta_1^2 - \zeta_2^2 + \eta_1^2 - \eta_2^2) \right] \exp \left[-\frac{i2\pi}{\lambda d} (x_{f1}\zeta_1 + y_{f1}\eta_1 - x_{f2}\zeta_2 - y_{f2}\eta_2) \right] d\zeta_1 d\eta_1 d\zeta_2 d\eta_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Ahora escribimos la amplitud compleja transmitida por el difusor en la forma

$$A(\zeta, \eta) = A_0(\zeta, \eta)\alpha_0(\zeta, \eta), \quad (11)$$

donde $A_0(\zeta, \eta)$ es la amplitud del campo justo antes del difusor y $\alpha_0(\zeta, \eta)$ representa la transmitancia (aleatoria) del difusor. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} J_A(\zeta_1, \eta_1; \zeta_2, \eta_2) &= A_0(\zeta_1, \eta_1)A_0^*(\zeta_2, \eta_2) \langle \alpha_0(\zeta_1, \eta_1)\alpha_0^*(\zeta_2, \eta_2) \rangle \\ &= A_0(\zeta_1, \eta_1)A_0^*(\zeta_2, \eta_2)C_\alpha(\zeta_1, \eta_1, \zeta_2, \eta_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Debido a que el difusor es muy rugoso y la escala lateral de la rugosidad es muy pequeña, la función de autocorrelación de su transmitancia de amplitud compleja se puede aproximar por una función delta [Goodman, 1975](pág.37). Se tiene entonces que

$$J_A(\zeta_1, \eta_1; \zeta_2, \eta_2) = KA_0(\zeta_1, \eta_1)A_0^*(\zeta_2, \eta_2)\delta(\zeta_1 - \zeta_2, \eta_1 - \eta_2), \quad (13)$$

donde K es una constante. Sustituyendo (13) en (10) se obtiene

$$\begin{aligned} J_A(x_{f1}, y_{f1}; x_{f2}, y_{f2}) &= \frac{K}{\lambda^2 d^2} \exp \left[\frac{ik}{2d} (x_{f1}^2 - x_{f2}^2 + y_{f1}^2 - y_{f2}^2) \right] \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} |A_0(\zeta_1, \eta_1)|^2 \exp \left[-\frac{i2\pi}{\lambda d} (\zeta_1(x_{f1} - x_{f2}) + \eta_1(y_{f2} - y_{f2})) \right] d\zeta_1 d\eta_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Entonces la intensidad mutua del campo observado está dada, además de algunas constantes multiplicativas, por la transformada de Fourier de la distribución de inten-

sidad $|A_0(\zeta, \eta)|^2$ incidente sobre el difusor. Esta relación nos recuerda el teorema de Van Cittert-Zernicke de la teoría clásica de coherencia.

La función de autocorrelación finalmente queda como:

$$C_I(x_{f1}, x_{f2}; y_{f1}, y_{f2}) = \langle I \rangle^2 \times \left[1 + \left| \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} |A_0(\zeta_1, \eta_1)|^2 \exp \left[-\frac{i2\pi}{\lambda d} (\zeta_1(x_{f1} - x_{f2}) + \eta_1(y_{f2} - y_{f1})) \right] d\zeta_1 d\eta_1}{\iint_{-\infty}^{\infty} |A_0(\zeta_1, \eta_1)|^2 d\zeta_1 d\eta_1} \right|^2 \right]. \quad (15)$$

Para nuestro caso, en el que tenemos una iluminación de forma gaussiana con simetría circular antes de la lente, el campo incidente sobre la lente se puede escribir como

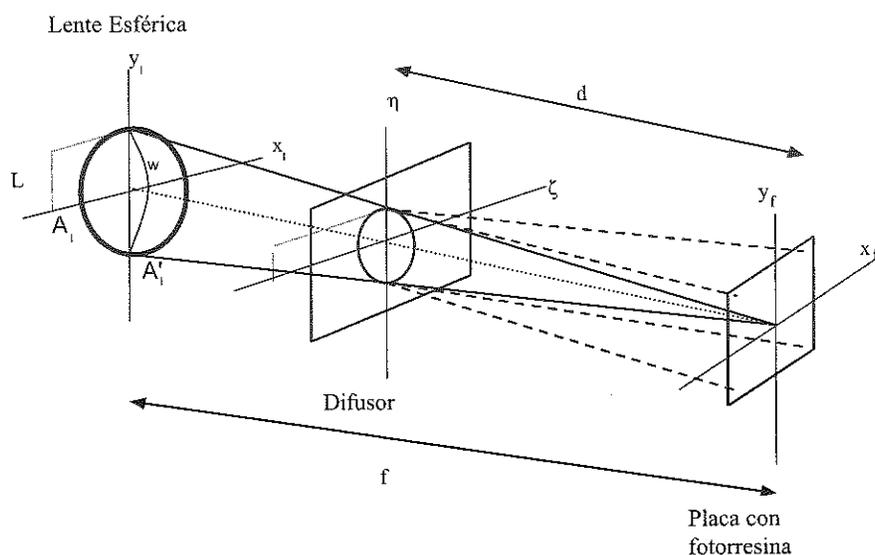


Figura 3: Diagrama esquemático del arreglo óptico para el caso en que iluminamos con un haz gaussiano.

$$A_l(x_l, y_l) = e^{-(x_l^2 + y_l^2)/w^2}, \quad (16)$$

donde w es el radio de la sección transversal del haz gaussiano para el cual la amplitud cae al valor $1/e$ de su valor máximo, y donde ignoramos algunos factores multiplicativos innecesarios para este análisis.

Al pasar por la lente, se tiene (ignorando de nuevo algunos factores multiplicativos) [Goodman, 1968](pág. 83)

$$A'_l(x_l, y_l) = A_l(x_l, y_l) e^{-i \frac{k}{2f}(x_l^2 + y_l^2)} P(x_l, y_l), \quad (17)$$

donde f es la longitud focal de la lente y $P(x_l, y_l)$ su función de pupila. Para nuestro caso;

$$P(x_l, y_l) = \begin{cases} 1 & x_l^2 + y_l^2 \leq L^2 \\ 0 & x_l^2 + y_l^2 > L^2 \end{cases} \quad (18)$$

donde L es el radio de la abertura de la lente.

Si L es suficientemente mayor que w , podemos ignorar la abertura finita de la lente y definir una función de pupila efectiva

$$P_l(x_l, y_l) = e^{-\frac{(x_l^2 + y_l^2)}{w^2}}. \quad (19)$$

Con esta aproximación, el haz incidente sobre el difusor puede expresarse como [Goodman, 1968] (pág. 88)

$$A_0(\zeta, \eta) = \frac{f}{d} P_d(\zeta, \eta) e^{-i \frac{k}{2d}(\zeta^2 + \eta^2)}, \quad (20)$$

con la función de pupila $P_d(\zeta, \eta) = P_l(\zeta \frac{f}{d}, \eta \frac{f}{d})$, y donde d es la distancia del difusor a

la placa de fotorresina, por lo que

$$\begin{aligned} |A_0(\zeta, \eta)|^2 &= A_0(\zeta, \eta)A_0^*(\zeta, \eta) \\ &= \frac{f^2}{d^2} \exp \left[-2 \frac{(\zeta^2 + \eta^2)}{W^2} \right], \end{aligned} \quad (21)$$

donde $W = dw/f$.

Cambiando a coordenadas polares en la ecuación (15), podemos evaluar la integral resultante [Fogiel, 1997]

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-2(\zeta^2 + \eta^2)/W^2} \exp \left[-\frac{i2\pi}{\lambda d} (\zeta(x_{f1} - x_{f2}) + \eta(y_{f1} - y_{f2})) \right] d\zeta d\eta \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-2\rho^2/W^2} J_0 \left(\frac{k}{d} \rho r \right) \rho d\rho \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2 \frac{2}{W^2}} \exp \left(-\frac{(\frac{kr}{d})^2}{4 \left(\frac{2}{W^2} \right)} \right) \right] \\ &= \frac{\pi W^2}{2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi W r}{\lambda d} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (22)$$

donde $r = \sqrt{(x_{f1} - x_{f2})^2 + (y_{f1} - y_{f2})^2}$ y $\rho = \sqrt{\zeta^2 + \eta^2}$.

El valor de la otra integral que aparece en la ecuación (15) se obtiene poniendo $(x_{f1} - x_{f2}) = (y_{f1} - y_{f2}) = 0$ y $r = 0$ en la ecuación (22), con lo que el módulo cuadrado del factor complejo de coherencia toma la forma

$$|\mu_a|^2 = e^{-\left(\frac{\pi W r}{\lambda d}\right)^2}. \quad (23)$$

El tamaño promedio del speckle se puede considerar como el valor de r para el cual la

exponencial negativa cae a $1/e$ de su valor máximo; es decir cuando

$$\left(\frac{\pi W r_0}{\lambda d}\right)^2 = 1; \quad (24)$$

entonces el tamaño del speckle es

$$r_0 = \frac{\lambda d}{\pi W}, \quad (25)$$

que es a lo que llamamos longitud de correlación de las superficies y denotaremos más adelante por a .

Ahora consideramos la suma incoherente de patrones de speckle no correlacionados con las mismas propiedades estadísticas. En este caso, para \mathcal{M} patrones de speckle independientes, la función de densidad de probabilidad (f_{dp}) asociada a la suma estará dada por [Goodman, 1975](pág. 53)

$$p(I) = \begin{cases} \left(\frac{\sigma_I}{\sqrt{\mathcal{M}}}\right)^{-\mathcal{M}} \frac{I^{\mathcal{M}-1}}{\Gamma(\mathcal{M})} \exp\left(-\frac{I\sqrt{\mathcal{M}}}{\sigma_I}\right) & I \geq 0 \\ 0 & I < 0 \end{cases} \quad (26)$$

donde $\Gamma(\mathcal{M})$ es la función gamma, y la varianza está dada por

$$\sigma_I^2 = \frac{\langle I \rangle^2}{\mathcal{M}}. \quad (27)$$

La intensidad resultante obedece una distribución gamma de orden \mathcal{M} . Para visu-

alizer la familia de curvas dadas por la ecuación (26), presentamos en la figura 4 las densidades de probabilidad resultantes para diferentes valores de \mathcal{M} . Es posible apreciar que para el valor $\mathcal{M} = 1$ la función de densidad de probabilidad se reduce a una exponencial negativa, y que conforme \mathcal{M} crece, la función de densidad de probabilidad se aproxima a una curva gaussiana; con esto estamos generando superficies cuyas variaciones de altura constituyen aproximadamente un proceso aleatorio gaussiano, que es lo que deseamos en este trabajo.

Es conveniente hacer notar que, de acuerdo a la ecuación (27), un incremento en el número de patrones de speckle implica una disminución en la varianza de la intensidad resultante.

Para la fabricación de las superficies se utilizan alrededor de 10 exposiciones. De esta manera es posible obtener una superficie rugosa con una distribución de alturas aproximadamente gaussiana y una función de autocorrelación también gaussiana.

La teoría presentada anteriormente ayuda a entender el por qué se fabrican las muestras que se utilizan en este trabajo de esta forma, y el por qué decimos que los perfiles de dichas superficies constituyen aproximadamente procesos aleatorios gaussianos.

II.3.1. Superficies bidimensionales (2-D)

Decimos que una superficie es rugosa bidimensionalmente si presenta variaciones de altura según nos movemos en cualquier dirección en el plano promedio de la superficie.

El arreglo óptico básico que utilizamos para la exposición de los substratos (con fotoretina) a los distintos patrones de granulado láser o speckle, se muestra esquemáti-

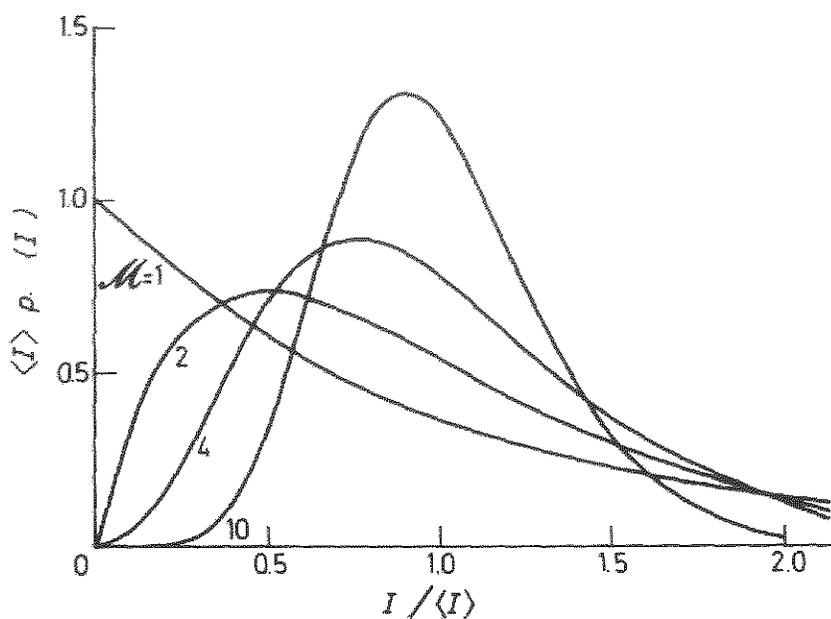


Figura 4: Función de densidad de probabilidad $p(I)$ para diferentes valores del parámetro M .

camente en la figura 2, donde un haz gaussiano proveniente de un láser de HeCd ($\lambda = 0,442\mu m$, modelo 4240 NB de Liconix) es enfocado y limpiado por medio de un filtro espacial (esto se hace con la finalidad de obtener un haz gaussiano libre de ruido óptico). El haz expandido se hace converger sobre el plano en el que se colocó la placa con la película de fotorresina. Para esto se utilizó un sistema óptico con una o más lentes. Se colocó un difusor fuerte (esto es, que el difusor sea tan rugoso que no presente componente coherente) entre la última lente y el substrato. La zona iluminada en el difusor determina el tamaño del speckle que se forma en el plano paralelo a la superficie y la forma del haz de iluminación determina la función de autocorrelación

del speckle. Este arreglo genera un patrón de speckle isotrópico; es decir, uno en el que las propiedades estadísticas son las mismas a lo largo de cualquier dirección en el plano de observación.

Lo anteriormente dicho también nos generó un difusor con función de distribución de probabilidad de alturas del tipo exponencial negativa y función de autocorrelación gaussiana. La superposición de N patrones no correlacionados da como resultado un difusor con estadísticas que se aproximan a las estadísticas gaussianas cuando N crece, como se puede observar en la figura 4 de la sección anterior. En nuestro experimento, el número de patrones de speckle no correlacionados superpuestos fue entre 8 y 10.

II.3.2. Superficies unidimensionales (1-D)

Entenderemos por una superficie unidimensional aquella que presenta variaciones de altura según nos movemos en una dirección en el plano promedio de la superficie (eje x), mientras que al movernos en la dirección perpendicular (eje y) su altura permanece constante.

El arreglo óptico que utilizamos para fabricar este tipo de superficies se muestra esquemáticamente en la figura 5. La lente cilíndrica enfoca el haz gaussiano sobre una línea angosta en el plano donde se coloca un difusor. Sobre el plano de la fotorresina se produce un patrón cuya longitud de correlación es mucho mayor en la dirección x_f que en la y_f . Se coloca una mascarilla rectangular de un largo similar al diámetro del substrato y un ancho de aproximadamente 10 motas a lo largo del eje x_f , y centrada con respecto al eje óptico del sistema. Justo en la parte posterior de la mascarilla

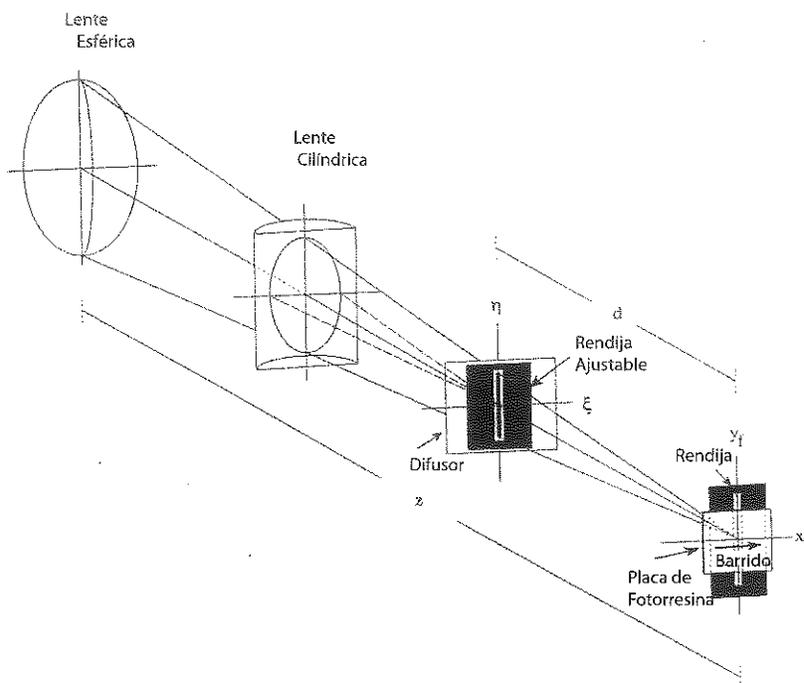


Figura 5: Diagrama esquemático del arreglo óptico para la fabricación de superficies unidimensionales.

se coloca el sustrato, en una montura que se va desplazando en la dirección de x_f . La montura forma parte de un microposicionador remoto (Klinger Scientific, modelo CC1.2) controlado por una computadora personal. Usamos un microposicionador con una resolución de $1\mu\text{m}$. Para generar difusores con estadística gaussiana, se desplaza la longitud total del sustrato con la fotorresina por medio del microposicionador, de tal manera que el efecto final es el de superponer aproximadamente 10 patrones de speckle independientes sobre cada punto de la película.

II.4. Caracterización de las muestras utilizadas

Una vez fabricadas las muestras, el siguiente paso fue conocer las propiedades estadísticas asociadas al perfil superficial. Existen distintas técnicas que nos permiten estudiar el perfil superficial [Bennett y Mattsson, 1989]. Sin embargo, la que ha probado ser mejor para este tipo de superficies es la perfilometría mecánica, en la que se utiliza una aguja que se desliza sobre la superficie, de manera que sus movimientos verticales sean un reflejo del perfil superficial.

Las características de la respuesta de los perfilómetros mecánicos han sido estudiados desde hace tiempo por varios autores, como es el caso de [Al-Jumaily et al., 1987] y [Church y Kong, 1990]. Se sabe que la presencia de frecuencias espaciales altas (detalle lateral menor que la punta de la aguja) introduce efectos no lineales que complican las mediciones [O'Donnell, 1993]. El problema principal que se encuentra con esta técnica está en el hecho de que la aguja no es un objeto puntual, sino cónico y de dimensión finita; por lo tanto, se introducen efectos que deterioran la fidelidad de los perfiles que se miden [Ruiz Cortés et al., 1991], [O'Donnell, 1993].

En estudios previos, se ha considerado la aguja como una esfera; éste puede ser un modelo adecuado para superficies ligeramente rugosas (δ del orden de cientos de Angstroms), pero su validez para superficies con mayor rugosidad, o sea, con pendientes tipo escalón puede cuestionarse. Un estudio detallado del problema lo podemos encontrar en [Ruiz Cortés et al., 1991], donde se utiliza el mismo perfilómetro que utilizamos en este trabajo.

Las superficies que empleamos en este trabajo fueron caracterizadas por métodos mecánicos. Como un ejemplo típico, tomamos la caracterización de una superficie bidimensional metalizada con oro, la cual se midió con un perfilómetro mecánico Dektak³St, equipado con una punta con un diámetro menor a una micra.

Para la muestra que se presenta en la figura 6 se realizaron quince mediciones en diferentes posiciones de ésta, haciendo barridos de 1000 micras cada uno, con un peso de contacto en la aguja de 1mg; la traza tiene un total de 4000 puntos de muestreo. Las propiedades estadísticas del perfil de las superficies se calcularon a partir de 15 perfiles estimados para cada muestra. Los resultados que se obtuvieron al procesar los datos se presentan en la figura 6. Ahí se muestran la función de autocorrelación estimada y el histograma de alturas obtenidos para la muestra nombrada 0061. También se muestra una función gaussiana con un ancho apropiado para el valor $1/e$, a manera de comparación. Se puede ver que las propiedades estadísticas estimadas son consistentes con la suposición de que el perfil constituye un proceso aleatorio gaussiano.

Se fabricaron muchas muestras con distintas propiedades estadísticas, todas éstas gaussianas; es decir, con histogramas de alturas y funciones de correlación aproximadamente gaussianas. Se hizo un análisis con perfilometría de éstas y se escogieron tres muestras unidimensionales y cinco muestras bidimensionales. Sus parámetros estadísticos se presentan en las tablas I y II. Cada una de las muestras presentadas aquí son parte de un grupo seleccionado de muestras clasificado por medio de sus longitudes de correlación.

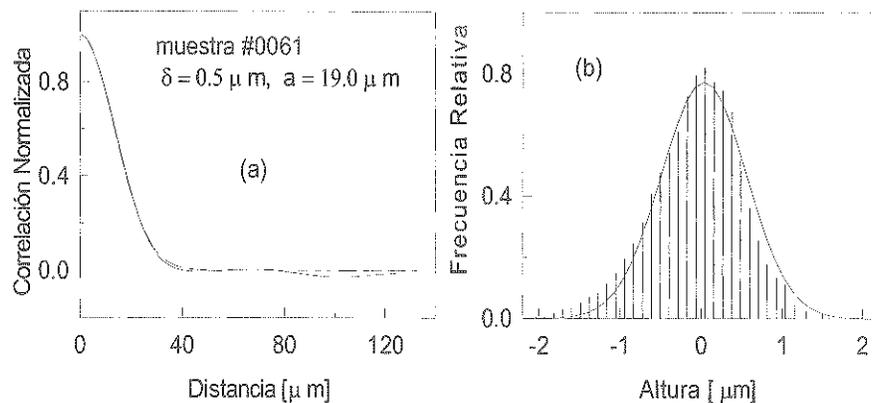


Figura 6: Estadísticas de la muestra (0061) estimadas a partir de los datos del perfilómetro. (a) Función de correlación de alturas. La línea continua corresponde a la correlación estimada, y la línea cortada a una función de correlación gaussiana con longitud de correlación $a = 19\mu\text{m}$. (b) La función de densidad de probabilidad de alturas. Las densidades estimadas se muestran como histogramas, y la línea continua corresponde a una función de densidad gaussiana con $\delta = 0,5\mu\text{m}$.

Cuadro I: Parámetros estadísticos de las muestras unidimensionales

Muestra	$\delta(\mu\text{m})$	$a(\mu\text{m})$
A	$0,38 \pm 0,01$	$2,8 \pm 0,2$
D	$0,75 \pm 0,04$	$6,8 \pm 0,7$
F	$0,41 \pm 0,01$	$15,0 \pm 2,2$

Cuadro II: Parámetros estadísticos de las muestras bidimensionales

Muestra	$\delta(\mu\text{m})$	$a(\mu\text{m})$
5122	$0,42 \pm 0,01$	$2,1 \pm 0,2$
8053	$0,75 \pm 0,04$	$3,0 \pm 0,2$
9032	$0,75 \pm 0,04$	$7,5 \pm 0,7$
7047	$1,60 \pm 0,05$	$9,5 \pm 1,3$
0061	$0,50 \pm 0,01$	$19,0 \pm 1,7$

II.5. Equipo utilizado para las mediciones del esparcimiento

Las superficies se pueden dividir en rugosasz "suaves", obviamente desde algún punto arbitrario de referencia. Sin embargo, esto ilustra un punto importante: que la

rugosidad de cualquier superficie no es una propiedad intrínseca de la superficie, sino que depende de las propiedades de la onda a ser esparcida. La frecuencia de la luz y el ángulo de incidencia de la onda determinan qué tan rugosa parece cualquier superficie; esto es, la rugosidad efectiva. Una superficie parece menos rugosa si se aumenta la longitud de onda de iluminación o si el ángulo de incidencia se vuelve rasante.

Entonces, dependiendo del tipo de radiación que se esparce por una superficie, ésta puede catalogarse como suave o rugosa. Por ejemplo, una superficie que es rugosa para luz visible (con una longitud de onda de unos cientos de nanómetros), puede parecer como suave para ondas ultrasónicas (de una longitud de onda típica de unos cuantos milímetros).

El papel del ángulo de incidencia se ilustra claramente con el fenómeno del resplandor o espejismo de la carretera; la reflexión tipo espejo (especular) ocurre cuando la fuente o el objeto está en el horizonte. En esta situación, la superficie esparcidora sería suave y tendría una reflexión muy fuerte en la dirección especular. Sin embargo, la misma superficie no mostraría este comportamiento, vista, por ejemplo, desde lo alto; la superficie parecería más rugosa en esta situación.

Los instrumentos que se utilizan para la medición de la luz esparcida por una superficie rugosa son conocidos como esparcímetros o escaterómetros. A continuación se describe el instrumento utilizado en este trabajo de tesis.

II.5.1. Esparcímetro

Las mediciones experimentales de la luz esparcida se llevaron a cabo con un esparcímetro, que consta de un sistema controlador de posición, un sistema de iluminación, y un sistema de detección y toma de datos con amarre de fase. Todo este sistema se controló por medio de una computadora personal tipo PC-386.

El sistema de control de posición (Aerotech, modelo 14) opera con dos motores a pasos. Con uno de éstos (Aerotech, modelo 45SMW) se selecciona el ángulo de incidencia sobre la muestra y con el otro (Aerotech, modelo 310SMC3-E500AS), se lleva a cabo el movimiento angular del brazo que soporta al sistema de detección.

Para el sistema de iluminación se contó con un láser de CO (Synrad, modelo 048-4-115W-CO) con longitud de onda de emisión de $\lambda = 5,5\mu m$, y un láser de CO_2 (Synrad, modelo E48I-4-115W) con longitud de onda de emisión de $\lambda = 10,6\mu m$. Para el sistema de detección usamos un detector de $HgCdTe$ con dewar y preamplificador integrado (Cincinnati Electronics, modelo MDD-40E0-S1) sensible en un intervalo de longitudes de onda que comprende desde $3,0\mu m$ hasta $13,7\mu m$, así como un detector de InSb con dewar y preamplificador integrado (Cincinnati Electronics, modelo SDD-20E1-S1-05M) para el intervalo de 1 a $5.56\mu m$. En el sistema de detección también se utilizó un amplificador de amarre de fase (amplificador lock-in) tipo tarjeta PC (Ithaco, modelo 3981), que nos permitió discriminar la señal que proviene de la fuente de interés de señales no moduladas temporalmente en sincronía con la referencia (detección lock-in). La modulación de la fuente se introduce por medio de un cortador de haz (Ithaco,

modelo 230).

En este trabajo de tesis se presenta, como se había mencionado con anterioridad, un estudio experimental de las dos componentes de la luz esparcida por superficies rugosas aleatorias. En la toma de datos se utilizó el esparcímetro que se describe a continuación.

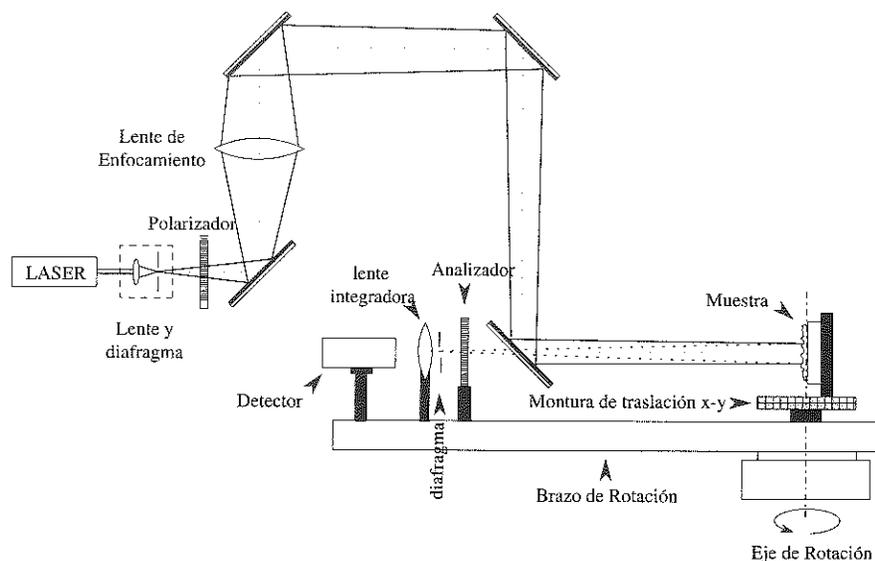


Figura 7: Diagrama esquemático del scaterómetro utilizado en las mediciones.

El arreglo experimental que se utilizó para la medición, tanto de la componente especular como de la difusa, se muestra en la figura 7. En este caso, se tiene una configuración de haz convergente, ya que la luz que llegara a una muestra perfectamente plana será enfocada sobre el detector, si se tiene un ángulo de incidencia adecuado. El haz que se tiene a la salida del láser es modulado temporalmente por el cortador de haz (en los experimentos se utilizaron dos longitudes de onda de iluminación, una de $5,5\mu m$ y la otra de $10,6\mu m$), seguido por un polarizador lineal. El haz se expande empleando

una lente convergente de $ZnSe$ de distancia focal corta (aproximadamente 3cm), y por medio de una lente convergente de distancia focal larga (aproximadamente 1m) se hace converger hacia la muestra, que refleja la luz hacia el sistema de detección.

La muestra se colocó sobre una montura rotatoria, cuyo eje de rotación coincide con el plano promedio del perfil de la muestra. Se utilizaron diafragmas para definir el área iluminada de la muestra, que tiene 5 cm. de diámetro aproximadamente.

La luz reflejada especularmente por la muestra se enfoca en la abertura del sistema de detección, y con una lente convergente de $ZnSe$ de distancia focal corta (aproximadamente 2cm) se envía hacia el detector ($HgCdTe$ o $InSb$, según sea el caso), enfriado con nitrógeno líquido. El sistema de detección tiene un ángulo de colección de 2° y está montado en un brazo de 1m de largo cuyo centro de rotación está en la muestra. Con esto se mide la componente coherente; para la componente incoherente se coloca una placa que obstruye la componente coherente con el fin de no saturar el detector, y las mediciones se realizan de -90° a 90° .

II.5.2. Obtención de resultados experimentales por medio del esparcímetro. Componente coherente e incoherente

La señal electrónica que se recibe del detector es proporcional a la potencia de la radiación que llega a éste. La reflectividad, que es la cantidad que nos interesa medir, se estima a partir de las mediciones de la potencia que se tiene en la componente coherente, normalizada por la potencia incidente.

Para obtener la reflectividad experimental, se mide la dependencia angular de la señal de la luz esparcida dentro de un intervalo cercano a $\theta_s = \theta_0$. Esta misma medición se hace para el haz de luz enfocado directamente hacia el detector, sin pasar por la muestra (ver figura 8). La integral de la señal detectada sobre un intervalo angular es proporcional a la potencia esparcida sobre este intervalo, y ésta se normaliza por la potencia incidente. El tipo de curvas que se obtiene se muestran en la figura (9). La curva de la figura (9a), que corresponde a la detección del haz directo sobre el sistema de detección, tiene una forma casi rectangular de aproximadamente 1° de ancho y centrada en $\theta_s = 0$, y la de la figura (9b), que corresponde a la luz esparcida por la muestra, presenta una forma rectangular que corresponde a la componente coherente y un pequeño fondo, que corresponde a la componente incoherente. Para determinar la reflectividad, la componente incoherente debe restarse de cada una de las mediciones. Calculamos entonces la reflectividad por medio de la siguiente expresión:

$$R_{p,s}(\theta_0) = \frac{\int [I_{sc}(\theta_0 | \theta_s, \phi_s) - I_{incoh}(\theta_0 | \theta_s, \phi_s)] d\Omega_s}{P_{inc}} \quad (28)$$

donde $I_{sc}(\theta_0 | \theta_s, \phi_s)$ e $I_{incoh}(\theta_0 | \theta_s, \phi_s)$ representan la intensidad (potencia por unidad de ángulo sólido) promedio total y la intensidad de la componente incoherente de la luz esparcida en la dirección de detección (θ_s, ϕ_s) , respectivamente, y $d\Omega_s$ es la diferencial de ángulo sólido.

El intervalo de integración en la ecuación (28) está dado por la abertura del sistema de detección (ver figura 8) y debe ser más ancho que la región que ocupa la componente

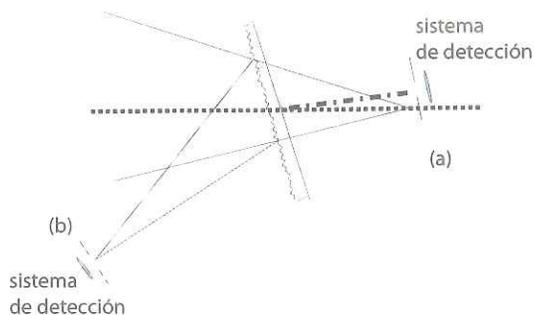


Figura 8: Ejemplo de obtención de mediciones con el esparcímeter. (a) Medición del haz incidente y (b) Medición de la luz reflejada (esparcida) por la muestra.

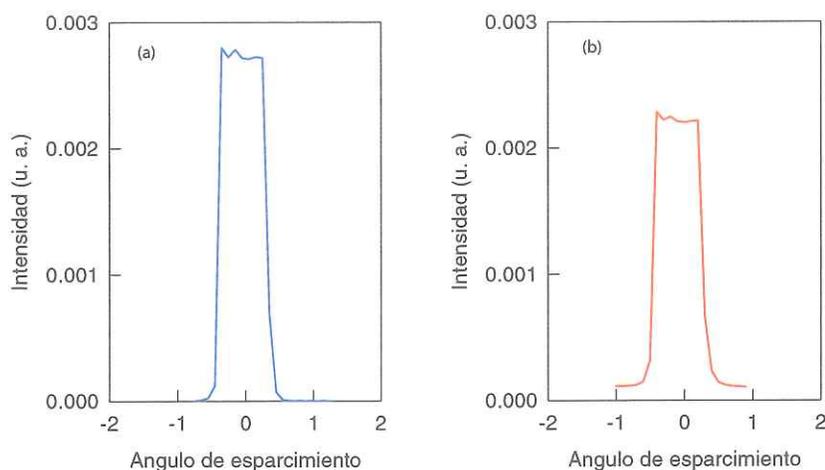


Figura 9: Ejemplo de obtención de mediciones con el esparcímeter. (a) medición del haz incidente y (b) medición de la luz reflejada (esparcida) por la muestra.

coherente, pero suficientemente angosto para que la componente incoherente pueda ser considerada constante, como se observa en la figura 9. Entonces, P_{inc} se obtiene calculando la integral de -1^0 a 1^0 de la intensidad incidente del láser; mientras que la intensidad esparcida coherentemente se calcula haciendo la integral de la luz esparcida total menos la luz esparcida incoherentemente.

Por otro lado, las mediciones de la parte incoherente de la luz esparcida por la

muestra se realizan con el mismo arreglo experimental que se muestra en la figura 7, pero en este caso se obstruye el paso de la componente especular con una placa pequeña; de esta manera es posible hacer mediciones de la componente difusa sin saturar el detector. Estas mediciones se realizan en el plano de incidencia ($\phi_s = 0$) para ángulos θ_0 que van de -90^0 a 90^0 con pasos de $0,2^0$. La intensidad normalizada I (coeficiente diferencial de reflexión) se obtiene de la siguiente expresión:

$$I = V(\theta, \phi) / V_{inc} \Delta\Omega, \quad (29)$$

donde $V(\theta, \phi)$ es la señal de voltaje obtenida a la salida del detector en presencia de la superficie rugosa, V_{inc} es la señal de voltaje correspondiente al haz que incide directamente sobre el detector, medido de la misma manera que en el caso de luz esparcida coherentemente, y $\Delta\Omega$ es el ángulo sólido que subtiende el sistema de detección.

Todos los resultados presentados se normalizaron de la forma descrita en esta sección.

Capítulo III

Esparcimiento de luz por superficies rugosas aleatorias : Teoría

El problema del esparcimiento de luz por superficies rugosas aleatorias se ha abordado teóricamente empleando diferentes aproximaciones. En este capítulo se define el problema físico bajo estudio y se introduce la notación a utilizar. Se presenta también una descripción detallada de los métodos empleados para determinar el campo esparcido, tanto coherente como incoherentemente, por superficies metálicas rugosas aleatorias que presentan estadísticas gaussianas.

El análisis se hace considerando el problema de esparcimiento de luz por superficies bidimensionales. El caso de esparcimiento de luz por superficies unidimensionales se obtiene como un caso particular del problema bidimensional.

III.1. Presentación del problema físico y de las ecuaciones de esparcimiento

El sistema físico considerado se muestra en la figura (10) y consiste de vacío en la región $x_3 > \zeta(\mathbf{x}_{\parallel})$ y un medio isotrópico homogéneo, caracterizado por una constante dieléctrica $\epsilon(\omega)$ dependiente de la frecuencia, en la región $x_3 < \zeta(\mathbf{x}_{\parallel})$.

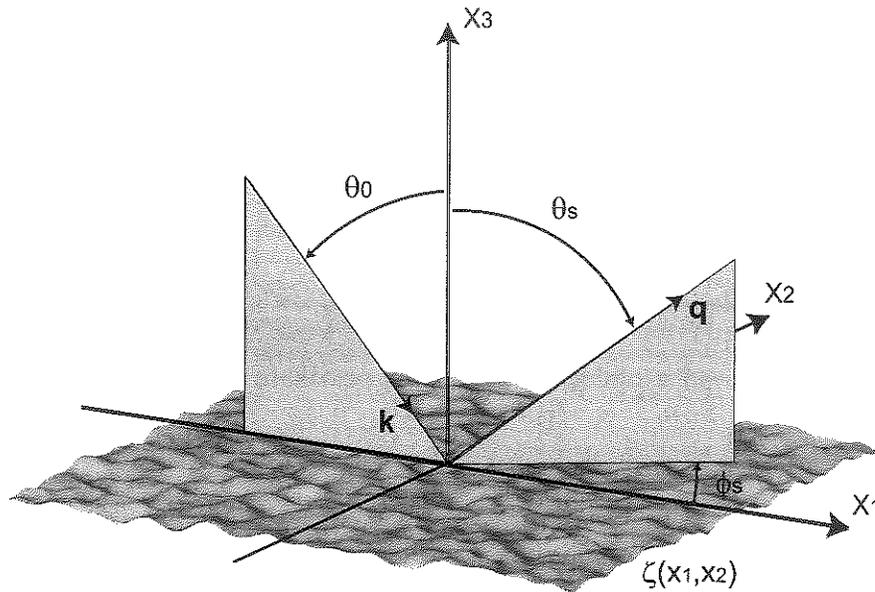


Figura 10: Diagrama esquemático de la geometría de esparcimiento.

Suponemos que la función que describe el perfil de la superficie $\zeta(\mathbf{x}_{\parallel})$ es una función univaluada del vector de posición $\mathbf{x}_{\parallel} = x_1\hat{\mathbf{x}}_1 + x_2\hat{\mathbf{x}}_2$, en el plano $x_3 = 0$, donde $\hat{\mathbf{x}}_1$ y $\hat{\mathbf{x}}_2$ son vectores unitarios a lo largo de las direcciones x_1 y x_2 , respectivamente.

Como en la mayoría de los trabajos teóricos sobre el tema, se supone que $\zeta(\mathbf{x}_{\parallel})$ constituye un proceso aleatorio gaussiano, definido por las siguientes propiedades:

$$\langle \zeta(\mathbf{x}_{\parallel}) \rangle = 0, \quad (30)$$

$$\langle \zeta(\mathbf{x}_{\parallel}) \zeta(\mathbf{x}'_{\parallel}) \rangle = \delta^2 W(|\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel}|), \quad (31)$$

donde

$$\langle \zeta^2(\mathbf{x}_{\parallel}) \rangle^{1/2} = \delta \quad (32)$$

es la desviación estándar de alturas y $W(|\mathbf{x}_{\parallel}|)$ es la función de autocorrelación.

Es también de gran utilidad introducir la representación integral de Fourier de la función del perfil de la superficie $\zeta(\mathbf{x}_{\parallel})$

$$\zeta(\mathbf{x}_{\parallel}) = \int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} \widehat{\zeta}(\mathbf{q}_{\parallel}) \exp(i\mathbf{q}_{\parallel} \cdot \mathbf{x}_{\parallel}), \quad (33)$$

donde $\mathbf{q}_{\parallel} = \widehat{\mathbf{x}}_1 q_1 + \widehat{\mathbf{x}}_2 q_2$ es un vector de onda bidimensional y el coeficiente de Fourier $\widehat{\zeta}(\mathbf{q}_{\parallel})$ constituye un proceso aleatorio gaussiano complejo y hermitiano de media cero definido por

$$\langle \widehat{\zeta}(\mathbf{q}_{\parallel}) \rangle = 0, \quad (34)$$

$$\langle \widehat{\zeta}(\mathbf{q}_{\parallel}) \widehat{\zeta}(\mathbf{q}'_{\parallel}) \rangle = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\parallel} + \mathbf{q}'_{\parallel}) \delta^2 g(|\mathbf{q}_{\parallel}|), \quad (35)$$

donde $g(|\mathbf{q}_{\parallel}|)$ es el espectro de potencia de la superficie rugosa, que está relacionado con la función de autocorrelación de alturas $W(|\mathbf{x}_{\parallel}|)$ por

$$g(|\mathbf{q}_{\parallel}|) = \int d^2 x_{\parallel} W(|\mathbf{x}_{\parallel}|) \exp(-i\mathbf{q}_{\parallel} \cdot \mathbf{x}_{\parallel}). \quad (36)$$

En todas las integrales del presente capítulo, si los límites de integración no apare-

cen, éstos corresponden a $-\infty$ e ∞ .

Digamos que la superficie se ilumina a partir de la zona del vacío, entonces el campo eléctrico en el vacío, es decir en la región $x_3 > \zeta(\mathbf{x}_{\parallel})_{\text{máx}}$, es la suma del campo incidente y el campo esparcido,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{x}) + \mathbf{E}^{(s)}(\mathbf{x}), \quad (37)$$

donde $\mathbf{x} = x_1\hat{\mathbf{x}}_1 + x_2\hat{\mathbf{x}}_2 + x_3\hat{\mathbf{x}}_3$ es el vector de posición. Consideremos como campo incidente sobre la superficie a la onda plana

$$\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{x}}, \quad (38)$$

donde el vector de onda $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{k}_{\parallel} - \alpha_0(k_{\parallel})\hat{\mathbf{x}}_3$, y $\mathbf{k}_{\parallel} = k_1\hat{\mathbf{x}}_1 + k_2\hat{\mathbf{x}}_2$ es la componente del vector de onda paralela al plano promedio de la superficie y $\alpha_0(k_{\parallel})$ es su componente normal. Se tiene que $\alpha_0(k_{\parallel}) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2}$, $\Re\alpha_0(k_{\parallel}) > 0$, $\Im\alpha_0(k_{\parallel}) > 0$, donde \Re representa la parte real e \Im la parte imaginaria.

Escribimos el campo esparcido por la superficie de la forma

$$\mathbf{E}^{(s)}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^2q_{\parallel}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{Q}^> \cdot \mathbf{x}} \mathbf{E}^>(\mathbf{q}_{\parallel}), \quad (39)$$

donde el vector de onda de la luz esparcida está dado por $\mathbf{Q}^> = \mathbf{q}_{\parallel} + \alpha_0(q_{\parallel})\hat{\mathbf{x}}_3$, $\mathbf{q}_{\parallel} = q_1\hat{\mathbf{x}}_1 + q_2\hat{\mathbf{x}}_2$ y $\alpha_0(q_{\parallel}) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - q_{\parallel}^2}$, $\Re\alpha_0(q_{\parallel}) > 0$, $\Im\alpha_0(q_{\parallel}) > 0$.

Similarmente, el campo transmitido tiene la forma

$$\mathbf{E}^{(tr)}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{Q}^< \cdot \mathbf{x}} \mathbf{E}^<(\mathbf{q}_{\parallel}), \quad (40)$$

donde el vector de onda de luz transmitido es $\mathbf{Q}^< = \mathbf{q}_{\parallel} - \alpha(q_{\parallel})\hat{\mathbf{x}}_3$, con $\alpha(q_{\parallel}) = \sqrt{\epsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2} - q_{\parallel}^2}$, $\Re\alpha(q_{\parallel}) > 0$, $\Im\alpha(q_{\parallel}) > 0$.

Las expresiones para los campos (39) y (40), son, hablando estrictamente, válidas solamente fuera de la región ocupada por la superficie rugosa, es decir para $x_3 > \zeta(\mathbf{x}_{\parallel})_{\text{máx}}$ y $x_3 < \zeta(\mathbf{x}_{\parallel})_{\text{mín}}$. Sin embargo, para determinar las amplitudes $\mathbf{E}^>(\mathbf{q}_{\parallel})$ y $\mathbf{E}^<(\mathbf{q}_{\parallel})$, normalmente se procede a evaluarlas en la frontera, para así aplicar la continuidad de las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético y de la componente normal del vector de desplazamiento a través de la interfaz $x_3 = \zeta(\mathbf{x}_{\parallel})$. Este procedimiento se conoce como la hipótesis de Rayleigh [Rayleigh, 1896], [Rayleigh, 1907], [Petit y Cadilhac, 1966], y aunque su validez ha sido cuestionada, se sabe que lleva a resultados correctos cuando las pendientes de la superficie rugosa son pequeñas, es decir,

$$|\zeta'(\mathbf{x}_{\parallel})|_{\text{max}} = \left| \frac{d\zeta(\mathbf{x}_{\parallel})}{d\mathbf{x}_{\parallel}} \right|_{\text{max}} \ll 1. \quad (41)$$

La continuidad de las componentes tangenciales del campo eléctrico a través de la superficie $x_3 = \zeta(\mathbf{x}_{\parallel})$ impone la condición:

$$e^{i(\mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{x}_c)} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 + \int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{Q}^> \cdot \mathbf{x}_c)} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^>(\mathbf{q}_{\parallel}) = \int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{Q}^< \cdot \mathbf{x}_c)} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^<(\mathbf{q}_{\parallel}), \quad (42)$$

donde $\mathbf{x}_\zeta = \mathbf{x}_\parallel + \zeta(\mathbf{x}_\parallel)\hat{\mathbf{x}}_3$, y $\mathbf{n} = -\nabla_\perp\zeta(\mathbf{x}_\parallel) + \hat{\mathbf{x}}_3$ con $\nabla_\perp = \hat{\mathbf{x}}_1\partial/\partial x_1 + \hat{\mathbf{x}}_2\partial/\partial x_2$ y \mathbf{n} es un vector normal a la superficie. Por otro lado, la continuidad de las componentes tangenciales del campo magnético a través de la superficie $x_3 = \zeta(\mathbf{x}_\parallel)$ (sabiendo que $\mathbf{H} = (c/i\omega)\nabla \times \mathbf{E}$) implica que:

$$\begin{aligned} & e^{i(\mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{x}_\zeta)} \mathbf{n} \times \mathbf{Q}_0 \times \mathbf{E}_0 + \int \frac{d^2 q_\parallel}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{Q}^> \cdot \mathbf{x}_\zeta)} \mathbf{n} \times \mathbf{Q}^> \times \mathbf{E}^>(\mathbf{q}_\parallel) \\ &= \int \frac{d^2 q_\parallel}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{Q}^< \cdot \mathbf{x}_\zeta)} \mathbf{n} \times \mathbf{Q}^< \times \mathbf{E}^<(\mathbf{q}_\parallel). \end{aligned} \quad (43)$$

Además, de la continuidad de la componente normal del vector de desplazamiento a través de la superficie $x_3 = \zeta(\mathbf{x}_\parallel)$ ($\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$), se tiene que:

$$e^{i(\mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{x}_\zeta)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_0 + \int \frac{d^2 q_\parallel}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{Q}^> \cdot \mathbf{x}_\zeta)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^>(\mathbf{q}_\parallel) = \epsilon(\omega) \int \frac{d^2 q_\parallel}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{Q}^< \cdot \mathbf{x}_\zeta)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^<(\mathbf{q}_\parallel). \quad (44)$$

Una vez planteado el problema y con las condiciones impuestas por las ecuaciones de continuidad en la frontera, las ecuaciones (42), (43) y (44) forman un sistema de ecuaciones con tres incógnitas, al cual se le buscan soluciones analíticas aproximadas. Como primer paso se reduce el problema, derivando las ecuaciones reducidas de Rayleigh, que constituyen el punto de partida de las teorías perturbativas. A continuación se describe el procedimiento para llegar a éstas.

III.2. Las ecuaciones reducidas de Rayleigh

Para abordar el problema es conveniente reducir el número de incógnitas. Esto lo podemos hacer multiplicando la ecuación (42) vectorialmente por $e^{-i(\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_\zeta)} \mathbf{P}$, la ecuación (43) por $e^{-i(\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_\zeta)}$, y la ecuación (44) escalarmente por $\epsilon^{-1}(\omega) e^{-i(\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_\zeta)} \mathbf{P}$, donde

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_\parallel + \alpha(p_\parallel) \hat{\mathbf{x}}_3, \quad (45)$$

y \mathbf{x}_ζ es valor de \mathbf{x} justo en la frontera entre el medio 1 (aire) y el medio 2 (la superficie). Las ecuaciones obtenidas se integran sobre \mathbf{x}_\parallel . Sumando las ecuaciones resultantes de las ecuaciones (42) y (43) y sustrayendo la ecuación obtenida de la ecuación (44) se obtiene la ecuación:

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{P} \times \mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_0 \times \mathbf{E}_0 - \frac{1}{\epsilon(\omega)} \mathbf{P} \cdot (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{E}_0) \right] \\ & \quad I(\alpha(p_\parallel) + \alpha_0(k_\parallel)) |\mathbf{p}_\parallel - \mathbf{k}_\parallel| + \\ & \int \frac{d^2 q_\parallel}{(2\pi)^2} \left[\mathbf{P} \times \mathbf{n}^> \times \mathbf{E}^> + \mathbf{n}^> \times \mathbf{Q}^> \times \mathbf{E}^> - \frac{1}{\epsilon(\omega)} \mathbf{P} \cdot (\mathbf{n}^> \cdot \mathbf{E}^>) \right] \\ & \quad I(\alpha(p_\parallel) - \alpha_0(q_\parallel)) |\mathbf{p}_\parallel - \mathbf{q}_\parallel| \\ = & \int \frac{d^2 q_\parallel}{(2\pi)^2} [\mathbf{P} \times \mathbf{n}^< \times \mathbf{E}^< + \mathbf{n}^< \times \mathbf{Q}^< \times \mathbf{E}^< - \mathbf{P} \cdot (\mathbf{n}^< \cdot \mathbf{E}^<)] \\ & \quad I(\alpha(p_\parallel) + \alpha(q_\parallel)) |\mathbf{p}_\parallel - \mathbf{q}_\parallel|, \end{aligned} \quad (46)$$

donde

$$\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{p}_\parallel - \mathbf{k}_\parallel}{\alpha(p_\parallel) + \alpha_0(k_\parallel)} + \hat{\mathbf{x}}_3, \quad (47)$$

$$\mathbf{n}^> = \frac{\mathbf{P}_{\parallel} - \mathbf{Q}_{\parallel}}{\alpha(p_{\parallel}) - \alpha_0(q_{\parallel})} + \hat{\mathbf{x}}_3, \quad (48)$$

$$\mathbf{n}^< = \frac{\mathbf{P}_{\parallel} - \mathbf{Q}_{\parallel}}{\alpha(p_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel})} + \hat{\mathbf{x}}_3, \quad (49)$$

e

$$I(\gamma|\mathbf{P}_{\parallel} - \mathbf{Q}_{\parallel}) = \int dx_{\parallel} e^{-i(\mathbf{P}_{\parallel} - \mathbf{Q}_{\parallel}) \cdot \mathbf{x}_{\parallel}} e^{-i\gamma\zeta(x_{\parallel})}. \quad (50)$$

Desarrollando la parte derecha de la ecuación (46) se tiene que

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \times \mathbf{n}^< \times \mathbf{E}^< + \mathbf{n}^< \times \mathbf{Q}^< \times \mathbf{E}^< - \mathbf{P} \cdot (\mathbf{n}^< \cdot \mathbf{E}^<) \\ = & \mathbf{n}^< (\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}^<) - \mathbf{E}^< (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}^<) + \mathbf{Q}^< (\mathbf{n}^< \cdot \mathbf{E}^<) - \mathbf{E}^< (\mathbf{Q}^< \cdot \mathbf{n}^<) - \mathbf{P} (\mathbf{n}^< \cdot \mathbf{E}^<) \\ = & \mathbf{n}^< (\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}^<) - (\mathbf{P} - \mathbf{Q}^<) (\mathbf{n}^< \cdot \mathbf{E}^<) - \mathbf{E}^< ((\mathbf{P} + \mathbf{Q}^<) \cdot \mathbf{n}^<) \\ = & \mathbf{n}^< ((\mathbf{P} - \mathbf{Q}^<) \cdot \mathbf{E}^<) + \mathbf{n}^< (\mathbf{Q}^< \cdot \mathbf{E}^<) - (\mathbf{P} - \mathbf{Q}^<) (\mathbf{n}^< \cdot \mathbf{E}^<) - \mathbf{E}^< ((\mathbf{P} + \mathbf{Q}^<) \cdot \mathbf{n}^<). \end{aligned} \quad (51)$$

Ahora,

$$(\mathbf{Q}^< \cdot \mathbf{E}^<) \equiv 0, \quad (52)$$

puesto que de las ecuaciones de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$. Además, se tiene que

$$\mathbf{P} - \mathbf{Q}^< = \mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel} + (\alpha(p_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel})) \hat{\mathbf{x}}_3 = (\alpha(p_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel})) \mathbf{n}^<, \quad (53)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} & \mathbf{n}^<((\mathbf{P} - \mathbf{Q}^<) \cdot \mathbf{E}^<) - (\mathbf{P} - \mathbf{Q}^<)(\mathbf{n}^< \cdot \mathbf{E}^<) \\ &= (\alpha(p_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel})) [\mathbf{n}^<(\mathbf{n}^< \cdot \mathbf{E}^<) - \mathbf{n}^<(\mathbf{n}^< \cdot \mathbf{E}^<)] \equiv 0. \end{aligned} \quad (54)$$

El último término de la ecuación (51) contiene el producto escalar $((\mathbf{P} + \mathbf{Q}^<) \cdot \mathbf{n}^<)$. Ya que

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q}^< = \mathbf{p}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} + (\alpha(p_{\parallel}) - \alpha(q_{\parallel}))\hat{\mathbf{x}}_3, \quad (55)$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} (\mathbf{P} + \mathbf{Q}^<) \cdot \mathbf{n}^< &= \frac{p_{\parallel}^2 - q_{\parallel}^2}{\alpha(p_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel})} + \alpha(p_{\parallel}) - \alpha(q_{\parallel}) \\ &= \frac{p_{\parallel}^2 - q_{\parallel}^2 + \epsilon(\omega)(\omega^2/c^2) - p_{\parallel}^2 - \epsilon(\omega)(\omega^2/c^2) + q_{\parallel}^2}{\alpha(p_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel})} \equiv 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Por lo tanto, la parte derecha de la ecuación (46) es cero.

Análogamente, si se hace un desarrollo de la parte izquierda de la ecuación (46) se obtendrá

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\epsilon(\omega)} [\mathbf{P}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0) - \mathbf{P}^2 \mathbf{E}_0] \frac{I(\alpha(p_{\parallel}) + \alpha_0(k_{\parallel})) |\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}|}{\alpha(p_{\parallel}) + \alpha_0(k_{\parallel})} \\ &+ \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\epsilon(\omega)} \int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} [\mathbf{P}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}^>) - \mathbf{P}^2 \mathbf{E}^>] \frac{I(\alpha(p_{\parallel}) - \alpha_0(q_{\parallel})) |\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}|}{\alpha(p_{\parallel}) - \alpha_0(q_{\parallel})}. \end{aligned} \quad (57)$$

Entonces se obtiene la ecuación matricial para el campo esparcido $\mathbf{E}^>$:

$$\int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} [\mathbf{P}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}^>) - \mathbf{P}^2 \mathbf{E}^>] \frac{I(\alpha(p_{\parallel}) - \alpha_0(q_{\parallel})) |\mathbf{P}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}|}{\alpha(p_{\parallel}) - \alpha_0(q_{\parallel})} \\ = -[\mathbf{P}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0) - \mathbf{P}^2 \mathbf{E}_0] \frac{I(\alpha(p_{\parallel}) + \alpha_0(k_{\parallel})) |\mathbf{P}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}|}{\alpha(p_{\parallel}) + \alpha_0(k_{\parallel})}. \quad (58)$$

El siguiente paso es escribir las expresiones para los campos dados por las ecuaciones (38), (39) y (40) en términos de las componentes p y s . Para esto, se realiza el siguiente procedimiento:

Primero se escribe la amplitud \mathbf{E}_0 del campo incidente como

$$\mathbf{E}_0 = \hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{k}_{\parallel}) B_p + \hat{\mathbf{e}}_s(\mathbf{k}_{\parallel}) B_s, \quad (59)$$

donde

$$\hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{k}_{\parallel}) = \frac{c}{\omega} \left[-\hat{\mathbf{k}}_{\parallel} \alpha_0(k_{\parallel}) - \hat{\mathbf{x}}_3 k_{\parallel} \right], \quad (60)$$

y

$$\hat{\mathbf{e}}_s(\mathbf{k}_{\parallel}) = \hat{\mathbf{x}}_3 \times \hat{\mathbf{k}}_{\parallel}. \quad (61)$$

Por otro lado, se escribe la amplitud del campo esparcido $\mathbf{E}^>(\mathbf{q}_{\parallel})$ como

$$\mathbf{E}^>(\mathbf{q}_{\parallel}) = \hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{q}_{\parallel}) A_p(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) + \hat{\mathbf{e}}_s(\mathbf{q}_{\parallel}) A_s(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}), \quad (62)$$

donde

$$\hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{q}_{\parallel}) = \frac{c}{\omega} \left[\hat{\mathbf{q}}_{\parallel} \alpha_0(q_{\parallel}) - \hat{\mathbf{x}}_3 q_{\parallel} \right], \quad (63)$$

y

$$\hat{\mathbf{e}}_s(\mathbf{q}_{\parallel}) = \hat{\mathbf{x}}_3 \times \hat{\mathbf{q}}_{\parallel}. \quad (64)$$

Para el campo transmitido tenemos que

$$\hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{p}_{\parallel}) = \frac{c}{\omega} [\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \alpha(p_{\parallel}) - \hat{\mathbf{x}}_3 p_{\parallel}], \quad (65)$$

y

$$\hat{\mathbf{e}}_s(\mathbf{p}_{\parallel}) = \hat{\mathbf{x}}_3 \times \hat{\mathbf{p}}_{\parallel}. \quad (66)$$

En cada caso se han definido vectores unitarios tangenciales al plano promedio de la superficie por medio de las relaciones

$$\hat{\mathbf{k}}_{\parallel} = \frac{\mathbf{k}_{\parallel}}{k_{\parallel}}, \quad \hat{\mathbf{q}}_{\parallel} = \frac{\mathbf{q}_{\parallel}}{q_{\parallel}}, \quad \hat{\mathbf{p}}_{\parallel} = \frac{\mathbf{p}_{\parallel}}{p_{\parallel}}. \quad (67)$$

Multiplicamos ahora la ecuación (58) por $\hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{p}_{\parallel})$ para obtener

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} [(\hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \mathbf{P})(\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}^>) - \mathbf{P}^2(\hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \mathbf{E}^>)] \frac{I(\alpha(p_{\parallel}) - \alpha_0(q_{\parallel})|\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel})}{\alpha(p_{\parallel}) - \alpha_0(q_{\parallel})} \\ &= -[(\hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \mathbf{P})(\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0) - \mathbf{P}^2(\hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \mathbf{E}_0)] \frac{I(\alpha(p_{\parallel}) + \alpha_0(k_{\parallel})|\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel})}{\alpha(p_{\parallel}) + \alpha_0(k_{\parallel})}. \end{aligned} \quad (68)$$

Se observa que

$$(\hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \mathbf{P}) = p_{\parallel} \alpha(p_{\parallel}) - p_{\parallel} \alpha(p_{\parallel}) = 0, \quad (69)$$

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{q}_{\parallel})) &= \frac{c^2}{\omega^2} (\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \alpha(p_{\parallel}) - \hat{\mathbf{x}}_3 p_{\parallel}) \cdot (\hat{\mathbf{q}}_{\parallel} \alpha_0(q_{\parallel}) - \hat{\mathbf{x}}_3 q_{\parallel}) \\
&= \frac{c^2}{\omega^2} [\alpha(p_{\parallel})(\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{q}}_{\parallel}) \alpha_0(q_{\parallel}) + p_{\parallel} q_{\parallel}]
\end{aligned} \tag{70}$$

y

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_s(\mathbf{q}_{\parallel})) &= \frac{c}{\omega} (\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \alpha(p_{\parallel}) - \hat{\mathbf{x}}_3 p_{\parallel}) \cdot [\hat{\mathbf{x}}_3 \times \hat{\mathbf{q}}_{\parallel}] \\
&= \frac{c}{\omega} \alpha(p_{\parallel}) (\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \cdot [\hat{\mathbf{x}}_3 \times \hat{\mathbf{q}}_{\parallel}]) \\
&= -\frac{c}{\omega} \alpha(p_{\parallel}) [\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{q}}_{\parallel}]_3,
\end{aligned} \tag{71}$$

con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \mathbf{E}^>(\mathbf{q}_{\parallel})) &= (\hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{q}_{\parallel})) A_p(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) + (\hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_s(\mathbf{q}_{\parallel})) A_s(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) \\
&= \frac{c^2}{\omega^2} [\alpha(p_{\parallel})(\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{q}}_{\parallel}) \alpha_0(q_{\parallel}) + p_{\parallel} q_{\parallel}] A_p(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) - \frac{c}{\omega} \alpha(p_{\parallel}) [\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{q}}_{\parallel}]_3 A_s(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}).
\end{aligned} \tag{72}$$

Análogamente, se tiene que

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \mathbf{E}_0) &= (\hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{k}_{\parallel})) B_p + (\hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_s(\mathbf{k}_{\parallel})) B_s \\
&= \frac{c^2}{\omega^2} [-\alpha(p_{\parallel})(\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{q}}_{\parallel}) \alpha_0(k_{\parallel}) + p_{\parallel} k_{\parallel}] B_p - \frac{c}{\omega} \alpha(p_{\parallel}) [\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{k}}_{\parallel}]_3 B_s.
\end{aligned} \tag{73}$$

Con estas relaciones se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} [(\alpha(p_{\parallel})(\widehat{\mathbf{p}}_{\parallel} \cdot \widehat{\mathbf{q}}_{\parallel})\alpha_0(q_{\parallel}) + p_{\parallel}q_{\parallel}) A_p(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) - \frac{\omega}{c}\alpha(p_{\parallel}) [\widehat{\mathbf{p}}_{\parallel} \times \widehat{\mathbf{q}}_{\parallel}]_3 A_s(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})] \\
 & \times \frac{I(\alpha(p_{\parallel}) - \alpha_0(q_{\parallel})|\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel})}{\alpha(p_{\parallel}) - \alpha_0(q_{\parallel})} \\
 = & -[(-\alpha(p_{\parallel})(\widehat{\mathbf{p}}_{\parallel} \cdot \widehat{\mathbf{q}}_{\parallel})\alpha_0(k_{\parallel}) + p_{\parallel}k_{\parallel}) B_p - \frac{\omega}{c}\alpha(p_{\parallel}) [\widehat{\mathbf{p}}_{\parallel} \times \widehat{\mathbf{k}}_{\parallel}]_3 B_s] \\
 & \times \frac{I(\alpha(p_{\parallel}) + \alpha_0(k_{\parallel})|\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel})}{\alpha(p_{\parallel}) + \alpha_0(k_{\parallel})}, \tag{74}
 \end{aligned}$$

siendo esta relación la conocida como primera ecuación reducida de Rayleigh.

Con la ecuación (74) se tiene una relación en la que se ha encontrado la conexión entre las amplitudes de los campos incidentes y esparcidos, sólo que en ésta se puede ver que se tienen dos incógnitas y una sola ecuación; por lo que se hará el siguiente desarrollo para encontrar otra ecuación.

Ahora se multiplica la ecuación (58) por $\widehat{\mathbf{e}}_s(\mathbf{p}_{\parallel})$,

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} [(\widehat{\mathbf{e}}_s(\mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \mathbf{P})(\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}^>) - \mathbf{P}^2(\widehat{\mathbf{e}}_s(\mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \mathbf{E}^>)] \frac{I(\alpha(p_{\parallel}) - \alpha_0(q_{\parallel})|\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel})}{\alpha(p_{\parallel}) - \alpha_0(q_{\parallel})} \\
 = & -[(\widehat{\mathbf{e}}_s(\mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \mathbf{P})(\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0) - \mathbf{P}^2(\widehat{\mathbf{e}}_s(\mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \mathbf{E}_0)] \frac{I(\alpha(p_{\parallel}) + \alpha_0(k_{\parallel})|\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel})}{\alpha(p_{\parallel}) + \alpha_0(k_{\parallel})}. \tag{75}
 \end{aligned}$$

Puesto que se tiene

$$(\widehat{\mathbf{e}}_s(\mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \mathbf{P}) = [\widehat{\mathbf{x}}_3 \times \widehat{\mathbf{p}}_{\parallel}] \cdot (\mathbf{p}_{\parallel} - \alpha(p_{\parallel})\widehat{\mathbf{x}}_3) = 0, \tag{76}$$

$$([\widehat{\mathbf{x}}_3 \times \widehat{\mathbf{p}}_{\parallel}] \cdot \widehat{\mathbf{q}}_{\parallel}) = -[\widehat{\mathbf{q}}_{\parallel} \times \widehat{\mathbf{p}}_{\parallel}]_3 = [\widehat{\mathbf{p}}_{\parallel} \times \widehat{\mathbf{q}}_{\parallel}]_3, \tag{77}$$

y

$$([\hat{\mathbf{x}}_3 \times \hat{\mathbf{p}}_{\parallel}] \cdot [\hat{\mathbf{x}}_3 \times \hat{\mathbf{q}}_{\parallel}]) = (\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{q}}_{\parallel}), \quad (78)$$

se puede escribir

$$(\hat{\mathbf{e}}_s(\mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \mathbf{E}^>(\mathbf{q}_{\parallel})) = \frac{c}{\omega} \alpha_0(q_{\parallel}) [\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{q}}_{\parallel}]_3 A_p(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) + (\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{q}}_{\parallel}) A_s(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}). \quad (79)$$

De la misma manera, haciendo todo el desarrollo matemático se podrá obtener la relación correspondiente para el campo incidente

$$(\hat{\mathbf{e}}_s(\mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \mathbf{E}_0) = -\frac{c}{\omega} \alpha_0(k_{\parallel}) [\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{k}}_{\parallel}]_3 B_p + (\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{k}}_{\parallel}) B_s. \quad (80)$$

La segunda ecuación reducida de Rayleigh, de este modo, tiene la forma

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left[\frac{\omega}{c} \alpha_0(q_{\parallel}) [\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{q}}_{\parallel}]_3 A_p(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) + \frac{\omega^2}{c^2} (\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{q}}_{\parallel}) A_s(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) \right] \\ & \times \frac{I(\alpha(p_{\parallel}) - \alpha_0(q_{\parallel}) | \mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel})}{\alpha(p_{\parallel}) - \alpha_0(q_{\parallel})} \\ & = - \left[-\frac{\omega}{c} \alpha_0(k_{\parallel}) [\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{k}}_{\parallel}]_3 B_p + \frac{\omega^2}{c^2} (\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{k}}_{\parallel}) B_s \right] \\ & \times \frac{I(\alpha(p_{\parallel}) + \alpha_0(k_{\parallel}) | \mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel})}{\alpha(p_{\parallel}) + \alpha_0(k_{\parallel})}. \end{aligned} \quad (81)$$

Las dos ecuaciones (74) y (81) se pueden combinar para escribirlas en forma matricial

$$\int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} \overleftrightarrow{M}(\mathbf{p}_{\parallel} | \mathbf{q}_{\parallel}) \overleftrightarrow{A}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) = -\overleftrightarrow{N}(\mathbf{p}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) \overleftrightarrow{B}, \quad (82)$$

donde la matriz $\overleftrightarrow{M}(\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{q}_{\parallel})$ es

$$\begin{pmatrix} p_{\parallel}q_{\parallel} + \alpha(p_{\parallel})\widehat{\mathbf{p}}_{\parallel} \cdot \widehat{\mathbf{q}}_{\parallel}\alpha_0(q_{\parallel}) & -(\omega/c)\alpha(p_{\parallel})(\widehat{\mathbf{p}}_{\parallel} \times \widehat{\mathbf{q}}_{\parallel})_3 \\ (\omega/c)(\widehat{\mathbf{p}}_{\parallel} \times \widehat{\mathbf{q}}_{\parallel})_3\alpha_0(q_{\parallel}) & (\omega/c)^2\widehat{\mathbf{p}}_{\parallel} \cdot \widehat{\mathbf{q}}_{\parallel} \end{pmatrix} \frac{I(\alpha(p_{\parallel}) - \alpha_0(q_{\parallel})|\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel})}{\alpha(p_{\parallel}) - \alpha_0(q_{\parallel})}, \quad (83)$$

la matriz $\widehat{N}(\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})$ es

$$\begin{pmatrix} p_{\parallel}k_{\parallel} - \alpha(p_{\parallel})\widehat{\mathbf{p}}_{\parallel} \cdot \widehat{\mathbf{k}}_{\parallel}\alpha_0(k_{\parallel}) & -(\omega/c)\alpha(p_{\parallel})(\widehat{\mathbf{p}}_{\parallel} \times \widehat{\mathbf{k}}_{\parallel})_3 \\ -(\omega/c)(\widehat{\mathbf{p}}_{\parallel} \times \widehat{\mathbf{k}}_{\parallel})_3\alpha_0(k_{\parallel}) & (\omega/c)^2\widehat{\mathbf{p}}_{\parallel} \cdot \widehat{\mathbf{k}}_{\parallel} \end{pmatrix} \frac{I(\alpha(p_{\parallel}) + \alpha_0(k_{\parallel})|\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel})}{\alpha(p_{\parallel}) + \alpha_0(k_{\parallel})}, \quad (84)$$

y los vectores $\overleftrightarrow{A}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})$ y \overleftrightarrow{B} son, respectivamente,

$$\overleftrightarrow{A}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) = \begin{pmatrix} A_p(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \\ A_s(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \end{pmatrix} \quad (85)$$

y

$$\overleftrightarrow{B} = \begin{pmatrix} B_p \\ B_s \end{pmatrix}. \quad (86)$$

El último paso es escribir la relación entre $\overleftrightarrow{A}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})$ y \overleftrightarrow{B} ,

$$\overleftrightarrow{A}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) = \overleftrightarrow{R}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})\overleftrightarrow{B}. \quad (87)$$

Entonces, la ecuación (82) toma la forma

$$\int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} \overleftrightarrow{M}(\mathbf{p}_{\parallel} | \mathbf{q}_{\parallel}) \overleftrightarrow{R}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) = -\overleftrightarrow{N}(\mathbf{p}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}). \quad (88)$$

Esta es la ecuación reducida de Rayleigh. La matriz $\overleftrightarrow{R}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})$ de las amplitudes esparcidas se puede determinar resolviendo esta ecuación integral.

Cuando la superficie es plana, $\zeta(\mathbf{x}_{\parallel}) = 0$, las ecuaciones reducidas de Rayleigh deben dar los coeficientes diferenciales de reflexión de Fresnel. En este caso las funciones $I(\gamma | \mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel})$ dadas en la ecuación (50) toman la forma

$$\begin{aligned} I(\gamma | \mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) &= \int d\mathbf{x}_{\parallel} e^{-i(\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \cdot \mathbf{x}_{\parallel}} \\ &= (2\pi)^2 \delta(\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}). \end{aligned} \quad (89)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (88) y realizando la integración de la parte izquierda de esta ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \alpha_0(p_{\parallel})\epsilon(\omega) + \alpha(p_{\parallel}) & 0 \\ 0 & (\alpha_0(p_{\parallel}) + \alpha(p_{\parallel})) \end{pmatrix} \overleftrightarrow{F}(\mathbf{p}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) \\ &= (2\pi)^2 \delta(\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \begin{pmatrix} \alpha_0(k_{\parallel})\epsilon(\omega) - \alpha(k_{\parallel}) & 0 \\ 0 & \alpha_0(k_{\parallel}) - \alpha(k_{\parallel}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (90)$$

donde hemos introducido la notación $\overleftrightarrow{F}(\mathbf{p}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})$ para la matriz de las amplitudes de esparcimiento $\overleftrightarrow{R}(\mathbf{p}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})$ para una superficie plana, y donde utilizamos que $\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{p}}_{\parallel} = 0$,

$\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{\parallel} = 1$, y

$$\frac{p_{\parallel}^2 + \alpha(p_{\parallel})\alpha_0(p_{\parallel})}{\alpha(p_{\parallel}) - \alpha_0(p_{\parallel})} = \frac{\alpha_0(p_{\parallel})\epsilon(\omega) + \alpha(p_{\parallel})}{(\epsilon(\omega) - 1)}$$

y

$$\frac{p_{\parallel}^2 - \alpha(p_{\parallel})\alpha_0(p_{\parallel})}{\alpha(p_{\parallel}) - \alpha_0(p_{\parallel})} = -\frac{\alpha_0(p_{\parallel})\epsilon(\omega) - \alpha(p_{\parallel})}{(\epsilon(\omega) - 1)},$$

mientras que

$$\frac{(\omega/c)^2}{\alpha(p_{\parallel}) - \alpha_0(p_{\parallel})} = \frac{\alpha_0(p_{\parallel}) + \alpha(p_{\parallel})}{\epsilon(\omega) - 1}$$

$$\frac{(\omega/c)^2}{\alpha(p_{\parallel}) + \alpha_0(p_{\parallel})} = -\frac{\alpha_0(p_{\parallel}) - \alpha(p_{\parallel})}{\epsilon(\omega) - 1}.$$

La solución a esta ecuación es

$$\begin{aligned} \vec{F}(\mathbf{p}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) &= (2\pi)^2 \delta(\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \begin{pmatrix} \frac{\alpha_0(k_{\parallel})\epsilon(\omega) - \alpha(k_{\parallel})}{\alpha_0(k_{\parallel})\epsilon(\omega) + \alpha(k_{\parallel})} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_0(k_{\parallel}) - \alpha(k_{\parallel})}{\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel})} \end{pmatrix} \\ &= (2\pi)^2 \delta(\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \begin{pmatrix} F_p(k_{\parallel}) & 0 \\ 0 & F_s(k_{\parallel}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (91)$$

donde $F_p(k_{\parallel})$ y $F_s(k_{\parallel})$ son los coeficientes de Fresnel para una superficie plana, en polarizaciones p y s respectivamente.

III.3. El coeficiente diferencial de reflexión

Muchos promedios estadísticos pueden ser de interés. El más importante, desde el punto de vista práctico, es la intensidad promedio esparcida, que en su versión

normalizada se conoce como el coeficiente diferencial de reflexión (CDR), o la sección transversal normalizada. El coeficiente diferencial de reflexión (CDR) está definido como la fracción de la energía total incidente sobre la superficie que es esparcida dentro de un intervalo angular $d\Omega_s$ alrededor de la dirección de esparcimiento. La energía total incidente o esparcida es la parte real de la componente tres (ver fig. 10) del vector de Poynting que atraviesa (hacia arriba o hacia abajo, según sea el caso) un plano paralelo al plano promedio de la superficie [Maradudin et al., 1990], [Born y Wolf, 1980]:

$$P^{inc,sc} = \left| \int d^2x_{\parallel} \Re \left(S_3^{inc,sc}(\mathbf{x}_{\parallel}, x_3) \right) \right|. \quad (92)$$

El vector de Poynting es

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{c}{8\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \\ &= -\frac{c^2}{8\pi i \omega} [\mathbf{E} \times \nabla \times \mathbf{E}^*]. \end{aligned} \quad (93)$$

Para la onda incidente tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{inc} &= \frac{c^2}{8\pi \omega} [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{Q}_0 \times \mathbf{E}_0^*] \\ &= \frac{c^2}{8\pi \omega} \mathbf{Q}_0 |\mathbf{E}_0|^2, \end{aligned} \quad (94)$$

mientras que para la onda esparcida:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{sc} &= \frac{c^2}{8\pi\omega} \int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} [\mathbf{E}^>(\mathbf{q}_{\parallel}) \times \mathbf{P}^> \times (\mathbf{E}^>(\mathbf{p}_{\parallel}))^*] e^{i(\mathbf{Q}^> - \mathbf{P}^>) \cdot \mathbf{x}} \\ &= \frac{c^2}{8\pi\omega} \int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \mathbf{P}^> (\mathbf{E}^>(\mathbf{q}_{\parallel}) \cdot (\mathbf{E}^>(\mathbf{p}_{\parallel}))^*) e^{i(\mathbf{Q}^> - \mathbf{P}^>) \cdot \mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (95)$$

donde $\mathbf{P}^> = \mathbf{p}_{\parallel} + \alpha_0(p_{\parallel})$.

Sea una onda plana de polarización β , donde β representa s o p , incidente sobre la superficie rugosa a un ángulo θ_0 . El plano de incidencia coincide con el plano $x_1 x_3$. En este caso $\mathbf{k}_{\parallel} = (\omega/c) \sin \theta_0 \hat{\mathbf{x}}_1$ y $\alpha_0(k_{\parallel}) = (\omega/c) \cos \theta_0$ (ver figura 10).

Entonces, la magnitud del flujo total incidente es:

$$\begin{aligned} P_{\beta}^{inc} &= \frac{c^2}{8\pi\omega} \alpha_0(k_{\parallel}) |B_{\beta}|^2 S \\ &= S \frac{c}{8\pi} \cos \theta_0 |B_{\beta}|^2, \end{aligned} \quad (96)$$

donde S es el área de la superficie que es iluminada. Dado que en la geometría considerada el haz incidente viaja hacia abajo, la componente tres del vector de onda $[\mathbf{Q}_0]$ es negativa $[(\mathbf{Q}_0)_3 = -\alpha_0(k_{\parallel})]$.

El flujo total de luz esparcida que atraviesa el plano $x_3 = \text{const.}$ en el vacío es:

$$\begin{aligned} P^{sc} &= \frac{c^2}{8\pi\omega} \int d^2 x_{\parallel} \int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \alpha_0(p_{\parallel}) (\mathbf{E}^>(\mathbf{q}_{\parallel}) \cdot (\mathbf{E}^>(\mathbf{p}_{\parallel}))^*) \times \\ &\quad \times e^{i(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \mathbf{x}_{\parallel}} e^{i(\alpha_0(q_{\parallel}) - \alpha_0(p_{\parallel})) x_3}. \end{aligned} \quad (97)$$

Ya que

$$\int d^2x_{\parallel} e^{i(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \mathbf{x}_{\parallel}} = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}), \quad (98)$$

podemos evaluar la integral sobre \mathbf{p}_{\parallel} en la ecuación (97) obteniendo

$$P^{sc} = \frac{c^2}{8\pi\omega} \int \frac{d^2q_{\parallel}}{(2\pi)^2} \alpha_0(q_{\parallel}) |\mathbf{E}^>(q_{\parallel})|^2. \quad (99)$$

La onda esparcida tiene componentes de polarización tanto s como p , de manera que su vector de campo eléctrico asociado se puede representar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^> &= \sum_{\alpha=p,s} \hat{\mathbf{e}}_{\alpha}(q_{\parallel}) A_{\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \\ &= \sum_{\alpha=p,s} \hat{\mathbf{e}}_{\alpha}(q_{\parallel}) R_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) B_{\beta}, \end{aligned} \quad (100)$$

donde hemos empleado la ecuación (87), $R_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})$ son los elementos de la matriz $\overleftrightarrow{R}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})$ y α y β indican componentes de polarización s y p . Entonces, el flujo total de luz esparcida en la componente de polarización α es:

$$P_{\alpha}^{sc} = \frac{c^2}{8\pi\omega} \Re \int \frac{d^2q_{\parallel}}{(2\pi)^2} \alpha_0(q_{\parallel}) |R_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) B_{\beta}|^2. \quad (101)$$

Para escribir esta ecuación en términos de los ángulos de esparcimiento polar y azimutal θ_s y ϕ_s notamos primeramente que

$$\mathbf{q}_{\parallel} = (\omega/c) \sin \theta_s [\cos \phi_s \hat{\mathbf{x}}_1 + \sin \phi_s \hat{\mathbf{x}}_2], \quad (102)$$

mientras que

$$\alpha_0(q_{\parallel}) = (\omega/c) \cos \theta_s. \quad (103)$$

Entonces se tiene que

$$d^2 q_{\parallel} = \frac{\omega^2}{c^2} \cos \theta_s d\Omega_s, \quad (104)$$

donde $d\Omega_s$ es el elemento de ángulo sólido, $d\Omega_s = \sin \theta_s d\theta_s d\phi_s$, alrededor de la dirección de esparcimiento. Con estos resultados, podemos reescribir la ecuación (101) de la forma

$$P_{\alpha}^{sc} = \frac{\omega^2}{32\pi^3 c} \int d\Omega_s \cos^2 \theta_s |R_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) B_{\beta}|^2. \quad (105)$$

La potencia total esparcida también puede representarse como una integral sobre todo el hemisferio

$$P_{\alpha}^{sc} = \int d\Omega_s P_{\alpha}^{sc}(\Omega_s), \quad (106)$$

donde $P_{\alpha}^{sc}(\Omega_s)$ representa la densidad de potencia o flujo diferencial esparcido.

Comparando con la ecuación (105) concluimos que la densidad de potencia está dada por

$$P_{\alpha}^{sc}(\Omega_s) = \frac{\omega^2}{32\pi^3 c} \cos^2 \theta_s |R_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) B_{\beta}|^2. \quad (107)$$

Con estos resultados podemos escribir el coeficiente diferencial de reflexión de la sigu-

iente forma:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial R}{\partial \Omega_s} \right)_{\alpha\beta} &= \frac{P_{\alpha}^{sc}(\Omega_s)}{P_{\beta}^{inc}} \\ &= \frac{1}{S} \left(\frac{\omega}{2\pi c} \right)^2 \frac{\cos^2 \theta_s}{\cos \theta_0} |R_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})|^2. \end{aligned} \quad (108)$$

El promedio del coeficiente diferencial de reflexión está dado por:

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega_s} \right\rangle_{\alpha\beta} = \frac{1}{S} \left(\frac{\omega}{2\pi c} \right)^2 \frac{\cos^2 \theta_s}{\cos \theta_0} \left\langle |R_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \right\rangle. \quad (109)$$

La componente coherente del coeficiente diferencial de reflexión promedio (CDR) se define en términos del campo promedio esparcido, y está dada por:

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right\rangle_{\alpha\beta}^{coh} = \left(\frac{\omega}{2\pi c} \right)^2 \frac{1}{S} \frac{\cos^2 \theta_s}{\cos \theta_0} |\langle R_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) \rangle|^2. \quad (110)$$

Por otro lado, dado que la suma de las componentes coherente e incoherente debe dar como resultado la intensidad promedio total, se define la componente incoherente como:

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right\rangle_{\alpha\beta}^{incoh} = \left(\frac{\omega}{2\pi c} \right)^2 \frac{1}{S} \frac{\cos^2 \theta_s}{\cos \theta_0} \left[\left\langle |R_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \right\rangle - |\langle R_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) \rangle|^2 \right]. \quad (111)$$

III.3.1. Reflectividad de superficies rugosas aleatorias (CDR coherente)

Basándonos en la ecuación (110) se obtiene una expresión para la reflectividad de una superficie rugosa aleatoria.

Debido a que hemos considerado un proceso aleatorio gaussiano estacionario, el promedio de la matriz de las amplitudes de esparcimiento es diagonal en los índices $\alpha\beta$ y en los vectores de onda \mathbf{q}_{\parallel} y \mathbf{k}_{\parallel} . Entonces la amplitud de esparcimiento promedio es de la forma

$$\langle R_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) \rangle = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \delta_{\alpha\beta} r_{\beta}(k_{\parallel}), \quad (112)$$

donde se han introducido los coeficientes de reflexión $r_{\beta}(k_{\parallel})$, y $\delta_{\alpha\beta}$ representa una delta de Kronecker. Si sustituimos la ecuación (112) en la ecuación (110) se tiene que:

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right\rangle_{\alpha\beta}^{coh} = \left(\frac{\omega}{2\pi c} \right)^2 \frac{1}{S} \frac{\cos^2 \theta_s}{\cos \theta_0} S (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \delta_{\alpha\beta} |r_{\beta}(k_{\parallel})|^2. \quad (113)$$

La expresión para la función delta se puede escribir como:

$$\delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) = \frac{c^2}{\omega^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0} \delta(\theta_s - \theta_0) \delta(\phi_s - \phi_0), \quad (114)$$

con lo que se puede escribir el coeficiente diferencial de reflexión coherente promedio como:

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right\rangle_{\alpha\beta}^{coh} = \frac{1}{\sin \theta_0} \delta(\theta_s - \theta_0) \delta(\phi_s - \phi_0) \delta_{\alpha\beta} |r_{\beta}(k_{\parallel})|^2. \quad (115)$$

Integrando la ecuación (115) sobre el ángulo sólido ($d\Omega = \sin\theta_s d\theta_s d\phi_s$) se obtiene la reflectividad de la superficie:

$$R_\alpha = |r_\alpha(k_\parallel)|^2. \quad (116)$$

III.4. Teoría perturbativa de autoenergía (TPAE)

Una aproximación interesante para evaluar el esparcimiento por una superficie rugosa aleatoria resulta de utilizar un tratamiento perturbativo de interacción entre muchos cuerpos. El método fue aplicado al problema de esparcimiento por [Brown et al., 1984]. Cuando esta técnica es utilizada para calcular la reflectividad de una superficie rugosa, es comúnmente conocida como la teoría perturbativa de autoenergía.

En esta aproximación, en lugar de la matriz de las amplitudes de esparcimiento se introduce la matriz de las funciones de Green. (Algunas veces llamada el "propagador" de la función de Green; por ejemplo, en electrodinámica cuántica, debido a que la función de Green describe la propagación de un estado asociado (partícula) en el espacio con alguna perturbación, es decir desorden). La perturbación del sistema (rugosidad de superficie, desorden en volumen, interfaces y demás) está contenida en el potencial de esparcimiento. En la aplicación de la función de Green a la teoría de esparcimiento, existen varios métodos muy desarrollados para calcular directamente las cantidades promediadas, a saber la función de Green promedio $\langle \vec{G}(\mathbf{p}_\parallel | \mathbf{k}_\parallel) \rangle$ y el promedio del módulo cuadrado de la función de Green $\langle |\vec{G}(\mathbf{p}_\parallel | \mathbf{k}_\parallel)|^2 \rangle$. Específicamente, la ecuación

para la función de Green promedio, ecuación de Dyson, es derivada y resuelta, en lugar de calcular primero la función de Green y después promediarla. Análogamente, la ecuación para $\langle |\overleftrightarrow{G}(\mathbf{p}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \rangle$, ecuación Bethe-Salpeter, puede ser derivada y resuelta. Los diferentes métodos de solución de las ecuaciones de Dyson y Bethe-Salpeter están también bien desarrollados.

En esta aproximación se busca una solución a la ecuación reducida de Rayleigh (88) en la forma

$$\overleftrightarrow{R}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) = -\overleftrightarrow{T}(2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) - 2i\alpha_0(k_{\parallel}) \overleftrightarrow{G}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}), \quad (117)$$

donde $\overleftrightarrow{G}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})$ es la matriz de la función de Green asociada a la superficie rugosa e \overleftrightarrow{T} en una matriz unitaria

$$\overleftrightarrow{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (118)$$

Relacionaremos ahora las cantidades físicas en que estamos interesados con la función de Green.

De la definición (117) podemos ver que la matriz promediada de las amplitudes de esparcimiento, la cual nos da la componente especular de la intensidad esparcida, se obtiene promediando la ecuación (117):

$$\langle \overleftrightarrow{R}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) \rangle = -\overleftrightarrow{T}(2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) - 2i\alpha_0(k_{\parallel}) \langle \overleftrightarrow{G}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) \rangle. \quad (119)$$

Introduciendo ahora el promedio de las amplitudes de esparcimiento y los coeficientes r_β de la ecuación (112), tenemos que

$$\langle G_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_\parallel | \mathbf{k}_\parallel) \rangle = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_\parallel - \mathbf{k}_\parallel) \delta_{\alpha\beta} G_\beta(k_\parallel), \quad (120)$$

mientras que la matriz promedio de las amplitudes de esparcimiento está dada por la ecuación (112). De la combinación de las ecuaciones (119), (112) y (120) se sigue que

$$r_\alpha(k_\parallel) = - [1 + 2i\alpha_0(k_\parallel)G_\alpha(k_\parallel)]. \quad (121)$$

Entonces, para calcular la reflectividad de una superficie rugosa, que está definida por la ecuación (116), ($R_\alpha = |r_\alpha(k_\parallel)|^2$), es suficiente calcular el promedio de la función de Green $G_\alpha(k_\parallel)$.

La componente incoherente del coeficiente diferencial de reflexión (CDR) está determinada por $\langle |\overleftrightarrow{R}(\mathbf{q}_\parallel | \mathbf{k}_\parallel)|^2 \rangle - \langle \overleftrightarrow{R}(\mathbf{q}_\parallel | \mathbf{k}_\parallel) \rangle^2$, que en términos de la función de Green toma la forma

$$\begin{aligned} & \langle |\overleftrightarrow{R}(\mathbf{q}_\parallel | \mathbf{k}_\parallel)|^2 \rangle - \langle \overleftrightarrow{R}(\mathbf{q}_\parallel | \mathbf{k}_\parallel) \rangle^2 \\ &= 4\alpha_0^2(k_\parallel) \left[\langle |\overleftrightarrow{G}(\mathbf{q}_\parallel | \mathbf{k}_\parallel)|^2 \rangle - \langle \overleftrightarrow{G}(\mathbf{q}_\parallel | \mathbf{k}_\parallel) \rangle^2 \right]. \end{aligned} \quad (122)$$

Entonces, para calcular la parte incoherente del CDR necesitamos calcular $\langle |\overleftrightarrow{G}(\mathbf{q}_\parallel | \mathbf{k}_\parallel)|^2 \rangle$.

Ya que estamos principalmente interesados en este momento en el esparcimiento coherente, describiremos en detalle como derivar la ecuación para el promedio de la

función de Green. Al final de esta sección describiremos brevemente la ecuación Bethe-Salpeter [Brown et al., 1983] para $\langle |\overleftrightarrow{G}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \rangle$.

Primero, analicemos el caso para una superficie plana.

Para una superficie plana, la función de Green se obtiene a partir de la solución de la ecuación reducida de Rayleigh de la siguiente manera: Reescribiremos las definiciones (117) como

$$\overleftrightarrow{G}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) = -\frac{1}{2i\alpha_0(k_{\parallel})} \left[\overleftrightarrow{I}(2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) + \overleftrightarrow{R}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) \right]. \quad (123)$$

Para una superficie plana tenemos que $(\zeta(\mathbf{x}_{\parallel}) = 0)$ y $\overleftrightarrow{R}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) = \overleftrightarrow{F}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})$, donde $\overleftrightarrow{F}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})$ es la matriz de los coeficientes de reflexión de Fresnel y está dada por (ver el final de la sección III.2)

$$\overleftrightarrow{F}(\mathbf{p}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \begin{pmatrix} \frac{\alpha_0(k_{\parallel})\epsilon(\omega) - \alpha(k_{\parallel})}{\alpha_0(k_{\parallel})\epsilon(\omega) + \alpha(k_{\parallel})} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_0(k_{\parallel}) - \alpha(k_{\parallel})}{\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel})} \end{pmatrix}. \quad (124)$$

Entonces, las funciones de Green asociadas con una superficie plana se siguen de las ecuaciones (123) y (124), y están dadas por

$$\overleftrightarrow{G}(\mathbf{p}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \overleftrightarrow{G}^{(0)}(k_{\parallel}), \quad (125)$$

con

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{G}^{(0)}(k_{\parallel}) &= \begin{pmatrix} G_p^{(0)}(k_{\parallel}) & 0 \\ 0 & G_s^{(0)}(k_{\parallel}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{i\epsilon(\omega)}{\alpha_0(k_{\parallel})\epsilon(\omega) + \alpha(k_{\parallel})} & 0 \\ 0 & \frac{i}{\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel})} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (126)$$

La matriz de la función de Green $\overleftrightarrow{G}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})$ satisface las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{G}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) &= (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \overleftrightarrow{G}^{(0)}(k_{\parallel}) \\ &\quad + \int \frac{d^2 q'_{\parallel}}{(2\pi)^2} \overleftrightarrow{G}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{q}'_{\parallel}) \overleftrightarrow{V}(\mathbf{q}'_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \overleftrightarrow{G}^{(0)}(k_{\parallel}) \end{aligned} \quad (127)$$

$$\begin{aligned} &= (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \overleftrightarrow{G}^{(0)}(k_{\parallel}) \\ &\quad + \overleftrightarrow{G}^{(0)}(q_{\parallel}) \int \frac{d^2 q'_{\parallel}}{(2\pi)^2} \overleftrightarrow{V}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{q}'_{\parallel}) \overleftrightarrow{G}(\mathbf{q}'_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}). \end{aligned} \quad (128)$$

donde $\overleftrightarrow{V}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{q}'_{\parallel})$ es el potencial de esparcimiento y satisface las funciones de Green.

Para caracterizar el potencial de esparcimiento utilizamos la ecuación reducida de Rayleigh y la definición (117). Sustituyendo la ecuación (117) en la ecuación reducida de Rayleigh (88) obtenemos la relación

$$\int \frac{d^2 q'_{\parallel}}{(2\pi)^2} \overleftrightarrow{M}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{q}'_{\parallel}) \overleftrightarrow{G}(\mathbf{q}'_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) = \left[\overleftrightarrow{N}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) - \overleftrightarrow{M}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \right] \frac{1}{2i\alpha_0(k_{\parallel})}. \quad (129)$$

Multiplicamos ahora la ecuación (127) por el lado izquierdo por la matriz $\overleftrightarrow{M}(\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{q}_{\parallel})$, e integramos sobre \mathbf{q}_{\parallel} . Como resultado obtenemos

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} \overleftrightarrow{M}(\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{q}_{\parallel}) \overleftrightarrow{G}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) = \overleftrightarrow{M}(\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \overleftrightarrow{G}^{(0)}(k_{\parallel}) \\ & + \int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} \overleftrightarrow{M}(\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{q}_{\parallel}) \int \frac{d^2 q'_{\parallel}}{(2\pi)^2} \overleftrightarrow{G}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{q}'_{\parallel}) \overleftrightarrow{V}(\mathbf{q}'_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \overleftrightarrow{G}^{(0)}(k_{\parallel}). \end{aligned} \quad (130)$$

Utilizando las ecuaciones (129) y (130) obtenemos una ecuación matricial para el potencial de esparcimiento, la cual estará dada por:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^2 q'_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left[\overleftrightarrow{N}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{q}'_{\parallel}) - \overleftrightarrow{M}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{q}'_{\parallel}) \right] \frac{\overleftrightarrow{V}(\mathbf{q}'_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})}{2i\alpha_0(q'_{\parallel})} \\ & = \frac{\overleftrightarrow{N}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) + \overleftrightarrow{M}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \overleftrightarrow{F}(k_{\parallel})}{2i\alpha_0(k_{\parallel})} \left[\overleftrightarrow{G}^{(0)}(k_{\parallel}) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (131)$$

Entonces, el potencial de esparcimiento $\overleftrightarrow{V}(\mathbf{q}'_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})$ satisface la ecuación integral (131).

Ya que estamos interesados en calcular la reflectividad, necesitamos el promedio de la amplitud de esparcimiento, que se puede obtener promediando la ecuación (117). Para esto, tenemos que calcular el promedio de la función de Green asociada a la superficie rugosa, por lo que conviene regresar a la ecuación (128) y reducirla a una ecuación algebraica utilizando la siguiente relación:

$$\int \frac{d^2 q'_{\parallel}}{(2\pi)^2} \overleftrightarrow{V}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{q}'_{\parallel}) \overleftrightarrow{G}(\mathbf{q}'_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) = \overleftrightarrow{\mathcal{M}}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \overleftrightarrow{G}(k_{\parallel}), \quad (132)$$

donde estamos introduciendo una función desconocida $\overleftrightarrow{\mathcal{M}}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})$ que llamamos au-

toenergía propia y $\overleftrightarrow{G}(k_{\parallel})$ es el promedio de la función de Green.

La matriz propia de autoenergía $\overleftrightarrow{\mathcal{M}}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})$ satisface una ecuación matricial integral, que se obtiene multiplicando la ecuación (128) por el potencial de esparcimiento $\overleftrightarrow{V}(\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{q}_{\parallel})$ e integrando sobre \mathbf{q}_{\parallel} :

$$\int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} \overleftrightarrow{V}(\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{q}_{\parallel}) \overleftrightarrow{G}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) = \overleftrightarrow{V}(\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \overleftrightarrow{G}^{(0)}(k_{\parallel}) + \int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} \overleftrightarrow{V}(\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{q}_{\parallel}) \overleftrightarrow{G}^{(0)}(q_{\parallel}) \overleftrightarrow{\mathcal{M}}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \overleftrightarrow{G}(k_{\parallel}). \quad (133)$$

Utilizando la relación (132) y la expresión para la función de Green promedio (128) obtenemos la ecuación para la autoenergía propia en la forma

$$\overleftrightarrow{\mathcal{M}}(\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) = \overleftrightarrow{V}(\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) + \int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} \overleftrightarrow{V}(\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{q}_{\parallel}) \overleftrightarrow{G}^{(0)}(q_{\parallel}) \left[\overleftrightarrow{\mathcal{M}}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) - \langle \overleftrightarrow{\mathcal{M}}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \rangle \right]. \quad (134)$$

Estamos ahora en posición de obtener la ecuación del promedio de la función de Green, por lo que, como resultado, la ecuación (128) se reduce a la siguiente ecuación de Dyson, la cual relaciona las funciones de Green y su promedio:

$$\overleftrightarrow{G}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \overleftrightarrow{G}^{(0)}(k_{\parallel}) + \overleftrightarrow{G}_0(q_{\parallel}) \overleftrightarrow{\mathcal{M}}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \overleftrightarrow{G}(k_{\parallel}). \quad (135)$$

Teniendo en mente que la superficie rugosa constituye un proceso aleatorio esta-

cionario, se tiene que

$$\langle \mathcal{M}_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \rangle = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \delta_{\alpha\beta} \mathcal{M}_{\alpha}(k_{\parallel}), \quad (136)$$

donde α puede ser la polarización s o p . Promediando la ecuación (135) obtenemos la ecuación algebraica para la función de Green promedio:

$$G_{\alpha}(k_{\parallel}) = G_{\alpha}^{(0)}(k_{\parallel}) + G_{\alpha}^{(0)}(k_{\parallel}) \mathcal{M}_{\alpha}(k_{\parallel}) G_{\alpha}(k_{\parallel}). \quad (137)$$

Entonces, los elementos diagonales de la función de Green promedio no son cero, y toman la forma

$$G_{\alpha}(k_{\parallel}) = \frac{1}{[G_{\alpha}^{(0)}(k_{\parallel})]^{-1} - \mathcal{M}_{\alpha}(k_{\parallel})}. \quad (138)$$

Los coeficientes de reflexión para la superficie rugosa $r_{\alpha}(k_{\parallel})$, dados por la ecuación (121), se expresan de manera sencilla en términos del promedio de la autoenergía propia, y toman la forma

$$r_p(k_{\parallel}) = \frac{\epsilon(\omega)\alpha_0(k_{\parallel}) - \alpha(k_{\parallel}) + i\epsilon(\omega)\mathcal{M}_p(k_{\parallel})}{\epsilon(\omega)\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}) - i\epsilon(\omega)\mathcal{M}_p(k_{\parallel})}, \quad (139)$$

$$r_s(k_{\parallel}) = \frac{\alpha_0(k_{\parallel}) - \alpha(k_{\parallel}) + i\mathcal{M}_s(k_{\parallel})}{\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}) - i\mathcal{M}_s(k_{\parallel})}. \quad (140)$$

Estos resultados tienen la forma de los coeficientes de reflexión de Fresnel para una superficie plana, pero con la función $\alpha(k_{\parallel})$ reemplazada por $\alpha(k_{\parallel}) - i\epsilon(\omega)\mathcal{M}_p(k_{\parallel})$ para la componente de polarización p y $\alpha(k_{\parallel}) - i\mathcal{M}_s(k_{\parallel})$ para la componente de polarización s .

Para calcular $M_\alpha(k_{\parallel})$ primero resolvemos la ecuación para el potencial de esparcimiento (131, y por lo tanto, la ecuación de autoenergía (134). Para el segundo orden más bajo del desarrollo en serie de potencias de la función del perfil de la superficie, las $M_\alpha(k_{\parallel})$ fueron encontradas por [Baylard et al., 1993], [Sánchez-Gil et al., 1995]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_p(k_{\parallel}) = & -i\delta^2 \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\epsilon^2(\omega)} \alpha(k_{\parallel}) \left(2k_{\parallel}^2 - \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \right) \\
& -i\delta^2 \frac{(\epsilon(\omega) - 1)^2}{\epsilon^3(\omega)} \alpha^2(k_{\parallel}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} g(|\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}|) (\hat{\mathbf{k}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{\parallel})^2 \alpha(p_{\parallel}) \\
& + \delta^2 \frac{(\epsilon(\omega) - 1)^2}{\epsilon^4(\omega)} \times \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} g(|\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}|) \left\{ G_p^{(0)}(p_{\parallel}) \left[\epsilon(\omega) p_{\parallel} k_{\parallel} - \alpha(p_{\parallel}) (\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{k}}_{\parallel}) \alpha(k_{\parallel}) \right]^2 \right. \\
& \left. - \epsilon^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} G_s^{(0)}(p_{\parallel}) \alpha^2(k_{\parallel}) (\hat{\mathbf{k}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{p}}_{\parallel})^2 \right\}, \tag{141}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_s(k_{\parallel}) = & -\delta^2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 (\epsilon(\omega) - 1) \alpha(k_{\parallel}) \\
& + i\delta^2 \frac{(\epsilon(\omega) - 1)^2}{\epsilon(\omega)} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} g(|\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}|) (\hat{\mathbf{k}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{p}}_{\parallel})^2 \alpha(p_{\parallel}) \\
& - \delta^2 \left(\frac{\epsilon(\omega) - 1}{\epsilon(\omega)} \right)^2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} g(|\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}|) \left\{ G_p^{(0)}(p_{\parallel}) \alpha^2(p_{\parallel}) (\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{k}}_{\parallel})^2 \right. \\
& \left. + \epsilon(\omega) \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 G_p^{(0)}(p_{\parallel}) (\hat{\mathbf{k}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{\parallel})^2 \right\}. \tag{142}
\end{aligned}$$

En el caso de superficies rugosas aleatorias bidimensionales, se desarrolla el espectro

de potencia en la forma [Baylard et al., 1993]

$$g(|\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(k_{\parallel} | p_{\parallel}) e^{-in\phi_p}, \quad (143)$$

donde se ha introducido el ángulo azimutal ϕ_p y $\mathbf{p}_{\parallel} = p_{\parallel} (\cos \phi_p, \sin \phi_p)$, recordando que el plano de incidencia es el plano $x_1 x_3$.

Para un espectro de potencia gaussiano tenemos que

$$g_n(k_{\parallel} | p_{\parallel}) = \pi a^2 \exp \left\{ -\frac{a^2}{4} (k_{\parallel}^2 + p_{\parallel}^2) \right\} I_n \left(\frac{a^2}{2} k_{\parallel} p_{\parallel} \right), \quad (144)$$

donde $I_n(x)$ es una función de Bessel modificada. Con la ayuda de la ecuación (143), la integración angular en las ecuaciones (141) y (142) se lleva a cabo analíticamente, y las integrales restantes sobre p_{\parallel} se evalúan numéricamente. Entonces, las reflectividades para luz con polarización p o s tienen la siguiente forma:

$$\mathcal{R}_p(\theta_0) = \left| \frac{\epsilon(\omega) \cos \theta_0 - (\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_0)^{1/2} - (2\pi\delta/\lambda)^2 \mu_p(\theta_0)}{\epsilon(\omega) \cos \theta_0 + (\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_0)^{1/2} + (2\pi\delta/\lambda)^2 \mu_p(\theta_0)} \right|^2 \quad (145)$$

y

$$\mathcal{R}_s(\theta_0) = \left| \frac{\cos \theta_0 - (\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_0)^{1/2} - (2\pi\delta/\lambda)^2 \mu_s(\theta_0)}{\cos \theta_0 + (\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_0)^{1/2} + (2\pi\delta/\lambda)^2 \mu_s(\theta_0)} \right|^2, \quad (146)$$

donde las funciones $\mu_{p,s}(\theta_0)$ están dadas por

$$\begin{aligned}
 \mu_p(\theta_0) = & -\frac{\epsilon(\omega) - 1}{\epsilon(\omega)} (\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_0)^{1/2} (2 \sin^2 \theta_0 - \epsilon(\omega)) \\
 & -a^2 \left(\frac{c}{\omega}\right)^3 \frac{1}{8\pi} \frac{(\epsilon(\omega) - 1)^2}{\epsilon(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\parallel} dp_{\parallel} \exp \left\{ -\frac{a^2}{4} (k_{\parallel}^2 + p_{\parallel}^2) \right\} \\
 & \times \left[I_0 \left(\frac{a^2}{2} k_{\parallel} p_{\parallel} \right) \left(\frac{\alpha(p_{\parallel}) \alpha_0(p_{\parallel}) \alpha^2(k_{\parallel}) - 2\epsilon(\omega) p^2 k^2}{\epsilon(\omega) \alpha_0(p_{\parallel}) + \alpha(p_{\parallel})} + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\alpha^2(k_{\parallel})}{\epsilon(\omega) \alpha_0(p_{\parallel}) + \alpha(p_{\parallel})} \right) \right. \\
 & + I_2 \left(\frac{a^2}{2} k_{\parallel} p_{\parallel} \right) \left(\frac{\alpha(p_{\parallel}) \alpha_0(p_{\parallel}) \alpha^2(k_{\parallel})}{\epsilon(\omega) \alpha_0(p_{\parallel}) + \alpha(p_{\parallel})} - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\alpha^2(k_{\parallel})}{\epsilon(\omega) \alpha_0(p_{\parallel}) + \alpha(p_{\parallel})} \right) \\
 & \left. - 2I_1 \left(\frac{a^2}{2} k_{\parallel} p_{\parallel} \right) \frac{\alpha(p_{\parallel}) p_{\parallel} k_{\parallel} \alpha(k_{\parallel})}{\epsilon(\omega) \alpha_0(p_{\parallel}) + \alpha(p_{\parallel})} \right], \quad (147)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \mu_s(\theta_0) = & -(\epsilon(\omega) - 1) (\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_0)^{1/2} \\
 & + a^2 \frac{c}{\omega} (\epsilon(\omega) - 1)^2 \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\parallel} dp_{\parallel} \exp \left\{ -\frac{a^2}{4} (k_{\parallel}^2 + p_{\parallel}^2) \right\} \\
 & \times \left\{ I_0 \left(\frac{a^2}{2} k_{\parallel} p_{\parallel} \right) \left[\frac{\alpha(p_{\parallel}) \alpha_0(p_{\parallel})}{\epsilon(\omega) \alpha_0(p_{\parallel}) + \alpha(p_{\parallel})} + \frac{(\omega/c)^2}{\alpha_0(p_{\parallel}) + \alpha(p_{\parallel})} \right] \right. \\
 & \left. - I_2 \left(\frac{a^2}{2} k_{\parallel} p_{\parallel} \right) \left[\frac{\alpha(p_{\parallel}) \alpha_0(p_{\parallel})}{\epsilon(\omega) \alpha_0(p_{\parallel}) + \alpha(p_{\parallel})} - \frac{(\omega/c)^2}{\alpha_0(p_{\parallel}) + \alpha(p_{\parallel})} \right] \right\}. \quad (148)
 \end{aligned}$$

En el caso de superficies rugosas aleatorias unidimensionales, el espectro de potencia $g(|\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}|)$ toma la forma

$$g(|\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}|) = 2\pi \delta(k_2 - p_2) g(|k_1 - p_1|). \quad (149)$$

La presencia de $\delta(k_2 - p_2)$ nos permite evaluar la integral sobre p_2 en las ecuaciones

(141) y (142). Finalmente, la integral sobre p_1 se evalúa numéricamente.

Las expresiones para $\mu_{p,s}(\theta_0)$ para el caso de superficies unidimensionales también se han calculado a segundo orden en la función del perfil de la superficie y están dadas por [Maradudin et al., 1993], [Sánchez-Gil et al., 1995]:

$$\begin{aligned} \mu_p(\theta_0) = & -\frac{\epsilon(\omega) - 1}{\epsilon(\omega)} (\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_0)^{1/2} (2 \sin^2 \theta_0 - \epsilon(\omega)) \\ & -a \left(\frac{\omega}{c}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{(\epsilon(\omega) - 1)^2}{\epsilon^3(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left\{ -(\sin \theta_0 - y)^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)^2 \right\} \\ & \left\{ (\epsilon(\omega) - y^2)^{1/2} (\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_0) \right. \\ & \left. \frac{\left[\epsilon(\omega) y \sin \theta_0 - (\epsilon(\omega) - y^2)^{1/2} (\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_0)^{1/2} \right]^2}{\epsilon(\omega) (1 - y^2)^{1/2} + (\epsilon(\omega) - y^2)^{1/2}} \right\}, \end{aligned} \quad (150)$$

y

$$\begin{aligned} \mu_s(\theta_0) = & -(\epsilon(\omega) - 1) (\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_0)^{1/2} \\ & -a \left(\frac{\omega}{c}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (\epsilon(\omega) - 1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\exp \left\{ -(\sin \theta_0 - y)^2 (\pi a/\lambda)^2 \right\}}{(1 - y^2)^{1/2} + (\epsilon(\omega) - y^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (151)$$

Teniendo a mano estas expresiones para las funciones $\mu_{p,s}(\theta_0)$, se está ahora en la posición de calcular las reflectividades para luz polarizada p y s , para compararlas con los resultados de las mediciones experimentales.

Para describir el esparcimiento incoherente combinamos las ecuaciones (111) y (122) para obtener las expresiones para el coeficiente diferencial de reflexión promedio en la

forma

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right\rangle_{\alpha\beta}^{incoh} = \left(\frac{\omega}{2\pi c} \right)^2 \frac{1}{S} \frac{\cos^2 \theta_s}{\cos \theta_0} \left[\left\langle |G_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \right\rangle - \left| \langle G_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) \rangle \right|^2 \right]. \quad (152)$$

La función $\left\langle |G_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \right\rangle$ es la solución de la ecuación de Bethe-Salpeter [Brown et al., 1983], que tiene la forma

$$\begin{aligned} \left\langle |G_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \right\rangle &= (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \delta_{\alpha\beta} |G_{\beta}(q_{\parallel})|^2 \\ &+ |G_{\alpha}(q_{\parallel})|^2 \sum_{\gamma} \int \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \langle \Gamma_{\alpha\gamma}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{p}_{\parallel}) \rangle \left\langle |G_{\gamma\beta}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (153)$$

donde $\langle \Gamma_{\alpha\gamma}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{p}_{\parallel}) \rangle$ es llamada la función de vértice irreducible, que se puede calcular por medio de técnicas diagramáticas. Sin embargo, ya que estamos interesados sólo en el plano de esparcimiento, y en el orden más bajo de la contribución de la función $\left\langle |G_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \right\rangle$, se puede mantener el orden más bajo de los términos de la diagonal $\langle \Gamma_{\alpha\gamma}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{p}_{\parallel}) \rangle$, y por lo tanto los términos de orden más bajo en la ecuación (153). Como resultado, se tiene que el coeficiente diferencial de reflexión incoherente toma la forma

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right\rangle_{pp}^{incoh} &= \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 \frac{1}{\pi^2} \cos^2 \theta_s \cos \theta_0 \left(\frac{\epsilon(\omega) - 1}{\epsilon(\omega)} \right)^2 \delta^2 |G_p(q_{\parallel})|^2 g(|\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}|) \\ &\times \left| \epsilon(\omega) q_{\parallel} k_{\parallel} - \alpha(q_{\parallel}) \hat{\mathbf{q}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{k}}_{\parallel} \alpha(k_{\parallel}) \right|^2 |G_p(k_{\parallel})|^2, \end{aligned} \quad (154)$$

y

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right\rangle_{ss}^{incoh} &= \left(\frac{\omega}{c} \right)^8 \frac{1}{\pi^2} \cos^2 \theta_s \cos \theta_0 (\epsilon(\omega) - 1)^2 \delta^2 \\ &\times |G_s(q_{\parallel})|^2 g(|\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}|) \left| \hat{\mathbf{q}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{k}}_{\parallel} \right|^2 |G_s(k_{\parallel})|^2. \end{aligned} \quad (155)$$

III.5. Teoría perturbativa de amplitudes pequeñas (TPAP)

Una de las aproximaciones teóricas más comunes para el esparcimiento de luz por superficies rugosas aleatorias es la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas [Rayleigh, 1896], [Rayleigh, 1907], [Rice, 1951], [Ogilvy, 1991], [Nieto-Vesperinas, 1991]. La validez de esta teoría ha sido probada por varios autores.

Primero reescribimos la ecuación (88) introduciendo la función $I(\gamma|\mathbf{q}_{\parallel})$ en la forma

$$I(\gamma|\mathbf{q}_{\parallel}) = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\parallel}) + J(\gamma|\mathbf{q}_{\parallel}), \quad (156)$$

donde

$$J(\gamma|\mathbf{q}_{\parallel}) = \int d^2 \mathbf{x}_{\parallel} e^{-i\mathbf{q}_{\parallel} \cdot \mathbf{x}_{\parallel}} (e^{-i\gamma \zeta(\mathbf{x}_{\parallel})} - 1). \quad (157)$$

Cuando la ecuación (156) se sustituye en la ecuación (88), el resultado se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{R}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) &= (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \overleftrightarrow{F}(k_{\parallel}) + \\ &- (\epsilon(\omega) - 1) \overleftrightarrow{n}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) - (\epsilon(\omega) - 1) \int \frac{d^2 \mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \overleftrightarrow{m}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{p}_{\parallel}) \overleftrightarrow{R}(\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}), \end{aligned} \quad (158)$$

donde $\overleftarrow{F}(k_{\parallel})$ es la matriz de las amplitudes de los coeficientes de reflexión de Fresnel que se obtienen de la ecuación (91), con

$$\overleftarrow{m}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{p}_{\parallel}) = \begin{pmatrix} \frac{q_{\parallel}p_{\parallel} + \alpha(q_{\parallel})\hat{\mathbf{q}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \alpha_0(p_{\parallel})}{\epsilon(\omega)\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel})} & -\frac{(\omega/c)\alpha(q_{\parallel})(\hat{\mathbf{q}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{p}}_{\parallel})_3}{\epsilon(\omega)\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel})} \\ \frac{(\omega/c)(\hat{\mathbf{q}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{p}}_{\parallel})_3 \alpha_0(p_{\parallel})}{\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel})} & \frac{(\omega/c)^2 \hat{\mathbf{q}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{\parallel}}{\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel})} \end{pmatrix} \\ \times \frac{J(\alpha(q_{\parallel}) - \alpha_0(p_{\parallel}))|\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}|}{\alpha(q_{\parallel}) - \alpha_0(p_{\parallel})}, \quad (159)$$

y

$$\overleftarrow{n}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{p}_{\parallel}) = \begin{pmatrix} \frac{q_{\parallel}p_{\parallel} - \alpha(q_{\parallel})\hat{\mathbf{q}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \alpha_0(p_{\parallel})}{\epsilon(\omega)\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel})} & -\frac{(\omega/c)\alpha(q_{\parallel})(\hat{\mathbf{q}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{p}}_{\parallel})_3}{\epsilon(\omega)\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel})} \\ -\frac{(\omega/c)(\hat{\mathbf{q}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{p}}_{\parallel})_3 \alpha_0(p_{\parallel})}{\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel})} & \frac{(\omega/c)^2 \hat{\mathbf{q}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{\parallel}}{\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel})} \end{pmatrix} \\ \times \frac{J(\alpha(q_{\parallel}) + \alpha_0(p_{\parallel}))|\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}|}{\alpha(q_{\parallel}) + \alpha_0(p_{\parallel})}. \quad (160)$$

En la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas se busca una solución aproximada de la ecuación (158) como un desarrollo en serie de potencias en la función del perfil de la superficie. Para esto, la función $J(\gamma|\mathbf{p}_{\parallel})$, a través de la cual el perfil de la superficie entra en la ecuación reducida de Rayleigh, se desarrolla en serie de Taylor,

$$J(\gamma|\mathbf{p}_{\parallel}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \gamma^n \widehat{\zeta}^{(n)}(\mathbf{p}_{\parallel}), \quad (161)$$

donde

$$\widehat{\zeta}^{(n)}(\mathbf{p}_{\parallel}) = \int d^2\mathbf{x}_{\parallel} e^{-i\mathbf{p}_{\parallel} \cdot \mathbf{x}_{\parallel}} \zeta^n(\mathbf{x}_{\parallel}). \quad (162)$$

Si el exponente es pequeño, $\gamma\zeta(\mathbf{x}_{\parallel}) \ll 1$, se pueden mantener sólo algunos términos del desarrollo,

$$\begin{aligned}
 \overleftarrow{R}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) &= (2\pi)^2\delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel})\overleftarrow{F}(\mathbf{k}_{\parallel}) + \overleftarrow{R}^{(1)}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})\widehat{\zeta}(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \\
 &+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \overleftarrow{R}^{(2)}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})\widehat{\zeta}(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel})\widehat{\zeta}(\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \\
 &+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2p'_{\parallel}}{(2\pi)^2} \overleftarrow{R}^{(3)}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{p}'_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})\widehat{\zeta}(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel})\widehat{\zeta}(\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{p}'_{\parallel})\widehat{\zeta}(\mathbf{p}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{163}$$

donde la matriz de 2×2 $\overleftarrow{R}^{(n)}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{p}_{\parallel}|\dots|\mathbf{k}_{\parallel})$ se puede recalcular a partir de la ecuación (158). La reflectividad de la superficie rugosa se determina a partir del promedio de la amplitud de esparcimiento que se determina a segundo orden en el desarrollo de la función del perfil de la superficie y es

$$\left\langle \overleftarrow{R}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \right\rangle = (2\pi)^2\delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \left[\overleftarrow{F}(k_{\parallel}) + \delta^2 \int \frac{d^2p_{\parallel}}{(2\pi)^2} g(|\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}|) \overleftarrow{R}^{(2)}(\mathbf{k}_{\parallel}|\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \right]. \tag{164}$$

Para calcular la distribución angular de intensidad de la luz esparcida difusamente es suficiente desarrollar la función del perfil de la superficie a segundo orden para manejar $\overleftarrow{R}^{(1)}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})$. Entonces, sólo los términos a primer y segundo orden en el desarrollo en serie de la amplitud de esparcimiento son los que se presentan abajo.

El término de orden 1 en la expresión de $\overleftrightarrow{R}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})$ está dado por

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{R}^{(1)}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) &= i(\epsilon(\omega) - 1)2\alpha_0(k_{\parallel}) \\ &\times \left(\begin{array}{cc} \frac{q_{\parallel}k_{\parallel}\epsilon(\omega) - \alpha(q_{\parallel})\hat{\mathbf{q}}_{\parallel}\cdot\hat{\mathbf{k}}_{\parallel}\alpha(k_{\parallel})}{(\epsilon(\omega)\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel}))(\epsilon(\omega)\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}))} & - \frac{(\omega/c)\alpha(q_{\parallel})(\hat{\mathbf{q}}_{\parallel}\times\hat{\mathbf{k}}_{\parallel})_3}{(\epsilon(\omega)\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel}))(\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}))} \\ - \frac{(\omega/c)(\hat{\mathbf{q}}_{\parallel}\times\hat{\mathbf{k}}_{\parallel})_3\alpha(k_{\parallel})}{(\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel}))(\epsilon(\omega)\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}))} & \frac{(\omega/c)^2\hat{\mathbf{q}}_{\parallel}\cdot\hat{\mathbf{k}}_{\parallel}}{(\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel}))(\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}))} \end{array} \right). \quad (165) \end{aligned}$$

El término a segundo orden tiene dos contribuciones $\overleftrightarrow{R}^{(2)}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) = \overleftrightarrow{r}^{(2)}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) + \overleftrightarrow{r}^{(2)}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})$, donde

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{r}^{(2)}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) &= (\epsilon(\omega) - 1)\alpha_0(k_{\parallel}) \quad (166) \\ &\times \left(\begin{array}{cc} \frac{q_{\parallel}k_{\parallel}[\epsilon(\omega)\alpha(q_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel})] - \alpha(q_{\parallel})\hat{\mathbf{q}}_{\parallel}\cdot\hat{\mathbf{k}}_{\parallel}[\alpha(q_{\parallel})\alpha(k_{\parallel}) + \epsilon(\omega)\alpha_0^2(k_{\parallel})]}{(\epsilon(\omega)\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel}))(\epsilon(\omega)\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}))} & - \frac{(\omega/c)\alpha(q_{\parallel})(\hat{\mathbf{q}}_{\parallel}\times\hat{\mathbf{k}}_{\parallel})_3[\alpha(q_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel})]}{(\epsilon(\omega)\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel}))(\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}))} \\ - \frac{(\omega/c)[\alpha(q_{\parallel})\alpha(k_{\parallel}) + \epsilon(\omega)\alpha_0^2(k_{\parallel})](\hat{\mathbf{q}}_{\parallel}\times\hat{\mathbf{k}}_{\parallel})_3}{(\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel}))(\epsilon(\omega)\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}))} & \frac{(\omega/c)^2\hat{\mathbf{q}}_{\parallel}\cdot\hat{\mathbf{k}}_{\parallel}[\alpha(q_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel})]}{(\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel}))(\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}))} \end{array} \right), \end{aligned}$$

y las componentes de la matriz $\overleftrightarrow{r}^{(2)}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})$ tienen la forma

$$\begin{aligned} r_{pp}^{(2)}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) &= \frac{(\epsilon(\omega) - 1)^2}{(\epsilon(\omega)\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel}))} \quad (167) \\ &\times \left\{ \frac{[q_{\parallel}p_{\parallel} + \alpha(q_{\parallel})\hat{\mathbf{q}}_{\parallel}\cdot\hat{\mathbf{p}}_{\parallel}\alpha_0(p_{\parallel})][\epsilon(\omega)p_{\parallel}k_{\parallel} - \alpha(p_{\parallel})\hat{\mathbf{p}}_{\parallel}\cdot\hat{\mathbf{k}}_{\parallel}\alpha(k_{\parallel})]}{(\epsilon(\omega)\alpha_0(p_{\parallel}) + \alpha(p_{\parallel}))} \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\alpha(q_{\parallel})(\hat{\mathbf{q}}_{\parallel}\times\hat{\mathbf{p}}_{\parallel})_3(\hat{\mathbf{p}}_{\parallel}\times\hat{\mathbf{k}}_{\parallel})_3\alpha(k_{\parallel})}{(\alpha_0(p_{\parallel}) + \alpha(p_{\parallel}))} \right\} \frac{2\alpha_0(k_{\parallel})}{(\epsilon(\omega)\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}))}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{ps}^{(2)}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{p}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) &= + \frac{(\epsilon(\omega) - 1)^2}{(\epsilon(\omega)\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel}))} \frac{\omega}{c} \\
&\times \left\{ \frac{[q_{\parallel}p_{\parallel} + \alpha(q_{\parallel})\hat{\mathbf{q}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{\parallel}\alpha_0(p_{\parallel})] \alpha(p_{\parallel})(\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{k}}_{\parallel})_3}{(\epsilon(\omega)\alpha_0(p_{\parallel}) + \alpha(p_{\parallel}))} \right. \\
&+ \left. \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\alpha(q_{\parallel})(\hat{\mathbf{q}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{p}}_{\parallel})_3 \hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{k}}_{\parallel}}{(\alpha_0(p_{\parallel}) + \alpha(p_{\parallel}))} \right\} \frac{2\alpha_0(k_{\parallel})}{(\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}))}, \quad (168)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{sp}^{(2)}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{p}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) &= - \frac{(\epsilon(\omega) - 1)^2}{(\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel}))} \frac{\omega}{c} \\
&\times \left\{ \frac{(\hat{\mathbf{q}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{p}}_{\parallel})_3 \alpha_0(p_{\parallel}) [p_{\parallel}k_{\parallel}\epsilon(\omega) - \alpha(p_{\parallel})\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{k}}_{\parallel}\alpha(k_{\parallel})]}{(\epsilon(\omega)\alpha_0(p_{\parallel}) + \alpha(p_{\parallel}))} \right. \\
&- \left. \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\hat{\mathbf{q}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{\parallel}(\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{k}}_{\parallel})_3 \alpha(k_{\parallel})}{(\alpha_0(p_{\parallel}) + \alpha(p_{\parallel}))} \right\} \frac{2\alpha_0(k_{\parallel})}{(\epsilon\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}))}, \quad (169)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{ss}^{(2)}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{p}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) &= - \frac{(\epsilon(\omega) - 1)^2}{(\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha(q_{\parallel}))} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \\
&\times \left\{ \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\hat{\mathbf{q}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{k}}_{\parallel}}{(\alpha_0(p_{\parallel}) + \alpha(p_{\parallel}))} \right. \\
&- \left. \frac{(\hat{\mathbf{q}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{p}}_{\parallel})_3 \alpha_0(p_{\parallel}) \alpha(p_{\parallel}) (\hat{\mathbf{p}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{k}}_{\parallel})_3}{(\epsilon(\omega)\alpha_0(p_{\parallel}) + \alpha(p_{\parallel}))} \right\} \frac{2\alpha_0(k_{\parallel})}{(\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}))}. \quad (170)
\end{aligned}$$

Entonces, el promedio de la amplitud de esparcimiento (164) se determina completamente. Tomando el módulo cuadrado de la amplitud de esparcimiento y reorganizando los términos para extraer los coeficientes de Fresnel como factor común, obtenemos las siguientes expresiones para las reflectividades:

$$\mathcal{R}_p = |F_p(\theta_0)|^2 \left\{ 1 - 4 \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)^2 \Re \left[\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon(\omega) - 1} \frac{\cos \theta_0}{\epsilon(\omega) \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0} \mu_p(\theta_0) \right] \right\} \quad (171)$$

y

$$\mathcal{R}_s = |F_s(\theta_0)|^2 \left\{ 1 - 4 \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} \right)^2 \Re \left[\frac{\cos \theta_0}{1 - \epsilon(\omega)} \mu_s(\theta_0) \right] \right\}, \quad (172)$$

donde $F_{s,p}(\theta_0)$ son los coeficientes de reflexión de Fresnel para una superficie plana y se pueden obtener de la ecuación (91), y las funciones $\mu_{p,s}(\theta_0)$ están dadas por las ecuaciones (147) y (148) en el caso de superficies rugosas aleatorias bidimensionales y por las ecuaciones (150) y (151) en el caso de superficies rugosas aleatorias unidimensionales. Es fácil verificar que las expresiones (171) y (172) pueden obtenerse fácilmente desarrollando expresiones análogas a las expresiones para las reflectividades (145) y (146) obtenidas por medio de la teoría perturbativa de autoenergía.

La parte incoherente del coeficiente diferencial de reflexión promedio se puede escribir de la forma

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega_s} \right\rangle_{\alpha\beta}^{incoh} = \left(\frac{\omega}{2\pi c} \right)^2 \frac{\cos^2 \theta_s}{\cos \theta_0} \delta^2 \left| R_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) \right|^2 g(|\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}|).$$

Entonces, la contribución de la parte incoherente del coeficiente diferencial de reflexión promedio CDR es

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega_s} \right\rangle_{\alpha\beta}^{incoh} = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 \cos^2 \theta_s \cos \theta_0 |\epsilon(\omega) - 1|^2 \delta^2 g(|\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}|) \chi_{\alpha\beta}(\theta_s | \theta_0), \quad (173)$$

donde los elementos de la matriz $\widehat{\chi}(\theta_s|\theta_0)$ están dados por

$$\widehat{\chi}_{pp}(\theta_s|\theta_0) = \left| \frac{\epsilon(\omega) \sin \theta_s \sin \theta_0 - \sqrt{\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_s} \cos(\phi_s - \phi_0) \sqrt{\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_0}}{(\epsilon(\omega) \cos \theta_s + \sqrt{\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_s})(\epsilon(\omega) \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_0})} \right|^2, \quad (174)$$

$$\widehat{\chi}_{ps}(\theta_s|\theta_0) = \left| \frac{\sqrt{\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_s} \sin(\phi_s - \phi_0)}{(\epsilon(\omega) \cos \theta_s + \sqrt{\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_s})(\cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_0})} \right|^2, \quad (175)$$

$$\widehat{\chi}_{sp}(\theta_s|\theta_0) = \left| \frac{\sin(\phi_s - \phi_0) \sqrt{\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_0}}{(\cos \theta_s + \sqrt{\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_s})(\epsilon(\omega) \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_0})} \right|^2, \quad (176)$$

y

$$\widehat{\chi}_{ss}(\theta_s|\theta_0) = \left| \frac{\cos(\phi_s - \phi_0)}{(\cos \theta_s + \sqrt{\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_s})(\cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_0})} \right|^2. \quad (177)$$

En el caso de una superficie rugosa unidimensional, el espectro de potencia de la superficie es de la forma

$$\begin{aligned} g(|\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}|) &= 2\pi \delta(q_2 - k_2) g(|q_1 - k_1|) \\ &= 2\pi \frac{c}{\omega \sin \theta_s} \delta(\phi_s - \phi_0) g(|q_1 - k_1|), \end{aligned} \quad (178)$$

y el coeficiente diferencial de reflexión es

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{\alpha\alpha}^{incoh} = \int_0^\pi d\phi_s \sin \theta_s \left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega_s} \right\rangle_{\alpha\beta}^{incoh}. \quad (179)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{pp}^{incoh} &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\omega}{c} \right)^3 \cos^2 \theta_s \cos \theta_0 |\epsilon(\omega) - 1|^2 \delta^2 g(|q_1 - k_1|) \times \\ &\times \left| \frac{\epsilon(\omega) \sin \theta_s \sin \theta_0 - \sqrt{\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_s} \sqrt{\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_0}}{(\epsilon(\omega) \cos \theta_s + \sqrt{\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_s})(\epsilon(\omega) \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_0})} \right|^2, \end{aligned} \quad (180)$$

y

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{ss}^{incoh} &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\omega}{c} \right)^3 \cos^2 \theta_s \cos \theta_0 |\epsilon(\omega) - 1|^2 \delta^2 g(|q_1 - k_1|) \times \\ &\times \left| \frac{1}{(\cos \theta_s + \sqrt{\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_s})(\cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_0})} \right|^2. \end{aligned} \quad (181)$$

III.6. Teoría perturbativa de fase ó de perturbación de fase (TPF)

En la teoría de perturbación de fase, es la fase del campo la que se determina perturbativamente. Esta aproximación fue sugerida por [Shen y Maradudin, 1980], y fue desarrollada después para ondas escalares en superficies rugosas aleatorias para las cuales se satisfacían las condiciones de frontera de Dirichlet [Winebrenner y Ishimaru, 1985], [Fitzgerald y Maradudin, 1994].

La teoría de perturbación de fase es de particular interés en estudios de reflectividad, para casos en los que la razón de la longitud de onda a la longitud de correlación no es pequeña. Esta teoría representa una corrección a la teoría clásica basada en la aproximación de Kirchhoff.

La teoría perturbativa de fase o de perturbación de fase, se basa en los resultados de la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas descritos en la sección anterior. Sin embargo, en la teoría perturbativa de fase es más conveniente no trabajar con la amplitud esparcida $\overleftrightarrow{R}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})$, sino con la matriz de esparcimiento definida como

$$\overleftrightarrow{S}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) = \sqrt{\frac{\alpha_0(q_{\parallel})}{\alpha_0(k_{\parallel})}} \overleftrightarrow{R}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}). \quad (182)$$

Ya que estamos interesados sólo en esparcimiento en el plano, en esta sección restringiremos nuestras consideraciones sólo a los elementos diagonales, es decir, pp y ss .

En la teoría de perturbación de fase, la matriz de esparcimiento $\overleftrightarrow{S}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})$ se representa en la forma

$$S_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) = \mathcal{F}_{\alpha}(q_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \int d^2x_{\parallel} \exp[-i(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot \mathbf{x}_{\parallel}] \exp[\mathcal{S}_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{x}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})], \quad (183)$$

donde las funciones $\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})$ y $\mathcal{S}_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{x}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})$ son encontradas a partir del desarrollo de las amplitudes de esparcimiento $R_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})$ en series de potencias de la función del

perfil de la superficie. Es conveniente imponer la condición de que

$$\mathcal{F}_\alpha(\mathbf{k}_\parallel|\mathbf{k}_\parallel) \equiv F_\alpha(k_\parallel), \quad (184)$$

donde $F_\alpha(k_\parallel)$ son los coeficientes de reflexión de Fresnel dados por la ecuación (124), ya que en este caso las funciones $S_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}_\parallel|\mathbf{x}_\parallel|\mathbf{k}_\parallel)$ no contendrán términos independientes de la función del perfil de la superficie. Entonces, en el límite de una superficie plana tendremos que

$$\begin{aligned} S_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}_\parallel|\mathbf{k}_\parallel) &= \mathcal{F}_\alpha(\mathbf{q}_\parallel|\mathbf{k}_\parallel) \int d^2x_\parallel \exp[-i(\mathbf{q}_\parallel - \mathbf{k}_\parallel) \cdot \mathbf{x}_\parallel] \\ &= \mathcal{F}_\alpha(\mathbf{k}_\parallel|\mathbf{k}_\parallel)(2\pi)^2\delta(\mathbf{q}_\parallel - \mathbf{k}_\parallel) \\ &= F_\alpha(k_\parallel)(2\pi)^2\delta(\mathbf{q}_\parallel - \mathbf{k}_\parallel). \end{aligned} \quad (185)$$

Reescribimos la ecuación (163) en términos de la matriz de esparcimiento $S_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}_\parallel|\mathbf{k}_\parallel)$ en la forma

$$\begin{aligned} S_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}_\parallel|\mathbf{k}_\parallel) &= F_\alpha(k_\parallel)(2\pi)^2\delta(\mathbf{q}_\parallel - \mathbf{k}_\parallel) \\ &+ \widehat{\zeta}(\mathbf{q}_\parallel - \mathbf{k}_\parallel) \sqrt{\frac{\alpha_0(q_\parallel)}{\alpha_0(k_\parallel)}} R_{\alpha\alpha}^{(1)}(\mathbf{q}_\parallel|\mathbf{k}_\parallel) \\ &+ \sqrt{\frac{\alpha_0(q_\parallel)}{\alpha_0(k_\parallel)}} \int \frac{d^2p_\parallel}{(2\pi)^2} \widehat{\zeta}(\mathbf{q}_\parallel - \mathbf{p}_\parallel) \widehat{\zeta}(\mathbf{p}_\parallel - \mathbf{k}_\parallel) R_{\alpha\alpha}^{(2)}(\mathbf{q}_\parallel|\mathbf{p}_\parallel|\mathbf{k}_\parallel). \end{aligned} \quad (186)$$

Ahora, notamos que

$$R_{\alpha\alpha}^{(1)}(\mathbf{k}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) = -2i\alpha_0(k_{\parallel})F_{\alpha}(k_{\parallel}). \quad (187)$$

En efecto, para los elementos pp - tenemos

$$\begin{aligned} R_{pp}^{(1)}(\mathbf{k}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) &= 2i\alpha_0(k_{\parallel})(\epsilon(\omega) - 1) \frac{k_{\parallel}^2\epsilon(\omega) - \alpha^2(k_{\parallel})}{(\epsilon(\omega)\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}))^2} \\ &= 2i\alpha_0(k_{\parallel}) \frac{kp^2\epsilon^2(\omega) - \epsilon(\omega)k_{\parallel}^2 - \epsilon(\omega)\alpha^2(k_{\parallel}) + \alpha^2(k_{\parallel})}{(\epsilon(\omega)\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}))^2} \\ &= 2i\alpha_0(k_{\parallel}) \frac{kp^2\epsilon^2(\omega) - \epsilon(\omega)k_{\parallel}^2 - \epsilon^2(\omega)(\omega^2/c^2) - \epsilon(\omega)k_{\parallel}^2 + \alpha^2(k_{\parallel})}{(\epsilon(\omega)\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}))^2} \\ &= 2i\alpha_0(k_{\parallel}) \frac{-\epsilon^2(\omega)\alpha_0^2(k_{\parallel}) + \alpha^2(k_{\parallel})}{(\epsilon(\omega)\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}))^2} \\ &= -2i\alpha_0(k_{\parallel}) \frac{(\epsilon(\omega)\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}))(\epsilon(\omega)\alpha_0(k_{\parallel}) - \alpha(k_{\parallel}))}{(\epsilon(\omega)\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}))^2} \\ &= -2i\alpha_0(k_{\parallel})F_p(k_{\parallel}). \end{aligned} \quad (188)$$

Análogamente, para los elementos, ss - tenemos que

$$\begin{aligned} R_{ss}^{(1)}(\mathbf{k}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) &= 2i\alpha_0(k_{\parallel}) \frac{\omega^2}{c^2} \frac{(\epsilon(\omega) - 1)}{(\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}))^2} \\ &= 2i\alpha_0(k_{\parallel}) \frac{\alpha^2(k_{\parallel}) - \alpha_0^2(k_{\parallel})}{(\alpha_0(k_{\parallel}) + \alpha(k_{\parallel}))^2} \\ &= -2i\alpha_0(k_{\parallel})F_s(k_{\parallel}). \end{aligned} \quad (189)$$

Entonces, podemos definir la función $\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})$ por medio de la relación

$$R_{\alpha\alpha}^{(1)}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) = -2i\alpha_0(k_{\parallel})\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}). \quad (190)$$

Utilizando esta definición, podemos reescribir la ecuación (186) en la forma

$$S_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) = F_{\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \left[(2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) - 2i\sqrt{\alpha_0(q_{\parallel})\alpha_0(k_{\parallel})} \widehat{\zeta}(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{\alpha_0(q_{\parallel})}{\alpha_0(k_{\parallel})}} \int \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \widehat{\zeta}(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}) \widehat{\zeta}(\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \frac{R_{\alpha\alpha}^{(2)}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})}{F_{\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})} \right]. \quad (191)$$

En forma de integrales de Fourier, estas expresiones se pueden reescribir como

$$S_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) = \mathcal{F}_{\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \int d^2 x_{\parallel} e^{-i(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot \mathbf{x}_{\parallel}} \left\{ 1 - 2i\sqrt{\alpha_0(q_{\parallel})\alpha_0(k_{\parallel})} \zeta(\mathbf{x}_{\parallel}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_0(q_{\parallel})}{\alpha_0(k_{\parallel})}} \int \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{R_{\alpha\alpha}^{(2)}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})}{F_{\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})} \right. \\ \left. \times \int d^2 u_{\parallel} (e^{i(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \mathbf{u}_{\parallel}} + e^{i(\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot \mathbf{u}_{\parallel}}) \zeta(\mathbf{x}_{\parallel}) \zeta(\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{u}_{\parallel}) \right\}, \quad (192)$$

que pueden ser exponenciadas por medio del método de cumulantes usando la ecuación (183) [Fitzgerald y Maradudin, 1994]. Para el argumento de la exponencial $S_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{x}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})$ obtenemos la siguiente expresión:

$$\mathcal{S}_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) = -2i\sqrt{\alpha_0(q_{\parallel})\alpha_0(k_{\parallel})} \zeta(\mathbf{x}_{\parallel}) \\ + \sqrt{\frac{\alpha_0(q_{\parallel})}{\alpha_0(k_{\parallel})}} \frac{1}{2} \int \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{R_{\alpha\alpha}^{(2)}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{p}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})}{\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})} \\ \times \int d^2 u_{\parallel} (e^{i(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}) \cdot \mathbf{u}_{\parallel}} + e^{i(\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot \mathbf{u}_{\parallel}}) \zeta(\mathbf{x}_{\parallel}) \zeta(\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{u}_{\parallel}) \\ + 2\alpha_0(q_{\parallel})\alpha_0(k_{\parallel}) \zeta^2(\mathbf{x}_{\parallel}) + \dots \quad (193)$$

diferencial de reflexión promedio en términos de la matriz de esparcimiento tiene la forma

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right\rangle_{\alpha\alpha}^{incoh} = \left(\frac{\omega}{2\pi c} \right)^2 \frac{1}{S} \cos \theta_s \left[\left\langle |S_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \right\rangle - |\langle S_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) \rangle|^2 \right]. \quad (199)$$

Para la expresión (183) para la matriz de esparcimiento tenemos

$$\begin{aligned} & \left[\left\langle |S_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \right\rangle - |\langle S_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) \rangle|^2 \right] \\ &= |\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \int d^2 x_{\parallel} \int d^2 x'_{\parallel} e^{-i(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel})} \\ & \times \left[\langle \exp \{ \mathcal{S}_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{x}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) + \mathcal{S}_{\alpha\alpha}^*(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{x}'_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) \} \rangle \right. \\ & \left. - \langle \exp \mathcal{S}_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{x}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) \rangle \langle \exp \mathcal{S}_{\alpha\alpha}^*(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{x}'_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) \rangle \right]. \quad (200) \end{aligned}$$

Promediando las exponenciales con el uso de la ecuación (194), obtenemos para la integral en la ecuación (200)

$$\begin{aligned} & \langle \exp(\mathcal{S}_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{x}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel}) + \mathcal{S}_{\alpha\alpha}^*(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{x}'_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})) \rangle - \langle \exp(\mathcal{S}_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{x}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})) \rangle \langle \exp(\mathcal{S}_{\alpha\alpha}^*(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{x}'_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})) \rangle \\ &= \exp \left\{ \delta^2 \Re \sqrt{\frac{\alpha_0(q_{\parallel})}{\alpha_0(k_{\parallel})}} \int \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} [g(|\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{p}_{\parallel}|) + g(|\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}|)] \frac{R_{\alpha\alpha}^{(2)}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{p}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})}{\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})} \right\} \\ & \times [\exp[\delta^2 \alpha_0(q_{\parallel}) \alpha_0(k_{\parallel}) W(|\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel}|)] - 1]. \quad (201) \end{aligned}$$

Substituyendo la ecuación (201) en la ecuación (200) y haciendo los cambios de variables $\mathbf{x}_{\parallel} = \mathbf{x}_{\parallel}$ y $\mathbf{u}_{\parallel} = \mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel}$, y teniendo en mente que las integrales dependen sólo de la diferencia $\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel}$, entonces la integral sobre \mathbf{x}_{\parallel} da el área iluminada sobre la

superficie, y finalmente obtenemos la expresión para la parte incoherente del coeficiente diferencial de reflexión:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right\rangle_{\alpha\alpha}^{incoh} &= \left(\frac{\omega}{2\pi c} \right)^2 \cos \theta_s |\mathcal{F}_\alpha(\mathbf{q}_\parallel | \mathbf{k}_\parallel)|^2 \\ &\times \exp \left\{ \delta^2 \Re \sqrt{\frac{\alpha_0(q_\parallel)}{\alpha_0(k_\parallel)}} \int \frac{d^2 p_\parallel}{(2\pi)^2} [g(|\mathbf{q}_\parallel - \mathbf{p}_\parallel|) + g(|\mathbf{p}_\parallel - \mathbf{k}_\parallel|)] \frac{R_{\alpha\alpha}^{(2)}(\mathbf{q}_\parallel | \mathbf{p}_\parallel | \mathbf{k}_\parallel)}{\mathcal{F}_\alpha(\mathbf{q}_\parallel | \mathbf{k}_\parallel)} \right\} \\ &\times \int d^2 u_\parallel \exp [-i(\mathbf{q}_\parallel - \mathbf{k}_\parallel) \cdot \mathbf{u}_\parallel] [\exp(\delta^2 \alpha_0(q_\parallel) \alpha_0(k_\parallel) W(|\mathbf{u}_\parallel|)) - 1]. \end{aligned} \quad (202)$$

Para calcular la parte incoherente del CDR dado por la ecuación (202) necesitamos calcular la integral

$$\int d^2 u_\parallel \exp [-i(\mathbf{q}_\parallel - \mathbf{k}_\parallel) \cdot \mathbf{u}_\parallel] [\exp(\delta^2 \alpha_0(q_\parallel) \alpha_0(k_\parallel) W(|\mathbf{u}_\parallel|)) - 1]. \quad (203)$$

Para hacer esto, desarrollamos en serie el exponente en el integrando

$$\begin{aligned} &\int d^2 u_\parallel \exp \{-i(\mathbf{q}_\parallel - \mathbf{k}_\parallel) \cdot \mathbf{u}_\parallel\} (\exp [\delta^2 \alpha_0(q_\parallel) \alpha_0(k_\parallel) W(|\mathbf{u}_\parallel|)] - 1) = \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta^{2n}}{n!} \alpha_0^n(q_\parallel) \alpha_0^n(k_\parallel) \int d^2 u_\parallel \exp \{-i(\mathbf{q}_\parallel - \mathbf{k}_\parallel) \cdot \mathbf{u}_\parallel\} W^n(|\mathbf{u}_\parallel|). \end{aligned} \quad (204)$$

Para una función de correlación gaussiana $W(|\mathbf{u}_\parallel|) = \exp(-|\mathbf{u}_\parallel|^2/a^2)$, podemos calcular la integral en el lado derecho de la ecuación (204):

$$\int d^2 u_\parallel \exp \{-i(\mathbf{q}_\parallel - \mathbf{k}_\parallel) \cdot \mathbf{u}_\parallel\} \exp \left[-\frac{n u_\parallel^2}{a^2} \right] = \frac{\pi a^2}{n} \exp \left\{ -\frac{a^2}{4n} (\mathbf{q}_\parallel - \mathbf{k}_\parallel)^2 \right\}. \quad (205)$$

Entonces, la ecuación (202) toma la forma

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right\rangle_{\alpha\alpha}^{incoh} = \left(\frac{\omega}{2\pi c} \right)^2 \cos \theta_s |\mathcal{F}_\alpha(\mathbf{q}_\parallel | \mathbf{k}_\parallel)|^2 \\
 & \times \exp \left\{ \delta^2 \Re \sqrt{\frac{\alpha_0(q_\parallel)}{\alpha_0(k_\parallel)}} \int \frac{d^2 p_\parallel}{(2\pi)^2} [g(|\mathbf{q}_\parallel - \mathbf{p}_\parallel|) + g(|\mathbf{p}_\parallel - \mathbf{k}_\parallel|)] \frac{R_{\alpha\alpha}^{(2)}(\mathbf{q}_\parallel | \mathbf{p}_\parallel | \mathbf{k}_\parallel)}{\mathcal{F}_\alpha(\mathbf{q}_\parallel | \mathbf{k}_\parallel)} \right\} \\
 & \times \pi a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta^{2n}}{n!n} \alpha_0^n(q_\parallel) \alpha_0^n(k_\parallel) \exp \left\{ -\frac{a^2}{4n} (\mathbf{q}_\parallel - \mathbf{k}_\parallel)^2 \right\}. \quad (206)
 \end{aligned}$$

III.7. Aproximación de Kirchhoff (AK)

La aproximación de Kirchhoff, también conocida como la aproximación del plano tangente, produce un resultado simple y relativamente preciso para las reflectividades de superficies rugosas aleatorias [Beckmann y Spizzichino, 1987](pág. 72).

En esta teoría, cada punto de la superficie será tratado como si fuera parte de un plano infinito, paralelo a la superficie tangente local. La teoría es por lo tanto exacta para un plano infinito, pero es aproximada para superficies irregulares. Al disminuir la escala lateral de la rugosidad se pierde exactitud en la aproximación.

La aproximación de Kirchhoff, utilizada en conjunto con una formulación integral del problema de esparcimiento, proporciona una expresión para el campo esparcido a cierta distancia del elemento esparcidor [Ogilvy, 1991]. En particular, las expresiones para la reflectividad se usan ampliamente para estimar rugosidad de superficies [Welford, 1977].

Ya que estamos interesados sólo en el esparcimiento en el plano, el problema de

esparcimiento puede ser tratado formalmente como el esparcimiento de una onda escalar por una superficie rugosa aleatoria bidimensional caracterizada por el coeficiente de reflexión de amplitud de Fresnel $F_{p,s}(k_{\parallel})$. El campo total esparcido en el campo lejano es la suma de los campos incidente y esparcido:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \exp\{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{x}_{\parallel}\} \exp\{-i\alpha_0(k_{\parallel})x_3\} + \int \frac{d^2q_{\parallel}}{(2\pi)^2} R(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \exp\{i\mathbf{q}_{\parallel} \cdot \mathbf{x}_{\parallel}\} \exp\{i\alpha_0(q_{\parallel})x_3\}, \quad (207)$$

donde [Méndez et al., 2001]

$$R(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) = F_3(\mathbf{q}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel}) \int d^2x'_{\parallel} \exp\{-i(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot \mathbf{x}'_{\parallel} - ik_a(q_{\parallel}, k_{\parallel})\zeta(\mathbf{x}')\} \quad (208)$$

y

$$k_a(q_{\parallel}, k_{\parallel}) = \alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha_0(k_{\parallel}). \quad (209)$$

El factor angular $F_3(\mathbf{q}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel})$ está dado por

$$F_3(\mathbf{q}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel}) = F_{p,s}(k_{\parallel}) \frac{(\omega/c)^2 + \alpha_0(q_{\parallel})\alpha_0(k_{\parallel}) - (\mathbf{q}_{\parallel} \cdot \mathbf{k}_{\parallel})}{\alpha_0(q_{\parallel})(\alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha_0(k_{\parallel}))}, \quad (210)$$

donde $F_{p,s}(k_{\parallel})$ son los coeficientes de reflexión de Fresnel tanto para luz polarizada p como s .

Elevando al cuadrado y sacando el promedio de las amplitudes se tiene

$$\begin{aligned} \langle |R(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})|^2 \rangle &= |F_3(\mathbf{q}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \iint d^2x_{\parallel} d^2x'_{\parallel} \exp\{-i(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel})\} \\ &\times \langle \exp\{-ik_a(q_{\parallel}, k_{\parallel})[\zeta(\mathbf{x}_{\parallel}) - \zeta(\mathbf{x}'_{\parallel})]\} \rangle. \end{aligned} \quad (211)$$

Para procesos aleatorios gaussianos tenemos que

$$\langle \exp\{-ik_a(q_{\parallel}, k_{\parallel})[\zeta(\mathbf{x}) - \zeta(\mathbf{x}')] \} \rangle = \exp\{-\delta^2 k_a^2 [1 - W(|\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel}|)]\}, \quad (212)$$

y por lo tanto, el promedio de las amplitudes de esparcimiento queda como:

$$\begin{aligned} \langle |R(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})|^2 \rangle &= |F_3(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})|^2 \iint d^2x_{\parallel} d^2x'_{\parallel} \exp\{-i(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel})\} \\ &\times \exp\{-\delta^2 k_a^2 [1 - W(|\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel}|)]\}. \end{aligned} \quad (213)$$

Con los cambios de variables $\mathbf{x}_{\parallel} = \mathbf{x}_{\parallel}$ y $\mathbf{u} = \mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel}$, podemos reescribir la ecuación (213) en la forma

$$\begin{aligned} \langle |R(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})|^2 \rangle &= |F_3(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})|^2 \iint d^2x_{\parallel} d^2u \exp\{-i(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot \mathbf{u}\} \\ &\times \exp\{-\delta^2 k_a^2 [1 - W(|u|)]\}. \end{aligned} \quad (214)$$

Evaluando la integral en \mathbf{x}_{\parallel} tenemos que

$$\begin{aligned} \langle |R(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})|^2 \rangle &= L_1 L_2 |F_3(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})|^2 \int d^2 u \exp\{-i(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot \mathbf{u}\} \\ &\times \exp\{-\delta^2 k_a^2 [1 - W(|u|)]\}, \end{aligned} \quad (215)$$

donde L_1 y L_2 son las longitudes de la superficie a lo largo de las direcciones x_1 y x_2 .

Ahora hacemos el desarrollo en serie de potencias de la exponencial

$$\begin{aligned} \exp\{-\delta^2 k_a^2 [1 - W(|u|)]\} &= \exp\{-\delta^2 k_a^2\} \exp\{\delta^2 k_a^2 W(|u|)\} \\ &= \exp\{-\delta^2 k_a^2\} \left[1 + \delta^2 k_a^2 W(|u|) + \frac{(\delta^2 k_a^2)^2}{2!} W^2(|u|) + \dots \right] \\ &= \exp\{-\delta^2 k_a^2\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\delta k_a)^{2n}}{n!} W^n(|u|). \end{aligned} \quad (216)$$

Consideramos ahora una función de correlación $W(|u|)$ gaussiana, dada por

$$W(|u|) = \exp\left(-\frac{u^2}{a^2}\right), \quad (217)$$

con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \langle |R(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})|^2 \rangle &= L_1 L_2 |F_3(\mathbf{q}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \\ &\int d^2 u \exp\{-i(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot \mathbf{u}\} \exp\{-\delta^2 k_a^2\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\delta k_a)^{2n}}{n!} \exp\left(-\frac{nu^2}{a^2}\right). \end{aligned} \quad (218)$$

Es necesario evaluar integrales de la forma

$$\int d^2u \exp\{-i(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot \mathbf{u}\} \exp\left\{-\frac{nu^2}{a^2}\right\} = \frac{\pi a^2}{n} \exp\left\{-\frac{a^2}{4n} (\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel})^2\right\}, \quad (219)$$

con lo que se encuentra que

$$\begin{aligned} \langle |R(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel})|^2 \rangle &= L_1 L_2 |F_3(\mathbf{q}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \exp\{-\delta^2 k_a^2\} \\ &\times \left[\pi a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\delta k_a)^{2n}}{nn!} \exp\left\{-\frac{a^2}{4n} (\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel})^2\right\} + \text{termino}(n=0) \right]. \end{aligned} \quad (220)$$

Ahora, para el término con $n=0$, se tiene que

$$\int d^2u \exp\{-i(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot \mathbf{u}\} = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}), \quad (221)$$

por lo que el coeficiente diferencial de reflexión promedio total para este caso está dado por

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega_S} \right\rangle &= \frac{\omega}{c} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\alpha_0^2(q_{\parallel})}{\alpha_0(k_{\parallel})} |F_3(\mathbf{q}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \pi a^2 \exp\{-\delta^2 k_a^2\} \times \\ &\times \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\delta k_a)^{2n}}{nn!} \exp\left\{-\frac{a^2}{4n} (\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel})^2\right\} + (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \right]. \end{aligned} \quad (222)$$

El promedio de la amplitud de esparcimiento, que constituye la contribución especial al coeficiente diferencial de reflexión promedio, está dado por

$$\langle R(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \rangle = F_3(\mathbf{q}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel}) \int d^2x'_{\parallel} \exp\{-i(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot \mathbf{x}'_{\parallel}\} \langle \exp\{-ik_a(q_{\parallel}, k_{\parallel})\zeta(\mathbf{x}')\} \rangle. \quad (223)$$

Debido a que para procesos aleatorios gaussianos tenemos que

$$\langle \exp\{-ik_a(q_{\parallel}, k_{\parallel})\zeta(\mathbf{x}')\} \rangle = \exp\left\{-\frac{\delta^2 k_a^2(q_{\parallel}, k_{\parallel})}{2}\right\}, \quad (224)$$

la ecuación (223) toma la forma

$$\langle R(\mathbf{q}_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}) \rangle = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) F_3(\mathbf{q}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel}) \exp\left\{-\frac{\delta^2 k_a^2(q_{\parallel}, k_{\parallel})}{2}\right\}. \quad (225)$$

Entonces, finalmente, la contribución de la parte coherente del coeficiente diferencial de reflexión promedio está dada por

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega_S} \right\rangle_{coh} = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \frac{\omega}{4\pi c} \alpha_0(k_{\parallel}) |F_3(\mathbf{k}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \exp\{-\delta^2 k_a^2(k_{\parallel}, k_{\parallel})\}, \quad (226)$$

y la parte incoherente del coeficiente diferencial de reflexión promedio es:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega_S} \right\rangle_{incoh} &= \frac{\omega}{4\pi c} a^2 \frac{\alpha_0^2(q_{\parallel})}{\alpha_0(k_{\parallel})} |F_3(\mathbf{q}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \exp\{-\delta^2 k_a^2\} \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\delta k_a)^{2n}}{nn!} \exp\left\{-\frac{a^2}{4n} |\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}|^2\right\}. \end{aligned} \quad (227)$$

Dado que $\mathbf{k}_{\parallel} = (k_1, k_2)$ y $\mathbf{q}_{\parallel} = (q_1, q_2)$ pueden escribirse en la forma

$$\mathbf{k}_{\parallel} = \frac{\omega}{c} (\sin \theta_0 \cos \phi_0, \sin \theta_0 \sin \phi_0), \quad (228)$$

$$\mathbf{q}_{\parallel} = \frac{\omega}{c} (\sin \theta_s \cos \phi_s, \sin \theta_s \sin \phi_s), \quad (229)$$

y que

$$\alpha_0(q_{\parallel}) = \frac{\omega}{c} \cos \theta_s, \quad (230)$$

tenemos que

$$k_a = \alpha_0(q_{\parallel}) + \alpha_0(k_{\parallel}) = \frac{\omega}{c} [\cos \theta_0 + \cos \theta_s], \quad (231)$$

y

$$|\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}|^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [\sin^2 \theta_s + \sin^2 \theta_0 - 2 \sin \theta_s \sin \theta_0 \cos(\phi_s - \phi_0)]. \quad (232)$$

Con el desarrollo anterior, tenemos que

$$F_3(\mathbf{q}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel}) = F_{p,s}(\theta_0) \frac{1 + \cos \theta_s \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \sin \theta_s \cos(\phi_s - \phi_0)}{\cos \theta_s [\cos \theta_s + \cos \theta_0]}. \quad (233)$$

Volviendo ahora al promedio del coeficiente diferencial de reflexión incoherente, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega_s} \right\rangle_{incoh} &= \frac{\pi a^2 \cos^2 \theta_s}{\lambda^2 \cos \theta_0} |F_3(\mathbf{q}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \exp \left\{ - \left[\frac{2\pi}{\lambda} \delta(\cos \theta_0 + \cos \theta_s) \right]^2 \right\} \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi}{\lambda} \delta(\cos \theta_0 + \cos \theta_s) \right]^{2n} \frac{1}{n \cdot n!} \times \\ &\times \exp \left\{ - \frac{1}{n} \left(\frac{\pi a}{\lambda} \right)^2 [\sin^2 \theta_s + \sin^2 \theta_0 - 2 \sin \theta_s \sin \theta_0 \cos(\phi_s - \phi_0)] \right\}, \end{aligned} \quad (234)$$

donde $F_3(\mathbf{q}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel})$ está dada por la ecuación (233). Dado que para nuestro caso se tiene esparcimiento en el plano, esto es, que $\phi_s = \phi_0$, a F_3 le llamaremos F_2 , estando dada

por

$$F_2(\mathbf{q}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel}) = F_{p,s}(\theta_0) \frac{1 + \cos(\theta_s + \theta_0)}{\cos \theta_s [\cos \theta_s + \cos \theta_0]}, \quad (235)$$

por lo que el promedio del coeficiente diferencial de reflexión incoherente en el plano está dado por

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right\rangle_{incoh} &= \frac{\pi a^2 \cos^2 \theta_s}{\lambda^2 \cos \theta_0} |F_2(\mathbf{q}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \exp \left\{ - \left[\frac{2\pi}{\lambda} \delta (\cos \theta_0 + \cos \theta_s) \right]^2 \right\} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{2\pi}{\lambda} \delta (\cos \theta_0 + \cos \theta_s) \right]^{2n}}{n \cdot n!} \exp \left\{ - \frac{1}{n} \left(\frac{\pi a}{\lambda} \right)^2 [\sin \theta_s - \sin \theta_0]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (236)$$

mientras que la parte coherente del coeficiente diferencial de reflexión promedio (226) toma la forma

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega_s} \right\rangle_{coh} = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \cos \theta_0 |F_{p,s}(\theta_0)|^2 \exp \left\{ - \left(\frac{4\pi\delta}{\lambda} \right)^2 \cos^2 \theta_0 \right\}. \quad (237)$$

En vista de la definición de la reflectividad dada en la sección 3.1 de este capítulo, obtenemos

$$\mathcal{R}_{p,s}(\theta_0) = |F_{p,s}(\theta_0)|^2 \exp \left\{ - \left(\frac{4\pi\delta}{\lambda} \right)^2 \cos^2 \theta_0 \right\}. \quad (238)$$

Debido a que la función de autocorrelación desaparece de la expresión para la reflectividad en la aproximación de Kirchhoff, las expresiones para la reflectividad son independientes de la dimensionalidad de la superficie rugosa, esto es, que no importa si la superficie es unidimensional o bidimensional; si se tienen las mismas características de rugosidad, la reflectividad será igual.

En el caso de que se tenga una superficie rugosa unidimensional, donde la función de correlación depende sólo de la coordenada x_1 , entonces, en lugar de la ecuación (217), se tendrá

$$W(|u|) = \exp \left\{ -\frac{u_1^2}{a^2} \right\}, \quad (239)$$

por lo que la integral (219) toma la forma

$$\begin{aligned} & \int du_1 du_2 \exp \{ -i (q_1 - k_1) u_1 \} \times \\ & \times \exp \{ -i (q_2 - k_2) u_2 \} \exp \{ -n u_1^2 / a^2 \} \\ & = 2\pi \delta(q_2 - k_2) \frac{\sqrt{\pi} a}{\sqrt{n}} \exp \left\{ -\frac{(q_1 - k_1)^2 a^2}{4n} \right\}, \end{aligned} \quad (240)$$

y por lo tanto, la expresión (220) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \langle |R(\mathbf{q}_{\parallel} | \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \rangle & = L_1 L_2 2\pi \delta(q_2 - k_2) |F_3(\mathbf{q}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \exp \{ -\delta^2 k_a^2 \} \\ & \times \left[\sqrt{\pi} a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\delta k_a)^{2n}}{n! \sqrt{n}} \exp \left\{ -\frac{a^2}{4n} (q_1 - k_1)^2 \right\} + 2\pi \delta(q_1 - k_1) \right]. \end{aligned} \quad (241)$$

Teniendo en mente que $q_2 = k_2$, se obtiene el factor angular a partir de la ecuación (233), donde se observa que $F_3(\mathbf{q}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel}) = F_2(\mathbf{q}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel})$. La expresión para la parte incoherente

del coeficiente diferencial de reflexión promedio es:

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega_s} \right\rangle_{incoh} &= 2\pi \delta(q_2 - k_2) \frac{\sqrt{\pi} a \cos^2 \theta_s}{\lambda \cos \theta_0} |F_2(\mathbf{q}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \\
 &\times \exp \left\{ - \left[\frac{2\pi}{\lambda} \delta(\cos \theta_0 + \cos \theta_s) \right]^2 \right\} \\
 &\times \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi}{\lambda} \delta(\cos \theta_0 + \cos \theta_s) \right]^{2n} \frac{1}{n! \sqrt{n}} \exp \left\{ - \frac{1}{n} \left(\frac{\pi a}{\lambda} \right)^2 [\sin \theta_s - \sin \theta_0]^2 \right\}.
 \end{aligned} \tag{242}$$

Debido a que el coeficiente diferencial de reflexión promedio está dado por

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{incoh} = \int_0^{\pi} d\phi_s \sin \theta_s \left\langle \frac{\partial R}{\partial \Omega_s} \right\rangle_{incoh}, \tag{243}$$

y con

$$2\pi \delta(q_2 - k_2) = 2\pi \frac{c}{\omega \sin \theta_s} \delta(\phi_s - \phi_0), \tag{244}$$

finalmente se obtiene la expresión para la parte incoherente del coeficiente diferencial de reflexión promedio para el caso de superficies unidimensionales,

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{incoh} &= 2 \frac{\sqrt{\pi} a \cos^2 \theta_s}{\lambda \cos \theta_0} |F_2(\mathbf{q}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \exp \left\{ - \left[\frac{2\pi}{\lambda} \delta(\cos \theta_0 + \cos \theta_s) \right]^2 \right\} \\
 &\times \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi}{\lambda} \delta(\cos \theta_0 + \cos \theta_s) \right]^{2n} \frac{1}{n! \sqrt{n}} \exp \left\{ - \frac{1}{n} \left(\frac{\pi a}{\lambda} \right)^2 [\sin \theta_s - \sin \theta_0]^2 \right\}.
 \end{aligned} \tag{245}$$

III.8. Simulación numérica para superficies unidimensionales (SN)

Las aproximaciones perturbativas mencionadas en las secciones anteriores pueden ser utilizadas sólo para superficies poco rugosas, para las cuales se cumple la condición de $|\zeta'(x_1)| \ll 1$ para la validez de la hipótesis de Rayleigh, y debe ser suplementada por la condición $\delta/\lambda \ll 1$, la cual nos permite hacer el desarrollo en serie de potencias en la función del perfil de la superficie. Para superficies con rugosidades mayores debe hacerse una aproximación diferente para la solución del problema de esparcimiento. Una de estas aproximaciones es provista por medio de simulación por computadora.

A continuación haremos una breve descripción del método utilizado para hacer las simulaciones numéricas cuyos resultados se presentan en esta tesis; esta descripción está tomada de [Maradudin y Méndez, 2002].

En el caso de esparcimiento por superficies rugosas unidimensionales, la aplicación de la identidad de la segunda integral de Green en el plano, en la región $x_3 > \zeta(x_1)$, nos produce el campo esparcido en el campo lejano en la forma

$$\Phi_\nu^>(x_1, x_3|\omega)_{sc} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} R_\nu(q, \omega) \exp[iqx_1 + i\alpha_0(q)x_3], \quad (246)$$

donde

$$R_\nu(q, \omega) = \frac{i}{2\alpha_0(q)} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \exp[-iqx_1 - i\alpha_0(q)\zeta(x_1)] \quad (247)$$

$$\times \{i[q\zeta'(x_1) - \alpha_0(q)]\chi_\nu(x_1|\omega) - \Psi_\nu(x_1|\omega)\}.$$

En estas expresiones, $\Phi_\nu^>(x_1, x_3|\omega)$ es el campo magnético $H_2(x_1, x_3|\omega)$ para el caso de polarización p y el campo eléctrico $E_2(x_1, x_3|\omega)$ en el caso de polarización s . Las funciones fuente $\chi_\nu(x_1|\omega)$ y $\Psi_\nu(x_1|\omega)$ están definidas por

$$\chi_\nu(x_1|\omega) = \Phi_\nu^>(x_1, x_3|\omega)|_{x_3=\zeta(x_1)}, \quad (248)$$

$$\Psi_\nu(x_1|\omega) = \left(-\zeta'(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \Phi_\nu^>(x_1, x_3|\omega)|_{x_3=\zeta(x_1)}. \quad (249)$$

Para el campo electromagnético incidente suponemos un haz de ancho finito dado por

$$\Phi_\nu^>(x_1, x_3|\omega)_{inc} = \frac{\omega w}{2\sqrt{\pi}c} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \exp\left(-\left[\frac{\omega w}{2c}\right]^2 (\theta - \theta_0)^2\right) \times \quad (250)$$

$$\times \exp\left\{i\frac{\omega}{c}(x_1 \sin \theta - x_3 \cos \theta)\right\},$$

donde θ_0 es el ángulo de incidencia y w es el semiancho del haz. Esta suposición es necesaria por el hecho de que en la implementación de la aproximación descrita en esta sección sólo superficies aleatorias de longitud finita, las cuales ocupan un intervalo

de $-\frac{1}{2}L_1 < x_1 < \frac{1}{2}L_1$ en el eje x_1 , son utilizadas, puesto que en los cálculos computacionales no pueden utilizarse superficies de longitud infinita. El ancho del haz que intercepta el eje x , $2g = 2w / \cos \theta_0$, se supone suficientemente pequeño comparado con L_1 . De este modo, la porción del eje para la cual $|x_1| > \frac{1}{2}L_1$ prácticamente no está iluminada, y por lo tanto, los efectos asociados con los bordes de la superficie aleatoria de dimensiones finitas se minimizan.

Las funciones fuente $\chi_\nu(x_1|\omega)$ y $\Psi_\nu(x_1|\omega)$ satisfacen un par de ecuaciones integrales inhomogéneas acopladas

$$\begin{aligned} \chi_\nu(x_1|\omega) = & \chi_\nu(x_1|\omega)_{inc} + \int_{-\infty}^{\infty} dx'_1 [H^{(0)}(x_1|x'_1) \chi_\nu(x'_1|\omega) \\ & - L^{(0)}(x_1|x'_1) \Psi_\nu(x'_1|\omega)] \end{aligned} \quad (251)$$

y

$$\begin{aligned} 0 = & - \int_{-\infty}^{\infty} dx'_1 [H^{(\epsilon)}(x_1|x'_1) \chi_\nu(x'_1|\omega) \\ & - \kappa_\nu(\omega) L^{(\epsilon)}(x_1|x'_1) \Psi_\nu(x'_1|\omega)], \end{aligned} \quad (252)$$

donde

$$\chi_\nu(x_1|\omega)_{inc} = \Phi_\nu^>(x_1, x_3|\omega)_{inc}|_{x_3=c(x_1)}. \quad (253)$$

Los kernels $H^{(\epsilon)}(x_1|x'_1)$ y $L^{(\epsilon)}(x_1|x'_1)$ están dados por

$$\begin{aligned}
 H^{(\epsilon)}(x_1|x'_1) &= \frac{i}{4} n_c^2 \frac{\omega^2}{c^2} \\
 &\times \frac{H_1^{(1)} \left(n_c \frac{\omega}{c} \left[(x_1 - x'_1)^2 + (\varsigma(x_1) - \varsigma(x'_1) + \eta)^2 \right]^{1/2} \right)}{n_c \frac{\omega}{c} \left[(x_1 - x'_1)^2 + (\varsigma(x_1) - \varsigma(x'_1) + \eta)^2 \right]^{1/2}} \\
 &\times \left[(x_1 - x'_1) \varsigma'(x'_1) + (\varsigma(x_1) - \varsigma(x'_1) + \eta) \right]
 \end{aligned} \tag{254}$$

y

$$L^{(\epsilon)}(x_1|x'_1) = \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(n_c \frac{\omega}{c} \left[(x_1 - x'_1)^2 + (\varsigma(x_1) - \varsigma(x'_1) + \eta)^2 \right]^{1/2} \right), \tag{255}$$

donde η es un número positivo infinitesimal, $n_c(\omega)$ es el índice de refracción complejo del metal,

$$n_c(\omega) = (\epsilon(\omega))^{1/2}, \Re n_c(\omega) > 0, \Im n_c(\omega) > 0, \tag{256}$$

y $H_n^{(1)}(x)$ son las funciones Hankel de primera clase. Los kernels $H^{(0)}(x_1|x'_1)$ y $L^{(0)}(x_1|x'_1)$ se obtienen utilizando $n_c = 1$ en $H^{(\epsilon)}(x_1|x'_1)$ y $L^{(\epsilon)}(x_1|x'_1)$, respectivamente.

El coeficiente diferencial de reflexión toma ahora la forma

$$\frac{\partial R_\nu}{\partial \theta_s} = \frac{1}{2} \frac{c}{(2\pi)^{3/2}} \frac{|r_\nu(\theta_s)|^2}{\omega w p_{inc}(\theta_0)}, \tag{257}$$

donde

$$r_\nu(\theta_s) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \exp \left[-i \frac{c}{\omega} (x_1 \sin \theta_s + \varsigma(x_1) \cos \theta_s) \right] \quad (258)$$

$$\times \left[i \frac{c}{\omega} (\varsigma'(x_1) \sin \theta_s - \cos \theta_s) \chi_\nu(x_1|\omega) - \Psi_\nu(x_1|\omega) \right]$$

y

$$p_{inc} = \frac{1}{2} \left[\text{Erf} \left(\frac{\omega w}{\sqrt{2}c} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \right) \right. \quad (259)$$

$$\left. + \text{Erf} \left(\frac{\omega w}{\sqrt{2}c} \left(\frac{\pi}{2} + \theta_0 \right) \right) \right],$$

y $\text{Erf}(x)$ es la función de error. Las contribuciones al coeficiente diferencial de reflexión promedio de la luz esparcida coherente e incoherentemente están dadas por

$$\left\langle \frac{\partial R_\nu}{\partial \theta_s} \right\rangle_{coh} = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \frac{c}{\omega w} \frac{|\langle r_\nu(\theta_s) \rangle|^2}{p_{inc}(\theta_0)} \quad (260)$$

y

$$\left\langle \frac{\partial R_\nu}{\partial \theta_s} \right\rangle_{incoh} = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \frac{c}{\omega w} \frac{\langle |r_\nu(\theta_s)|^2 \rangle - |\langle r_\nu(\theta_s) \rangle|^2}{p_{inc}(\theta_0)}. \quad (261)$$

Las ecuaciones integrales (251) y (252) para las funciones fuente se resuelven convirtiéndolas en ecuaciones matriciales que luego se resuelven numéricamente. Esto se hace reemplazando el intervalo infinito de integración por el intervalo finito $(-\frac{1}{2}L_1, \frac{1}{2}L_1)$, y las integrales entonces se convierten en sumas. En este paso, el segmento $-\frac{1}{2}L_1 < x_1 < \frac{1}{2}L_1$ del eje x_1 se divide en de 300 a 400 intervalos iguales. Entonces, la solución

del par de ecuaciones integrales acopladas implica la solución de un problema matricial de al menos 600×600 . Un total del orden de $N_p = 1000$ superficies aleatorias, todas con las mismas propiedades estadísticas, se generan para un intervalo de $(-\frac{1}{2}L_1, \frac{1}{2}L_1)$ por cualquiera de los algoritmos más o menos equivalentes que han sido desarrollados para este propósito. El problema de esparcimiento se resuelve para cada superficie, y se calculan $r_\nu(\theta_s)$ y $|r_\nu(\theta_s)|^2$ para cada solución, y los resultados obtenidos para las N_p realizaciones de la superficie aleatoria son promediados para producir las funciones $\langle r_\nu(\theta_s) \rangle$ y $\langle |r_\nu(\theta_s)|^2 \rangle$ que entran en las ecuaciones (260) y (261).

Capítulo IV

Resultados de esparcimiento para superficies unidimensionales (1-D)

En este capítulo se presentan resultados experimentales del esparcimiento de luz por superficies rugosas aleatorias unidimensionales. Los resultados se presentan por separado en dos secciones; una corresponde a la componente coherente (reflectividad) y la otra a la componente incoherente (coeficiente diferencial de reflexión incoherente CDR).

Los resultados experimentales del esparcimiento coherente son comparados con resultados obtenidos con tres teorías perturbativas (teoría perturbativa de amplitudes pequeñas, teoría de perturbación de fase o perturbativa de fase y teoría perturbativa de autoenergía), con la aproximación de Kirchhoff y con resultados obtenidos a través de simulaciones numéricas rigurosas del problema.

Los resultados obtenidos para la componente incoherente del CDR son comparados

con la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas, con la teoría de perturbación de fase, con la aproximación de Kirchhoff y con simulaciones numéricas rigurosas del problema.

Cada una de las tres muestras utilizadas es representativa de un grupo clasificado de acuerdo a sus longitudes de correlación (ver tabla I). Los resultados experimentales están limitados a ángulos de incidencia menores de 60° , debido a que el ancho del área iluminada crece conforme el ángulo de incidencia aumenta, introduciendo algunas dificultades prácticas para ángulos de incidencia mayores. Este problema fue resuelto posteriormente para las mediciones con las superficies bidimensionales.

IV.1. Esparcimiento coherente

En esta sección se presentan resultados de mediciones y cálculos de la componente coherente de la luz esparcida por superficies rugosas aleatorias. De particular interés es la forma de reflectividad como función del ángulo de incidencia. Se considera tanto luz con polarización s como p , para dos diferentes longitudes de onda de iluminación que son de $5,5\mu m$ y $10,6\mu m$.

IV.1.1. Polarización s

Primero consideramos esparcimiento coherente en el caso de iluminación con luz de longitud de onda de $5,5\mu m$ y polarización s .

Para la muestra A que tiene una longitud de correlación de aproximadamente la mitad de la longitud de onda de iluminación y una desviación estándar de alturas de

aproximadamente $\lambda/15$, podemos observar los resultados tanto de reflectividad experimental como los resultados de cálculos teóricos y los realizados por medio de simulación numérica en la figura (11).

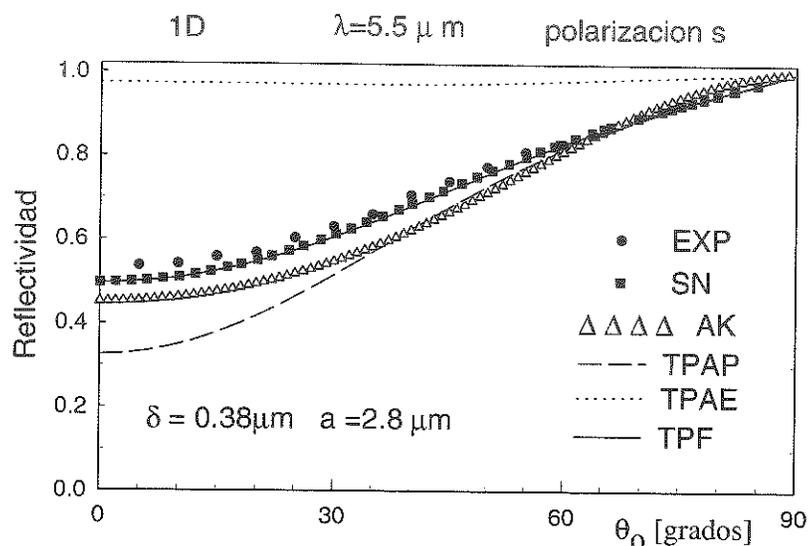


Figura 11: Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización s para la muestra A, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 5,5 \mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,38 \mu m$ y $a = 2,8 \mu m$.

En esta figura se observa que, utilizando la muestra A, los resultados de reflectividad calculados por medio de la simulación numérica (SN) y los obtenidos con la aproximación perturbativa de fase (TPF) concuerdan entre sí, mientras que la reflectividad estimada experimentalmente (EXP), se muestra ligeramente arriba de éstos; la reflectividad calculada por medio de la aproximación de Kirchhoff (AK) se observa por debajo de la reflectividad experimental, lo mismo sucede, pero en mayor grado, con los cálculos realizados para la reflectividad en la aproximación perturbativa de amplitudes pequeñas (TPAP).

Por otro lado, los resultados obtenidos para la reflectividad con la teoría perturbativa de autoenergía (TPAE) adquieren valores mucho mayores que los que se obtienen utilizando las otras teorías perturbativas, la aproximación de Kirchhoff y la reflectividad obtenida experimentalmente.

Para la muestra D, que tiene una longitud de correlación de aproximadamente la longitud de onda de iluminación y una desviación estándar de alturas de aproximadamente $\lambda/7$, podemos observar los resultados de reflectividad experimental producidos por esta muestra, junto con los resultados de los cálculos teóricos y de la simulación numérica en la figura (12).

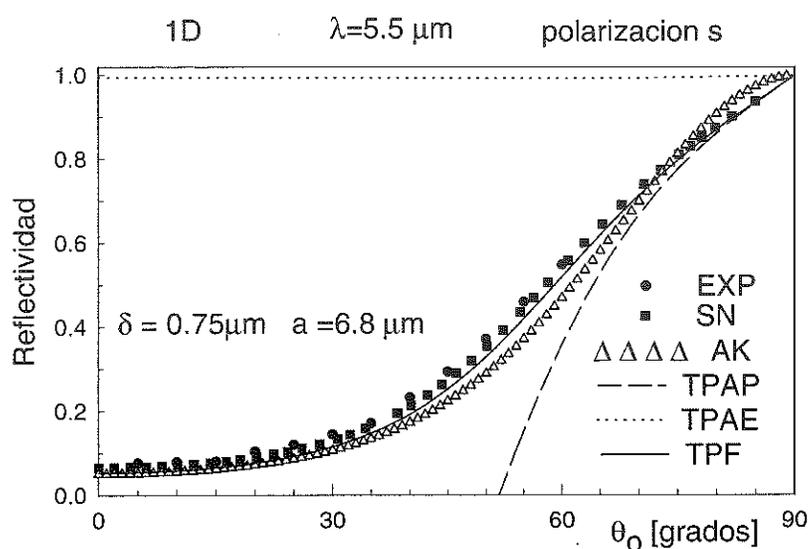


Figura 12: Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización s para la muestra D, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 5,5 \mu\text{m}$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,75 \mu\text{m}$ y $a = 6,8 \mu\text{m}$.

En la figura antes mencionada se observa que los resultados de reflectividad que se obtienen utilizando simulación numérica y los obtenidos experimentalmente son

muy parecidos entre sí, mientras que los resultados que se obtienen con la teoría de perturbación de fase están ligeramente por debajo de éstos.

Al mismo tiempo observamos en esta misma figura, que los resultados de reflectividad experimental siempre se muestran ligeramente arriba de la reflectividad calculada con la aproximación de Kirchhoff; las reflectividades calculadas mediante esta aproximación y para ángulos menores a 30° son prácticamente iguales que las calculadas mediante la teoría de perturbación de fase, mientras que para ángulos mayores y hasta 70° se observan ligeramente por debajo; por arriba de los 70° de incidencia la reflectividad calculada con la aproximación de Kirchhoff vuelve a subir y se observa ligeramente mayor a la reflectividad calculada con la teoría de perturbación de fase.

En la figura (12), se presentan también las reflectividades obtenidas utilizando la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas. Podemos ver que éstas son negativas para ángulos menores a 50° , lo cual es evidentemente incorrecto. Por otro lado, los resultados de reflectividad obtenidos con la teoría perturbativa de autoenergía adquieren valores mucho mayores que los obtenidos experimentalmente, y que los encontrados con las otras teorías perturbativas, la aproximación de Kirchhoff y simulaciones numéricas. Estas conclusiones son similares a las alcanzadas para la muestra A.

La figura (13) presenta los resultados de reflectividad obtenidos con la muestra F, cuya longitud de correlación es tres veces mayor a la longitud de onda de la luz con la que se ilumina y que tiene una desviación estándar de alturas de aproximadamente $\lambda/13$. Se observa que la reflectividad calculada con la aproximación de Kirchhoff y la calculada con la teoría de perturbación de fase concuerdan entre sí. Similarmente, los

resultados de reflectividad que se obtienen por medio de la simulación numérica y los que se obtienen experimentalmente también concuerdan entre sí, y están ligeramente arriba de los resultados que se obtienen utilizando la aproximación de Kirchhoff y la teoría de perturbación de fase.

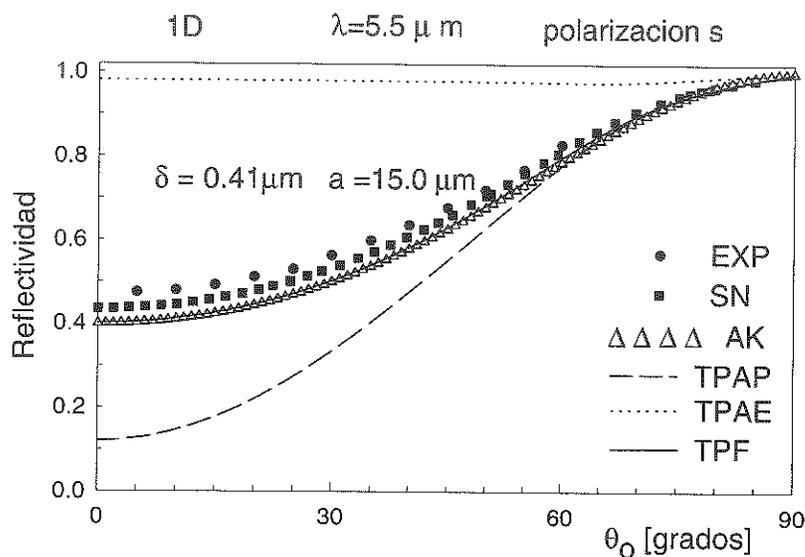


Figura 13: Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización s para la muestra F, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 5,5 \mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,41 \mu m$ y $a = 15 \mu m$.

Para esta misma muestra, los resultados de reflectividad obtenidos por medio de la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas adquieren valores mucho menores para ángulos de incidencia pequeños, pero la curva tiende a emparejarse con las que corresponden a otras teorías, hasta que, de los 60° de incidencia en adelante, coincide con los resultados de reflectividad calculados con la teoría de perturbación de fase.

Los cálculos de reflectividad obtenidos con la teoría de autoenergía presentan reflectividades más altas que las que se obtienen con otras aproximaciones. Este mismo

comportamiento presentan las reflectividades calculadas con esta teoría cuando se utilizan las muestras A y D.

Una vez presentados los resultados de reflectividad para estas tres muestras, que se iluminaron con luz con una longitud de onda de $5,5\mu\text{m}$ y polarización s, se presenta ahora un breve resumen de los resultados.

Primero, en las figuras (11) (12) y (13) se observa que, en general, las reflectividades experimentales son un poco mayores que las obtenidas por medio de las simulaciones numéricas del problema.

Si se consideran ahora los cálculos realizados para la reflectividad con la teoría de perturbación de fase (TPF), se ve que si utilizamos la muestra A, con longitud de correlación corta, existe una similitud entre dichos cálculos y los realizados utilizando simulación numérica. Sin embargo, para las muestras con longitud de correlación más grande (D y F), existen pequeñas diferencias que aumentan conforme la longitud de correlación aumenta.

Para la muestra A, los cálculos de reflectividad realizados con la aproximación de Kirchhoff presentan valores inferiores a los que se obtienen tanto utilizando la teoría de perturbación de fase como de la reflectividad obtenida experimentalmente. Sin embargo, conforme la longitud de correlación aumenta (muestras D y F), los cálculos realizados utilizando la aproximación de Kirchhoff tienden a parecerse a los resultados que se obtuvieron utilizando la teoría de perturbación de fase.

Utilizando la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas en el cálculo de reflectividad se observa que, en algunas ocasiones, predice valores de la reflectividad menores

que los resultados que se obtienen con las otras teorías y la reflectividad experimental, y en algunos casos predice valores de reflectividad negativos.

Utilizando polarización s , y con las características de nuestras muestras, la teoría perturbativa de autoenergía predice valores de la reflectividad mucho mayores que los obtenidos con las otras teorías perturbativas y con la aproximación de Kirchhoff.

Ahora consideramos el caso de polarización s para la muestra A, que tiene una longitud de correlación de aproximadamente $1/4$ de la longitud de onda de la iluminación y una desviación estándar de alturas de aproximadamente $\lambda/28$ para iluminación a la longitud de onda de $10.6 \mu m$.

Los resultados de reflectividad experimental se muestran en la figura (14) junto con los resultados de los cálculos teóricos y la simulación numérica.

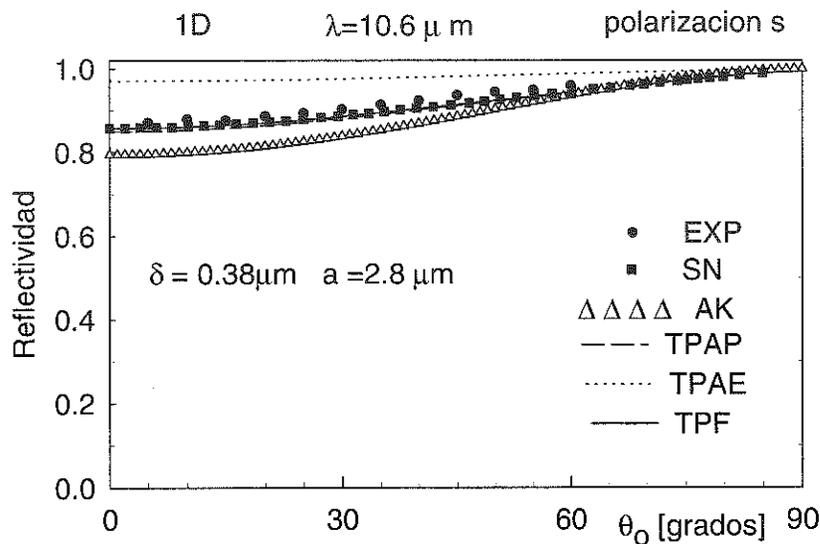


Figura 14: Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización s para la muestra A, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 10,6 \mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,38 \mu m$ y $a = 2,8 \mu m$.

Se observa en dicha figura que la reflectividad calculada con simulación numérica y la calculada con la teoría de perturbación de fase concuerdan entre sí, presentándose la reflectividad calculada experimentalmente ligeramente mayor para todos los ángulos de incidencia; mientras que la reflectividad calculada con la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas es ligeramente menor que la calculada con la simulación numérica a ángulos menores a 45° , concordando de ahí en adelante con los resultados de reflectividad predichos por la teoría de perturbación de fase.

Cuando utilizamos la muestra A, los resultados de reflectividad calculados con la aproximación de Kirchhoff se muestran por debajo de la simulación numérica, de la reflectividad medida experimentalmente y de las reflectividades calculadas utilizando la teoría de perturbación de fase, aunque se acercan lentamente a todas éstas en 70° , a partir de donde los podemos observar ligeramente por encima de todas.

Con esta misma muestra, la reflectividad calculada con la teoría perturbativa de autoenergía, al igual que cuando se utilizó la otra longitud de onda de iluminación, presenta resultados muy elevados.

Para la muestra D, que tiene una longitud de correlación de aproximadamente la mitad de la longitud de onda de iluminación y una desviación estándar de alturas de aproximadamente $\lambda/14$, podemos observar los resultados de reflectividad experimental producidos por esta muestra, junto con los resultados de los cálculos teóricos y la simulación numérica, en la figura (15).

En esta figura se observa que las reflectividades calculadas con la simulación numérica y las calculadas con la teoría de perturbación de fase están muy cercanas entre sí.

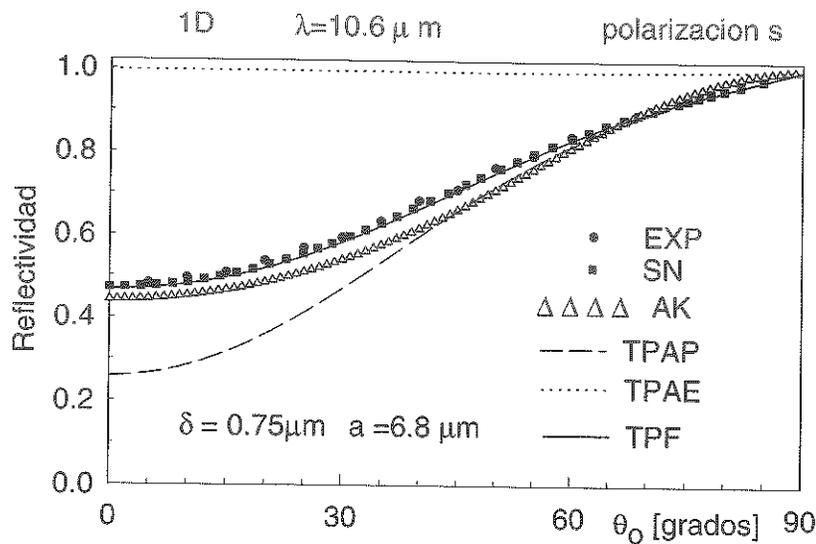


Figura 15: Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización s para la muestra D, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 10,6 \mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,75 \mu m$ y $a = 6,8 \mu m$.

La reflectividad obtenida experimentalmente se presenta ligeramente arriba de la calculada con la teoría de perturbación de fase. Utilizando la aproximación de Kirchhoff para calcular la reflectividad tenemos que ésta se observa por debajo de las reflectividades calculadas tanto con la teoría de perturbación de fase como con la simulación numérica hasta 70° , a partir de ahí, esta reflectividad calculada con la aproximación de Kirchhoff se presenta ligeramente por arriba de las otras, y en los resultados calculados con la teoría de amplitudes pequeñas, la reflectividad a 0° para esta misma muestra se presenta muy por debajo de las otras teorías, aunque la curva presenta una forma que va subiendo, y a 60° sigue la misma forma que la teoría de perturbación de fase.

Por último, para esta muestra, las reflectividades calculadas con la teoría perturbativa de autoenergía presentan siempre valores mayores que las demás reflectividades.

Para la muestra F, que tiene una longitud de correlación de aproximadamente 1.5 veces la longitud de onda de iluminación y una desviación estándar de alturas de aproximadamente $\lambda/26$, podemos observar los resultados de reflectividad experimental obtenidos, junto con los resultados de los cálculos teóricos y la simulación numérica, en la figura (16).

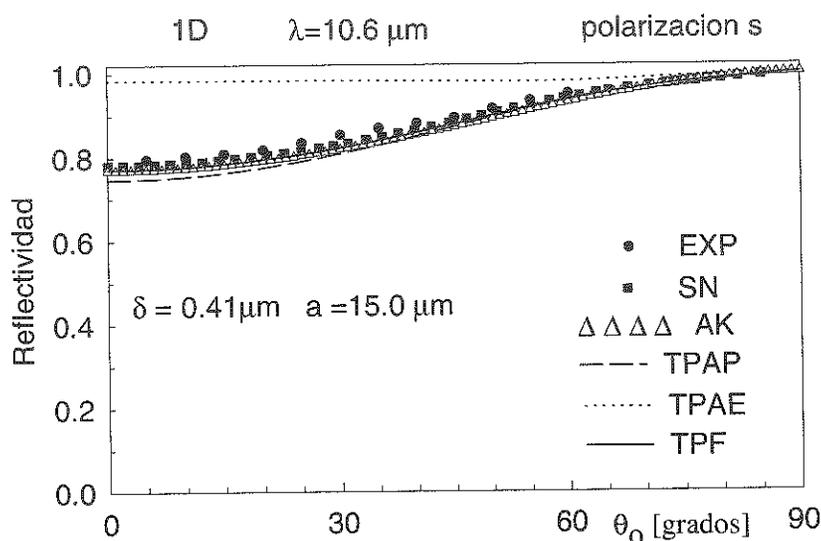


Figura 16: Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización s para la muestra F, iluminando con longitud de onda $\lambda = 10,6 \mu\text{m}$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,41 \mu\text{m}$ y $a = 15 \mu\text{m}$.

En la figura arriba mencionada se observa que la reflectividad obtenida experimentalmente está ligeramente arriba de la reflectividad calculada con simulación numérica, y los resultados de reflectividad calculados con la aproximación de Kirchhoff y con la teoría de perturbación de fase están muy cercanas entre sí y a la vez ligeramente por debajo de la reflectividad calculada con la simulación numérica hasta aproximadamente 70° , a partir de donde, las reflectividades calculadas con estas aproximaciones y

las obtenidas con la simulación numérica son prácticamente iguales.

Para la reflectividad obtenida con la muestra F por medio de la teoría de amplitudes pequeñas, se observa que ésta es menor para ángulos menores de 40° a la reflectividad calculada con la teoría de perturbación de fase, de ahí en adelante, estas reflectividades son prácticamente iguales.

Con la misma muestra, la reflectividad calculada con la teoría de autoenergía, al igual que para las otras muestras, predice valores más elevados de la reflectividad que los calculados con las otras teorías perturbativas, la aproximación de Kirchhoff y la simulación numérica.

De igual forma, una vez presentados los resultados de reflectividad para las tres muestras que se iluminaron con luz de longitud de onda de $10,6\mu m$ y polarización s , se observa que la reflectividad es mayor a esta longitud de onda que para el caso de iluminación con $\lambda = 5,5\mu m$; notándose que la razón de la desviación estándar de alturas a la longitud de onda es menor que en el caso anterior.

Para todas las muestras, los resultados de reflectividad que se obtuvieron utilizando simulación numérica y los calculados con la teoría de perturbación de fase son muy parecidos.

Por otra parte, como en el caso de iluminación con luz de longitud de onda de $5,5\mu m$, los resultados de reflectividad obtenidos experimentalmente están ligeramente arriba de los resultados de reflectividad que se obtienen con simulación numérica.

Para la muestra F, que tiene longitud de correlación más grande que las demás, la reflectividad calculada con la aproximación de Kirchhoff también concuerda con

las reflectividades calculadas con la teoría de perturbación de fase y con simulación numérica.

IV.1.2. Polarización p

Ahora consideramos el caso de polarización p para la muestra A, que tiene una longitud de correlación de aproximadamente un medio de la longitud de onda de la iluminación y una desviación estándar de alturas de aproximadamente $\lambda/15$, para iluminación con $\lambda = 5,5\mu m$.

Los resultados experimentales se muestran en la figura (17), junto con los resultados de los cálculos teóricos y de la simulación numérica del problema. Podemos ver que, los valores de la reflectividad obtenidos con simulación numérica, con la teoría de perturbación de fase, y con la teoría perturbativa de autoenergía concuerdan en su mayor parte, mostrándose la reflectividad obtenida experimentalmente ligeramente arriba de estas reflectividades. Asimismo, la reflectividad calculada con la aproximación de Kirchhoff se encuentra por encima de las calculadas con todas las teorías anteriores, mientras que los resultados obtenidos mediante la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas se encuentran muy por debajo de nuestros resultados experimentales.

Para la muestra D, que tiene una longitud de correlación aproximadamente igual a la longitud de onda de iluminación y una desviación estándar de alturas de aproximadamente $\lambda/7$, en la figura (18) se presentan las reflectividades experimentales, las calculadas teóricamente y las obtenidas con simulación numérica.

Se puede observar en la figura (18) que la reflectividad obtenida experimentalmente

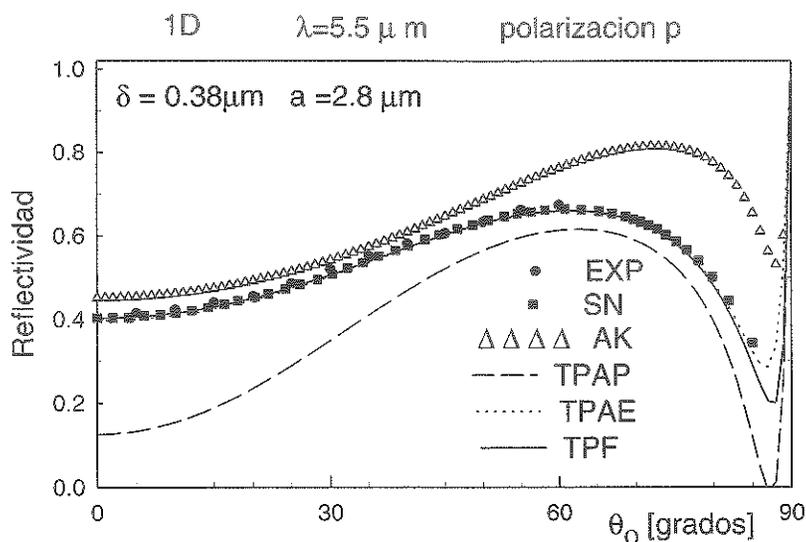


Figura 17: Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización p para la muestra A, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 5,5 \mu\text{m}$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,38 \mu\text{m}$ y $a = 2,8 \mu\text{m}$.

concuerta con la obtenida por medio de simulación numérica. Asimismo, para ángulos menores de 55° , la reflectividad calculada con la aproximación de Kirchhoff, para esta muestra D, también concuerda con la reflectividad experimental, mientras que para ángulos mayores, crece muy por arriba de esta última, hasta alrededor de 75° , donde empieza a caer hasta encontrar el conocido pseudo-ángulo de Brewster. Por otro lado, observamos que las reflectividades calculadas utilizando la teoría de perturbación de fase aparecen ligeramente por debajo de la reflectividad experimental y de la obtenida con simulación numérica. La reflectividad calculada con la teoría perturbativa de autoenergía, aparece, para ángulos menores de 60° , ligeramente por debajo de la obtenida con simulación numérica, y a partir de ahí, la reflectividad calculada con esta teoría perturbativa crece hasta llegar a concordar con la obtenida con simulación numérica.

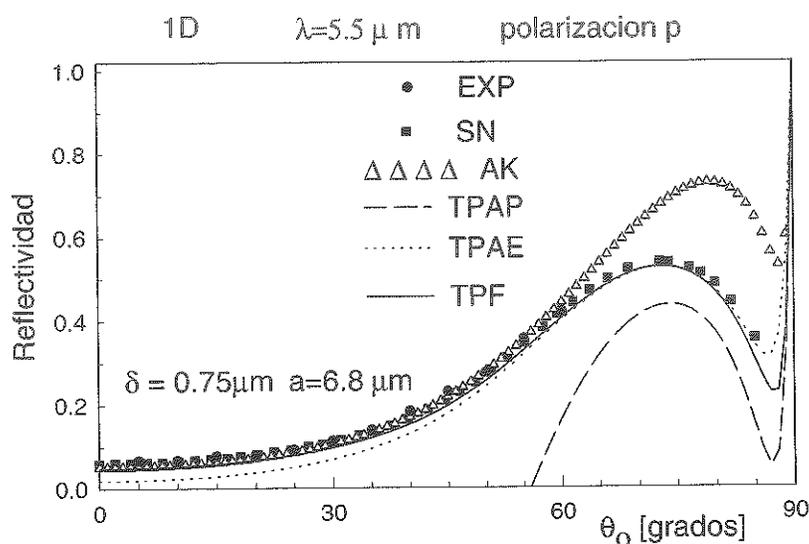


Figura 18: Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización p para la muestra D, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 5,5 \mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,75 \mu m$ y $a = 6,8 \mu m$.

Para esta muestra D, la reflectividad calculada con la teoría de amplitudes pequeñas nos presenta datos irreales para ángulos menores de 55° .

Los resultados experimentales de reflectividad que se obtuvieron para la muestra F se pueden observar en la figura (19), junto con los resultados de los cálculos teóricos y de la simulación numérica. Esta muestra tiene una longitud de correlación de aproximadamente tres veces la longitud de onda de la iluminación, $\lambda = 5,5 \mu m$, y una desviación estándar de alturas de $\lambda/13$.

Podemos observar un buen ajuste entre la reflectividad experimental y la reflectividad obtenida con simulación numérica, utilizando la muestra F. Los resultados de reflectividad que se obtuvieron con la aproximación de Kirchhoff están ligeramente por debajo de los resultados obtenidos experimentalmente, mientras que las reflectividades

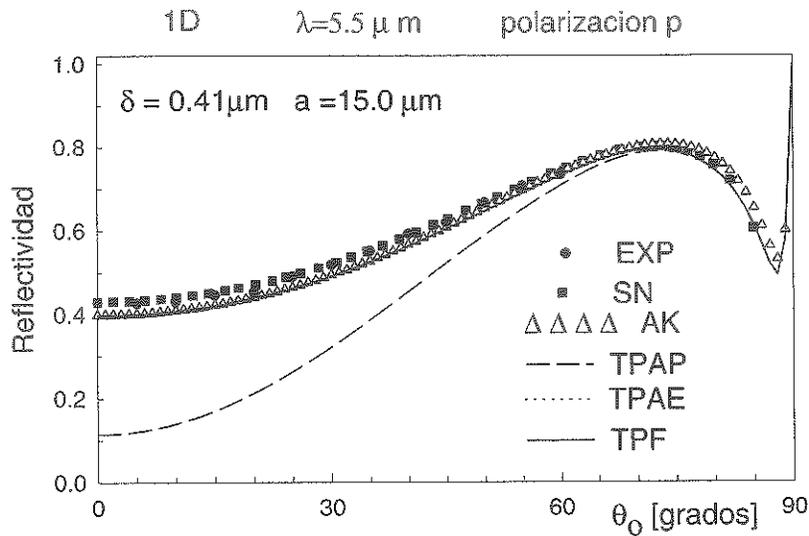


Figura 19: Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización p para la muestra F, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 5,5 \mu\text{m}$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,41 \mu\text{m}$ y $a = 15 \mu\text{m}$.

obtenidas con la teoría perturbativa de fase y la de autoenergía son prácticamente iguales y siguen las mismas tendencias que la aproximación de Kirchhoff hasta llegar al pseudo-ángulo de Brewster, a partir de donde la reflectividad que se obtiene con la aproximación de Kirchhoff se hace ligeramente mayor que las otras reflectividades.

Para las reflectividades calculadas mediante la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas, que se pueden observar también en la figura (19), tenemos que éstas se encuentran muy por debajo de las que se obtienen con las otras teorías y con la simulación numérica, así como de las obtenidas experimentalmente, aunque la reflectividad calculada mediante esta teoría aumenta gradualmente, y alrededor de los 65° se empalma con las reflectividades obtenidas con la simulación numérica y con las calculadas con las otras dos teorías perturbativas.

Una vez presentados los resultados de reflectividad que se obtuvieron para estas tres muestras cuando iluminamos con luz con longitud de onda de $\lambda = 5,5\mu m$ y polarización p , se presenta ahora una breve discusión de los resultados, observando que al igual que para la polarización s , la forma de las curvas es sensible a la longitud de correlación y a la desviación estándar de alturas, y varía dependiendo de la teoría empleada en los cálculos.

En general, con esta polarización, la reflectividad crece lentamente conforme el ángulo de incidencia aumenta, pasa por un máximo y cae al acercarnos al llamado pseudo-ángulo de Brewster, para luego aumentar rápidamente conforme θ_0 se aproxima a 90° .

Como en el caso de polarización s , las reflectividades experimentales son ligeramente mayores que las obtenidas utilizando simulación numérica, aunque para este caso de polarización p , las diferencias son mucho menores.

Para la muestra F, que presenta una longitud de correlación mayor que las otras muestras, los resultados de reflectividad que se obtienen con simulación numérica, con la aproximación de Kirchhoff, y con los cálculos teóricos utilizando la teoría perturbativa de autoenergía y la teoría de perturbación de fase, muestran un relativo acuerdo entre sí, y a la vez con las reflectividades obtenidas experimentalmente, como se observa en la figura (19).

Para la muestra D, ver figura (18), con excepción de la reflectividad obtenida basándose en la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas, las predicciones para las reflectividades calculadas con la teoría de perturbación de fase, la aproximación de Kirchhoff

y con la simulación numérica, son muy parecidas a las reflectividades obtenidas experimentalmente para ángulos de incidencia menores que los 55° .

Las diferencias entre las reflectividades obtenidas con la aproximación de Kirchhoff y las obtenidas con las teorías perturbativas de fase y de autoenergía son más notorias para la muestra A que para las otras dos muestras.

La teoría perturbativa de autoenergía, la cual produce resultados incorrectos para iluminación en polarización *s*, produce resultados tan buenos como los calculados con la teoría de perturbación de fase para el caso de polarización *p*.

Para los parámetros de estas tres muestras, la reflectividad calculada con la aproximación perturbativa de amplitudes pequeñas presenta valores generalmente mucho menores que los que se obtuvieron con las otras teorías, con la simulación numérica y de los experimentos.

Se puede observar que para la muestra con mayor la longitud de correlación, la mayoría de las predicciones teóricas son prácticamente insensibles a la polarización para ángulos pequeños de incidencia. La excepción es el caso de la teoría perturbativa de autoenergía, la cual predice una dependencia en la polarización para la reflectividad aún a incidencia normal.

En general, aparecen algunas diferencias entre los resultados teóricos para las polarizaciones *s* y *p* conforme se incrementa el ángulo de incidencia.

A continuación se presentan los resultados para las tres muestras cuando se ilumina con luz de longitud de onda de $10.6 \mu m$ y en polarización *p*.

Para la muestra A, los resultados de reflectividad obtenidos se presentan en la figura

(20), junto con los resultados de los cálculos teóricos y de la simulación numérica. Esta muestra tiene una longitud de correlación que es 3.8 veces menor que la longitud de onda de iluminación y una desviación estándar de alturas de aproximadamente $\lambda/28$.

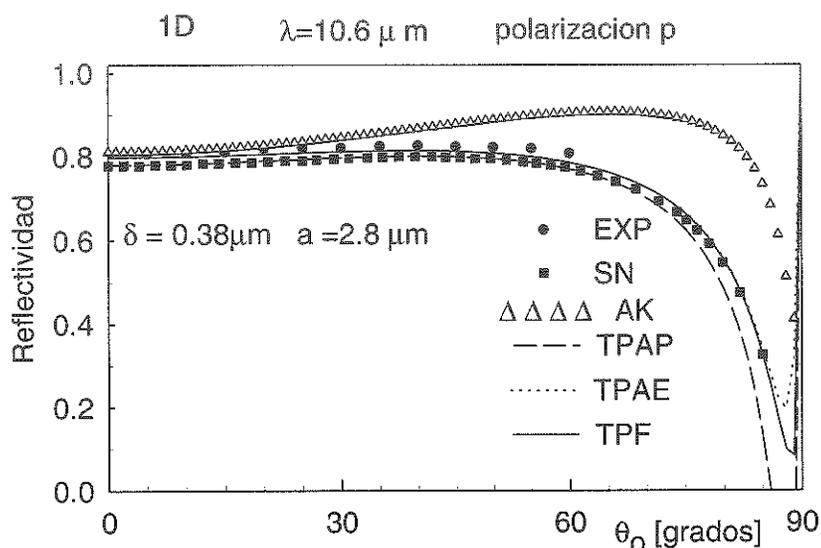


Figura 20: Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización p para la muestra A, iluminando con longitud de onda de $10,6 \mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,38 \mu m$ y $a = 2,8 \mu m$.

En esta figura se observa que la reflectividad obtenida experimentalmente se encuentra ligeramente arriba de las reflectividades que se obtienen con las teorías perturbativas de fase y de autoenergía, coincidiendo estas dos últimas hasta aproximadamente 80° , a partir de donde se separan un poco, quedando las reflectividades calculadas con la teoría perturbativa de autoenergía por encima de las calculadas con la teoría de perturbación de fase.

Para la muestra A, las reflectividades calculadas con simulación numérica y las calculadas con la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas son muy parecidas hasta

65° , a partir de donde la reflectividad que se obtiene con simulación numérica se despega de la que se obtiene con la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas y empieza a parecerse más a las reflectividades calculadas con la teoría de perturbación de fase. Por otro lado, las reflectividades calculadas con la aproximación de Kirchhoff se observan siempre por encima, tanto de las reflectividades experimentales, como de las calculadas por medio de las otras teorías.

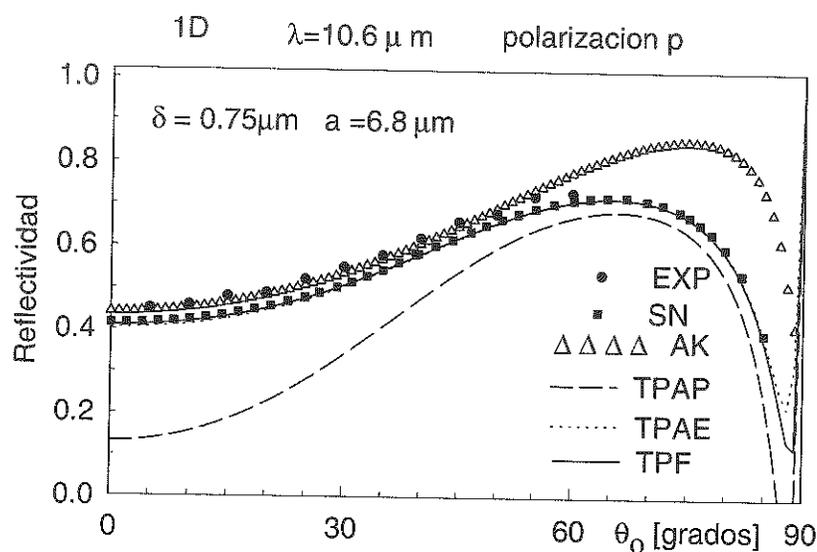


Figura 21: Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización p para la muestra D, iluminando con longitud de onda de $10,6 \mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,75 \mu m$ y $a = 6,8 \mu m$.

Las reflectividades obtenidas experimentalmente, junto con las obtenidas de los cálculos analíticos y de la simulación numérica se presentan en la figura (21) para la muestra D, que tiene una longitud de correlación de aproximadamente la mitad de la longitud de onda de iluminación y una desviación estándar de alturas de aproximadamente $\lambda/14$.

Para esta figura (21) se ve que los resultados experimentales de reflectividad están ligeramente arriba de las reflectividades calculadas con simulación numérica y con las teorías perturbativas de autoenergía y de fase, y se puede observar que el pseudo-ángulo de Brewster es más cercano a los noventa grados para las reflectividades calculadas con la teoría perturbativa de fase que para las calculadas con la teoría perturbativa de autoenergía. Además, las reflectividades obtenidas con la aproximación de Kirchhoff concuerdan muy bien con las reflectividades experimentales hasta los 50° , a partir de donde las reflectividades calculadas con la aproximación de Kirchhoff empiezan a subir y a despegarse de las reflectividades experimentales. La reflectividad experimental, a partir de los 50° , tiende a seguir la forma de la curva de la reflectividad calculada con la teoría de perturbación de fase, aunque está ligeramente arriba de ésta.

Tenemos que las reflectividades calculadas con la aproximación perturbativa de amplitudes pequeñas se muestran siempre muy por debajo de las otras teorías para esta misma muestra, dando además valores irreales cerca de 85° .

Las reflectividades medidas para la muestra F se pueden observar en la figura (22), junto con las reflectividades calculadas teóricamente y con simulación numérica. Esta muestra presenta una longitud de correlación de 1.4 veces la longitud de onda de iluminación y una desviación estándar de alturas aproximada de $\lambda/26$.

En la figura se observa que las reflectividades experimentales concuerdan en gran medida con las reflectividades calculadas con las teorías perturbativas de fase y de autoenergía, así como con las calculadas con la aproximación de Kirchhoff y con simulación numérica. Por otro lado, las reflectividades calculadas con la teoría perturbativa

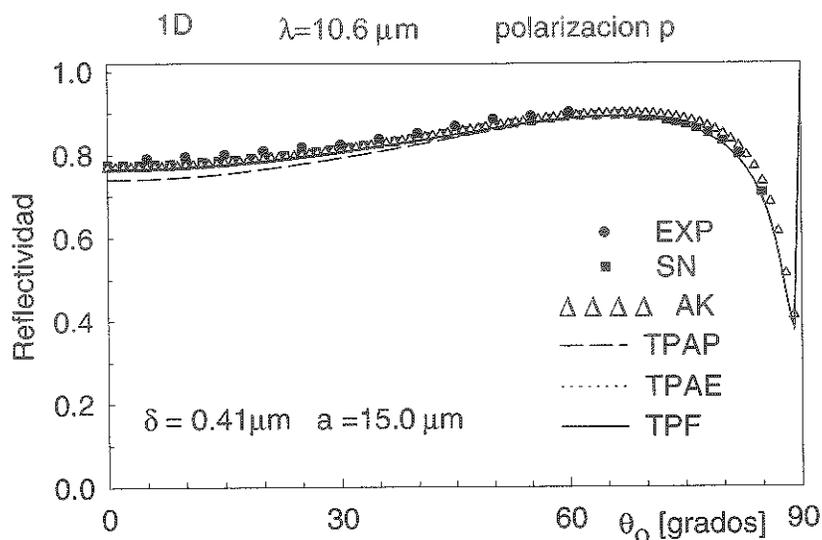


Figura 22: Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización p para la muestra F, iluminando con longitud de onda de $10,6 \mu\text{m}$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,41 \mu\text{m}$ y $a = 15 \mu\text{m}$.

de amplitudes pequeñas se encuentran ligeramente por debajo de todas las otras hasta los 50° , a partir de donde estas reflectividades se parecen mucho a las calculadas con las otras teorías perturbativas.

Haciendo un resumen de lo que se observó en las figuras (20) a la (22), se tiene que las reflectividades son relativamente mayores para esta longitud de onda. Para ángulos de incidencia pequeños, la reflectividad aumenta lentamente con θ_0 , y para ángulos mayores, las teorías predicen un mínimo muy pronunciado (el pseudo-ángulo de Brewster). Desafortunadamente, esto ocurre para ángulos mayores a los que se puede medir con el arreglo experimental.

Para la muestra F, los valores de reflectividad obtenidos con las teorías perturbativas son similares a los obtenidos con la simulación numérica, y a los obtenidos

experimentalmente; sólo para las reflectividades calculadas con la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas se encuentran pequeñas diferencias a ángulos de incidencia pequeños. La reflectividad calculada con la aproximación de Kirchhoff presenta algunas diferencias con los resultados predichos por la teoría de perturbación de fase para ángulos grandes.

Tenemos ahora, que para la muestra D, la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas produce valores de reflectividad menores que los valores que se obtienen con las otras teorías.

Para la muestra A, y para ángulos de incidencia pequeños, todas las teorías producen resultados de reflectividad que concuerdan con la simulación numérica, pero las reflectividades obtenidas con la aproximación de Kirchhoff difieren de las otras al incrementarse el ángulo de incidencia.

Como en los casos anteriores, generalmente la reflectividad experimental se muestra ligeramente por encima de las reflectividades predichas por todas las teorías perturbativas, por la aproximación de Kirchhoff y por la simulación numérica.

IV.2. Esparcimiento incoherente

Los resultados experimentales obtenidos para la componente incoherente del coeficiente diferencial de reflexión son comparados con los que se obtienen mediante dos teorías perturbativas, la de amplitudes pequeñas y la de fase, así como con los que se obtienen utilizando la aproximación de Kirchhoff y de simulaciones numéricas del prob-

lema. Debido a que es sabido que el esparcimiento difuso o incoherente por superficies rugosas aleatorias gaussianas uni-dimensionales no produce cambios de polarización, es decir, que si la superficies se ilumina con luz con polarización s , al detector llegará también luz con polarización s , y lo mismo ocurre para polarización p , no se utiliza un polarizador antes del detector para detectar las polarizaciones p y s [Ogilvy, 1991] (pág. 118).

Todas las mediciones y cálculos que se presentan en esta sección corresponden a tres ángulos de incidencia: 5° , 30° y 50° .

En la siguiente subsección presentamos los resultados obtenidos utilizando polarización p y polarización s . No los hemos subdividido como en la sección de esparcimiento coherente, debido a que no existen muchas diferencias entre éstos, y sólo haremos notar las diferencias cuando las haya.

En la presentación de estos resultados para la componente incoherente del coeficiente diferencial de reflexión hemos hecho algunos cambios de escalas para los diferentes ángulos de esparcimiento, para así poder hacer notar en algunos casos las pequeñas diferencias que existen para las distintas aproximaciones. Además, debido a que aunque las mediciones realizadas para las muestras unidimensionales se hicieron tomando mediciones sobre varias regiones diferentes de la muestra y obteniendo el promedio de éstas, dichos resultados presentan mucho ruido de moteado, por lo que los resultados experimentales que se presentan en la siguiente sección fueron suavizados por medio de los filtros de Savitzky-Golay [Press et al., 1986](págs. 644-649).

IV.2.1. Resultados en polarización s y p

Los resultados presentados a continuación son para un grupo seleccionado de tres muestras representativas con longitudes de correlación que son aproximadamente de un medio, igual y tres veces mayor que la longitud de onda de iluminación, que para este caso es de $5,5\mu m$; tanto para polarización s como para polarización p .

En la figura (23) se presentan los datos experimentales en color azul y los datos suavizados en color negro, para hacer notar la diferencia entre éstos. En adelante en esta sección se presentarán los datos suavizados en lugar de los medidos directamente.

En las figuras (24) y (25) se presentan resultados de la componente incoherente del coeficiente diferencial de reflexión para los diferentes ángulos de incidencia que corresponden a la muestra A, junto con los correspondientes resultados teóricos. Esta muestra tiene una longitud de correlación que es aproximadamente un medio de la longitud de onda de iluminación y una desviación estándar de alturas de aproximadamente $\lambda/15$ y un cociente δ/a de aproximadamente 0.13.

En las figuras (24) y (25) podemos observar que las curvas de la parte incoherente del coeficiente diferencial de reflexión son anchas, abarcando prácticamente todo el hemisferio, desde aproximadamente -90^0 hasta 90^0 en ángulo de esparcimiento. Por otro lado, observamos que la componente incoherente del coeficiente diferencial de reflexión experimental presenta muchas variaciones en intensidad debido al moteado, y a la vez, que estos resultados experimentales concuerdan en gran parte con los obtenidos tanto con simulación numérica como con la teoría de perturbación de fase.

Los resultados que se obtienen con la aproximación de Kirchhoff para los ángulos de 5° y 30° , están ligeramente abajo de los resultados que se obtienen experimentalmente. Asimismo, para el ángulo de 50° , en polarización s , podemos observar que el máximo está un poco corrido en la dirección negativa, mientras que en polarización p el máximo está un poco corrido en la dirección positiva. Además, se observa que los resultados experimentales se presentan muy por debajo de los obtenidos utilizando la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas, aunque observamos que conforme el ángulo de incidencia aumenta esta diferencia disminuye.

En las figuras (24) y (25) podemos observar que se obtiene una pequeña diferencia al iluminar con polarización s o con polarización p . Las curvas que se obtienen utilizando polarización p son ligeramente más anchas y presentan una caída menos suave cerca de los 90° .

La muestra D tiene una longitud de correlación ligeramente mayor que la longitud de onda de iluminación, una desviación estándar de alturas de aproximadamente $\lambda/7$ y un cociente δ/a de aproximadamente 0.11. En las figuras (26) y (27) se presentan los resultados para la componente incoherente del coeficiente diferencial de reflexión para los diferentes ángulos de incidencia. Las curvas correspondientes a esta muestra son menos anchas que las de la anterior y, en contraste con las anteriores, no hay mucha diferencia entre las curvas correspondientes a diferentes polarizaciones.

Los resultados para la componente incoherente del coeficiente diferencial de reflexión para la muestra D, que se obtienen experimentalmente, concuerdan con los resultados que se obtienen tanto de los cálculos hechos con la teoría de perturbación de fase, como

de la simulación numérica, estando los resultados que se obtienen con la aproximación de Kirchhoff ligeramente arriba de éstos sólo en la parte central de la curva, para los tres ángulos de incidencia con que se trabajó.

En estas mismas figuras observamos que cuando utilizamos la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas para realizar el cálculo de la componente incoherente, ésta resulta mucho mayor que la obtenida tanto experimentalmente, como con simulación numérica y con las otras aproximaciones, aunque podemos observar que conforme el ángulo de incidencia aumenta esta diferencia disminuye, por lo que decimos que esta teoría resulta menos adecuada que las anteriores para hacer este cálculo.

Los resultados para el coeficiente diferencial de reflexión incoherente para la muestra F se presentan en las figuras (28) y (29). Esta muestra tiene una longitud de correlación que es aproximadamente tres veces mayor que la longitud de onda de iluminación y presenta una desviación estándar de alturas de aproximadamente $\lambda/13$ y un cociente δ/a de aproximadamente 0.027.

Al igual que con los resultados que se obtuvieron para la muestra D, cuando utilizamos la muestra F, los resultados experimentales para la componente incoherente del coeficiente diferencial de reflexión concuerdan con los resultados que se obtienen utilizando tanto la aproximación de Kirchhoff, como la aproximación perturbativa de fase y la simulación numérica.

Regresando a las figuras (28) y (29), pero ahora comparando los resultados que se obtienen para la componente incoherente del coeficiente diferencial de reflexión experimental con los que se obtienen mediante la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas,

se puede observar que los resultados teóricos son mucho más elevados, pero al igual que lo que ocurre para la muestra D, esta diferencia se va haciendo menor conforme el ángulo de incidencia aumenta.

Haciendo un resumen de los resultados presentados en esta sección para cuando iluminamos con luz de longitud de onda de $5.5 \mu m$ y con polarización s y p , se tiene que la forma de las curvas de esparcimiento para la muestra de longitud de correlación corta son anchas y se extienden por cerca de 180° , pero conforme la longitud de correlación crece, estas curvas de esparcimiento se van haciendo más angostas, como se observa para el esparcimiento generado por las otras dos muestras. Esto se debe también en parte al hecho de que las pendientes de la superficie rugosa son más bajas para la muestra de longitud de correlación larga y menos bajas para la muestra de longitud de correlación corta.

Por otro lado, los resultados experimentales concuerdan con los resultados que se obtienen utilizando simulación numérica.

Para esta longitud de onda de $5.5 \mu m$, el mejor ajuste teórico a las curvas experimentales se obtiene siempre cuando los cálculos se realizan por medio de la aproximación perturbativa de fase, para las tres muestras.

Los resultados que se obtienen con la aproximación de Kirchhoff se encuentran ligeramente abajo de los experimentales, pero conforme el ángulo de incidencia crece, los resultados obtenidos con esta aproximación tienden a parecerse más a los obtenidos experimentalmente.

La componente incoherente del coeficiente diferencial de reflexión calculada uti-

lizando la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas se muestra muy elevada en comparación con la obtenida experimentalmente para las tres muestras (A, D y F), pero se puede observar también que conforme el ángulo de incidencia crece esta diferencia disminuye.

A continuación presentamos los resultados que se obtuvieron iluminando las muestras con luz de longitud de onda de $10,6\mu m$.

Los resultados para la parte incoherente del coeficiente diferencial de reflexión que se obtienen con la muestra A se presentan en las figuras (30) y (31). Esta muestra tiene una longitud de correlación de aproximadamente un cuarto de la longitud de onda de iluminación, una desviación estándar de alturas de aproximadamente $\lambda/28$, y un cociente δ/a de aproximadamente 0.13.

Se puede observar que las gráficas que se obtienen para la componente incoherente del coeficiente diferencial de reflexión para esta muestra son anchas y se extienden por cerca de 180° , siendo más anchas para polarización p que para polarización s .

Se observa también en las figuras antes citadas, que los resultados para el coeficiente diferencial de reflexión que se obtienen experimentalmente concuerdan en gran parte con los resultados generados con la simulación numérica y con los generados por medio de la teoría perturbativa de fase, estando los resultados que se obtienen con la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas ligeramente por arriba.

Los resultados de la parte incoherente del coeficiente diferencial de reflexión generados con la aproximación de Kirchhoff, para el ángulo de incidencia de 5° , se parecen mucho a los resultados generados con simulación numérica, pero conforme el ángulo de

incidencia aumenta, el coeficiente generado con esta aproximación tiende a disminuir y a separarse del generado con simulación numérica.

En las figuras (32) y (33) se pueden observar los resultados obtenidos para la parte incoherente del coeficiente diferencial de reflexión para la muestra D, que tiene una longitud de correlación de aproximadamente un medio de la longitud de onda de iluminación, una desviación estándar de alturas de $\lambda/14$ y un cociente de δ/a de aproximadamente 0.11.

Para esta muestra D, se puede observar que los resultados experimentales para la componente incoherente del coeficiente diferencial de reflexión concuerdan en gran parte con los resultados generados por medio de simulación numérica, encontrándose ligeramente por debajo de éstos los resultados obtenidos con la aproximación de Kirchhoff y con la teoría perturbativa de fase.

Con esta misma muestra, los resultados calculados con la aproximación de amplitudes pequeñas son mayores que los resultados experimentales para el ángulo de incidencia de 5^0 , y conforme este ángulo de incidencia crece la diferencia se va haciendo menor.

En las figuras (34) y (35) se muestran los resultados para la parte incoherente del coeficiente diferencial de reflexión que se obtienen para la muestra F. Dicha muestra tiene una longitud de correlación de aproximadamente 1.5 veces la longitud de onda de iluminación, una desviación estándar de alturas de $\lambda/26$ y un cociente δ/a de aproximadamente 0.027.

En las figuras (34) y (35) se observa que los resultados que se obtuvieron exper-

imentalmente para la componente incoherente del coeficiente diferencial de reflexión concuerdan con los resultados obtenidos utilizando simulación numérica y utilizando la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas, mientras que los resultados que se obtienen utilizando la aproximación de Kirchhoff y la teoría perturbativa de fase están por debajo de aquéllos; sin embargo, la diferencia entre los resultados experimentales y los que se obtienen con las dos últimas aproximaciones mencionadas disminuye conforme el ángulo de incidencia aumenta.

Analizando los resultados podemos observar que las curvas de esparcimiento para la muestra de longitud de correlación corta son anchas y se extienden por cerca de los 180° y conforme la longitud de correlación crece, estas curvas de esparcimiento se van haciendo más angostas. Con la muestra de longitud de correlación corta, A, podemos observar algunas diferencias notables con respecto a la polarización, mientras que para las otras muestras no.

Los resultados que se obtienen para la componente incoherente del coeficiente diferencial de reflexión con simulación numérica, para las tres muestras, son parecidos a los que se obtienen experimentalmente.

Para la muestra que presenta una longitud de correlación de un medio de la longitud de onda de iluminación, (muestra D), se tiene que los resultados experimentales concuerdan con los resultados que se obtienen utilizando la teoría perturbativa de fase, estando ligeramente por debajo de estos resultados los que se obtienen con la aproximación de Kirchhoff; mientras que para las otras dos muestras, los resultados experimentales concuerdan más con los resultados que se obtienen utilizando la teoría

perturbativa de amplitudes pequeñas, estando los resultados que se obtuvieron con las otras aproximaciones (perturbativa de fase y de Kirchhoff) ligeramente por debajo.

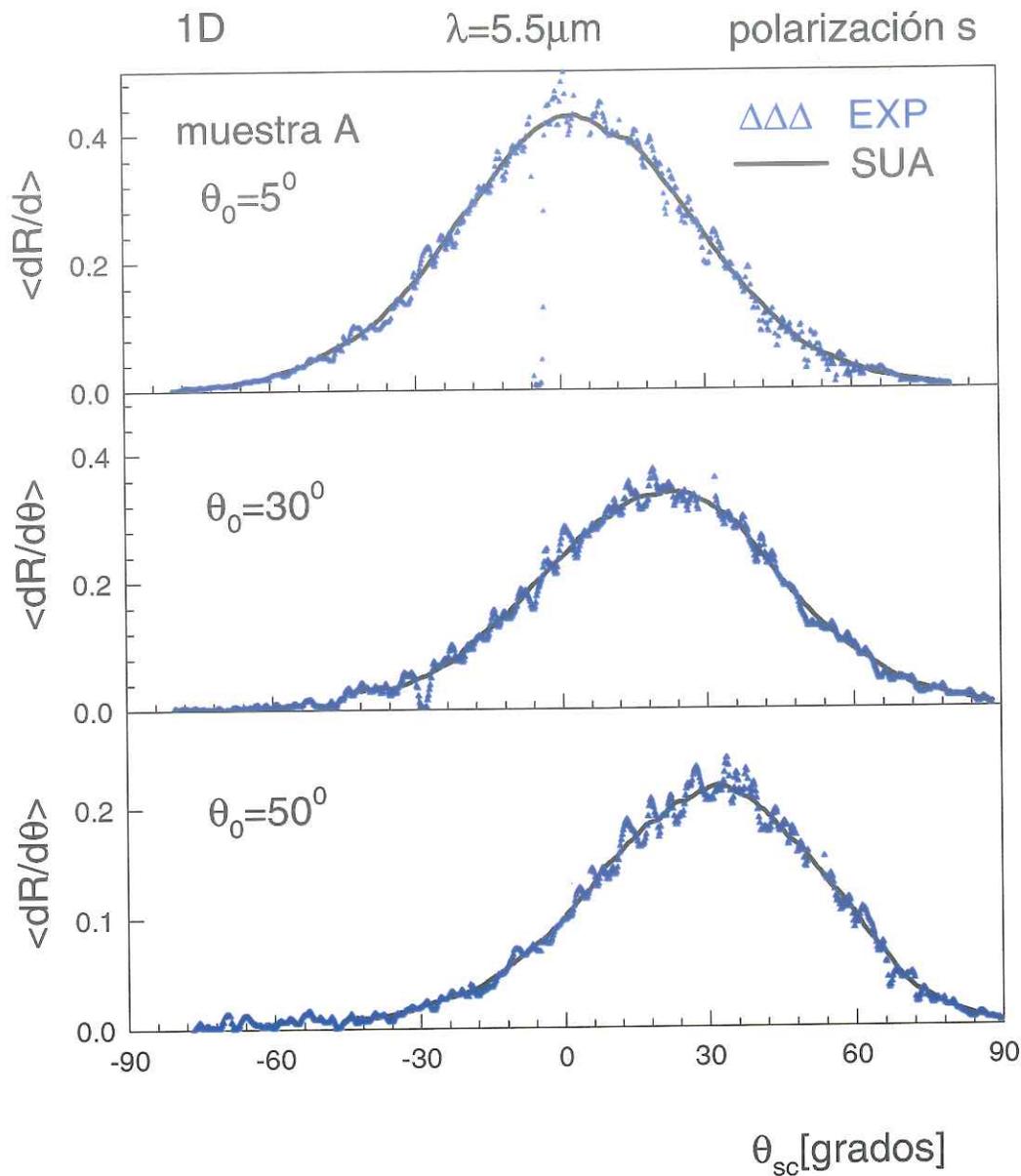


Figura 23: Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra A, con $\delta = 0,38\mu\text{m}$ y $a = 2,8\mu\text{m}$. La iluminación tiene polarización s y longitud de onda de $5,5\mu\text{m}$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° . Los triángulos representan los datos experimentales y la línea continua los resultados suavizados.

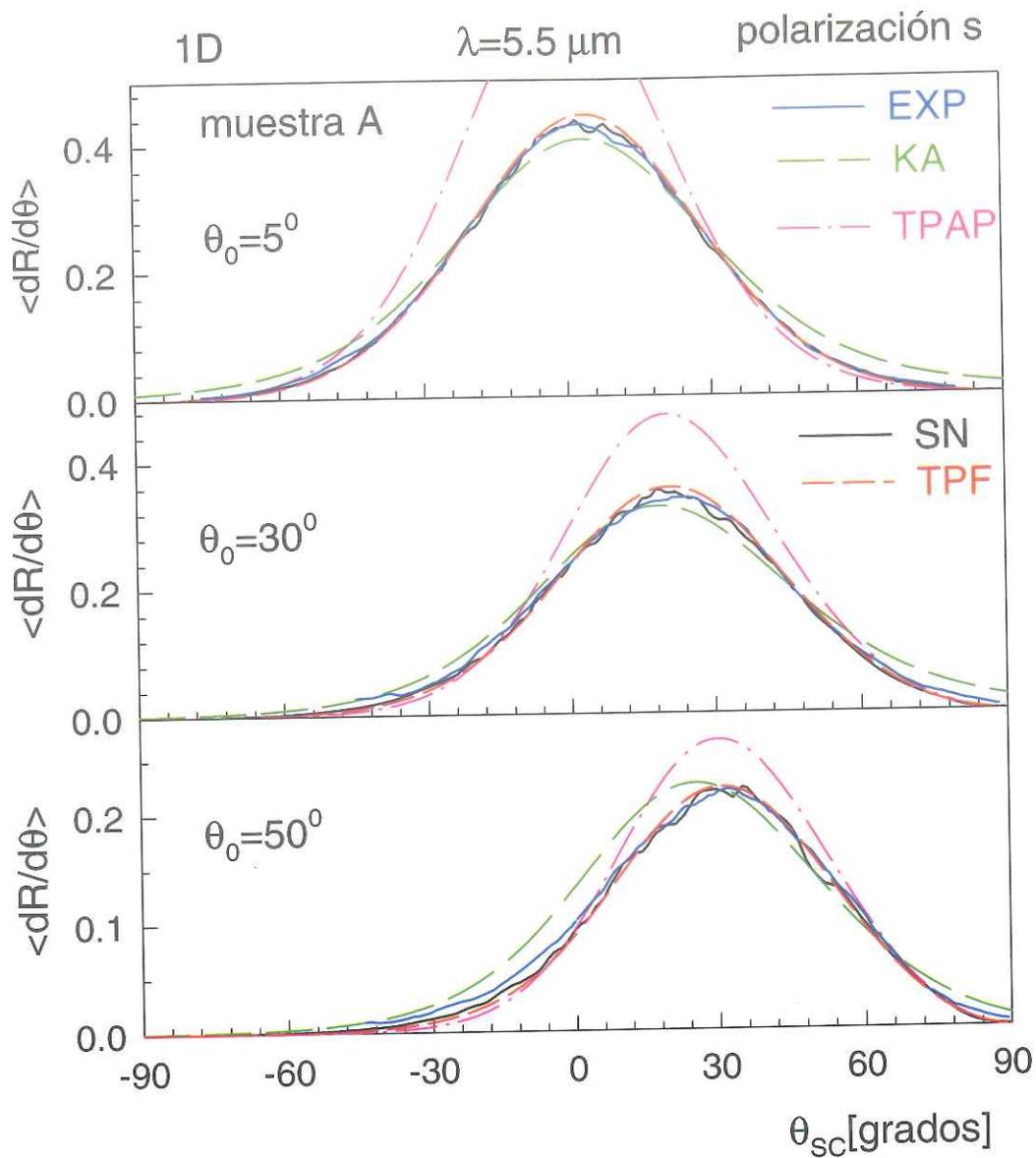


Figura 24: Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra A, con $\delta = 0,38 \mu\text{m}$ y $a = 2,8 \mu\text{m}$. La iluminación tiene polarización s y longitud de onda de $5,5 \mu\text{m}$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° .

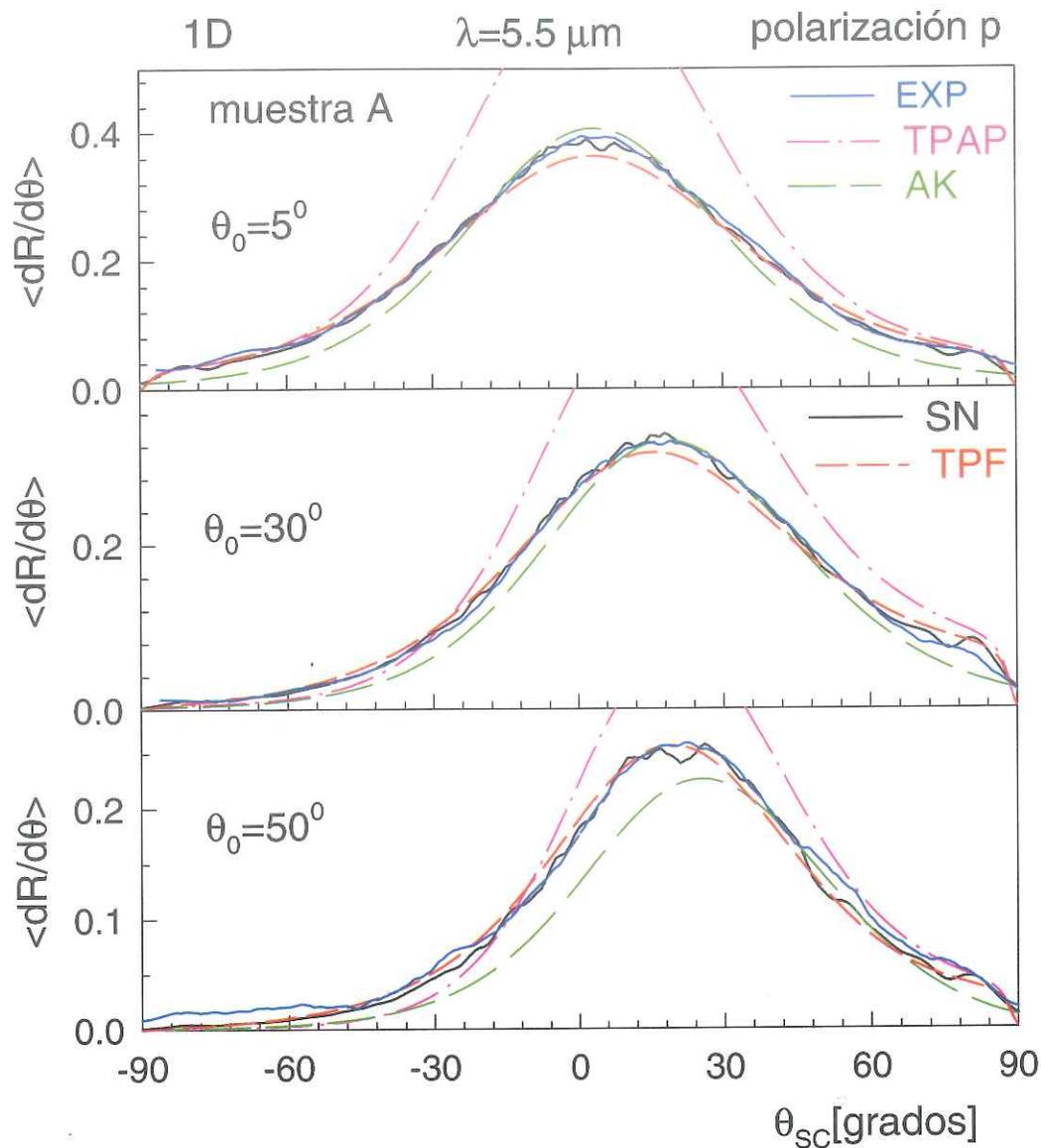


Figura 25: Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra A, con $\delta = 0,38\mu\text{m}$ y $a = 2,8\mu\text{m}$. La iluminación tiene polarización p y longitud de onda de $5,5\mu\text{m}$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° .

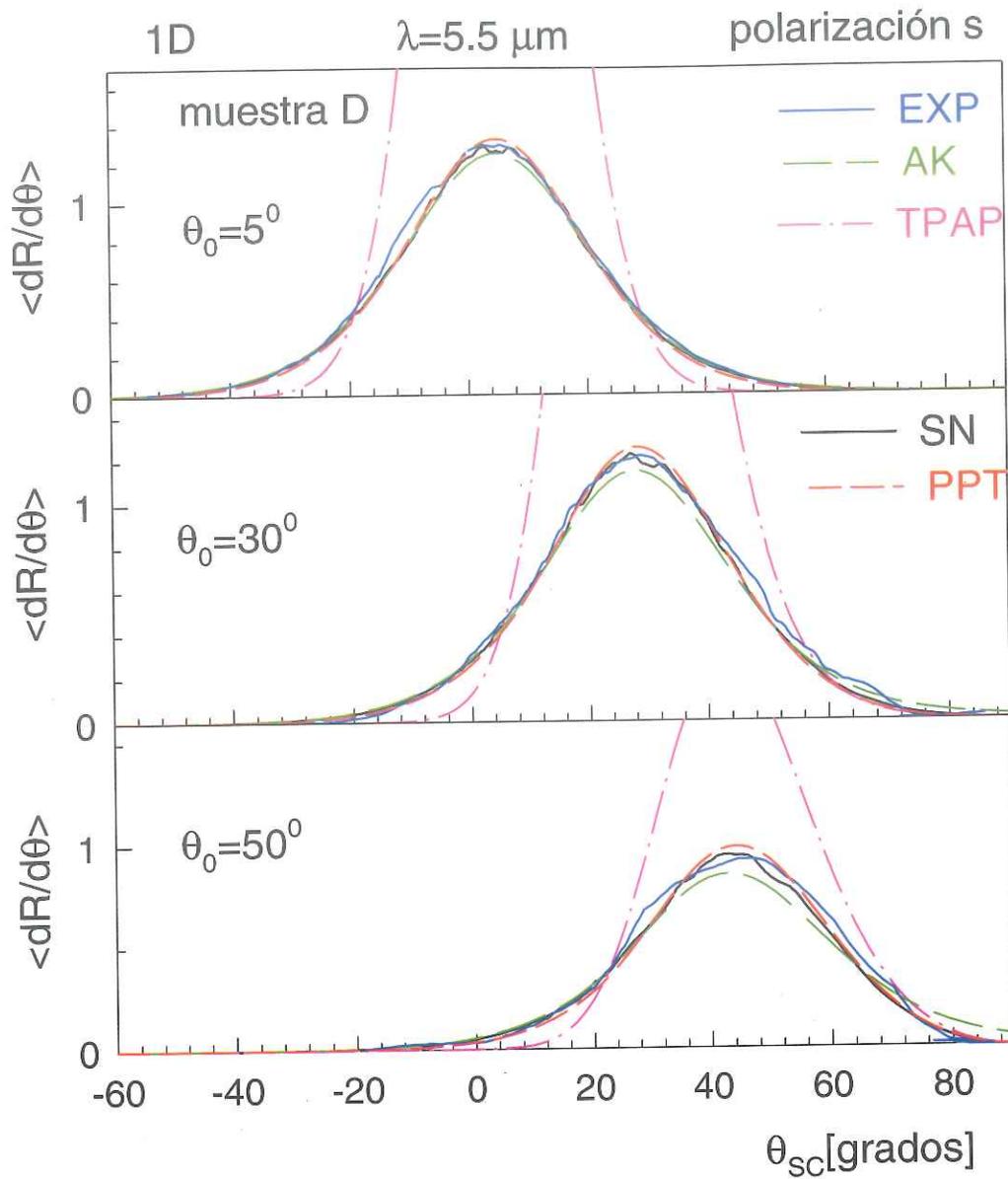


Figura 26: Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra D, con $\delta = 0,75 \mu\text{m}$ y $a = 6,8 \mu\text{m}$. La iluminación tiene polarización s y longitud de onda de $5,5 \mu\text{m}$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° .

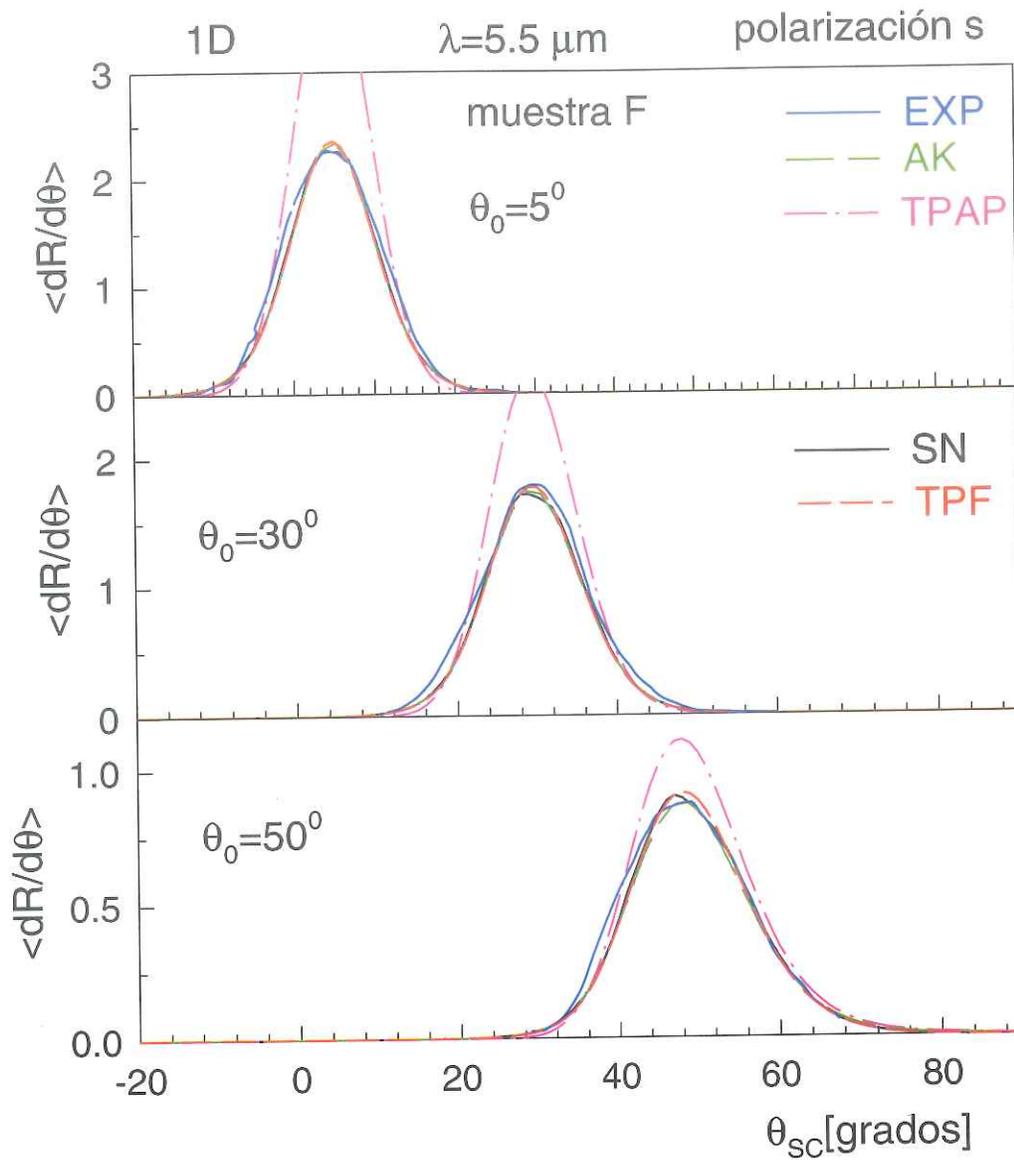


Figura 28: Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra F, con $\delta = 0,41\mu\text{m}$ y $a = 15,0\mu\text{m}$. La iluminación tiene polarización s y longitud de onda de $5,5\mu\text{m}$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° .

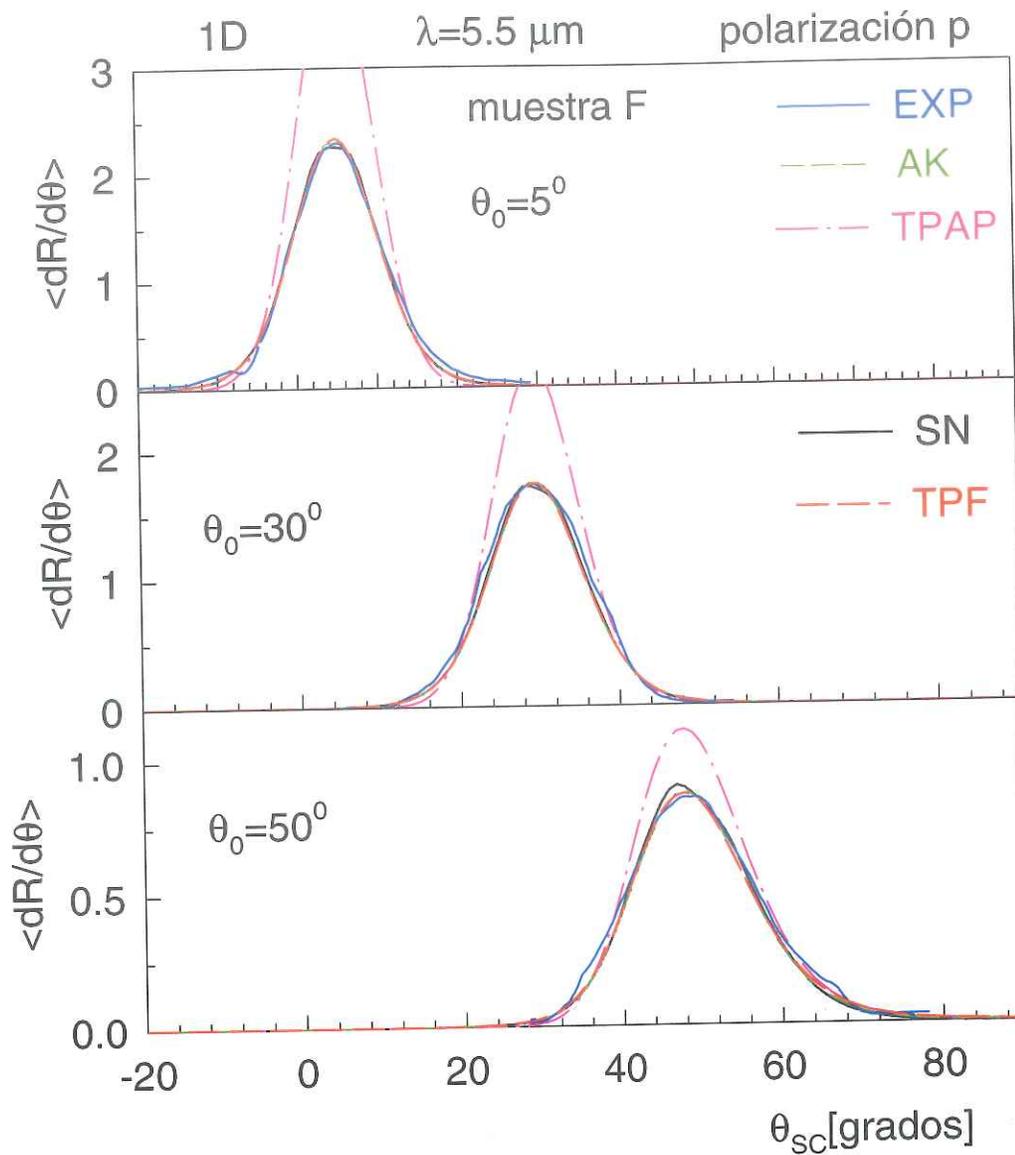


Figura 29: Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra F, con $\delta = 0,41 \mu\text{m}$ y $a = 15,0 \mu\text{m}$. La iluminación tiene polarización p y longitud de onda de $5,5 \mu\text{m}$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° .

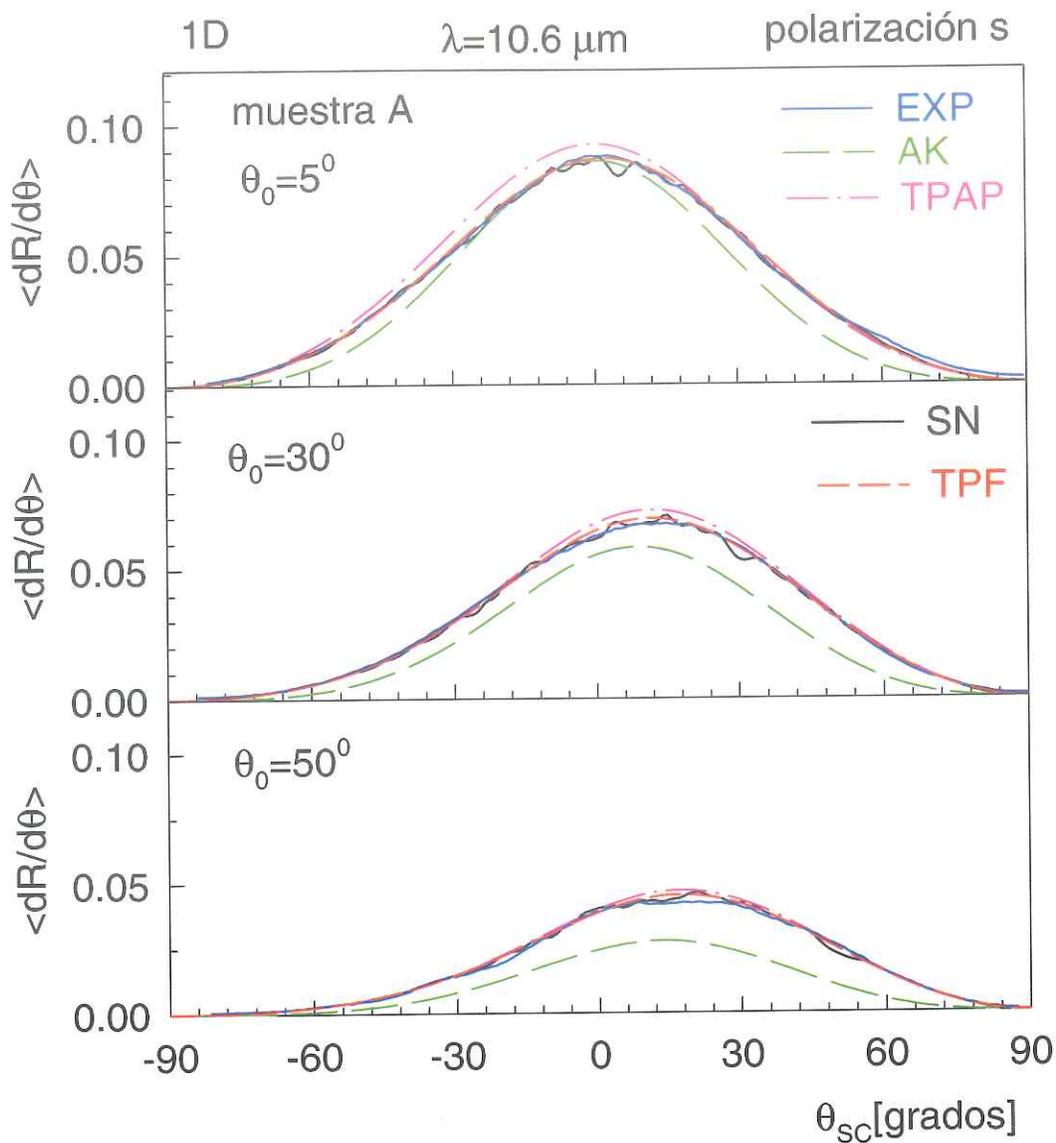


Figura 30: Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra A, con $\delta = 0,38\mu\text{m}$ y $a = 2,8\mu\text{m}$. La iluminación tiene polarización s y longitud de onda de $10,6\mu\text{m}$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° .

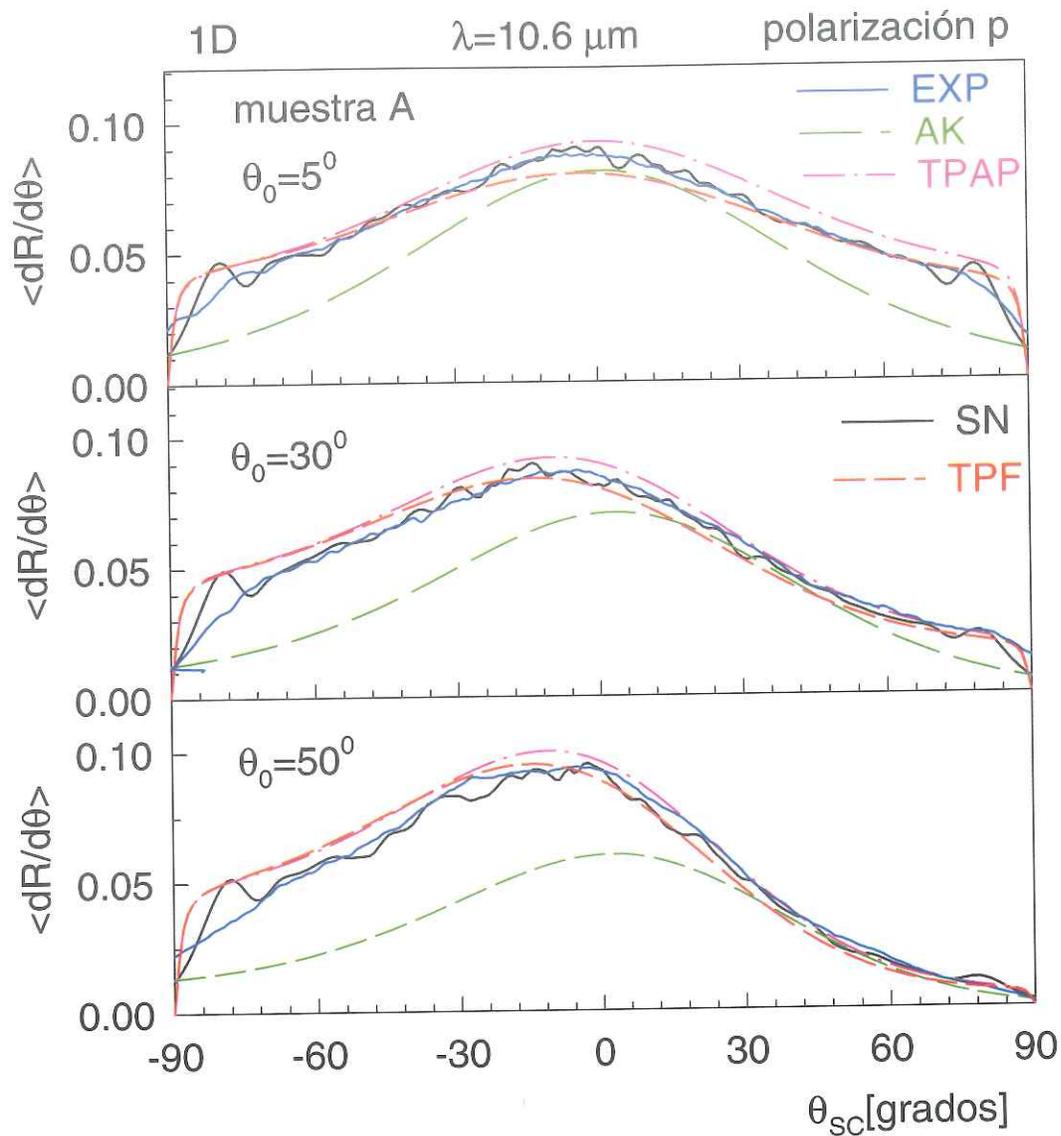


Figura 31: Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra A, con $\delta = 0,38\mu\text{m}$ y $a = 2,8\mu\text{m}$. La iluminación tiene polarización p y longitud de onda de $10,6\mu\text{m}$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° .

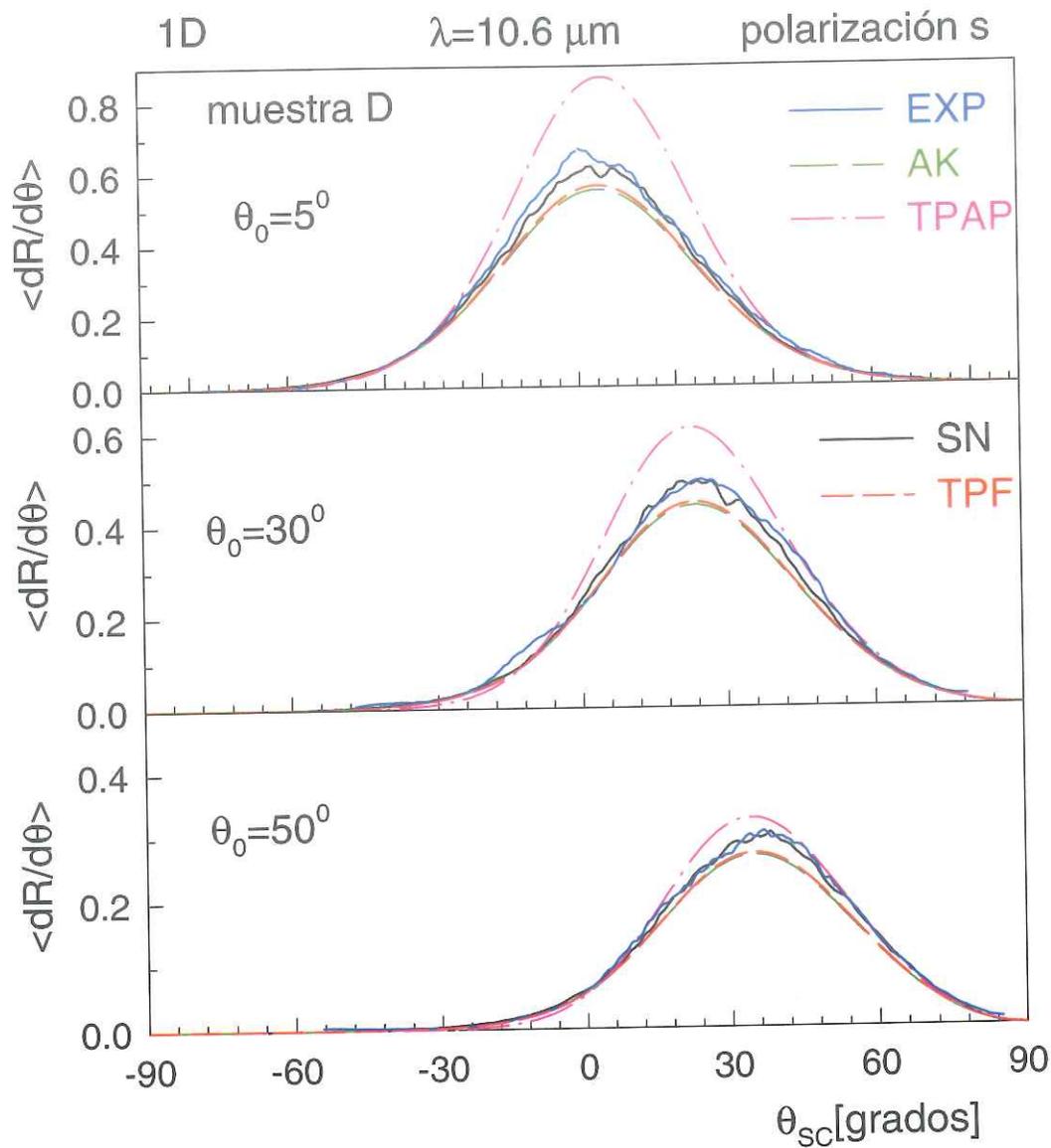


Figura 32: Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra D, con $\delta = 0,75 \mu\text{m}$ y $a = 6,8 \mu\text{m}$. La iluminación tiene polarización s y longitud de onda de $10,6 \mu\text{m}$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° .

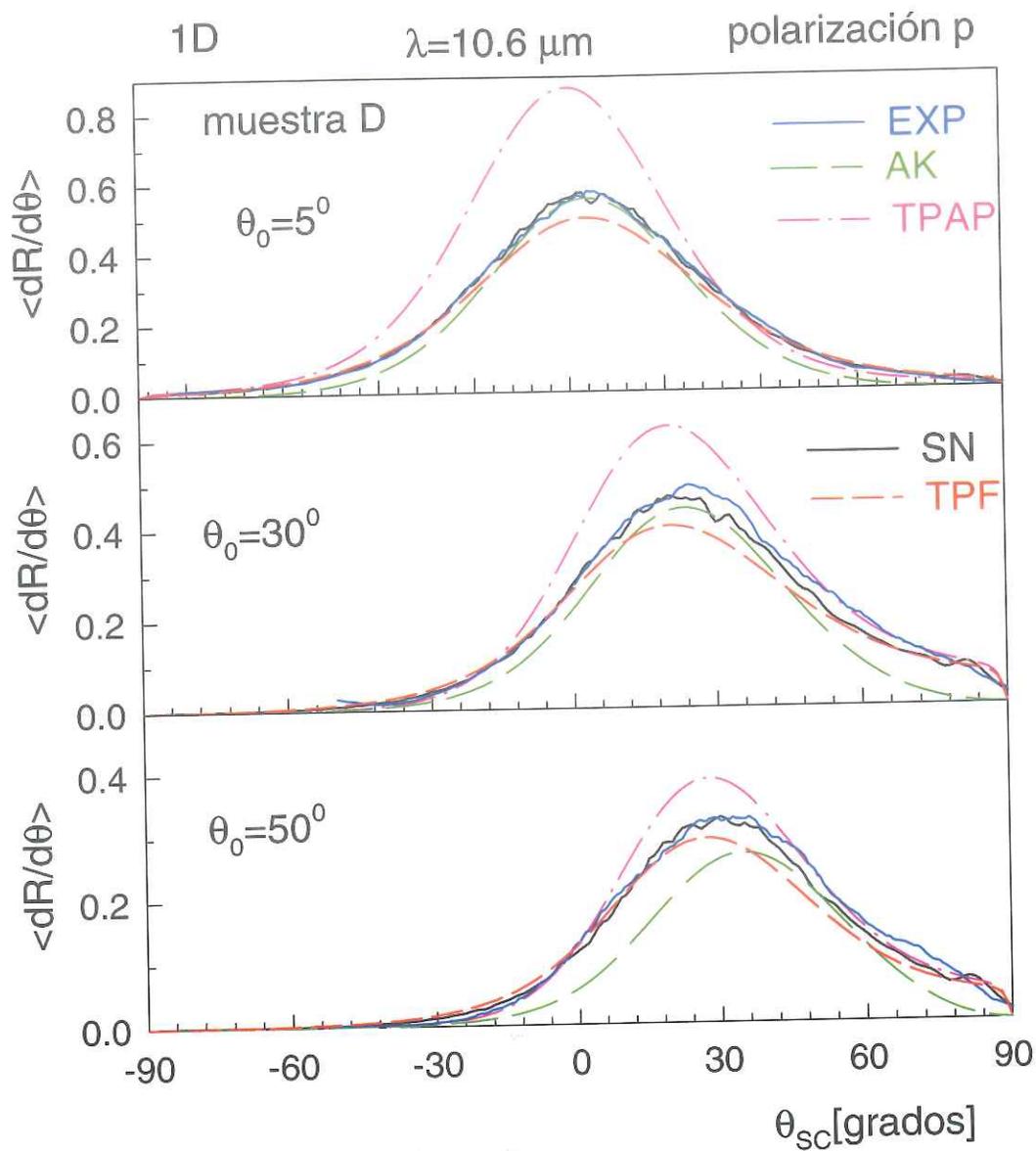


Figura 33: Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra D, con $\delta = 0,75 \mu\text{m}$ y $a = 6,8 \mu\text{m}$. La iluminación tiene polarización p y longitud de onda de $10,6 \mu\text{m}$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° .

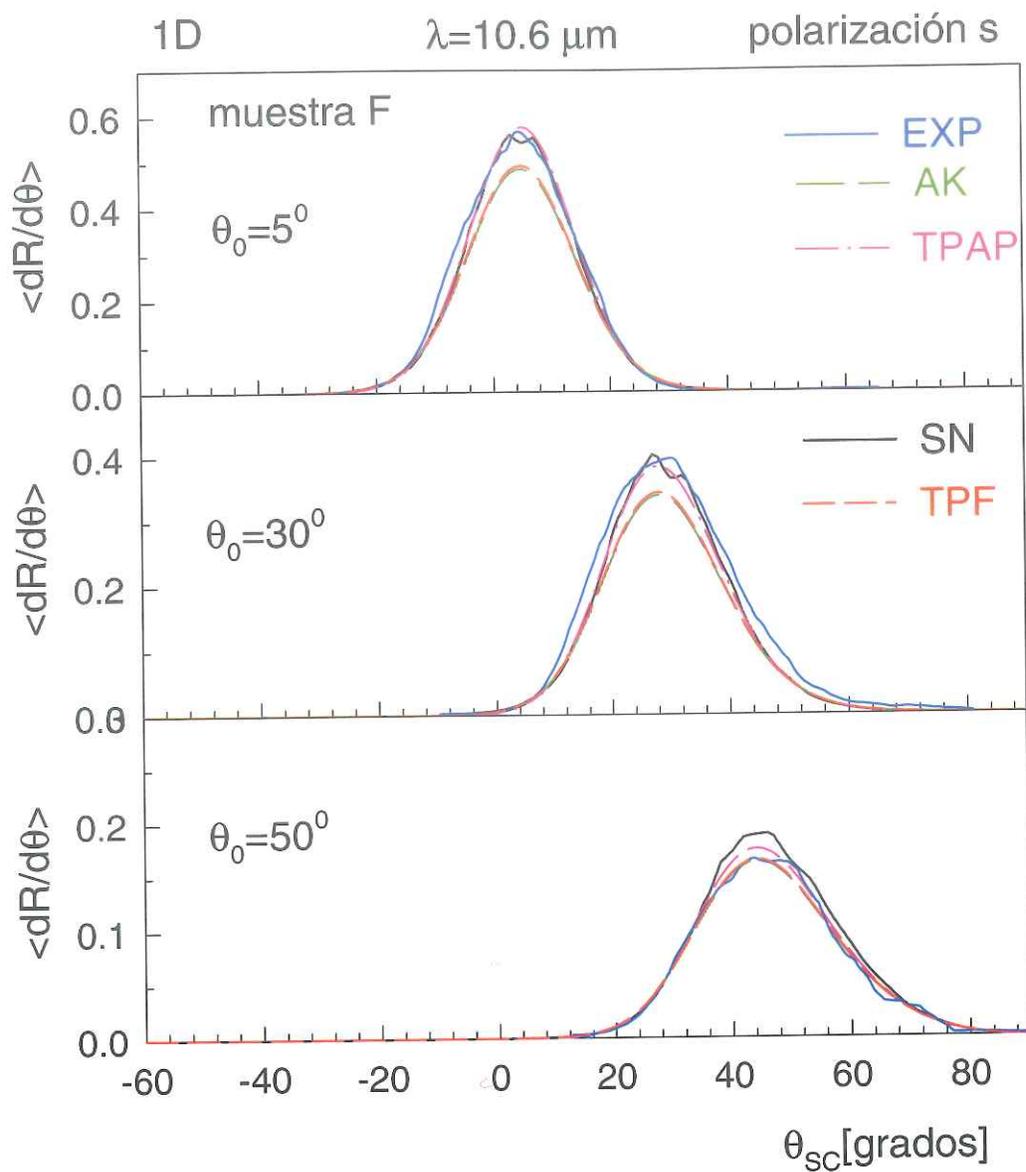


Figura 34: Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra F, con $\delta = 0,41\mu\text{m}$ y $a = 15\mu\text{m}$. La iluminación tiene polarización s y longitud de onda de $10,6\mu\text{m}$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° .

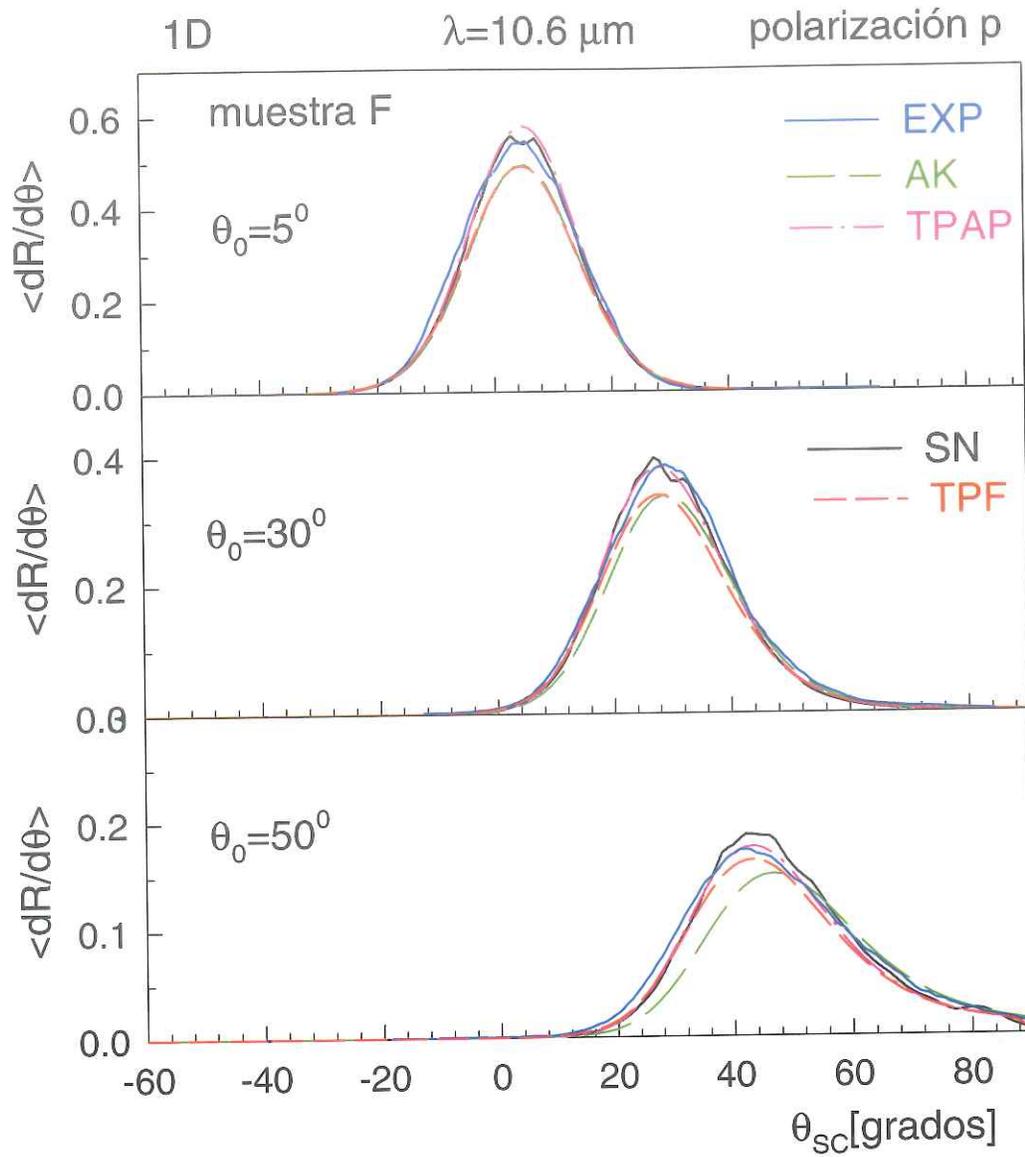


Figura 35: Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra F, con $\delta = 0,41\mu\text{m}$ y $a = 15\mu\text{m}$. La iluminación tiene polarización p y longitud de onda de $10,6\mu\text{m}$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° .

Capítulo V

Resultados de esparcimiento para superficies bidimensionales (2-D)

En este capítulo se presentan resultados experimentales de esparcimiento de luz por superficies bidimensionales rugosas aleatorias. Estos resultados, al igual que en el capítulo anterior, los hemos dividido en dos secciones: esparcimiento coherente (reflectividad) y esparcimiento incoherente (parte incoherente del coeficiente diferencial de reflexión).

Los resultados experimentales de reflectividad son comparados con los resultados que se obtienen con las teorías perturbativas de amplitudes pequeñas, de autoenergía y de fase. También se presentan los resultados obtenidos con base en la aproximación de Kirchhoff.

Por otro lado, tenemos que para esparcimiento incoherente, los resultados experimentales fueron comparados con los resultados de la parte incoherente del coeficiente

diferencial de reflexión que obtenemos con las teorías perturbativas de amplitudes pequeñas y de fase, y con la aproximación de Kirchhoff.

En el caso de superficies bidimensionales no resulta práctico obtener los resultados por medio de simulaciones numéricas, al menos por ahora, debido a que las computadoras no pueden almacenar en memoria matrices tan grandes como las que se necesitarían para estos procesos.

V.1. Esparcimiento coherente

En esta sección se presentan los resultados de reflectividad obtenidos para la componente especular o coherente de la luz esparcida como función del ángulo de incidencia, para luz con polarizaciones s y p , y una longitud de onda de $10,6\mu m$. Cada una de las tres muestras utilizadas son parte representativa de un grupo clasificado de acuerdo a sus longitudes de correlación (ver tabla II).

Se puede observar que las muestras tienen longitudes de correlación de aproximadamente un quinto, tres cuartos y dos veces la longitud de onda utilizada en el experimento.

V.1.1. Polarización s

Primero consideramos el caso de polarización s , para la muestra 5122, que tiene una longitud de correlación de aproximadamente un quinto de la longitud de onda de iluminación y una desviación estándar de alturas de aproximadamente $\lambda/25$.

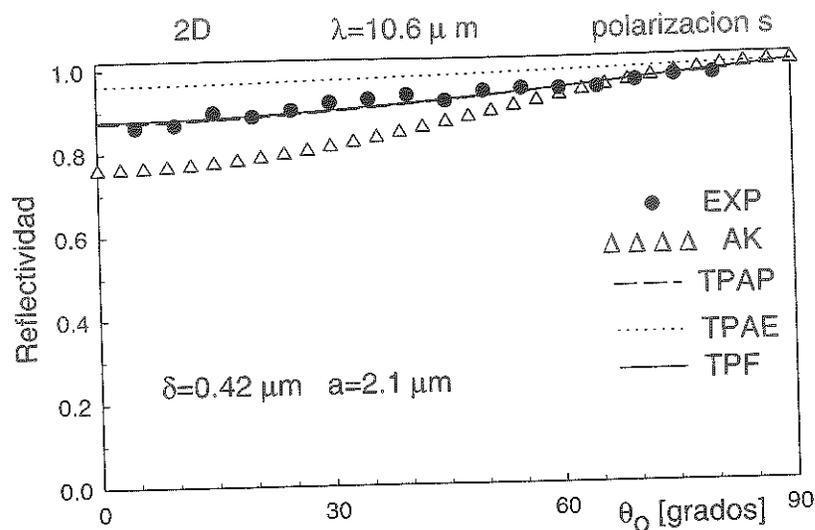


Figura 36: Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización s para la muestra 5122, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 10,6 \mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,42 \mu m$ y $a = 2,1 \mu m$.

Los resultados experimentales se muestran en la figura (36), junto con los resultados de los cálculos teóricos. Podemos ver que los valores de reflectividad que se obtienen con las teorías perturbativas de fase y de amplitudes pequeñas concuerdan en buena medida con los resultados experimentales.

Por otro lado, tenemos que los resultados de reflectividad que se obtuvieron con la aproximación de Kirchhoff están por debajo de las mediciones de reflectividad, aunque se acercan lentamente a los datos experimentales al aumentar el ángulo de incidencia. A partir de aproximadamente 65° son prácticamente iguales a las reflectividades experimentales.

La reflectividad calculada con la teoría perturbativa de autoenergía predice valores mayores que las reflectividades calculadas con las otras aproximaciones. Esto mismo

se observó con anterioridad para el caso de las superficies unidimensionales cuando utilizamos polarización s .

Para la muestra 9032 las reflectividades calculadas se pueden observar en la figura (37). En este caso la muestra presenta una longitud de correlación de aproximadamente tres cuartos de la longitud de onda de iluminación y una desviación estándar de alturas de aproximadamente $\lambda/14$.

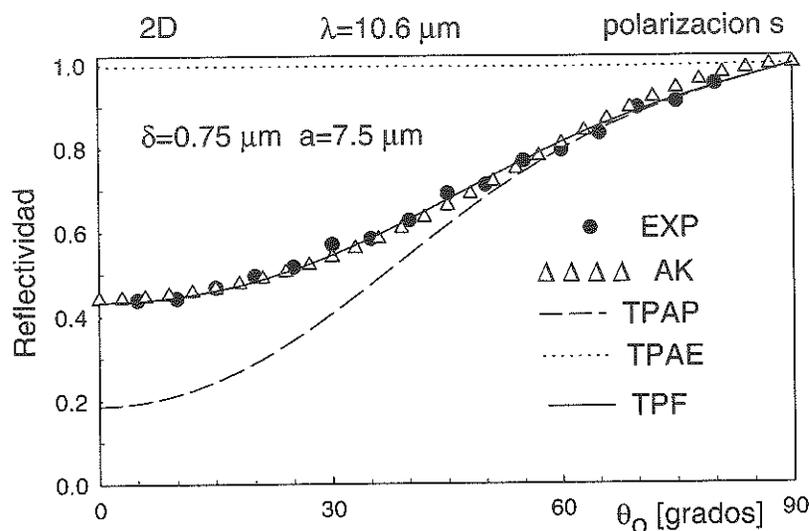


Figura 37: Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización s para la muestra 9032, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 10,6 \mu\text{m}$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,75 \mu\text{m}$ y $a = 7,5 \mu\text{m}$.

Se observa en la figura que para esta muestra, tanto los cálculos de reflectividad basados en la aproximación de Kirchhoff, como los basados en la teoría perturbativa de fase, concuerdan con los resultados de la reflectividad experimental.

En esta misma figura se observa que la reflectividad calculada con la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas está muy por debajo de la reflectividad experimental

para ángulos pequeños, pero va subiendo conforme aumenta el ángulo de incidencia y alrededor de los 65° los cálculos realizados con las dos teorías perturbativas son iguales.

Como en casos anteriores para polarización s , las reflectividades calculadas con la teoría perturbativa de autoenergía resultan mayores que las medidas experimentalmente y que las calculadas con las otras teorías.

En la figura (38) se presentan las reflectividades correspondientes a la muestra 0061, que presenta una longitud de correlación de aproximadamente dos veces la longitud de onda de iluminación y una desviación estándar de alturas de aproximadamente $\lambda/21$.

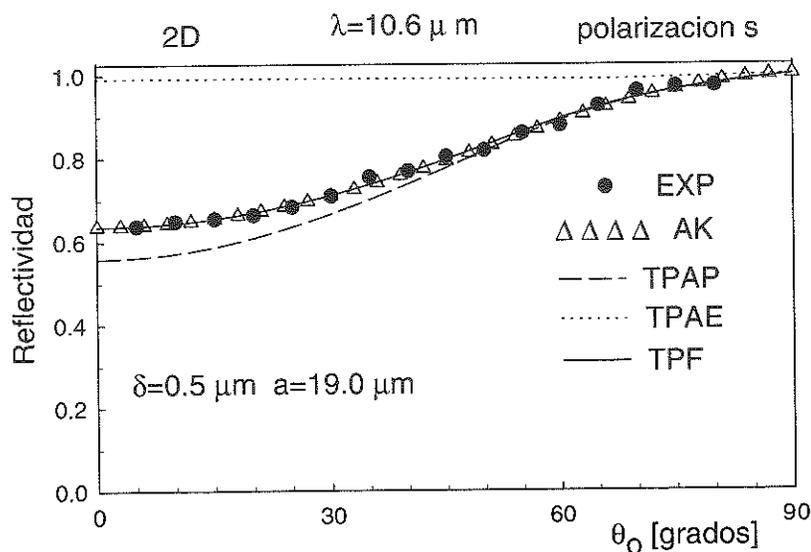


Figura 38: Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización s para la muestra 0061, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 10,6 \mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,5 \mu m$ y $a = 19 \mu m$.

Se tiene en la figura que para esta muestra, los valores de la reflectividad experimental concuerdan con los resultados de reflectividad obtenidos por medio de la teoría perturbativa de fase y con la aproximación de Kirchhoff, mientras que para el caso

de la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas, las reflectividades se encuentran un poco por debajo de la reflectividad experimental.

Al igual que con las dos muestras anteriores, la reflectividad calculada con la teoría perturbativa de autoenergía para esta polarización presenta resultados muy elevados.

Esto concuerda con las conclusiones alcanzadas para las superficies unidimensionales en esta misma polarización.

Cuando se utiliza la aproximación de Kirchhoff, las reflectividades concuerdan con las reflectividades experimentales para la muestra de longitud de correlación grande (0061), pero conforme la longitud de correlación decrece, los resultados de reflectividad se van separando más. Esto se observa claramente en los resultados obtenidos con la muestra de longitud de correlación corta (5122).

Comparando las reflectividades experimentales con las reflectividades que se obtienen utilizando la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas, podemos observar que conforme la desviación estándar de alturas crece, las diferencias son más notorias. Esto se aprecia claramente al comparar los resultados correspondientes a las muestras 5122 y 0061, que tienen $\delta \simeq \lambda/25$ y $\delta \simeq \lambda/21$ respectivamente, para las cuales los resultados de reflectividad experimental concuerdan con los teóricos, con los resultados para la muestra 9032, con $\delta \simeq \lambda/14$, para la cual, la reflectividad experimental ya no se parece a la reflectividad calculada con esta teoría.

Por último, al igual que para las muestras unidimensionales, los resultados de reflectividad que se obtienen con la teoría perturbativa de fase son los que más se acercan a los resultados de reflectividad experimental.

V.1.2. Polarización p

En esta sección se presentan los resultados obtenidos utilizando polarización p , para tres muestras correspondientes a las figuras (39), (40) y (41), cuyos datos estadísticos aparecen también en la tabla II.

Para la muestra 5122 los resultados experimentales se muestran en la figura (39), junto con los resultados de los cálculos teóricos. Podemos ver que la reflectividad de esta superficie es relativamente alta a incidencia normal y decrece lentamente conforme el ángulo de incidencia crece, y en la vecindad del pseudo-ángulo de Brewster cae a un mínimo muy pronunciado, y vuelve a crecer rápidamente hacia los 90° de incidencia.

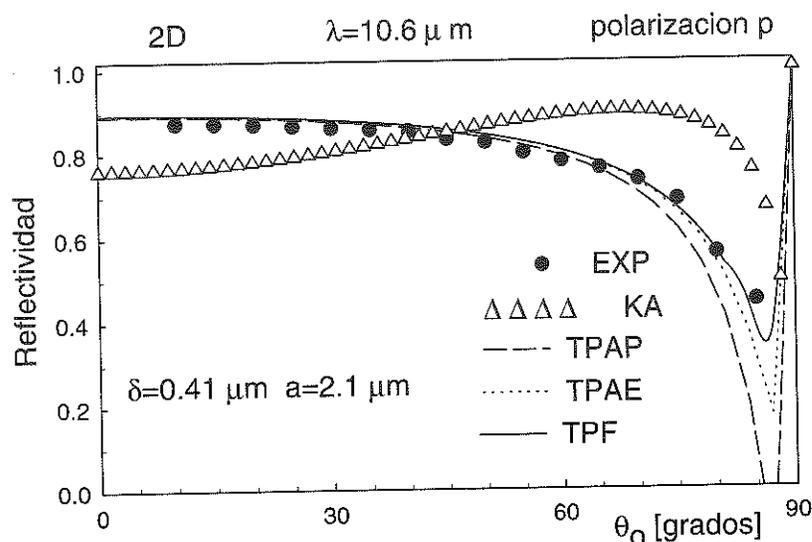


Figura 39: Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización p para la muestra 5122, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 10,6 \mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,42 \mu m$ y $a = 2,1 \mu m$.

En el caso en que utilizamos la muestra 5122, las reflectividades obtenidas experimentalmente concuerdan con las obtenidas con las tres teorías perturbativas hasta

aproximadamente 55° , separándose de ahí en adelante, excepto en el caso de la reflectividad calculada con la teoría perturbativa de fase, la que sigue concordando con la reflectividad experimental.

Comparando ahora los resultados experimentales de reflectividad, cuando utilizamos la misma muestra, con los resultados de reflectividad que se obtienen con la aproximación de Kirchhoff, se observa que éstos últimos están por debajo de los experimentales hasta aproximadamente 45° , a partir de donde la reflectividad calculada pasa a estar por encima de la experimental. En la curva obtenida con la aproximación de Kirchhoff, el pseudo-ángulo de Brewster aparece casi a los 90° de incidencia.

Para la muestra 9032, los resultados de reflectividad se pueden observar en la figura (40). Esta muestra es más rugosa que la anterior, y por lo tanto la reflectividad es menor.

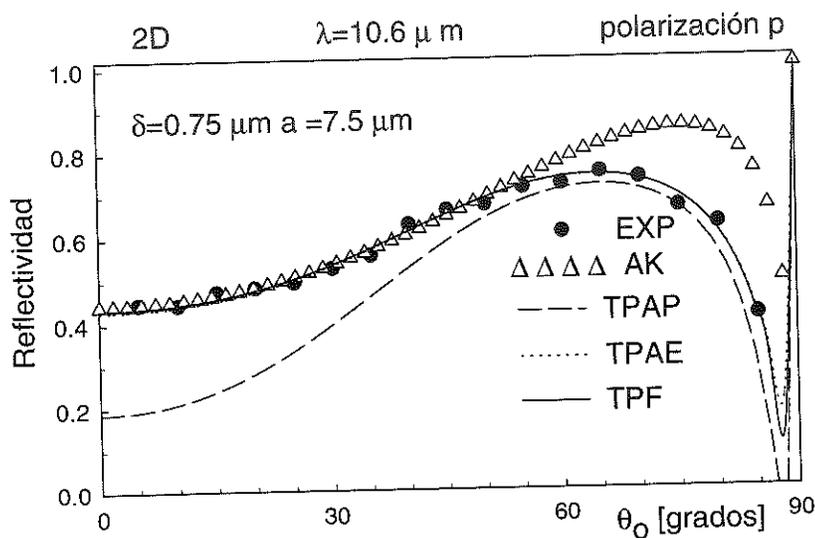


Figura 40: Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización p para la muestra 9032, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 10,6 \mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,75 \mu m$ y $a = 7,5 \mu m$.

En la figura citada, observamos que la reflectividad se incrementa con el ángulo de incidencia, pasa por un máximo, y cae abruptamente hacia el pseudo-ángulo de Brewster, el cual está más allá de los 85° .

Para esta muestra 9032, tenemos que las reflectividades que se obtienen con las teorías perturbativas de fase y de autoenergía concuerdan hasta aproximadamente 85° , a partir de donde difieren un poco, siendo más elevada la reflectividad calculada con la teoría de autoenergía en la zona del mínimo correspondiente al pseudo-ángulo de Brewster. Por otro lado, la reflectividad experimental concuerda con la calculada con estas dos teorías perturbativas.

Ahora bien, para esta muestra, las reflectividades experimentales concuerdan con las reflectividades obtenidas con la aproximación de Kirchhoff hasta aproximadamente 55° , donde se separan, y las reflectividades calculadas con esta aproximación siguen subiendo hasta que presentan una caída en la vecindad del pseudo-ángulo de Brewster, y vuelven a levantarse casi a los 90° de incidencia. Con esta aproximación, el pseudo-ángulo de Brewster aparece más cerca de los 90° de incidencia, en comparación con las otras aproximaciones. Se observa también que las reflectividades calculadas con la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas están por debajo de las reflectividades experimentales y de las calculadas con las otras teorías.

En la figura (41) se presentan las reflectividades correspondientes a la muestra 0061. En este caso, los cálculos realizados para las reflectividades con las teorías perturbativas de fase y de autoenergía son prácticamente iguales; sólo se separan un poco alrededor de 85° ; siendo la reflectividad calculada con la teoría perturbativa de autoenergía un

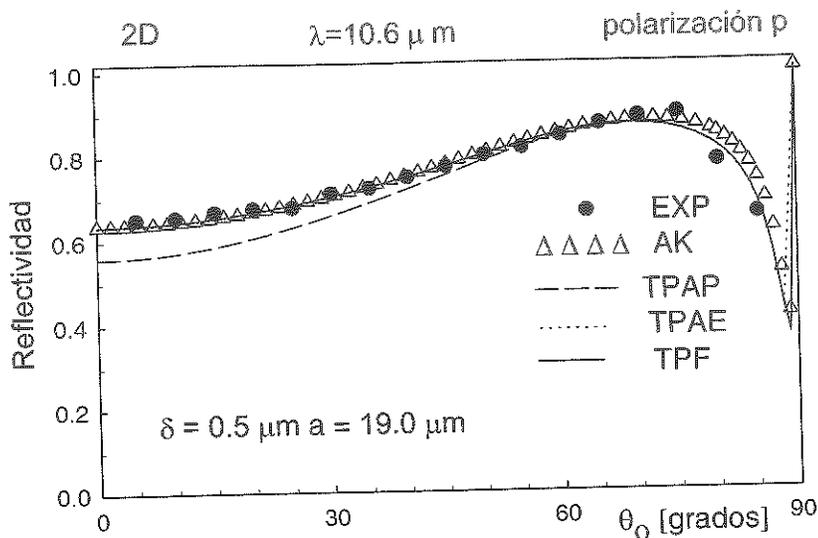


Figura 41: Reflectividad como función del ángulo de incidencia en polarización p para la muestra 0061, iluminando con longitud de onda de $\lambda = 10,6 \mu m$. Los parámetros estadísticos de esta muestra son $\delta = 0,5 \mu m$ y $a = 19 \mu m$.

poco más elevada que la calculada con la teoría perturbativa de fase; y además, el mínimo para ésta última está más cercano a los 90^0 .

Para esta muestra, las reflectividades obtenida experimentalmente y las calculadas por medio de la aproximación de Kirchhoff, son muy parecidas; sólo que la reflectividad calculada con la aproximación de Kirchhoff aparece un poco más arriba alrededor de los 70^0 de incidencia, y el pseudo-ángulo de Brewster está más corrido hacia los 90^0 de incidencia.

Para esta muestra, podemos observar que las reflectividades experimentales parecen concordar más con las reflectividades calculadas con las teorías perturbativas de fase y de autoenergía que con las calculadas con la aproximación de Kirchhoff.

Para esta muestra, las reflectividades que se obtienen con la teoría perturbativa

de amplitudes pequeñas se presentan por debajo de las calculadas con las otras dos teorías perturbativas, pero alrededor de los de los 60° existe ya una concordancia entre las reflectividades calculadas con las tres teorías perturbativas.

Resumiendo los resultados de reflectividad para las tres muestras, para polarización p , se puede observar que la reflectividad para la muestra 5122 disminuye lentamente hasta acercarse al pseudo-ángulo de Brewster, mientras que para las otras muestras la reflectividad aumenta lentamente hasta acercarse al pseudo-ángulo de Brewster, donde cae abruptamente para volver a crecer rápidamente.

Podemos observar que existe una buena concordancia entre los cálculos de reflectividad realizados con las teorías perturbativas de fase y de autoenergía, y que sólo difieren para ángulos cercanos a 90° , excepto para la muestra de longitud de correlación corta, para la que se observa una diferencia ya desde ángulos mayores de 55° .

La reflectividad calculada con la aproximación de Kirchhoff muestra resultados que concuerdan en gran parte con la reflectividad experimental para la muestra de longitud de correlación larga, pero conforme la longitud de correlación decrece, empieza a haber discrepancias, hasta que los resultados teóricos no se parecen a los experimentales cuando se utiliza la muestra de longitud de correlación corta.

Para la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas, se puede observar que las reflectividades calculadas presentan diferencias con las obtenidas experimentalmente con las tres muestras conforme la desviación estándar de alturas crece. Se observa muy bien que para la muestra 5122, cuya δ es menor, los datos de reflectividad experimental concuerdan muy bien con los calculados con esta teoría, y para la muestra 9032, cuya δ

es mayor, las reflectividades experimentales ya no se parecen a las calculadas con esta teoría.

Por último, al igual que con las muestras unidimensionales, las reflectividades calculadas con la teoría perturbativa de fase son las que más se acercan a las reflectividades obtenidas experimentalmente.

V.2. Esparcimiento incoherente

En esta sección se presentan los resultados para la componente difusa de la luz esparcida como función del ángulo de incidencia (componente incoherente del coeficiente diferencial de reflexión). Se consideran casos de iluminación y detección con polarización s (ss), así como casos pp . No se detectaron señales en polarización cruzada (sp o ps), por lo que concluimos que éstas son varios órdenes de magnitud inferiores a las señales copolarizadas.

Debido a que no existe mucha diferencia cuando se trabaja con cada una de las polarizaciones antes mencionadas, sólo haremos notar las diferencias cuando sean importantes.

Para las mediciones se utilizó el arreglo experimental descrito en el capítulo II. La longitud de onda de iluminación fue de $10,6\mu m$, por lo que utilizamos el detector de $HgCdTe$.

Los resultados experimentales se compararon con resultados teóricos obtenidos con la aproximación de Kirchhoff y con las teorías perturbativas de amplitudes pequeñas y

de fase.

Se presentan resultados que corresponden a tres muestras con diferentes parámetros estadísticos. Estas muestras fueron clasificadas según sus longitudes de correlación, y sus parámetros estadísticos aparecen en la tabla II.

V.2.1. Resultados en polarización s y p

En las figuras (42) y (43) se presentan los resultados experimentales para la componente incoherente del coeficiente diferencial de reflexión para la muestra 8053, junto con los correspondientes resultados teóricos. Esta muestra tiene una longitud de correlación de aproximadamente un cuarto de la longitud de onda de iluminación, una desviación estándar de alturas de aproximadamente $\lambda/14$, y el cociente δ/a es aproximadamente igual a 0.25. Las mediciones se hicieron para 5° , 15° y 30° de incidencia.

En estas figuras podemos observar que las curvas de la parte incoherente del coeficiente diferencial de reflexión son anchas, abarcando prácticamente todo el hemisferio, desde los -90° hasta los 90° en ángulo de esparcimiento. También se pueden ver diferencias entre los casos de polarización s y p . Asimismo, se puede observar que las curvas experimentales se ajustan bien a las que se obtienen con la teoría perturbativa de fase para polarización s , mientras que los resultados obtenidos con la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas son más elevados. Para polarización p , los resultados experimentales concuerdan con los que se obtienen con la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas, mientras que la teoría perturbativa de fase no presenta buenos resultados, observándose también que la aproximación de Kirchhoff resulta inadecuada para esta

muestra a cualquier polarización.

La muestra 7047 tiene una longitud de correlación que es similar a la longitud de onda de iluminación, tiene una desviación estándar de alturas de aproximadamente $\lambda/7$, y el cociente δ/a es igual a 0.168. En las figuras (44) y (45) se presentan los resultados para la componente incoherente del coeficiente diferencial de reflexión para los ángulos de 5° , 30° y 50° de incidencia. Las curvas correspondientes a esta muestra son menos anchas que las obtenidas con la muestra anterior, y en contraste con las anteriores, no hay mucha diferencia entre las curvas correspondientes a diferentes polarizaciones.

También podemos observar que los resultados experimentales concuerdan con los obtenidos empleando la aproximación de Kirchhoff y la teoría de perturbación de fase, acercándose un poco más a los resultados experimentales los que se obtienen con la teoría perturbativa.

En las figuras (44) y (45), vemos que la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas es inadecuada para reproducir los resultados experimentales.

Los resultados correspondientes a la muestra 0061 se presentan en la figura (46), para ángulos de incidencia de 5° , 15° y 30° para polarización s . Los resultados para ángulos de incidencia de 5° , 30° y 50° , con polarización p , se presentan en la figura (47). La muestra 0061 tiene una longitud de correlación que es aproximadamente dos veces mayor que la longitud de onda de iluminación, una desviación estándar de alturas de aproximadamente $\lambda/21$, y el cociente δ/a es igual a 0.026. Esta muestra presenta pendientes más suaves que las otras dos (8053 y 7047).

El esparcimiento producido por esta muestra abarca alrededor de 50° , y al igual

que para la muestra anterior, no existe diferencia entre las curvas correspondientes a las dos polarizaciones.

Los resultados basados en la aproximación de Kirchhoff se encuentran ligeramente arriba de los resultados que se obtienen con la teoría de perturbación de fase, concordando mejor éstos últimos con los resultados experimentales. Por otro lado, los resultados obtenidos con la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas están por arriba de los resultados experimentales, pero conforme el ángulo de incidencia aumenta la diferencia disminuye.

Resumiendo los resultados obtenidos para las componentes copolarizadas del esparcimiento incoherente para las tres muestras, observamos que la teoría de perturbación de fase se ajusta mejor a los datos experimentales para polarización s , mientras que para polarización p , el mejor ajuste se obtiene para la muestra 8053 con la teoría perturbativa de amplitudes pequeñas, y para las otras dos muestras (7047 y 0061), el mejor ajuste se obtiene tanto con la aproximación de Kirchhoff, como con la teoría de perturbación de fase.

Se observa también, que conforme el ángulo de incidencia crece, la componente incoherente del coeficiente diferencial de reflexión contiene una fracción menor de la potencia esparcida, y los resultados obtenidos con las dos teorías perturbativas tienden a parecerse.

Además, podemos observar que cuando utilizamos la muestra 8053, en los resultados obtenidos con la aproximación de amplitudes pequeñas se tiene una caída repentina para ángulos de aproximadamente 90^0 y -90^0 , cuando utilizamos polarización p .

Por otro lado, el ancho de las curvas de esparcimiento se incrementa conforme la longitud de correlación de las muestras decrece. Esto se debe también al hecho de que el cociente δ/a es menor para la muestra 0061 que para la muestra 8053.

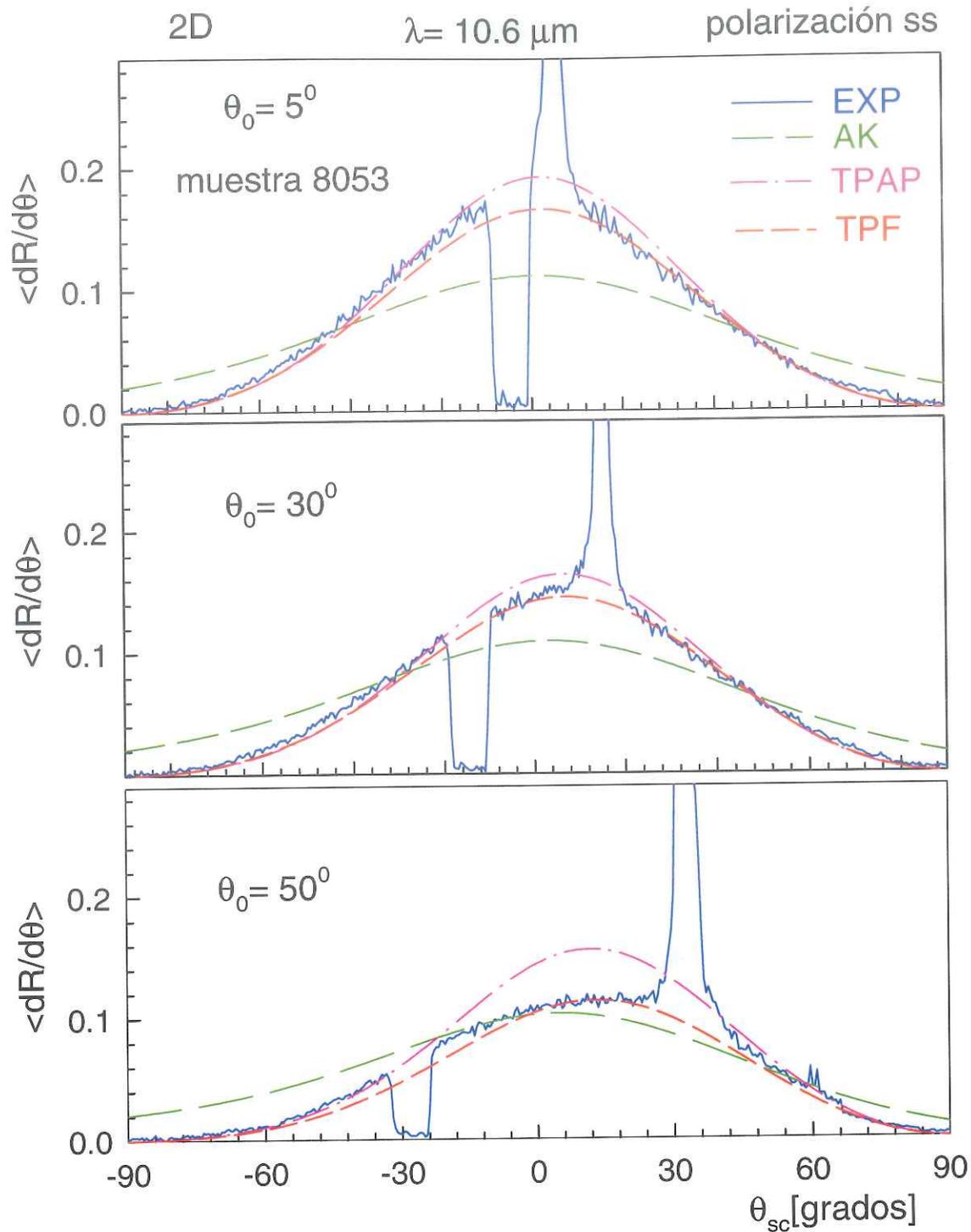


Figura 42: Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra 8053, con $\delta = 0,75 \mu\text{m}$ y $a = 3 \mu\text{m}$. La iluminación tiene polarización s y longitud de onda de $10,6 \mu\text{m}$. Los ángulos de incidencia son 5° , 15° y 30°

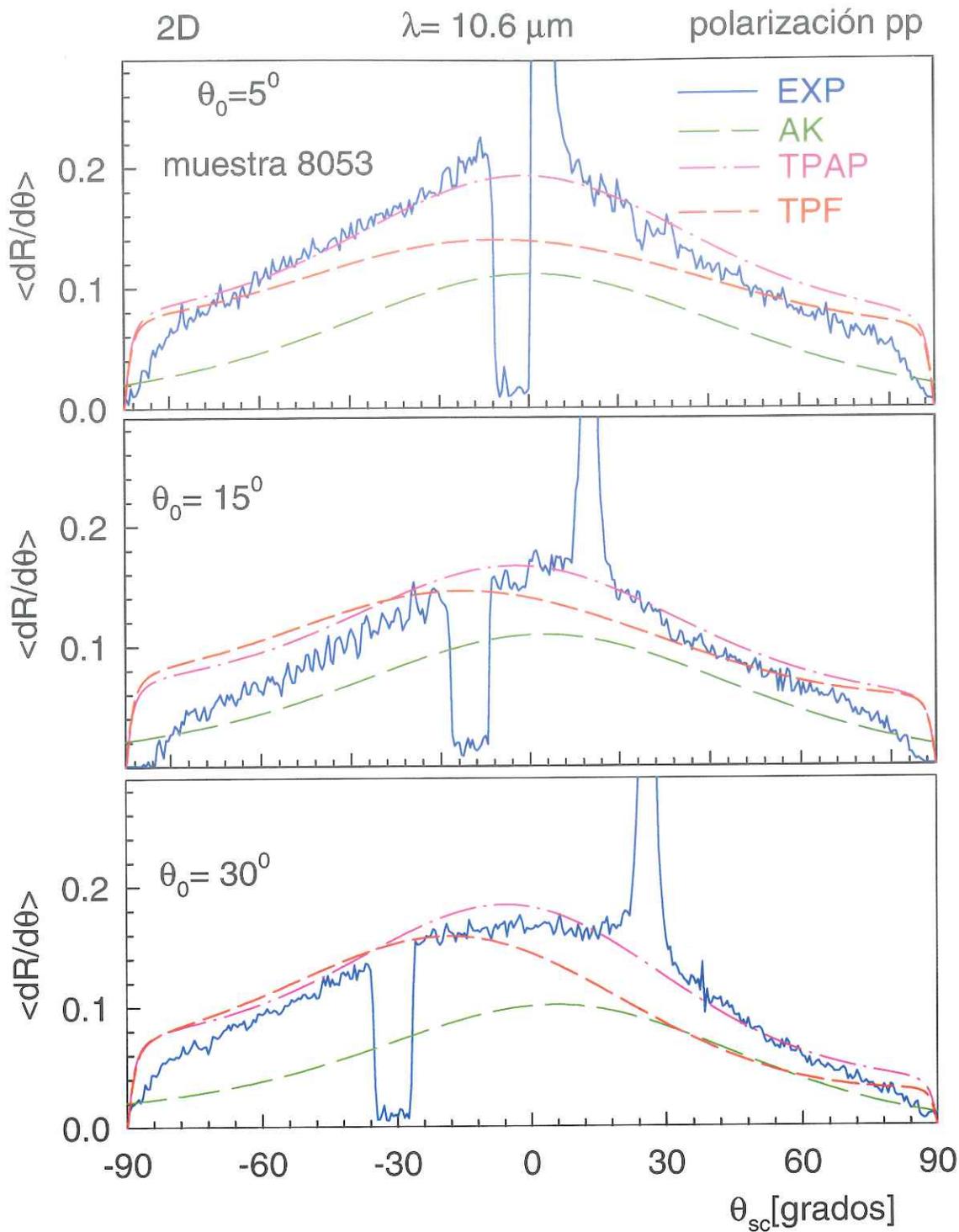


Figura 43: Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra 8053, con $\delta = 0,75 \mu\text{m}$ y $a = 3 \mu\text{m}$. La iluminación tiene polarización p y longitud de onda de $10,6 \mu\text{m}$. Los ángulos de incidencia son 5° , 15° y 30°

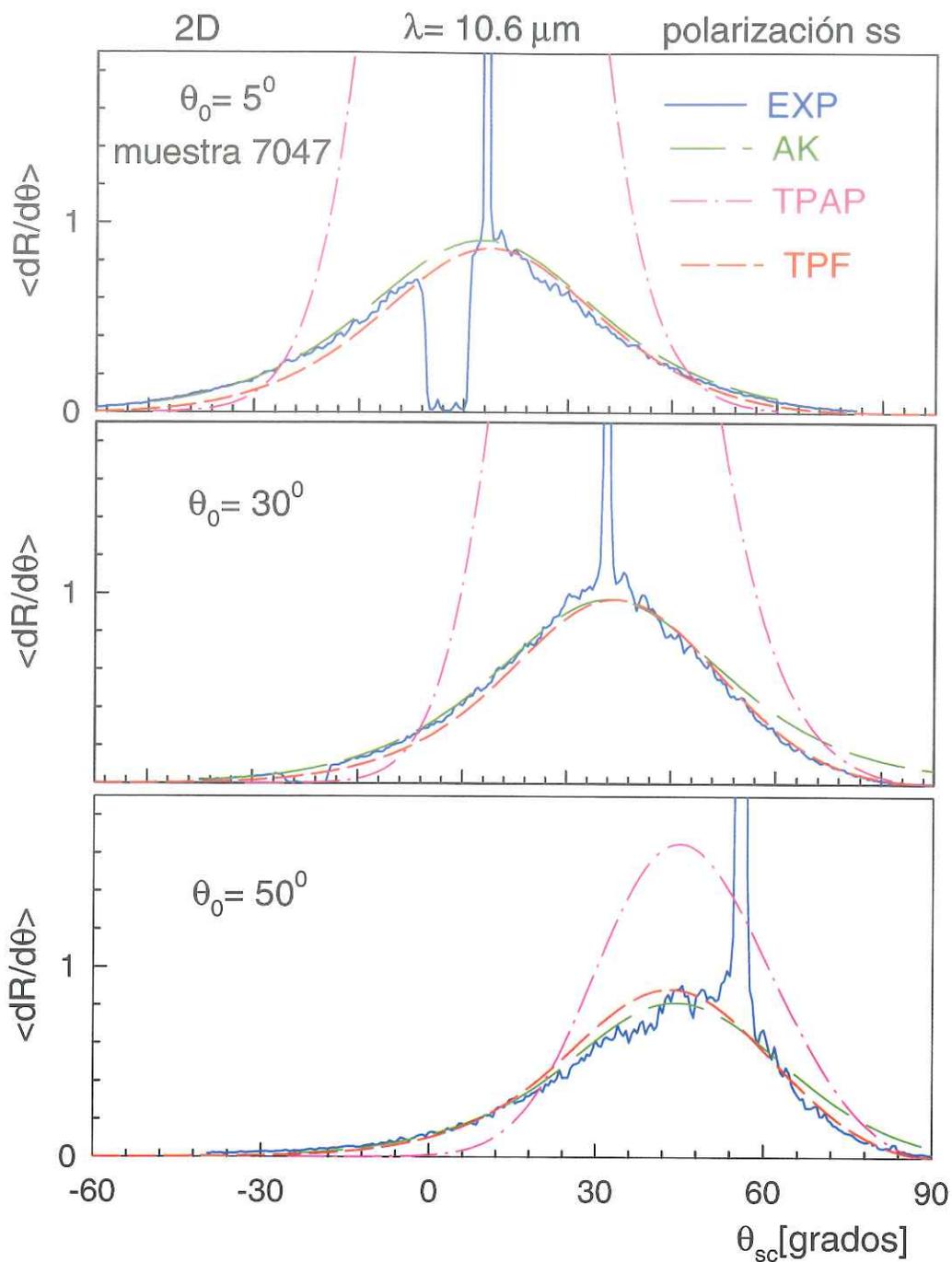


Figura 44: Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra 7047, con $\delta = 1,6\mu\text{m}$ y $a = 9,53\mu\text{m}$. La iluminación tiene polarización s y longitud de onda de $10,6\mu\text{m}$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° .

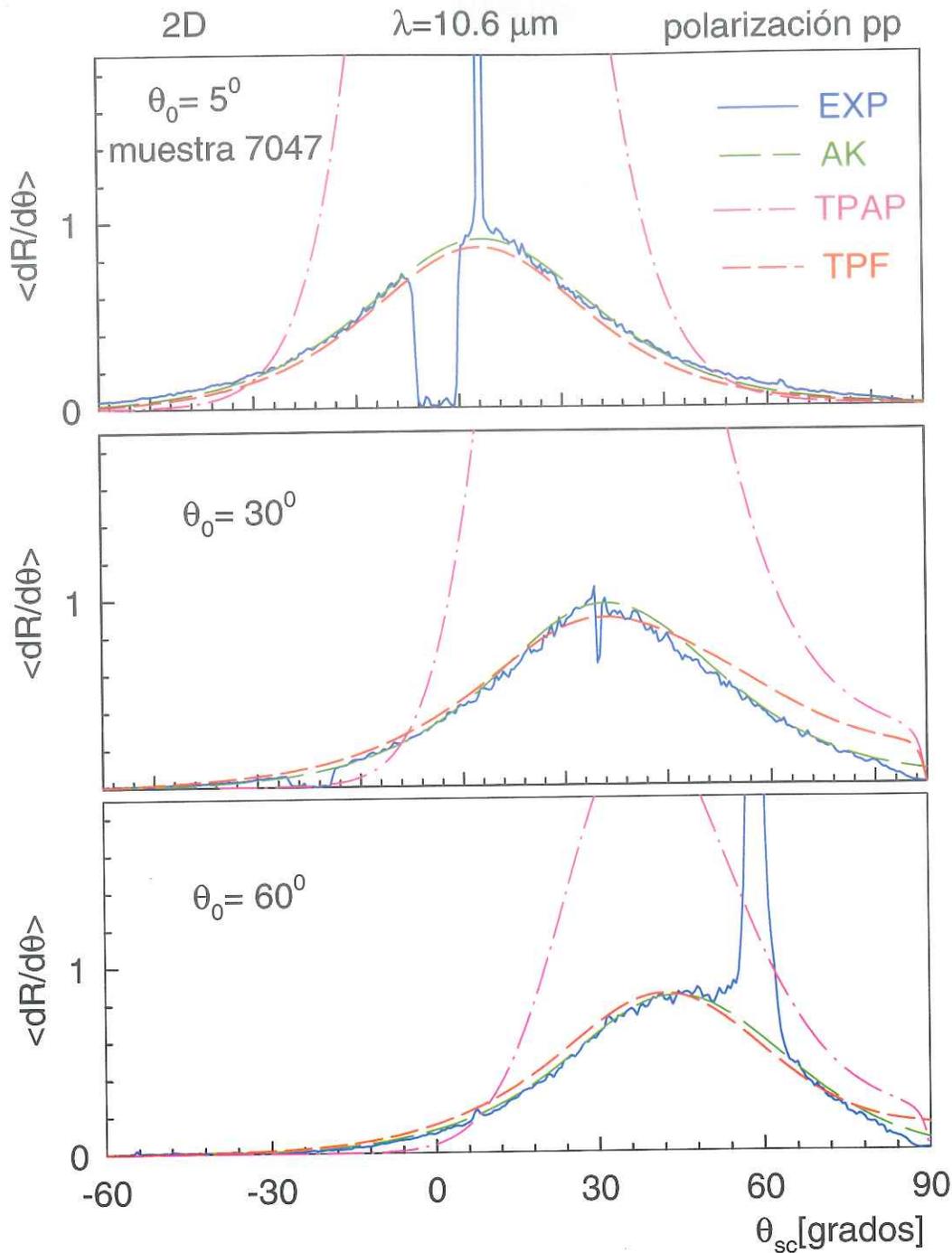


Figura 45: Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra 7047, con $\delta = 1,6\mu\text{m}$ y $= 9,53\mu\text{m}$. La iluminación tiene polarización p y longitud de onda de $10,6\mu\text{m}$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 60° .

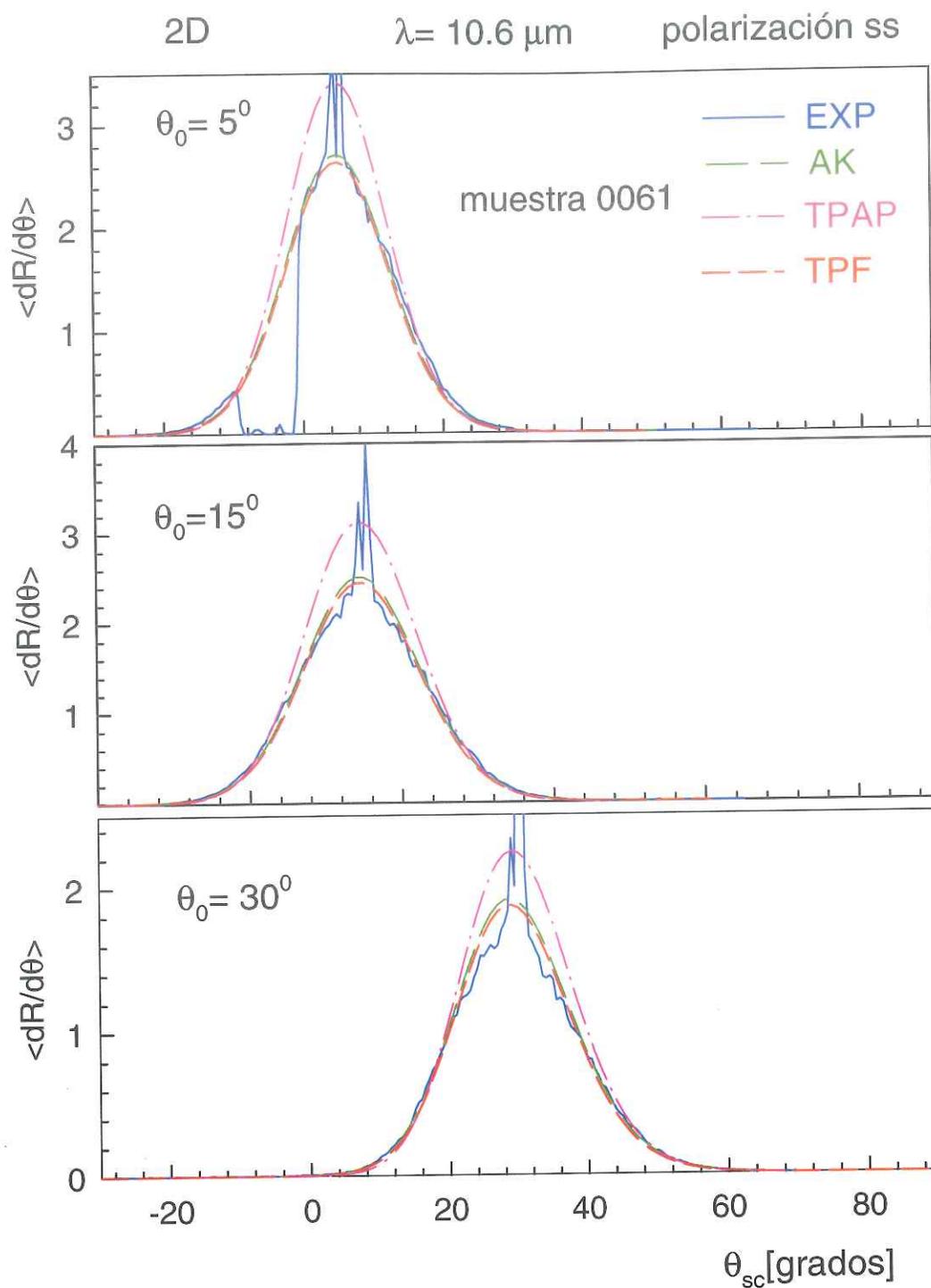


Figura 46: Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra 0061, con $\delta = 0,5\mu\text{m}$ y $a = 19\mu\text{m}$. La iluminación tiene polarización s y longitud de onda de $10,6\mu\text{m}$. Los ángulos de incidencia son 5° , 15° y 30° .

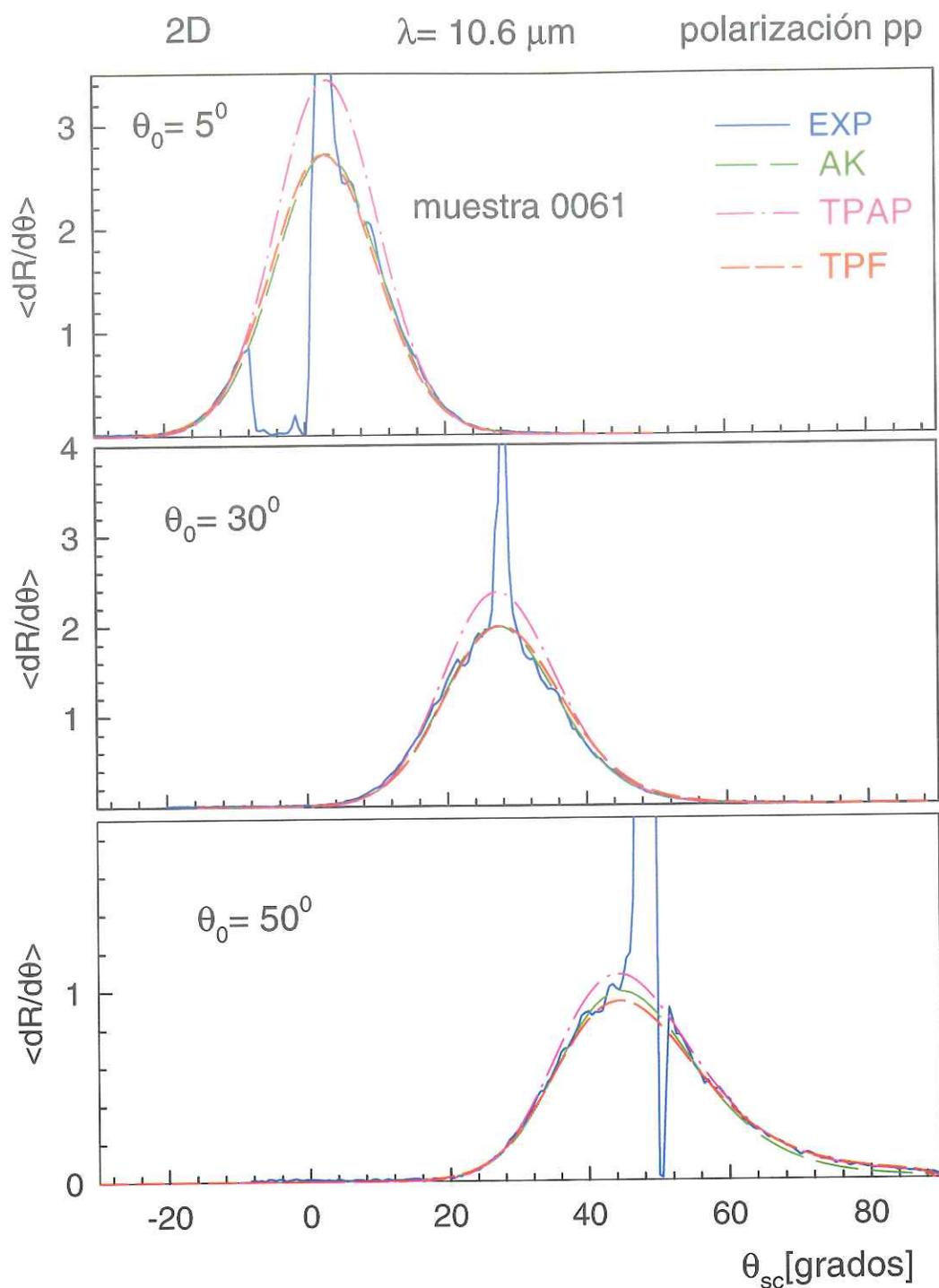


Figura 47: Componente copolarizada del coeficiente diferencial de reflexión como función del ángulo de esparcimiento para la muestra 0061, con $\delta = 0,5\mu\text{m}$ y $a = 19\mu\text{m}$. La iluminación tiene polarización p y longitud de onda de $10,6\mu\text{m}$. Los ángulos de incidencia son 5° , 30° y 50° .

Capítulo VI

Resumen y conclusiones

En este trabajo de tesis se presentaron resultados experimentales de esparcimiento de luz por superficies metálicas rugosas aleatorias tanto bidimensionales como unidimensionales.

Las muestras fueron fabricadas en fotoresina y recubiertas con una película metálica gruesa (de oro), de manera que constituyen una buena aproximación a una superficie metálica infinita.

Los perfiles de las superficies fabricadas constituyen una buena aproximación a procesos aleatorios gaussianos con funciones de correlación gaussianas. Los parámetros que las caracterizan, la longitud de correlación a y la desviación estándar de alturas δ , están en los siguientes intervalos:

- Para superficies unidimensionales: $2.8\mu m < a < 15\mu m$, $0.38\mu m < \delta < 0.75\mu m$.
- Para superficies bidimensionales: $2.1\mu m < a < 19\mu m$, $0.42\mu m < \delta < 1.6\mu m$.

Los datos experimentales se obtuvieron con un esparcímetero que trabaja en la región infrarroja del espectro (de 1 a $12\mu m$ aproximadamente). En particular, los experimentos fueron realizados empleando dos longitudes de onda de iluminación: $\lambda = 5,5\mu m$ y $10,6\mu m$.

Para las muestras presentadas en este trabajo se obtuvieron resultados experimentales de:

- i) La reflectividad como función del ángulo incidente (componente coherente).
- ii) La distribución angular del coeficiente diferencial de reflexión incoherente para diferentes ángulos de incidencia (componente incoherente o difusa).

Los resultados para la parte coherente se compararon con tres teorías de tipo perturbativo y con resultados basados en la aproximación de Kirchhoff. Para el caso de superficies unidimensionales se comparó, además, con resultados de simulaciones numéricas rigurosas del problema.

Los resultados experimentales para la componente difusa fueron comparados con resultados basados en la aproximación de Kirchhoff y con resultados de las teorías perturbativas de amplitudes pequeñas y de fase. Para superficies unidimensionales se comparó también con resultados de simulaciones numéricas del problema.

Las aproximaciones teóricas consideradas presentan tendencias en los acuerdos y desacuerdos con las datos experimentales, que son independientes de si se trata de superficies unidimensionales o bidimensionales.

La comparación de nuestros resultados experimentales con las diferentes aproximaciones presentadas en este trabajo de tesis nos ha permitido llegar a las siguientes

conclusiones:

a) En lo que respecta a los diferentes teorías para la componente coherente, encontramos lo siguiente:

i) Aproximación de Kirchhoff. Para las muestras con longitudes de correlación del orden o mayor que la longitud de onda de iluminación ($a \geq \lambda$), la aproximación de Kirchhoff presenta un muy buen acuerdo con los resultados experimentales.

ii) Teoría perturbativa de fase. Esta teoría presenta un muy buen acuerdo con todos los resultados experimentales obtenidos.

iii) Teoría perturbativa de autoenergía. Los resultados de esta teoría presentan un buen ajuste a los datos experimentales en el caso de polarización p , pero para el caso de polarización s , la teoría resulta inadecuada para explicar las tendencias experimentales.

iv) Teoría perturbativa de amplitudes pequeñas. La teoría resulta adecuada para la componente coherente sólo cuando la desviación estándar de alturas de la muestra es menor que $\lambda/25$. Cuando aumenta el valor de la desviación estándar de alturas, aparece una diferencia de la teoría con los datos experimentales. Esta diferencia es mayor para ángulos de incidencia pequeños. Para ángulos de incidencia mayores a 50° los resultados teóricos y experimentales presentan un buen acuerdo para δs menores que aproximadamente $\lambda/17$.

b) Para las diferentes teorías sobre la componente incoherente encontramos lo siguiente:

i) Teoría perturbativa de amplitudes pequeñas. La teoría perturbativa de amplitudes pequeñas presenta un ajuste razonable sólo con las mediciones realizadas sobre las

muestras de longitud de correlación más corta [muestra 8053 ($a = 3\mu m$) y muestra A ($a = 2,8\mu m$)], cuando se utiliza luz con longitud de onda de $10,6\mu m$; además, el ajuste es mejor en polarización p que en polarización s . Para estas muestras, con polarización p y a esta longitud de onda, el ajuste es mejor que el obtenido con la teoría de perturbación de fase.

ii) Teoría perturbativa de fase. Al igual que para la componente coherente, esta teoría presenta un buen acuerdo con los resultados experimentales. El acuerdo es mejor para polarización s , pues para polarización p se presentan pequeñas discrepancias para ángulos pequeños de esparcimiento.

iii) Aproximación de Kirchhoff. Para las muestras con longitudes de correlación del orden o mayor que la longitud de onda de iluminación ($a \geq \lambda$), la aproximación de Kirchhoff, al igual que para la parte coherente, presenta un muy buen acuerdo con los resultados experimentales.

Literatura citada

Al-Jumaily, G. A., Wilson, S. R., Jungling, K. A., McNeil, J. R., y Bennett, J. M. (1987). Frequency response characteristics of a mechanical surface profilometer. *Optical Engineering*, 26:953-958.

Baylard, C., Greffet, J.-J., y Maradudin, A. A. (1993). Coherent reflection factor of a random rough surface: applications. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10(12):2637-2647.

Beckmann, P. y Spizzichino, A. (1987). *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces*. Artech House., Northwood, Mass, 72 p.

Bennett, H. E. y Porteus, J. O. (1961). Relation between surface roughness and specular reflectance at normal incidence. *J. Opt. Soc. Am.*, 53:123-129.

Bennett, J. M. y Mattsson, L. (1989). *Introduction to Surface Roughness and Scattering*. Optical Society of America.

Born, M. y Wolf, E. (1980). *Principles of Optics*. Pergamon Press, New York, 657-660 p.

Brown, G. C., Celli, V., Coopersmith, M., y Haller, M. (1983). Unitary and reciprocal expansions in the theory of light scattering from a grating. *Surf. Sci.*, 129:507-515.

Brown, G. C., Celli, V., Haller, M., y Marvin, A. (1984). Vector theory of light scattering from a rough surface: unitary and reciprocal expansions. *Surf. Sci.*, 136:381-397.

Church, E. L. y Kong, J. A. (1990). *Effects of non-vanishing tip size in mechanical profile measurement*, en *Optical Testing and Metrology III: Recent Advances in Industrial Optical Inspection*. Editado por C.P. Grover. Proc. SPIE Vol. 1332 , 504-514 p.

Fitzgerald, R. M. y Maradudin, A. A. (1994). A reciprocal phase-perturbation theory for rough-surface scattering. *Waves in Random Media*, 4:275-296.

Fogiel, M. (1997). *Handbook of Mathematical, Scientific, and Engineering formulas, tables, functions, graphs, transforms*. Research and Education Association.

González, M. U., Sánchez-Gil, J. A., González, Y., González, L., y Méndez, E. R. (2000). Polarized laser light scattering applied to surface morphology characterization of epitaxial iii-v semiconductors layers. *J. Vac. Sci. Technol. B*, 18(4):1980-1990.

Goodman, J. W. (1968). *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill, New York.

Goodman, J. W. (1975). *Statistical properties of laser speckle patterns*, en *Topics in applied physics, Volume 9: Laser Speckle and Related Phenomena*. Editado por J. C. Dainty. Springer-Verlag, Berlin, 1-54 p.

- Goodman, J. W. (1985). *Statistical Optics*. Wiley, New York.
- Gray, P. F. (1978). A method of forming optical diffusers of simple known statistical properties. *Optica Acta*, 25(8):765-775.
- Greffet, J. (1992). Theoretical model of the shift of the brewster angle on a rough surface. *Opt. Lett.*, 17:238-240.
- Knotts, M. E., Michel, T. R., y O'Donnell, K. A. (1993). Comparisons of theory and experiment in light scattering from a randomly rough surface. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10(5):928-941.
- Luna, R. E. y Méndez, E. R. (1995). Scattering by one-dimensional random rough metallic surfaces in a conical configuration. *Opt. Lett.*, 20(7):657-659.
- Maradudin, A. A., Luna, R. E., y Méndez, E. R. (1993). The brewster effect for a one-dimensional random surface. *Waves in Random Media*, 3:51-60.
- Maradudin, A. A., Michel, T., McGurn, A. R., y Méndez, E. R. (1990). Enhanced backscattering of light from a random grating. *Annals of Physics*, 203(2):255-307.
- Maradudin, A. A. y Méndez, E. R. (2002). *Scattering by surfaces and phase screens, en Scattering: Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science, Part 2. Editado por R. Pike y P. Sabatier*. Academic Press, San Diego, 873-874 p.

- McGurn, A. R. y Maradudin, A. A. (1996). Perturbation theory results for the diffuse scattering of light from two-dimensional randomly rough metal surfaces. *Waves in Random Media*, 6:251-267.
- Méndez, E. R., García-Guerrero, E. E., Escamilla, H. M., Maradudin, A. A., Leskova, T., y Shchegrov, A. V. (2001). Photofabrication of random achromatic optical diffusers for uniform illumination. *Appl. Opt.*, 40(7):1098-1108.
- Méndez, E. R. y O'Donnell, K. A. (1987). Observation of depolarization and backscattering enhancement in light scattering from gaussian random surfaces. *Opt. Commun.*, 61(2):91-95.
- Nieto-Vesperinas, M. (1991). *Scattering and Diffraction in Physical Optics*. Wiley, New York, 245 p.
- O'Donnell, K. A. (1993). Effects of the finite stylus width in surface contact profilometry. *Appl. Opt.*, 32(25):4922-4928.
- Ogilvy, J. A. (1991). *Theory of Wave Scattering from Random Rough Surfaces*. Adam Hilger, Bristol.
- Petit, R. y Cadilhac, M. (1966). Sur la diffraction d'une onde plane par un réseau infiniment conducteur. *C. R. Acad. Sci. Paris*, B(262):468-471.
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., y Vetterling, W. T. (1986). *Numerical Recipes in FORTRAN 77: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York, 644-649 p.

- Rayleigh, L. (1896). *The Theory of Sound*. Macmillan, 2nd ed., London, 89-96 p.
- Rayleigh, L. (1907). On the dynamical theory of gratings. *Proc. Roy. Soc. (London)*, 79:399-416.
- Rice, S. O. (1951). Reflection of electromagnetic waves from slightly rough surfaces. *Commun. Pure Appl. Math.*, 4:351-378.
- Ruiz Cortés, V., Méndez, E. R., Gu, Z. H., y Maradudin, A. A. (1991). *Light scattering from gold-coated ground glass and chemically etched surfaces*, en *Wave Propagation and Scattering in Varied Media II*. Editado por C. P. Grover. Proc. SPIE, Vol. 1558, 222-232 p.
- Saillard, M. (1992). A characterization tool for dielectric rough surfaces: Brewster's phenomenon. *Waves in Random Media*, 2:67-79.
- Sant, A. J., Dainty, J. C., y Kim, M. J. (1989). Comparison of surface scattering between identical, randomly rough metal and dielectric diffusers. *Opt. Lett.*, 14:1183-1185.
- Shen, J. y Maradudin, A. A. (1980). Multiple scattering of waves from random rough surfaces. *Phys. Rev. B*, 22:4234-4240.
- Sánchez-Gil, J. A., Maradudin, A. A., y Méndez, E. R. (1995). Limits of the validity of three perturbation theories of the coherent scattering of light from a one-dimensional randomly rough dielectric surface. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12:1547-1558.

Thorsos, E. I. (1988). The validity of the kirchhoff approximation for rough scattering using a gaussian roughness spectrum. *Jour. Acoust. Soc. Am.*, 83:78-92.

Thorsos, E. I. (1990). Acoustic scattering from a 'pierson-moskowitz' sea surface. *Jour. Acoust. Soc. Am.*, 88:335-349.

Welford, W. T. (1977). Optical estimation of statistics of surface roughness from light scattering measurements. *Opt. Quantum Electron*, 9:269-287.

Winebrenner, D. P. y Ishimaru, A. (1985). Application of the phase-perturbation technique to randomly rough surfaces. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2:2285-2294.